



Журнал основан в 1936 году Выходит 12 раз в год



## Москва

#### Учредители журнала:

Отделение энергетики, мапиностроения, механики и процессов управления РАН, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН), Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

#### Главный редактор:

Васильев С.Н.

## Заместители главного редактора: Кулешов А.П., Поляк Б.Т., Рубинович Е.Я.

#### Ответственный секретарь:

Хлебников М.В.

#### Редакционный совет:

Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Микрин Е.А., Пархоменко П.П., Пешехонов В.Г., Попков Ю.С., Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

#### Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Васильев В.И., Вишневский В.М., Воронцов К.В., Галяев А.А., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М.,
Крищенко А.П., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М., Михальский А.И., Назин А.В., Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Соболевский А.Н., Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л.,
Хрусталев М.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

> Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65 Тел./факс: (495) 334-87-70 Электронная почта: redacsia@ipu.ru

> > Зав. редакцией Е.А. Мартехина

Москва ООО «ИКЦ «АКАДЕМКНИГА»

© Российская академия наук, 2020

© Редколлегия журнала «Автоматика и телемеханика» (составитель), 2020

# Тематический выпуск (окончание)<sup>1</sup>

### © 2020 г. Д.Н. ГАЙНАНОВ, д-р физ.-мат. наук (damir.gainanov@gmail.com), А.Н. ИГНАТОВ, канд. физ.-мат. наук (alexei.ignatov1@gmail.com), А.В. НАУМОВ, д-р физ.-мат. наук (naumovav@mail.ru), В.А. РАССКАЗОВА, канд. физ.-мат. наук (varvara.rasskazova@mail.ru) (Московский авиационный институт)

## О ЗАДАЧЕ НАЗНАЧЕНИЯ "ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОКНА" НА УЧАСТКАХ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ СЕТИ<sup>2</sup>

Исследуется задача назначения "технологического окна" — времени, в течение которого на некоторых участках железнодорожной сети прекращается движение поездов для производства ремонтно-строительных работ. Железнодорожная сеть представляется в виде неориентированного мультиграфа. Движение по мультиграфу осуществляется при помощи множества бесконфликтных "подниток", каждый элемент которого представляет пятерку из индекса вершины начала движения, индекса вершины конца движения, номера пути, по которому осуществляется движение, времени начала движения и времени конца движения. В статье строится математическая модель осуществления перевозок по железнодорожной сети с учетом времени готовности состава к отправлению и ограничению на время движения состава в пункт назначения. Производится оптимизация времени назначения "технологического окна" и расписания движения составов по мультиграфу на основе решения задач смешанного целочисленного линейного программирования путем минимизации суммарного времени нахождения поездов на железнодорожной сети. Практическая реализация предлагаемого метода решения выполнена с использованием математического пакета ILOG CPLEX. Приводятся результаты численного эксперимента.

*Ключевые слова*: "технологическое окно", железнодорожная сеть, мультиграф, "поднитка", смешанное целочисленное линейное программирование.

**DOI:** 10.31857/S0005231020060013

#### 1. Введение

Задача составления расписаний движения грузовых/пассажирских поездов — одна из наиболее важных задач в области оптимизации функционирования движения железнодорожной сети. Исследования этой задачи можно

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Первые две статьи являются окончанием тематического выпуска, посвященного В.С. Танаеву ( $N_{2}$  5, 2020).

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00046 A).

разделить на несколько направлений: задача формирования бесконфликтного набора ниток (по сути, последовательностей из вершины начала движения, конца движения и соответствующих времен) для последующего составления из этих ниток маршрутов движения поездов [1]; задача поиска маршрутов движения поездов по железнодорожной сети [2-6]; задача назначения локомотивов составам [7–11]. В [2] приведен подробный обзор публикаций, посвященных задаче составления расписаний и поиска маршрутов поездов по железнодорожной сети, на начало XXI в. В [3] решалась задача составления циклического расписания с учетом задержек в исполнении расписания. В [4] рассмотрена задача формирования составов, расписания и маршрутов их движения до станций назначения, чтобы минимизировать суммарное взвешенное время выполнения заказов. Задача в [4] была сформулирована в виде задачи целочисленного линейного программирования. В [5] рассмотрена задача построения расписания двухстороннего движения поездов между двумя станциями, соединенными однопутной железной дорогой с разъездом. Оптимальное расписание строится методом динамического программирования. В [6] решалась задача по оптимизации движения маневровых составов по железнодорожной станции с целью исполнения всех маневровых работ. В [7] задача назначения локомотивов с критерием в форме минимизации затрат была сведена к задаче смешанного целочисленного нелинейного программирования, решение которой найлено приближенно при помощи метода декомпозиции Данцига-Вульфа. В [8] задача подвязки локомотивов была сформулирована в виде задачи целочисленного линейного программирования с критерием в форме минимизации затрат, которая решалась эвристическими методами. В [9] задача назначения локомотивов решалась с учетом случайных задержек в готовности составов и с критерием в форме минимума числа задействованных локомотивов. В [10] рассматривался аналогичный критерий, что и в [9], а поиск решения задачи назначения локомотивов решался приближенно с использованием функции полезности. В [11] ставилась задача о назначении локомотивов составам в самой общей динамической постановке в дискретном времени. Для решения задачи в [11] с использованием соотношений метода динамического программирования предложено решение, приближенное к оптимальному.

В силу того что некоторые участки пути железнодорожной сети должны подлежать срочному/плановому ремонту, конструируемое расписание должно включать в себя "технологические окна" — время, в течение которого прекращается движение поездов по отдельным железнодорожным путям для производства ремонтно-строительных работ [12]. Как правило, технологическое окно имеет 2 основных параметра: перегон, на котором должны выполняться работы, и продолжительность окна. Обычно запрашивают окна определенной продолжительности для конкретного перегона, и при этом требуется, чтобы окно располагалось в заданном временном промежутке или интервале предоставления окна. Например, требуется предоставить технологическое окно на перегон между станциями A и B продолжительностью 4 часа в светлое время суток (с 9 часов утра до 18 часов вечера). При этом на каждые сутки имеется план перевозок, в котором задано, какие перевозки необходимо осуществить в эти сутки. Проблема назначения "технологических

окон" ранее исследовалась в [13–16]. В [13] рассматривалась задача назначения "технологического окна" для однопутной железной дороги с разъездами, для которой все исходное расписание грузовых поездов перестраивается с учетом необходимости проведения "технологических окон" при помощи метаэвристик. В [14, 15] рассматривалась задача назначения "технологического окна" для железнодорожной сети общего вида, в которой поезда могут быть отменены, задержаны или отправлены по другому маршруту с критерием в форме минимизации расходов на осуществление движения. Подходы для назначения "технологического окна", предложенные в [13–15], близки к материалу настоящей статьи, однако в полной мере неприменимы. В отличие от австралийских железных дорог, которым посвящена [13], в сети железных дорог России имеются и двухпутные, и трехпутные участки пути. Помимо этого, в [13] отсутствует формализованная постановка задачи. В [14] "технологическое окно" выбирается из некоторого наперед заданного набора. Время в [15] полагалось дискретным, однако время поиска существенно растет, если временные периоды очень малы, а если периоды времени очень крупны, то можно не осуществить план перевозок. В [16] рассматривалась задача назначения "технологического окна" на станции на основе различных критериев, например поиска промежутка времени длительности не меньше заданной, в который нужно будет перенести минимальное количество пассажирских поездов. Однако в [16] не рассматривался вопрос о том, на какие пути и когда переносить движение пассажирских поездов/маневровых локомотивов. Для станции такой подход оправдан, поскольку сортировочная станция характеризуется большим количеством приемоотправочных путей, а объезд закрытых путей не является длительным. Для перегонов подобный в [16] подход неприменим, поскольку объезд закрытых путей может быть либо невозможен, либо очень длителен по времени.

В настоящей статье исследуется задача назначения "технологического окна" на некоторых участках железнодорожной сети, представляемой неориентированным мультиграфом. Движение поездов между смежными вершинами мультиграфа возможно только в особые промежутки времени, задаваемые множеством бесконфликтных "подниток". Временной интервал для "технологического окна" ищется на основе минимизации суммарного времени нахождения поездов на железнодорожной сети начиная с момента отправления. Данная задача формулируется в виде задачи смешанного целочисленного линейного программирования. В рамках задачи нахождения "технологического окна" предлагаемая математическая модель позволяет не только находить указанный временной интервал, но и маршруты с расписанием следования поездов по железнодорожной сети. Рассматривается пример.

#### 2. Основные обозначения и предположения

Рассмотрим железнодорожную сеть, представляемую неориентированным мультиграфом  $G = \langle V, E \rangle$ , где V — множество узлов (станций, где происходит ветвление железнодорожной сети, станций, у которых количество входящих путей не равно количеству исходящих путей, сортировочных станций и конечных станций), а E — множество ребер (железнодорожных путей), соеди-

няющих данные вершины. Пусть |V| = m. Перенумеровав вершины графа G от единицы до m, составим множество индексов  $V' = \{1, 2, \dots, m\}$ , каждый элемент которого однозначно определяет вершину графа G.

Пусть имеется І поездов, для каждого из которых заданы:

- индекс вершины отправления  $v_i^{\text{отправ}} \in V';$
- индекс вершины назначения v<sub>i</sub><sup>приб</sup> ∈ V';
  время готовности к отправлению t<sub>i</sub><sup>отправ</sup>, которое вычисляется как количество минут от некоторого момента отсчета;
- максимальное количество времени  $d_i$ , в течение которого поезду позволяется находиться в пункте отправления с момента готовности;
- время в пути поезда  $T_i$  в минутах, т.е. максимальное время, в течение которого поезду позволяется находиться на железнодорожной сети.

Движение поездов по перегонам (между вершинами) железнодорожной сети может осуществляться только в определенные промежутки времени. Для описания таких промежутков по аналогии с [9] воспользуемся множеством бесконфликтных "подниток"  $\mathcal{Z}$ , каждый элемент  $z_k$  которого представляет собой пятерку

$$z_k = \left(v_k^{\text{hay}}, v_k^{\text{Koh}}, n_k, t_k^{\text{hay}}, t_k^{\text{Koh}}\right),$$

где  $v_k^{\rm haq} \in V'$ — индекс вершины начала движения,  $v_k^{\rm кон} \in V'$ — индекс вершины конца движения, причем  $v_k^{\rm haq}$  и  $v_k^{\rm кон}$ — индексы смежных вершин в графе $G,\,n_k$ — номер пути, соединяющего вершины с индексами  $v_k^{\rm haq}$  и  $v_k^{\rm кoh},\,t_k^{\rm haq}$ — время начала движения,  $t_k^{\rm koh}$ — время конца движения. Пусть

$$\dim \mathcal{Z} = K.$$

Множество  $\mathcal{Z}$  может быть получено методами из [1]. Пронумеруем элементы множества  $\mathcal{Z}$  от единицы до K. Таким образом, число от единицы до Kоднозначно определяет параметры "поднитки". Зададим также минимальную  $t_{\rm cr}^{\rm Muh}$  и максимальную длительности  $t_{\rm cr}^{\rm Makc}$  стоянки поездов на промежуточных между вершиной отправления и вершиной назначения станциях.

#### 3. Постановка задачи

Пусть для ремонта длительности не меньше заданного параметра  $\Delta$ , который должен быть осуществлен не ранее  $t_1^{\text{нач}}$  и не позднее  $t_2^{\text{кон}}$ , должны быть закрыты некоторые перегоны (дуги) графа G. Поставим задачу отыскания маршрутов и времени следования указанных выше І поездов через железнодорожную сеть, задаваемую графом G, на основе множества "подниток"  $\mathcal{Z}$ с учетом того, что некоторые дуги графа G должны быть закрыты для ремонта длительности не меньше заданного параметра  $\Delta$  на основе различных критериев: с целью минимизации суммарного времени в движении и с целью минимизации суммарного времени нахождения поездов на железнодорожной сети.

Предварительно отметим, что без учета "подниток" в графе G может оказаться бесконечное число способов добраться из одной вершину в другую из-за наличия циклов. В случае переходов по графу G только по "подниткам" количество способов будет конечным, однако может оказаться довольно большим. В этой связи ограничим все возможные маршруты следования поездов из пункта отправления в пункт назначения максимум J "поднитками". В этом случае движение поезда однозначно задается последовательностью "подниток", длины не более J, причем для любых двух соседних "подниток" должно выполняться условие согласованности как по вершине начала/конца движения, так и по времени начала/конца движения. В дальнейшем j-ю "поднитку" в этой последовательности будем называть j-м этапом маршрута следования поезда.

Выделим из множества  $\mathcal{Z}$  номера тех "подниток", у которых ребро, образовываемое первыми тремя компонентами пятерки, подлежит ремонту. На основе этих номеров составим множество  $Z' \subset \{1, 2, ..., K\}$ .

Введем вспомогательные переменные  $\delta_{i,j,k}$ , характеризующие использование *i*-м поездом "поднитки" с номером k на *j*-м этапе маршрута следования по железнодорожной сети,  $i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, k = \overline{1, K}$ . Переменная  $\delta_{i,j,k}$  равна нулю, если *i*-м поездом на *j*-м этапе маршрута "поднитка" с номером k не задействована, и равна единице в обратном случае. Также введем переменные  $\hat{\delta}_{i,j,k}$ , характеризующие, что поезд с номером *i*, используя "поднитку" с номером k, по окончании *j*-го этапа маршрута прибыл в пункт назначения,  $i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, k = \overline{1, K}$ . А именно переменная  $\hat{\delta}_{i,j,k}$  равна единице, если поезд с номером *k*, по окончании *j*-го этапа маршрута прибыл в пункт назначения, *i* =  $\overline{1, I}, j = \overline{1, J}, k = \overline{1, K}$ . А именно переменная  $\hat{\delta}_{i,j,k}$  равна единице, если поезд с номером *i*, используя "поднитку" с номером *k*, по окончании *j*-го этапа маршрута прибыл в пункт назначения, *i* =  $\overline{1, I}, j = \overline{1, J}, k = \overline{1, K}$ . А именно переменная  $\hat{\delta}_{i,j,k}$  равна единице, если поезд с номером *i*, используя "поднитку" с номером *k*, по окончании *j*-го этала маршрута прибыл в пункт назначения, *i* =  $\overline{1, I}, j = \overline{1, J}, k = \overline{1, K}$ . А именно переменная  $\hat{\delta}_{i,j,k}$  равна единице, если поезд с номером *i*, используя "поднитку" с номером *k*, по окончании *j*-го этала маршрута прибыл в пункт назначения, и равна нулю во всех остальных случаях.

Пусть  $t_1$  — время начала "технологического окна" и  $t_2$  — время окончания. Используя указанные переменные, составим множество допустимых стратегий. По определению переменных  $\delta_{i,j,k}$  и  $\hat{\delta}_{i,j,k}$  имеем:

- (3.1)  $\delta_{i,j,k} \in \{0,1\}, \quad i = \overline{1,I}, \quad j = \overline{1,J}, \quad k = \overline{1,K},$
- (3.2)  $\hat{\delta}_{i,j,k} \in \{0,1\}, \quad i = \overline{1,I}, \quad j = \overline{1,J}, \quad k = \overline{1,K}.$

Для того чтобы движение поездов осуществлялось из мест отправления поездов, введем ограничения:

(3.3) 
$$\sum_{k=1}^{K} \delta_{i,1,k} = 1, \quad i = \overline{1, I},$$

(3.4) 
$$\sum_{k=1}^{K} \delta_{i,1,k} v_k^{\text{Hay}} = v_i^{\text{отправ}}, \quad i = \overline{1, I},$$

а для того чтобы отправление произошло не раньше времени начала движения по используемой "поднитке", используем ограничения

(3.5) 
$$\sum_{k=1}^{K} \delta_{i,1,k} t_k^{\text{Harg}} \ge t_i^{\text{отправ}}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Учитывая ограничение на максимальное количество времени, в течение которого поезду позволяется находиться в пункте отправления с момента готовности, имеем:

(3.6) 
$$\sum_{k=1}^{K} \delta_{i,1,k} t_k^{\text{Harg}} \leqslant t_i^{\text{отправ}} + d_i, \quad i = \overline{1, I}.$$

Для того чтобы на каждом этапе (за исключением первого) каждым поездом было занято не более одной "поднитки" введем ограничения

(3.7) 
$$\sum_{k=1}^{K} \delta_{i,j,k} \leqslant 1, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{2, J}.$$

Обеспечим условие стыковки "подниток" по пути следования поезда с номером *i* на *j*-м этапе маршрута с помощью следующих ограничений:

(3.8) 
$$\sum_{k=1}^{K} (\delta_{i,j,k} - \hat{\delta}_{i,j,k}) v_k^{\text{кон}} = \sum_{k=1}^{K} \delta_{i,j+1,k} v_k^{\text{нач}}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J-1}.$$

При этом должно быть выполнено ограничение

(3.9) 
$$\delta_{i,j,k} \ge \hat{\delta}_{i,j,k}, \quad i = \overline{1,I}, \quad j = \overline{1,J}, \quad k = \overline{1,K}.$$

Добавим ограничения на минимально возможную и максимально возможную по длительности остановку поезда на промежуточных между вершиной отправления и вершиной назначения станциях:

(3.10) 
$$\sum_{k=1}^{K} \delta_{i,j+1,k} t_k^{\text{Har}} - \sum_{k=1}^{K} (\delta_{i,j,k} - \hat{\delta}_{i,j,k}) t_k^{\text{KOH}} \ge t_{\text{CT}}^{\text{MUH}} \sum_{k=1}^{K} \delta_{i,j+1,k},$$
$$i = \overline{1, I}, \ j = \overline{1, J-1},$$

(3.11) 
$$\sum_{k=1}^{K} \delta_{i,j+1,k} t_{k}^{\text{Hay}} - \sum_{k=1}^{K} (\delta_{i,j,k} - \hat{\delta}_{i,j,k}) t_{k}^{\text{KOH}} \leqslant t_{\text{CT}}^{\text{MAKC}}, \quad i = \overline{1, I}, \ j = \overline{1, J-1}.$$

Прокомментируем ограничения (3.8)–(3.11). Если поезд с номером *i* прибыл в пункт назначения по окончании  $j_T$ -го этапа,  $j_T \in \{1, 2, ..., J\}$ , то использование других "подниток" для осуществления движения поезда с номером *i* не имеет смысла, что учитывается в рамках предлагаемой модели использованием переменных  $\hat{\delta}_{i,j,k}$ . А именно в рассматриваемом случае окажется, что для некоторого *k* будет выполнено  $\delta_{i,j_T,k} = \hat{\delta}_{i,j_T,k} = 1$  вследствие ограничений (3.9). Это приведет к тому, что для рассматриваемого поезда с номером *i* для  $j = j_T$  левая часть равенства (3.8) обратится в ноль. Так как величины  $v_k^{\text{нач}}$  по определению положительны, то это приведет к тому, что  $\delta_{i,j_T+1,k} = 0$  для любого  $k = \overline{1, K}$ . Это в свою очередь приведет к тому, что  $\forall j \in \{j_T + 2, \ldots, J\}$  и  $\forall k \in \{1, \ldots, K\}$  будет выполнено  $\delta_{i,j,k} = 0$  вследствие того же ограничения (3.8). Соответственно  $\forall j \in \{j_T, \ldots, J\}$  ограничения (3.10)–(3.11) будут выполняться автоматически. Для  $j < j_T$  окажется, что  $\hat{\delta}_{i,j,k} = 0 \ \forall k \in \{1, \ldots, K\}$  и левая часть неравенств (3.10)–(3.11) превратится в разность между временем отправления и временем прибытия на некоторую станцию по окончании j-го этапа.

Для определения этапа маршрута, по окончании которого поезд прибывает в точку назначения, введем ограничения:

(3.12) 
$$\sum_{k=1}^{K} \delta_{i,j,k} v_k^{\text{кон}} \geqslant \sum_{k=1}^{K} \hat{\delta}_{i,j,k} v_i^{\text{приб}}, \quad i = \overline{1, I}, \ j = \overline{1, J},$$

$$(3.13) \quad \sum_{k=1}^{K} \delta_{i,j,k} v_k^{\text{кон}} \leqslant \sum_{k=1}^{K} \hat{\delta}_{i,j,k} v_i^{\text{приб}} + m \left( 1 - \sum_{k=1}^{K} \hat{\delta}_{i,j,k} \right), \quad i = \overline{1, I}, \ j = \overline{1, J},$$

(3.14) 
$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \hat{\delta}_{i,j,k} = 1, \quad i = \overline{1, I}.$$

Ограничение (3.14) гарантирует, что каждый поезд должен прибыть в место назначения на каком-то этапе следования. Из-за ограничений (3.14) ограничения (3.12)–(3.13) будут пассивными всегда за исключением случая, когда для рассматриваемого поезда с номером *i* и каких-то *ĵ* и *k* выполняется  $\delta_{i,\hat{j},\hat{k}}=1$ . В этом случае вследствие ограничения (3.8) окажется, что  $\delta_{i,\hat{j},\hat{k}} = \delta_{i,\hat{j},\hat{k}}$ . Вследствие ограничений (3.12) окажется, что  $v_{\hat{k}}^{\text{кон}} \ge v_i^{\text{приб}}$ , а вследствие ограничения (3.13)  $v_{\hat{k}}^{\text{кон}} \le v_i^{\text{приб}}$ , что приведет к тому, что  $v_{\hat{k}}^{\text{кон}} = v_i^{\text{приб}}$ , а, значит, поезд с номером *i* прибудет в пункт назначения, используя "поднитку" с номером  $\hat{k}$  на  $\hat{j}$ -м этапе.

Для того чтобы каждая "поднитка" была занята не более чем одним поездом, введем ограничения

(3.15) 
$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \delta_{i,j,k} \leqslant 1, \quad k = \overline{1, K}.$$

Для того чтобы "технологическое окно" было длиной не меньше заданного параметра  $\Delta$ , введем ограничение

$$(3.16) t_2 - t_1 \ge \Delta.$$

А для того чтобы "технологическое окно" было в заданный временной промежуток времени, наложим ограничения

$$(3.17) t_1^{\text{Hay}} \leqslant t_1, \quad t_2 \leqslant t_2^{\text{KOH}}.$$

Теперь исключим возможность движения по "подниткам", связанным с дугами графа G, подлежащими ремонту, попадающим в "технологическое окно". Для этого движение по "подниткам", подлежащим ремонту, возможно либо до начала "технологического окна", либо по его окончании. С этой целью введем вспомогательные бинарные переменные  $\gamma_k$  и  $\mathfrak{a}_k, k \in Z'$ . Если момент окончания "поднитки" наступает до начала "технологического окна", то только в этом случае  $\gamma_k = 1, k \in Z'$ . Если момент начала "поднитки" наступает после "технологического окна", то только в этом случае  $\mathfrak{a}_k = 1, k \in Z'$ . Соответственно для того чтобы движение по "поднитке" было разрешено, нужно, чтобы хотя бы одна из переменных  $\gamma_k$  и  $\mathfrak{a}_k$  оказалась равной единице,  $k \in Z'$ . С

(3.18) 
$$\gamma_k t_k^{\text{KOH}} \leqslant t_1, \ k \in Z',$$

(3.19) 
$$t_2 \leqslant \mathfrak{A}_k t_k^{\mathrm{Hay}} + (1 - \mathfrak{A}_k)T, \ k \in Z',$$

где T-некоторый параметр. Например, если расписание строится на сутки, тоTравно 1440 минутам при

(3.20) 
$$\delta_{i,j,k} \leqslant \mathfrak{w}_k + \gamma_k, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}, \quad k \in Z'.$$

Поясним смысл ограничений (3.18)–(3.20). Если хотя бы одна из переменных  $\mathfrak{E}_k$  и  $\gamma_k$  будет равна единице, то ограничения (3.20) выродятся в ограничения (3.1) и движение по "поднитке" с номером k вследствие "технологического окна" не будет закрыто,  $k \in Z'$ . В остальных случаях окажется, что  $\delta_{i,j,k} \leq 0$ , а значит,  $\delta_{i,j,k} = 0$ , что приведет к невозможности движения по "поднитке" с номером  $k, k \in Z'$ .

Для того чтобы время в пути поезда было ограничено наперед заданной величиной  $T_i$ , введем ограничения

(3.21) 
$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \hat{\delta}_{i,j,k} t_k^{\text{кон}} - \sum_{k=1}^{K} \delta_{i,1,k} t_k^{\text{нач}} \leqslant T_i, \quad i = \overline{1, I}.$$

## 4. Различные критерии для формирования плана перевозок и назначения "технологического окна"

Рассмотрим различные критерии для формирования плана перевозок и назначения "технологического окна".

Вначале рассмотрим задачу минимизация суммарного времени нахождения поездов на железнодорожной сети

$$(4.1) \quad \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \hat{\delta}_{i,j,k} t_{k}^{\text{кон}} - \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} \delta_{i,1,k} t_{k}^{\text{нач}} \rightarrow \\ \rightarrow \underset{t_{1},t_{2},\delta_{i,j,k},\hat{\delta}_{i,j,k},\gamma_{k'},\mathfrak{B}_{k'},i=\overline{1,I},j=\overline{1,J},k=\overline{1,K},k'\in Z'}{\min}$$

с ограничениями (3.1)-(3.21).

Решение задачи (4.1) с ограничениями (3.1)–(3.21), т.е. задачи составления расписания движения поездов по железнодорожной сети с учетом наличия

"технологического окна", может не существовать вследствие недостаточности множества "подниток". Решение задачи (4.1) с ограничениями (3.1)–(3.21) также зависит от выбора параметра J. В частности, если выбрать параметр J, равный единице, то решение задачи (4.1) с ограничениями (3.1)–(3.21) может существовать, только если пункт отправления и место назначения — смежные вершины графа G. При этом если выбрать J очень большим, то количество бинарных переменных в задаче (4.1) с ограничениями (3.1)–(3.21) станет огромным, что приведет к долгому времени поиска решения этой задачи в любом математическом пакете.

Еще одним путем нахождения "технологического окна" является минимизация времени движения поездов

(4.2) 
$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{KOH}} - t_k^{\text{HAY}}) \to \min_{t_1, t_2, \delta_{i,j,k}, \hat{\delta}_{i,j,k}, \gamma_{k'}, \mathfrak{w}_{k'}, i=\overline{1, I}, j=\overline{1, J}, k=\overline{1, K}, k' \in Z'}$$

с ограничениями (3.1)–(3.21).

Отличие критерия (4.1) от критерия (4.2) в том, что последний, по сути, минимизирует количество топлива и электроэнергии, которое придется затратить при перевозке грузов, а первый критерий минимизирует суммарное время, которое локомотивы и вагоны проведут на железнодорожной сети с момента начала движения, таким образом позволяя им высвободиться раньше для исполнения других перевозок.

Возможно как отдельное, так и совместное применение предложенных критериев. Пусть решение задачи (4.1) с ограничениями (3.1)–(3.21) существует, а оптимальное значение критерия равно  $T^*$ . Далее следует решить задачу:

(4.3) 
$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \delta_{i,j,k} (t_{k}^{\text{KOH}} - t_{k}^{\text{Hav}}) \to \min_{t_{1}, t_{2}, \delta_{i,j,k}, \hat{\delta}_{i,j,k}, \gamma_{k'}, \mathfrak{w}_{k'}, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, k = \overline{1, K}, k' \in \mathbb{Z}'}$$

с ограничениями (3.1)-(3.21) и

(4.4) 
$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \hat{\delta}_{i,j,k} t_{k}^{\text{кон}} - \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} \delta_{i,1,k} t_{k}^{\text{нач}} = T^{*}.$$

Пусть решение в задаче (4.3) с ограничениями (3.1)–(3.21) и (4.4) существует, а оптимальное значение критерия равно  $\tau^*$ . Возможен случай, когда решение задачи (4.3) с ограничениями (3.1)–(3.21), (4.4) неединственно. В этой связи выберем наибольшее по длительности "технологическое окно", при котором суммарное время движения составит  $\tau^*$ , а суммарное время нахождения на железнодорожной сети составит  $T^*$ . Для этого нужно решить задачу

(4.5) 
$$t_2 - t_1 \to \max_{t_1, t_2, \delta_{i,j,k}, \hat{\delta}_{i,j,k}, \gamma_{k'}, \mathfrak{B}_{k'}, i = \overline{1, J}, j = \overline{1, J}, k = \overline{1, K}, k' \in Z'}$$

с ограничениями (3.1)–(3.21), (4.4) и

(4.6) 
$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон}} - t_k^{\text{нач}}) = \tau^*.$$

#### 5. Пример

Рассмотрим модельный пример. Пусть мультиграф железнодорожной сети *G* имеет вид, представленный на рисунке.

Пусть для некоторого дня имеется следующее множество "подниток"  $\mathcal{Z}$ , см. табл. 1.

Пусть имеется 12 поездов, которые нужно переместить по железнодорожной сети из пунктов отправления в соответствующие пункты назначения в рассматриваемые сутки. Данные об этих поездах приведем в табл. 2.

Пусть также  $t_1^{\text{нач}} = 0$ ,  $t_2^{\text{кон}} = 1440$ ,  $t_{\text{ст}}^{\text{мин}} = 0$ ,  $t_{\text{ст}}^{\text{макс}} = 1440$ . Такие значения параметров  $t_1^{\text{нач}}$ ,  $t_2^{\text{кон}}$ ,  $t_{\text{ст}}^{\text{мин}}$ ,  $t_{\text{ст}}^{\text{макс}}$  означают, что "технологическое окно" можно установить в любое время суток, а остановки на станциях не ограничены по длительности. Пусть также  $d_i = 500$ ,  $i = \overline{1, 12}$ .

Проанализируем маршруты движения в зависимости от различных значений параметра  $\Delta$  на основе решения задачи (4.5) с ограничениями (3.1)–(3.21), (4.4), (4.6) в случае установления "технологического окна" на пути № 1 между вершиной с № 4 и вершиной с № 5. Предварительно отметим, что вследствие "технологического окна" могут быть исключены из маршрутов следования поезда "поднитки" с номерами 37–42, т.е.  $Z' = \{37, 38, 39, 40, 41, 42\}.$ 

Случай  $\Delta = 0$  соответствует задаче составления расписания и маршрутов движения поездов без учета "технологического окна", поскольку при  $\Delta = 0$  можно положить, к примеру,  $t_1 = t_2 = 0$ , и тогда для каждой "поднитки" будет выполнено  $\mathfrak{w}_k = 1$ , что приведет к тому, что ограничения (3.20) выродятся в ограничения (3.1). Случай  $\Delta = 1440$  соответствует ситуации, когда рассматриваемый набор ребер/ребро закрывается на сутки. Случаи  $\Delta = 600$  и  $\Delta = 1100$  — промежуточные.



Рисунок.

Таблица 1. Множество "подниток" Z

k	$z_k$	k	$z_k$
1	(1, 2, 1, 480, 500)	26	(3, 5, 1, 975, 1005)
2	(1, 2, 1, 730, 750)	27	(3, 5, 1, 1170, 1200)
3	(1, 2, 1, 920, 940)	28	(4, 2, 2, 60, 100)
4	(1, 2, 1, 1200, 1220)	29	(4, 2, 2, 340, 380)
5	(2, 1, 2, 360, 380)	30	(4, 2, 2, 600, 640)
6	(2, 1, 2, 690, 710)	31	(4, 2, 2, 810, 850)
7	(2, 1, 2, 1035, 1055)	32	(4, 2, 2, 900, 940)
8	(2, 3, 1, 300, 340)	33	(4, 2, 2, 1260, 1300)
9	(2, 3, 1, 560, 600)	34	(4, 3, 2, 690, 750)
10	(2, 3, 1, 1060, 1100)	35	(4, 3, 2, 930, 990)
11	(2, 3, 1, 1260, 1300)	36	(4, 3, 2, 1320, 1380)
12	(2, 4, 1, 240, 280)	37	(4, 5, 1, 360, 390)
13	(2, 4, 1, 670, 710)	38	(4, 5, 1, 900, 930)
14	(2, 4, 1, 920, 960)	39	(4, 5, 1, 1350, 1380)
15	(2, 4, 1, 1140, 1180)	40	(4, 5, 1, 1120, 1150)
16	(2, 4, 1, 1275, 1315)	41	(4, 5, 1, 555, 585)
17	(3, 2, 2, 120, 160)	42	(4, 5, 1, 1260, 1290)
18	(3, 2, 2, 240, 280)	43	(5, 3, 2, 480, 510)
19	(3, 2, 2, 720, 760)	44	(5, 3, 2, 805, 835)
20	(3, 2, 2, 1320, 1360)	45	(5, 3, 2, 1030, 1060)
21	(3, 4, 1, 540, 600)	46	(5, 3, 2, 1380, 1410)
22	(3, 4, 1, 1260, 1320)	47	(5, 4, 2, 360, 390)
23	(3, 4, 1, 1080, 1140)	48	(5, 4, 2, 660, 690)
24	(3, 5, 1, 270, 300)	49	(5, 4, 2, 860, 890)
25	(3, 5, 1, 740, 770)	50	(5, 4, 2, 1200, 1230)

Таблица 2. Информация о поездах

i	$v_i^{\text{отправ}}$	$v_i^{\mathrm{приб}}$	$t_i^{\text{отправ}}$	$T_i$
1	1	4	720	300
2	1	5	30	1170
3	2	5	240	910
4	2	5	300	470
5	2	5	480	525
6	3	5	120	180
7	4	1	480	840
8	5	1	60	650
9	5	2	780	580
10	5	2	840	540
11	5	2	1200	180
12	5	3	1020	120

По результатам численных экспериментов было выяснено, что назначение "технологического окна" (случай  $\Delta = 600$ ) в сравнении с задачей построения расписания (случай  $\Delta = 0$ ) приводит к тому, что для поездов №№ 2, 3, 4, 9, 10 меняются используемые "поднитки". Однако если в случае с поездами

**Таблица 3**. Оптимальные маршруты (наборы номеров "подниток") движения поездов для различных значений параметра  $\Delta$  при J = 5

$\Delta i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	$4,\!16$	$1,\!9,\!25$	$12,\!37$	$13,\!38$	$14,\!40$	24	31,7	$43,\!21,\!30,\!6$	$45,\!20$	$49,\!32$	$50,\!33$	46
600	$4,\!16$	$1,\!10,\!27$	$12,\!37$	9,25	14,40	24	31,7	$43,\!21,\!30,\!6$	49,32	45,20	50,33	46
1100	$4,\!16$	1,9,26	$13,\!35,\!27$	8,25	$14,\!40$	24	31,7	$43,\!21,\!30,\!6$	$49,\!32$	$45,\!20$	50,33	46
1440	Нет решения											

Таблица 4. Результаты работы предлагаемого алгоритма

$\Delta$	$t_1^*$	$t_2^*$	$T^*$		
0	390	900	2090		
600	390	1120	2470		
1100	0	1120	2915		
1440	Нет решения				

№№ 9, 10 это связано с тем, что замена используемых "подниток" не влияет на значение критериев (4.1) и (4.3), то в случае поездов №№ 2, 3, 4 это связано с наличием "технологического окна", которое, в частности, не позволяет использовать "поднитку" с № 38 (случай  $\Delta = 600$ ) и "поднитки" №№ 37, 38 (случай  $\Delta = 1100$ ). Причем в случае  $\Delta = 1100$  поезд № 3 должен дополнительно посетить вершину с № 3, что не предполагалось (случай  $\Delta = 0$  и  $\Delta = 600$ ). В случае  $\Delta = 1440$  оказывается невозможным найти пути объезда и исполнить все расписание.

Теперь проанализируем оптимальные значения критерия в задаче (4.5) с ограничениями (3.1)–(3.21), (4.4), (4.6): время поиска оптимального решения пакетом CPLEX и оптимальный промежуток времени для назначения "технологического окна" для различных значений параметра  $\Delta$  при J = 5.

Как следует из результатов численного эксперимента, ожидаемо с ростом параметра  $\Delta$  увеличивается суммарное время нахождения поездов на железнодорожной сети начиная с момента отправления.

Результаты численного эксперимента были получены с помощью математического пакета ILOG CPLEX на персональном компьютере (Intel Core i5 4690, 3.5 GHz, 8 GB DDR3 RAM).

## 6. Заключение

В настоящей статье рассмотрена задача назначения "технологического окна" на некоторых участках железнодорожной сети. Железнодорожная сеть представлялась неориентированным мультиграфом, движение по которому могло осуществляться только в определенные промежутки времени — с использованием "подниток". Оптимизационными переменными являлись время начала и конца "технологического окна", а также время и маршруты движения поездов по железнодорожной сети. Главным критерием являлась минимизация суммарного времени нахождения поездов на железнодорожной сети с момента начала движения. Задача назначения "технологического окна" была сформулирована в виде трех задач смешанного целочисленного линейного программирования. На примере было показано, что с изменением длительности "технологического окна" меняются как маршруты движения поездов по сети, так и оптимальное значение суммарного времени нахождения поездов на железнодорожной сети с момента начала движения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гайнанов Д.Н., Коныгин А.В., Рассказова В.А. Моделирование грузовых железнодорожных перевозок методами теории графов и комбинаторной оптимизации // АнТ. 2016. № 11. С. 60–79. *Gainanov D.N., Konyqin A.V., Rasskazova V.A.* Modelling Railway Freight Traffic

Gainanov D.N., Konygin A.V., Rasskazova V.A. Modelling Railway Freight Traffic Using the Methods of Graph Theory and Combinatorial Optimization // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 11. P. 1928–1943.

- Cordeau J.-F. Toth P., Vigo D. A Survey of Optimization Models for Train Routing and Scheduling // Transport. Sci. 1998. V. 32. No. 4. P. 380–404.
- 3. Kroon L., Maroti G., et al. Stochastic Improvement of Cyclic Railway Timetables // Transportation Research Part B: Methodological. 2008. V. 42. No. 6 P. 553–570.
- 4. Лазарев А.А., Мусатова Е.Г. Целочисленные постановки задачи формирования железнодорожных составов и расписания их движения // Управление большими системами. 2012. № 38. С. 161–169.
- 5. Зиндер Я.А., Лазарев А.А. и др. Построение расписаний двухстороннего движения на однопутной железной дороге с разъездом // АиТ. 2018. № 3. С. 144–166. Zinder Y., Lazarev A.A., et al. Scheduling the Two-Way Traffic on a Single-Track Railway with a Siding // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 3. P. 506–523.
- 6. Босов А.В., Игнатов А.Н., Наумов А.В. Модель передвижения поездов и маневровых локомотивов на железнодорожной станции в приложении к оценке и анализу вероятности бокового столкновения // Информатика и ее применения. 2018. Т. 12. № 3. С. 107–114.
- Ziarati K., Soumis F., et al. Locomotive Assignment with Heterogeneous Consists at CN North America // Eur. J. Oper. Res. 1997. No. 97. P. 281–292.
- Ahuja R. K., Liu J., et al. Solving Real-Life Locomotive-Scheduling Problems // Transport. Sci. 2005. V. 39. No. 4. P. 503–517.
- 9. Буянов М.В., Иванов С.В., Кибзун А.И., Наумов А.В. Развитие математической модели управления грузоперевозками на участке железнодорожной сети с учетом случайных факторов // Информатика и ее применения. 2017. Т. 11. № 4. С. 85–93.
- Буянов М.В., Наумов А.В. Оптимизация функционирования подвижного состава при организации грузовых перевозок на участке железнодорожной сети // АнТ. 2018. № 9. С. 143–158.
   Выхода М.К., Марков А.К., Optimizing the Optimizing of Balling Stack in Optimizing Allocation of Balling Stack in Optimizing Stack in Optimizing Allocation of Balling Stack in Optimizing Allocation of Balling Stack in Optimizing Stack in Optimizin

Buyanov M.V., Naumov A.V. Optimizing the Operation of Rolling Stock in Organizing Cargo Transportation at a Railway Network Segment // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 9. P. 1661–1672.

- Powell W.B., Simao H.P., Bouzaiene-Ayari B. Approximate dynamic programming in transportation and logistics: a unified framework // EURO J. Transp. Logist. 2012. No. 1. P. 237–284.
- 12. Правила технической эксплуатации железных дорог Российской Федерации в редакции от 09.02.2018.
- Albrecht A.R., Panton D.M., Lee D.H. Rescheduling Rail Networks with Maintenance Disruptions Using Problem Space Search // Comput. Oper. Res. 2013. V. 40. No. 3. P. 703–712.

- Forsgren M., Aronsson M., Gestrelius S. Maintaining Tracks and Traffic Flow at the Same Time // J. Rail Transport Planning & Management. 2013. V. 3. No. 3. P. 111–123.
- Liden T., Joborn M. An Optimization Model for Integrated Planning of Railway Traffic and Network Maintenance // Transportation Research Part C: Emerging Technologies. 2017. No. 74. P. 327–347.
- Ignatov A.N., Naumov A.V. On time selection for track possession assignment at the railway station // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mat. Model. Progr. 2019. V. 12. No. 3. P. 5–16.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 16.07.2019 После доработки 24.10.2019 Принята к публикации 28.11.2019

#### © 2020 г. В.Н. БУРКОВ, д-р техн. наук (vlab17@bk.ru), И.В. БУРКОВА д-р техн. наук (irbur27@gmail.com) (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова, Москва), В.Г. ЗАСКАНОВ, д-р техн. наук (zaskanov@mail.ru) (Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева)

## МЕТОД СЕТЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ<sup>1</sup>

Рассматривается применение метода сетевого программирования к решению дискретной задачи минимизации стоимости проекта при заданной продолжительности его реализации. Описаны два базовых алгоритма решения задачи для случаев независимых и последовательных работ. Более сложные случаи (сеть типа дерева и агрегируемая сеть) решаются на основе последовательного применения базовых алгоритмов. Для сети «сборка с комплектующими» предлагается метод, который состоит в определении множества работ, фиксация продолжительности которых приводит к одному из рассмотренных случаев (либо сеть – дерево, либо – агрегируемая сеть).

Рассматриваются все возможные варианты фиксации продолжительностей работ выделенного множества и решение задачи для каждого варианта. Из всех вариантов выбирается лучший. Рассмотрен также случай произвольного сетевого графика.

*Ключевые слова*: продолжительность работ, стоимость работ, сетевой график дерево, агрегируемая сеть, метод сетевого программирования.

**DOI:** 10.31857/S0005231020060025

#### 1. Введение

Задачи календарного планирования относятся, как правило, к сложным (NP-трудным) задачам дискретной оптимизации ([1–8] и др.). В статье рассматривается так называемая задача оптимизации сети по стоимости. Она заключается в определении стоимости выполнения работ проекта так, чтобы проект был выполнен за определенное время, а суммарная стоимость работ была минимальной. При этом для каждой работы имеется конечное число вариантов ее выполнения, отличающихся величиной стоимости и величиной продолжительности выполнения. В статье рассматривается случай, когда для каждой работы имеется два варианта. Однако предложенные алгоритмы несложно обобщить и на случаи, когда для каждой работы имеется более двух вариантов.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-07-01258) и Российского научного фонда (проект № 16-19-10609).

#### 2. Постановка задачи

Рассмотрим сетевой график, содержащий n работ (работы изображаются вершинами). Обозначим через  $\tau_i$  – продолжительность i-й работы. Для каждой работы i задана величина  $\Delta_i$  возможного сокращения ее продолжительности и затраты  $s_i$  на это сокращение. Обозначим  $T_k$  – продолжительность проекта (длина критического пути) при продолжительностях работ  $\tau_i$ , T – требуемая продолжительность проекта ( $Q = T_k - T$  – требуемое сокращение). Пусть  $x_i = 1$ , если продолжительность работы i сокращается,  $x_i = 0$  в противном случае.

 $\exists a \, d \, a \, q \, a \, 1$ . Определить  $\{x_i; i = \overline{1, n}\}$  так, чтобы продолжительность проекта была не более T, а суммарные затраты на ее уменьшение были минимальными:

(1) 
$$S(x) = \sum_{i} s_{i} x_{i} \to \min$$

Будем рассматривать пять вариантов сетевых графиков.

## 2.1. Независимые работы

В этом случае задача 1 принимает вид: минимизировать (1) при ограничениях

(2) 
$$x_i \Delta_i \ge \tau_i - T, \quad i = \overline{1, n}$$

Задача легко решается. Оптимальное решение имеет вид

(3) 
$$x_i = \begin{cases} 0, \text{ если } \tau_i \leq T, \\ 1, \text{ если } \tau_i > T, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}.$$

Этот алгоритм назовем базовым алгоритмом А. В дальнейшем потребуется его параметрическая реализация, т.е. параметрическая зависимость минимальных затрат S(Y) от продолжительности проекта Y, где величина Y меняется в пределах

(4) 
$$\max_{i} \left( \tau_{i} - \Delta_{i} \right) \leq Y \leq \max_{i} \tau_{i}.$$

Пример 1. Имеются itcnm работ, данные о которых приведены в табл. 1.

Таблица 1						
i	1	2	3	4	5	6
$ au_i$	5	9	8	10	6	7
$\Delta_i$	2	5	4	7	2	3
$s_i$	3	7	6	12	4	5

Вычисляем 4  $\leq Y \leq 10$ . Таблица вариантов имеет вид табл. 2.

Таблица 2

Вариант	0	1	2	3	4	5	6
Y	10	9	8	7	6	5	4
$S\left(Y\right)$	0	12	19	25	30	34	37

В этом случае ограничение задачи 1 принимает вид

(5) 
$$\sum_{i} x_i \Delta_i \ge Q.$$

Этот и последующие случаи решаются методом сетевого программирования, который будет рассмотрен ниже.

Получение параметрической зависимости S(Y) для последовательности работ будем называть базовым алгоритмом В.

## 2.3. Сетевой график-дерево

Сетевой график типа дерева, как правило, соответствует процессам сборки сложных изделий (см. рис. 1), где работы обозначены номерами 1–5.



Рис. 1.

#### 2.4. Агрегируемый сетевой график

Дадим определения множеств параллельных и последовательных работ.

Определение 1. Параллельными называется множество работ, для которых множество предшествующих работ одно и то же и множество последующих работ одно и то же.

Определение 2. Последовательным называется множество работ, образующих путь такой, что полустепени исхода и захода вершин пути (за исключением начальной и конечной вершины) равны единице.

Агрегируемым называется сетевой график, который путем замены последовательных и (или) параллельных работ одной работой можно свести к одной работе (рис. 2).



Рис. 2.

На рис. 2 две работы 2 и 3 можно заменить одной работой (2, 3) (эти работы независимые, т.е. параллельные). Затем последовательность работ  $1 \rightarrow (2,3) \rightarrow 4 \rightarrow 5$  можно также заменить одной работой.

## 2.5. Сетевой график «сборка с комплектацией»

Мы не будем рассматривать общий случай производственного сетевого графика, а ограничимся сетевым графиком типа «сборка с комплектацией» (рис. 3). К дереву сборки добавляются работы 1, 2 и 3, производящие необходимые комплекты для сборки.



Рис. 3.

## 3. Метод сетевого программирования

Суть метода сетевого программирования состоит в том, что целевую функцию и ограничение в задаче календарного планирования можно представить в виде суперпозиции более простых функций. Такое представление удобно изображать в виде сети, на нижнем уровне которой находятся вершины, соответствующие переменным (входы сети), промежуточные вершины соответствуют функциям, входящим в суперпозицию, а конечная вершина (выход) соответствует исходной функции (сетевое представление).

Метод применим, если и целевая функция, и ограничение имеют одинаковые сетевые представления. Если сетевое представление имеет вид дерева, то метод дает оптимальное решение задачи. В противном случае получаем верхнюю (нижнюю) оценку, которую можно использовать в методе ветвей и границ [9]. Метод сетевого программирования подробно изложен в [9]. Поэтому дадим иллюстрацию его работы на примере последовательности работ (базовый алгоритм В).

Пример 2. Проект состоит из четырех последовательных работ, данные о которых приведены в табл. 3.

raomiqu o						
i	1	2	3	4		
$ au_i$	5	6	9	8		
$\Delta_i$	2	3	5	4		
$s_i$	7	8	4	6		

Таблица 3



Рис. 4.

Пусть T = 20, Q = 28 - 20 = 8.

Задача имеет вид

 $7x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 6x_4 \rightarrow \min$ 

при ограничении

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \ge 8.$$

Возьмем структуру сетевого представления, приведенную на рис. 4. 1 шаг. Рассматриваем работы 1 и 2. Решение приведено в табл. 4.

Таблица 4					
1	8; 3	15; 5			
0	0; 0	7; 2			
$\frac{2}{1}$	0	1			

Первое число в клетке – это затраты, а второе – сокращение продолжительности. Результаты сведены в табл. 5.

таолица э. Объединенная работа т						
Вариант	0	1	2	3		
Затраты	0	7	8	15		
Сокращение продолжительности	0	2	3	5		

Таблица 5. Объединенная работа I

2 шаг. Рассматриваем работы 3 и 4. Решение приведено в табл. 6.

Таблица 6					
1	6; 4	10; 9			
0	0; 0	4; 5			
4 3	0	1			

Результат сведены в табл. 7. Вариант 2 (затраты равны 6, сокращение равно 4) исключен, поскольку он доминируется вариантом 1 (затраты равны 4, сокращение равно 5).

Таблица 7. Объединенная работа II

Вариант	0	1	2
Затраты	0	4	10
Сокращение продолжительности	0	5	9

3 шаг. Рассматриваем объединенные работы I и II. Решение приведено в табл. 8.

Таблица 8							
2	10; 9	17; 11	18; 12	25; 14			
1	4; 5	11; 7	12; 8	19; 10			
0	0; 0	7; 2	8; 3	15; 5			
III	0	1	2	3			

Результаты сведены в табл. 9. В этой таблице варианты упорядочены по возрастанию затрат. При этом оставлены только Парето-оптимальные варианты (варианты (7; 2), (8 3), (11, 7), (12, 8), (19, 10), (15, 5) исключены).

Таблица 9. Объединенная работа III

Вариант	0	1	2	3	4	5
Затраты	0	4	10	17	18	25
Сокращение продолжительности	0	5	9	11	12	14

В результате получили параметрическую таблицу S(Y). Для  $Y \ge Q = 8$ имеем: Y = 9, S(9) = 10, что соответствует сокращению продолжительностей работ 3 и 4. Фактически рассматривается случай последовательных работ, т.е. базовый алгоритм В. Далее покажем, как на основе базовых алгоритмов А и В решать задачу для вариантов «сетевой график-дерево», «агрегируемый сетевой график» и «сетевой график «сборка с комплектацией».

#### 4. Сетевой график-дерево

Если сетевой график является деревом, то сетевое представление также является деревом. На рис. 5 приведено сетевое представление сетевого графика, рис. 1. На нижнем уровне расположены вершины, соответствующие работам. В остальных вершинах указаны базовые алгоритмы A и B, применяемые для решения соответствующих задач.



Рис. 5.

Пример 3. Данные о работах приведены в таблице 10.

Таблица 10							
i	1	2	3	4	5		
$ au_i$	6	5	8	6	9		
$\Delta_i$	3	2	4	4	5		
$s_i$	7	5	6	5	8		

Примем T = 13; Q = 21 - 13 = 8.

1 шаг. Рассматриваем работы 1 и 2, применяя базовый алгоритм А. Решение приведено в табл. 11.

#### Таблица 11

Вариант	0	1	2
Затраты	0	7	12
Сокращение продолжительности	0	1	3

2 шаг. Рассматриваем объединенную работу (1, 2) и работу 4. Применяем базовый алгоритм В. Решение приведено в табл. 12.

#### Таблица 12

Вариант	0	1	2	3
Затраты	0	5	12	7
Сокращение продолжительности	0	4	5	7

*3 шаг.* Рассматриваем объединенную работу (1, 2, 4) и работу 3. Применяем базовый алгоритм А. Решение приведено в табл. 13.

#### Таблица 13

Вариант	0	1	2	3
Затраты	0	5	18	23
Сокращение продолжительности	0	4	5	7

4 шаг. Рассматриваем объединенную работу (1, 2, 4, 3) и работу 5. Применяем базовый алгоритм В. Решение приведено в табл. 14.

#### Таблица 14

Вариант	0	1	2	3
Затраты	0	5	8	13
Сокращение продолжительности	0	4	5	9

Множество сокращаемых работ определяется алгоритмом обратного хода аналогично методу динамического программирования.

Оптимальному решению соответствует вариант 3 с затратами 13. При этом варианте сокращается продолжительность работ 4 и 5.

## 5. Агрегируемый сетевой график

Агрегируемые сети также имеют сетевое представление в виде дерева. Пример сетевого представления для агрегируемой сети рис. 2 приведен на рис. 6. Как и в случае дерева, решение задачи состоит в последовательном применении базовых алгоритмов AuB согласно структуре сетевого представления.



Рис. 6.

 $\Pi p \, u \, m \, e \, p \, \, 4.$ Возьмем данные примера 3 (табл. 10). Примем  $T=21; \, Q=29-21=8.$ 

1 шаг. Рассматриваем работы 2 и 3, применяя базовый алгоритм А. Решение приведено в табл. 15.

Таблица 15			
Вариант	0	1	2
Затраты	0	5	11
Сокращение продолжительности	0	2	4

2 шаг. Рассматриваем объединенную работу (2, 3) и работы 1, 4, 5, применяя базовый алгоритм В.

2.1. Рассматриваем работы (2, 3) и 1. Решение приведено в табл. 16.

Таолица 16						
Вариант	0	1	2	3	4	5
Затраты	0	5	7	11	12	18
Сокращение продолжительности	0	2	3	4	5	7

2.2. Рассматриваем объединенную работу  $(\overline{1, 3})$  и работу 4. Решение приведено в табл. 17.

Таблица 17

10

Вариант	0	1	2	3	4
Затраты	0	5	10	12	16
Сокращение продолжительности	0	4	6	7	8

2.3. Рассматриваем объединенную работу  $(\overline{1, 4})$  и работу 5. Решение приведено в табл. 18.

таолица 18						
Вариант	0	1	2	3	4	5
Затраты	0	5	8	10	12	13
Сокращение продолжительности	0	4	5	6	7	9

Оптимальное решение определяется вариантом 5 с затратами 13 и сокращением продолжительности на 9. Ему соответствует сокращение продолжительностей работ 4 и 5.

## 6. Сетевой график «сборка с комплектацией»

Сетевой график «сборка с комплектацией» уже не допускает сетевого представления в виде дерева. Рассмотрим два подхода к решению задачи.

Подход 1

Определим множество вершин G первого слоя таких, что их степени больше 1 (фиксация продолжительностей соответствующих работ превращает оставшуюся сеть в сеть типа дерево). Если число вершин множества G равно q, то существует  $2^q$  различных вариантов фиксации их продолжительностей. Рассматриваем каждый вариант и решаем задачу для сети типа дерево. К затратам полученного решения добавляем затраты работ множества G, продолжительности которых в рассматриваемом варианте уменьшены.

 $\Pi p \, u \, m \, e \, p \, 5$ . Рассмотрим сетевой график рис. 3. Заметим, что если зафиксировать продолжительность работы 2, то сетевой график превращается в дерево с ограничениями на моменты начала работ 4 и 6. Поскольку q = 1, необходимо рассмотреть два варианта. Данные о работах приведены в табл. 19.

	Таблица 19									
	i	1	2	3	4	5	6	7	8	
ſ	$ au_i$	7	8	4	6	5	9	5	3	
ſ	$s_i$	8	6	3	5	7	7	6	4	
ſ	$\Delta_i$	4	3	2	3	2	6	2	1	

Вариант 1. Продолжительность работы 2 равна  $\tau_2 = 8$ . В этом случае работы 4 и 6 не могут начаться раньше 8 единиц времени. Поэтому очевидно, что  $x_1 = 0$  и  $x_3 = 0$ . Примем Q = 6.

1 шаг. Рассматриваем работы 4 и 5. Применяем базовый алгоритм А. Решение приведено в табл. 20.

 Вариант
 0
 1

 Затраты
 0
 5

 Сокращение продолжительности
 0
 3

Таблина	20
таолица	40

2 шаг. Рассматриваем объединенную работу (4, 5) и работу 7. Применяем базовый алгоритм В. Решение приведено в табл. 21.

Таблица	<b>21</b>
---------	-----------

Вариант		1	2
Затраты	0	5	11
Сокращение продолжительности	0	3	5

*3 шаг.* Рассматриваем объединенную работу (4, 5, 7) и работу 6. Применяем базовый алгоритм А. Решение приведено в табл. 22.

Таблица	<b>22</b>
---------	-----------

Тоблино 22

Вариант	0	1	2	3
Затраты	0	5	12	18
Сокращение продолжительности	0	2	3	5

4 шаг. Рассматриваем объединенную работу  $(\overline{4, 7})$  и работу 8. Применяем базовый алгоритм В. Решение приведено в табл. 23.

таолица 25				
1	4; 1	9; 3	16; 4	22; 6
0	0; 0	5; 2	12; 3	18; 5
8 (4, 7)	0	1	2	3

Оптимальное решение определяется клеткой (22; 6) с затратами 22. Ему соответствует уменьшение продолжительности работ 4, 6, 7 и 8.

Вариант 2. Продолжительность работы 2 равна  $\tau_2 - \Delta_2 = 5$ . В этом случае работа 6 может начаться не раньше, чем через 5 единиц времени. Поэтому  $x_3 = 0$ , так как  $\tau_3 = 4$ . Не будем повторять все шаги последовательного применения базовых алгоритмов, а приведем окончательную табл. 24.

Таблица 24						
Вариант	0	1	2	3	4	5
Затраты	0	4	5	9	11	15
Сокращение продолжительности	0	1	3	4	5	6

Оптимальным является вариант 5 с затратами 15. С учетом затрат на сокращение продолжительности работы 2 получаем 21. Выбираем второй вариант, т.е. сокращаем продолжительности работ 2, 4, 7 и 8.

Подход 2

Разделим затраты  $s_i$ ,  $i \in G$  произвольным образом на столько частей, сколько работ обеспечивает комплектующими работа *i*. Без ограничения общности примем, что число таких работ равно двум для каждой  $i \in G$ , т.е.

$$s_i = v_i + u_i, \quad i \in G.$$

Фактически как бы произведено разделение вершины i на две вершины, поделились соответственно и затраты. При этом сетевой график превратился в дерево, и можно применить описанный выше алгоритм. Из теории сетевого программирования [9] известно, что полученная в результате величина



Рис. 7.

затрат дает нижнюю оценку для исходной задачи. Эту оценку применяем в методе ветвей и границ.

 $\Pi p \, u \, m \, e \, p \, 6$ . Возьмем данные примера 5 (табл. 19). Пусть  $u_2 = v_2 = 3$ . После разделения вершины 2 на две вершины получаем дерево, приведенное на рис. 7.

Теперь можно применить алгоритм для дерева. Получаем оптимальное решение с затратами 18. Сокращаются работы 2', 4, 7, 8. Однако работа 2 не сокращается. Поэтому решение является недопустимым для исходной задачи и дает только оценку снизу. Применяем метод ветвей и границ. Делим множество всех решений на два подмножества. В первом  $x_2 = 1$ , а во втором  $x_2 = 0$ . Выбираем подмножество с лучшей оценкой (в данном случае это будет оптимальное решение, поскольку всего одна вершина 2 имеет степень исхода 2). Это решение было получено ранее. Сокращаются работы 2, 4, 7 и 8 с затратами 21.

Нижнюю оценку можно улучшить, изменяя разбиение затрат вершин множества G. Задача поиска варианта разбиения затрат, максимизирующего нижнюю оценку, называется обобщенной двойственной задачей [9]. Однако решение обобщенной двойственной задачи требует затрат времени. По-видимому, рациональной является смешанная стратегия, когда после нескольких шагов улучшения нижней оценки производится ветвление, затем снова несколько шагов улучшения и т.д.

Вычислительная сложность описанных алгоритмов определяется вычислительной сложностью базового алгоритма В, которая равна  $O(nQ^2)$  при целочисленных значениях временных параметров.

Данная оценка не относится к задаче сборки с комплектацией, для которой вычислительная сложность равна  $O(2^q n Q^2)$ .

Оценка вычислительной сложности метода ветвей и границ требует экспериментальных исследований.

## 7. Заключение

Предложенный способ решения задач календарного планирования, основанный на методе сетевого программирования, позволяет использовать простые алгоритмы, легко поддающиеся программной реализации. При сетевой структуре типа дерева получается точное решение задачи, а в общем случае – верхняя или нижняя оценка для использования в методе ветвей и границ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Бурков В.Н., Ланда Б.Д., Ловецкий С.Е. и др. Сетевые модели и задачи управления. М.: Сов. радио, 1967.
- 2. Баркалов С.А., Буркова И.В., Воропаев В.И. и др.; под ред. В.Н. Буркова. Математические основы управления проектами. М.: Высш. школа, 2005.
- 3. Andres C., Hatami S. Evolutionary heuristics and an algorithm for the two-stage assembly scheduling problem to minimize makespan with setup times // Int. J. Product. Res.2011. No. 44. P. 4713–4735.
- Allaoui H., Artiba A. Johnson's algorithm: a kay to solve optimally or approximately flow shop scheduling problems with unavailability periods // Int. J. Product. Econom. 2009. No. 121. P. 81–87.
- Chenkong V., Haimes Y.Y. The tree stage assembly permutation flowshopscheduling problem // Proc. 5<sup>th</sup> Int. Conf. on Industrial Engineer. and Industrial Management, Cartagena. September 7–9. 2011.
- 6. Demeulemeester E.L., Herroelen W. Project scheduling: a research handbook. Kluwer Academ. Publisherr, 1976. 710p.
- Garey M.R. The complexity of flowshop and jobshopscheduling // Math. Oper. Res. 1976. No. 1(2). P. 117–129.
- Sun Y., Zhang C.Y., Gao L., Wang X.J. Multy-objactive optimization algorithms for flow shop scheduling problem: a review and prospects // Int. J. Advanced Manufactur. Technol. 2011. No. 55. P. 723–739.
- Буркова И.В. Метод сетевого программирования в задачах нелинейной оптимизации // АнТ. 2009. № 10. С. 15–21.
   Burkov I.V. A Method of Network Programming in Problems of Nonlinear Optimization // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 10. P. 1606–1613.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 10.07.2019 После доработки 22.10.2019 Принята к публикации 28.11.2019

# Нелинейные системы

#### © 2020 г. А.И. КАЛИНИН, д-р физ.-мат. наук (kalininai@bsu.by), Л.И. ЛАВРИНОВИЧ, канд. физ.-мат. наук (lavrinovich@bsu.by) (Белорусский государственный университет, Минск)

## АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ТРАЕКТОРИИ

Рассматривается задача об управлении с минимальными энергетическими затратами линейной сингулярно возмущенной системой, в которой на правый конец траекторий наложены линейные ограничения. Строятся асимптотические приближения в виде программы и обратной связи к оптимальному управлению в этой задаче. Основное достоинство предлагаемых алгоритмов состоит в том, что при их применении происходит декомпозиция исходной задачи на две невозмущенные задачи оптимального управления меньшей размерности.

*Ключевые слова*: оптимальное управление, линейная система, квадратичный функционал, сингулярные возмущения, асимптотические приближения, субоптимальный синтез.

**DOI:** 10.31857/S0005231020060037

#### 1. Введение

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при части производных принято называть сингулярно возмущенными. В рамках математической теории оптимальных процессов задачам оптимизации таких систем уделяется значительное внимание (см. [1–4]). Интерес к таким задачам вызван эффективностью асимптотических методов их решения, при применении которых исходные задачи оптимального управления распадаются на задачи меньшей размерности. Кроме того, асимптотический подход позволяет избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими [5].

Настоящая статья посвящена построению асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решению сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с линейными терминальными ограничениями на траектории. Ее можно трактовать как задачу управления с минимальными энергетическими затратами. Суть предлагаемых алгоритмов состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра множителей Лагранжа, соответствующих в силу принципа максимума [6] оптимальному управлению. Предлагаемые вычислительные процедуры являются очередной реализацией методики исследования задач оптимизации возмущенных динамических систем, в основу которой положена идея специальной конечномерной параметризации оптимальных управлений (см. [2]).

Следует отметить, что сингулярно возмущенным линейно-квадратичным задачам оптимального управления посвящено значительное число публикаций (см., например, [7–11]), однако в них, за исключением [11], ограничения на траектории не накладывались. Настоящая статья обобщает результаты, полученные в [11], где рассматривалась задача с фиксированным правым концом траекторий.

#### 2. Постановка задачи

В классе *r*-мерных управляющих воздействий u(t),  $t \in T = [t_*, t^*]$ , с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

(2.1) 
$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, \quad y(t_*) = y_*, \\ \mu \dot{z} &= A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, \quad z(t_*) = z_*, \end{aligned}$$

(2.2) 
$$H_1y(t^*) = g_1, \quad H_2z(t^*) = g_2,$$

(2.3) 
$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} u^{\mathrm{T}} P(t) u dt \to \min,$$

где  $\mu$  — малый положительный параметр,  $t_*$ ,  $t^*$  — заданные моменты времени  $(t_* < t^*)$ , y — n-вектор медленных переменных, z — m-вектор быстрых переменных,  $g_1$ ,  $g_2$  — векторы размерностей  $n_1$ ,  $m_1$  соответственно  $(n_1 \le n, m_1 \le m)$ ,  $H_1$  и  $H_2$  — матрицы полного ранга, P(t) — положительно определенная симметрическая матрица для всех  $t \in T$ .

 $\Pi p e д п o л o ж e н u e 1$ . Действительные части всех собственных значений матрицы  $A_4(t), t \in T$ , отрицательны.

Предположение 2. Элементы всех матриц, формирующих задачу, бесконечно дифференцируемы.

Управление с кусочно-непрерывными компонентами принято называть допустимым, если для порожденной этим управлением траектории системы (2.1) выполнены терминальные ограничения (2.2). Допустимое управление, на котором критерий качества (2.3) принимает наименьшее значение, называют оптимальным. Наряду с этими общеупотребительными понятиями определим то, что будет пониматься под асимптотическими приближениями к решению рассматриваемой задачи.

Определение 1. Управление  $u^{(N)}(t,\mu), t \in T$ , с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка (N = 0, 1, 2, ...), в задаче (2.1)–(2.3), если оно отклоняется по критерию качества (2.3) от оптимального управления на величину  $O(\mu^{N+1})$ , а порожденная им траектория  $y(t,\mu), z(t,\mu), t \in T$ , системы (2.1) удовлетворяет терминальным ограничениям (2.2) с точностью того же порядка малости.

Определение 2. Вектор-функцию  $u^{(N)}(y, z, t, \mu)$  назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка, если для любого начального состояния  $(y_*, z_*, t_*), t_* < t^*$ , имеет место равенство

$$u^{(N)}(y_*, z_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu),$$

где  $u^{(N)}(t,\mu), t \in T$ , – асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (2.1)–(2.3).

В настоящей статье предлагается и обосновывается алгоритм, с помощью которого для заданного числа N можно построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в рассматриваемой задаче. В статье также показывается, как можно построить асимптотически субоптимальную обратную связь нулевого порядка.

В дальнейшем для сокращения записи будем использовать обозначения:

(2.4) 
$$A(t,\mu) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t)/\mu & A_4(t)/\mu \end{pmatrix}, \\ B(t,\mu) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t)/\mu \end{pmatrix}, \quad x_* = \begin{pmatrix} y_* \\ z_* \end{pmatrix}.$$

## 3. Первая базовая задача

Вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений начинаются с решения вырожденной задачи

(3.1)  
$$\dot{y} = A_0(t)y + B_0(t)u, \quad y(t_*) = y_*, \quad H_1y(t^*) = g_1$$
$$J_1(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} u^{\mathrm{T}} P(t) u dt \to \min,$$

где

(3.2) 
$$A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t).$$

В дальнейшем эту задачу будем называть первой базовой.

Предположение 3. Динамическая система в задаче (3.1) является управляемой на отрезке  $[\tau, t^*]$  относительно подпространства  $H_1y = 0$  при любом  $\tau \in [t_*, t^*)$  [12].

Это предположение выполняется тогда и только тогда (см., например, [13]), когда при любом  $\tau \in [t_*, t^*)$  и любом ненулевом векторе l размерности  $n_1$  имеет место соотношение

(3.3) 
$$l^{\mathrm{T}}H_1F_0(t)B(t) \neq 0, \quad \tau \leq t \leq t^*,$$

где  $F_0(t), \ t \in T, \ - \ (n \times n)$ -матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

(3.4) 
$$\dot{F}_0 = -F_0 A_0(t), \quad F_0(t^*) = E_n$$

с единичной матрицей  $E_n$ . Заметим, что условие (3.3), которое называют неявным критерием управляемости на подпространство, для стационарной динамической системы эквивалентно требованию [12]

(3.5) 
$$\operatorname{rank}\left(H_1B_0, \ H_1A_0B_0, \ \dots, \ H_1A_0^{n-1}B_0\right) = n_1.$$

При выполнении предположения 3 в первой базовой задаче существуют допустимые управления, а тогда эта задача имеет единственное решение [14], которое является нормальной экстремалью. Последнее означает, что принцип максимума [6, 15] в данном случае может быть сформулирован следующим образом: пусть  $u^0(t), y^0(t), t \in T$ , — оптимальные управление и траектория в задаче (3.1), тогда существует такой вектор множителей Лагранжа  $\lambda_0$  размерности  $n_1$ , что выполняется условие

$$\psi^{0\mathrm{T}}(t)B_{0}(t)u^{0}(t) - \frac{1}{2}u^{0\mathrm{T}}(t)P(t)u^{0}(t) =$$
$$= \max_{u \in \mathrm{R}^{r}} \left(\psi^{0\mathrm{T}}(t)B_{0}(t)u - \frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}P(t)u\right), \quad t \in T,$$

где  $\psi^0(t), t \in T$ , — решение сопряженной системы  $\dot{\psi} = -A_0^{\mathrm{T}}(t)\psi, \psi(t^*) = H_1^{\mathrm{T}}\lambda_0$ . Отсюда непосредственно следует, что

(3.6) 
$$u^{0}(t) = P^{-1}(t)B_{0}^{\mathrm{T}}(t)\psi^{0}(t), \quad t \in T.$$

Заметим, что

(3.7) 
$$\psi^{0T}(t) = \lambda_0^T H_1 F_0(t), \quad \psi^{0T}(t) B_0(t) = \lambda_0^T H_1 \Phi_0(t), \quad t \in T,$$

где

(3.8) 
$$\Phi_0(t) = F_0(t) B_0(t), \quad t \in T.$$

В силу (3.6), (3.7) и формулы Коши имеем равенство

(3.9) 
$$H_1 y^0(t^*) = H_1 F_0(t_*) y_* + H_1 C_1 H_1^{\mathrm{T}} \lambda_0 = g_1,$$

где

(3.10) 
$$C_{1} = \int_{t_{*}}^{t^{*}} \Phi_{0}(t) P^{-1}(t) \Phi_{0}^{T}(t) dt$$

При выполнении предположения 3 матрица  $H_1C_1H_1^T$  будет невырожденной, в чем можно легко убедиться, опираясь на неявный критерий управляемости на подпространство. Поскольку  $\lambda_0$  определяется однозначно, то оптимальному управлению в первой базовой задаче соответствует, в силу сформулированного принципа максимума, единственный вектор сопряженных переменных.

## 4. Вторая базовая задача

На втором этапе вычислений решается задача оптимального управления с бесконечной длительностью процесса

(4.1)  

$$\frac{dz}{ds} = A_4(t^*)z + B_2(t^*)u,$$

$$H_2z(0) = H_2A_4^{-1}(t^*) \left(A_3(t^*)y^0(t^*) + B_2(t^*)u^0(t^*)\right) + g_2z$$

$$z(-\infty) = 0, \quad J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 u^{\mathrm{T}} P(t^*)uds \to \min,$$

которую будем называть второй базовой.

Предположение 4. Выполнен критерий управляемости на подпространство

rank 
$$(H_2B_2(t^*), H_2A_4(t^*)B_2(t^*), \dots, H_2A_4^{m-1}(t^*)B_2(t^*)) = m_1$$

Это предположение гарантирует существование допустимых управлений во второй базовой задаче. Отсюда, в свою очередь, следует, что задача (4.1) имеет единственное решение [14] и является нормальной. В этом случае принцип максимума [6] для нее может быть сформулирован следующим образом: пусть  $u^*(s), z^*(s), s \leq 0$ , — оптимальные управление и траектория в задаче (4.1), тогда существует такой вектор множителей Лагранжа  $\nu_0$  размерности  $m_1$ , что выполняется условие

$$\Pi \psi^{\mathrm{T}}(s) B_{2}(t^{*}) u^{*}(s) - \frac{1}{2} u^{*\mathrm{T}}(s) P(t^{*}) u^{*}(s) =$$
$$= \max_{u \in \mathrm{R}^{r}} \left( \Pi \psi^{\mathrm{T}}(s) B_{2}(t^{*}) u - \frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} P(t^{*}) u \right), \quad s \leq 0,$$

где  $\Pi\psi\left(s\right),\,s\leq0,\,-$ решение сопряженной системы

$$\frac{d}{ds}\Pi\psi = -A_4^{\mathrm{T}}(t^*)\Pi\psi, \quad \Pi\psi(0) = H_2^{\mathrm{T}}\nu_0.$$

Отсюда непосредственно следует, что

(4.2) 
$$u^*(s) = P^{-1}(t^*)B_2^{\mathrm{T}}(t^*)\Pi\psi m(s), \quad s \le 0.$$

Заметим, что

(4.3) 
$$\Pi \psi^{\mathrm{T}}(s) = \nu_{0}^{\mathrm{T}} H_{2} G(s), \quad \Pi \psi^{\mathrm{T}}(s) B_{2}(t^{*}) = \nu_{0}^{\mathrm{T}} H_{2} \Pi \Phi(s), \quad s \leq 0,$$

где

(4.4) 
$$\Pi \Phi(s) = G(s) B_2(t^*), \quad s \le 0,$$

33

а  $G\left(s\right),\,s\leq0,\,-(m\times m)$ -матричная функция, удовлетворяющая диф<br/>ференциальному уравнению

(4.5) 
$$\frac{dG}{ds} = -GA_4\left(t^*\right), \quad G\left(0\right) = E_m.$$

Введем обозначение

(4.6) 
$$C_3 = \int_{-\infty}^{0} \left( \Pi \Phi(s) P^{-1}(t^*) \Pi \Phi^{\mathrm{T}}(s) \right) ds$$

В силу предположения 4 матрица  $H_2C_3H_2^{\rm T}$  будет невырожденной, а поскольку, как следует из (4.2), (4.3) и формулы Коши,

(4.7) 
$$H_2 z^*(0) = H_2 C_3 H_2^{\mathrm{T}} \nu_0.$$

то оптимальному управлению во второй базовой задаче соответствует, в силу принципа максимума, единственный вектор сопряженных переменных.

Подчеркнем, что единственная информация о решении второй базовой задачи, которая используется в дальнейшем при построении асимптотически субоптимальных управлений, — это вектор множителей Лагранжа  $\nu_0$ . Нет необходимости строить оптимальное управление  $u^*(s)$ ,  $s \leq 0$ , что, впрочем, и невозможно, если задача решается численно.

После решения базовых задач формируется матрица

(4.8) 
$$I_0 = \begin{pmatrix} H_1 C_1 H_1^{\mathrm{T}} & 0_{n_1 \times m_1} \\ H_2 C_2 H_1^{\mathrm{T}} & H_2 C_3 H_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

размеров  $(n_1 + m_1) \times (n_1 + m_1)$ . Матрицы  $C_1$ ,  $C_3$  определены ранее формулами (3.10), (4.6), а

$$C_{2} = -A_{4}^{-1}(t^{*}) \left( A_{3}(t^{*})C_{1} + B_{2}(t^{*}) P^{-1}(t^{*}) B_{0}^{T}(t^{*}) \right).$$

Как было отмечено,  $H_1C_1H_1^{\mathrm{T}}$ ,  $H_2C_3H_2^{\mathrm{T}}$  — невырожденные матрицы, а тогда det  $I_0 \neq 0$ .

#### 5. Асимптотический анализ решения исходной задачи

Говорить об асимптотически субоптимальных управлениях можно лишь в том случае, когда исходная задача имеет решение. Убедимся, что при сделанных предположениях в задаче (2.1)–(2.3) с достаточно малым  $\mu$  существует оптимальное управление. Доказательство будет конструктивным и предопределит дальнейшие вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений.

Пусть  $\psi_1(t, \lambda, \nu, \mu), \psi_2(t, \lambda, \nu, \mu), t \in T, -$  решение начальной задачи

(5.1) 
$$\dot{\psi}_1 = -A_1^{\mathrm{T}}(t)\psi_1 - A_3^{\mathrm{T}}(t)\psi_2, \quad \psi_1(t^*) = H_1^{\mathrm{T}}\lambda, \mu\dot{\psi}_2 = -A_2^{\mathrm{T}}(t)\psi_1 - A_4^{\mathrm{T}}(t)\psi_2, \quad \psi_2(t^*) = H_2^{\mathrm{T}}\nu,$$

где  $\lambda$ ,  $\nu$  — векторы размерности  $n_1$  и  $m_1$  соответственно. Обозначим через  $y(t, \lambda, \nu, \mu), z(t, \lambda, \nu, \mu), t \in T$ , траекторию системы (2.1), порожденную управлением

(5.2) 
$$u(t,\lambda,\nu,\mu) = P^{-1}(t) \left( B_1^{\mathrm{T}}(t) \psi_1(t,\lambda,\nu,\mu) + B_2^{\mathrm{T}}(t) \psi_2(t,\lambda,\nu,\mu) \right), \quad t \in T$$

Теорема. При выполнении предположений 1–4 в задаче (2.1)–(2.3) с достаточно малым µ существует единственное оптимальное управление, которое является нормальной экстремалью и представимо в виде

(5.3) 
$$u^{0}(t,\mu) = u(t,\lambda(\mu),\nu(\mu),\mu), \quad t \in T.$$

Оптимальному управлению соответствует, в силу принципа максимума, вектор сопряженных переменных

$$\left(\psi_{1}\left(t,\lambda\left(\mu\right),\mu\nu\left(\mu\right),\mu\right),\mu\psi_{2}\left(t,\lambda\left(\mu\right),\mu\nu\left(\mu\right),\mu\right)\right),\quad t\in T,$$

при этом векторы  $\lambda(\mu), \nu(\mu),$  являющиеся решением системы уравнений

(5.4) 
$$H_1 y(t^*, \lambda, \nu, \mu) - g_1 = 0, \quad H_2 z(t^*, \lambda, \nu, \mu) - g_2 = 0,$$

допускают асимптотические разложения

(5.5) 
$$\lambda(\mu) \sim \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k, \quad \nu(\mu) \sim \nu_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \nu_k,$$

старшие коэффициенты которых есть векторы множителей Лагранжа в базовых задачах.

Доказательство. Прежде всего покажем, что левые части уравнений (5.4) допускают асимптотические разложения по целым степеням малого параметра, и получим формулы для коэффициентов этих разложений. Для сокращения записи введем обозначения  $\eta = (\lambda, \nu), \eta_0 = (\lambda_0, \nu_0)$ , и пусть  $x(t, \eta, \mu) = (y(t, \eta, \mu), z(t, \eta, \mu)), t \in T$ . В силу формулы Коши, используя обозначения (2.4), имеем

(5.6) 
$$x(t^*, \eta, \mu) = F(t_*, \mu) x_* + \int_{t_*}^{t^*} F(t, \mu) B(t, \mu) u(t, \eta, \mu) dt,$$

где  $F(t,\mu), t\in T,-$ матричная функция размеров  $(n+m)\times (n+m),$ которая является решением начальной задачи

(5.7) 
$$\dot{F} = -FA(t,\mu), \quad F(t^*) = E_{n+m}.$$

Решение этого сингулярно возмущенного уравнения удобно представлять в блочном виде

$$F(t,\mu) = \begin{pmatrix} F_{1}(t,\mu) & F_{2}(t,\mu) \\ F_{3}(t,\mu) & F_{4}(t,\mu) \end{pmatrix},$$

35

где  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$  — матрицы размеров  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $m \times n$  и  $m \times m$  соответственно. С помощью метода пограничных функций [16] они могут быть разложены в асимптотические ряды:

(5.8) 
$$F_{i}(t,\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k} \left( F_{ik}(t) + \Pi_{k} F_{i}(s) \right),$$
$$s = (t - t^{*}) / \mu, \quad t \in T, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Подчеркнем, что выражения (5.8) — равномерные по  $t \in T$  асимптотические разложения. Отметим как существенный факт также то, что для матричных функций  $\prod_k F_i(s), s \leq 0$ , называемых пограничными членами, имеют место оценки

(5.9) 
$$\|\Pi_k F_i(s)\| \le \alpha_k \exp(\beta_k s), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  — положительные постоянные. Приведем несколько старших коэффициентов разложений (5.8), которые понадобятся при доказательстве теоремы:

$$F_{10} = F_0(t), \quad F_{20} = 0_{n \times m}, \quad F_{30} = -A_4^{-1}(t^*) A_3(t^*) F_0(t),$$

$$F_{40} = 0_{m \times m}, \quad F_{21} = -F_0(t) A_2(t) A_4^{-1}(t),$$

$$F_{41} = A_4^{-1}(t^*) A_3(t^*) F_0(t) A_2(t) A_4^{-1}(t),$$

$$\Pi_0 F_1 = 0_{n \times n}, \quad \Pi_0 F_2 = 0_{n \times m}, \quad \Pi_0 F_3 = G(s) A_4^{-1}(t^*) A_3(t^*),$$

$$\Pi_0 F_4 = G(s), \quad \Pi_1 F_2 = A_2(t^*) A_4^{-1}(t^*) G(s),$$

где  $F_0(t), t \in T$ , и  $G(s), s \le 0$ , — решения начальных задач (3.4) и (4.5) со-ответственно.

Запишем (5.6) в блочном виде

$$y(t^*, \eta, \mu) = F_1(t_*, \mu) y_* + F_2(t_*, \mu) z_* + \int_{t_*}^{t^*} (F_1(t, \mu) B_1(t) + F_2(t, \mu) B_2(t) / \mu) u(t, \eta, \mu) dt,$$

(5.11)

$$z(t^*, \eta, \mu) = F_3(t_*, \mu) y_* + F_4(t_*, \mu) z_* + \int_{t_*}^{t^*} (F_3(t, \mu) B_1(t) + F_4(t, \mu) B_2(t) / \mu) u(t, \eta, \mu) dt.$$

Заметим, что

$$\psi_{1}^{\mathrm{T}}(t,\eta,\mu) = \lambda^{\mathrm{T}}H_{1}F_{1}(t,\mu) + \mu\nu^{\mathrm{T}}H_{2}F_{3}(t,\mu), \psi_{2}^{\mathrm{T}}(t,\eta,\mu) = \lambda^{\mathrm{T}}H_{1}F_{2}(t,\mu)/\mu + \nu^{\mathrm{T}}H_{2}F_{4}(t,\mu).$$
Отсюда и из формул (5.8), (5.10) следует, что имеют место асимптотические разложения

(5.12) 
$$\psi_i(t,\eta,\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left( \psi_{ik}(t,\eta) + \Pi_k \psi_i(s,\eta) \right),$$
$$s = (t-t^*) / \mu, \quad t \in T, \quad i = 1, 2,$$

в которых

$$\psi_{10}^{\mathrm{T}}(t,\eta) = \lambda^{\mathrm{T}} H_{1} F_{0}(t), \quad \psi_{20}^{\mathrm{T}}(t,\eta) = -\lambda^{\mathrm{T}} H_{1} F_{0}(t) A_{2}(t) A_{4}^{-1}(t),$$

$$\Pi_{0}^{\mathrm{T}} \psi_{1}(s,\eta) = 0, \quad \Pi_{0}^{\mathrm{T}} \psi_{2}(s,\eta) = \left(\lambda^{\mathrm{T}} H_{1} A_{2}(t^{*}) A_{4}^{-1}(t^{*}) + \nu^{\mathrm{T}} H_{2}\right) G(s),$$

$$\psi_{1k}^{\mathrm{T}}(t,\eta) = \lambda^{\mathrm{T}} H_{1} F_{1k}(t) + \nu^{\mathrm{T}} H_{2} F_{3,k-1}(t),$$
(5.13)
$$\psi_{2k}^{\mathrm{T}}(t,\eta) = \lambda^{\mathrm{T}} H_{1} F_{2,k+1}(t) + \nu^{\mathrm{T}} H_{2} F_{4k}(t),$$

$$\Pi_{k}^{\mathrm{T}} \psi_{1}(s,\eta) = \lambda^{\mathrm{T}} H_{1} \Pi_{k} F_{1}(s) + \nu^{\mathrm{T}} H_{2} \Pi_{k-1} F_{3}(s),$$

$$\Pi_{k}^{\mathrm{T}} \psi_{2}(s,\eta) = \lambda^{\mathrm{T}} H_{1} \Pi_{k+1} F_{2}(s) + \nu^{\mathrm{T}} H_{2} \Pi_{k} F_{4}(s),$$

$$k \ge 0, \quad t \in T, \quad s \le 0.$$

Эти разложения будут равномерными в области  $\|\eta - \eta_0\| < \varepsilon_0, t \in T$ , где  $\varepsilon_0$  – некоторое положительное число. Отметим, что в силу формул (3.7), (4.3) имеют место равенства:

(5.14) 
$$\psi_{10}^{\mathrm{T}}(t,\eta_0) = \psi^0(t), \quad \psi_{20}^{\mathrm{T}}(t,\eta_0) = -\left(A_2(t)A_4^{-1}(t)\right)^{\mathrm{T}}\psi^0(t), \quad t \in T,$$
  
 $\Pi_0\psi_2(s,\eta_0) = \Pi\psi(s), \quad s \le 0.$ 

Управление (5.2) также допускает равномерное асимптотическое разложение

(5.15) 
$$u(t,\eta,\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left( u_k(t,\eta) + \Pi_k u(s,\eta) \right), \quad s = (t-t^*) / \mu, \quad t \in T,$$

где

(5.16)

$$u_{k}(t,\eta) = P^{-1}(t) \left( B_{1}^{T}(t) \psi_{1k}(t,\eta) + B_{2}^{T}(t) \psi_{2k}(t,\eta) \right),$$
$$\Pi_{k} u(s,\eta) =$$

$$=\sum_{j=0}^{k} \frac{s^{j}}{j!} \left( \frac{d^{j}}{dt^{j}} (P^{-1}B_{1}^{\mathrm{T}})(t^{*}) \Pi_{k-j} \psi_{1}(s,\eta) + \frac{d^{j}}{dt^{j}} (P^{-1}B_{2}^{\mathrm{T}})(t^{*}) \Pi_{k-j} \psi_{2}(s,\eta) \right),$$
  
$$t \in T, \quad s \leq 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Поскольку наряду с формулами (3.2), (3.6), (4.2) <br/>и (5.14) имеет место равенство  $\Pi_0\psi_1(s,\eta)=0,$ то

(5.17) 
$$u_0(t,\eta_0) = u^0(t), \quad t \in T, \quad \Pi_0 u(s,\eta_0) = u^*(s), \quad s \le 0.$$

Из (5.8)–(5.10), (5.12), (5.13), (5.15) и (5.16) следует, что вектор-функции (5.11) разлагаются в асимптотические ряды

(5.18) 
$$y(t^*, \eta, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_k(\eta), \quad z(t^*, \eta, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k(\eta),$$

в которых

$$y_{0}(\eta) = F_{0}(t_{*}) y_{*} + \int_{t_{*}}^{t^{*}} F_{0}(t)B_{0}(t)u_{0}(t,\eta) dt,$$

$$z_{0}(\eta) = -A_{4}^{-1}(t^{*})A_{3}(t^{*})y_{0}(\eta) + \int_{-\infty}^{0} G(s)B_{2}(t^{*})(u_{0}(t^{*},\eta) + \Pi_{0}u(s,\eta))ds,$$

$$(5.19) \quad y_{k}(\eta) = F_{1k}(t_{*}) y_{*} + F_{2k}(t_{*}) z_{*} + \int_{t_{*}}^{t^{*}} \sum_{j=0}^{k} F_{1j}(t) B_{1}(t) u_{k-j}(t,\eta) dt + \\ + \int_{t_{*}}^{0} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-p-1} \frac{s^{j}}{j!} \frac{d^{j}}{dt^{j}} (F_{1,k-p-j-1}B_{1})(t^{*}) \Pi_{p}u(s,\eta) ds + \\ + \int_{-\infty}^{0} \sum_{p=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-p} \frac{s^{j}}{j!} \frac{d^{j}}{dt^{j}} (F_{2,k-p-j-1}B_{2})(t^{*}) \Pi_{p}u(s,\eta) ds + \\ + \int_{-\infty}^{0} \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-p-1} \frac{s^{j}}{j!} \Pi_{k-p-j-1}F_{1}(s) \left(\frac{d^{j}B_{1}}{dt^{j}}(t^{*}) \Pi_{p}u(s,\eta) + \frac{\partial^{j}}{\partial t^{j}} (B_{1}u_{p})(t^{*},\eta)\right) ds + \\ + \int_{-\infty}^{0} \sum_{p=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-p} \frac{s^{j}}{j!} \Pi_{k-p-j}F_{2}(s) \left(\frac{d^{j}B_{2}}{dt^{j}}(t^{*}) \Pi_{p}u(s,\eta) + \frac{\partial^{j}}{\partial t^{j}} (B_{2}u_{p})(t^{*},\eta)\right) ds, \\ k \geq 1.$$

Для  $z_k(\eta), k \ge 1$ , имеет место аналогичная формула с той лишь разницей, что  $F_{1j}$  заменяется на  $F_{3j}$ , а  $F_{2j}$  — на  $F_{4j}$  и что вместо  $\Pi_j F_1, \Pi_j F_2$  соответственно имеем  $\Pi_j F_3, \Pi_j F_4, j = 0, 1, \ldots$ 

С помощью теоремы о неявной функции убедимся, что система уравнений (5.4) однозначно разрешима относительно  $\eta$  при достаточно малых  $\mu.$  Запишем (5.4) в виде

(5.20) 
$$R(\eta, \mu) = 0.$$

В силу (5.18) имеет место равномерное в области  $\|\eta-\eta_0\|<\varepsilon_0$ асимптотическое разложение

(5.21) 
$$R\left(\eta,\mu\right) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k} R_{k}\left(\eta\right),$$

в котором  $R_0(\eta) = (H_1y_0(\eta) - g_1, H_2z_0(\eta) - g_2), R_k(\eta) = (H_1y_k(\eta), H_2z_k(\eta)), k = 1, 2, ...$  Положим  $R(\eta, 0) = R_0(\eta)$ , тогда вектор-функция  $R(\eta, \mu)$  будет непрерывной вместе со своими частными производными по компонентам вектора  $\eta$  в области  $\|\eta - \eta_0\| < \varepsilon_0, 0 \le \mu < \mu_0$ , где  $\mu_0$  — достаточно малое положительное число.

В силу (5.17), (5.19) и формулы Коши имеем  $H_1y_0(\eta_0) = H_1y^0(t^*) = g_1$ . Матричная функция  $G(s), s \leq 0$ , является решением начальной задачи (4.5), и поскольку  $G(s) \to 0$  при  $s \to -\infty$ , то

$$\int\limits_{-\infty}^{0}G\left(s\right)B_{2}\left(t^{*}\right)u_{0}(t^{*},\eta_{0})ds=$$

(5.22)

$$= -\int_{-\infty}^{0} \frac{dG}{ds}(s) A_4^{-1}(t^*) B_2(t^*) u^0(t^*) ds = -A_4^{-1}(t^*) B_2(t^*) u^0(t^*).$$

Вместе с тем из (5.17) и формулы Коши следует, что

$$\int_{-\infty}^{0} G(s) B_2(t^*) \Pi_0 u(s, \eta_0) ds = z^*(0) .$$

Отсюда и из формул (4.1), (5.19), (5.22) получаем  $H_2 z_0(\eta_0) = g_2$ . Таким образом,  $R(\eta_0, 0) = R_0(\eta_0) = 0$ .

Непосредственным дифференцированием вектор-функции (5.19), учитывая (3.7), (4.4), (5.10), (5.13), (5.16), убеждаемся, что  $\partial R_0(\eta_0, 0) / \partial \eta =$  $= \partial R_0(\eta_0) / \partial \eta = I_0$  (см. (4.8)). Поскольку эта матрица Якоби является невырожденной, то для системы (5.20) или, что то же самое, для системы (5.4) выполнены условия теоремы о неявной функции. Согласно этой теореме в некоторой правосторонней окрестности нуля  $0 \le \mu < \mu_1$  однозначно определена вектор-функция  $\eta(\mu) = (\lambda(\mu), \nu(\mu))$ , удовлетворяющая уравнениям (5.4). Она непрерывна, и  $\eta(0) = \eta_0 = (\lambda_0, \nu_0)$ .

Как уже отмечалось, разложение (5.21) является равномерным в области  $\|\eta - \eta_0\| < \varepsilon_0$ , а его коэффициенты — линейные функции. Тогда для решения ( $\lambda(\mu), \nu(\mu)$ ) системы (5.4) будут иметь место асимптотические разложения (5.5).

Рассмотрим управление (5.3). Оно будет допустимым в задаче (2.1)–(2.3), поскольку для порожденной им траектории  $y^0(t,\mu) = y(t,\lambda(\mu),\nu(\mu),\mu),$  $z^0(t,\mu) = z(t,\lambda(\mu),\nu(\mu),\mu), t \in T$ , выполняются условия  $H_1y^0(t^*,\mu) = g_1,$  $H_2z^0(t^*,\mu) = g_2$ . По построению управление (5.3) является нормальной экстремалью Понтрягина с вектором множителей Лагранжа ( $\lambda(\mu), \mu\nu(\mu)$ ). Ему соответствует в силу принципа максимума вектор сопряженных переменных  $\psi_1^0(t,\mu) = \psi_1(t,\lambda(\mu),\mu\nu(\mu),\mu), \ \psi_2^0(t,\mu) = \mu\psi_2(t,\lambda(\mu),\mu\nu(\mu),\mu), \ t \in T$ . По доказанному в исходной задаче с достаточно малым  $\mu$  существует допустимое управление. Тогда эта задача имеет единственное решение [14]. Им будет управление (5.3), поскольку в задачах минимизации выпуклых интерральных функционалов на траекториях линейных систем нормальная экстремаль является оптимальным управлением (см., например, [17]). Теорема доказана.

#### 6. Построение асимптотически субоптимальных управлений

Продолжим изложение алгоритма построения асимптотических приближений к решению задачи (2.1)–(2.3), опираясь на утверждения теоремы и формулы, полученные при ее доказательстве.

Вектор-функция

$$u^{(0)}(t,\mu) = P^{-1}(t) \left( B_1^{\mathrm{T}}(t) \psi_1(t,\eta_0,\mu) + B_2^{\mathrm{T}}(t) \psi_2(t,\eta_0,\mu) \right), \quad t \in T,$$

будет асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в исходной задаче. Заметим, что ее можно сформировать непосредственно после решения базовых задач. Асимптотически субоптимальное управление N-го порядка ( $N \ge 1$ ) имеет вид

(6.1) 
$$u^{(N)}(t,\mu) = P^{-1}(t) \left( B_1^{\mathrm{T}}(t) \psi_1(t,\eta^{(N)}(\mu),\mu) + B_2^{\mathrm{T}}(t) \psi_2(t,\eta^{(N)}(\mu),\mu) \right),$$

где

(6.2) 
$$\eta^{(N)}(\mu) = \sum_{k=0}^{N} \mu^{k} \eta_{k}, \quad \eta_{k} = (\lambda_{k}, \nu_{k}), \quad k = 1, \dots, N.$$

Для построения управления (6.1) нужно найти коэффициенты  $\lambda_k$ ,  $\nu_k$ ,  $k = 1, \ldots, N$ , асимптотических рядов (5.5), что можно сделать методом неопределенных коэффициентов, опираясь на разложение (5.21). Для этого разложим с помощью формулы Тейлора вектор-функцию

$$\sum_{k=0}^{N} \mu^{k} R_{k} \left( \eta^{\left(N\right)} \left(\mu\right) \right)$$

по степеням  $\mu$  до порядка N включительно и приравняем коэффициенты разложения нулю (начиная с коэффициента при  $\mu$ ). В результате получим невырожденные системы линейных алгебраических уравнений для последовательного нахождения векторов  $\eta_k$ , k = 1, ..., N:

(6.3) 
$$I_0\eta_1 = -R_1(\eta_0), \quad I_0\eta_k = -R_2(\eta_0) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial R_i}{\partial \eta}(\eta_0) \eta_{k-i}, \quad k \ge 2.$$

Здесь учтено, что коэффициенты разложений (5.19) есть линейные векторфункции. Заметим, что в силу структуры (4.8) матрицы Якоби  $I_0$  системы (6.3) расщепляются. Последовательно решая эти системы, находим векторы  $\eta_k, k = 1, \ldots, N$ , и составляем полиномы (6.2). Чтобы построить управление (6.1), нужно найти решение начальной задачи (5.1) для сопряженной системы с

$$\lambda = \sum_{k=0}^{N} \mu^k \lambda_k, \quad \nu = \sum_{k=0}^{N} \mu^k \nu_k.$$

Сопряженная система является сингулярно возмущенной и, следовательно, жесткой. Интегрирования жестких систем можно избежать, заменив в (6.1) вектор-функции  $\psi_i(t, \eta, \mu)$ , i = 1, 2, их асимптотическими приближениями

$$\psi_i^{(N)}(t,\eta,\mu) = \sum_{k=0}^N \mu^k \left(\psi_{ik}(t,\eta) + \Pi_k \psi_i(s,\eta)\right),$$
  
$$s = (t - t^*) / \mu, \quad t \in T, \quad i = 1, 2.$$

Вектор-функция

$$\begin{split} \bar{u}^{(N)}(t,\mu) &= P^{-1}\left(t\right) \left(B_{1}^{\mathrm{T}}\left(t\right)\psi_{1}^{(N)}\left(t,\eta^{(N)}\left(\mu\right),\mu\right) + B_{2}^{\mathrm{T}}\left(t\right)\psi_{2}^{(N)}\left(t,\eta^{(N)}\left(\mu\right),\mu\right)\right), \quad t \in T, \end{split}$$

наряду с (6.1) будет асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка в задаче (2.1)–(2.3). В частности, как следует из (3.6), (3.7), (4.2), (5.13) и (5.14),

(6.4) 
$$\bar{u}^{(0)}(t,\mu) = P^{-1}(t) \left( B_0^{\mathrm{T}}(t)\psi^0(t) + B_2^{\mathrm{T}}(t)\Pi\psi\left((t-t^*)/\mu\right) \right) = u^0(t) + u^*\left((t-t^*)/\mu\right), \quad t \in T.$$

Вектор-функция (6.4) есть асимптотически субоптималное управление нулевого порядка, что также видно из формул (5.15), (5.17). Заметим, что управление (6.4) не зависит от начального состояния  $z_*$  вектора быстрых переменных и при малых  $\mu$  будет существенно отличатся от решения  $u^0(t), t \in T$ , первой базовой задачи лишь в пограничном слое, т.е. в некоторой левосторонней окрестности точки  $t^*$ .

Замечание 1. Для построения асимптотически субоптимального управления N-го порядка в исходной задаче достаточно найти асимптотическое приближение для  $R(\eta, \mu)$  с точностью порядка  $\mu^{N+1}$ . Это предъявляет к гладкости элементов матриц, формирующих задачу, следующее требование [16]: они должны иметь непрерывные производные до порядка N + 1 включительно.

Замечание 2. Из доказательства теоремы видно, что допустимое управление вида (5.3) существует и в случае, когда элементы матриц, формирующих динамическую систему в задаче (2.1)–(2.3), непрерывно дифференцируемы, а поскольку в этой задаче ( $y_*, z_*$ ) — произвольное начальное состояние, то такое предположение вместе с предположениями 1 и 3 гарантирует

управляемость динамической системы на отрезке  $[t_*, t^*]$  относительно подпространства  $H_1y = 0, H_2z = 0$ . Это утверждение в случае полной управляемости  $(H_1 = E_n, H_2 = E_m)$  приводит к результату, полученному в [18].

Построенные асимптотические приближения множителей Лагранжа, которые являются решением системы уравнений (5.20), можно использовать для нахождения оптимального управления в задаче (2.1)–(2.3) с заданным значением  $\mu$ . Для этого нужно применить процедуру доводки [19], т.е. найти методом Ньютона корни системы (5.20), взяв в качестве начального приближения  $\eta^{(N)}(\mu)$ . Чтобы избежать интегрирования жестких систем, вместо матрицы  $\partial R(\eta, \mu) / \partial \eta$  можно воспользоваться ее асимптотическим приближением  $I_0$ .

#### 7. Асимптотически субоптимальный синтез

Программные асимптотически субоптимальные управления, разумеется, зависят от начального состояния  $(y_*, z_*, t_*)$  динамической системы. Ранее такая зависимость не учитывалась, поскольку начальное состояние считалось заданным. В настоящем разделе, который посвящен построению асимптотически субоптимальной обратной связи нулевого порядка, будем интересоваться именно этой зависимостью. В дальнейшем будем рассматривать матрицу  $C_1$  как функцию  $t_*, t_* < t^*$ . Момент  $t^*$  по-прежнему считается заданным.

Из равенства (3.9) следует, что

(7.1) 
$$\lambda_0 = \left(H_1 C_1(t_*) H_1^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \left(g_1 - H_1 F_0(t_*) y_*\right),$$

а так как  $\psi^{0}\left(t_{*}\right) = F_{0}^{\mathrm{T}}\left(t_{*}\right)\psi^{0}\left(t^{*}\right) = F_{0}^{\mathrm{T}}\left(t_{*}\right)H_{1}^{\mathrm{T}}\lambda_{0}$ , то

(7.2) 
$$\psi^0(t_*) = M_1(t_*) \left( g_1 - H_1 F_0(t_*) y_* \right),$$

где  $M_1(t) = F_0^{\mathrm{T}}(t)_1^{\mathrm{T}} (H_1 C_1(t) H_1^{\mathrm{T}})^{-1}.$ 

В силу (4.1) и (4.7) справедливо равенство

$$\nu_0 = \left(H_2 C_3 H_2^{\mathrm{T}}\right)^{-1} H_2 z^* \left(0\right) =$$
  
=  $\left(H_2 C_3 H_2^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \left(H_2 A_4^{-1} \left(t^*\right) \left(A_3 \left(t^*\right) y^0 \left(t^*\right) + B_2 \left(t^*\right) u^0 \left(t^*\right)\right) + g_2\right),$ 

из которого и формул (3.6) (3.10), (7.1), (7.2) следует, что

$$\Pi \psi(s) = G^{\mathrm{T}}(s) \Pi \psi(0) = G^{\mathrm{T}}(s) H_2^{\mathrm{T}} \nu_0 =$$
(7.3) 
$$= M_2(s) (H_2 A_4^{-1}(t^*) (A_3(t^*) y^0(t^*) + B_2(t^*) u^0(t^*)) + g_2) =$$

$$= M_2(s) (H_2 A_4^{-1}(t^*) (A_3(t^*) F_0(t_*) y_* + M_3(t_*) (g_1 - H_1 F_0(t_*) y_*)) + g_2), \quad s \le 0,$$

где

$$M_{2}(s) = G^{\mathrm{T}}(s) H_{2}^{\mathrm{T}} (H_{2}C_{3}H_{2}^{\mathrm{T}})^{-1},$$
  
$$M_{3}(t) = (A_{3}(t^{*}) C_{1}(t) + B_{2}(t^{*}) P^{-1}(t^{*}) B_{0}^{\mathrm{T}}(t^{*})) H_{1}^{\mathrm{T}} (H_{1}C_{1}(t) H_{1}^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

Как видно из (6.4), (7.2) и (7.3), асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка в начальный момент времени представимо в виде

$$\bar{u}^{(0)}(t_*,\mu) = P^{-1}(t_*) \Big( B_0^{\mathrm{T}}(t_*) M_1(t_*) H_1 - B_2^{\mathrm{T}}(t_*) M_2((t_* - t^*) / \mu) \times H_2 A_4^{-1}(t^*) (A_3(t^*) - M_3(t_*) H_1) \Big) F_0(t_*) y_* - P^{-1}(t_*) (M_1(t_*) g_1 + M_2((t_* - t^*) / \mu) (g_2 + M_3(t_*) g_1)).$$

Поскольку  $(y_*, z_*, t_*)$  — произвольное начальное состояние динамической системы, то по определению 2 вектор-функция

(7.4)  
$$u^{(0)}(t, y, z, \mu) = P^{-1}(t) \Big( B_0^{\mathrm{T}}(t) M_1(t) H_1 - B_2^{\mathrm{T}}(t) M_2((t-t^*)/\mu) H_2 A_4^{-1}(t^*) \times (A_3(t^*) - M_3(t) H_1) \Big) F_0(t) y - P^{-1}(t) \Big( M_1(t) g_1 + M_2((t-t^*)/\mu) (g_2 + M_3(t) g_1) \Big)$$

представляет собой асимптотически субоптимальную обратную связь нулевого порядка в исходной задаче. Отметим, что построенная обратная связь не зависит от текущей позиции вектора быстрых переменных z.

# 8. Пример

Рассмотрим задачу переориентации динамически симметричного твердого тела, вращающегося вокруг оси симметрии:

$$\dot{y}_{1} = z_{1}, \quad \dot{y}_{2} = z_{2}, \quad \mu \dot{z}_{1} = -cz_{1} - kz_{2} + bu_{1}, \quad \mu \dot{z}_{2} = kz_{1} - cz_{2} + bu_{2}, y_{1}(t_{*}) = y_{*1}, \quad y_{2}(t_{*}) = y_{*2}, z_{1}(t_{*}) = 0, \quad z_{2}(t_{*}) = 0, y_{1}(t^{*}) = 0, \quad z_{1}(t^{*}) = 0, J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_{*}}^{t^{*}} (u_{1}^{2} + u_{2}^{2}) dt \to \min.$$

Постоянные  $\mu$ , b, c, k положительны, при этом  $\mu \ll 1$ . Построим асимптотически субоптимальные управление и обратную связь нулевого порядка в этой задаче. Предположения 1 и 2 в данном случае выполнены.

Для динамической системы в первой базовой задаче

$$\dot{y}_1 = \frac{cbu_1 - kbu_2}{c^2 + k^2}, \quad \dot{y}_2 = \frac{kbu_1 + cbu_2}{c^2 + k^2},$$
$$y_1(t_*) = y_{*1}, \quad y_2(t_*) = y_{*2}, \quad y_1(t^*) = 0,$$
$$J_1(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} \left(u_1^2 + u_2^2\right) dt \to \min$$

43

выполнено требование (3.5) и, следовательно, выполнено предположение 3. Оптимальное управление в этой задаче представимо в виде

$$u_1^0(t) = -\frac{cy_{*1}}{b(t^* - t_*)}, \quad u_2^0(t) = \frac{ky_{*1}}{b(t^* - t_*)}, \quad t \in T = [t_*, t^*].$$

и не зависит от времени.

Вторая базовая задача имеет вид

$$dz_1/ds = -cz_1 - kz_2 + bu_1, \quad dz_2/ds = kz_1 - cz_2 + bu_2z_1(0) = y_{*1}/(t^* - t_*),$$
$$z_i(-\infty) = 0, \quad i = 1, 2,$$
$$J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (u_1^2 + u_2^2) \, ds \to \min.$$

Предположение 4 в данном случае выполнено. Решением второй базовой задачи является управление

$$u_1^*(s) = \frac{2c \exp(cs) \cos(ks)}{b(t^* - t_*)} y_{*1}, \quad u_2^*(s) = \frac{2c \exp(cs) \sin(ks)}{b(t^* - t_*)} y_{*1}, \quad s \le 0.$$

Согласно формуле (6.4) асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка в задаче (8.1) представимо в виде

(8.2) 
$$\bar{u}_i^{(0)}(t,\mu) = u_i^0(t) + u_i^*((t-t^*)/\mu), \quad t \in T, \quad i = 1, 2.$$

Асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка, которая строится по формуле (7.4), имеет вид:

(8.3)  
$$u_{1}^{(0)}(y,z,t,\mu) = \frac{2c \exp\left(c\left(t-t^{*}\right)/\mu\right) \cos\left(k(t-t^{*})/\mu\right) - c}{b\left(t^{*}-t\right)}y_{1},$$
$$u_{2}^{(0)}(y,z,t,\mu) = \frac{2c \exp\left(c\left(t-t^{*}\right)/\mu\right) \sin\left(k(t-t^{*})/\mu\right) + k}{b\left(t^{*}-t\right)}y_{1}.$$

Заметим, что в данном примере выражение (8.3) для асимптотически субоптимальной обратной связи следует не только из общей формулы (7.4), но и из формулы (8.2) и приведенных выше выражений для решения базовых задач.

Для оценки качества построенных асимптотических приближений к решению задачи (7.2) были найдены состояния  $(y_1(t^*,\mu), z_1(t^*,\mu))$ , в которые управление (8.2) (обратная связь (8.3)) переводит динамическую систему при конкретных значениях малого параметра в случае, когда b = 4, c = 3,  $t_* = 0$ ,  $t^* = 4$ , k = 1,  $y_{*1} = -2$ ,  $y_{*2} = 1$ . В частности, оказалось, что

$$y_1(4, 0, 1) = -0.03, \quad z_1(4, 0, 1) = 0, \quad y_1(4, 0, 001) = 0.0003, \quad z_1(4, 0, 001) = 0.0003, \quad z_$$

Результаты вычислений приведены с точностью до 10<sup>-6</sup>.

#### 9. Заключение

В статье предложены и обоснованы вычислительные процедуры построения асимптотических приближений к решению рассмотренной задачи в виде программы и обратной связи. При реализации предлагаемых алгоритмов исходная задача оптимального управления распадается на две невозмущенные задачи меньшей размерности. Такая декомпозиция позволяет эффективно решать задачи оптимизации динамических систем с большим числом фазовых переменных. Кроме того, вычислительные процедуры алгоритмов не содержат интегрирований жестких систем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дмитриев М.Г. Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // АиТ. 2006. № 1. С. 3–51.

 $Dmitriev\ M.G.,\ Kurina\ G.A.$ Singular Perturbation in Control Problems // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 1. P. 1–43.

- Калинин А.И. Асимптотика решений возмущенных задач оптимального управления // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 104–114.
   Kalinin A.I. Asymptotics of the Solutions of Perturbed Optimal Control Problems // J. Comput. Syst. Sci. 1995. V. 33. No. 6. P. 75–84.
- Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y. Singular Perturbations and Time Scales in Control Theories and Applications: An Overview 2002–2012 // Int. J. Inform. Syst. Sci. 2014. V. 9. No. 1. P. 1–36.
- 4. Kokotovic P.V., Khalil H.K. Singular Perturbations in Systems and Control. N.Y.: IEEE Press, 1986.
- 5. *Ракитский Ю.В. Устинов С.М., Черноруцкий И.Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979.
- 6. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г. Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
- Kokotovic P.V., Jackel R.A. Singular Perturbation of Linear Regulators: Basic Theorems // IEEE Trans. Automat. Control. 1972. V. 17. No. 1. P. 29–37.
- Wilde R.R., Kokotovic P.V. Optimal Open- and Closed Loop Control of Singularly Perturbed Linear Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1973. V. 18. No. 6. P. 616–626.
- 9. Глизер В.Я., Дмитриев М.Г. Сингулярные возмущения в линейной задаче оптимального управления с квадратичным функционалом // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 5. С. 997–1000.
- O'Malley R.E.Jr. Singular Perturbation and Optimal Control // Lect. Notes. Math. 1978. V. 680. P. 171–218.
- Калинин А.И., Лавринович Л.И. Применение метода малого параметра к сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задаче оптимального управления // АиТ. 2016. № 5. С. 3–18.

Kalinin A.I., Lavrinovich L.I. Application of the Small Parameter Method to the Singularly Perturbed Linear-Quadratic Optimal Control Problem // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 5. P. 751–763.

12. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.

- Калинин А.И. О проблеме синтеза оптимальных систем управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 3. С. 397–402.
   Kalinin A.I. To the Synthesis of Optimal Control Systems // Comput. Math. Math. Phys. 2018. V. 58. No. 3. P. 378–383.
- 14. Мордухович Б.Ш. Существование оптимальных управлений // Соврем. пробл. матем. (Итоги науки и техники). М.: ВИНИТИ, 1976. Т. 6. С. 207–271.
- 15. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
- 16. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
- 17. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М: Наука, 1972
- Giuev T.R., Dontchev A.L. Singular Perturbation in Optimal Control Problems with Fixed Final State // Докл. Болгар. AH. 1978. T. 31. No. 8. C. 935–955.
- 19. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Минск: Изд-во Университетское, 1984.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрусталевым.

Поступила в редакцию 27.02.2019 После доработки 23.07.2019 Принята к публикации 28.11.2019

# © 2020 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru) (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

# ОПТИМИЗАЦИЯ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ: III. РОБАСТНАЯ ПОСТАНОВКА<sup>1</sup>

Исследуется задача синтеза для билинейной системы управления при произвольных ограниченных внешних возмущениях, содержащую структурированную матричную неопределенность. Поставлены и решены задачи конструктивного построения эллипсоида робастной стабилизируемости и области робастной стабилизируемости билинейной системы как в непрерывном, так и в дискретном времени; основным инструментом при этом является техника линейных матричных неравенств.

*Ключевые слова*: билинейная система управления, структурированная матричная неопределенность, ограниченные внешние возмущения, линейная обратная связь, эллипсоид робастной стабилизируемости, область робастной стабилизируемости, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231020060049

#### 1. Введение

Вопросы устойчивости, стабилизации и синтеза управления для билинейных систем традиционно привлекают внимание исследователей, им уделяется большое внимание в публикациях начиная с выхода знаменитой монографии [1]. Обзоры публикаций по данной проблематике содержатся в первых двух частях [2, 3] настоящей работы; здесь же отметим, что в литературе известны как самые различные постановки задач, так и подходы к их решению, см. [4–16]. Так, в [9, 10] ищутся способы построения линейного управления в билинейных системах на основе достаточных условий устойчивости квадратичных систем дифференциальных уравнений; множество публикаций посвящено построению нелинейных законов управления для стабилизации билинейных систем, см., например, [11–14] и др. Ряд недавних публикаций посвящен дискретным билинейным системам управления, см. [15, 16] и др., однако большая их часть ограничивается вопросами управляемости. В публикациях [17–19] исследуется эллипсоидальный подход к задачам стабилизации, предполагающий построение квадратичных функций Ляпунова при помощи техники линейных матричных неравенств [20, 21].

В публикациях [22–25] на основе техники линейных матричных неравенств и квадратичных функций Ляпунова для билинейной системы управления, не подверженной воздействию внешних возмущений, строился так называемый

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Исследование выполнено при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №18-08-00140.

эллипсоид стабилизируемости такой, что траектории замкнутой системы, начинаясь внутри эллипсоида, асимптотически стремятся к нулю. В дальнейшем это позволило эффективно конструировать невыпуклые области стабилизируемости билинейных систем управления; работы [22, 23] посвящены билинейным системам в непрерывном времени, а публикации [24, 25] — в дискретном.

Публикации [2, 3] развивают подход, основанный на технике линейных матричных неравенств — в них рассматривается билинейная система управления, подверженная воздействию *произвольных ограниченных внешних возмущений*, и вводится концепция эллипсоида стабилизируемости, обладающего тем свойством, что траектории замкнутой системы, начинаясь внутри эллипсоида, остаются в этом эллипсоиде.

Настоящая статья, являясь непосредственным продолжением [2, 3], завершает эту серию работ. В ней рассматривается билинейная система управления, подверженная воздействию произвольных ограниченных внешних возмущений и содержащая структурированную матричную неопределенность. В статье ставятся и решаются задачи робастного управления билинейными системами при внешних возмущениях; в частности, предложен подход к конструктивному построению эллипсоида робастной стабилизируемости и области робастной стабилизируемости.

Статья организована следующим образом: раздел 2 содержит вспомогательный технический результат; раздел 3 посвящен построению эллипсоида робастной стабилизируемости билинейной системы в непрерывном времени; в разделе 4 рассматривается построение области робастной стабилизируемости; в разделе 5 полученные результаты обобщаются на случай дискретного времени; раздел 6 содержит заключительные комментарии.

Как и ранее, несмотря на то что в работе рассматриваются системы со скалярным управлением, предложенный подход в полной мере распространим и на системы с многомерным управлением.

Всюду далее  $\|\cdot\|$  — евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы, <sup>Т</sup> — символ транспонирования, I — единичная матрица соответствующего размера, а все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

#### 2. Вспомогательный результат: лемма Питерсена

Хорошо известная *лемма Питерсена* [26] эффективно применяется в разнообразных робастных постановках задач стабилизации и управления. Приведем ее в следующей формулировке.

Лемма 1 (Питерсен). Пусть  $G = G^{\top} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , а  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$  – ненулевые матрицы. Неравенство

$$G + M\Delta N + N^{\top}\Delta^{\top}M^{\top} \preccurlyeq 0$$

справедливо для всех

$$\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q} : \quad \|\Delta\| \leqslant 1$$

тогда и только тогда, когда существует число  $\varepsilon$ , такое что

$$G + \varepsilon M M^\top + \frac{1}{\varepsilon} N^\top N \preccurlyeq 0.$$

Таким образом, лемма Питерсена сводит проверку знакоопределенности семейства  $G + M\Delta N + N^{\top}\Delta^{\top}M^{\top}$  с матричной неопределенностью  $\Delta$  к гораздо более простой задаче разрешимости матричного неравенства относительно одной скалярной переменной  $\varepsilon$ .

Простое следствие леммы Питерсена представляет удобную форму записи, когда неопределенность ограничена по норме некоторым (отличным от единицы) числом  $\delta$ .

Следствие 1 (Питерсен). Пусть  $G = G^{\top} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , а  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$  – ненулевые матрицы. Неравенство

$$G + M\Delta N + N^{\top}\Delta^{\top}M^{\top} \preccurlyeq 0$$

справедливо для всех

$$\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q} : \quad \|\Delta\| \leqslant \delta$$

тогда и только тогда, когда существует число  $\varepsilon$ , такое что

$$G + \varepsilon \delta^2 M M^\top + \frac{1}{\varepsilon} N^\top N \preccurlyeq 0.$$

#### 3. Эллипсоид робастной стабилизируемости

Рассмотрим билинейную систему управления

(1) 
$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bxu + bu + Dw, \quad x(0) = x_0,$$

где  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, D \in \mathbb{R}^{n \times m}, F \in \mathbb{R}^{n \times p}, H \in \mathbb{R}^{q \times n}, b \in \mathbb{R}^{n}$ , с фазовым состоянием  $x \in \mathbb{R}^{n}$ , скалярным управлением  $u \in \mathbb{R}$ , внешним возмущением  $w \in \mathbb{R}^{m}$ , измеримым по t и ограниченным в каждый момент времени:

(2) 
$$||w(t)|| \leq \gamma$$
 при всех  $t \ge 0$ ,

и с матричной неопределенностью

(3) 
$$\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q} \colon \quad \|\Delta\| \leqslant \delta.$$

Класс возмущений (2) будем называть допустимым.

Целями раздела являются: a) построение эллипсоида робастной стабилизируемости билинейной системы (1), (2), замкнутой статической линейной обратной связью

(4) 
$$u = k^{\top} x, \quad k \in \mathbb{R}^n$$

49

и б) нахождение управления вида (4) такого, для которого этот эллипсоид максимален (по тому или иному критерию).

Напомним (см. [23]), что эллипсоид

(5) 
$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon x^\top P^{-1} x \leqslant 1 \right\}, \quad P \succ 0,$$

называется эллипсоидом робастной стабилизируемости, соответствующим управлению (4), если траектория системы (1), замкнутой управлением (4), исходя из любой точки  $x_0$  внутри эллипсоида  $\mathcal{E}$ , остается в нем при всех допустимых неопределенностях  $\Delta$  и всех допустимых внешних возмущениях w(t).

Обратим внимание на то, что матричная неопределенность  $\Delta$  не предполагается фиксированной; единственное требование — ее ограниченность по норме. Таким образом, все полученные далее результаты справедливы и для нестационарной неопределенности  $\|\Delta(t)\| \leq \delta$ .

Замкнув билинейную систему (1), (2) обратной связью (4), приходим к квадратичной динамической системе

$$\dot{x} = (A_c + F\Delta H + Bxk^{\top})x + Dw,$$

где

$$A_c = A + bk^{\top}.$$

В [2] было установлено следующее достаточное условие, при котором эллипсоид (5) является эллипсоидом стабилизируемости для квадратичной системы.

Теорема 1 [2]. Эллипсоид (5) является эллипсоидом стабилизируемости для системы

$$\dot{x} = (A + Bxh^{\top})x + Dw, \quad ||w(t)|| \leq \gamma,$$

если его матрица Р удовлетворяет матричным неравенствам

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\top} + \alpha P + \varepsilon BPB^{\top} & Ph & \gamma D \\ h^{\top}P & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^{\top} & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

при некоторых  $\alpha$  и  $\varepsilon$ .

Воспользовавшись теоремой 1, приходим к соотношениям

(6) 
$$\begin{pmatrix} (A_c + F\Delta H)P + P(A_c + F\Delta H)^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top & Pk & \gamma D \\ k^\top P & & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$
$$P \succ 0,$$

которые должны выполняться при некоторых значениях скалярных параметров  $\alpha$  и  $\varepsilon$  и всех допустимых неопределенностях  $\|\Delta\| \leq \delta$ .

Первому из соотношений (6) можно придать вид

$$\begin{pmatrix} A_c P + P A_c^\top + \alpha P + \varepsilon B P B^\top & Pk & \gamma D \\ k^\top P & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} HP & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} PH^\top \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta^\top \begin{pmatrix} F^\top & 0 & 0 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Воспользовавшись следствием 1, получаем эквивалентное условие существования числа  $\varepsilon_1$ , такого что

$$\begin{pmatrix} A_c P + P A_c^{\top} + \alpha P + \varepsilon B P B^{\top} & Pk & \gamma D \\ k^{\top} P & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^{\top} & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} + \\ + \varepsilon_1 \delta^2 \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{\top} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_1} \begin{pmatrix} P H^{\top} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} HP & 0 & 0 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

или по лемме Шура [27]

$$\begin{pmatrix} (A+bk^{\top})P+P(A+bk^{\top})^{\top}+\alpha P+\varepsilon BPB^{\top}+\varepsilon_{1}\delta^{2}FF^{\top} & Pk \quad \gamma D \quad PH^{\top} \\ k^{\top}P & -\varepsilon & 0 & 0 \\ \gamma D^{\top} & 0 & -\alpha I & 0 \\ HP & 0 & 0 & -\varepsilon_{1}I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Введем вспомогательную векторную переменную

$$y = Pk \in \mathbb{R}^n,$$

исключая k; при этом в силу  $P \succ 0$  вектор k восстанавливается единственным образом:

$$k = P^{-1}y.$$

В результате приходим к матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\top} + by^{\top} + yb^{\top} + \alpha P + \varepsilon BPB^{\top} + \varepsilon_1 \delta^2 FF^{\top} & y \quad \gamma D \quad PH^{\top} \\ y^{\top} & -\varepsilon & 0 & 0 \\ \gamma D^{\top} & 0 & -\alpha I & 0 \\ HP & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

со скалярными параметрами  $\varepsilon$  и  $\alpha$ , линейному относительно матричной переменной P, векторной переменной y и скалярной переменной  $\varepsilon_1$ .

Таким образом, получен следующий результат.

 $Tеорема 2. \ Пусть матрица P и вектор у удовлетворяют матричным неравенствам$ 

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\top} + by^{\top} + yb^{\top} + \alpha P + \varepsilon BPB^{\top} + \varepsilon_1 \delta^2 FF^{\top} & y \quad \gamma D \quad PH^{\top} \\ y^{\top} & -\varepsilon & 0 & 0 \\ \gamma D^{\top} & 0 & -\alpha I & 0 \\ HP & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

при некоторых значениях скалярной переменной  $\varepsilon_1$  и скалярных параметров  $\varepsilon$  и  $\alpha$ .

Тогда линейная обратная связь (4) с регулятором

$$k = P^{-1}y$$

робастно стабилизирует систему (1) внутри эллипсоида

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \quad x^\top P^{-1} x \leqslant 1 \right\}$$

при всех допустимых внешних возмущениях (2) и матричных неопределенностях (3).

Понятно, что не при любом размахе внешних возмущений  $\gamma$  эллипсоид стабилизируемости для системы (1), (2) будет существовать. Ответ на вопрос о максимально допустимом размахе  $\gamma$  дается следующим утверждением.

Teopema 3. Максимальный размах  $\hat{\gamma}$  внешних возмущений (2) в системе (1), при котором эллипсоид стабилизируемости существует, дается решением задачи

 $\max\gamma$ 

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\top} + by^{\top} + yb^{\top} + \alpha P + \varepsilon BPB^{\top} + \varepsilon_1 \delta^2 FF^{\top} & y \quad \gamma D \quad PH^{\top} \\ y^{\top} & -\varepsilon & 0 & 0 \\ \gamma D^{\top} & 0 & -\alpha I & 0 \\ HP & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

где оптимизация проводится относительно матричной переменой  $P = P^{\top} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , векторной переменной  $y \in \mathbb{R}^n$ , скалярных переменных  $\gamma$  и  $\varepsilon_1$  и скалярных параметров  $\varepsilon$  и  $\alpha$ .

Естественно стремиться максимизировать эллипсоид стабилизируемости по некоторому критерию. В частности, максимизируя (при  $\gamma \leq \hat{\gamma}$ ) объем эллипсоида, получаем следующее следствие из теоремы 2. Следствие 2. Пусть  $\widehat{P}, \, \widehat{y}$  — решение задачи выпуклой оптимизации  $\max \log \det P$ 

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\top} + by^{\top} + yb^{\top} + \alpha P + \varepsilon BPB^{\top} + \varepsilon_1 \delta^2 FF^{\top} & y \quad \gamma D \quad PH^{\top} \\ y^{\top} & -\varepsilon & 0 & 0 \\ \gamma D^{\top} & 0 & -\alpha I & 0 \\ HP & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

относительно матричной переменной  $P = P^{\top} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , векторной переменной  $y \in \mathbb{R}^n$ , скалярной переменной  $\varepsilon_1$  и скалярных параметров  $\varepsilon$  и  $\alpha$ .

Тогда эллипсоид

$$\widehat{\mathcal{E}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \quad x^\top \widehat{P}^{-1} x \leqslant 1 \right\}$$

является эллипсоидом робастной стабилизируемости для билинейной системы (1), замкнутой линейной обратной связью с регулятором

$$\widehat{k} = \widehat{P}^{-1}\widehat{y},$$

при всех допустимых внешних возмущениях (2) и матричных неопределенностях (3).

Замечание 1. В том случае когда матрица В единичная (или может быть приведена к единичной с помощью линейного преобразования), можно избежать необходимости проведения оптимизации на двумерной сетке. В самом деле, при этом первое из матричных неравенств в оптимизационной задаче из следствия 2 примет вид

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\top} + by^{\top} + yb^{\top} + \alpha P + \varepsilon P + \varepsilon_1 \delta^2 FF^{\top} & y \quad \gamma D \quad PH^{\top} \\ y^{\top} & -\varepsilon & 0 & 0 \\ \gamma D^{\top} & 0 & -\alpha I & 0 \\ HP & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Вводя новую скалярную переменную

$$\mu = \alpha + \epsilon$$

и тем самым исключая  $\varepsilon$ , получаем матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\top} + by^{\top} + yb^{\top} + \mu P + \varepsilon_1 \delta^2 FF^{\top} & y \quad \gamma D \quad PH^{\top} \\ y^{\top} & \alpha - \mu & 0 & 0 \\ \gamma D^{\top} & 0 & -\alpha I & 0 \\ HP & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

со скалярным параметром  $\mu$ , линейное относительно матричной переменной  $P = P^{\top} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , векторной переменной  $y \in \mathbb{R}^n$  и скалярных переменных  $\alpha$  и  $\varepsilon_1$ .

#### 4. Область робастной стабилизируемости

В разделе 3 был найден максимальный (по критерию объема) эллипсоид робастной стабилизируемости  $\mathcal{E}$  для системы (1), (2). Следуя [3], введем в рассмотрение множество, образованное объединением эллипсоидов робастной стабилизируемости; естественно назвать его областью робастной стабиизируемости системы (1), (2). Очевидно, что область робастной стабилизируемости будет обладать тем же свойством, что и каждый образующий ее эллипсоид робастной стабилизируемости — траектория системы, исходящая из любой точки  $x_0$  внутри этой области, будет оставаться в ней при всех допустимых внешних возмущениях (2) и всех допустимых неопределенностях  $\Delta$ . Следует подчеркнуть, что в отличие от эллипсоида робастной стабилизируемости, всем точкам которого соответствует общий стабилизирующий регулятор, здесь ситуация принципиально иная: различным точкам области робастной стабилизируемости могут соответствовать различные регуляторы, робастно стабилизирующие билинейную систему (1).

Отметим, что поскольку область робастной стабилизируемости является объединением эллипсоидов робастной стабилизируемости, то в общем случае она может оказаться невыпуклой.

В рамках техники линейных матричных неравенств по произвольному вектору c можно эффективно построить точку, лежащую на границе области робастной стабилизируемости системы по направлению c: выберем направление, определяемое вектором c единичной длины, и будем требовать принадлежности точки  $\rho c$  эллипсоиду робастной стабилизируемости, максимизируя параметр  $\rho$ . Поскольку условие принадлежности точки  $\rho c$  эллипсоиду робастной стабилизируемости с матрицей P представимо по лемме Шура в линейном относительно P и  $\rho$  виде

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho c^{\top} \\ \rho c & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

приходим к следующему результату, устанавливающему простую характеризацию области робастной стабилизируемости билинейной динамической системы, подверженной воздействию внешних возмущений.

Tеорема 4. Пусть <br/>с-заданный вектор и пусть  $\widehat{\rho}$  – решение задачи

#### $\max \rho$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\top} + by^{\top} + yb^{\top} + \alpha P + \varepsilon BPB^{\top} + \varepsilon_1 \delta^2 FF^{\top} & y \quad \gamma D \quad PH^{\top} \\ y^{\top} & -\varepsilon & 0 & 0 \\ \gamma D^{\top} & 0 & -\alpha I & 0 \\ HP & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & \rho c^{\top} \\ \rho c & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной  $P = P^{\top} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , векторной переменной  $y \in \mathbb{R}^n$ , скалярным переменным  $\rho$  и  $\varepsilon_1$  и скалярным параметрам  $\varepsilon$  и  $\alpha$ .

Тогда точка  $\hat{\rho}c$  лежит на границе области робастной стабилизируемости системы (1), (2) по направлению с.

#### 5. Система в дискретном времени

Рассмотрим билинейную систему управления в дискретном времени

(7) 
$$x_{\ell+1} = (A + F\Delta H)x_{\ell} + Bx_{\ell}u_{\ell} + bu_{\ell} + Dw_{\ell},$$

где  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^{n}$ , с начальным состоянием  $x_{\ell} \in \mathbb{R}^{n}$ , скалярным управлением  $u_{\ell} \in \mathbb{R}$ , внешним возмущением  $w_{\ell} \in \mathbb{R}^{m}$ , удовлетворяющим ограничению

(8) 
$$||w_{\ell}|| \leq \gamma$$
 при всех  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ ,

и с матричной неопределенностью

(9) 
$$\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q} \colon \quad \|\Delta\| \leqslant \delta.$$

Как и в разделе 3, цель состоит: а) в построении эллипсоида робастной стабилизируемости билинейной системы (7), (8), замкнутой статической линейной обратной связью

(10) 
$$u_{\ell} = k^{\top} x_{\ell}, \quad k \in \mathbb{R}^n,$$

и б) в нахождении управления вида (10) такого, для которого этот эллипсоид максимален по некоторому критерию.

Определение эллипсоида робастной стабилизируемости для дискретной системы остается практически таким же: эллипсоид

(11) 
$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon x^\top P^{-1} x \leqslant 1 \right\}, \quad P \succ 0,$$

называется эллипсоидом робастной стабилизируемости для системы (7), соответствующим управлению (10), если траектория системы (7), замкнутой управлением (10), исходя из любой точки  $x_0$  внутри эллипсоида  $\mathcal{E}$ , остается в нем при всех допустимых неопределенностях  $\Delta$  и всех допустимых внешних возмущениях  $w_{\ell}$ .

Замкнув билинейную систему (7), (8) статической линейной обратной связью (10), приходим к дискретной квадратичной

$$x_{\ell+1} = (A_c + F\Delta H + Bx_\ell k^\top)x_\ell + Dw_\ell,$$

где  $A_c = A + bk^{\top}$ .

В [2] установлено следующее достаточное условие, при котором эллипсоид (11) является эллипсоидом стабилизируемости для дискретной квадратичной системы, т.е. имеет место следующий результат. Теорема 5 [2]. Эллипсоид (11) является эллипсоидом стабилизируемости для системы

$$x_{\ell+1} = (A + Bx_{\ell}h^{\top})x_{\ell} + Dw_{\ell}, \quad ||w_{\ell}|| \leq \gamma,$$

если его матрица Р удовлетворяет матричным неравенствам

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & Ph & PA^{\top} \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^{\top} \\ 0 & PB^{\top} & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^{\top} \\ h^{\top}P & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ AP & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

при некоторых  $\alpha$  и  $\varepsilon$ .

Воспользовавшись теоремой 5, приходим к соотношениям

$$(12) \begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & Ph & P(A_c + F\Delta H)^{\top} \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^{\top} \\ 0 & PB^{\top} & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^{\top} \\ h^{\top}P & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ (A_c + F\Delta H)P & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix} \preccurlyeq \emptyset,$$

которые должны выполняться при некоторых значениях скалярных параметров  $\alpha$  и  $\varepsilon$  и всех допустимых неопределенностях (9).

Первому из соотношений (12) можно придать вид

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & Pk & PA_c^{\top} \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^{\top} \\ 0 & PB^{\top} & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^{\top} \\ k^{\top}P & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ A_cP & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \Delta \left( HP & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} PH^{\top} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta^{\top} \left( 0 & 0 & 0 & 0 & F^{\top} \right) \preccurlyeq 0.$$

Вновь воспользовавшись следствием 1, получаем эквивалентное условие существования числа  $\varepsilon_1,$  такого что

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & Pk & PA_c^{\top} \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^{\top} \\ 0 & PB^{\top} & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^{\top} \\ k^{\top}P & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ A_cP & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix}^{+} + \\ + \varepsilon_1 \delta^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & F^{\top} \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_1} \begin{pmatrix} PH^{\top} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (HP \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \preccurlyeq 0$$

или по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & Pk & P(A+bk^{\top})^{\top} & PH^{\top} \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^{\top} & 0 \\ 0 & PB^{\top} & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^{\top} & 0 \\ k^{\top}P & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ (A+bk^{\top})P & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P+\varepsilon_1\delta^2FF^{\top} & 0 \\ HP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Введем вспомогательную векторную переменную

$$y = Pk \in \mathbb{R}^n,$$

исключая k;при этом в сил<br/>у $P\succ 0$ вектор kвосстанавливается единственным образом:

$$k = P^{-1}y$$

В результате приходим к матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & y & PA^{\top} + yb^{\top} & PH^{\top} \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^{\top} & 0 \\ 0 & PB^{\top} & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^{\top} & 0 \\ y^{\top} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ AP + by^{\top} & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P + \varepsilon_1\delta^2 FF^{\top} & 0 \\ HP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

со скалярными параметрами  $\varepsilon$  и  $\alpha$ , линейному относительно матричной переменной P и векторной переменной y.

Таким образом, получен следующий результат.

 $Tеорема 6. \ Пусть матрица P u вектор у удовлетворяют матричным неравенствам$ 

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & y & PA^{\top} + yb^{\top} & PH^{\top} \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^{\top} & 0 \\ 0 & PB^{\top} & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^{\top} & 0 \\ y^{\top} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ AP + by^{\top} & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P + \varepsilon_1\delta^2 FF^{\top} & 0 \\ HP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \ P \succ 0,$$

при некоторых значениях скалярных параметров  $\varepsilon$  и  $\alpha$ .

Тогда линейная обратная связь (10) с регулятором

$$k = P^{-1}y$$

робастно стабилизирует систему (7) внутри эллипсоида

$$\mathcal{E} = \left\{ x_{\ell} \in \mathbb{R}^n \colon \quad x_{\ell}^{\top} P^{-1} x_{\ell} \leqslant 1 \right\}$$

при всех допустимых внешних возмущениях (8) и матричных неопределенностях (9).

Как и выше, эллипсоид стабилизируемости для системы (7), (8) существует не при любом размахе внешних возмущений  $\gamma$ . Ответ на вопрос о максимально допустимом размахе  $\gamma$  дается следующим дискретным аналогом теоремы 3.

Teopema 7. Максимальный размах  $\hat{\gamma}$  внешних возмущений (8) в системе (7), при котором эллипсоид стабилизируемости существует, дается решением задачи

 $\max \gamma$ 

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & y & PA^{\top} + yb^{\top} & PH^{\top} \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^{\top} & 0 \\ 0 & PB^{\top} & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^{\top} & 0 \\ y^{\top} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ AP + by^{\top} & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P + \varepsilon_1\delta^2 FF^{\top} & 0 \\ HP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

где оптимизация проводится относительно матричной переменой  $P = P^{\top} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , векторной переменной  $y \in \mathbb{R}^n$ , скалярных переменных  $\gamma$  и  $\varepsilon_1$  и скалярных параметров  $\alpha$  и  $\varepsilon$ .

Как и в непрерывном случае, максимизируя (для допустимого  $\gamma \leq \hat{\gamma}$ ) объем эллипсоида, получаем следующее следствие из теоремы 6. Следствие 3. Пусть  $\widehat{P},\,\widehat{y}$ — решение задачи выпуклой оптимизации  $\max\log\det P$ 

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & y & PA^{\top} + yb^{\top} & PH^{\top} \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^{\top} & 0 \\ 0 & PB^{\top} & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^{\top} & 0 \\ y^{\top} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ AP + by^{\top} & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P + \varepsilon_1\delta^2 FF^{\top} & 0 \\ HP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

относительно матричной переменной  $P = P^{\top} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , векторной переменной  $y \in \mathbb{R}^n$ , скалярной переменной  $\varepsilon_1$  и скалярных параметров  $\varepsilon$  и  $\alpha$ .

Тогда эллипсоид

$$\widehat{\mathcal{E}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \quad x^\top \widehat{P}^{-1} x \leqslant 1 \right\}$$

является эллипсоидом робастной стабилизируемости для билинейной системы (7), замкнутой линейной обратной связью (10) с регулятором

$$\widehat{k} = \widehat{P}^{-1}\widehat{y}$$

при всех допустимых внешних возмущениях (8) и матричных неопределенностях (9).

Наконец, следующая теорема является дискретной версией теоремы 4.

 $Teopema 8. Пусть c - заданный вектор и пусть <math>\hat{\rho} - peшeниe задачи$ 

 $\max \rho$ 

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & y & PA^{\top} + yb^{\top} & PH^{\top} \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^{\top} & 0 \\ 0 & PB^{\top} & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^{\top} & 0 \\ y^{\top} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ AP + by^{\top} & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P + \varepsilon_1\delta^2 FF^{\top} & 0 \\ HP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1I \end{pmatrix} \preccurlyeq \emptyset,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной  $P = P^{\top} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , векторной переменной  $y \in \mathbb{R}^n$ , скалярным переменным  $\rho$  и  $\varepsilon_1$  и скалярным параметрам  $\alpha$  и  $\varepsilon$ .

Тогда точка  $\hat{\rho}c$  лежит на границе области робастной стабилизируемости системы (7), (8) по направлению с.

#### 6. Заключение

В статье введены понятия эллипсоида робастной стабилизируемости и области робастной стабилизируемости билинейной системы управления, подверженной воздействию произвольных ограниченных внешних возмущений и содержащей структурированную матричную неопределенность; предложен простой и легкореализуемый с вычислительной точки зрения подход к их конструктивному построению.

Полученные результаты могут быть обобщены на системы с многомерным управлением и на задачи синтеза линейной обратной связи по выходу.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Mohler R.R. Bilinear Control Processes. N.Y.: Acad. Press, 1973.
- Хлебников М.В. Оптимизация билинейной системы управления при внешних возмущениях: I // АиТ. 2019. № 2. С. 46–63. Khlebnikov M.V. Optimization of Bilinear Control Systems Subjected to Exogenous Disturbances: I // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 2. P. 234–249.
- Хлебников М.В. Оптимизация билинейной системы управления при внешних возмущениях: II // АиТ. 2019. № 8. С. 29–43. Khlebnikov M.V. Optimization of Bilinear Control Systems Subjected to Exogenous Disturbances: II // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 8. P. 1390–1402.
- 4. Ryan E., Buckingham N. On Asymptotically Stabilizing Feedback Control of Bilinear Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1983. V. 28. No. 8. P. 863–864.
- Chen L.K., Yang X., Mohler R.R. Stability Analysis of Bilinear Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1991. V. 36. No. 11. P. 1310–1315.
- Čelikovský S. On the Global Linearization of Bilinear Systems // Syst. Control Lett. 1990. V. 15. No. 5. P. 433-439.
- Čelikovský S. On the Stabilization of the Homogeneous Bilinear Systems // Syst. Control Lett. 1993. V. 21. No. 6. P. 503–510.
- 8. Коровин С.К., Фомичев В.В. Асимптотические наблюдатели для некоторых классов билинейных систем с линейным входом // ДАН. Теория управления. 2004. Т. 398. № 1. С. 38–43.
- 9. Belozyorov V.Y. Design of Linear Feedback for Bilinear Control Systems // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2002. V. 11. No. 2. P. 493–511.
- Belozyorov V.Y. On Stability Cones for Quadratic Systems of Differential Equations // J. Dyn. Control Syst. 2005. V. 11. No. 3. P. 329–351.
- Andrieu V., Tarbouriech S. Global Asymptotic Stabilization for a Class of Bilinear Systems by Hybrid Output Feedback // IEEE Trans. Automat. Contr. 2013. V. 58. No. 6. P. 1602–1608.
- Coutinho D., de Souza C.E. Nonlinear State Feedback Design with a Guaranteed Stability Domain for Locally Stabilizable Unstable Quadratic Systems // IEEE Trans. Circ. Syst. I. 2012. V. 59. No. 2. P. 360–370.
- Omran H., Hetel L., Richard J.-P., et al. Stability Analysis of Bilinear Systems under Aperiodic Sampled-Data Control // Automatica. 2014. V. 50. No. 4. P. 1288–1295.

- Kung C.-C., Chen T.-H., Chen W.-C., et al. Quasi-Sliding Mode Control for a Class of Multivariable Discrete Time Bilinear Systems // Proc. IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics (SMC). Seoul, Korea. October 2012. P. 1878–1883.
- Athanasopoulos N., Bitsoris G. Constrained Stabilization of Bilinear Discrete-Time Systems Using Polyhedral Lyapunov Functions // Proc. 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 2502–2507.
- Athanasopoulos N., Bitsoris G. Stability Analysis and Control of Bilinear Discrete-Time Systems: A Dual Approach // Proc. 18th IFAC World Congress. Milano, Italy, August 28–September 2, 2011. P. 6443–6448.
- Tibken B., Hofer E.P., Sigmund A. The Ellipsoid Method for Systematic Bilinear Observer Design // Proc. 13th IFAC World Congress. San Francisco, USA, June 30– July 5, 1996. P. 377–382.
- Tarbouriech S., Queinnec I., Calliero T.R., et al. Control Design for Bilinear Systems with a Guaranteed Region of Stability: An LMI-Based Approach // Proc. 17th Mediterranean Conf. on Control & Automation (MED'09). Thessaloniki, Greece. June 2009. P. 809–814.
- Amato F., Cosentino C., Merola A. Stabilization of Bilinear Systems via Linear State Feedback Control // IEEE Trans. Circ. Syst. II: Express Briefs. 2009. V. 56. No. 1. P. 76–80.
- 20. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
- 21. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
- Khlebnikov M.V. Quadratic Stabilization of Bilinear Control Systems // 14th Eur. Control Conf. (ECC'15). Linz, Austria, July 15–17, 2015. IEEE Catalog Number (USB): CFP1590U-USB. P. 160–164.
- Хлебников М.В. Квадратичная стабилизация билинейной системы управления // АнТ. 2016. № 6. С. 47–60.
   Khlebnikov M.V. Quadratic Stabilization of Bilinear Control Systems // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 6. P. 980–991.
- Хлебников М.В. Квадратичная стабилизация дискретной билинейной системы управления // АнТ. 2018. № 7. С. 59–79.
   Khlebnikov M.V. Quadratic Stabilization of Discrete-Time Bilinear Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 7. P. 1222–1239.
- Khlebnikov M.V. Quadratic Stabilization of Discrete-Time Bilinear Control Systems // 2018 Eur. Control Conf. (ECC18). Limassol, Cyprus, June 12–15, 2018. IEEE Catalog Number (USB): CFP1890U-USB. P. 201–205.
- Petersen I.R. A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems // Syst. Control Lett. 1987. V. 8. P. 351–357.
- 27. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 28.08.2019 После доработки 20.10.2019 Принята к публикации 28.11.2019

# Робастное, адаптивное и сетевое управление

#### © 2020 г. А.А. ГАЛЯЕВ, чл.-корр. РАН (galaev@ipu.ru), П.В. ЛЫСЕНКО (pashlys@yandex.ru), (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СИНХРОНИЗАЦИЯ И КОЛЛЕКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГРУППЫ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ИДЕНТИЧНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ<sup>1</sup>

Изучаются явления синхронизации большого количества слабо связанных осцилляторов при наличии диссипативных связей. Эти связи учитываются в уравнениях динамики системы в форме диффузионных матриц и обеспечивают ассимптотически устойчивые колебания ансамбля как единого целого. В качестве примеров рассмотрены три типа взаимодействия осцилляторов: "каждый с каждым", "с ближайшими соседями" и "кольцевое с ближайшими соседями".

*Ключевые слова*: линейные системы, синхронизация, слабо связанные осцилляторы, мультиагентные системы.

**DOI:** 10.31857/S0005231020060050

#### 1. Введение

Синхронизация процессов — приведение двух или нескольких процессов к такому их протеканию, когда определенные стадии разных процессов совершаются в определенном порядке или одновременно. Синхронизация возникает в тех случаях, когда параллельно протекающим процессам необходимо взаимодействовать. Синхронизация колебательных систем — давно известный человечеству феномен, широко распространенный в биологии, технике и обществе. Механические часы и метрономы, лазеры, стрекочущие сверчки, клетки сердца, аплодирующие зрители — лишь некоторые примеры систем, проявляющих тенденцию к синхронному поведению. Оказалось, что эти и многие другие случаи могут быть объединены и объяснены в рамках единой теории.

Христиан Гюйгенс был первым исследователем, описавшим явление синхронизации еще в XVII в. Во время морских испытаний механических маятниковых часов он заметил, что, будучи подвешенными на общей опоре, часы рано или поздно начинают двигаться так, что их фазы становятся строго противоположны друг другу: в тот момент, когда один маятник отклонен максимально влево, другой отклонен строго вправо. К такому движению маятники приходили вне зависимости от разницы их начальных фаз. Назвав

 $<sup>^1</sup>$ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы Президиума РАН № 7.

открытое явление "симпатией часов", Гюйгенс дал ему качественное объяснение, правильно указав на причину такого поведения — связь двух часов через общую опору, балку.

С тех пор это явление, получив название синхронизации, было открыто во всех областях науки и техники — от акустики до биологии. Ярким примером являются колебания свечения светлячков на берегах реки Амазонки. Изначально "переключаясь" хаотически, светлячки каким-то образом чувствуют друг друга, начиная, подобно хлопающим в унисон аплодирующим зрителям после концерта, зажигаться и гаснуть синфазно, производя впечатление единого живого организма. Другие примеры синхронизации в биологических системах могут быть найдены, например, в [1]. Будем понимать синхронизацию как подстройку ритмов осциллирующих объектов за счет слабого взаимодействия между ними [2]. При этом важно, чтобы осцилляции каждого объекта были самоподдерживающимися, т.е. происходили бы без внешнего источника. Взаимодействие осцилляторов определяется степенью связи между ними. Уже приведенный случай взаимодействия механических часов посредством опоры обусловлен слабой связью. В публикациях синхронизацией в общем случае называется совпадение частот осцилляторов. Установившиеся фазы при этом ведут себя двояко, в системе наблюдается либо синфазное, либо противофазное движение. В первом случае фазы объектов совпадают (или почти совпадают), а во втором — отличаются на  $\pi$ . Первой моделью синхронизации следует считать модель Артура Уинфри, датируемую 60-ми годами XX в. Он стремился описать коллективную синхронизацию в больших группах осциллирующих объектов, исходя из того, что все объекты почти идентичны и связь между ними является слабой. В его модели фаза каждого осциллятора зависит от суммарного воздействия остальных объектов группы:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \left(\sum_{j=1, j \neq i}^N X(\theta_j)\right) Z(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

где  $\theta_i$  — фаза *i*-го осциллятора,  $\omega_i$  — собственная частота *i*-го осциллятора, N — количество осцилляторов. Чувствительность осциллятора к коллективному движению характеризуется функцией Z, а его собственный вклад в общее движение — функцией X.

Уинфри исследовал эту модель с помощью компьютерного моделирования и аналитических приближений. Он сделал ряд качественных выводов о возможностях синхронизации в зависимости от силы связи между объектами и распределения частот объектов. В дальнейшем Йошики Курамото заинтересовался результатами Уинфри и начал работать над коллективной синхронизацией начиная с 1975 г. Исходя из тех же положений, что и его предшественник, он упростил модель и показал, что поведение систем может быть описано моделью

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

где функция  $\Gamma_{ij}$  определяет связь между осцилляторами *i* и *j*.

Впоследствии это выражение приобрело вид

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

где коэффициент *К* характеризует силу связи между осцилляторами, став общеизвестной моделью Курамото, которая заняла доминирующее положение в области работ по синхронизации. Несмотря на кажущуюся простоту идеи, стоящей за этой моделью, она представляет большой интерес и ее исследованию и численным экспериментам посвящено множество публикаций (см. [2, 3]). Как видим, связь осцилляторов в данной модели является нелинейной, тогда как линейным моделям в контексте синхронизации в публикациях уделялось меньшее внимание. Они упоминаются, например, в [2, 4]. В [5–7] рассмотрены колебания в системе осцилляторов под действием упругих сил связи и описан известный эффект перекачки энергии между осцилляторами, а также гашение колебаний в случае наличия диссипативной вязкоупругой связи между осцилляторами и при взаимодействии с жестко закрепленной средой.

В последние годы данное направление науки активно развивается как теория мультиагентных систем. Синхронизация линейных систем второго порядка рассматривается в [8, 9] с приложением к механическим системам и энергетическим сетям, в которых также известны явления синхронизации фазы и уход основной частоты под нагрузкой. Общий критерий устойчивости для систем такого рода указан в [10]. В рамках сложившейся терминологии синхронное движение связанных объектов системы называется консенсусом, а алгоритмы управления, приводящие систему к такому движению, — алгоритмами консенсуса. В [8] рассматриваются системы с диффузионно-связанными объектами. Используя язык матриц Лапласа, лапласовских потоков в графе и произведение матриц Кронекера, авторы [8] приводят и доказывают теорему о синхронизации, которая говорит о собственных числах матриц, описывающих динамическую систему. Однако в [8] не приводится качественных оценок параметров движения объектов, соответствующих разным собственным числам. Кроме того, основной упор делается на внешнее управление системами и алгоритмы консенсуса.

В настоящей статье предлагается подход к описанию явления синхронизации в системе линейно связанных идентичных осцилляторов с упругими и вязкоупругими связями при наличии и отсутствии массивной среды передачи взаимодействия. Будут рассмотрены взаимодействия осцилляторов "каждый с каждым", "с ближайшими соседями" и "кольцевое взаимодействие с ближайшими соседями". Эти взаимодействия будут описаны при помощи диффузионных матриц, и будет исследована скорость установления консенсуса в зависимости от устройства этих матриц и, как следствие, их собственных чисел. Для обсуждаемых матриц будут получены результаты, которые расширяют и дополняют результаты, известные для классических матриц Тёплица, представленных, например, в [11].

# 2. Слабое вязкоупругое взаимодействие осцилляторов друг с другом

## 2.1. Уравнения движения группы синхронных осцилляторов при наличии слабого вязкоупругого взаимодействия

Рассмотрим систему синхронных осцилляторов, состоящую из N осцилляторов одной основной единичной частоты, связанных между собой слабыми вязкоупругими связями. Пронумеруем все осцилляторы по порядковому номеру i, так что i = 1, ..., N. Пусть  $x_i$  является координатой i-го осциллятора, тогда вязкоупругая сила, действующая со стороны всех осцилляторов на i-й, равна

$$F_i = -\sum_{j=1}^N k_{ij}(x_i - x_j) - 2\sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\dot{x}_i - \dot{x}_j),$$

 $i, j = 1, \ldots, N$ , a  $k_{ij}, \alpha_{ij} \ge 0$ .

Движение группы осцилляторов описывается системой линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ) следующего вида

(2.1) 
$$\ddot{x}_i = -x_i - \sum_{j=1}^N k_{ij}(x_i - x_j) - 2\sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\dot{x}_i - \dot{x}_j), \quad i = 1, \dots, N.$$

Слабость связи определяется условиями  $\sum_{j=1}^{N} k_{ij} \ll 1$ ,  $\sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} \ll 1$  для всех  $i = 1, \ldots, N$ , взаимность связи — условиями  $k_{ij} = k_{ji}$ ,  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$  для всех  $i, j = 1, \ldots, N$ .

Через H обозначим сумму энергий осцилляторов без учета энергии взаимодействия их друг с другом, т.е.

(2.2) 
$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left( x_i^2 + \dot{x}_i^2 \right).$$

Потенциальная энергия слабого вязкоупругого взаимодействия определяется выражением

(2.3) 
$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i>j}^{N} k_{ij} (x_i - x_j)^2.$$

Полная энергия системы равна H + U.

# 2.2. Преобразование уравнений движения

В тензорных обозначениях, где ведется суммирование по повторяющимся индексам, система уравнений движения принимает вид

(2.4) 
$$\ddot{x}_i(t) = -E_{ij}x_j(t) - K_{ij}x_j(t) - 2\Phi_{ij}\dot{x}_j(t),$$

65

где E — единичная матрица. Матрицы <br/>  $K, \ \Phi$ являются симметрическими, причем

$$\Phi_{ij} = \alpha_{ij}, \quad K_{ij} = k_{ij}$$
 при  $i \neq j$ 

И

$$\Phi_{ii} = -\sum_{j=1, i \neq j}^{N} \alpha_{ij}, \quad K_{ii} = -\sum_{j=1, i \neq j}^{N} k_{ij}.$$

В дальнейшем будем исследовать случай, когда  $\Phi = \alpha A$ ,  $K = \beta A$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$  — константы. Тогда уравнение (2.4) примет вид

(2.5) 
$$\ddot{x}_{i}(t) = -E_{ij}x_{j}(t) - \beta A_{ij}x_{j}(t) - 2\alpha A_{ij}\dot{x}_{j}(t).$$

#### 3. Основные положения

#### 3.1. Собственные числа системы (2.5)

Справедлива лемма 1.

Лемма 1. Характеристическое уравнение, порожденное системой (2.5),

(3.1) 
$$\det(\sigma^2 E_{ij} + 2\sigma\alpha A_{ij} + E_{ij} + \beta A_{ij}) = 0,$$

имеет решения вида

(3.2) 
$$\sigma_i = -\alpha \lambda_i \pm \mathbf{i} \sqrt{1 + \beta \lambda_i - \alpha^2 \lambda_i^2}, \quad i = 1, \dots, N,$$

где  $\lambda_i$  — собственные числа матрицы A.

Далее, чтобы определить динамику системы (2.5), нужно найти собственные числа матрицы A.

Лемма 2. Хотя бы одно из собственных чисел матрицы А равно нулю.

3.2. Динамика систем (2.4)-(2.5)

Лемма 3. Для системы ЛДУ вида (2.4) с любыми отличными от тривиальных начальными условиями существует решение, соответствующее коллективному периодическому движению центра масс с периодом  $2\pi$ .

Лемма 4. Если  $\lambda_i > 0$  для  $\forall i = 2, ..., N$ , а  $\lambda_1 = 0$ , то для любого начального положения системы (2.5) при  $t \to \infty$  остается только синхронизованное коллективное движение.

Леммы 1–4 известны как теорема о синхронизации [8].

Пусть начальное состояние системы (2.5) задается векторами  $x_i(0) = x_i^0$ ,  $\dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0$ . Тогда начальное состояние для коллективного движения задается векторами  $X(0) = \sum_{i=1}^N x_i(0) = X^0$ ,  $\dot{X}(0) = \sum_{i=1}^N \dot{x}_i(0) = \dot{X}^0$ . Энергия системы осцилляторов в начальный момент времени была равна

(3.3) 
$$H(0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left( x_i^2(0) + \dot{x}_i^2(0) \right).$$

На бесконечном горизонте времени все осцилляторы движутся синхронно и в системе осцилляторов остается энергия, равная начальной энергии коллективного движения, а именно

(3.4) 
$$H^* = \frac{1}{2N^2} \sum_{i=1}^{N} \left( X^2(0) + \dot{X}^2(0) \right) = \frac{1}{2N} \left( X^2(0) + \dot{X}^2(0) \right).$$

Соотношение (3.4) может быть переписано в виде

(3.5) 
$$H^* = \frac{1}{2N} \left( \left( \sum_{i=1}^N x_i(0) \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^N \dot{x}_i(0) \right)^2 \right).$$

Следствие 1. Из сравнения (3.3) и (3.5) следует, что

 $H(0) \geqslant H^*,$ 

причем знак равенства возможен, только если  $x_i(0) = x_j(0), \dot{x}_i(0) = \dot{x}_j(0)$ для любых  $i, j = 1, \ldots, N$ .

Действительно,

$$H(0) - H^* = \frac{1}{2N} \left( \sum_{i,j=1, i>j}^N (x_i(0) - x_j(0))^2 + \sum_{i,j=1, i>j}^N (\dot{x}_i(0) - \dot{x}_j(0))^2 \right) \ge 0.$$

#### 4. Примеры матриц взаимодействия

#### 4.1. Идентичное взаимодействие осцилляторов каждый с каждым

Предположим, что каждый из осцилляторов взаимодействует с каждым одинаково, тогда матрица A имеет вид

(4.1) 
$$A = \begin{pmatrix} N-1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ -1 & N-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & N-1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & N-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & N-1 \end{pmatrix}.$$

Такая матрица A описана в монографии [12] как матрица простой симметричной системы. В [12] исследованы ее собственные числа и указан исследуемый в данной статье случай a = (n - 1)b, перекрестные связи между осцилляторами в этом случае называются синхронизирующими.



Рис. 1. Поведение системы осцилляторов.

 $\mathcal{A}$ емма 5. Матрица A имеет два собственных значения, а именно:  $\lambda^A = 0$  кратности единица и  $\lambda^A = N$  кратности N - 1.

Согласно леммам 1 и 5 динамика системы (2.5) обуславливается собственными числами  $\sigma_{1,2} = \pm \mathbf{i}$  кратности единица и  $\sigma_{3,4} = -\alpha N \pm \mathbf{i} \sqrt{1 + \beta N - \alpha^2 N^2}$  кратности N - 1.

Результат моделирования динамики системы осцилля<br/>торов в случае N=32 показан на рис. 1.

# 4.2. Идентичное взаимодействие осцилляторов с ближайшими соседями

Пусть матрица А имеет вид

(4.2) 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вместо матрицы A подвергнем исследованию матрицу B = 2E - A, которую выпишем в явном виде

(4.3) 
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы B находятся по свойству собственных значений матриц, приведенному в доказательстве леммы 5, а именно  $\lambda_i^B = 2 - \lambda_i$ . Пусть N — размер квадратной матрицы B. Обозначим через

$$G_N(\lambda) = \det(B - \lambda E)$$

характеристические полиномы матрицы В.

Tеорема 1. Функции  $G_N(\lambda)$  при различных фиксированных  $N \geqslant 3$ удовлетворяют рекуррентной формуле

(4.4) 
$$\begin{cases} G_{N+1}(\lambda) = -\lambda G_N(\lambda) - G_{N-1}(\lambda), \\ G_3(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-2)(1+\lambda), \\ G_2(\lambda) = \lambda(\lambda-2). \end{cases}$$

Лемма 6. Члены последовательности (4.4) имеют формулу общего члена вида

(4.5) 
$$G_N(\lambda) = \frac{2-\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \left( \left( \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^N - \left( \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^N \right).$$

69



Рис. 2. Распределение собственных чисел матрицы A для N = 8.

Проведем сравнение полученного результата с результатом в [11, с. 219]. Матрица  $B - \lambda E$  похожа на матрицу Тёплица A из [11], за исключением первого и последнего диагональных элементов. В терминах [11]  $b = -\lambda$ , a = c = 1, а первый и последний диагональные элементы равны  $1 - \lambda$ . Нетрудно видеть, что формула (4.5) аналогична формуле из факта 3.20.7 монографии [11] в случае  $b^2 \neq 4ac$  за исключением степени, равной N вместо N + 1 и дополнительного коэффициента  $2 - \lambda$ .

Пример расположения на числовой оси собственных чисел, которые являются решением уравнения  $G_N(\lambda) = 0$ , приведен на рис. 2.

Лемма 7. Пусть матрицы A и B имеют размеры  $N \times N$ , где  $N = 2^n$ ,  $n \ge 2$  и  $G_{2^n}(\lambda) = \det(B - \lambda E)$ . Тогда

или, что то же самое,

$$G_{2^n}(\lambda) = G_{2^1}(\lambda) \cdot \prod_{k=2}^n \left( \frac{G_{2^{k-1}}^2(\lambda)}{G_{2^{k-2}}^2(\lambda)} - 2 \right),$$

при этом вычисленное по матрице  $B - \lambda E$  значение  $G_{2^0}(\lambda) = 1 - \lambda$  и отличается от допущения в формуле (4.6).

 ${\mathcal M}$ емма 8. Если  $\lambda_k^B$  — собственные числа матрицы B размера  $2^{n-1}$ , то  $\pm \sqrt{2 + \lambda_k^B}$  — собственные числа матрицы B размера  $2^n$ .

Следствие 2. Если  $\lambda_k^B$  — собственные числа матрицы B размера N, то  $\pm \sqrt{2 + \lambda_k^B}$  — собственные числа матрицы B размера 2N.

Доказательство следствия аналогично доказательству леммы 8.

Рассмотрим свойства собственных чисел матрицы B размера  $2^n$ .

Cвойство 1. Числа 0 и 2 являются собственными числами матрицы В размера  $2^n$ для всех  $n \geqslant 1.$ 

Свойство 2.  $|\lambda_k^B| \leq 2$  для всех  $n \geq 1$  и  $k = 1, \dots, 2^n$ .



Рис. 3. Поведение системы осцилляторов при взаимодействии с "ближайшими соседями".



Рис. 4. Поведение системы осцилляторов при взаимодействии с "ближайшими соседями".
Свойство 3. Среди  $\lambda_k^B$  присутствует собственное значение

(4.7) 
$$\lambda^B = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1}.$$

Свойство 1 следует из леммы 7, так как корни уравнения  $G_{2^1}(\lambda) = 0$  являются общими для всех многочленов  $G_{2^n}(\lambda)$  и всех  $n \ge 1$ .

Свойство 2 следует из вида собственных чисел, представленных в лемме 8, и свойства функции квадратного корня.

Свойство 3 справедливо, если в лемме 8 выбирать только знак "плюс" при вычислении собственных чисел начиная с  $\lambda_1^B = 0$ .

Свойство 2 означает, что у исходной матрицы A все  $\lambda_i > 0$  кроме единственного собственного значения, отвечающего за коллективное движение системы как единого целого. Выбрав собственное число матрицы B из свойства 3, получим, что у матрицы A размера  $2^n$  есть собственное число, равное

(4.8) 
$$\lambda^{A}(n) = 2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1}.$$

Поскольку  $\lambda^A$  близко к нулю, то в системе, помимо коллективного движения с единичной частотой, будет присутствовать слабо затухающее движение с частотой примерно  $1 + \frac{\beta \lambda^A}{2}$ .

Следствие 3. Для  $\lambda^A(n)$  выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda^A(n)}{\lambda^A(n+1)} = 4.$$

Следствие 3 означает, что для больших *n* скорость затухания осцилляций моды колебаний, наиболее близкой к основной частоте равной единице, или скорость установления консенсуса, при увеличении размерности системы в 2 раза уменьшается в 4 раза.

Результат моделирования в случае N = 32 для двух наборов начальных условий показан на рис. 3 и 4.

## 4.3. Идентичное кольцевое взаимодействие осцилляторов с ближайшими соседями

Матрица А имеет вид

(4.9) 
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Как и в подразделе 4.2, вместо матрицы A будем исследовать матрицу B = 2E - A, которая имеет вид

$$(4.10) B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Стоит отметить, что исследуемая матрица A по сути является матрицей Лапласа в терминах теории мультиагентных систем и теории сетей [8, 11], так как матрица 2E — это степенная матрица D для графа с матрицей смежности B, соответствующего исследуемой системе.

Собственные значения матрицы *В* находятся по свойству собственных значений матриц, приведенному в доказательстве леммы 5, а именно  $\lambda_i^B = 2 - \lambda_i$ . Для характеристических полиномов матрицы *В* справедлива теорема 2.

T e o p e M a 2.Функции  $G_N(\lambda)$  при различных фиксированных  $N \ge 5$  удовлетворяют рекуррентной формуле

(4.11) 
$$\begin{cases} G_{N+1}(\lambda) = -(1+\lambda)G_N(\lambda) - (1+\lambda)G_{N-1}(\lambda) - G_{N-2}(\lambda), \\ G_5(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 5\lambda + 2, \\ G_4(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2, \\ G_3(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2. \end{cases}$$

Выведем формулу общего члена последовательности (4.11).

Лемма 9. Члены последовательности (4.11) имеют формулу общего члена вида

(4.12) 
$$G_N(\lambda) = \left( \left( \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^N + \left( \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^N + 2 \cdot (-1)^{N+1} \right).$$

 ${\mathcal M}$ емма 10. Если  $\lambda_k^B$  — собственные числа матрицы B размера  $2^{n-1}$ , то  $\pm \sqrt{2 + \lambda_k^B}$  — собственные числа матрицы B размера  $2^n$ .

 $C \, \pi e \, g \, c \, \tau \, B \, \mu e \, 4.$  Если  $\lambda_k^B$  — собственные числа матрицы B размера N, то  $\pm \sqrt{2 + \lambda_k^B}$  — собственные числа матрицы B размера 2N. Доказательство следствия аналогично доказательству леммы 10.

доказательство следствия аналогично доказательству леммы 10.

Лемма 11. Если  $\lambda_k^B$  — собственные числа матрицы В размера N виda (4.3) (отсутствие кольцевого взаимодействия между ближайшими соседями), являющиеся нулями  $G_N(\lambda)$  вида (4.5), то  $\lambda_k^B$  — собственные числа кратности два матрицы В размерности 2N вида (4.10) (наличие кольцевого взаимодействия между ближайшими соседями), являющиеся нулями



Рис. 5. Поведение системы осцилляторов при кольцевом взаимодействии с "ближайшими соседями".

 $G_{2N}(\lambda)$  вида (4.12), кроме  $\lambda^B = \pm 2$  кратности единица, т.е.

(4.13) 
$$\underbrace{G_{2N}(\lambda)}_{(4.12)} = \frac{\lambda+2}{2-\lambda} \underbrace{G_N^2(\lambda)}_{(4.5)}.$$
 75



Рис. 6. Поведение системы осцилляторов при кольцевом взаимодействии с "ближайшими соседями".

Результат моделирования в случа<br/>е ${\cal N}=32$ для двух наборов начальных условий показан на рис. 5 и 6.

#### 5. Взаимодействие осцилляторов друг с другом и со средой

Добавим в рассматриваемую систему осцилляторов среду и предположим, что у каждого из осцилляторов есть возможность воздействовать на среду посредством только упругой связи. Пусть координаты среды имеют индекс 0, а взаимодействие осуществляется посредством силы  $F_{i0} = -k_{i0}(x_i - x_0)$ .

Движение группы осцилляторов и среды описывается системой ЛДУ вида:

$$M\ddot{x}_0 = -\sum_{j=1}^N k_{0j}(x_0 - x_j),$$

(5.1)

$$\ddot{x}_i = -x_i - \sum_{j=0}^N k_{ij}(x_i - x_j) - 2\sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\dot{x}_i - \dot{x}_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Здесь M — безразмерная константа, пропорциональная массе среды. Дополнительное условие взаимности связи со средой определяется соотношением  $k_{0j} = k_{j0} = k$  для всех  $j = 1, \ldots, N$ , остальные условия такие же, как в случае отсутствия среды.

Лемма 12. В системе "осцилляторы-среда", описываемой системой (5.1), для любых начальных условий существует периодическое коллективное движение двух типов с частотами

(5.2) 
$$\omega_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{kM + Nk + M \pm \sqrt{M^2k^2 + 2MNk^2 + N^2k^2 + 2M^2k - 2MNk + M^2}}}{\sqrt{M}}.$$

В случае когда  $k \ll 1, \; \frac{Nk}{M} \ll 1,$ эти частоты становятся приблизительно равными

(5.3) 
$$\omega_1 \approx 1 + \frac{k}{2}, \quad \omega_2 \approx \sqrt{\frac{Nk}{M}}.$$

Это означает, что в системе присутствуют колебания осцилляторов как единого целого с незначительно измененной основной частотой  $\omega_1$  ( $\omega_1 - 1 = \frac{k}{2} \ll 1$ )



Рис. 7. Энергия системы осцилляторов.

и низкочастотные колебания системы с частотой  $\omega_2$ , связанные с массивной средой. Интересен случай N = M. Оказывается, что при малых k сохраняется неравенство  $\omega_2 \ll \omega_1$ . Пример зависимости H(t) приведен на рис. 7.

#### 6. Обсуждение результатов

На рис. 1, 3, 4, 5 и 6 представлены динамика каждого осциллятора в отдельности, динамика разности координат первого и второго осцилляторов, а также поведение энергии системы (без учета взаимодействия) как функции времени для трех типов взаимодействия между осцилляторами. Средствами языка Python моделируется движение каждого из осцилляторов. Начальные значения скоростей и координат выбраны произвольным образом в диапазоне  $[0, 1], \alpha = 0.02, \beta = 0.01$ . На рис. 5 и 6 темпы установления коллективного движения соответствуют отличному от нулевого минимальному по модулю собственному значению матрицы  $A, \lambda = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$  и равны  $2\alpha\lambda = 0.001536$ . На рис. 3 и 4 темпы установления коллективного движения в четыре раза меньше и равны 0,000384, что согласуется со следствием 3. На рис. 1, 3, 4, 5 и 6 отличаются установившиеся уровни кинетической энергии системы осцилляторов, которые могут быть найдены по формуле (3.5) по известным начальным условиям. Из сравнения динамики разности  $x_1 - x_2$  на рис. 3 и 4, а также на рис. 5 и 6 видно, что амплитуда этой разности изменяется во времени по-разному. На рис. 3 и 6 амплитуда уменьшается монотонно, а на рис. 4 и 5 монотонность отсутствует, имеется во времени ярко выраженный максимум, после которого появляется монотонность убывания. Со временем в системе осцилляторов остается только их коллективное движение как единого целого, а именно незатухающие колебания на их основной частоте.

Когда появляется массивная среда, то в системе со временем остаются колебания двух типов: низкочастотные, соответствующие взаимодействию системы со средой, и собственные колебания осцилляторов как единого целого. Как видно из рис. 7, при наличии среды происходит перераспределение энергии между осцилляторами и средой, амплитуда колебаний осцилляторов то увеличивается, то уменьшается.

#### 7. Заключение

Скорость установления консесуса в динамических и мультиагентных системах является определяющей для их возможности проявлять на конечном горизонте времени коллективное поведение. Оказывается, что с возрастанием размерности системы в два раза эта скорость линейно возрастает с установленным в статье коэффициентом, равным четырем. С другой стороны, когда в системе присутствуют различные типы агентов, ее коллективная динамика становится более разнообразной, зависящей от свойств подсистем. Используемая модель позволяет в любой момент времени изменить количественный состав осцилляторов добавлением или удалением из нее любого их числа. Поэтому будущая статья будет посвящена исследованию явления синхронизации в переменной по количественному составу системе идентичных осцилляторов.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Поскольку собственные значения симметрической матрицы A вещественные, то существует ортогональная замена переменной  $\xi_i = Q_{ij}x_j$ , где  $Q_{ik}Q_{kj}^{-1} = E_{ij}$ , которая приводит систему уравнений (2.5) к виду (здесь суммирование по индексу *i* отсутствует)

(II.1) 
$$\ddot{\xi}_i(t) + 2\alpha(\operatorname{diag}\lambda_i)\dot{\xi}_i(t) + (1 + \beta\operatorname{diag}\lambda_i)\xi_i(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение для системы (П.1) принимает вид

(II.2) 
$$\prod_{i=1}^{N} (\sigma^2 + 2\alpha\lambda_i\sigma + 1 + \beta\lambda_i) = 0.$$

Все решения уравнения (П.2) задаются выражением (3.2). Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Строки матрицы A являются линейно зависимыми. Действительно, из вида матрицы A следует, что  $\sum_{i=1}^{N} A_{ij} = 0$  для  $\forall j$ . Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. При доказательстве леммы 3 зависимость от t опускаем. Обозначим  $X = \sum_{i=1}^{N} x_i$ . Просуммируем все уравнения системы (2.4). Получим цепочку равенств

$$\begin{split} \ddot{X} &= \sum_{i=1}^{N} \ddot{x}_{i} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left( -E_{ij}x_{j} - K_{ij}x_{j} - 2\Phi_{ij}\dot{x}_{j} \right) = \\ &= -\sum_{i=1}^{N} x_{i} - \sum_{i=1}^{N} K_{ii}x_{i} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, \ j \neq i}^{N} K_{ij}x_{j} - 2\sum_{i=1}^{N} \Phi_{ii}\dot{x}_{i} - 2\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, \ j \neq i}^{N} \Phi_{ij}\dot{x}_{j} = \\ &= -X + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, \ j \neq i}^{N} K_{ij}x_{j} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, \ j \neq i}^{N} K_{ij}x_{j} + \\ &+ 2\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, \ j \neq i}^{N} \Phi_{ij}\dot{x}_{j} - 2\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, \ j \neq i}^{N} \Phi_{ij}\dot{x}_{j} = -X. \end{split}$$

Получили ЛДУ второго порядка

$$(\Pi.3) \qquad \qquad \ddot{X} = -X,$$

которому соответствует периодическое движение с периодом  $2\pi$  для любых отличных от тривиальных начальных условий. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Утверждение леммы следует из леммы 1, так как Re  $\sigma_i = -\alpha \lambda_i < 0$  при  $\lambda_i > 0$ . Лемма 4 доказана.

 $\mathcal{A}$ оказательство леммы 5. Воспользуемся свойством для собственных чисел матрицы  $\widetilde{A} = A - NE$ . Если  $\widetilde{\lambda}_i$  — собственное число матрицы  $\widetilde{A}$ , то  $\widetilde{\lambda}_i = \lambda_i - N.$  Матрица  $\widetilde{A}$ имеет вид

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Все строки матрицы  $\widetilde{A}$  одинаковы, поэтому  $\widetilde{\lambda} = 0$  — собственное число этой матрицы кратности N - 1, т.е.  $\widetilde{\lambda}_i = 0$  для  $i = 1, \ldots, N - 1$ . Далее заметим, что  $\operatorname{Sp} \widetilde{A} = -N = \widetilde{\lambda}_N$ . Такой же вывод последовал бы, если сравнить  $\lambda_N = 0$ , полученное в лемме 2, и оставшееся последним ненайденным  $\widetilde{\lambda}_N$ . Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Вычислим сначала  $G_N(\lambda)$  через  $J_i(\lambda)$ , где  $J_i(\lambda)$  — детерминанты матрицы, полученной из матрицы  $B - \lambda E$  вычеркиванием последних N - i строк и столбцов при i = 2, ..., N - 1. Далее доказательство аналогично теореме 1 из [6].

Справедливы следующие рекуррентные формулы, если начать вычислять детерминант со строки с номером N, в которых опускаем зависимость от  $\lambda$ ,

(II.4) 
$$\begin{cases} G_N = (1-\lambda)J_{N-1} - J_{N-2}, \\ J_{N-1} = -\lambda J_{N-2} - J_{N-3}, \\ J_{n+1} = -\lambda J_n - J_{n-1}, \\ J_2 = -\lambda(1-\lambda) - 1. \end{cases}$$

Применим формулы (П.4) для систем, состоящих из N и N+1тел, и составим разность  $G_{N+1}-G_N.$  Она равна

$$G_{N+1} - G_N = (1 - \lambda)J_N - J_{N-1} - (1 - \lambda)J_{N-1} + J_{N-2} = (1 - \lambda)J_N - (2 - \lambda)J_{N-1} + J_{N-2}.$$

Заменим  $J_{N-2}$  его выражением из (П.4) на  $(-\lambda J_{N-1} - J_N)$ . Тогда эта разность равна

(II.5) 
$$G_{N+1} - G_N = (1-\lambda)J_N - (2-\lambda)J_{N-1} - \lambda J_{N-1} - J_N = -\lambda J_N - 2J_{N-1}.$$

Из первой формулы (П.4) и (П.5) получаем еще одно равенство

$$G_N = J_N + J_{N-1}.$$

Из двух последних формул получаем

$$G_{N+1} - G_N = -\lambda G_N + (\lambda - 2)J_{N-1}.$$

Справедлива цепочка равенств

$$G_{N+1} = -\lambda G_N + (\lambda - 2)J_{N-1} + G_N = -\lambda G_N + (\lambda - 1)J_{N-1} + J_N =$$
  
=  $-\lambda G_N - J_{N-1} - J_{N-2} = -\lambda G_N - G_{N-1}.$ 

Получили первое уравнение рекуррентной формулы (4.4). Функции  $G_2(\lambda)$ ,  $G_3(\lambda)$  появляются в результате прямого вычисления детерминантов при N = 2,3 соответственно. Доказательство теоремы 1 завершено.

Доказательство леммы 6. Запишем характеристическое уравнение для последовательности (4.4):

$$\gamma^{N+1} = -\lambda\gamma^N - \gamma^{N-1}$$

Получаем квадратное уравнение для  $\gamma$ 

$$\gamma^2 + \lambda\gamma + 1 = 0,$$

корни которого равны

$$\gamma_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}.$$

Таким образом, для общего члена последовательности  $G_N(\lambda)$  можно записать

(II.6) 
$$G_N(\lambda) = C_1(\lambda)\gamma_1^N + C_2(\lambda)\gamma_2^N.$$

 $C_1(\lambda), C_2(\lambda)$ можно найти, используя первые члены последовательности $G_N(\lambda):$ 

$$G_2(\lambda) = \lambda(\lambda - 2),$$
  

$$G_3(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda - 2)(1 + \lambda).$$

Подставив функции  $G_2(\lambda)$ ,  $G_3(\lambda)$  в (П.6), получаем систему уравнений относительно  $C_1(\lambda)$ ,  $C_2(\lambda)$ :

$$\begin{cases} C_1(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)^2 + C_2(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)^2 = \lambda(\lambda - 2), \\ C_1(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)^3 + C_2(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)^3 = (1 - \lambda)(\lambda - 2)(1 + \lambda). \end{cases}$$

Из этой системы находим функции

$$C_1(\lambda) = \frac{2-\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}},$$
  
$$C_2(\lambda) = -\frac{2-\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}}.$$

Подставляя выражения для  $C_1(\lambda)$ ,  $C_2(\lambda)$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в (П.6), получаем утверждение леммы 6.

Доказательство леммы 7. Для доказательства воспользуемся утверждением леммы 6. Введем обозначения:

$$C_1 = \frac{2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}},$$
$$a = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2},$$
$$b = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}.$$

Формула общего члена последовательности  $G_N$  примет вид (зависимость от  $\lambda$  опускаем)

$$G_N = C_1(a^N - b^N).$$

Подставим  $G_N$  в таком виде в правую часть (4.6) и получим цепочку равенств:

$$G_{2^{n}} = C_{1} \left( a^{2^{n-1}} - b^{2^{n-1}} \right) \left( \left( \frac{a^{2^{n-1}} - b^{2^{n-1}}}{a^{2^{n-2}} - b^{2^{n-2}}} \right)^{2} - 2 \right) =$$

$$= C_{1} \left( a^{2^{n-1}} - b^{2^{n-1}} \right) \left( \left( \frac{(a^{2^{n-2}} - b^{2^{n-2}})(a^{2^{n-2}} + b^{2^{n-2}})}{a^{2^{n-2}} - b^{2^{n-2}}} \right)^{2} - 2 \right) =$$

$$= C_{1} \left( a^{2^{n-1}} - b^{2^{n-1}} \right) \left( \left( a^{2^{n-2}} + b^{2^{n-2}} \right)^{2} - 2 \right) =$$

$$(\Pi.7) \qquad = C_{1} \left( a^{2^{n-1}} - b^{2^{n-1}} \right) \left( a^{2^{n-1}} + b^{2^{n-1}} + 2(ab)^{2^{n-2}} - 2 \right).$$

Нетрудно заметить, что

$$ab = \frac{1}{4}(\lambda^2 - \lambda^2 + 4) = 1.$$

Поэтому выражение (П.7) принимает вид

(II.8) 
$$G_{2^n} = C_1 \left( a^{2^{n-1}} - b^{2^{n-1}} \right) \left( a^{2^{n-1}} + b^{2^{n-1}} \right),$$

что является полным квадратом и приводится к виду

$$G_{2^n} = C_1 \left( a^{2^n} - b^{2^n} \right) = G_{2^n}.$$

Лемма 7 доказана.

 $\mathcal{A}$ оказательство леммы 8. Воспользуемся обозначениями леммы 7. Предположим, что  $\lambda = \pm \sqrt{2 + \lambda_k^B}$ , где  $\lambda_k^B$  — собственные числа матрицы B размера  $2^{n-1}$ , и вычислим  $G_{2^n} \left( \pm \sqrt{2 + \lambda_k^B} \right)$ . Справедлива цепочка равенств:

$$G_{2^{n}}\left(\pm\sqrt{2+\lambda_{k}^{B}}\right) = C_{1}\left(a^{2^{n}}-b^{2^{n}}\right) = C_{1}\left(\left(a^{2}\right)^{2^{n-1}}-\left(b^{2}\right)^{2^{n-1}}\right) =$$

82

$$= C_1 \left( \left( \frac{2 + \lambda_k^B - 2 + \lambda_k^B - 2\sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{4} \right)^{2^{n-1}} - \left( \frac{2 + \lambda_k^B - 2 + \lambda_k^B + 2\sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{4} \right)^{2^{n-1}} \right) = C_1 \left( \left( \frac{\lambda_k^B - \sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{2} \right)^{2^{n-1}} - \left( \frac{\lambda_k^B + \sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{2} \right)^{2^{n-1}} \right) = C_1 \left( \left( \frac{-\lambda_k^B + \sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{2} \right)^{2^{n-1}} - \left( \frac{-\lambda_k^B - \sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{2} \right)^{2^{n-1}} \right) = G_{2n-1} (\lambda_k^B) = 0.$$

Лемма 8 доказана.

Доказательство следствия 2. Выпишем отношение указанных собственных значений в явном виде и получим

$$\frac{\lambda^A(n)}{\lambda^A(n+1)} = \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_n = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}_n$$

Осуществим предельный переход в последнем выражении при  $n \to \infty.$  Следствие 2 доказано.

Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы 2 проведем аналогично доказательству теоремы 1. Вычислим сначала  $G_{N+1}(\lambda)$  через  $J_i(\lambda)$ , которые являются детерминантами матрицы

$$(\Pi.9) \qquad D = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

размера і.

Справедливы следующие рекуррентные формулы, если начать вычислять детерминант матрицы D со строки с номером 1, а затем со столбца с номером 1, в которых опускаем зависимость от  $\lambda$ ,

. .

(II.10) 
$$G_{N+1} = -\lambda J_N - 2J_{N-1} + 2(-1)^N$$

Для J<sub>N+1</sub> справедлива рекуррентная формула

(II.11) 
$$J_{N+1} = -\lambda J_N - J_{N-1}.$$

Покажем справедливость первой формулы в (4.11), вычислив разность ее левой и правой частей и несколько раз воспользовавшись соотношениями (П.10) и (П.11):

$$G_{N+1} + (1+\lambda)G_N + (1+\lambda)G_{N-1} + G_{N-2} =$$

$$= -\lambda J_N - 2J_{N-1} + 2(-1)^N - (1+\lambda)(\lambda J_{N-1} + 2J_{N-2} + 2(-1)^N) -$$

$$-(1+\lambda)(\lambda J_{N-2} + 2J_{N-3} - 2(-1)^N) - \lambda J_{N-3} - 2J_{N-4} - 2(-1)^N =$$

$$= -\lambda J_N - 2J_{N-1} - (1+\lambda)(-J_N + J_{N-2}) -$$

$$-(1+\lambda)(-J_{N-1} + J_{N-3}) - \lambda J_{N-3} - 2J_{N-4} =$$

$$= J_N - J_{N-1} + \lambda J_{N-1} - J_{N-2} - \lambda J_{N-2} - J_{N-3} - \lambda J_{N-3} + J_{N-2} - J_{N-4} =$$

$$= -J_{N-2} - \lambda J_{N-3} - J_{N-4} = 0.$$

Значения  $G_3(\lambda), G_4(\lambda), G_5(\lambda)$  вычисляются непосредственно. Теорема 2 доказана.

Доказательство леммы 9. Запишем характеристическое уравнение для последовательности (4.11):

$$\gamma^{N+1} = -(1+\lambda)\gamma^N - (1+\lambda)\gamma^{N-1} - \gamma^{N-2}.$$

Получаем кубическое уравнение для  $\gamma$ :

$$\gamma^3 + (1+\lambda)\gamma^2 + (1+\lambda)\gamma + 1 = 0,$$

корни которого равны

$$\gamma_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}, \quad \gamma_3 = -1.$$

Таким образом, для общего члена последовательности  $G_N(\lambda)$  справедливо

(II.12) 
$$G_N(\lambda) = C_1(\lambda)\gamma_1^N + C_2(\lambda)\gamma_2^N + C_3(-1)^N.$$

 $C_{1,2,3}(\lambda)$ можно найти, используя первые члены последовательности  $G_N(\lambda)$ приN=3,4,5:

$$G_3(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2,$$
  

$$G_4(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2,$$
  

$$G_5(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 5\lambda + 2.$$

Подставив функции  $G_3(\lambda)$ ,  $G_4(\lambda)$  и  $G_5(\lambda)$  в (П.12), получаем систему уравнений относительно  $C_1(\lambda)$ ,  $C_2(\lambda)$  и  $C_3(\lambda)$ :

$$\begin{cases} C_1(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)^3 + C_2(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)^3 - C_3(\lambda) = \\ = -\lambda^3 + 3\lambda + 2, \\ C_1(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)^4 + C_2(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)^4 + C_3(\lambda) = \\ = \lambda^4 - 4\lambda^2, \\ C_1(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)^5 + C_2(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)^5 + C_3(\lambda) = \\ = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 5\lambda + 2. \end{cases}$$

Из этой системы находим функции

$$C_1(\lambda) = 1,$$
  

$$C_2(\lambda) = 1,$$
  

$$C_3(\lambda) = -2$$

Подставляя выражения для  $C_{1,2,3}(\lambda)$  и  $\gamma_{1,2,3}$  в (П.12), получаем утверждение леммы 9.

 $\mathcal{A}$ оказательство леммы 10. Воспользуемся обозначениями леммы 7. Предположим, что  $\lambda = \pm \sqrt{2 + \lambda_k^B}$ , где  $\lambda_k^B$  — собственные числа матрицы B размера  $2^{n-1}$ , и вычислим  $G_{2^n} \left( \pm \sqrt{2 + \lambda_k^B} \right)$ . Справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} G_{2^{n}}\left(\pm\sqrt{2+\lambda_{k}^{B}}\right) &= \left(a^{2^{n}}+b^{2^{n}}-2\right) = \left(\left(a^{2}\right)^{2^{n-1}}+\left(b^{2}\right)^{2^{n-1}}-2\right) = \\ &= \left(\left(\frac{2+\lambda_{k}^{B}-2+\lambda_{k}^{B}-2\sqrt{(\lambda_{k}^{B})^{2}-4}}{4}\right)^{2^{n-1}}+ \\ &+ \left(\frac{2+\lambda_{k}^{B}-2+\lambda_{k}^{B}+2\sqrt{(\lambda_{k}^{B})^{2}-4}}{4}\right)^{2^{n-1}}-2\right) = \\ &= \left(\left(\frac{\lambda_{k}^{B}-\sqrt{(\lambda_{k}^{B})^{2}-4}}{2}\right)^{2^{n-1}}+\left(\frac{\lambda_{k}^{B}+\sqrt{(\lambda_{k}^{B})^{2}-4}}{2}\right)^{2^{n-1}}-2\right) = \\ &= \left(\left(\frac{-\lambda_{k}^{B}+\sqrt{(\lambda_{k}^{B})^{2}-4}}{2}\right)^{2^{n-1}}+\left(\frac{-\lambda_{k}^{B}-\sqrt{(\lambda_{k}^{B})^{2}-4}}{2}\right)^{2^{n-1}}-2\right) = \\ &= G_{2^{n-1}}(\lambda_{k}^{B}) = 0. \end{aligned}$$

Лемма 10 доказана.

Доказательство леммы 11. В лемме 7 было получено выражение

$$\underbrace{G_N(\lambda)}_{(4.5)} = \sqrt{\frac{2-\lambda}{\lambda+2}}(a^N - b^N),$$

которое возведем в квадрат. Получим

$$\left(\sqrt{\frac{2-\lambda}{\lambda+2}}(a^N-b^N)\right)^2 = \frac{2-\lambda}{\lambda+2}\left(a^{2N}+b^{2N}-2(ab)^N\right) =$$
$$= \frac{2-\lambda}{\lambda+2}(a^{2N}+b^{2N}-2).$$

Умножим последнее выражение на  $\frac{\lambda+2}{2-\lambda}$  и получим (4.12), а значит, справедливо (4.13).

Поскольку среди нуле<br/>й $\underbrace{G_N(\lambda)}_{(4.5)}$ присутствует  $\lambda^B=2$ кратности единица,

то после возведения в квадрат и умножения кратность единица у  $\lambda^B = 2$  остается, а появляется  $\lambda^B = -2$  тоже кратности единица. Лемма 11 доказана.

Доказательство леммы 12. Первое уравнение в системе (5.1) в обозначениях леммы 3 имеет вид

Система уравнений движения осцилляторов в системе (5.1), как и в доказательстве леммы 3, переписывается так:

$$(\Pi.14) \qquad \qquad \ddot{X} = -X - kX + Nkx_0.$$

В системе уравнений (П.13) и (П.14) присутствуют две моды колебаний с частотами

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{kM + Nk + M \pm \sqrt{M^2k^2 + 2MNk^2 + N^2k^2 + 2M^2k - 2MNk + M^2}}}{\sqrt{M}}$$

Лемма 12 доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Strogatz Steven H. From Kuramoto to Crawford: Exploring the Onset of Synchronization in Populations of Coupled Oscillators // Physica D. 2000. No. 143. P. 1–20.
- 2. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Мир физики и техники, 2003.
- Strogatz Steven H., Stewart Ian. Coupled Oscillators and Biological Syncronization // Sci. Amer. 1993. No. 12. P. 68–75.

- Shyam Krishan Joshi, Shaunak Sen, Indra Narayan Kar. Synchronization of Coupled Oscillator Dynamics // IFAC-PapersOnLine. 2016. V. 49. No. 1. P. 320–325.
- 5. *Трубецков Д.И., Рожнёв А.Г.* Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001.
- 6. Галяев А.А. О математической модели импульсного воздействия, вызванного ударом системы материальных точек об абсолютно жесткое препятствие // АиТ. 2006. № 6. С. 27–40.

 $Galyaev\ A.A.$  Impact of a System of Material Points Against an Absolutely Rigid Obstacle: a Model for its Impulsive Action // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 6. P. 856–867.

- Галяев А.А. О математической модели одномерного удара цепочки тел, обладающей вязкоупругими свойствами // АиТ. 2015. № 10. С. 40–49. Galyaev A.A. On the Mathematical Model of One-Dimensional Impact of a Chain of Viscoelastic Bodies // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 10. P. 1743–1750.
- 8. Bullo F. Lectures on Network Systems. Ed. 1.3. Kindle Direct Publishing, 2019.
- 9. Ren Wei Wu, Yongcan Cao. Distributed Coordination of Multi-agent Networks: Emergent Problems, Models, and Issues. London: Springer-Verlag, 2010.
- Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Устойчивость и робастная устойчивость однотипных систем // АнТ. 1996. № 11. С. 91–104.
   Polyak B.T., Tsypkin Y.Z. Stability and Robust Stability of Uniform System // Autom. Remote Control. 1996. V. 57. No. 11. P. 1606–1617.
- 11. Bernstein, Dennis S. Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas. Princeton University Press, 2011.
- 12. Соболев О. Однотипные связанные системы регулирования. М.: Энергия, 1973.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 12.08.2019 После доработки 18.09.2019 Принята к публикации 28.11.2019 © 2020 г. В.Н. БУКОВ, д-р техн. наук (v\_bukov@mail.ru) (ОАО "Бортовые аэронавигационные системы", Москва), Е.В. ОЗЕРОВ, канд. техн. наук (ozerovevg@yandex.ru) (ВУНЦ ВВС "Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина", Воронеж), В.А. ШУРМАН (shurman@niiao.ru) (Филиал АО "Раменское приборостроительное КБ", Жуковский)

## ЛОГИЧЕСКИЙ ПАРНЫЙ МОНИТОРИНГ С УЧЕТОМ СЕРОЙ ЗОНЫ

Развивается подход логического парного мониторинга функциональных узлов различной природы с одновременным контролем как основной (функциональной), так и контролирующей (мониторинговой) частей системы. Вводится определение серой зоны парного мониторинга, обусловленной ограниченными возможностями необходимого для мониторинга разделения частей функционального узла, реализующих его предназначение и осуществляющих встроенный контроль исправности. Исследуются проявления указанных ограничений и предлагается методика практического использования логического парного мониторинга с учетом их наличия. Приводится методический пример.

*Ключевые слова*: комплекс оборудования, функциональный модуль, мониторинговый модуль, функциональный узел, индикаторная матрица, логический парный мониторинг, серая зона логического парного мониторинга.

**DOI:** 10.31857/S0005231020060062

#### 1. Введение

Встроенные средства контроля (ВСК) [1, 2] относятся к наиболее распространенным современным решениям обеспечения требуемого уровня отказобезопасности различных технических систем. В системах же повышенной опасности, к которым, в частности, относятся авиационные комплексы бортового оборудования (КБО), встроенный контроль внедряется во все составляющие компоненты (системы, подсистемы, узлы, модули и даже микросхемы).

Другим важным обстоятельством является то, что по разным причинам комплексы, сопряженные с повышенной опасностью, почти всегда избыточны в аппаратном, функциональном и других аспектах. Это позволяет использовать сравнительный анализ функционирования физически однородных (одинаковых) и разнородных (различных по физической природе или техническому устройству) компонентов для выявления фактов наличия и мест неисправностей в реальном времени и в рабочем режиме системы [3–5].

Для мониторинга технического состояния используется широкий спектр подходов и алгоритмов [6–9].

Так, в [10, 11] предлагается общий подход к решению задачи мониторинга, основанный на модели оценки работоспособности бортового оборудования с

проверкой принадлежности команд к допустимым, с соответствующей логикой управления и выдачей сообщений об ошибке. Работа [12] содержит описание задач, выполняемых встроенной системой контроля, которая входит в состав бортового комплекса управления космического аппарата. Эти и другие аналогичные публикации нацелены на оценку надежности технических систем и/или обоснование алгоритмов их диагностирования (с учетом или без учета возможности восстановления [13]). При этом общим недостатком описанных подходов является вынужденное доверие создаваемым средствам диагностирования (априорное предположение об их непогрешимости).

В развитие технологии создания и применения ВСК в [14] разработан подход, названный логическим парным мониторингом (ЛПМ), в котором предлагается организация одновременного (квазиодновременного) оценивания правильности функционирования как объектов, подлежащих контролю, так и самих средств мониторинга (самоконтроля) с опорой на уже известные решения и алгоритмы, изложенные в доступных источниках по диагностике. При этом не накладывается ограничений на тип обнаруживаемых отказов (аппаратные, программные).

Вместе с тем эффективность (успешность) ЛПМ тесно связана с практическим (в виде конкретных аппаратных и/или программных решений) разделением технического устройства на части, выполняющие функциональную нагрузку, и части, осуществляющие встроенный контроль. Недостаточная строгость соответствующей границы при реализации подхода порождает неоднозначность результатов контроля, снижая его практическую полезность.

В [14] это обстоятельство не учитывалось, в то время как настоящая статья развивает указанный подход, содержит количественное описание функционально-конструктивного перекрытия функциональной и мониторинговой частей контролируемого компонента, а также предлагает способ преодоления отмеченного выше затруднения.

#### 2. Логический парный мониторинг

Базой ЛПМ является совокупность сопоставимых в смысле диагностирования функциональных узлов (ФУз), каждый из которых содержит функциональный модуль (ФМ), выполняющий функции узла по назначению, и мониторинговый модуль (ММ), предназначенный для диагностирования в реальном времени (мониторинга) технического состояния ФМ. Состав, структура и алгоритмы ММ могут быть различными и зависят от особенностей области техники, подходов и методов, использованных при его создании, а также целей и возможностей разработчика.

Суть ЛПМ заключается в том [14], что для двух контролируемых ФУз одного функционального назначения (с идентичными принципами работы и интерфейсами функциональной и мониторинговой частей), на входы которых подаются данные в общем случае от независимых источников (датчиков), рассматривается сочетание автономного (в пределах одного ФУз) и взаимно-перекрестного (между разными ФУз) мониторинга. По результатам мониторинга формируется значение индикаторной матрицы (ИМ), используемое для определения наличия и места (с точностью до модуля) одной или



Рис. 1. Схема ЛПМ функциональных узлов.

одновременно двух неисправностей в паре ФУз. Изложенное иллюстрирует рис. 1, где использованы обозначения:  $\tau$  – текущее время (номер цикла мониторинга),  $v_{\tau}$  – входные данные,  $y_{\tau}$  – выходные данные,  $p_{\tau}$  – контролируемые параметры (которые могут включать  $v_{\tau}$  и  $y_{\tau}$ ),  $s_{\tau}$  – оценка технического состояния ФМ.

Физическая природа, форма представления и процессы обработки данных могут быть разнообразными. Существенно то, что в силу односторонности связей процесс  $v_{\tau}^1 \rightarrow y_{\tau}^1$  не может повлиять на процесс  $v_{\tau}^2 \rightarrow y_{\tau}^2$  и наоборот. В то же время процессы и результаты обработки параметров  $p_{\tau}$  в мониторинговых модулях не влияют на процессы  $v_{\tau}^1 \rightarrow y_{\tau}^1$  и  $v_{\tau}^2 \rightarrow y_{\tau}^2$  в функциональных модулях.

При этом мониторинг осуществляется в условиях типовых предположений:

А. Потоки однотипных данных через различные ФМ не связаны между собой (функциональная автономность ФМ);

Б. Каждый функциональный узел ФМ+ММ выполнен на технологической базе и поддерживается инфраструктурными средствами, не зависящими от базы и средств других ФУз (техническая разнородность ФУз);

В. ФМ и ММ устроены таким образом, что совместимы для образования различных ФУз независимо от технологических и инфраструктурных особенностей (интерфейсная однородность ФУз);

Г. Процесс мониторинга разбит на циклы, внутри которых технические состояния ФМ и ММ неизменны (стационарность неисправностей ФУз).

Бинарные оценки  $s_{\tau}^{i-j}$ , определенным образом размещенные в ИМ размеров 2 × 2:

$$S^{\rm uhg}_\tau = \left[ \begin{array}{cc} s^{1-1}_\tau & s^{1-2}_\tau \\ \\ s^{2-1}_\tau & s^{2-2}_\tau \end{array} \right],$$

сформированы каждым (j-м) MM в  $\tau$ -м цикле мониторинга и по определению характеризуют исправность "1" или неисправность "0" каждого (i-ro) ФМ.

Показано в [14], что при справедливости предположения Б полная группа различных значений ИМ составляет 13 матриц, однозначно связанных с исправным, работоспособным (при отказе MM), а также неисправным состоянием обоих ФУз. Причем, в соответствии с индикаторным правилом ЛПМ [14], каждое значение ИМ с уникальной структурой однозначно определяет техническое состояние как каждого ФМ, так и каждого MM. Исключение составляет значение ИМ

(1) 
$$S_{\tau}^{\text{инд}} = \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

которому может соответствовать исправность обоих ФУз или неисправность одного из MM в виде выдачи ложного значения оценки "исправен". Но эта неоднозначность не касается утверждения об исправности ФМ, а в части MM может быть учтена конструктивными решениями<sup>1</sup>.

### 3. Понятие и описание серой зоны ЛПМ

Среди всевозможных схем конструктивного исполнения ФМ и ММ выделим иллюстрируемый на рис. 2 вариант как наиболее характерный. Здесь ММ представлен двумя последовательно соединенными частями: серой зоной (C3) и аналитическим сегментом (AC).

СЗ, будучи функциональной частью MM, из-за конструктивных особенностей не может быть отделена от ФМ (в смысле переключения потоков данных между разными ФМ и MM для реализации ЛПМ) по концептуальной границе. Но разделение возможно по другой, практически реализуемой границе. Именно такая ситуация названа наличием серой зоны, а ЛПМ – соответственно ЛПМ с учетом серой зоны, кратко ЛПМс.

Будем полагать, что технические состояния модуля ФМ, серой зоны СЗ и аналитического сегмента AC, рассматриваемых в ЛПМс, независимы друг от друга и соответствуют следующим моделям:



Рис. 2. Пояснение понятия «серой зоны» ЛПМ, связанной с переносом границы разделения ФУз.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> См. раздел 7.

а) ФМ, осуществляющий преобразование многомерного входного потока  $v_{\tau}$  в многомерный выходной поток  $y_{\tau}$ , может быть исправным – "1", если выполняет заданные функции надлежащим образом, и неисправным – "0" в противном случае; при этом неисправное состояние ФМ по определению должно обнаруживаться посредством исправного ММ, состоящего из СЗ и AC;

б) СЗ, передающая из ФМ в АС и частично обрабатывающая многомерный вектор параметров  $p_{\tau}$ , может быть исправной – "1", если не вносит искажения в  $p_{\tau}$  или вносимые ею искажения не влияют на качество выполнения требуемой функции и адекватность оценок технического состояния ФМ, формируемых АС, и неисправной – "0", если вносимые ею в  $p_{\tau}$  искажения приводят к инверсии оценок исправно работающего АС (на выходе "0" вместо "1" или "1" вместо "0");

в) АС, формирующий оценку технического состояния ФМ по вектору параметров  $p_{\tau}$ , может быть исправным – "1", если сформированная оценка адекватна получаемым параметрам, и неисправным – "0<sub>1</sub>", если ложная, не зависящая от получаемых параметров оценка исправности ФМ на выходе АС принимает значение "1", или неисправным – "0<sub>0</sub>", если – "0".

Существует объективная сложность точного (идеального) проведения в некоторых реальных технических устройствах границы между оборудованием встроенного контроля и основным оборудованием. Оптимальная или приемлемая (рациональная) мера такого разделения в каждом конкретном проекте определяется разработчиком. Предлагаемый подход дает разработчику возможность оценить эффективность (результативность) мониторинга в разных вариантах проведения такой границы.

## 4. Индикаторное правило ЛПМ с учетом серой зоны

Предлагаемые модели технического состояния не противоречат принятым ранее в [14], а лишь развивают их с учетом разделения MM на C3 и AC.

При наличии серой зоны схема ЛПМ принимает вид, показанный на рис. 3.



Рис. 3. Схема ЛПМс функциональных узлов.

	1	1	1			
Неисправность	Неисправность одного из AC <sup>*3</sup>					
одного из $\Phi M^{*1}$	A	C1	AC2			
и/или одной из CЗ* <sup>2</sup>	ложная "1"	ложный "0"	ложная "1"	ложный "0"	отсутствует	
ФМ1 или <b>C31</b>	$\left[\begin{array}{rrr}1&0\\1&1\end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{rr} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$	
ФМ2 или <b>C32</b>	$\left[\begin{array}{rrr}1 & 1\\1 & 0\end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{rrr}1 & 1\\0 & 1\end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{rrr}1&0\\0&0\end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{rrr}1 & 1\\ 0 & 0\end{array}\right]$	
ФМ1+ <b>СЗ2</b> или ФМ2+ <b>СЗ1</b>	$\left[\begin{array}{rrr}1&0\\1&0\end{array}\right]^{*6}$	$\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]^{*7}$	$\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right]^{*5}$	$\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]^{*7}$	$\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]^{*7}$	
ФМ1+ <b>С31</b> или ФМ2+ <b>С32</b> или отсутствует	$\left[\begin{array}{rrr}1&1\\1&1\end{array}\right]^{*4}$	$\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right]^{*5}$	$\left[\begin{array}{rrr}1&1\\1&1\end{array}\right]^{*4}$	$\left[\begin{array}{rrr}1&0\\1&0\end{array}\right]^{*6}$	$\left[\begin{array}{rrr}1&1\\1&1\end{array}\right]^{*4}$	

**Таблица 1.** Индикаторные матрицы  $S_{\tau}^{\text{инд.c}}$  при ЛПМс

<sup>\*1</sup> ненадлежащее выполнение возложенных функций, которое должно обнаруживаться посредством C3+AC,

<sup>\*2</sup> искажение данных, приводящее к инверсии результатов исправных AC,

\*<sup>3</sup> ложная выдача "исправен" или "неисправен",

<sup>\*4</sup> неоднозначно: все исправно или возможна неисправность AC1<sub>1</sub> или AC2<sub>1</sub> вместе или без неисправностей в паре ФМ1+C31 или ФМ2+C32,

<sup>\*5</sup> неоднозначно: возможна неисправность только  $AC1_0$  или в сочетании с одной из пар  $\Phi M1+C31$  или  $\Phi M2+C32$  или же только  $AC2_1$  в сочетании с одной из пар  $\Phi M1+C32$  или  $\Phi M2+C31$ ,

<sup>\*6</sup> неоднозначно: возможна неисправность только  $AC2_0$  или в сочетании с одной из пар  $\Phi M1+C32$  или  $\Phi M2+C31$  или же только  $AC1_1$  в сочетании с одной из пар  $\Phi M1+C32$  или  $\Phi M2+C31$ ,

<sup>\*7</sup> неоднозначно: возможно сочетание неисправностей самих ФМ1+C32 или ФМ2+C31 или же еще и в сочетании с неисправностью AC1<sub>0</sub> или AC2<sub>0</sub>.

И хотя индикаторная матрица с учетом серой зоны (ИМс) по размерам и обозначениям аналогична ИМ, ее содержание и интерпретация отличаются.

Объемы и структура передачи данных на рис. 3 аналогичны рис. 1, но увеличено число частей (до 6) и количество возможных комбинаций их исправных и неисправных состояний соответственно. С учетом предположений Б и В общее количество различных комбинаций технических состояний ФМ, СЗ и АС для пары ФУз при ЛПМс равно 45 (это множество комбинаций охватывает исправное состояние ФУз, а также одну, две и три неисправности различных его частей). В их число входят 15 комбинаций<sup>2</sup> с исправными СЗ, которые совпадают с комбинациями ЛПМ [14].

Совокупность различных значений ИМс увеличилась с 13 (для ЛПМ) до 14, пополнившись матрицей с нулевыми элементами. По аналогии с [14] все уникальные значения ИМс размещены в табл. 1.

Уникальные значения ИМс своим размещением в табл. 1 указывают (индикаторное правило) на соответствующие комбинации технических состояний

 $<sup>^2</sup>$ Всего 13 различных ИМ, но одна из них (1) соответствует трем комбинациям технических состояний ФМ и ММ.

модулей. Строки табл. 1, не содержащие в левом столбце набранные жирным шрифтом C31 и C32, идентичны строкам аналогичной таблицы в [14]. Кроме того, здесь строки, отмеченные в левом столбце суммой модулей, относятся к соответствующей комбинации одновременных неисправностей. Строки в левом столбце, не разделенные границей, представляют альтернативные варианты комбинаций неисправностей. Помимо этого, значения ИМс с неоднозначным толкованием комбинаций неисправностей занимают несколько ячеек и помечены верхними индексами от \*4 до \*7.

Используется табл. 1 следующим образом. По значению сформированной ИМс определяется занимаемая ею ячейка (или группа ячеек). Наименования строк и столбцов этой ячейки несут информацию об исправности, одной неисправности или комбинации неисправностей различных частей ФУз.

Так, значение ИМс

(2) 
$$S_{\tau}^{\text{инд.c}} = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

указывает на то, что в паре ФУз имеет место комбинация одновременных неисправностей в  $\Phi$ M1+AC1<sub>1</sub> или в C31+AC1<sub>1</sub>.

Значению ИМс

(3) 
$$S_{\tau}^{\text{нид.c}} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

соответствует один из вариантов:

неисправность только AC1<sub>0</sub>,

комбинация трех одновременных неисправностей: или  $AC1_0 + \Phi M1 + C31$ , или  $AC1_0 + \Phi M2 + C32$ , или  $\Phi M1 + C32 + AC2_1$ , или  $\Phi M2 + C31 + AC2_1$ .

Если же ИМс содержит только нулевые элементы, то это соответствует наличию одновременных неисправностей в паре модулей ФМ1+C32 или в паре модулей ФМ2+C31.

Как и ИМ в [14], ИМс со значением

(4) 
$$S_{\tau}^{\text{инд.c}} = \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

указывает на полную исправность обоих ФУз или на наличие неисправности в одном из сегментов  $AC1_1$  или  $AC2_1$ , а также на то, что вместо указанных состояний могут иметь место одновременные неисправности в парах  $\Phi M1+C31$ или  $\Phi M2+C32$ . Здесь неисправность любой из C3 явным образом маскирует (скрывает) неисправность "своего"  $\Phi M$ .

Если решаемую задачу сузить до подтверждения только исправного состояния  $\Phi M$ , то получение такого подтверждения в виде ИМс (4) обременяется альтернативами в виде одновременной неисправности  $\Phi M1+C31$  или  $\Phi M2+C32$ . Как и в [14], возможность неисправности AC1<sub>1</sub> или AC2<sub>1</sub> не отражается на оценке состояния  $\Phi M$ .

Из анализа следует, что серая зона ЛПМ вносит существенную неоднозначность в детерминированное определение места неисправности.

#### 5. Вероятностный ЛПМ с учетом серой зоны

Ситуация с учетом вероятностей обнаружения неисправностей и ошибок 1-го (ложная тревога) и 2-го (пропуск неисправности) рода в используемых ВСК рассмотрена в [14], в настоящей же статье анализируется вероятностный аспект, обусловленный только описанным разделением ММ на СЗ и АС.

Задача формулируется так. Значение ИМс, полученное при ЛПМс, считается свершившимся фактом. Требуется указать вероятности соответствующих этому факту технических состояний частей ФУз или комбинаций их технических состояний при известной доле "содержания" ММ, отнесенной к СЗ, т.е. если известна или задана относительная (отнесенная к некоторым образом определенной условной сложности ММ) условная сложность СЗ.

При этом в первом приближении предположения Б и В раздела 2 считаются выполняемыми точно, без вероятностного контекста.

Для получения количественных оценок, связанных с разделением MM на C3 и AC, будем считать, что MM реализован в виде вычислительной системы, для которой уместен показатель условной сложности в виде произведения числа полупроводниковых переходов (или ячеек памяти) в аппаратном обеспечении на число команд программного обеспечения. Тогда относительную сложность C3 в составе MM можно охарактеризовать параметром:

$$\lambda = \frac{\text{условная сложность C3}}{\text{условная сложность MM}} = \frac{(\text{число переходов C3}) \cdot (\text{число команд C3})}{(\text{число переходов MM}) \cdot (\text{число команд MM})}$$

Условная сложность в каждом конкретном случае может и должна быть если не точно рассчитана, то оценена. Мультипликативный показатель сложности предлагается в виде примера и, в принципе, может быть усовершенствован (и вообще заменен на иной при другой технической реализации MM).

В соответствии с [14] будем полагать, что в ММ могут возникать два вида простых неисправностей ("константные отказы": ложная оценка "1" или ложная оценка "0" на выходе) и один вид сложной неисправности (инверсия оценки на выходе с "1" на "0" и наоборот), распределенных равномерно по указанной условной сложности ММ с вероятностями соответственно  $Q_1$ ,  $Q_0$  и  $Q_{\rm инв}$  (на единицу сложности) при условии  $Q_1 + Q_0 \leq 1$ . Если первые две неисправности очевидным образом несовместны (не могут быть одновременно ложные "1" и "0"), то третью будем считать несовместной с первыми двумя в силу доминирования неисправностей AC<sub>1</sub> и AC<sub>0</sub> над неисправностью CЗ (в том смысле, что неисправность CЗ может проявиться только при отсутствии неисправностей AC<sub>1</sub> и AC<sub>0</sub>).

Полагая<sup>3</sup>, что при разделении MM на C3 и AC природа первых двух неисправностей MM полностью наследуется в AC, а последней – в C3, и, подсчитывая показатель  $\lambda$  относительной сложности C3, для конкретной реализа-

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Это предположение обусловлено отсутствием достаточно простой альтернативы. В дальнейшем, очевидно, потребуется более тщательное исследование.

ции MM, можно оценить вероятности указанных неисправностей AC<sub>1</sub>, AC<sub>0</sub> и C3 по формулам:

(5)  

$$Q_{AC(1)} = (1 - \lambda)Q_1,$$

$$Q_{AC(0)} = (1 - \lambda)Q_0,$$

$$Q_{C3} = \lambda Q_{\text{инв}} \underbrace{(1 - Q_1 - Q_0)}_{\text{Вероятность}}.$$

$$B_{\text{вероятность}}$$

Теперь, вводя вероятности  $Q_{\Phi M}$  ненадлежащего выполнения функций в каждом из  $\Phi M$ , которое по определению должно обнаруживаться посредством ВСК (C3+AC), можно использовать табл. 1 индикаторных матриц ЛПМс для вычисления вероятности той или иной комбинации неисправностей.

#### 6. Использование вероятностного ЛПМс

Поскольку ячейки со значениями ИМс соответствуют одновременному наличию независимых неисправностей, указанных в наименованиях строк (первый столбец) и столбцов (третья строка шапки), то для каждого конкретного значения ИМс вероятность событий в виде наличия комбинаций неисправностей определяется произведением соответствующих вероятностей в первом столбце и в третьей строке шапки табл. 1.

Комбинации неисправностей первого столбца табл. 1, соединенные союзом "или", а также строки и столбцы повторяющихся значений ИМс следует считать альтернативными вариантами комбинаций неисправностей, соответствующих данному значению ИМс.

Так, например, ИМс (3) указывает на альтернативы в виде комбинаций неисправностей: ФМ1+C32+AC2<sub>1</sub>, ФМ2+C31+AC2<sub>1</sub>, ФМ1+C31+AC1<sub>0</sub>, ФМ2+C32+AC1<sub>0</sub> или неисправности только AC1<sub>0</sub>.

Рассмотрим значение ИМс (2), получаемое в результате реализации парного мониторинга. В табл. 1 оно находится в единственной ячейке в левом верхнем углу.

Согласно (5) и табл. 1 значению (2) соответствует одна из двух комбинаций неисправностей:

1)  $\Phi$ M1+AC1<sub>1</sub> с ненормированной вероятностью

$$Q_{\Phi \mathrm{M1}}Q_{\mathrm{AC1}(1)} = (1 - \lambda) \, Q_{\Phi \mathrm{M1}}Q_1;$$

2) СЗ1+АС1<sub>1</sub> с ненормированной вероятностью

$$Q_{\rm C31}Q_{\rm AC1(1)} = \lambda (1-\lambda) Q_{\rm MHB} (Q_1 - Q_1^2 - Q_1 Q_0).$$

Поскольку указанные события представляют собой полную группу (только они соответствуют рассматриваемому значению ИМс) несовместных событий, то в результате нормирования получаем:

(6)  

$$Q_{\Phi M1+AC1(1)} = \frac{Q_{\Phi M1}}{Q_{\Phi M1} + \lambda Q_{\mu HB} (1 - Q_1 - Q_0)},$$

$$Q_{C31+AC1(1)} = \frac{\lambda Q_{\mu HB} (1 - Q_1 - Q_0)}{Q_{\Phi M1} + \lambda Q_{\mu HB} (1 - Q_1 - Q_0)}.$$

Непосредственно из формул (6) видно, что при уменьшении показателя относительной сложности C3, т.е. при  $\lambda \to 0$ , вероятность того, что при ИМс (2) неисправны одновременно  $\Phi$ M1+AC1<sub>1</sub>, стремится к единице, а C31+AC1<sub>1</sub> – к нулю. К этому же результату приводит увеличение вероятностей "константных" неисправностей AC1<sub>1</sub> и AC1<sub>0</sub>, когда  $Q_1 + Q_0 \to 1$ .

В другой крайней ситуации, когда  $Q_1 + Q_0 \rightarrow 0$ , соответствующие вероятности принимают значения

$$Q_{\Phi M + AC1(1)} = \frac{Q_{\Phi M1}}{Q_{\Phi M1} + \lambda Q_{\mu HB}},$$
$$Q_{C31 + AC1(1)} = \frac{\lambda Q_{\mu HB}}{Q_{\Phi M1} + \lambda Q_{\mu HB}},$$

из которых вытекают очевидные утверждения:

при  $Q_{\text{инв}} \rightarrow 0$  имеют место одновременные неисправности пары  $\Phi M1 + AC1_1$  (возвращение соответствующего детерминированного случая, рассмотренного в [14]);

при  $Q_{\Phi M1} \rightarrow 0$  имеют место одновременные неисправности пары C31+AC1<sub>1</sub> (возникновение детерминированного случая, отсутствующего в [14], здесь AC1 дает ложную "1" обоим ФМ независимо от их исправности, а неисправность C31 вызывает инверсию выхода исправного AC2 при оценивании исправности обоих ФМ).

Формулам (6) соответствует также утверждение о том, что по отношению к суждению об исправности ФМ1 вероятности ошибок 1-го (ложная тревога) и 2-го (пропуск неисправности) рода равны между собой и определяются формулой

$$\begin{split} P_{_{\text{обн }}\Phi M \mid 1} &= P_{_{\text{обн }}\Phi M \mid 2} = Q_{\Phi M1 + AC1(1)} Q_{C31 + AC1(1)} = \\ &= \frac{\lambda Q_{\Phi M1} Q_{_{\text{ИHB}}} (1 - Q_1 - Q_0)}{(Q_{\Phi M1} + \lambda Q_{_{\text{ИHB}}} (1 - Q_1 - Q_0))^2}. \end{split}$$

Как и следовало ожидать, уменьшение показателя относительной сложности СЗ ( $\lambda \to 0$ ) приводит к обнулению ошибок диагностирования неисправности ФМ1, т.е. возвращает к детерминированной задаче, описанной в [14]. Формулы (6) можно использовать иначе. Если на основе каких-либо соображений изначально заданы вероятности  $Q_{\Phi M1}$ ,  $Q_{\Phi M1+AC1(1)}$ ,  $Q_{C3+AC1(1)}$ ,  $Q_1$ ,  $Q_0$  и  $Q_{\text{инв}}$  неправильного функционирования ФУз1, то по формуле

$$\lambda_{\text{доп}} = \min \begin{cases} \frac{Q_{\Phi \text{M1}}(1 - Q_{\Phi \text{M1} + \text{AC1}(1)})}{Q_{\text{инв}}Q_{\Phi \text{M1} + \text{AC1}(1)}(1 - Q_1 - Q_0)}, \\ \\ \frac{Q_{\Phi \text{M1}}Q_{\text{C31} + \text{AC1}(1)}}{Q_{\text{инв}}\left(1 - Q_{\text{C31} + \text{AC1}(1)}\right)(1 - Q_1 - Q_0)} \end{cases}$$

можно оценить допустимое значение относительной условной сложности серой зоны этого узла ( $\lambda \leq \lambda_{\text{доп}}$ ). Для более тщательного обоснования требований к серой зоне нужны специальные исследования, но это выходит за рамки данной статьи.

## 7. Устранение неоднозначности мониторинга

Вернемся к детерминистской постановке задачи и дополним принятые в разделе 2 предположения еще одной позицией.

Д. При каждом переходе от предыдущего к последующему циклу мониторинга в любом функциональном узле может возникнуть только одна<sup>4</sup> неисправность (простота отказов  $\Phi$ Уз).

Тогда из табл. 1 значений индикаторной матрицы с учетом серых зон исключаются все сочетания различных неисправностей, и табл. 1 принимает вид табл. 2.

Неисправность	Неисправность одного из AC <sup>*3</sup>					
одного из $\Phi M^{*1}$	AC1		AC2			
или одной из СЗ* <sup>2</sup>	ложная "1"	ложный "0"	ложная "1"	ложный "0"	отсутствует	
ФМ1 или C31	_	_	_	_	$\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$	
ФМ2 или C32	_	_		_	$\left[\begin{array}{rrr}1&1\\0&0\end{array}\right]$	
отсутствует	$\left[\begin{array}{rrr}1&1\\1&1\end{array}\right]^{*4}$	$\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{rrr}1&1\\1&1\end{array}\right]^{*4}$	$\left[\begin{array}{rrr}1&0\\1&0\end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{rrr}1&1\\1&1\end{array}\right]^{*4}$	

Таблипа 2.	Инликаторные	матрины $S^{\nu}$	инд.с при	ЛПМс с	прелположением	лЛ
			<u>-</u>	0 = = = = 0 0		

\*<sup>1</sup> ненадлежащее выполнение возложенных функций, которое должно обнаруживаться посредством C3+AC,

 $^{\ast 2}$ искажение данных, приводящее к инверсии результатов исправных AC,

\*<sup>3</sup> ложная выдача "исправен" или "неисправен",

 $<sup>^{*4}</sup>$  неоднозначно: все исправно или возможна неисправность  ${\rm AC1}_1$  или  ${\rm AC2}_1.$ 

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Считается, что инфраструктурные неисправности типа прерывание питания или отсутствие связи с другими компонентами обнаруживаются независимыми средствами.

Таблица 2 содержит три случая неоднозначностей для полученного значения ИМс:

а) в первой строке соответствует неисправности либо ФМ1, либо СЗ1;

б) во второй строке соответствует неисправности либо ФМ2, либо СЗ2;

в) в третьей строке соответствует исправному состоянию пары ФУз или неисправности либо AC1<sub>1</sub>, либо AC2<sub>1</sub>.

Если условиями создания и использования средств мониторинга допускаются, пусть в ограниченных объемах, элементы тест-контроля, то результативность мониторинга (теперь диагностирования) можно увеличить, внося определенные изменения в систему.

В [14] описан способ снятия неоднозначности случая в, который заключается в использовании теста: следует искусственно ввести неисправность в один из ФМ, отключив его от участия в функционировании системы. Тогда в соответствии с табл. 1 обнаруживается неисправность AC1<sub>1</sub> или AC2<sub>1</sub>.

Аналогично можно снять неоднозначность случаев а и б.

Пусть неоднозначность относится к ФМ1 и СЗ1 (случай а). Тогда в функциональный модуль ФМ1 следует ввести изменения, делающие его заведомо неисправным. Затем повторить цикл проверки и проанализировать значение получаемой ИМс.

Если соответствующая индикаторная матрица не изменит свое значение, то это свидетельствует о неисправности именно ФМ1. Если же ИМс принимает значение (4), соответствующее согласно табл. 1 наличию одновременных неисправностей в ФМ1 и СЗ1, то это свидетельствует об изначально неисправной СЗ1.

Получение достоверной информации о состоянии каждого из модулей позволяет строить стратегию дальнейшего использования системы в целом:

при неисправности ФМ исключить его (вместе с соответствующей СЗ) из возможного участия в формировании конфигурации комплекса оборудования [15];

при неисправности C3 и дефиците исправных связок<sup>5</sup> ФМ+C3 можно использовать связку, содержащую данную C3, с принудительным инвертированием результата мониторинга в случае подтверждения исправности AC, взаимодействующего со связкой;

при неисправности AC исключить его из возможного участия в формировании функционального узла.

## 8. Пример

Детализируем пример, приведенный в [14] и относящийся к проверке входных данных типовой функции авионики. Укрупненная структура одного из уровней соответствующего модуля проверки входных данных (МПВД) представлена на рис. 4.

Выполняемый контроль (мониторинг) заключается в проверке устойчивости (ПУ) приема кодовых слов, поступающих по каналу связи, и в проверке

 $<sup>^5</sup>$ Ранее принято, что связка <br/>  $\Phi \rm M+C3$ неразделима в смысле коммутации каналов обмена данными.



Рис. 4. Один из уровней модуля проверки входных данных.

достоверности (ПД) получаемой информации. В случае успешности данные вместе с признаком их исправности передаются в следующий модуль (функциональное приложение — ФП) для обработки. В противном случае в следующий модуль передается признак отказа функции.

В частности, сужая перечень данных, получаемых вычислителем от системы воздушных сигналов (CBC) до двух параметров: высота абсолютная барометрическая (адрес 203)<sup>6</sup> и скорость вертикальная (адрес 212), традиционные проверки можно представить упрощенной структурой программы, показанной на рис. 5.

В данном примере ФМ – поток данных с адресами 203 и 212, а ММ – программа входной проверки.

У избыточного КБО может быть несколько систем получения и хранения данных о параметрах полета. Например, в авиации практикуется обособление информационных систем левого и правого бортов (по размещению компонентов на воздушном судне).

Введем обозначения адресов параметров полета: 203<sub>1</sub> и 212<sub>1</sub> – для одной системы (например, левого борта), 203<sub>2</sub> и 212<sub>2</sub> – для другой системы (правого борта).

В этом случае программа MM с учетом ЛПМ принимает показанный на рис. 6 вид. Здесь серым цветом и штриховыми линями (стрелками) выделены элементы программы, внесенные в MM с целью поддержки ЛПМ. Формирование управляющего кода мониторинга здесь не рассматривается, как и последующее использование результатов мониторинга.

Со всей очевидностью серая зона ЛПМс для такой программы определяется элементом "Подключение входа модуля к системе 1 или 2", определенные части которого неотделимы от каждого из каналов 1 и 2. Будем считать, что каждая из таких частей, связанная со "своим" каналом, включает одну ячейку памяти (для хранения необходимых атрибутов подключаемого канала) и пять машинных команд.

При этом реализация всего модуля требует порядка двух ячеек памяти и 50 машинных команд.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> Адресом (label) называется номер, постоянно закрепленный за соответствующим параметром полета. Адреса всех параметров фиксированы международными нормативными документами серии ARINC.



Рис. 5. Упрощенная программа входной проверки.

В результате параметр относительной сложности СЗ в составе ММ принимает значение  $\lambda = 0.05$ . С увеличением объема входной проверки этот параметр обратно-пропорционально уменьшается.



Рис. 6. Структура упрощенной программы MM, предусматривающей реализацию ЛПМ.

Пусть<sup>7</sup> в результате ЛПМс для ИМс получено значение (2). Задавшись, в рамках примера, значениями

$$Q_{\Phi \mathrm{M1}} = 10^{-3}, \quad Q_{\mathrm{mhb}} = 10^{-2}, \quad Q_1 + Q_0 = 10^{-2},$$

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup> Числовые значения носят чисто методический характер, обеспечивающий наглядность и доступность для проверки «с карандашом», нежели демонстрацию практически значимых результатов.

получаем в соответствии с формулами (6) вероятности обнаруженных отказов:

$$Q_{\Phi M1+AC1(1)} = \frac{10^{-3}}{10^{-3} + 0.05 \cdot 10^{-2} \cdot (1 - 10^{-2})} = 1 - 5 \cdot 10^{-3},$$
$$Q_{C31+AC1(1)} = \frac{0.05 \cdot 10^{-2} \cdot (1 - 10^{-2})}{10^{-3} + 0.05 \cdot 10^{-2} \cdot (1 - 10^{-2})} = 5 \cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, при получении в результате ЛПМс значения (2) с вероятностью 0,995 имеет место совместный отказ  $\Phi$ M1 и AC1<sub>1</sub>, а с вероятностью 0,005 – совместный отказ C31 и AC1<sub>1</sub>. В ЛПМ без серых зон соответствующие вероятности приняли бы значения 1 и 0.

#### 9. Заключение

Практическая реализация ЛПМ может столкнуться с наличием серой зоны, обусловленной невозможностью полноценного разделения функционального узла на составляющие его функциональный и мониторинговый модули. В этом случае уровень неоднозначности результата логического парного мониторинга (теперь ЛПМс) возрастает.

Предложена корректная модель получения результатов мониторинга в режиме одновременного контроля как функциональной, так и мониторинговой частей системы при указанных обстоятельствах. Существенным является то, что мониторинговая часть контролируется только в тех конкретных условиях, в которых работает в данный момент функциональная часть. В этом заключаются принципиальное отличие и преимущество предлагаемого подхода по сравнению с гипотетически возможной альтернативой в виде по необходимости полного тест-контроля мониторинговой части, ресурсоемкого и трудновыполнимого в реальном времени.

Всего подход позволит обнаружить от одной до трех одновременных неисправностей модуля ФМ, серой зоны СЗ и аналитического сегмента AC.

Практическая ценность предлагаемого подхода тесно связана с назревшим изменением взаимодействия функциональных частей технических изделий со встроенными в них средствами контроля. Максимальное сокращение серой зоны потребует не только преодоления технических сложностей, но и перераспределения ответственности разработчиков различных профилей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. ГОСТ Р 27.605–2013. Надежность в технике. Ремонтопригодность оборудования. Диагностическая проверка.
- 2. Долбня Н.А. Встроенные средства контроля бортовой вычислительной системы под управлением операционной системы реального времени как итеративный агрегированный объект // Вест. Самарс. гос. аэрокосм. ун-та. 2012. № 5 (36). С. 224–228.
- 3. *Чернодаров А.В.* Контроль, диагностика и идентификация авиационных приборов и измерительно-вычислительных комплексов. М.: Научтехлитиздат, 2017.

- Amato F., Cosentino C., Mattei M., Paviglianiti G. A Direct/Functional Redundancy Scheme for Fault Detection and Isolation on an Aircraft // Aerospace Sci. Technol. 2006. V. 10. No. 4. P. 338–345.
- 5. ГОСТ 20911-89. Техническая диагностика. Термины и определения.
- 6. *Pouliezos A.D., Stavrakakis G.S.* Real time fault monitoring of industrial processes. The Netherlands: Kluwer Acad. Publishers, 1994.
- Bartys M., Patton R.J., Syfert M., Heras S., Quevedo J. Introduction to the DAMADICS Actuator FDI Benchmark Study // Control Eng. Pract. 2006. V. 14. No. 6. P. 577–596. Special Iss. "Fault Diagnosis of Actuator Systems: the DAMADICS Benchmark Problem".
- 8. Blanke M., Kinnaert M., Lunze M., Staroswiecki M. Diagnosis and fault tolerant control. N.Y.: Springer, 2008.
- Patton R.J., Uppal F.J., Simani S., Polle B. Reliable Fault Diagnosis Scheme for a Spacecraft Attitude Control System // J. Risk Reliabilit. 2008. V. 222. No. 2. P. 139–152.
- 10. Мозгалевский А.В., Калявин В.П. Системы диагностирования судового оборудования. Уч. пос. Л.: Судостроение, 1987.
- 11. Соколов Н.Л. Основные принципы диагностики работоспособности бортовой аппаратуры автоматических КА и выработки рекомендаций по устранению нештатных ситуаций // Успехи современного естествознания. 2007. № 6. С. 16–20.
- 12. Барановский А.М., Привалов А.Е. Системы контроля и диагностирования бортового оборудования малого космического аппарата // Изв. ВУЗов. Приборостроение. 2009. Т. 52. № 4. С. 51–56.
- Рябинин И.А., Черкасов Г.Н. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. Библиотека инженера по надежности. М.: Радио и связь, 1981.
- 14. Буков В.Н., Озеров Е.В., Шурман В.А. Парный мониторинг избыточных технических систем // АнТ. 2020. № 1. С. 93–116.
- 15. Буков В.Н., Бронников А.М., Агеев А.М., Гамаюнов И.Ф., Озеров Е.В., Шурман В.Н. Концепция управляемой избыточности комплексов бортового оборудования // Науч. чтения по авиации, посв. памяти Н.Е. Жуковского. Матер. XVI Всерос. науч.-практ. конф. / Гл. ред. С.П. Халютин (11–12 апр. 2019, Москва). М.: Изд. дом Акад. им. Н.Е. Жуковского, 2019. С. 17–33.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.И. Васильевым.

Поступила в редакцию 05.07.2019 После доработки 19.11.2019 Принята к публикации 28.11.2019

# Управление в социально-экономических системах

#### © 2020 г. М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р экон. наук (innovation@ssau.ru) (Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева)

## СВОЙСТВА ПРЕДПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ ШТАКЕЛЬБЕРГА

Рассматривается теоретико-игровая проблема выбора оптимальных стратегий агентов рынка олигополии при линейной функции спроса и нелинейных функциях издержек агентов. Исследуются предположительные вариации, т.е. предполагаемые агентом изменения действий контрагентов, оптимизирующие функции полезности последних. Доказаны формулы расчета предположительных вариаций каждого агента, суммы предположительных вариаций всех агентов окружения, исследованы знаки предположительных вариаций для произвольного уровня лидерства по Штакельбергу. Установлены следующие свойства предположительных вариаций: 1) вариации отрицательны, если для всех агентов окружения функции издержек либо выпуклы, либо вогнуты; 2) вариации положительны, если в окружении агенты с вогнутыми функциями издержек (т.е. с положительным эффектом расширения масштаба), превалируют над агентами с выпуклыми функциями издержек (т.е. с отрицательным эффектом). Сумма предположительных вариаций агента: 1) отрицательна и ограничена по модулю единицей, если агенты окружения преимущественно имеют выпуклые функции издержек; 2) положительна и не ограничена, если среди окружения преобладают агенты с вогнутыми функциями издержек.

*Ключевые слова*: олигополия, игра Штакельберга, степенная функция издержек, многоуровневое лидерство.

**DOI:** 10.31857/S0005231020060074

#### 1. Введение

На рынке олигополии действия агентов, максимизирующие их полезности, приводят к равновесию Нэша [1, 2] как решению соответствующей игры. Несмотря на то, что функции полезности агентов считаются известными всем агентам, при моделировании олигополии имеет место фундаментальная проблема несовершенства информированности агента о действиях других агентов (окружения). Проблема заключается в априорной неосведомленности каждого агента о том, на основе какого предположения окружение выбирает действия: предположения о неизменности действий агента, предположения о наилучшем ответе агента на действия окружения, предположения о наилучшем ответе агента на наилучший ответ окружения и т.д. В теоретико-игровой модели рынка олигополии предположительные вариации являются классическим инструментом [3] описания информированности агента о стратегиях других агентов (окружения). Предположительная вариация характеризует предполагаемое агентом ответное изменение действия (объема выпуска) контрагента, оптимизирующее функцию полезности последнего при выбранном действии первого.

В линейной модели выбора оптимальных действий агентов рынка олигополии [4–10], в которой обратная функция спроса и функции издержек агентов являются линейными, вычисление предположительных вариаций не вызывает затруднений. В нелинейной модели [11–14], в которой обратная функция спроса линейная, а функции издержек агентов нелинейные, предположительные вариации в аналитическом виде получены только в играх с лидером (лидерами) по Штакельбергу [15] первого уровня. В случае лидерства более высоких уровней предположительные вариации находятся из систем нелинейных уравнений [16] на каждом уровне и для каждого агента.

В данной статье ставится задача вычисления предположительных вариаций в аналитическом виде для произвольного уровня лидерства по Штакельбергу, что позволяет исследовать влияние уровня лидерства на характер поведения игроков.

#### 2. Методология

Рассматривается задача оптимального стратегического выбора олигополистов, относящаяся к классу агрегативных игр [17, 18], в которых функция полезности игрока зависит не только от его собственной стратегии, но и от стратегий, выбранных окружением. В этом случае нелинейная модель выбора оптимальных действий агента рынка олигополии имеет вид

(1)  

$$Q_{i}^{*} = \arg \max_{Q_{i} \ge 0} \prod_{i} (Q, Q_{i}) = \arg \max_{Q_{i} \ge 0} \left\{ (a - bQ) Q_{i} - C_{Fi} - B_{i} Q_{i}^{\beta_{i}} \right\},$$

$$i \in N, \quad Q = \sum_{i \in N} Q_{i},$$

где  $Q_i, \Pi_i$  — действие (объем выпуска) и функция полезности (прибыль) *i*-го агента; N — множество агентов рынка; n — количество агентов; Q суммарный объем рынка;  $C_{Fi} > 0, B_i > 0, \beta_i \in (0, 2)$  — коэффициенты функций издержек вида  $C_i(Q_i) = C_{Fi} + B_i Q_i^{\beta_i}, C_{Fi}$  интерпретируется как постоянные издержки; a > 0, b > 0 — коэффициенты обратной функции спроса; символом «\*» обозначены оптимальные значения. В общем случае функции издержек агентов могут быть как вогнутыми при  $0 < \beta_i < 1$ , так и выпуклыми при  $1 < \beta_i < 2$ ; первый случай соответствует положительному эффекту расширения масштаба и наблюдается на стадии становления фирмы, второй случай, присущий зрелым фирмам, характеризует отрицательный эффект расширения масштаба [19].

Равновесие Нэша в модели (1) определяется из необходимых условий экстремума:

(2) 
$$\frac{\partial \Pi_i \left( Q_i, x_{ij} \right)}{\partial Q_i} = 0, \quad i, j \in N,$$

где  $x_{ij} = Q'_{jQ_i}$  — предположительная вариация в уравнении реакции *i*-го агента, т.е. предполагаемое изменение выпуска *j*-го агента в ответ на единичный прирост выпуска *i*-го агента.

Уровень лидерства агента по Штакельбергу определяются следующим образом. Нулевой уровень, соответствующий ведомому  $\eta_0$ -му агенту, имеет место, если в  $\eta_0$ -м уравнении системы (2) полагается  $x_{\eta_0 j}^0 = 0 \quad \forall j \in N \setminus \eta_0$ , где верхний индекс предположительной вариации обозначает уровень лидерства r. Первый уровень лидерства  $\eta_1$ -го агента возникает, если в  $\eta_1$ -м уравнении системы (2) вариации  $x_{\eta_1 j}^1$  вычисляются дифференцированием по  $Q_{\eta_1}$  остальных (N-1) уравнений (2), в которых полагается  $x_{ij}^0 = 0$  $\forall j \in N \setminus i$ . Произвольный r-й уровень лидерства  $\eta_r$ -го агента возникает, если в  $\eta_r$ -м уравнении системы (2) вариации  $x_{\eta_r j}^r$  вычисляются дифференцированием то  $Q_{\eta_r}$  остальных (N-1) уравнений (2), в которых полагается  $x_{ij} = x_{ij}^{r-1} \forall j \in N \setminus i$ .

Подмножество агентов окружения *i*-го агента, имеющих один и тот же уровень лидерства, обозначено символом  $M = \{l \in N \setminus i\}$ , число элементов этого множества обозначено символом m = n - 1.

Для модели выбора действий (1) i-го агента на r-м уровне лидерства решения системы (2) удовлетворяют [16] системе уравнений

(3) 
$$F_i^r = a - bQ - bQ_i \left(1 + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^r\right) - B_i \beta_i Q_i^{\beta_i - 1} = 0,$$
$$Q_i > 0, \quad i \in N.$$

при условии

(4) 
$$g_i^r = u_i - S_i^r < 0, \quad i \in N,$$

с учетом следующих обозначений

(4a) 
$$u_i = -2 - \frac{B_i \beta_i (\beta_i - 1) Q_i^{\beta_i - 2}}{b} < 0, \quad S_i^r = \sum_{l \in N \setminus i} x_{il}^r, \quad i \in N,$$

где  $g_i^r(\bullet), i \in N$  — непрерывные и дифференцируемые по  $Q_i$  функции, характеризующие выполнение достаточного условия максимума (условия унимодальности) функции (1) *i*-го агента;  $u_i(\bullet), i \in N$  — функции, характеризующие влияние нелинейности функций издержек агентов на унимодальность функции полезности *i*-го агента (при  $u_i = -2$  система (3) является линейной);  $S_i^r$  — величина суммы предположительных вариаций *i*-го агента относительно действий окружения на *r*-м уровне лидерства;  $F_i^r(\bullet), i \in N$  — непрерывные и дифференцируемые по  $Q_i$  функции. Для последующих содержательных интерпретаций введем следующую трактовку<sup>1</sup> условий (4): если функция  $F_i^r$  характеризует темп (или «скорость») изменения функции полезности

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Здесь используется аналогия с терминологией, принятой в механике при решении задачи о вертикальном равноускоренном движении тела, которое достигает максимальной высоты подъема в случае, если ускорение гравитации g направлено противоположно начальной скорости, т.е. отрицательно.

*i*-го агента на *r*-м уровне лидерства, то функцию  $g_i^r$  можно назвать «ускорением» функции полезности агента. Поэтому согласно условию (4) функция полезности агента является унимодальной в окрестности стационарной точки, определяемой уравнением (3), если «ускорение» функции полезности отрицательно.

По сравнению с линейной моделью, для которой условие (4) имеет вид  $g_i^r = -2 - S_i^r < 0, i \in N$ , в нелинейной модели (1) функция полезности агента может быть неунимодальной не только вследствие влияния действий окружения, т.е. ситуаций, когда  $S_i^r < -2$ , но и в результате положительного эффекта расширения масштаба функции издержек агента. Поэтому введем предположение о том, что темп снижения предельных издержек при возрастающей отдаче от масштаба (т.е.,  $\beta_i < 1$ ) меньше, чем темп снижения цены при увеличении объема предложения

(5) 
$$\left| MC'_{iQ_i} \right| = B_i \beta_i \left| \beta_i - 1 \right| Q_i^{\beta_i - 2} < b \,\,\forall \beta_i < 1,$$

где  $MC_i = C'_{iQ_i} = B_i \beta_i Q_i^{\beta_i - 1}$  — предельные издержки *i*-го агента. Предположение (5) гарантирует выполнение условия (4), если не выполнено условие  $|S_i^r| < 1$ .

Поставим задачу нахождения вектора предположительных вариаций *i*-го агента  $\mathbf{x}_i^r = \left\{ x_{ij}^r, j \in N \right\}$  в аналитическом виде при произвольном значении r.

## 3. Результаты

Способ вычисления предположительных вариаций для различных уровней лидерства сформулирован в виде утверждения, доказательство которого приведено в Приложении.

Утверждение 1. В системе уравнений (3), соответствующей модели выбора действий агентов (1) при линейной функции спроса и нелинейных функциях издержек, предположительные вариации выпуска l-го агента в уравнении i-го агента

а) на первом уровне лидерства (r = 1) вычисляются по формуле

(6a) 
$$x_{il}^r = \frac{\Delta_{il}^r}{\Delta_i^r}, \quad l \in M, \quad m = n - 1, \quad ecnu \quad \sum_{j \in M} \frac{1}{z_j^r} \neq 1 \quad u \quad z_j^r \neq 0 \quad \forall j \in M,$$

где

$$\Delta_i^r = \prod_{j=1\backslash i}^m z_j^r - \sum_{\gamma=1\backslash i}^m \prod_{j=1\backslash(\gamma,i)}^m z_j^r,$$
$$\Delta_{il}^r = \prod_{j=1\backslash(l,i)}^m z_j^r, \quad z_j^r = \psi^r \left(u_j - S_j^{r-1}\right) + 1, \quad \psi^1 = 1, \quad S_j^0 = 0;$$
б) на втором уровне лидерства (r = 2) вычисляются как вектор  $\mathbf{x}_i^2 = \{x_{i1}^2, x_{i2}^2, \ldots, x_{im}^2\}$ , полученный в результате решения следующего матричного уравнения

(6b) 
$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i^2 = \mathbf{B},$$

где матрица системы  $\mathbf{A} = \{a_{lj}, l, j \in M\}$  и вектор свободных членов  $\mathbf{B} = \{b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{im}\}$  состоят из элементов

$$a_{lj} = u_j - S_j^1 \ \forall l = j,$$

$$a_{lj} = -1 - \frac{Q_l}{Q_j} \frac{u_j + 2}{u_j + 1} \frac{\beta_j - 2}{\left(\Delta_l^1\right)^2} \Delta_{lj}^1 \left[ \Delta_l^1 + \sum_{k \in M} \Delta_{lk}^1 \right] \quad \forall l \neq j,$$
  
$$b_{il} = 1 - \frac{Q_l}{Q_i} \frac{u_i + 2}{u_i + 1} \frac{\beta_i - 2}{\left(\Delta_l^1\right)^2} \Delta_{li}^1 \left[ \Delta_l^1 + \sum_{k \in M} \Delta_{lk}^1 \right], \quad l, j \in M;$$

в) на *r*-м уровне лидерства приближенно вычисляются по формуле (6а), в которой следует положить

$$\psi^{r} = \frac{1}{1 + \varphi^{r-1}}, \quad \varphi^{r} = \psi^{r} \frac{\left(\tilde{u} + 2\right) \left(2 - \tilde{\beta}\right)}{\left(\psi^{r} \tilde{u} + 1 - m\right)^{2}}, \quad \psi^{r} > 0,$$
$$\tilde{u} = -2 - \frac{\tilde{B}\tilde{\beta} \left(\tilde{\beta} - 1\right) \tilde{Q}^{\tilde{\beta} - 2}}{b},$$

если производные предположительных вариаций  $\frac{\partial x_{i\eta}^{r-1}}{\partial Q_{\zeta}}$ ,  $i, \eta, \zeta \in N$  вычислены при фиксированном значении  $Q_i = \tilde{Q}, i \in N$  и при таких параметрах функций издержек, что в  $\varepsilon$ -окрестности ( $\varepsilon = o(\tilde{\beta}, \tilde{B})$ ) чисел  $\tilde{\beta} > 0$ ,  $\tilde{B} > 0$  выполняется условие

(6c) 
$$\left|F_{i}^{r}\left(\tilde{Q},\tilde{B},\tilde{\beta}\right)-F_{i}^{r}\left(Q_{i},B_{i},\beta_{i}\right)\right|<\varepsilon, \quad \varepsilon>0, \quad i\in N,$$

г) на любом уровне лидерства не зависят от действия i-го агента, и зависимость этих вариаций от действий других агентов ослабляется с poстом их действий

(6d) 
$$\frac{\partial x_{i\eta}^r}{\partial Q_i} = 0, \quad \lim_{Q_{\zeta} \to \infty} \frac{\partial x_{i\eta}^r}{\partial Q_{\zeta}} = 0 \ \forall i, \eta, \zeta \in N.$$

д) погрешность  $\delta \mathbf{x}_i^r = \mathbf{x}_i^r - \mathbf{X}_i^r$  вычисления предположительных вариаций по формулам (ба) при r > 2 по сравнению с точным решением  $\mathbf{X}_i^r =$  $= \left\{ X_{ij}^r, j \in N \right\}$  системы  $\mathbf{A}\mathbf{x}_i^r = \mathbf{B}$  при  $Q_i \ge \bar{Q}_i \ \forall i \in N$ , рассчитанная с применением нормы  $\|\mathbf{A}\| = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$ , ограничена относительной величиной

(6e) 
$$\frac{\|\delta \mathbf{x}_i^r\|}{\|\mathbf{x}_i^r\|} \le \frac{\mu}{1-\mu\bar{\mu}} \left(\frac{|\varphi^{r-1}+\bar{\varepsilon}|}{1-\bar{\varepsilon}}+\bar{\mu}\right) \quad npu \quad \mu\bar{\mu} < 1,$$

109

где

$$\begin{split} \bar{\varepsilon} &= \max_{i,l\in M} \left| \psi^r \frac{Q_l}{Q_i} \frac{\varepsilon}{(\psi^r (\varepsilon - 2) + 1)} \frac{\beta_i - 2}{(\Delta_l^{r-1})^2} \Delta_{li}^{r-1} \left[ \Delta_l^{r-1} + \sum_{k\in M} \Delta_{lk}^{r-1} \right] \right|, \\ \bar{\mu} &= \frac{(m-1) \left| \varphi^{r-1} - \bar{\varepsilon} \right|}{\min_{1\leq j\leq m} \left| u_j - S_j^{r-1} \right| + (m-1) (1 - \bar{\varepsilon})}, \quad \bar{Q}_i = \left( \frac{B_i \beta_i \left| \beta_i - 1 \right|}{\varepsilon b} \right)^{\frac{1}{2 - \beta_i}}, \\ \Delta_l^{r-1}, \Delta_{li}^{r-1} \text{ вычислены при } u_j = \varepsilon - 2, \\ \mu &= \frac{\max_{1\leq j\leq m} \left| u_j - S_j^{r-1} \right| + (m-1) (1 + \bar{\varepsilon})}{\min_{1\leq j\leq m} \left| u_j - S_j^{r-1} \right| - (m-1) (1 + \bar{\varepsilon})} - \text{число обусловленности матрицы } \mathbf{A}. \end{split}$$

Формулы (6a) точно определяют в явном виде предположительные вариации агентов на первом уровне лидерства, решение системы (6b) позволяет точно определить эти величины на втором уровне лидерства. На третьем и последующих уровнях лидерства формулы (6a) позволяют приближенно вычислить предположительные вариации в явном виде. В этом случае точность расчета предположительных вариаций базируется на выполнении условия (6c), а также на свойстве (6d) слабого влияния действий других агентов на предположительные вариации данного агента. Относительная погрешность приближенного расчета предположительных вариаций при r > 2оценивается условием (6e).

В (6а) введено обозначение параметра типа i-го агента на r-м уровне лидерства:

$$z_i^r = \psi^r \left( u_i - S_i^{r-1} \right) + 1 = \psi^r g_i^{r-1} + 1 = \frac{g_i^{r-1}}{1 + \varphi^{r-1}} + 1.$$

Поскольку величина  $\varphi^r$  приближенно выражает сумму производных предположительных вариаций (как показано в доказательстве утверждения 1), то содержательное значение параметра типа следующее: если  $z_i^r < 0$ , то  $g_i^{r-1} < -(1+\varphi^{r-1})$ , т.е. на (r-1)-м уровне лидерства «ускорение» функции полезности агента меньше суммы темпов изменения предположительных вариаций действий агентов окружения, в противном случае  $z_i^r > 0$ . Поскольку при прочих равных условиях (т.е. одинаковых значениях  $B_i$ ,  $Q_i$  и  $S_i^{r-1}$ ) значение функции  $g_i^{r-1}$  определяется согласно (4) вогнутостью (выпуклостью) функции издержек агента, то  $g_i^{r-1}$  больше в случае  $0 < \beta_i < 1$ , чем в случае  $1 < \beta_i < 2$ . Следовательно, тип агента  $z_i^r > 0$  соответствует положительному эффекту расширения масштаба, а тип агента  $z_i^r < 0$  присущ отрицательному эффекту.

Согласно (6а), предположительные вариации зависят от значений функции  $u_i$ . Кроме того, формулы (6а) представляют собой рекуррентные соотношения, поскольку предположительные вариации *i*-го агента на *r*-м уровне лидерства зависят от сумм предположительных вариаций остальных агентов на предыдущем (r-1)-м уровне лидерства, т.е. от величины  $S_j^{r-1} = \sum_{l \in N \setminus j} x_{jl}^{r-1}$ . Поскольку сумма предположительных вариаций  $S_i^r$  фигурирует в уравнении *i*-го агента системы уравнений (3) и влияет на результирующее равновесие Нэша, то эта величина имеет важное практическое и теоретическое значение. Поэтому определим в виде следующего утверждения способ нахождения суммы предположительных вариаций в уравнении каждого агента.

Утверждение 2. Сумма предположительных вариаций действий агентов окружения, принадлежащих подмножеству M, в уравнении реакции i-го агента системы уравнений (3) на уровне лидерства r

а) вычисляется по формуле

(7a) 
$$S_i^r = \sum_{l \in M} x_{il}^r = \frac{1}{s_i^r - 1}, \quad s_i^r = \frac{1}{\sum_{j \in M} \frac{1}{z_j^r}}, \quad S_i^0 = 0, \quad i \in N,$$

б) имеет следующие знаки:

(7b)  

$$S_{i}^{1} < 0 \ \forall m \geq 1, \\
< 0 \ \forall z_{j}^{r} < 0, \ i, j = 1, 2, \\
< 0 \ \forall \left(z_{j}^{r} > 0 \land |S_{i}^{r-1}| < |u_{j}|\right), \quad npu \quad m = 1, \\
> 0 \ \forall \left(z_{j}^{r} > 0 \land |S_{i}^{r-1}| > |u_{j}|\right) \\
S_{i}^{r} \begin{cases}
< 0 \ \forall (s_{i}^{r} > 0 \land v^{r} < v_{\max}), \\
> 0 \ \forall (s_{i}^{r} > 0 \land v^{r} > v_{\max}), \\
> 0 \ \forall (s_{i}^{r} > 0 \land v^{r} > v_{\max})
\end{cases}$$

в) ограничена

$$|S_i^1| < 1 \ \forall m \ge 1,$$

$$|S_i^r| < \begin{cases} 1 \ \forall z_j^r < 0, \\ S_{\max i} \forall \left( z_j^r > 0 \land \left| S_i^{r_{\max i} - 1} \right| < |u_j| \right) \\ |S_i^r| < \begin{cases} 1 \ \forall s_i^r < 0, \\ \frac{m}{m - 1 - v^r} \forall s_i^r > 0 \end{cases} npu \quad m > 1;$$

причем при m>1, r>1, если  $S^r_i<0,$  то

(7d) 
$$v^r \in (0, v_{\max}), \quad |S_i^r| < \frac{m}{m - 1 - v_{\max}};$$

 $\Gamma$ ) не зависит от действия *i*-го агента, и зависимость  $S_i^r$  от действий других агентов ослабляется с увеличением их действий:

(7e)  
$$\frac{\partial S_i^r}{\partial Q_i} = 0, \quad \frac{\partial S_i^r}{\partial Q_j} = \frac{(s_i^r)^2}{(s_i^r - 1)^2} \frac{\psi^r}{b\left(z_j^r\right)^2} \beta_j \left(\beta_j - 1\right) \left(\beta_j - 2\right) Q_j^{\beta_j - 3},$$
$$\lim_{Q_j \to \infty} \frac{\partial S_i^r}{\partial Q_j} = 0, \quad i, j \in N,$$

111

$$v^{r} = \frac{\psi^{r}}{\frac{m}{1+v^{r-1}}-1}, \quad v^{2} = 0, \quad v_{\max} = \frac{\psi_{\max}\left(1+\sqrt{\psi_{\max}}\right)^{2}}{m\sqrt{\psi_{\max}}},$$
$$\psi_{\max} = \arg\max_{r>1}\psi^{r}, \quad r_{\max i} = \arg\max_{|S_{i}^{r-1}| < |u_{j}|}r,$$
$$S_{\max i} = \frac{1}{\psi^{r_{\max i}}|u_{j} - S_{j}^{r_{\max i}-1}|}.$$

Из утверждения 2 следует, что сумма предположительных вариаций в уравнении реакции агента отрицательна за исключением случаев  $|z_{i}^{r} > 0 \land |S_{i}^{r-1}| > |u_{j}|$  при m = 1, а также  $s_{i}^{r} > 0 \land v^{r} > v_{\max}$  при m > 1, возникающих на высоких уровнях лидерства агента (при  $r > r_{\max i}$  или  $v^r > v_{\max i}$ соответственно) и при положительных эффектах расширения масштаба у агента (агентов) окружения. Кроме того, из утверждения 2 вытекают следующие выводы о величине суммы предположительных вариаций: 1) величина  $S_i^r$  по модулю не превышает единицы при r = 1, а также если  $s_i^r < 0$ , что выполняется, когда значения всех (или большинства, если эти значения незначительно отличаются) параметров  $z_i^r$  отрицательны; 2) если  $s_i^r > 0$ , то при r > 1 величина  $S_i^r$  по модулю может превышать единицу; 3) если  $s_i^r > 0$ , то с увеличением m верхняя граница модуля величины S<sup>r</sup><sub>i</sub> уменьшается. Таким образом, в дуополии (m = 1) и триполии (m = 2) при положительном для всех фирм эффекте расширения масштаба, т.е.  $|u_j| < 2$ , возможны случаи, когда на высоких уровнях лидерства модуль величины  $S_i^r$  больше единицы.

Сумма предположительных вариаций *i*-го агента согласно (7а) зависит от знака параметра  $s_i^r$ , который есть функция параметров типа агентов  $z_j^r$ , зависящих, в свою очередь, от суммы предположительных вариаций в уравнении реакции агента на предыдущем уровне лидерства. Сумма предположительных вариаций *i*-го агента согласно (7b), как правило, отрицательна, а ее наибольшее абсолютное значение по (7c) также зависит от знака параметра  $s_i^r$  и от параметра нелинейности  $\psi^r$  через  $v^r$  согласно (7d), что будет исследовано ниже при моделировании. Согласно (7е) изменение суммы предположительных вариаций с увеличением действия агента окружения зависит от типа эффекта расширения масштаба последнего, т.е.

$$\frac{\partial S_i^r}{\partial Q_j} \left\{ \begin{array}{l} < 0, \ \text{если } \beta_j > 1, \\ > 0, \ \text{если } \beta_j < 1. \end{array} \right.$$

Положительность (отрицательность) предположительной вариации выпуска агента окружения в уравнении (3) i-го агента означает, что окружение увеличивает (уменьшает) свое действие в ответ на прирост действия данного агента. Поэтому знак предположительной вариации определяет тип агента окружения, который, как вытекает из следующего утверждения, может быть различным. Утверждение 3. Предположительные вариации выпуска l-го агента в уравнении (3) i-го агента имеют следующие знаки:

$$(8a) x_{il}^1 < 0, \quad l \in M,$$

$$x_{il}^r < 0,$$
если  $\left(z_j^r < 0 \forall j \in M\right) \lor \left(z_j^r > 0 \forall j \in M\right) \lor$ 

(8b) 
$$\vee \left( z_{\theta}^{r}|_{\theta \in \Theta} > 0 \land z_{\theta}^{r}|_{\theta \in \bar{\Theta}} < 0 \land \left( \frac{1}{s_{\Theta}^{r}} > 1 + \frac{1}{\left| s_{\bar{\Theta}}^{r} \right|} \right) \right),$$

(8c) 
$$x_{il}^r > 0$$
, если  $z_{\theta}^r|_{\theta \in \Theta} > 0 \land z_{\theta}^r|_{\theta \in \overline{\Theta}} < 0 \land \left(\frac{1}{s_{\Theta}^r} < 1 + \frac{1}{\left|s_{\overline{\Theta}}^r\right|}\right),$   
 $l \in M, r > 1,$ 

где

$$\Theta = \left\{ \theta \in M : z_{\theta}^r > 0 \right\}, \quad \bar{\Theta} = \left\{ \theta \in M : z_{\theta}^r < 0 \right\}$$

и введены обозначения

$$s_{\Theta}^r = \frac{1}{\sum\limits_{\theta \in \Theta} \frac{1}{z_{\theta}^r}}, \quad s_{\bar{\Theta}}^r = \frac{1}{\sum\limits_{\theta \in \bar{\Theta}} \frac{1}{z_{\theta}^r}}$$

Согласно (8а), (8b) предположительные вариации, как правило, отрицательны, т.е. на увеличение действия окружения типичный агент реагирует уменьшением своего действия. Однако из условия (8с) следует, что могут существовать агенты противоположного типа, отвечающие на увеличение действия окружения симметрично, которых назовем атипичными. Атипичным согласно (8c) является агент, в окружении которого агенты, имеющие  $z_j^r < 0$ , преобладают над агентами, имеющими  $z_j^r > 0$ . Отметим, что в линейной модели олигополии, в которой  $u_j = -2$  и все  $z_j^r < 0$ , атипичные агенты невозможны.

#### 4. Моделирование

На выполнение достаточных условий оптимальности (4), а также на предположительные вариации согласно (6а) существенное влияние оказывает функция

$$u_i(Q_i) = -2 - \frac{B_i \beta_i (\beta_i - 1) Q_i^{\beta_i - 2}}{b}, \quad Q_i > 0,$$

зависящая от параметров функций издержек агентов  $B_i > 0$ ,  $\beta_i \in (0,2)$  и от параметра функции рыночного спроса b > 0. Анализ [20] телекоммуникационных компаний РФ (табл. 1) показал, что коэффициент издержек  $B_i \in (1,3)$ ,

**Таблица 1.** Коэффициенты функции спроса на голосовой трафик и функций издержек телекоммуникационных компаний  $P\Phi$ ,  $C_{Fi} = 0$ , i = 1, 2, 3

Статистическая модель		b	$B_i$	$\beta_i$
Функция спроса	1,77	0,0009		
Функция издержек ПАО «MTC»			2,41	0,76
Функция издержек ПАО «МегаФон»			$1,\!36$	$0,\!85$
Функция издержек ПАО «ВымпелКом»			2,46	0,81

если  $Q_i \in (0, 500)$  млрд. мин., параметр b = 0,0009 руб./мин., т.е. имеет место соотношение  $\sigma = \frac{B_i}{b} \approx 1000.$ 

Поэтому исследуем следующую двухпараметрическую функцию  $u_i(Q_i) \approx \approx -2 - \sigma \beta_i (\beta_i - 1) Q_i^{\beta_i - 2}$  в диапазоне  $Q_i \in (100, 500)$  млрд. мин. при различных значениях параметров  $\sigma, \beta_i$ . Из анализа графиков функции  $u_i(Q_i)$ , представленных на рис. 1, следует, во-первых, что условие (4) не выполняется при малых значениях  $Q_i$  в случае высоких значений коэффициента издержек (при  $\sigma = 5000$ ), но даже в этом случае условие (4) выполняется при  $Q_i \ge 150$ . Вовторых, условие (5) в виде  $|u_j| \ge 1 \forall \beta_j \in (0, 2)$  может не выполняться также при малых значениях  $Q_i$  в случае высоких значений коэффициента издержек (при  $\sigma = 5000$ ) и если  $\beta_j < 1$ , но выполняется при достаточно больших значениях  $Q_i \ge 250$ . В-третьих, в определенном диапазоне значений  $Q_i$  агенты в зависимости от значения параметра  $\beta_j$  делятся на два типа — агенты с положительным эффектом расширения масштаба при  $\beta_j > 1$ :

$$|u_j| \begin{cases} \geq 2 \ \forall \beta_j \geq 1, \\ \in [1,2) \ \forall \beta_j < 1. \end{cases}$$

В-четвертых, при достаточно высоких значениях выпусков, т.е.  $Q_i \ge 250$ , и если коэффициенты издержек близки к соотношению  $\sigma = 1000$ , функция  $u_i(Q_i)$  принадлежит диапазону  $-2.76 \le u_i(Q_i) \le -1.76$ .

Исследуем характер функции

$$\psi^{r}\left(\tilde{u},\beta,m\right) = \frac{1}{1+\varphi^{r-1}} = \frac{1}{1+\psi^{r-1}\frac{(\tilde{u}+2)(2-\beta)}{(\psi^{r-1}\tilde{u}+1-m)^{2}}}$$

в более широком по сравнению с вышеопределенным диапазоне значений  $-5 \leq \tilde{u} \leq -1$ . Значение r практически не влияет на величину  $\psi^r$  (отклонение  $\psi^r$  от  $\psi^{r-1}$  не превышает 1%), поэтому на рис. 2 показаны виды функции  $\psi^r$  ( $\tilde{u}, \beta, m$ ) при r = 1. Анализ рис. 2 показывает, что  $\psi^r \approx 1$ , т.е.  $\varphi^r \approx 0$ , что подтверждает несущественное влияние производных предположительных вариаций (6d) на точность формул (6a) в случаях r > 2, поскольку (как показано в доказательстве утверждения 1) параметр  $\varphi^r$  приближенно выражает сумму производных предположительных вариаций; причем чем больше m, тем меньше проявляется это влияние.



Рис. 1. Виды функции  $u_i(Q_i)$ .



Рис. 2. Виды функции  $\psi^r(\tilde{u},\beta,m)$ .



Рис. 3. Зависимость суммы предположительных вариаций от уровня лидерства и количества агентов при  $u_j = -1.8$ .



Рис. 4. Зависимость суммы предположительных вариаций от уровня лидерства и количества агентов при  $u_j = -1.8$ .

Также из рис. 2 следует, что  $\psi^r \begin{cases} < 1 \ \forall \beta \in (0,1), \\ > 1 \ \forall \beta \in (1,2), \end{cases}$ т.е. тип эффекта расширения масштаба сказывается на знаках предположительных вариаций, зависящих от параметров  $z_j^r$ , не только через значение параметра  $u_i$ , но и в результате различных значений  $\psi^r$ .

Тип ситуации	Параметри	T 49		
тип ситуации	$z_1$	$z_2$	$z_3$	243
1	0,8	$0,\!6$	$0,\!5$	-0,511
2	-0,8	$^{-0,6}$	$^{-0,5}$	-0,338
3	-0,8	$0,\!6$	$0,\!5$	-1,412
4	-0,8	$^{-0,6}$	$0,\!5$	1,043
5	$^{-1,8}$	$-0,\!6$	$0,\!5$	1,636

Таблица 2. Анализ предположительных вариаций

На рис. 3, 4 проведен анализ формулы (7а) суммы предположительных вариаций агента и ограничения (7с) в зависимости от уровня лидерства и количества агентов для двух характерных случаев: 1) случай  $|u_j| \in [1,2) \forall \beta_j < 1$  рассмотрен на рис. 3 на примере  $u_j = -1,8 \forall j \in N$  при  $\psi^r = 0,98$ ; 2) случай  $|u_j| \ge 2 \forall \beta_j \ge 1$  показан на рис. 4 на примере  $u_j = -3 \forall j \in N$ , поскольку при  $u_j < -3$  зависимость  $S_i^r$  от r не проявляется, при  $\psi^r = 1,05$ . Предельная величина суммы предположительных вариаций в (7с) обозначена символом  $S^\sim$ . Графики (рис. 3, 4) показывают, что с увеличением уровня лидерства r модуль суммы предположительных вариаций растет, а величина  $S_i^r$  имеет отрицательный знак согласно (7b), и подтверждают, что в случае  $|u_j| \in [1, 2)$  ограничение  $|S_i^r| < S^\sim = \frac{m}{m-1-v^r}$  выполняется при  $m \ge 2$ , а для случая  $|u_j| \ge 2$  ограничение  $|S_i^r| \le 1 \forall r$  выполняется при  $m \ge 1$ .

Пример типичного и атипичного агентов представлен в табл. 2 для системы четырех агентов: в ситуациях 1–3 четвертый агент является типичным, т.е.  $x_{43} < 0$ , поскольку в ситуации 1  $z_j > 0$ , j = 1, 2, 3, в ситуации 2  $z_j < 0$ , j = 1, 2, 3, в ситуации 3 сумма положительных  $z_2, z_3$  больше модуля  $z_1$ ; в ситуациях 4, 5 четвертый агент является атипичным, т.е.  $x_{43} > 0$ , так как модуль суммы отрицательных  $z_1, z_2$  больше  $z_3$ , причем с ростом этого превышения значение  $x_{43}$  увеличивается.

Проанализируем погрешность вычислений предположительных вариаций по формулам (6a) при r > 2 на основе модели (6e). С целью анализа влияния на погрешность ключевых факторов рассмотрим упрощенную ситуацию при одинаковых значениях действий всех агентов  $\tilde{Q} \ge \bar{Q}_i$   $\forall i \in N$ , т.е. при равных значениях  $u_i = u \; \forall i \in N$ , при одинаковых значениях сумм предположительных вариаций, равных S, т.е.  $S_i^{r-1} = S \; \forall i \in N$ , а также при  $\psi^r = 1$ , т.е.  $\varphi^{r-1} = 0$ . Рассчитаем определители  $\Delta_l^{r-1}, \Delta_{li}^{r-1}$  при  $u_j = \varepsilon - 2$ , в этом случае  $z_j^r = \varepsilon - S - 1$ , поэтому  $\Delta_{il}^r = (\varepsilon - S - 1)^{m-1}, \Delta_i^r = (\varepsilon - S - 1)^{m-1} (\varepsilon - S - 1 - m)$ , тогда  $\bar{\varepsilon} = \max_{i \in M} \left| \frac{\varepsilon(\beta_i - 2)}{\varepsilon - 1} \frac{\varepsilon - S - 1}{(\varepsilon - S - 1 - m)^2} \right|$ , где максимум имеет место при  $\bar{\beta} = \min_{i \in N} \beta_i$ . Число обусловленности матрицы **A** при одинаковых значениях u, S составляет  $\mu = \frac{|u-S| + (m-1)(1+\bar{\varepsilon})}{|u-S| - (m-1)(1+\bar{\varepsilon})}$  соответственно,  $\bar{\mu} = \frac{(m-1)\bar{\varepsilon}}{|u-S| + (m-1)(1-\bar{\varepsilon})}$ . Норма относительной погрешности (6e) в этом случае ограничена величиной  $\delta_{\max} = \frac{\mu}{1-\mu\bar{\mu}} \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{1-\bar{\varepsilon}} + \bar{\mu}\right)$ . При  $\bar{\beta} = 0,7$  и  $\varepsilon = 0,01$  моделирование зависимости  $\delta_{\max}$  от числа агентов окружения m, величины u и суммы предположительных вариаций S представлено на рис. 5.



Рис. 5. Зависимость точности приближенного вычисления предположительных вариаций от числа агентов m, величины u и суммы предположительных вариаций S.

Анализ рис. 5 показывает, во-первых, удовлетворительную точность (погрешность менее 1%) приближенных вычислений предположительных вариаций по формулам (6a) при r > 2; во-вторых, рост погрешности начиная с некоторого значения m, снижение погрешности при увеличении модуля u и модуля S; в-третьих, границы применимости формулы числа обусловленности в зависимости от модуля u (на рисунке линии прерваны начиная с такого значения m, при котором формула некорректна, так как матрица системы теряет свойство строгого диагонального преобладания [23]).

## 5. Заключение

В нелинейной модели олигополии нахождение предположительных вариаций представляет собой достаточно сложную вычислительную задачу, поэтому первым результатом статьи является устранение этой технической сложности. Наряду с этим получение явной формулы предположительных вариаций позволяет анализировать характер их изменения при вариациях действий агентов, что необходимо для вычисления равновесий при наличии лидеров по Штакельбергу второго и более высоких уровней.

Аналитическая формула суммы предположительных вариаций позволяет выявить синтетическое влияние действий окружения каждого агента на параметры возможного равновесия в игре при вариациях его действий. Кроме того, определено ограничение на модуль суммы предположительных вариаций, которое позволяет оценить диапазоны возможных равновесий.

Анализ знаков предположительных вариаций показал возможность существования в нелинейной игре олигополии агентов, проявляющих нетипичные свойства: на увеличение действия окружения такие агенты реагируют увеличением своего действия. Обобщая результаты статьи, отметим, что предположительные вариации широко используются [18, 24] в анализе агрегативных ИГР. ОДНАКО ОТСУТСТВИЕ НАДЕЖНЫХ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭТИХ ВЕЛИЧИН И ИХ производных в случае нелинейных функций полезности агентов препятствовало исследованию проблемы многоуровневого лидерства по Штакельбергу. По сравнению с известными результатами, проведенные исследования позволили сделать следующие выводы.

Предположительные вариации агента олигополии относительно действий окружения на некотором уровне лидерства зависят от предположительных вариаций остальных агентов на предыдущем уровне лидерства. Это означает, что повышение информированности агента является фундаментальной причиной роста его уровня лидерства.

Реакция агента на действия окружения выражается в увеличении или уменьшении своего действия (объема выпуска), что количественно характеризуется величиной и знаком суммы предположительных вариаций. Показано, что сумма предположительных вариаций агента олигополии при отрицательном эффекте расширения масштаба агентов окружения отрицательна, а абсолютная величина ограничена единицей; при положительном эффекте и высоких уровнях лидерства этот параметр может быть положительным и не ограниченным в дуополии и триполии.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Вектор предположительных вариаций в уравнении реакции *i*-го агента (далее, *i*-й вектор вариаций) вычисляется из решения следующей системы [20], записанной по уравнениям (3) остальных m = n - 1 агентов:

(II.1) 
$$\sum_{j \in N \setminus i} \frac{\partial F_k}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial F_k}{\partial Q_i} = 0, \quad i \in N \setminus k,$$

1

которая при r = 1 (т.е. если в уравнениях (3) положить  $x_{ij}^0 = 0$ ) имеет вид

1

$$(\Pi.2) \qquad u_1 x_{i1}^1 - x_{i2}^1 - \dots - x_{im}^1 = 1, \\ -x_{i1}^1 + u_2 x_{i2}^1 - \dots - x_{im}^1 = 1, \\ \dots \\ -x_{i1}^1 - x_{i2}^1 - \dots + u_m x_{im}^1 = 1, \\ \psi^1 \left( u_1 - S_1^0 \right) x_{i1}^1 - x_{i2}^1 - \dots - x_{im}^1 = 1, \\ -x_{i1}^1 + \psi^1 \left( u_2 - S_2^0 \right) x_{i2}^1 - \dots - x_{im}^1 = 1, \\ \dots \\ -x_{i1}^1 - x_{i2}^1 - \dots + \psi^1 \left( u_m - S_m^0 \right) x_{im}^1 = 1, \\ \end{pmatrix}$$

119

где

$$\psi^1 = 1, \quad S_i^0 = \sum_{l \in M} x_{il}^0 = 0,$$

верхний индекс обозначает r.

Отметим следующее свойство функций  $u_i(\bullet), i \in N$ : из (4) и (5) следует, что

(II.3) 
$$u_j < 0, \quad |u_j| \begin{cases} \geq 2 \ \forall \beta_j \geq 1, \\ \in [1,2) \ \forall \beta_j < 1 \end{cases} \Rightarrow |u_j| \geq 1 \ \forall \beta_j \in (0,2).$$

Доказательство формулы (6а) при r = 1 приводится аналогично доказательству формулы (11) в статье [16], но для системы вида (П.2), в которой знаки коэффициентов перед членами  $x_{ij}^1$ ,  $i \neq j$ , а также знаки свободных членов изменены на противоположные, поскольку в отличие от цитируемой статьи в формуле (1) параметр b > 0. Поэтому при r = 1 получим формулу

$$x_{il}^{1} = \frac{\prod_{j=1\backslash (l,i)}^{m} (u_{j}+1)}{(u_{m-1}u_{m}-1)\prod_{j=1\backslash i}^{m-2} (u_{j}+1) - \sum_{\gamma=1\backslash i}^{m-2} \prod_{j=1\backslash (\gamma,i)}^{m} (u_{j}+1)},$$

в которой знаменатель (главный определитель системы (П.2) для *i*-го вектора вариаций) обозначим символом  $\Delta_i^1$  и представим в виде

$$\Delta_{i}^{1} = \prod_{j=1\backslash i}^{m} (u_{j}+1) - \sum_{\gamma=1\backslash i}^{m} \prod_{j=1\backslash(\gamma,i)}^{m} (u_{j}+1) =$$
$$= \prod_{j=1\backslash i}^{m} (\psi^{1} (u_{j} - S_{j}^{0}) + 1) - \sum_{\gamma=1\backslash i}^{m} \prod_{j=1\backslash(\gamma,i)}^{m} (\psi^{1} (u_{j} - S_{j}^{0}) + 1),$$

а числитель (*l*-й вспомогательный определитель) обозначим

$$\Delta_{il}^{1} = \prod_{j=1 \setminus (i,l)}^{m} (u_j + 1) = \prod_{j=1 \setminus (i,l)}^{m} \left( \psi^1 \left( u_j - S_j^0 \right) + 1 \right),$$

где верхний индекс r, т.е.

$$x_{il}^1 = \frac{\Delta_{il}^1}{\Delta_i^1}.$$

При r = 2 система (П.1) имеет вид

$$\begin{bmatrix} u_{1} - S_{1}^{1} - Q_{1} \sum_{j \in N \setminus 1} \frac{\partial x_{1j}^{1}}{\partial Q_{1}} \end{bmatrix} x_{i1}^{2} - \left[ 1 + Q_{1} \sum_{j \in N \setminus 1} \frac{\partial x_{1j}^{1}}{\partial Q_{2}} \right] x_{i2}^{2} - \dots \\ \dots - \left[ 1 + Q_{1} \sum_{j \in N \setminus 1} \frac{\partial x_{1j}^{1}}{\partial Q_{m}} \right] x_{im}^{2} = 1 + Q_{1} \sum_{j \in N \setminus 1} \frac{\partial x_{1j}^{1}}{\partial Q_{i}}, \\ - \left[ 1 + Q_{2} \sum_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{2j}^{2}}{\partial Q_{1}} \right] x_{i1}^{2} + \left[ u_{2} - S_{2}^{1} - Q_{2} \sum_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{2j}^{2}}{\partial Q_{2}} \right] x_{i2}^{2} - \dots \\ \dots - \left[ 1 + Q_{2} \sum_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{2j}^{1}}{\partial Q_{m}} \right] x_{im}^{2} = 1 + Q_{2} \sum_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{2j}^{1}}{\partial Q_{i}}, \\ \dots - \left[ 1 + Q_{m} \sum_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{mj}^{1}}{\partial Q_{m}} \right] x_{i1}^{2} - \left[ 1 + Q_{m} \sum_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{mj}^{1}}{\partial Q_{i}} \right] x_{i2}^{2} - \dots$$

$$-\left[1+Q_m\sum_{j\in N\setminus m}\frac{\partial x_{mj}}{\partial Q_1}\right]x_{i1}^2 - \left[1+Q_m\sum_{j\in N\setminus m}\frac{\partial x_{mj}}{\partial Q_2}\right]x_{i2}^2 - \dots$$
$$\dots - \left[u_m - S_m^1 - Q_m\sum_{j\in N\setminus m}\frac{\partial x_{mj}^1}{\partial Q_m}\right]x_{im}^2 = 1 + Q_m\sum_{j\in N\setminus m}\frac{\partial x_{mj}^1}{\partial Q_i}$$

На главной диагонали матрицы системы (П.4) под знаком суммы стоят производные типа  $\frac{\partial x_{il}^1}{\partial Q_i} = 0$ ,  $i \neq l$ , так как в этом случае  $\Delta_{il}^1, \Delta_i^1$  не зависят от  $Q_i$ . Вне главной диагонали матрицы системы (П.4), а также в столбце свободных членов под знаком суммы стоят производные двух типов: а)  $\frac{\partial x_{i\eta}^1}{\partial Q_{\zeta}}$ ,  $\eta \neq \zeta$ , б)  $\frac{\partial x_{i\eta}^1}{\partial Q_{\eta}}$ , вычисление которых с учетом (6a) дает:

(II.5) 
$$\frac{\partial x_{i\eta}^1}{\partial Q_{\zeta}} = -\frac{\Delta_{i\eta}^1 \Delta_{i\zeta}^1}{(u_{\zeta}+1) \left(\Delta_i^1\right)^2} \frac{u_{\zeta}+2}{Q_{\zeta}} \left(\beta_{\zeta}-2\right),$$

$$\frac{\partial x_{i\eta}^{1}}{\partial Q_{\eta}} = -\frac{\Delta_{i\eta}^{1} \left(\Delta_{i}^{1} + \Delta_{i\eta}^{1}\right)}{\left(u_{\eta} + 1\right) \left(\Delta_{i}^{1}\right)^{2}} \frac{u_{\eta} + 2}{Q_{\eta}} \left(\beta_{\eta} - 2\right),$$

так как

$$\frac{\partial \Delta_{i\eta}^{1}}{\partial Q_{\zeta}} = \frac{\Delta_{i\eta}^{1}}{u_{\zeta}+1} u_{\zeta Q_{\zeta}}', \quad \eta \neq \zeta, \quad \frac{\partial \Delta_{i}^{1}}{\partial Q_{\zeta}} = \frac{\Delta_{i}^{1} + \Delta_{i\zeta}^{1}}{u_{\zeta}+1} u_{\zeta Q_{\zeta}}',$$
$$u_{\zeta Q_{\zeta}}' = \frac{B_{\zeta} \beta_{\zeta} \left(\beta_{\zeta}-1\right) \left(\beta_{\zeta}-2\right) Q_{\zeta}^{\beta_{\zeta}-3}}{b} = \frac{u_{\zeta}+2}{Q_{\zeta}} \left(\beta_{\zeta}-2\right).$$

Введем вектор-столбец переменных системы (П.4)  $\mathbf{x}_{i}^{r} = \{x_{i1}^{r}, x_{i2}^{r}, \ldots, x_{im}^{r}\},$ вектор-столбец свободных членов  $\mathbf{B}^{r} = \{b_{i1}^{r}, b_{i2}^{r}, \ldots, b_{im}^{r}\}$  и матрицу системы  $\mathbf{A}^{r} = \{a_{lj}^{r}, l, j \in M\},$  где верхний индекс r обозначает уровень лидерства. Из (П.5) следует, что система (П.4) при r = 2 имеет вид матричного уравнения

$$(\Pi.6) \qquad \qquad \mathbf{A}^2 \mathbf{x}_i^r = \mathbf{B}^2.$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

(II.7) 
$$a_{lj}^2 = u_j - S_j^1 \; \forall l = j, \quad a_{lj}^2 = -\left(1 + \varphi_{lj}^1(Q)\right) \; \forall l \neq j,$$
$$b_l^2 = 1 + \varphi_{li}^1(Q), \quad l, j \in M,$$

где

$$\varphi_{lj}^{1}(Q) = -\frac{Q_{l}}{Q_{j}} \frac{u_{j} + 2}{u_{j} + 1} \frac{\beta_{j} - 2}{\left(\Delta_{l}^{1}\right)^{2}} \Delta_{lj}^{1} \left[\Delta_{l}^{1} + \sum_{k \in M} \Delta_{lk}^{1}\right],$$
$$\varphi_{li}^{1}(Q) = -\frac{Q_{l}}{Q_{i}} \frac{u_{i} + 2}{u_{i} + 1} \frac{\beta_{i} - 2}{\left(\Delta_{l}^{1}\right)^{2}} \Delta_{li}^{1} \left[\Delta_{l}^{1} + \sum_{k \in M} \Delta_{lk}^{1}\right].$$

Например, при m = 2 эта система имеет вид

$$(u_1 - S_1^1) x_{i1}^2 - \left[ 1 - \frac{Q_1}{Q_2} \frac{u_2 + 2}{u_2 + 1} \frac{\beta_2 - 2}{\left(\Delta_1^1\right)^2} \Delta_{12}^1 \left(\Delta_1^1 + \Delta_{12}^1 + \Delta_{13}^1\right) \right] x_{i2}^2 =$$

$$= 1 - \frac{Q_1}{Q_3} \frac{u_3 + 2}{u_3 + 1} \frac{\beta_3 - 2}{\left(\Delta_1^1\right)^2} \Delta_{13}^1 \left(\Delta_1^1 + \Delta_{12}^1 + \Delta_{13}^1\right),$$

$$-\left[1 - \frac{Q_2}{Q_1}\frac{u_1 + 2}{u_1 + 1}\frac{\beta_1 - 2}{\left(\Delta_2^1\right)^2}\Delta_{21}^1\left(\Delta_2^1 + \Delta_{21}^1 + \Delta_{23}^1\right)\right]x_{i1}^2 + \left(u_2 - S_2^1\right)x_{i2}^2 = \\= 1 - \frac{Q_2}{Q_3}\frac{u_3 + 2}{u_3 + 1}\frac{\beta_3 - 2}{\left(\Delta_2^1\right)^2}\Delta_{23}^1\left(\Delta_2^1 + \Delta_{21}^1 + \Delta_{23}^1\right).$$

При условии (6с) в точке  $Q_i = \tilde{Q}, i \in N$  можно записать  $u_i = \tilde{u}$  (где  $\tilde{u} = -2 - \frac{\tilde{B}\tilde{\beta}(\tilde{\beta}-1)\tilde{Q}^{\tilde{\beta}-2}}{b}$ ), значит, в коэффициентах (П.7) параметр  $\varphi_{lj}^1(Q)$  одинаковый для всех уравнений системы (П.6) и равен

$$\varphi_{lj}^{1}\left(Q\right) = \varphi^{1} = -\frac{\left(\tilde{u}+2\right)\left(\tilde{\beta}-2\right)}{\left(\tilde{u}+1-m\right)^{2}}, \quad l, j \in M,$$

поскольку в этом случае  $\Delta_{il}^1 = (\tilde{u}+1)^{m-1}, \ \Delta_i^1 = (\tilde{u}+1)^{m-1} (\tilde{u}+1-m)$ . Поэтому формулы коэффициентов (П.7) можно записать в виде

$$a_{lj}^2 = \psi^2 \left( u_j - S_j^1 \right) \ \forall l = j, \quad a_{lj}^2 = -1 \ \forall l \neq j, \quad b_l^2 = 1, \quad l, j \in M, \quad \psi^2 = \frac{1}{1 + \varphi^1}.$$

Система (П.6) с этими коэффициентами аналогична (П.2), поэтому решение имеет вид

$$x_{il}^2 = \frac{\Delta_{il}^2}{\Delta_i^2}, \quad l, j \in M,$$

где

$$\Delta_{i}^{2} = \prod_{j=1/i}^{m} \left( \psi^{2} \left( u_{j} - S_{j}^{1} \right) + 1 \right) - \sum_{\gamma=1 \setminus i}^{m} \prod_{j=1 \setminus (\gamma,i)}^{m} \left( \psi^{2} \left( u_{j} - S_{j}^{1} \right) + 1 \right),$$
$$\Delta_{il}^{2} = \prod_{j=1 \setminus (i,l)}^{m} \left( \psi^{2} \left( u_{j} - S_{j}^{1} \right) + 1 \right).$$

Применим формализм математической индукции. При (r-1) производные вида (П.5), вычисленные от предположительных вариаций на (r-2)-м уровне лидерства, имеют вид

$$\frac{\partial x_{i\eta}^{r-2}}{\partial Q_{\zeta}} = -\frac{\Delta_{i\eta}^{r-2} \Delta_{i\zeta}^{r-2}}{\left(\Delta_{i}^{r-2}\right)^{2}} \left[ \frac{\partial \psi^{r-2}\left(\tilde{Q}\right)}{\partial Q_{\zeta}} \left(u_{\zeta} - S_{\zeta}^{r-3}\right) + \psi^{r-2}\left(\frac{\partial u_{\zeta}}{\partial Q_{\zeta}} - \frac{\partial S_{\zeta}^{r-3}}{\partial Q_{\zeta}}\right) \right],$$
$$\frac{\partial x_{i\eta}^{r-2}}{\partial Q_{\eta}} = -\frac{\Delta_{i\eta}^{r-2}\left(\Delta_{i}^{r-2} + \Delta_{i\eta}^{r-2}\right)}{\left(\Delta_{i}^{r-2}\right)^{2}} \times \left[ \frac{\partial \psi^{r-2}\left(\tilde{Q}\right)}{\partial Q_{\eta}} \left(u_{\eta} - S_{\eta}^{r-3}\right) + \psi^{r-2}\left(\frac{\partial u_{\eta}}{\partial Q_{\eta}} - \frac{\partial S_{\eta}^{r-3}}{\partial Q_{\eta}}\right) \right].$$

Поскольку  $\frac{\partial \psi^{r-2}(\tilde{Q})}{\partial Q_{\zeta}} = 0, \ \zeta \in M$ , так как производные вычислены в точке  $Q_i = \tilde{Q}, \ i \in N, \ u \ \frac{\partial S_{\zeta}^{r-3}}{\partial Q_{\zeta}} = 0$ , так как при вычислении вариаций на (r-2)-м уровне величина  $S_{\zeta}^{r-3}$  является константой, из этих формул следует, что

$$\frac{\partial x_{i\eta}^{r-2}}{\partial Q_{\zeta}} = -\frac{\Delta_{i\eta}^{r-2} \Delta_{i\zeta}^{r-2}}{\left(\psi^{r-2} u_{\zeta} + 1\right) \left(\Delta_{i}^{r-2}\right)^{2}} \frac{u_{\zeta} + 2}{Q_{\zeta}} \left(\beta_{\zeta} - 2\right) \psi^{r-2},$$

 $(\Pi.8)$ 

$$\frac{\partial x_{i\eta}^{r-2}}{\partial Q_{\eta}} = -\frac{\Delta_{i\eta}^{r-2} \left(\Delta_{i}^{r-2} + \Delta_{i\eta}^{r-2}\right)}{\left(\psi^{r-2}u_{\eta} + 1\right) \left(\Delta_{i}^{r-2}\right)^{2}} \frac{u_{\eta} + 2}{Q_{\eta}} \left(\beta_{\eta} - 2\right) \psi^{r-2}.$$

Следовательно, для матричного уравнения

$$(\Pi.9) \qquad \qquad \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{x}_i^{r-1} = \mathbf{B}^{r-1}$$

коэффициенты вычисляются по формулам, аналогичным формулам (П.7),

$$\begin{aligned} a_{lj}^{r-1} &= u_j - S_j^{r-2} \; \forall l = j, \quad a_{lj}^{r-1} = -\left(1 + \varphi_{lj}^{r-2}\left(Q\right)\right) \; \forall l \neq j, \\ b_l^{r-1} &= 1 + \varphi_{li}^{r-2}\left(Q\right), \quad l, j \in M, \end{aligned}$$

123

и параметр  $\varphi_{lj}^{r-2}\left(Q\right)$  равен

(II.10) 
$$\varphi_{lj}^{r-2}(Q) = \varphi^{r-2} = -\psi^{r-2} \frac{(\tilde{u}+2)\left(\tilde{\beta}-2\right)}{\left(\psi^{r-2}\tilde{u}+1-m\right)^2}, \quad l,j \in M.$$

Поэтому коэффициенты системы (П.9) можно записать в виде

(II.11) 
$$a_{lj}^{r-1} = \psi^{r-1} \left( u_j - S_j^{r-2} \right) \quad \forall l = j, \quad a_{lj}^{r-1} = -1 \quad \forall l \neq j,$$
$$b_l^{r-1} = 1, \quad l, j \in M, \quad \psi^{r-1} = \frac{1}{1 + \varphi^{r-2}}.$$

По индукции из формул (П.9), (П.11) следует, что для произвольного значения r система (П.1) имеет вид  $\mathbf{A}^r \mathbf{x}_i^r = \mathbf{B}^r$  с коэффициентами, аналогичными (П.11), т.е.

(II.11a)  
$$a_{lj}^{r} = \psi^{r} \left( u_{j} - S_{j}^{r-1} \right) \quad \forall l = j, \quad a_{lj}^{r} = -1 \quad \forall l \neq j,$$
$$b_{l}^{r} = 1, \quad l, j \in M, \quad \psi^{r} = \frac{1}{1 + \varphi^{r-1}}.$$

Поэтому решение этой системы имеет такую же форму, как решение системы (П.2), но параметр  $\psi^r$  по индукции из формул (П.10), (П.11), вычисляется по формуле

(II.12) 
$$\psi^r = \frac{1}{1 + \varphi^{r-1}}, \quad \varphi^r = \psi^r \frac{(\tilde{u} + 2) \left(2 - \tilde{\beta}\right)}{(\psi^r \tilde{u} + 1 - m)^2}.$$

Поскольку  $(\tilde{u}+2)(2-\tilde{\beta}) \ll (\tilde{u}+1-m)^2 \quad \forall m \ge 2 \land |\tilde{u}| \ge 1$ , то  $\varphi^r \approx 0, \quad \psi^r \approx 1$ , что является основанием слабого влияния производных предположительных вариаций (6d) на точность формул (6a) при r > 2.

Существование решения системы  $\mathbf{A}^r \mathbf{x}_i^r = \mathbf{B}^r$  не зависит от существования решения системы (3) и определяется по теореме Крамера [21]: система имеет единственное решение, если главный определитель  $\Delta_i^r \neq 0$ . Из формулы главного определителя следует, что

$$\frac{\Delta_i^r}{\sum\limits_{j\in M} z_j^r} = 1 - \sum\limits_{j\in M} \frac{1}{z_j^r} \quad \text{при} \quad z_j^r \neq 0 \,\,\forall j \in M,$$

поэтому условие существования решения системы  $\mathbf{A}^r \mathbf{x}_i^r = \mathbf{B}^r$  имеет вид

$$\sum_{j \in M} \frac{1}{z_j^r} \neq 1 \land z_j^r \neq 0 \ \forall j \in M.$$

Докажем условие (6d): из формул (6a) следует, что  $\frac{\partial x_{il}^{il}}{\partial Q_i} = 0, i \neq l$ , так как в этом случае  $\Delta_{il}^r, \Delta_i^r$  не зависят от  $Q_i$ . Вторая часть условия (6d) доказывается следующим образом. При больших значениях действий, т.е. при  $Q_{\zeta} \to \infty$ , когда  $\lim_{Q_{\zeta} \to \infty} u_{\zeta} = -2$ , определители  $\Delta_{i}^{r}$ ,  $\Delta_{i\zeta}^{r}$  суть конечные числа, вычисляемые по формулам  $\Delta_{i}^{r} = (\lambda^{r})^{m-1} (\lambda^{r} - m)$ ,  $\Delta_{i\zeta}^{r} = (\lambda^{r})^{m-1}$ , где  $\lambda^{r} = \psi^{r} \left(-2 - S_{\zeta}^{r-1}\right) + 1$ , поскольку модуль величины  $S_{\zeta}^{r-1}$  ограничен некоторым конечным числом, как будет показано в утверждении 2. В этом случае согласно формулам (П.8) производные предположительных вариаций по действиям других агентов  $\frac{\partial x_{i\eta}^{r}}{\partial Q_{\zeta}} = -\frac{\psi^{r} \Delta_{i\eta}^{r} \Delta_{i\zeta}^{r}}{(\psi^{r} u_{\zeta} + 1)(\Delta_{i}^{r})^{2}} \frac{u_{\zeta} + 2}{Q_{\zeta}} (\beta_{\zeta} - 2)$  имеют вид

$$\lim_{Q_{\zeta} \to \infty} \frac{\partial x_{i\eta}^r}{\partial Q_{\zeta}} = -\frac{\psi^r \left(\lambda^r\right)^{m-1} \left(\lambda^r\right)^{m-1}}{\left(\psi^r u_{\zeta} + 1\right) \left[\left(\lambda^r\right)^{m-1} \left(\lambda^r - m\right)\right]^2} \frac{u_{\zeta} + 2}{Q_{\zeta}} \left(\beta_{\zeta} - 2\right)$$

При конечных значениях  $\psi^r$  и  $Q_\zeta \to \infty$  (т.е.  $u_\zeta \to -2$ ) этот предел равен нулю.

Рассмотрим проблему оценки точности вычисления предположительных вариаций по формулам (6a) при r > 2. Пусть решение точной системы  $\alpha^r \mathbf{X}_i^r = \beta^r$  обозначено вектором  $\mathbf{X}_i^r = \left\{ X_{ij}^r, j \in N \right\}$ , решение приближенной системы ( $\alpha^r + \delta \alpha^r$ )  $\mathbf{x}_i^r = \beta^r + \delta \beta^r$  — вектором  $\mathbf{x}_i^r = \left\{ x_{ij}^r, j \in N \right\}$ , отклонение матрицы точной системы от матрицы приближенной системы — символом  $\delta \alpha^r$ , отклонение вектора свободных членов — символом  $\delta \beta^r$ . Например, при m = 2, i = 3 точная система (как следует из (П.4) с учетом  $\frac{\partial x_{il}^i}{\partial Q_i} = 0, i \neq l$ ) и приближенная система имеют вид

$$\begin{bmatrix} u_1 - S_1^{r-1} \end{bmatrix} x_{i1}^r - \begin{bmatrix} 1 + Q_1 \sum_{j \in N \setminus 1} \frac{\partial x_{1j}^{r-1}}{\partial Q_2} \end{bmatrix} x_{i2}^r = 1 + Q_1 \sum_{j \in N \setminus 1} \frac{\partial x_{1j}^{r-1}}{\partial Q_3},$$
  
- 
$$\begin{bmatrix} 1 + Q_2 \sum_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{2j}^{r-1}}{\partial Q_1} \end{bmatrix} x_{i1}^r + \begin{bmatrix} u_2 - S_2^{r-1} \end{bmatrix} x_{i2}^r = 1 + Q_2 \sum_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{2j}^{r-1}}{\partial Q_3},$$
$$\begin{pmatrix} (u_1 - S_1^{r-1}) x_{i1}^r - (1 + \varphi^{r-1}) x_{i2}^r = 1 + \varphi^{r-1}, \\ - (1 + \varphi^{r-1}) x_{i1}^r + (u_2 - S_2^{r-1}) x_{i2}^r = 1 + \varphi^{r-1}. \end{bmatrix}$$

Поэтому матрица  $\delta \alpha^r$  и вектор  $\delta \beta^r$ в данном случае следующие:

$$\begin{split} \delta \pmb{\alpha}^r = \left( \begin{array}{cc} 0 & \varphi^{r-1} - Q_1 \sum\limits_{j \in N \setminus 1} \frac{\partial x_{1j}^{r-1}}{\partial Q_2} \\ \varphi^{r-1} - Q_2 \sum\limits_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{2j}^{r-1}}{\partial Q_1} & 0 \end{array} \right), \\ \delta \pmb{\beta}^r = \left( \begin{array}{c} \varphi^{r-1} - Q_1 \sum\limits_{j \in N \setminus 1} \frac{\partial x_{1j}^{r-1}}{\partial Q_3} \\ \varphi^{r-1} - Q_2 \sum\limits_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{2j}^{r-1}}{\partial Q_3} \end{array} \right). \end{split}$$

Погрешность приближения  $\delta \mathbf{x}_{i}^{r} = \mathbf{x}_{i}^{r} - \mathbf{X}_{i}^{r}$  оценивается по норме вектора, и относительная погрешность вычисляется по следующей формуле [22]:

$$\begin{split} \frac{\|\delta \mathbf{x}_{i}^{r}\|}{\|\mathbf{x}_{i}^{r}\|} &\leq \frac{\mu\left(\boldsymbol{\alpha}^{r}\right)}{1-\mu\left(\boldsymbol{\alpha}^{r}\right)\frac{\|\delta\boldsymbol{\alpha}^{r}\|}{\|\boldsymbol{\alpha}^{r}\|}} \left(\frac{\|\delta\boldsymbol{\beta}^{r}\|}{\|\boldsymbol{\beta}^{r}\|} + \frac{\|\delta\boldsymbol{\alpha}^{r}\|}{\|\boldsymbol{\alpha}^{r}\|}\right)\\ \text{при} \quad \mu\left(\boldsymbol{\alpha}^{r}\right)\frac{\|\delta\boldsymbol{\alpha}^{r}\|}{\|\boldsymbol{\alpha}^{r}\|} < 1 \quad \text{м} \quad \|\boldsymbol{\alpha}^{r}\| \neq 0, \end{split}$$

где символом  $\|\bullet\|$  обозначена норма, символом  $\mu(\boldsymbol{\alpha}^r) = \|\boldsymbol{\alpha}^r\| \| (\boldsymbol{\alpha}^r)^{-1} \|$  обозначено число обусловленности матрицы  $\boldsymbol{\alpha}^r$ . Для вычисления нормы матрицы  $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_{ij}, i, j = 1, \ldots, m\}$  используем формулу  $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{m} |\alpha_{ij}|$ . При больших действиях в силу свойства (6d) матрица  $\boldsymbol{\alpha}^r$  имеет строгое диагональное преобладание, т.е. для каждой строки диагональный элемент  $u_i - S_i^{r-1}$  по модулю больше суммы модулей остальных элементов, или  $|\alpha_{ii}| > \sum_{j=1\setminus i}^{m} |\alpha_{ij}|, \forall i = 1, \ldots, m$ . В этом случае число обусловленности матрицы  $\boldsymbol{\alpha}^r$  имеет [23] следующую оценку:  $\mu(\boldsymbol{\alpha}^r) < \frac{\max_i |\alpha_{ii}| + \sum_{j=1\setminus i}^m |\alpha_{ij}|}{\min_i |\alpha_{ii}| - \sum_{j=1\setminus i}^m |\alpha_{ij}|}.$ 

Пусть при  $Q_i \geq \overline{Q}_i$  в элементах вне главной диагонали матрицы  $\alpha^r$  и в элементах вектора  $\beta^r$  второе слагаемое не превышает по модулю малого числа  $\bar{\varepsilon} \in (0,1)$ , т.е. эти элементы не превышают величины  $1 + \bar{\varepsilon}$ , где  $\bar{Q}_i \geq \left(\frac{B_i\beta_i|\beta_i-1|}{\varepsilon b}\right)^{\frac{1}{2-\beta_i}}$  определено из условия  $|u_i+2| \leq \varepsilon$ , и на базе формулы  $\varphi_{li}^r(Q)$  в (П.7) с учетом обобщения в (П.8) получим

$$\bar{\varepsilon} \ge \left| \psi^r \frac{Q_l}{Q_i} \frac{\varepsilon}{(\psi^r (\varepsilon - 2) + 1)} \frac{\beta_i - 2}{\left(\Delta_l^{r-1}\right)^2} \Delta_{li}^{r-1} \left[ \Delta_l^{r-1} + \sum_{k \in M} \Delta_{lk}^{r-1} \right] \right| \quad \forall i, l \in M.$$

В этом случае

$$\begin{split} \|\delta\boldsymbol{\beta}^{r}\| &\leq \left|\boldsymbol{\varphi}^{r-1} + \bar{\varepsilon}\right|, \quad \mu\left(\boldsymbol{\alpha}^{r}\right) < \frac{\max_{1\leq j\leq m} \left|u_{j} - S_{j}^{r-1}\right| + (m-1)\left(1 + \bar{\varepsilon}\right)}{\min_{1\leq j\leq m} \left|u_{j} - S_{j}^{r-1}\right| - (m-1)\left(1 + \bar{\varepsilon}\right)}, \\ \|\boldsymbol{\beta}^{r}\| &\geq 1 - \bar{\varepsilon}, \quad \frac{\|\delta\boldsymbol{\beta}^{r}\|}{\|\boldsymbol{\beta}^{r}\|} \leq \frac{\left|\boldsymbol{\varphi}^{r-1} + \bar{\varepsilon}\right|}{1 - \bar{\varepsilon}}, \quad \|\delta\boldsymbol{\alpha}^{r}\| \leq (m-1)\left|\boldsymbol{\varphi}^{r-1} + \bar{\varepsilon}\right|, \\ \|\boldsymbol{\alpha}^{r}\| &\geq \min_{1\leq j\leq m} \left|u_{j} - S_{j}^{r-1}\right| + (m-1)\left(1 - \bar{\varepsilon}\right), \\ \frac{\|\delta\boldsymbol{\alpha}^{r}\|}{\|\boldsymbol{\alpha}^{r}\|} \leq \bar{\mu} = \frac{(m-1)\left|\boldsymbol{\varphi}^{r-1} - \bar{\varepsilon}\right|}{\max_{1\leq j\leq m} \left|u_{j} - S_{j}^{r-1}\right| + (m-1)\left(1 - \bar{\varepsilon}\right)}. \end{split}$$

Тогда погрешность соответствует (6е).

Доказательство утверждения 2. Обозначим  $z_j^r = \psi^r \left( u_j - S_j^{r-1} \right) + 1.$ Вначале рассмотрим частный случай m = 1, когда, как следует из (П.2),  $S_i^r =$  
$$\begin{split} &= x_{ij}^r = \frac{1}{z_j^{r-1}} = \frac{1}{\psi^r(u_j - S_j^{r-1})}, \ i, j = 1, 2. \ \text{При} \ r = 1 \ \text{по} \ (\text{6a}) \ \psi^1 = 1, \ S_j^0 = 0, \ \text{зна-} \\ \text{чит} \ z_j^1 = u_j + 1, \ \text{поэтому} \ S_i^1 = \frac{1}{u_j} < 0, \ \text{так как согласно} \ (\Pi.3) \ u_j < -2 \ \text{при} \\ \beta_j \ge 1 \ \text{и} \ -2 < u_j < -1 \ \text{при} \ \beta_j < 1. \ \text{Значит,} \ \left|S_i^1\right| < 1. \ \text{При} \ r > 1 \ \text{возможны} \\ \text{два случая:} \ 1) \ z_j^r < 0, \ \text{тогда} \ S_i^r < 0, \ \left|S_i^r\right| < 1; \ 2) \ z_j^r > 0, \ \text{тогда} \ \text{из неравен-} \\ \text{ства} \ z_j^r = \psi^r \left(u_j - S_j^{r-1}\right) + 1 > 0 \ \text{следует, что} \ \psi^r \left(u_j - S_j^{r-1}\right) > -1, \ \text{значит,} \\ &\left|S_i^r\right| > 1; \ \text{условие} \ S_i^r < 0 \ \text{выполняется в случае, если} \ \left|S_j^{r-1}\right| < |u_j|, \ \text{т.е. при} \\ \text{таких } r < r_{\max i}, \ \text{что} \ \left|S_j^{r_{\max i} - 1}\right| < |u_j|, \ \text{при этом условии имеется ограничениe} \\ &\left|S_i^r\right| < \frac{1}{\psi^{r_{\max i} i} \left|u_j - S_j^{r_{\max i} - 1}\right|}. \ \text{Неравенства являются строгими, так как по условия } \\ \text{виям} \ (\text{6a}) \ z_j^r \neq 0. \end{split}$$

В общем случае суммирование формул (6а) по всем агентам окружения *i*-го агента приводит к формуле

$$S_i^r = \sum_{l \in M} x_{il}^r = \frac{\sum_{\substack{\gamma=1 \setminus i \ j=1 \setminus (\gamma,i)}}^m \prod_{\substack{j=1 \setminus i \ \gamma=1 \setminus i \ j=1 \setminus (\gamma,i)}}^m z_j^r}{\prod_{j=1 \setminus i}^m z_j^r - \sum_{\substack{\gamma=1 \setminus i \ j=1 \setminus (\gamma,i)}}^m \prod_{j=1 \setminus (\gamma,i)}^m z_j^r} = \frac{1}{s_i^r - 1},$$

где

$$s_i^r = \frac{1}{\sum\limits_{j \in M} \frac{1}{z_j^r}}, \quad i \in N.$$

При r = 1 из (П.3) следует, что  $z_j^1 = u_j + 1 < 0 \ \forall j \in M$ , поэтому  $s_i^1 < 0, i \in N$ , значит,  $S_i^1 < 0, |S_i^1| < 1, i \in N$ .

При r = 2 возможны два случая:

1) все  $z_j^2 < 0 \ \forall j \in M$ , тогда, аналогично случаю r = 1, имеем:  $s_i^2 < 0$ ,  $S_i^2 < 0, \ |S_i^2| < 1, i \in N;$ 

2) существует несколько значений  $z_j^2 > 0$ , так что  $s_i^2 > 0$ ; тогда  $z_j^2 < 1$ , поскольку  $|u_i| \ge 1$ ,  $|S_i^1| < 1$ ; следовательно, наибольшее значение  $s_i^2 > 0$  ограничено величиной  $s_i^2 < \frac{1}{m}$  (равенство имеет место, если все  $z_j^2 = 1$ , но по условиям (6a)  $\sum_{j \in M} \frac{1}{z_j^r} \neq 1$ ), поэтому при m > 1,  $S_i^2 < 0$ ,  $|S_i^2| < \frac{m}{m-1}$ ,  $i \in N$ .

При r = 3 во втором случае, при аналогичных рассуждениях, имеет место ограничение  $0 < z_j^3 < 1 + \psi^3 \left(-1 + \frac{m}{m-1}\right) = 1 + \frac{\psi^3}{m-1} = 1 + \upsilon^3, \ \upsilon^3 = \frac{\psi^3}{m-1},$  следовательно, наибольшее значение  $s_i^3 > 0$  ограничено величиной  $\frac{1+\upsilon^3}{m}$ , поэтому  $S_i^3 < 0, \ \left|S_i^3\right| < \frac{m}{m-1-\upsilon^3}$ . При r = 4 во втором случае, имеет место ограничение  $0 < z_j^4 < 1 + \psi^4 \left(-1 + \frac{m}{m-1-\upsilon^3}\right) = 1 + \frac{\psi^4}{\frac{m}{1+\upsilon^3}-1} = 1 + \upsilon^4, \ \upsilon^4 = \frac{\psi^4}{\frac{m}{1+\upsilon^3}-1},$  поэтому  $s_i^4 > 0$  ограничено величиной  $\frac{1+\upsilon^4}{m}$ , значит,  $S_i^4 < 0, \ \left|S_i^4\right| < \frac{m}{m-1-\upsilon^4}$ . При произвольном r, аналогично рассуждая, получим наибольшее по модулю значение  $S_{i\,\max}^r = \frac{1}{\frac{1+\upsilon^r}{m}-1} = \frac{m}{1+\upsilon^r-m}$  при  $\upsilon^r = \frac{\psi^r}{\frac{m}{1+\upsilon^r-1}} > 0$ , поэтому  $\left|S_i^r\right| < \frac{m}{m-1-\upsilon^r}.$ 

Ограничение  $S_i^r < 0$  выполняется в случае  $m - 1 - v^r > 0$ , откуда следует, что  $m > 1 + \frac{\psi^r}{\frac{m}{1+v^{r-1}}-1}$ ,  $(m-1)\left(\frac{m}{1+v^{r-1}}-1\right) > \psi^r$ ; так как  $v^r > 0$ , то последнее неравенство выполняется, если  $\left(\frac{m}{1+v^{r-1}}-1\right)^2 > \psi^r$ , откуда вытекает, что  $v^{r-1} < \frac{m}{1+\sqrt{\psi^r}} - 1$ ; подставим это выражение в формулу  $v^r$ , получим максимальное значение  $v_{\max}$ , при котором  $S_i^r < 0$ :  $v_{\max} = \frac{\psi_{\max}(1+\sqrt{\psi_{\max}})^2}{m\sqrt{\psi_{\max}}}$ , где  $\psi_{\max} = \arg\max_{r>1} \psi^r$ . Следовательно,  $|S_i^r| < \frac{m}{m-1-v_{\max}}$ .

Условие (7е) следует из дифференцирования выражения (7а): поскольку  $s_i^r = \frac{1}{\sum_{j \in M} \frac{1}{z_j^r}}$  не зависит от  $Q_i$ , то  $\frac{\partial S_i^r}{\partial Q_i} = 0$ ;  $\frac{\partial S_i^r}{\partial Q_j} = -\frac{1}{(s_i^r - 1)^2} \frac{-1}{(\sum_{j \in M} \frac{1}{z_j^r})^2} \frac{-1}{(z_j^r)^2} \frac{\partial z_j^r}{\partial Q_j}$ , где производная  $\frac{\partial z_j^r}{\partial Q_j} = \psi^r \frac{\partial u_j}{\partial Q_j}$ ; поскольку из (7c) следует, что  $s_i^r$ , а значит, и  $z_j^r$ , суть конечные величины, то  $\lim_{Q_i \to \infty} \frac{(s_i^r)^2}{(s_i^r - 1)^2} \frac{\psi^r}{b(z_i^r)^2} \beta_j (\beta_j - 1) (\beta_j - 2) Q_j^{\beta_j - 3} = 0$ .

Доказательство утверждения 3. Из формулы (6а) следует, что

$$(\Pi.13) \qquad x_{il}^{r} = \frac{\prod_{j=1\backslash (l,i)}^{m} z_{j}^{r}}{\prod_{j=1\backslash i}^{m} z_{j}^{r} - \sum_{\gamma=1\backslash i}^{m} \prod_{j=1\backslash (\gamma,i)}^{m} z_{j}^{r}} = \frac{1}{z_{l}^{r} - 1 - \sum_{j=1\backslash (l,i)}^{m} \frac{z_{l}^{r}}{z_{j}^{r}}} = \frac{1}{z_{l}^{r} \left(1 - \sum_{j=1\backslash (l,i)}^{m} \frac{1}{z_{j}^{r}}\right) - 1}.$$

Например, для случая m = 3, i = 4, l = 3 это выражение имеет вид  $x_{43}^r = \frac{1}{z_3^r \left(1 - \frac{1}{z_1^r} - \frac{1}{z_2^r}\right) - 1}$ . При r = 1  $z_j^r < 0$   $\forall j \in M$ , тогда из (П.13) следует, что

 $x_{il}^1 < 0$ . При r > 1 возможны следующие случаи:

1) все  $z_j^r < 0 \ \forall j \in M$ , тогда из (П.13) следует, что  $x_{il}^r < 0 \ \forall r \ge 1$ ;

2) все  $z_j^r > 0 \ \forall j \in M, r > 1$ , тогда из (П.13) следует, что  $x_{il}^r < 0 \ \forall r > 1$ , так как  $z_l^r \left(1 - \sum_{j=1 \setminus (l,i)}^m \frac{1}{z_j^r}\right) - 1 < 0$ , поскольку это равносильно следующем неравенствам:  $1 - \sum_{j=1 \setminus (l,i)}^m \frac{1}{z_j^r} < \frac{1}{z_l^r} \Rightarrow 1 < \sum_{j=1 \setminus i}^m \frac{1}{z_j^r} > 1$ , а из доказательства 2 следует, что  $s_i^r < 1$  при m > 2;

3) существуют  $z_{\theta}^{r}|_{\theta\in\Theta} > 0 \land z_{\theta}^{r}|_{\theta\in\bar{\Theta}} < 0, \ \theta \in M, \ r > 1$ , тогда из предыдущего рассуждения следует, что для выполнения  $z_{l}^{r}\left(1-\sum_{j=1\setminus (l,i)}^{m}\frac{1}{z_{j}^{r}}\right)-1<0$  необходимо, чтобы выполнялось  $1 < \sum_{j\in\Theta}\frac{1}{z_{j}^{r}} + \sum_{j\in\bar{\Theta}}\frac{1}{z_{j}^{r}}$ , т.е.  $\frac{1}{s_{\Theta}^{r}} > 1 + \frac{1}{|s_{\Theta}^{r}|}$ ; в противном случае будет (8c). ■

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Nash J. Non-cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
- Cournot A.A. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838).
- 3. *Bowley A.L.* The Mathematical Groundwork of Economics. Oxford: Oxford Univers. Press, 1924.
- Karmarkar U.S., Rajaram K. Aggregate Production Planning for Process Industries under Oligopolistic Competition // Eur. J. Oper. Res. 2012. V. 223. No. (3). P. 680–689.
- Ledvina A., Sigar R. Oligopoly Games under Asymmetric Costs and an Application to Energy Production // Math. Financ. Econom. 2012. V. 6 (4). P. 261–293.
- Currarini S., Marini M.A. Sequential Play and Cartel Stability in Cournot Oligopoly // Appl. Math. Scie. 2013. No. 7 (1–4). P. 197–200.
- Vasin A. Game-theoretic Study of Electricity Market Mechanisms // Procedia Comput. Sci. 2014. No. 31. P. 124–132.
- Sun F., Liu B., Hou F., Gui L., Chen J. Cournot Equilibrium in the Mobile Virtual Network Operator Oriented Oligopoly Offloading Market // IEEE Int. Conf. Commun., ICC 2016. No. 7511340.
- Geraskin M. Game-theoretic analysis of Stackelberg oligopoly with arbitrary rank reflexive behavior of agents // Kybernetes. 2017. V. 46(6). P. 1052–1067.
- Geraskin M. Equilibria in the Stackelberg Oligopoly Reflexive Games with Different Marginal Costs of Agents // Int. Game Theory Rev. 2019. V. 21. No. 2. P. 1950002 (1-22).
- Naimzada A.K., Sbragia L. Oligopoly Games with Nonlinear Demand and Cost Functions: Two Boundedly Rational Adjustment Processes // Chaos, Solit. Fractal. 2006. V. 29 (3). P. 707–722.
- Askar S., Alnowibet K. Nonlinear Oligopolistic Game with Isoelastic Demand Function: Rationality and Local Monopolistic Approximation // Chaos, Solit. Fractal. 2016. No. 84. P. 15–22.
- Naimzada A., Tramontana F. Two Different Routes to Complex Dynamics in an Heterogeneous Triopoly Game // J. Differ. Equat. Appl. 2015. V. 21. No. 7. P. 553– 563.
- Cavalli F., Naimzada A., Tramontana F. Nonlinear Dynamics and Global Analysis of a Geterogeneous Cournot Duopoly with a Local Monopolistic Approach Versus a Gradient Rule with Endogenous Reactivity // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2015. No. 23 (1–3). P. 245–262.
- Stackelberg H. Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin, Urch & Hill, Springer, 2011. (Original 1934)
- Гераськин М.И., Чхартишвили А.Г. Теоретико-игровые модели рынка олигополии с нелинейными функциями издержек агентов // АиТ. 2017. № 9. С. 106–130. Geraskin M.I., Chkhartishvili A.G. Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market with Nonlinear Agent Cost Functions // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. (9). P. 1631–1650.
- Corchyn L.C. Comparative statics for aggregative games the strong concavity case // Math. Social Sci. 1994. V. 28 (3). P. 151–165.
- Possajennikov A. Conjectural variations in aggregative games: An evolutionary perspective // Math. Social Sci. 2015. No. 77. P. 55–61.

- 19. Walters A.A. Production and cost functions: and econometric survey // Econometrica. 1963. V. 31. No. 1. P. 23–44.
- 20. Гераськин М.И. Моделирование рефлексии в нелинейной модели трехагентной олигополии Штакельберга для телекоммуникационного рынка России // АиТ. 2018. № 5. С. 83–106.

*Geraskin M.I.* Modeling Reflexion in the Non-Linear Model of the Stakelberg Three-Agent Oligopoly for the Russian Telecommunication Market // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 5. P. 841–859.

- Korn G., Korn T. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. N.Y.: McGraw-Hill Book Company, 1968.
- 22. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. М.: Интернет-университет Информационных Технологий: БИНОМ 2006. 523 с.
- 23. Varah J.M. A lower bound for the smallest singular value of a matrix // Linear Algebra Its Appl. 1975. V. 11(1). P. 3–5.
- 24. Reddy Rachapalli S., Kulshreshtha P. Evolutionarily stable conjectures and social optimality in oligopolies // Theoret. Econ. Lett. 2013. V. 3. No. 1. P. 12–18.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.

Поступила в редакцию 23.09.2019 После доработки 25.12.2019 Принята к публикации 30.01.2020

## © 2020 г. Ю.Г. БУЛЫЧЕВ, д-р техн. наук (profbulychev@yandex.ru) (АО "ВНИИ "Традиент", Ростов-на-Дону)

# НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПРИ НЕКОРРЕКТНЫХ УСЛОВИЯХ НАБЛЮДЕНИЯ

Решаются задачи численно-аналитического представления решения уравнения, описывающего динамический объект и его измеряемого выхода, а также оптимального вычисления значений непрерывных линейных функционалов (числовых характеристик) от измеряемых функций на основе некорректных данных, содержащих не только флуктуационную погрешность, но и сингулярную помеху. Метод обеспечивает максимально возможную декомпозицию вычислительных процедур, не требует выполнения традиционных операций линеаризации и выбора начальных приближений, а также не связан с расчетом спектральных коэффициентов в конечных линейных комбинациях (с заданными базисными функциями), описывающих интегральные кривые, измеряемые функции и сингулярную помеху.

*Ключевые слова*: идентификация, динамический объект, измеряемый выход, непрерывный линейный функционал, числовая характеристика, сингулярная помеха, некорректные наблюдения, автокомпенсационное оценивание.

**DOI:** 10.31857/S0005231020060086

#### 1. Введение

В различных областях, связанных с решением задач оптимального управления, оценивания, фильтрации, прогнозирования и распознавания образов [1–12], возникает необходимость решения векторного обыкновенного дифференциального уравнения (например, уравнения свободного движения), соответствующего некоторому многомерному динамическому объекту (ДО). При этом необходимо заранее строить приближенное аналитическое решение (требуемого качества) для данного уравнения, которое должно зависеть от начального условия и других характерных параметров, принимающих значения из заданного множества допустимости. Если ДО снабжен измеряемым выходом, то также целесообразно иметь приближенное аналитическое описание (требуемого качества) данного выхода для указанного множества допустимости. Кроме того, часто возникает необходимость оптимального оценивания некоторых числовых характеристик (ЧХ) от измеряемых функций, к которым можно отнести начальное условие, производные различного порядка, определенные интегралы, спектральные коэффициенты соответствующих разложений и др., т.е. речь идет об оценке значений непрерывных линейных функционалов [13–16]. Так, для триангуляционных комплексов пассивной локации движущихся излучающих целей весьма важной является задача нахождения производных от измеряемых пеленгов (азимута и угла места) для каждой приемной позиции комплекса [5, 6]. Использование указанных ЧХ позволяет решать актуальные задачи прогнозирования угловых траекторий (например, при срыве и пропуске наблюдений) и отождествления пеленгов группы движущихся излучающих целей для многопозиционного триангуляционного комплекса [5].

В [13–16] развит эффективный в вычислительном плане метод оптимального автокомпенсационного оценивания ЧХ от информационного сообщения, реализация которого наблюдается в аддитивной смеси с флуктуационным шумом и сингулярной помехой (не исключается также наличие маскирующего сигнала). Помеха на интервале наблюдения может многократно превосходить (по абсолютной величине) сумму реализаций информационного сообщения и шума, т.е. речь идет о так называемых некорректных наблюдениях, с которыми часто приходится сталкиваться на практике [5, 6, 13–16]. Достоинство метода автокомпенсационного оценивания (инвариантного к сингулярной помехе) состоит в том, что он позволяет решать задачу вычисления ЧХ без традиционного расширения пространства состояний и ориентирован не только на гладкие, но и на кусочно-непрерывные помехи с известными и неизвестными точками разрыва первого рода, когда на участке непрерывности помеха описывается одним из базисов (априорно неизвестным), принадлежащим конечному семейству возможных (для данной помехи) функциональных базисов.

В [13] на основе идей автокомпенсационного оценивания [14–16] и опорных интегральных кривых ([17] — скалярный случай, [18] — векторный случай) развит метод численно-аналитического описания ДО (для заданной области допустимости) и оценивания ЧХ его интегральной кривой по выборкам этой кривой, содержащей флуктуационный шум и сингулярную помеху. К недостаткам такого метода можно отнести то, что рассматривается лишь скалярный ДО, в качестве измеряемого параметра выступает непосредственно интегральная кривая ДО, а это, как правило, не вполне соответствует потребностям практики. Для большинства прикладных задач более актуальным является оценивание ЧХ для векторного измеряемого выхода ДО.

Цель статьи — разработать метод численно-аналитического описания решения дифференциального уравнения и измеряемого выхода многомерного ДО для заданной области допустимости, а также оптимального оценивания ЧХ измеряемых функций (сохраняя достоинства метода [13]) по результатам некорректных наблюдений. Очевидно, что возможная нелинейность, отсутствие (как правило) общего решения соответствующего дифференциального уравнения, его зависимость не только от времени, но и от других характерных параметров (начального условия и коэффициентов правой части уравнения) делают эту задачу нетривиальной.

#### 2. Постановка задачи

Рассмотрим многомерный ДО, описываемый моделью

$$dz/dt = \bar{f}(t, z, \eta), \quad z \in G_z \subset \mathbb{R}^{I_1}, \quad \eta \in G_\eta \subset \mathbb{R}^{I_2}, \quad t \in G_t = [t_0, t_0 + T] \subset \mathbb{R}^1,$$

где  $\eta = [\eta_i, i = \overline{1, I_2}]^{\mathrm{T}}$  — вектор постоянных параметров неопределенности, которые могут принимать значения из заданной области допустимости  $G_{\eta} = \{[r_1, p_1], [r_2, p_2], \ldots, [r_{I_2}, p_{I_2}]\}, [r_i, d_i] \subset \mathbb{R}^1, i = \overline{1, I_2}, z_0 = z(t_0) \in G_{z_0} = \{[c_1, d_1], [c_2, d_2], \ldots, [c_{I_1}, d_{I_1}]\}, G_{z_0} \subseteq G_z, [c_i, d_i] \subset \mathbb{R}^1, i = \overline{1, I_1}.$  Данная модель может рассматриваться как самостоятельно, так и в качестве уравнения свободного движения для некоторого управляемого детерминированного или стохастического ДО. Вводя расширенный вектор  $x = [z^{\mathrm{T}}, \eta^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{I_1+I_2} = \mathbb{R}^I$  и учитывая, что  $d\eta/dt \equiv 0$ , приходим к другому описанию ДО в виде дифференциального уравнения

(2.1) 
$$dx/dt = f(t,x), \quad t \in G_t = [t_0, t_0 + T] \subset \mathbb{R}^1, \quad x \in \mathbb{R}^I,$$

где  $x = x(t, x_0) = [x_i(t, x_0), i = \overline{1, I}]^{\mathrm{T}}$  – решение уравнения с начальным условием  $x_0 = x(t_0, x_0) = [x_{i0}, i = \overline{1, I}]^{\mathrm{T}} \in G_{x0}, \quad G_{x0} = \{x_0 \in \mathbb{R}^I : c_i \leq x_{i0} \leq d_i, i = \overline{1, I}\}$  – гиперпараллеленинед возможных начальных условий, f(t, x) – функция, имеющая ту гладкость (по аргументам t и x), которая соответствует рассматриваемому ДО и требуется по смыслу проводимых в дальнейшем выкладок.

Для уравнения (2.1) справедливо

$$f(t,x) = \left[f_i(t,x), i = \overline{1,I}\right]^{\mathrm{T}} = \left[\overline{f}_i(t,z,\eta), i = \overline{1,I_1}, \overline{f}_j(t,z,\eta), j = \overline{I_1+1,I}\right]^{\mathrm{T}},$$

где  $\bar{f}_j(t, z, \eta) \equiv 0, \ j = \overline{I_1 + 1, I}$ . При гладкой правой части f(t, x) (с учетом существования всевозможных производных определенного порядка по t и x) решение  $x(t, x_0)$  уравнения (2.1) и его соответствующие частные производные существуют и непрерывны в области  $G_{xt} = \{G_{x0}, G_t\}$  (см. [19, с. 124, 125]). Будем полагать, что гладкие частные решения  $x_i(t, x_0)$  принадлежат пространству непрерывных функций  $C[G_{xt}]$  с равномерной сходимостью, при этом норме этого пространства соответствует обозначение  $\|\cdot\|_{C[G_{xt}]}$  (см. [20, с. 51, 52]).

Уравнению (2.1) можно поставить в соответствие приближенное аналитическое решение  $\tilde{x} = \tilde{x}(t, x_0)$ , где  $\tilde{x}_0 = \tilde{x}(t_0, x_0)$ , при этом в общем случае  $\max_i |\tilde{x}_{i0} - x_{i0}| \neq 0, \ i = \overline{1, I}$ . Считаем, что  $\tilde{x} = \tilde{x}(t, x_0) = [\tilde{x}_i(t, x_0), i = \overline{1, I}]^T$ является  $\varepsilon_0$ -приближенным по невязке решением [21]:  $\max_i |\tilde{x}_{i0} - x_{i0}| \leq \varepsilon_0$ ,  $d\tilde{x}_i/dt = f_i(t, \tilde{x}) + \vartheta_i(t), \ \max_{i,t} |\vartheta_i(t)| \leq \varepsilon_0, \ t \in G_t$ . В дальнейшем близость точной  $x_i = x_i(t, x_0)$  и приближенной  $\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(t, x_0)$  фазовых координат ДО для фиксированного  $x_0$  будем характеризовать невязкой  $\varepsilon_{xi}(x_0) = \max_{t \in G_t} |\tilde{x}_i(t, x_0) - x_i(t, x_0)|$ , соответственно для оценки близости их производных первого порядка (по аргументу t) вводится невязка  $\varepsilon_{xi}^{(1)}(x_0) = \max_{t \in G_t} |\tilde{x}_i^{(1)}(t, x_0) - x_i^{(1)}(t, x_0)|$ . Для оценки близости векторных решений  $x(t, x_0), \tilde{x}(t, x_0)$  и их производных  $x^{(1)}(t, x_0), \tilde{x}^{(1)}(t, x_0)$  используются невязки  $\varepsilon_x(x_0) = \max_i \varepsilon_{xi}(x_0)$  и  $\varepsilon_x^{(1)}(x_0) = \max_i \varepsilon_{xi}^{(1)}(x_0)$  соответственно.

Зададимся также векторным уравнением измеряемого выхода ДО

(2.2) 
$$y(t) = \varphi(t, x(t, x_0)) \in \mathbb{R}^J, \quad t \in G_t,$$

где  $y(t) = [y_j(t, x_0), j = \overline{1, J}]^{\mathrm{T}}$  – вектор измеряемых функций с координатами  $y_j(t, x_0)$ , которые также принадлежат  $C[G_{xt}], \varphi(t, x)$  – гладкая функция своих аргументов (степень гладкости также определяется типом измеряемого выхода рассматриваемого ДО).

На траекториях  $y_j(t, x_0) \in C^r[G_{xt}]$  вводится семейство  $\Omega$  ЧХ ( $\omega \in \Omega$ ), которые необходимы при решении тех или иных целевых задач, связанных с наблюдением за конкретным ДО, при этом будем использовать представление  $\omega \{y_j(t, x_0)\} = \omega_j \{x_0\} \in \mathbb{R}^1$ .

Воспользуемся дискретными уравнениями наблюдения за ДО

(2.3) 
$$h_{jn} = y_{jn} \left( x'_0 \right) + s_{jn} + \xi_{jn}, \quad j = \overline{1, J}, \quad n = \overline{0, N_j},$$

где  $h_{jn} = h_j(t_{jn}), y_{jn}(x_0) = y_j(t_{jn}, x_0), s_{jn} = s_j(t_{jn}), \xi_{jn} = \xi_j(t_{jn}), t_{jn} \in G_t$ . В этом уравнении:  $x'_0 \in G_{x0}$  — неизвестное начальное условие,  $s_j(t)$  — сингулярная помеха,  $\xi_j(t)$  — флуктуационная погрешность. Введение индекса j во временну́ю сетку  $\{t_{jn}\}_{n=0}^{N_j}$  позволяет рассмотреть случай асинхронных измерений различных функций выхода ДО.

Помеху опишем в виде  $s_j(t) = C_j^{\mathrm{T}}\Theta_j(t)$ , где  $C_j = [c_{jp}, p = \overline{1, M_{sj}}]^{\mathrm{T}}$  — вектор неизвестных спектральных коэффициентов,  $\Theta_j(t) = [\theta_{jp}(t), p = \overline{1, M_{sj}}]^{\mathrm{T}}$  вектор заданных базисных функций,  $M_{sj}$  — заданное число степеней свободы (на практике часто прибегают к упрощениям  $M_{sj} = M_s$  и  $\Theta_j(t) = \Theta(t)$ ). Вектор  $\Theta_j(t)$ , соответствующий  $y_j(t, x_0)$ , может формироваться из семейства базисных функций, которые в наибольшей степени соответствуют основным факторам неопределенности, отвечающим различным наиболее вероятным условиям наблюдения за ДО. Такое семейство должно предусматривать возможность появления сингулярных помех самого разного типа, с которыми можно столкнуться на практике при исследовании конкретного ДО в тех или иных условиях наблюдения.

Шум  $\xi_j(t)$  на измерительной сетке  $\{t_{jn}\}_{n=0}^{N_j}$  характеризуется нулевым математическим ожиданием и соответствующей невырожденной корреляционной матрицей  $K_{\Xi_j}$ .

Введем векторные обозначения:

$$H_{j} = \begin{bmatrix} h_{jn}, n = \overline{0, N_{j}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad Y_{j} = \begin{bmatrix} y_{jn} (x'_{0}), n = \overline{0, N_{j}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$
$$S_{j} = \begin{bmatrix} s_{jn}, n = \overline{0, N_{j}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{j} = \begin{bmatrix} \xi_{jn}, n = \overline{0, N_{j}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Это позволяет перейти от (2.3) к векторному уравнению наблюдения  $H_j = Y_j + S_j + \Xi_j$ . Для фиксированного  $j \in \overline{1, J}$  из  $\Omega$  выберем произвольную ЧХ  $\omega: y_j(t, x_0) \to \mathbb{R}^1$ , в другой записи  $\omega \{y_j(t, x_0)\} = \omega_j \in \mathbb{R}^1$ . На основе наблюдения  $H_j$  нужно дать оценку значения  $\omega_j$ , т.е. вычислить ЧХ измеряемой функции  $y_j(t, x_0)$ . Данную оценку будем искать в классе линейных оценок (здесь и далее индекс \* соответствует некоторой оценке)

(2.4) 
$$\omega_j^* = P_j^{\mathrm{T}} H_j = P_j^{\mathrm{T}} (Y_j + S_j + \Xi_j) = P_j^{\mathrm{T}} Y_j + P_j^{\mathrm{T}} S_j + P_j^{\mathrm{T}} \Xi_j = \omega_{Yj}^* + \omega_{Sj}^* + \omega_{\Xi j}^*,$$

где  $P_j = \left[p_{jn}, n = \overline{0, N}\right]^{\mathrm{T}}$  — вектор искомых весовых коэффициентов.

В силу линейности процедуры оценивания (2.4) при фиксированном  $P_j$  дисперсия ошибки вычисления характеристики  $\omega_j$  находится как

$$\sigma_j^2 = P_j^{\mathrm{T}} K_{j\Xi} P_j.$$

Выбор оптимального значения  $P_i^*$  для вектора  $P_j$  соответствует критерию

$$P_j^* = \min_{P_j} \sigma_j^2,$$

при этом должны выполняться условия несмещенности оценки

$$P_{j}^{\mathrm{T}}Y_{j} = \omega \left\{ y_{j}\left(t, x_{0}\right) \right\} = \omega_{j}$$

и ее инвариантности к помехе

$$P_j^{\mathrm{T}}S_j = 0.$$

Требуется с учетом (2.1)–(2.4): сформировать алгоритм построения численно-аналитического решения  $\tilde{x}(t, x_0)$ ; обсудить вопросы точности и оптимизации выбора параметров данного алгоритма; сформировать алгоритм построения численно-аналитического выражения для измеряемого многомерного выхода ДО; сформировать алгоритм нахождения оптимального вектора  $P_j^*$  и оценки  $\omega_j^*$  и рассмотреть возможность оценивания различных ЧХ на основе наблюдений  $H_j$ ; исследовать методическую погрешность данного алгоритма; определить условия и границы применимости развиваемого метода, дать комментарии к достигаемому вычислительному эффекту.

## 3. Численно-аналитическое решение дифференциального уравнения динамического объекта (этап 1)

Для формирования решения уравнения (2.1) в области  $G_{xt}$  можно использовать широко применяющуюся в общей теории приближенных методов [22] математическую конструкцию

(3.1) 
$$\tilde{x}_i(t, x_0) = \sum \beta_{ik}^x \varsigma_{ik}^x(t, x_0), \quad i = \overline{1, I},$$

где  $\sum$  — одномерная сумма по индексу k с заданным числом неизвестных коэффициентов  $\beta_{ik}^x$  и известных базисных  $\varsigma_{ik}^x(t, x_0)$ . Очевидно, что с учетом гладкости решения  $x_i(t, x_0)$  число слагаемых в сумме можно подобрать так, чтобы для любого сколь угодно малого  $\delta_{xi} \ge 0$  обеспечивалось выполнение условия  $\varepsilon_{xi}(x_0) < \delta_{xi}$  независимо от конкретного значения  $x_0 \in G_{x0}$ . В частном случае можно перейти от (3.1) к приближению на основе многомерного многочлена (см. [23, с. 152])

(3.2) 
$$\tilde{x}_i(t, x_0) = \sum \alpha_{im}^x z^m, \quad i = \overline{1, I},$$

 $z = (t, x_{10}, \ldots, x_{I0}), \sum$  — многомерная сумма по мультиндексу m с заданным числом неизвестных коэффициентов  $\alpha_{im}^x$ . Представление (3.2) используется в

теореме Вейерштрасса [23], подтверждающей возможность наилучшего приближения к  $x_i(t, x_0)$  в равномерной метрике для области  $G_{xt}$ . Для гладких решений хорошее приближение можно получить на основе конструкции

(3.3) 
$$\tilde{x}_i(t, x_0) = \left[\Psi_i^x(t)\right]^{\mathrm{T}} B_i^x \Lambda_i^x(x_0), \quad i = \overline{1, I},$$

где  $\Psi_i^x(t)$  и  $\Lambda_i^x(x_0)$  — векторы заданных гладких базисных функций соответствующей размерности,  $B_i^x$  — матрица неизвестных коэффициентов. Если в качестве координат векторов  $\Psi_i^x(t)$  и  $\Lambda_i^x(x_0)$  использовать многомерные многочлены с соответствующими мультиндексами (по аналогии с [23, с. 152]), то представление (3.3) несложно получить из (3.1). На практике конструкция (3.3) широко распространена для описания большого класса ДО.

Для расчета коэффициентов, фигурирующих в математических конструкциях (3.1)–(3.3), воспользуемся методом опорных интегральных кривых (ОИК) решения дифференциальных уравнений [17, 18]. Обобщим метод ОИК на векторное уравнение (2.1). Для этого в области  $G_{x0}$  рассмотрим сетку, состоящую из многомерных узлов  $x_{0(r)} \in G_{x0}$ ,  $r \in \overline{1, M_x}$ . Этим узлам поставим в соответствие семейство ОИК  $x_{i(r)} = x_i (t, x_{0(r)}), i = \overline{1, I}, r = \overline{1, M_x}$ , которое формируется на основе одного из известных высокоточных численных методов интегрирования. Погрешностями построения ОИК в дальнейшем будем пренебрегать (по аналогии с [17, 18]). На практике данное семейство задается таблично.

Теперь в области  $G_t$  задается временна́я сетка  $\{t_{(ik)}\}, k = \overline{1, M_{ti}},$  объема которой достаточно для представления фазовых координат  $x_i(t, x_{0(r)})$  в области  $G_{xt}$  с требуемой точностью. Далее с использованием семейства ОИК формируется массив чисел

(3.4) 
$$x_{i(rk)} = x_i \left( t_{(ik)}, x_{0(r)} \right), \quad i = \overline{1, I}, \quad r = \overline{1, M_x}, \quad k = \overline{1, M_{ti}}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов в формулах (3.1)–(3.3) можно применять известные операторы  $E_1^x$ ,  $E_2^x$  и  $E_3^x$  (интерполяции или аппроксимации [23–25]), при этом с учетом (3.4), используя эти операторы, вычисляются указанные коэффициенты

$$(3.5) \quad \mathbf{E}_{1}^{x}: \left\{ x_{i(rk)} \right\} \to \left\{ \beta_{ik}^{x} \right\}, \quad \mathbf{E}_{2}^{x}: \left\{ x_{i(rk)} \right\} \to \left\{ \alpha_{im}^{x} \right\}, \quad \mathbf{E}_{3}^{x}: \left\{ x_{i(rk)} \right\} \to \left\{ B_{i}^{x} \right\}.$$

При построении численно-аналитического решения  $\tilde{x}(t, x_0)$  уравнения (2.1) на базе (3.5) в общем случае применяется неравномерная сетка  $\{t_{(ik)}\}$  по аргументу t. Кроме того, для многих ДО зависимость фазовой координаты  $x_i(t, x_0)$  от  $x_0$  является слабо выраженной, что существенно снижает объем  $M_x$  вычислительной сетки по начальному условию  $x_0$  и упрощает рассмотренную процедуру (интерполяционную или аппроксимационную) построения численно-аналитического решения  $\tilde{x}(t, x_0)$  уравнения (2.1).

Таким образом, априорно на первом этапе (до получения измерительных данных) строится приближенное аналитическое решение  $\tilde{x}(t, x_0)$  уравнения (2.1), обеспечивающее в области  $G_{xt}$  требуемую для практики точность анализа ДО. В число параметров, позволяющих достичь такой точности, можно отнести объемы используемых сеток ( $M_{ti}$  и  $M_x$ ), кроме того, важен выбор систем базисных функций в приближениях (3.1)–(3.3) с учетом вида правой части уравнения (2.1).

Конкретизируем описанную процедуру на случай, когда при построении решения на базе (3.3) используются фундаментальные многочлены интерполяции (как тензорное произведение одномерных фундаментальных многочленов [23]). С этой целью в области  $G_{x0}$  зададим многомерную вычислительную сетку  $\{x_{0(m)}\} = \{x_{0(m_1,...,m_I)}\}$  (где  $m = (m_1,...,m_I)$  — мультиндекс,  $m_i = \overline{1, M_{xi}}, i = \overline{1, I}, \prod M_{xi} = M_x, \prod$  — знак умножения по индексу  $i = \overline{1, I}$ ) и для всех ее узлов построим семейство ОИК  $x_{i(m)} = x_{i(m_1,...,m_I)} =$  $= x_i (t, x_{0(m)}) = x_i (t, x_{0(m_1,...,m_I)}), i = \overline{1, I}$ . На отрезке  $c_i \leq x_{i0} \leq d_i$  задаются узлы  $x_{i0(1)}, \ldots, x_{i0(M_{xi})}$  и принимается, что

$$\psi_{ik}^{x}(t) = L_{i(k)}(t) = \prod_{j=1, j \neq k}^{M_{ti}} \left(t - t_{i(j)}\right) / \left(t_{i(k)} - t_{i(j)}\right).$$

В этом случае решение (3.3) имеет вид

$$\tilde{x}_{i}(t, x_{0}) = \sum_{k=1}^{M_{ti}} \sum_{m} x_{i(mk)} L_{i(k)}(t) L_{i(m)}(x_{0}), \quad i = \overline{1, I},$$

где  $\sum_{\rm m}-$  многомерная сумма по мультиндексу m,

$$L_{i(m)}(x_{0}) = \prod_{i=1}^{I} L_{(m_{i})}(x_{i0}),$$
$$L_{(m_{i})}(x_{i0}) = \sum_{q=1,q\neq m_{i}}^{M_{xi}} (x_{i0} - x_{i0(q)}) / (x_{i0(m_{i})} - x_{i0(q)}).$$

Если  $\tilde{x}_i(t, x_0)$  является  $\varepsilon_0$ -приближенным по невязке решением, то для погрешности  $\varepsilon_{xi}(x_0)$  представления фазовой координаты  $x_i(t, x_0)$  с использованием  $\tilde{x}_i(t, x_0)$  справедлива оценка (по аналогии с [21])

$$\varepsilon_{xi}(x_0) \le \varepsilon_0 \Big[ (L_0^{-1} + 1) \exp(L_0 |t - t_0|) - L_0^{-1} \Big],$$

где  $t \in G_t$ ,  $x_0 \in G_{x0}$ ,  $L_0$  — константа Липшица для правой части уравнения (2.1). Соответственно для оценки близости точного  $x(t, x_0)$  и приближенного  $\tilde{x}(t, x_0)$  векторных решений применима оценка

$$\varepsilon_x(x_0) \le \varepsilon_0 \left\{ \sqrt{I} \exp\left(L_0 I^2 T\right) + \left(L_0 I\right)^{-1} \left[ \exp\left(L_0 I^2 T\right) - 1 \right] \right\}.$$

Опираясь на [23–25], можно также оценить вклад наследственной погрешности и погрешности округлений в результирующую ошибку построения приближенного решения уравнения (2.1). При учете погрешностей интерполяции и аппроксимации на качество формируемого численно-аналитического решения достаточно воспользоваться оценками, которые приводятся в [23–25].

# 4. Численно-аналитическое описание измеряемого выхода динамического объекта (этап 1)

Точный выход ДО можно представить в виде

$$y(t) = \varphi(t, x(t, x_0)) = \gamma(t, x_0) \in \mathbb{R}^J,$$

при этом  $\varphi: G_{xt} \to G_{yt}$  — гладкая функция по t и  $x_0$ . Соответственно для приближенного выхода ДО имеем

$$\tilde{y}(t) = \varphi(t, \tilde{x}(t, x_0)) = \tilde{\gamma}(t, x_0) \in \mathbb{R}^J.$$

По аналогии с разделом 3 для численно-аналитического описания измеряемого выхода ДО можно использовать семейство ОИК, при этом также применяем принцип гладкой зависимости  $y(t) = \gamma(t, x_0)$  от своих аргументов. Для этой цели семейству ОИК  $x_{(r)} = x(t, x_{0(r)}), r = \overline{1, M_x}$ , поставим в соответствие семейство выходных траекторий

$$y_{j(r)}(t) = \varphi_j\left(t, x\left(t, x_{0(r)}\right)\right) = \gamma_j\left(t, x_{0(r)}\right), \quad j \in \overline{1, J}, \quad r = \overline{1, M_x},$$

которые представим массивом чисел

$$y_{j(rk)} = \varphi_j \left( t_{i(k)}, x \left( t_{i(k)}, x_{0(r)} \right) \right) = \gamma_j \left( t_{i(k)}, x_{0(r)} \right), j \in \overline{1, J}, \quad r = \overline{1, M_x}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Теперь по аналогии с (3.5) можно получить оценки неизвестных коэффициентов в приближенных выражениях для измеряемого выхода ДО, если в формулах (3.1)–(3.3) заменить символ x на y, а символ i на j:

$$\mathbf{E}_1^y: \left\{ y_{j(rk)} \right\} \to \left\{ \beta_{jk}^y \right\}, \quad \mathbf{E}_2^y: \left\{ y_{j(rk)} \right\} \to \left\{ \alpha_{jm}^y \right\}, \quad \mathbf{E}_3^y: \left\{ y_{j(rk)} \right\} \to \left\{ B_j^y \right\}.$$

По аналогии с (3.3) выход ДО представим так:

(4.1) 
$$\tilde{y}_j(t) = \left[\Psi_j^y(t)\right]^{\mathrm{T}} B_j^y \Lambda_j^y(x_0), \quad j = \overline{1, J},$$

(4.2) 
$$\tilde{y}_{j}(t) = \tilde{\gamma}_{j}(t, x_{0}) = \sum_{k=1}^{M_{t}} \sum_{m} y_{j(mk)} L_{j(k)}(t) L_{j(m)}(x_{0}), \quad j = \overline{1, J}.$$

Формулы (4.1) и (4.2) являются удобными в численно-аналитических расчетах и в максимальной степени ориентированы на оперативные вычисления.

# 5. Оценивание числовых характеристик измеряемых параметров динамического объекта (этап 2)

Этап 2 связан непосредственно с обработкой поступающих измерений и согласно современной концепции должен характеризоваться минимальными вычислительными затратами, заданной оперативностью и устойчивостью к сингулярной помехе. Выполнить эти требования возможно, если воспользоваться процедурой автокомпенсационного оценивания ЧХ при некорректных условиях наблюдения. С учетом (4.1) выходную траекторию ДО зададим в виде

(5.1) 
$$\tilde{y}_j(t) = \tilde{\gamma}_j(t, x_0') = \left[B_j^y(x_0')\right]^{\mathrm{T}} \Psi_j^y(t) = \bar{Y}_j^{\mathrm{T}} \Psi_j^y(t), \quad j = \overline{1, J},$$

где  $\bar{Y}_{j} = \left[ y_{j}\left( t_{(k)} \right), k = \overline{1, M_{t}} \right]^{\mathrm{T}} = B_{j}^{y}\left( x_{0}^{\prime} \right)$  – вектор временны́х отсчетов траектории  $\tilde{y}_j(t) = \tilde{\gamma}_j(t, x'_0)$  на вычислительной сетке  $\{t_{(k)}\}_{k=1}^{M_t}$ ,  $x'_0 \in G_{x0}$  — неизвестное начальное условие, фигурирующее в уравнении наблюдения (2.3),  $\Psi_{i}^{y}(t) = \left[\psi_{ik}^{y}(t), k = \overline{1, M_{t}}\right]^{\mathrm{T}}$  — вектор базисных функций. Полагаем, что

$$\tilde{\gamma}_j\left(t_{(k)}, x_0'\right) = \bar{Y}_j^{\mathrm{T}} \Psi_j^y(t_{(k)}) \approx y_j\left(t_{(k)}\right),$$

при этом вектор временны́х отсчетов координаты  $y_{jn} = \gamma_j (t_{jn}, x_0)$  на измерительной сетке  $\{t_{jn}\}_{n=0}^{N_j}$  (где  $N_j \gg M_t$ ) приближенно может быть задан в виде  $Y_j \approx \bar{Y}_j^{\mathrm{T}} \Psi_j^y, j = \overline{1, J}$ , где  $\Psi_j^y = \left[ \psi_{jkn}^y, k = \overline{1, M_t}, n = \overline{0, N_j} \right]$  — матрица отсчетов  $\psi_{jkn}^{y} = \psi_{jk}^{y}(t_{jn})$  функций  $\psi_{jk}^{y}(t)$ .

Условие несмещенности оценки ЧХ (см. раздел 2) принимает вид

$$P_j^{\mathrm{T}}Y_j = \omega \left\{ \gamma_j \left( t, x_0 \right) \right\} = \left[ \omega \left\{ \Psi_j^y(t) \right\} \right]^{\mathrm{T}} \bar{Y}_j = P_j^{\mathrm{T}} \left( \Psi_j^y \right)^{\mathrm{T}} \bar{Y}_j = \omega_j,$$

где  $\omega \left\{ \Psi_{j}^{y}(t) \right\} = \left[ \omega \left\{ \psi_{jk}^{y}(t) \right\}, k = \overline{1, M_{t}} \right]^{\mathrm{T}}$  — вектор значений ЧХ  $\omega$  на базисных функциях  $\psi_{ik}^{y}(t)$ . Отсюда следует окончательное условие несмещенности

(5.2) 
$$\Psi_j^y P_j = \omega \left\{ \Psi_j^y(t) \right\}$$

Поскольку необходимо, чтобы

$$\omega \{s_j(t)\} = \omega \{C_j^{\mathrm{T}} \Theta_j(t)\} = C_j^{\mathrm{T}} \omega \{\Theta_j(t)\} = P_j^{\mathrm{T}} S_j = 0,$$

то условие инвариантности (см. раздел 2) можно преобразовать к виду

(5.3) 
$$\Theta_j P_j = [0]_{M_{sj} \times 1},$$

где  $[0]_{M_{sj} \times 1}$  — нулевой вектор-столбец размерности  $M_{sj} \times 1$ ,  $\Theta_j = \left[\theta_{jsn}, s = \overline{1, M_{sj}}, n = \overline{0, N_j}\right]$  — матрица отсчетов  $\theta_{jsn} = \theta_{js}(t_{jn})$  базисных функций сингулярной помехи.

Задача нахождения оптимальной оценки  $P_i^*$  вектора  $P_j$  решается методом условной оптимизации Лагранжа на базе критерия  $P_j^* = \min_{P_j} \sigma_j^2$  с учетом ограничений (5.2) и (5.3). В итоге получаем процедуру автокоменсационного оценивания ЧХ применительно к измеряемому выходу ДО

(5.4) 
$$P_j^* = Z_{j1} \left( \Psi_j^y \right)^{\mathrm{T}} \left[ \Psi_j^y Z_{j1} \left( \Psi_j^y \right)^{\mathrm{T}} \right]^{-1} \omega \left\{ \Psi_j^y(t) \right\},$$

(5.5) 
$$\omega_{j0}^* = \left[ P_j^* \right]^{\mathrm{T}} H_j = H_j^{\mathrm{T}} P_j^*,$$

где  $Z_{j1} = Z_{j2}K_{j\Xi}^{-1}, Z_{j2} = E_j - K_{j\Xi}^{-1}\Theta_j^{\mathrm{T}} \left(\Theta_j K_{j\Xi}^{-1}\Theta_j^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \Theta_j, E_j$  – единичная матрица.

Из (5.4) непосредственно вытекает, что матрицы  $K_{j\Xi}$ ,  $\Theta_j K_{j\Xi}^{-1} \Theta_j^{\rm T}$  и  $\Psi_j^y Z_{j1} \left(\Psi_j^y\right)^{\rm T}$  должны быть невырожденными и хорошо обусловленными, что соответствует получению единственного и устойчивого решения  $P_j^*$ . Данный вопрос относится к сфере оптимального планирования измерительного эксперимента и в данной статье не рассматривается. При рациональном выборе основных параметров процедуры (5.4), (5.5) можно избежать необходимости решения некорректной (с вычислительной точки зрения) задачи оценивания.

Для дисперсии оптимальной оценки  $\omega_j^*$ числовой характеристики  $\omega_j$ имеем выражение

(5.6)  

$$\sigma_{j}^{2} = \left[P_{j}^{*}\right]^{\mathrm{T}} K_{j\Xi} P_{j}^{*} = \left[\omega \left\{\Psi_{j}^{y}(t)\right\}\right]^{\mathrm{T}} W_{j1} \Psi_{j}^{y} Z_{j1}^{\mathrm{T}} K_{j\Xi} Z_{j1} \left(\Psi_{j}^{y}\right)^{\mathrm{T}} W_{j2} \omega \left\{\Psi_{j}^{y}(t)\right\},$$
rge  $W_{j1} = \left[\Psi_{j}^{y} (Z_{j1})^{\mathrm{T}} \left(\Psi_{j}^{y}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{-1}, W_{j2} = \left[\Psi_{j}^{y} Z_{j1} \left(\Psi_{j}^{y}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{-1}.$ 

Выражения (5.4)-(5.6) имеют явный векторно-матричный вид, что существенно упрощает их применение в любой вычислительной среде. Оценка ЧХ (5.5) формируется сразу, без промежуточного вычисления спектральных коэффициентов измеряемой функции и сингулярной помехи, т.е. без расширения пространства состояний. Кроме того, эта оценка является несмещенной, поскольку достигается инвариантность результата оценивания к сингулярной помехе. В силу этого алгоритм нахождения оптимального значения ЧХ на базе выражений (5.4) и (5.5) можно отнести к классу линейных автокомпенсационных алгоритмов.

Следует отметить, что задачу оценивания ЧХ можно было бы решать традиционно — путем расширения пространства состояний. Но тогда в вектор оцениваемых параметров надо было бы включить все спектральные коэффициенты, входящие в линейные комбинации измеряемой функции и сингулярной помехи. Оценив эти коэффициенты, далее можно находить искомую ЧХ с учетом этих комбинаций. Однако в [13–16] показано (а также это следует из (5.4) и (5.5)), что можно сразу найти оценку скалярной ЧХ (без вычисления указанных коэффициентов), оперируя с обратными матрицами гораздо меньшего размера (что очень полезно с вычислительной точки зрения).

Дадим оценку усредненной методической погрешности  $\delta_j$  оценивания ЧХ применительно к представлению (4.1). Поскольку в (4.1) не учитывается

"XBOCT"

$$\Delta_{j}(t, x_{0}) = \gamma_{j}(t, x_{0}) - \left[\Psi_{j}^{y}(t)\right]^{\mathrm{T}} B_{j}^{y} \Lambda_{j}^{y}(x_{0})$$

бесконечного ряда, то имеем (используя символ математического ожидания  $M[\cdot]$ ), что

$$\delta_{j} = \mathbf{M} \left[ \omega_{j} - \omega_{j}^{*} \right] = \mathbf{M} \left[ \omega \left\{ \left[ \Psi_{j}^{y} \left( t \right) \right]^{\mathrm{T}} B_{j}^{y} \Lambda_{j}^{y} \left( x_{0} \right) \right\} + \omega \left\{ \Delta_{j} \left( t, x_{0} \right) \right\} - \omega_{Yj}^{*} - \omega_{\Delta j}^{*} - \omega_{Sj}^{*} - \omega_{\Xi j}^{*} \right],$$

где

$$\omega_{Yj}^* = (P_j^*)^{\mathrm{T}} Y_j, \quad \omega_{\Delta j}^* = (P_j^*)^{\mathrm{T}} \Delta_j, \quad \Delta_j = \left[\Delta (t_n, x_{j0}), n = \overline{0, N}\right]^{\mathrm{T}}, \\ \omega_{Sj}^* = P_j^{\mathrm{T}} S_j, \quad \omega_{\Xi j}^* = P_j^{\mathrm{T}} \Xi_j.$$

Так как  $\omega \left\{ \left[ \Psi_{j}^{y}(t) \right]^{\mathrm{T}} B_{j}^{y} \Lambda_{j}^{y}(x_{0}) \right\} = \omega_{yj}^{*}$  (условие несмещенности),  $\omega_{Sj}^{*} = P_{j}^{\mathrm{T}} S_{j} = 0$  (условие инвариантности) и  $\mathrm{M}\left[\Xi_{j}\right] = 0$  (шум является центрированным), то вытекает равенство

(5.7) 
$$\delta_{j} = \mathbf{M} \left[ \omega \left\{ \Delta_{j} \left( t, x_{0} \right) \right\} - \left( P_{j}^{*} \right)^{\mathrm{T}} \Delta_{j} - \left( P_{j}^{*} \right)^{\mathrm{T}} \Xi_{j} \right] = \omega \left\{ \Delta_{j} \left( t, x_{0} \right) \right\} - \left( P_{j}^{*} \right)^{\mathrm{T}} \Delta_{j}.$$

Таким образом, методическая погрешность оценивания в среднем определяется значением ЧХ на "хвосте" бесконечного ряда и линейной оценкой этого значения.

Необходимые и достаточные условия существования и единственности решения (5.4), (5.5) задачи оценивания ЧХ измеряемого выхода ДО требуют невырожденности и соблюдения некоторых ограничений на ранги ряда матриц. Выполнение этих условий на практике обеспечивается рациональным выбором векторов  $\Psi_j^y(t)$  и  $\Theta_j(t)$  базисных функций, числа измерительных узлов  $\{t_{jn}\}_{n=0}^{N_j}$  и их расположением, числа степеней свободы в моделях приближенного решения дифференциального уравнения и измеряемого выхода ДО, а также сингулярной помехи. Все эти вопросы относятся к планированию измерительного эксперимента. Используя результаты из [9, 10], можно получить оптимальные оценки параметров предлагаемого метода с учетом статистических характеристик флуктуационных погрешностей измерений. В статье не рассматриваются эти вопросы, чтобы не перегружать объем статьи, хотя они и важны для практики, но являются второстепенными для теории результатами.

Теперь рассмотрим вопрос, связанный с параметрической идентификацией *j*-го измеряемого выхода ДО (где  $j \in \overline{1, J}$ ). Для этого в соответствии с алгоритмом (5.4), (5.5) необходимо оценить вектор коэффициентов  $\bar{Y}_j$  в модели (5.1). Согласно данному алгоритму находятся оптимальные оценки  $y_{j(k)}^*$ отсчетов измеряемой функции  $y_j(t) = \gamma_j(t, x'_0)$  в узлах  $t_{(k)}$ ,  $k = \overline{1, M_t}$ , с учетом некорректных наблюдений (2.3). Если истинные значения отсчетов  $y_{j(k)}$ рассматривать как ЧХ измеряемой функции  $y_j(t) = \gamma_j(t, x'_0)$  с фиксированным (но неизвестным) начальным условием  $x'_0$ , т.е.  $y_{j(k)} = \omega \{\gamma_j(t, x'_0)\}$ , то можно воспользоваться оценками

(5.8) 
$$\omega_j^* = y_{j(k)}^* = H_j^{\mathrm{T}} Z_{j1} \left( \Psi_j^y \right)^{\mathrm{T}} \left[ \Psi_j^y Z_{j1} \left( \Psi_j^y \right)^{\mathrm{T}} \right]^{-1} \omega \left\{ \Psi_j^y(t) \right\}, \quad j = \overline{0, J},$$

положив  $\omega\{\Psi_{yj}(t)\} = [0, 0, ..., 1, 0, ..., 0]^{\mathrm{T}}$  – нулевой столбец с единицей в *k*-й позиции. Зная оценку  $\bar{Y}_{j}^{*} = [y_{j(k)}^{*}, k = \overline{1, M_{t}}]^{\mathrm{T}}$  вектора  $\bar{Y}_{j} = [y_{j}(t_{(k)}), k = \overline{1, M_{t}}]^{\mathrm{T}}$ , формируем оценки выходных траекторий  $\tilde{y}_{j}^{*}(t) = [\Psi_{j}^{y}(t)]^{\mathrm{T}} \bar{Y}_{j}^{*}, j = \overline{1, J}$ , для рассматриваемого ДО.

Таким образом, несмотря на то что рассматриваемый ДО и его выход являются нелинейными, оценивание ЧХ на выходных траекториях ДО осуществляется без привлечения традиционно используемых процедур линеаризации нелинейных функций.

# 6. Некоторые обобщения, вычислительные аспекты, практические рекомендации

Задачу оценивания, рассмотренную в разделе 5, также можно обобщить на многомерный случай, который связан с оценкой векторной ЧХ  $\omega = [\omega_d, d = \overline{1, D}]^{\mathrm{T}}$  на выходных траекториях ДО. В этом случае оценка находится в векторно-матричном виде  $\omega_j^* = P_j^* H_j$ , где

$$P_j^* = [p_{jdn}^*, \ d = \overline{1, D}, \ n = \overline{0, N}]$$

— оценка матрицы  $P_j$  весовых коэффициентов. Данная матрица находится из условия минимизации следа корреляционной матрицы  $K_j = P_j K_{j\Xi} P_j^{\mathrm{T}}$ этой оценки, кроме того, также должны быть выполнены условия несмещенности и инвариантности, рассмотренные в разделе 5, по отношению ко всем координатам вектора  $\omega_j^*$ . Несложный анализ показывает, что данная задача развивается на D подзадач, связанных с оцениванием по каждой координате вектора  $\omega = [\omega_d, d = \overline{1, D}]^{\mathrm{T}}$ , т.е. достигается максимально возможная декомпозиция вычислительной процедуры.

Для оценки вычислительной эффективности развитого автокомпенсационного метода оценивания ЧХ измеряемых функций ДО достаточно воспользоваться результатами из [15], которые демонстрируют возможность реализации процедуры оценивания в некорректных условиях наблюдения на основе распределенной обработки данных. В качестве показателя вычислительной эффективности метода можно принять время, затрачиваемое на получение искомых оценок. Данное время определяется быстродействием распределенной среды, общим числом операций, необходимых при реализации метода, и способом программирования. В [15] показано, что поскольку процедура оценивания не требует расширения пространства состояний, то реализуемые на ее основе алгоритмы позволяют достичь значительного выигрыша в вычислительной эффективности. В [15] дана количественная оценка достигаемого выигрыша на конкретном примере, связанном с решением известной задачи сглаживания результатов измерений, когда в качестве ЧХ выступает значение измеряемой функции в фиксированной точке интервала наблюдения. Показано, что для принятых исходных данных выигрыш по сравнению с известным расширенным методом наименьших квадратов составил 1,47 раза.

В качестве ЧХ могут рассматриваться выборочное значение *j*-й измеряемой функции в произвольной точке  $t' \in G_t$  (в этом случае  $\omega \{\Psi_y(t)\} = [\psi_{yk}(t'), k = \overline{1, M_t}]^{\mathrm{T}}$ ), значение производной *r*-го порядка в точке t' (в этом случае  $\omega \{\Psi_y(t)\} = [\psi_{yk}^{(r)}(t'), k = \overline{1, M_t}]^{\mathrm{T}}$ ), значение определенного интеграла на отрезке  $[t_0, t_0 + T]$  (в этом случае  $\omega \{\Psi_y(t)\} = [\int_{t_0}^{t_0+T} \psi_{yk}(\tau) d\tau, k = \overline{1, M_t}]^{\mathrm{T}}$ ) и др.

Предложенный алгоритм оценивания можно выполнять на подвижной сетке ("скользящем окне")  $\{t_{j,r+l-1}\}_{l=-\bar{n}_j/2}^{\bar{n}_j/2} \in G_t$ , где  $(\bar{n}_{j+1}+1)$  — объем "скользящего окна", r характеризует положение его центрального узла в момент времени  $t_{jr} \in G_t$ , а символ j позволяет занумеровать узлы "скользящего окна" при фиксированном r. Очевидно, что для формирования полномерного "скользящего окна" объемом  $\bar{n}_{j+1} + 1$  должны выполняться ограничения  $1 + \bar{n}_j/2 \le r \le 1 + N_j - \bar{n}_j/2$  и  $-\bar{n}_j/2 \le l \le \bar{n}_j/2$ , в противном случае алгоритм оценивания реализуется на неполномерном "скользящем окне" нарастающего объема (это относится к краям временно́го отрезка  $[t_0, T]$ ). Но и в этом случае имеется ограничение — этого объема должно быть достаточно для обеспечения невырожденности задачи оценивания.

Известно, что точность оценивания сглаженного значения измеряемой функции — наибольшая в середине "скользящего окна", что также в полной мере относится к нахождению различных ЧХ (например, производных), которые соответствуют некоторой произвольной точке  $t' \in G_t$ , являющейся одним из узлов подвижной сетки. Алгоритм оценивания несложно реализовать и на адаптивном "скользящем окне", объем которого меняется оптимальным образом с учетом условий наблюдения за ДО.

## 7. Иллюстративный пример

Оценим эффективность предлагаемого метода применительно к ракете, движущейся в однородном поле силы тяжести, при линейном законе расхода массы и отсутствии сопротивления среды (см. [12, с. 31–34]). Криволинейное движение ракеты описывается системой дифференциальных уравнений

$$dz_1/dt = -g_0 z_2^{-1}, \quad dz_2/dt = c_v \eta \left(1 - \eta t\right)^{-1} - g_0 \operatorname{th}(z_1),$$

где время измеряется в секундах,  $z_1 = x_1$  — фазовая координата (безразмерная), соответствующая углу  $\beta$  (рад) наклона вектора скорости к горизонту,  $z_1 = \ln [\operatorname{tg} (\pi/4 + \beta/2)]$ ,  $z_2 = x_2$  — величина скорости ракеты (м/с),

 $g_0$  — ускорение силы тяжести (м/с2),  $\eta = x_3$  — удельный расход массы ракеты (с<sup>-1</sup>),  $c_v$  — относительная скорость отбрасываемых частиц (м/с). Далее полагаем, что  $g_0 = 9,80665$  (взято из справочника),  $c_v = 2290$ ,  $t_0 = 0$ , T = 70,  $x_{i0} = x_i$  (0)  $\in G_{xi} = [c_i, d_i]$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $c_1 = 1,0107$ ,  $d_1 = 2,4362$ ,  $c_2 = 100$ ,  $d_2 = 200$ ,  $c_3 = r = 0,0060$ ,  $d_3 = p = 0,0100$ , в качестве измеряемой функции y используемых далее формулах индекс j опускается).

Для построения численно-аналитического решения принято  $I_1 = 2$  и  $I_2 = 1$ , следовательно,  $I = I_1 + I_2 = 3$ , при этом:  $f_1(t, x) = -g_0 x_2^{-1}$ ,  $f_2(t, x) = c_v x_3 (1 - x_3 t)^{-1} - g_0 \operatorname{th}(x_1)$ ,  $f_3(t, x) \equiv 0$ ,  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ ,  $M_{x1} = 4$ ,  $M_{x2} = 6$ ,  $M_{x3} = 5$ ,  $M_x = M_{x1} M_{x2} M_{x3} = 120$ ,  $M_t = 11$ ,  $M_s = 2$ ,  $\psi_{xk}(t) = L_{(k)}(t)$ ,  $L_{(m)}(x_0) = L_{(m_1,m_2,m_3)}(x_{01}, x_{02}, x_{03}) = L_{(m_1)}(x_{10})L_{(m_2)}(x_{20})L_{(m_3)}(x_{30})$ ,  $t_{(k)} = 7(k-1)$ ,  $k = \overline{1, 11}$ .

При расчетах погрешность операций над числами составляла  $2,2 \cdot 10^{-16}$ , а результаты вычислений представлены с точностью до четвертого знака после запятой. Вычисления выполнялись на компьютере средней мощности, аппаратная часть которого построена на базе процессора Intel Core i7 с оперативной памятью объемом 8 Гб и твердотельным диском Samsung 850 Pro. В качестве операционной системы использовалась Windows 10 Pro, а среды численного моделирования — MATLAB R2018b. Средняя загрузка ресурсов процессора составила 45%, а оперативной памяти — 80%. При построении приближенного аналитического решения на базе полиномов Лагранжа использовалась откомпилированная функция [26], написанная на языке MATLAB, что позволило увеличить оперативность вычислений в 40 раз за счет оптимизации работы с циклическими операциями [27].

Этап 1. Для построения семейства ОИК применялся метод Рунге–Кутты 4-го порядка с контролируемой точностью  $10^{-5}$ . Время вычислений в части формирования семейства ОИК составило 17,3 секунд, в части приближенного аналитического решения на основе построенного семейства ОИК — 195,7 секунд. В итоге общее время расчета составило 222,5 секунд (с учетом подготовки исходных данных и представления результатов расчета).

С целью наглядности результатов моделирования для оценки точности использовалась частная невязка  $\bar{\varepsilon}_{xi} = |x_i(t, x_0) - \tilde{x}_i(t, x_0)|, i \in \{1, 2\}$ , как функция от времени t и начального условия  $x_0$ . Так, на рис. 1 представлена зависимость частной невязки  $\bar{\varepsilon}_{x1}$  от t и  $x_{10}$  для фиксированных значений  $x_{20} = 104$  и  $x_{30} = 0,0063$ . При этом на исходной области  $\{G_{x0}, G_t\}$  имеем общую невязку  $\varepsilon_{x1} = \max_{x_0} \varepsilon_{x1}(x_0) = 0,0020$  (где  $\varepsilon_{x1}(x_0) = \max_t |\tilde{x}_1(t, x_0) - x_1(t, x_0)|)$ , что составляет 0,3237%. Данный максимум соответствует узлу (t = 27,  $x_{10} = 2,1466$ ,  $x_{20} = 104$ ,  $x_{30} = 0,0063$ ). На усеченной области  $\{\bar{G}_{x0}, \bar{G}_t\}$  (где  $\bar{G}_{x0} = \{[1,3170; 1,7454], [120; 180], [0,0070; 0,0090]\}$  и  $G_t = [7,63]$ ) получили общую невязку  $\varepsilon_{x1} = 0,0004$ , что составляет 0,1853%. Данный максимум соответствует узлу (t = 36,  $x_{10} = 1,5065$ ,  $x_{20} = 128$ ,  $x_{30} = 0,0070$ ).

На рис. 2 представлена зависимость частной невязки  $\bar{\varepsilon}_{x2}$  от t и  $x_{30}$  для фиксированных значений  $x_{10} = 2,1466$  и  $x_{20} = 124$ . При этом на исходной области  $\{G_{x0}, G_t\}$  имеем общую невязку  $\varepsilon_{x2} = \max_{x_0} \varepsilon_{x2}(x_0) = 4,0542$  (где  $\varepsilon_{x2}(x_0) = 6,0542$ )


Рис. 1. Зависимость невязки частной  $\bar{\varepsilon}_{x1}$  от t и  $x_{10}$  для фиксированных значений  $x_{20}$  и  $x_{30}$ .



Рис. 2. Зависимость частной невязки  $\bar{\varepsilon}_{x2}$  от t и  $x_{30}$  для фиксированных значений  $x_{10}$  и  $x_{20}$ .

=  $\max_{t} |\tilde{x}_{2}(t, x_{0}) - x_{2}(t, x_{0})|)$ , что составляет 0,1744 %. Данный максимум соответствует узлу (t = 70,  $x_{10} = 2,1466$ ,  $x_{20} = 124$ ,  $x_{30} = 0,0100$ ). На усеченной области { $\bar{G}_{x0}, \bar{G}_{t}$ } получили общую невязку  $\varepsilon_{x2} = 0,6355$ , что составляет 0,0367 %. Данный максимум соответствует узлу (t = 63,  $x_{10} = 1,5065$ ,  $x_{20} = 180$ ,  $x_{30} = 0,0090$ ).



Рис. 3. Зависимость частной невязки  $\bar{\varepsilon}_{\beta}$  от t и  $x_{10}$  для фиксированных значений  $x_{20}$  и  $x_{30}$ .

Учитывая, что выход ДО может быть представлен в виде

$$y = \beta = 2 \{ \operatorname{arctg} [\exp (z_1)] - \pi/4 \},\$$

на рис. 3 представлен трехмерный график частной невязки

$$\bar{\varepsilon}_{\beta} = \left|\gamma\left(t, x_0\right) - \tilde{\gamma}^*\left(t, x_0\right)\right|$$

как функции от t и  $x_{10}$  для фиксированных значений  $x_{20} = 108$  и  $x_{30} = 0,0063$ .

Соответственно на рис. 4 рассмотрен случай зависимости  $\bar{\varepsilon}_{\beta}$  от t и  $x_{30}$  для фиксированных значений  $x_{10} = 2,1466$  и  $x_{20} = 108$ . При этом на исходной области  $\{G_{x0}, G_t\}$  имеем общую невязку  $\varepsilon_{\beta} = \max_{x_0} \varepsilon_{\beta}(x_0) = 0,0988$  (где  $\varepsilon_{\beta}(x_0) = \max_{x_0} |\tilde{\beta}(t, x_0) - \beta(t, x_0)|$ ), что составляет 0,3303 %. Данный максимум соответствует узлу ( $t = 31, x_{10} = 2,1466, x_{20} = 108, x_{30} = 0,0063$ ). На усеченной области  $\{\bar{G}_{x0}, \bar{G}_t\}$  получили общую невязку  $\varepsilon_{\beta} = 0,0199$ , что составляет 0,2197 %. Данный максимум соответствует узлу ( $t = 38, x_{10} = 1,5065, x_{20} = 128, x_{30} = 0,0070$ ).

Соответственно для производной  $y^{(1)} = \beta^{(1)}$  на исходной области  $\{G_{x0}, G_t\}$ имеем общую невязку

$$\varepsilon_{\beta}^{(1)} = \max_{x_0} \varepsilon_{\beta}^{(1)}(x_0) = 5,4919$$

(где  $\varepsilon_{\beta}^{(1)}(x_0) = \max_t |\tilde{\beta}^{(1)}(t, x_0) - \beta^{(1)}(t, x_0)|$ ), что составляет 6,9520%. Данный максимум соответствует узлу ( $t = 1, x_{10} = 2,4362, x_{20} = 100, x_{30} = 0,0060$ ). На усеченной области  $\{\bar{G}_{x0}, \bar{G}_t\}$  получили общую невязку  $\varepsilon_{\beta}^{(1)} = 3,1612$ ,



Рис. 4. Зависимость частной невязки  $\bar{\varepsilon}_{\beta}$  от t и  $x_{30}$  для фиксированных значений  $x_{10}$  и  $x_{20}$ .

что составляет 5,5860 %. Данный максимум соответствует узлу (t = 8,  $x_{10} = 1,7354, x_{20} = 120, x_{30} = 0,0070$ ).

Результаты численного эксперимента наглядно показывают возможность качественного описания как входных, так и выходных параметров ДО с помощью разработанного численно-аналитического метода. Для уменьшения негативных краевых эффектов необходимо сужать области задания параметров t и  $x_0$ .

Этап 2. При реализации данного этапа использовались также следующие данные:  $x'_{10} = 1,7354$ ,  $x'_{20} = 112$ ,  $x'_{30} = 0,0800$ ,  $s(t) = c_1\theta_1(t) + c_2\theta_2(t)$ ,  $c_1 = 5$ ,  $\theta_1(t) = \sin(0,64t)$ ,  $c_2 = 15$ ,  $\theta_2(t) = \exp(-0,07t)$ ,  $K_{\Xi} = \operatorname{diag}(\sigma,\ldots,\sigma)$ ,  $\sigma = \pi/360$ ,  $\{t_n\}_{n=0}^N$ , N = 70,  $t_n - t_{n-1} = 1$ ,  $\bar{n} = 20$ ,  $11 \le r \le 61$ . Алгоритм оценивания реализовывался на полномерном "скользящем окне" с 21 узлом, при этом первая оценка измеряемого параметра и его производной относятся к текущему моменту времени  $t_{20} = 20$ , а последняя — к моменту  $t_{70} = 70$ . Именно при  $t_{20} = 20$  было сформировано первое полномерное "скользящее окно", а при  $t_{70} = 70$  — последнее. Поскольку все оценки привязываются к середине "скользящего окна", то первая полученная оценка соответствовала моменту  $t_{10} = 10$ , а последняя — моменту  $t_{60} = 60$ . Следовательно, приводимые далее характеристики точности относятся к усеченному отрезку времени  $\bar{G}_t = [10, 60]$ .

На рис. 5 приведены графики зависимости, характеризующие сингулярную помеху s(t). С использованием датчика случайных чисел и принятых исходных данных было сформировано уравнение наблюдения, при этом на рис. 6 представлены графики истинного значения измеряемой функции  $y = \beta$ и наблюдения  $h = y + s + \xi$ . Начиная с момента времени  $t_n = 20$  для каждого положения "скользящего окна" (всего 51 положение, т.е.  $11 \le r \le 61$ )



Рис. 5. Зависимости, характеризующие сингулярную помеху: <br/> a-семейство базисных функций, b-сингулярная помеха.



Рис. 6. Графики измеряемой функции и наблюдения: сплошная линия — измеряемая функция; точечная линия — наблюдение.

формировались текущие оценки  $\beta_n^*$  и  $\beta_n^{(1)*}$ , соответствующие центральному узлу. Для описания выходной координаты  $y(t) = \beta(t)$  в пределах "скользящего окна" использовалась линейная комбинация из трех первых полиномов Лежандра, т.е. в формуле (4.1) принималось:  $M_t = 3$ ,

$$\psi_{yk}(t) = P_{k-1}(\tau) = \frac{1}{2^{k-1}(k-1)!} \frac{d^{k-1}\left[\left(\tau^2 - 1\right)^{k-1}\right]}{d\tau^{k-1}},$$
  
$$k = \overline{1,3}, \quad \tau = \tau(t), \quad \tau \in [-1,1].$$

Для перехода от параметра  $\tau \in [-1,1]$ к временно́й координате

$$t \in \left[t_{j,r-\bar{n}_j/2-1}, t_{j,r+\bar{n}_j/2-1}\right] \in G_t$$



Рис. 7. Невязка оценивания выходной координаты.



Рис. 8. Невязка оценивания производной выходной координаты.

применялось линейное преобразование:

$$t = 2^{-1} \left[ t_{j,r-\bar{n}_j/2-1} + t_{j,r+\bar{n}_j/2-1} - \tau \left( t_{j,r-\bar{n}_j/2-1} - t_{j,r+\bar{n}_j/2-1} \right) \right]$$

Далее представлены графики зависимости частной невязки  $\bar{\varepsilon}^*_{\beta}$  оценивания выходной координаты (рис. 7) и ее производной  $\bar{\varepsilon}^{(1)*}_{\beta}$  (рис. 8) в от времени при фиксированном начальном условии  $x'_0 = [1,7354; 112; 0,0800]^{\mathrm{T}}$ , при этом общая невязка для выходной координаты составляет  $\varepsilon^*_{\beta} = \max_t \bar{\varepsilon}^*_{\beta} = 0,8162$  (соответственно 1,5717%), а для производной  $\varepsilon^{(1)*}_{\beta} = \max_t \bar{\varepsilon}^{(1)*}_{\beta} = 0,0518$  (соответственно 5,0601%).

Проводился сравнительный анализ по оперативности (т.е. по времени формирования оценок, выраженном в секундах) разработанного автокомпенсационного метода (AM) и известного расширенного метода наименьших квадратов (PMHK). Для одного фиксированного положения "скользящего окна" фиксировалось частное время ( $T_{\rm PMHK}$  и  $T_{\rm AM}$ ) построения оценки производной  $\beta^{(1)}$  в середине этого окна (один эксперимент). Проводилась тысяча таких экспериментов с последующим усреднением полученных результатов, при этом для частных результатов имеем  $T_{\rm PMHK} \in \{71 \cdot 10^{-6}, \dots, 123 \cdot 10^{-6}\}$  и  $T_{\rm AM} \in \{31 \cdot 10^{-6}, \dots, 54 \cdot 10^{-6}\}$ , а общий усредненный выигрыш по оперативности составил  $\bar{T}_{\rm PMHK}/\bar{T}_{\rm AM} = 2,32$  раза (здесь черта означает усреднение).

Также обнаружено, что при наличии в уравнении наблюдения одновременно гармонической и экспоненциальной составляющих сингулярной помехи РМНК приводит к некорректным оценкам производной для всех положений "скользящего окна", что объясняется известным эффектом "размазывания точности" при расширении пространства состояний. Удовлетворительный по точности результат оказался возможным только при наличии одной (гармонической) составляющей, в этом случае частная невязка составила 0,0025 для последнего положения "скользящего окна".

Результаты моделирования подтверждают возможность эффективного решения задачи оценивания ЧХ на выходных траекториях ДО даже при некорректных наблюдениях, содержащих сингулярную помеху.

#### 8. Заключение

Развитый численно-аналитический метод исследования ДО ориентирован, в первую очередь, на случаи, связанные с решением широкого круга прикладных задач, требующих вычислений в реальном времени. Данный метод предполагает вынесение основного объема вычислений на первый (предварительный) этап, не связанный непосредственно с наблюдением ДО. К концу этого этапа на базе семейства ОИК необходимо сформировать аналитическое решение дифференциального уравнения и аналитическое выражение для измеряемого выхода ДО, справедливые для заданной области изменения временной координаты, начальных условий и других характерных параметров. К первому этапу также относятся операции, связанные с формированием вектор-столбца или матрицы весовых коэффициентов оптимального оценивания, учитывающих спектральный состав измеряемых параметров, сингулярной помехи и статистические характеристики флуктуационного шума. На втором (основном) этапе реализуются операции, связанные с оперативным оцениванием значений ЧХ измеряемых функций по результатам некорректных наблюдений, а также решением других целевых задач, требующих использования полученных численно-аналитических описаний входных и выходных переменных ДО. Любые ЧХ поведения ДО находятся в виде скалярного произведения вектора наблюдений и соответствующего вектора весовых коэффициентов.

Выражаю свою благодарность моим аспирантам Раду П.Ю. и Кондрашову А.Г. за помощь в проведении вычислительного эксперимента.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высш. шк., 1989.
- 2. Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2003.
- Красовский А.А. Науковедение и состояние теории процессов управления. Обзор // АнТ. 2000. № 4. С. 3–19. *Krasovskii A.A.* Theory of Science and Status of the Control Teory // Autom. Remote Control. 2000. V. 61. No. 4. Part 1. P. 537–553.
- Жданюк Б.Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. радио, 1978.
- 5. *Булычев Ю.Г., Манин А.П.* Математические аспекты определения движения летательных аппаратов. М.: Мапиностроение, 2000.
- 6. Булычев Ю.Г., Васильев В.В., Джуган Р.В. и др. Информационно-измерительное обеспечение натурных испытаний сложных технических комплексов / Под ред. А.П. Манина и В.В. Васильева. М.: Машиностроение Полет, 2016.
- 7. Булычев Ю.Г., Бурлай И.В., Манин А.А. Аналитическое конструирование систем управления на основе метода опорных интегральных кривых // АиТ. 1994. № 7. С. 37–48.

Bulychev Yu.G., Burlai I.V., Manin A.A. Analytic Construction of Control Systems by the Method of Supporting Integral // Autom. Remote Control. 1994. V. 55. No. 7. Part 1. P. 954–963.

 Булычев Ю.Г., Манин А.А. Синтез адаптивных систем оптимального управления стохастическими объектами на основе прогнозирующей модели // АиТ. 1995. № 9. С. 81–92.

Bulychev Yu.G., Manin A.A. Synthesis of Adaptive Optimal Control Systems for Stochastic Objects from a Forecast Model // Autom. Remote Control. 1995. V. 56. No. 9. Part 2. P. 1268–1277.

- 9. Брандин В.Н., Васильев А.А., Худяков С.Т. Основы экспериментальной космической баллистики. М.: Машиностроение, 1974.
- Брандин В.Н., Разоренов Г.Н. Определение траекторий космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978.
- Льюнг Л. О точности модели в идентификации систем // Изв. АН. Техн. кибернетика. 1992. № 6. С. 55–64.
- 12. Воробьев Л.М. К теории полета ракет. М.: Машиностроение, 1970.
- Булычев Ю.Г., Мельников А.В. Численно-аналитический метод исследования поведения динамической системы по результатам некорректных наблюдений без расширения пространства состояний // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 2019. Т. 59. № 6. С. 937–950.
- Леонов В.А., Поплавский Б.К. Фильтрация ошибок измерений при оценивании линейного преобразования полезного сигнала // Изв. АН. Техн. кибернетика. 1992. № 1. С. 163–170.
- 15. *Булычев Ю.Г., Елисеев А.В.* Вычислительная схема инвариантно-несмещенного оценивания значений линейных операторов заданного класса // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 2008. Т. 48. № 4. С. 580–592.
- 16. *Булычев Ю.Г., Елисеев А.В., Бородин Л.И. и др.* Обобщенное инвариантнонесмещенное маскирование и оценивание информационных процессов в условиях мультиструктурных помех // АиТ. 2010. № 4. С. 140–149.

Bulychev Yu.G., Eliseev A.V., Borodin L.I., et al. Generalized Invariant-Unbiased Masking and Estimation of Informational Processes with Multistructural Noise // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 4. P. 672–680.

- 17. *Булычев Ю.Г.* Метод опорных интегральных кривых решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 1988. Т. 28. № 10. С. 1482–1490.
- 18. *Булычев Ю.Г.* Методы численно-аналитического интегрирования дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 1991. Т. 31. № 9. С. 1305–1319.
- 19. *Бибиков Ю.Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.
- 20. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
- 21. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
- 22. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
- 23. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
- 24. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ. Киев.: Наук. думка, 1986.
- 25. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
- 26. Mex-Files // GNU Octave [Электронный ресурс] URL: https://octave.org/doc/interpreter/Mex 002dFiles.html.
- 27. Techniques to Improve Performance // MATLAB Documentation [Электронный pecypc] URL: https://www.mathworks.com/help/matlab/matlab\_prog/techniques-for-improving-performance.html.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрусталевым.

Поступила в редакцию 18.09.2019 После доработки 14.11.2019 Принята к публикации 28.11.2019

## © 2020 г. В.О. НИКИФОРОВ, д-р техн. наук (nikiforov\_vo@itmo.ru), A.В. ПАРАМОНОВ, канд. тех. наук (avp.atrax@gmail.com), Д.Н. ГЕРАСИМОВ, канд. тех. наук (gerasimovdn@mail.ru) (Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

## АЛГОРИТМЫ АДАПТИВНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ<sup>1</sup>

В статье представлены два алгоритма адаптивного управления по состоянию для класса линейных многоканальных объектов в условиях внешних возмущений и наличия запаздывания в канале управления. Задающее воздействие и внешнее возмущение рассматриваются в качестве мультигармонических сигналов с неизвестными частотами, амплитудами и начальными фазами. Алгоритмы синтезированы с использованием метода прямого адаптивного управления, основанного на принципе внутренней модели, и не требуют проведения процедуры идентификации параметров возмущения и/или сигнала задания.

*Ключевые слова*: адаптивное слежение, многоканальная система, компенсация возмущений, запаздывание по управлению, внутренняя модель.

**DOI:** 10.31857/S0005231020060098

### 1. Введение

В статье для класса линейных многоканальных систем с запаздыванием по управлению решается задача адаптивного слежения за сигналом задания в условиях внешних возмущений.

Обеспечение слежения за задающим сигналом в условиях внешних возмущений относится к фундаментальным проблемам теории автоматического управления и является предметом активных исследований на протяжении нескольких десятилетий. Среди предложенных решений широкое применение получил метод внутренней модели, в соответствии с которым задающее воздействие и/или внешнее возмущение моделируется в качестве выхода линейной автономной динамической модели (виртуального генератора), возбуждаемой ненулевыми начальными условиями. В этом случае для полной компенсации возмущающего воздействия и/или достижения нулевой установившейся ошибки слежения за сигналом задания модель виртуального генератора должна быть соответствующим образом воспроизведена в законе управления [1–3]. При реализации такого подхода иногда говорят о сервоуправлении или о регулировании, понимая под этим обеспечение асимптотического слежения за задающим сигналом с одновременной компенсацией внешнего возмущения.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Работа выполнена при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 08-08).

Ранние работы в этой области были посвящены классической реализации метода внутренней модели, основанной на предположении, что параметры виртуального генератора известны, что означает точное знание формы внешнего сигнала [1–5]. Случай, когда априорно известен только некоторый класс внешних воздействий, но не их точные параметры, является более реалистичным с практической точки зрения. В этом случае используется адаптивная реализация метода внутренней модели [6–11], когда параметры виртуального генератора предполагаются неизвестными, и для построения закона управления используется специальный алгоритм адаптации, формирующий настраиваемые параметры регулятора. Позже адаптивная реализация метода внутренней модели была расширена на нелинейные объекты [12–15], а также на классы систем с параметрически неопределенными объектами [16, 17] и многоканальной средой [18, 19].

В последнее десятилетие предметом интенсивных исследований стали задачи адаптивного регулирования в системах с запаздыванием в канале управления. Данное запаздывание может быть обусловлено работой вычислительного блока, исполнительных механизмов, а также структурными особенностями объекта управления. Для такого класса задач большое развитие получил идентификационный подход [20–26], в соответствии с которым в алгоритме управления используется специальный блок идентификации параметров внешних сигналов и расчетный блок, генерирующий параметры алгоритма управления.

Одним из недостатков идентификационного подхода является тот факт, что, как правило, его реализация требует знания точного числа гармоник, некоторых априорных оценок возможных значений их частот, а иногда и минимальной разности частот между соседними гармониками. Другой недостаток заключается в требовании выполнения условия неисчезающего возбуждения [27], при нарушении которого идентификационный подход оказывается неэффективным.

Альтернативным идентификационному походу является метод прямого адаптивного управления [10, 28], который позволяет исключить этап идентификации параметров сигнала задания и/или возмущения и осуществить непосредственную настройку алгоритма управления для обеспечения заданной цели управления. При этом для синтеза закона управления из априорной информации о виртуальном генераторе используется только его порядок. Иными словами априорно известна только верхняя оценка количества гармоник во внешнем сигнале.

Однако обеспечение устойчивости систем прямого адаптивного управления с запаздыванием является сложной и не до конца решенной задачей и, как правило, предусматривает определение критических значений коэффициента адаптации и/или запаздывания, при которых сохраняется устойчивость системы [29, 30].

Сохранение работоспособности замкнутой системы при произвольных значениях коэффициента адаптации и запаздывания по управлению может быть обеспечено путем специальной модификации сигнала ошибки, что успешно применялось при решении задачи компенсации возмущений для одноканальных [31] и многоканальных систем [32], а так же в задачах по обеспечению слежения за эталонным сигналом [33, 34]. В статьях [31, 33] представлены решения по управлению одноканальными неустойчивыми объектами, а в работах [32, 34] рассматривался случай многоканального асимптотически устойчивого объекта, что не требовало отдельного решения задачи его стабилизации.

Настоящая статья развивает подход, изначально предложенный в [31–34], на случай одновременного решения задач асимптотического слежения за сигналом задания и компенсации внешнего возмущения для неустойчивого многоканального объекта управления. В статье предлагаются два различных алгоритма адаптивного регулирования, один из которых основан на построении единого регрессора и, как следствие, общего алгоритма адаптации для задачи слежения и задачи компенсации. Второй алгоритм основан на раздельном решении задач слежения и компенсации. Оба подхода имеют свои преимущества и недостатки, которые будут обсуждены в заключении.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе формулируется постановка задача. В третьем разделе приводится параметризация возмущения и сигнала задания. Четвертый и пятый раздел посвящены процедуре синтеза алгоритмов управления с объединенным и раздельным алгоритмами адаптации. В конце разделов приведены результаты компьютерного моделирования.

В статье использованы следующие обозначения: s = d/dt — оператор дифференцирования по времени,  $I_{n \times n}$  — единичная матрица размерности  $n \times n$ ,  $blockdiag(A_1, \ldots, A_n)$  — блочно-диагональная матрица с соответствующими элементами,  $P = P^\top \succ 0$  — симметричная положительно определенная матрица, ||x|| — евклидова норма вектора x.

### 2. Постановка задачи

Рассматривается линейный стационарный многоканальный объект вида

(1) 
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(u(t-\tau) + \delta), \\ y = Cx, \end{cases}$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния объекта,  $u \in \mathbb{R}^q$  — вектор управляющих воздействий,  $y \in \mathbb{R}^q$  — вектор регулируемых переменных,  $n \ge q$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  — известные матрицы,  $\tau$  — известное запаздывание,  $\delta \in \mathbb{R}^q$  — вектор неизмеряемых внешних возмущений.

Целью управления является синтез закона управления, обеспечивающего ограниченность всех сигналов в замкнутой системе и выполнение целевого условия:

(2) 
$$\lim_{t \to \infty} \|g(t) - y(t)\| = 0,$$

где  $g \in \mathbb{R}^q$  — вектор задающих (эталонных) сигналов<sup>2</sup>. Поставленная задача решается при выполнении следующих допущений.

 $<sup>^2</sup>$  В статье все сигналы (управления, задания, возмущения и т.п.) являются векторными. Поэтому термин "векторный" в дальнейшем будет опускаться.

 $\mathcal{A}$ опущение 1. Тройка матриц (A, B, C) полностью управляемая и наблюдаемая, а передаточная матрица  $W(s) = C(sI - A)^{-1}B$  невырожденна, т.е. det  $W(s) \neq 0$ .

 $\mathcal{A}$ опущение 2. Возмущающее воздействие <br/>  $\delta$ и эталонный сигналgописываются моделями:

(3) 
$$\begin{cases} \dot{z_1} = \Gamma_1 z_1, \\ \delta = H_1 z_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases}
z_2 = \Gamma_2 z_2, \\
g = H_2 z_2
\end{cases}$$

где  $z_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $z_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$  — векторы состояния с неизвестными начальными условиями,  $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$ ,  $\Gamma_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$  — матрицы постоянных коэффициентов, все собственные значения которых являются простыми и лежат на мнимой оси,  $H_1 \in \mathbb{R}^{q \times m_1}$ ,  $H_2 \in \mathbb{R}^{q \times m_2}$  — постоянные матрицы. Без потери общности будем считать, что пары ( $\Gamma_1, H_1$ ) и ( $\Gamma_2, H_2$ ) полностью наблюдаемы.

 $\mathcal{A}$ опущение 3. Параметры матриц  $\Gamma_1, H_1, \Gamma_2, H_2$  неизвестны, в то время как размерности  $m_1$  и  $m_2$  известны. Сигнал g доступен прямым измерениям.

 $\mathcal{A}$ опущение 4. Нули передаточной матрицы W(s) не совпадают с собственными числами матрицы  $\Gamma_2$ .

Замечание 1. Модели виртуальных генераторов (3) и (4) описывают целые классы внешних воздействий. Так генератор второго порядка в зависимости от конкретных значений параметров и начальных условий может генерировать как гармонические сигналы различных частот и амплитуд, так и постоянные сигналы различных амплитуд (хотя для постоянных сигналов достаточно генератора первого порядка). Поэтому порядки виртуальных генераторов  $m_i$  (i = 1, 2) могут рассматриваться как верхние оценки динамических порядков действительных моделей внешних сигналов. Точного совпадения порядков виртуальных и действительных генераторов внешних сигналов, а также возбуждения начальными условиями всех мод виртуального генератора не требуется.

Рассматриваемая задача будет решена в несколько шагов. Сначала с использованием специальных наблюдателей будут построены параметризованные модели возмущения, сигнала задания и их будущих значений. Затем с использованием модифицированной схемы расширения будут сформированы алгоритмы адаптивной настройки коэффициентов регулятора, позволяющие избежать физически нереализуемой процедуры настройки прошлых значений настраиваемых коэффициентов. На последнем шаге будет построена стабилизирующая обратная связь, использующая оценку будущего значения вектора состояния, и будет доказано достижение цели управления в замкнутой системе.

Ниже будут предложены два решения рассматриваемой задачи. Одно из них основано на построении общей регрессионной модели для двух внешних сигналов — задания и возмущения, и на синтезе общего алгоритма адаптации. Второе решение основывается на раздельном решении задач слежения и компенсации и на раздельной адаптивной настройке соответствующих компонент алгоритма управления. Общими для двух подходов будут параметризованные модели внешних сигналов.

### 3. Параметризация возмущения и сигнала задания

Для того, чтобы можно было применить универсальные методы адаптивной настройки закона управления, представим сигналы задания и возмущение в параметризованном виде — а именно, в виде линейных регрессионных моделей с неизвестными постоянными параметрами. Как было показано в [35, 36], сигналы  $\delta$  и *g* можно представить виде:

(5) 
$$\delta = \Theta_1 \xi_1 + \varsigma_1,$$

(6) 
$$g = \Theta_2 \xi_2 + \varsigma_2,$$

где  $\Theta_1 \in \mathbb{R}^{q \times m_1}$  и  $\Theta_2 \in \mathbb{R}^{q \times m_2}$  — матрицы неизвестных постоянных параметров, сигналы  $\varsigma_1$  и  $\varsigma_2$  порождены ненулевыми начальными условиями и экспоненциально затухают<sup>3</sup>, а регрессоры  $\xi_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$  и  $\xi_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$  являются векторами состояний фильтров

(7) 
$$\dot{\xi_1} = G_1 \xi_1 + L_1 \delta,$$

(8) 
$$\dot{\xi_2} = G_2 \xi_2 + L_2 g$$

с произвольными гурвицевыми матрицами  $G_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$  и  $G_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$ , образующими с соответствующими матрицами постоянных коэффициентов  $L_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times q}$  и  $L_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times q}$  полностью управляемые пары.

Использование фильтров (7) и (8) приводит к двум важным результатам. Во-первых, полученные с помощью них регрессионные модели (5) и (6) хорошо известны в современной теории адаптивного управления [27, 37] и в теории идентификации [38] и позволяют использовать широкий класс универсальных алгоритмов адаптации и идентификации. В настоящей работе будут применены методы прямого (безыдентификационного) адаптивного управления.

Во-вторых, подставляя (5) в (7) и (6) в (8) получаем канонические формы генераторов внешних сигналов

(9) 
$$\dot{\xi}_i = (G_i + L_i \Theta_1) \xi_i, \quad i = 1, 2,$$

которые с использованием фундаментального решения позволяют получить аналитические выражения будущих значений регрессоров

(10) 
$$\xi_i(t+\tau) = \exp((G_i + L_i\Theta_i)\tau)\xi_i(t), \quad i = 1, 2,$$

 $<sup>^3</sup>$ Сигналы <br/>  $\varsigma_1$ и  $\varsigma_2$ не влияют на устойчивость замкнутой системы, <br/>и поэтому в дальнейшем рассмотрении будут исключены.

а также сигнала возмущения

(11) 
$$\delta(t+\tau) = \Theta_1 \xi_1(t+\tau) = \Psi_1^* \xi_1,$$

где  $\exp((G_i + L_i\Theta_i)\tau)$  — матричная экспонента  $(i = 1, 2), \Psi_1^* = \Theta_1 \exp((G_1 + L_1\Theta_1)\tau)$  — матрица неизвестных параметров размерности  $q \times m_1$ .

Следует отметить, что фильтр (7) физически нереализуем, так как использует неизмеряемое возмущение. Поэтому вместо него используем физически реализуемый наблюдатель регрессора  $\xi_1$ , структура которого определяется следующей леммой [36].

Лемма 1. Пусть выполняются допущения 1, 2, 3. Введем в рассмотрение наблюдатель, формирующий оценку  $\hat{\xi}_1$  неизмеряемого регрессора  $\xi_1$ :

(12) 
$$\begin{cases} \hat{\xi}_1 = \eta + Nx, \\ \dot{\eta} = G_1 \eta + (G_1 N - NA)x - NBu(t - \tau), \end{cases}$$

где  $\eta \in \mathbb{R}^{m_1}$  — вспомогательный вектор,  $N \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$  — произвольная матрица, удовлетворяющая равенству  $NB = L_1$ . Тогда оценка  $\hat{\xi}_1$  ограничена и сходится к  $\xi_1$  экспоненциально.

Лемма 1 доказывается путем дифференцирования вектора ошибки наблюдения  $\tilde{\xi}_1 = \xi_1 - \hat{\xi}_1$  с учетом (1), (7) и (12), что приводит к уравнению  $\dot{\tilde{\xi}}_1 = G_1 \tilde{\xi}_1$ .

С помощью замены  $\xi_1$  на оценку  $\hat{\xi}_1$  в (11) окончательно получаем (без учета экспоненциально затухающего слагаемого):

(13) 
$$\delta(t+\tau) = \Psi_1^* \hat{\xi}_1.$$

Выражения (10) и (13) будут использованы при синтезе закона адаптивного регулирования с целью компенсации запаздывания  $\tau$ .

#### 4. Алгоритм управления с общим регрессором

#### 4.1. Построение модели ошибки и выбор структуры закона управления

Для формирования модели ошибки слежения введем в рассмотрение матрицу преобразования координат  $M \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$ , удовлетворяющую условию

(14) 
$$CM = \Theta_2.$$

Тогда модели ошибки по состоянию и по выходу могут быть заданы в виде

(15) 
$$e = M\xi_2 - x,$$

(16) 
$$\varepsilon = g - y$$

соответственно. В силу (14) ошибку по выходу можно представить как $\varepsilon=Ce.$ 

Вычислим производную ошибки (15) с учетом (1), (9) и (13):

(17) 
$$\dot{e} = M(G_2 + L_2\Theta_2)\xi_2 - \left(Ax + B(u(t-\tau) + \Psi_1^*\hat{\xi}_1(t-\tau))\right).$$

Добавляя и вычитая из правой части последнего уравнения  $AM\xi_2$ , после элементарных преобразований получим:

(18) 
$$\dot{e} = Ae + (M(G_2 + L_2\Theta_2) - AM)\xi_2 - B(u(t-\tau) + \Psi_1^*\xi_1(t-\tau)).$$

Как известно [3, 11], выполнение допущений 1 и 2 гарантирует существование по крайней мере одного набора матриц M и  $\Theta_2^*$ , который одновременно удовлетворяет выражению (14) и следующему равенству:

(19) 
$$M(G_2 + L_2\Theta_2) - AM = B\Theta_2^*.$$

Равенство (19) с учетом (10) позволяет получить модель ошибки в виде

(20) 
$$\dot{e} = Ae + B\left(-\Psi_1^*\hat{\xi}_1(t-\tau) + \Psi_2^*\xi_2(t-\tau) - u(t-\tau)\right),$$

где  $\Psi_2^* = \Theta_2^* \exp((G_2 + L_2 \Theta_2) \tau)$  — неизвестная матрица постоянных параметров. Вводя обозначения для *общей матрицы* неизвестных параметров

$$\Psi = [\Psi_1^*, \Psi_2^*]$$

и для общего регрессора

$$\xi^{\top}(t) = \left[-\hat{\xi}_1^{\top}(t), \xi_2^{\top}(t)\right],$$

окончательно получаем:

(21) 
$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + B(\Psi\xi(t-\tau) - u(t-\tau)), \\ \varepsilon = Ce. \end{cases}$$

Анализ последнего выражения мотивирует следующий выбор структуры алгоритма управления:

(22) 
$$u = u_s + \hat{\Psi}\xi,$$

где  $\hat{\Psi}$  является матрицей настраиваемых параметров, а  $u_s$  — стабилизирующая компонента закона управления. Ниже будет синтезирован алгоритм адаптивной настройки матрицы  $\hat{\Psi}$ , а также выбрано правило формирования  $u_s$ . Особенностью предлагаемого подхода является возможность независимого синтеза алгоритма адаптивной настройки и стабилизирующей обратной связи.

Подставляя (22) в (21), получаем

(23) 
$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + B(\tilde{\Psi}(t-\tau)\xi(t-\tau) - u_s(t-\tau)), \\ \varepsilon = Ce, \end{cases}$$

где  $\tilde{\Psi} = \Psi - \hat{\Psi}$  — матрица параметрических ошибок.

Сигнал е является недоступным прямым измерениям (матрица M является неизвестной), матрица A в общем случае может быть неустойчивой, а сама модель ошибки (23) содержит прошлые значения настраиваемых параметров  $\hat{\Psi}(t-\tau)$ . Для преодоления указанных проблем предлагается использовать метод расширенной ошибки<sup>4</sup>, который изначально был предложен для синтеза систем адаптивного управления по выходу [39] (см. также обзор [40]), а позже была продемонстрирована его эффективность при построении алгоритмов адаптации в системах с запаздыванием [31, 33].

Лемма 2. Введем в рассмотрение динамический фильтр вида

(24) 
$$\begin{cases} \dot{\hat{e}} = A\hat{e} + L_s(\varepsilon + C\hat{e}) + B(\hat{\Psi}(t-\tau)\xi(t-\tau) + u_s(t-\tau)) \\ \hat{\varepsilon} = \varepsilon + C\hat{e} - \Xi(t-\tau)\hat{\psi}(t), \end{cases}$$

где матрица  $L_s \in \mathbb{R}^{n \times q}$  выбрана таким образом, что матрица  $A_s = A + L_s C$ гурвицева,  $\hat{\psi} = col(\hat{\Psi}_1^{\top}, \dots, \hat{\Psi}_q^{\top}) \in \mathbb{R}^{q(m_1+m_2)}$  — вектор настраиваемых параметров,  $\hat{\Psi}_i^{\top}$  — строки матрицы  $\hat{\Psi}$ ,  $\Xi(t-\tau) \in \mathbb{R}^{q \times q(m_1+m_2)}$  — матричный регрессор вида

$$\Xi(t-\tau) = \begin{bmatrix} W_{s\,11}(s) \left[\xi(t-\tau)\right] & \dots & W_{s\,1q}(s) \left[\xi(t-\tau)\right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{s\,q1}(s) \left[\xi(t-\tau)\right] & \dots & W_{s\,qq}(s) \left[\xi(t-\tau)\right] \end{bmatrix},$$

 $W_s(s) = C(sI - A_s)^{-1}B$  — асимптотически устойчивая передаточная функция. Тогда для сигнала расширенной ошибки  $\hat{\varepsilon}$  справедливо следующее равенство:

(25) 
$$\hat{\varepsilon} = \Xi (t - \tau) \tilde{\psi}(t),$$

где  $\tilde{\psi} = \psi - \hat{\psi}$  — вектор параметрических ошибок.

Доказательство. Введем вспомогательные переменные  $\hat{e}^* = e + \hat{e}$  и  $\varepsilon^* = \varepsilon + C\hat{e}$ . Тогда, вычисляя производную  $\hat{e}^*$ , с учетом (23) и (24) можно показать, что

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}^* = A_s \hat{e}^* + B\Psi \xi(t-\tau), \\ \varepsilon^* = C e^* \end{cases}$$

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> В англоязычной литературе данный подход получил название *augmented error* [39]. Здесь будем следовать терминологии статьи [40], понимая, что процедура "расширения" состоит не в увеличении размерности векторного сигнала, а в добавлении к нему некоторой корректирующей составляющей.

или  $\varepsilon^* = W_s(s)[\Psi\xi(t-\tau)]$ . Нетрудно убедиться, что с учетом свойств линейных систем

$$W_{s}(s)[\Psi\xi(t-\tau)] = \begin{bmatrix} W_{s\,11}(s) & \dots & W_{s\,1q}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{s\,q1}(s) & \dots & W_{s\,qq}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{1}^{\top}\xi(t-\tau) \\ \vdots \\ \Psi_{q}^{\top}\xi(t-\tau) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} W_{s\,11}(s) \left[\xi^{\top}(t-\tau)\Psi_{1}\right] + & \dots & +W_{s\,1q}(s) \left[\xi^{\top}(t-\tau)\Psi_{q}\right] \\ \vdots \\ W_{s\,q1}(s) \left[\xi^{\top}(t-\tau)\Psi_{1}\right] + & \dots & +W_{s\,qq}(s) \left[\xi^{\top}(t-\tau)\Psi_{q}\right] \end{bmatrix} = \\ = \Xi(t-\tau) \begin{bmatrix} \Psi_{1} \\ \vdots \\ \Psi_{q} \end{bmatrix} = \Xi(t-\tau)\psi.$$

По существу, последние выражения представляют собой следствие леммы о перестановке<sup>5</sup> [41] для матричного случая, утверждающей справедливость равенства

(26) 
$$W_s(s)[\Psi\xi(t-\tau)] = \Xi(t-\tau)\psi,$$

которое будет использовано при доказательстве леммы 3. Подставляя (26) во второе выражение (24), непосредственно получаем (25). Лемма доказана.

Замечание 2. В частном случае скалярного объекта, т.е. когда  $y, u, \delta \in \mathbb{R}^1$ , а  $\Psi$  является вектором-строкой размерности  $1 \times (m_1 + m_2)$ , второе уравнение системы (24) и модель (25) принимают вид

$$\begin{split} \hat{\varepsilon} &= \varepsilon + C\hat{e} - \bar{\xi}^\top (t-\tau) \hat{\psi}(t), \\ \hat{\varepsilon} &= \bar{\xi}^\top (t-\tau) \tilde{\psi}(t) \end{split}$$

соответственно, где  $\bar{\xi} = W_s(s)[\xi]$  — отфильтрованный регрессор.

Модель (25) позволяет использовать широкий класс универсальных алгоритмов адаптации, например градиентного вида:

(27) 
$$\dot{\hat{\psi}} = \Gamma \bar{\Xi}^{\top} (t - \tau) \hat{\varepsilon},$$

где  $\Gamma \in \mathbb{R}^{q(m_1+m_2) \times q(m_1+m_2)}$  — положительно определенная матрица. Особо отметим, что в силу ограниченности регрессора  $\Xi$  нормирование алгоритма адаптации (27), использующего не истинную  $\varepsilon$ , а расширенную  $\hat{\varepsilon}$  ошибку слежения, не требуется.

Тогда вне зависимости от свойств устойчивости замкнутой системы алгоритм адаптации (27) будет обладать следующими свойствами.

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> В англоязычной литературе данная лемма носит название "The swapping lemma" [27].

Лемма 3. Пусть выполняются допущения 1-4. Тогда алгоритм адаптации (27) совместно с наблюдателем возмущения (12), наблюдателем задающего воздействия (8), законом управления (22) и схемой расширения (24) применительно к объекту управления (1) будет обеспечивать:

- 1) ограниченность  $\|\hat{\varepsilon}\|, \|\hat{\psi}\|, \|\hat{\Psi}\|;$
- 2) асимптотическое стремление  $\|\tilde{\Psi}(t)\xi(t)\| \to 0$ , а также

$$\|\tilde{\Psi}(t-\tau)\xi(t-\tau)\| \to 0$$

 $npu \ t \to \infty.$ 

Доказательство. Для анализа устойчивости системы, замкнутой алгоритмом адаптации (27), выберем функцию Ляпунова

(28) 
$$V = \frac{1}{2} \tilde{\psi}^{\top} \Gamma^{-1} \tilde{\psi}$$

производная которой с учетом (27) имеет вид  $\dot{V} = -\hat{\varepsilon}^{\top}\hat{\varepsilon} \leq 0$ . Из последнего неравенства непосредственно следует свойство 1 леммы 3, а также стремление  $\|\hat{\varepsilon}\| \to 0$  и  $\|\Xi(t-\tau)\tilde{\psi}(t)\| \to 0$  при  $t \to \infty$  [27]. Так как регрессор  $\xi$  ограничен (см. лемму 1 и (8)), то из (27) следует  $\|\dot{\psi}\| \to 0$  при  $t \to \infty$ . Из последнего стремления непосредственно получаем  $\|\dot{\Psi}\| \to 0$ ; тогда с учетом леммы о перестановке (см. также (26)) имеем, что  $\Xi(t-\tau)\tilde{\psi}(t) \to W_s(s)[\tilde{\Psi}(t-\tau)\xi(t)]$  при  $t \to \infty$  и, как следствие,  $\|\tilde{\Psi}(t-\tau)\xi(t)\| \to 0$  (а также  $\|\tilde{\Psi}(t-\tau)\xi(t-\tau)\| \to 0$  и  $\|\tilde{\Psi}(t)\xi(t)\| \to 0$ ). Лемма доказана.

### 4.3. Построение стабилизирующей компоненты

Используем теперь модель ошибки слежения (23) для синтеза стабилизирующей компоненты алгоритма управления  $u_s$ . Учитывая, что ошибка eнедоступна прямым измерениям, построим наблюдатель, структура и свойства которого определяются следующей леммой.

Лемма 4. Рассмотрим совместно с алгоритмом адаптации (27) наблюдатель ошибки по состоянию вида

(29) 
$$\dot{\overline{e}} = A\overline{e} + L_e(\varepsilon - C\overline{e}) - Bu_s(t - \tau),$$

где  $\overline{e}$  — оценка вектора e, а матрица  $L_e \in \mathbb{R}^{n \times ,q}$  выбрана таким образом, что матрица  $A_e = A - L_e C$  гурвицева. Тогда для ошибки наблюдения  $\tilde{e} = e - \overline{e}$  справедливо равенство

(30) 
$$\lim_{t \to \infty} \|\tilde{e}(t)\| = 0.$$

Доказательство. Дифференцируя ё с учетом (23) и (29), получаем

(31) 
$$\dot{\tilde{e}} = A_e \tilde{e} + B \tilde{\Psi}(t-\tau) \xi(t-\tau),$$

откуда с учетом свойства (2) Леммы 3 немедленно получаем справедливость (30). Сформируем стабилизирующую компоненту сигнала управления в виде<sup>6</sup> [42]

(32) 
$$u_s = -K \left[ \exp(A\tau)\overline{e}(t) - \int_{t-\tau}^t \exp(A(t-\mu))Bu_s(\mu)d\mu \right],$$

где матрица  $K \in \mathbb{R}^{q \times n}$  выбрана таким образом, что матрица  $A_s = A + BK$  гурвицева,  $\overline{e}$  — вектор состояния наблюдателя (29).

Тогда свойства замкнутой системы будут определяться следующим утверждением.

Утверждение 1. Пусть выполняются допущения 1-4. Тогда алгоритм управления (22) с наблюдателем возмущения (12) и наблюдателем задающего воздействия (8), схемой расширения (24), алгоритмом адаптации (27), наблюдателем ошибки слежения (29) и стабилизирующей компонентой (32) обеспечивает для объекта управления (1) ограниченность всех сигналов и выполнение целевого условия (2).

Доказательство. Вычисляя на основе (29) будущее значение вектора  $\overline{e}$ , получаем:

$$\overline{e}(t+\tau) = \exp(A\tau)\overline{e}(t) + \int_{t-\tau}^{t} \exp(A(t-\mu)) \left(L_e C\tilde{e}(\tau+\mu) - Bu_s(\mu)\right) d\mu.$$

Тогда управление (32) можно представить в виде

(33) 
$$u_s = -K \left( e(t+\tau) - \tilde{e}(t+\tau) - \Delta_e(t+\tau) \right),$$

где

$$\Delta_e(t+\tau) = \int_{t-\tau}^t \exp(A(t-\mu))L_e C\tilde{e}(\tau+\mu)d\mu.$$

Подставляя (33) в (23), получаем:

$$\dot{e} = A_s e + B(\tilde{\Psi}(t-\tau)\xi(t-\tau) - K\tilde{e} - K\Delta_e(t-\tau)).$$

Так как в силу леммы 3 имеем  $\|\tilde{\Psi}(t-\tau)\hat{\xi}(t-\tau)\| \to 0$ , в силу леммы 4  $\|\tilde{e}\| \to 0$ и, следовательно,  $\|\Delta_e\| \to 0$ , то из последнего выражения непосредственно получаем ограниченность e, стремление  $\|e\| \to 0$ , выполнение целевого условия (2) и ограниченность  $u_s$ . С учетом ограниченности e и  $\xi_2$  получаем ограниченность x, из (12) — ограниченность  $\eta$ , а с учетом ограниченности  $u_s$ из (24) — ограниченность  $\hat{e}$ , а из (29) — ограниченность  $\overline{e}$ . Утверждение доказано.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> Следует отметить, что сформированное стабилизирующее управление не является внутренне устойчивым из-за возможности наличия неустойчивой матрицы A [43]. Поэтому на практике используются специальные методы устойчивой реализации таких алгоритмов [44, 45].

## 4.4. Числовое моделирование

В качестве примера рассмотрим объект (1), где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0,1 & -1,5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2\\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \tau = 3 \ c$$

и  $\delta = col(2\cos(6t), 3\sin(0, 8t)), g = col(\cos(5t), 4\sin(7t))$ . Наблюдатели задающего воздействия (8) и возмущения (12) построены со следующими параметрами:

$$G_1 = G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -36 & -60 & -37 & -10 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Соответствующие матрицы в выражениях (24), (29) и (32) выбраны как

$$L_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1,1 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad L_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1,1 & 1/6 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} -1 & -0,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Параметры алгоритма адаптации (27) были определены матрицей

$$\Gamma = blockdiag \Big\{ 150I_{4\times4}, 300I_{4\times4}, 150I_{4\times4}, 300I_{4\times4} \Big\}.$$

Графики переходных процессов в линейной многоканальной системе, замкнутой адаптивным регулятором с общим регрессором, представлены на рис. 1. Результаты числового моделирования демонстрируют полную компенсацию внешних возмущений и асимптотическую сходимость ошибки слежения к нулю.



Рис. 1. Графики переходных процессов в системе, замкнутой алгоритмом управления с общим регрессором.

### 5. Алгоритм управления с раздельным решением задач слежения и компенсации

Будем использовать регрессоры  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , полученные с помощью наблюдателей (12) и (8) соответственно, а управление будем формировать в виде

$$(34) u = u_c + u_t + u_s,$$

где  $u_c$  — компонента компенсации возмущения,  $u_t$  — следящая компонента,  $u_s$  — стабилизирующая компонента. Ниже представлена процедура последовательного независимого синтеза всех трех компонент.

## 5.1. Построение следящей компоненты

Обозначим через  $x^*(t)$  желаемую траекторию изменения вектора состояния объекта управления, обеспечивающую выполнение тождества  $||e(t)|| \equiv 0$ , а через  $y^*(t)$  — желаемую траекторию изменения вектора выходных переменных. Очевидно, что  $x^* = M\xi_2$  и  $y^* = Cx^* = g$ . Построим генератор желаемой траектории  $x^*$ . Для этого продифференцируем  $x^* = M\xi_2$  с учетом (9). После элементарных преобразований получаем:

(35) 
$$\dot{x}^* = A_s x^* + (M(G_2 + L_2\Theta_2) - A_s M) \xi_2,$$

где, как и раньше,  $A_s = A - BK$  гурвицева. Выполнение допущений 1 и 2 означает существование пары матриц M и  $\bar{\Theta}_2^*$ , одновременно удовлетворяющих двум уравнениям [3, 11]

$$M(G_2 + L_2\Theta_2) - A_s M = B\overline{\Theta}_2^*, \quad CM = \overline{\Theta}_2^*.$$

Тогда окончательно получаем:

(36) 
$$\begin{cases} \dot{x}^* = A_s x^* + B \bar{\Psi}_2^* \xi_2 (t - \tau), \\ g = y^* = C x^*, \end{cases}$$

где  $\bar{\Psi}_2^* = \bar{\Theta}_2^* \exp((G_2 + L_2 \Theta_2) \tau) - q \times m_2$  неизвестная матрица постоянных коэффициентов.

Виртуальный генератор желаемой траектории (36) может быть переписан в форме вход-выход

$$g = W_s(s) \left[ \bar{\Psi}_2 \xi_2(t-\tau) \right]$$

или, с использованием леммы о перестановке [41] (см. также лемму 2 и выражение (26)), в форме статической модели

(37) 
$$g = \Xi_2(t-\tau)\bar{\psi}_2,$$

где  $W_s(s) = C(sI - A_s)^{-1}B, \ \bar{\psi}_2 = col(\bar{\Psi}_1^\top, \dots, \bar{\Psi}_q^\top) \in \mathbb{R}^{qm_2}$  — вектор неизвестных параметров,  $\bar{\Psi}_i^\top$  — строки матрицы  $\bar{\Psi}_2^*, \Xi_2(t - \tau) \in \mathbb{R}^{q \times qm_2}$  — матричный регрессор вида

$$\Xi_{2}(t-\tau) = \begin{bmatrix} W_{s\,11}(s) \left[\xi_{2}(t-\tau)\right] & \dots & W_{s\,1q}(s) \left[\xi_{2}(t-\tau)\right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{s\,q1}(s) \left[\xi_{2}(t-\tau)\right] & \dots & W_{s\,qq}(s) \left[\xi_{2}(t-\tau)\right] \end{bmatrix}.$$

165

Сформируем настраиваемую модель генератора сигнала задания

(38) 
$$\hat{g} = \Xi_2 (t - \tau) \hat{\psi}_2,$$

вектор настраиваемых параметров  $\hat{\psi}_2$  которой генерируется алгоритмом адаптации

(39) 
$$\dot{\hat{\psi}}_2 = \Gamma_{\psi} \Xi_2^{\top} (t - \tau) \varepsilon_g,$$

где  $\varepsilon_g=g-\hat{g}-$ ошибка воспроизведения сигнала задания,  $\Gamma_\psi>0-$ матрица коэффициентов адаптации.

В целях дальнейшего анализа свойств устойчивости замкнутой системы определим  $q \times m_2$  матрицу настраиваемых параметров  $\hat{\Psi}_2$ , построенную на элементах вектора  $\hat{\psi}_2$  (процедура, обратная построению вектора  $\bar{\psi}_2$  из матрицы  $\bar{\Psi}_2^*$ ), а также вектор  $\tilde{\psi}_2 = \bar{\psi}_2 - \hat{\psi}_2$  и матрицу  $\tilde{\Psi}_2 = \bar{\Psi}_2^* - \hat{\Psi}_2$  параметрических ошибок.

Тогда вне зависимости от свойств устойчивости замкнутой системы алгоритм адаптации (39) будет обладать следующими свойствами.

Лемма 5. Пусть выполняются допущения 1-4. Тогда алгоритм адаптации (39) совместно с наблюдателем задающего воздействия (8) и настраиваемой моделью (38) будет обеспечивать:

- 1) ограниченность  $\|\varepsilon_q\|, \|\hat{\psi}_2\|;$
- 2) асимптотическое стремление  $\|\varepsilon_g\| \to 0$  при  $t \to \infty$ ;
- 3) асимптотическое стремление  $\|\Psi_2(t)\xi_2(t)\| \to 0$ , а также

$$\|\tilde{\Psi}_2(t-\tau)\xi_2(t-\tau)\| \to 0$$

 $npu \ t \to \infty.$ 

Доказательство. Учтем, что модели ошибки воспроизведения сигнала задания и вектора параметрических ошибок имеют вид

$$\varepsilon_g = \Xi_2(t-\tau)\tilde{\psi}_2, \quad \dot{\tilde{\psi}}_2 = \Gamma_\psi \Xi_2^\top (t-\tau)\tilde{\psi}_2.$$

Тогда справедливость леммы доказывается с использованием функции Ляпунова  $V_g = 0.5 \tilde{\psi}_2 \Gamma_g^{-1} \tilde{\psi}_2$  и тех же аргументов, что и при доказательстве леммы 3.

Свойства, определенные леммой 5, мотивируют следующий выбор следящей составляющей:

(40) 
$$u_t = \hat{\Psi}_2 \xi_2.$$

## 5.2. Построение компенсирующей компоненты

Выберем компенсирующую компоненту в виде

(41) 
$$u_c = \hat{\Psi}_1 \hat{\xi}_1,$$

где регрессор  $\hat{\xi}_1$  формируется наблюдателем возмущения (12), а  $\hat{\Psi}_1$  — матрица настраиваемых коэффициентов. Подставляя (34) и (41) в (1) с учетом (13), получаем:

(42) 
$$\dot{x} = Ax + B\left(u_t(t-\tau) + u_s(t-\tau) + \tilde{\Psi}_1(t-\tau)\hat{\xi}_1(t-\tau)\right),$$

где  $\tilde{\Psi}_1 = \Psi_1^* - \hat{\Psi}_1.$ 

Модель (42) не может быть использована для построения алгоритма адаптивной настройки матрицы  $\hat{\Psi}_1$ , так как содержит ее прошлое значение и в общем случае неустойчивую матрицу A. В соответствии с изложенным выше подходом для преодоления этих проблем предлагается использовать схему расширения [31], которая в данном случае определяется следующей системой уравнений:

(43) 
$$\begin{cases} \bar{x} = x + \phi, \\ \dot{\phi} = A\phi + \bar{L}\bar{x} + B\left((\hat{\Psi}_1(t-\tau) - \hat{\Psi}_1(t))\hat{\xi}_1(t-\tau) - u_t(t-\tau) - u_s(t-\tau)\right), \end{cases}$$

где  $\bar{x}$  — расширенный вектор состояния,  $\phi$  — вспомогательный вектор, матрица  $\bar{L}$  выбрана так, что матрица  $\bar{A} = A + \bar{L}$  — гурвицева.

Вычисляя производную вектора  $\bar{x}$  в силу (42) и (43), получаем модель

(44) 
$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + B\tilde{\Psi}_1(t)\hat{\xi}_1(t-\tau),$$

которая хорошо известна в современной теории адаптивного управления и позволяет выбрать, например, градиентный алгоритм адаптации вида

(45) 
$$\hat{\Psi}_1^{\top} = \Gamma \hat{\xi}_1 (t - \tau) B^{\top} P \bar{x},$$

где  $\Gamma \succ 0$  — матрица коэффициентов адаптации, а матрица P является решением уравнения  $\bar{A}^{\top}P + P\bar{A} = -Q, \ Q = Q^{\top} \succ 0$  — произвольная симметричная положительноопределенная матрица.

Тогда вне зависимости от свойств устойчивости замкнутой системы алгоритм адаптации (45) будет обладать следующими свойствами.

Лемма 6. Пусть выполняются допущения 1-4. Тогда алгоритм адаптации (45) совместно с наблюдателем возмущения (12), законом управления (34) и (41) и схемой расширения (43) применительно к объекту управления (1) будет обеспечивать:

1) ограниченность  $\|\bar{x}\| \ u \|\hat{\Psi}_1\|$ ,

2) асимптотическое стремление  $\|\tilde{\Psi}_1(t)\hat{\xi}_1(t)\| \to 0$ , а также

$$\|\tilde{\Psi}_1(t-\tau)\hat{\xi}_1(t-\tau)\| \to 0$$

 $npu \ t \to \infty$ .

Доказательство. Производная функции Ляпунова  $V_s = \bar{x}^\top P \bar{x} + 0.5 \tilde{\Psi}_1^\top \Gamma^{-1} \tilde{\Psi}_1$ , вычисленная в силу уравнения (44), имеет вид  $\dot{V}_s = -\bar{x}^\top Q \bar{x}$ , откуда следует ограниченность  $\bar{x}$  и  $\hat{\Psi}_1$ , стремление  $\|\bar{x}\| \to 0$  и  $\|\dot{\tilde{\Psi}}_1\| \to 0$  и, как следствие, справедливость второго утверждения леммы.

## 5.3. Построение стабилизирующей компоненты

Для стабилизации объекта управления будем использовать вектор состояния x, который доступен прямым измерениям. Подставляя (34) и (41) в (1), получаем

(46) 
$$\dot{x} = Ax + B\left(u_t(t-\tau) + u_s(t-\tau) + \tilde{\delta}(t-\tau)\right),$$

где  $\tilde{\delta}(t) = \tilde{\Psi}_1(t)\hat{\xi}_1(t)$  — ошибка компенсации возмущения. Выберем стабилизирующую компоненту в виде

(47) 
$$u_s = -K \left[ \exp(A\tau)x(t) - \int_{t-\tau}^t \exp(A(t-\mu))B(u_t(\mu) + u_s(\mu))d\mu \right],$$

где матрица K обеспечивает гурвицевость матрицы замкнутой системы  $A_s = A - BK$ .

Тогда свойства замкнутой системы будут определяться следующим утверждением.

Утверждение 2. Пусть выполняются допущения 1-4. Тогда алгоритм управления (34) с наблюдателем возмущения (12) и наблюдателем задающего воздействия (8), следящей компонентой (40), алгоритмом адаптации следящей компоненты (39), настраиваемой моделью (38), компенсирующей компонентой (41), алгоритмом адаптации компенсирующей компоненты (45), схемой расширения (43) и стабилизирующей компонентой (47) обеспечивает для объекта управления (1) ограниченность всех сигналов и выполнение целевого условия (2).

Доказательство. Вычисляя для модели (46) значение вектора состояния x в момент времени  $t + \tau$ , можно показать, что

(48) 
$$u_s(t) = -Kx(t+\tau) - \Delta_\delta(t+\tau),$$

где

$$\Delta_{\delta}(t+\tau) = \int_{t-\tau}^{t} \exp(A(t-\mu))B\tilde{\delta}(\mu)d\mu$$

Вычисляя теперь производную ошибки слежения  $e^* = x^* - x$  с учетом (1), (36), (40), (41), (48), получаем:

$$\dot{e}^* = A_s e^* + B\Big(\tilde{\Psi}_2(t-\tau)\xi_2(t-\tau) - K\Delta_\delta(t) + \tilde{\delta}(t-\tau)\Big).$$

Так как в силу леммы 5 имеем  $\|\tilde{\Psi}_2(t-\tau)\hat{\xi}_2(t-\tau)\| \to 0$ , а в силу леммы 6  $\|\tilde{\delta}\| \to 0$  и, следовательно,  $\|\Delta_{\delta}\| \to 0$ , то из последнего выражения непосредственно получаем ограниченность  $e^*$ , стремление  $\|e^*\| \to 0$ , выполнение целевого условия 2, а также ограниченность  $u_s$  и x. С учетом ограниченности x и  $\bar{x}$  (см. лемму 6) из (43) получаем ограниченность  $\phi$ . Утверждение доказано.

### 5.4. Числовое моделирование

Параметры объекта управления (1), возмущающего воздействия, сигнала задания, а так же наблюдателей задающего воздействия (8) и возмущения (12) выбраны такими же, как и в примере из раздела 4.4.

Соответствующие параметры и матрицы в выражениях (39), (47) и (45) выбраны как

$$K = \begin{bmatrix} 1,1 & 0,5\\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{\psi} = 2000I_{8\times8}, \quad P = \begin{bmatrix} 1,75 & 1\\ 1 & 0,75 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = 100I_{2\times2}.$$

Результаты числового моделирования работы линейной многоканальной системы, замкнутой адаптивным регулятором с раздельными компонентами слежения и компенсации, иллюстрируют полную компенсацию внешних возмущений и сходимость ошибки слежения к нулю (см. рис. 2).



Рис. 2. Графики переходных процессов в системе, замкнутой алгоритмом управления с раздельными компонентами слежения и компенсации.

#### 6. Заключение

В работе представлены два алгоритма адаптивного слежения за мультигармоническим сигналом для класса линейных неустойчивых многоканальных объектов с запаздыванием в каналах управления в условиях внешних возмущений.

Первый алгоритм построен с использованием объединенного регрессора. Такая схема позволяет одним алгоритмом адаптации (27) осуществлять одновременно компенсацию внешних возмущений и слежение за эталонным сигналом. При этом за счет применения схемы с расширенной ошибкой (24) стабилизирующая компонента закона управления (32) полностью независима от адаптивной. Поэтому параметры контура стабилизации и расширенной ошибки могут быть выбраны независимо друг от друга.

Во втором алгоритме использована схема с построением раздельных блоков компенсации и слежения. В этом случае адаптивные компоненты системы (39) и (45) работают независимо друг от друга, что позволяет провести более гибкую настройку системы. Благодаря отсутствию фильтрации регрессора компенсирующего контура и дополнительного наблюдателя состояния (29) (который присутствует в первой схеме), алгоритм управления с раздельными адаптивными блоками использует на  $q^2m_1 + n$  меньше интеграторов. В то же время следует отметить, что параметры стабилизирующего управления (47) сопряжены с параметрами фильтра регрессора алгоритма адаптации (39) следящей компоненты (40).

Дальнейшее развитие представленного подхода будет направлено на его применение для систем с неизмеряемым вектором состояния (что потребует построения специального наблюдателя возмущения), неизвестными параметрами и запаздыванием.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Johnson C. D. Accommodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. V. 16. No. 6. P. 635–644.
- Francis D.A., Wonham W.M. The internal model principle for linear multivariable regulators // App. Math. Optim. 1975. V. 2. P. 170–194.
- Davison E.J. The robust control of a servomechanism problem for linear timeinvariant multivariable systems // IEEE Trans. of Automatic Control. 1976. V. 21. P. 25–34.
- 4. *Уонем М.* Линейные многомерные системы управления: Геомерический подход. М: Наука, 1980.
- 5. Дроздов В.Н., Мирошник И.В., Скорубский В.И. Системы автоматического управления с микроЭВМ. Л.: Машиностроение, 1989.
- 6. Bodson M., Douglas S.C. Adaptive algorithms for the rejection of sinusoidal disturbances with unknown frequency // Automatica. 1997. V. 33. No. 12. P. 2213–2221.
- Nikiforov V.O. Adaptive servomechanism controller with an implicit reference model // Int. J. Control. 1997. V. 68. No. 2. P. 277–286.
- 8. *Никифоров В.О.* Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 4. С.69–73.
- 9. *Никифоров В.О.* Адаптивная компенсация внешних детерминированных возмущений // Мехатроника, автоматизация и управление. 2003. № 5. С. 8–12.
- 10. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб.: Наука, 2003.
- 11. Marino R., Tomei P. Output regulation for linear systems via adaptive internal model // IEEE Trans. Autom. Control. 2003. V. 48. No. 12. P. 2199–2202.
- 12. Byrnes C. I., Isidori A. Nonlinear internal models for output regulation // IEEE Trans. Autom. Control. 2004. V. 49. No. 12. P. 2244–2247.
- Serrani A., Isidori A., Marconi L. Semi-global nonlinear output regulation with adaptive internal model // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. V. 46. No. 8. P. 1178–1194.
- 14. Nikiforov V.O. Nonlinear servocompensation of unknown external disturbances // Automatica. 2001. V. 37. P. 1647–1653.
- 15. Gerasimov D.N., Pashenko A.V., Nikiforov V.O. Improved Adaptive Compensation of Unmatched Multisinusoidal Disturbances in Uncertain Nonlinear Plants // Amer. Control Conf. ACC. 2020.

- 16. *Elliot E., Goodwin G.C.* Adaptive implementation of the internal model principle // Proc. of the 23d IEEE Conf. on Decision and Control. 1984. V. 23. P. 1292–1297.
- 17. Palaniswami M., Goodwin G.C. An adaptive implementation of the internal model principle // Proc. of the 1987 Amer. Control Conf. 1987. P. 600–605.
- Tao G. Multivariable adaptive control: A survey // Automatica. 2014. V. 50. No. 11. P. 2737–2764.
- Wang L., Isidori A., Liu Z., Su H. Robust output regulation for invertible nonlinear MIMO systems // Automatica. 2017. V. 82. P. 278–286.
- Pyrkin A.A, Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M. Rejection of sinusoidal disturbance of unknown frequency for linear system with input delay // Amer. Control Conf. Baltimore, 2010. P. 5688–5693.
- Pyrkin A.A., Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M. Output control algorithm for unstable plant with input delay and cancellation of unknown biased harmonic disturbance // Time Delay System Conference, Prague, Czech Republic, 2010. P. 39–44.
- Pyrkin A.A., Bobtsov A.A. Cancelation of unknown multiharmonic disturbance for nonlinear plant with input delay // Int. J. Adaptive Control Signal Proc. 2012. V. 26. No. 4. P. 302–315.
- Wang J., Vedyakov A.A., Vediakova A.O., Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Shavetov S.V. Output adaptive controller for a class of MIMO systems with input delay and multisinusoidal disturbance // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48. No. 11. P. 892–899.
- Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Nikiforov V.O., Vedyakov A.A., Kolyubin S.A., Borisov O.I. Output control approach for delayed linear systems with adaptive rejection of multiharmonic disturbance // IFAC Proc. Volumes. 2014. V. 47. No. 3. P. 12110–12115.
- Pyrkin A.A., Bobtsov A.A. Adaptive controller for linear system With input delay and output disturbance // IEEE Trans. Autom. Control. 2016. V. 61. No. 12. P. 4229–4234.
- 26. Пыркин А.А., Бобцов А.А., Никифоров В.О. и др. Компенсация полигармонического возмущения, действующего на состояние и выход линейного объекта с запаздыванием в канале управления // АиТ. 2015. № 12. С. 43–64.

*Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Nikiforov V.O., et al.* Compensation of polyharmonic disturbance of state and output of a linear plant with delay in the control channel // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 12. P. 2124–2142.

- Narendra K., Annaswamy A. Stable adaptive systems. New Jersey: Prentice Hall, 1989.
- Basturk H.I., Krstic M. Adaptive sinusoidal disturbance cancellation for unknown LTI systems despite input delay // Automatica. 2015. V. 58. 131–138.
- Gerasimov D.N., Nikiforov V.O., Paramonov A.V. Adaptive disturbance compensation in delayed linear systems: internal model approach // IEEE Conf. on Control Applications, CCA 2015. 2015. P. 1692–1696.
- Annaswamy A., Jang J., Lavretsky E. Stability margins for adaptive controllers in the presence of time-delay // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf.. 2008. AIAA 2008-6659. doi: 10.2514/6.2008-6659
- Gerasimov D.N., Paramonov A.V., Nikiforov V.O. Algorithms of adaptive disturbance compensation in linear systems with arbitrary input delay // Int. J. Control. 2018. DOI:10.1080/00207179.2018.1521527.
- Paramonov A.V., Gerasimov D.N., Nikiforov V.O. Fast adaptive compensation of multi-sinusoidal disturbance in linear MIMO systems with multiple input delays // Eur. Control Conf. ECC. 2018. P. 2441–2446.

- Gerasimov D.N., Miliushin A.S., Nikiforov V.O. Algorithms of adaptive tracking of unknown multisinusoidal signals in linear systems with arbitrary input delay // Int. J. Adaptive Control Signal Proc. 2019. V. 33. No. 6. P. 900–912.
- Gerasimov D.N., Miliushin A.S., Paramonov A.V., Nikiforov V.O. Algorithms of adaptive tracking of unknown multi-sinusoidal signals in MIMO linear systems with multiple input delay // Proc. of the 2019 Amer. Control Conf. 2019. P. 3014–3019.
- 35. Nikiforov V.O. Adaptive servocompensation of input disturbances // IFAC Proc. Volumes. 1996. V. 29. No. 1. P. 5114–5119.
- 36. Никифоров В.О. Наблюдатели внешних возмущений. 1. Объекты с известными параметрами // АнТ. 2004. № 10. С. 13–23. Nikiforov V.O. Observers of External Deterministic Disturbances. I. Objects with Known Parameters // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 10. P. 1531–1541.
- 37. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
- 38. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991.
- 39. Monopoli R.V. Model reference adaptive control with an augmented error signal // IEEE Trans. Autom. Control. 1974. V. 19. No. 5. P. 474–484.
- Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Схемы адаптивного управления с расширенной ошибкой. Обзор // АнТ. 1994. № 9. С. 3–22.
   Nikiforov V.O., Fradkov A.L. Adaptive Control Schemes with Extended Error // Autom. Remote Control. 1994. V. 55. No. 9. P. 1239–1255.
- 41. Morse A.S. Global stability of parameter adaptive control systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1980. V. 25. No. 3. P. 433–439.
- 42. Artstein Z. Linear systems with delayed controls: a reduction // IEEE Trans. Autom. Control. 1982. V. 27. No. 4. P. 869–879.
- Engelborghs K., Dambrine M., Roose D. Limitations of a class of stabilization methods for delay systems // IEEE Trans. Automatic Control. 2001. V. 46. No. 2. P. 336–339.
- 44. Mondie S., Michiels W. Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation // IEEE Trans. Autom. Control. 2003. V. 48. No. 12. P. 2207–2212.
- 45. Zhong Q.C. On distributed delay in linear control laws-part I: discrete-delay implementations // IEEE Trans. Autom. Control. 2004. V. 49. No. 11. P. 2074–2080.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.

Поступила в редакцию 26.10.2019 После доработки 19.12.2019 Принята к публикации 30.01.2020

# СОДЕРЖАНИЕ

Гайнанов Д.Н., Игнатов А.Н., Наумов А.В., Рассказова В.А. О задаче назначения «технологического окна» на участках железнодорожной сети
Бурков В.Н., Буркова И.В., Засканов В.Г. Метод сетевого программирования
в задачах календарного планирования17
Нелинейные системы
Калинин А.И., Лавринович Л.И. Асимптотика решения сингулярно возму- щенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с терми- нальными ограничениями на траектории
<b>Хлебников М.В.</b> Оптимизация билинейной системы управления при внешних возмущениях. III
Робастное, адаптивное и сетевое управление
Галяев А.А., Лысенко П.В. Синхронизация и коллективное движение группы слабо связанных идентичных осцилляторов
Управление в технических системах
Буков В.Н., Озеров Е.В., Шурман В.А. Логический парный мониторинг с учетом серых зон
Управление в социально-экономических системах
<b>Гераськин М.И.</b> Свойства предположительных вариаций в нелинейной моде- ли олигополии Штакельберга
Интеллектуальные системы управления, анализ данных
<b>Булычев Ю.Г.</b> Некоторые аспекты идентификации динамических объектов при некорректных условиях наблюдения
<b>Никифоров В.О., Парамонов А.В., Герасимов Д.Н.</b> Алгоритмы адаптивного регулирования в многоканальных линейных системах с запаздыванием по управлению

## CONTENTS

Gainanov D.N., Ignatov A.N., Naumov A.V., Rasskazova V.A. On Track Proces-	
sion Assignment Problem at the Railway Network Sections	.3
Burkov V.N., Burkova I.V., Zaskanov V.G. The Network Programming Method	
in Project Scheduling Problems	17

## Nonlinear Systems

Asymptotic Approximations to the Solution of the
ar-Quadratic Optimal Control Problem with Terminal
ion of Bilinear Control Systems Subjected to Exoge-

## Robust, Adaptive and Network Control

Galyaev A.A., Lysenko P.V.	Synchronization and Collective Motion of a Group	
of Weakly Coupled Identic	al Oscillators	2

## **Control in Technical Systems**

Bukov V.N., Ozerov E.V., Shurman V.A.	Logical Pair Monitoring That Accounts
for the Grey Zone	

## **Control in Social Economic Systems**

Geraskin M.I.	The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stack-
elberg Oligo	poly Model

## Intellectual Control Systems, Data Analysis

Bulychev Yu.G.	Some Aspects of Identification of Dynamic Objects under Incor-	
rect Observat	ion Conditions	131
Nikiforov B.O., I	Paramonov A.V., Gerasimov D.N. Adaptive Control Algorithms	