

СО Д Е Р Ж А Н И Е

МЕХАНИКА МАШИН

Оценка тепловой и акустической энергий при схлопывании кавитационного пузырька <i>А. А. Аганин, О. Р. Ганиев, А. И. Давлетишин, Л. Е. Украинский</i>	3
Вынужденные колебания конечной цилиндрической оболочки, возбуждаемые дискретными силами <i>О. И. Косарев</i>	11

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

Статистическая динамика и надежность механических систем с кинематическими, силовыми и параметрическими воздействиями <i>А. С. Гусев, Л. В. Зинченко, С. А. Стародубцева</i>	21
Антифрикционные свойства алмазоподобного покрытия и нитрида титана в модельных смазочных средах <i>И. А. Буяновский, В. Д. Самусенко, В. А. Левченко</i>	29
Динамическая модель надежности при переменных нагрузках и ускоренные испытания <i>В. А. Проурзин</i>	36
Исследование механики пространственного упругопластического деформирования и разрушения сварных соединений аустенитных сталей <i>Н. А. Махутов, И. В. Макаренко, Л. В. Макаренко</i>	43
Моделирование нагруженности и ресурса корпуса автосцепки численно-аналитическими методами <i>Э. С. Оганьян, В. С. Коссов, М. Н. Овечников, Г. М. Волохов, А. С. Гасюк</i>	52

НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Механизмы параллельной структуры с групповой кинематической развязкой, обеспечиваемой многопоточностью передачи энергии в кинематических цепях <i>К. Б. Саламандра, Л. И. Тывес, В. А. Глазунов, Е. С. Гебель</i>	56
Расчет параметров вибраций трубных систем парогенераторов для обоснования их вибропрочности и ресурса <i>Т. Н. Фесенко, С. А. Корецкий, Л. И. Шитова</i>	66

АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Метод поиска субоптимального воздействия, обеспечивающего допустимые потери в качестве технологического процесса <i>Д. С. Соловьев, И. А. Соловьева, Ю. В. Литовка, В. А. Нестеров</i>	75
---	----

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА, ДИАГНОСТИКА, ИСПЫТАНИЯ

Природа фрактального рельефа разрушенных металлических образцов после динамического нагружения <i>Г. Г. Савенков, В. В. Столяров, А. В. Кузнецов, Ю. И. Мещеряков</i>	87
Оценка концентрации напряжений вблизи захватов при растяжении образцов из полимерных композитов <i>А. Н. Поллюв, Н. А. Татусь</i>	95
Трибологические характеристики наномодификатора I <i>А. Ю. Албагачев, Н. Н. Новикова, А. Б. Тохметова</i>	108

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 532.5

**ОЦЕНКА ТЕПЛОВОЙ И АКУСТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИЙ
ПРИ СХЛОПЫВАНИИ КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЬКА**© 2020 г. А. А. Аганин¹, О. Р. Ганиев¹, А. И. Давлетшин^{1,*}, Л. Е. Украинский¹¹ *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия***e-mail: anas.davletshin@gmail.com*

Поступила в редакцию 31.10.2019 г.

Принята к публикации 29.05.2020 г.

Приводятся результаты численного исследования тепловой и акустической энергий, выделяемых при схлопывании одиночного сферического кавитационного пузырька в воде при давлении 10 бар и температуре 20°C. В используемой модели принимаются во внимание теплопроводность пара в пузырьке и окружающей жидкости, теплообмен, испарение/конденсация на поверхности пузырька, сжимаемость жидкости. Преобразование механической энергии в тепловую за счет вязкости жидкости не учитывается. Показано, что при схлопывании пузырька энергия акустического излучения, обусловленного радиальными пульсациями пузырька, примерно в 9 раз больше энергии, затрачиваемой на нагрев жидкости. Величина этих энергий изменяется пропорционально кубу начального радиуса пузырька.

Ключевые слова: кавитационный пузырек, паровой пузырек, коллапс пузырька, захлопывание пузырька, радиальные пульсации пузырька, поступательное движение пузырька, нагрев жидкости, акустическое излучение

DOI: 10.31857/S0235711920050028

Известно, что кавитация жидкости обладает многочисленными эффектами. В частности, при сферическом (или близком к нему) коллапсе пузырька в его полости могут возникать радиально сходящиеся ударные волны [1], в пузырьке могут сильно повышаться давление, температура и плотность [2], может возникать свечение [3]. В конце коллапса, близкого к сферическому, в окружающем пузырьке слое жидкости может сильно возрастать давление [4], в жидкость могут излучаться радиально расходящиеся акустические и ударные волны [5]. При несферическом коллапсе на поверхности пузырька могут образовываться высокоскоростные кумулятивные струйки [6] и т. д.

На практике эффекты кавитации зачастую вызывают проблемы. Так, известно, что кавитация может приводить к повреждению поверхностей тел [7, 8], шуму [9], понижению эффективности работы устройств [10] и др. Вместе с тем, эффекты кавитации также и широко применяются. Кавитация используется, например, для очистки труб теплообменных аппаратов от отложений [11], повышения эффективности волновых технологий [12], нагрева жидкости с помощью вихревых теплогенераторов [13, 14].

В настоящей статье рассматриваются эффекты нагрева жидкости и акустического излучения при захлопывании одиночного кавитационного пузырька в неограниченном объеме неподвижной жидкости.

Постановка задачи. Изучается величина тепловой и акустической энергий, выделяемых при захлопывании в жидкости (воде) одиночного сферического кавитационного (парового) пузырька. Изначально (в момент времени $t = 0$) пар в пузырьке и окружаю-

щая жидкость покоятся, температура пара и жидкости $T_0 = 20^\circ\text{C}$, пар находится в состоянии насыщения при давлении $p_S(T_0) = 0.022$ бар. Давление жидкости вдали от пузырька $p_\infty = 10$ бар. Схлопывание пузырька обусловлено тем, что давление жидкости p_∞ намного превышает начальное давление в пузырьке $p_S(T_0)$.

В настоящей статье при моделировании захлопывания пузырька считается, что пар в его полости и окружающая жидкость являются теплопроводными, а на поверхности пузырька реализуется теплообмен. Пар в пузырьке полагается совершенным газом с давлением, зависящим только от времени. Жидкость принимается слабосжимаемой, что позволяет учесть эффект акустического излучения. Влияние вязкости жидкости на преобразование энергии радиальных пульсаций пузырька в тепловую не учитывается.

Математическая модель. Математическая формулировка задачи представляет собой систему дифференциальных уравнений [15]

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{u^+}{c_L}\right) R\dot{u}^+ + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{u^+}{3c_L}\right)u^{+2} + 2\left(1 - \frac{u^+}{4c_L}\right)u^+(\dot{R} - u^+) = \\ = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c_L}\right)\frac{p^+ - p_\infty}{\rho_L} + \frac{R}{c_L}\frac{\dot{p}^+ - \dot{p}_\infty}{\rho_L}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{p}^- = \frac{3}{R}[(\gamma - 1)(\kappa_v T_r)^- - \gamma p u^-], \quad (2)$$

$$\dot{R} = u^+ + \frac{j}{\rho_L}, \quad (3)$$

$$T_t + u T_r = \frac{(\gamma - 1)T}{\gamma p} \left(\dot{p}^- + \frac{1}{r^2} (r^2 \kappa_v T_r)_r \right), \quad (4)$$

$$\rho_L C r^2 \left(T_t + \frac{R^2}{r^2} u^+ T_r \right) = (\kappa_L r^2 T_r)_r, \quad (5)$$

Здесь точка сверху означает производную по времени t , r – расстояние до центра пузырька, R – радиус пузырька, u – скорость, p – давление, T – температура, ρ – плотность, c – скорость звука, κ – коэффициент теплопроводности, нижние индексы L и v указывают на отношение к жидкости и пару соответственно, верхние знаки $+$ и $-$ указывают на отношение к поверхности пузырька со стороны жидкости и пара соответственно, γ – показатель адиабаты пара, C – удельная теплоемкость жидкости. Кроме того, имеем

$$p^+ = p^- - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R}u^+, \quad u = \frac{r}{R}u^- + \frac{\gamma - 1}{\gamma p} \left(\kappa_v T_r - \frac{r}{R}(\kappa_v T_r)^- \right),$$

$$u^- = \frac{j}{\rho^-} - \dot{R}, \quad \rho^- = \frac{p^-}{R_v T^*}, \quad j = \frac{\alpha_M}{\sqrt{2\pi R_v}} \left(\frac{p_S(T^*)}{\sqrt{T^*}} - \frac{\Gamma p^-}{\sqrt{T^*}} \right),$$

$$\Gamma = e^{-\Omega^2} - \Omega\sqrt{\pi} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\Omega e^{-x^2} dx \right), \quad \Omega = \frac{j}{p^-} \sqrt{\frac{R_v T^*}{2}},$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, μ – коэффициент вязкости жидкости, R_v – газовая постоянная для пара, α_M – коэффициент аккомодации (испарения/конденсации), T^* – температура на поверхности пузырька, $p_S(T)$ – давление насыщенных паров при температуре T .

Граничные условия для уравнений теплопроводности пара (4) и жидкости (5) являются

$$r = 0: T_r = 0, \quad (6)$$

$$r = \infty: T = T_0, \quad p = p_\infty \quad (7)$$

$$r = R: (\kappa_L T_r)^+ - (\kappa_v T_r)^- = j l(p^-), \quad T^+ = T^- = T^* \quad (8)$$

Здесь $l(p^-)$ – скрытая теплота парообразования при давлении p^- .

Начальные условия (при $t = 0$) для уравнений (1)–(5) имеют вид

$$u^+ = 0, \quad p^- = p_S(T_0), \quad R = R_0; \quad T = T_0 \quad \text{при} \quad 0 \leq r < \infty. \quad (9)$$

В рамках принятых условий имеем: $\rho_L = 998.2 \text{ кг/м}^3$, $c_L = 1483 \text{ м/с}$, $\kappa_L = 0.5984 \text{ Вт/(м К)}$, $\kappa_v = 0.018222 \text{ Вт/(м К)}$, $\gamma = 1.325$, $C = 4150 \text{ Дж/(кг К)}$, $\sigma = 0.0725 \text{ Н/м}$, $\mu = 10^3 \text{ кг/(м с)}$, $R_v = 461.912 \text{ Дж/(кг К)}$, $\alpha_M = 0.04$.

Основные положения методики численного решения. В методике численного решения задачи (1)–(9) применяется замена переменных $r = R\eta$, $t = \tau$. В результате для произвольной функции f имеем

$$f_t = f_\tau - \eta \frac{\dot{R}}{R} f_\eta, \quad f_r = \frac{1}{R} f_\eta, \quad f_r|_{r=R}^- = \frac{1}{R} f_\eta|_{\eta=1}.$$

В терминах координаты η области пузырька соответствует интервал $0 \leq \eta < 1$, а области жидкости – интервал $1 < \eta \leq \eta_L$, где η_L определяет положение внешней границы расчетной области жидкости. В ходе радиальных пульсаций пузырька в окрестности его поверхности с обеих ее сторон могут возникать очень тонкие тепловые погранслои. С учетом этого применяются сетки, сгущающиеся к поверхности пузырька по геометрической прогрессии.

Алгоритм расчета задачи (1)–(9) в указанных новых переменных основан на методе конечных разностей. При этом пространственные производные аппроксимируются центральными разностями всюду, за исключением поверхности пузырька. На поверхности пузырька используются односторонние аппроксимации второго порядка точности. Замена пространственных производных конечными разностями сводит дифференциальные уравнения в частных производных (4), (5) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно температуры T в узлах разностной сетки. Эта система оказывается связанной с обыкновенными дифференциальными уравнениями (1)–(3) относительно u^+ , \dot{R} и p^- лишь посредством параметров $j(T^*)$, $\kappa T_r|^-$ и $l(p^-)$. Уравнения (1)–(3) решаются методом Дормана–Принса [16], являющимся высокоточным вариантом метода Рунге–Кутты с автоматическим выбором шага интегрирования по времени. Указанная система относительно температуры T в узлах разностной сетки рассчитывается частично неявным методом с использованием пятиточечной прогонки.

Расчет ведется с применением единого временного шага. При этом на очередном временном шаге при расчете новых значений u^+ , \dot{R} , p^- считаются неизменными температура T^- и ее градиент T_r^- на поверхности пузырька, а при расчете нового поля температуры T в пузырьке и жидкости в качестве неизменных принимается давление p^- . При таком подходе проблем с устойчивостью расчетов не возникает. Вместе с тем, его точность определяется точностью решения уравнений (4), (5), которая автоматически не контролируется. Поэтому требуемая точность расчетов достигается путем последовательного сгущения пространственной сетки, используемой для решения уравнений (4), (5).

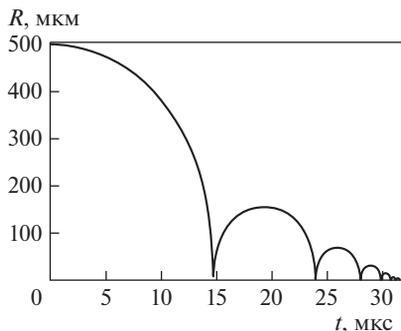


Рис. 1. Уменьшение радиуса пузырька при схлопывании.

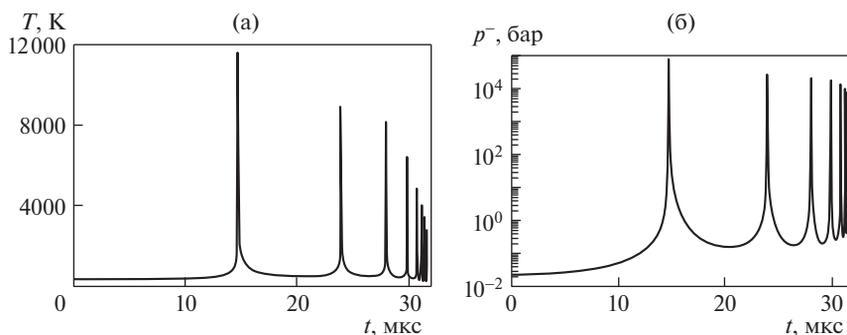


Рис. 2. Изменение температуры в центре пузырька (а) и давления в его полости (б) в процессе схлопывания.

Результаты. Представленные в разделах 1–3 результаты получены для начального радиуса пузырька $R_0 = 0.5$ мм.

1. Особенности схлопывания пузырька. Рис. 1 иллюстрирует изменение радиуса пузырька при его схлопывании.

Видно, что схлопывание реализуется в виде ряда быстро затухающих радиальных пульсаций, в конце которых пузырек исчезает. Довольно быстрое схлопывание пузырька обусловлено, главным образом, сжимаемостью жидкости и конденсацией пара на межфазной поверхности.

На рис. 2 показано изменение температуры пара в центральной области пузырька, где влияние теплообмена с жидкостью незначительно, и давление пара, которое в рамках принятой модели зависит только от времени (одинаково по всему объему пузырька).

Видно, что как температура пара, так и его давление в моменты локальных экстремальных сжатий пузырька постепенно уменьшаются. В моменты же максимального расширения пузырька температура после первых двух сжатий несколько возрастает, а затем падает, тогда, как давление все время монотонно увеличивается.

2. Оценка приходящей в жидкость тепловой энергии. Приходящую из пузырька энергию q_R , затрачиваемую на нагрев жидкости, можно рассчитать по формуле

$$\dot{q}_R = -4\pi\kappa_L T_r|_{r=R}^+ R^2, \quad (10)$$

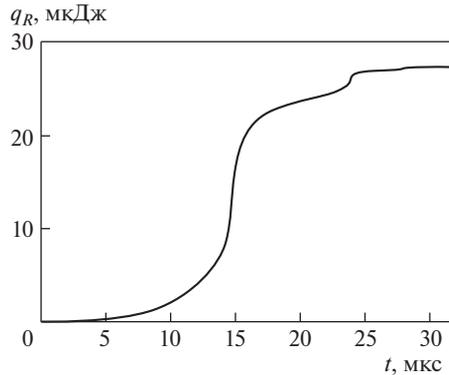


Рис. 3. Изменение тепловой энергии, уходящей в жидкость из пузырька в процессе его схлопывания.

где $T_r|_{r=R}^+$ — градиент температуры жидкости на поверхности пузырька.

Рис. 3 демонстрирует изменение q_R согласно (10) в процессе схлопывания пузырька. Видно, что величина q_R в процессе схлопывания монотонно возрастает. При этом наибольший ее прирост наблюдается в ходе первого сжатия и последующего расширения пузырька. После второго расширения величина q_R увеличивается незначительно. Это, по-видимому, объясняется довольно быстрым уменьшением площади поверхности пузырька, через которую реализуется теплообмен между пузырьком и жидкостью. Согласно рис. 3, энергия E , поступившая на нагрев жидкости, примерно равна 27 мкДж.

3. Оценка энергии акустического излучения. Для оценки энергии акустического излучения были проведены расчеты рассматриваемой задачи без учета влияния сжимаемости жидкости, определяющей акустическое излучение. С этой целью в уравнении (1) полагалось $c_L = \infty$. Результаты расчетов представлены на рис. 4. Без учета акустического излучения основным механизмом, определяющим скорость захлопывания пузырька, является эффект испарения/конденсации. На рис. 4а видно, что в этом случае процесс захлопывания пузырька сильно (более чем в 1000 раз) замедляется. Момент исчезновения пузырька при учете акустического излучения в расчетах без его учета приближенно соответствует моменту достижения радиусом пузырька своего максимального значения в ходе первого локального расширения пузырька, следующего за его первым локальным сжатием. Указанное максимальное значение радиуса очень мало отличается от его начального значения, что, наряду с рис. 4а также свидетельствует о медленном затухании радиальных пульсаций пузырька.

Из рис. 4в, г следует, что без учета акустического излучения величина уходящей из пузырька тепловой энергии $E_{\text{ноас}}$ (максимум величины q_R , рассчитанной при $c_L = \infty$) оказывается примерно в десять раз больше, чем при его учете. Отсюда следует, что энергия акустического излучения $E_{\text{ac}} = E_{\text{ноас}} - E \approx 9E$. На рис. 4г видно, что при пренебрежении акустическим излучением меняется также и характер теплообмена жидкости с пузырьком. Если при учете акустического излучения величина тепловой энергии увеличивается монотонно, то без его учета она растет в виде колебаний (с уменьшающейся амплитудой). Это означает, что при учете акустического излучения поток тепловой энергии в ходе всего процесса схлопывания пузырька направлен от пузырька к жидкости. Без учета излучения он направлен к жидкости лишь в большей части

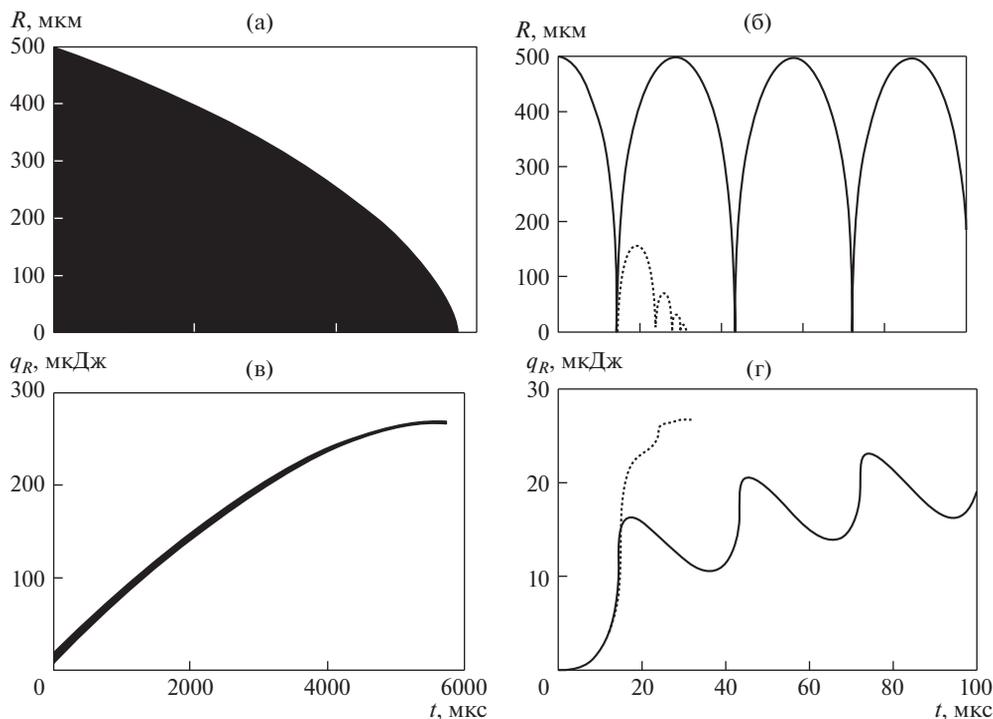


Рис. 4. Изменение радиуса пузырька R ((а), (б)) и уходящей из пузырька тепловой энергии q_R жидкости ((в), (г)) в ходе всего процесса схлопывания пузырька ((а), (в)) и в его начальном промежутке ((б), (г)) без учета сжимаемости жидкости ($c_L = \infty$). Пунктирные линии на ((б), (г)) соответствуют сжимаемой жидкости (рис. 1, 3).

каждого локального сжатия пузырька, тогда как в большей части каждого локального расширения тепловая энергия уходит обратно из жидкости в пузырек.

4. Влияния размеров пузырька. Для оценки влияния размеров пузырька на величину энергии, ушедшей из пузырька на нагрев жидкости к концу его схлопывания и на энергию акустического излучения, были проведены расчеты для ряда значений начального радиуса пузырька R_0 (рис. 5).

Видно, что в логарифмических шкалах обе зависимости от радиуса пузырька являются близкими к линейным. Анализ показывает, что обе зависимости близки к кубическим.

Отметим также, что в используемой модели (1)–(9) учитывается диссипация энергии радиальных пульсаций пузырька за счет вязкости жидкости. В реальности эта энергия трансформируется в тепловую энергию жидкости. В модели настоящей работы эта трансформация не учитывается. Для оценки потерь тепловой энергии жидкости, не учтенных при указанной трансформации, были проведены расчеты рассматриваемой задачи без учета влияния вязкости жидкости, т.е. при $\mu_L = 0$. Расчеты показали, что потери тепловой энергии жидкости за счет отсутствия в используемой модели (1)–(9) трансформации энергии вязкой диссипации радиальных пульсаций пузырька незначительны.

Заклучение. Представлены результаты численного исследования тепловой и акустической энергий, выделяемых при захлопывании в жидкости (воде) одиночного

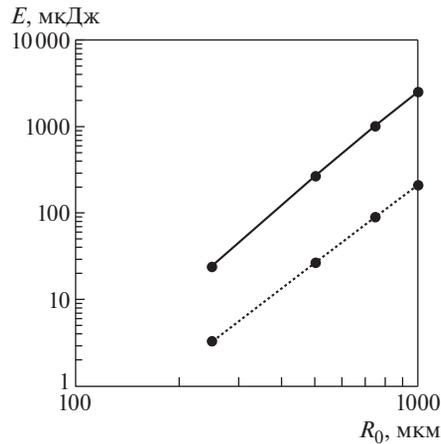


Рис. 5. Влияние начального радиуса пузырька R_0 на энергию E , ушедшую из пузырька на нагрев жидкости к концу его схлопывания с учетом (точки, соединенные пунктирной кривой) и без учета (точки, соединенные сплошной кривой) акустического излучения.

сферического кавитационного (парового) пузырька. Давление жидкости 10 бар, ее температура 20°C. Применяется физическая модель, в которой пар в пузырьке и окружающая жидкость считаются теплопроводными, а на поверхности пузырька реализуется тепломассообмен. Учитывается акустическое излучение, обусловленное сжимаемостью жидкости. Влияние вязкости вне поверхности пузырька на преобразование механической энергии в тепловую не учитывается. Пар в пузырьке считается совершенным газом с давлением, зависящим только от времени.

Показано, что при схлопывании пузырька с начальным радиусом 0.5 мм в жидкость поступает энергии около 25 мкДж, которая затрачивается на нагрев жидкости. При этом посредством акустического излучения, являющегося результатом радиальных пульсаций пузырька, уносится энергии примерно в девять раз больше, тогда как энергия, обусловленная диссипацией радиальных пульсаций пузырька за счет вязкости жидкости (в модели настоящей работы трансформация этой энергии в тепловую не учитывается) является незначительной. Установлено, что энергия, затрачиваемая на нагрев жидкости, и энергия, уносимая акустическим излучением, пропорциональны кубу начального радиуса пузырька.

Следует отметить, что в используемой модели не учитывается влияние ряда важных факторов, в частности, деформирования пузырька, зависимости коэффициентов теплопроводности от температуры, несовершенства пара и т.д. Их учет представляет собой весьма нетривиальную задачу. В этом смысле представленные результаты можно рассматривать как первое приближение, которое дает хороший ориентир для проведения последующих исследований с применением более адекватных моделей.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu C. C., Roberts P. H. A model of sonoluminescence // Proc. R. Soc. Lond. A. 1994. V. 445. P. 323.

2. *Moss W.C., Clarke D.B., Young D.A.* Calculated Pulse Widths and Spectra of a Single Sonoluminescing bubble // *Science*. 1997. V. 276. P. 1398.
3. *Gaitan D.F., Crum L.A., Roy R.A., Church C.C.* Sonoluminescence and bubble dynamics for a single, stable cavitation bubble // *JASA*. 1992. V. 91. P. 3166.
4. *Rayleigh Lord.* On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity // *Philosophical Magazine*. 1917. V. 34. № 200. P. 94.
5. *Akhatov I., Linday O., Topolnikov A., Mettin R., Vakhitova N., Lauterborn W.* Collapse and rebound of a laser-induced cavitation bubble // *Physics of Fluids*. 2001. V. 13. № 10. P. 2805.
6. *Воинов О.В., Воинов В.В.* О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки и образования кумулятивной струи // *ДАН СССР*. 1976. Т. 227. № 1. С. 63.
7. *Pearsall I.S.* Cavitation. Mills and Boon Limited London. 1972.
8. *Brennen C.E.* Hydrodynamics of pumps. Oxford university press. 1994.
9. *Harrison M.* An experimental study of single bubble cavitation noise // *JASA*. 1982. V. 24. № 6. P. 776.
10. *Philipp A., Lauterborn W.* Cavitation erosion by single laser-produced bubbles // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 361. P. 75.
11. *Kieser B., Phillion R., Smith S., McCartney T.* The application of industrial scale ultrasonic cleaning to heat exchangers // *Proceed of Int. Conf. on Heat exchanger fouling and cleaning*. 2011. P. 336.
12. *Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е.* Нелинейная волновая механика и технологии. Волновые и колебательные явления в основе высоких технологий. Изд. 2-е, М.: Институт компьютерных исследований; Научно-издательский центр “Регулярная и хаотическая динамика”, 2011. 780 с.
13. *Бритвин. Л.Н.* Теплогенератор кавитационно-вихревого типа. РФ Патент 99110397/06, 2001.
14. *Бирюк В.В., Серебряков Р.А., Достовалова С.С.* Вихревой гидравлический теплогенератор с улучшенными характеристиками // *Известия Самарской государственной сельскохозяйственной академии*. 2015. № 3. С. 70.
15. *Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Topolnikov A.S., Bolotnova R.Kh., Vakhitova N.K., Lahey R.T. (Jr), Taleyarkhan R.P.* The Theory of Supercompression of Vapor Bubbles and Nano-Scale Thermonuclear Fusion // *Physics of Fluid*. 2005. V. 17. P. 107.
16. *Хайрер Э., Нерсетт С., Виннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 534.26

**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ДИСКРЕТНЫМИ СИЛАМИ**

© 2020 г. О. И. Косарев

*Институт машиноведения им. А.А. Благовраова РАН, Москва, Россия**e-mail: oikosarev@yandex.ru*

Поступила в редакцию 22.04.2019 г.

Принята к публикации 29.05.2020 г.

Предложен численно-аналитический метод расчета вынужденных колебаний оболочечной конструкции, составленной из набора конечных упругих цилиндрических оболочек и упругих колец, к которым приложены дискретные возмущающие силы. Приведены примеры расчета амплитудно-частотных характеристик и форм колебаний оболочечной конструкции.

Ключевые слова: вынужденные колебания, цилиндрическая оболочка, возмущающие силы, амплитудно-частотные характеристики

DOI: 10.31857/S0235711920050077

Рассматривается задача о вынужденных колебаниях оболочечной конструкции со свободными граничными условиями на торцах. Конструкция состоит из секций, каждая из которых представляет собой конечную упругую цилиндрическую оболочку с упругими кольцами на концах. На оболочечную конструкцию действуют дискретные вынуждающие силы. В теории колебаний конечных цилиндрических оболочек одной из ранних и наиболее известных является работа Форсберга [1], но в ней рассматриваются только собственные колебания “сухой” цилиндрической оболочки (в вакууме). Вынужденные колебания бесконечной цилиндрической оболочки в жидкости, возбуждаемые сосредоточенной силой в виде δ -функции Дирака рассмотрены в [2]. Попытки решения задачи вынужденных колебаний конечных цилиндрических оболочек в жидкости методом конечных элементов нельзя признать удобными и успешными [3].

Причин, по которым требуется рассмотрение данной задачи, две: 1) знание распределения виброперемещений на поверхности оболочки необходимо для решения задачи излучения; 2) численно-аналитические методы расчета вынужденных колебаний конечных составных оболочечных конструкций практически отсутствуют.

В общем случае оболочечная конструкция состоит из цилиндрических оболочек и колец, на которых установлено амортизированное оборудование. Оболочки подкреплены стрингерами и шпангоутами. Шпангоуты также моделируются упругими кольцами. Амортизированное оборудование представляется в виде сосредоточенных масс, закрепленных на кольцах. Пример динамической модели оболочечной конструкции приведен на рис. 1.

Решается задача – разработать численно-аналитический метод расчета вынужденных колебаний системы, представляющей собой оболочечную конструкцию, включающую набор подкрепленных цилиндрических оболочек и колец, возбуждаемых дискретными вынуждающими силами. Полученные результаты будут использованы в

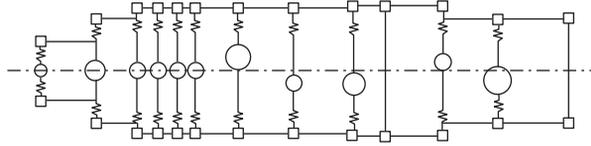


Рис. 1. Модель оболочечной конструкции.

дальнейшем для разработки метода расчета вынужденных колебаний конечной оболочечной конструкции, погруженной в жидкость.

Для формирования матричного уравнения движения системы предложен метод (способ), идея которого состоит в следующем. Система (динамическая модель) условно разбивается на подсистемы, включающие оболочки и кольца. Для каждой оболочки составляются дисперсионные уравнения и определяются их корни. Решение свободных колебаний оболочки записывается в виде вектора (матрицы-столбца) перемещений, состоящего из четырех элементов (u , v , w , w'). Функция распределения перемещений оболочек по их длине записывается через перемещения торцевых сечений. Внутренние силы в оболочках тоже приводятся к торцам оболочки. Определяются матрицы динамических жесткостей колец по соответствующим четырем перемещениям. Общее матричное уравнение вынужденных колебаний всей оболочечной конструкции записывается как для простой цепной системы, состоящей из масс и пружин. Вынуждающие силы приложены к кольцам и распределены по окружному углу φ по гармоническому закону $P = p \cos n\varphi$. Предложенный метод можно охарактеризовать как разновидность прямого метода. Его особенности заключаются в том, что, по аналогии с цепной системой, роль пружин выполняют упругие цилиндрические оболочки, а роль масс — упругие кольца. Для решения вынужденных колебаний оболочек используются уравнения свободных колебаний оболочек. Упругие кольца могут быть как реальными, так и фиктивными. Преимущества метода заключаются в том, что он позволяет легко изменять конфигурацию динамической модели в процессе проведения расчетов. Он позволяет задавать дискретные вынуждающие силы в любом месте по длине цилиндрической оболочки без применения δ -функции. Дискретные силы можно задать в любом поперечном сечении оболочки с использованием “фиктивных” колец (в которых не учитываются их массы). В результате получается матричное уравнение ленточного типа, состоящее из диагонально расположенных блок-матриц четвертого порядка, что позволяет упростить составление и ускорить решение матричных уравнений высокого порядка (порядка нескольких сотен).

Общий подход к расчету колебаний систем с распределенными параметрами известен. В данном случае уравнения движения цилиндрической оболочки в перемещениях, основанные на моментной теории упругих оболочек Кирхгофа–Лява, имеют вид [1, 4, 5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \rho_* h a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_1 a &= 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial H}{\partial \xi} \right) - \rho_* h a \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + q_2 a &= 0, \\ \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} \right) - T_2 - \rho_* h a \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_3 a &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где u , v , w — осевые (продольные), окружные (касательные) и радиальные перемещения оболочки; T_1 , T_2 , S , H , M_1 , M_2 — упругие силовые факторы; q_1 , q_2 , q_3 — поверхност-

ные нагрузки; a – радиус оболочки; h – толщина оболочки; $\xi = x/a$ и φ – координаты в осевом и окружном направлениях; t – время; ρ_* – плотность материала оболочки; $0 \leq x \leq L$, L – длина оболочки.

Запишем решение уравнений свободных колебаний конечной цилиндрической оболочки (1) в форме [5]

$$\begin{aligned} u &= U \cos(n\varphi)e^{i\omega t}, & v &= V \sin(n\varphi)e^{i\omega t}, & w &= W \cos(n\varphi)e^{i\omega t}, \\ U &= \sum_{j=1}^8 C_{jn} \frac{\Delta_{jn}^{(2)}}{\Delta_{jn}^{(1)}} e^{i\alpha_{jn}\xi}, & V &= \sum_{j=1}^8 C_{jn} \frac{\Delta_{jn}^{(3)}}{\Delta_{jn}^{(1)}} e^{i\alpha_{jn}\xi}, & W &= \sum_{j=1}^8 C_{jn} e^{i\alpha_{jn}\xi}, \end{aligned} \quad (2)$$

где n – окружные гармоники ряда Фурье, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, α_{jn} – корни дисперсионного уравнения; $j = 1-8$ – порядковые номера корней; C_{jn} – искомые коэффициенты; Δ_{jn} – миноры матрицы уравнения движения оболочки (3); $\omega = 2\pi f$ – угловая частота колебаний; f – частота колебаний. В решение (2) входят подлежащие определению корни дисперсионного уравнения α_{jn} и коэффициенты C_{jn} . Для получения дисперсионного уравнения примем $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ и решение уравнения представим в упрощенном виде

$$v = Ve^{i\alpha y} \sin n\varphi,$$

$$u = Ue^{i\alpha y} \cos n\varphi,$$

$$w = We^{i\alpha y} \cos n\varphi.$$

В результате подстановки этих решений в уравнение (1) получим уравнение свободных колебаний оболочки в матричном виде [6]

$$\begin{bmatrix} L_{11} + \omega_*^2 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & L_{22} + \omega_*^2 & L_{23} \\ -L_{13} & L_{23} & L_{33} + \omega_*^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \frac{a}{q} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Элементы L_{ij} матрицы уравнения (3) будут

$$L_{11} = -\alpha^2 - \frac{1-\mu}{2} n^2,$$

$$L_{12} = \frac{1+\mu}{2} i\alpha n = -L_{21},$$

$$L_{13} = i\alpha\mu - i \frac{z_1 b_1}{r} \alpha^3,$$

$$L_{22} = -\frac{1-\mu}{2} (1 + 4\delta^2) \alpha^2 - n^2 \left(1 + b_2 + 2 \frac{z_2 b_2}{r} + \delta^2 + \frac{a_2}{r^2} \right), \quad (4)$$

$$L_{23} = L_{32} = -n \left[1 + b_2 + \frac{z_2 b_2}{r} + (2-\mu) \delta^2 \alpha^2 + n^2 \left(\delta^2 + \frac{z_2 b_2}{r} + \frac{a_2}{r^2} \right) \right],$$

$$L_{31} = -L_{13},$$

$$L_{33} = -1 - b_2 - n^4 \frac{a_2}{r^2} - \delta^2 (-\alpha^2 - n^2)^2 - 2 \frac{z_2 b_2}{r} - \alpha^4 \frac{a_1}{r^2};$$

$$q = \frac{Eh}{(1-\mu^2)r}, \quad \delta^2 = \frac{h^2}{12r}, \quad \omega_*^2 = \frac{\omega^2 r^2 \rho_* (1-\mu^2)}{E},$$

где a_1, b_1 – параметры стрингеров; a_2, b_2, z_2 – параметры шпангоутов; $E = E_0(1 + i\eta)$ – комплексный модуль упругости; η – потери в материале оболочки; $r = a$ – радиус оболочки; μ – коэффициент Пуассона; $i = \sqrt{-1}$.

Каждое из решений $U, V, W(2)$ состоит из восьми слагаемых по числу конечных граничных условий оболочки. Соответственно числу слагаемых для каждой гармоники n и для каждой частоты колебаний ω надо определить восемь корней α_j , входящих в перемещения $U, V, W(2)$.

Матричное уравнение (3) можно представить в виде

$$[L(\alpha) + \omega_*^2] \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ q \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Дисперсионное уравнение определяется из условия

$$\Delta_0 = \det [L(\alpha) + \omega_*^2] = 0, \quad (5)$$

где определитель матрицы

$$\begin{aligned} \Delta_0 = & (L_{11} + \omega_*^2)(L_{22} + \omega_*^2)(L_{33} + \omega_*^2) - L_{12}L_{23}L_{13} - L_{13}L_{12}L_{23} + \\ & + L_{13}(L_{22} + \omega_*^2)L_{13} - (L_{11} + \omega_*^2)L_{23}^2 + L_{12}L_{33}. \end{aligned}$$

Решение дисперсионного уравнения (5) сводится к решению биквадратного полинома

$$A_8\alpha^8 + A_6\alpha^6 + A_4\alpha^4 + A_2\alpha^2 + A_0 = 0. \quad (6)$$

Параметры полинома A_8, A_6, A_4, A_2, A_0 не выписаны из-за их громоздкости, обусловленной выражениями (4). В результате решения биквадратного полинома (6) получаем четыре квадратных корня, после извлечения квадратов получаем восемь комплексных корней, из них четыре корня положительных и четыре корня отрицательных. Модули у соответствующих положительных и отрицательных корней одинаковые. Корни дисперсионного уравнения определяются для каждой отдельной оболочки, входящей в оболочечную конструкцию.

Для составления уравнений вынужденных колебаний оболочечной конструкции, состоящей из набора оболочек, соединенных между собой кольцами каждое уравнение движения записывается для перемещений трех соседних подсистем с номерами: k – текущей, $(k - 1)$ – предыдущей и $(k + 1)$ – последующей. Подсистемами являются оболочки и кольца. Внутренние силы оболочки, приложенные, например, к кольцу k , выражаются через перемещения концов оболочек, присоединенных к кольцу слева (в конце предыдущей оболочки $(k - 1)$) и справа (в начале последующей оболочки $(k + 1)$).

Определим перемещения торцевых сечений оболочек. Представим распределение перемещений по длине u для каждой оболочки с учетом дополнительной координаты $w' = dw/dy$ в матричном виде

$$\zeta_{(y)} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ w' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta^{(2)}(\alpha_1)}{\Delta^{(1)}(\alpha_1)} & \frac{\Delta^{(2)}(\alpha_2)}{\Delta^{(1)}(\alpha_2)} & \dots & \frac{\Delta^{(2)}(\alpha_8)}{\Delta^{(1)}(\alpha_8)} \\ \frac{\Delta^{(3)}(\alpha_1)}{\Delta^1(\alpha_1)} & \frac{\Delta^{(3)}(\alpha_2)}{\Delta^1(\alpha_2)} & \dots & \frac{\Delta^{(3)}(\alpha_8)}{\Delta^1(\alpha_8)} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ i\alpha_1 & i\alpha_2 & \dots & i\alpha_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\alpha_1 y} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2 y} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_3 y} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\alpha_8 y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_8 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Дополнительная координата w' введена для возможности формирования блок-матриц в уравнениях стыковки цилиндрических оболочек с кольцами по четырем основным силовым факторам. Выражение (7) используется для каждой оболочки при составлении системы уравнений движения для всей оболочечной конструкции в целом. Обозначим $A(y)$ произведение матриц в правой части выражения (7)

$$A(y) = G_y \alpha(y).$$

Представим перемещения торцев оболочки, имеющей длину ℓ , в начале при $y = 0$ и в конце $y = \ell$ в виде

$$\xi_{(0)} = A(0)W^0, \quad \xi_{(\ell)} = A(\ell)W^0.$$

Составим блок-матричное уравнение

$$\begin{Bmatrix} \xi_{(0)} \\ \xi_{(\ell)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A(0) \\ A(\ell) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_8 \end{Bmatrix}.$$

Из этого уравнения определим вектор-столбец коэффициентов $W^0 = \{C_1 - C_8\}$

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A(0) \\ A(\ell) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \xi_{(0)} \\ \xi_{(\ell)} \end{Bmatrix} = [\bar{C}] \begin{Bmatrix} \xi_{(0)} \\ \xi_{(\ell)} \end{Bmatrix} = [\bar{C}_1 \bar{C}_2] \begin{Bmatrix} \xi_{(0)} \\ \xi_{(\ell)} \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

$$W^0 = \{\bar{C}_1\} \{\xi_{(0)}\} + \{\bar{C}_2\} \{\xi_{(\ell)}\}.$$

Текущие перемещения по длине оболочки, выраженные через перемещения ее торцов, определяются выражением

$$\xi(y) = G_y \alpha(y) [\{\bar{C}_1\} \{\xi_{(0)}\} + \{\bar{C}_2\} \{\xi_{(\ell)}\}]. \quad (9)$$

Таким образом, вектор перемещений оболочки с произвольным номером k

$$\zeta_k(y) = \{u_k, v_k, w_k, w'_k\}^T = G_k(y) [C_k^1(\zeta_{k0}) + C_k^2(\zeta_{k\ell})], \quad (10)$$

где $\zeta_{k0} = \zeta_k(0)$, $\zeta_{k\ell} = \zeta_k(\ell_k)$ – перемещения торцевых сечений оболочки номера k , $C_k^1 = \bar{C}_1$, $C_k^2 = \bar{C}_2$.

Матрица $G_k(y)$ размером 4×8 состоит из столбцов G_{pk} , в которых $p = 1, 2, \dots, 8$ по числу корней дисперсионного уравнения.

$$G_k(y) = \{G_{pk}\}, \quad G_{pk} = e^{iy\alpha_{pk}} \left\{ \frac{\Delta_{pk}^2}{\Delta_{pk}^1}, \frac{\Delta_{pk}^3}{\Delta_{pk}^1}, 1, i\alpha_{pk} \right\}^T,$$

где $\Delta_{pk}^1 = \Delta^1(\alpha_{pk})$, $\Delta_{pk}^2 = \Delta^2(\alpha_{pk})$, $\Delta_{pk}^3 = \Delta^3(\alpha_{pk})$ миноры матрицы уравнения (3).

Матрицы C_k^1 , C_k^2 являются блоками размером 8×4 квадратной матрицы C_k размером 8×8

$$C_k = \begin{bmatrix} G_{k0} \\ G_{k\ell} \end{bmatrix}^{-1} = [C_k^1, C_k^2],$$

где $G_{k0} = G_k(0)$, $G_{k\ell} = G_k(\ell_k)$.

Приведем внутренние силы в оболочке к ее торцевым сечениям. Вектор-столбец внутренних сил в оболочке номера k имеет вид

$$\eta_k(y) = \left(T_1, T_{12}, N, \frac{M}{r_k} \right)^T.$$

Соответствие между этими внутренними силами и перемещениями оболочки (10) следующее: $u \rightarrow T_1$, $v \rightarrow T_{12}$, $w \rightarrow N$, $w'_k \rightarrow M/r$.

Связь внутренних сил оболочки с перемещениями торцевых сечений оболочки можно представить вектором

$$\eta_k(y) = G_k^*(y) \left[C_k^1(\zeta_{k0}) + C_k^2(\zeta_{k1}) \right],$$

где $G_k^*(y)$ – матрица размером 4×8 , состоящая из столбцов G_{pk}^*

$$G_k^*(y) = \{G_{pk}^*\}, \quad p = 1, 2, \dots, 8,$$

$$G_{pk}^*(y) = q_k e^{iy\alpha_{pk}} \left\| \begin{array}{c} i\alpha_{pk} \frac{\Delta_{pk}^2}{\Delta_{pk}^1} + \mu n \frac{\Delta_{pk}^3}{\Delta_{pk}^1} + \mu \\ \frac{1-\mu}{2} \left(-n \frac{\Delta_{pk}^2}{\Delta_{pk}^1} + i\alpha_{pk} \frac{\Delta_{pk}^3}{\Delta_{pk}^1} (1+4\delta^2) + 4in\alpha_{pk}\delta_k^2 \right) \\ i\alpha_{pk}\delta_k^2 \left(n(2-\mu) \frac{\Delta_{pk}^3}{\Delta_{pk}^1} + (2-\mu)n^2 + \alpha_{pk}^2 \right) \\ \mu \frac{\Delta_{pk}^3}{\Delta_{pk}^1} \delta_k^2 + (\mu n^2 + \alpha_{pk}^2) \delta_k^2 \end{array} \right\}.$$

В случае, когда к кольцу (слева и справа) крепятся оболочки разного диаметра, необходимо выполнить соответствующее приведение координат (перемещений) торцов оболочек к центру масс поперечного сечения кольца. Векторы перемещений торцов оболочки $\zeta_{k1} = H_k^1 Z_k$, $\zeta_{k+1,0} = H_k^2 Z_k$ можно выразить через векторы перемещений колец Z_k

$$Z_k = \{U_k, V_k, W_k, \theta_k, R_k\},$$

с помощью матриц перехода H_k^1 и H_k^2

$$H_k^1 = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_k}{R_k} \end{array} \right\|; \quad H_k^2 = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_{k+1}}{R_k} \end{array} \right\|.$$

Внутренние силы, действующие в торцевых сечениях оболочек (в конце предыдущей оболочки $\eta_{k,1}$ и в начале последующей оболочки $\eta_{k+1,0}$), приведем к соединяющему их кольцу с помощью матриц приведения H_k^3 и H_k^4 . Силы, приложенные к центру масс поперечного сечения кольца с номером k

$$F_k^1 = H_k^3 \eta_{k,1}, \quad F_k^2 = H_k^4 \eta_{k+1,0}, \quad (11)$$

где $\eta_{k0} = \eta_k(0)$; $\eta_{k1} = \eta_k(\ell_k)$;

$$H_k^3 = \begin{vmatrix} \frac{r_k}{R_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_k}{R_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_k}{R_k} & 0 \\ \frac{(R_k - r_k)r_k}{R_k^2} & 0 & 0 & \frac{r_k^2}{R_k^2} \end{vmatrix}; \quad H_k^4 = \begin{vmatrix} \frac{r_{k+1}}{R_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_{k+1}}{R_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_{k+1}}{R_k} & 0 \\ \frac{(R_k - r_{k+1})r_{k+1}}{R_k^2} & 0 & 0 & \frac{r_{k+1}^2}{R_k^2} \end{vmatrix}.$$

Матричное уравнение движения оболочечной конструкции формируется следующим образом. С учетом принятых обозначений уравнение движения кольца номера k в матричной форме имеет вид

$$M_k Z_k = P_k - F_k^1 + F_k^2, \quad (12)$$

где P_k – вектор возмущающих сил; F_k^1, F_k^2 – векторы внутренних сил, приложенные от оболочек к кольцу слева и справа; M_k – матрица динамических жесткостей кольца номера k . Эту матрицу для $n \geq 1$ можно представить в виде

$$M_k = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{14} \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 \\ m_{41} & 0 & 0 & m_{44} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} m_{11} &= G_1 \left(n^4 + \frac{2\mu}{E} n^2 \right) - \rho F \omega^2; & m_{14} &= G_1 n^2 \left(1 + \frac{2\mu}{E} \right); & m_{14} &= m_{41}; \\ m_{22} &= G_1 n^2 (n^2 - 1)^2 - (n^2 + 1) \rho F \omega^2; & m_{33} &= G_1 (n^2 - 1)^2 - \frac{(n^2 + 1)}{n^2} \rho F \omega^2; \\ m_{44} &= G_1 \left(1 + \frac{2\mu}{E} n^2 \right); & G_1 &= \frac{EI}{R_k^4}; \end{aligned}$$

EI – жесткость на изгиб; ρ – плотность материала кольца; F – площадь поперечного сечения кольца; R_k – радиус кольца.

Вектор перемещений кольца

$$Z_k = \{U_k, V_k, W_k, \theta, R_k\}_k^T.$$

Подставляя в уравнение движения кольца (12) значения сил (11) и перемещений оболочек (10), получим систему уравнений порядка $4(N + 1)$, где N – общее количество оболочек, $(N + 1)$ – общее количество колец.

В уравнениях движения порядковые номера колец обозначим q , где $0 \leq q \leq p$. Уравнения составляются для каждого кольца последовательно.

Для первого кольца $q = 0$

$$[M_0 - H_0^4 G_1^* (0) C_1^1 H_0^2] Z_0 - H_0^4 G_1^* (0) C_1^2 H_1^1 Z_1 = P_0, \quad (13)$$

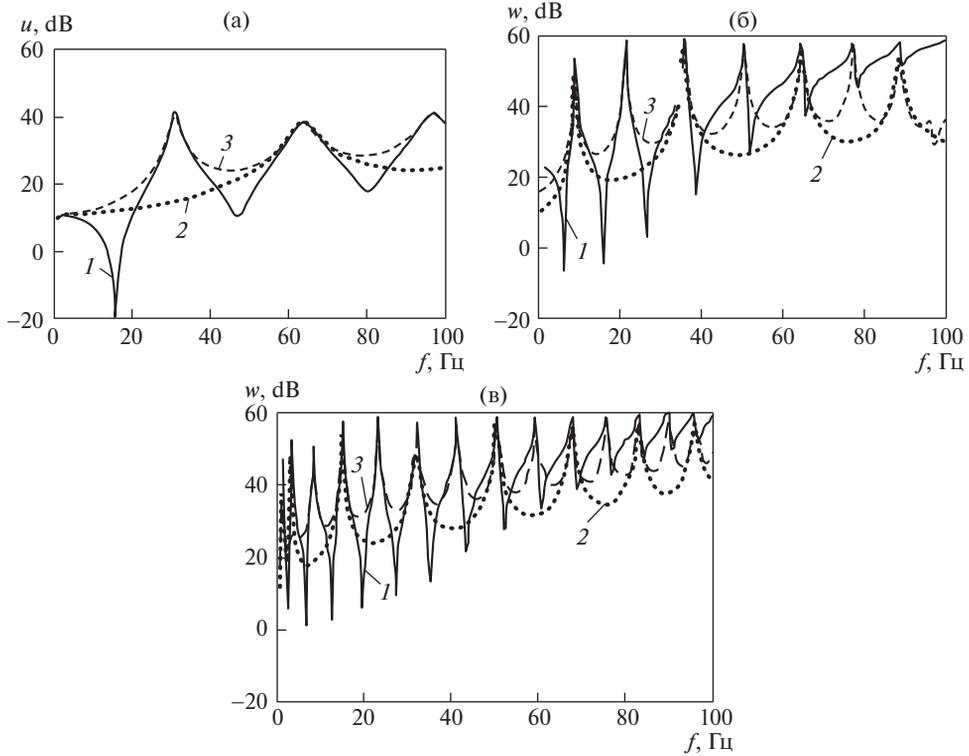


Рис. 2.

для каждого промежуточного кольца от $q = 1$ до $q = N - 1$

$$H_q^3 G_q^* (\ell_q) C_q^1 H_{q-1}^2 Z_{q-1} + [M_q + H_q^3 G_q^* (\ell_q) C_q^2 H_q^1 - H_q^4 G_{q+1}^* (0) C_{q+1}^1 H_q^2] Z_q - H_q^4 G_{q+1}^* (0) C_{q+1}^2 H_{q+1}^1 Z_{q+1} = P_q,$$

для последнего кольца $q = N$

$$H_p^3 G_p^* (\ell_p) C_p^1 H_{p-1}^2 Z_{p-1} + [M_p + H_p^3 G_p^* (\ell_p) C_p^2 H_p^1] Z_p = P_p.$$

Общее матричное уравнение для оболочечной конструкции имеет ленточную диагональную структуру расположения блок-матриц размером 4×4 и в сумме может иметь порядок нескольких сотен. В результате решения этой системы определяются искомые векторы перемещений колец Z_q оболочечной конструкции.

После определения векторов перемещений Z_q на кольцах q из уравнения (13) можно построить АЧХ колебаний в заданных сечениях (кольцах) оболочечной конструкции, а также формы вынужденных колебаний для каждой оболочки и всей оболочечной конструкции в целом.

Форма колебаний для каждой оболочки определяется выражением

$$\zeta_q(y) = G_q^1(y) \left[C_q^1 (H_{q-1}^2 Z_{q-1}) + C_q^2 (H_q^1 Z_q) \right], \quad 0 \leq y \leq \ell_q. \quad (14)$$

Выражение (14) последовательно используется для каждой оболочки и затем методом приспособывания определяется форма колебаний всей оболочечной конструкции.

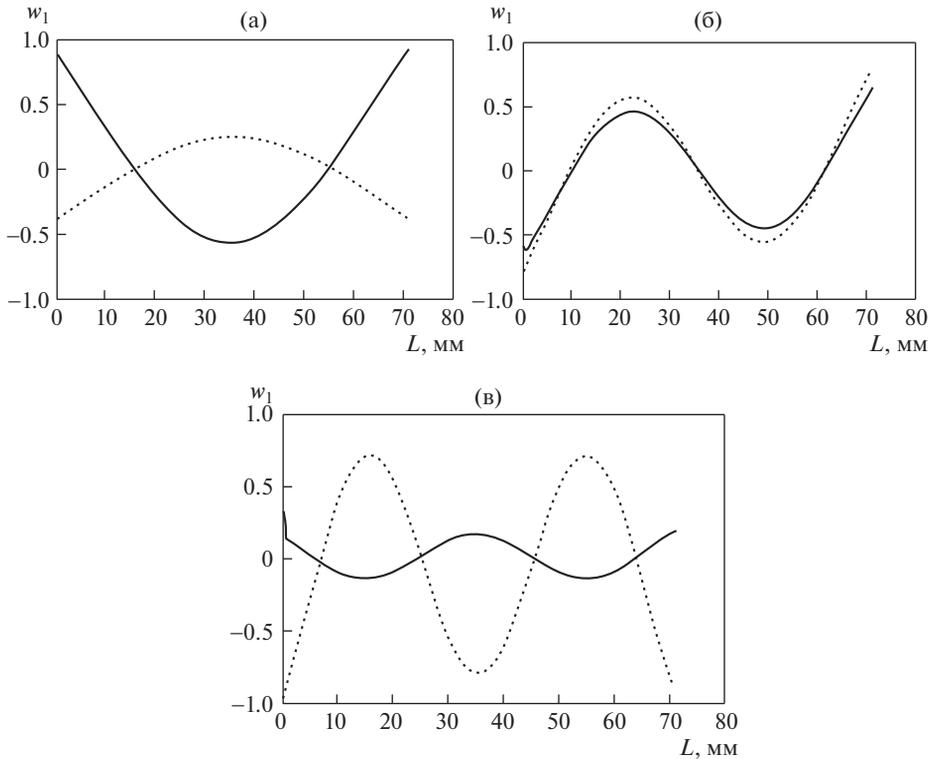


Рис. 3.

На основе изложенной методологии разработаны алгоритм и компьютерная программа на языке Fortran. С использованием программы проведены расчеты для оболочечной конструкции. В качестве примера на рис. 2а, б, в приведены АЧХ колебаний оболочечной конструкции, состоящей из восьми одинаковых секций с цилиндрическими оболочками постоянного радиуса в диапазоне частот $f = 1-100$ Гц для окружных гармоник n : (а) $n = 0$; (б) $n = 1$; (в) $n = 2$.

На рис. 2а показаны амплитуды ускорений продольных колебаний U в дБ. На рис. 2б, в показаны амплитуды радиальных колебаний W в дБ соответственно для гармоник $n = 1$ и $n = 2$. Геометрические параметры оболочечной конструкции $L = 70.4$ м, $a = 4$ м, $h = 0.04$ м. Возмущающая сила $P = 1000$ Н приложена на левом конце оболочечной конструкции. Линии на рис. 2а, б, в – сплошная, точками и штриховая соответствуют АЧХ в сечениях: 1 – левый конец; 2 – середина; 3 – правый конец оболочечной конструкции. На рис. 3а, б, в показаны формы радиальных колебаний W на частотах, близких к резонансам, показанным на АЧХ на рис. 2б: (а) $f = 8.5$ Гц; (б) $f = 21$ Гц; (в) $f = 35$ Гц. Сплошные линии – реальные составляющие $Re(W)$, пунктирные линии – мнимые составляющие $Im(W)$. Полученные формы колебаний соответствуют типичным балочным формам изгибных колебаний балки со свободными краями, что подтверждает правильность расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Forsberg K. Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells // AIAA Journal, 1964. № 12. V. 2. P. 2150.

2. *Романов В.Н., Иванов В.С.* Излучение звука элементами судовых конструкций. СПб. Судостроение: 1993. 212 с.
3. *Коротин П.И., Салин Б.М., Суворов А.С.* Вопросы численного моделирования рассеяния акустических волн на телах сложной формы с использованием метода конечных элементов / Сб. трудов. XX сессии РАО. Т. 1. М.: ГЕОС. 2008. С. 169.
4. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. С. 260.
5. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник / Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение. 1968. Т. 3. С. 287.
6. *Косарев О.И.* Активное гашение звука, рассеянного упругой цилиндрической оболочкой, путем приложения к ней вынуждающих сил // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 5. С. 29.

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

УДК 539.3:624.04

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И НАДЕЖНОСТЬ
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КИНЕМАТИЧЕСКИМИ, СИЛОВЫМИ
И ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ**© 2020 г. А. С. Гусев¹, Л. В. Зинченко^{1,*}, С. А. Стародубцева²¹ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия² Национальный исследовательский университет “МЭИ”, Москва, Россия

*e-mail: zinlar@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.05.2019 г.

Принята к публикации 29.05.2020 г.

Рассматривается актуальный для современного машиностроения вопрос расчетного прогнозирования надежности механических систем, находящихся в эксплуатации под воздействием нерегулярных нагрузок. В задачи расчета входит определение надежности функционирования таких систем как вероятности превышения параметрами их качества (линейными и угловыми перемещениями, ускорениями поддрессоренной массы, деформациями упругого элемента и т.п.). Предложена новая методика выбора оптимальных параметров систем виброзащиты мобильных машин и методика расчета критической скорости их движения по дорогам со случайными неровностями.

Ключевые слова: статистическая динамика систем, надежность, параметрические колебания, устойчивость

DOI: 10.31857/S0235711920050065

Автомобильные прицепы в процессе эксплуатации подвергаются различным интенсивным нерегулярным воздействиям, которые рандомизируются и адекватное математическое описание которых возможно только методами теории вероятностей и методами теории случайных функций [1, 2].

Одна из возможных расчетных схем рассматриваемого автомобильного прицепа представлена на рис. 1.

Здесь $\varphi(t)$ – угол поворота поддрессоренной массы относительно точки ее крепления к автомобилю О; $v(t)$ – скорость буксировки прицепа; $h(x)$ – высота неровностей дороги; $h(t)$ – кинематическое воздействие на колесо; c , b – жесткость и коэффициент демпфирования системы поддрессоривания; l , r – линейные размеры; F – сила инерции; $y(t)$, $a(t)$ – вертикальное перемещение и ускорение поддрессоренной массы; $f(t)$ – расчетное воздействие.

Дифференциальное уравнение для определения угла $\varphi(t)$ получаем в виде [3]

$$J\ddot{\varphi} = lc(h - y) + lb(\dot{h} - \dot{y}) + F(r + y),$$

а для определения перемещения $y(t) = l\varphi$ имеем уравнение

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2(1 - \varepsilon(t))y = f(t) + 2n\dot{h} + \omega_0^2h, \quad (1)$$

где $2n = \frac{l^2b}{J}$; $\omega_0^2 = \frac{l^2c}{J}$; $f(t) = \frac{lr}{J}F(t)$; $\varepsilon(t) = \frac{1}{lc}F(t)$.

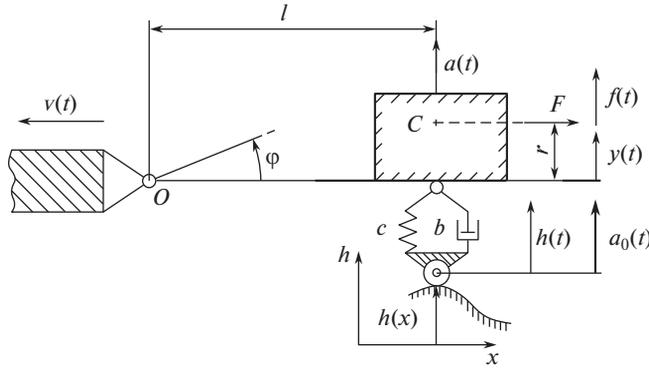


Рис. 1. К расчету автомобильного прицепа.

Здесь интенсивности случайного силового воздействия $f(t)$ и кинематических воздействий $h(t)$ и $\dot{h}(t)$ зависят от средней скорости движения $\bar{v}(t) = \text{const}$, а интенсивность параметрического воздействия $\varepsilon(t)$ – от ее флуктуационной составляющей $\tilde{v}(t)$, и при $\tilde{v}(t) = 0$ имеем $\varepsilon(t) = 0$.

Из (1) следуют уравнения для определения устойчивости движения прицепа

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2(1 - \varepsilon(t))y = 0, \quad (2)$$

реакций $y(t)$ на воздействия $f(t)$ и $h(t)$,

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2 y = f(t), \quad (3)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2 y = 2n\dot{h}(t) + \omega_0^2 h(t), \quad (4)$$

для определения деформации упругого элемента $u(t) = h(t) - y(t)$

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + \omega_0^2 u = -\dot{h}(t) \equiv a_0(t), \quad (5)$$

и для определения ускорения подрессоренной массы $a(t) = \ddot{y}(t)$

$$a(t) = 2n\dot{u} + \omega_0^2 u.$$

Для анализа устойчивости движения прицепа с переменной случайной скоростью $v(t)$ уравнение (2) дополним внешним воздействием в виде белого шума $q(t)$ с малой интенсивностью k_q , а процесс $\varepsilon(t)$ будем считать независимым от процесса $q(t)$ белым шумом с заданной интенсивностью k_ε . Задача состоит в определении интенсивности параметрического воздействия $\varepsilon(t)$, при котором движение прицепа будет неустойчивым.

Для решения этой задачи имеем уравнение

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 y \varepsilon(t) + q(t) \equiv P(t). \quad (6)$$

Правую часть уравнения (6), обозначенную как $P(t)$, можно считать белым шумом с интенсивностью $k_p = k_q + \omega_0^4 s_y^2 k_\varepsilon$ и спектральной плотностью $S_p(\omega) = \frac{k_p}{2\pi}$, где s_y^2 – дисперсия процесса $y(t)$.

Квадрат модуля передаточной функции уравнения (6) будет определяться как

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}, \quad (7)$$

а для определения дисперсии s_y^2 получаем алгебраическое уравнение

$$s_y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(i\omega)|^2 S_p(\omega) d\omega = \frac{k_p}{4n\omega_0^2} = \frac{k_q + \omega_0^4 s_y^2 k_\varepsilon}{4n\omega_0^2}. \quad (8)$$

Отсюда получаем

$$s_y^2 = \frac{k_q}{\omega_0^2(4n - \omega_0^2 k_\varepsilon)}.$$

При $k_\varepsilon \rightarrow \frac{4n}{\omega_0^2}$ имеем $s_y^2 \rightarrow \infty$.

Заключаем, что движение прицепа будет устойчивым при выполнении условия

$$k_\varepsilon < \frac{4n}{\omega_0^2}. \quad (9)$$

Здесь величина $k_\varepsilon \equiv k_\varepsilon(\tilde{v})$ зависит от флуктуационной составляющей скорости движения \tilde{v} . Так что из (9) имеем возможность определить критическую скорость буксировки $v_{кр}$.

Если параметрическое воздействие $\varepsilon(t)$ не является белым шумом и имеет некоторую спектральную плотность $S_\varepsilon(\omega) \neq \text{const}$, то его (в соответствии с понятием о главном параметрическом резонансе) [4] можно приближенно заменить на белый шум интенсивностью $k_\varepsilon = 2\pi S_\varepsilon(2\omega_0)$. В этом случае условие устойчивости движения прицепа (9) принимает вид

$$2\pi\omega_0^2 S_\varepsilon(2\omega_0) < 2n. \quad (10)$$

Здесь также величина $S_\varepsilon(2\omega_0)$ зависит от скорости \tilde{v} .

Реакцию системы $y(t)$ на воздействие в виде белого шума $f(t)$ с интенсивностью k_f определяем из решения уравнения (3). В соответствии с (7) и (8) дисперсия процесса $y(t)$ в этом случае будет определяться как

$$s_y^2 = \frac{k_f}{4n\omega_0^2}. \quad (11)$$

Если процесс $f(t)$ не является белым шумом и имеет спектральную плотность $S_f(\omega) \neq \text{const}$, то ориентировочно (в соответствии с фильтрующими свойствами системы реагировать в основном на воздействия по частоте близкие к частоте собственных колебаний ω_0) его можно заменить на белый шум с интенсивностью $k_f = 2\pi S_f(\omega_0)$ и после этого искомую дисперсию определять по формуле (11) [5].

Реакцию системы $y(t)$ на кинематическое воздействие $h(t)$ определим из решения уравнения (4), квадрат модуля передаточной функции которого от $h(t)$ к $y(t)$ будет определяться по формуле

$$|H_{hy}(i\omega)|^2 = \frac{\omega_0^4 + 4n^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}. \quad (12)$$

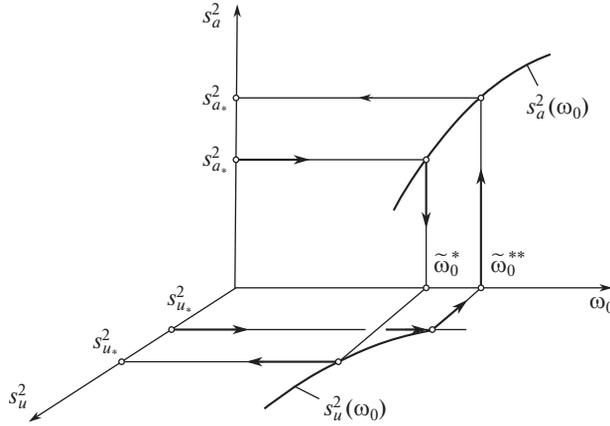


Рис. 2. Зависимости дисперсий процессов $u(t)$ и $a(t)$ от частоты собственных колебаний системы ω_0 .

Полагая процесс $h(t)$ белым шумом с интенсивностью k_h и спектральной плотностью $S_h(\omega) = \frac{1}{2\pi} k_h$, получаем для определения дисперсии процесса $y(t)$ выражение

$$s_y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{hy}(i\omega)|^2 S_h(\omega) d\omega = \frac{k_h}{4n} (\omega_0^2 + 4n^2). \quad (13)$$

Из соотношений (11) и (13) следует, что требования к системе виброзащиты противоречивы: для уменьшения перемещения $y(t)$ от воздействия $f(t)$ требуется увеличивать ее жесткость, а для уменьшения этого перемещения от $h(t)$ ее требуется уменьшать. Оптимальное значение квадрата частоты собственных колебаний $\tilde{\omega}_0^2$ определяем из условия минимума суммарного от этих воздействий перемещения. Имеем

$$\tilde{\omega}_0^2 = \left(\frac{k_f}{k_h} \right)^{1/2}.$$

При $k_f = 0$ имеем $\tilde{\omega}_0^2 = 0$, а при $k_h = 0$ $\tilde{\omega}_0^2 \rightarrow \infty$.

Дисперсия процессов $u(t)$ и $a(t)$ определяется из решения уравнений (4) и (5). Получаем

$$s_u^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_1(i\omega)|^2 S_{a_0}(\omega) d\omega \approx \frac{\pi}{2n\omega_0^2} S_{a_0}(\omega_0),$$

$$s_a^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_2(i\omega)|^2 S_{a_0}(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2n} (\omega_0^2 + 4n^2) S_{a_0}(\omega_0),$$

где первая передаточная функция определяется по формуле (7), а вторая – по формуле (12); $S_{a_0}(\omega)$ – спектральная плотность процесса $a_0(t)$.

Зависимости дисперсий процессов $u(t)$ и $a(t)$ от частоты собственных колебаний системы ω_0 имеют вид, показанный на рис. 2.

Требования к системе виброзащиты по жесткости противоречивы (рис. 2): при ее увеличении ускорение объекта виброзащиты возрастает, а деформация упругого эле-

мента уменьшается; при ее уменьшении — ускорение уменьшается, а деформация возрастает.

Определение оптимальной жесткости усложняется тем, что требования к системе виброзащиты формулируются в различных единицах измерения: по перемещениям $u(t)$ — в единицах длины, а по ускорениям $a(t)$ — в единицах ускорения.

Определив оптимальную частоту $\tilde{\omega}_0^*$ из условия ограничения дисперсии ускорения $s_a^2 \leq s_{a_*}^2$, получаем вполне определенную дисперсию перемещения s_u^2 . Определив оптимальную частоту $\tilde{\omega}_0^{**}$ из условия ограничения дисперсии деформации упругого элемента $s_u^2 \leq s_{u_*}^2$, получаем вполне определенное значение для дисперсии ускорения $s_{a_*}^2$.

За оптимальное значение частоты собственных колебаний $\tilde{\omega}_0$ можно принять ее промежуточное значение, определенное, например, как

$$\tilde{\omega}_0 = \alpha \tilde{\omega}_0^* + \beta \tilde{\omega}_0^{**},$$

где α — значимость (вес) первого условия, β — значимость (вес) второго условия, а $\alpha + \beta = 1$.

Надежность функционирования рассматриваемой механической системы [6, 7] можно оценить следующими вероятностями:

1) вероятностью того, что перемещение $y(t)$ подрессоренной массы за время t ни разу не превысит допустимого значения y_* (т.е., например, вероятностью непробоя за это время амортизатора)

$$P\{y(\tau) \leq y_*, \tau \in (0, t)\}; \quad (14)$$

2) вероятностью того, что деформация $u(t)$ упругого элемента за время t ни разу не превысит допустимого значения u_* (т.е., например, при $u_* = mg/c$ — вероятностью того, что за это время не произойдет отрыва колеса от дороги)

$$P\{u(\tau) \leq u_*, \tau \in (0, t)\}; \quad (15)$$

3) вероятностью того, что дифферент $\varphi(t)$ прицепа за время t ни разу не превысит допустимого значения φ_*

$$P\{\varphi(\tau) \leq \varphi_*, \tau \in (0, t)\}; \quad (16)$$

4) вероятностью того, что ускорение $a(t)$ подрессоренной массы за время t ни разу не превысит допустимого значения a_* (т.е., например, вероятностью того, что сила инерции при $m\ddot{y}$, действующая на ограничитель хода, не превысит допустимого значения ma_*)

$$P\{a(\tau) \leq a_*, \tau \in (0, t)\}; \quad (17)$$

5) вероятностью того, что “резкость” движения, определяемая как, $k(t) = \ddot{y}(t)$ за время t ни разу не превысит допустимого значения k_*

$$P\{k(\tau) \leq k_*, \tau \in (0, t)\}. \quad (18)$$

Соотношения (14)–(18) можно обобщить и записать в виде одной формулы для расчета надежности как вероятности того, что параметр качества $x(t)$ функционирования системы за время t ни разу не превысит допустимого значения x_* , определяемого как

$$P(t) = P\{x(\tau) \leq x_*, \tau \in (0, t)\} = \exp\left(-n(t) \exp\left(-\frac{x_*^2}{2s_x^2}\right)\right), \quad (19)$$

где $n(t) = \frac{t \cdot s_{\dot{x}}}{2\pi s_x}$ – ожидаемое за время t число максимумов процесса $x(t)$; s_x^2 – дисперсия процесса $x(t)$; $s_{\dot{x}}^2$ – дисперсия его первой производной.

Из соотношения (19) следует, что наиболее вероятное за время t наибольшее значение x^* процесса $x(t)$ ориентировочно можно вычислить по формуле

$$x^*(t) = s_x \sqrt{2 \ln(n(t))}, \quad (20)$$

а надежность системы оценить коэффициентом запаса надежности за время t как

$$\alpha(t) = x^*(t)/x_*$$

Из соотношения (20) следует, что обычно принимаемое в технике правило “трех стандартов” требует уточнения. При $n = 100$ имеем $x^* \approx 3S_x$, а при $n = 10000$ $x^* \approx 4.29S_x$.

В заключение отметим, что практическая реализация предложенной методики расчета надежности механических систем при случайных внешних воздействиях связана с определенными трудностями:

1. Определение вероятностных характеристик кинематических воздействий $h(t)$ по вероятностным характеристикам пути $h(x)$ и скорости движения машины v обусловлена возможностью вычисления производных от $h(t)$, тогда как эти процессы описываются обычно формально недифференциальными случайными функциями. Это требует предварительного статистического сглаживания этих траекторий, например, так как это сделано в работе [2].

2. Определение вероятностных характеристик процесса $F(t)$, а, следовательно, и вероятностных характеристик процесса $\varepsilon(t)$, требует решения задачи о переезде случайных неровностей пути, приводящее к флуктуации скорости движения машины и появлению соответствующих сил инерции [8]. Эта задача может быть решена с использованием энергетического соотношения

$$v(t)|v(t)| = 2gh(t) \quad (21)$$

и методов статистической линеаризации нелинейных функций.

При линеаризации соотношения (21) по методу равенства дисперсий дисперсия пульсационной составляющей скорости движения будет определяться по формуле

$$s_v^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} g s_h,$$

где $g = 9.8 \text{ м с}^{-2}$; s_h – стандарт высоты неровностей.

Спектральные плотности $v(t)$ и $\dot{v}(t)$ определяются известными методами теории случайных функций [9].

3. Возможность использования в работе метода сведения случайных процессов с переменными спектрами по частоте к белым шумам с постоянными спектрами обусловлена фильтрующими свойствами динамических систем реагировать в основном на воздействия по частоте близкие к частоте собственных колебаний системы. При большом демпфировании это может приводить к определенным неточностям.

4. Возможность практического использования в расчетах устойчивости приближенного соотношения (10) требует его экспериментальной проверки. Здесь это было сделано путем вычислительного эксперимента – численного решения стохастического аналога уравнения Матве–Хилла вида

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + (1 + \varepsilon(\tau))y = 0.$$

При спектральной плотности процесса $\varepsilon(\tau)$ вида

$$S_\varepsilon(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{s_\varepsilon^2}{1 + \omega^2}, \quad \omega \geq 0, \quad (22)$$

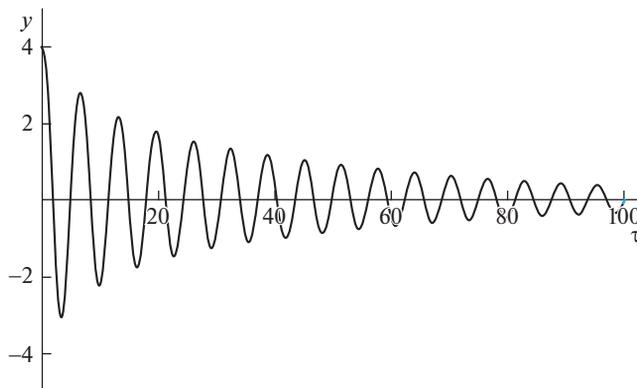


Рис. 3. Траектория процесса $y(\tau)$.

где s_ε^2 – дисперсия процесса $\varepsilon(\tau)$; τ – безразмерное время; n – безразмерный коэффициент демпфирования.

Условие устойчивости (10) получаем в виде

$$s_\varepsilon^2 < 5n, \quad (23)$$

где число 5 соответствует некоторой скорости \tilde{v} .

Из (23) следует, что при увеличении демпфирования система становится более устойчивой. При $n = 0$ система всегда устойчива.

Траектория процесса $\varepsilon(\tau)$ моделируется по формуле Шинозуки

$$\varepsilon(\tau) = \sqrt{2} \sum_{i=1}^n c_i \cos(\omega_i \tau + \alpha_i),$$

где $c_i^2 = S_\varepsilon(\omega_i) \Delta\omega_i$, $\Delta\omega_i$ – шаг квантования спектральной плотности (22); α_i – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $(0; 2\pi)$.

Одна из полученных траекторий процесса $y(\tau)$ для устойчивой системы при $n = 0.05$, $y(0) = 4$, $s_\varepsilon^2 = 0.2$ показана на рис. 3.

По результатам численных экспериментов был сделан вывод о возможности использования соотношения (10) для практических расчетов.

Заключение. В статье рассмотрен комплекс вопросов, возникающих при создании новой техники, предназначенной функционировать в условиях одновременного воздействия на нее интенсивных случайных силовых, кинематических и параметрических воздействий. Получены формулы для расчета надежности рассмотренной механической системы как вероятности неперевышения параметрами качества ее функционирования (перемещениями, ускорениями и т.п.) допустимых для них значений.

Разработана методика выбора оптимальных параметров систем виброзащиты мобильных машин и методика расчета критической скорости их движения по дорогам со случайными неровностями.

Полученное приближенное условие устойчивости движения экспериментально проверено численно на моделях со случайными параметрическими воздействиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Вибрации в технике: Справочник. Колебания линейных систем. М.: Машиностроение, 1999. Т. 1. 504 с.
2. *Гусев А.С.* Вероятностные методы в механике машин и конструкций. М.: МГТУ им. НЭ. Баумана. 2009. 223 с.
3. *Чирков В.П., Окопный Ю.А., Радин В.П.* Колебания линейных систем. М.: Спектр. 2014. 432 с.
4. *Махутов Н.А. и др.* Прочность, ресурс, живучесть и безопасность машин. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ. 2019. 576 с.
5. *Гусев А.С., Светлицкий В.А.* Расчет конструкций при случайных воздействиях. М.: Машиностроение. 1984. 240 с.
6. *Махутов Н.А.* Критериальная база прочности, ресурса, надежности, живучести машин и человеко-машинных комплексов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. № 5. С. 25.
7. *Махутов Н.А., Лепихин А.М., Чернякова Н.А.* Расчетно-экспериментальная оценка прочности, надежности и безопасности технических систем в экстремальных условиях эксплуатации. Сборник: Безопасность и мониторинг техногенных и природных систем материалы и доклады. 2018. С. 214.
8. *Ротенберг Р.В.* Подвеска автомобиля. М.: Машиностроение. 2004. 270 с.
9. *Whitney C.A.* Random processes in physical systems. New York: John Willey, 1990.

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

УДК 621.891

**АНТИФРИКЦИОННЫЕ СВОЙСТВА АЛМАЗОПОДОБНОГО ПОКРЫТИЯ
И НИТРИДА ТИТАНА В МОДЕЛЬНЫХ СМАЗОЧНЫХ СРЕДАХ**© 2020 г. И. А. Буяновский^{1,*}, В. Д. Самусенко¹, В. А. Левченко²¹ *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*² *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия***e-mail: buyan37@mail.ru*

Поступила в редакцию 27.01.2020 г.

Принята к публикации 27.03.2020 г.

В статье исследовались антифрикционные свойства алмазоподобного покрытия, нитрида титана, используемого в качестве промежуточного слоя для улучшения адгезии. Проведены измерения физико-механических свойств, оценены их трибологические свойства в инактивной смазочной среде, а также в смазочных средах с присадками – поверхностно активной и химически активной. Исследуемое алмазоподобное покрытие повышает износостойкость поверхности и позволяет значительно снизить коэффициент трения, при этом смазочная среда не оказывает существенно влияния на антифрикционные свойства алмазоподобного покрытия.

Ключевые слова: DLC, алмазоподобные покрытия, нитрид титана, антифрикционные свойства, коэффициент трения, износ, присадки

DOI: 10.31857/S0235711920040057

Нанесение наноструктурированных углеродных покрытий на рабочие поверхности стальных деталей узлов трения, функционирующих в режиме граничной смазки, повышает антифрикционные и противоизносные характеристики смазочных сред столь же эффективно, как введение в эти среды известных трибологически активных присадок [1]. Алмазоподобные покрытия (DLC) позволяют расширить температурный диапазон работоспособности смазочных сред, заметно снизить коэффициент трения и/или уменьшить содержание трибологически активных присадок в смазочных маслах. Поэтому применение алмазоподобных покрытий можно рассматривать как ключ к повышению эффективности смазочных материалов различного назначения [2]. Серьезным недостатком таких покрытий являются высокие внутренние напряжения в слое покрытия [3], что предопределяет относительно невысокий уровень их адгезии к стальной подложке. Так, адгезия покрытия к подложке в ряде случаев была недостаточной (в отдельных случаях наблюдалось отслаивание покрытия); противоизносные свойства покрытия при высоких контактных давлениях не отвечали требованиям, предъявляемым к деталям тяжело нагруженных узлов трения. Устранение этого недостатка можно выполнить путем применения многослойных покрытий, внутренний слой которых обеспечивает требуемый уровень адгезии покрытия к подложке, а поверх него наносится тонкий слой алмазоподобного покрытия [4]. Проведенный анализ показал, что покрытия, обеспечивающие адгезию двухслойного покрытия к подложке должны обладать высокой твердостью и износостойкостью, а также удовлетворительной коррозионной стойкостью и быть работоспособными в широком интервале рабочих температур. Одним из таких вариантов промежуточного покрытия

является алюминитрид титана, применяемый в качестве покрытия для металлорежущего инструмента. Данные трибологических исследований алюминитрида титана как промежуточного слоя приведены в работе [5]. В качестве альтернативного варианта промежуточного покрытия для улучшения адгезии возможно использование нитрида титана TiN [6]. Нитрид титана, как и алюминитрид титана, применяется в качестве покрытия металлорежущего инструмента. Его максимальная рабочая температура составляет 600°C.

Нанесение покрытий на поверхность металла может существенно изменять механизм взаимодействия поверхностей трения с активными компонентами смазочного материала [7, 8], поэтому представляет интерес уровень влияния исследуемых покрытий на трибологические свойства узла трения.

Целью настоящей статьи является выявление влияния подложки нитрида титана на антифрикционные свойства алмазоподобного покрытия при трении в характерных смазочных средах.

Материалы и методы. В настоящей статье исследовались антифрикционные свойства алмазоподобного покрытия с промежуточным слоем нитрида титана TiN+DLC для улучшения адгезии к подложке, а также покрытие нитрид титана TiN в отдельности. Толщина покрытия TiN+DLC составляет приблизительно 1.4 мкм, из которой на долю алмазоподобного покрытия приходится примерно 0.4 мкм.

В качестве образцов для нанесения покрытий использовались цилиндрические ролики 8 × 8 мм из стали 100Cr6 (аналог стали ШХ-15). Испытания проводили на образцах без покрытия, с покрытием нитрида титана (TiN), и алмазоподобным покрытием с промежуточным слоем нитрида титана (TiN+DLC).

Исследуемые покрытия наносились на цилиндрические поверхности роликов методом вакуумно-дугового осаждения (PVD-технология), то есть физический метод нанесения покрытий в вакууме, с помощью конденсации на подложку материала из плазменных потоков, возникающих на катоде-мишени в катодном пятне вакуумной дуги. Для нанесения покрытия из нитрида титана использовались мишени титана с чистотой 99.99.

Обрабатываемые ролики помещали в вакуумную камеру установки, оснащенную электродуговыми испарителями и нагревателем, затем проводили очистку обрабатываемой поверхности роликов в два этапа, на первом – в тлеющем разряде при бесконтактном нагреве поверхности нагревателем до 100°C, на втором – проводили ионную очистку электродуговым испарителем в среде аргона (при нагреве поверхности до 300–350°C). После этого наносили однослойное покрытие нитрида титана толщиной 1 мкм. Поверх нанесенных на цилиндрические поверхности роликов слоев нитрида титана наносили углеродное покрытие толщиной 0.3, ..., 0.5 мкм. Это осуществлялось путем импульсной конденсации углеродной плазмы в сочетании с дополнительным облучением ионами Ag⁺. Во время прохождения этого процесса растущая пленка углерода имеет энергию 150 эВ, что соответствует максимальному поперечному сечению для нейтрализации ионов аргона на углеродных цепочечных кластерах. Плотность электронных состояний в валентной зоне соответствует расчетному спектру линейных углеродных цепочек с кумулированными связями.

Измерение нанотвердости и модуля упругости покрытий выполнялось на НаноСкан-4D. Твердость измерялась в соответствии с рекомендациями ГОСТ Р 8.748-2011. Индентор – пирамидальный трехгранный алмазный наконечник Берковича. Время нагружения и разгружения 10 с. Результаты проведенных измерений характеристик поверхности образцов приведены в табл. 1.

Трибологические испытания проводились на лабораторной установке КТ-2 по схеме трения “вращающийся шар – три ролика” [9]. В качестве образцов для испытаний, использовали стандартные шарики диаметром 12.7 мм из стали ШХ-15, и ролики диаметром 8 мм, на цилиндрическую поверхность которых нанесены исследуемые по-

Таблица 1. Характеристика поверхностей образцов

Характеристика	Образцы		
	Сталь	TiN	TiN+DLC
Твердость H при нагрузке 10 мН, ГПа	9.4 ± 1.5	22 ± 7	49 ± 13
Модуль упругости E , ГПа	250 ± 31	400 ± 100	530 ± 110
Средняя шероховатость Ra , нм	86	89	31

крытия. Шпиндель машины с зажатом в нем шариком под нагрузкой 108 Н прижимается к цилиндрическим поверхностям роликов сложенных равносторонним треугольником, которые установлены в оправке в плоскости, перпендикулярной оси шпинделя. Частота вращения шпинделя с шаром составляет 1 мин^{-1} . Продолжительность испытания каждого комплекта образцов 60 мин. В процессе исследования регистрируются значения момента трения, оцениваемые по углу закручивания торсионного динамометра. Результаты испытаний представлены в виде графика зависимостей коэффициента трения от продолжительности испытаний (рис. 1).

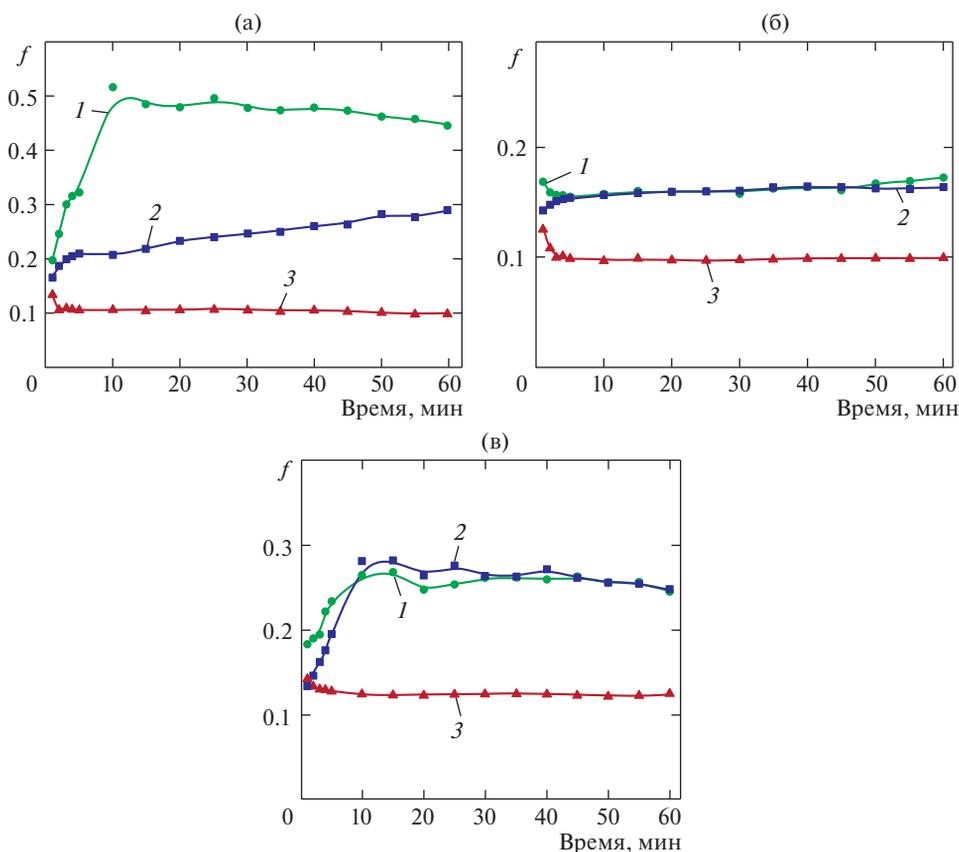


Рис. 1. Зависимость коэффициента трения от продолжительности испытаний в смазочной среде ПАО-4 (а), ПАО-4+1%ОК (б), ПАО-4+2%ДФ-11 пар трения: 1 – сталь–сталь; 2 – сталь–TiN; 3 – сталь–TiN+DLC.

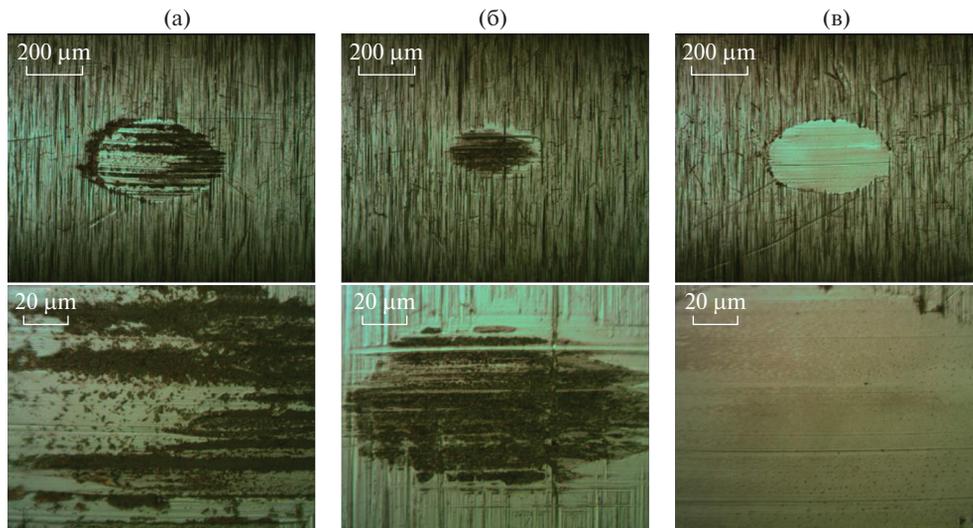


Рис. 2. Микрофотографии поверхностей трения при испытаниях без покрытия в смазочных средах: (а) – ПАО-4; (б) – ПАО-4+1% ОК; (в) – ПАО-4+2% ДФ-11.

На графиках приведены средние значения коэффициента трения, полученные по результатам трех повторных испытаний. После окончания каждого испытания фотографировались пятна износа.

Испытания образцов проводили в неактивной среде – полиальфаолефиновое масло ПАО-4 ($v_{100} = 4 \text{ мм}^2/\text{с}$), поверхностно активной среде – ПАО-4 с добавлением 1% олеиновой кислоты (ПАО-4+1%ОК) и химически активной среде – ПАО-4 с добавлением 2% присадки ДФ-11 (ПАО-4+2%ДФ-11).

Результаты и их обсуждение. Микрофотографии пятен износа с разным увеличением приведены на рис. 2–4. Для сравнения приведены результаты испытаний стали по стали в исследуемых смазочных средах.

В среде масла ПАО-4 (рис. 1а) коэффициент трения пары трения сталь–сталь увеличивается с 0.2 до 0.5 в течение первых 10 минут испытаний, затем постепенно уменьшается до 0.45. При испытании покрытия TiN в ПАО-4 коэффициент трения увеличивается в первые пять минут испытаний с 0.17 до 0.21, после чего продолжается постепенный рост до 0.29 к окончанию испытаний, что, по-видимому, связано с постепенным повреждением и разрушением покрытия; на микрофотографиях поверхности (рис. 3а) видны следы пластической деформации покрытия. Коэффициент трения при испытании покрытия TiN+DLC на этапе приработки уменьшается с 0.14 до 0.11 и в дальнейшем остается в диапазоне 0.1–0.11 до конца испытания.

При испытании образцов в поверхностно активной смазочной среде ПАО-4+1%ОК (рис. 1б) коэффициенты трения пар сталь по стали и сталь по нитриду титана близки по значениям практически на всем протяжении испытаний и составляют примерно 0.16. Основная разница на начальном этапе трения, когда поверхности прирабатываются, для пары трения сталь–сталь коэффициент трения уменьшается с 0.17 до 0.16 в начале испытаний, а для пары сталь–TiN наоборот увеличивается с 0.14 до 0.16. При трении стали по двухслойному покрытию TiN+DLC коэффициент трения уменьшается в начале с 0.125 до 0.1 и остается до конца испытания приблизительно равным 0.1.

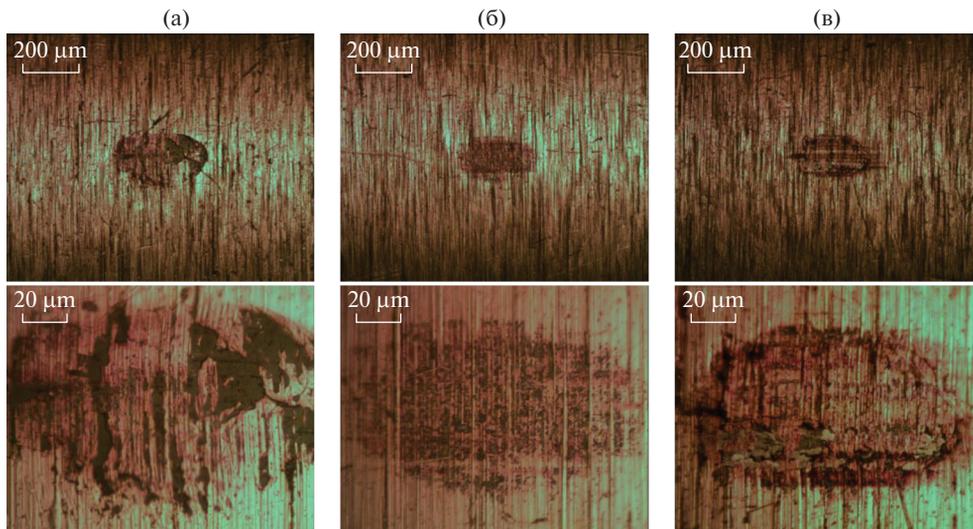


Рис. 3. Микрофотографии поверхностей трения при испытаниях покрытия TiN в смазочных средах: (а) – ПАО-4; (б) – ПАО-4+1% ОК; (в) – ПАО-4+2% ДФ-11.

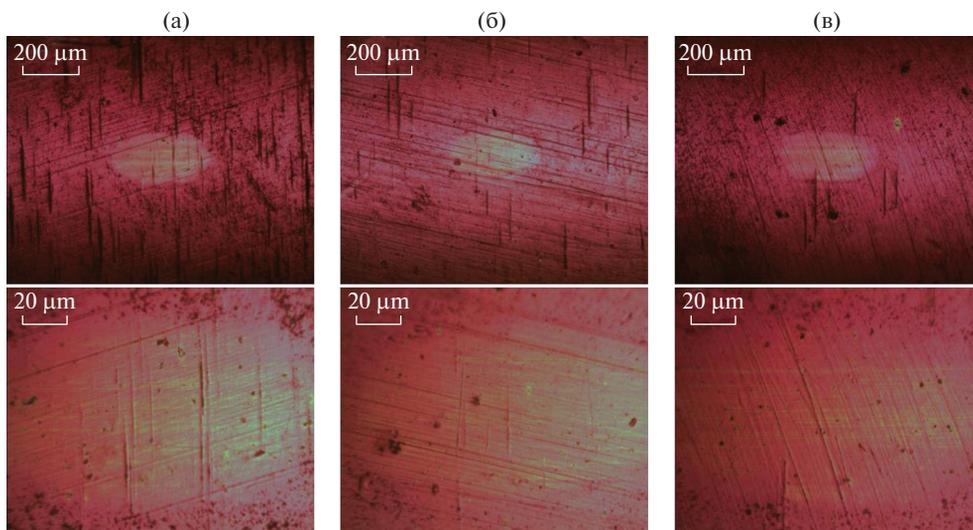


Рис. 4. Микрофотографии поверхностей трения при испытаниях покрытия TiN-DLC в смазочных средах: (а) – ПАО-4; (б) – ПАО-4+1% ОК; (в) – ПАО-4+2% ДФ-11.

В смазочной среде с химически активной присадкой ПАО-4+2%ДФ-11 (рис. 1в) зависимости коэффициента трения от продолжительности испытаний для пар трения сталь–сталь и сталь–TiN тоже близки, как и в случае с поверхностно активной средой. На начальном этапе коэффициент трения пары сталь–сталь увеличивается с 0.18 до 0.27, а пары трения сталь–TiN с 0.14 до 0.28, а затем в обоих случаях постепенно

уменьшается до 0.25 к концу испытаний. В случае с двухслойным покрытием TiN+DLC коэффициент трения существенно ниже по сравнению с другими парами трения, на начальном этапе он уменьшается с 0.14 до 0.12 и остается на этом уровне до конца испытаний.

Следует отметить, что при испытаниях образцов без покрытия и с покрытием TiN в смазочных средах с поверхностно активной и химически активной присадками коэффициент трения при установившемся режиме трения имеет близкие значения, что может говорить о доминирующем влиянии присадок на антифрикционные свойства и схожих по своим свойствам граничных слоев, образующихся на поверхностях трения.

Как видно из приведенных микрофотографий пятен износа (рис. 2–4) покрытия позволяют существенно уменьшить износ поверхности образцов. В смазочных средах разрушение покрытий не происходит, хотя на образцах видны следы повреждения покрытия. Повреждения поверхности образцов с покрытием TiN+DLC (рис. 4) меньше чем с покрытием TiN, видно, что произошел износ поверхности, но нет сильных повреждений, по всей видимости, износился только верхний слой алмазоподобного покрытия. На микрофотографиях пятен износа образца с покрытием TiN в смазочной среде ПАО-4 (рис. 3а) видны следы пластической деформации поверхности в зоне трения.

Заключение. Исследованные покрытия TiN и TiN+DLC обладают хорошей адгезией к поверхности и предотвращают сильное повреждение поверхности от изнашивания.

В смазочных средах с поверхностно активной и химически активной присадками при установившемся режиме трения антифрикционные свойства покрытия TiN аналогичны по значениям коэффициента трения антифрикционным свойствам стали, что говорит об образовании на поверхностях трения схожих по своим свойствам граничных слоев.

Наибольший эффект снижения коэффициента трения во всех испытанных смазочных средах получен при испытаниях покрытия TiN+DLC. Смазочная среда в случае с этим покрытием оказывает незначительное влияние на антифрикционные свойства покрытия, во всех испытанных смазочных средах имеется одинаковый характер изменения коэффициента трения со временем – на начальном этапе он снижается, а затем, достигнув определенного значения, остается постоянным до конца испытания. Выделяются результаты с испытанием в смазочной среде с химически активной присадкой за счет несколько большего коэффициента трения при установившемся режиме, что, по-видимому, является следствием влияния промежуточного слоя нитрида титана, так как подобного эффекта не было замечено при испытаниях алмазоподобного покрытия с промежуточным слоем алюминитрида титана [5]. Таким образом, фактором, обеспечивающим хорошие антифрикционные свойства исследуемым смазочным средам, является углеродное покрытие, причем в этом случае наличие в смазочном материале трибологически активных присадок практически не влияет на коэффициент трения. Иначе говоря, антифрикционные эффекты от трибологически активных присадок и от исследуемого алмазоподобного покрытия не суммируются.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буяновский И.А., Большаков А.Н., Левченко В.А., Матвеев В.Н. Влияние смазочных масел на трение стали по композиционному покрытию керамика + монокристаллический углерод // Трение и износ. 2014. Т. 35. № 2. С. 173.

2. Tyagi A., Walia R.S., Murtaza Q. et al. A critical review of diamond like carbon coating for wear resistance applications // International Journal of Refractory Metals and Hard Materials. 2019. Т. 78. С. 107.
3. Wang M. et al. Characterization of metal-containing amorphous hydrogenated carbon films // Journal of materials research. 1992. Т. 7. № 3. С. 667.
4. Deng J., Braun M. DLC multilayer coatings for wear protection // Diamond and related materials. 1995. Т. 4. № 7. С. 936.
5. Левченко В.А., Буяновский И.А., Самусенко В.Д. и др. Антифрикционные свойства алмазоподобного покрытия и алюминитрида титана в модельных смазочных средах // Трение и износ. 2019. Т. 40. № 6. С. 706.
6. Voevodin A.A. et al. Multilayer composite ceramic metal-DLC coatings for sliding wear applications // Tribology international. 1996. Т. 29. № 7. С. 559.
7. Podgornik B., Sedlaček M., Vižintin J. Compatibility of DLC coatings with formulated oils // Tribology International. 2008. Т. 41. № 6. С. 564.
8. Haque T., Morina A., Neville A. et al. Effect of oil additives on the durability of hydrogenated DLC coating under boundary lubrication conditions // Wear. 2009. Т. 266. № 1–2. С. 147.
9. Смазочные материалы: Антифрикционные и противоизносные свойства. Методы испытаний: Справочник / Под. ред. Матвеевский Р.М., Лашхи В.Л., Буяновский И.А. и др. М.: Машиностроение, 1989. 224 с.

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

УДК 519.718

**ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАДЕЖНОСТИ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ
НАГРУЗКАХ И УСКОРЕННЫЕ ИСПЫТАНИЯ**

© 2020 г. В. А. Проурзин

*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия**e-mail: proursin@gmail.com*

Поступила в редакцию 24.12.2019 г.

Принята к публикации 29.05.2020 г.

Предложена новая формулировка физического принципа надежности и построена модель надежности с учетом переменных нагрузок в виде системы дифференциальных уравнений. На вход динамической системы подается нагрузка, а на ее выходе формируется функция вероятности безотказной работы. Получены условия эквивалентности динамических моделей. При наличии автомодельности процессов накопления повреждений общая динамическая модель сведена к эквивалентной упрощенной базовой динамической модели. Полученные результаты могут иметь применение в теории надежности систем с переменными нагрузками, в анализе выживаемости, в теории ускоренных и форсированных испытаний.

Ключевые слова: надежность, переменные нагрузки, мера повреждения, динамическая модель, ускоренные испытания, автомодельность.

DOI: 10.31857/S0235711920050119

В рамках традиционного подхода [1] показатели надежности вводятся как функции времени при условии, что все изделия эксплуатируются в сходных условиях. Распространенный в инженерной практике способ учета влияния эксплуатационных нагрузок заключается в построении зависимостей показателей надежности от постоянных уровней эксплуатационных факторов. В качестве примера можно привести модели расчета вероятностей усталостного разрушения при регулярном многоцикловом нагружении. Для учета переменных нагрузок используются полуэмпирические модели суммирования повреждений. В первую очередь это широко известное правило линейного суммирования повреждений (гипотеза Пальмгрена–Майнера) и различные нелинейные обобщения этого правила [2, 3]. Сюда же можно отнести многостадийные модели накопления повреждений, модели, использующие полуэмпирические функции меры повреждений [3]. Существуют определенные проблемы с обоснованностью применения и точностью этих подходов.

Большое внимание уделяется разработке физических моделей отказов, описывающих развитие физических процессов накопления повреждений и критерии возникновения отказов [4–10]. Отказ как правило трактуется как детерминированный момент достижения некоторого предельного состояния. Отсутствует связь с традиционными показателями надежности.

Модели зависимостей показателей надежности от нагрузок в настоящее время интенсивно развиваются в рамках методов ускоренных (форсированных) испытаний. Достаточно полный обзор современных методов ускоренных испытаний дан в [11]. Наиболее популярными моделями ускоренных испытаний являются модель пропор-

циональных интенсивностей [12] и AFT (accelerated failure time) модель [11, 13]. Важным результатом в теории ускоренных испытаний является физический принцип Седякина [14]. Этот принцип инициировал работы многих исследователей: принцип наследственности Карташова [15], модель Пешеса–Степановой [16], обобщенный принцип Седякина [13]. В работах [17, 18] этот подход развивается применительно к системам с переменными нагрузками. В работах [15] и [19] показано, что принцип Седякина и его обобщения имеют узкую область строгого применения.

В настоящей статье формулируется общий физический принцип надежности, из которого выводится динамическая модель, связывающая функцию вероятности безотказной работы системы с динамикой изменения некоторой меры повреждения изделия [21]. Здесь рассмотрены простые модели со скалярной нагрузкой и исследованы их свойства. Обосновано применение динамической модели к анализу надежности систем с переменной нагрузкой и к ускоренным испытаниям.

1. Модели ускоренных испытаний. Методы ускоренных испытаний позволяют принимать решение о надежности систем при их эксплуатации в стандартных условиях по результатам экспериментов, проведенных в условиях повышенных нагрузок за более короткое время. Комплекс воздействующих факторов представляется в виде вектор-функции $\theta(t)$. В теории ускоренных испытаний θ называется вектором поясняющих переменных, вектором ковариант, стрессом или просто нагрузкой. Компоненты нагрузки θ могут соответствовать различным характеристикам, оказывающим влияние на работоспособность объекта: внутренним характеристикам объекта, внешним воздействующим факторам, эксплуатационным нагрузкам и т.п. Через E обозначено множество возможных нагрузок, а через E_1 – множество нагрузок, постоянных во времени, $E_1 \subset E$.

Пусть θ_0 – вектор нагрузки, соответствующий нормальным условиям эксплуатации; $P_0(t) = P(t; \theta_0)$ и $\lambda_0(t) = \lambda(t; \theta_0)$ – функции вероятности безотказной работы (функция надежности) и интенсивность отказов при нормальной нагрузке θ_0 ; $P(t; \theta)$ и $\lambda(t; \theta)$ – функции надежности и интенсивность отказов при произвольной нагрузке θ . При известной интенсивности отказов $\lambda(t)$ функция надежности $P(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{P} = -P\lambda(t), \quad P(0) = 1. \quad (1)$$

В моделях ускоренных испытаний основной вопрос заключается в построении связи между функцией надежности $P(t; \theta)$ и функцией надежности $P_0(t)$ при постоянных нагрузках: $\theta \in E_1$. Существует две известные модели ускоренных испытаний на множестве E_1 , называемые моделями Лемана [13]. Рассматривается положительная функция $r(\theta)$ – функция связи, которая описывает суммарный эффект влияния нагрузки на продолжительность безотказной работы системы. Согласно *первой модели Лемана*

$$P(t, \theta) = P_0^{r(\theta)}(t), \quad \lambda(t; \theta) = r(\theta)\lambda_0(t). \quad (2)$$

К моделям этого типа относится, например, модель пропорциональных интенсивностей Кокса [12]. Согласно *второй модели Лемана*

$$P(t, \theta) = P_0(r(\theta)t), \quad \lambda(t; \theta) = r(\theta)\lambda_0(r(\theta)t). \quad (3)$$

Модель интенсивности отказов в виде (3) обычно называется AFT (accelerated failure time) моделью на E_1 .

Задача ускоренных испытаний состоит в построении функции связи $r(\theta)$. Основные проблемы применения изложенных подходов заключаются в следующем. В состав вектора стрессов θ включают не только нагрузки, но и переменные состояния объекта. Однако связь между нагрузками и переменными состояниями при этом не используется.

Возникают проблемы использования построенных моделей для учета переменных нагрузок.

Ниже рассмотрен подход к описанию влияния нагрузок на показатели надежности, основанный на динамических моделях накопления повреждений, и применение этих моделей к ускоренным испытаниям.

2. Динамическая модель надежности. Рассматривается модель надежности, при которой эксплуатационная нагрузка описывается скалярной величиной $\theta(t)$. Рассматривается одна причина отказа вследствие определенного деградационного процесса (механического, физического, химического...). Вводится скалярная величина y – мера накопления повреждения. Этот параметр может иметь физический смысл (например, длина трещины, величина износа, расход рабочего тела, степень коррозии и т.п.) или представлять из себя обобщенный полуэмпирический показатель [3]. Для нагрузки и меры повреждения вводится связь – дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = F(y, \theta), \quad y(0) = y_0. \quad (4)$$

Вероятность безотказной работы $P(t; \theta)$ в момент времени t зависит от значений нагрузки $\theta = \theta(t)$ на всем интервале времени $(0, t)$. Используя физические соображения, эту зависимость можно уточнить. В качестве постулата принимается марковское свойство физических систем.

Физический принцип надежности. *Существует показатель меры повреждения $y = y(t)$ такой, что вероятность отказа на малом интервале времени $[t, t + \Delta t]$ при условии исправности системы в момент времени t , определяется только текущим значением $y(t)$ и не зависит от предыстории.*

Данный принцип есть обобщение известного физического принципа Седякина [14]. В качестве обоснования сформулированного физического принципа можно рассмотреть процедуру технической диагностики. В процессе диагностики измеряют именно текущие значения диагностических параметров (меры повреждения) и только по этим значениям выносят заключение о состоянии объекта и возможности его отказа в ближайшее время. Предыстория изменения меры повреждения как правило не рассматривается. Например, вероятность отказа тормозов автомобиля на малом интервале времени $[t, t + \Delta t]$ зависит лишь от величины износа тормозных колодок y в рассматриваемый момент и не зависит от истории этого износа.

С другой стороны, текущее значение меры повреждения $y(t)$ есть интегральная характеристика всей истории нагружения. Она определяется дифференциальным уравнением (4). Вероятность отказа, которая определяется достигнутым значением меры повреждения, таким образом опосредованно зависит от всей истории нагружения.

Сформулированный физический принцип эквивалентен условию существования неотрицательного коэффициента D , зависящего только от значения меры повреждения в момент времени t : $D = D(y(t))$, и такого, что

$$\frac{P(t + \Delta t; \theta)}{P(t; \theta)} = 1 - D(y(t)) \Delta t + o(\Delta t). \quad (5)$$

Выражение слева от знака равенства есть вероятность безотказной работы системы на малом интервале времени $[t, t + \Delta t]$ при условии, что система не отказала на интервале $[0, t]$, а выражение справа – линеаризованное по Δt значение этой условной вероятности, зависящее только от текущего значения y . Функция $D(y)$ имеет смысл *опасности отказа* при достижении мерой повреждения значения y . Переход в выражении (5) к пределу при стремлении Δt к нулю дает дифференциальное уравнение

$$\dot{P}(t) = -P(t) D(y). \quad (6)$$

Из сравнения уравнений (1) и (6) следует связь между интенсивностью отказов и функцией опасности отказа при нагрузке $\theta(t)$

$$\lambda(t; \theta) = D(y(t; \theta)). \quad (7)$$

Объединение уравнений (4) и (6) дает систему дифференциальных уравнений – динамическую модель надежности

$$\begin{cases} \dot{y} = F(y, \theta), & y(0) = y_0, \\ \dot{P} = -PD(y), & P(0) = 1. \end{cases} \quad (8)$$

На вход системы (8) подается нагрузка $\theta = \theta(t)$, на выходе получается зависимость меры повреждения от времени и функция надежности $P(t)$.

Ниже приведены примеры динамических моделей. Для наглядности, полагается, что нагрузка постоянна во времени: $\theta(t) \in E_1$.

2.1. Пример 1. Пусть в системе (8) $F(y, \theta) = -H(\theta)(y - R(\theta))$, $H(\theta) > 0$, $R(\theta) > 0$, $D(y) = \lambda_0 y$. Решение первого уравнения системы (8) при $\theta(t) \in E_1$ имеет вид $y(t) = R(\theta) + (y_0 - R(\theta))\exp(-H(\theta)t)$. Мера повреждения $y(t)$ с ростом времени стремится к $R(\theta)$, а функция опасности $D(y)$ стремится к постоянному значению $R(\theta)\lambda_0$ тем быстрее, чем больше $H(\theta)$. Если положить $y_0 = R(\theta)$, то это постоянное значение достигается сразу и решение второго уравнения системы (8) дает экспоненциальное распределение $P = \exp(-R(\theta)\lambda_0 t)$. Если $y_0 > R(\theta)$, то моделируется случай повышенной интенсивности отказов в начальный период времени (“детская смертность”) с переходом к постоянной интенсивности. Если $y_0 < R(\theta)$, то имеем случай пониженной интенсивности отказов в начальный период времени.

2.2. Пример 2. Пусть в системе (8) $F(y, \theta) = y^{1-\alpha}R(\theta)$, $\alpha \neq 1$, $y_0 = 0$. При постоянной нагрузке θ решение первого уравнения системы (8) задается выражением $y(t) = \alpha(R(\theta)t)^{\frac{1}{\alpha}}$. Пусть функция опасности отказа имеет степенную зависимость от меры повреждения: $D(y) = cy^\beta$, $c, \beta > 0$. Тогда решение второго уравнения системы (8) дает функцию надежности в виде распределения Вейбулла. Пусть в этом примере задана другая функция опасности отказа: $D(y) = \exp(-f^2(y)/2)/(\sqrt{2\pi}\sigma\Phi(f(y)))$, где $f(y) = (\alpha \ln(y/\alpha) - \mu)/\sigma$; параметры $\sigma, \mu > 0$; $\Phi(x)$ – функция Лапласа. Тогда при $\theta(t) \in E_1$ система (8) порождает логнормальные распределения времени безотказной работы.

2.3. Свойство автомодельности. Пусть справедлива гипотеза об автомодельности в ускоренных испытаниях. В основе автомодельности лежит предположение о подобии процессов накопления повреждений при различных нагрузках. В [3] показано, что при справедливости гипотезы об автомодельности уравнение [4] для меры повреждения y должно быть дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, т.е. должно быть выполнено следующее представление правой части: $F(y, \theta) = S(y)R(\theta)$. Динамическая модель (8) в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y} = S(y)R(\theta), & y(0) = y_0; \\ \dot{P} = -PD(y), & P(0) = 1. \end{cases} \quad (9)$$

Замечание 1. По своему физическому смыслу мера повреждения y при постоянной нагрузке должна изменяться монотонно. Отсюда следует, что функция $S(y)$ является знакопостоянной.

Задача ускоренных испытаний в рамках модели (9) сводится к построению функций $S(y)$, $R(\theta)$ и $D(y)$. Чем интенсивнее нагрузка, тем быстрее величина $y(t)$ будет пробегать диапазон значений, на котором строятся эти функции.

3. Эквивалентность моделей и базовая динамическая модель надежности. Пусть для описания одного и того же отказа под действием нагрузки $\theta(t) \in E$ рассмотрены две различные меры повреждения y_1, y_2 и построены две динамические модели надежности

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = F_1(y_1, \theta), & y_1(0) = y_{10}, \\ \dot{P}_1 = -P_1 D_1(y_1), & P_1(0) = 1; \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_2 = F_2(y_2, \theta), & y_2(0) = y_{20}, \\ \dot{P}_2 = -P_2 D_2(y_2), & P_2(0) = 1. \end{cases} \quad (11)$$

Исследуются условия эквивалентности этих моделей.

Определение. Две динамические модели надежности (10), (11) эквивалентны на заданном множестве нагрузок E , если тождество $P_1(t; \theta) \equiv P_2(t; \theta)$ выполнено для каждого $\theta \in E$.

Пусть отношение функций F_1 и F_2 знакопостоянно. Далее, не уменьшая общности, можно считать его положительным. И пусть это отношение не зависит от нагрузки: $F_1(y_1, \theta)/F_2(y_2, \theta) = H(y_1, y_2) > 0$. Разделив первое уравнение системы (10) на первое уравнение системы (11) получим дифференциальное уравнение $dy_1/dy_2 = H(y_1, y_2)$ с начальным условием $y_1(y_{20}) = y_{10}$. Пусть $y_1 = \varphi(y_2)$ – решение этого уравнения. В силу положительности $H(y_1, y_2)$ функция $\varphi(y_2)$ монотонно возрастает. Зададим функцию опасности системы (11) как $D_2(y_2) = D_1(\varphi(y_2))$. Тогда для всех $t > 0$ и нагрузок θ выполняется условие эквивалентности

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \exp\left(-\int_0^t D_1(y_1(s)) ds\right) = \exp\left(-\int_0^t D_1(\varphi(y_2(s))) ds\right) = \\ &= \exp\left(-\int_0^t D_2(y_2(s)) ds\right) = P_2(t). \end{aligned}$$

В результате доказано утверждение 1.

Утверждение 1. Если отношение функций $F_1(y_1, \theta)/F_2(y_2, \theta)$ знакопостоянно и не зависит от нагрузки, то выбором функции $D_2(y_2)$ динамическую модель (11) можно сделать эквивалентной динамической модели (10).

Свойство эквивалентности позволяет обосновать использование полуэмпирических моделей: можно использовать любую меру повреждения, даже не имеющую определенного физического смысла, лишь бы ее значение монотонно зависело от величины реального ушерба.

Пусть модели надежности (10) и (11) имеют вид (9), т.е. $F_1(y_1, \theta) = S_1(y_1) R_1(\theta)$, $F_2(y_2, \theta) = S_2(y_2) R_2(\theta)$. В силу утверждения 1 эти модели будут эквивалентны, когда функции R_1 и R_2 совпадают с точностью до постоянного множителя: $R_1(\theta) = a R_2(\theta)$, $a \neq 0$. В этом случае отношение $H(y_1, y_2) = a S_1(y_1)/S_2(y_2)$ не зависит от нагрузки. Это отношение знакопостоянно в силу замечания 1.

Отсюда следует важный вывод: для автомодельной системы (9) существует бесконечное множество эквивалентных систем, которые характеризуются одной и той же функцией $R(\theta)$ и любой знакопостоянной функцией $S(y)$. Из множества этих эквивалентных моделей выделяется модель самого простого вида при $S(y) \equiv 1$. Тем самым

для любой модели вида (9) существует эквивалентная ей динамическая модель, которую будем называть *базовой динамической моделью надежности*

$$\begin{cases} \dot{x} = R(\theta), & x(0) = x_0, \\ \dot{P} = -PD_0(x), & P(0) = 1. \end{cases} \quad (12)$$

Новая мера повреждения x есть нелинейное преобразование исходной меры y : $x = \psi(y)$, $D_0(x)$ – функция опасности отказа базовой динамической модели. Не уменьшая общности, функцию $R(\theta)$ в этой модели можно считать положительной. Переход от базовой модели (12) к модели (9) с некоторой функцией $S(y)$ осуществляется преобразованием $D(y) = D_0(\psi(y))$, где $\psi(y) = x_0 + \int_{y_0}^y dy/S(y)$ – решение уравнения $dx/dy = 1/S(y)$, $x(y_0) = x_0$. Решение системы (12) записывается в общем виде

$$x(t) = x_0 + \int_0^t R(\theta(s)) ds, \quad P(t) = \exp\left(-\int_0^t D_0(x(s)) ds\right). \quad (13)$$

Рассмотрим базовую модель (12) при постоянных нагрузках. Тогда $x(t) = x_0 + R(\theta)t$ и применение этого равенства для замены переменной интегрирования в (13) дает

$$P(t) = \exp\left(-\frac{1}{R(\theta)} \int_{x_0}^{x_0+R(\theta)t} D_0(x) dx\right). \quad (14)$$

Пусть выделена некоторая постоянная нагрузка θ_0 , задающая нормальные условия эксплуатации. В силу (7) выполнены равенства $\lambda_0(t) = D_0(x_0 + R(\theta_0)t)$ и $\lambda(t, \theta) = D_0(x_0 + R(\theta)t)$. Отсюда следует $\lambda(t, \theta) = \lambda_0(cR(\theta)t)$, где $c = 1/R(\theta_0)$. Подстановка $t = c(x - x_0)$ в выражение для $\lambda_0(t)$ дает равенство $\lambda_0(c(x - x_0)) = D_0(x)$. В результате доказано утверждение 2.

Утверждение 2. В базовой модели (12) зависимость интенсивности отказов от постоянной нагрузки θ задается изменением временного масштаба $r(\theta)$: $\lambda(t, \theta) = \lambda_0(r(\theta)t)$, где $\lambda_0(t)$ – интенсивность отказов при некоторой фиксированной нагрузке θ_0 , $r(\theta_0) = 1$. Функция масштаба $r(\theta)$ совпадает с функцией $R(\theta)$ с точностью до нормирующего множителя: $r(\theta) = cR(\theta)$, $c = 1/R(\theta_0)$. Функция опасности отказа $D_0(x) = \lambda_0(c(x - x_0))$.

В терминах моделей Лемана, помимо (2) и (3), получена третья модель ускоренных испытаний на множестве постоянных нагрузок:

$$P(t, \theta) = P_0^{1/r(\theta)}(r(\theta)t), \quad \lambda(t; \theta) = \lambda_0(r(\theta)t).$$

Задача ускоренных испытаний с использованием базовой динамической модели (12) заключается в построении двух функций $R(\theta)$ и $D_0(x)$. Функция опасности отказа $D_0(x)$ определяется через функцию интенсивности отказа при некоторой постоянной нагрузке θ_0 .

Заключение. Построена динамическая модель надежности при произвольной нагрузке. Модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, на вход которой подается нагрузка, а на выходе получается функция надежности. В случае автомодельности процессов накопления повреждений общая динамическая модель сводится к упрощенной базовой динамической модели.

Модель имеет непосредственное применение в тех случаях, когда нагрузки задаются как детерминированные функции времени. В первую очередь такая ситуация возникает при испытаниях на надежность, в том числе при ускоренных и форсированных испытаниях.

Корректность рассмотренной динамической модели определяется справедливостью физического принципа надежности. Для использования базовой динамической модели дополнительно требуется выполнение автомодельности процессов накопления повреждений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко В.Б., Беляев Ю.К., Соловьев Ф.Д.* Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965. 524 с.
2. Надежность в машиностроении: Справочник/ Под. ред. В.В. Шашкина, Г.П. Карзова. СПб.: Политехника. 1992. 719 с.
3. *Болотин В.В.* Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 448 с.
4. *Меламедов И.М.* Физические основы надежности. Л.: Энергия, 1970. 152 с.
5. *Махутов Н.А.* Проблемы прочности, ресурса и безопасности машинных систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 3. С. 50.
6. *Махутов Н.А.* Обобщённые закономерности процессов деформирования и разрушения // Вестник российской академии наук. 2017. Т. 87. № 5. С. 407.
7. *Матвиенко Ю.Г.* Модели и критерии механики разрушения. М.: Физматлит. 2006. 328 с.
8. *Гриб В.В., Петрова И.М., Романов А.Н.* Оценка вероятности отказа механических систем моделирования технического состояния // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 5. С. 55.
9. *Романов А.Н.* Закономерности деформирования и разрушения конструкционных материалов при циклическом нагружении на стадии образования трещин // Механика машин, механизмов и материалов. 2017. № 3 (40). С. 67.
10. *Пронилов А.С.* Надежность машин. М.: Машиностроение. 1978. 592 с.
11. *Escobar L.A., Meeker W.Q.* A review of accelerated test models // Statistical science. 2006. V. 21. № 4. P. 552.
12. *Cox D.* Regression models and life tables // J. R. Statist. Soc. 1972. V. 34. P. 187.
13. *Bagdonavicius V., Nikulin M.* Accelerated life models: modeling and statistical analysis. Boca Raton, Florida: Chapman & Hall. 2002. 334 p.
14. *Седякин Н.М.* Об одном физическом принципе теории надёжности // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1966. № 3. С. 80.
15. *Перроте А.И., Карташов Г.Д., Цветаев К.Н.* Основы ускоренных испытаний радиоэлементов на надежность. М.: Советское радио. 1968. 224 с.
16. *Пешес Л.Я., Степанова М.Д.* Основы ускоренных испытаний на надёжность. Минск: Наука и техника. 1972. 165 с.
17. *Павлов И.В.* Расчет показателей надежности в условиях переменного режима работы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. № 5. С. 103.
18. *Павлов И.В.* Оценка надежности для модели ускоренных испытаний с переменной нагрузкой // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. № 1. С. 68.
19. *Белов В.Н.* Об определении области применимости моделей расходования ресурса // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1988. № 3. С. 98.
20. *Новиков П.И., Проурзин В.А.* Динамическая модель надежности изоляции электрических машин // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. № 1. С. 106.
21. *Prourzin V.A.* General physical principle in dynamic model of reliability // Int. J. of Risk Assessment and Management. 2017. V. 20. № 4. P. 322.

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

УДК 539.4

**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИКИ
ПРОСТРАНСТВЕННОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
И РАЗРУШЕНИЯ СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ АУСТЕНИТНЫХ СТАЛЕЙ**© 2020 г. Н. А. Махутов¹, И. В. Макаренко^{1,*}, Л. В. Макаренко¹¹ Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

*e-mail: I.V.Makarenko@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.11.2018 г.

После доработки 20.05.2019 г.

Принята к публикации 29.05.2020 г.

Представлены результаты расчетно-экспериментальных и численных исследований относительных коэффициентов интенсивности деформаций для полуэллиптических поверхностных наклонных трещин в сварных соединениях аустенитных нержавеющих сталях типа 12X18H10T с учетом перераспределения деформаций и исходных остаточных напряжений при нелинейных граничных условиях нагружения. Дано параметрическое уравнение определения относительных коэффициентов интенсивности деформаций для полуэллиптических поверхностных наклонных трещин. Новое параметрическое уравнение позволяет оценить сравнительную живучесть локальных зон деталей и конструкций по всему объему сварного соединения при упругопластическом статическом и малоцикловом нагружении.

Ключевые слова: локальные поля упругопластических деформаций, остаточные сварочные напряжения, относительный коэффициент интенсивности деформаций, разно-ориентированные поверхностные полуэллиптические трещины

DOI: 10.31857/S0235711920050089

Критерии нелинейной механики разрушения основываются на понятии инвариантности J – интеграла Эшелби–Черепанова–Райса не зависящего от контура интегрирования вокруг контура трещины. $J = \int_C \left(W n_1 - n_i \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) ds$, где: $n_1 = \bar{e}_1 \bar{n}$, \bar{e}_1 – единичный вектор, указывающий направление роста трещины, W – удельная потенциальная энергия деформации, ds – элемент длины контура, n_i – нормаль к контуру интегрирования, u_j – перемещения, σ_{ij} – тензор напряжений. Он представляет собой скорость освобождения потенциальной энергии тела в процессе роста трещины. J – интеграл по сингулярной асимптотике решения линейной механики разрушения связан с коэффициентами интенсивности напряжений уравнением $J = -\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\beta}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2$, где $\beta = 1$ для плоского напряженного состояния; $\beta = 1 - \nu^2$ для плоского деформированного состояния; W – потенциальная энергия деформирования.

При сложном упругом номинальном нагружении, согласно [1] эквивалентный коэффициент интенсивности напряжений K_q вычисляется как функция трех моделей

Таблица 1

Зона сварного соединения	σ_T , Мпа, предел текучести	σ_b , Мпа, предел прочности	Ψ_k , %, относительное сужение
Основной металл	280	578	65
Зона термического влияния	310	600	59
Сварной шов	420	741	52

разрушения по уравнению $K_q = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{E^*}{2G} K_{III}^2}$, где $E^* = E$ для плоского напряженного состояния и $E^* = E/(1 - \nu^2)$ для плоского деформированного состояния.

В самом общем случае упругопластического нагружения тела с трещиной для компонент тензора относительных деформаций, в окрестности контура поверхностной полуэллиптической произвольно ориентированной в объеме материала трещины, с учетом работ [2–30], расчетно-экспериментальных и численных решений с использованием программного интерфейса, справедливо асимптотическое уравнение $\bar{e}_{ij}(r, \vartheta) = (2\pi r)^{0.5 f_{ij}} \sum_{\alpha} \bar{K}_{e\alpha}^{f_{ij}} f_{ij}^{\alpha}(\vartheta) + \dots$, где \bar{K}_{eI} , \bar{K}_{eII} , \bar{K}_{eIII} – относительные коэффициенты интенсивности деформаций и функция f_{ij} , зависящие от приложенной к телу упругопластической нагрузки, геометрии трещины и тела и механических свойств материала; $\bar{e}_{ij}(r, \vartheta)$ – тензор локальных относительных упругопластических деформаций в окрестности контура дефекта; $\alpha = I, II, III$ – модели нагружения; $i, j = 1, 2, 3$; f_{ij} – параметры деформационных критериев разрушения [2, 3].

Очевидно, что деформационный критерий нелинейной механики разрушения для трещины смешанного типа представляется уравнением $F(\bar{K}_{eI}, \bar{K}_{eII}, \bar{K}_{eIII}, \bar{K}_{eIC}, \bar{K}_{eIIC}, \bar{K}_{eIIIC}) = 0$, где $\bar{K}_{e\alpha C}$ – критическое значение относительного коэффициента интенсивности деформаций для соответствующей модели разрушения при $\alpha = I, II, III$.

В настоящей статье рассматриваются дефекты типа поверхностных разноориентированных полуэллиптических трещин в сварном соединении аустенитной нержавеющей стали типа 12X18Н10Т. Даны параметрические уравнения нелинейной механики разрушения с учетом кинетики остаточных напряжений, пространственной механической неоднородности и эффекта перераспределения деформаций в соединении при одноразовом нагружении.

На основании расчетно-экспериментальных данных [5–7] рассматривается цилиндрический образец, вырезанный из пластины сварного соединения с нанесенными поверхностными полуэллиптическими наклонными трещинами, схема которого представлена на рис. 1.

В табл. 1 приведены интегральные значения механических свойств металла сварного соединения стали 12X18Н10Т.

При приложении к образцу внешней растягивающей нагрузки с напряжениями $\bar{\sigma}_n$, создающими упругопластические деформации, кинетическое уравнение относительных остаточных напряжений $\bar{\sigma}_{ox}$ на линии сплавления (области сплавления) и в перпендикулярном направлении от сварного шва зависимость $\bar{\sigma}_{ox} = f_1(x/\ell, \bar{\sigma}_n)$ выражается с достоверной точностью [5] уравнением $\bar{\sigma}_{ox} = [1 - (\bar{x})^2][\alpha_1 - \alpha_2 \bar{\sigma}_{ni}] = f_1$, где: $\alpha_1 = 0.79$, $\alpha_2 = 0.62$; $\bar{x} = x/\ell$ – относительная координата по оси с началом на линии сплавления и направлении перпендикулярном сварному шву по поверхности образца; ℓ – полуширина области растягивающих остаточных напряжений. Для металла свар-

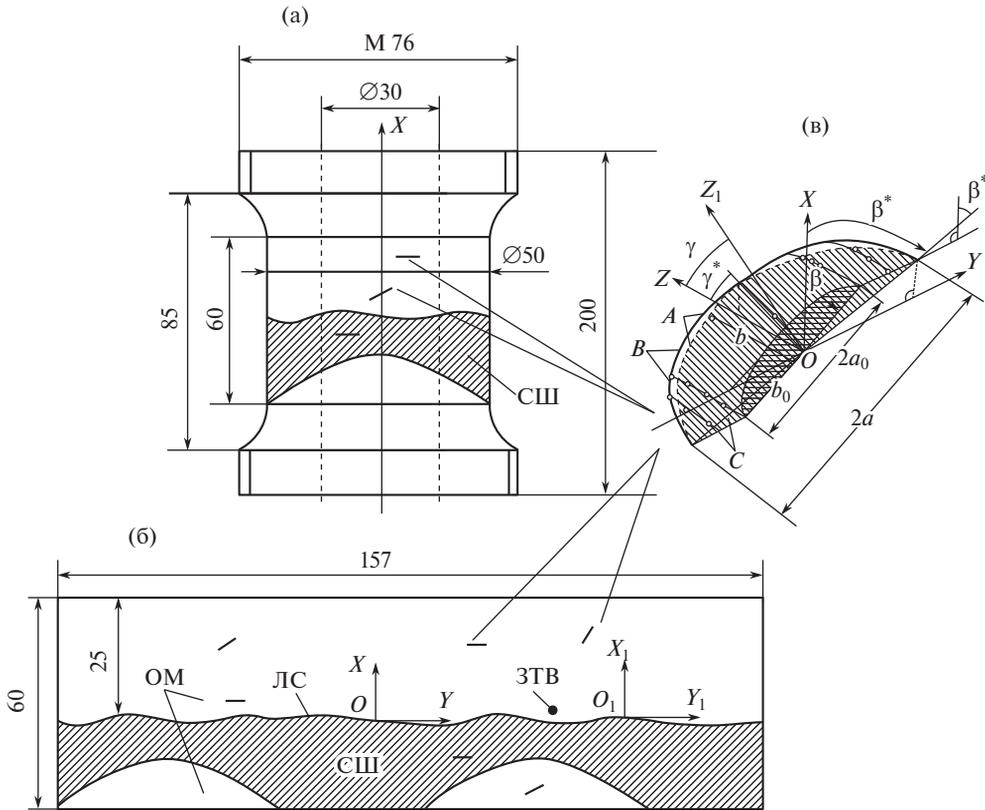


Рис. 1. (а) – схема трубчатого образца из сварного соединения стали 12X18H10T; (б) – развертка его рабочей поверхности; (в) – изометрическая форма расчетной модели поверхностей разно-ориентированных полуэллиптических трещин (*A* – расчетная поверхность трещины; *B* – контур реальной поверхности трещины; *C* – точки реальной поверхности трещины); β^* – угол наклона расчетной плоскости трещины к оси *OX*; γ^* – угол наклона расчетной плоскости трещины к оси *OZ*.

ного шва согласно [5] – уравнением $\bar{\sigma}_{ox} = \alpha_3 - \alpha_4 (\bar{\sigma}_{ni})^2 = f_2$, где: $\alpha_3 = 0.70$; $\alpha_4 = 0.75$; $\bar{\sigma}_{ox} = \sigma_{ox}/\sigma_{Ti} = f_2(x/\ell, \bar{\sigma}_{ni})$; σ_{Ti} – локальный предел текучести соответствующей зоны соединения; $\bar{\sigma}_{ni} = \sigma_n/\sigma_{Ti}$ номинальное относительное напряжение.

Исследование распределения относительных упругопластических деформаций при статическом растяжении сварного соединения показало, что при увеличении σ_n до 394 МПа ($\bar{\sigma}_n = \sigma_n/\sigma_T$), большие деформации накапливаются в менее прочном основном металле (без учета остаточных напряжений). Это объясняется более высокими уровнями деформаций в нем при одинаковых напряжениях во всех зонах сварного соединения. Сопротивление разрушению соединения в целом оценивается с учетом перераспределения деформаций и изменения диаграмм деформирования основного металла, металла шва и зон термического влияния с учетом начальных полей остаточных напряжений и их кинетики. При этом наблюдается существенное перераспределение деформаций в сварном соединении именно за счет больших значений остаточных напряжений.

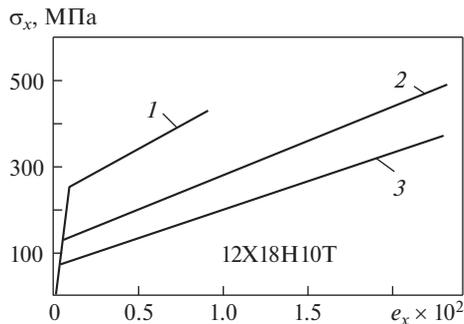


Рис. 2. Расчетные диаграммы деформирования сварного соединения стали 12X18H10T и его зон: 1 – ОМ – без учета эффекта перераспределения деформаций и наличия исходных остаточных напряжений; 2 – ЗТВ и 3 – СШ с учетом эффекта перераспределения деформаций и кинетики исходных остаточных напряжений.

Перераспределение упругопластических деформаций в зонах шва [2, 3] оценивается с использованием коэффициентов контактного упрочнения, характеризующих повышение сопротивления упругопластическим деформациям зон с пониженным пределом текучести за счет возникающей объемности напряженно-деформированного состояния (НДС).

Для учета влияния кинетики σ_{ox} на напряженно-деформируемое состояние (НДС) нагружаемого сварного соединения вводится поправка на напряжение в соответствующих параметрических уравнениях для описания распределения упругопластических деформаций в i -й зоне [2, 3, 5] в виде функции (1)

$$\sigma_{ni} = \sigma_n + \sigma_{oxi} = \sigma_n + f_i(x, \sigma_n), \quad (1)$$

где σ_n – напряжения от внешней нагрузки; $\sigma_{ox} = f_i(X, \sigma_n)$ – функция остаточных сварочных напряжений.

Упругопластические деформации на локальном участке при линейной аппроксимации диаграммы деформирования ($\sigma_x > \sigma_T$) для уровня номинальных напряжений σ_{ni} будут распределены согласно [3] по зависимости (2)

$$e_x = \frac{\sigma_{ni}}{G_{Ti}} - \sigma_{Ti}^{(0)} \left(\frac{1}{G_{Ti}} - \frac{1}{E_i} \right) \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(1+2\chi)\alpha_\chi}{3\sqrt{3x_i}(1+\gamma)} \right) - 1 \right] \left(1 - \frac{G_{Ti}}{E_i} \right) \frac{G_{Ti-1}}{E_{i-1}} \right\}, \quad (2)$$

где $\sigma_x = \sigma_{ni}$ – номинальное приложенное напряжение с учетом начальных остаточных напряжений от сварки или без них [5]; $E_i, G_{Ti}, \sigma_{Ti}^{(0)}$ – соответственно осредненный модуль упругости, линейный модуль упрочнения и предел текучести по объему поперечной прослойки толщиной Δx ; \bar{x}_i – отношение ширины рассматриваемой зоны к толщине оболочки; $\chi = (D/d + 1)/2$.

Введя в расчетную формулу (2) величину остаточного сварочного напряжения σ_{ox} , получим реальные расчетные кривые диаграмм для зон сварного соединения в виде уравнения (1).

На рис. 2 представлены расчетные кривые диаграмм упруго-пластического деформирования сварного соединения и его отдельных зон с учетом эффекта перераспределения упругопластических деформаций при наличии твердой прослойки с наложением исходных полей остаточных сварочных напряжений.

Для определения локальных механических свойств, в сварном соединении, используется математическая модель работы [6]. Функциональное распределение относи-

тельных напряжений течения по объему сварного шва и зоны сплавления. Для сталей аустенитного нержавеющей класса представляется уравнением вида

$$\bar{\sigma}_T = [A_1(y/t)^2 + A_2](x/t)^2 + A_3(y/t)^2 + A_4. \quad (3)$$

Для металла шва (СШ), включая линию сплавления (ЛС) и зону термического влияния (ЗТВ) относительное сужение представлено уравнением

$$\bar{\Psi}_k = A_0[C_1 + C_2(y/t)^{0.3} + [C_3 + C_4((y/t) - \eta_\Psi)^2](x/t)^2],$$

где: $\bar{\Psi}_k = \Psi_k/\Psi_{k0}$, Ψ_k и Ψ_{k0} – соответственно значение относительного сужения при разрушении в соответствующей точке массива шва (включая зону сплавления) и основного металла. Для сварных соединений исследуемых сталей константы $\eta_\Psi = 0.55$ и $A_0 = 1$.

Пространственное распределение предела прочности для металла сварного соединения при $x \geq 0$ и $y \geq 0$ задано уравнением

$$\bar{\sigma}_b = B_0[D_1 + D_2((y/t) - 0.5)^2 + D_3((y/t) - \eta_b)^2(x/t)^2],$$

где: $\bar{\sigma}_b = \sigma_b/\sigma_{b0}$, σ_b и σ_{b0} соответственно предел прочности для металла в произвольной точке массива и для основного металла. Величины коэффициентов A_i , C_i , D_i , где $i = 1, 2, 3, 4$, регламентируются в работе [6]. Согласно [2, 3] сопротивление разрыву S_k в точке объема сварного соединения можно определять как функцию координат x/t , y/t зависимостью $S_k/(\bar{\sigma}_b\sigma_{b0}) = 1 + 1.4\bar{\Psi}_k\Psi_{k0}$, а продольные логарифмические деформации разрушения по всему массиву соединения уравнением $e_c = \ln(1/(1 - \bar{\Psi}_k\Psi_{k0}))$. Тогда в соответствии с [3, 6] при степенной аппроксимации диаграммы деформирования характеристика упрочнения материала в упругопластической области нагружения в произвольной точке объема сварного соединения выражается уравнением

$$m_i = 0.75(\lg(S_k/\bar{\sigma}_T\sigma_{T0}))/\lg(1/e_{Ti} \ln(1/1 - \bar{\Psi}_k\Psi_{k0})), \quad \text{где } e_{Ti} = \sigma_{Ti}/E.$$

Обычно, инициирование разрушения происходит от дефектов типа трещин. Для анализа живучести сварного соединения, численными методами, на базе программного комплекса ANSYS (8), проведен расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) по контуру поверхностных полуэллиптических трещин с углом наклона $\beta = \pi/2$, как самых опасных при рассматриваемом упругопластическом одноразовом нагружении.

Исследовалось (НДС) при упругопластическом нагружении по контуру наклонных поверхностных полуэллиптических трещин с полуосями $b/a = 2/3$, относительной глубиной $b/t = 0.1$ и углами наклона $\beta = \pi/2$, $\gamma = 0$ в оболочке трубчатого сварного образца толщиной $t = 10$ мм (рис. 1). При этом использовались расчетно-экспериментальные диаграммы упругопластического деформирования, представленные на рис. 2.

Рассматривались трещины в основном металле (ОМ) без учета влияния анизотропии свойств и остаточных напряжений, а также трещины в металле сварного шва (СШ) и в объеме зоны термического влияния (ЗТВ) с учетом перераспределения деформаций и изменения исходных остаточных напряжений.

Конечно-элементная, расчетная модель исследуемых трещин представлена на рис. 3.

Массив модели состоит из двадцати узловых изопараметрических элементов типа SOLID95, SOLID236 наклонной трещины.

При внешней нагрузке растяжения образца до 394 МПа предел текучести сварного шва составлял $\sigma_T = 79.9$ МПа, а для зоны термического влияния $\sigma_T = 141$ МПа. В результате в СШ, при незначительных нагрузках в ОМ, появлялись заметные пластические деформации, несмотря на его предел текучести в исходном состоянии 420 МПа.

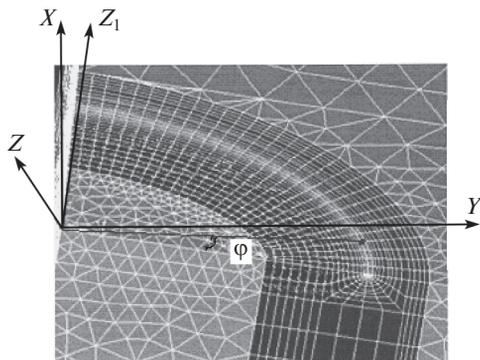


Рис. 3. Схема конечно-элементной модели поверхностной полуэллиптической трещины.

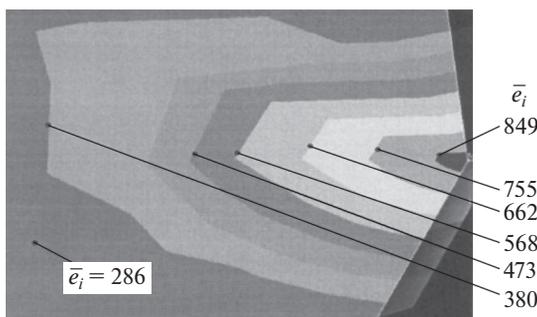


Рис. 4. Распределение \bar{e}_i по узлам конечных элементов (рис. 3) при $\bar{\sigma}_n = 1.4$ и $\varphi = \pi/2$, ($\times 75$).

На рис. 4 дано распределение интенсивности относительных упругопластических деформаций в самой глубокой точке контура поверхностной полуэллиптической трещины СШ по узлам конечно-элементной модели при эллиптическом угле $\varphi = \pi/2$ в перпендикулярном направлении к ее плоскости при $\sigma_n = 394$ МПа.

Расчетно-экспериментальные и численные расчеты исследования показали закономерности совместного влияния анизотропии механических свойств и кинетики исходных остаточных напряжений на напряженно-деформированное состояние при упругопластическом нагружении вблизи контура разно-ориентированных полуэллиптических трещин с учетом их формоизменения. Как следует из работы [3], коэффициент Пуассона в соответствующей зоне сварного соединения необходимо рассчитывать по уравнению $\mu_{ni} = 0.5 - \{0.2[1 + \bar{\sigma}_{Ti}(\bar{e}_{ni} - 1)]/\bar{e}_{ni}\}$.

Численными методами расчета, с помощью программного комплекса [8], были получены поля локальных упругопластических деформаций по контуру исследуемых трещин.

На основе деформационных критериев разрушения [2, 3] и с учетом работ [5–7] расчет относительных коэффициентов интенсивности деформаций проводился по уравнению (4)

$$\bar{K}_{ie}^{*(k)} = \frac{(2\pi r^*)^{P_{ire}^{(k)}} [\bar{\sigma}_{ni} + f_i(X, \bar{\sigma}_{ni})]^{m_i^{(k)}(1+m_i^{(k)})}}{\bar{e}_{ni} [f(r^*/l_{ij}^*)]^{P_{ike}^{(k)}}} \bar{e}_i^* \sin^2 \beta^* \quad (4)$$

При этом, относительный эквивалентный коэффициент интенсивности деформаций $\bar{K}_{qe} = \bar{K}_{ie}^*$, рассчитывался от интенсивности относительных упругопластических деформаций $\bar{e}_i^* = \bar{e}_i$. А относительный коэффициент интенсивности деформаций для I-модели разрушения $\bar{K}_{1e} = \bar{K}_{ie}^*$, рассчитывался от относительных упругопластических деформаций $\bar{e}_i^* = \bar{e}_x$, направленных вдоль оси OX . $\bar{\sigma}_{ni}$, \bar{e}_{ni} – соответственно относительные номинальное напряжение и упругопластическая деформация в точке сварного соединения. $f_i = \bar{\sigma}_{ox}(X, \bar{\sigma}_{ni})$ – функция кинетики остаточных сварочных напряжений ($i = 1, 2$), согласно выше приведенным уравнениям, при однократном нагружении в соответствующей точке соединения. $m_i^{(k)}$ – показатель упрочнения локального объема сварного соединения в k полуцикле нагружения. Параметр $P_{ire}^{(k)}$ определяется уравнением $P_{ire}^{(k)} = 0.5P_{ike}^{(k)} = \{2 - 0.5[1 - m_i^{(k)}](1 - \bar{\sigma}_{ni})\} / [1 + m_i^{(k)}]$. Остальные параметры даны в работе [3].

На рис. 5 приведены результаты расчетных \bar{K}_{qe} и \bar{K}_{1e} по контуру исследуемых трещин. Приоритетная опасность наличия исходных исследуемых дефектов наблюдается

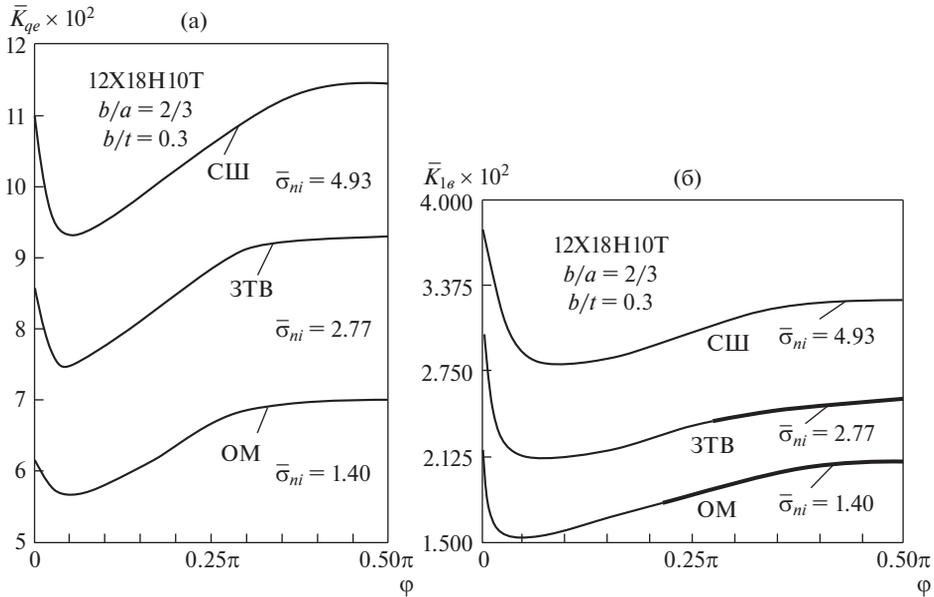


Рис. 5. Распределение относительного эквивалентного коэффициента интенсивности деформаций \bar{K}_{qe} – (а) и относительного коэффициента интенсивности деформаций \bar{K}_{1e} для I-модели разрушения – (б), по контуру полуэллиптических поверхностных трещин с $\beta = \pi/2$ и $\gamma = 0$, в соответствующих зонах сварного соединения стали 12X18H10T (СШ, ЗТВ и ОМ).

в сварном шве, в результате наибольших \bar{K}_{ie}^* , в силу влияния анизотропии свойств и изменения исходных остаточных напряжений в нулевом полуцикле упругопластического нагружения.

Согласно деформационным критериям статического разрушения, размер растущих трещин определяется уравнением (5)

$$\bar{K}_{ie}^* \leq \bar{K}_{iec}, \quad (5)$$

где \bar{K}_{iec} — относительный критический коэффициент интенсивности деформаций для соответствующей зоны сварного соединения.

С учетом рис. 5 наиболее интенсивным должно быть подрастание трещин при $\varphi = 0$ как в основном металле, так и металле шва, однако, при увеличении φ растет объемность напряженного состояния [2, 3] по контуру сечения, снижая величину \bar{K}_{iec} . Эти обстоятельства влияют на изменение фронта трещины, что соответствует результатам эксперимента.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-08-00572-а).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sih G.C., Macdonald B.* Fracture mechanics applied to engineering problems — strain energy density fracture criterion. Engng Fract Mech. 1974. № 6 (2). P. 361.
2. *Махутов Н.А.* Деформационные критерии разрушения и расчет конструкций на прочность. М.: Машиностроение, 1981. 273 с.
3. *Махутов Н.А.* Конструкционная прочность, ресурс и техногенная безопасность. В двух частях. Новосибирск: Наука, 2005. 1110 с.
4. *Makhutov N.A., Makarenko I.V., Makarenko L.V.* Calculation and experimental analysis of the stress-strain state for inclined semi-elliptical surface cracks // Inorganic Materials. 2017. V. 53. № 15. P. 1502.
5. *Махутов Н.А., Макаренко И.В., Макаренко Л.В.* Кинетика полей остаточных напряжений в неоднородных аустенитных сталях при упругопластическом деформировании // Заводская лаборатория. 1999. Т. 65. № 4. С. 40.
6. *Махутов Н.А., Макаренко И.В., Макаренко Л.В.* Исследование пространственной механической неоднородности сварных соединений аустенитных нержавеющей сталей // Заводская лаборатория. 2004. Т. 70. № 2. С. 39.
7. *Махутов Н.А., Макаренко И.В., Макаренко Л.В.* Влияние анизотропии физико-механических свойств на кинетику трещин в аустенитных сталях // Проблемы прочности. 2004. № 1. С. 113.
8. ANSYS, 2010. Structural Analysis Guide. 660578.
9. *Hayashi K., Abe H.* Stress intensity factors for a semi-elliptical crack in the surface of a semi-infinite solid // Int. J. Fract. 1980. V. 16. № 3. P. 275.
10. *Makhutov N.A., Makarenko I.V., Makarenko L.V.* Studies on the fracture mechanism and kinetics of randomly oriented surface semielliptic cracks at the multiaxial stress-strain state with deformation criteria of nonlinear fracture mechanics // Strength of Materials. 2013. V. 45. № 4. P. 454.
11. *Beghini M., Bertini L., Gentili A.* An explicit weight function for semi-elliptical surface cracks // ASME J Press Vessel Technol. 1997. № 119—216. P. 23.
12. *Predan J., Mocilnic V., Gubeljak N.* Stress intensity factors for circumferential semi-elliptical surface cracks in a hollow cylinder subjected to pure torsion // Eng. Fract. Mech. 2013. № 105. P. 152.
13. *Tada H., Paris C.P., Irwin G.R.* The stress analysis of cracks handbook. 3rd ed. ASME Press, 2000.

14. *Oh C.Y., Kim Y.J., Oh Y.J., Kim J.S., Song T.K., Kim Y.B.* Evaluation of stress intensity factors due to welding residual stresses for circumferential cracked Pipes // *Int. J Press Vessel Pip.* 2013. № 105–106. P. 36.
15. *Zareei A., Nabavi S.M.* Calculation of stress intensity factors for circumferential semielliptical cracks with high aspect ratio in pipes // *International J. of Pressure Vessels and Piping.* 2016. № 146. P. 32.
16. *Li C.-Q., Fu G.Y., Yang W.* Stress intensity factors for inclined external surface cracks in pressurized pipes // *Engng. Fract. Mech.* 2016. V. 165. P. 72.
17. *Fu G.Y., Yang W., Li C.-Q.* Stress intensity factors for mixed Mode fracture induced by inclined cracks in pipes under axial tension and bending // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2017. V. 89. P. 100.
18. *Chandra D., Putra I.S., Ariffin A.K., Mardi N.A., Nukman Y., Purbolaksono J.* Fatigue growth analysis of a surface crack in a solid cylinder under combined cyclic axial-torsion loading // *Exp. Tech.* 2016. V. 40. P. 1397.
19. *Fu G., Yang W., Li C.-Q.* Stress intensity factors for mixed mode fracture induced by inclined cracks in pipes under axial tension and bending // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2017. V. 89. P. 100.
20. *Bin Qianga, Yadong Lia, Changrong Yao, Xin Wang.* Through-thickness welding residual stress and its effect on stress intensity factors for semi-elliptical surface cracks in a butt-welded steel plate // *Eng. Fract. Mech.* 2018. V. 193. P. 17.
21. *Miao X.T., Zhou C.Y., Li J., He X.H.* Studies of elastic and elastic – plastic J -integral for mixed mode cracked plate under biaxial loading. *Fatigue* // *Fract. Eng. Mater. Struct.* 2016. V. 39. P. 536.
22. *Aliha M.R.M., Gharehbaghi H.* The effect of combined mechanical load welding residual stress on mixed mode fracture parameters of a thin aluminum cracked cylinder // *Eng. Fract. Mech.* 2017. V. 180. P. 213.
23. *Koshima T., Okada H.* Three-dimensional J -integral evaluation for finite strain elastic – plastic solid using the quadratic tetrahedral finite element and automatic meshing methodology // *Eng. Fract. Mech.* 2015. V. 135. P. 34.
24. *Ferro P., Berto F., James N.M.* Asymptotic residual stress distribution induced by multipass welding processes // *Int J Fatigue.* 2017. V. 101. P. 421.
25. *Judt P.O., Ricoeur A., Linek G.* Crack path prediction in rolled aluminium plates with fracture toughness orthotropy and experimental validation // *Eng. Fract. Mech.* 2015. V. 138. P. 33.
26. *Lach R., Grellmann W.* Mixed mode fracture mechanics behavior of PMMA // *Macromol Symp.* 2017. V. 373. № 1. P. 1.
27. *Zhao J., Zhang X.* The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics // *Engn. Fracture Mechanics.* 1995. V. 50. № 1. P. 131.
28. *Wang Y.J., Ru C.Q.* Determination of two key parameters of a cohesive zone model for pipeline steels based on uniaxial stress-strain curve // *Eng. Fract. Mech.* 2016. V. 163. P. 55.
29. *Zhao G.H., Zhao L., Zhang Y.X. et al.* Finite element analysis of dynamic fracture behaviour of drill pipe under various impact loads // *Mechanika.* 2018. V. 24. P. 404.
30. *Chen X., Deng X., Sutton M.A. et al.* An inverse analysis of cohesive zone model parameter values for ductile crack growth simulations // *Int. J. Mech. Sci.* 2014. V. 79. P. 206.

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

УДК 539.4:629.4.028.31(045)

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРУЖЕННОСТИ И РЕСУРСА КОРПУСА АВТОСЦЕПКИ
ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ****© 2020 г. Э. С. Оганьян^{1,*}, В. С. Коссов¹, М. Н. Овечников¹,
Г. М. Волохов¹, А. С. Гасюк¹***¹ Научно-исследовательский и конструкторско-технологический институт подвижного состава,
Московская обл., г. Коломна, Россия***e-mail: vnikti@ptl-kolomna.ru*

Поступила в редакцию 25.03.2019 г.

Принята к публикации 29.05.2020 г.

В настоящей статье описан подход для оценки ресурса автосцепных устройств по критериям деформационной повреждаемости металлоконструкций. По результатам исследований проведен анализ ресурса автосцепного устройства с определением срока безопасной эксплуатации.

Ключевые слова: подвижной состав, автосцепное устройство, прочность, повреждаемость, мало- и многоцикловая усталость, распределение продольных сил, ресурс

DOI: 10.31857/S0235711920050090

Анализ данных по эксплуатации составов в различных климатических регионах России показывает, что нередки случаи разрушения сцепных устройств вагонов и локомотивов, которые сопровождаются потерей связи локомотива с составом, что приводит к возникновению потенциально опасных ситуаций. Особенно это усугубляется в зимний период эксплуатации при отрицательных температурах.

Для обоснования безопасного и эффективного функционирования подвижного состава и инфраструктуры железнодорожного транспорта на всех стадиях жизненного цикла необходима разработка методов расчета и прогнозирования долговечности элементов конструкций железнодорожной техники при регулярном и нерегулярном циклическом нагружении в упругой и упругопластической областях с учетом силовых и деформационных критериев повреждаемости. Решение этой задачи связано с поиском общих закономерностей, описывающих кинетику накопления повреждаемости в металле в условиях, наиболее близких к эксплуатационным. Учитывая, что эксплуатационное нагружение объекта в основном носит случайный характер, возникают вопросы к моделированию такого нагружения и его использования в анализе повреждаемости.

Постановка проблемы. Рост грузооборота железнодорожного транспорта, повышенные скорости маневровых соударений вагонов, увеличение средней по сети и максимальной массы поездов обуславливают более интенсивную нагруженность автосцепных устройств (АС) продольными силами.

Фактические данные об эксплуатационной нагруженности АС являются основой для расчетов долговечности. Нагруженность характеризует статистика появления растягивающих и сжимающих сил различного уровня при разных режимах работы (маневровой, поездной) в виде блока нагрузок. Этот блок формируется действующими в эксплуатации нагрузками на локомотивы и вагоны через их автосцепные устройства [1, 2]. При этом характер нагружения определяется родом работы и условиями эксплуатации подвижного состава (ПС). В связи с этим рассматриваются два режима нагружения.

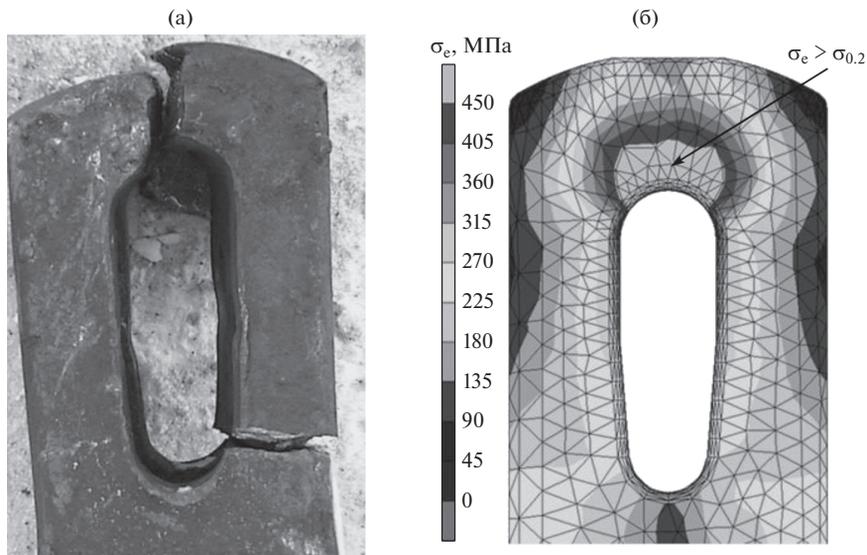


Рис. 1. Перемычка хвостовика автосцепки как критическая зона для оценки ее ресурса: (а) – эксплуатационный вид разрушения хвостовика автосцепки; (б) – конечно-элементная модель хвостовика автосцепки с результатами расчета наиболее напряженной зоны.

а) При маневровой работе с составами: в процессе их формирования на станциях, в том числе на сортировочных горках, а также при переходных режимах движения поезда (трогание, торможение) и на переломах пути с тяжеловесным составом. Возникающие при этом режиме нагружения продольные силы являются максимальными и достигают предельных нормативных значений (нормативный I режим нагружения [1]). Эти нагрузки (от 1.0–1.5 до 2.0–3.0 МН и выше), имеющие малоцикловый характер, вызывают напряжения, близкие или достигающие предела текучести, с возможным появлением и накоплением упругопластических деформаций в металле элементов корпуса АС, способных привести к его разрушению.

б) При вождении составов: в процессе движения поезда, сопровождающегося сжатием и растяжением состава, соударением и рывками в поезде, а также при разгоне и торможении поезда. Работа автосцепных устройств в поездных условиях соответствует III нормативному режиму нагружения [1]. Возникающие при этом силы преимущественно знакопеременного циклического характера с большим количеством относительно малых (на уровне 50–300 кН) сил, способных вызвать усталостное повреждение АС, и редких продольных сил, достигающих 700–1000 кН при переходных режимах движения. Напряжения в автосцепных устройствах при этом находятся в упругой области.

Наиболее частым (до 70%) из числа повреждений АС является разрушение хвостовика автосцепки типа СА-3. Из них более 50% приходится на сечения в зоне отверстия под тяговый клин (рис. 1а).

Распределение продольных сил, действующих на вагон через автосцепные устройства, нормировано [1, 2].

Согласно [3], автосцепка должна обеспечивать восприятие продольной силы растяжения не менее 2000 кН и сжатия 2500 кН. При этом наибольшие расчетные напряжения не должны превышать предела текучести материала.

В соответствии с [4] оценка ресурса детали производится по ее базовому элементу, который выбирается из числа критических. Основой выбора служат эксплуатационные данные повреждений, результаты расчетов.

Расчет напряженно-деформированного состояния. По результатам расчетов напряженно-деформированного состояния (НДС) корпуса автосцепки, выполненных в программном комплексе MSC.MARC методом конечных элементов в физически и геометрически нелинейной постановке, обусловленной упругопластическим поведением металла, большими деформациями и контактным взаимодействием деталей, наиболее нагруженной является зона контакта хвостовика с клином по цилиндрической части отверстия (рис. 1б).

В этой зоне при растяжении автосцепки силой 2 МН напряжения в отдельных элементах достигают предела текучести материала $\sigma_{0.2}$. Высокие напряжения ($\sim 0.8\sigma_{0.2}$) получены также в месте перехода хвостовика к голове автосцепки.

Математические модели для оценки ресурса. Критическим элементом (зоной) в рассматриваемом случае выбрана перемычка хвостовика АС. Расчет ресурса для нее выполнялся с учетом возможности появления и накопления остаточных деформаций в материале.

Такое нагружение описывается деформационными критериями малоциклового усталости в форме уравнений [5–9], характеризующих исчерпание пластических свойств при разрушающем числе циклов нагружения N_p

$$\Delta \varepsilon_p = CN_p^{-m_p}, \quad (1)$$

$$\Delta \varepsilon_p = CN_p^{-m_p} + \frac{2\sigma_{-1}}{E}. \quad (2)$$

В развитие уравнений (1), (2) на основании анализа эксплуатационной нагруженности и условий накопления повреждений в материале несущих деталей экипажной части локомотива [10] до достижения ими предельного состояния предложена модель

$$\Delta \varepsilon_p = CN_p^{-m_p} + \frac{2\sigma_{-1}}{E} \left[1 - \left(\frac{P_Y}{P_{\text{lim}}} \right)^2 \right] - \alpha \left(\frac{N_H}{N_1} \right), \quad (3)$$

где $\Delta \varepsilon_p$ – размах или односторонняя пластическая относительная деформация в цикле нагружения; α – коэффициент, принятый равным 0.5; m_p – показатель диаграммы упрочнения за пределом упругости материала; $C = -0.5 \ln(1 - \psi)$ – эмпирический параметр материала, ψ – относительное сужение в шейке образца при разрыве; σ_{-1} – предел выносливости детали; E – модуль упругости материала; P_Y – нагрузка на пределе текучести материала рассматриваемого элемента детали; P_{lim} – предельная нагрузка для этого же элемента в упругопластической области деформаций; N_H – число малоциклового квазистатических нагрузок (в данном случае – продольных сил в автосцепке); N_1 – число циклов в единичном (годовом) блоке продольных нагрузок на автосцепку.

Из приведенных моделей накопления деформаций (1)–(3) наиболее полно позволяет рассматривать действующие на АС нагрузки в указанных выше режимах эксплуатации ПС модель (3), поскольку в ней учитываются нагрузки разного вида и уровня в упругой и упругопластической области и в различном их сочетании. В этой обобщенной модели

Таблица 1. Расчетные ресурсы корпуса автосцепки при различных сочетаниях вида и уровня действующих на нее нагрузок

Режим нагружения	σ_{-1} , МПа	P_Y , МН	P_{lim} , МН	α	N_H , цикл	$N_1/10^3$, цикл	$\Delta \varepsilon = 0.0020$		$\Delta \varepsilon = 0.0018$	
							$N/10^3$, цикл	T , лет	$N/10^3$, цикл	T , лет
I	40	2.5	4.5	0.5	10	20	410	20.5	535	26.5
	40	2.5	4.5	0.5	6	17.5	450	25.7	600	34.3
III	40	2.5	4.5	0	–	–	570	32.6	780	44.6
	45	2.0	4.5	0	–	–	650	37.1	900	51.4

оценка циклов нагружения до разрушения производится на основе выбора предельной величины остаточной деформации в критическом элементе детали автосцепки. В настоящем исследовании она принималась равной 0.0020 и 0.0018. Результаты выполненных расчетов при некоторых вариантах сочетания вида и величины нагрузок, действующих на АС, представлены в табл. 1. Для заданного годового блока нагрузок [1, 2] расчетный ресурс корпуса автосцепки по отмеченным на рис. 1б зонам может достигать в зависимости от сочетания нагрузок 30–50 лет, что согласуется с данными эксплуатации.

Выводы. 1. Оценка ресурса АС выполнена в численно-аналитической форме на основе конечно-элементного анализа НДС детали с использованием деформационных моделей разрушения. Существенным при этом является анализ НДС исследуемой конструкции и выбор ее критических зон. Они оказываются опасными, если образующиеся локальные зоны высоких уровней напряжений получают развитие и приводят к предельному состоянию. **2.** В расчетах использованы статистические распределения продольных сил, действующих на вагон через АС, принятые в [1, 2]. Блоки этих сил в диапазоне 300–3600 кН охватывают максимальные из возможных в эксплуатации, в том числе при маневровых и горочных операциях (I нормативный режим), а также в поездных условиях (III режим). **3.** Расчеты сил и ресурса АС, выполненные для указанных режимов нагружения, показали, что ресурс АС по ее наиболее нагруженным элементам (хвостовик в зоне отверстия под клин и место перехода от хвостовика к голове) заметно снижается при расчете с учетом сил, отвечающих по величине I режиму, ориентировочно до 20–30 лет (вместо 40–50 лет от сил по III режиму нагружения). **4.** Разработанная для расчета ресурса деталей ПС деформационная модель разрушения (3) позволяет в широком диапазоне варьировать параметры нагружения в зависимости от долей нагрузок I и III режимов в спектре.

Задействованные в оценке теоретические, программные, экспериментальные методы могут существенно различаться. Это зависит от поставленной задачи, полноты исходных данных объекта исследования, эксплуатационных и других факторов. В частности, для повышения достоверности получаемых результатов расчетное распределение нагрузок должно быть максимально приближено к фактическому в эксплуатации.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 33211-2014. Вагоны грузовые. Требования к прочности и динамическим качествам. М.: Стандартинформ, 2016. 54 с.
2. ГОСТ 33788-2016. Вагоны грузовые и пассажирские. Методы испытаний на прочность и динамические качества. М.: Стандартинформ, 2016. 41 с.
3. ГОСТ 33434-2015. Устройство сцепное и автосцепное железнодорожного подвижного состава. Технические требования и правила приемки. М.: Стандартинформ, 2016. 15 с.
4. ГОСТ Р 57445-2017. Железнодорожные технические средства. Общие требования к методам определения ресурса. М.: Стандартинформ, 2017. 26 с.
5. Coffin L.F. A note on low cycle fatigue laws // Journal of Materials. 1971. V. 6. N. 2. P. 388.
6. Manson S.S. Inversion of the strain and strain-stress relationships for use in the metal fatigue analyses // Fatigue of engineering materials and structures. 1979. V. 1. N. 1. P. 37.
7. Пестриков В.М. Механика разрушения / Под ред. В.М. Пестрикова, Е.М. Морозова. СПб. 2012. 552 с.
8. Партон В.З. Механика разрушения: От теории к практике. М.: ЛКИ. 2016. 240 с.
9. Проблемы прочности, техногенной безопасности и конструкционного материаловедения / Под ред. Н.А. Махутова, Ю.Г. Матвиенко, А.Н. Романова. М.: Ленанд, 2018. 720 с.
10. Oganyan E.S., Volokhov G.M., Gasyuk A.S., Fazliakhmetov D.M. Calculated experimental evaluation of the operating life of basic locomotive parts for ensuring their safe operation // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2018. V. 47. Iss. (2). P. 155.

НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАШИНОСТРОЕНИИ

УДК 621.01

**МЕХАНИЗМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С ГРУППОВОЙ
КИНЕМАТИЧЕСКОЙ РАЗВЯЗКОЙ, ОБЕСПЕЧИВАЕМОЙ
МНОГОПОТОЧНОСТЬЮ ПЕРЕДАЧИ ЭНЕРГИИ
В КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ**© 2020 г. К. Б. Саламандра^{1,*}, Л. И. Тывес¹, В. А. Глазунов¹, Е. С. Гебель²¹ *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*² *Омский государственный технический университет, Омск, Россия**e-mail: ksalamandra@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.03.2020 г.

Принята к публикации 29.05.2020 г.

Манипуляционные механизмы параллельной структуры являются многопоточными системами, в которых параллельное размещение кинематических цепей позволяет увеличить нагрузочную способность, уменьшить размер и массу каждого из элементов, разгрузить подвижные звенья от силы тяжести приводов, разместив их на основании. В статье рассмотрен синтез нового механизма параллельной структуры с увеличенным числом параллельных потоков передачи энергии от приводов к выходному звену. Для созданного макета механизма, оснащенного приводами поступательного и вращательного перемещения выходного звена, определены рабочие зоны. Рассмотрен динамический анализ механизма параллельной структуры с тремя кинематическими цепями с учетом масс промежуточных звеньев.

Ключевые слова: многопоточная система, манипулятор, механизм параллельной структуры, синтез механизмов, рабочая зона

DOI: 10.31857/S0235711920050120

Манипуляционные робототехнические системы, использующие в своей основе механизмы параллельной структуры, являются одним из перспективных направлений развития машиностроения [1]. Механизмы параллельной структуры являются примером многопоточной системы. Именно многопоточность, как фундаментальное свойство механизмов данного типа, за счет распределения нагрузки по нескольким параллельным кинематическим цепям позволяет увеличить нагрузочную способность, уменьшить размеры и массу каждого из элементов, получить систему в виде жесткой пространственной фермы [2]. Кроме того, по сравнению с однопоточными манипуляторами с незамкнутыми кинематическими цепями последовательного соединения привода с выходным звеном повышается точность и скорость манипулирования, разгрузка подвижных звеньев манипулятора от силы тяжести приводов за счет их размещения на неподвижном основании [2, 3]. Дополнительным преимуществом манипуляционных механизмов параллельной структуры является однотипная архитектура каждой кинематической цепи, что упрощает технологию изготовления механизма [4].

Примером многопоточной системы является механизм параллельной структуры, представленный на рис. 1, с шестью степенями свободы и тремя кинематическими цепями, в каждой из которых имеется карданный вал с двумя дополнительными связями и вращательными кинематическими парами, обеспечивающие угловые движения выходного звена. Кроме того, в каждой кинематической цепи имеет место два привода, расположенные

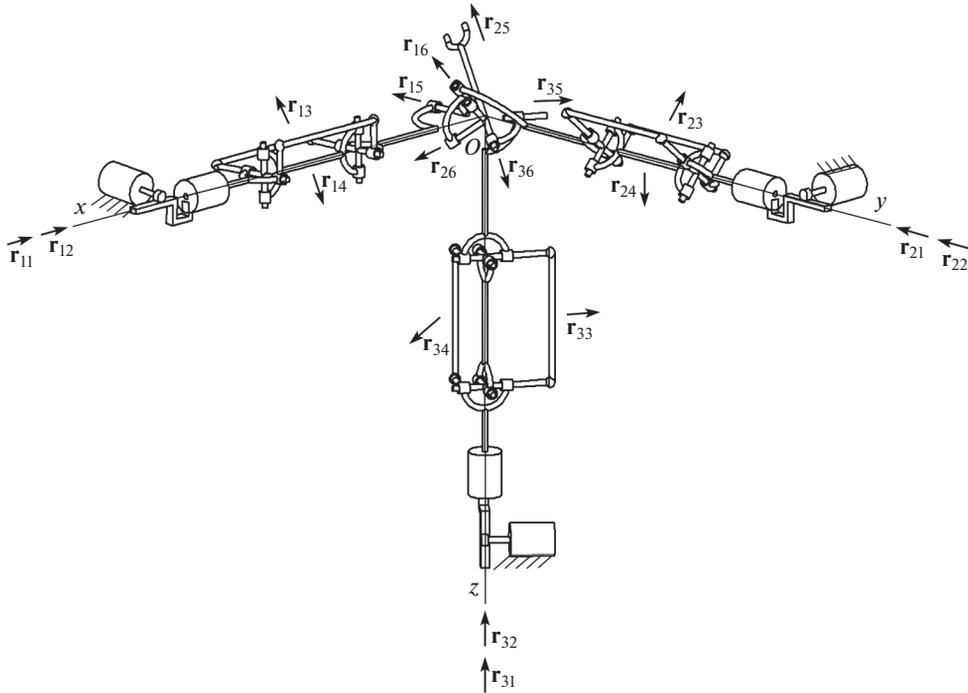


Рис. 1. Кинематическая схема механизма с шестью степенями свободы и тремя кинематическими цепями.

соосно: линейный и вращательный. Основным достоинством механизма является полная групповая кинематическая развязка между положением и ориентацией выходного звена, т.е. кинематические связи между приводами ведущих звеньев, обеспечивающими поступательные перемещения выходного звена, и приводами, обеспечивающими его вращение, отсутствуют. Подобные механизмы исследовались в работах [5–12].

Приводы манипулятора (рис. 1) расположены на основании, уменьшая таким образом инерционность подвижных звеньев, при этом возрастает удельная грузоподъемность механизма [2, 11].

Синтез механизма параллельной структуры с повышенной нагрузочной способностью. Принцип многопоточности, который присущ для рассматриваемого механизма (рис. 1) в целом, имеет место и в каждой кинематической цепи. Речь идет о карданном вале с двумя дополнительными связями, которые в данном случае обеспечивают постоянство взаимной ориентации осей двух шарниров Гука (“крестовин”). На рис. 1 показаны две дополнительные связи, каждая из которых крепится к шарниру Гука через сферические шарниры. Возможные движения обозначены векторами r_{11} , r_{12} , r_{13} , r_{14} , r_{15} , r_{16} , r_{21} , r_{22} , r_{23} , r_{24} , r_{25} , r_{26} , r_{31} , r_{32} , r_{33} , r_{34} , r_{35} , r_{36} . Более подробно представим первую кинематическую цепь. Вращательный и поступательные приводы определяют перемещения в направлении соответственно векторов r_{11} и r_{12} . Векторы r_{13} и r_{14} соответствуют гипотетическим поступательным кинематическим парам, направления движения в которых перпендикулярны осям двух дополнительных связей, соответствующих имеющемуся в данной кинематической цепи карданному валу. Векторы r_{15} и r_{16} соответствуют двум вращательным кинематическим парам, при этом оси вращения пар всех кинематических цепей пересекаются в одной точке O .

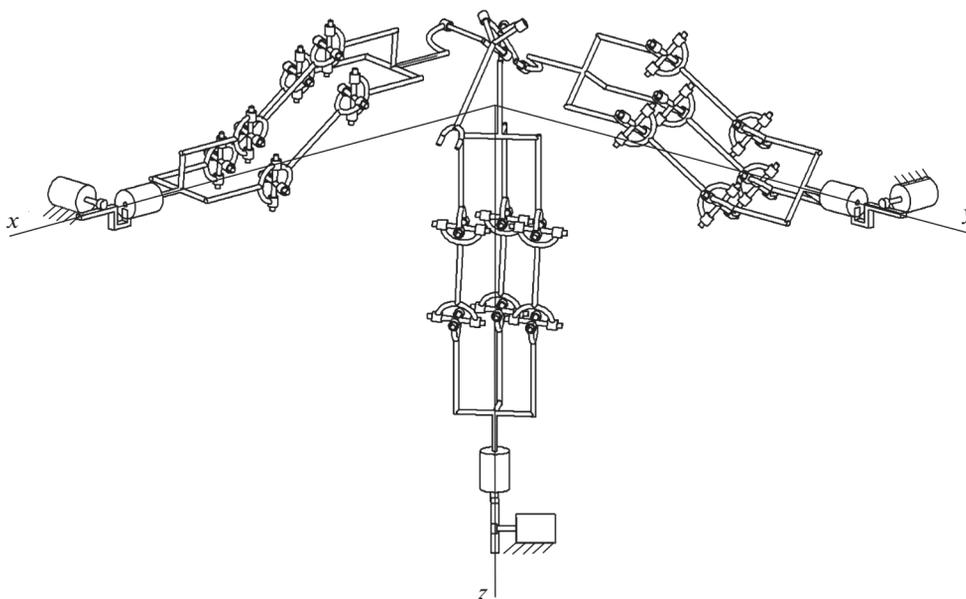


Рис. 2. Механизм с кинематической развязкой между поступательными и вращательными движениями выходного звена с тремя карданными валами в каждой кинематической цепи.

Присутствующий в каждой кинематической цепи карданный вал с двумя дополнительными связями позволяет передать вращение с постоянным передаточным отношением, кроме того, он, в виду наличия дополнительных связей обеспечивает сохранение ориентации выходного звена при его поступательном перемещении.

Увеличение числа параллельных карданных валов в кинематических цепях позволяет повысить нагрузочную способность механизма. В случае, если число карданных шарниров будет равно двум, то это позволит передать вращение от входного вала к выходному, поскольку параллельно расположенные карданные валы и карданные шарниры будут работать согласовано. Однако в данном случае возможно и вращение плоскости второго карданного шарнира относительно плоскости первого карданного шарнира — это происходит вокруг оси, соединяющей центры и карданный шарнир (шарнир Гука). Для того, чтобы исключить вращение и обеспечить постоянство относительной ориентации плоскостей двух карданных шарниров необходимо наличие третьего карданного вала. При этом будет обеспечено постоянство передаточного отношения, равное единице, между входным и выходным валами этого “встроенного” карданного вала.

Таких параллельно расположенных карданных валов теоретически может быть любое количество, большее или равное трем.

На основе рассмотренной структуры кинематических цепей и механизма (рис. 1) синтезирован новый механизм с кинематической развязкой между поступательными и вращательными движениями выходного звена (рис. 2).

Отличие данного механизма заключается в том, что в каждой кинематической цепи имеется не один карданный вал, а три, расположенных параллельно. В исходном механизме (рис. 1) также имели место три стержня, один из которых соответствовал карданному валу, а два были дополнительными связями. При этом стержни имели разные функции, а в данном случае эти функции аналогичны.

Кинематический анализ макета механизма параллельной структуры с шестью степенями свободы и построение рабочих зон. В ИМАШ РАН в соответствии с кинематической

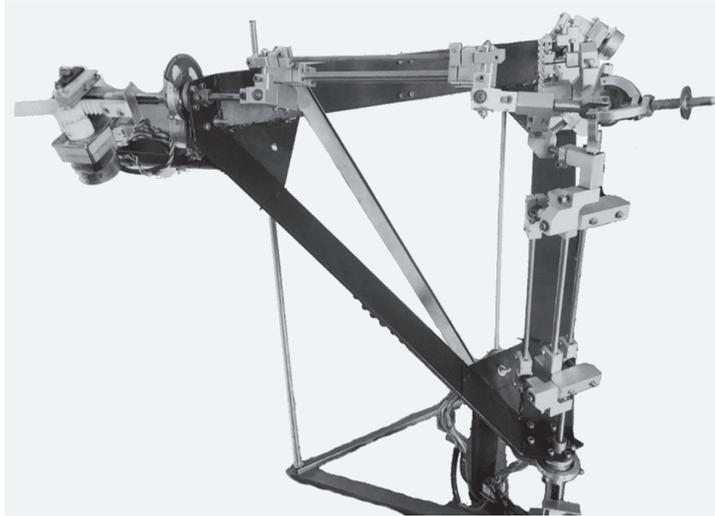


Рис. 3. Макет механизма параллельной структуры с шестью степенями свободы и групповой кинематической развязкой движений.

схемой (рис. 1) был изготовлен макет механизма параллельной структуры, фотография которого представлена на рис. 3.

Макет оснащен шестью приводами, закрепленными на неподвижном основании. Три поступательных привода выполнены в виде электродвигателя, зубчатого колеса и зубчатой рейки. Длины промежуточных звеньев равны 440 мм, допустимый ход зубчатой рейки 120 мм. Каждый из трех вращательных электроприводов также содержит на выходном валу зубчатое колесо, которое находится в зацеплении с круговым сектором. Угол сектора равен 180° , т.е. пределы изменения обобщенных координат механизма от $-\pi/2$ до $\pi/2$.

Конкретные параметры изготовленного образца механизма, обладающего линейными и вращательными двигателями, позволяют рассмотреть кинематические свойства изготовленного макета механизма параллельной структуры и построить рабочие зоны.

Полная групповая кинематическая развязка между положением и ориентацией выходного звена позволяет проводить кинематический анализ последовательно. На первом этапе рассмотрим поступательное перемещение выходного звена, при этом механизм можно представить в упрощенном виде (рис. 4), где расположенные ортогонально линейные двигатели связаны с рабочим органом посредством стержней.

Точки T_i и координаты P_i характеризуют положения зубчатых реек и выходного звена ($i = 1, \dots, 3$). При решении обратной задачи находим координаты P_i точки P , используя соотношения

$$\begin{aligned} (x_P - x_{T1})^2 + y_P^2 + z_P^2 - R^2 &= 0, \\ x_P^2 + (y_P - y_{T2})^2 + z_P^2 - R^2 &= 0, \\ x_P^2 + y_P^2 + (z_P - z_{T3})^2 - R^2 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где R – длины стержней.

Решение системы (1) осуществляется вычитанием из первого и второго уравнений третьего уравнения. Затем две полученные линейные зависимости между переменными

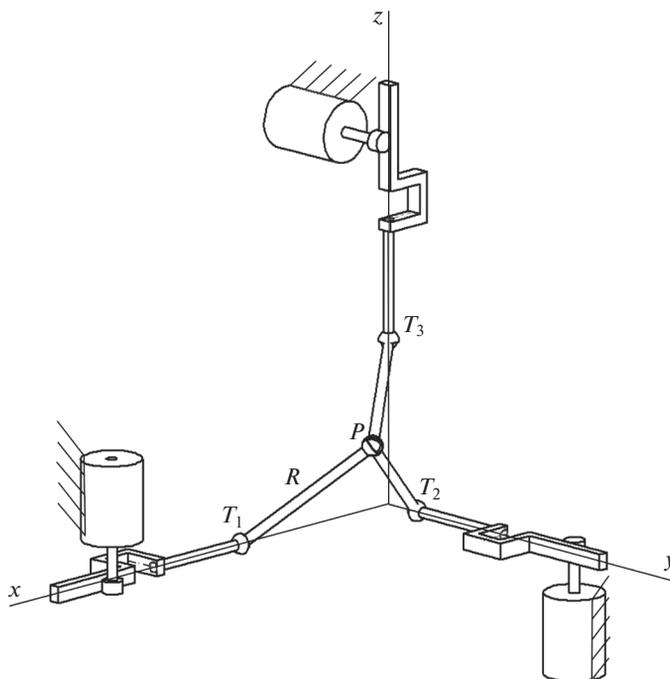


Рис. 4. Упрощенная кинематическая схема для анализа поступательного перемещения выходного звена.

ми подставляются в третье уравнение. Результатом подстановки является квадратное уравнение, решения которого

$$z_P = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

где $A = 4(z_{T3}^2 y_{T2}^2 + z_{T3}^2 x_{T1}^2 + x_{T1}^2 y_{T2}^2)$; $B = 4z_{T3}(x_{T1} y_{T2}^2 - z_{T3}^2 y_{T2}^2 + x_{T1}^2 y_{T2} - z_{T3}^2 x_{T1}^2 - 2x_{T1}^2 y_{T2}^2)$; $C = (x_{T1}^2 + y_{T2}^2)(z_{T3}^4 + x_{T1}^2 y_{T2}^2) - 4R^2 x_{T1}^2 y_{T2}^2$.

Два решения соответствуют двум положениям точки P , однако из соображений технической реализуемости выбираем лишь одно положение. В результате получены следующие соотношения для решения прямой задачи о положениях выходного звена механизма параллельной структуры

$$y_P = \frac{1}{2y_{T2}} (y_{T2}^2 + 2z_P z_{T3} - z_{T3}^2),$$

$$x_P = \frac{1}{2x_{T1}} (x_{T1}^2 + 2z_P z_{T3} - z_{T3}^2).$$

Подставляя допустимые значения обобщенных координат линейных двигателей x_{T1} , y_{T2} , z_{T3} , определяются значения координат x_P , y_P и z_P выходного звена. Таким образом для созданного макета (рис. 3) получена рабочая зона, представленная на рис. 5.

На втором этапе кинематического анализа рассмотрим сферическую часть механизма (рис. 6). Решим обратную задачу о положениях с помощью углов Эйлера.

Положение подвижной системы координат x' , y' , z' , определяющее точку P выходного звена, задано углами Эйлера ψ , θ , ϕ (на рис. 6 не показаны). Тогда проекции точ-

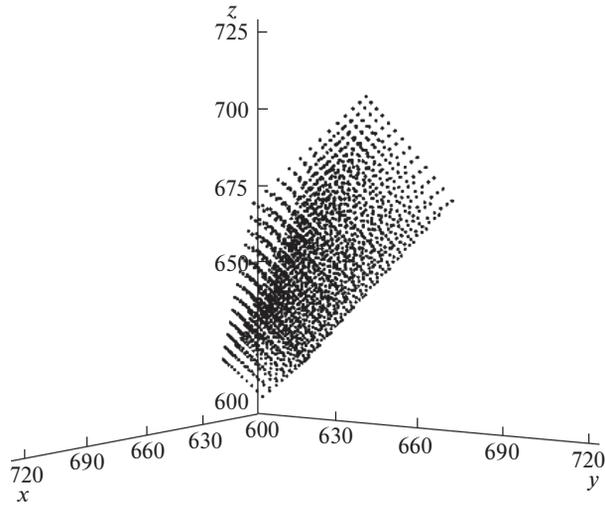


Рис. 5. Рабочая зона поступательного перемещения выходного звена созданного макета.

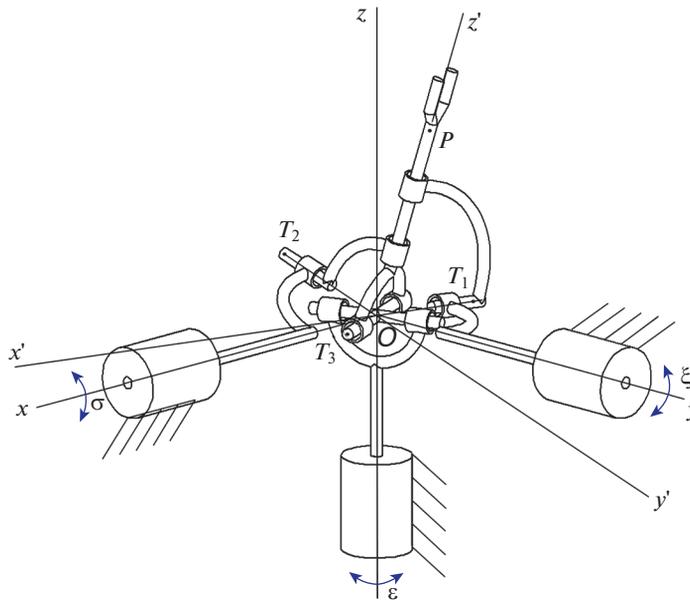


Рис. 6. Упрощенная кинематическая схема механизма вращения выходного звена.

ки P на оси неподвижной системы координат будут: $x_P = \sin \psi \sin \theta$; $y_P = -\cos \psi \sin \theta$; $z_P = \cos \theta$.

Проекции точки T_3 соответственно: $x_{T_3} = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta$; $y_{T_3} = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta$; $z_{T_3} = \sin \varphi \sin \theta$.

Повороты ведущих звеньев механизма (обобщенные координаты) определены углами σ , ξ , ϵ . При этом положительное направление – против часовой стрелки. Точки T_1 и T_2 и T_3 перемещаются по окружности единичного радиуса вокруг начала координат.

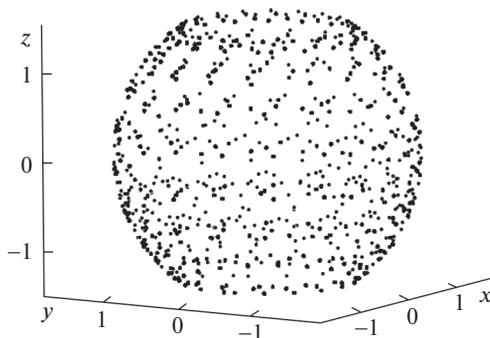


Рис. 7. Рабочая зона вращательного перемещения выходного звена созданного макета.

Поворот плоскости YOZ вокруг оси x на угол σ (рис. 6) позволяет записать соотношение

$$\tan \sigma = \frac{-z_{T2}}{-y_{T2}} = \frac{-y_P}{z_P} = \frac{\cos \psi \sin \theta}{\cos \theta} = \cos \psi \tan \theta.$$

Аналогично, поворот плоскости XOZ вокруг оси y на угол ξ

$$\tan \xi = \frac{z_{T1}}{-x_{T1}} = \frac{x_P}{z_P} = \frac{\sin \psi \sin \theta}{\cos \theta} = \sin \psi \tan \theta.$$

Поворот плоскости XOY вокруг оси z на угол ε

$$\tan \varepsilon = \frac{-y_{T3}}{x_{T3}} = \frac{\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta}{\sin \psi \sin \varphi \cos \theta - \cos \psi \cos \varphi}.$$

Указанные решения обратной задачи о положениях выходного звена можно использовать для построения рабочей зоны с учетом предельных углов поворота во входных кинематических парах механизма параллельной структуры.

Задаем предельные эйлеровы углы ψ , θ , φ , заведомо большие чем те, которые возможны в данном механизме. В пределах изменения этих углов сканируем их с некоторым шагом, и всякий раз решаем задачу о положениях. Если соответствующие обобщенные координаты выходят за пределы допустимых значений, то данная точка отбрасывается. Если значения обобщенных координат находится в пределах допустимых значений, то точка запоминается.

Вид рабочей зоны выходного звена сферического механизма в виде единичной окружности, полученный умножением единичного вектора $\mathbf{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ на матрицу поворота

$$\begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta & \cos \psi \cos \varphi \cos \theta - \sin \psi \sin \varphi & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \varphi & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

представлен на рис. 7.

Динамический анализ механизма параллельной структуры. Исследованию динамики механизмов параллельной структуры посвящены, в частности, работы [13–15]. При этом для динамического анализа предполагается, что массы подвижных звеньев сосредоточены в одной точке – в выходном звене. Такое предположение существенно упрощает математические выкладки, но снижает точность и адекватность получаемых результатов. В настоящей статье динамический анализ механизма параллельной структуры проводится в предположении, что масса каждой из трех кинематических це-

пей равномерно распределена и сосредоточена в трех точках: на выходном звене, в геометрических центрах подвижных стержней и у приводов на неподвижном основании.

Исходя из изложенного, примем массу каждого стержня равной m . В соответствии с принципом возможных перемещений можно составить систему уравнений движения механизма. Ниже, в виду большого числа параметров, приведем уравнение только для проекции на ось x , вид двух оставшихся уравнений аналогичен.

$$3 \frac{m}{6} \ddot{x}_P + \frac{m}{6} \ddot{x}_{T1} \frac{\partial x_{T1}}{\partial x_P} + \frac{2m}{3} \ddot{x}_{C1} \frac{\partial x_{C1}}{\partial x_P} - F_1 \frac{\partial x_{T1}}{\partial x_P} + \frac{m}{6} \ddot{y}_{T2} \frac{\partial y_{T2}}{\partial x_P} + \frac{2m}{3} \ddot{y}_{C2} \frac{\partial y_{C2}}{\partial x_P} + \frac{2m}{3} \ddot{x}_{C2} \frac{\partial x_{C2}}{\partial x_P} - F_2 \frac{\partial y_{T2}}{\partial x_P} + \frac{m}{6} \ddot{z}_{T3} \frac{\partial z_{T3}}{\partial x_P} + \frac{2m}{3} \ddot{z}_{C3} \frac{\partial z_{C3}}{\partial x_P} + \frac{2m}{3} \ddot{x}_{C3} \frac{\partial x_{C3}}{\partial x_P} - F_3 \frac{\partial z_{T3}}{\partial x_P} = 0.$$

Промежуточные звенья представляют собой три параллельно расположенных стержня, которые совершают аналогичные движения. Центр масс каждого стержня расположен в его центре, отсюда, зная координаты точек начала и конца стержня, определяем координаты центров масс $C1, C2, C3$ стержней

$$\begin{aligned} x_{C1} &= x_P + \frac{x_{T1} - x_P}{2} = \frac{x_P + x_{T1}}{2}, & y_{C1} &= \frac{y_P}{2}, & z_{C1} &= \frac{z_P}{2}, \\ x_{C2} &= \frac{x_P}{2}, & y_{C2} &= \frac{y_P + y_{T2}}{2}, & z_{C2} &= \frac{z_P}{2}, \\ x_{C3} &= \frac{x_P}{2}, & y_{C3} &= \frac{y_P}{2}, & z_{C3} &= \frac{z_P + z_{T3}}{2}. \end{aligned}$$

Проекции скоростей и ускорений центров масс стержней определяются дифференцированием координат по времени.

Частные производные (передаточные отношения) $\frac{\partial y_{C2}}{\partial x_P} = \frac{\partial z_{C3}}{\partial x_P} = \frac{\partial x_{C1}}{\partial y_P} = \frac{\partial z_{C3}}{\partial y_P} = \frac{\partial x_{C1}}{\partial z_P} = \frac{\partial y_{C2}}{\partial z_P} = 0$, т.к. их функции не зависят от аргумента. Передаточные отношения $\frac{\partial x_{T1}}{\partial x_P}$,

$\frac{\partial y_{T2}}{\partial x_P}, \frac{\partial z_{T3}}{\partial x_P}, \frac{\partial x_{T1}}{\partial y_P}, \frac{\partial y_{T2}}{\partial y_P}, \frac{\partial z_{T3}}{\partial y_P}$, скорости и ускорения приводов определяются дифференцированием системы уравнений (1) по обобщенным и абсолютным координатам. После алгебраических преобразований и тождественных подстановок система уравнений движения механизма может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \frac{5m}{3} \ddot{x}_P + \frac{m}{6} \frac{x_P}{y_P - y_{T2}} \ddot{y}_P + \frac{m}{6} \frac{x_P}{z_P - z_{T3}} \ddot{z}_P &= F_1 + F_2 \frac{x_P}{y_P - y_{T2}} + F_3 \frac{x_P}{z_P - z_{T3}} - C_1, \\ \frac{m}{6} \frac{y_P}{x_P - x_{T1}} \ddot{x}_P + \frac{5m}{3} \ddot{y}_P + \frac{m}{6} \frac{y_P}{z_P - z_{T3}} \ddot{z}_P &= F_1 \frac{y_P}{x_P - x_{T1}} + F_2 + F_3 \frac{y_P}{z_P - z_{T3}} - C_2, \\ \frac{m}{6} \frac{z_P}{x_P - x_{T1}} \ddot{x}_P + \frac{m}{6} \frac{z_P}{y_P - y_{T2}} \ddot{y}_P + \frac{5m}{3} \ddot{z}_P &= F_1 \frac{z_P}{x_P - x_{T1}} + F_2 \frac{z_P}{y_P - y_{T2}} + F_3 - C_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{m}{6} \left[3 \left(\frac{2(\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 + \dot{z}_P^2) - y_P \dot{y}_P - z_P \dot{z}_P - 2\dot{x}_P}{x_P - x_{T1}} \right) + \right. \\ &+ \left(\frac{2(\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 + \dot{z}_P^2) - x_P \dot{x}_P - z_P \dot{z}_P - 2\dot{y}_P}{y_P - y_{T2}} \right) \frac{x_P}{y_P - y_{T2}} + \\ &\left. + \left(\frac{2(\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 + \dot{z}_P^2) - x_P \dot{x}_P - y_P \dot{y}_P - 2\dot{z}_P}{z_P - z_{T3}} \right) \frac{x_P}{z_P - z_{T3}} \right]; \end{aligned}$$

C_2, C_3 – выражения, аналогичные C_1 .

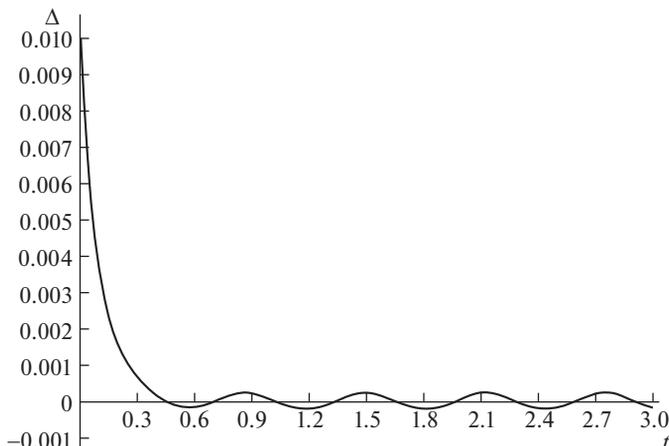


Рис. 8. График изменения ошибки по координате x_p выходного звена.

Таким образом, получена система уравнений для определения сил, действующих в приводах по заданным скоростям и ускорениям выходного звена, которую можно решить с помощью правила Крамера.

При численном моделировании движения данного механизма принимаем следующий подход к управлению этим объектом. Зная положения и скорости в каждой из кинематических цепей, определяем положения и скорости на выходном звене. Сравниваем реальные положения и скорости с требуемыми и умножаем на соответствующие коэффициенты. Реальные ускорения принимаем равными сумме упомянутых невязок, умноженных на указанные коэффициенты.

$$\ddot{x}_p = k_1 (\dot{x}_{p\text{зад}} - \dot{x}_p) + k_2 (x_{p\text{зад}} - x_p),$$

$$\ddot{y}_p = k_1 (\dot{y}_{p\text{зад}} - \dot{y}_p) + k_2 (y_{p\text{зад}} - y_p),$$

$$\ddot{z}_p = k_1 (\dot{z}_{p\text{зад}} - \dot{z}_p) + k_2 (z_{p\text{зад}} - z_p).$$

Здесь $x_{p\text{зад}}$, $y_{p\text{зад}}$, $z_{p\text{зад}}$, $\dot{x}_{p\text{зад}}$, $\dot{y}_{p\text{зад}}$, $\dot{z}_{p\text{зад}}$ – заданные координаты и скорости, изменяющиеся во времени; x_p , y_p , z_p , \dot{x}_p , \dot{y}_p , \dot{z}_p – реальные положения и скорости.

При численном эксперименте были заданы параметры: масса каждого стержня $m = 0.9$ кг, длина стержня $R = 0.4$ м. Для примера приведем результат численного эксперимента, когда требуемый закон изменения координат: $x_{p\text{зад}} = 0.1 + 0.01 \sin \omega t$; $y_{p\text{зад}} = 0.1 + 0.01 \sin \omega t$; $z_{p\text{зад}} = 0.1 + 0.01 \sin \omega t$; $\omega = 10$ рад/сек; $k_1 = 720.2$; $k_2 = 7.202 \times 10^3$. Начальные условия были равны $x_{p0} = 0.11$; $\dot{x}_{p0} = 0$; $y_{p0} = 0.1$; $\dot{y}_{p0} = 0$; $z_{p0} = 0.1$; $\dot{z}_{p0} = 0$.

В результате решения дифференциальных уравнений получен график изменения ошибки положения по координате x_p (рис. 8).

Результаты. Принцип многопоточности является основой построения механизмов параллельной структуры, имеющих несколько кинематических цепей и воспринимающих нагрузку подобно неподвижным пространственным фермам. Такая архитектура позволяет повысить нагрузочную способность и скорость движения звеньев, поскольку все приводы можно разместить на основании, а выходное звено совершает различное движение с несколькими степенями свободы. Однако этот же принцип, примененный в отношении одной из кинематических цепей, позволяет достичь, в частности, кинемати-

ческой развязки, отделив поступательные движения от вращательных. В рассмотренном случае имеет место шесть “потоков”, которые разделены на две группы.

Для созданного макета механизма параллельной структуры с шестью степенями свободы, оснащенного тремя поступательными и тремя вращательными приводами, были построены рабочие зоны.

Решена, ранее не рассмотренная, задача анализа динамических свойств механизма параллельной структуры в предположении, что масса механизма равномерно распределена вдоль подвижных кинематических цепей механизма и сосредоточена в трех точках: на выходном звене, в геометрических центрах подвижных стержней и у приводов на неподвижном основании. Проведено численное моделирование движения механизма по заданному закону управления.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ганиев Р.Ф.* О современном состоянии и перспективах развития ИМАШ РАН. Проблемы механики машин и прорывных технологий // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 3. С. 11.
2. *Крайнев А.Ф.* Идеология конструирования. М.: Машиностроение-1. 2003. 384 с.
3. *Велиев Е.И., Ганиев Р.Ф., Глазунов В.А., Филиппов Г.С., Терехова А.Н.* Разработка и решение задачи о положениях механизма параллельно-последовательной структуры для хирургических операций как альтернатива роботу Da Vinci // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 4. С. 3.
4. *Ганиев Р.Ф., Глазунов В.А.* Манипуляционные механизмы параллельной структуры и их приложения в современной технике // Доклады академии наук. 2014. Т. 459. № 4. С. 428.
5. *Gosselin C.M., Angeles J.* Singularity Analysis of Closed Loop Kinematic Chains // IEEE Trans. on Robotics and Automation. 1990. № 6(3). P. 281.
6. *Merlet J.P.* Parallel Robots // Kluwer Academic Publishers. 2000. 372 p.
7. *Chablat D., Wenger P.* Architecture optimization of a 3-DOF translational parallel mechanism for machining applications, the orthoglide // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2003. V. 19. № 3. P. 403.
8. *Kong X., Gosselin C.* Type Synthesis of Parallel Mechanisms // Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2007. 272 p.
9. *Данилин П.О., Тывес Л.И., Глазунов В.А.* Групповая кинематическая развязка двигателей в механизмах параллельной структуры // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2010. № 3. С. 27.
10. *Хейло С.* Решение задачи кинематики сферического манипулятора параллельной структуры // Машиностроение и инженерное образование. 2010. С. 18.
11. *Glazunov V., Nosova N., Kheylo S., Tsarkov A.* Design and Analysis of the 6-DOF Decoupled Parallel Kinematics Mechanism // Dynamic Decoupling of Robot Manipulators. Mechanisms and Machine Science. 2018. V. 56. Springer, Cham.
12. *Nayak A., Caro S., Wenger P.* Operation modes and workspace of a 4-rRUU Parallel Manipulator // IFToMM World Congress Proc. Mechanisms and Machine Science, 2019. V. 73. P. 649.
13. *Mianowski K.* Dynamically Decoupled Parallel Manipulator With Six Degrees of Freedom for Fast Assembly // Proc. Int. Conf. ISOM'2002. Chemnitz, 2002. P. 274.
14. *Жога В.В., Герасун В.М., Несмиянов И.А., Воробьева Н.С., Дячкин-Титов В.В.* Динамический синтез оптимальных программных движений манипулятора-трипода // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015. № 2. С. 85.
15. *Abo-Shanab R.F.* Dynamic modeling of parallel manipulators based on Lagrange–D’Alembert formulation and Jacobian/Hessian matrices // Multibody Syst. Dyn. 2019.

НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАШИНОСТРОЕНИИ

УДК 621.039

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ВИБРАЦИЙ ТРУБНЫХ СИСТЕМ ПАРОГЕНЕРАТОРОВ
ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ ИХ ВИБРОПРОЧНОСТИ И РЕСУРСА© 2020 г. Т. Н. Фесенко^{1,*}, С. А. Корецкий², Л. И. Шитова¹¹ Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия² Научно-исследовательский и конструкторский институт энерготехники им. Н.А. Доллежалея, Москва, Россия

*e-mail: t-fesenko@yandex.ru

Поступила в редакцию 05.06.2019 г.

Принята к публикации 29.05.2020 г.

Рассмотрена математическая модель вибраций пучка упругих труб в поперечном потоке, которая применима для прогнозирования отклика элементов трубного пучка при воздействии на него вихревого и гидроупругого механизмов возбуждения с учетом промежуточных опор, поставленных с зазорами относительно трубных элементов (наличие зазоров необходимое условие реализации сборки конструкции). При учете соударения труб с промежуточными опорами принята модель косоугольного удара с нормальной и тангенциальной составляющими силы реакции опор. Данная математическая модель реализована в среде программирования Matlab и выполнен расчет параметров вынужденных колебаний (частотный состав, среднеквадратичные значения (СКЗ) виброперемещений и виброускорений) трубной модели парогенератора. Исследованы их зависимости от конструкционных и эксплуатационных характеристик.

Ключевые слова: вынужденные колебания, поперечный поток, гидродинамические силы, промежуточные опоры, контактные нагрузки, среднеквадратическое отклонение, частоты, временные реализации, частотный спектр

DOI: 10.31857/S0235711920050053

Одной причиной отказов парогенераторов, а также различных теплообменных аппаратов является гидродинамически возбуждаемые вибрации теплообменных труб, как следствие, связанные с ними виброизнос в узлах контакта труба – дистанционирующая решетка. Поэтому исследование вибраций труб является неотъемлемой частью проектирования парогенераторов. Полномасштабные экспериментальные исследования трудоемки, поэтому актуальна задача создания математических моделей и программных средств, позволяющих автоматизировать процессы моделирования и анализа гидродинамических возбуждаемых вибраций трубных пучков. В статье на основе представленной математической модели определены функции перемещений, скоростей, ускорений труб и их среднеквадратичные значения и исследованы их зависимости от конструкционных и эксплуатационных параметров. Показана возможность определения и исследования характеристик контактного взаимодействия труб пучка и дистанционирующей решетки (ДР) (пути скольжения в зазоре, нормальные и тангенциальные силы). Данные характеристики являются важными для определения виброизноса труб в местах их контакта с решетками и прогнозирования ресурса трубной системы.

Рассмотрим в общем виде математическую модель вибраций трубных пучков в поперечном потоке.

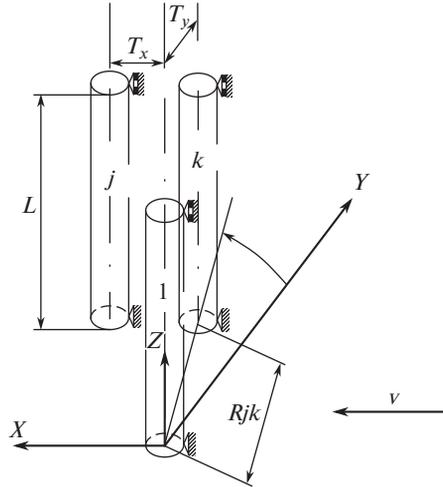


Рис. 1. Расчетная схема.

В практике проектирования парогенераторов существуют многие проблемы, относящиеся к пониманию и моделированию взаимодействия потока и труб, сложности структуры их обтекания, что, в общем, не позволяет получить точных данных как о возбуждающих гидродинамических силах и их распределении, так и о гидродинамическом демпфировании. Математические модели описания нагрузок строятся с учетом накопленных за многие годы исследований экспериментальных и теоретических данных, представленных в литературе [1, 2].

Пучок 1, ..., k, подвергающийся действию поперечного потока, показан на рис. 1. Оси труб параллельны оси Z, центры труб находятся на оси Y, поток параллелен оси X; T_x, T_y – шаг трубных рядов в X и Y направлениях; L – длина трубки; γ_{ij} и R_{ij} полярные координаты центра j-го профиля в i-й системе координат (описывают взаимное расположения трубок, будут использоваться далее для нахождения гидродинамического взаимодействия между трубами). Переменные, связанные с движением труб в направлении X, следующие: изгибная жесткость $E_i J_i$, погонная масса $\rho_i F_i$, коэффициент демпфирования ϵ_i и смещение W_i . Уравнение движения i-й трубы в направлении X будет

$$E_i J_i \frac{\partial^4 W_i}{\partial z^4} + 2\epsilon_i \rho_i F_i \frac{\partial W_i}{\partial t} + \rho_i F_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} = g_i + \sum_{l=1}^N R_{il}^X(t) \delta(z - z_l), \quad i = 1, \dots, k, \quad (1)$$

где R_{il}^X – проекция на ось X реакции упругого ограничителя для i-й трубы, g_i – гидродинамическая сила на единицу длины трубки.

Подобно этому, уравнение движения в направлении Y будет

$$E_i J_i \frac{\partial^4 U_i}{\partial z^4} + 2e_i \rho_i F_i \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho_i F_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = f_i + \sum_{l=1}^N R_{il}^Y(t) \delta(z - z_l), \quad (2)$$

где $E_i J_i, e_i, U_i, f_i$ – есть изгибная жесткость, коэффициент демпфирования, смещение и гидродинамическая сила на единицу длины в направлении Y; R_{il}^Y – проекция на ось Y реакции упругого ограничителя для i-й трубы.

При воздействии поперечного потока на трубы будем учитывать вихревой и гидроупругий механизмы возбуждения, тогда внешние силы, действующие на структурный

элемент, будут включать силу инерции, подъемную силу, силу лобового сопротивления, гидроупругую силу и силу гидродинамического демпфирования

$$g_i = g_i^n + g_i^l + g_i^y + g_i^h, \quad f_i = f_i^n + f_i^l + f_i^y + f_i^h.$$

Одна из основных проблем при расчете отклика трубного ряда на действие поперечного потока состоит в определении этих силовых компонентов. Описание нагрузок принимается с учетом данных работ [2–4]. Следуя этим работам, силы инерции можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} g_i^n &= -M' \left(\sum_{j=1}^k \beta_{ij} \frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^k \alpha'_{ij} \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} \right), \\ f_i^n &= -M' \left(\sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^k \beta'_{ij} \frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где M' – масса жидкости, вытесненная трубой, α_{ij} , β_{ij} – коэффициенты присоединенной массы. Подъемная сила, действующая на i -ю трубу, будет

$$f_i^n = 0.5\rho_1 V^2 d C_y \sin(\omega_s t - \psi_i^n), \quad (4)$$

где ψ_i^n – описывает фазовую зависимость для труб; ρ_1 – плотность жидкости; V – скорость потока; C_y – коэффициент подъемной силы; ω_s – частота вихреобразования, описываемая как

$$\omega_s = 2\pi \text{Sh} V/d. \quad (5)$$

Многочисленные исследования показали, что для пучков труб величина числа Струхала зависит от шага решетки [1].

Сила лобового сопротивления, действующая на трубу

$$g_i^l = 0.5\rho_1 V^2 d C_x [1 + \beta_l \sin(2\omega_s t + \psi_i^l)], \quad (6)$$

где ψ_i^l – фазовый угол; β_l – малая величина; C_x – коэффициент лобового сопротивления.

Смещение трубы из равновесного положения в трубном ряду изменяет поле скоростей жидкости, в результате чего индуцируются добавочные силы жидкости. Эти силы аналитически описал Р.Д. Блевинс в работе [4]. В общем виде их можно записать

$$\begin{aligned} g_i^y &= 0.5\rho_1 V^2 \left(\sum_{j=1}^k \mu'_{ij} U_j + \sum_{j=1}^k \nu'_{ij} W_j \right), \\ f_i^y &= 0.5\rho_1 V^2 \left(\sum_{j=1}^k \nu_{ij} U_j + \sum_{j=1}^k \mu_{ij} W_j \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где μ_{ij} , μ'_{ij} , ν'_{ij} , ν_{ij} – коэффициенты гидроупругих сил, зависящие от взаимного расположения труб.

Гидродинамическое демпфирование, связанное с трубным рядом, подвергающимся действию поперечного потока, можно описать как

$$\begin{aligned} g_i^h &= -\rho_1 V \left(\sum_{j=1}^k \sigma'_{ij} \dot{U}_j + \sum_{j=1}^k \tau'_{ij} \dot{W}_j \right), \\ f_i^h &= -\rho_1 V \left(\sum_{j=1}^k \sigma_{ij} \dot{U}_j + \sum_{j=1}^k \tau_{ij} \dot{W}_j \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где точками сверху обозначено дифференцирование по времени, σ'_{ij} , σ_{ij} , τ'_{ij} , τ_{ij} – коэффициенты гидродинамического демпфирования.

С учетом соотношений (3)–(8), уравнения (1) и (2) примут вид

$$\begin{aligned} E_i J_i \frac{\partial^4 W_i}{\partial z^4} + 2\varepsilon_i \rho_i F_i \frac{\partial W_i}{\partial t} + \rho_i F_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} + M' \left(\sum_{j=1}^k \beta_{ij} \frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^k \alpha'_{ij} \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} \right) - \\ - 0.5\rho_1 V^2 \left(\sum_{j=1}^k \mu'_{ij} U_j + \sum_{j=1}^k v'_{ij} W_j \right) + \rho_1 V \left(\sum_{j=1}^k \sigma'_{ij} \dot{U}_j + \sum_{j=1}^k \tau'_{ij} \dot{W}_j \right) = \end{aligned} \quad (9)$$

$$= 0.5\rho_1 V^2 dC_x [1 + \beta_i \sin(2\omega_s t + \psi_i^n)] + \sum_{l=1}^N R_{il}^X(t) \delta(z - z_l),$$

$$\begin{aligned} E_i J_i \frac{\partial^4 U_i}{\partial z^4} + 2\varepsilon_i \rho_i F_i \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho_i F_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + M' \left(\sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^k \beta'_{ij} \frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2} \right) - \\ - 0.5\rho_1 V^2 \left(\sum_{j=1}^k \mu_{ij} U_j + \sum_{j=1}^k v_{ij} W_j \right) + \rho_1 V \left(\sum_{j=1}^k \sigma_{ij} \dot{U}_j + \sum_{j=1}^k \tau_{ij} \dot{W}_j \right) = \end{aligned} \quad (10)$$

$$= 0.5\rho_1 V^2 dC_y \sin(\omega_s t + \psi_i^{\Pi}) + \sum_{l=1}^N R_{il}^Y(t) \delta(z - z_l).$$

Соотношения (9), (10) являются общими уравнениями движения для трубных пучков, подвергающихся действию поперечного потока. С помощью этих уравнений можно анализировать вибрации и устойчивость различных трубных пучков. Определение коэффициентов гидродинамических связей подробно рассмотрено в [3, 4].

В трубных пучках трубы дистанционируются решетками, поставленными с зазорами. Вибрации системы с конструкционной нелинейностью имеют особенности по сравнению с линейной. Промежуточные опоры в уравнениях колебаний трубных пучков (9), (10) вводятся как импульсные силы через функцию Хевисайда.

Элементы трубного пучка совершают орбитальные движения и модель прямого удара для них не приемлема, поэтому при учете соударения труб с кольцевыми ограничителями принята модель косоуго удар с нормальной и тангенциальной составляющими силы реакции опор [3, 5].

При описании контактного взаимодействия в нормальном направлении диссипация энергии при ударе не учитывается и выражение для нормальных сил принимается в виде

$$R_N^{il}(t) = -C [r_{il}(t) - \delta_{il}] \eta [r_{il}(t) - \delta_{il}], \quad (11)$$

где $r_{il}(t)$ – радиальное перемещение трубы в l -й опоре; δ_{il} – зазор в l -й опоре; $\eta [r_{il}(t) - \delta_{il}]$ – функция Хевисайда; C – жесткость ограничителей, принимаемая порядком 10^5 – 10^6 н/м.

Для расчета тангенциальных сил косоуго удара использована гипотеза сухого трения, т.е. тангенциальная сила связана с нормальной силой и направлена против движения

$$R_{\tau}^{il} = f_t R_N^{il}, \quad (12)$$

где f_t – коэффициент сухого трения принимается равным 0.2 [5, 6].

Полная реакция для i -й трубы в l -й промежуточной опоре определяется геометрическим суммированием сил $\bar{R}_{il} = \bar{R}_N^{il} + \bar{R}_{\tau}^{il}$.

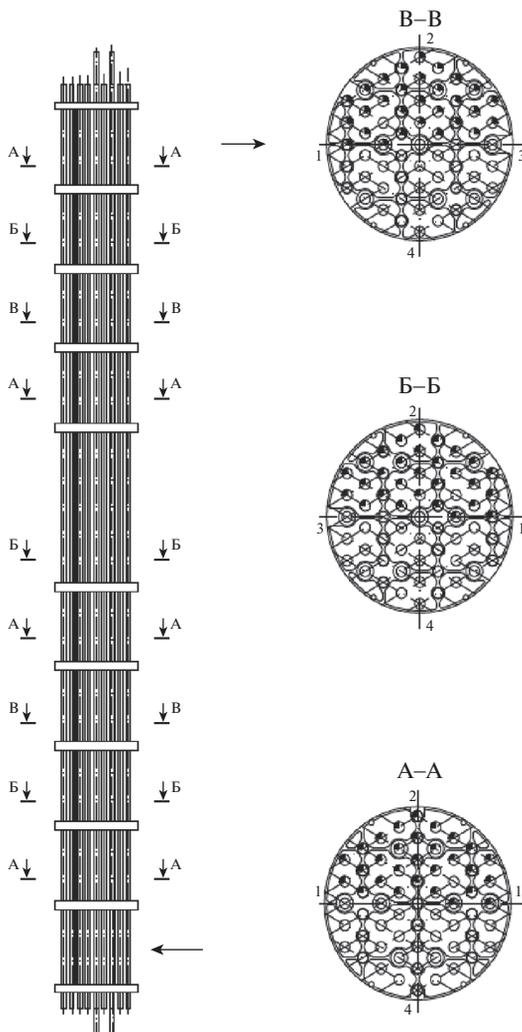


Рис. 2. Общий вид трубного пучка (стрелками на рисунке показаны места подвода и отвода натрия).

Выражения для проекции реакций опор на оси X , Y в уравнениях (9) и (10) принимают вид [6]

$$\begin{aligned} R_{il}^X(t) &= -C[r_{il}(t) - \delta_{il}](\cos \varphi - f_i \sin \varphi) \eta[r_{il}(t) - \delta_{il}], \\ R_{il}^Y(t) &= -C[r_{il}(t) - \delta_{il}](\sin \varphi + f_i \cos \varphi) \eta[r_{il}(t) - \delta_{il}], \end{aligned} \quad (13)$$

где φ – фазовый угол.

При численной реализации задачи интегрирование дифференциальных уравнений (9), (10) проводится с учетом выражения (13). Уравнения (9) и (10) можно записать как одно уравнение в матричном виде

$$[M]\{\ddot{S}\} + [C]\{\dot{S}\} + [K]\{S\} = \{F\}, \quad (14)$$

где $[M]$, $[C]$, $[K]$ – матрицы масс, демпфирования и жесткости соответственно; $\{S\}$, $\{F\}$ – векторы смещения и внешней нагрузки. Матрицы $[M]$, $[C]$, $[K]$ имеют размерность $2k \times 2k$, k – количество трубок.

Для определения динамического отклика трубного ряда необходимо численно решить $2k$ систем дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат. Для решения динамической задачи (14) использовался метод пошагового интегрирования Вильсона, т.к. этот метод можно использовать для произвольной структуры элементов с физическими и геометрическими нелинейностями.

Представленная математическая модель вибраций трубных систем в поперечном потоке жидкости позволяет прогнозировать их амплитудно-частотные характеристики с учетом реального дистанционирования и параметры контактного взаимодействия труб с дистанционирующими решетками (путь и скорость скольжения, контактные силы, траектории движения труб в опоре). Данная математическая модель была применена для исследования трубной модели парогенератора. Исследуемый парогенератор (ПГ) является прямотрубным прямоточным парогенератором. Схема трубного пучка представлена на рис. 2.

При расчете учтено поперечное обтекание в зоне подвода (вход теплоносителя) и в зоне отвода (выход теплоносителя) пучка.

Для дистанционирования труб в пучке используется система из девяти решеток трех типов (рис. 2), а также двух трубных досок. В расчетной модели трубные доски заменены на шарнирное опирание труб. При расчете вибрационных характеристик пучка крайне важны условия дистанционирования труб. Т.к. в ПГ используются разные типы дистанционирующих решеток, необходимо рассмотреть все возможные для данной конструкции варианты дистанционирования труб.

Целью проведенных численных экспериментов было определение для труб пучка: максимальных значений суммарных перемещений; максимальных значений суммарных скоростей; максимальных значений суммарных ускорений; СКЗ от перемещений по оси X ; СКЗ от перемещений по оси Y ; СКЗ от суммарных перемещений; СКЗ от суммарных скоростей; СКЗ от суммарных ускорений; частотный состав отклика.

Проведено исследование данных параметров в зависимости от скорости набегающего потока и величины зазоров в дистанционирующих решетках для характерных типов положения труб в пучке, с учетом разных толщин стенок труб и расположения дистанционирующих решеток.

В исследованиях использовались следующие гипотезы: 1) присутствует существенное взаимодействие лишь между ближайшими трубами пучка. Это свойство близкого действия гидродинамических связей. В используемых на практике больших пучках, обычно, можно выделить систему, состоящую из 4, ..., 7 труб, которые являются ближайшими соседними с k -й трубкой; 2) в поперечном сечении реальных пучков часто имеет место сдвиговая симметрия, т.е. для всех внутренних труб пучка одинакова геометрия соответствующих им типовых ячеек. Эта симметрия может обеспечить аналогичную симметрию в гидродинамических связях. В этом случае все внутренние трубы пучка находятся в одинаковых условиях обтекания и, следовательно, одинакова будет гидродинамическая связь во всех типовых ячейках пучка; 3) для больших пучков с регулярной компоновкой поперечного сечения достаточно проводить исследования вибраций труб на модельном пучке с геометрически подобной типовой ячейкой, состоящем из меньшего числа труб.

Таблица 1.

Нижняя трубная доска	α_{01}	α_{02}	α_{03}	α_{04}	α_{05}	α_{06}	α_{07}	α_{08}	α_{09}	Верхняя трубная доска	Тип
0	0.3			1.1		1.9			2.7	3.0	1
0			0.8				2.2			3.0	2
0		0.6			1.6			2.4		3.0	3
0	0.3	0.6	0.8	1.1	1.6	1.9	2.2	2.4	2.7	3.0	1–3

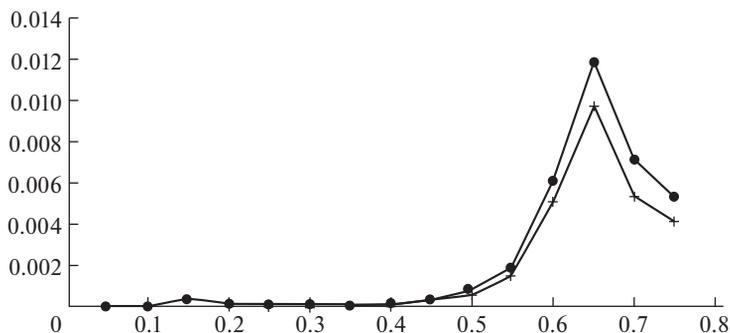


Рис. 3. Зависимость СКЗ ускорений от скорости потока: + – СКЗ от суммарных ускорений, м/с^2 ; • – максимальное значение суммарных ускорений, м/с^2 .

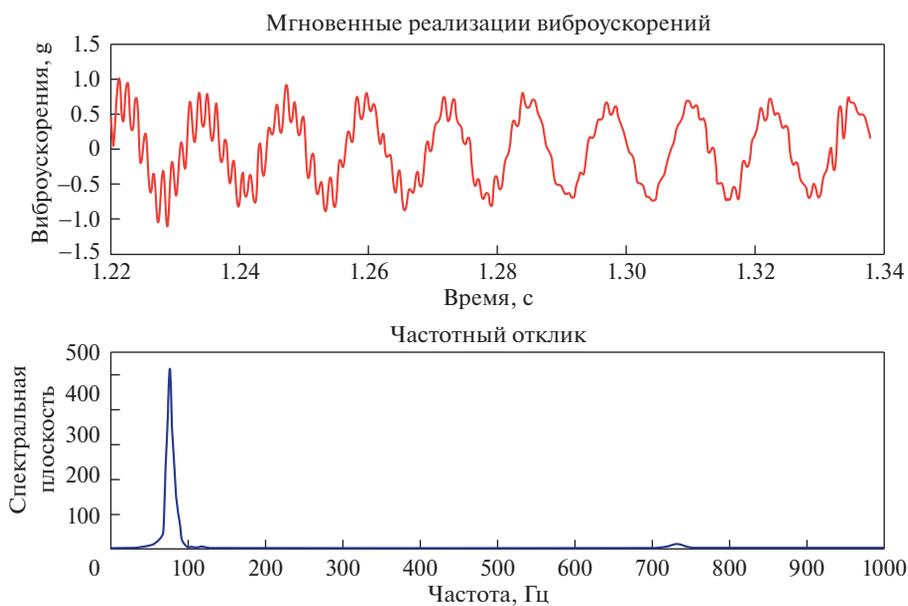


Рис. 4. Временная реализация виброускорений и частотный состав.

Учитывая конструкцию трубных пучков (шахматное расположение труб) ПГ, численные эксперименты проводились для ячеек пучка, включающих в себя семь соседних труб. При этом для полученных результатов сравнение и анализ их проводится только для центральной трубы фрагмента пучка. В табл. 1 приведены данные по расположению промежуточных опор по длине труб. Расчеты проведены для различных вариантов расположения промежуточных опор.

Принятые значения расположения ДР (значения приведены в метрах).

На основании полученных данных были построены графики (рис. 3), иллюстрирующие изменения исследуемых параметров вынужденных колебаний трубы от скорости потока.

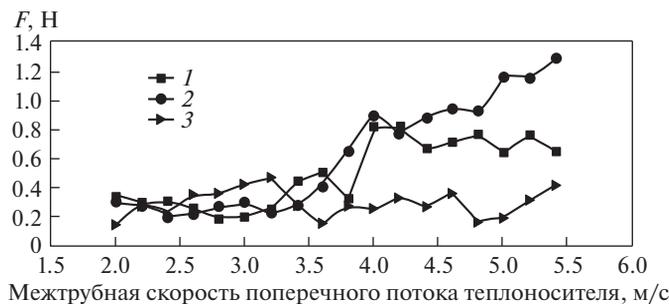


Рис. 5. Зависимости контактных усилий от межтрубных скоростей для трех типов дистанционирования.

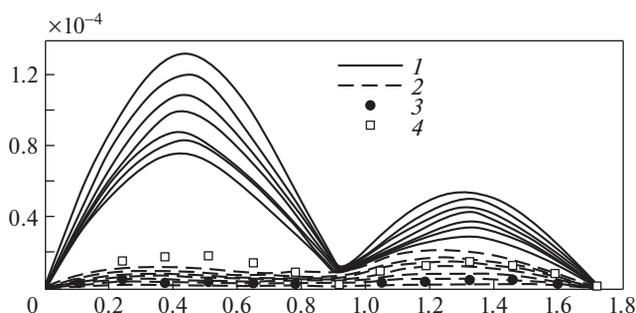


Рис. 6. СКЗ перемещений для различных вариантов расположения опор.

Для центрального сечения первой трубы (первый расчетный номер трубы фрагмента пучка соответствует его центральной трубе) зависимости амплитудных значений ускорения от времени (сверху) и их частотный состав (снизу) представлены в графическом формате на рис. 4.

Реализация нашей математической модели вибраций трубных пучков в потоке теплоносителя позволяет определить параметры динамического контакта (контактные усилия) в сопряжении теплообменной трубы и дистанционирующей решетки. Данные параметры являются определяющими для определения величин виброизноса, используя их и данные по вибрациям труб, можно провести оптимизацию конструктивных параметров ПГ. Как пример, на рис. 5 представлена зависимость контактных усилий для трех типов (табл. 1) расположения опор в зависимости от скорости потока.

Изучению влияния конструктивных параметров (схемы расстановки промежуточных опор и зазоров в них) с целью повышения вибронадежности данного класса систем уделялось большое внимание.

В качестве примера влияние на виброактивность труб пучка схемы расстановки ДР показано на рис. 6. Для труб с расстановкой ДР по типу 2 (табл. 1) введена еще дополнительная опора при $L = 0.64$ м (рис. 6, позиция 3).

Данная математическая модель вибраций трубных пучков позволяет на стадии проектирования теплообменных аппаратов исследовать зависимость данных вибраций их труб от конструктивных параметров (величины зазоров в промежуточных опорах, количество опор и их расстановку по длине труб) и эксплуатационных характеристик (скорость потока теплоносителя). Рис. 6 наглядно показывает, как расстановкой опор

можно существенно снизить виброактивность труб. Проведя достаточное количество численных экспериментов, можно для конкретного пучка подобрать оптимальные конструкционные и эксплуатационные характеристики.

Используя методы многопараметрической оптимизации и получаемые при расчете параметры вибраций и контактных усилий в ДР, можно определить наиболее рациональные конструкционные параметры для парогенераторов, исходя из их вибронадежности.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Махутов Н.А., Каплунов С.М., Прусс Л.В.* Вибрация и долговечность судового энергетического оборудования. Л., Судостроение, 1985. 300 с.
2. *Chen S.S.* A Mathematical model for cross-flow-induced vibration of tube rows. *Trans ASME, J. of Engng. for Industry.* 1977. V. 99. № 2. P. 415.
3. *Fesenko T.N., Fursov V.G.* Forced oscillation of tube bundles in liguid cross-flow. *Vibration problems ICOVP 2005.* P. 205.
4. *Блевинс Р.Д.* Гидроупругие вихревые колебания одиночных рядов и пучков труб // Теоретические основы инженерных расчетов. Сер. Д, 1977. Т. 99. № 3. С. 109.
5. *Фесенко С.С.* Определение силовых параметров взаимодействия трубки с ограничителем. "ВИНИТИ". № 4712-82 Деп.
6. *Каплунов С.М., Фесенко Т.Н., Корецкий С.А.* Нелинейные колебания трубных пучков при поперечном потоке теплоносителя // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 5. С. 3.

**АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ
В МАШИНОСТРОЕНИИ**

УДК 681.5

**МЕТОД ПОИСКА СУБОПТИМАЛЬНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ,
ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕГО ДОПУСТИМЫЕ ПОТЕРИ
В КАЧЕСТВЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА**© 2020 г. Д. С. Соловьев^{1,*}, И. А. Соловьева², Ю. В. Литовка², В. А. Нестеров³¹ Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, Тамбов, Россия² Тамбовский государственный технический университет, Тамбов, Россия³ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия

*e-mail: solovjevdenis@mail.ru

Поступила в редакцию 17.03.2020 г.

Принята к публикации 29.05.2020 г.

Применение найденного управления для многомерных объектов может быть неоптимальным в условиях неопределенности значений входных координат и повлечь за собой недопустимые потери качества технологического процесса. Для решения проблемы предлагается метод поиска субоптимального управления, заключающийся в построении матрицы управления из значений входных координат, управляющих воздействий и критериев управления, расстояние между соседними значениями которых обеспечивает допустимые потери качества процесса. Для снижения объема просматриваемых элементов в матрице на этапе проектирования системы предлагается осуществить их предварительную кластеризацию. На этапе эксплуатации для измеренных значений входных координат осуществляется поиск кластера с ближайшим центром, среди элементов которого по наименьшему расстоянию выбирается вектор из матрицы управления. На примере гальванического хромирования шеек коленчатых валов показана эффективность разработанного метода.

Ключевые слова: субоптимальное управление, неопределенность, система управления, матрица управления, кластеризация, вычислительная сложность

DOI: 10.31857/S0235711920050144

Технический прогресс в машиностроении достигается за счет совершенствования конструкций машин и механизмов, а также производственных процессов их изготовления. Решению проблем совершенствования конструкций различных машин и механизмов посвящены работы [1–7]. Решению проблем совершенствования производственных процессов, направленных на повышение качества получаемой конструкции машины или механизма посредством поиска и реализации оптимального воздействия (управления) для различных технологических процессов их изготовления, посвящены работы [8–13]. Поиск оптимального управления технологическим процессом осуществляется по двум стратегиям. Согласно первой стратегии оптимальное управление находится в режиме реального времени (метод динамического программирования, принцип максимума Понтрягина) – во время протекания технологического процесса при изменении вектора входных координат определяется соответствующая экстремаль. К недостаткам метода динамического программирования, применяемого при решении задач такого класса, относятся значительный объем неиспользуемых вычислений, а также трудность подхода к многомерным объектам управления, поскольку

при большой размерности задачи ее решение ограничивается памятью и быстродействием используемых вычислительных устройств [14–16]. Недостатком принципа максимума Понтрягина является невозможность его использования в задачах, для которых отсутствуют выпуклые свойства гамильтониана [17–19]. Согласно второй стратегии для заданных значений вектора входных координат осуществляется предварительный поиск оптимального управления с использованием адекватных математических моделей технологического процесса. Данная стратегия особенно часто применяется при управлении объектами, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных [20–22], ввиду невозможности решения задач такого типа в режиме реального времени. В свою очередь, последующая реализация полученных результатов на объекте управления затрудняется неопределенностью, обусловленной произвольными значениями вектора входных координат. Применение найденного в последнем случае управления уже не будет оптимальным и может повлечь за собой недопустимые потери качества протекания технологического процесса. Назовем такое управление “субоптимальным”. Поэтому актуальной задачей является разработка эффективного с точки зрения вычислительной сложности метода поиска субоптимального управления для произвольных значений вектора входных координат, использование которого обеспечит допустимые потери качества технологического процесса.

Материалы и методы. Пусть изменение поведения объекта управления на временном интервале $T = \{\tau: \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1\}$ описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = f(\tau, x, u), \\ y = g(\tau, x, u), \end{cases}$$

с начальным условием

$$x(\tau_0) = x_0, \quad (1)$$

где x – вектор входных координат,

$$x = (x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_n(\tau), \dots, x_N(\tau))^T, \quad (2)$$

где y – вектор выходных координат,

$$y = (y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_V(\tau), \dots, y_V(\tau))^T, \quad (3)$$

u – вектор управляющих воздействий,

$$u = (u_1(\tau), u_2(\tau), \dots, u_m(\tau), \dots, u_M(\tau))^T, \quad (4)$$

где f, g – вектор-функции; x_0 – начальное значение вектора (2); N, M, V – количество компонентов векторов (2)–(4).

Тогда постановка всевозможных K задач поиска оптимальных управлений вида

$$J_k[y_k, u_k^*] \rightarrow \text{extr}, \quad (k = 1, 2, \dots, K), \quad (5)$$

для неизвестных начальных условий (1) бессмысленна ввиду бесконечного множества найденных экстремалей (4), хранение которых в вычислительном устройстве системы управления не представляется возможным.

Сведем бесконечное множество значений входных координат (2) к конечному числу

$$x_l \in X, \quad (l = 1, 2, \dots, L), \quad (6)$$

где L – количество значений; X – область изменения (2).

Для выбранных значений (6) L раз решим K задач поиска оптимального управления (5). Из полученных результатов (5), (6) сформируем матрицу управления Ψ_{LH} размерностью L строк и $H = (N + 2K)$ столбцов, каждая строка в которой имеет вид

$$\{x_l, u_l^*, J_l^*[y_l, u_l^*]\}, \quad (7)$$

где u_l^* – набор векторов оптимальных управляющих воздействий, размерностью K компонентов

$$u_l^* = \{u_{l1}^*, u_{l2}^*, \dots, u_{lk}^*, \dots, u_{lK}^*\},$$

$J_l^*[y_l, u_l^*]$ – набор векторов оптимальных значений критериев управления, размерностью K компонентов

$$J_l^*[y_l, u_l^*] = \{J_{l1}^*[y_{l1}, u_{l1}^*], J_{l2}^*[y_{l2}, u_{l2}^*], \dots, J_{lk}^*[y_{lk}, u_{lk}^*], \dots, J_{lK}^*[y_{lK}, u_{lK}^*]\}.$$

Сформированная матрица Ψ_{LH} сохраняется в вычислительном устройстве системы управления. Для вектора измеренных значений входных координат $x^{measured}$ на объекте управления отыскивается l -я строка в Ψ_{LH} , для которой выполняется равенство

$$x_l = x^{measured}. \quad (8)$$

Если l -я строка существует, то на исполнительное устройство системы управления подается k -е управление u_{lk}^* согласно выбранному критерию управления $J_{lk}^*[y_{lk}, u_{lk}^*]$.

Ввиду ограниченности размерности в строках матрицы управления условие (8), в общем случае, не будет выполняться для произвольного вектора входных координат объекта управления. В таком случае предлагается воспользоваться предположением: чем ближе между собой два вектора входных координат объекта управления, тем ближе между собой их наборы векторов оптимальных управляющих воздействий и критериев управления выходными координатами. Формализуем данное предположение если $\|x_l - x^{measured}\| \rightarrow 0$, то $\|u_l^* - u_{x^{measured}}^*\| \rightarrow 0$ и $\|J_l^*[y_l, u_l^*] - J_{x^{measured}}^*[y^{measured}, u_{x^{measured}}^*]\| \rightarrow 0$, где $u_{x^{measured}}^*$, $J_{x^{measured}}^*[y^{measured}, u_{x^{measured}}^*]$ – набор векторов оптимальных управляющих воздействий и значений критериев управления для $x^{measured}$; $y^{measured}$ – вектор измеренных значений выходных координат.

Соответствующие потери в качестве протекания процесса на объекте управления определяются по формуле

$$\delta J_{x^{measured}}^*[y^{measured}, u_{x^{measured}}^*] = \frac{|J_l^*[y_l, u_l^*] - J_{x^{measured}}^*[y^{measured}, u_{x^{measured}}^*]|}{J_l^*[y_l, u_l^*]} \times 100\%.$$

Тогда задачу поиска субоптимального управления с использованием матрицы Ψ_{LH} можно сформулировать следующим образом: найти для измеренного $x^{measured}$ на объекте управления такое x_l , которое обеспечивает

$$l^* = \arg \min_{l=1,2,\dots,L} \rho_l(x_l, x^{measured}) \quad (9)$$

и соответствующее ему $u_{l^*}^*$, для которого выполняется ограничение на потери качества протекания процесса

$$\delta J_{x^{measured}}^*[y^{measured}, u_{l^*}^*] \leq \delta J^s = (\delta J_1^s, \delta J_2^s, \dots, \delta J_K^s), \quad (10)$$

где δJ^s – допустимые потери качества; ρ_l – расстояние между векторами.

С одной стороны, матрица Ψ_{LH} должна содержать большое количество строк для обеспечения требуемой точности управления. С другой стороны, ее размерность должна быть минимальной, что обосновывается, прежде всего, тем, что L раз решение K задач поиска оптимального управления (5) может быть связано со значительным объемом времени. Последнее обстоятельство для произвольного выбора L в (6) не гарантирует наличие в матрице управления строки l^* с компонентом $u_{l^*}^*$, для которой выполняется ограничение (10).

Сформулируем задачу построения матрицы управления. Пусть требуется найти наименьшую размерность L матрицы Ψ_{LH} , а также соответствующие ей значения (7) такие, что $\forall x^{measured}$ использование найденного $u_{l^*}^*$ обеспечит выполнение ограничения (10).

Для решения сформулированной задачи необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1) построить таблицу W оптимальных значений критериев (5) с регулярным, достаточно большим шагом в координатах (6);

2) аппроксимировать каждый рассчитанный оптимальный критерий (5) сильно выпуклой (например, квадратичной) аналитической зависимостью [23–25]

$$J_k^a(x) = c_0 + \sum_{n=1}^N c_{1n} x_n(\tau) + \sum_{n=1}^N c_{2n} x_n^2(\tau) + \prod_{n=1}^N c_{3n} x_n(\tau), \quad (11)$$

где $c_0, c_{11}, \dots, c_{1N}, c_{21}, \dots, c_{2N}, c_{31}, \dots, c_{3N}$ – коэффициенты аппроксимации;

3) определить изолинии для каждой зависимости (11) с соответствующим шагом δJ^s и отыскать значение x_l при перемещении вдоль каждой из изолиний.

Выполнение описанных действий позволит заполнить матрицу управления такими $x_1, x_2, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_L$, расстояние между соседними значениями которых $\rho(x_l, x_{l+1})$ обеспечивает выполнение ограничения (10). В связи с чем ограничение (10) будет также выполняться и $\forall x^{measured}$, находящегося на минимальном расстоянии от x_l^* .

Таким образом, сформулированная задача условной минимизации (9) с ограничением (10) сведется к задаче безусловной минимизации.

Поиск подходящей l^* -й строки в построенной матрице Ψ_{LH} методом полного перебора приведет к снижению эффективности работы системы управления, поэтому рассмотрим эффективный по вычислительной сложности метод поиска субоптимального управления.

Пусть для вектора $x^{measured}$ определено $2N$ границ изменения значений каждого компонента

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{\min} = \min(x_1(\tau)) \leq x_1^{measured}(\tau) \leq x_1^{\max} = \max(x_1(\tau)), \\ \dots \\ x_n^{\min} = \min(x_n(\tau)) \leq x_n^{measured}(\tau) \leq x_n^{\max} = \max(x_n(\tau)), \\ \dots \\ x_N^{\min} = \min(x_N(\tau)) \leq x_N^{measured}(\tau) \leq x_N^{\max} = \max(x_N(\tau)), \end{array} \right. \quad (12)$$

где \min, \max – индексы, соответствующие минимальному и максимальному значению компонента.

Для облегчения поиска информации в матрице управления введем нормализованный вектор \bar{x}_l , соответствующий вектору x_l , компоненты которого рассчитываются согласно (12) как

$$\bar{x}_l = \left(\bar{x}_{l1} = \frac{|x_{l1}(\tau) - x_1^{\min}|}{|x_1^{\max} - x_1^{\min}|}, \dots, \bar{x}_{ln} = \frac{|x_{ln}(\tau) - x_n^{\min}|}{|x_n^{\max} - x_n^{\min}|}, \dots, \bar{x}_{lN} = \frac{|x_{lN}(\tau) - x_N^{\min}|}{|x_N^{\max} - x_N^{\min}|} \right). \quad (13)$$

Нормализуя компоненты измеренного вектора $x^{measured}$, используя формулы, аналогичные (13), получим вектор $\bar{x}^{measured}$. Значения компонентов нормализованных векторов \bar{x}_l и $\bar{x}^{measured}$ находятся в диапазоне [0; 1].

Тогда расстояние ρ_l в (9) для \bar{x}_l и $\bar{x}^{measured}$ можно формализовать согласно различным метрикам с использованием весовых коэффициентов $v_1, \dots, v_n, \dots, v_N$, определяющих важность каждой компоненты с точки зрения ее влияния на соответствующий критерий управления

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N v_n = 1, \\ v_1, \dots, v_n, \dots, v_N > 0. \end{cases}$$

Для уменьшения объема просматриваемых вариантов подходящих \bar{x}_l в Ψ_{LH} предлагается следующая последовательность действий:

1) разбить \bar{x}_l в Ψ_{LH} на Q кластеров согласно выбранному методу кластеризации A – $A: \bar{x}_l \rightarrow q$, с нахождением центров \bar{x}_q ($q = 1, 2, \dots, Q$) $\sum_{p_q} \rho(\bar{x}_l, \bar{x}_q) \rightarrow \min$, где p_q – количество элементов, содержащихся в q кластере;

2) определить среди всех кластеров Q такой кластер q^* , для которого расстояние между его центром и $\bar{x}^{measured}$ минимально

$$q^* = \arg \min_{q=1,2,\dots,Q} \rho_q(\bar{x}_q, \bar{x}^{measured}), \quad (14)$$

3) отыскать решение задачи (9) среди всех \bar{x}_l , которые входят в q^* -й кластер

$$l^* = \arg \min_{l \in q^*} \rho_l(\bar{x}_l, \bar{x}^{measured}). \quad (15)$$

На рис. 1 приводится структурная схема системы субоптимального управления.

Задачи наполнения матрицы Ψ_{LH} значениями $x_1, x_2, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_L$, расстояние $\rho(x_l, x_{l+1})$ между которыми обеспечивает допустимые потери качества протекания процесса, их последующей нормализации и кластеризации решаются только один раз при проектировании системы субоптимального управления. А решение задач поиска кластера q^* , отыскания в нем \bar{x}_{j^*} , ближайшего к $\bar{x}^{measured}$, с соответствующим ему $u_{j^*}^*$ и последующей оценкой $\delta J_{x^{measured}}^*$ позволяет значительно уменьшить количество просматриваемых значений в Ψ_{LH} и осуществляется в процессе эксплуатации системы субоптимального управления.

Экспериментальная часть. Для увеличения износостойкости шеек коленчатых валов применяют гальваническое хромирование их поверхности [26]. Рассмотрим построение системы субоптимального управления гальваническим процессом хромирования коленчатых валов.

Вектор входных координат x содержит количество компонентов $N = 3$, в качестве которых выступают: 1) $x_1(\tau) = S_c$ – площадь поверхности шеек коленчатого вала, дм^2 ;

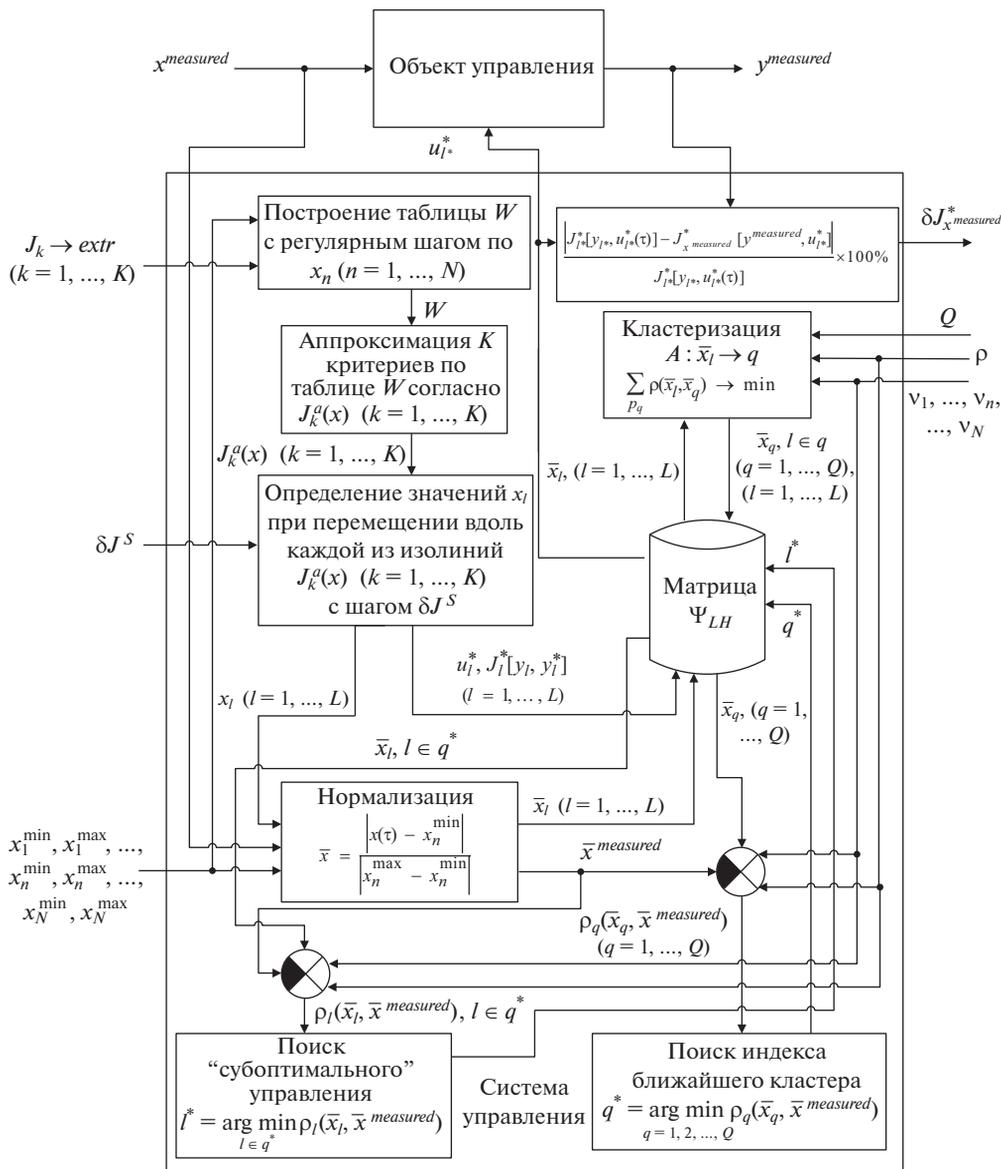


Рис. 1. Структурная схема системы субоптимального управления.

2) $x_2(\tau) = L_{el}$ – уровень электролита в ванне, дм; 3) $x_3(\tau) = C_{CrO_3}$ – концентрация хромового ангидрида в электролите, г/л.

Изменение площади поверхности покрываемой детали (коленчатого вала) обуславливается количеством шатунных шеек, определяемых в зависимости от числа цилиндров, и происходит согласно функции Хевисайда только в начальный момент времени и остается постоянной в течение процесса. Изменение уровня электролита и концентрации хромового ангидрида происходит не только из-за испарения растворителя (воды) и потребления компонентов при электрохимических и химических реакциях во

время протекания процесса, но и за счет выноса электролита на поверхностях обработанных деталей и его разбавления водой, находящейся на поверхности поступающих на обработку деталей.

Определение $\bar{x}_1^{measured}$ осуществляется путем ее деления на элементарные плоскости и фигуры, площади которых рассчитываются отдельно, а затем суммируются, или с использованием встроенного механизма расчета площади детали по ее чертежу при использовании компьютерных систем трехмерного моделирования. Определение $x_2^{measured}$ осуществляется с использованием погружного датчика. Определение $x_3^{measured}$ осуществляется с использованием ареометра, термометра и таблицы концентрации хромового ангидрида.

Для изменения каждого компонента вектора x определено $2N$ границ

$$1) x_1^{\min} = 12.5 \leq x_1(\tau) \leq x_1^{\max} = 21.5 \text{ дм}^2; 2) x_2^{\min} = 4 \leq x_2(\tau) \leq x_2^{\max} = 5 \text{ дм}; 3) x_3^{\min} = 200 \leq x_3(\tau) \leq x_3^{\max} = 250 \text{ г/л}.$$

Износостойкость гальванического хромового покрытия определяется его толщиной. Вектор выходных координат y содержит количество компонентов $V = 1$, в качестве которого выступает $y_1(\tau) = \delta(x_{S_c}, y_{S_c}, z_{S_c}, \tau)$ – толщина хромового покрытия в точке с координатами $(x_{S_c}, y_{S_c}, z_{S_c})$ на поверхности детали в момент τ , мкм.

Определение $y_1^{measured}$ осуществляется с использованием электромагнитного толщиномера покрытий согласно [27].

Оценка распределения толщины гальванического покрытия на поверхности детали осуществляется согласно критерию равномерности.

Постановка $K = 1$ задачи поиска оптимального управления имеет вид

$$J_1[y, u] = \frac{1}{S_c} \int_{S_c} \frac{\delta_{\min}(\tau)}{\delta(x_{S_c}, y_{S_c}, z_{S_c}, \tau)} dS_c \rightarrow \max,$$

где J_1 – критерий равномерности распределения толщины гальванического покрытия на поверхности детали; $\delta_{\min}(\tau)$ – минимальное значение толщины покрытия, мкм.

В качестве управляющих воздействий выбирается реверсирование тока, механизм воздействия на равномерность покрытия заключается в том, что: 1) при обратном (отрицательном) импульсе идет анодное травление металла на больших градиентах тока, т.е. именно там, где произошло большое наращивание при прямом токе; 2) интенсифицируется разрушение концентральной катодной поляризации, что способствует обновлению раствора в прикатодном слое.

Вектор управляющих воздействий u содержит количество компонентов $M = 4$, в качестве которых выступают: 1) $u_1(\tau) = I_c$ – сила тока для катодного полупериода, А; 2) $u_2(\tau) = \tau_c$ – длительность катодного полупериода, с; 3) $u_3(\tau) = I_a$ – сила тока для анодного полупериода, А; 4) $u_4(\tau) = \tau_a$ – длительность анодного полупериода, с.

В работе [28] для решения задачи оптимального управления гальваническим процессом с реверсом тока описывается математическая модель, базирующаяся на уравнениях теоретической электрохимии и математической физики, которая связывает критерий равномерности покрытия и выбранные управляющие воздействия.

Допустимые потери в качестве управления $\delta J_1^s = 10\%$.

Кластеризация осуществляется по методу k -means [29] с использованием расстояния Евклида $\rho_l(\bar{x}_l, \bar{x}^{measured}) = \sqrt{\sum_{n=1}^N v_n (\bar{x}_{ln} - \bar{x}_n^{measured})^2}$.

Весовые коэффициенты имеют значения: $v_1 = 0.65$; $v_2 = 0.25$; $v_3 = 0.1$.

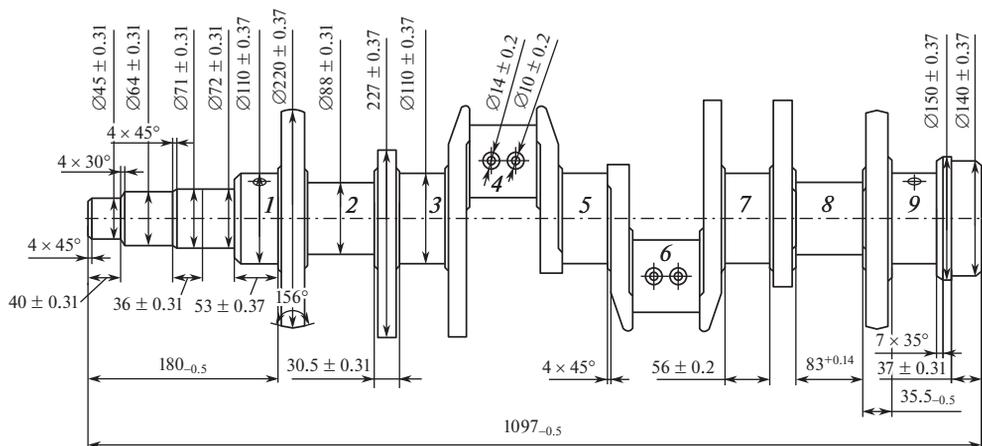


Рис. 2. Чертеж коленчатого вала.

Компоненты вектора $\bar{x}^{measured} = (0.2775; 0.2395; 0.637)$ соответствуют коленчатому валу ЯМЗ-238, чертеж которого представлен на рис. 2, с суммарной площадью 15 дм^2 поверхности шеек 1–9, обрабатываемому в ванне с уровнем электролита 4.23 дм, имеющим концентрацию хромового ангидрида 232 г/л.

Результаты и их обсуждение. При построении матрицы Ψ_{LH} для нее найдены наименьшая размерность $L = 1331$ и элементы $x_1, x_2, \dots, x_l, \dots, x_L$, которые обеспечивают $\forall x^{measured}$ выполнение ограничения на потери качества протекания гальванического процесса не более δJ_1^s .

Известно, что вычислительная сложность алгоритма кластеризации по методу *k-means* составляет $O(N Q it L)$ и имеет линейное время.

На рис. 3 представлены зависимости итераций *it* и объема $N Q it L$ входных данных, определяющие вычислительную сложность алгоритма *k-means*, при изменении количества кластеров $2 \leq Q \leq 200$ ед. для кластеризации найденных элементов матрицы управления.

Максимальное значение вычислительной сложности алгоритма *k-means* для сформированной матрицы управления достигается при количестве кластеров $Q = 60$ и соответствующем ему объеме входных данных $N Q it L = 4048902$ ед.

Поскольку кластеризация выполняется только один раз при проектировании системы, то эффективность в плане быстродействия поиска субоптимального управления в процессе ее (системы) эксплуатации будет полностью обуславливаться вычислительной сложностью алгоритма решения задач (14)–(15), которая определяется согласно $O(N[Q + p_{q^*}])$. Здесь p_{q^*} является максимальным значением из p_q .

На рис. 4 представлены зависимости $N p_{q^*}$ максимального количества элементов и соответствующего объема $N[Q + p_{q^*}]$ входных данных, определяющие вычислительную сложность алгоритма поиска субоптимального управления в процессе эксплуатации системы, при изменении количества кластеров $2 \leq Q \leq 200$ ед. при проектировании системы.

Минимальное значение вычислительной сложности алгоритма поиска субоптимального управления в процессе эксплуатации системы достигается при количестве

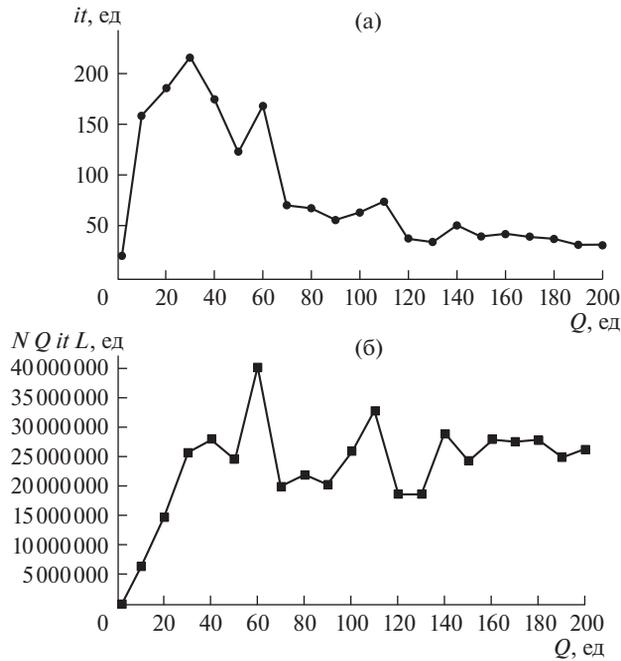


Рис. 3. Зависимости итераций it (а) и объема $NQitL$ входных данных (б), определяющие вычислительную сложность алгоритма k -means для кластеризации элементов матрицы управления.

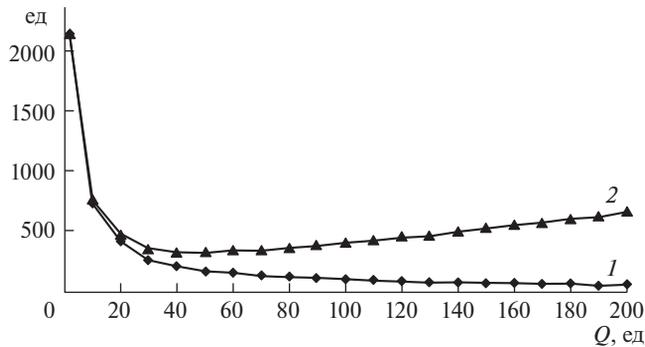


Рис. 4. Зависимости Np_{q^*} (1) и объема $N[Q + p_{q^*}]$ входных данных (2), определяющие вычислительную сложность алгоритма поиска субоптимального управления в процессе эксплуатации системы.

кластеров $Q = 50$, максимальном количестве элементов $p_{q^*} = 57$ и соответствующем им объеме входных данных $N[Q + p_{q^*}] = 321$ ед.

Известно, что вычислительная сложность алгоритма поиска значения в неотсортированном N -мерном массиве из L элементов методом полного перебора составляет $O(NL)$ и имеет линейное время. Тогда для метода полного перебора значение вычислительной сложности пропорционально объему входных данных $NL = 3993$ ед.

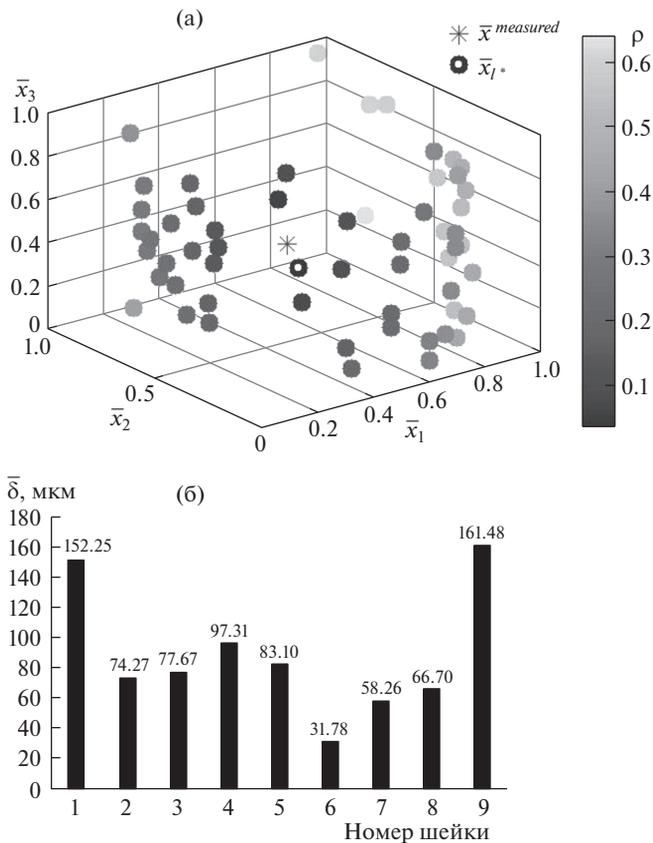


Рис. 5. Графическая интерпретация поиска \bar{x}_{l^*} , ближайшего к $\bar{x}^{measured}$ (а) и средние значения толщины покрытия $\bar{\delta}$ на поверхности S_c шеек 1–9 (б).

Имеем следующее. Для решения задачи поиска субоптимального управления в матрице Ψ_{LH} с использованием однократной кластеризации при проектировании системы и последующим поиском среди элементов кластера с ближайшим центром в процессе эксплуатации системы для рассматриваемого примера позволяет уменьшить объем входных данных на 91.96% по сравнению с методом полного перебора, что при линейном времени работы последнего повлечет за собой существенное повышение эффективности в плане быстродействия. Фактическое же количество секунд работы алгоритма будет полностью обуславливаться архитектурой и основными характеристиками вычислительного устройства системы управления – становится меньше (больше) при переносе на более быстрое (медленное) вычислительное устройство.

При количестве кластеров $Q = 50$ максимальное количество элементов $p_{q^*} = 57$ находится в $q^* = 27$ кластере. Тогда результаты поиска \bar{x}_{l^*} , ближайшего к $\bar{x}^{measured}$, имеют следующую графическую интерпретацию (рис. 5а).

Ближайшим к значению $\bar{x}^{measured}$ является $\bar{x}_{l^*} = (0.285; 0.198; 0.546)$ с индексом $l^* = 392$ в матрице Ψ_{LH} и расстоянием $\rho_{l^*}(\bar{x}_{l^*}, \bar{x}^{measured}) = 0.035989$. Для \bar{x}_{l^*} вектор опти-

мальных управляющих воздействий имеет значение $u_{i*}^* = (1802.3; 300; 1802.3; 25)$, применение которого для $\bar{x}^{measured}$ дает средние значения толщины покрытия $\bar{\delta}$ на поверхности S_c шеек 1–9 (рис. 5б) и обеспечивает потерю в критерии равномерности $\delta J_{x^{measured}}^* = 8.63\%$.

Заключение. Использование алгоритмов с уменьшенной вычислительной сложностью для поиска субоптимального управления позволит снизить стоимость конечного управляющего устройства, а также увеличить эффективность существующего устройства за счет перераспределения освободившихся ресурсов под другие задачи, тем самым снижая его (устройства) энергопотребление или повышая производительность, что в конечном итоге позволит совершенствовать соответствующий технологический процесс изготовления конструкций машин и механизмов.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ганиев Р.Ф. О современном состоянии и перспективах развития ИМАШ РАН. Проблемы механики машин и прорывных технологий // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 3. С. 11.
2. Ганиев Р.Ф., Глазунов В.А. Манипуляционные механизмы параллельной структуры и их приложения в современной технике // Доклады Академии наук. 2014. Т. 459. № 4. С. 428.
3. Ганиев Р.Ф., Ревизников Д.Л., Сухарев Т.Ю., Украинский Л.Е. Оптимизация пространственного расположения рабочих элементов в установках колебательного типа // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 1. С. 3.
4. Ганиев Р.Ф., Ревизников Д.Л., Сухарев Т.Ю., Украинский Л.Е. Профилирование поверхностей рабочих элементов перемешивающих устройств // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 3. С. 3.
5. Антонов А.В., Глазунов В.А., Аleshин А.К., Рашиян Г.В., Лактионова М.М. Кинематический анализ механизма параллельной структуры для работы в агрессивных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 2. С. 3.
6. Fomin A., Ivanov W., Glazunov V. Design and analysis of a mechanism for spherical surface processing // Mechanisms and Machine Science. 2020. V. 78. P. 39.
7. Rashoyan G.V., Aleshin A.K., Antonov A.V., Gavrilina L.V., Glazunov V.A., Skvortsov S.A., Shalyukhin K.A. Analysis and synthesis of parallel structure mechanism without singularities // Journal of Physics: Conference Series. 2019. № 1260(11). P. 112023.
8. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Разреженная обратная связь в линейных системах управления // Автоматика и телемеханика. 2014. № 12. С. 13.
9. Поляк Б.Т., Трмба А.А., Хлебников М.В., Щербаков П.С., Смирнов Г.В. Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // Автоматика и телемеханика. 2015. № 6. С. 18.
10. Поляк Б.Т., Смирнов Г.В. Переходные процессы в матричных дискретных линейных системах // Автоматика и телемеханика. 2019. № 9. С. 112.
11. Горобцов А.С., Статников Р.Б., Солоденков С.В. Задача оптимизации виброизоляции машин с учетом разброса значений параметров // Машиностроение и инженерное образование. 2006. № 4 (9). С. 2.
12. Статников Р.Б., Матусов И.Б. О недопустимых, допустимых и оптимальных решениях в задачах проектирования // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. № 4. С. 10.
13. Statnikov R.B., Gavriushin S.S., Dang M., Statnikov A. Multicriteria design of composite pressure vessels // International Journal of Multicriteria Decision Making. 2014. Т. 4. № 3. С. 252.
14. Ghaviihaa N., Bohlinb M., Wallina F., Dahlquista E. Optimal Control of an EMU Using Dynamic Programming // Energy Procedia. 2015. V. 75. P. 1913.

15. *Пантелеев А.В., Родионова Д.А.* Применение итерационного динамического программирования в задачах синтеза оптимального управления с полной обратной связью // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2016. № 224 (2). С. 5.
16. *Босов А.В., Стефанович А.И.* Управление выходом стохастической дифференциальной системы по квадратичному критерию. II. Численное решение уравнений динамического программирования // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13. № 1. С. 9.
17. *Гамкрелидзе Р.В.* Двойственная формулировка принципа максимума Понтрягина в оптимальном управлении // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 69.
18. *Никольский М.С., Беляевских Е.А.* Принцип максимума Л.С. Понтрягина для некоторых задач оптимального управления пучками траекторий // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. № 1. С. 59.
19. *Сумин М.И.* Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах // Труды института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 279.
20. *Щеглов Б.А.* Частное решение осесимметричной задачи теории пластичности // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. № 1. С. 28.
21. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Макеев Е.В., Сеницын А.В.* Оптимальное подавление колебаний движущегося упругого полотна // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. № 2. С. 261.
22. *Дутов А.В., Литовка Ю.В., Нестеров В.А., Соловьев Д.С., Соловьева И.А., Сыпало К.И.* Поиск оптимального управления токовыми режимами в гальванических процессах со многими анодами при разнообразии номенклатуры обрабатываемых изделий // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2019. № 1. С. 78.
23. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Синтез системы управления на основе аппроксимации множества оптимальных траекторий методом сетевого оператора // Надежность и качество сложных систем. 2014. № 4 (8). С. 3.
24. *Ибрагимов Д.Н.* Аппроксимация множества допустимых управлений в задаче быстродействия линейной дискретной системой // Труды МАИ. 2016. № 87. С. 20.
25. *Dashkovskiy S., Kichmarenko O., Sapozhnikova K.* Approximation of Solutions to the Optimal Control Problems for Systems with Maximum // Journal of Mathematical Sciences. 2019. V. 243. Iss. 2. P. 192.
26. *Албагачиев А.Ю.* Эффективные покрытия деталей машин // Упрочняющие технологии и покрытия. 2012. № 8 (92). С. 18.
27. ГОСТ 9.302-88 Единая система защиты от коррозии и старения. Покрытия металлические и неметаллические неорганические. Методы контроля. М.: ИПК Издательство стандартов, 1990. 40 с.
28. *Соловьев Д.С., Потлов А.Ю., Литовка Ю.В.* Снижение неравномерности распределения толщины гальванического покрытия с использованием отключаемых анодных секций при реверсировании тока // Теоретические основы химической технологии. 2019. Т. 53. № 1. С. 102.
29. *Fahad Sk.* A Modified K-Means Algorithm for Big Data Clustering // International Journal of Computer Science Engineering and Technology. 2016. V. 6. P. 129.

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА,
ДИАГНОСТИКА, ИСПЫТАНИЯ**

УДК 539.375 01;05

**ПРИРОДА ФРАКТАЛЬНОГО РЕЛЬЕФА
РАЗРУШЕННЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ
ПОСЛЕ ДИНАМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ****© 2020 г. Г. Г. Савенков^{1,2,3,*}, В. В. Столяров⁴,
А. В. Кузнецов³, Ю. И. Мещеряков⁵**¹ Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет),
Санкт-Петербург, Россия² Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия³ Машиностроительный завод “Армалит”, Санкт-Петербург, Россия⁴ Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия⁵ Институт проблем машиноведения, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: sav-georgij@yandex.ru

Поступила в редакцию 08.05.2019 г.

Принята к публикации 29.05.2020 г.

Представлены экспериментально-теоретические результаты исследований показывающие, что фрактальность контуров поверхностей разрушенных в результате динамического нагружения образцов объясняется дисперсией скоростей частиц (элементарных носителей деформации) на различных масштабных-структурных уровнях деформирования и разрушения.

Ключевые слова: фрактал, динамическое нагружение, распределение скоростей частиц

DOI: 10.31857/S0235711920050132

Прежде чем говорить о фрактальности рельефа разрушения напомним определение понятия “фрактального объекта”. В соответствии с суженным определением этого понятия, которое предложил Б. Мандельброт, оно звучит так: “фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому”.

То, что рельеф и поверхности разрушения металлических материалов или контур одиночной трещины в некоем образце на мезомасштабном уровне не являются гладкими, а имеют фрактальную структуру, отражающую их самоподобие, в настоящее время не вызывает сомнений. В этом случае характеристикой поверхности излома является фрактальная размерность D_f либо его контура, либо его поверхности. В первом случае $1 < D_f < 2$, во втором — $2 < D_f < 3$. Определение фрактальной размерности позволяет в первую очередь более точно определить истинные механические характеристики материалов. Десятки работ, подтверждающих данное утверждение, увидели свет после первой публикации основоположника фрактальной геометрии Б. Мандельброта с соавторами [1]. Существуют работы, находящиеся в бесспорном меньшинстве, которые ставят под сомнение вышеприведенное утверждение. В первую очередь эти сомнения связаны с отсутствием объяснений причин формирования фрактальной геометрии при разрушении. В некоторых работах предпринимались попытки (не очень успешные) создания моделей разрушения, приводящих к фрактальности поверхностей разрушения металлических материалов при квазистатическом нагружении. Несмотря на то, что существует большое количество публикаций (например, [2]

и ряд других более ранних), в которых приводятся доказательства фрактальности рельефа макротрещин и поверхностей разрушения при динамическом нагружении, в них также не объясняются причины, приводящие к такой геометрии поверхностей разрушения.

Рассмотрим вопросы, связанные с изложением причин, приводящих к структурам разрушения с фрактальной геометрией при динамическом нагружении.

Механизмы динамического деформирования и разрушения. Под динамическими процессами будем понимать процессы деформации и разрушения, происходящие при скоростях деформации $\dot{\epsilon} = 10^3 - 10^6 \text{ с}^{-1}$. Такие скорости реализуются и регистрируются в рамках методик разрезного стержня Гопкинсона (РСГ), плоского соударения пластин со скоростями до 1000 м/с и некоторых других.

В настоящее время, благодаря многочисленным экспериментальным исследованиям, установлено, что при ударном и ударно-волновом нагружении разрушению твердых тел в поле внешних сил предшествует появление некоторой плотности дефектов кристаллического строения (дислокаций, деформационных вакансий и др.). Коллективные движения дефектов на разных структурных уровнях в диапазоне масштабов от нано- до макроуровней являются актами пластической деформации, и процесс разрушения является заключительной стадией пластической деформации (ПД) твердого тела.

Важным фактором при динамическом нагружении твердых тел может являться кривизна кристаллической решетки, которая сильно изменяется при увеличении скорости деформации [3].

При динамическом нагружении материалов ПД осуществляется в виде распространения волнового пластического фронта на нескольких масштабных уровнях, а само динамическое разрушение металлических материалов является сложным, многостадийным, многомасштабным и неоднородным в пространстве и времени процессом. Многостадийность процесса разрушения обусловлена предваряющей ему пластической деформацией (также многостадийной), предразрушением — ослаблением и разрывом межатомных связей (образование зародышевых дефектов) с дальнейшим развитием различного рода микронесплошностей и последующего окончательного разрушения — накопление дефектов и повреждений, их рост и смыкание в магистральную трещину (разрыв тела). Неоднородность динамического деформирования и разрушения обусловлена в первую очередь тем, что практически все значимые конструкционные материалы неоднородны (в зависимости от масштаба измерения) по структуре, фазовому и химическому составу.

Многостадийность связана, прежде всего, с дефектами кристаллического строения металлических материалов, а также и с их структурными неоднородностями на различных масштабных уровнях — от микро- до макроуровня уже изначально существовавшими в материале или образовавшимися в процессе нагружения. Под структурными неоднородностями, возникающими в ходе динамического нагружения, обычно понимают: границы субзерен, двойники, скопления дислокаций, полосы локализованного сдвига, вихревые образования и другие.

На каждом масштабном структурном уровне, так же, как и для квазистатического нагружения, существуют свои элементарные носители динамической деформации (ЭНД) и динамического разрушения. На микроуровне к таким носителям относятся точечные дефекты, дислокации, двойники и т.п. Сложнее обстоит дело с носителями динамического деформирования и разрушения на мезоскопическом масштабном уровне. Для квазистатического деформирования элементарными носителями мезоуровня являются конкретные дефекты кристаллической структуры, такие как скопления дислокаций, полосы локализованного сдвига, мезофрагменты и другие структурные элементы, размером более 0.1 мкм и менее 500 мкм. Поскольку при определенной

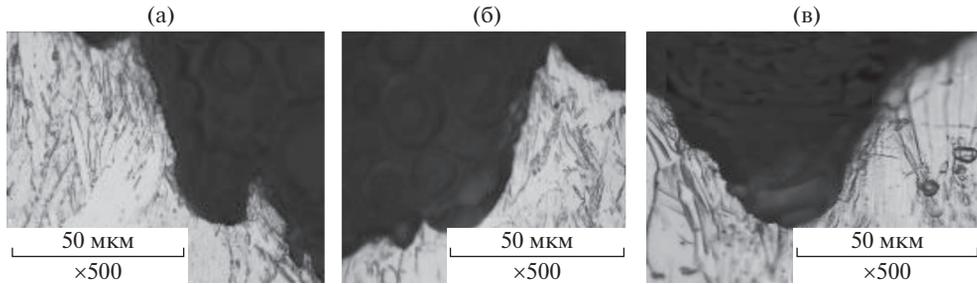


Рис. 1. Структуры титанового сплава 3М в зоне разрушения образцов: (а) – 800 с^{-1} ; (б) – 1100 с^{-1} ; (в) – 1500 с^{-1} .

кривизне кристаллической решетки проявляется структурная турбулентность пластического течения, то она может определять и элементарные носители динамического деформирования [4]. В общем случае динамического деформирования в качестве мезочастиц выступают дислокационные заряды, зерна или даже полевые пространственные структуры. Отличительной особенностью таких структур является их кооперация в мезопотоки. Время жизни подобных структур определяется продолжительностью процесса динамического деформирования, т.е. до тех пор, пока скорости движения частиц среды не равны нулю [5].

Для квазистатического нагружения деформация структурных элементов каждого масштабного уровня обеспечивается элементарными носителями более мелких масштабов, причем трансляция на одном уровне обязательно сопровождается поворотом на более высоком уровне и наоборот. В случае динамического нагружения трансляционные и ротационные кинематические механизмы деформации могут реализоваться на нескольких масштабных уровнях одновременно, но и в этом случае элементарные носители деформации низшего масштабного уровня обеспечивают деформацию более высокого уровня. Известно, что элементарному акту разрушения предшествует появление в субмикроскопических объемах материала некоторой плотности дефектов кристаллического строения. По мере накопления дефектов и их взаимодействия между собой они формируют новую иерархическую последовательность ансамблей мезоскопического уровня. Объединение дефектов мезоскопического уровня приводит к макроразрушению.

В работе [6] установлено, что с ростом скорости деформации $\dot{\epsilon}$ релаксационные свойства структуры не успевают аккомодировать структурные искажения, тем самым, локализуя область критической повреждаемости материалов накануне акта разделения образцов на части. Микроструктурные исследования образцов после испытаний на РСГ показали, что с повышением $\dot{\epsilon}$ от 1300 до 2000 с^{-1} в зоне разрушения образцов стали 08Х18Н10Т последовательность структур изменяется от фрагментов ($50 \times 10 \text{ мкм}$) до каналов деформации в форме полос шириной $15 \pm 5 \text{ мкм}$ и менее 5 мкм . Т.е. при увеличении $\dot{\epsilon}$ характерный размер области, в пределах которой происходят процессы микропластической деформации, уменьшается.

В титановом сплаве 3М с повышением $\dot{\epsilon}$ от 800 до 1500 с^{-1} выявлены цепочки полигонов в форме параллелепипедов размерами $30 \times 50 \text{ мкм}$, структурные объекты полового вида шириной $20 \pm 5 \text{ мкм}$ и каналы деформации шириной до $\sim 13\text{--}15 \text{ мкм}$ (рис. 1). Налицо тот же эффект: уменьшение размеров представительной области с ростом скорости.

Предположительно в бронзе пластическая деформация осуществлялась в виде движения зеренных потоков (рис. 2). Данный механизм приводит к образованию каналов

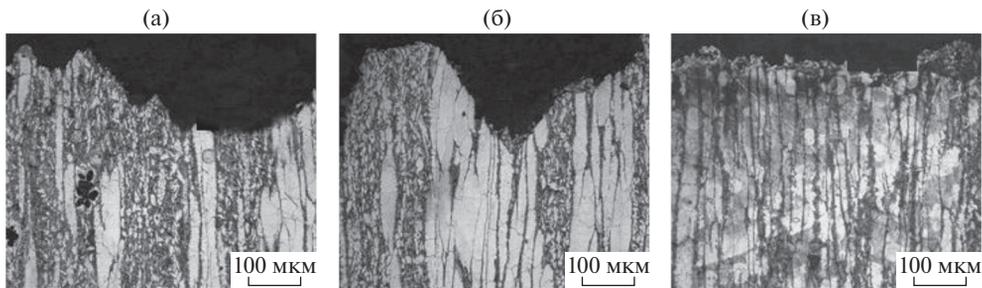


Рис. 2. Структура бронзы в зоне разрушения образцов: (а) – 1150 c^{-1} ; (б) – 1500 c^{-1} ; (в) – 1800 c^{-1} .

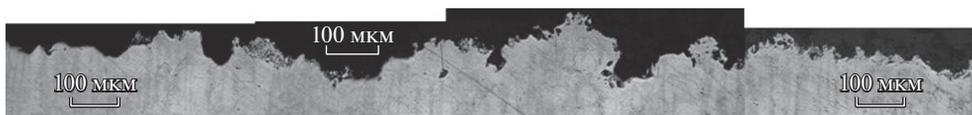


Рис. 3. Поверхность разрушения образца из бронзы БрАЖНМц ($\dot{\epsilon} = 1500 \text{ c}^{-1}$).

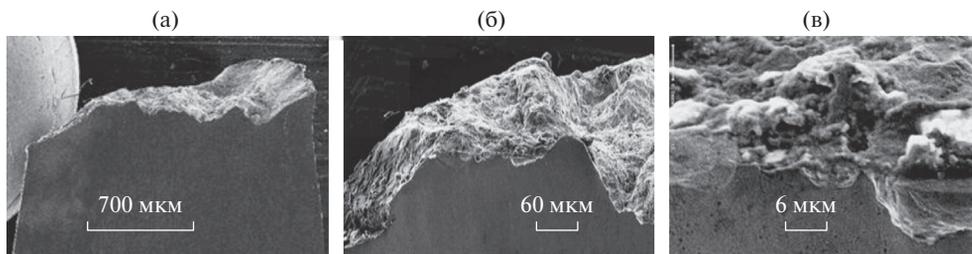


Рис. 4. Поверхность разрушения образца из бронзы БрАЖНМц ($\dot{\epsilon} = 2000 \text{ c}^{-1}$): $\times 25$ (а); $\times 250$ (б); $\times 2500$ (в).

микро-мезопластической деформации, которые на микрофотографиях образцов выглядят в виде полос. Как известно, полосовая структура, характерна для мезоскопического масштабного уровня пластической деформации. Поверхность разрушения для бронзы и титана, в некоторых случаях напоминает регулярные фрактальные структуры, так называемые фигуры (звездочки) Коха [7] (рис. 3), что указывает на несомненную фрактальную геометрию поверхности.

На рис. 4 представлена часть поверхности образца из бронзы при разных увеличениях (именно при разных увеличениях одного и того же участка разрушения методом вертикальных сечений определяется фрактальная размерность [7]).

Для данного участка контура $D_f = 1.18$. По мере увеличения $\dot{\epsilon}$ в пределах $(1.15-1.8) \times 10^3 \text{ c}^{-1}$ ширина каналов микро-мезопластической деформации уменьшалась от (80–200) мкм до (20–30) мкм. Между каналами микро-мезопластической деформации были видны микротрещины различной длины. Такие микродефекты свидетельствуют о скоростной неоднородности движения частиц среды в зоне пластического течения материала образца. Представленные результаты подтверждают концепцию, развиваемую двумя авторами настоящей статьи (Ю.И. Мещеряковым и Г.Г. Савенковым),

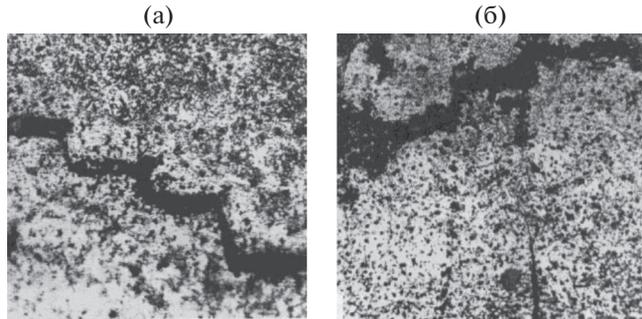


Рис. 5. Контур откольной щели стали 45ХНМФА в виде фрактальной кривой ($\times 100$) при скоростях удара 350 м/с – (а) и 400 м/с – (б).

о том, что в процессе динамического нагружения кроме средней скорости частиц существует и дисперсия распределения этих частиц по скоростям, которая определяется движением соседних участков материала с разными скоростями.

Экспериментальные основания фрактальной природы поверхностей разрушения динамически нагружаемых металлических материалов. В работах ([5, 8] и др.) достоверно теоретически и экспериментально установлено, что движение частиц среды под действием волнового импульса на каждом масштабном уровне обладает скоростной неоднородностью в скоррелированном поле скоростей. Так мезопотоки частиц двигаются с различной скоростью относительно друг друга [5], внутри мезопотоков ЭНД микроскопического уровня – дислокации также двигаются с неким разбросом скоростей относительно друг друга [8]. Кроме того, изменение дислокационной структуры, которое происходит в процессе роста пластической деформации, подчиняется принципу самоподобия, т.е. в процессе эволюции дислокационной структуры сохраняются соотношения между ее параметрами.

Экспериментальные методики, основанные на измерении с помощью лазерного дифференциального интерферометра скорости свободной поверхности динамически нагружаемого плоского образца и позволяющие надежно фиксировать разброс по скоростям частиц различного масштабного уровня, подробно изложены в [5].

Если имеется разброс по скоростям элементарных носителей динамической деформации (ЭНД) на каждом масштабном-структурном уровне, то логично предположить, что деформации (а значит и перемещения) локализованных элементов образца материала будут неодинаковы по сечению образца в момент, когда при достижении неких критических условий, произойдет его разрушение. Такое развитие событий, собственно, и приводит к шероховатой поверхности образца. Такая неодинаковость деформаций и перемещений (или удлинений) существует на каждом масштабном уровне. Если же допустить, что разброс скоростей ЭНД каждого уровня внутри материального элемента среды будет приблизительно одинаков, то в результате с неизбежностью на данном элементе появляется рельеф поверхности с фрактальной геометрией.

Поясним данное положение следующим примером. В работе [5] экспериментально показан укрупненный процесс формирования откольной щели в плоских образцах из стали 45ХНМФА. Если же представить, что каждый поперечный фрагмент состоит из множества более мелких фрагментов, то мы получим контур откольной щели (рис. 5), который описывается в рамках фрактальной геометрии.

Статистический подход к теоретическому обоснованию фрактальной природы поверхности разрушения динамически нагружаемого материала. Известно, что теоретическое описание процесса динамического деформирования невозможно без определяющего

уравнения для ЭНД. Для микроскопического масштабного уровня определяющим является уравнение Орована, записанное в двучленной форме, которое связывает скорость деформации сдвига $\dot{\gamma}$ с плотностью N_m и средней скоростью подвижных дислокаций V_d , а также со скоростью размножения дислокаций \dot{N}

$$\dot{\gamma} = b\dot{N}x + bN_mV_d, \quad (1)$$

где b – вектор Бюргерса; x – средняя длина пробега дислокации.

В случае мезоскопического масштабного уровня, где в качестве ЭНД гипотетически могут выступать дисклинации или диполи частичных дисклинаций, определяющим уравнением для скорости пластической деформации является уравнение Франка, записываемое в виде

$$\dot{\epsilon} = 2an\omega V_D, \quad (2)$$

где $2a$ – длина плеча диполя; n – плотность диполей частичных дисклинаций; ω – вектор Франка; V_D – средняя скорость диполей.

В уравнениях (1), (2) фигурируют средние скорости либо дислокаций, либо диполей частичных дисклинаций. При разбросе скоростей ЭНД на каждом из значимых масштабных уровней уже необходим статистический подход к описанию процессов динамического нагружения. В этом случае вводят функции распределения частиц (ЭНД любого уровня) по скоростям или плотности вероятности [5, 8]. В соответствии с определением функции распределения частиц по скоростям, величина $f(w, V, t)$, означает математическое ожидание числа частиц N в объеме w в момент времени от t до $t + dt$, имеющих скорости в диапазоне от V до $V + dV$. Из условия нормировки следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(w, V, t) dV = N. \quad (3)$$

Уравнение (3) справедливо только для случая однотипных частиц, если имеется несколько типов частиц N_i , каждый из которых характеризуется своей собственной функцией распределения $f_i(\omega, V, t)$, $f_i(\omega, V, t)$, то условия нормировки должны выполняться для каждого типа частиц

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i(\omega, V, t) dV = N_i. \quad (4)$$

Из условия (4) следует, что величина $n_i(\omega, t)$ определяемая выражением

$$\int_{-\infty}^{\infty} dV f(\omega, V, t) = n_i, \quad (5)$$

имеет смысл средней плотности частиц i -го типа. Для характеристики флуктуативных свойств динамически деформируемой среды можно ввести понятие дисперсии скорости частиц [8]

$$D^2 = \int (V - u)^2 f dV, \quad (6)$$

где u – средняя (потокосвая) скорость частиц.

Для ансамбля частиц со случайным характером взаимодействия и с дальнодействием, к которым принадлежат микро- и мезочастицы, поведение функции распределения по скоростям f можно описать кинетическим уравнением Фоккера–Планка [5, 8]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + V \frac{\partial f}{\partial x} + f_1(x) \frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial V} (F_1 f) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial V^2} (F_2 f), \quad (7)$$

где $f_1(x)$ – внешняя сила; F_1 – коэффициент динамического трения (иначе называемого коэффициентом дрейфа) характеризует скорость изменения отклонения скорости частиц $\langle V \rangle$ от их средней скорости u ; F_2 – коэффициент диффузии (перколяции) частиц в пространстве скоростей характеризует скорость изменения дисперсии D .

Левая часть уравнения (7) описывает конвективный перенос плотности вероятности в координатах: время–пространство–пространство скоростей. Правая часть уравнения (7) определяет условия переноса, а именно: первый (дрейфовый) член в правой части характеризует изменение плотности вероятности в пространстве скоростей, а второй – описывает влияние на распределение флуктуаций скорости частиц. Уравнение Фоккера–Планка представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных с переменными коэффициентами и в общем случае не разрешимо. Но в двух случаях решение уравнения (7) возможно для стационарного состояния, когда аргумент не зависит от времени (это случай нас не интересует), и для нестационарного – в автомодельном режиме [9]. Для второго случая функция распределения f зависит только от двух аргументов x , t и выражается через единственную переменную $z = x/l(t)$

$$f(x, t) = l^\beta \psi(z), \tag{8}$$

где функции $l(t)$, $\psi(z)$ и показатель β подлежат определению; $l(t)$ – масштаб измерения величины x , который изменяется со временем. Из условия нормировки функции распределения f показатель степени $\beta = -1$ [9]. Функцию $\psi(z)$ можно определить только при задании скейлинговых свойств силы $f_1(x)$ в виде $f_1(x) = l^\gamma F(z)$, где зависимость $F(z)$ принимается заданной. В этом случае из решения уравнения Фоккера–Планка (7) при условии $l^{-\gamma} \dot{l} = \text{const} \equiv \mu$ (здесь μ – кинематическая вязкость среды) следует [9]

$$l(t) = [\mu(1 - \gamma)t]^{1/(1-\gamma)}. \tag{9}$$

В [9] показано, что функция координаты от времени $x(t)$ является масштабнo-инвариантной фрактальной кривой типа функции Вейерштрасса–Мандельброта. Показатель степени γ в выражении (9) равен

$$\gamma = 1 - D_f. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9) и, учитывая, что μ является функцией дисперсии скоростей ЭНД $\mu = f_2(D) \cong D\Delta h$ (Δh – ширина потока ЭНД (частиц) соответствующего масштабного уровня) [8], получим

$$l(t) = [f_2(D)D_f t]^{1/D_f}. \tag{11}$$

Однако, вследствие того, что переменные x и t имеют различные масштабы измерения, функция $x(t)$ является не самоподобной, а самоаффинной, для которой не все коэффициенты подобия являются одинаковыми. Этим и объясняется определение фрактала, приведенное в начале статьи. Для самоаффинной кривой существуют три значения фрактальной размерности: глобальная, локальная и внутренняя [7]. Внутренняя и определяет длину кривой.

Если мы говорим о контуре излома динамически разрушенного образца (например, контуре откольной щели), то можно достоверно определить фрактальную размерность контура только в пределах диаметра лазерного луча дифференциального интерферометра (75–350 мкм), в пределах которого определена дисперсия скоростей частиц среды. Смещая лазерный луч относительно диаметра образца, мы получаем другое значение дисперсии и, как следствие, другое значение фрактальной размерности. Именно в этом же диапазоне размеров фрактальная размерность достоверна статистически, поскольку рельеф излома, как и любой фотокадр, измерим в диапазоне не более двух порядков [10, 11]. Поэтому можно говорить о фрактальной размерности контура излома, как о некотором среднем значении фрактальных размерностей зон освещенных

щения луча (зон контура рельефа на которых производилось геометрическое определение D_f). Определение фрактальной размерности поверхности разрушения испытанных образцов позволяет более точно определять истинные механические характеристики материалов, в частности, предел прочности и сужение [12].

Выводы. 1. Природа фрактальности контура излома динамически разрушенных образцов заключается в одинаковом распределении скоростей частиц на различных масштабно-структурных уровнях деформирования. При полном совпадении функции распределения скоростей можно ожидать регулярные геометрические фракталы, в других случаях – фрактальные структуры по осторожному определению Б. Мандельброта; **2.** Фрактальная размерность контура излома определяется выбранным масштабом измерения l и дисперсией частиц по скоростям D . **3.** Фрактальная размерность контура излома является средним значением фрактальных размерностей участков контура, в пределах которых происходит определение дисперсии скоростей частиц.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности НИЯУ МИФИ (договор № 02.а03.21.0005).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mandelbrot B.B., Passoja D.E., Paullay A.J. Fractal character of fracture surfaces of metals // Nature. 1984. V. 308. N. 5961. P. 721.
2. Брагов А.М., Константинов А.Ю., Кузнецов А.В., Ломунов А.К., Савенков Г.Г. Взаимосвязь скорости трещины и фрактальной размерности с динамической трещиностойкостью материала // Прикладная механика и техническая физика. 2018. № 1. С. 153.
3. Panin V.E., Egorushkin V.E., Surikova N.S., Pochivalov Yu.I. Shear-bands as translation-rotation modes of plastic deformation in sods under alternate bending // Materials Science and Engineering: A. 2017. V. 703. P. 451.
4. Панин В.Е., Егорушкин В.Е., Кузнецов П.В., Гальченко Н.К., Шугуров А.Р., Власов И.В., Дерюгин Е.Е. Структурная турбулентность пластического течения и вязкого разрушения низколегированной стали в условиях кривизны кристаллической решетки // Физическая мезомеханика. 2019. Т. 22. № 4. С. 16.
5. Мещеряков Ю.И. Многомасштабные ударно-волновые процессы в твердых телах. СПб.: Нестор-История, 2018. 480 с.
6. Савенков Г.Г., Кузнецов А.В., Брагов А.М. и др. Структурно-геометрические переходы при нагружении // Вестник ПНИПУ. Механика. 2016. № 3. С. 164.
7. Федер Е. Фракталы. М.: Ленанд, 2014. 256 с.
8. Мещеряков Ю.И. Кинетика высокоскоростного деформирования и формирование мезоуровня // Физическая механика. Вып. 9. Сильно неравновесные процессы в механике неоднородных сред. СПб.: Изд-во ВВМ. 2018. С. 133.
9. Олемской А.И. Теория стохастических систем с мультипликативным шумом // Успехи физических наук. 1998. Т. 168. № 3. С. 287.
10. Кудря А.В., Соколовская Э.А., Арсенкин А.М. Эффективность применения средств наблюдения различной размерности для анализа морфологии излома улучшаемых сталей // Деформация и разрушение материалов. 2010. № 1. С. 38.
11. Штремель М.А. Разрушение. Книга 1. Разрушение материала. М.: Издательский Дом МИСиС, 2014. 670 с.
12. Hilders O.A., Zambrano N., Caballero R. Microstructure, Strength, and fracture Topography in AISI 316L Stainless Steel, as Seen through a Fractal Approach and the Hall-Petch Law // International Journal of Metals. 2015. V. 2015. P. 1.

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА,
ДИАГНОСТИКА, ИСПЫТАНИЯ**

УДК 539.4:678.067

**ОЦЕНКА КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ЗАХВАТОВ
ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ОБРАЗЦОВ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ**© 2020 г. А. Н. Полилов^{1,*}, Н. А. Татусь¹¹ *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия***e-mail: polilovan@mail.ru*

Поступила в редакцию 23.03.2020 г.

Принята к публикации 29.05.2020 г.

Статья посвящена проблеме обоснования корректности испытаний на прочность при растяжении плоских образцов из стекло-, углепластиков. Любой способ закрепления образца вызывает концентрацию напряжений и отрицательно влияет на прочность, и в статье даны количественные оценки этого эффекта. На основе упрощенного уравнения сдвигового анализа рассчитаны распределения напряжений в образцах при различных способах моделирования эпюры касательных напряжений, приложенных со стороны захватов. Преимущество аналитического решения состоит в том, что удастся наглядно описать влияние на реализацию прочности: длины захватов и рабочей части, и, особенно, толщины образцов. Подобный масштабный эффект часто объясняют с позиции статистической теории прочности, но приведенный анализ показывает, что наблюдаемое снижение прочности с ростом толщины образца можно объяснить эффектом неоднородности поля напряжений вблизи захватов. Проявление этого краевого эффекта типа Сен-Венана особенно заметно у полимерных композитов, имеющих низкое (по сравнению с металлами) отношение межслойного модуля сдвига к продольному модулю Юнга.

Ключевые слова: волокнистый композит с полимерной матрицей, однонаправленный угле-, стеклопластик, испытание на растяжение, теоретический коэффициент концентрации напряжений, концентрация напряжений около захватов, коэффициент снижения прочности, эффективный коэффициент концентрации напряжений, краевой эффект Сен-Венана, масштабный эффект прочности

DOI: 10.31857/S0235711920050107

Методы испытания однонаправленных композитов на растяжения потребовали многолетней отработки и стандартизации [1, 2]. Ни сверление, ни создание галтелей для подобных материалов недопустимы: при нагружении возникнут расщепления вдоль волокон [2, 3]. Поэтому стандартизованы испытания гладких прямоугольных образцов, для которых необходимо оценить влияние на прочность концентрации напряжений, и этой задаче посвящена настоящая статья.

Известно, что наилучшие результаты дает применение волокнистых композитов (стекло-, угле-, органопластиков) в тех деталях, в которых удастся расположить волокна вдоль направлений главных напряжений [4–6]. Простейшими, но и наиболее удачными объектами применения почти однонаправленных композитов оказываются одномерно нагруженные изделия [7]. К ним можно отнести: стержни арматуры, шест для прыжков, лук, листовую рессору, лыжи и лыжные палки, складные телескопические удилища из углепластика, пултрузионные профили. Большой эффект дает оптимальное армирование цилиндрических сосудов давления, в которых основную нагруз-

ку несут равнонапряженные армирующие волокна. Но как только геометрия детали или узла крепления становится более сложной, возникает концентрация напряжений и сложное (неодноосное) напряженное состояние, и традиционное прямолинейное армирование перестает быть эффективным [7–9]. В то же время, рекламные свойства полимерных композитов относят именно к однонаправленному армированию, на примере которого обосновывают преимущества композитов по удельным характеристикам (прочности и модулю упругости, отнесенным к удельному весу) в сравнении с традиционными стальными, алюминиевыми, титановыми сплавами.

Сложность создания узлов крепления в композитах из тканей или однонаправленных препрегов зачастую сводит на нет все преимущества композитов. Наряду с проблемой возникновения трудно обнаруживаемых дефектов типа расслоений и расщеплений [10, 11] проблемы создания узлов крепления без заметного снижения реализации прочности волокон оказываются основным сдерживающим фактором для расширения областей и эффективности применения композитов [12]. Таким образом, проектирование узлов крепления композитных деталей, наряду с совершенствованием методов расчета, оказывается не только фундаментальной, но и крайне важной прикладной проблемой технологической механики композитов [13, 14].

Традиционное сверление под заклепки или болты вызывает разрушение волокон и концентрацию напряжений [15], что приводит к снижению реализации прочности примерно в два раза. При уменьшении диаметра крепежных элементов, при использовании “игл”, “гвоздей” или прошивки проволокой эффективность соединения растёт, особенно если эти “гвозди” вводятся в соединение до полимеризации композита, и они раздвигают, а не разрывают волокна. Но подобные технологии недостаточно отработаны и пока не применяются в промышленных масштабах.

Клеевые соединения [16] по мере создания очень прочных и быстро твердеющих клеев казались предпочтительными, но в отличие от металлов у полимерных композитов проявляется отрицательный эффект низких межслойных прочности и модуля сдвига. Ситуация напоминает попытку разорвать книгу, прочно приклеив захваты к обложке. Передать нагрузку с обложки на все страницы не удастся. Эффект Сен-Венана и размер зоны краевого эффекта зависят от отношения межслойного модуля сдвига к продольному модулю Юнга [17]. Для стекло-углепластиков это отношение намного ниже, чем для стали, и поэтому в зоне клеевого соединения возникает значительная концентрация напряжений в крайних слоях, затрудняющая эффективную передачу усилий на все сечение детали.

Основной вывод, следующий из малоудачных попыток перенести на композиты многолетний опыт работы с металлами, состоит в том, что надо идти другим путем. “Think composites”, как призывал известный ученый С. Цай (S. Tsai) – “думай композитами”. И наилучшим советчиком в области композитного проектирования могла бы стать живая Природа, за миллионы лет отбора реализовавшая принципы создания прочных, анизотропных материалов. Соединение ветви или корневой системы со стволом отличается от придуманных человечеством мест крепления (гвозди, шурупы, клей, “шип-паз”) тем, что природное соединение прочнее основного материала. Ветку можно сломать, но нельзя оторвать от ствола. Вот подобные биологические (bio-inspired – “навеянные Природой”) решения [18] являются наиболее перспективным и важным направлением в механике композитов. Немного перефразируя классиков (Бернарда Шоу, А.П. Чехова) можно сказать: “чем дольше я занимаюсь композитами, тем больше люблю древесину”.

Идея создания крепления, напоминающего сучок, долго носилась в воздухе. Развитие методов компьютерного моделирования (аналитические решения подобных задач неизвестны) привело к появлению большого числа работ, связанных с построением оптимальных траекторий волокон, обтекающих отверстие [19].

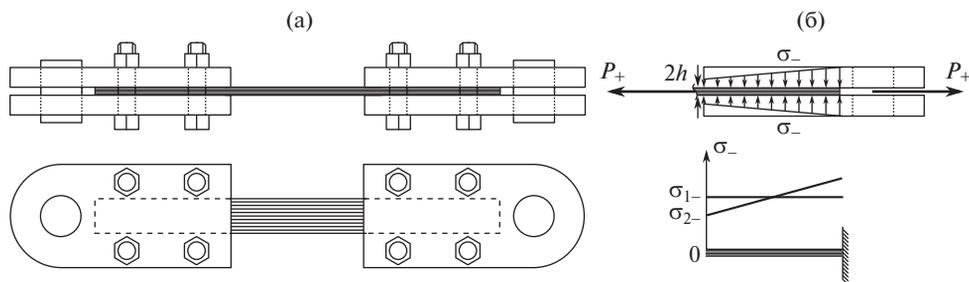


Рис. 1. Схема закрепления плоских образцов в захватах с постоянным поперечным усилием.

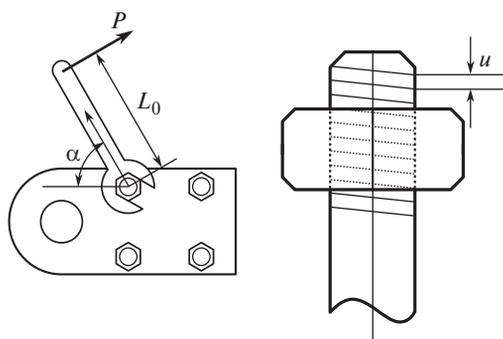


Рис. 2. Определение работы момента затяжки болта.

Но кроме крепления через отверстия существует целый класс других видов механических соединений. Человеческий опыт работы с древесиной привел к созданию очень прочных узлов крепления: топора к топоричу (расклинивание), кувалды к рукояти (насадка со стороны более тонкой части рукояти), оглобли к хомуту в конской упряжи (через ремни). Все эти виды крепления передают нагрузку через боковую поверхность, без сверления.

Аналізу подобной схемы закрепления композитных образцов посвящена настоящая статья.

Способ крепления. Для испытаний на растяжение используются захваты (рис. 1), зажимающие плоский образец постоянным поперечным усилием P_- , распределенным по захватной части образца, которая имеет длину a и ширину w .

Поперечные усилия создаются четырьмя болтами при затяжке фиксированным моментом $M = PL_0$ (рис. 2). Сила P для создания необходимого момента затяжки, зависит от длины плеча L_0 , но с помощью динамометрического ключа можно непосредственно определять приложенный момент. При повороте ключа на угол α мы совершаем работу $A = \alpha M$.

Такую же работу без учета потерь на трение совершает гайка при перемещении на долю $\alpha/2\pi$ от шага u резьбы (например, $u = 1.5$ мм для используемых в захватах гаек М10). Поперечное усилие, которое создадут четыре болта, из “золотого правила механики” выражается в виде

$$P_- = \frac{4A}{u} = \frac{8\pi M}{u}.$$

При приложении растягивающего усилия P_+ касательные напряжения на поверхности образца в захватах растут вплоть до разрушения или до возникновения проскальзывания, при котором реализуется явление типа сухого трения. Согласно “закону” (гипотезе) Кулона сила трения при начале скольжения пропорциональна нормальному давлению и не зависит от площади поверхности трения. На самом деле, конечно, она зависит от всего: и от площади контакта, и от шероховатости поверхности, и от силы давления, но подобной нелинейностью обычно пренебрегают. Будем считать, что предельное продольное усилие типа силы трения пропорционально поперечному усилию, и коэффициент пропорциональности назовем **условным коэффициентом трения**. Почему условным? Потому что это не просто трение, а результат метода крепления, использующего для сцепления двухстороннюю шкурку между металлом и композитным образцом. Происходит нелинейное внедрение абразивных частиц в металл – и на уровне физики этот процесс разрушения-проскальзывания описывается очень сложно. Но механика моделирует всю эту сложность простейшей гипотезой Кулона, которая служит основой инженерных расчетов.

Определение условного коэффициента трения возможно в результате простого эксперимента. Для фиксированного поперечного усилия (момента затяжки болтов) определяют, при каком продольном усилии произойдет проскальзывание (вытаскивание образца из захватов). Разделив продольное усилие P_+ при начале проскальзывания на поперечную силу P_- , можно определить условный коэффициент трения $k = \frac{P_+}{P_-}$.

Считая касательные напряжения равномерно распределенными на двух участках поверхности образца с общей площадью $2aw$, можно оценить их среднее значение по простейшей формуле $\tau_1 = \frac{P_+}{aw} = \frac{kP_-}{aw} = \frac{2\sigma_x^+ h}{a}$.

Индекс “+” относится к растягивающей продольной силе, индекс “–” к поперечной сжимающей силе (рис. 1б).

При стандартных размерах сечения рабочей части $2h = 3$ мм; $w = 10$ мм, прочности $\sigma_x^{+*} = 1000$ МПа предельное продольное усилие составит 30000 Н, и при условном коэффициенте трения, равном единице, можно оценить поперечное усилие и необходимый момент затяжки болтов $M = 30/16.7 \approx 1.8$ Н × м. Сжимающие напряжения в захватах при нагрузке $P_- = 3 \times 10^4$ Н и длине захватов $a = 50$ мм составляют $\sigma_- = 60$ МПа ≈ 6 кг/мм², что вполне допустимо по условию поперечной прочности. При $P_- \approx P_+ \Rightarrow \tau_1 = \sigma_-/2 = 30$ МПа.

Допустимый момент затяжки необходимо оценивать опытным путем: сверху – по прочности образца на поперечное сжатие, и снизу – по исключению проскальзывания. Условия закрепления можно оптимизировать, подбирая отношение моментов затяжки болтов в каждом ряду захвата, что количественно описано ниже (случай 2).

Расчет напряжений в прямоугольной полосе. По модели упрощенного сдвигового анализа рассмотрена задача об одноосном растяжении слоистого композита, состоящего из чередующихся тонких слоев: жестких волокон, воспринимающих (только и все) растягивающие напряжения, и мягкой матрицы, сопротивляющейся лишь сдвигу. Для такой модели композитного материала уравнение равновесия 2-го порядка в перемещениях имеет вид [20]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{где} \quad \beta^2 = \frac{G_{xy}}{E_x}. \quad (1)$$

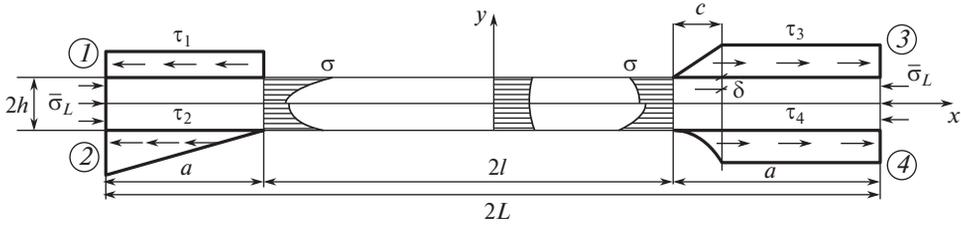


Рис. 3. Схемы нагружения образца при растяжении с четырьмя видами эпюр 1, 2, 3, 4 касательных напряжений в захватной части образца.

Решение уравнения (1) ищется методом разделения переменных, и, из соображений симметрии, имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{\beta L}. \quad (2)$$

Касательное и нормальное напряжения из (2) и закона Гука выразятся в виде

$$\tau_{xy}(x, y) = G_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial y} = G_{xy} \frac{\pi}{\beta L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{\beta L} \right); \quad (3)$$

$$\sigma_x = E_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\pi E_x}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{\beta L} \right). \quad (4)$$

Получим расчетные формулы для четырех случаев: 1) равномерная эпюра касательных напряжений; 2) линейная эпюра; 3) частично линейная; 4) частично параболическая (с нулевой производной у края захватов) (рис. 3).

Случай 1. На части боковой поверхности (в захватах) задано равномерное распределение напряжений (рис. 3, позиция 1)

$$\tau_{xy}|_{y=\pm h} = \varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 < |x| \leq l = L - a \\ \tau_1 = \frac{\bar{\sigma} h}{a}, & \text{при } l < |x| \leq L \end{cases}. \quad (5)$$

Чтобы найти коэффициенты A_{n1} , надо умножить правую и левую части равенства (5) с подстановкой (3) на $\sin \frac{m\pi x}{L}$ и проинтегрировать по x от $-L$ до L . Известно и легко проверить, что

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L & \text{при } m = n \\ 0 & \text{при } m \neq n \end{cases}. \quad (6)$$

В результате из граничного условия (5) и соотношения (3) с учетом (6) определим числовые коэффициенты рядов (2)–(4), выразив их через среднее напряжение $\bar{\sigma}$ в рабочей части образца (например, при $x = 0$)

$$\begin{aligned} G_{xy} \frac{n\pi}{\beta L} A_{n1} \operatorname{sh} \frac{n\pi h}{\beta L} \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx &= \int_0^L \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \tau_1 \int_l^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow A_{n1} &= \frac{2L\tau_1\beta}{G_{xy}n^2\pi^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi h}{\beta L}} \left(\cos \frac{n\pi l}{L} - \cos n\pi \right) = \frac{2L\bar{\sigma}\beta h \cos \frac{n\pi}{L}}{aG_{xy}n^2\pi^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi h}{\beta L}} \left(\cos \frac{n\pi a}{L} - 1 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (4), с учетом $\beta = \sqrt{G_{xy}/E_x}$ найдем распределение нормальных напряжений, удовлетворяющее одному граничному условию (5)

$$\sigma_{x1} = \frac{2\bar{\sigma}h}{\pi\beta a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [T_1] \cos \frac{n\pi x}{L} \{H_y\}, \quad (8)$$

$$[T_1] = \left(\cos \frac{n\pi a}{L} - 1 \right) \cos n\pi, \quad \{H_y\} = \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{\beta L} / \operatorname{sh} \frac{n\pi h}{\beta L}.$$

Чтобы удовлетворить (в среднем) второму граничному условию отсутствия напряжений на торцах образца $x = \pm L$, нужно добавить к решению (8) с обратным знаком среднее на торцах напряжение $\bar{\sigma}_{L1}$, полученное из (8)

$$\sigma_{x1}^+ = \sigma_{x1} + (-\bar{\sigma}_{L1}); \quad (9)$$

$$\bar{\sigma}_{L1} = \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_{x1}|_{x=L} dy = \frac{2\bar{\sigma}L}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [T_1] \cos n\pi = -\bar{\sigma} \left(1 - \frac{a}{2L} \right). \quad (10)$$

Среднее напряжение в рабочей части легко получить интегрированием (9) при $x = 0$ с применением тождеств (12)

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_{x1}^+|_{x=0} dy = \frac{\tau_1 a}{h}. \quad (11)$$

При вычислении средних напряжений в середине (11) и на торце образца (10) используются известные выражения

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos n\alpha}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\alpha^2}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4}. \quad (12)$$

Оценка влияния концентрации напряжений в захватах на реализацию прочности. По формулам (8)–(12) можно оценить концентрацию напряжений через отношение локального напряжения σ_{x1}^+ к среднему $\bar{\sigma}$. Теоретическим коэффициентом концентрации напряжений (“*stress concentration factor*”) называют отношение наибольшего напряжения к среднему. Наибольшее напряжение достигается у края захватов при $x = \pm l$, $y = \pm h$ (в данной постановке напряжение у края захватов обращается в бесконечность, т.к. ряд (8) в этой точке расходится, как гармонический). Тут важен анализ, так как при численной реализации сумма гармонического ряда растет крайне медленно: чтобы эта сумма достигла значения 100, нужно взять безумное число 10^{47} членов.

Ситуация напоминает парадокс сингулярной теории упругости в линейной механике разрушения: напряжения в вершине трещины обращаются в бесконечность, но энергия, поступающая в вершину трещины, конечна. Один из традиционных подходов, позволяющих обойти этот парадокс, состоит в использовании не максимального, а некоторого эффективного напряжения $\sigma_{\text{eff}}(\delta)$, выражаемого через интеграл от напряжений по некоторому характерному размеру δ (“*mean stress criterion*”)

$$\sigma_{\text{eff}}(\delta) = \frac{1}{\delta} \int_{h-\delta}^h \sigma_{x1}^+|_{x=l} dy. \quad (13)$$

Еще более простой, но фактически эквивалентный результат можно получить, вычисляя эффективное напряжение $\sigma_{\text{eff}}(\delta_1)$ в сечении $x = L - a = l$ на некотором характерном (феноменологическом) расстоянии $\delta_1 < \delta$ от сингулярной точки при $y = h - \delta_1$, и это расстояние (свойство материала) определяется из условия наилучшего согласия с экспериментом. Для оценки феноменологического параметра δ_1 необхо-

димом сравнить результаты приведенных ниже расчетов эффективного коэффициента концентрации напряжений с экспериментами по определению прочности на образцах различной толщины.

Эффективное напряжение оказывается конечным в отличие от напряжения при $x = l$; $y = h$, так как ряд (8) для эффективного напряжения по этой гипотезе (“*point-stress criterion*”) сходится и имеет вид

$$\sigma_{\text{eff}1} = \sigma_{x1}^+ \Big|_{y=h-\delta_1} = \frac{2\bar{\sigma}h}{\pi\beta a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [T_1] \{H_1\} \cos \frac{n\pi l}{L} + \bar{\sigma} \left(1 - \frac{a}{2L}\right), \quad (14)$$

$$\{H_1\} = \text{ch} \frac{n\pi(h-\delta_1)}{\beta L} / \text{sh} \frac{n\pi h}{\beta L}.$$

Были проведены численные сравнения расчетов по формулам (13) и (14), соответствующим различным выражениям для эффективных напряжений. Качественно зависимости оказываются сходными, поэтому на приведенных ниже графиках отражены только расчеты по формулам типа (14), соответствующим второй гипотезе (“*point-stress criterion*”).

В (14) и ниже квадратными скобками выделена тригонометрическая часть $[T_1]$ – различная для случаев 1–4, и фигурными скобками гиперболическая часть $\{H_1\}$ – одинаковая для всех случаев 1–4.

Теперь эффективный коэффициент концентрации напряжений – коэффициент снижения прочности (“*strength reduction factor*”) можно вычислить, относив “эффективное” напряжение (14) (или (13)) к среднему (11)

$$K_{\sigma 1} = \frac{\sigma_{\text{eff}}(\delta_1)}{\bar{\sigma}}. \quad (15)$$

Для реальных, стандартных размеров образцов и захватов $a = l = L/2 = 50$ мм тригонометрическая часть $[T_1]$ в (14) существенно упрощается: отличными от нуля остаются только члены с номерами $n = 2, 6, 10, \dots$, и все они равны двум. Сложное выражение (14), (15) с заменой $n = 4k + 2$, например, при $\delta_1 = 1$ мм, $\beta = 0.2$ приобретает вид

$$K_{\sigma 1} = 0.75 + 0.382 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k+2} \left\{ \frac{\text{ch}[0.314(4k+2)]}{\text{sh}[0.471(4k+2)]} \right\}. \quad (16)$$

“Гиперболический” множитель $\{H_1\}$ в фигурных скобках в (14), (16) стремится к нулю, поэтому гармонический ряд $1/n$ с таким множителем – сходится

$$\{H_1\} = \frac{\text{ch}(0.1n\pi)}{\text{sh}(0.15n\pi)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(0.1n\pi)}{\exp(0.15n\pi)} = \frac{1}{\exp(0.05n\pi)} \approx 0.85^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (17)$$

В (16)–(18) для композитных образцов условно принято: продольный модуль Юнга $E_x = 80$ ГПа, межслойный модуль сдвига $G_{xy} \approx 3.2$ ГПа, поэтому $\beta = \sqrt{G_{xy}/E_x} = 0.2$. Для изотропных металлов, например, для стали $\beta = \sqrt{G/E} = \sqrt{1/[2(1+\nu)]} \approx 0.6$ (рис. 4). Для построения большинства графиков брались за основу следующие характеристики: $a = 50$ мм, $c = 0.1a$, $2h = 6$ мм, $L = 100$ мм, $l = 50$ мм, $\beta = 0.2$.

Если рассчитывать эффективный коэффициент концентрации напряжений ближе к краю захвата, например, при $\delta_1 = 0.2$ мм, то расчетная формула (16) примет вид

$$K_{\sigma 1} \approx 0.75 + 0.382 \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{4k+2} \left\{ \frac{\text{ch}[0.44(4k+2)]}{\text{sh}[0.471(4k+2)]} \right\}. \quad (18)$$

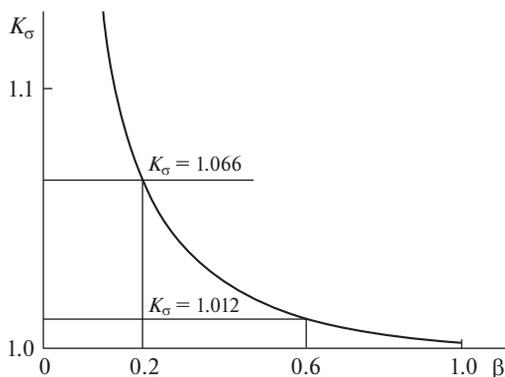


Рис. 4. Зависимость эффективного коэффициента концентрации напряжений K_σ от упругих свойств материала β . Представлена кривая для расчетного случая 1, кривые для остальных случаев принципиально не отличаются.

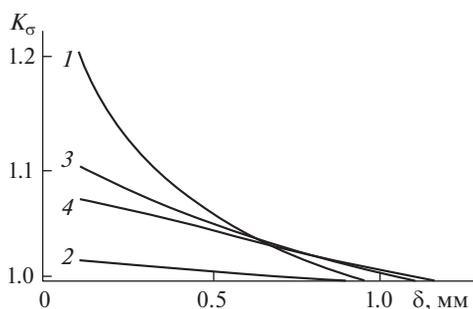


Рис. 5. Зависимость коэффициента концентрации K_σ от δ_1 для различных расчетных случаев, номера кривых соответствуют нумерации расчетных случаев.

Все приведенные графики (рис. 4–9) построены в приложении для инженерных расчетов MathCad по общим формулам типа (14), а наглядные формулы (16), (18) нужны лишь для проверки символьных вычислений.

Случай 2. Путем неравномерной затяжки болтов можно добиться, чтобы ближе к рабочей части поперечные напряжение и смещение стали меньше, чем на конце образца (рис. 16). В этом случае для простоты эпюру изменения касательных напряжений $\tau_{xy}(x)$ в захвате можно считать линейной (рис. 3, позиция 2) и задать по аналогии с (5) на поверхности образца

$$\tau_{xy}|_{y=\pm h} = \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 < |x| < l = L - a \\ \tau_2 \frac{x-l}{a}, & \text{при } l < |x| < L \end{cases}; \quad \tau_2 = 2\tau_1 = 2\frac{\bar{\sigma}h}{a}. \quad (19)$$

Для сравнения коэффициентов концентрации напряжений во всех случаях 1–4 будем считать одинаковым среднее напряжение $\bar{\sigma}$, что соответствует одинаковой растягивающей нагрузке $P_+ = 2\bar{\sigma}hw$.

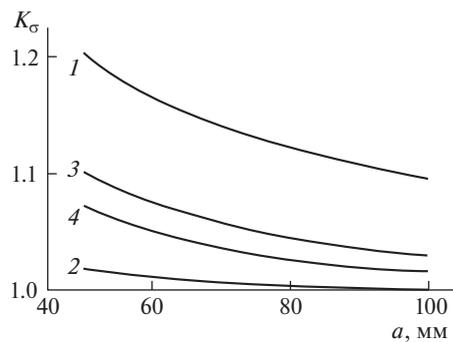


Рис. 6. Зависимости коэффициента снижения прочности K_σ от длины захватной части для образцов с одинаковой толщиной и длиной рабочей зоны.

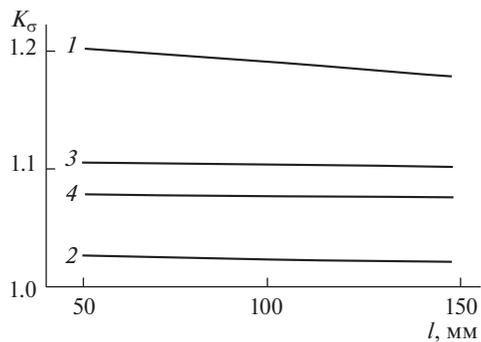


Рис. 7. Зависимости коэффициента снижения прочности K_σ от длины рабочей зоны для образцов одинаковой толщиной и длиной захватной части.

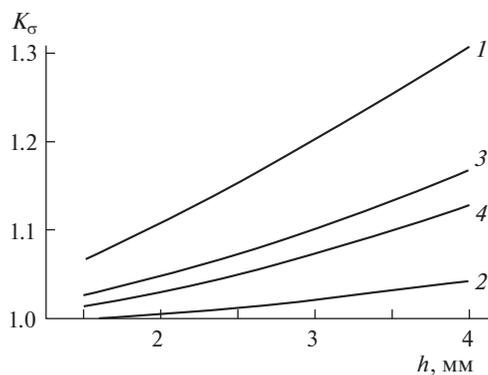


Рис. 8. Зависимости коэффициента снижения прочности K_σ от толщины образца при прочих одинаковых параметрах.

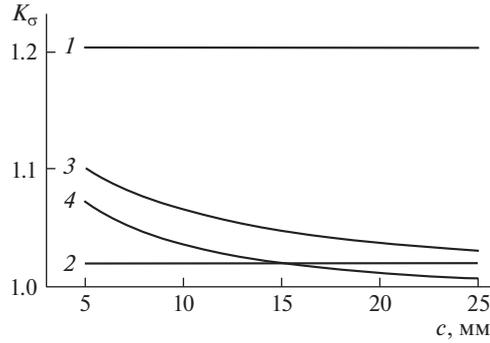


Рис. 9. Зависимости коэффициента снижения прочности K_σ от длины c сглаженной части захватов.

Рассчитаем для граничного условия (19) коэффициенты A_{n2} в (2)–(4) по соотношению (7) с учетом (6)

$$\int_0^L \varphi_2(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = A_{n2} \frac{n\pi}{\beta L} G_{xy} \operatorname{sh} \frac{n\pi h}{\beta L} \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = A_{n2} \frac{n\pi}{2\beta} G_{xy} \operatorname{sh} \frac{n\pi h}{\beta L},$$

$$\tau_2 \left[\int_l^L \frac{x-l}{a} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right] = \frac{\tau_2 L}{n\pi} \left[-\cos n\pi + \frac{L}{n\pi a} \left(\sin n\pi - \sin \frac{n\pi l}{L} \right) \right] = \frac{\tau_2 L}{n\pi} [T_2]; \quad (20)$$

$$A_{n2} = \frac{2\tau_2 L \beta}{G_{xy} n^2 \pi^2} [T_2] / \operatorname{sh} \frac{n\pi h}{\beta L}; \quad [T_2] = \cos n\pi \left(\frac{L}{n\pi a} \sin \frac{n\pi a}{L} - 1 \right).$$

Распределение напряжений по аналогии с (8) примет вид

$$\sigma_{x2} = \frac{4\bar{\sigma}h}{\pi\beta a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [T_2] \{H_y\} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (21)$$

$$\sigma_{\text{eff}2} = \frac{4\bar{\sigma}h}{\pi\beta a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [T_2] \{H_1\} \cos \frac{n\pi l}{L} - \bar{\sigma}_{L2}.$$

Среднее напряжение на торце рассчитывается с помощью (21)

$$\bar{\sigma}_{L2} = \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_{x2} \Big|_{x=L} dy = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\tau_2}{\beta n\pi} [T_2] \cos n\pi \frac{\beta L}{n\pi} = \frac{4\bar{\sigma}L}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{L}{n\pi a} \sin \frac{n\pi a}{L} - 1 \right), \quad (22)$$

$$K_{\sigma 2} = \frac{\sigma_{\text{eff}2}(\delta_1)}{\bar{\sigma}}.$$

Среднее напряжение в рабочей части при $x=0$ из (21) по аналогии с (22) выражается в виде

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_{x2} \Big|_{x=0} dy - \bar{\sigma}_{L2} = \frac{\tau_2 a}{2h}. \quad (23)$$

Воспользоваться соотношениями типа (12) для аналитического решения (22), (23) не удастся, так как для ряда, включающего синус и третью степень $1/n^3$, аналитические выражения авторам неизвестны, но численные расчеты не представляют сложности.

Случай 3. Снижению концентрации напряжений способствует сглаживание кромок захватов, что исключает скачкообразный рост приложенных касательных напряжений. Для численного анализа такой схемы нагружения следует, как показано на рис. 3 (позиция 3), задать изменение касательных напряжений τ_{xy} на поверхности образца по аналогии с (5), (19) в виде

$$\tau_{xy}|_{y=\pm h} = \Phi_3(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{при } 0 < |x| < l = L - a \\ \tau_3 \frac{x-l}{c}, & \text{при } l < |x| < l + c \\ \tau_3 = \frac{\bar{\sigma}h}{a - c/2}, & \text{при } l + c < |x| < L \end{array} \right\}. \quad (24)$$

Для эпюры (24) коэффициенты A_{n3} в рядах (2)–(4) вычисляются аналогично случаям 1 и 2. Далее через новое выражение для напряжений σ_{x3} вида (21) рассчитывается по формуле (10) среднее напряжение на торце $\bar{\sigma}_{L3}$, и в результате получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{eff}3} &= \frac{2\bar{\sigma}h}{\pi\beta(a - c/2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [T_3] \{H_1\} \cos \frac{n\pi l}{L} - \bar{\sigma}_{L3}, \\ [T_3] &= \frac{L}{n\pi c} \left(\sin \frac{n\pi(l+c)}{L} - \sin \frac{n\pi l}{L} \right) - \cos n\pi, \\ \bar{\sigma} &= \tau_3 \frac{2a-c}{2h}, \quad K_{\sigma 3} = \frac{\sigma_{\text{eff}3}(\delta_1)}{\bar{\sigma}}. \end{aligned} \quad (25)$$

При $c = a$ тригонометрическая часть $[T_3]$ в (25) совпадает с $[T_2]$ (21) – случай 2, а при $c \rightarrow 0$ можно предельным переходом показать, что $[T_3]$ переходит в выражение $[T_1]$ из (8) – случай 1.

Случай 4. Плавную передачу усилий от захватов на образец можно смоделировать гладкой эпюрой с нулевой производной у кромки захвата (рис. 3, позиция 4). Для численного анализа распределения напряжений в этом случае можно задать на поверхности образца по аналогии с (24) параболическое изменение касательных напряжений $\tau_{xy}(x)$ на начальном участке захватов

$$\tau_{xy}|_{y=\pm h} = \Phi_4(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{при } 0 < |x| < l = L - a \\ \tau_4 \frac{(x-l)^2}{c^2}, & \text{при } l < |x| < l + c \\ \tau_4 = \frac{\bar{\sigma}h}{a - 2c/3}, & \text{при } l + c < |x| < L \end{array} \right\}. \quad (26)$$

Для эпюры (26) по аналогии со случаем эпюры (24) можно рассчитать коэффициенты A_{n4} в решении (4)

$$\begin{aligned} A_{n4} &= I_{n4} \frac{2\beta}{n\pi G_{xy}} / \text{sh} \frac{n\pi h}{\beta L} I_{n4} = \tau_4 \left[\int_l^{l+c} \left(\frac{x-l}{c} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{l+c}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right] = \frac{\tau_4 L}{n\pi} [T_4], \\ [T_4] &= \frac{2L}{n\pi c} \sin \frac{n\pi(l+c)}{L} + \frac{2L^2}{n^2 \pi^2 c^2} \left(\cos \frac{n\pi(l+c)}{L} - \cos \frac{n\pi l}{L} \right) - \cos n\pi. \end{aligned} \quad (27)$$

Далее проводятся расчеты по формулам (8)–(11) или (21), (23) с использованием в (23) другого выражения для среднего напряжения

$$\bar{\sigma} = \frac{\tau_4}{h} \left[\int_l^{l+c} \left(\frac{x-l}{c} \right)^2 dx + a - c \right] = \frac{\tau_4}{h} \left(a - \frac{2c}{3} \right), \quad (28)$$

$$\sigma_{x4} = \frac{2\bar{\sigma}h}{\pi\beta(a-2c/3)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} [T_4] \{H_y\} \cos \frac{n\pi x}{L} \right).$$

В результате получаем выражение для коэффициента снижения прочности

$$K_{\sigma 4} = \frac{\sigma_{\text{eff } 4}(\delta_1)}{\bar{\sigma}} = \frac{2h}{\pi\beta(a-2c/3)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [T_4] \{H_1\} \cos \frac{n\pi l}{L} - \frac{\bar{\sigma}_{L4}}{\bar{\sigma}}. \quad (29)$$

Выражение $[T_4]$ в (27) и (29) можно проанализировать, положив $n\pi l/L = b$, $n\pi c/L = \varepsilon \rightarrow 0$. Тогда $[T_4]$ стремится к выражению $[T_1]$ из (8) для случая 1

$$[T_4] = 2 \frac{\sin b \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \cos b}{\varepsilon} + 2 \frac{\cos b \cos \varepsilon - \sin b \sin \varepsilon - \cos b}{\varepsilon^2} -$$

$$- \cos n\pi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \sin b/\varepsilon + 2 \cos b - \cos b - 2 \sin b/\varepsilon - \cos n\pi = \quad (30)$$

$$= \cos b - \cos n\pi = \left(\cos \frac{n\pi a}{L} - 1 \right) \cos n\pi = [T_1].$$

Расчеты по формулам (25) и (29) показывают, что сглаживание (рис. 3, позиция 4) или снижение угла эпюры (рис. 3, позиция 3) приложенных касательных напряжений приводит к уменьшению КСП (коэффициента снижения прочности), который убывает с ростом длины c сглаженного участка. Результаты расчетов приведены на рис. 6–9, на которых нумерация кривых соответствует номерам расчетных случаев в статье.

Выводы. Способы снижения концентрации напряжений. Расчеты по рассмотренным моделям показывают, что влияние концентрации напряжений может быть снижено различными способами: **1.** Уменьшением толщины образца; **2.** Ростом длины рабочей зоны и длины захватов; **3.** Увеличением межслойного модуля сдвига композита; **4.** Неравномерной затяжкой болтов, создающей линейную эпюру напряжений в захватах; **5.** Сглаживанием касательных напряжений у кромки захватов.

Эффективность всех этих способов получила в результате расчетов не только качественную, но и количественную оценку.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-08-00372-А).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Портнов Г.Г., Кулаков В.Л., Арнаутков А.К.* Особенности испытания высокопрочных однонаправленных композитов при одноосном растяжении // Пластические массы. 2008. № 4. С. 40.
2. *Shokrieh M.M., Omid M.J.* Tension behavior of unidirectional glass/epoxy composites under different strain rates // Composite Structures. 2009. V. 88. № 4. P. 595.
3. *Бабушкин А.В., Вильдеман В.Э., Лобанов Д.С.* Испытания на растяжение однонаправленного высоконаполненного стеклопластика при нормальных и повышенных температурах // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2010. Т. 76. № 7. С. 57.

4. *Chen Ya., Zhao Yu., He Ch., Ai Sh., Lei H., Tang L., Fang D.* Yield and failure theory for unidirectional polymer-matrix composites // *Composites Part B: Engineering*. 2019. V. 164. № 1. P. 612.
5. *Боровков А.И., Мамчиц Д.В., Немов А.С., Новокшенов А.Д.* Задачи моделирования и оптимизации панелей переменной жесткости и конструкций из слоистых композитов // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2018. № 1. С. 113.
6. *Borovkov A.I., Mamchits D.V., Nemov A.S., Novokshenov A.D.* Problems of modeling and optimization of variable-hardness panels and structures made of layered composites // *Mechanics of Solids*. 2018. V. 53. № 1. P. 93.
7. *Полилов А.Н., Татусь Н.А., Плитов И.С.* Оценка влияния разориентации волокон на жесткость и прочность профилированных композитных элементов // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2013. № 5. С. 58.
8. *Polilov A.N., Tatus N.A., Plitov I.S.* Estimating the effect of misorientation of fibers on stiffness and strength of profiled composite elements // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2013. V. 42. № 5. P. 390.
9. *Полатов А.М.* Компьютерное моделирование влияния концентратора напряжений на деформирование волокнистых материалов // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2017. Т. 23. № 3. С. 391.
10. *Дедков Д.В., Зайцев А.В., Ташкинов А.А.* Концентрация напряжений в слое тканого композита с закрытыми внутренними технологическими порами // *Вестник Пермского государственного технического университета. Механика*. 2011. № 4. С. 29.
11. *Hu P., Pulungan D., Tao R., Lubineau G.* An experimental study on the influence of intralaminar damage on interlaminar delamination properties of laminated composites // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2020. V. 131. Article 105783.
12. *Полилов А.Н.* Этюды по механике композитов. М.: ФизМатЛит. 2015. 320 с. ISBN 978-5-9221-1617-6.
13. *Brooks H., Molony S.* Design and manufactured parts with three dimensional continuous fibre reinforcement // *Materials and Design*. 2016. V. 90. P. 276.
14. *Balla V.M., Kate K.H., Satyavolu J., Singh P., Ganesh J., Tadimeti D.* Additive manufacturing of natural fiber reinforced polymer composites: Processing and prospects // *Composites Part B: Engineering*. 2019. V. 174. Article 106956.
15. *Grüber B., Hufenbach W., Kroll L., Lepper M., Zhou B.* Stress concentration analysis of fibre-reinforced multilayered composites with pin-loaded holes // *Composites Science and Technology*. 2007. V. 67. № 7. P. 1439.
16. *Zeng Q.-D., Wang Z.-L., Ling L.* A study of the influence of interfacial damage on stress concentrations in unidirectional composites // *Composites Science and Technology*. 1997. V. 57. № 1. P. 129.
17. *Дударьков Ю.И., Левченко Е.А., Лимонин М.В.* Расчетная оценка влияния краевых эффектов на свободной кромке отверстия на прочность слоистых композитов // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2017. Т. 83. № 3. С. 59.
18. *Akrami R., Fotouhi S., Fotouhi M., Bodaghi M., Bolouri A.* High-performance bio-inspired composite T-joints // *Composites Science and Technology*. 2019. V. 184. Article 107840.
19. *Малахов А.В., Полилов А.Н.* Построение траекторий волокон, огибающих отверстие, и их сравнение со структурой древесины в зоне сучка // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2013. № 4. С. 57.
20. *Полилов А.Н., Арутюнова А.С., Татусь Н.А.* Влияние концентрации напряжений вблизи захватов на реализацию прочности композитов при растяжении // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2020. № 11. С. 35.

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА,
ДИАГНОСТИКА, ИСПЫТАНИЯ**

УДК 621.89.017

ТРИБОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАНОМОДИФИКАТОРА 1© 2020 г. А. Ю. Албагачиев¹, Н. Н. Новикова¹, А. Б. Тохметова^{1,*}¹ *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия***e-mail: aygerim.tokhmetova@mail.ru*

Поступила в редакцию 23.03.2020 г.

Принята к публикации 29.05.2020 г.

В статье приведены результаты исследования коэффициента трения в условиях смазки образцов из стали, бронзы и чугуна. Были проведены сравнительные испытания трибологических свойств моторного масла и с добавлением в него специализированной присадки на универсальной машине трения УМТ-1. Анализ результатов показал узкий диапазон эффективности введения присадки в моторное масло в парах трения сталь–чугун, чугун–бронза.

Ключевые слова: коэффициент трения, присадка, моторное масло

DOI: 10.31857/S023571192005003X

При эксплуатации различных видов техники, в условиях возрастающей нагрузки, скоростей, температуры и требований к надежности двигателей внутреннего сгорания используются смазочные материалы [1, 2]. Создание и применение новых высококачественных смазочных материалов является весьма актуальной задачей в машиностроении [3, 4]. Одним из направлений решения проблемы повышения долговечности является введение в моторное масло наномодификатора для улучшения режимов трения и смазки [5]. Целью исследования является проведение сравнительных экспериментальных исследований трибологических свойств наномодификатора к автомобильному маслу, по методике, разработанной в лаборатории трения в экстремальных условиях ИМАШ РАН.

Методика исследований. По данным рекламы, использованный нами физический модификатор на базе серпентинита увеличивает срок непрерывной работы механизма, улучшает технические характеристики, экономит электроэнергию, уменьшает затраты на ремонт, снижает шум и вибрацию работы, а также повышает эффективность. Триботехнические испытания проводили на универсальной машине трения УМТ-1 (рис. 1).

Была реализована капельная схема смазывания. В качестве материалов пар трения при сравнительных испытаниях использовались сталь, чугун и бронза.

Частота вращения образцов n составляла 50, 100, 300 об/мин при продолжительности одного испытания равной $t = 15$ мин при нормальной нагрузке P соответствующей 150, 300 и 450 Н. С учетом номинальной площади контакта $A = 2.9 \times 10^{-4}$ м², давление достигало 0.05; 0.1 и 0.155 МПа. Фиксируемыми параметрами являлись момент силы трения, температура, суммарный износ пары $\Delta h_1 + \Delta h_2$ усредненный по шести точкам измерения и линейная интенсивность изнашивания измеряемая термомпара. Данные передавались через измерительную аппаратуру фирмы National Instruments в табличном виде с помощью программы Labview.



Рис. 1. Универсальная машина трения УМТ-1.

Момент трения рассчитывали по тарировочной зависимости

$$M = 0.079U, \quad (1)$$

где U – выходное напряжение, записываемое в память ЭВМ.

Коэффициент трения определяли по зависимости [5]

$$f = \frac{M}{R_{cp}P}, \quad (2)$$

где R_{cp} – средний радиус дорожки трения, равный 12 мм.

Линейную интенсивность изнашивания определяем по зависимости

$$I_h = \frac{(\Delta h_1 + \Delta h_2)}{2\pi R_{cp}tn}. \quad (3)$$

За время одного оборота две металлические поверхности прогреваются на глубину h , отнимая от теплового потока смазки две доли теплоты. По отдельности эти глубины распространения импульсов можно вычислить по общей формуле [6]

$$h = 1.73\sqrt{at}, \quad (4)$$

где a – температуропроводность металла, t – время одного оборота.

Подставляя в формулу для расчета глубины распространения теплового импульса h и умножая на площадь A получим выражение для расчета объема бронзы, прогретого за время контакта при одном обороте

$$V = 1.73A\sqrt{\frac{\lambda}{cp}}t, \quad (5)$$

где λ – теплопроводность, c – теплоемкость, ρ – плотность.

Аналогично определяем объем стали (30ХГСА) нагретого за время одного оборота. Рассчитанные значения объемов нагреваемых металлов за оборот приведены в табл. 1.

Из табл. 1 видно, что бронза более теплопроводна, чем сталь – она проводит в 3 раза больше тепла и ее объем нагрева несколько раз превышает объем стали [7].

Из результатов испытаний смазок (табл. 2) при нормальной нагрузке 150 Н видно, что введение модификатора практически не влияет на коэффициент трения, а в некоторых случаях даже увеличивает его значение. Однако, при сравнении коэффициен-

Таблица 1. Объем нагретого металла за один оборот

Металл	V при частоте вращения 50 об/мин, м ³	V при частоте вращения 100 об/мин, м ³	V при частоте вращения 300 об/мин, м ³
Бронза	0.00025	0.00017	0.00010
Сталь	0.00014	0.00010	0.00005

Таблица 2. Результаты испытаний пар трения при нормальной нагрузке $P = 150$ Н

Пары трения	Скорость вращения, м/мин	Средний коэффициент трения (без присадки)	Средний коэффициент трения (с присадкой)
Сталь–бронза	4.4	0.07	0.05
Сталь–бронза	8.8	0.06	0.11
Сталь–бронза	26.4	0.10	0.09
Сталь–чугун	4.4	0.17	0.06
Сталь–чугун	8.8	0.05	0.11
Сталь–чугун	26.4	0.06	0.06
Чугун–бронза	4.4	0.06	0.13
Чугун–бронза	8.8	0.11	0.06
Чугун–бронза	26.4	0.05	0.14

Таблица 3. Результаты испытаний пар трения при нормальной нагрузке $P = 300$ Н

Пары трения	Скорость вращения, м/мин	Средний коэффициент трения (без присадки)	Средний коэффициент трения (с присадкой)
Сталь–бронза	4.4	0.07	0.05
Сталь–бронза	8.8	0.06	0.11
Сталь–бронза	26.4	0.10	0.09
Сталь–чугун	4.4	0.17	0.06
Сталь–чугун	8.8	0.05	0.11
Сталь–чугун	26.4	0.06	0.06
Чугун–бронза	4.4	0.06	0.13
Чугун–бронза	8.8	0.11	0.06
Чугун–бронза	26.4	0.05	0.14

тов трения сталь–чугун и чугун–бронза, при скоростях равных 4.4 м/мин и 8.8 м/мин, соответственно, модификатор снижает трение.

Из табл. 3 для пар трения сталь–бронза, сталь–чугун и чугун–бронза при нагрузке 300 Н с присадками показали такие же результаты, как и при нагрузке 150 Н. Наибольшая эффективность присадки получена в парах трения сталь–чугун и чугун–бронза, при скоростях 4.4 м/мин и 8.8 м/мин.

На рис. 2 показано, что модификатор не снижает, а увеличивает величину коэффициента трения, а по рис. 3 коэффициент трения в зависимости от скорости вращения резко снижается до 0.03, затем увеличивается. Рис. 3 показывает, что коэффициент трения вначале снижается, а затем с увеличением скорости трения линейно возрастает с 0.03 до 0.1.

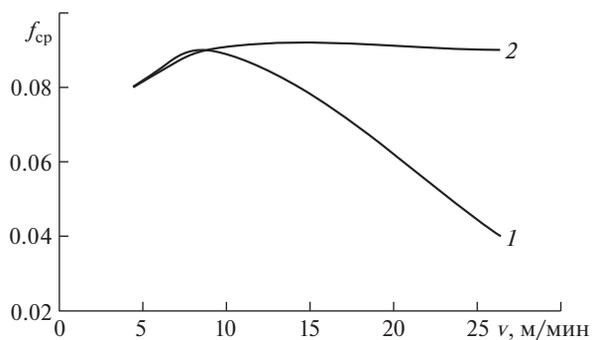


Рис. 2. Результаты испытаний пар трения сталь–бронза при нормальной нагрузке $P = 450$ Н: 1 – масло; 2 – масло с наномодификатором.

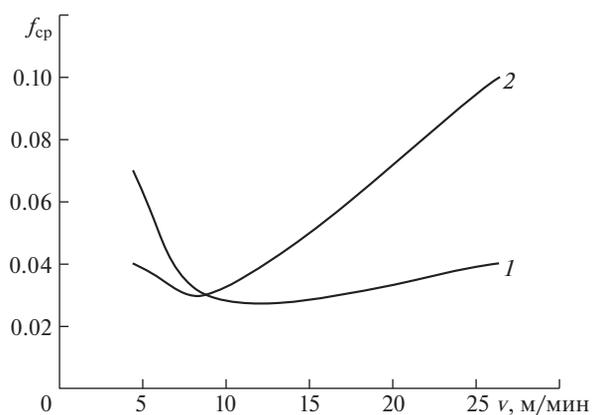


Рис. 3. Результаты испытаний пар трения сталь–чугун при нормальной нагрузке $P = 450$ Н: 1 – масло; 2 – масло с наномодификатором.

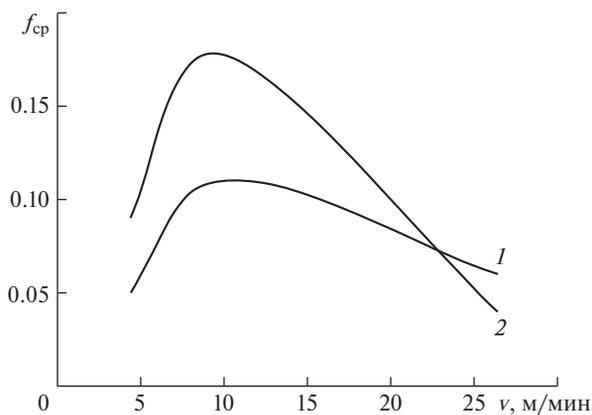


Рис. 4. Результаты испытаний пар трения чугун–бронза при нормальной нагрузке $P = 450$ Н: 1 – масло; 2 – масло с наномодификатором.

Коэффициент трения для данной пары (рис. 4), при смазывании моторным маслом, увеличился до значения 0.11, затем уменьшился при увеличении скорости вращения. Подобное явление было обнаружено в парах трения чугун–бронза (рис. 4) при введении модификатора в моторное масло.

Анализируя испытания данных пар трения, можно сделать вывод, что модификатор будет эффективен только в узком диапазоне, например при скоростях свыше 26 м/мин для пар трения чугун–бронза.

Следует отметить, что вначале трения зазор меньше 0.1 мкм (т.е. имеем граничную смазку), а затем при зазоре больше 0.1–10 мкм оно переходит в полужидкостное трение [8].

Выводы. Результаты испытаний показали, что введение модификатора 1 практически не оказывает влияние на значение коэффициента трения. Наиболее эффективно модификатор проявил себя в парах сталь–чугун и чугун–бронза при нормальной нагрузке 150 Н, 300 Н и скоростях 4.4 м/мин и 8.8 м/мин. В нагруженном режиме при 450 Н введение модификатора в моторное масло наоборот повышает коэффициент трения. Наблюдается переход режима смазки от граничной к смешанной.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Медеяев А.Ю.* Трение и износ деталей машин / Под ред. Албагачиев А.Ю. М. 2008. 461 с.
2. *Доценко А.И.* Основы триботехники / Под ред. Буяновский И.А. М.: Инфра-М, 2014. 336 с.
3. *Буяновский И.А., Большаков А.Н., Самусенко В.Д., Левченко В.А.* Молибденосодержащее углеродное покрытие триботехнического назначения и антифрикционные свойства масел при граничной смазке // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 1. С. 86.
4. *Албагачиев А.Ю.* Порошковые материалы: Справочник / Под ред. М.И. Алымова, Ю.В. Левинского М.: Научный мир, 2018. 610 с.
5. *Албагачиев А.Ю., Михеев А.В., Хасьянова Д.У., Тананов М.А.* Трибологические исследования смазок // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2018. № 5. С. 91.
6. Справочник по триботехнике / Под ред. М. Хедбы, А.В. Чичинадзе. В 3 т. Теоретические основы. М.: Машиностроение, 1989. Т. 1. 400 с.
7. *Мышкин Н.К.* Трение, износ, смазка. Физические основы и технические приложения трибологии / Под ред. М.И. Петроковец. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 368 с.
8. *Крагельский И.В.* Основы расчетов на трение и износ / Под ред. М.Н. Добычин, В.С. Комбалов. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.