

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

---

Пространственный эффект инертности упругих волн на сфере <i>В. Ф. Журавлёв, Д. М. Климов</i>	3
Эффективные упругие модули перфорированных пластин, содержащих прямоугольную решетку круглых отверстий <i>С. Ю. Лаврентьев, В. В. Мокряков, А. В. Ченцов</i>	7
Применение подхода механики конечных трещин для оценки разрушения квазихрупкого материала с круговым отверстием <i>С. В. Сукнев</i>	13
Виброакустический эффект заполнения дефектов в стержнях и пластинах <i>И. М. Лебедев, М. Н. Перельмутер, А. Л. Попов,                  Д. А. Челюбеев, Е. И. Шифрин</i>	26
Об эволюции движения твердого тела, подвешенного на нити в однородном поле тяжести <i>А. П. Маркеев</i>	36
Применение нейронных сетей для моделирования ударно-волновых процессов в алюминии <i>Н. А. Грачева, М. В. Леканов, А. Е. Майер, Е. В. Фомин</i>	42
О флаттере эллиптической пластины <i>С. Д. Алгазин, Ж. Г. Ингтем</i>	62
О равновесии нерастяжимой тяжелой нити на конусе или сфере <i>Г. М. Розенблат</i>	68
Пластическое кручение при высоком давлении с неоднородным напряженным состоянием <i>Г. М. Севастьянов</i>	90
Действие подземного взрыва: быстрое расширение сферической полости в упругой среде <i>М. Ш. Исраилов, Х. Хамиду</i>	100
Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненном цилиндре в условиях ползучести при жестких ограничениях на линейные и угловые деформации <i>Е. Е. Деревянка, В. П. Радченко, В. В. Цветков</i>	118
Численно-аналитический метод поиска авторотаций механической системы с двумя вращательными степенями свободы <i>Л. А. Климина, А. А. Мастерова, В. А. Самсонов, Ю. Д. Селюцкий</i>	128

Об одной аналогии между уравнениями теории упругости и общей теории относительности <i>В. В. Васильев, Л. В. Федоров</i>	143
Термомеханическое исследование полиэтилена высокой плотности после пластического деформирования под высоким давлением <i>В. А. Жорин, М. Р. Киселев</i>	155
<hr/>	
Геннадий Исаакович Канель (30.06.1944–31.01.2021)	164
<hr/> <hr/>	

УДК 531

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ЭФФЕКТ ИНЕРТНОСТИ УПРУГИХ ВОЛН НА СФЕРЕ

© 2021 г. В. Ф. Журавлёв<sup>a,\*</sup>, Д. М. Климов<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: zhurav@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.10.2020 г.

После доработки 21.10.2020 г.

Принята к публикации 29.10.2020 г.

В 1891 году профессор Джордж Х. Брайан продемонстрировал эффект прецессии стоячей волны в упругой осесимметрической оболочке, вращающейся вокруг оси симметрии. Для объяснения эффекта Брайан обратился к математическому описанию упругих колебаний тонкого кругового кольца. В результате он получил формулу, связывающую постоянную угловую скорость вращения кольца в своей плоскости со скоростью прецессии относительно него стоячей волны упругих колебаний. В дальнейшем эта формула была использована для объяснения эффекта поворота стоячей волны в полусферическом резонаторе при повороте самого резонатора вокруг его оси симметрии. При этом угловая скорость поворота уже не предполагалась постоянной, и соотношение Брайана между скоростями молчаливо распространялось на соотношение между углами поворота. Фактически это означало открытие эффекта инертности упругих волн. В настоящем исследовании рассматривается уже полный сферический резонатор, и плоский поворот резонатора заменяется пространственным. Пространственным оказывается и обобщённый эффект Брайана.

*Ключевые слова:* эффект Брайана, угловая скорость, сферический резонатор

DOI: 10.31857/S0572329921030144

В 1891 году в докладе лондонскому королевскому обществу профессор университета в Бангоре (Уэльс) Джордж Х. Брайан продемонстрировал эффект прецессии стоячей волны в упругой осесимметрической оболочке, вращающейся вокруг оси симметрии. Для объяснения эффекта Брайан обратился к математическому описанию упругих колебаний тонкого кругового кольца. В результате он получил формулу, связывающую постоянную угловую скорость  $\omega$  вращения кольца в своей плоскости со скоростью прецессии относительно него стоячей волны упругих колебаний  $\omega_g$  [1]. В дальнейшем эта формула была использована для объяснения эффекта поворота стоячей волны в полусферическом резонаторе при повороте самого резонатора вокруг его оси симметрии [2, 3]. При этом в отличие от [1] угловая скорость поворота уже не предполагалась постоянной, и соотношение Брайана между скоростями молчаливо распространялось на соотношение между углами поворота. Фактически это означало открытие эффекта инертности упругих волн, что и было доказано в [4, 5].

В настоящем исследовании рассматривается уже полный сферический резонатор, и плоский поворот резонатора заменяется пространственным. Пространственным оказывается и обобщённый эффект Брайана.

**Уравнения колебаний упругого сферически симметричного тела.** Рассмотрим упругое сферически симметричное твердое тело со свободной границей, на которое действуют массовые силы плотности  $\mathbf{f}$ . Главный вектор сил, действующих на тело  $\int_V \mathbf{f} dm$ , без ограничения общности будем полагать равным нулю. Под действием главного момента  $\int_V \mathbf{r} \cdot \mathbf{f} dm$  тело меняет свою ориентацию в пространстве ( $\mathbf{r}$  — радиус-вектор произвольной точки тела,  $dm$  — элемент массы,  $V$  — область, занятая телом).

Для описания упругих деформаций введем систему координат  $x_1 x_2 x_3$ , связанную с телом так, чтобы выполнялись условия

$$\int_V \mathbf{x} dm = 0, \quad \int_V \mathbf{r} \cdot \mathbf{x} dm = 0 \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1 x_2 x_3)$  — упругое смещение точки, в недеформированном состоянии занимавшей положение  $\mathbf{r}$ . Условия (1) характеризуют координатный трехгранник, относительно которого тело в среднем (по всем частицам) не перемещается и не поворачивается.

Ставится следующая задача: зная абсолютную угловую скорость трехгранника  $x_1 x_2 x_3$  в проекциях на его же оси —  $\boldsymbol{\omega}(t)$ , определить, как ведут себя волны упругих деформаций.

Запишем принцип Даламбера—Лагранжа для рассматриваемого тела

$$\int_V \left[ \ddot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{x})) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{x}) + 2\boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{\rho} \nabla \Pi - \mathbf{f} \right] \delta \mathbf{x} dm = 0 \quad (2)$$

Здесь  $\rho$  — плотность, зависящая лишь от  $|\mathbf{r}|$ ,  $\nabla \Pi$  — градиент квадратичного функционала линейной теории упругости.

Координаты, определяющие угловое положение тела как целого, не варьируются, предполагается, что угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}(t)$  — известная функция времени.

Для выбора обобщенных координат рассмотрим случай  $\boldsymbol{\omega} = 0$ . В [6] показано, что спектр собственных колебаний свободного твердого тела при условиях (1) дискретен. Это означает, что возрастающая последовательность частот собственных колебаний  $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots$  неограниченна, а собственные элементы  $\mathbf{h}_1(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{h}_2(\mathbf{r})$ , ... соответствующие этим частотам, образуют ортонормированную систему функций, полную в конфигурационном пространстве задачи:

$$\int_V \mathbf{h}_n(\mathbf{r}) \mathbf{h}_l(\mathbf{r}) dm = \delta_n^l \quad (3)$$

Это позволяет ввести независимые лагранжевы координаты, описывающие все степени свободы при деформировании тела, в общем случае  $\boldsymbol{\omega}(t) \neq 0$  следующим образом:

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \mathbf{h}_n(\mathbf{r}) \quad (4)$$

Задача о собственных колебаниях сферически симметричного свободного тела допускает группу  $SO(3)$ , поэтому спектр собственных частот вырожден и состоит из последовательности, по крайней мере, трехкратных частот:  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 \leq \nu_4 = \nu_5 = \nu_6 \leq \dots$  конфигурационное пространство при этом представляет собой прямое произведение трёхмерных собственных подпространств:  $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3\} \cdot \{\mathbf{h}_4, \mathbf{h}_5, \mathbf{h}_6\} \cdot \dots$ . Фиксируем номер  $m$  произвольного собственного подпространства и введем обозначения для соответствующих обобщённых координат:  $q_{3m-1} = u$ ,  $q_{3m-2} = v$ ,  $q_{3m-1} = w$

( $m = 1, 2, \dots$ ). Подставляя (4), а также  $\delta \mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta q_n \mathbf{h}_n(\mathbf{r})$  в (2) и приравнявая нулю коэффициенты при независимых вариациях  $\delta q_n$ , получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно  $q_n$ :

$$\begin{aligned} \ddot{u} + au + bv + cw - v(\dot{\omega}, \boldsymbol{\kappa}_3) + w(\dot{\omega}, \boldsymbol{\kappa}_2) - 2\dot{v}(\omega, \boldsymbol{\kappa}_3) + 2\dot{w}(\omega, \boldsymbol{\kappa}_2) + F_1 + L_1 &= 0 \\ \ddot{v} + bu + dv + ew + u(\dot{\omega}, \boldsymbol{\kappa}_3) - w(\dot{\omega}, \boldsymbol{\kappa}_1) + 2\dot{u}(\omega, \boldsymbol{\kappa}_3) - 2\dot{w}(\omega, \boldsymbol{\kappa}_1) + F_2 + L_2 &= 0 \\ \ddot{w} + cu + ev + fw - u(\dot{\omega}, \boldsymbol{\kappa}_2) + v(\dot{\omega}, \boldsymbol{\kappa}_1) - 2\dot{u}(\omega, \boldsymbol{\kappa}_2) + 2\dot{v}(\omega, \boldsymbol{\kappa}_1) + F_3 + L_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

где  $L_1, L_2, L_3$  представляют собой линейные функции обобщённых координат, соответствующих другим собственным подпространствам, а скалярные коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} a &= \int_V (\mathbf{h}_{3m-2}, \omega)^2 dm - \omega^2, & b &= \int_V (\mathbf{h}_{3m-2}, \omega)(\mathbf{h}_{3m-1}, \omega) dm \\ c &= \int_V (\mathbf{h}_{3m-2}, \omega)(\mathbf{h}_{3m}, \omega) dm \\ d &= \int_V (\mathbf{h}_{3m-1}, \omega)^2 dm - \omega^2, & e &= \int_V (\mathbf{h}_{3m-1}, \omega)(\mathbf{h}_{3m}, \omega) dm \\ f &= \int_V (\mathbf{h}_{3m}, \omega)^2 dm - \omega^2 \\ F_1 &= \int_V (\nabla \Pi, \mathbf{h}_{3m-2}) dV, & F_2 &= \int_V (\nabla \Pi, \mathbf{h}_{3m-1}) dV, & F_3 &= \int_V (\nabla \Pi, \mathbf{h}_{3m}) dV \end{aligned}$$

Присутствие  $L_1, L_2, L_3$  характеризует тот факт, что системы типа (5) для различных подпространств не являются независимыми друг от друга.

При получении уравнений (5) было предположено для простоты, что массовые силы ортогональны всем собственным функциям:  $\int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{h}_n(r) dm = 0$ . Это означает, что в  $\mathbf{f}$  присутствует лишь постоянная составляющая ( $\int_V \mathbf{r} \cdot \mathbf{f} dm \neq 0$ ), обеспечивающая вращение тела со скоростью  $\omega(t)$ .

Векторные коэффициенты имеют вид

$$\boldsymbol{\kappa}_1 = \int_V \mathbf{h}_{3m-1} \cdot \mathbf{h}_{3m} dm, \quad \boldsymbol{\kappa}_2 = \int_V \mathbf{h}_{3m} \cdot \mathbf{h}_{3m-2} dm, \quad \boldsymbol{\kappa}_3 = \int_V \mathbf{h}_{3m-2} \cdot \mathbf{h}_{3m-1} dm$$

В силу сферической симметрии выбор собственных векторов ( $\mathbf{h}_{3m-2}, \mathbf{h}_{3m-1}, \mathbf{h}_{3m}$ ) можно осуществить так, чтобы

$$\boldsymbol{\kappa}_1 = \kappa(1, 0, 0), \quad \boldsymbol{\kappa}_2 = \kappa(0, 1, 0), \quad \boldsymbol{\kappa}_3 = \kappa(0, 0, 1)$$

$$\kappa = |\boldsymbol{\kappa}_1| = |\boldsymbol{\kappa}_2| = |\boldsymbol{\kappa}_3| = \left| \int_V \mathbf{h}_{3m-1} \cdot \mathbf{h}_{3m} dm \right| \quad (6)$$

Используя неравенство Коши–Буняковского для (6), получим  $0 \leq \kappa \leq 1$ .

Если ввести обозначения

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$$

то уравнения (5) можно переписать в векторной форме

$$\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{A}\mathbf{z} + \kappa \dot{\mathbf{G}}\mathbf{z} + 2\mathbf{G}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{L} = 0 \quad (7)$$

где  $A$  – симметрическая матрица позиционных сил, состоящая из коэффициентов упругих сил  $F_1, F_2, F_3$  и коэффициентов  $a, b, c, d, e, f$ .

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № АААА-А20-120011).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bryan G.H.* On the beats in the vibrations of revolving cylinder or bell // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1981. V. 7. P. 101–107.
2. *Scott W.B.* Delco makes low-cost gyro prototype // Aviat. Week. 1982. V. 117. № 17. P. 64–72.
3. *Loper E.J., Lynch D.D.* The HRG: A new low-noise inertial rotation sensor. Proc. 16 Jt. Services Data Exchange For Inertial Systems. Los Angeles, CA, 1982.
4. *Журавлёв В.Ф., Климов Д.М.* О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 17–24.
5. *Журавлёв В.Ф., Климов Д.М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
6. *Чернина В.С.* Свободные колебания тонкой замкнутой сферической оболочки / В кн. Теория оболочек и пластин. М.: Наука, 1973.

УДК 539.3

## ЭФФЕКТИВНЫЕ УПРУГИЕ МОДУЛИ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПЛАСТИН, СОДЕРЖАЩИХ ПРЯМОУГОЛЬНУЮ РЕШЕТКУ КРУГЛЫХ ОТВЕРСТИЙ

© 2021 г. С. Ю. Лаврентьев<sup>а</sup>, В. В. Мокряков<sup>а,\*</sup>, А. В. Ченцов<sup>а</sup>

<sup>а</sup> *Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,  
Москва, Россия*

*\*e-mail: mokr@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 19.02.2020 г.

После доработки 23.02.2020 г.

Принята к публикации 25.02.2020 г.

Спроектирован и изготовлен ряд образцов – перфорированных пластин с решетками неравных периодов и различных ориентаций. Проведены испытания образцов на растяжение, получены их эффективные модули упругости. Построена и скорректирована математическая модель, проведено успешное сравнение экспериментальных и теоретических результатов.

*Ключевые слова:* перфорированная пластина, эффективные деформации, эффективные напряжения, эффективные модули упругости, испытания на растяжение

DOI: 10.31857/S0572329921020100

**1. Введение.** Сверхрешетки представляют собой двоякопериодические системы неоднородностей (отверстий, пор, микротрещин, включений и т.д.). Характерный размер неоднородностей варьируется от нанометров (наномасштаб) до сотен нанометров (мезомасштаб). Размеры промежутков между неоднородностями при этом, как правило, сравнимы с размерами неоднородностей.

Сверхрешетки возникают и в природе, естественным путем, и в технологических процессах. Ярким примером являются фотонные кристаллы (ФК) – материалы, коэффициент преломления которого меняется периодически в пространственных направлениях [1, 2]. В качестве примеров естественного происхождения можно представить некоторые разновидности опалов (неорганические ФК) и чешуйки на крыльях бабочек-парусников (органические ФК). При этом существуют технологии, позволяющие создавать ФК искусственным путем, например, протравливанием системы полостей в прозрачном материале. Другими примерами могут быть цеолиты (сверхрешетки естественного и искусственного типа) [3–5] и пористый кремний (сверхрешетка искусственного типа) [6].

Сверхрешетки обладают уникальными свойствами – например, фотонные кристаллы могут действовать как фильтр для заданных частот. Свойства сверхрешеток обуславливаются их внутренней структурой. При разрушении ее они исчезают полностью или частично. Кроме того, свойства могут зависеть от периодов двоякопериодической структуры сверхрешетки, а значит и от деформации структуры, которая может возникать из-за внешних и внутренних нагрузок.

Соответственно, корректная оценка напряженно-деформированного состояния имеет существенное значение. Особенно важен расчет эффективных упругих характеристик сверхрешетки, с учетом анизотропии структуры.

Характерные особенности механического поведения сверхрешеток описываются в рамках плоской задачи теории упругости о плоскости, ослабленной двоякопериодической системой отверстий. В работах [7, 8] с помощью аналитических расчетов получены эффективные модули упругости для перфорированных пластин, содержащих квадратные решетки круглых отверстий. Отношение промежутка между отверстиями к радиусу отверстий меняется от 0.1 до 10. Построены зависимости эффективных модулей от ориентации растягивающей силы. В работе [9] представлены результаты испытаний на растяжение перфорированных пластин, радиус отверстий 1 мм, промежуток между отверстиями 1 мм. Решетки в пластинах сделаны под различными углами, от 0 до 45°. Экспериментально полученные величины эффективных модулей подтвердили аналитические оценки, выведенные в работе [7].

В данной работе рассмотрены аналитические оценки эффективных модулей для прямоугольных решеток (т.е. наименьшая ячейка которых имеет взаимно перпендикулярные стороны, и длины сторон не равны). Проведены испытания на растяжение пластин с решетками, радиус отверстий которых 1 мм, с промежутками между отверстиями 2 мм вдоль одной оси и 1 мм вдоль перпендикулярной. Ориентация решеток меняется от 0° до 90°. Получены экспериментальные значения эффективных модулей, проведено их сравнение с аналитическими оценками.

**2. Аналитический расчет эффективных модулей упругости.** Аналитическая оценка зависимости эффективного модуля от ориентации решетки рассчитывалась с помощью метода мультиполярных разложений, представленного в [7]. Метод заключается в том, что в плоской задаче упругости поле напряжений в материале вокруг круглого отверстия можно представить как линейную комбинацию сингулярных решений (ряд мультиполей):

$$g'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n t^n \quad (2.1)$$

где  $g(t)$  – аналитическая функция смещений,  $g_n$  – коэффициенты при членах ряда мультиполей,  $t$  – комплексная локальная координата точки на контуре отверстия.

Эффективные модули упругости определяются через обратную матрицу к матрице эффективных податливостей. В свою очередь, эффективные податливости  $S_{ijkl}$  определяются через соотношение

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = S_{ijkl} \tilde{\sigma}_{kl} \quad (2.2)$$

Здесь  $\tilde{\epsilon}$  – эффективная деформация, вызванная эффективным напряжением  $\tilde{\sigma}$ .

В работе [7] получены следующие выражения эффективных податливостей:

$$S_{1111} = \frac{1}{E} \left( 1 + \frac{2\pi}{S} (\text{Im } g_{-2}^{\sigma} - \text{Im } g_0^{\sigma} + \text{Im } g_{-2}^s - \text{Im } g_0^s) \right) \quad (2.3)$$

$$S_{1122} = \frac{1}{E} \left( -\nu + \frac{2\pi}{S} (\text{Im } g_{-2}^{\sigma} - \text{Im } g_0^{\sigma} - \text{Im } g_{-2}^s + \text{Im } g_0^s) \right) \quad (2.4)$$

$$S_{1112} = S_{1121} = \frac{2\pi}{ES} (\text{Im } g_{-2}^{\tau} - \text{Im } g_0^{\tau}) \quad (2.5)$$

$$S_{2211} = \frac{1}{E} \left( -\nu - \frac{2\pi}{S} (\text{Im } g_{-2}^{\sigma} + \text{Im } g_0^{\sigma} + \text{Im } g_{-2}^s + \text{Im } g_0^s) \right) \quad (2.6)$$

$$S_{2222} = \frac{1}{E} \left( 1 - \frac{2\pi}{S} (\text{Im } g_{-2}^{\sigma} - \text{Im } g_{-2}^s + \text{Im } g_0^{\sigma} - \text{Im } g_0^s) \right) \quad (2.7)$$

$$S_{2212} = S_{2221} = -\frac{2\pi}{ES} (\text{Im } g_{-2}^{\tau} + \text{Im } g_0^{\tau}) \quad (2.8)$$

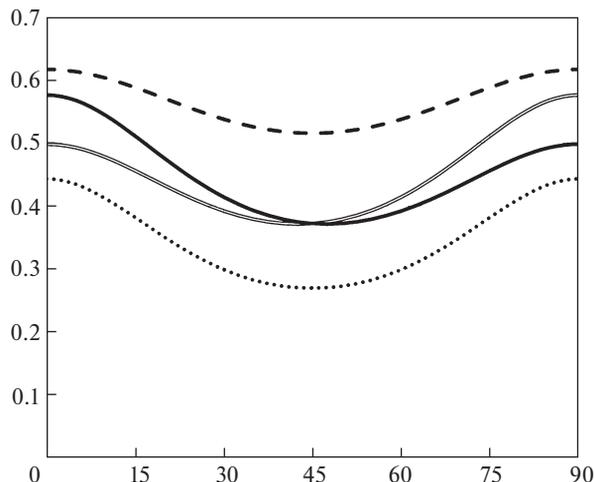


Рис. 1

$$S_{1211} = S_{2111} = -\frac{2\pi}{ES} (\operatorname{Re} g_{-2}^{\sigma} + \operatorname{Re} g_{-2}^s) \quad (2.9)$$

$$S_{1222} = S_{2122} = -\frac{2\pi}{ES} (\operatorname{Re} g_{-2}^{\sigma} - \operatorname{Re} g_{-2}^s) \quad (2.10)$$

$$S_{1212} = S_{1221} = S_{2112} = S_{2121} = \frac{1}{E} \left( \frac{1+\nu}{2} - \frac{2\pi}{S} \operatorname{Re} g_{-2}^{\tau} \right) \quad (2.11)$$

Здесь  $E$ ,  $\nu$  – упругие характеристики матрицы решётки,  $S = \operatorname{Im}(\bar{\omega}_I \omega_{II})$  – площадь основного параллелограмма решетки.

Получив коэффициенты разложения ряда для элементарных эффективных нагрузок в решетке, – всестороннее растяжение ( $g_n^{\sigma}$ ), чистый сдвиг ( $g_n^s$ ) и диагональный сдвиг ( $g_n^{\tau}$ ), – рассчитываются эффективные податливости решетки, а отсюда матрица упругих модулей.

На рис. 1 представлены зависимости эффективных модулей упругости по отношению к модулю упругости материала. Сплошная и двойная линии соответствуют эффективным модулям решетки с промежутками 2 и 1 мм (т.е. с периодами 4 и 3 мм), для каждой из осей. Пунктирная линия соответствует эффективным модулям квадратной решетки с промежутками 1 мм, штриховая – 2 мм, эти линии даны для сравнения.

**3. Проведение экспериментов.** Изготовлено 8 серий по 4 образца (всего 32 образца) из полиэтилена, размером  $180 \times 40 \times 0.65$  мм. В первой серии образцы сплошные, в остальных создана область, содержащая решетку отверстий (один из образцов в качестве примера представлен на рис. 2). Периоды решеток 3 и 4 мм, радиус отверстий 1 мм, таким образом, промежутки между отверстиями 1 и 2 мм по каждой из осей. Решетки созданы с помощью лазерной резки.

Образцы были подвержены растяжению с нагрузкой до 340 Н для сплошных образцов и до 230 Н для остальных.

**4. Результаты экспериментов.** Полученные значения эффективных модулей (ГПа) представлены на рис. 3. Расчетные данные представлены сплошной линией, данные экспериментов – маркерами “+”. Штриховая линия соответствует интерполированным усредненным экспериментальным данным.

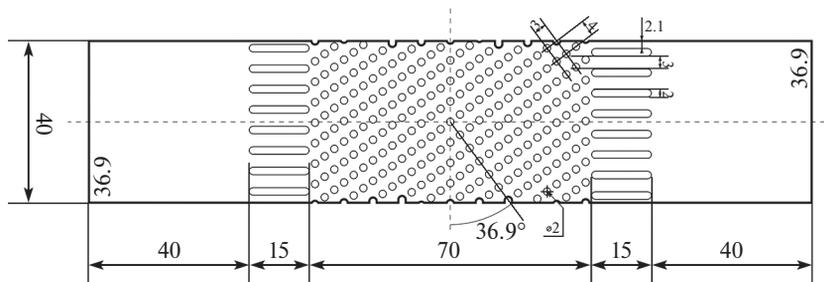


Рис. 2

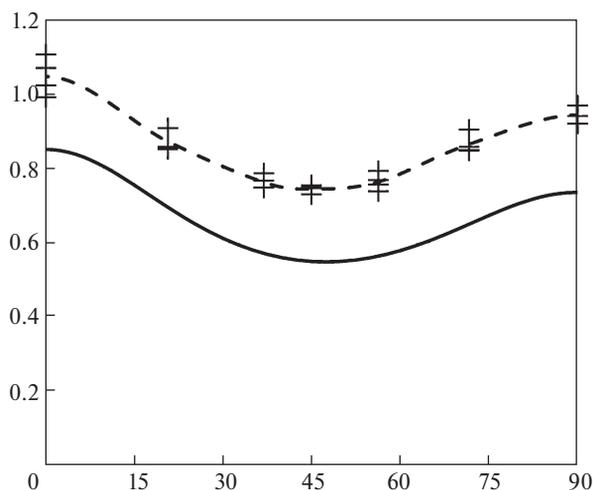


Рис. 3

Обратим внимание, что полученная усредненная экспериментальная кривая по форме достаточно близка к теоретической кривой, но она расположена выше приблизительно на 20%. Подробное изучение образцов показало, что в процессе изготовления образцов при прожигании отверстий края отверстий оплавляются (отверстия решетки образца под увеличением представлены на рис. 4). Наплыв приводит к уменьшению отверстий в среднем на 10% от запланированных размеров. Кроме того, происходит утолщение образца в окрестностях краев отверстий максимально до  $\approx 20\%$ .

Математическая модель скорректирована с учетом обнаруженных эффектов. Прежде всего, в модели радиус отверстий уменьшен до 0.9 мм, соответственно, промежутки между отверстиями увеличены до 1.2 и 2.2 мм.

Так как модель основана на плоской задаче теории упругости, утолщение образца в окрестностях отверстий будем рассматривать как увеличение жесткости материала. Поскольку модель предполагает однородность среды, увеличение жесткости в модели необходимо заменить модуль Юнга на эффективный. Размер жестких колец наплыва вокруг отверстий сравним с размерами промежутков между отверстиями, что позволяет предположить, что эффективный модуль по отношению к реальному будет бли-

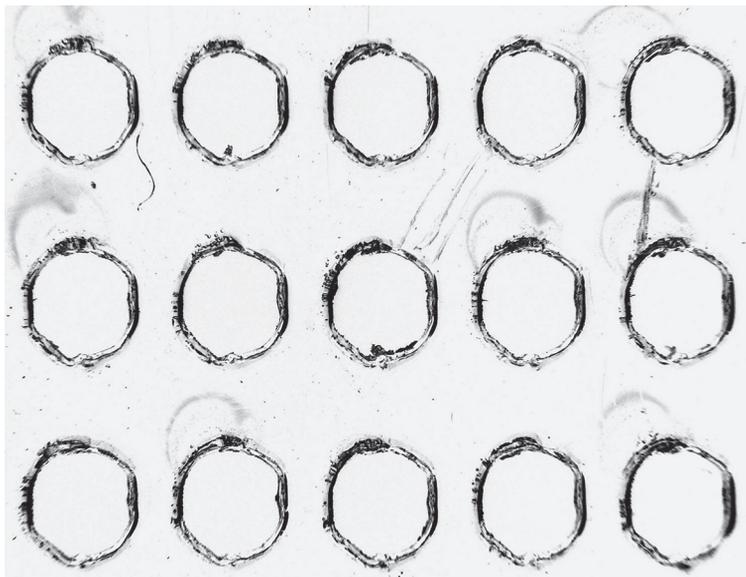


Рис. 4

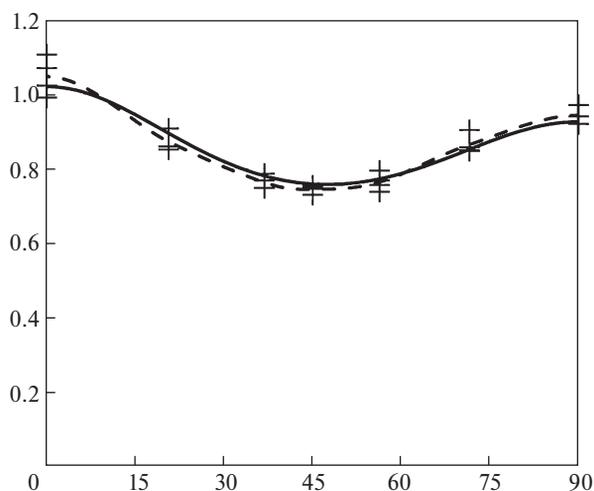


Рис. 5

зок к усредненной величине толщин образца по отношению к проектной толщине. Таким образом, эффективный модуль увеличен на 10%. Экспериментальные данные и скорректированная теоретическая кривая представлены на рис. 5.

**5. Заключение.** Спроектирован и изготовлен ряд образцов в виде пластин, содержащих двоякопериодические решетки с периодами 3 и 4 мм (с промежутками 1 и 2 мм между отверстиями радиусом 1 мм). Решетки имеют различные ориентации от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ . Проведены испытания образцов на растяжение, получены их эффективные модули упругости.

Проведенное сравнение полученных экспериментальных и теоретических (с учетом коррекции) результатов показало хорошее совпадение (отклонение до 3%).

Можно заключить, что представленная численная модель может быть использована для расчета эффективных упругих коэффициентов двоякопериодических систем круглых отверстий с неравными периодами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Joannopoulos J.D., Johnson S.G., Winn J.R., Meade R.D.* Photonic Crystals. Molding the Flow of Light. Second ed. Princeton: Princeton University Press, 2008. 286 p.
2. *Xiong L., Forsythe C., Jung M. et al.* Photonic crystal for graphene plasmons // Nat. Commun. 2019. V. 10. № 4780.  
<https://doi.org/10.1038/s41467-019-12778-2>
3. Zeolites and Zeolite-like Materials / Ed. by *Sels B.F., Kustov L.M.* Elsevier, 2016. 459 p.
4. Mesoporous Zeolites. Preparation, Characterization and Applications / Ed. by *García-Martínez J., Kunhao Li.* Weinheim: Wiley-VCH, 2015. 608 p.
5. *Williams J.J., Evans K.E., Walton R.I.* On the elastic constants of the zeolite chlorosodalite // Appl. Phys. Lett. 2006. V. 88. № 2. P. 021914.
6. Handbook of Porous Silicon, Second ed. / Ed. by *Canham L.* Cham: Springer, 2018. 1613 p.
7. *Мокряков В.В.* Исследование зависимости эффективных податливостей плоскости с решеткой круговых отверстий от параметров решетки // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3. № 3. С. 90–101.
8. *Мокряков В.В.* Исследование прочности упругой плоскости, содержащей бесконечную квадратную решетку круговых отверстий, при механическом нагружении // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 5. С. 105–114.
9. *Гольдштейн Р.В., Мокряков В.В., Ченцов А.В., Петровский В.Н., Андреев А.О., Глезер А.М., Либман М.А.* Исследование анизотропии эффективного модуля упругости стальных пластин с решеткой круглых отверстий // Деформация и разрушение материалов. 2017. № 1. С. 31–34.

УДК 539.4:622.023.23

## ПРИМЕНЕНИЕ ПОДХОДА МЕХАНИКИ КОНЕЧНЫХ ТРЕЩИН ДЛЯ ОЦЕНКИ РАЗРУШЕНИЯ КВАЗИХРУПКОГО МАТЕРИАЛА С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

© 2021 г. С. В. Сукнев

*Институт горного дела Севера им. Н.В. Черского СО РАН, Якутск, Россия*  
*e-mail: suknyov@igds.ysn.ru*

Поступила в редакцию 17.02.2020 г.

После доработки 20.02.2020 г.

Принята к публикации 25.02.2020 г.

Масштабный эффект прочности структурно-неоднородных материалов проявляется, в частности, в зависимости разрушающей нагрузки от размера зоны концентрации напряжений, возникающей вблизи материальных или геометрических неоднородностей (включений, пор, вырезов, галтелей). Хотя размер зоны концентрации напряжений определяется, в первую очередь, размерами и формой неоднородности, определенное влияние оказывают также условия нагружения. Кроме этого, прогностическая ценность теории разрушения определяется не только способностью учета масштабного эффекта, но и возможностью распространения теории на возможно более широкий круг краевых условий. Теоретически и экспериментально исследовано влияние краевых условий и диаметра отверстия на возникновение трещин отрыва у кругового отверстия в квазихрупком геоматериале при неравномерно распределенном сжатии с учетом масштабного фактора. На основе подхода механики конечных трещин предложен критерий квазихрупкого разрушения. Проведено сопоставление результатов расчета критического напряжения с полученными экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* квазихрупкое разрушение, геоматериал, масштабный эффект, отверстие, механика конечных трещин

**DOI:** 10.31857/S0572329921020161

**1. Введение.** Для геоматериалов и горных пород характерно влияние масштабного фактора на параметры прочности [1]. Наиболее сильно масштабный эффект проявляется в условиях концентрации напряжений у отверстий, полостей, выработок, когда характерный размер неоднородности напряжений сопоставим с размерами структурных составляющих материала. Для оценки прочности и прогнозирования разрушения структурно-неоднородных материалов используют различные нелокальные и градиентные модели со структурным параметром [2–9]. В последнее время получили распространение нелокальные критерии разрушения, реализующие подходы и методы теории критических расстояний и механики трещин [10–15].

Общим свойством нелокальных критериев является введение внутреннего размера (константы) материала  $d_0$ , характеризующего его структуру, что позволяет описать масштабный эффект, свойственный структурно-неоднородным материалам. На практике это дает возможность прогнозировать наступление разрушения при варьировании размера зоны концентрации напряжений  $L_c$ . При этом полагают, что за пределами малой области (зоны предразрушения) возле наиболее напряженной точки мате-

риал деформируется упруго. Размер этой области  $d_0$  определяется микроструктурой материала и является малым по отношению к размерам деформируемого тела. Появление трещины в наиболее напряженной области и ее рост не сопровождаются сколько-нибудь заметными неупругими деформациями, поэтому говорят, что имеет место хрупкое разрушение.

Применение подхода механики трещин (fracture mechanics) состоит в том, что зона предразрушения моделируется трещиной длиной  $d_0$ , которая предполагается изначально существующей в теле. Такую трещину называют фиктивной или воображаемой. Для трещины, находящейся в неоднородном поле напряжений, рассчитывается коэффициент интенсивности напряжений  $K$ , при достижении которым критического значения  $K_c$  происходит стагивание трещины (разрушение).

На первый взгляд, модель твердого тела с распределенными в нем микротрещинами (preexisting microcracks) выглядит вполне реалистичной и согласующейся с общепринятыми представлениями о реальном твердом теле, обладающем изначальной, присущей ему дефектностью (эти микротрещины часто называют трещинами Гриффитса). Но в действительности такая модель может быть использована только для оценки прочности твердого тела, содержащего большой ансамбль гладких дефектов, например, пор. Чтобы применить модель для оценки прочности однородного тела, содержащего одиночный дефект произвольного размера, трещины Гриффитса должны заполнять объем всего тела, что физически абсурдно. Поэтому в рамках модели твердого тела с распределенными микротрещинами могут рассматриваться только достаточно большие отверстия, вырезы или полости, размер которых намного превышает размер микротрещин, а также расстояние между ними.

Проблема существования в твердом теле воображаемых микротрещин снимается в механике конечных трещин (finite fracture mechanics) [16–18], получившей в последнее время широкое распространение [19–24]. В настоящей работе подход механики конечных трещин применяется для решения задачи о разрушении хрупкого или квазихрупкого материала с круговым отверстием под действием двухосного нагружения сжимающими и растягивающими усилиями.

**2. Постановка задачи.** Рассматривается пропорциональное нагружение изотропной однородной линейно-упругой пластины из хрупкого или квазихрупкого материала равномерно распределенными на бесконечности растягивающими  $\sigma_1 \equiv k_1 p$  и сжимающими  $\sigma_2 \equiv k_2 p$  напряжениями. В центре пластины находится малое круговое отверстие радиуса  $a$  (рис. 1). Требуется определить критическую нагрузку  $p_c$ , при которой в пластине будет достигнуто предельное состояние (образование трещин отрыва, исходящих от отверстия) в зависимости от диаметра отверстия.

Материал пластины характеризуется масштабным эффектом прочностных свойств. В присутствии концентратора напряжений (отверстия) эффективный нагруженный объем определяется размером зоны концентрации напряжений  $L_e$ . Стандартные механические свойства материала пластины характеризуются предельным напряжением  $\sigma_0$ , которое определяется при одноосном растяжении пластины без отверстия.

**3. Критерий разрушения.** В механике конечных трещин постулируется, что рост трещины, включая момент ее возникновения у выреза, происходит скачкообразно. Разрушение происходит, если энергия, высвобождаемая при скачкообразном изменении длины трещины, достигнет критического значения. Для хрупких материалов конечный размер приращения длины трещины, характеризующий зону предразрушения,

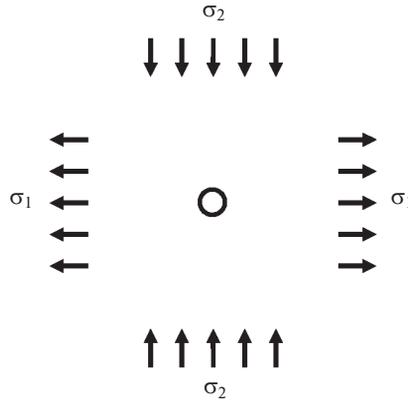


Рис. 1

рассматривается в качестве константы материала:  $\delta l = d = \text{const}$ . Условие разрушения имеет вид [10]:

$$\int_l^{l+d} K^2 dl = K_c^2 d \tag{3.1}$$

Важным преимуществом инкрементального условия разрушения (3.1) перед обычным дифференциальным условием  $K = K_c$  является то, что оно может быть применено не только в качестве условия роста уже существующей в теле трещины, но и для предсказания появления трещины у гладкого выреза в теле, не содержащем начальных трещин. Для этого в уравнении (3.1) достаточно принять  $l = 0$ . При этом не требуется делать никаких дополнительных допущений о существовании в теле фиктивных или воображаемых трещин, которые, как было показано выше, приводят к определенным физическим противоречиям.

Чтобы применить критерий разрушения (3.1) необходимо сначала найти зависимость коэффициента интенсивности напряжений от длины трещины, исходящей от выреза. Для рассматриваемой задачи можно воспользоваться решением Бови [25], но оно не обеспечивает сшивку с классической механикой сплошной среды при больших диаметрах отверстия. Покажем это на примере одноосного растяжения пластины с отверстием усилиями  $\sigma_1$ . Представим коэффициент интенсивности напряжений в виде

$$K = \sigma_1 \sqrt{\pi l} f(l/a)$$

Критическое напряжение

$$\sigma_c = \frac{K_c}{\sqrt{\pi l} f(l/a)} \tag{3.2}$$

В отсутствии отверстия ( $a = 0$ ) функция  $f(l/a)$  принимает значение 1. Поскольку при этом критическое напряжение характеризует не что иное, как прочность гладкого (без отверстия) образца  $\sigma_0$ , то можно записать:

$$\sigma_0 = \frac{K_c}{\sqrt{\pi l}} \tag{3.3}$$

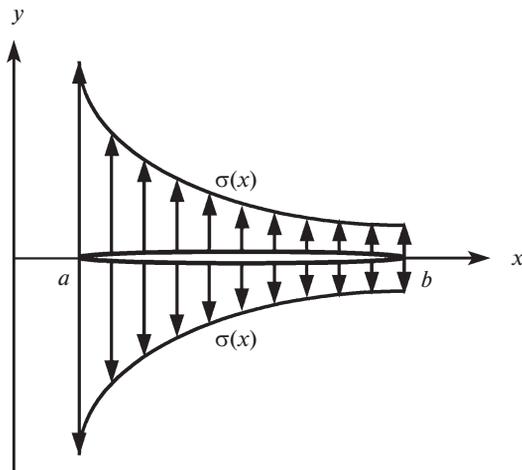


Рис. 2

С учетом формулы (3.3) запишем выражение (3.2) в виде

$$\sigma_c = \frac{\sigma_0}{f(l/a)} \quad (3.4)$$

Функцию  $f(l/a)$  можно интерпретировать как эффективный коэффициент концентрации напряжений, зависящий от радиуса отверстия и некоторого структурного параметра. Было бы справедливо ожидать, что для очень больших отверстий эффективный коэффициент концентрации напряжений совпадет с теоретическим коэффициентом  $K_t$ , рассчитанным по теории упругости. Однако в пределе  $l/a \rightarrow 0$  функция  $f(l/a)$  принимает значение 3.36, в то время как решение задачи Кирша о растяжении бесконечной плоскости с круговым отверстием дает  $K_t = 3$ .

Следует подчеркнуть, что эта ситуация характерна для любых вырезов, а не только для круговых отверстий. Действительно, в классическом пределе, когда размеры выреза намного больше  $l$ , мы приходим к задаче о краевой трещине длиной  $l$  в однородном поле растягивающих напряжений  $\sigma_1 \cdot K_t$ . Коэффициент интенсивности напряжений для такой трещины [26]

$$K = 1.12\sigma_1 K_t \sqrt{\pi l}$$

Отсюда, с учетом формулы (3.3), для критического напряжения получим выражение  $\sigma_c = \sigma_0 / (1.12K_t)$  вместо ожидаемого по классической теории упругости  $\sigma_c = \sigma_0 / K_t$ .

Чтобы обеспечить сшивку с классической механикой сплошной среды, воспользуемся приближенным способом вычисления коэффициента интенсивности напряжений, предложенным Тирошем [27]. Он рассмотрел круговое отверстие с одной трещиной, исходящей от контура, а для приближенного определения коэффициента интенсивности напряжений использовал известный прием [26], в соответствии с которым исходная задача заменяется задачей о трещине, к берегам которой приложено распре-

деленное давление  $\sigma_y(x)$  (рис. 2). Общее выражение для коэффициента интенсивности напряжений в этой задаче ( $K$  вычисляется в точке  $x = b$ ) имеет вид [28]:

$$K = \sqrt{\frac{2}{\pi(b-a)}} \int_a^b \sigma_y(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx \quad (3.5)$$

Напряжение  $\sigma_y(x)$  определяется из решения исходной задачи при отсутствии трещины, т.е. в данном примере – из решения задачи Кирша, которое имеет вид [29]:

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1}{2} \left( 2 + \frac{a^2}{x^2} + 3 \frac{a^4}{x^4} \right) \quad (3.6)$$

Подставив выражение (3.6) в формулу (3.5) и выполнив интегрирование, приняв  $b = a + l$ , получим:

$$K_1 = \sigma_1 \sqrt{\frac{\pi l}{2}} \left( 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{l}{a} \right)^{-3/2} + \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{l}{a} \right)^{-7/2} \left( 1 + \frac{l}{2a} + \frac{l^2}{8a^2} \right) \right) \quad (3.7)$$

Теперь подставим выражение (3.7) в левую часть уравнения (3.1) и выполним интегрирование в пределах  $[0, d]$ :

$$\int_0^d K_1^2 dl = \pi J_1 \left( \frac{a \sigma_1}{32} \right)^2 \quad (3.8)$$

где

$$J_1 = -1533 - 512\gamma + 256\gamma^2 + 1408\gamma^{0,5} + 640\gamma^{-0,5} - 384\gamma^{-1,5} + 384\gamma^{-2,5} - \\ - 242\gamma^{-1} - 11\gamma^{-2} - 156\gamma^{-3} + 93\gamma^{-4} - 18\gamma^{-5} + 75\gamma^{-6}, \quad \gamma = 1 + d/a$$

В отсутствие отверстия выражение (3.1) определяет условие разрушения гладкого образца. Отсюда, с учетом формулы (3.7), найдем связь между прочностными свойствами материала в механике конечных трещин:

$$K_c = \sigma_0 \sqrt{\pi d/4} \quad (3.9)$$

В классическом пределе  $d/a \rightarrow 0$  интегрирование дает следующий результат:

$$\int_0^d K_1^2 dl = \pi \left( \frac{3\sigma_1 d}{2} \right)^2 \quad \text{при} \quad d/a \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

Подставив результат интегрирования (3.10) в условие разрушения (3.1), получим выражение для критического напряжения:

$$\sigma_c = \frac{2K_c}{3\sqrt{\pi d}} \quad \text{при} \quad d/a \rightarrow 0 \quad (3.11)$$

Теперь подставим соотношение (3.9) в формулу (3.11) и убедимся в том, что  $\sigma_c = \sigma_0/K_t$ , где  $K_t = 3$  в соответствии с решением задачи Кирша. Таким образом, сшивка с классической механикой сплошной среды обеспечивается.

С учетом (3.8) и (3.9) из уравнения (3.1) получим формулу для расчета критического напряжения при произвольных значениях радиуса отверстия:

$$\sigma_c = \sigma_0 \frac{16(\gamma - 1)}{\sqrt{J_1}} \quad (3.12)$$

В отсутствие отверстия ( $a = 0$ ) критическое напряжение ожидаемо равно пределу прочности гладкого образца.

При одноосном сжатии пластины по оси  $x$  распределение напряжения  $\sigma_y$ , вдоль линии  $y = 0$  имеет вид [29]:

$$\sigma_y = \frac{\sigma_2}{2} \left( 3 \frac{a^4}{x^4} - \frac{a^2}{x^2} \right) \quad (3.13)$$

Здесь  $\sigma_2$  – приложенное сжимающее напряжение, которое принято положительным. Подставив выражение (3.13) в формулу (3.5), получим:

$$K_2 = \sigma_2 \sqrt{\frac{\pi l}{2}} \left( -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{l}{a} \right)^{-3/2} + \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{l}{a} \right)^{-7/2} \left( 1 + \frac{l}{2a} + \frac{l^2}{8a^2} \right) \right) \quad (3.14)$$

Теперь подставим выражение (3.14) в левую часть уравнения (3.1) и выполним интегрирование в пределах  $[0, d]$ :

$$\int_0^d K_2^2 dl = \pi J_2 \left( \frac{a \sigma_2}{32} \right)^2 \quad (3.15)$$

где

$$J_2 = 19 - 50\gamma^{-1} + 85\gamma^{-2} + 36\gamma^{-3} - 147\gamma^{-4} - 18\gamma^{-5} + 75\gamma^{-6}, \quad \gamma = 1 + d/a$$

С учетом выражений (3.9) и (3.15) из уравнения (3.1) получим формулу для расчета критического напряжения:

$$\sigma_c = \sigma_0 \frac{16(\gamma - 1)}{\sqrt{J_2}} \quad (3.16)$$

При  $d/a \rightarrow 0$  из формулы (3.16) следует  $\sigma_c = \sigma_0$ , т.е. обеспечивается сшивка с классической механикой сплошной среды. При уменьшении радиуса отверстия критическая величина приложенного давления, при котором на контуре отверстия образуются трещины отрыва, стремится к неограниченному значению. В действительности, это значение, очевидно, ограничено пределом прочности материала на сжатие, откуда следует, что существует критическое значение размера отверстия, ниже которого трещины отрыва на контуре отверстия не образуются.

При совместном действии растягивающей нагрузки  $\sigma_1 \equiv k_1 p$  и сжимающей нагрузки  $\sigma_2 \equiv k_2 p$  коэффициент интенсивности напряжений

$$K = K_1 + K_2, \quad (3.17)$$

где  $K_1$  и  $K_2$  определяются по формулам (3.7) и (3.14), соответственно. Подставив формулу (3.17) в левую часть уравнения (3.1) и выполнив интегрирование в пределах  $[0, d]$ , получим:

$$\int_0^d (K_1 + K_2)^2 dl = \pi k_1^2 J_1 \left( \frac{ap}{32} \right)^2 + 2\pi k_1 k_2 J_{12} \left( \frac{ap}{32} \right)^2 + \pi k_2^2 J_2 \left( \frac{ap}{32} \right)^2 \quad (3.18)$$

где

$$J_{12} = 1035 - 320\gamma^{0.5} - 704\gamma^{-0.5} - 192\gamma^{-1.5} + 192\gamma^{-2.5} + \\ + 110\gamma^{-1} - 91\gamma^{-2} - 60\gamma^{-3} - 27\gamma^{-4} - 18\gamma^{-5} + 75\gamma^{-6}, \quad \gamma = 1 + d/a$$

С учетом (3.9) и (3.18) из уравнения (3.1) получим формулу для расчета критической нагрузки  $p_c$ :

$$p_c = \chi C_0 \frac{16(\gamma - 1)}{\sqrt{k_1^2 J_1 + 2k_1 k_2 J_{12} + k_2^2 J_2}} \quad (3.19)$$

где  $\chi = \sigma_0 / C_0$ .

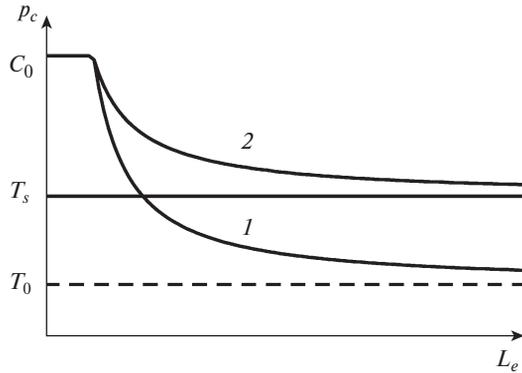


Рис. 3

**4. Размер зоны предразрушения.** Как уже было сказано, для хрупких материалов конечный размер приращения длины трещины, характеризующий размер зоны предразрушения, рассматривается в качестве константы материала, определяемой его структурой:  $d = d_0 = \text{const}$ . Для квазихрупких материалов в работе [30] предложено следующее выражение для размера зоны предразрушения:

$$d = d_0 + \beta L_e \tag{4.1}$$

Здесь  $\beta$  – безразмерный параметр, характеризующий пластичность материала. Для хрупких материалов  $\beta = 0$ , для пластичных материалов  $\beta \gg 1$ . При  $\beta \sim 1$  материал характеризуется умеренными пластическими свойствами. Первое слагаемое в выражении (4.1) характеризует собственно структуру материала, а второе отражает вклад неупругих деформаций. Таким образом, пластические свойства материала начинают проявляться при  $d > d_0$  и проявляются тем сильнее, чем больше  $d$  по отношению к  $d_0$ . Если  $d = d_0$  будем говорить о хрупком разрушении, если  $d > d_0$  – о квазихрупком разрушении, которое в пределе  $d \gg d_0$  переходит в вязкое разрушение. При вязком разрушении критическое напряжение не зависит от размера выреза, поэтому размер зоны предразрушения пропорционален размеру выреза и, соответственно, размеру  $L_e$  (при неизменных граничных условиях). При хрупком разрушении, напротив, размер зоны предразрушения не зависит от выреза и определяется структурой материала.

При одноосном сжатии поведение разрушающего напряжения, характеризующего образование трещин отрыва у выреза, имеет вид, изображенный на рис. 3. В соответствии с современными представлениями о реальном твердом теле, обладающем изначальной, присущей ему дефектностью малые искусственные дефекты, размеры которых сопоставимы с размерами структурных составляющих материала, не оказывают влияния на его прочность до тех пор, пока их размеры не достигнут определенного (критического) значения. Поэтому при малых значениях  $L_e$  материал не чувствует присутствия концентратора напряжений и разрушается как гладкий образец при достижении критическим давлением предела прочности при сжатии  $C_0$ . После достижения критического размера концентратора разрушающее давление  $p_c$  уменьшается, асимптотически приближаясь к напряжению  $T_0$ , равному пределу прочности материала при растяжении в случае хрупкого разрушения (кривая 1), и к напряжению  $T_s$  ( $C_0 > T_s > T_0$ ) в случае вязкого разрушения (кривая 2). Напряжение  $T_s$  связано с величиной параметра пластичности  $\beta$  в выражении (4.1).

Для описания квазихрупкого разрушения размер  $d$  будем определять по формуле (4.1), в которой размер зоны концентрации напряжений рассчитывается в точке максимума эквивалентного напряжения  $\sigma_e$  по формуле  $L_e = \sigma_e / |\text{grad } \sigma_e|$ . В рассматриваемой задаче  $\sigma_e = \sigma_y$  и  $L_e = a \frac{3k_1 + k_2}{7k_1 + 5k_2}$ . Соответственно выражение для параметра  $\gamma$  в формуле (3.19) принимает вид:

$$\gamma = 1 + \frac{d_0}{a} + \beta \frac{3k_1 + k_2}{7k_1 + 5k_2} \quad (4.2)$$

При значении параметра  $\gamma = 1$  формула (3.19) дает расчет критического напряжения согласно традиционному критерию разрушения.

Асимптотическое (при  $a \rightarrow \infty$ ) значение критического напряжения:

$$T_s = T_0 \frac{16(\gamma_s - 1)(3k_1 + k_2)}{\sqrt{k_1^2 J_1(\gamma_s) + 2k_1 k_2 J_{12}(\gamma_s) + k_2^2 J_2(\gamma_s)}} \quad (4.3)$$

где  $\gamma_s = 1 + \beta \frac{3k_1 + k_2}{7k_1 + 5k_2}$ ,  $T_0 = \frac{\chi C_0}{3k_1 + k_2}$  – асимптотическое значение критического напряжения для хрупкого материала. Для квазихрупких материалов, характеризующихся умеренными пластическими свойствами,  $T_s \approx T_0 (1 + \beta/2)$ .

Проверку применимости критерия квазихрупкого разрушения проведем на экспериментальных данных о разрушении плоских образцов с отверстием, подверженных неравномерно распределенному сжатию.

**5. Испытания образцов с круговым отверстием.** Программа экспериментальных исследований включала проведение двух серий испытаний образцов под действием сжимающей нагрузки, которая распределялась неравномерно (ступенчато) по верхней и нижней граням образца. Методика эксперимента описана в работе [31]. В качестве модельного материала использовали дигидрат сульфата кальция (двухводный гипс), приготовленный из водного раствора высокопрочного гипса марки ГВВС-16 (гипс 1) и из водного раствора строительного гипса марки Г-5 (гипс 2). Образцы представляли собой квадратные плиты размером  $200 \times 200$  мм или  $100 \times 100$  мм и толщиной 40 мм (гипс 1) и 36 мм (гипс 2). Перед испытанием в центре образцов высверливали круговые отверстия различного диаметра.

Для первой серии экспериментов было изготовлено по 5 образцов размером  $200 \times 200$  мм с отверстиями каждого диаметра: 1, 2, 5, 10, 15 и 20 мм. Нагрузка  $p$  прикладывалась к образцу через жесткие вставки размером 120 мм, помещенные между образцом и нагружающими плитами. При этом в центральной части образца (вне зоны влияния отверстия) реализовывалось достаточно однородное двухосное напряженное состояние: растяжение по горизонтальной оси и сжатие по вертикальной оси образца (рис. 1). В процессе испытания образцов в зонах концентрации растягивающих напряжений на контуре отверстия наблюдали внезапное образование трещин отрыва, которое сопровождалось локальной разгрузкой образца, что отражалось на диаграмме деформирования в виде появления зубца. Критическую нагрузку в момент образования трещин определяли по вершине зубца на диаграмме.

Для определения прочности материала при одноосном сжатии использовали такие же квадратные образцы размером  $200 \times 200$  мм без отверстия, нагружение производили через вставки размером 200 мм. По результатам испытания 4 образцов из гипса 1 определено среднее значение предела прочности 34.11 МПа; по результатам испытания 7 образцов из гипса 2 определено среднее значение предела прочности 11.53 МПа. Предел прочности материала при одноосном растяжении определяли прямым методом на образцах типа “dog-bone” (dog-bone shaped specimens). Было испытано по 10 образцов, изготовленных из гипса 1 и гипса 2. По результатам испытания образцов

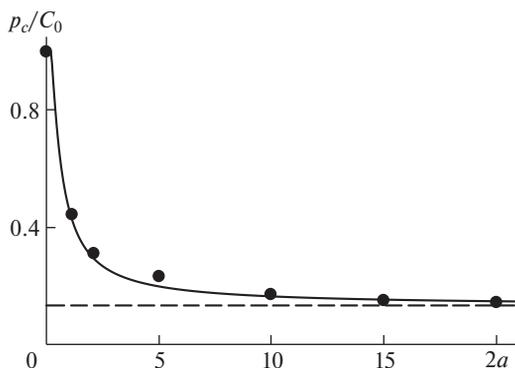


Рис. 4

из гипса 1 определено среднее значение предела прочности 5.38 МПа; для гипса 2 среднее значение предела прочности составило 2.61 МПа.

Значения  $k_1$  и  $k_2$  рассчитывали методом конечных элементов в центре образцов, нагруженных через вставки заданного размера и не содержащих отверстия. Для использованных в первой серии экспериментов вставок  $k_1 = 0.143$ ,  $k_2 = 0.764$ .

Во второй серии экспериментов испытывали образцы размером  $100 \times 100$  мм с отверстиями диаметром 2 мм. Нагружение образцов производили через вставки размером 20, 40, 60 и 80 мм. Было испытано от 5 до 7 образцов со вставками каждого размера. Также как в первой серии испытаний, в зонах концентрации растягивающих напряжений на контуре отверстия наблюдали образование трещин отрыва, которое носило внезапный характер и сопровождалось локальной разгрузкой образца. Рассчитанные для испытанных образцов значения  $k_1$ ,  $k_2$  и  $\alpha = k_1/k_2$  приведены в таблице.

**6. Результаты и обсуждение.** На рис. 4 представлены экспериментальные данные (точки) о величине нагрузки в момент образования трещин отрыва на контуре отверстия в зависимости от его диаметра  $2a$  [мм], полученные на образцах из гипса 1, и результаты расчета критического давления (кривая) по формуле (3.19) при  $\beta = 0$ . Размер  $d_0$  определялся исходя из наилучшего соответствия результатов расчета и экспериментальных данных. Он составил 0.6 мм и оказался сопоставимым с размером наиболее крупных пор. Штриховая прямая рассчитана согласно традиционному критерию разрушения при  $\gamma = 1$ .

На рис. 5 приведены экспериментальные данные (точки) и результаты расчета критического давления для гипса 2 при значениях  $\beta = 0$  (кривая 1) и  $\beta = 0.6$  (кривая 2). Размер  $d_0$  составил 1.0 мм. В соответствии с формулой (4.3), напряжение  $T_s$  в первом случае равно  $T_0$  (штриховая прямая), во втором случае  $T_s = 1.3T_0$  (сплошная прямая).

Рисунки 4, 5 иллюстрируют существенный масштабный эффект, т.е. влияние диаметра отверстия на локальную прочность материала. С его уменьшением критическое давление возрастает, достигая предела прочности на сжатие, с увеличением – асимптотически приближается к напряжению  $T_0$  для гипса 1 и к напряжению  $T_s$  для гипса 2. Такое поведение хорошо описывается модифицированным нелокальным критерием конечной трещины, в котором размер трещины  $d$  определяется по формуле (4.1).

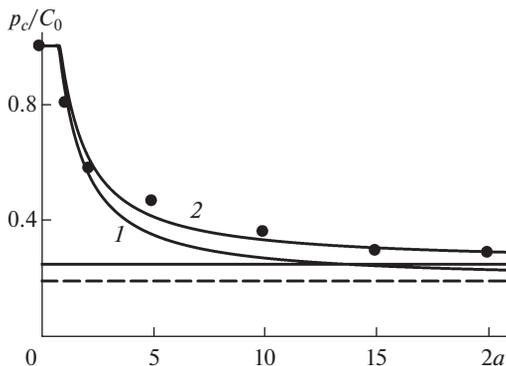


Рис. 5

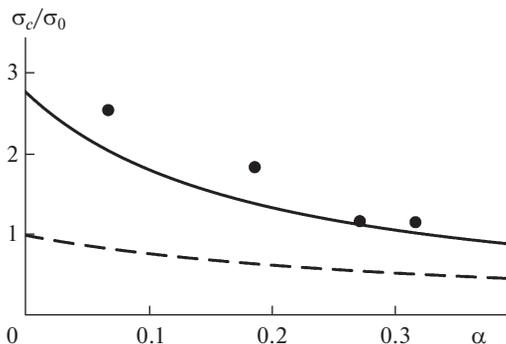


Рис. 6

Результаты второй серии экспериментов удобно представить в виде зависимости критической величины напряжения  $\sigma_2$  от величины двухосности нагружения, характеризуемой параметром  $\alpha = k_1/k_2$ . Из формулы (3.19) получим:

$$\sigma_c = \sigma_0 \frac{16(\gamma - 1)}{\sqrt{\alpha^2 J_1 + 2\alpha J_{12} + J_2}} \quad (6.1)$$

На рис. 6 представлены экспериментальные данные (точки) о величине напряжения  $\sigma_2$  в момент образования трещин отрыва на контуре отверстия в образцах из гипса 1 в зависимости от двухосности нагружения и результаты расчета критического напряжения по формуле (6.1). Для выполнения расчетов использовали параметры материала  $d_0$  и  $\beta$ , определенные по результатам первой серии испытаний. Штриховая кривая рассчитана согласно традиционному критерию разрушения при  $\gamma = 1$ . Результаты, полученные для гипса 2, представлены на рис. 7.

Как видно из рис. 4 хрупкое разрушение образцов из гипса 1, характеризующееся внезапным образованием на контуре отверстия и быстрым распространением вдоль оси сжатия трещин отрыва, может быть описано в рамках общепринятого подхода механики конечных трещин. Критерий разрушения хорошо описывает зависимость

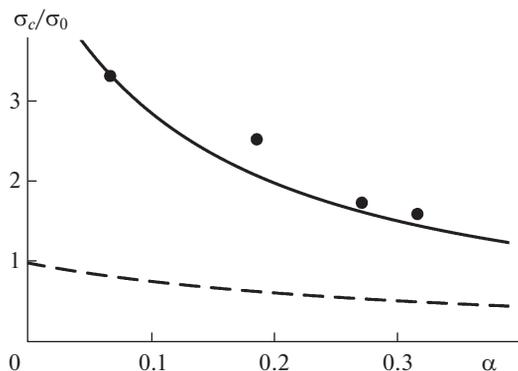


Рис. 7

критического давления от диаметра отверстия во всем исследованном диапазоне от 1 до 20 мм.

В то же время, его применение для описания экспериментальных данных, полученных на образцах из гипса 2, позволяет получить удовлетворительные оценки величины критического давления только при малых (1–2 мм) диаметрах отверстия (рис. 5). Результаты расчетов, выполненных для больших диаметров отверстия, дают заниженные значения критического давления. Полученные экспериментальные данные свидетельствуют о том, что при увеличении диаметра отверстия критическое давление асимптотически стремится к значению, превышающему на 30% значение, рассчитанное для упругого тела. При этом, как и в первом случае, разрушение образцов из гипса 2 характеризуется внезапным образованием на контуре отверстия и быстрым распространением вдоль оси сжатия трещин отрыва. Все это позволяет охарактеризовать разрушение данного материала как квазихрупкое, с развитой зоной предразрушения, размер которой значительно превышает характерный размер структуры материала  $d_0$ . Такое поведение хорошо описывается модифицированным критерием конечной трещины, в котором структурный параметр определяется по формуле (4.1).

Из рис. 6, 7 видно, что модифицированный критерий конечной трещины также хорошо описывает хрупкое и квазихрупкое разрушение материалов с круговым отверстием при изменении условий нагружения (краевых условий).

**7. Заключение.** Теоретически и экспериментально исследовано хрупкое и квазихрупкое разрушение геоматериалов с круговым отверстием различного диаметра при неравномерно распределенном сжатии, и выполнен анализ возможности применения подхода механики конечных трещин для оценки разрушающей нагрузки. При хрупком разрушении, когда размер зоны предразрушения является константой материала и определяется его структурой, общепринятый критерий конечной трещины хорошо описывает масштабный эффект прочности, проявляющийся в зависимости критической нагрузки от размера зоны концентрации упругих напряжений. Показано, что применение подхода механики конечных трещин может быть распространено на случай квазихрупкого разрушения с развитой зоной предразрушения. В модифицированном критерии «структурный» параметр представляется в виде суммы двух слагаемых. Первое из них характеризует собственно структуру материала и является константой, а второе отражает формирование зоны неупругих деформаций, или зоны поврежденности, и зависит от пластических свойств материала, геометрии концентратора напряжений (отверстия, полости, выработки) и условий нагружения (краевых условий). На основе проведенных исследований установлены закономерно-

Таблица 1.

Размер образца, мм	Размер вставки, мм	$k_1$	$k_2$	$\alpha$
100	20	0.110	0.349	0.317
100	40	0.164	0.602	0.272
100	60	0.143	0.764	0.187
100	80	0.060	0.883	0.068

сти образования трещин отрыва на контуре отверстия, и показано хорошее соответствие результатов расчета критической нагрузки по модифицированному критерию конечной трещины и полученных экспериментальных данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-05-00323). Автор выражает благодарность А.И. Рукавишникову и Н.В. Попову за помощь в подготовке образцов и проведении испытаний.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осипенко Н.М.* О масштабной зависимости трещиностойкости структурированных тел (на примере морского ледяного покрова) // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 5. С. 70–85.
2. *Mikhailov S.E.* A functional approach to non-local strength condition and fracture criteria // Eng. Fract. Mech. 1995. V. 52. P. 731–754.
3. *Петров Ю.В., Груздков А.А., Братов В.А.* Структурно-временная теория разрушения как процесса, протекающего на разных масштабных уровнях // Физическая мезомеханика. 2012. Т. 15. № 2. С. 15–21.
4. *Lecampion B.* Modeling size effects associated with tensile fracture initiation from a wellbore // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. 2012. V. 56. P. 67–76.
5. *Корнев В.М., Зиновьев А.А.* Модель квазихрупкого разрушения горных пород // ФТПРПИ. 2013. № 4. С. 74–82.
6. *Васильев В.В., Лурье С.А.* О корректных нелокальных обобщенных теориях упругости // Физическая мезомеханика. 2016. Т. 19. № 1. С. 47–59.
7. *Ревуженко А.Ф.* Об одном варианте линейной теории упругости со структурным параметром // ПМТФ. 2016. Т. 57. № 5. С. 45–52.
8. *Кулиев В.Д., Морозов Е.М.* Градиентный деформационный критерий хрупкого разрушения // ДАН. 2016. Т. 470. № 5. С. 528–530.
9. *Кургузов В.Д.* Сравнительный анализ критериев разрушения искусственных строительных материалов и горных пород // ФТПРПИ. 2019. № 5. С. 79–89.
10. *Taylor D.* The theory of critical distances: a new perspective in fracture mechanics. Oxford: Elsevier, 2007. 284 p.
11. *Negru R., Marsavina L., Voiconi T., Linul E., Filipescu H., Belgiu G.* Application of TCD for brittle fracture of notched PUR materials // Theor. Appl. Fract. Mech. 2015. V. 80. P. 87–95.
12. *Li W., Susmel L., Askes H., Liao F., Zhou T.* Assessing the integrity of steel structural components with stress raisers using the Theory of Critical Distances // Eng. Fail. Anal. 2016. V. 70. P. 73–89.
13. *Fuentes J.D., Cicero S., Procopio I.* Some default values to estimate the critical distance and their effect on structural integrity assessments // Theor. Appl. Fract. Mech. 2017. V. 90. P. 204–212.
14. *Justo J., Castro J., Cicero S., Sánchez-Carro M.A., Husillos R.* Notch effect on the fracture of several rocks: Application of the Theory of Critical Distances // Theor. Appl. Fract. Mech. 2017. V. 90. P. 251–258.
15. *Taylor D.* The Theory of Critical Distances applied to multiscale toughening mechanisms // Eng. Fract. Mech. 2019. V. 209. P. 392–403.
16. *Leguillon D.* Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch // Eur. J. Mech. A/Solids. 2002. V. 21. P. 61–72.

17. *Pugno N.M., Ruoff R.S.* Quantized fracture mechanics // *Philos. Mag.* 2004. V. 84. P. 2829–2845.
18. *Taylor D., Cornetti P., Pugno N.* The fracture mechanics of finite crack extension // *Eng. Fract. Mech.* 2005. V. 72. P. 1021–1038.
19. *Yavari A., Wnuk M.P.* Finite Fracture Mechanics for fractal cracks // *IUTAM Symposium on Scaling in Solid Mechanics. Iutam Bookseries.* V. 10. Dordrecht: Springer, 2009. P. 223–231.
20. *Carpinteri A., Cornetti P., Sapora A.* Brittle failures at rounded V-notches: a finite fracture mechanics approach // *Int. J. Fract.* 2011. V. 172. P. 1–8.
21. *Sapora A., Mantič V.* Finite Fracture Mechanics: a deeper investigation on negative  $T$ -stress effects // *Int. J. Fract.* 2016. V. 197. P. 111–118.
22. *Weißgraeber P., Leguillon D., Becker W.* A review of Finite Fracture Mechanics: crack initiation at singular and non-singular stress raisers // *Arch. Appl. Mech.* 2016. V. 86. P. 375–401.
23. *Strobl M., Dowgiatło P., Seelig T.* Analysis of Hertzian indentation fracture in the framework of finite fracture mechanics // *Int. J. Fract.* 2017. V. 206. P. 67–79.
24. *Martin E., Leguillon D., Carrère N.* Finite Fracture Mechanics: a useful tool to analyze cracking mechanisms in composite materials // *The structural integrity of carbon fiber composites.* Cham: Springer, 2017. P. 529–548.
25. *Bowie O.L.* Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole // *Journal of Mathematics and Physics.* 1956. V. 35. P. 60–71.
26. *Хеллан К.* Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.
27. *Tirosh J.* On the tensile and compressive strength of solids weakened (strengthened) by an inhomogeneity // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1977. V. 44. P. 449–454.
28. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
29. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1984. Т. 2. 560 с.
30. *Сукнев С.В.* Нелокальные и градиентные критерии разрушения квазихрупких материалов при сжатии // *Физическая мезомеханика.* 2018. Т. 21. № 4. С. 22–32.
31. *Сукнев С.В.* Разрушение хрупкого геоматериала с круговым отверстием при двухосном нагружении // *ПМТФ.* 2015. Т. 56. № 6. С. 166–172.

УДК 539.3

## ВИБРОАКУСТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ ЗАПОЛНЕНИЯ ДЕФЕКТОВ В СТЕРЖНЯХ И ПЛАСТИНАХ

© 2021 г. И. М. Лебедев<sup>а</sup>, М. Н. Перельмутер<sup>а</sup>, А. Л. Попов<sup>а,\*</sup>,  
Д. А. Челобеев<sup>а</sup>, Е. И. Шифрин<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: popov@iptmnet.ru

Поступила в редакцию 25.04.2020 г.

После доработки 25.07.2020 г.

Принята к публикации 07.08.2020 г.

Диагностика дефектов является первым шагом к их “залечиванию” — частичному или полному устранению влияния дефектов на напряженно-деформированное состояние конструкции. В работе рассмотрено “залечивание” полостных дефектов путем заполнения различными материалами. Оценка эффективности такого залечивания производится по виброакустическим критериям на примерах кольцевых дефектов в стержне и малого отверстия в пластине.

*Ключевые слова:* стержень, пластина, дефект, заполнение, продольные колебания, спектр, концентрация напряжений

DOI: 10.31857/S0572329921020112

**1. Введение.** Актуальным для разных областей техники является не только диагностика дефектов в конструкциях, но и их “залечивание”, например, путем заполнения различными материалами. Очевидно, что полноценное заполнение полостных дефектов основным материалом не создает концентрации напряжений в месте залечивания, однако некоторые способы такого заполнения, такие как сварка или наплавка, повреждают окрестность исправляемого дефекта, создавая ослабленную зону и тем самым фактически расширяя дефект. Ликвидировать ослабленную зону можно только применив термическую обработку всей конструкции в целом. Более щадящие способы заполнения, такие как пайка и клеивание, часто не позволяют использовать для заполнения основной материал конструкции. Подбор альтернативного материала должен осуществляться с учетом условия минимизации концентрации напряжений после залечивания. В статье рассматривается эффективность такого залечивания на примере кольцевых дефектов в стержне и малого отверстия в пластине по виброакустическим критериям на основе спектров частот продольных колебаний стержня и концентрации напряжений по контуру дефекта в пластине при прохождении по ней плоской изгибающей волны.

**2. Дефекты в виде кольцевых проточек в стержне круглого поперечного сечения.** В качестве первой модели для залечивания дефектов рассмотрим металлический стержень круглого поперечного сечения с искусственно созданными дефектами — кольцевыми проточками малой протяженности и глубины. На рис. 1,а приведен эскиз этого стержня с размерами в мм и обозначениями мест расположения проточек, а на рис. 1,б — фото одной из проточек протяженностью 0.6 мм и глубиной 1 мм.

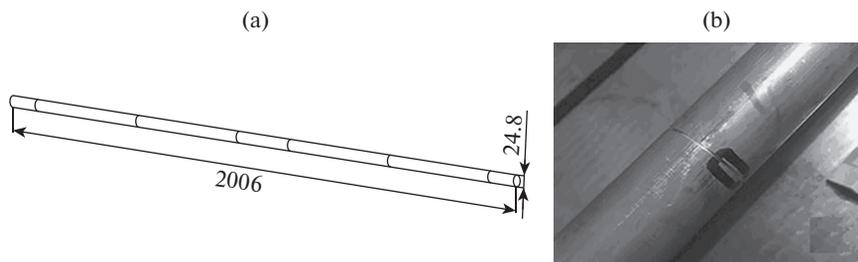


Рис. 1

Возбуждение продольных колебаний стержня осуществлялось ударом шарика из закаленной стали по одному из торцов подвешенного на двух нитях стержня. Регистрация колебаний производилась бесконтактно микрофоном по звукоизлучению с другого торца стержня. Аналоговый сигнал с микрофона, пропорциональный среднему акустическому давлению на площади мембраны микрофона, подавался на спектроанализатор, а с него – в компьютер, где сохранялся в форме оцифрованных амплитудно-временной и амплитудно-частотной зависимостей (АЧЗ). На рис. 2,а показана схема экспериментальной установки (1 – стержень, 2 – шарик, 3 – нити подвесов, 4 – измерительный микрофон, 5 – спектроанализатор А19-У2, 6 – персональный компьютер), а на рис. 2,б,с – графические отображения характерных временной (б) и амплитудно-частотной (с) зависимостей колебаний стержня из алюминиевого сплава Д16, построенные программным обеспечением ZETLAB спектроанализатора. Значения  $t$  по оси абсцисс на рис. 2,б – секунды, значения  $f$  на рис. 2,с – в Гц; значения  $U$  по осям ординат отложены в мВ электрического сигнала, передаваемого с микрофона. На рис. 2,б виден момент начала регистрации сигнала после ударного воздействия и фрагмент его в записи на протяжении 0.2 с. Из рис. 2,с видно, что расстояния между пиками в спектре частот колебаний стержня практически одинаковы, что характерно для спектра свободных продольных колебаний стержня [1].

При наличии небольших дефектов измеренный спектр продольных колебаний стержня визуально повторяет картину, изображенную на рис. 2,с. Для оценки отличий частот колебаний стержня с дефектами от частот бездефектного стержня приведена табл. 1, в которой сопоставлены 14 первых, наиболее заметных, частот соответствующих спектров. В первой строке табл. 1 приведены номера частот  $n$  в порядке возрастания, во второй – значения частот бездефектного стержня, в третьей строке – значения частот стержня с тремя парами кольцевых проточек протяженностью 0.6 мм, расположенных симметрично середины оси стержня на расстояниях 100, 500 и 900 мм от торцов стержня. Проточки, находящиеся на расстояниях 100 и 900 мм от торцов стержня, были сделаны глубиной 1 мм, а проточки, находящиеся на расстояниях 500 мм от торцов стержня, – глубиной 1.5 мм. Такое расположение дефектов позволило из спектра собственных частот стержня со свободными концами выделить собственные частоты для свободного и жестко-свободного стержня половинной длины, используемые в примененном методе диагностики множественных дефектов по двум спектрам продольных колебаний стержня.

О наличии малых дефектов в стержне можно судить по присутствующим в табл. 1 небольшим отличиям в распределениях частот бездефектного стержня и стержня с дефектами. Так как эти отличия на фоне 10-килогерцовых частот малозаметны, то введены были их комбинации, показывающие, во-первых, отличие в распределении частот от равномерного с шагом, равным удвоенной первой частоте консольного стерж-

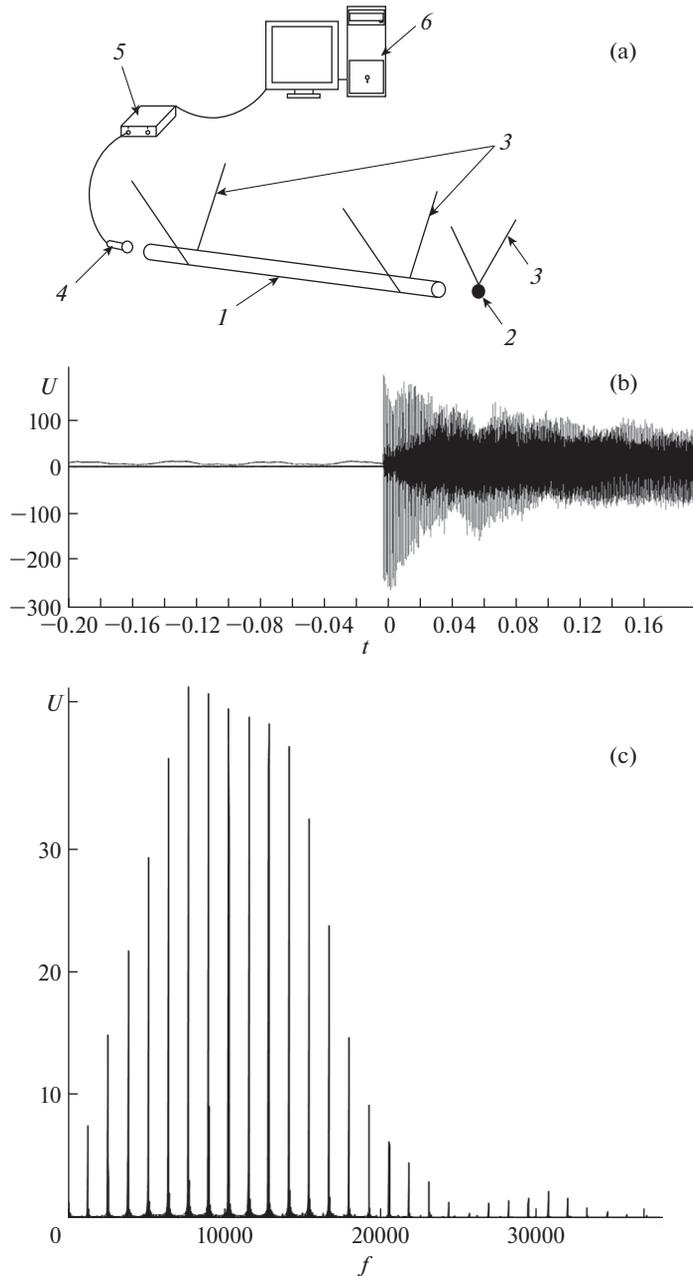


Рис. 2

ня половинной длины, а, во-вторых, изменения в этих отличиях, вызванные наличием дефектов. Данные комбинации задавались формулами:

$$\delta_k = f_1(2k - 1) - f_{2k-1}, \quad \eta_k = f_2k - f_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

первая из которых характеризовала отличия в частотах консольного стержня половинной длины, а вторая – в частотах стержня половинной длины со свободными краями.

Таблица 1

$n$	1	2	3	4	5	6	7
$f_{0n}/\Gamma_{\text{ц}}$	1297.8	2595.0	3893.2	5191.1	6488.5	7785.0	9080.9
$f_{dn}/\Gamma_{\text{ц}}$	1295.7	2591.8	3887.1	5188.6	6479.4	7765.9	9069.3
$n$	8	9	10	11	12	13	14
$f_{0n}/\Gamma_{\text{ц}}$	10377.1	11672.1	12965.3	14260.0	15551.0	16842.8	18133.0
$f_{dn}/\Gamma_{\text{ц}}$	10363.7	11658.8	12927.6	14242.5	15532.2	16821.3	18090.6

На рис. 3 показаны эти отличия (верхняя кривая на рис. 3 слева и пилообразная кривая на рис. 3 справа – для консольного стержня, нижние кривые слева и справа – для стержня со свободными краями): слева – для стержня без дефектов, справа – для стержня с тремя дефектами. Видно, что на частотах консольного стержня наличие дефектов почти не отразилось, в то время как распределение частот стержня со свободными краями превратилось из гладкой функции в пилообразную.

Отмеченный признак характеризует только факт наличия дефектов. Для нахождения их положения вдоль оси стержня используется алгоритм, разработанный в [2].

Основные идеи предложенного алгоритма состоят в следующем. Рассматривается конечно-элементная модель стержня. Предполагается, что дефект снижает жесткость содержащего ее элемента, но не влияет на плотность. Такое предположение является общепринятым в случае трещиноподобных и других локализованных дефектов [2]. Предполагается, что в результате эксперимента определены собственные значения  $\lambda_m^*$  и  $\mu_m^*$ ,  $m = 1, \dots, M$ , соответствующие свободным и жестко-свободным условиям на концах стержня. Собственные значения связаны с круговой частотой  $\omega$  соотношением  $\lambda = \rho\omega^2/E$ , где  $\rho$  – плотность,  $E$  – модуль Юнга материала стержня,  $\lambda$  равно  $\lambda_m^*$  или  $\mu_m^*$  в зависимости от рассматриваемых условий на концах стержня. Стержень разбивается на  $N$  элементов. Эти элементы могут не совпадать с конечными элементами, а содержать несколько конечных элементов. Модуль Юнга  $k$ -го элемента обозначим  $E_k$ .

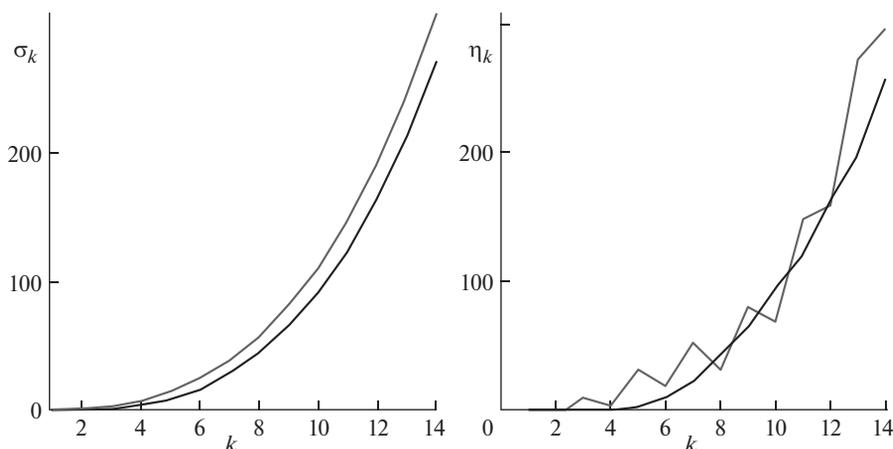


Рис. 3

Далее рассматривается последовательность минимизационных задач с целевыми функциями  $F_N(\mathbf{p})$ , где  $N \leq M$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_K)$ ,  $p_k = E_k/E$ ,  $K \leq N$ .

$$F_N(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^N \left[ \left( \frac{\lambda_k(\mathbf{p}) - \lambda_k^*}{\lambda_k^*} \right)^2 + \left( \frac{\mu_k(\mathbf{p}) - \mu_k^*}{\mu_k^*} \right)^2 \right]$$

Здесь  $\lambda_k(\mathbf{p})$  и  $\mu_k(\mathbf{p})$  – собственные числа, получаемые в результате конечно-элементного расчета для стержня со свободными и жестко-свободными концами, соответственно.

Минимизация функции  $F_N(\mathbf{p})$  осуществляется с помощью алгоритма Левенберга–Марквардта. В качестве начального приближения берется  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^0 = (1, \dots, 1)$ , что соответствует неповрежденному стержню. Поврежденными считаются элементы, у которых полученные в результате минимизации значения  $p_k$  оказываются меньше единицы. Для уточнения положения дефектов количество элементов удваивается, но переменными считаются только  $p_k$ , относящиеся к новым элементам, находящимся внутри старых элементов, которые на предыдущем шаге были определены как поврежденные. Процедура продолжается до стабилизации результатов по определению положения дефектов. В большинстве случаев при начальном количестве элементов равно  $N = 10$ , процедура продолжалась до использования 80 элементов.

Для расчета использовались спектры продольных колебаний стержня длиной 1003 мм со свободно-свободными и свободно-закрепленными концами (табл. 1). Эти спектры были извлечены из спектра колебаний стержня длиной 2006 мм со свободно-свободными концами. Как и ожидалось, численный расчет по алгоритму поиска дефектов не выявил дефектов. По первой собственной частоте было определено отношение модуля Юнга к плотности, которое использовалось в дальнейшем.

На рис. 4 представлены результаты идентификации описанных выше дефектов на стержне половинной длины. По оси абсцисс отложены номера элементов, а по оси ординат – величины  $1 - p_k$ , соответствующие податливостям элементов. Эти величины в местах обнаружения дефектов изображены черными столбиками. Помимо мест нахождения дефектов, виден большой всплеск у правого (свободного) конца стержня связанный со скачком жесткости на этом конце.

“Залечивание” дефектов состояло в закладке в проточки стального, алюминиевого и медного колец, полученных расплющиванием проволок из этих материалов до толщины 0.55 мм, затягиванием их в проточках и фиксации эпоксидной смолой. На рис. 5 приведены фотографии “залеченных” дефектов.

По спектрам частот продольных колебаний стержня с “залеченными” дефектами была проведена их идентификация на основе описанного выше алгоритма. Результаты идентификации представлены на рис. 6. Видно, что крайние дефекты перестали опознаваться.

Единственный всплеск на диаграмме рис. 6 сохранился у среднего, наиболее глубокого дефекта, “залеченного” материалом с иными свойствами (медью), чем алюминиевый сплав Д16.

Таким образом, заполнение дефектов металлическими вставками оказалось достаточно эффективным средством “залечивания” дефектов с точки зрения акустической регистрации изменений в спектре продольных колебаний стержня, вызванных дефектами, и диагностики на их основе мест расположения дефектов.

**2. Дефект в виде отверстия в пластине.** Второй моделью дефекта и его залечивания может служить задача о дефекте в виде отверстия в плоской пластине, заполняемого упругим материалом с теми же, или отличными от пластины механическими характеристиками. В статической постановке эта задача была рассмотрена в [3]. Задача о ди-

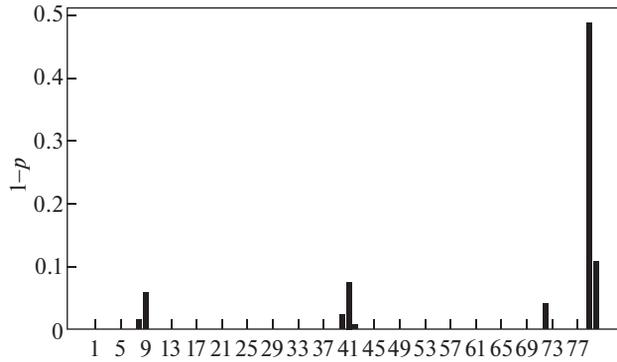


Рис. 4

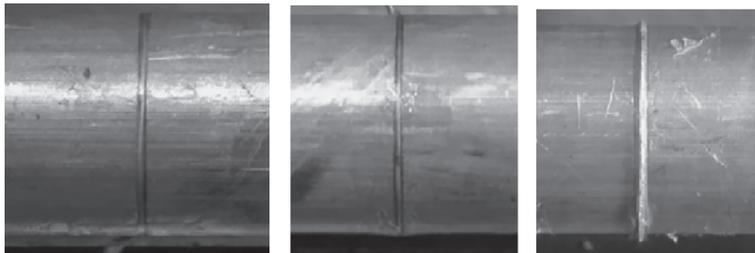


Рис. 5

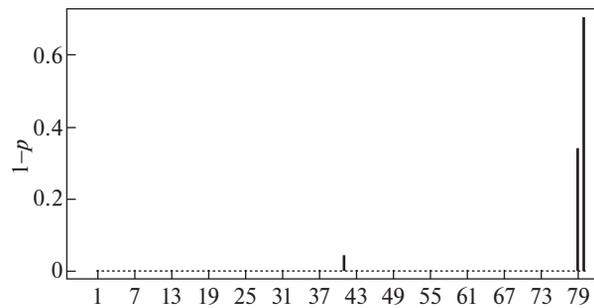


Рис. 6

фракции изгибной волны на круговом препятствии в пластине рассмотрена в [4]. Звуковое поле в акустической среде, контактирующей с пластиной, восстановленное по полю изгибных волн в пластине с включением, без учета обратной реакции среды на колебания пластины, рассмотрена в [5].

Установившиеся изгибные колебания основной пластины и включения толщины  $h$  описываются уравнениями

$$\Delta^2 W_j - s_j^4 W_j = 0, \quad s_j^4 = \frac{\rho_j \omega^2 h}{D_j}, \quad j = 1, 2$$

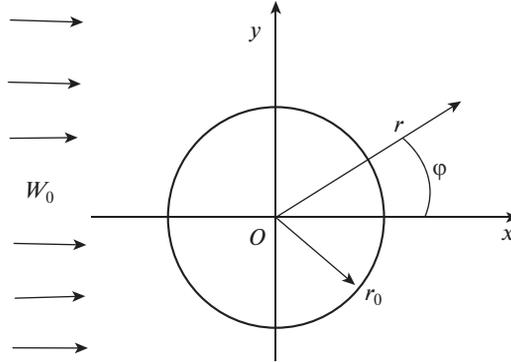


Рис. 7

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\omega$  – круговая частота,  $D_j$ ,  $W_j$ ,  $\rho_j$  – соответственно, цилиндрическая жесткость, амплитуда прогиба и плотность основной пластины ( $j = 1$ ) и заполнения ( $j = 2$ ).

Пусть по основной пластине распространяется изгибная волна (рис. 7):

$$W_0 = Ae^{is_1 r \cos \varphi}$$

где  $r$ ,  $\varphi$  – полярные координаты,  $A$  – заданная амплитуда.

Рассеянное поле ищется в виде суммы расходящихся и быстрозатухающих волн:

$$W_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\alpha_n H_n^{(1)}(s_1 r) + \beta_n K_n(s_1 r)] e^{in\varphi}$$

где  $H_n^{(1)}(\xi)$  – функция Ханкеля 1-го рода,  $K_n(\xi)$  – функция Макдональда  $n$ -го порядка.

Поле в упругом заполнителе представляется в виде

$$W_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\gamma_n J_n(s_2 r) + \eta_n I_n(s_2 r)] e^{in\varphi}$$

где  $J_n(\xi)$ ,  $I_n(\xi)$  – соответственно, функция Бесселя и модифицированная функция Бесселя  $n$ -го порядка.

Постоянные  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\gamma_n$ ,  $\eta_n$  определяются решением системы из четырех уравнений, полученных из граничных условий при  $r = r_0$ :

$$W_1 = W_2, \quad \frac{\partial}{\partial r} W_1 = \frac{\partial}{\partial r} W_2$$

$$D_1 M_1 = D_2 M_2, \quad D_1 L_1 = D_2 L_2$$

где  $W_1 = W_0 + W_s$  – суммарное поле вне включения,

$$M_j = -D_j \left[ \frac{\partial^2 W_j}{\partial r^2} + \nu_j \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial \varphi^2} \right) \right]$$

$$L_j = \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 W_j + (1 - \nu_j) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W_j}{\partial \varphi^2}, \quad D_j = \frac{E_j h^3}{12(1 - \nu_j)}, \quad j = 1, 2$$

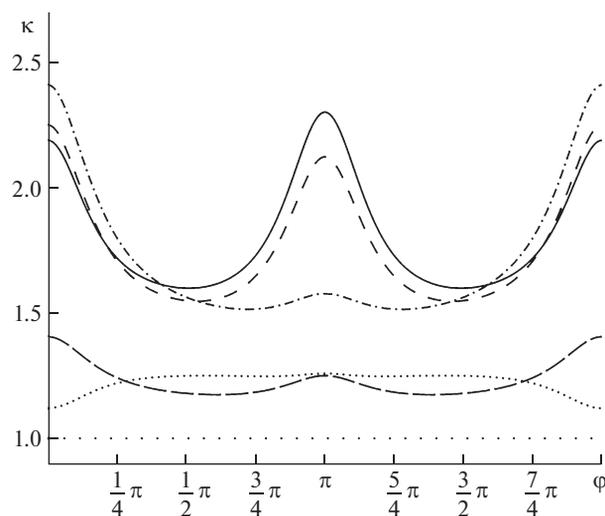


Рис. 8

Эти условия означают непрерывность функции прогиба, угла поворота, радиальной компоненты изгибающего момента и приведенной перерезывающей силы на окружности контакта основной пластины и заполнения.

В качестве условия залечивания примем снижение концентрации напряжений вокруг отверстия при его заполнении материалами с разными свойствами. Об этом можно судить по величине коэффициента концентрации напряжений, равного отношению окружного момента

$$M_t = -D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)$$

на кромке заполненного отверстия (при  $r = r_0$ ) к окружному моменту в том же месте пластины без отверстия.

Расчеты проводились для случая пластины толщиной  $h = 1$  мм с круглым отверстием радиуса  $r_0 = 10$  мм при падающей волне с частотой 1000 Гц. Длина изгибной волны в пластине при этих параметрах составляет около 100 мм.

На рис. 8 представлены кривые распределения по контуру отверстия коэффициента концентрации напряжений  $K$  при заполнении отверстия различными материалами: для стальной пластины и пустого отверстия (сплошная линия), при заполнении сталью (редкий пунктир), алюминием (частый пунктир), висмутом (штрих-пунктир), пластиком (короткие штрихи) и медью (длинные штрихи).

Как видно из рис. 8, максимальные коэффициенты концентрации имеют место в точках входа ( $\varphi = 0$ ) и выхода падающей волны ( $\varphi = \pi$ ). Численные значения приведены в табл. 2.

Как следует из табл. 2, при свободном отверстии максимум  $K = 2.3$ . Наименьшее значение коэффициента концентрации напряжений (исключая заполнение сталью) получается при заполнении отверстия в стали алюминием ( $K = 1.26$ ) и медью ( $K = 1.4$ ). При заполнении висмутом концентрация напряжений даже усиливается ( $K = 2.5$ ). Заполнение легким материалом (пластик) влияет на концентрацию напряжений незначительно.

Таблица 2

Материал заполнения	$\varphi$	
	0	$\pi$
Незаполненное отверстие	2.19	2.30
Сталь	1.00	1.00
Алюминий	1.12	1.26
Висмут	2.41	1.58
Пластик	2.25	2.12
Медь	1.40	1.25

На рис. 9 показано распределение коэффициента концентрации напряжений  $K$  для аналогичной пластины из алюминия для тех же условий, что и на рис. 8. Обозначения те же, что на рис. 8.

Численные значения максимальных коэффициентов концентрации напряжений приведены в табл. 3.

Видно, что в случае алюминиевой пластины при свободном отверстии  $K = 2.2$ . Наименьшее значение коэффициента концентрации напряжений (не считая заполнения алюминием) получается при заполнении отверстия сталью ( $K = 1.37$ ) и медью ( $K = 1.75$ ). При заполнении висмутом и пластиком концентрация напряжений усиливается ( $K = 2.64$  для висмута и  $K = 2.45$  для пластика).

Таким образом, подбирая физические и механические характеристики материала заполнения – плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона, можно значительно снизить концентрацию напряжений в окрестности дефекта. При этом остается некоторая свобода в выборе типа материала, которую можно использовать для улучшения

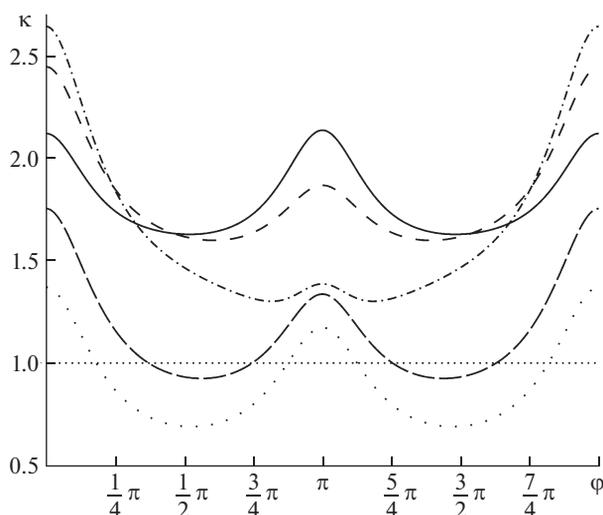


Рис. 9

Таблица 3

Материал заполнения	φ	
	0	π
Незаполненное отверстие	2.12	2.14
Сталь	1.37	1.17
Алюминий	1.00	1.00
Висмут	2.64	1.39
Пластик	2.45	1.87
Медь	1.75	1.34

технологической и эксплуатационной совместимости материалов основы и заполнителя.

Исследование И.М. Лебедева, М.Н. Перельмутера, А.Л. Попова и Д.А. Челюбеева выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-19-00616).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
2. Лебедев И.М., Шифрин Е.И. Решение обратной спектральной задачи для стержня, ослабленного поперечными трещинами, с помощью оптимизационного алгоритма Левенберга-Марквардта // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 4. С. 8–26.
3. Перельмутер М.Н., Попов А.Л., Челюбеев Д.А., Бухалов В.И. Анализ эффективности зазачивания дефектов при их заполнении различными материалами // Актуальн. пробл. прикл. матем., информат. и механ.: Сб. тр. Междунар. научн. конф., Воронеж, 11–13 ноября 2019 г. Воронеж: Научно-исслед. публ., 2020. С. 1488–1492.
4. Коненков Ю.К. Дифракция изгибной волны на круговом препятствии в пластине // Акустический журнал. 1964. Т. 10. С. 186–190.
5. Боровиков В.А., Попов А.Л., Челюбеев Д.А. Звуковое поле, возбужденное изгибными колебаниями упругой пластины с круглым включением // Акустический журнал. 2007. Т. 53. № 6. С. 749–759.

УДК 531.36: 531.53

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА,  
ПОДВЕШЕННОГО НА НИТИ В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

© 2021 г. А. П. Маркеев<sup>a,b,\*</sup>

<sup>a</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

<sup>b</sup> Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Москва, Россия

\*e-mail: anat-markeev@mail.ru

Поступила в редакцию 25.04.2020 г.

После доработки 25.07.2020 г.

Принята к публикации 07.08.2020 г.

Изучается плоское движение твердого тела в однородном поле тяжести. Тело подвешено на невесомой нерастяжимой нити, которая во все время движения остается натянутой. Предполагается, что длина нити имеет большую величину ( $\sim \epsilon^{-1/2}$ ), а расстояние от точки подвеса тела до его центра тяжести является малым ( $\sim \epsilon$ ). Уравнения движения представлены как уравнения системы с одной быстро вращающейся фазой. Эта система исследуется при помощи классической теории возмущений и КАМ-теории. Показано, что для всех значений времени движение мало (на величины  $\sim \epsilon$ ) отличается от медленных колебаний нити в окрестности нисходящей вертикали и вращения тела относительно точки подвеса с почти постоянной угловой скоростью. Мера множества движений, отличных от упомянутых движений, оценивается сверху величиной порядка  $\exp(-c/\epsilon)$  ( $c > 0 - \text{const}$ ).

*Ключевые слова:* система Гамильтона, маятник, колебания, вращения, устойчивость

DOI: 10.31857/S0572329921020124

**Введение.** Рассмотрим твердое тело весом  $mg$ , подвешенное при помощи невесомой нерастяжимой нити длиной  $\ell$ . Движение тела таково, что векторы скоростей всех его точек параллельны неподвижной вертикальной плоскости  $OXY$ , проходящей через центр тяжести  $C$  тела и его точку подвеса  $A$  (см. рис. 1). Считаем, что во все время движения нить натянута.

Рассматриваемая материальная система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем угол  $\theta$ , который составляет направление нити  $OA$  с вертикалью  $OX$ , и угол  $\psi$  между отрезком  $AC$  и горизонтальной осью  $OY$ .

Целью статьи является исследование эволюции движения на бесконечном интервале времени при следующих двух предположениях: расстояние  $r$  от точки  $A$  до центра тяжести  $C$  является малой величиной, длина нити  $\ell$  — большая величина. Анализ проводится при помощи классических и современных методов теории возмущений [1–4].

Динамика твердого тела на невесомой идеально гибкой нерастяжимой нити (струне) к настоящему времени получила значительное развитие. Подробно исследован вопрос о существовании, устойчивости и бифуркациях периодических, стационарных и прецессионных движений, рассмотрен также случай, когда струна не является идеаль-

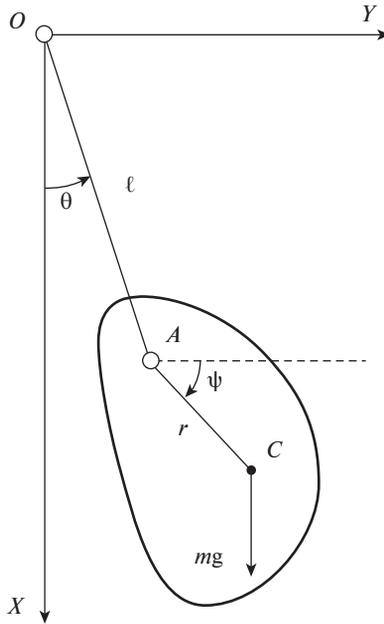


Рис. 1

ной [5–8]. В статьях [9, 10] исследованы некоторые задачи динамики твердого тела, в которых нить рассматривается как идеальная неударяющая связь.

**1. Уравнения движения.** Кинетическая и потенциальная энергия тела вычисляются по формулам

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J_c\dot{\psi}^2, \quad \Pi = -mgx_c \quad (1.1)$$

$$x_c = \ell \cos \theta + r \sin \psi, \quad y_c = \ell \sin \theta + r \cos \psi \quad (1.2)$$

Здесь точкой обозначается дифференцирование по времени  $t$ , а  $J_c$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр тяжести перпендикулярно плоскости  $OXY$ .

Из (1.1) и (1.2) имеем выражение для функции Лагранжа  $L = T - \Pi$ :

$$L = \frac{1}{2}(J_c + mr^2)\dot{\psi}^2 - mr\ell \sin(\theta + \psi)\dot{\psi}\dot{\theta} + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg(\ell \cos \theta + r \sin \psi)$$

В дальнейшем будет использоваться гамильтонова форма уравнений движения. Функция Гамильтона  $\Gamma$  задается равенством  $\Gamma = T + \Pi$ , в правой части которого величины  $\dot{\psi}$  и  $\dot{\theta}$  должны быть выражены через обобщенные импульсы  $p_\psi, p_\theta$ :

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$$

После несложных выкладок получаем функцию Гамильтона в следующем виде:

$$\Gamma = \frac{1}{2[J_c + mr^2 \cos^2(\theta + \psi)]} \left[ p_\psi^2 + 2\frac{r}{\ell} \sin(\theta + \psi) p_\psi p_\theta + \frac{J_c^2 + mr^2}{m\ell^2} p_\theta^2 \right] - mg(\ell \cos \theta + r \sin \psi) \quad (1.3)$$

**2. Малый параметр. Представление функции Гамильтона в виде ряда.** Вместо  $p_\psi$ ,  $p_\theta$  введем безразмерные импульсы  $p_\chi$ ,  $p_\delta$  при помощи канонического (с валентностью  $(m\ell\sqrt{g\ell})^{-1}$ ) преобразования вида

$$p_\psi = (m\ell\sqrt{g\ell})^{-1} p_\chi, \quad p_\theta = (m\ell\sqrt{g\ell})^{-1} p_\delta, \quad \psi = \chi, \quad \theta = \delta \quad (2.1)$$

и перейдем к новой (безразмерной) независимой переменной  $\tau$ :

$$\tau = (m\ell\sqrt{g\ell}/J_c)t \quad (2.2)$$

Новым переменным отвечает функция  $G$ , вычисляемая по формуле

$$G = J_c / (m^2 g \ell^3) \Gamma \quad (2.3)$$

где  $\Gamma$  – функция (1.3), в которой сделана замена (2.1).

В соответствии с принятыми (см. Введение) предположениями введем в уравнения движения малый параметр  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ), положив

$$r = \varepsilon a, \quad \ell = \varepsilon^{-1/2} \sqrt{J_c/m} \quad (2.4)$$

где  $a$  – величина порядка единицы, имеющая размерность длины.

Функция Гамильтона (2.3) представима в виде ряда по степеням параметра  $\varepsilon$ :

$$G = G_0 + \varepsilon G_1 + \varepsilon^2 G_2 + O(\varepsilon^3) \quad (2.5)$$

$$G_0 = \frac{1}{2} p_\chi^2, \quad G_1 = -\frac{1}{2} \frac{a^2}{\ell^2} p_\chi^2 \cos^2(\delta + \chi) + \frac{a}{\ell} p_\chi p_\delta \sin(\delta + \chi) + \frac{1}{2} p_\delta^2 - \cos \delta,$$

$$G_2 = -\frac{a}{\ell} \sin \chi + \frac{1}{2} \frac{a^4}{\ell^4} p_\chi^2 \cos^4(\delta + \chi) - \\ - \frac{a^3}{\ell^3} p_\chi p_\delta \sin(\delta + \chi) \cos^2(\delta + \chi) + \frac{1}{2} \frac{a^2}{\ell^2} p_\delta^2 \sin^2(\delta + \chi)$$

**3. Упрощение функции Гамильтона.** Система с функцией Гамильтона (2.5) имеет быстро вращающуюся фазу  $\chi$ . При помощи классической теории возмущений можно построить близкое к тождественному каноническое преобразование  $\chi$ ,  $\delta$ ,  $p_\chi$ ,  $p_\delta \rightarrow x$ ,  $y$ ,  $p_x$ ,  $p_y$ , которое исключает зависимость функции Гамильтона от быстрой фазы в любом конечном приближении по  $\varepsilon$ . Приведем явный вид канонической замены, исключающей быструю фазу в членах до второй степени  $\varepsilon$  включительно. Производящую функцию  $S(p_x, p_y, \chi, \delta)$  возьмем в виде

$$S = p_x \chi + p_y \delta + \varepsilon S_1(p_x, p_y, \chi, \delta) + \varepsilon^2 S_2(p_x, p_y, \chi, \delta) \quad (3.1)$$

Из (3.1) и соотношений

$$x = \frac{\partial S}{\partial p_x}, \quad y = \frac{\partial S}{\partial p_y}, \quad p_\chi = \frac{\partial S}{\partial \chi}, \quad p_\delta = \frac{\partial S}{\partial \delta}$$

следует, что

$$\chi = x - \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial p_x} + O(\varepsilon^2), \quad \delta = y - \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial p_y} + O(\varepsilon^2), \quad (3.2)$$

$$p_\delta = p_y + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial y} + O(\varepsilon^2)$$

$$p_\chi = p_x + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial x} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial S_2}{\partial x} - \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \frac{\partial S_1}{\partial p_x} - \frac{\partial^2 S_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial S_1}{\partial p_y} \right) + O(\varepsilon^3) \quad (3.3)$$

где  $S_i = S_i(p_x, p_y, x, y)$  ( $i = 1, 2$ ).

Подставив выражения (3.2) и (3.3) в правую часть равенства (2.5) и проведя несложные вычисления, получим, что для исключения быстрой фазы  $x$  из членов до второй степени включительно в разложении новой функции Гамильтона  $F(p_x, p_y, x, y, \varepsilon)$  в ряд по  $\varepsilon$  функции  $S_1$  и  $S_2$  следует взять такими:

$$S_1 = \frac{a}{\ell} p_y \cos(x + y) + \frac{1}{8} \frac{a^2}{\ell^2} p_x \sin(2x + 2y)$$

$$S_2 = -\frac{a}{2\ell p_x} \cos x - \frac{a}{8\ell p_x} \left( \frac{a^2}{\ell^2} p_x^2 + 8p_y^2 \right) \cos(x + y) - \frac{a}{2\ell p_x} \cos(x + 2y) +$$

$$+ \frac{1}{24} \frac{a^3}{\ell^3} p_x \cos(3x + 3y) - \frac{1}{16} \frac{a^2}{\ell^2} \left( \frac{a^2}{\ell^2} p_x + 6p_y \right) \sin(2x + 2y) - \frac{1}{256} \frac{a^4}{\ell^4} p_x \sin(4x + 4y)$$

Новая функция Гамильтона записывается в следующем виде:

$$F = \frac{1}{2} A_0 p_x^2 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{a^2}{\ell^2} p_x p_y + \varepsilon \left( \frac{1}{2} p_y^2 - \cos y \right) + \varepsilon^3 F_3(p_x, p_y, x, y, \varepsilon) \quad (3.4)$$

где введено обозначение

$$A_0 = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \frac{a^2}{\ell^2} + \frac{9}{32} \varepsilon^2 \frac{a^4}{\ell^4} \quad (3.5)$$

Структуру функции Гамильтона (3.4) можно упростить, если сделать унивалентное каноническое преобразование  $x, y, p_x, p_y \rightarrow w_0, q, I_0, p$  по формулам

$$x = w_0 - \frac{1}{2} \varepsilon \frac{a^2}{\ell^2} q, \quad y = q, \quad p_x = I_0, \quad p_y = p + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{a^2}{\ell^2} I_0 \quad (3.6)$$

Преобразование (3.6) уничтожает в функции (3.4) второе слагаемое, и в новых переменных уравнения движения задаются функцией Гамильтона

$$F = \frac{1}{2} A_0 I_0^2 + \varepsilon \left( \frac{1}{2} p^2 - \cos q \right) + \varepsilon^3 A_3(I_0, p, w_0, q, \varepsilon), \quad A_3 = F_3 - \frac{1}{8} \frac{a^4}{\ell^4} I_0^2 \quad (3.7)$$

Здесь  $F_3$  – функция из (3.4), в которой сделана замена (3.6).

Еще большего упрощения можно добиться, приняв в качестве независимой переменной величину  $\tau_* = A_0 \tau$ . Это приводит к делению функции Гамильтона (3.7) на  $A_0$ .

Если еще вместо  $\varepsilon$  ввести новый малый параметр  $\mu$  по формуле  $\mu = \varepsilon/A_0$ , то вместо функции  $F$  из (3.7) получим функцию  $H$  вида

$$H = H^{(0)}(I_0) + \mu H^{(1)}(p, q) + \mu^3 H^{(3)}(I_0, p, w_0, q, \mu) \quad (3.8)$$

$$H^{(0)} = \frac{1}{2} I_0^2, \quad H^{(1)} = \frac{1}{2} p^2 - \cos q \quad (3.9)$$

**4. Анализ системы с функцией Гамильтона (3.8).** В приближенной системе с функцией  $H^{(0)} + \mu H^{(1)}$  переменная  $I_0$  постоянна, а угловая координата  $w_0$  равномерно меняется со временем. Переменные же  $q, p$  отвечают движению математического маятника. Будем предполагать, что реализуется колебательный режим его движения. Амплитуду колебаний обозначим через  $q_{\max}$  ( $0 < q_{\max} < \pi/2$ ). Для описания колебаний введем переменные действие-угол  $I, w$ . Переменная  $I$  вычисляется [11] по формуле

$$I = \frac{8}{\pi} [E(k) - (1 - k^2)K(k)] \quad (4.1)$$

Здесь и далее используются общепринятые обозначения для эллиптических интегралов и функций. В (4.1)  $k = \sin(q_{\max}/2)$  ( $0 < k^2 < 1/2$ ).

Каноническое преобразование  $q, p \rightarrow w, I$  задается формулами [11]:

$$q = 2 \arcsin(ksn(u, k)), \quad p = 2kcn(u, k), \quad u = (2K(k)/\pi)w \quad (4.2)$$

в которых  $k = k(I)$  – функция, обратная функции (4.1).

Функцию Гамильтона (3.8) можно теперь записать в виде

$$H = H^{(0)}(I_0) + \mu H^{(1)}(I) + \mu^3 H^{(3)}(I_0, p, w_0, q, \mu) \quad (4.3)$$

Здесь функция  $H^{(1)} = -1 + 2k^2(I)$ , она представима сходящимся рядом по степеням  $I$ .

Переменные  $p$  и  $q$  в функции  $H^{(3)}$  должны быть заменены по формулам (4.2).

Функция (4.3) аналитична по всем своим аргументам и  $2\pi$  – периодична по  $w_0$  и  $w$ . При этом имеет место случай собственного вырождения [1], так как при  $\mu = 0$  в системе есть только одна отличная от нуля частота:

$$\frac{\partial H^{(0)}}{\partial I_0} = I_0 \neq 0 \quad (4.4)$$

Для производных функции  $H^{(1)}$  из (4.3) справедливы неравенства

$$\frac{\partial H^{(1)}}{\partial I} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I^2} \neq 0 \quad (4.5)$$

Действительно,

$$\frac{\partial H^{(1)}}{\partial I} = \frac{\pi}{2K(k)} = 1 - \frac{1}{8}I - \frac{3}{256}I^2 - \frac{5}{2048}I^3 + O(I^4) > 0$$

$$\frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I^2} = -\pi^2 \frac{E(k) - (1 - k^2)K(k)}{16k^2(1 - k^2)K^3(k)} = -\frac{1}{8} - \frac{3}{128}I - \frac{15}{2048}I^2 + O(I^3) < 0$$

Так как приближенная система с функцией Гамильтона  $H^{(0)} + \mu H^{(1)}$  удовлетворяет условиям (4.4), (4.5), то [2] в полной системе с функцией Гамильтона (4.3) переменные действия  $I_0, I$  при всех значениях  $t$  остаются вблизи своих начальных значений и отличаются от них на величины порядка  $\mu$  (или порядка  $\epsilon$ , что одно и то же). При этом мера инвариантных торов приближенной системы, разрушающихся при учете возмущения  $H^{(3)}$  в (4.3), имеет порядок  $\exp(-c/\epsilon)$  ( $c > 0 - \text{const}$ ).

*Основной результат анализа.* Из сказанного следует, что при малых  $\epsilon$  движение твердого тела, подвешенного на идеальной нити в однородном поле тяжести, устойчиво по отношению к возмущениям величин  $\theta, \dot{\theta}, \psi$ . В частности, если начальные значения  $\theta$  и  $\dot{\theta}$  имеют, например, порядок  $\epsilon^{1-\sigma}$  ( $0 < \sigma < 1$ ), то  $\theta$  и  $\dot{\theta}$  при всех  $t$  остаются малыми того же порядка.

**Замечание.** В статье [12], посвященной динамике маятника Максвелла, утверждается, что “отклонение маятника от вертикали имеют конечный размах при соответствующих сколь угодно малых начальных значениях координат и скоростей нити. Причиной этой неустойчивости является достаточно быстрое переходное движение маятника при перемене его движения снизу вверх”. В приведенной в статье [12] попытке обоснования этого утверждения содержатся неточности, а само утверждение ошибочно.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете) и в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 414 с.
2. Нейштадт А.И. Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно-периодических движений // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1016–1025.
3. Giacaglia G.E.O. Perturbation Methods in Non-Linear Systems. N.Y.etc. Springer, 1972. = Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
4. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
5. Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. М.: Наука, 1991. 330 с.
6. Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. Динамика быстровращающихся на струне тел и некоторые смежные вопросы (обзор) // Прикладная механика. 1994. Т. 30. № 8. С. 3–30.
7. Мирер С.А., Сарычев В.А. О стационарных движениях тела на струнном подвесе // Нелинейная механика: сб. статей. М.: Физматлит, 2001. С. 281–322.
8. Маркеев А.П. О периодических движениях твердого тела, подвешенного на нити в однородном поле тяжести // Вестник Удм. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 2. С. 245–260.
9. Иванов А.П. Об устойчивости перманентных вращений тела, подвешенного на струне, при наличии ударных взаимодействий // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 47–50.
10. Маркеев А.П. Об устойчивости периодического движения стержня, подвешенного на идеальной нити // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 4. С. 3–13.
11. Маркеев А.П. Теоретическая механика. Москва–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2007. 592 с.
12. Розенблат Г.М. О неустойчивости движения маятника Максвелла // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 5. С. 59–67.

УДК 539.3

## ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В АЛЮМИНИИ

© 2021 г. Н. А. Грачева<sup>а</sup>, М. В. Леканов<sup>а</sup>, А. Е. Майер<sup>а,\*</sup>, Е. В. Фомин<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

\*e-mail: mayer@csu.ru

Поступила в редакцию 17.11.2020 г.

После доработки 20.11.2020 г.

Принята к публикации 24.11.2020 г.

Разработана методика применения искусственных нейронных сетей для описания нелинейной связи компонент напряжений и деформаций (тензорное уравнение состояния) и начала пластического течения (гомогенная нуклеация дислокаций) в монокристаллах металлов на примере алюминия. Наборы данных для обучения нейронных сетей генерируются при помощи молекулярно-динамического (МД) моделирования однородной деформации репрезентативных объемов монокристалла. Рассматриваются осесимметричные деформированные состояния, когда ось симметрии совпадает с направлением [100] монокристалла. Обученные нейронные сети используются в качестве аппроксимирующих функций в рамках модели дислокационной пластичности, обобщенной на случай конечных деформаций. С ее помощью проводится моделирование распространения ударных волн, возникающих при соударении пластин. В случае наноразмерных пластин проводится сравнение с прямым МД-моделированием процесса. В идеальном монокристалле упругий предвестник сохраняет постоянную амплитуду, соответствующую порогу гомогенной нуклеации дислокаций, в то время как в деформированном монокристалле он имеет существенно меньшую амплитуду и быстро затухает с расстоянием.

*Ключевые слова:* ударные волны, уравнение состояния, пластическая деформация, монокристалл, молекулярно-динамическое моделирование, искусственные нейронные сети, гомогенная нуклеация дислокаций

DOI: 10.31857/S0572329921020082

**1. Введение.** Последнее десятилетие активно развивается экспериментальная методика исследования ударно-волновых процессов в тонких (порядка и меньше микрометра) пленках металлов под действием мощных фемтосекундных импульсов лазерного излучения [1–8]. Уменьшение времени воздействия и дистанции распространения ударных волн позволяет получить сильно неравновесные состояния вещества [9]. Такие состояния характеризуются аномально высокой откольной и сдвиговой прочностью [10]. Регистрируемые в экспериментах напряжения на упругом предвестнике достигают 7.5–12.5 ГПа для алюминия [1, 2, 7], 23 ГПа для хрома [8], 28 ГПа для железа [3] и даже 43 ГПа для тантала [6]. Столь высокие значения напряжений на предвестнике и соответствующей сдвиговой прочности объясняются сверхвысокими скоростями деформации в этих экспериментах – порядка  $10^9$  с<sup>-1</sup>. Инерционность развития пластической деформации позволяет материалу на короткое время зайти в область больших сдвиговых напряжений. В большинстве металлов пластическая релаксация

происходит за счет скольжения дислокаций, конечная плотность и скорость которых ограничивает скорость релаксации.

Развитие методов математического моделирования актуально для более полного понимания неравновесных ударно-волновых процессов, особенностей возникающего метастабильного состояния и динамики выхода из него. На малых пространственных и временных масштабах возможно непосредственное применение молекулярно-динамического (МД) моделирования возникновения и распространения ударной волны. Для исследования эволюции структуры волны в широком диапазоне пространственных масштабов необходимо развитие континуальных моделей.

Последовательная адаптация дислокационных моделей пластичности [11–14] на случай сверхвысоких скоростей деформации требует учета двух важных факторов. Первый фактор связан с большой по величине упругой деформацией, что приводит к нелинейному росту напряжений на упругой стадии. Как следствие, необходимо учитывать нелинейную зависимость давления и девиатора напряжений от деформации. Для давления это можно осуществить с помощью хорошо разработанного аппарата уравнений состояния, в том числе широкодиапазонных [15–17]. Для девиаторов такой аппарат отсутствует и в большинстве моделей используется линейный закон Гука [11, 18, 19]. Согласно результатам МД-моделирования [20] сдвиговая деформация влияет на давление, что не учитывается в существующих уравнениях состояния. Все это требует развития аппарата нелинейных тензорных уравнений состояния, связывающих тензоры напряжений и деформаций на нелинейной упругой стадии.

Второй фактор — возможность гомогенной нуклеации как дополнительного источника дислокаций в материале [21–23]. В большинстве случаев этот процесс подавлен по сравнению с размножением существующих дислокаций. В упругих предвестниках большой амплитуды он может реализовываться за счет сверхвысокой скорости деформации, дефицита существующих дислокаций и, как следствие, высокого уровня сдвиговых напряжений. Гомогенная нуклеация будет выступать ограничителем сдвиговых напряжений и амплитуды упругого предвестника. Согласно результатам МД-исследований [24–27] порог гомогенной нуклеации дислокаций сложным образом зависит от характера нагружения, в частности от направления сдвиговой деформации относительно кристаллографических осей. Для ударно-волновых задач важно, что порог нуклеации зависит от давления и температуры. Это требует нахождения порога нуклеации как функции тензора деформации и температуры.

В последние годы в механике материалов все более широкое распространение находит применение искусственных нейронных сетей [28–32] как мощного дополнительного инструмента, позволяющего повысить точность используемых моделей. Нейронные сети эффективны при анализе трендов данных и построении аппроксимаций сложных зависимостей, что позволяет использовать их при решении поставленных выше задач.

В данной работе мы используем МД-моделирование деформации репрезентативного объема монокристалла алюминия для исследования связи деформаций и напряжений и порога гомогенной нуклеации дислокаций. Рассматриваются осесимметричные деформированные состояния, которые реализуются в плоских ударных волнах. Состояние характеризуется двумя независимыми компонентами тензора деформаций. Ось симметрии совпадает с направлением [100] монокристалла. Полученные данные МД-моделирования используются для обучения нейронных сетей. Обученные нейронные сети выступают в качестве тензорного уравнения состояния и функции порога нуклеации (аппроксимируют эти сложные зависимости). Они используются в составе континуальной модели дислокационной пластичности. Результаты расчетов по модели сравниваются с прямым МД-моделированием распространения ударной волны и используются для анализа затухания упругого предвестника в алюминии в зависимости от начальной плотности дислокаций.

**2. Континуальная модель. 2.1. Кинематика деформации.** При высокоскоростном соударении пластин металлов от плоскости соударения распространяется ударная волна. За исключением краевых областей, в которых важна боковая разгрузка [33], ударная волна является плоской и приводит к одноосной деформации материала вдоль нормали к фронту волны (направим ось  $x_1$  вдоль этой нормали). За счет пластической релаксации напряженное состояние меняется от того, что соответствует одноосной упругой деформации, до состояния, близкого к гидростатическому случаю. Первое реализуется на упругом предвестнике, а второе — за фронтом ударной волны. Чтобы учесть этот переход будем рассматривать осесимметричный случай, когда упругие деформации в поперечных направлениях (вдоль  $x_2$  и  $x_3$ ) равны друг другу, но могут быть отличны от нуля и от деформации в продольном направлении (вдоль оси  $x_1$ ).

Эксперименты [1–3] и расчеты [13] показывают, что упругий предвестник ударной волны имеет большую амплитуду на малых расстояниях от плоскости соударения. Это значит, что упругие деформации могут быть большими и необходимо использовать формализм конечных деформаций. Также необходимо учитывать нелинейную зависимость давления и девиатора напряжений от деформации.

Рассмотрим деформацию, связанную с макроскопическим движением вещества. В результате перемещения макроскопических частей вещества (содержащих много атомов) точки с начальными координатами  $\mathbf{X}$  заняли текущие положения  $\mathbf{x}$ . Тензор градиента макроскопической деформации  $\mathbf{F}$  вводится как [34]

$$F_{ik} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \quad (2.1)$$

В начальном недеформированном состоянии этот тензор сводится к единичной матрице  $\mathbf{F}|_{t=0} = \mathbf{I}$  или  $F_{ik}|_{t=0} = \delta_{ik}$ , где  $\delta_{ik}$  — символы Кронекера. При одноосной деформации в плоской ударной волне продольная компонента  $F_{11}$  может быть рассчитана через текущую  $\rho$  и начальную  $\rho_0$  плотности как  $F_{11} = \rho_0/\rho$ , поперечные компоненты остаются единичными, а недиагональные компоненты — нулевыми. Поэтому вместо (2.1) запишем:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho_0/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Макроскопическая деформация  $\mathbf{F}$  представляется комбинацией упругой  $\mathbf{F}^e$  и пластической  $\mathbf{F}^p$  частей [35]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (2.3)$$

При известных  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{F}^p$  из (2.3) находится упругая часть деформации, определяющая действующие в материале напряжения. В начальном недеформированном состоянии  $\mathbf{F}^p|_{t=0} = \mathbf{I}$ , а его производная от времени определяется как [36]:

$$\dot{\mathbf{F}}^p = \dot{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{F}^p \quad (2.4)$$

где  $\dot{\mathbf{w}}$  есть тензор скоростей пластической деформации за счет скольжения дислокаций. В осесимметричном случае с учетом того, что пластическая деформация за счет

скольжения дислокаций не приводит к изменению объема, этот тензор сводится к следующей диагональной матрице:

$$\dot{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \dot{w} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{w}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{w}/2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

где  $\dot{w}$  есть скорость пластической деформации, которая будет определена далее. Из (2.4), (2.5) и начальных условий для  $\mathbf{F}^p$  следует, что этот тензор остается диагональным, причем  $F_{22}^p = F_{33}^p$  и

$$\dot{\mathbf{F}}^p = \begin{pmatrix} \dot{w}F_{11}^p & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{w}F_{22}^p/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{w}F_{22}^p/2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

С учетом диагональности  $\mathbf{F}^p$  из (2.2) и (2.3) следует:

$$\mathbf{F}^e = \begin{pmatrix} (F_{11}^p)^{-1} \rho_0/\rho & 0 & 0 \\ 0 & (F_{22}^p)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (F_{22}^p)^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Таким образом, при известной  $\dot{w}$  уравнения (2.6) и (2.7) позволяют найти компоненты упругого градиента деформации  $F_{11}^e$  и  $F_{22}^e$ . Саму упругую деформацию характеризуем тензором конечных деформаций Грина [34]:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}[(\mathbf{F}^e)^t \mathbf{F}^e - \mathbf{I}] \quad (2.8)$$

где  $t$  означает транспонирование. Из (2.7) и (2.8) получаем следующий диагональный вид для тензора деформаций:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[(F_{11}^e)^2 - 1] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}[(F_{22}^e)^2 - 1] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}[(F_{22}^e)^2 - 1] \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Выпишем основные уравнения, описывающие кинематику упругопластической деформации в плоской ударной волне:

$$L_{11} = \frac{1}{2}[(F_{11}^e)^2 - 1], \quad L_{22} = \frac{1}{2}[(F_{22}^e)^2 - 1]$$

$$F_{11}^e = \frac{\rho_0}{\rho} (F_{11}^p)^{-1}, \quad F_{22}^e = (F_{22}^p)^{-1} \quad (2.10)$$

$$\dot{F}_{11}^p = \dot{w}F_{11}^p, \quad \dot{F}_{22}^p = -\frac{\dot{w}}{2}F_{22}^p$$

2.2. *Напряжения и тензорное уравнение состояния.* Напряженное состояние вещества в текущей конфигурации характеризуем тензором напряжений Коши, который с учетом осевой симметрии приобретает следующий вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} -P + S & 0 & 0 \\ 0 & -P - S/2 & 0 \\ 0 & 0 & -P - S/2 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

где  $P$  – давление,  $S$  – девиатор напряжений. В случае малых деформаций применим закон Гука, устанавливающий линейную связь между деформациями и напряжениями [37]:

$$P = -K(L_{11} + 2L_{22}), \quad S = \frac{4}{3}G(L_{11} - L_{22}) \quad (2.12)$$

где  $K$  – объемный модуль упругости,  $G$  – модуль сдвига. В общем случае связь между  $P$ ,  $S$  и  $L_{11}$ ,  $L_{22}$  является нелинейной и зависит от температуры. При решении уравнений механики сплошной среды из закона сохранения энергии вычисляется не температура, а внутренняя энергия  $E$ , поэтому удобно представить зависимости в следующем виде:

$$P = P_{\text{EOS}}(L_{11}, L_{22}, E), \quad S = S_{\text{EOS}}(L_{11}, L_{22}, E) \quad (2.13)$$

Набор переменных  $\{L_{11}, L_{22}, E\}$  полностью характеризует термодинамическое состояние элемента вещества. Поскольку функции (2.13) определяют не только давление, но и девиаторную часть напряжений, будем называть их тензорным уравнением состояния. В рассматриваемом осесимметричном случае есть всего две независимых компоненты тензора напряжений. В общем случае тензорное уравнение состояния должно определять все шесть независимых компонент. Помимо самих напряжений для замыкания модели и численного решения потребуются текущие значения упругих модулей, которые, опираясь на (2.12), можно определить как

$$K = -\left(\frac{\partial P_{\text{EOS}}}{\partial [L_{11} + 2L_{22}]}\right)\Bigg|_E, \quad G = \frac{3}{4}\left(\frac{\partial S_{\text{EOS}}}{\partial [L_{11} - L_{22}]}\right)\Bigg|_E \quad (2.14)$$

Полученные в соответствии с (2.14) производные также образуют зависимости

$$K = K_{\text{EOS}}(L_{11}, L_{22}, E), \quad G = G_{\text{EOS}}(L_{11}, L_{22}, E) \quad (2.15)$$

являющиеся частью тензорного уравнения состояния. Помимо напряжений (2.13) и упругих модулей (2.15) уравнение состояния должно определять температуру  $T$  и теплоемкость  $C^V$  при постоянном объеме и форме тела (при постоянных деформациях  $L_{11}$  и  $L_{22}$ ):

$$T = T_{\text{EOS}}(L_{11}, L_{22}, E), \quad C^V = C_{\text{EOS}}^V(L_{11}, L_{22}, E) \quad (2.16)$$

Совокупность зависимостей (2.13), (2.15) и (2.16) представляет собой тензорное уравнение состояния. Для его построения было проведено МД-моделирование деформации репрезентативного объема монокристалла алюминия при различных температурах и траекториях изменения  $L_{11}$  и  $L_{22}$ , выбрана упругая часть траекторий до нуклеации дислокации и полостей (при растяжении). Далее эти упругие состояния использовались для обучения искусственной нейронной сети: на вход сети подавался набор  $\{L_{11}, L_{22}, E\}$ , а на выход набор  $\{P, S, T, C^V, K, G\}$ . После обучения нейронная сеть использовалась как аппроксимирующая функция для зависимостей (2.13), (2.15) и (2.16), то есть в качестве тензорного уравнения состояния. Подробнее структура, алгоритм обучения нейронной сети и его результаты описаны в разделе 3.

2.3. *Законы сохранения.* Запишем законы сохранения массы, импульса и энергии в лагранжевых переменных. Поле макроскопических скоростей имеет только одну компоненту  $u$  вдоль оси  $x \equiv x_1$ . Закон сохранения массы приводит к уравнению непрерывности

$$\dot{\rho} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.17)$$

Закон сохранения импульса приводит к уравнению движения

$$\dot{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (-P + S) \quad (2.18)$$

Закон сохранения энергии приводит к уравнению для внутренней энергии

$$\dot{E} = (-P - S) \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} - \dot{E}^D \quad (2.19)$$

В (2.19)  $E$  – удельная внутренняя энергия бездефектного кристалла,  $E^D$  – энергия дислокаций в единице массы материала. Их сумма ( $E + E^D$ ) – это полная внутренняя энергия, ее изменение определяется работой механических напряжений на макроскопических деформациях. Пластическое течение переводит энергию упругих деформаций в тепловую часть [13, 38], но полная внутренняя энергия при этом не меняется. Отметим, что в (2.19) не учтена теплопроводность.

2.4. *Модель дислокационной пластичности.* На микроуровне пластическая деформация кристаллических материалов в большинстве случаев реализуется за счет скольжения дислокаций. Полная дислокационная модель пластичности [11–13] включает уравнение Орована, связывающее скорость пластической деформации  $\dot{\epsilon}$  со скоростью скольжения дислокаций и их плотностью. В [14] показано, что структура фронта ударной волны может быть описана при помощи упрощенного подхода с использованием релаксационной модели Максвелла. В рамках этого подхода скорость пластической деформации определяется уравнением

$$\dot{\epsilon} = \eta^{-1} (S - Y^p \text{sign}(S)) H(|S| - Y^p) \quad (2.20)$$

где  $H(\bullet)$  – функция Хэвисайда. Статический предел текучести  $Y^p$  зависит от плотности дислокаций  $\rho^D$  согласно закону упрочнения Тэйлора:

$$Y^p = Y^0 + A G b \sqrt{\rho^D} \quad (2.21)$$

где  $Y^0$  – предел текучести бездефектного материала,  $A = 0.3$  – коэффициент упрочнения,  $b$  – модуль вектора Бюргерса. Параметр “вязкости”  $\eta$ , обратно пропорциональный времени релаксации [39], определяется текущей плотностью дислокаций  $\rho^D$  как

$$\eta = \frac{3b^2 \rho^D}{16B} \quad (2.22)$$

где  $B$  – коэффициент фононного трения дислокаций, температурная зависимость которого для алюминия найдена в [40] из результатов МД-моделирования.

Для определения  $Y^p$  и  $\eta$  необходима текущая плотность дислокаций, которая находится из модели кинетики дислокационного ансамбля [12–14]. Для простоты используем здесь уравнение только для подвижных дислокаций:

$$\dot{\rho}^D = q + \frac{1}{\epsilon^D} \left( \frac{3}{2} |S \dot{\epsilon}| \right) - k^a |\dot{\epsilon}| \rho^D \quad (2.23)$$

Последнее слагаемое в правой части (2.23) отвечает за ограничение плотности дислокаций процессом аннигиляции, здесь  $k^a = 40$  – коэффициент аннигиляции (безразмерная величина). Второе слагаемое в правой части (2.23) описывает размножение существующих дислокаций, на что тратится определенная часть работы пластической деформации. В общем случае эта доля может меняться и достигать единицы при большом дефиците дислокаций, то есть при больших действующих напряжениях сдвига, которые необходимо снять за счет пластического течения. Здесь  $\varepsilon^D$  – энергия единицы длины дислокационной линии, которая включает энергию ядра и энергию окружающего упругого поля [41], ограниченного характерным междислокационным расстоянием  $1/\sqrt{\rho^D}$ :

$$\varepsilon^D = \frac{Gb^2}{4\pi} \left( 1 - \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{1-\nu} \right) \ln(\rho^D b^2) \right) \quad (2.24)$$

где  $\nu = 0.33$  – коэффициент Пуассона.

Первое слагаемое в правой части (2.23),  $q$ , представляет собой скорость гомогенной нуклеации дислокаций. Вероятность тепловой флуктуации, приводящей к нуклеации дислокационной петли, тем больше, чем меньше работа ее образования. Анализ результатов МД-моделирования показывает, что работа образования дислокационной петли сложным образом зависит от деформации и резко уменьшается до определенной величины вблизи порога нуклеации [42]. Поэтому будем использовать следующее выражение для  $q$ :

$$q = 2\pi c^t \left( \frac{\rho}{m} \right) \exp \left( - \frac{W}{k^B T} \right) H(Q_{DN}(L_{11}, L_{22}, E)) \quad (2.25)$$

где  $c^t = \sqrt{G/\rho}$  – поперечная скорость звука,  $(\rho/m)$  – концентрация атомов,  $m$  – масса одного атома,  $k^B$  – постоянная Больцмана,  $W = 0.3$  эВ – характерная величина энергетического барьера образования петли вблизи порога нуклеации. Функция Хэвисайда в (2.25) учитывает пороговый характер нуклеации, то есть резкий рост вероятности нуклеации вблизи предельной упругой деформации. Функция  $Q_{DN}(L_{11}, L_{22}, E)$  задает порог нуклеации и представляет собой искусственную нейронную сеть, обученную так, чтобы принимать значение 0 в упругой области и 1 за порогом нуклеации (см. раздел 3).

Изменение энергии дислокаций связано с изменением их плотности:

$$\dot{E}^D = \varepsilon^D \dot{\rho}^D \quad (2.26)$$

Результаты МД-моделирования показывают, что при динамическом нагружении пластическая деформация в ГЦК металлах связана с образованием и движением частичных дислокаций Шокли. Такие дислокации имеют меньшее значение модуля вектора Бюргера и меньшую энергию образования, см. (2.24). Поэтому они доминируют в дислокационном ансамбле, хотя их скольжение и приводит к образованию поверхностей дефекта упаковки. Для частичных дислокаций Шокли текущее значение вектора Бюргера может быть вычислено через плотность вещества как

$$b = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt[3]{\frac{Am}{\rho}} \quad (2.27)$$

Входящие в модель дифференциальные по времени уравнения решались явным методом Эйлера с временным шагом, определяемым согласно условию Куранта–Фридрихса–Леви. Для стабилизации решения использовалась искусственная вязкость в форме, предложенной в [43].

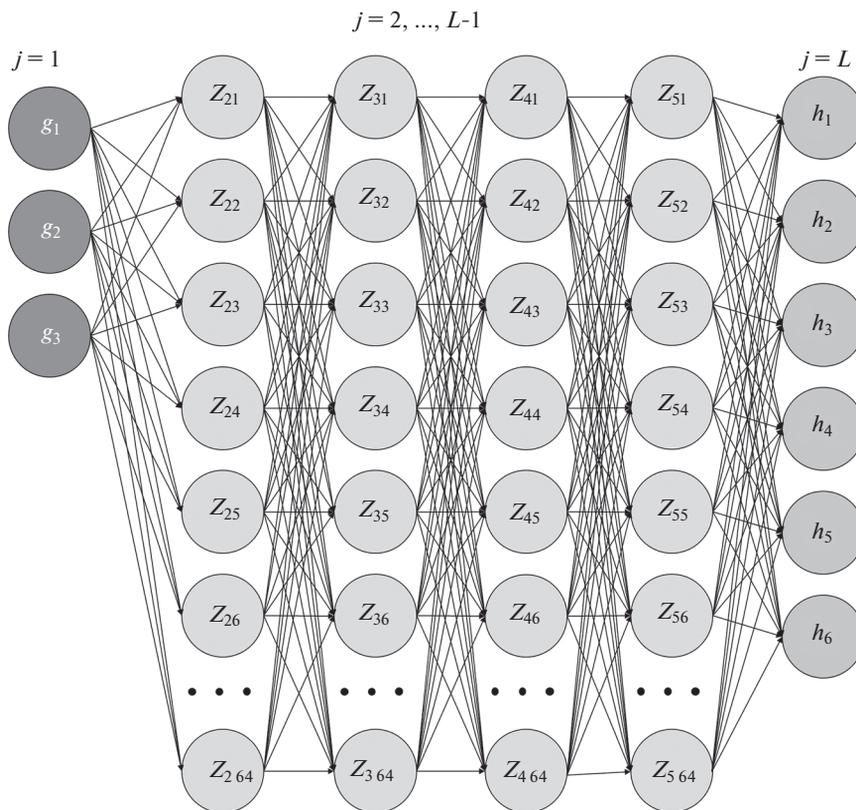


Рис. 1

**3. МД-моделирование и обучение нейронных сетей. 3.1. Структура нейронной сети и алгоритм обучения.** Искусственная нейронная сеть может рассматриваться как универсальная функция (отображение). Она вычисляет выходной вектор (значение) по входному вектору (аргументу). В рассматриваемом случае входной вектор – это набор величин  $\{L_{11}, L_{22}, E\}$ , а выходной вектор – набор  $\{P, S, T, C^V, K, G\}$  для тензорного уравнения состояния и одно значение  $\{Q_{DN}\}$  для функции порога нуклеации. Каждый нейрон сети также является функцией, причем достаточно простой, и вычисляет единственный выходной сигнал по нескольким входным сигналам. Под сигналом понимается число, передаваемое от одного нейрона к другому. Нейроны упорядочены в слои как показано на рис. 1. Первый слой  $j = 1$  является входным и просто распределяет входные значения нейронам следующего слоя. Последний слой  $j = L$  является выходным и окончательно формирует выходные значения. Число нейронов входного и выходного слоя определяется размерностью входного и выходного вектора, соответственно. Промежуточные слои  $1 < j < L$  называют скрытыми. Число скрытых слоев  $(L - 2)$  и число нейронов в каждом из них в общем случае может быть произвольным. В данной работе использовалось четыре  $(L = 6)$  скрытых слоя по 64 нейрона в каждом. Сигналы передавались только в одном направлении – от нейронов предыдущего слоя к нейронам последующего, такая структура называется искусственной нейронной сетью с прямой связью.

Обозначим число нейронов в  $j$ -м слое как  $N_j$ , а сигнал, формируемый  $k$ -м нейроном в  $j$ -м слое как  $Z_{jk}$ . Сигналы, формируемые нейронами всех слоев кроме входного можно записать как:

$$Z_{jk} = f_j \left( -b_{jk} + \sum_{m=1}^{N_{(j-1)}} a_{jk,m} Z_{(j-1)m} \right), \quad j = 2, \dots, L, \quad (3.1)$$

где  $a_{jk,m}$  (веса) и  $b_{jk}$  (смещения) – параметры, подбираемые в ходе обучения сети;  $f_j(\bullet)$  – передаточная функция  $j$ -го слоя. Мы используем ‘Leaky ReLU’ для нейронов скрытых слоев  $j \in [2, L - 1]$ :

$$f_j(z) = \begin{cases} z & \text{при } z \geq 0, \\ 0.01 \cdot z & \text{при } z < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

и сигмоидальную функцию для выходного слоя:

$$f_L(z) = \frac{1}{1 + \exp(-z)} \quad (3.3)$$

Для ‘Leaky ReLU’ нейронов вычисление самих функций и их производных требует минимум ресурсов. Вычислительно более емкие, но немногочисленные сигмоидальные нейроны выходного слоя сглаживают выходные значения.

Уравнение (3.1) демонстрирует, что нейронная сеть как функция является сложной композицией простых передаточных функций отдельных нейронов. Каждый набор параметров  $\{a_{jk,m}, b_{jk}\}$  определяет конкретное частное отображение. Большое количество параметров (порядка 13000 для рассматриваемых нейронных сетей) приводит к чрезвычайной гибкости, практически универсальности задаваемого сетью отображения и широким возможностям ее использования для аппроксимации сложных зависимостей. Процесс обучения состоит в подгонке параметров так, чтобы задаваемое сетью отображение было максимально близко к ожидаемому отображению.

Обучающие данные можно представить как набор пар векторов  $\{(\mathbf{g}^\beta, \mathbf{h}^\beta), \beta \in B\}$ , где  $\mathbf{g}^\beta$  есть входной вектор, а  $\mathbf{h}^\beta$  – соответствующий ему выходной вектор. Текущее состояние нейронной сети с текущим набором параметров отображает входной вектор в некоторый другой выходной вектор  $\mathbf{g}^\beta \rightarrow \mathbf{h}^{\text{ANN}}(\mathbf{g}^\beta)$  для каждого  $\beta \in B$ . За текущую ошибку аппроксимации обычно принимают сумму квадратов отклонений результатов сети от ожидаемых выходных данных:

$$e = \sum_{\beta \in B} \sum_{n=1}^{N_L} [h_n^{\text{ANN}}(\mathbf{g}^\beta) - h_n^\beta]^2 \quad (3.4)$$

Обучение сети предполагает минимизацию ошибки (3.4) путем подбора параметров  $\{a_{jk,m}, b_{jk}\}$ . Для этого необходимо знать значения производных ошибки  $e$  по этим параметрам. Дифференцирование (3.4) приводит к формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial a_{jk,m}} &= 2 \sum_{\beta \in B} \sum_{n=1}^{N_L} [h_n^{\text{ANN}}(\mathbf{g}^\beta) - h_n^\beta] \frac{\partial h_n^{\text{ANN}}(\mathbf{g}^\beta)}{\partial a_{jk,m}} \\ \frac{\partial e}{\partial b_{jk}} &= 2 \sum_{\beta \in B} \sum_{n=1}^{N_L} [h_n^{\text{ANN}}(\mathbf{g}^\beta) - h_n^\beta] \frac{\partial h_n^{\text{ANN}}(\mathbf{g}^\beta)}{\partial b_{jk}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Используя правило дифференцирования композиции функций, находим производные выхода сети  $h_n^{\text{ANN}}(\mathbf{g}^\beta)$  по параметрам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_n^{\text{ANN}}(\mathbf{g}^\beta)}{\partial a_{jk,m}} &= D_k^{j,n} Z_{(j-1)m} \\ \frac{\partial h_n^{\text{ANN}}(\mathbf{g}^\beta)}{\partial b_{jk}} &= -D_k^{j,n} \end{aligned} \quad (3.6)$$

где вспомогательные матрицы  $D_k^{j,n}$  находятся через серию матричных перемножений (алгоритм обратного распространения):

$$\begin{aligned} D_k^{L,n} &= \delta_{kn} f'_L(z_{Ln}), \quad k = 1, N_L \\ D_k^{(j-1),n} &= f'_{j-1}(z_{(j-1)k}) \sum_{m=1}^{N_j} D_m^{j,n} a_{jm,k}, \quad j = L, \dots, 2; \quad k = 1, N_{(j-1)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для краткости за  $z_{jk}$  обозначен аргумент передаточной функции соответствующего нейрона:

$$z_{jk} = -b_{jk} + \sum_{m=1}^{N_{(j-1)}} a_{jk,m} Z_{(j-1)m} \quad (3.8)$$

Алгоритм обучения нейронной сети производит многократные последовательные изменения случайно выбранной части параметров в направлении, обеспечивающем уменьшение ошибки аппроксимации (3.4). Обычно шаг изменения параметров делают пропорциональным соответствующей производной (3.5). Такой алгоритм позволяет замедлить и остановить изменение параметров вблизи минимума, когда производные стремятся к нулю. С другой стороны, он приводит к медленному схождению, если начальное приближение попало в область плато. Более эффективным оказалось изменение параметров с фиксированным малым шагом в направлении против градиента. Параметр увеличивается на фиксированный шаг, если производная по нему отрицательна, и наоборот. Проблема прохождения мимо минимума решалась сохранением набора параметров, соответствующего минимальному значению ошибки. Три последовательных этапа минимизации с уменьшением шага изменения параметров на порядок на каждом последующем этапе оказалось достаточным для достижения приемлемой точности аппроксимации (средняя ошибка менее 1%, максимальная ошибка менее 10%). На последующих этапах обучения алгоритм стартовал с обеспечивающего минимальную ошибку набора параметров предыдущих этапов. Алгоритм обучения был написан на языке программирования FORTRAN. Обучение нейронной сети по набору данных из 8 тысяч пар вход-выход требовало порядка 3 часов работы в однопоточном режиме.

*3.2. МД-моделирование для создания обучающих данных.* Чем более полный набор данных используется для обучения нейронной сети, тем более детальным будет настроенное отображение, задаваемое сетью. МД-моделирование является оптимальным инструментом для генерации больших наборов обучающих данных. В свою очередь, нейронные сети как очень гибкие отображения оптимальны для фиксации сложных закономерностей, выявляемых при помощи МД-моделирования.

МД-моделирование проводилось при помощи пакета LAMMPS [44] с использованием межатомного потенциала [45] типа EAM, учитывающего помимо парных взаимодействий также взаимодействие атомов с плотностью обобществленных свободных электронов в металле. Компоненты тензора напряжений Коши рассчитывались через кинетическую энергию атомов и вириал [46]. Визуализация МД-систем проводилась при помощи программы OVITO [47], селекция дефектных областей осуществлялась

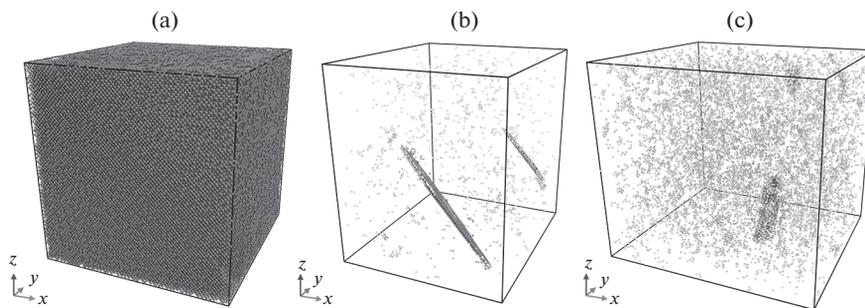


Рис. 2

по величине центрально-симметричного параметра [48], также применялся алгоритм “DXA” для поиска дислокационных линий [49].

Начальный вид МД-системы показан на рис. 2,а. Она представляет собой кубический образец (репрезентативный объем) монокристалла алюминия (ГЦК структура) с кристаллографическими направлениями [100], [010] и [001], ориентированными вдоль осей  $x \equiv x_1$ ,  $y \equiv x_2$  и  $z \equiv x_3$ , соответственно. Расчетная область содержит полмиллиона атомов, на всех границах заданы периодические граничные условия. После начальной термализации и релаксации напряжений к нулю МД-система подвергается одноосной изотермической деформации сжатия/растяжения вдоль осей координат с постоянными инженерными скоростями деформации  $\dot{\epsilon}_1$ ,  $\dot{\epsilon}_2$  и  $\dot{\epsilon}_3$ , причем  $\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3$ , что обеспечивает обсуждаемое выше осесимметричное деформированное состояние. Деформация осуществляется командой “deform” пакета LAMMPS, которая масштабирует координаты атомов. Таким образом, при фиксированной температуре справедливо преобразование:

$$x_1 = (1 + \dot{\epsilon}_1 t) X_1, \quad x_2 = (1 + \dot{\epsilon}_2 t) X_2 \quad (3.9)$$

где  $t$  – время с начала деформации. При расчете тензора напряжений за недеформированное состояние принималось состояние без напряжений при температуре 300 К. До образования дефектов и начала пластического течения упругие градиенты деформации можно вычислить как

$$F_{11}^c = (1 + \dot{\epsilon}_1 t) l(T) / l_0, \quad F_{22}^c = (1 + \dot{\epsilon}_2 t) l(T) / l_0 \quad (3.10)$$

где  $l_0$  – размер расчетной области без напряжений при температуре 300 К, а  $l(T)$  – ее размер при температуре  $T$ . Отношение  $l(T) / l_0$  учитывает тепловое расширение.

На определенной стадии деформации происходит образование дефектов – частичных дислокаций Шокли со следами в виде поверхностей дефектов упаковки (см. рис. 2,б для одноосного сжатия и рис. 2,с для одноосного растяжения – показаны только дефектные атомы). При растяжении вскоре после начала пластического течения образуются и начинают расти полости. Для построения уравнения состояния необходимы данные только об упругой стадии деформации. Для построения порога нуклеации дислокаций нужно отделить упругую и пластическую стадии. В качестве индикатора начала пластического течения использовались всплески температуры. Во время деформации температура системы контролируется термостатом Нозье–Гувера [50], который на упругой стадии обеспечивает флуктуации в пределах десятых долей Кельвина вблизи целевого значения. Начало пластического течения приводит к резкому тепловыделению, термостат не справляется и температура растет на единицы Кельвин при сжатии и даже десятки Кельвин при растяжении (за счет роста поло-

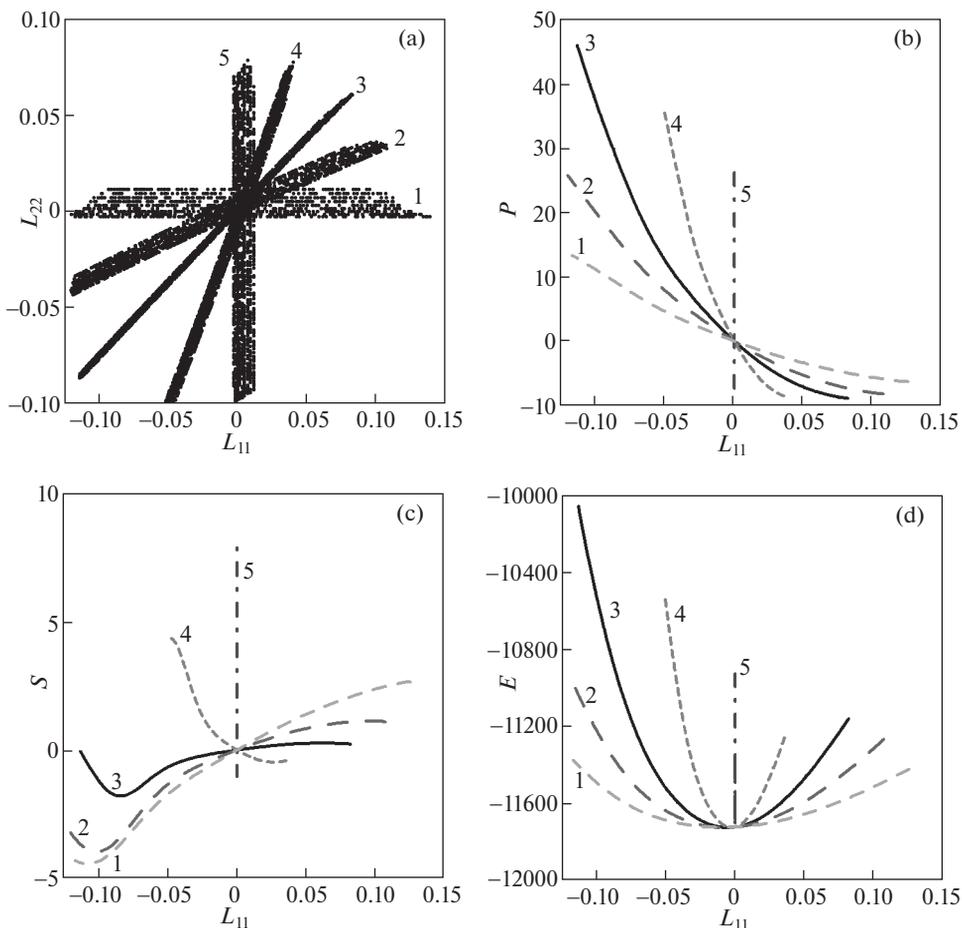


Рис. 3

стей). Анализ атомных конфигураций показывает, что момент начала всплеска температуры совпадает с образованием дефектов.

Скорости деформации по осям выбирались одного знака так, чтобы выполнялось  $\dot{\epsilon}_1 + 2\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon} = \pm 1 \text{ нс}^{-1}$  (знак “-” соответствует сжатию, знак “+” – расширению). Соотношение между  $\dot{\epsilon}_1$  и  $\dot{\epsilon}_2$  определяет траекторию деформации. Рассматривалось пять различных траекторий, их список приведен в таблице, в которой значения  $\dot{\epsilon}_1$  и  $\dot{\epsilon}_2$  даны в обратных наносекундах для случая растяжения; номера траекторий  $N^{\text{TR}}$  совпадают с обозначениями на рис. 3. Отметим, что траектория  $N^{\text{TR}} = 1$  соответствует одноосному растяжению/сжатию, а траектория  $N^{\text{TR}} = 3$  – наиболее близка к всестороннему растяжению/сжатию. Исследованные траектории деформации в плоскости  $\{L_{11}, L_{22}\}$  для всех температур представлены на рис. 3,а. Смещение траекторий одной группы для разных температур связано с учетом в (3.10) теплового расширения. Границы приведенных траекторий соответствуют предельной упругой деформации, после которой начинается пластическое течение.

Для каждой траектории деформации расчеты проводились при целевых температурах от 100 до 900 К с шагом 100 К. Всего было проведено 90 МД-расчетов: 5 траекторий по 2 направления (сжатие/растяжение) и 9 температур. Термодинамические параметры МД-систем записывались с временным шагом  $\Delta t = 0.1$  пс, что соответствует шагу объемной инженерной деформации  $\dot{\epsilon} \cdot \Delta t = 10^{-4}$ . После отсечения пластических участков траекторий на оставшихся упругих участках случайным образом равномерно по длине выбиралось 5% точек (от 150 до 250 точек для каждой траектории и температуры), которые использовались в качестве обучающих данных. Использование дополнительно промежуточных точек увеличит время обучения, но в силу гладкости аппроксимируемых зависимостей не добавит новой информации. Примеры рассчитанных в МД-моделировании зависимостей давления (в ГПа), девиатора напряжений (в ГПа) и внутренней энергии (в Дж/г) для 300 К приведены на рис. 3, b–d. Видно, что не только давление (рис. 3, b) но и девиатор напряжений (рис. 3, c) нелинейно зависит от деформации на упругой стадии. Примечательна немонотонная зависимость девиатора при сжатии для траекторий 1–3 вблизи границы упругой стадии. Зависимость внутренней энергии от деформации (рис. 3, d) близка к квадратичной.

Полученный обучающий массив для тензорного уравнения состояния содержит 8300 пар: входной вектор  $\{L_{11}, L_{22}, E\}$  – выходной вектор  $\{P, S, T, C^V, K, G\}$ . Результаты обучения нейронной сети в сравнении с обучающими данными представлены на рис. 4. На рис. 4, a, 4, c и 4, e приведено, соответственно, давление (в ГПа), девиатор напряжений (в ГПа) и температура (в К) как функции продольной деформации  $L_{11}$ ; темные кружки – данные МД-моделирования, светлые крестики – результаты нейронной сети для тех же входных векторов  $\{L_{11}, L_{22}, E\}$ . На рис. 4, b, 4, d и 4, f светлыми кружками приведена корреляция между данными МД-моделирования (горизонтальная ось) и результатами обученной нейронной сети (вертикальная ось). Можно отметить приемлемую степень корреляции. В МД-моделировании контролируемым параметром является температура, но для более удобного использования в рамках континуальной модели входным параметром уравнения состояния выбрана внутренняя энергия.

Для функции порога нуклеации обучающий набор строился следующим образом. Вдоль каждой полутраектории (сжатие/растяжение) с равным шагом по деформации записывалось 20 точек до определенного из МД-моделирования порога начала пластического течения с парами: входной вектор  $\{L_{11}, L_{22}, E\}$  – выходной вектор  $\{0\}$ . Далее с тем же шагом в том же направлении записывалось 11 точек (включая сам порог нуклеации и более сильные деформации) с парами: входной вектор  $\{L_{11}, L_{22}, E\}$  – выходной вектор  $\{1\}$ . Получившийся набор из порядка 2800 точек использовался для обучения нейронной сети, аппроксимирующей функцию  $Q_{DN}(L_{11}, L_{22}, E)$ , см. уравнение (2.25) и комментарии. Как следует из определения, эта функция должна принимать значение 0 в упругой области и 1 за порогом нуклеации.

**4. Ударные волны в монокристалле алюминия. 4.1. Сравнение континуальной модели и прямого МД-моделирования.** На основе континуальной модели и обученных нейронных сетей была написана программа на языке программирования FORTRAN. На первом этапе результаты континуальных расчетов сравнивались с данными прямого МД-моделирования [38] симметричного соударения монокристаллов алюминия толщиной 0.5 мкм каждый с относительной скоростью 2 км/с. Скачек скорости на фронте ударной волны составляет 1 км/с. В поперечных направлениях размер МД-системы составляет 0.02 мкм; в этих направлениях заданы периодические граничные условия, что обеспечивает одноосную макроскопическую деформацию. МД-система содержит 26 миллионов атомов. Рисунок 5 показывает сечение МД-системы в моменты времени 10, 20, 30, 40 и 50 пс (сверху вниз). Раскраска атомов проведена в соответствии со зна-

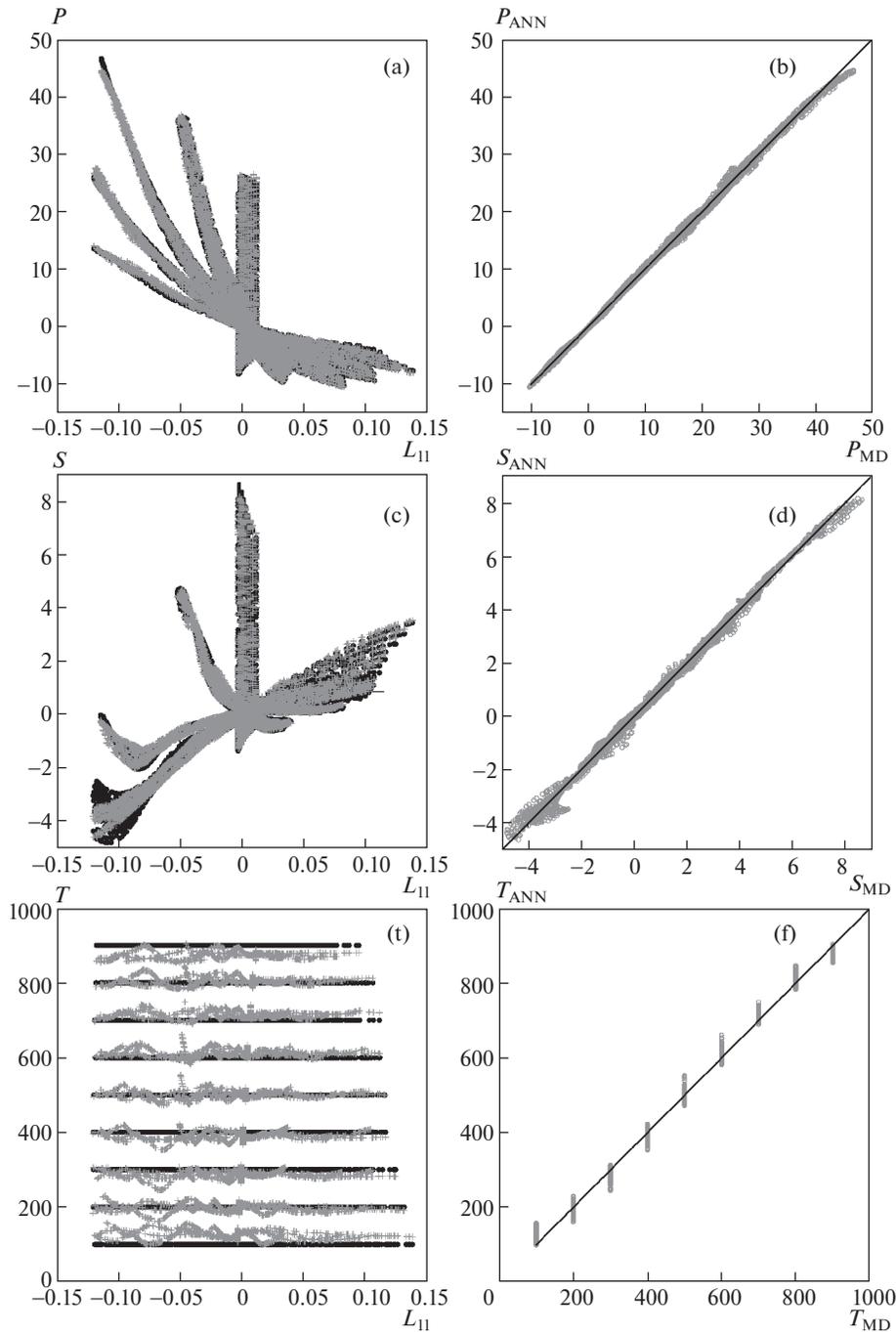


Рис. 4

чением центрально-симметричного параметра [48], так что темные области обозначают дефекты упаковки – следы скольжения дислокаций. Видно распространение по изначально идеальному монокристаллу ударной волны, за фронтом которой образуются дислокации.

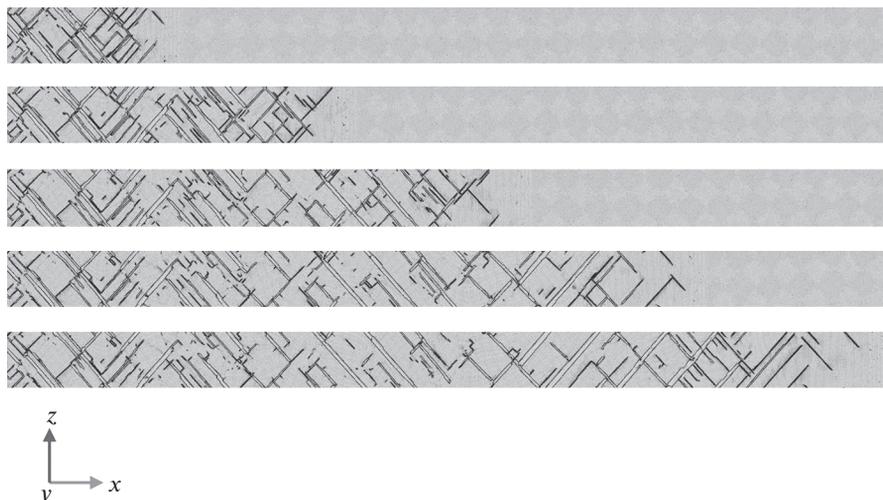


Рис. 5

На рис. 6 приведено сравнение пространственных распределений продольных напряжений в ГПа (рис. 6,a), касательных напряжений в ГПа (рис. 6,b), температуры в Кельвинах (рис. 6,c) и плотности дислокаций в  $\text{мкм}^{-2}$  (рис. 6,d), найденных из МД-моделирования (темная сплошная линия с точками) и рассчитанных при помощи континуальной модели (светлая штриховая линия) для момента времени 50 пс с начала соударения. Координата  $x$  отсчитывается от плоскости соударения и приведена в микрометрах. Рассчитанные по континуальной модели распределения находятся в соответствии с данными МД-моделирования. Перед основной ударной волной формируется упругий предвестник. Предвестник распространяется по идеальному монокристаллу, и деформация в нем остается упругой вплоть до достижения порога гомогенной нуклеации дислокаций. Полученные в расчетах продольные напряжения на предвестнике согласуются с экспериментальными оценками: от 7.5 ГПа [7] до 12.5 ГПа [1].

После достижения предельной упругой деформации начинается резкий рост плотности дислокаций (рис. 6,d), как за счет нуклеации, так и за счет последующего их размножения. При деформации плотность дислокаций может меняться на порядки величины, поэтому полученное совпадение модели и МД (рис. 6,d) является хорошим. Скольжение дислокаций приводит к релаксации сдвиговых напряжений (рис. 6,c). Далее следует фронт основной ударной волны, на котором деформация происходит уже в пластическом режиме. За фронтом ударной волны касательные напряжения поддерживаются на уровне порядка 0.5 ГПа, определяемом статическим пределом текучести, уравнение (2.21), который высок из-за крайне высокой плотности дислокаций – порядка  $10^5 \text{ мкм}^{-2}$  (рис. 6,c). Температура за фронтом волны составляет 500 К по данным МД и порядка 535 К согласно континуальной модели; различие может быть связано с конечной точностью аппроксимации нейронной сети (рис. 4,f).

4.2. Эволюция структуры ударной волны в идеальном и деформированном монокристалле. С помощью континуальной модели проведено исследование эволюции предвестника ударной волны. Распределения продольных напряжений в ГПа приведены на рис. 7 для моментов времени (слева направо): 10, 20, 50, 100, 200 и 500 пс. Координата  $x$  отсчитывается от плоскости соударения и приведена в микрометрах. Рассматривал-

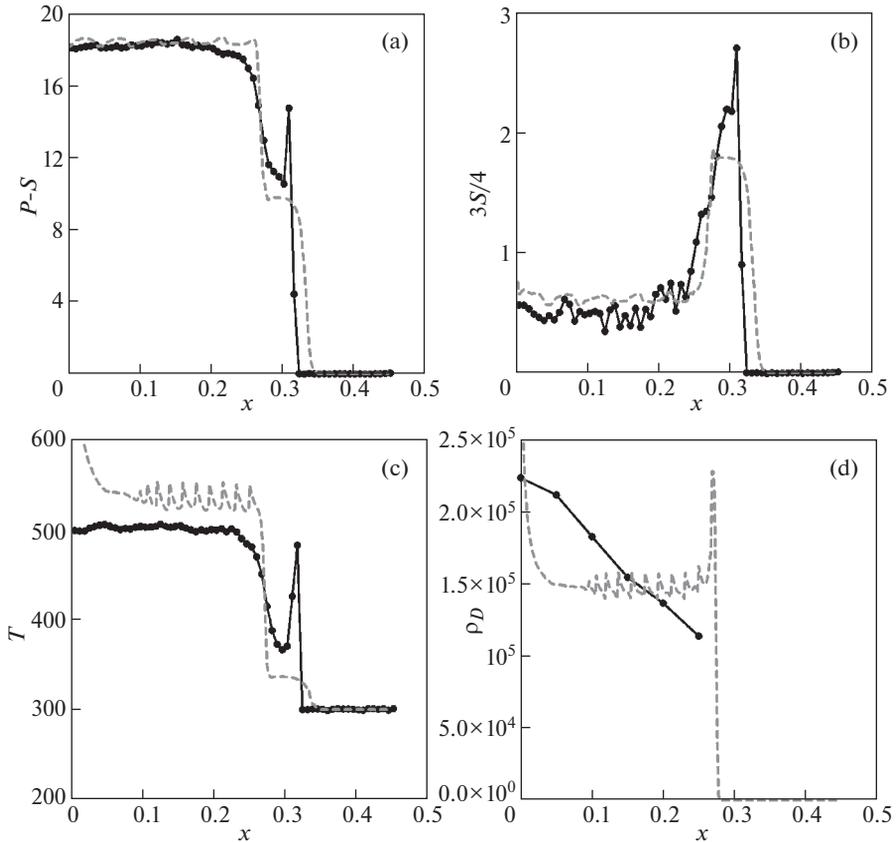


Рис. 6

ся случай идеального монокристалла (рис. 7,a,b) и деформированного монокристалла с начальной плотностью дислокаций  $100 \text{ мкм}^{-2}$  (рис. 7,c,d). Такая плотность дислокаций соответствует уже сильно деформированному материалу. При меньших плотностях на рассматриваемых масштабах (от  $0.1 \text{ мкм}$ ) нагружаемый объем может быть свободен от дислокаций. Приведены результаты для ударных волн со скачками скорости  $1 \text{ км/с}$  (рис. 7,a,c) и  $0.6 \text{ км/с}$  (рис. 7,b,d).

Основная особенность структуры ударной волны в бездефектном монокристалле – постоянная амплитуда упругого предвестника, не затухающего с удалением от плоскости соударения (рис. 7,a,b). Амплитуда предвестника не зависит и от амплитуды последующей ударной волны, если она достаточна для достижения порога гомогенной нуклеации (скачек скорости более  $0.47 \text{ км/с}$ ). Принципиально иное поведение демонстрирует деформированный монокристалл: упругий предвестник быстро затухает. В то же время, на малых расстояниях от плоскости соударения амплитуда предвестника близка к случаю идеального монокристалла.

**5. Заключение.** Разработана методика применения искусственных нейронных сетей для описания нелинейной связи компонент напряжений и деформаций (тензорное уравнение состояния) и начала пластического течения (гомогенная нуклеация дислокаций) в монокристаллах металлов на примере алюминия. Наборы данных для обучения нейронных сетей генерируются при помощи МД-моделирования однородной де-

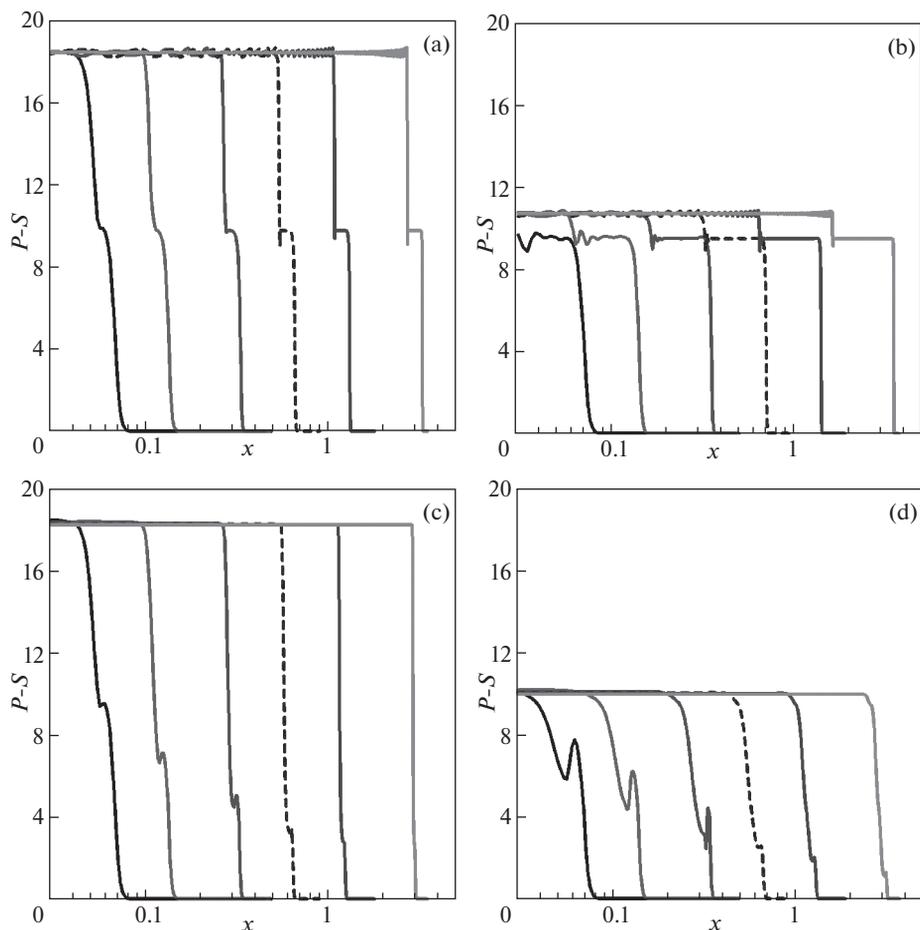


Рис. 7

формации репрезентативных объемов монокристалла. Рассматриваются осесимметричные деформированные состояния, когда ось симметрии совпадает с направлением  $[100]$  монокристалла. Обученные нейронные сети используются в качестве аппроксимирующих функций в рамках модели дислокационной пластичности, обобщенной на случай конечных деформаций. С ее помощью проводится моделирование распространения ударных волн, возникающих при соударении пластин. В случае наноразмерных пластин проводится сравнение с прямым МД-моделированием процесса. Полученные в расчетах продольные напряжения на упругом предвестнике согласуются с экспериментальными оценками: от 7.5 ГПа [7] до 12.5 ГПа [1]. Проведено исследование эволюции предвестника ударной волны в идеальном и деформированном монокристалле. В идеальном монокристалле упругий предвестник сохраняет постоянную амплитуду, соответствующую порогу гомогенной нуклеации дислокаций; амплитуда предвестника не зависит от амплитуды последующей ударной волны, если она достаточна для достижения порога гомогенной нуклеации (скачок скорости более 0.47 км/с). В деформированном монокристалле упругий предвестник имеет существенно меньшую амплитуду и быстро затухает с расстоянием.

Таблица 1

$N^{TR}$	$\dot{\epsilon}_1$	$\dot{\epsilon}_2$
1	1	0
2	0.6	0.2
3	0.4	0.3
4	0.2	0.4
5	0	0.5

Разработанная континуальная модель с использованием нейронных сетей позволяет исследовать ударные волны в тонких пленках металлов с учетом конечности деформаций и нелинейной связи тензора напряжений и деформаций, а также гомогенной нуклеации дислокаций, как фактора, ограничивающего предельную упругую деформацию. Развитием работы может стать применение разработанной методики для других металлов и сплавов, а также рассмотрение более общего случая деформации.

**Благодарности.** Описание гомогенной нуклеации дислокации на основе нейронной сети и исследование роли гомогенной нуклеации в распространении ударных волн выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20153). Разработка тензорного уравнения состояния на основе нейронной сети поддержана Минобрнауки РФ в рамках гос. задания на выполнение НИР ЧелГУ (№ 075-00250-20-03).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ашитков С.И., Агранат М.Б., Канель Г.И., Комаров П.С., Фортвов В.Е.* Поведение алюминия вблизи предельной теоретической прочности в экспериментах с фемтосекундным лазерным воздействием // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 92. В. 8. С. 568–573.
2. *Whitley V.H., McGrane S.D., Eakins D.E., Bolme C.A., Moore D.S., Bingert J.F.* The elastic-plastic response of aluminum films to ultrafast laser-generated shocks // J. Appl. Phys. 2011. V. 109. P. 013505.
3. *Ашитков С.И., Комаров П.С., Агранат М.Б., Канель Г.И., Фортвов В.Е.* Реализация предельных значений объемной и сдвиговой прочности железа при воздействии фемтосекундных лазерных импульсов // Письма в ЖЭТФ. 2013. Т. 98. В. 7. С. 439–444.
4. *Канель Г.И., Разоренов С.В., Гаркушин Г.В., Ашитков С.И., Комаров П.С., Агранат М.Б.* Сопротивление деформированию и разрушению железа в широком диапазоне скоростей деформации // ФТТ. 2014. Т. 56. В. 8. С. 1518–1522.
5. *Агранат М.Б., Ашитков С.И., Комаров П.С.* Поведение металлов вблизи предела теоретической прочности в экспериментах с фемтосекундными лазерными импульсами // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 6. С. 50–57.
6. *Ashitkov S.I., Komarov P.S., Struleva E.V., Agranat M.B., Kanel G.I., Khishchenko K.V.* The behavior of tantalum under ultrashort loads induced by femtosecond laser // J. Phys.: Conf. Ser. 2015. V. 653. № 1. P. 012001.
7. *Zuanetti B., McGrane Sh.D., Bolme C.A., Prakash V.* Measurement of elastic precursor decay in preheated aluminum films under ultra-fast laser generated shocks // J. Appl. Phys. 2018. V. 123. № 19. P. 195104.
8. *Komarov P.S., Struleva E.V., Ashitkov S.I.* Generation of giant elastic ultrashort shock waves in chromium films by femtosecond laser pulses // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1147. № 1. P. 012023.
9. *Канель Г.И.* О наносекундной теплофизике (обзор) // ТВТ. 2020. Т. 58. № 4. С. 596–614.
10. *Канель Г.И., Зарецкий Е.Б., Разоренов С.В., Ашитков С.И., Фортвов В.Е.* Необычные пластичность и прочность металлов при ультракоротких длительностях нагрузки // УФН. 2017. Т. 187. № 5. С. 525–545.
11. *Krasnikov V.S., Mayer A.E., Yalovets A.P.* Dislocation based high-rate plasticity model and its application to plate-impact and ultra short electron irradiation simulations // Int. J. Plast. 2011. V. 27. P. 1294–1308.

12. Mayer A.E., Khishchenko K.V., Levashov P.R., Mayer P.N. Modeling of plasticity and fracture of metals at shock loading // J. Appl. Phys. 2013. V. 113. P. 193508.
13. Майер А.Е. Динамическая прочность железа на сдвиг и растяжение: континуальное и атомистическое моделирование // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 6. С. 58–67.
14. Popova T.V., Mayer A.E., Khishchenko K.V. Evolution of shock compression pulses in polymethylmethacrylate and aluminum // J. Appl. Phys. 2018. V. 123. P. 235902.
15. Колгатын С.Н., Хачатурьянц А.В. Интерполяционные уравнения состояния металлов // ТВТ. 1982. Т. 20. № 3. С. 447–451.
16. Fortov V.E., Khishchenko K.V., Levashov P.R., Lomonosov I.V. Wide-range multi-phase equations of state for metals // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. 1998. V. 415. P. 604–608.
17. Khishchenko K.V. Equations of state for two alkali metals at high temperatures // J. Phys. Conf. Ser. 2008. V. 98. P. 032023.
18. Luscher D.J., Bronkhorst C.A., Alleman C.N., Addessio F.L. A model for finite-deformation nonlinear thermomechanical response of single crystal copper under shock conditions // J. Mech. Phys. Solids. 2013. V. 61. P. 1877–1894.
19. Luscher D.J., Mayeur J.R., Mourad H.M., Hunter A., Kenamond M.A. Coupling continuum dislocation transport with crystal plasticity for application to shock loading conditions // Int. J. Plast. 2016. V. 76. P. 111–129.
20. Mayer A., Krasnikov V., Pogorelko V. Limit of Ultra-high strain rates in plastic response of metals // Proceedings of the first international conference on theoretical, applied and experimental mechanics. ICTAEM 2018. (Editor Gdoutos E.) Structural Integrity V. 5. Cham: Springer, 2019. P. 273–278.
21. Норман Г.Э., Янилкин А.В. Гомогенное зарождение дислокаций // ФТТ. 2011. Т. 53. № 8. С. 1536–1541.
22. Брюханов И.А., Ковалев В.Л., Ларин А.В. Зарождение дислокаций в сплавах алюминия с медью // ФТТ. 2015. Т. 57. № 9. С. 1761–1771.
23. Bryukhanov I.A., Larin A.V. Mechanisms and rate of dislocation nucleation in aluminum-copper alloys near Guinier–Preston zones // J. Appl. Phys. 2016. V. 120. № 23. P. 235106.
24. Miller R.E., Acharya A. A stress-gradient based criterion for dislocation nucleation in crystals // J. Mech. Phys. Solids. 2004. V. 52. P. 1507–1525.
25. Tschopp M.A., McDowell D.L. Tension-compression asymmetry in homogeneous dislocation nucleation in single crystal copper // Appl. Phys. Lett. 2007. V. 90. P. 121916.
26. Tschopp M.A., McDowell D.L. Influence of single crystal orientation on homogeneous dislocation nucleation under uniaxial loading // J. Mech. Phys. Solids. 2008. V. 56. P. 1806–1830.
27. Dupont V., Germann T.C. Strain rate and orientation dependencies of the strength of single crystalline copper under compression // Phys. Rev. B. 2012. V. 86. P. 134111.
28. Li X., Roth C.C., Mohr D. Machine-learning based temperature- and rate-dependent plasticity model: Application to analysis of fracture experiments on DP steel // Int. J. Plast. 2019. V. 118. P. 320–344.
29. Beniwal A., Dadhich R., Alankar A. Deep learning based predictive modeling for structure-property linkages // Materialia. 2019. V. 8. P. 100435.
30. Frankel A.L., Jones R.E., Alleman C., Templeton J.A. Predicting the mechanical response of oligocrystals with deep learning // Comput. Mater. Sci. 2019. V. 169. P. 109099.
31. Zhang A., Mohr D. Using neural networks to represent von Mises plasticity with isotropic hardening // Int. J. Plast. 2020. V. 132. P. 102732.
32. Pandya K.S., Roth C.C., Mohr D. Strain rate and temperature dependent fracture of aluminum alloy 7075: Experiments and neural network modeling // Int. J. Plast. 2020. V. 135. P. 102788.
33. Gnyusov S.F., Rotshtein V.P., Mayer A.E., Rostov V.V., Gunin A.V., Khishchenko K.V., Levashov P.R. Simulation and experimental investigation of the spall fracture of 304L stainless steel irradiated by a nanosecond relativistic high-current electron beam // Int. J. Fract. 2016. V. 199. P. 59–70.
34. Mase G.E. Theory and Problems of Continuum Mechanics. N.Y. etc.: McGraw-Hill, 1970 = Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974. 318 с.
35. Khan A.S., Liu J., Yoon J.W., Nambori R. Strain rate effect of high purity aluminum single crystals: experiments and simulations // Int. J. Plast. 2015. V. 67. P. 39–52.

36. *Khan A.S., Liu J.* A deformation mechanism based crystal plasticity model of ultrafine-grained/nanocrystalline FCC polycrystals // *Int. J. Plast.* 2016. V. 86. P. 56–69.
37. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Том VII. Теория упругости. М.: Физматлит, 2007. 264 с.
38. *Khishchenko K.V., Mayer A.E.* High- and low-entropy layers in solids behind shock and ramp compression waves // *Int. J. Mech. Sci.* 2021. V. 189. P. 105971.
39. *Selyutina N., Borodin E.N., Petrov Y., Mayer A.E.* The definition of characteristic times of plastic relaxation by dislocation slip and grain boundary sliding in copper and nickel // *Int. J. Plas.* 2016. V. 82. P. 97–111.
40. *Krasnikov V.S., Mayer A.E.* Influence of local stresses on motion of edge dislocation in aluminum // *Int. J. Plas.* 2018. V. 101. P. 170–187.
41. *Hirth J.P., Lothe J.* Theory of dislocations. N.Y.: McGraw-Hill, 1967 = Хирт Дж., Лоте И. Теория дислокаций. М.: Атомиздат, 1972. 600 с.
42. *Mayer A.E., Krasnikov V.S., Pogorelko V.V.* Dislocation nucleation in Al single crystal at shear parallel to (111) plane: molecular dynamics simulations and nucleation theory with artificial neural networks.
43. *Яловец А.П.* Расчет течений среды при воздействии интенсивных потоков заряженных частиц // *ПМТФ.* 1997. Т. 38. № 1. С. 151–166.
44. *Plimpton S.* Fast parallel algorithms for short-range molecular dynamics // *J. Comp. Phys.* 1995. V. 117. P. 1–19.
45. *Mishin Y., Farkas D., Mehl M.J., Papaconstantopoulos D.A.* Interatomic potentials for monoatomic metals from experimental data and ab initio calculations // *Phys. Rev. B.* 1999. V. 59. № 5. P. 3393–3407.
46. *Thompson A.P., Plimpton S.J., Mattson W.* General formulation of pressure and stress tensor for arbitrary many-body interaction potentials under periodic boundary conditions // *J. Chem. Phys.* 2009. V. 131. № 15. P. 154107.
47. *Stukowski A.* Visualization and analysis of atomistic simulation data with OVITO—the Open Visualization Tool // *Modell. Simul. Mater. Sci. Eng.* 2010. V. 18. P. 015012.
48. *Kelchner C.L., Plimpton S.J., Hamilton J.C.* Dislocation nucleation and defect structure during surface indentation // *Phys. Rev. B.* 1998. V. 58. P. 11085.
49. *Stukowski A., Bulatov V.V., Arsenlis A.* Automated identification and indexing of dislocations in crystal interfaces // *Modell. Simul. Mater. Sci. Eng.* 2012. V. 20. P. 085007.
50. *Hoover W.G.* Canonical dynamics: Equilibrium phase-space distributions // *Phys. Rev. A.* 1985. V. 31. P. 1695–1697.

УДК 534-16

## О ФЛАТТЕРЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

© 2021 г. С. Д. Алгазин<sup>а,\*</sup>, Ж. Г. Ингтем<sup>б,\*\*</sup>

<sup>а</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>б</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*e-mail: algazinsd@mail.ru

\*\*e-mail: j-g.ingtem@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 04.12.2019 г.

После доработки 19.03.2020 г.

Принята к публикации 22.05.2020 г.

Методом математического моделирования исследуется флаттер пластины эллиптической формы в плане при разных направлениях угла атаки набегающего потока. Для численного моделирования неустойчивых колебаний пластины предложен эффективный численный алгоритм без насыщения, который позволяет на редкой сетке получить приемлемую точность в приближенном решении. Численно исследована зависимость критической скорости от безразмерной скорости звука в пластине, толщины пластины и угла направления вектора скорости набегающего потока.

*Ключевые слова:* численные методы без насыщения, флаттер пластины

**DOI:** 10.31857/S0572329921020021

**Введение.** Рассматривается флаттер пластины, обтекаемой, с одной стороны, потоком воздуха. Принята математическая модель флаттера пластины построена А.А. Ильюшиным, И.А. Кийко [1]. Эффективный алгоритм решения задачи разработан автором и Кийко И.А. [2]. Основу программы составляет построение дискретного бигармонического оператора по методике [3]. Конформное отображение строится по программе Э.П. Казанджана [4]. Программный комплекс устроен таким образом, что если известны параметрические уравнения границы области, то возможно найти критическую скорость флаттера и построить соответствующую собственную форму. Стандартно критическая скорость флаттера ищется на двух сетках  $9 \times 15$  и  $15 \times 31$ ; критерием правильности расчета является близость полученных значений, возможно задать произвольную сетку.

**1. Математическая постановка задачи.** Исследование устойчивости колебаний тонкой пластины произвольной формы в плане, которая в плоскости  $x, y$  занимает область  $G$  с границей  $\partial G$  и обдувается потоком газа, приводит к спектральной задаче [1] для амплитудного значения прогибов  $\varphi = \varphi(x, y)$ ,  $(x, y) \in G$ .

$$D\Delta^2\varphi - \beta V \operatorname{grad}\varphi = \lambda\varphi; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \beta = \frac{kp_0}{c_0} \quad (1.1)$$

$$\varphi|_{\partial G} = 0, \quad M\varphi|_{\partial G} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $E, \nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины,  $h$  – ее толщина,  $V = (V_x, V_y)$  – вектор скорости газа,  $p_0, c_0$  – давление и скорость звука в невозмущенном потоке,  $k$  – показатель политропы газа.

Собственное число  $\lambda$  связано с частотой колебаний соотношением

$$\lambda = -\rho h \omega^2 - \beta \omega \quad (1.3)$$

в котором  $\rho$  – плотность материала пластины.

Оператор  $M$  в (1.2) – это известный в теории пластин дифференциальный оператор, определяемый типом граничных условий. Методика решения спектральной задачи (1.1)– (1.3) описана для произвольного оператора  $M$ .

Колебания пластины будут устойчивыми или нет в зависимости от того, будет ли  $\text{Re} \omega < 0$  или  $\text{Re} \omega > 0$ ; если  $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$  – наименьшее по модулю собственное значение, то вследствие (1.3) выписанным неравенствам соответствуют  $F(\alpha_1, \beta_1) > 0$  или  $F(\alpha_1, \beta_1) < 0$ , где  $F(\alpha_1, \beta_1) = \alpha_1 \beta_1^2 - \rho h \beta_1^2$ . Поскольку  $\alpha_1 = \alpha_1(V)$ ,  $\beta_1 = \beta_1(V)$  уравнение  $F(\alpha_1, \beta_1) = 0$  определяет нейтральную кривую и соответствующую ей критическую скорость флаттера. Речь идет, следовательно, о нахождении нулей функции  $F(\alpha_1(V), \beta_1(V))$  при заданном направлении вектора скорости потока.

Обозначим через  $l$  характерный размер области  $G$  и введем безразмерные (со штрихами) координаты и параметры:  $x = x'l$ ,  $y = y'$ ,  $E = E' p_0$ ,  $h = h'l$ ,  $\rho = \frac{\rho' p_0}{c_0^2}$ ,  $\omega = \frac{\omega' c_0}{l}$ ,  $V = V' c_0$ ,  $\varphi = \varphi'l$ .

Подставив в (1.1) (1.3), убеждаемся, что в безразмерной форме система сохраняет свой вид, если параметр  $\beta$  заменить на безразмерный параметр  $k$ . В дальнейшем изложении штрихи будем опускать.

Введем вместо декартовых координат  $x$ ,  $y$  криволинейные координаты  $r$ ,  $\theta$  по формулам  $x = u(r, \theta)$ ,  $y = v(r, \theta)$ ; если выполнены условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

то система координат  $r$ ,  $\theta$  ортогональна. Выберем теперь функции  $u(r, \theta)$ , и  $v(r, \theta)$  таким образом, чтобы функция

$$\psi(\zeta) = u(r, \theta) + iv(r, \theta), \quad \zeta = r \exp(i\theta)$$

задавала конформное отображение круга  $|\zeta| = r \leq 1$  на область  $G$ . Тогда в координатах  $(r, \theta)$  уравнение (1.1) примет вид

$$D\Delta(|\psi'(\zeta)|^{-2} \Delta\varphi) - k \left( (V_x u_r + V_y v_r) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} (V_y u_r - V_x v_r) \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \lambda |\psi'(\zeta)|^2 \varphi \quad (1.4)$$

$$\left( u_r = \text{Re} \left( \frac{\psi'(\zeta) \zeta}{r} \right), \quad v_r = \text{Im} \left( \frac{\psi'(\zeta) \zeta}{r} \right) \right)$$

граничные условия (1.2) преобразуются известным образом [6]. В дальнейшем изложении область  $G$  предполагается односвязной, а контур  $\partial G$  – кривой Ляпунова; это обеспечивает выполнение основной теоремы Римана и теоремы о соответствии границ. Обозначим

$$f(r, \theta) = \Phi(r, \theta) + \lambda |\psi'(\zeta)|^2 \varphi$$

$$\Phi(r, \theta) = k \left( (V_x u_r + V_y v_r) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} (V_y u_r - V_x v_r) \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)$$

и запишем уравнение (1.4) в виде

$$D\Delta(|\psi'(\zeta)|^{-2} \Delta\varphi) = \Phi(r, \varphi) + \lambda |\psi'(\zeta)|^2 \varphi \quad (1.5)$$

Теперь очевидно, что дискретизация краевой задачи (1.5), (1.2) вполне аналогична описанной ранее [5] для бигармонического оператора.

**2. Вычислительные эксперименты.** Рассматривалась эллиптическая пластина с большой полуосью  $a = 1$  и эксцентриситетом  $e = 0.7$  для 4-х материалов: титан ( $c_2 = 14.773$ , сталь ( $c_2 = 15.131$ ), алюминий ( $c_2 = 15.214$ ) и дюралюминий ( $c_2 = 15.257$ ), где  $c_2$  – безразмерная скорость звука в пластине (отношение скорости звука в пластине к скорости звука в воздухе). Величина  $h \times 10^3$  менялась от 1 до 5 с шагом 1, где  $h$  – толщина пластины (безразмерная,  $a$  – характерный размер). Критическая скорость флаттера ищется на двух сетках  $9 \times 15$  и  $15 \times 31$ ; критерием правильности расчета является близость полученных значений. Было произведено 80 расчетов. Проводились 4 серии расчетов (по 20 расчетов в серии):

*Первая краевая задача (заземленная по контуру пластинка).* Рассматривается случай  $\theta = 0$ , где  $\theta$  – угол направления вектора потока с осью  $Ox$ . По результатам численных расчетов подбиралась аналитическая зависимость критической скорости флаттера  $z = v_{кр}$ , от двух безразмерных параметров  $x = c_2$  – безразмерная скорость звука в пластине (отношение скорости звука в пластине к скорости звука в воздухе),  $y = h \times 10^3$ , где  $h$  – толщина пластины (безразмерная,  $a$  – характерный размер) в результате получено:

$$z = a + bx + cy^3 \quad (2.1)$$

$$a = 0.045960572, \quad b = 0.00347737188, \quad c = 0.014473811$$

*Первая краевая задача (заземленная по контуру пластинка).* Рассматривается случай  $\theta = \pi/2$ . Получена та же зависимость (2.1), где  $a = 10.889836$ ,  $b = -0.71384416$ ,  $c = 0.023068911$ .

*Вторая краевая задача (свободно опертая по контуру пластинка).* Рассматривается случай  $\theta = 0$ . Получена та же зависимость (2.1), где  $a = 1.4538196$ ,  $b = -0.089596533$ ,  $c = 0.011091714$ .

*Вторая краевая задача (свободно опертая по контуру пластинка).* Рассматривается случай  $\theta = \pi/2$ . Получена та же зависимость (2.1), где  $a = 3.885002$ ,  $b = -0.25079837$ ,  $c = 0.019491586$ .

Дальнейшие расчеты проводились для алюминиевой пластины с разными направлениями вектора скорости потока.

В этих таблицах в левой колонке приведены углы  $\theta$  направления вектора потока с осью  $Ox$ . Запись  $9 \times 15$  означает сетку в круге из 9 окружностей по 15 точек на каждой окружности и т.п. Число в круглых скобках указывает номер собственного значения, по которому исследовалась устойчивость.

По таблицам 1, 3–6 подбиралась аналитическая зависимость критической скорости флаттера от двух параметров  $h$  – толщина пластины и  $\theta$  – направление вектора скорости с осью абсцисс. В приведенных формулах первый параметр  $x = h$ , а  $y$  – доля  $\pi$  в  $\theta$ . Например, для  $\theta = \pi/8$ ,  $y = 1/8$ .

**3. Выводы.** I. Во всех проведенных расчетах подтвердилось, что зависимость критической скорости флаттера  $z = v_{кр}$ , от двух безразмерных параметров  $x = c_2$  – безразмерная скорость звука в пластине (отношение скорости звука в пластине к скорости звука в воздухе),  $y = h \times 10^3$ , где  $h$  – толщина пластины (безразмерная,  $a$  – характерный размер) есть  $z = a + bx + cy^3$ . Это утверждение не противоречит ранее полученному соотношению (2.1)  $z = a + cy^3$  для алюминиевой пластины, т.е. когда варьировалась только толщина пластины,  $bx$  – поправка на материал.

Таблица 1

$$(a = 1, e = 0.7); \text{Al: } E = 0.7 \times 10^6 \text{ кгс/см}^2, \rho = 2.7 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$\theta$	1-я краевая задача		2-я краевая задача	
	$9 \times 15$	$15 \times 31$	$9 \times 15$	$15 \times 31$
0	0.3626	0.3622	0.2789	0.2783
$\pi/16$	0.3652	0.3652	0.2796	0.2796
$\pi/8$	0.3735	0.3742	0.2821	0.2833
$3\pi/16$	0.3873	0.3887	0.2867	0.2887
$\pi/4$	0.4061	0.4076	0.2925	0.2946
$5\pi/16$	0.4260	0.4280	0.2974	0.2992
$3\pi/8$	0.4432	0.4441	0.2994	0.3006
$7\pi/16$	0.4498	0.4502	0.2989	0.2996
$\pi/2$	0.4503	0.4505	0.2985	0.2987

Таблица 2

$$a = 1, e = 0.7; \text{Ti: } E = 1.1 \times 10^6 \text{ кгс/см}^2, \rho = 4.5 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$\theta$	1-я краевая задача		2-я краевая задача	
	$9 \times 15$	$15 \times 31$	$9 \times 15$	$15 \times 31$
0	0.4438	0.4434	0.3011	0.3005
$\pi/16$	0.4481	0.4478	0.3036	0.3032
$\pi/8$	0.4609	0.4611	0.3112	0.3115
$3\pi/16$	0.4829	0.4837	0.3241	0.3250
$\pi/4$	0.5144	0.5157	0.3419	0.3435
$5\pi/16$	0.5545	0.5559	0.3627	0.3646
$3\pi/8$	0.5980	0.5993	0.3884	0.3828
$7\pi/16$	0.6291	0.6298	0.3894	0.3902
$\pi/2$	0.6344	0.6346	0.3899(2)	0.3902(2)

Таблица 3

$$a = 1, e = 0.7; \text{Al: } E = 0.7 \times 10^6 \text{ кгс/см}^2, \rho = 2.7 \times 10^3 \text{ кг/м}^3, h = 0.001$$

$\theta$	1-я краевая задача		2-я краевая задача	
	$9 \times 15$	$15 \times 31$	$9 \times 15$	$15 \times 31$
0	0.0992046(3)	0.0906550(5)	0.0869917(2)	0.127044(4)
$\pi/8$	0.0752673(3)	0.0922430(5)	0.0699500(4)	0.108846(5)
$\pi/4$	0.0953305(5)	0.0948778(4)	0.125775(3)	0.137177(5)
$3\pi/8$	0.099404(4)	0.0979349(5)	0.129950(5)	0.164949(5)
$\pi/2$	0.137070(3)	0.122857(5)	0.127777(5)	0.175892(5)

Можно сказать, что решена задача табулирования: вместо того, чтобы хранить громоздкие таблицы со значениями критической скорости флаттера, зависящей от двух параметров, достаточно воспользоваться простой формулой (2.1).

Таблица 4

$$a = 1, e = 0.7; \text{Al: } E = 0.7 \times 10^6 \text{ кгс/см}^2, \rho = 2.7 \times 10^3 \text{ кг/м}^3, h = 0.002$$

$\Theta$	1-я краевая задача		2-я краевая задача	
	$9 \times 15$	$15 \times 31$	$9 \times 15$	$15 \times 31$
0	0.185628	0.185868	0.151815(2)	0.152090(2)
$\pi/8$	0.194063	0.190921	0.163442	0.155237(2)
$\pi/4$	0.206059	0.203922	0.168332	0.163886(2)
$3\pi/8$	0.215977	0.216651	0.175135(2)	0.176313(2)
$\pi/2$	0.220158	0.220423	0.184554	0.185116

Таблица 5

$$a = 1, e = 0.7; \text{Al: } E = 0.7 \times 10^6 \text{ кгс/см}^2, \rho = 2.7 \times 10^3 \text{ кг/м}^3, h = 0.004$$

$\theta$	1-я краевая задача		2-я краевая задача	
	$9 \times 15$	$15 \times 31$	$9 \times 15$	$15 \times 31$
0	0.647881	0.647201	0.904399	0.902115
$\pi/8$	0.673244	0.673408	1.24598	1.19275
$\pi/4$	0.752941	0.754649	1.38964(2)	1.55694(2)
$3\pi/8$	0.881436	0.883365	1.62488(3)	1.77013
$\pi/2$	0.945176	0.945504	1.82248(3)	1.75265(2)

Таблица 6

$$a = 1, e = 0.7; \text{Al: } E = 0.7 \times 10^6 \text{ кгс/см}^2, \rho = 2.7 \times 10^3 \text{ кг/м}^3, h = 0.005$$

$\theta$	1-я краевая задача		2-я краевая задача	
	$9 \times 15$	$15 \times 31$	$9 \times 15$	$15 \times 31$
0	1.14191	1.14054	1.76638	1.76194
$\pi/8$	1.18812	1.18791	2.09717(2)	2.32947
$\pi/4$	1.33485	1.33702	2.71417(2)	3.04075(2)
$3\pi/8$	1.58769	1.59103	3.01609(3)	3.37000(3)
$\pi/2$	1.77902	1.78041	3.43821(3)	3.41858(2)

II. Максимум критической скорости флаттера для алюминиевой пластины достигается при обтекании вдоль малой полуоси эллипса, а минимум при обтекании вдоль большой оси эллипса для обеих краевых задач: 1-я краевая задача – заземленная пластинка; 2-я краевая задача – свободно опертая пластинка. В первом случае критическая скорость флаттера монотонно возрастает от значения 0.3622 до значения 0.4505 (при  $h = 0.003$ ). Во втором случае монотонного возрастания критической скорости флаттера для алюминия нет, а для титана есть. Видимо это связано с тем, что первый материал более мягкий.

Для алюминия зависимость критической скорости флаттера от двух параметров  $h$  – толщина пластины и  $\theta$  – направление вектора скорости с осью абсцисс представляет рациональной функцией (для обеих краевых задач):

$$\text{Первая краевая задача } z = \frac{(a + bx + cx^2 + dy)}{(1 + ex + fy + gy^2 + hy^3)},$$

$$a = 0.090816774, \quad b = -27.413664, \quad c = 27703.816, \quad d = 0.012249219,$$

$$e = -86.495309, \quad f = 0.093020951, \quad g = -2.5154882, \quad h = 3.0517341;$$

Вторая краевая задача

$$z = \frac{a + bx + cx^2 + dy}{1 + ex + fy + gy^2 + hy^3}$$

$$a = 0.50989183, \quad b = -459.87831, \quad c = 128654.58, \quad d = -0.15318692,$$

$$e = -35.274587, \quad f = -2.276624, \quad g = 3.6044068, \quad h = -1.6181007.$$

Эти формулы содержат 8 параметров, которые могут быть определены в методических расчетах (для других значений эксцентриситета).

**Благодарность.** Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А20-120011690132-4.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А., Кийко И.А.* Новая постановка задачи о флаттере полой оболочки // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 167–171.
2. *Алгазин С.Д., Кийко И.А.* Численно-аналитическое исследование флаттера пластины произвольной формы в плане // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 171–174.
3. *Алгазин С.Д.* Численные алгоритмы классической матфизики. II. Спектральные задачи для бигармонического уравнения // Препр. ИПМех. М.: 2001. № 678. 27 с.
4. *Казанджан Э.П.* Об одном численном методе конформного отображения односвязных областей // Препр. ИПМ. М., 1977. № 82. 59 с.
5. *Алгазин С.Д., Бабенко К.И.* Численное решение задачи об изгибе и свободных колебаниях пластинки // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 1011–1015.
6. *Алгазин С.Д., Кийко И.А.* Флаттер пластин и оболочек. Издание 2-е, переработанное и дополненное. М.: “URSS”, 2016, 278 с. ISBN 978-5-9710-4188-7.

УДК 531

## О РАВНОВЕСИИ НЕРАСТЯЖИМОЙ ТЯЖЕЛОЙ НИТИ НА КОНУСЕ ИЛИ СФЕРЕ

© 2021 г. Г. М. Розенблат

*Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет,  
Москва, Россия*

*e-mail: gr51@mail.ru*

Поступила в редакцию 31.08.2020 г.

После доработки 01.09.2020 г.

Принята к публикации 02.09.2020 г.

Рассматривается задача о нахождении равновесных конфигураций тяжелой нерастяжимой замкнутой нити (цепочки) на гладкой поверхности. Поверхность является для нити односторонней связью и представляет собой либо круговой конус, ось которого параллельна вертикали (силе тяжести), либо сферу. Показано: 1) для конуса равновесные негоризонтальные конфигурации нити-цепочки возможны лишь тогда, когда угол раствора конуса заключен в пределах от 60 до 90 градусов; 2) для сферы равновесные негоризонтальные конфигурации нити-цепочки невозможны.

*Ключевые слова:* гибкая нерастяжимая нить, равновесие, конус, сфера, эллиптический интеграл третьего рода

**DOI:** 10.31857/S0572329921030107

**1. Описание модели и основные уравнения.** Пусть гладкая поверхность, на которой находится нерастяжимая тяжелая нить, задана уравнением  $h(x, y, z) = 0$ . Натяжение в точке нити с естественной координатой  $s$  обозначим через  $T(s) \geq 0$ , внешние силы, действующие на единицу длины нити, в проекциях на оси системы координат  $Oxuz$  обозначим  $x, y, z$ . Тогда уравнения равновесия нити на указанной поверхности суть (см. [1, 2, 9–16])

$$(Tx')' + X + \lambda \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (Ty')' + Y + \lambda \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad (Tz')' + Z + \lambda \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

В (1.1) штрих “'” означает производную по параметру  $s$  – длине дуги нити (естественная координата), а  $\lambda > 0$  – неопределенный множитель, характеризующий нормальную реакцию поверхности (односторонней связи  $h \geq 0$ ). К уравнениям (1.1) следует добавить еще два уравнения

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \quad h(x, y, z) = 0 \quad (1.2)$$

Первое из уравнений системы (1.2) характеризует свойство нерастяжимости нити (неголономная связь). Пять скалярных уравнений систем (1.1) и (1.2) полностью определяют пять неизвестных функций  $(x, y, z, T, \lambda)$  параметра  $s$ , которые реализуются при равновесии нити.

**2. Формулировки и решения задач равновесия.** Далее рассмотрим два случая: 1) поверхность – круговой конус, 2) поверхность – сфера.

*2.1. Круговой конус.* Рассмотрим круговой конус, ось симметрии которого вертикальна, а половина угла его раствора равна  $\alpha$ . Пусть система координат  $Oxyz$  выбрана так, что точка  $O$  совпадает с вершиной конуса, ось его симметрии совпадает с осью  $Oz$ , которая направлена вертикально вниз (т.е. по направлению силы тяжести), а оси  $Ox$  и  $Oy$  лежат в горизонтальной плоскости. Тогда уравнение поверхности конуса будет таким

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 0, \quad z > 0 \quad (2.1)$$

Пусть на этот конус (односторонняя связь) положена нерастяжимая тяжелая однородная замкнутая нить плотности  $\rho$ . Исследуем возможность ее равновесия при отсутствии сил трения.

В этом случае имеем  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = \rho g$ , и уравнения равновесия (1.1) принимают вид

$$(Tx')' + 2\lambda x = 0, \quad (Ty')' + 2\lambda y = 0, \quad (Tz')' - 2\lambda z(\operatorname{tg}^2 \alpha) + \rho g = 0 \quad (2.2)$$

Система (2.2) имеет следующий интеграл натяжений (“энергии”)

$$T + \rho g z = T_0 = \operatorname{const} > 0 \quad (2.3)$$

Кроме того, (так как внешние силы, приложенные в каждой точке нити, создают нулевой момент относительно оси  $z$ ) имеется следующий интеграл момента сил натяжения в любой точке нити относительно оси  $Oz$

$$T(y'x - x'y) = D = \operatorname{const} \quad (2.4)$$

Введем полярные координаты  $(r, \varphi)$  в плоскости  $(x, y)$  следующим образом

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, \\ x' &= r' \cos \varphi - r\varphi' \sin \varphi, & y' &= r' \sin \varphi + r\varphi' \cos \varphi, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$x'^2 + y'^2 = r'^2 + r^2 \varphi'^2$$

Используя (2.4) и (2.5), получим

$$Tr^2 \varphi' = D \quad (2.6)$$

Из (2.1) имеем равенство  $r^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ , подставляя которое в (2.6), получим, с учетом интеграла (2.3), соотношение

$$\varphi' = \frac{\gamma^2 \operatorname{ctg} \alpha}{z^2(z_0 - z)}, \quad \text{где} \quad z_0 = \frac{T_0}{\rho g} = \operatorname{const} > 0, \quad \gamma^2 = \frac{D \operatorname{ctg} \alpha}{\rho g} = \operatorname{const} > 0 \quad (2.7)$$

Используя последнее уравнение системы (2.5), соотношение (2.7) и равенство  $r^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ , из первого уравнения системы (1.2) получим

$$z'^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \frac{\gamma^4}{z^2(z_0 - z)^2} = 1$$

Из последнего уравнения находим для  $z = z(s)$  и  $s = s(z)$  соотношения:

$$\frac{dz}{ds} = \pm \cos \alpha \frac{\sqrt{z^2(z_0 - z)^2 - \gamma^4}}{z(z_0 - z)}, \quad \frac{ds}{dz} = \pm \frac{1}{\cos \alpha} \frac{z(z_0 - z)}{\sqrt{z^2(z_0 - z)^2 - \gamma^4}} \quad (2.8)$$

Далее, из третьего уравнения системы (2.2) находим  $\lambda = \lambda(z)$  по формуле

$$\lambda = \frac{\rho g [1 + (z_0 - z)z'' - z'^2]}{2z \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\rho g}{2z \operatorname{tg}^2 \alpha} \left[ \sin^2 \alpha + \frac{\gamma^4 \cos^2 \alpha}{z^3 (z_0 - z)} \right] > 0$$

В последней формуле использовано (2.8) и тождество  $z'' = 0.5d(z^2)/dz$ .

Найдем квадратуру для функции  $\varphi = \varphi(z)$ . Умножая уравнение (2.7) на второе из равенств (2.8), получим

$$d\varphi = \pm \frac{\gamma^2}{\sin \alpha} \frac{dz}{z \sqrt{P(z)}}, \quad P(z) = z^2(z_0 - z)^2 - \gamma^4 \quad (2.9)$$

Представим многочлен  $P(z)$  из (2.9) в виде

$$P(z) = [(0.5z_0 - z_2)^2 - (z - 0.5z_0)^2][0.25z_0^2 + \gamma^2 - (z - 0.5z_0)^2], \quad (2.10)$$

$$z_2 = 0.5z_0 + \sqrt{0.25z_0^2 - \gamma^2}$$

Многочлен  $P(z)$  при  $0.25z_0^2 \in [\gamma^2, \infty)$  имеет еще вещественный положительный корень  $z_1 = 0.5z_0 - \sqrt{0.25z_0^2 - \gamma^2} < z_2$ . Два других вещественных корня  $z_{3,4} = 0.5z_0 \pm \sqrt{0.25z_0^2 + \gamma^2}$  находятся вне (снаружи) интервала  $(z_1, z_2)$ , причем  $z_4 < 0$ ,  $z_3 > z_2 > 0$ . При  $z \in [z_1, z_2]$  имеем  $P(z) \geq 0$ . Нетрудно установить, что это единственный интервал изменения  $z$ , на котором существуют вещественные  $2\pi$ -периодические решения  $z(\varphi)$  уравнения (2.9) для положения равновесия замкнутой нити. Этот интервал существует только тогда, когда выполнено условие  $0.25z_0^2 \in [\gamma^2, \infty)$ .

Отметим, что при условии  $0.25z_0^2 \in [0, \gamma^2)$  уравнение  $P(z) = 0$  имеет лишь два вещественных корня  $z_{3,4} = 0.5z_0 \pm \sqrt{0.25z_0^2 + \gamma^2}$ , один из которых (корень  $z_4$ ) отрицателен. В этом случае будут соблюдаться неравенства

$$P(z) < 0, \quad z \in (0, z_3), \quad P(z) \geq 0, \quad z \geq z_3$$

Тогда решения уравнения (2.9) существуют только при  $z \geq z_3 > 0$  и имеют асимптотический характер: нить либо “спиралью навивается” вверх на конус к уровню  $z = z_3$  из некоторого начального положения  $z = z_0 > z_3$ , либо же, “навиваясь спиралью”, удаляется вниз по конусу от начальной точки  $z = z_0 \geq z_3$ , т.е. свойство замкнутости нити при равновесии не может быть реализовано.

Таким образом, для существования решения представленных уравнений равновесия замкнутой нити (цепочки) необходимо выполнение двух условий:

1.  $0.25z_0^2 \in [\gamma^2, \infty)$ ; 2. При изменении  $z$  в пределах от  $z = z_1$  до  $z = z_2$  функция  $\varphi(z)$  (решение уравнения (2.9)) изменяется ровно на  $\pi$  (это условие следует из симметрии и требования замкнутости нити).

Следовательно, согласно (2.9), необходимо исследовать разрешимость уравнения

$$\pi = \frac{\gamma^2}{\sin \alpha} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z \sqrt{P(z)}} \quad (2.11)$$

В (2.11) параметры  $\{z_0, \gamma^2, \alpha\}$  изменяются в области

$$(0 < z_0 < \infty, 0 < \gamma^2 < 0.25z_0^2, 0 < \alpha < \pi/2)$$

Исследование разрешимости уравнения (2.11) в указанной области изменения параметров проведем двумя независимыми методами.

*1 метод.* Использование эллиптических интегралов. Делаем в (2.11) замену

$$z - 0.5z_0 = (0.5z_0 - z_2) \sin \varphi, \quad \varphi \in [-0.5\pi, 0.5\pi].$$

Тогда, используя (2.10), приходим к исследованию разрешимости следующего уравнения

$$\pi = \frac{\gamma^2}{\sin \alpha} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(0.5z_0 - \sqrt{0.25z_0^2 - \gamma^2 \sin^2 \varphi}) \sqrt{0.25z_0^2 + \gamma^2 - (0.25z_0^2 - \gamma^2) \sin^2 \varphi}}$$

Вводя обозначение  $\mu = 4\gamma^2/z_0^2 \in (0, 1)$  и преобразуя интеграл к пределам от 0 до  $\pi/2$ , приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \pi = I(\mu, \alpha) &= \frac{2\mu}{\sin \alpha \sqrt{1 + \mu}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - \sigma^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}}, \\ \sigma^2 &= 1 - \mu, \quad k^2 = \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Интеграл в (2.12) является полным эллиптическим интегралом 3-го рода, обозначаемым как  $\Pi(\sigma^2, k)$ . Используя формулы приведения из [3, см. формулы 413.01 на стр. 228], имеем

$$\Pi(\sigma^2, k) = \frac{\pi \sigma}{2\sqrt{(\sigma^2 - k^2)(1 - \sigma^2)}} \Lambda_0(\xi, k), \quad \xi = \arcsin \sqrt{\frac{\sigma^2 - k^2}{\sigma^2 k'^2}}, \quad k'^2 = 1 - k^2 \quad (2.13)$$

В (2.13) фигурирует Heuman's Lambda Function  $\Lambda_0(\xi, k)$ , которая дается следующей формулой [3, формула 413 на стр. 228]

$$\Lambda_0(\xi, k) = \frac{2}{\pi} [E(k)F(\xi, k') + K(k)E(\xi, k') - K(k)F(\xi, k')], \quad k'^2 = 1 - k^2 \quad (2.14)$$

В (2.14) обозначены стандартным образом  $K(k)$ ,  $E(k)$  полные эллиптические интегралы, соответственно, 1-го и 2-го родов от модуля  $k$ , а  $F(\xi, k')$ ,  $E(\xi, k')$  – неполные эллиптические интегралы, соответственно, 1-го и 2-го родов с аргументом  $\xi$  от модуля  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ . В нашем конкретном случае, в соответствии с обозначениями из (2.12), (2.13), имеем  $\xi = \arcsin \sqrt{(\sigma^2 - k^2)/(\sigma^2 k'^2)} = \arcsin(1/\sqrt{2}) = \pi/4$ . Тогда, используя обозначения из (2.12), получим из (2.13)

$$\Pi(\sigma^2, k) = \Pi\left(1 - \mu, \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 + \mu}}\right) = \frac{\pi \sqrt{1 + \mu}}{2\mu} \Lambda_0\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 + \mu}}\right)$$

Подставляя полученное выражение в (2.12), приходим к уравнению

$$\pi = I(\mu, \alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha} \Lambda_0\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 + \mu}}\right), \quad \mu \in (0, 1) \quad (2.15)$$

Функция  $\Lambda_0\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}}\right)$ , стоящая в правой части уравнения (2.15), является монотонной по  $\mu$ . Это следует из формулы для производной функции  $\Lambda_0(\varphi, k)$  по модулю  $k$

$$\frac{d}{dk} \Lambda_0(\varphi, k) = \frac{2(E - K) \sin \varphi \cos \varphi}{\pi k \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} < 0, \quad \varphi \in (0, \pi/2) \quad (2.16)$$

(см. формулу 710.11 на стр. 283 книги [3]). Кроме того, так как  $k = \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}}$ , то

$$\frac{dk}{d\mu} = -\sqrt{\frac{1}{(1-\mu)(1+\mu)^3}}. \text{ Следовательно, используя (2.16), получаем}$$

$$\frac{d}{d\mu} \Lambda_0\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}}\right) > 0$$

Итак, функция  $I(\mu, \alpha)$ , фигурирующая в правой части уравнения (2.15), является монотонно возрастающей по параметру  $\mu$ . Следовательно, для разрешимости уравнения (2.15) на интервале  $0 < \mu < 1$  необходимо и достаточно выполнения двойного неравенства

$$I(0, \alpha) < \pi < I(1, \alpha) \quad (2.17)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} I(0, \alpha) &= \pi \Lambda_0(0.25\pi, 1) / \sin \alpha = 0.5\pi / \sin \alpha \\ I(1, \alpha) &= \pi \Lambda_0(0.25\pi, 0) / \sin \alpha = \pi / (\sqrt{2} \sin \alpha) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Формулы (2.18) следуют из известных соотношений

$$\Lambda_0(\beta, 1) = 2\beta/\pi, \quad \Lambda_0(\beta, 0) = \sin \beta$$

(см. формулы 151.01 на стр. 36 книги [3]). Отметим, что значение  $I(1, \alpha) = \pi / (\sqrt{2} \sin \alpha)$  из (2.18) также может быть получено и непосредственно из (2.12) при  $\mu = 1$ . Далее, используя (2.18), из (2.17) получаем неравенства

$$0.5 < \sin \alpha < \sqrt{2}/2$$

Последние неравенства эквивалентны следующим

$$30^\circ < \alpha < 45^\circ$$

Таким образом, для возможности равновесия замкнутой нити на конусе необходимо выполнения неравенств

$$60^\circ < 2\alpha < 90^\circ \quad (2.19)$$

В (2.19)  $2\alpha$  – угол раствора конуса.

*2 метод.* Использование методов теории функций комплексной переменной. Вычисляем интеграл в формуле (2.11) при помощи контурного интегрирования (с использованием теоремы Коши из теории функций комплексного переменного и теории вычетов). В рассматриваемой области изменения параметров ( $0 < z_0 < \infty$ ,  $0 < \gamma^2 < < 0.25z_0^2$ ,  $0 < \alpha < \pi/2$ ) подкоренное выражение под знаком интеграла в (2.11) является полиномом 4-го порядка, который имеет 4 различных вещественных корня  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , причем соблюдены следующие неравенства

$$-\infty < z_4 < 0 < z_1 < z_2 < z_3 < +\infty$$

Тогда интеграл из (2.11) можно записать в виде

$$I(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}} \quad (2.20)$$

$$z_{1,2} = 0.5z_0 \mp \sqrt{0.25z_0^2 - \gamma^2}, \quad z_{3,4} = 0.5z_0 \pm \sqrt{0.25z_0^2 + \gamma^2} \quad (2.21)$$

В первой из формул (2.21) верхний знак соответствует корню  $z_1$ , а в последней формуле из (2.21) верхний знак соответствует корню  $z_3$ . Подынтегральное выражение в (2.20) будем рассматривать как функцию комплексного переменного  $z = x + iy$ . Выберем стандартный контур интегрирования для однозначной ветви корня в подынтегральном выражении интеграла (2.20). Этот контур состоит из окружности  $C_R$  с центром в точке  $z = 0$  достаточно большого радиуса  $R$  ( $R \rightarrow \infty$ ), и двух сторон трех разрезов на действительной оси  $S_1 = (-R, z_4)$ ,  $S_2 = (z_1, z_2)$ ,  $S_3 = (z_3, +R)$ , ( $R \rightarrow \infty$ ). Точки  $z_1, z_2, z_3, z_4$  являются точками ветвления (устраняемая особенность), а точка  $z = 0$  – единственным полюсом подынтегральной функции интеграла (2.20). Однозначную ветвь корня мы выбираем так, что на верхнем берегу разреза  $S_2$  корень отрицателен (на нижнем берегу – положителен), а тогда на верхних берегах разрезов  $S_1, S_3$  корень положителен (соответственно, на нижних берегах – отрицателен). Отметим, что для этой ветви значение корня в точке  $z = 0$  также следует выбирать со знаком минус, то есть имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sqrt{P(z)}\Big|_{z=0} &= \sqrt{z^2(z_0 - z)^2 - \gamma^4}\Big|_{z=0} = \\ &= \sqrt{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)}\Big|_{z=0} = -i\gamma^2, \quad i = \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (2.22)$$

По теореме Коши интеграл от рассматриваемой однозначной ветви подынтегральной функции по указанному замкнутому контуру равен вычету в точке  $z = 0$ , умноженному на  $2\pi i$ . Учитывая равенство (2.22), приходим к соотношению

$$I_{C_R} + 2I(z_4) + 2I(z_3) - 2I(z_1, z_2) = 2\pi i \left( \frac{1}{-i\gamma^2} \right) \quad (2.23)$$

где обозначено:  $I_{C_R}$  – интеграл от рассматриваемой функции, взятый по полной окружности  $C_R$ ,  $I(z_4)$  – интеграл от рассматриваемой функции, взятый по действительной оси от точки  $z = -R$  до точки  $z = z_4$  (верхний берег разреза  $S_1$ ),  $I(z_3)$  – интеграл от рассматриваемой функции, взятый по действительной оси от  $z = z_3$  до  $z = +R$  (верхний берег разреза  $S_3$ ),  $I(z_1, z_2)$  – искомый интеграл из (2.20). Устремляя в (2.23)  $R \rightarrow +\infty$ , несложно показать, что  $I_{C_R} \rightarrow 0$ , и справедливы соотношения

$$I(z_4) \rightarrow - \int_{|z_4|}^{+\infty} \frac{dz}{z\sqrt{z^2(z_0 + z)^2 - \gamma^4}}, \quad I(z_3) \rightarrow \int_{z_3}^{+\infty} \frac{dz}{z\sqrt{z^2(z_0 - z)^2 - \gamma^4}} \quad (2.24)$$

В результате, из (2.23) и (2.24) получаем формулу

$$I(z_1, z_2) = \frac{\pi}{\gamma^2} + \int_{z_3}^{+\infty} \frac{dz}{z\sqrt{z^2(z_0 - z)^2 - \gamma^4}} - \int_{|z_4|}^{+\infty} \frac{dz}{z\sqrt{z^2(z_0 + z)^2 - \gamma^4}} \quad (2.25)$$

Делаем в интегралах из (2.25) замену  $z = z_0 y$ . Получим

$$I(z_1, z_2) = \frac{\pi}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^2} \int_{z_3/z_0}^{+\infty} \frac{dy}{y\sqrt{z_0^4 \gamma^{-4} y^2 (1-y)^2 - 1}} - \frac{1}{\gamma^2} \int_{|z_4|/z_0}^{+\infty} \frac{dy}{y\sqrt{z_0^4 \gamma^{-4} y^2 (1+y)^2 - 1}}$$

Для упрощения выкладок введем обозначение  $\varepsilon = \gamma^2/z_0^2 \in (0, 0.25)$  (так как в рассматриваемой области параметров выполнено неравенство  $0 < \gamma^2 < 0.25z_0^2$ ). Тогда получим

$$I(z_1, z_2) = \frac{\pi}{\gamma^2} + \frac{\varepsilon}{\gamma^2} \int_{k_1}^{+\infty} \frac{dy}{y\sqrt{y^2(1-y)^2 - \varepsilon^2}} - \frac{\varepsilon}{\gamma^2} \int_{k_2}^{+\infty} \frac{dy}{y\sqrt{y^2(1+y)^2 - \varepsilon^2}} \quad (2.26)$$

Для нижних пределов интегралов в (2.26) введены обозначения

$$k_1 = z_3/z_0 = 0.5 + \sqrt{0.25 + \varepsilon}, \quad k_2 = |z_4|/z_0 = -0.5 + \sqrt{0.25 + \varepsilon} \quad (2.27)$$

В первом из интегралов в (2.26) делаем замену переменной  $y = y_1 + 1$ . Получим

$$I(z_1, z_2) = \frac{\pi}{\gamma^2} + \frac{\varepsilon}{\gamma^2} \int_{k_2}^{+\infty} \frac{dy_1}{(y_1 + 1)\sqrt{y_1^2(1 + y_1)^2 - \varepsilon^2}} - \frac{\varepsilon}{\gamma^2} \int_{k_2}^{+\infty} \frac{dy}{y\sqrt{y^2(1+y)^2 - \varepsilon^2}}$$

Окончательно получаем следующую формулу

$$I(z_1, z_2) = \frac{\pi}{\gamma^2} - \frac{\varepsilon}{\gamma^2} \int_{k_2}^{+\infty} \frac{dy}{y(y+1)\sqrt{y^2(1+y)^2 - \varepsilon^2}} \quad (2.28)$$

Обозначим

$$F(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\gamma^2} \int_{k_2}^{+\infty} \frac{dy}{y(y+1)\sqrt{y^2(1+y)^2 - \varepsilon^2}}, \quad (2.29)$$

$$\text{где } k_2 = -0.5 + \sqrt{0.25 + \varepsilon}, \quad \varepsilon \in (0, 0.25)$$

Покажем, что функция  $F(\varepsilon)$  из (2.29) является монотонной по аргументу  $\varepsilon \geq 0$ . Действительно, сделаем в интеграле из (2.29) замену переменной

$$y(y+1) = \varepsilon u \Rightarrow y = -0.5 + \sqrt{0.25 + \varepsilon u}, \quad dy = \frac{\varepsilon du}{2\sqrt{0.25 + \varepsilon u}} = \frac{\varepsilon du}{\sqrt{1 + 4\varepsilon u}}$$

Тогда получим

$$F(\varepsilon) = \frac{1}{\gamma^2} \int_1^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}\sqrt{1 + 4\varepsilon u}} \quad (2.30)$$

Из (2.30) монотонное убывание по  $\varepsilon > 0$  функции  $F(\varepsilon)$  (при любом фиксированном  $\gamma$ ) становится очевидным. Следовательно, справедливы неравенства

$$F(0.25) \leq F(\varepsilon) \leq F(0), \quad \varepsilon \in (0, 0.25). \quad (2.31)$$

Из (2.30) получим

$$F(0) = \frac{1}{\gamma^2} \int_1^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \frac{2}{\gamma^2} \operatorname{arctg}(u + \sqrt{u^2-1}) \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2\gamma^2} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} F(0.25) &= \frac{1}{\gamma^2} \int_1^{+\infty} \frac{du}{u(u+1)\sqrt{u-1}} = \\ &= \frac{2}{\gamma^2} \left( \operatorname{arctg}\sqrt{u-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{u-1}{2}} \right) \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{\gamma^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Используя соотношения (2.28)–(2.33), получим неравенства

$$\frac{\pi}{2\gamma^2} \leq I(z_1, z_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}\gamma^2} \quad (2.34)$$

Теперь вернемся к уравнению (2.11), которое с учетом наших обозначений, имеет вид

$$\pi = \frac{\gamma^2}{\sin \alpha} I(z_1, z_2)$$

Учитывая неравенства (2.34), можно утверждать, что разрешимость последнего уравнения эквивалентна неравенствам

$$\frac{\pi}{2\gamma^2} \leq \frac{\pi \sin \alpha}{\gamma^2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}\gamma^2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq 2\alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

В последних формулах  $2\alpha$  – угол раствора конуса. Таким образом, метод 2 дал те же самые результаты, что были получены выше методом 1.

Если неравенства (2.19) выполнены, то из уравнения (2.15) мы находим то единственное значение  $\mu^* = \mu(\alpha) \in (0, 1)$ , при котором возможно равновесие.

Предположим, что неравенства (2.19) выполнены, и соответствующее значение  $\mu^* = \mu(\alpha) \in (0, 1)$  найдено. Рассмотрим второе из равенств формул (2.8), которое проинтегрируем в пределах от  $z = z_1$  до  $z = z_2$ . В силу симметрии конфигурации замкнутой нити, слева должны получить её полудлину  $L/2$ . Тогда имеем равенство

$$\frac{L}{2} = \frac{1}{\cos \alpha} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z(z_0 - z) dz}{\sqrt{P(z)}} \quad (2.35)$$

Аналогично предыдущему, делаем в интеграле формулы (2.35) замену

$$z - 0.5z_0 = (0.5z_0 - z_2) \sin \varphi, \quad \varphi \in [-0.5\pi, 0.5\pi]$$

Тогда уравнение (2.35) приобретает вид

$$\frac{L}{2} = \frac{z_0}{\sqrt{1 + \mu^* \cos \alpha}} \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \sigma^2 \sin^2 \beta) d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}, \quad \sigma^2 = 1 - \mu^*, \quad k^2 = \frac{1 - \mu^*}{1 + \mu^*} \quad (2.36)$$

Интеграл, фигурирующий в (2.36), может быть сведен к полному эллиптическому интегралу 3-го рода и далее аналогично предыдущему вычислен через функцию

$$\Lambda_0 \left( \frac{\pi}{4}, \frac{1 - \mu^*}{1 + \mu^*} \right).$$

Из (2.36) мы находим постоянную величину  $z_0$ , которая зависит от длины нити. Далее, вспоминая обозначение для  $\mu$ , находим соответствующее  $\gamma_*^2$  по формуле

$\gamma_*^2 = \mu^* z_0^2 / 4$ . Используя обозначение из (2.7), находим в результате константу  $D$  по формуле  $D = \rho g \gamma_*^2 \operatorname{tg} \alpha$ .

Таким образом, задача о равновесии замкнутой нити на конусе полностью разрешена. Решение этой задачи единственно, с точностью до поворотов вокруг оси симметрии  $Oz$  (кроме горизонтальных положений равновесия, когда  $z = \operatorname{const}$ ).

*Замечание 1.* Отметим, что почти одновременно с публикацией автором результата о равновесии нити на конусе при условии (2.19) в статье [7], аналогичный результат (но другим методом) был получен также в работе [8]. Основной недостаток работы [8] состоит в следующем. При нахождении равновесной конфигурации нити-цепочки на конусе автор статьи [8] также пришел к условию разрешимости (2.11), где в правой ча-

сти стоит эллиптический интеграл  $I(\gamma) = \frac{\gamma^2}{\sin \alpha} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z \sqrt{P(z)}}$ , который зависит от параметра  $\gamma$ . Далее, автор статьи [8] отмечает, что *можно* показать монотонность этого интеграла по параметру  $\gamma$ , однако не делает этого и даже не указывает как это можно было бы сделать.

В настоящей статье монотонность интеграла  $I(\gamma)$  по параметру  $\gamma$  доказана математически строго двумя независимыми методами математического анализа. Как видим, это требует немалых аналитических усилий и не является столь очевидным. Отметим, что аналогичные исследования зависимости эллиптических интегралов от параметров проводились также классиками теоретической механики при качественном анализе результатов решения задачи о сферическом маятнике (см., например, учебник [1], стр. 436–438). В статье [17] было показано (при помощи методов контурного интегрирования), что при любой (ненулевой) начальной окружной скорости сферического маятника за время его прохода от максимального до минимального значений координаты  $z$  (т.е. за четверть периода по углу отклонения от вертикали) плоскость его качаний поворачивается на угол больший прямого ( $\pi/2$ ) и меньший развернутого ( $\pi$ ). Из результатов статьи [17], в частности, следует, что в пределе, при нулевой начальной окружной скорости сферического маятника, он превращается в обычный (плоский) математический маятник, а плоскость его качаний (за четверть периода по углу отклонения от вертикали) поворачивается ровно на 90 градусов, хотя при наблюдении нам кажется, что она вообще не поворачивается.

**2.2. Сфера.** Рассмотрим в качестве поверхности сферу радиуса  $a$ . Для упрощения выкладок примем, что  $a = 1$ . Пусть система координат  $Oxyz$  выбрана так, что точка  $O$  совпадает с центром сферической поверхности, ось  $Oz$  направлена вертикально вверх (т.е. против силы тяжести), а оси  $Ox$  и  $Oy$  лежат в горизонтальной плоскости. Тогда уравнение поверхности сферы будет таким

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad (2.37)$$

Пусть на эту сферу (односторонняя связь) положена нерастяжимая тяжелая однородная замкнутая нить плотности  $\rho$ . Исследуем возможность ее равновесия при отсутствии сил трения. В этом случае имеем  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = -\rho g$ , и уравнения равновесия (1.1) принимают вид

$$(Tx)' + 2\lambda x = 0, \quad (Ty)' + 2\lambda y = 0, \quad (Tz)' + 2\lambda z - \rho g = 0 \quad (2.38)$$

Система (2.38) имеет следующий интеграл натяжений (“энергии”)

$$T - \rho g z = T_0 = \operatorname{const} \quad (2.39)$$

Следуя [1, 9], используем еще интеграл момента натяжения относительно вертикальной оси  $Oz$ . Вводя цилиндрические координаты  $(r, \varphi, z)$  по формулам

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z \quad (2.40)$$

Тогда имеем соотношение

$$Tr^2 d\varphi = C ds, \quad C = \text{const} \quad (2.41)$$

Из (2.39) и (2.41) получим равенство

$$(z - z_0)r^2 d\varphi = Ads, \quad z_0 = -T_0/(\rho g) = \text{const}, \quad A = C/(\rho g) = \text{const} \quad (2.42)$$

Уравнение сферы (2.37) в координатах (2.40) имеет вид

$$r = \sqrt{1 - z^2} \quad (2.43)$$

Первое уравнение системы (1.2) в цилиндрических координатах (2.40) и учетом соотношения (2.43), принимает вид

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dz^2/r^2 \quad (2.44)$$

Используя (2.42) и (2.44), получим дифференциальное соотношение

$$d\varphi = \pm \frac{Adz}{(1 - z^2)\sqrt{f(z, z_0) - A^2}}, \quad f(z, z_0) = (1 - z^2)(z - z_0)^2 \quad (2.45)$$

Ясно, что при равновесии нити на сфере с односторонней связью  $h \geq 0$  в (2.45) должно соблюдаться условие  $z \in (0, 1)$ . А из требования замкнутости и симметрии нити при равновесии должно соблюдаться следующее условие: при изменении  $z$  от значения  $z = z_1$  до значения  $z = z_2$  угол  $\varphi$  должен измениться ровно на  $\pi$ , где  $z_1, z_2 \in (0, 1)$  – различные последовательные корни уравнения  $f(z, z_0) - A^2 = 0$ . Таким образом, задача сводится к решению уравнения

$$\pi = I(A, z_0), \quad I(A, z_0) = A \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(1 - z^2)\sqrt{f(z, z_0) - A^2}} \quad (2.46)$$

В (2.46) параметры  $\{A, z_0\}$  изменяются в допустимой области.

Область допустимого изменения параметров  $\{A, z_0\}$  находится из следующих соображений. Так как натяжение нити положительно  $T = \rho g(z - z_0) > 0$  при  $z \in (0, 1)$ , то необходимо должно соблюдаться условие  $z_0 \in (-\infty, 1]$ . Далее, несложное исследование функции  $f(z, z_0)$  показывает, что для существования двух вещественных корней  $z_1, z_2 \in (0, 1)$  уравнения  $f(z, z_0) - A^2 = 0$  параметр  $A^2$  необходимо должен удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} 0 < A^2 \leq f(z^*, z_0), \quad z_0 \in (0, 1] \\ z_0^2 < A^2 \leq f(z^*, z_0), \quad z_0 \in (-\infty, 0] \end{aligned} \quad (2.47)$$

В (2.47) обозначено

$$f(z^*, z_0) = \max_{z \in (0, 1)} f(z, z_0), \quad z^* = 0.25(z_0 + \sqrt{z_0^2 + 8})$$

В разделе 3 данной статьи показано, что при всех допустимых значениях параметров  $\{A, z_0\}$  для интеграла из (2.46) справедлива оценка  $I(A, z_0) < \pi$ . Следовательно, уравнение (2.46) не имеет решений.

Таким образом, негоризонтальные (т.е. с переменными значениями координаты  $z$ ) положения равновесия замкнутой тяжелой нерастяжимой нити-цепочки на гладкой сфере невозможны.

*Замечание 2.* При исследовании задач равновесия, рассматриваемых в данной статье, использовались полные эллиптические интегралы Лежандра 3-го рода. Для вы-

числения этих интегралов автор настоящей статьи обращался к книге [3] (к сожалению, не переведенной на русский язык). Отметим, что в известном справочнике [4], для рассматриваемого в статье случая эллиптического интеграла 3-го рода, содержится ошибка. Действительно, в справочнике [4] на стр. 28, формула (22), для приведения интеграла 3-го рода в случае  $-1 < v < -k^2 < 0$ , такова (цитируем, сохранив обозначения оригинала):

$$\begin{aligned} & k' \frac{\sin \theta \cos \theta}{\Delta(\theta, k')} [\Pi(-\Delta^2(\theta, k'), k) - K(k)] = \\ & = \pi/2 - [E(k) - K(k)] F(\theta, k') - K(k) E(\theta, k) \end{aligned} \quad (2.48)$$

В (2.48) обозначено  $\Delta(\theta, k) = (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}$ ,  $k' = (1 - k^2)^{1/2}$ ,  $E(k)$ ,  $K(k)$  – полные эллиптические интегралы, соответственно, 1-го и 2-го родов, а  $E(\theta, k)$ ,  $F(\theta, k)$  – неполные эллиптические интегралы, соответственно, 1-го и 2-го родов (при  $\theta \in (0, \pi/2)$ ,  $k \in (0, 1)$ ). Отметим, что в [4] для полного эллиптического интеграла 3-го рода (в отличие от обозначений данной статьи в формуле (2.12)) принято следующее обозначение

$$\Pi(v, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 + v \sin^2 \varphi) \Delta(\varphi, k)}$$

Тогда в (2.48) положено  $v = -\Delta^2(\theta, k') = -(1 - k'^2 \sin^2 \theta)$ ,  $k'^2 = 1 - k^2$ ,  $1 > -v > k^2 > 0$ . Правильная формула в (2.48) должна быть такой

$$\begin{aligned} & k'^2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{\Delta(\theta, k')} [\Pi(-\Delta^2(\theta, k'), k) - K(k)] = \\ & = \pi/2 - [E(k) - K(k)] F(\theta, k') - K(k) E(\theta, k') \end{aligned} \quad (2.49)$$

Справедливость соотношения (2.49) следует из формул, приведенных в книге [3] на стр. 228, а также в классическом трактате Лежандра [6] на стр. 138. Неправильность формулы (2.48) можно установить и непосредственно, рассматривая равенство (2.48) сначала: 1) при  $k = 0$  (так мы покажем, что в последнем слагаемом правой части равенства (2.48) обязательно должно быть  $E(\theta, k')$ ), а потом 2), полагая в (2.48)  $v = -k$  и затем устремляя  $k \rightarrow 1$  (так мы получим, что правая часть равенства (2.48) в точности равна  $\pi/4$ , а левая часть равенства (2.48) строго больше  $\pi/4$ ).

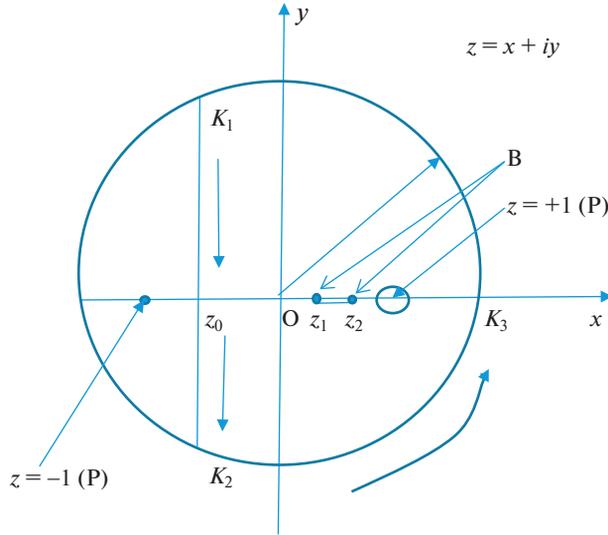
Отметим, что неверное равенство (2.48) присутствует также и в источнике [5] – английском оригинале книги [4].

**3. Оценка интеграла  $I(A, z_0)$  из уравнения (2.46) раздела 2.** Рассмотрим функцию  $I(A, z_0)$ , вычисляемую по формуле

$$I(A, z_0) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{Adz}{(1 - z^2) \sqrt{f(z, z_0) - A^2}}, \quad f(z, z_0) = (1 - z^2)(z - z_0)^2 \quad (3.1)$$

Покажем, что для этой функции верно неравенство  $I(A, z_0) < \pi$ , которое выполняется для всех допустимых значений параметров  $(A, z_0)$ , удовлетворяющих условиям (2.47) раздела 2 статьи. Мы докажем это неравенство непосредственно, не используя стандартной формулы для производной интеграла из (3.1) по параметру  $A$ . Эта операция некорректна, так как получаемый в результате такого дифференцирования интеграл является расходящимся.

Подынтегральная функция интеграла из (3.1) имеет два полюса в точках  $z = z_1^* = +1$ ,  $z = z_2^* = -1$ . Кроме того, точки  $z = z_1$ ,  $z = z_2$  являются точками ветвления для



**Рис. 1.** Контур интегрирования в комплексной плоскости  $z = x + iy$  для вычисления эллиптического интеграла. Внешний контур: отрезок  $K_1z_0K_2$  прямой (параллельной мнимой оси  $Oy$  и проходящей через точку  $z = z_0$  на вещественной оси  $Ox$ )  $\cup$  дуга  $K_2K_3K_1$  окружности радиуса  $R$  ( $R \rightarrow \infty$ ), и внутренний контур (разрез по отрезку  $[z_1, z_2]$ ):  $(z_1, z_2)^+$  (верхний берег разреза)  $\cup$   $(z_2, z_1)^-$  (нижний берег разреза). Стрелки указывают направление обхода внешнего контура. Внутренний и внешний контуры обходятся так, что область  $K_1z_0K_2K_3K_1$ , ограниченная внешним контуром, находится слева по ходу движения обхода.  $P$  – полюс.  $B$  – точки ветвления (нули под корнем)

корня в знаменателе подынтегральной функции. Это, как было указано в разделе 2 статьи, суть положительные вещественные корни уравнения 4-го порядка

$$(1 - z^2)(z - z_0)^2 - A^2 = 0 \tag{3.2}$$

Эти корни, как следует из условий (2.47) раздела 2 статьи, при  $z_0 \in (0, 1)$  принадлежат интервалу  $(z_0, 1)$ , а при  $z_0 \in (-\infty, 0)$  принадлежат интервалу  $(0, 1)$ . Уравнение 4-го порядка из (3.2), конечно, имеет еще два корня (возможно, комплексных), однако, несложно показать, что эти два оставшихся корня расположены заведомо левее вертикальной прямой  $z = z_0 + iy$ ,  $y \in (-\infty, +\infty)$ , проведенной параллельно мнимой оси в комплексной плоскости  $z = x + iy$ .

Вычисление интеграла из (3.1) будем производить при помощи контурного интегрирования. Контур интегрирования (см. рис. 1) состоит из трех частей и строится следующим образом. Выберем достаточно большое число  $R > \max(1, |z_0|)$ .

1-я часть контура – кривая  $S_1$ . Это дуга (часть) окружности радиуса  $R$ :

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad x \in (z_0, R), \quad y \in (-R, R)$$

2-я часть контура – линия  $S_2$ . Это вертикальный отрезок прямой

$$z = z_0 + iy, \quad y \in (-\sqrt{R^2 - z_0^2}, +\sqrt{R^2 - z_0^2})$$

Этот отрезок спрямляет (замыкает) дугу окружности  $S_1$  до замкнутого контура  $S_{12} = S_1 \cup S_2$ , который охватывает начало координат и точки

$$z = z_0, \quad z = z_1, \quad z = z_2, \quad z = +1$$

3-я часть контура – линия  $S_3 = S_3^+ \cup S_3^-$ . Это граница отрезка разреза вещественной оси  $z = x \pm 0 \cdot i$ ,  $x \in [z_1, z_2]$ , состоящая из двух берегов: верхнего  $S_3^+$  ( $z = x + 0 \cdot i$ ,  $x \in (z_1, z_2)$ ) и нижнего  $S_3^-$  ( $z = x - 0 \cdot i$ ,  $x \in (z_1, z_2)$ ).

Во внутренности области  $G$ , ограниченной указанными контурами  $S_{12}$  и  $S_3$ , выберем однозначную ветвь квадратного корня подынтегрального выражения интеграла из (3.1) так, что на верхней границе разреза  $S_3^+$  этот корень отрицателен, а на нижней границе этого разреза  $S_3^-$  он положителен. Тогда для этой ветви в точке полюса  $z_1^* = +1$  для корня в подынтегральном выражении в (3.1) имеем значение  $(+iA)$ . А в точке полюса  $z_2^* = -1$  для этого корня при  $z_0 < -1$  (когда, как указано было выше, два корня уравнения  $(1 - z^2)(z - z_0)^2 - A^2 = 0$  лежат в комплексной плоскости заведомо левее этого полюса) имеем значение  $(-iA)$ .

Ясно, что в области  $G$  эта однозначная ветвь подынтегральной функции является аналитической, за исключением ее полюсов  $z_{1,2}^* = \pm 1$ . Если  $z_0 \in (-1, 1)$ , то область  $G$  содержит только один полюс  $z_1^* = +1$ , а если  $z_0 < -1$ , то область  $G$  содержит уже два полюса  $z_{1,2}^* = \pm 1$ . В связи с этим, рассмотрим отдельно два возможных случая: 1)  $z_0 \in (-1, 1]$  и 2)  $z_0 \in (-\infty, -1]$ .

*1 случай*  $z_0 \in (-1, 1]$ . Тогда полюс только один – в точке  $z_1^* = +1$ . Вычет в этой точке, умноженный на  $2\pi i$ , равен

$$Q_1 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{A \rho e^{i\varphi} i d\varphi}{2(-\rho e^{i\varphi}) \sqrt{-A^2}} = -\pi$$

Интегрируем по контуру  $S_{12} \cup S_3$  так, что область  $G$  при обходе контура остается все время слева по ходу движения. Применяя теорему Коши, получаем соотношение

$$I(S_1) + I(S_2) + I(S_3) = Q_1 \quad (3.3)$$

В (3.3)  $I(S_1)$  – интеграл по дуге окружности  $S_1$ ,  $I(S_2)$  – интеграл по вертикальному отрезку  $S_2$ ,  $I(S_3)$  – интеграл по двум берегам разреза  $S_3 = S_3^+ \cup S_3^-$ . Переходя в соотношении (3.3) к пределу при  $R \rightarrow \infty$ , получим  $I(S_1) \rightarrow 0$ . Для интеграла  $I(S_2)$  получим следующее предельное (когда  $R \rightarrow \infty$ ) значение

$$I(S_2) = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{Aidy}{(c - id)\sqrt{-a + ib}} \quad (3.4)$$

В (3.4) обозначено

$$c = y^2 + 1 - z_0^2, \quad d = 2yz_0, \quad a = A^2 + y^2c, \quad b = 2y^3z_0 \quad (3.5)$$

Для интеграла  $I(S_3)$  имеем равенство  $I(S_3) = -2I(A, z_0)$ . Таким образом, из (3.3) получаем соотношение

$$I(S_2) - 2I(A, z_0) = -\pi$$

Отсюда следует равенство

$$I(A, z_0) = 0.5[\pi + I(S_2)] \quad (3.6)$$

Преобразуем интеграл из (3.4), используя обозначения (3.5). Получим сначала

$$I(S_2) = - \int_0^{+\infty} Ai \left[ \frac{1}{(c - id)\sqrt{-a + ib}} + \frac{1}{(c + id)\sqrt{-a - ib}} \right] dy \quad (3.7)$$

Для корней из комплексных чисел в знаменателях подынтегрального выражения (3.7) имеем следующие формулы

$$\begin{aligned} \sqrt{-a - ib} &= \frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}} + i \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \\ &= \frac{b\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{2}|b|} + i \left( -\frac{|b|}{\sqrt{2}\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}} \right) \\ \sqrt{-a + ib} &= -\frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}} + i \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \\ &= -\frac{b\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{2}|b|} + i \left( -\frac{|b|}{\sqrt{2}\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Указанный выбор знаков для значений квадратных корней в (3.8) обусловлен тем, что при  $a < 0, b \rightarrow +0$  (нижний берег разреза  $S_3^-$  для числа  $-a - ib$ ) должно, как это было принято выше, получаться положительное вещественное число, а при  $a < 0, b \rightarrow -0$  (верхний берег разреза  $S_3^+$  для числа  $-a - ib$ ) должно, как это было принято выше, получаться отрицательное вещественное число. Введем обозначения

$$g = \frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}, \quad h = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3.9)$$

Тогда имеем из (3.8)

$$\sqrt{-a - ib} = g - ih, \quad \sqrt{-a + ib} = -g - ih \quad (3.10)$$

Используя (3.10), получим из (3.7)

$$I(S_2) = -Ai \int_0^{+\infty} \frac{2i(ch - gd)}{(c^2 + d^2)(g^2 + h^2)} dy = 2A \int_0^{+\infty} \frac{(ch - gd)}{(c^2 + d^2)(g^2 + h^2)} dy \quad (3.11)$$

Таким образом, интеграл  $I(S_2)$  является вещественным.

Используя обозначения (3.5) и (3.9), из (3.11) получим

$$I(S_2) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{A[(1 - z_0^2 + y^2)(a + \sqrt{a^2 + b^2}) - 4y^4 z_0^2]}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}[(1 - z_0^2 + y^2)^2 + 4y^2 z_0^2]} dy \quad (3.12)$$

В (3.12)  $a, b$  даются формулами

$$a = A^2 + y^2(y^2 + 1 - z_0^2), \quad b = 2z_0 y^3 \quad (3.13)$$

Оценим интеграл (3.12) сверху. Так как для рассматриваемого случая  $z_0^2 < 1$ , то для всех значений  $y \in (0, +\infty)$ , согласно (3.13), имеем неравенства  $a > 0$ ,  $y^2 + 1 - z_0^2 > 0$ , а из первой формулы соотношений (3.13) следует, что  $A < \sqrt{a}$ . Тогда получим оценку

$$\begin{aligned} I(S_2) &< 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{a}(1 - z_0^2 + y^2)\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}[(1 - z_0^2 + y^2)^2 + 4y^2 z_0^2]} dy < \\ &< 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{a}(1 - z_0^2 + y^2)\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}[(1 - z_0^2 + y^2)^2 + 4y^2 z_0^2]} dy < \\ &< 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{a}(1 - z_0^2 + y^2)}{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2}}[(1 - z_0^2 + y^2)^2 + 4y^2 z_0^2]} dy \end{aligned}$$

А так как справедливо неравенство  $\sqrt{a} < \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , то имеем оценку

$$I(S_2) < 2 \int_0^{+\infty} \frac{(1 - z_0^2 + y^2)dy}{[(1 - z_0^2 + y^2)^2 + 4y^2 z_0^2]} = I_0(z_0) \quad (3.14)$$

Интеграл  $I_0(z_0)$  из (3.14) несложно подсчитать. Воспользуемся тождеством

$$\frac{1 - z_0^2 + y^2}{(1 - z_0^2 + y^2)^2 + 4z_0^2 y^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - |z_0|}{y^2 + (1 - |z_0|)^2} + \frac{1 + |z_0|}{y^2 + (1 + |z_0|)^2} \right]$$

Тогда получим

$$\int_0^y \frac{(1 - z_0^2 + y^2)}{[(1 - z_0^2 + y^2)^2 + 4y^2 z_0^2]} dy = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{y}{1 - |z_0|} + \operatorname{arctg} \frac{y}{1 + |z_0|} \right]$$

Следовательно, устремляя  $y \rightarrow \infty$ , получим  $I_0(z_0) = \pi$ . Это равенство справедливо только при  $z_0 \in (-1, 1)$ . Если  $z_0 = \pm 1$ , то непосредственно из (3.14) получим  $I_0(\pm 1) = \pi/2$ . Отметим, что случай  $z_0 = +1$  не реализуется физически, так как в этом случае функция  $f(z, 1) = (1 - z^2)(z - 1)^2 = (1 - z)^3(1 + z)$  является монотонно убывающей на отрезке  $z \in [0, 1]$ , а значит, уравнение  $(1 - z^2)(z - 1)^2 - A^2 = 0$  имеет на этом отрезке не более одного корня, что исключает наличие равновесных конфигураций. Случай  $z_0 = -1$  является особым, так как здесь построенный выше контур интегрирования проходит через точку  $z = -1$ , являющейся полюсом. Тогда в правой части равенства (3.3) следует добавить еще половину вычета в точке  $z = -1$ , умноженную на  $2\pi i$ .

Подсчитаем полный вычет в точке  $z = -1$ , умноженный на  $2\pi i$ , предполагая, что  $z_0 \leq -1$ . В этом случае, как это было отмечено выше, два оставшихся (помимо  $z_1, z_2$ ) корня уравнения  $(1 - z^2)(z - z_0)^2 - A^2 = 0$  лежат левее полюса  $z = -1$ , и поэтому значение корня  $\sqrt{-(z - z_1)(z - z_2)(z^2 + pz + q)}$  в точке  $z = -1$  будет равно  $\sqrt{\rho_1 \rho_2 (1 - p + q) \exp(3\pi i)} = -iA$ . Тогда получим следующее значение вычета в точке  $z = -1$

$$Q_2 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{A \rho e^{i\varphi} i d\varphi}{2 \rho e^{i\varphi} (-iA)} = -\pi \quad (3.15)$$

Таким образом, в случае  $z_0 = -1$  имеем, вместо (3.3), такое соотношение

$$I(S_1) + I(S_2) + I(S_3) = Q_1 + 0.5Q_2 = -\pi - 0.5\pi = -1.5\pi$$

Отсюда получаем

$$I(A, z_0) = 0.5[1.5\pi + I(S_2)] \quad (3.16)$$

Выше мы доказали, что в случае  $z_0 = -1$  справедливо строгое неравенство  $I(S_2) < I_0(-1) = 0.5\pi$ , где  $I_0$  определено в (3.14). Тогда из (3.16) получим  $I(A, z_0) < \pi$ . Если же  $z_0 \in (-1, +1)$ , то мы используем равенство (3.6), где, как было показано выше, должно соблюдаться строгое неравенство  $I(S_2) < \pi$ . Тогда опять же получаем  $I(A, z_0) < \pi$ . Таким образом, показано, что в случае  $z_0 \in [-1, 1]$  справедливо строгое неравенство  $I(A, z_0) < \pi$ .

*2 случай*  $z_0 \in (-\infty, -1]$ . В этом случае все рассуждения аналогичны предыдущему пункту. Однако подынтегральная функция в интеграле из (3.1) имеет уже два полюса в точках  $z = 1, z = -1$ . Вычеты в этих точках, умноженные на  $2\pi i$ , как это было показано выше, равны  $Q_1 = Q_2 = -\pi$ . Тогда вместо (3.3) имеем такое соотношение

$$I(S_1) + I(S_2) + I(S_3) = Q_1 + Q_2 = -2\pi$$

Отсюда, аналогично предыдущему пункту, получим следующее соотношение  $I(A, z_0) = 0.5[2\pi + I(S_2)]$ , в котором  $I(S_2)$  дается формулами (3.12), (3.13). Покажем, что в этом случае имеет место строгое неравенство  $I(S_2) < 0$ , которое, согласно последнему соотношению, влечет строгое неравенство  $I(A, z_0) < \pi$ . Действительно, введем обозначение  $\varepsilon = z_0^2 - 1, \varepsilon \in (0, +\infty)$ . Тогда из (3.12) имеем следующее неравенство

$$I(S_2) < (\sqrt{2}A) \int_0^{+\infty} \frac{(y^2 - \varepsilon)\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} dy}{\sqrt{a^2 + b^2}[(y^2 - \varepsilon)^2 + 4y^2(1 + \varepsilon)]} = (\sqrt{2}A)I_1(\varepsilon) \quad (3.17)$$

Покажем, что стоящий в правой части последнего неравенства (3.17) интеграл  $I_1(\varepsilon)$  строго отрицателен для всех  $\varepsilon > 0$ . Обозначим

$$F(y) = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}}, \quad a = A^2 + y^2(y^2 - \varepsilon), \quad b = -2y^3\sqrt{1 + \varepsilon} \quad (3.18)$$

Преобразуем интеграл  $I_1(\varepsilon)$  из (3.17) следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &= \int_0^{+\infty} \frac{(y^2 - \varepsilon)}{[(y^2 - \varepsilon)^2 + 4y^2(1 + \varepsilon)]} F(y) dy = \\ &= \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{(y^2 - \varepsilon)}{[(y^2 - \varepsilon)^2 + 4y^2(1 + \varepsilon)]} F(y) dy + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{+\infty} \frac{(y^2 - \varepsilon)}{[(y^2 - \varepsilon)^2 + 4y^2(1 + \varepsilon)]} F(y) dy \end{aligned}$$

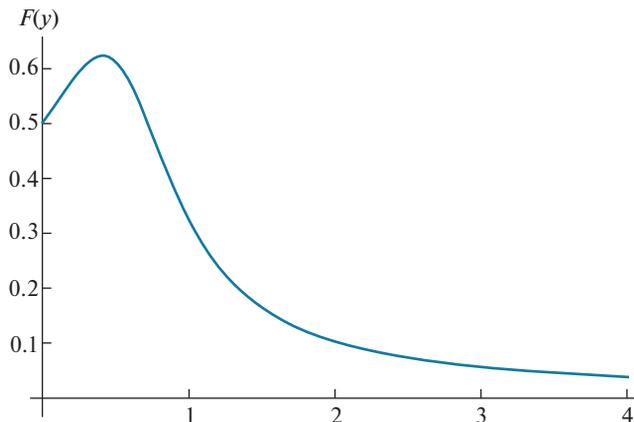
В последнем интеграле делаем замену  $z = \varepsilon/y$  и получаем следующую формулу

$$I_1(\varepsilon) = \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{(y^2 - \varepsilon)}{[(y^2 - \varepsilon)^2 + 4y^2(1 + \varepsilon)]} [F(y) - F(\varepsilon/y)] dy \quad (3.19)$$

Для функции  $F(y)$ , даваемой формулой (3.18), справедливо неравенство

$$F(y) - F(\varepsilon/y) \geq 0, \quad y \in [0, \sqrt{\varepsilon}] \quad (3.20)$$

Отметим, что полное и строгое доказательство неравенства (3.20) достаточно громоздко и приводится далее в разделе 4 данной статьи.

Рис. 2. График функции  $F(y)$ 

Из (3.19) и (3.20) следует  $I_1(\varepsilon) < 0$ . А это, согласно (3.17), означает, что  $I(S_2) < 0$ . Что и требовалось доказать.

**4. Доказательство неравенства (3.20) раздела 3.** Покажем, что для функции  $F(y)$  из (3.18) справедливо следующее утверждение.

*Утверждение.* Функция  $F(y)$  из (3.18) на интервале  $y \in [0, +\infty)$  ведет себя следующим образом.

1. При  $y \in [0, \sqrt{\varepsilon})$   $F(y)$  имеет в точности один максимум в точке, принадлежащей интервалу  $y \in [0, \sqrt{0.5\varepsilon})$ . При этом выполнены неравенства  $F(0) > 0$ ,  $F(\sqrt{\varepsilon}) < 0$ ,  $F(0) > F(\sqrt{\varepsilon})$ .

2. При  $y \in [\sqrt{\varepsilon}, +\infty)$   $F(y)$  монотонно убывает (вплоть до нуля при  $y \rightarrow +\infty$ ).

Качественно, график функции  $F(y)$  представлен на рис. 2. Ясно, что из приведенного утверждения будет следовать, как частный случай, неравенство (3.20). Действительно, в силу пункта 1 утверждения, справедливо неравенство  $F(y) > F(\sqrt{\varepsilon})$ ,  $y \in [0, \sqrt{\varepsilon})$ , а в силу пункта 2 утверждения выполнено неравенство  $F(\sqrt{\varepsilon}) \geq F(\varepsilon/y)$ ,  $y \in [0, \sqrt{\varepsilon}]$ . Объединение этих неравенств приводит к неравенству (3.20).

*Доказательство утверждения.* Далее, для удобства записи, рассматриваем функцию  $G(y) = F^2(y)$ , и кроме того, в качестве независимой переменной рассматриваем  $u = y^2$ . Тогда имеем

$$G(u) = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}, \quad a = A^2 + u^2 - \varepsilon u, \quad b^2 = 4(1 + \varepsilon)u^3 \quad (4.1)$$

Ясно, что достаточно доказать все свойства утверждения для функции  $G(u)$ , даваемой формулами (4.1). Для производной функции  $G(u)$  имеем следующее выражение

$$\begin{aligned} G'(u) &= (a^2 + b^2)^{-2} H(u), \\ H(u) &= (b^2 - a^2)a' - 2abb' - (aa' + bb')\sqrt{a^2 + b^2}, \\ a' &= 2u - \varepsilon, \quad bb' = 6(1 + \varepsilon)u^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Далее рассмотрим два случая: 1)  $A^2 > 0.25\epsilon^2$ , 2)  $A^2 < 0.25\epsilon^2$ .

1)  $A^2 > 0.25\epsilon^2$ . В этом случае имеем

$$a = A^2 + u^2 - \epsilon u > A^2 - 0.25\epsilon^2 > 0, \quad u \in [0, +\infty)$$

Тогда из (4.2) получим

$$H(0) = 2\epsilon A^4 > 0,$$

$$H(0.5\epsilon) = -3a(1 + \epsilon)\epsilon^2 - 1.5(1 + \epsilon)\epsilon^2\sqrt{a^2 + b^2} < 0$$

Таким образом, корень уравнения  $H(u) = 0$ , а, следовательно, и уравнения  $G'(u) = 0$ , наверняка есть на интервале  $u \in [0, 0.5\epsilon]$ . Покажем, что этот корень только один и на всем интервале  $u \in [0, +\infty)$ . Для этого достаточно показать, что  $H'(u) < 0$  для всех  $u \in [0, +\infty)$ . Действительно, из (4.2) получим

$$H'(u) = a''(b^2 - a^2) - 2a(a'^2 + b'^2 + bb'') - \\ - \sqrt{a^2 + b^2}(a'^2 + b'^2 + aa'' + bb'') - \frac{(aa' + bb')^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Отбрасывая в правой части последнего равенства заведомо отрицательные слагаемые, получим следующую оценку

$$H'(u) < 2b^2 - \sqrt{a^2 + b^2}[(2u - \epsilon)^2 + 2a + 12u(1 + \epsilon)] \quad (4.3)$$

Используя неравенства  $\sqrt{a^2 + b^2} > b$ ,  $a > 0$ , получим из (4.3) оценку

$$H'(u) < b[2b - (2u - \epsilon)^2 - 6u(1 + \epsilon)] < 0$$

Справедливость последнего неравенства вытекает из неравенств

$$0 < b < 0.5(2u - \epsilon)^2 + 6u(1 + \epsilon) = 2u^2 + 6u + 4\epsilon u + 0.5\epsilon^2$$

Последнее неравенство следует из очевидного неравенства

$$b^2 = 4(1 + \epsilon)u^3 < (2u^2 + 6u + 4\epsilon u + 0.5\epsilon^2)^2$$

Таким образом, мы показали, что  $H(u) < 0$  для всех  $u \in [0, +\infty)$ . Следовательно, функция  $H(u)$  является монотонной на всем интервале  $u \in [0, +\infty)$ , а значит корень уравнения  $H(u) = 0$  (а, следовательно, и уравнения  $G'(u) = 0$ ) является единственным. Из доказанного свойства функции  $G(u)$  следует справедливость пп. 1 и 2 утверждения. Неравенства  $F(0) > 0$ ,  $F(\sqrt{\epsilon}) < 0$ ,  $F(0) > F(\sqrt{\epsilon})$  устанавливаются непосредственной проверкой.

2)  $A^2 < 0.25\epsilon^2$ . В этом случае функция  $a = A^2 + u^2 - \epsilon u$  обращается в нуль в точках

$$u_1 = 0.5\epsilon - \sqrt{0.25\epsilon^2 - A^2}, \quad u_2 = 0.5\epsilon + \sqrt{0.25\epsilon^2 - A^2} \quad (4.4)$$

Таким образом,

$$a(u) < 0, \quad u \in (u_1, u_2), \quad a(u) \geq 0, \quad u \notin (u_1, u_2).$$

Здесь мы имеем следующие соотношения для функции  $H(u)$

$$H(0) = 2\epsilon A^4 > 0, \quad H(u_1) = (2u_1 - \epsilon)b^2 - 6b(1 + \epsilon)u_1^2 < 0 \quad (4.5)$$

Последнее неравенство в (4.5) справедливо, так как, согласно (4.4), имеем  $u_1 < 0.5\epsilon$ . Из (4.5) следует, что функция  $H(u)$ , а значит, и производная  $G'(u)$ , заведомо имеют

нуль на интервале  $u \in (0, u_1) \subset (0, 0.5\epsilon)$ . Пусть  $u_* \in (0, u_1)$  это первый нуль функции  $G'(u)$ . Ясно, что это точка максимума функции  $G(u)$  и выполнены условия

$$G'(u_*) = H(u_*) = 0, \quad G''(u_*) < 0, \quad H'(u_*) < 0$$

Покажем, что этот нуль единственный. Для этого достаточно только показать, что  $G'(u) < 0$ ,  $u \in (u_1, u_2)$ . Действительно, если мы это установили, то при  $u \in (u_1, u_2)$   $G'(u)$  не может обратиться в нуль, а при  $u \notin (u_1, u_2)$  мы имеем  $a(u) > 0$  и можем показать (точно также, как это мы сделали в случае 1), что  $H'(u) < 0$ . Следовательно, если  $G'(u)$  обратится в нуль еще раз (после точки  $u = u_*$ ), то это опять будет точка максимума, что явно противоречиво.

Итак, пусть  $u \in (u_1, u_2)$ . Тогда  $a(u) = A^2 + u^2 - \epsilon u < 0$ . Обозначим  $a_1(u) = -a(u) = \epsilon u - u^2 - A^2 > 0$  и перепишем выражение для  $G(u)$  из (4.1) в следующем виде

$$G(u) = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 + b^2}}{a_1^2 + b^2} = \frac{b^2}{(a_1^2 + b^2)(a_1 + \sqrt{a_1^2 + b^2})} \quad (4.6)$$

Обозначим

$$k = 2\sqrt{1 + \epsilon}, \quad \lambda = \frac{a_1}{b} = \frac{\epsilon u - A^2 - u^2}{ku^{3/2}} \quad (4.7)$$

Из (4.6), (4.7) имеем

$$G(u) = \frac{1}{E(u)}, \quad E(u) = b(1 + \lambda^2)(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}), \quad (4.8)$$

$$\frac{d\lambda}{du} = (3A^2 - \epsilon u - u^2) \frac{\sqrt{u}}{2ku^3}$$

Из (4.8) следует, что неравенство  $G'(u) < 0$  эквивалентно неравенству  $E'(u) > 0$ . Используя (4.8), получим

$$E'(u) = 0.5k(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2})\sqrt{u}P(u), \quad P(u) = 3(1 + \lambda^2) + 2u(2\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2})\frac{d\lambda}{du} \quad (4.9)$$

Из последнего соотношения следует, что неравенство  $E'(u) > 0$  эквивалентно неравенству  $P(u) > 0$ . Введем еще обозначения

$$x = \epsilon u - u^2 - A^2, \quad y = \frac{1}{3}(\epsilon u + u^2) - A^2 \quad (4.10)$$

Тогда, используя (4.8) и (4.9), получим

$$P(u) = \frac{3}{k^2 u^3} Q(u), \quad Q(u) = k^2 u^3 + x^2 - y(2x + \sqrt{k^2 u^3 + x^2}) \quad (4.11)$$

Таким образом, неравенство  $P(u) > 0$  эквивалентно неравенству  $Q(u) > 0$ .

Итак, надо установить справедливость неравенства  $Q(u) > 0$ , при  $u \in (u_1, u_2)$ , где  $Q(u)$  дается формулами из (4.11), (4.10). Здесь  $u_1, u_2$  — корни уравнения  $x = \epsilon u - u^2 - A^2 = 0$ , которые даются формулами (4.4), причем  $x(u) > 0$ ,  $u \in (u_1, u_2)$ . Введем еще в рассмотрение величины  $u_3, u_4$  — корни квадратного уравнения  $y = \frac{1}{3}(\epsilon u + u^2) - A^2 = 0$ , которые даются следующими формулами

$$u_3 = -0.5\epsilon - \sqrt{0.25\epsilon^2 + 3A^2}, \quad u_4 = -0.5\epsilon + \sqrt{0.25\epsilon^2 + 3A^2} \quad (4.12)$$

Отметим, что

$$y = \frac{1}{3}(\epsilon u + u^2) - A^2 < 0, \quad u \in (u_3, u_4)$$

Из (4.4), (4.12) и неравенства  $A^2 < 0.25\epsilon^2$  следуют неравенства

$$u_3 < 0 < u_1 < u_4 < 0.5\epsilon < u_2 < \epsilon \quad (4.13)$$

Исходя из неравенств (4.13), имеем три возможных случая:

$$1) u \in (u_1, u_4); \quad 2) u \in (u_4, 0.5\epsilon); \quad 3) u \in (0.5\epsilon, u_2).$$

Далее, рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

*Случай 1.* Здесь  $u \in (u_1, u_4)$ . Тогда имеем

$$y = \frac{1}{3}(\epsilon u + u^2) - A^2 < 0, \quad x = \epsilon u - u^2 - A^2 > 0.$$

Для  $Q(u)$  из (4.11) получим

$$Q(u) = k^2 u^3 + x^2 + |y|(2x + \sqrt{k^2 u^3 + x^2}) > 0,$$

т.е. неравенство  $Q(u) > 0$  выполнено.

*Случай 2.* Здесь  $u \in (u_4, 0.5\epsilon)$ . В этом случае имеем неравенства

$$0 < y < y_0 = \frac{1}{3}(\epsilon u + u^2) \quad (4.14)$$

Обозначим  $\mu = x - y = \frac{2u}{3}(\epsilon - 2u) > 0$ . Тогда получим для  $Q(u)$  из (4.11)

$$Q(u) = k^2 u^3 + \mu^2 - y^2 - y\sqrt{k^2 u^3 + (y + \mu)^2}$$

Используя неравенства (34), из последнего соотношения получим оценку

$$Q(u) > Q_0 = k^2 u^3 + \mu^2 - y_0^2 - y_0\sqrt{k^2 u^3 + (y_0 + \mu)^2} \quad (4.15)$$

Покажем, что  $Q_0 > 0$ . Сначала установим справедливость неравенства

$$k^2 u^3 + \mu^2 - y_0^2 > 0$$

Используя обозначения для  $\mu, y_0$ , получим, что последнее неравенство эквивалентно следующему

$$36u + 5\epsilon^2 + 63u^2 - 30\epsilon u > 0$$

Последнее неравенство выполнено, так как квадратный трехчлен относительно  $u$  не имеет вещественных корней. Далее, для доказательства неравенства  $Q_0 > 0$  достаточно показать, согласно (4.15), справедливость неравенства

$$k^2 u^3 + \mu^2 - y_0^2 > y_0\sqrt{k^2 u^3 + (y_0 + \mu)^2}, \quad \mu = \frac{2}{3}(\epsilon u + u^2), \quad y_0 = \frac{1}{3}(\epsilon u - u^2)$$

Возводя в квадрат левую и правую части этого неравенства можно убедиться в его справедливости (мы не приводим подробных выкладок ввиду их громоздкости). Таким образом, в этом случае доказано, что  $Q(u) > Q_0 > 0$ , т.е. неравенство  $Q(u) > 0$  выполнено.

*Случай 3.* Здесь  $u \in (0.5\epsilon, u_2)$ . В этом случае мы имеем неравенство

$$\mu = x - y = \frac{2u}{3}(\epsilon - 2u) < 0$$

Тогда, согласно (4.11) имеем следующую оценку

$$Q(u) > Q_1(u) = k^2 u^3 - y^2 - y\sqrt{k^2 u^3 + y^2}$$

Покажем, что  $Q_1(u) = k^2 u^3 - y^2 - y\sqrt{k^2 u^3 + y^2} > 0$ . Имеем

$$k^2 u^3 - y^2 - y\sqrt{k^2 u^3 + y^2} > 0 \Leftrightarrow k^2 u^3 - y^2 > y\sqrt{k^2 u^3 + y^2} \Leftrightarrow k^2 u^3 > 3y^2$$

Вспоминая формулу для  $y$ , запишем последнее неравенство в следующем эквивалентном виде

$$p(u) = (2\sqrt{1+\varepsilon})u^{3/2} - \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon u + u^2) + \sqrt{3}A^2 > 0, \quad u \in (0.5\varepsilon, \varepsilon)$$

Для доказательства неравенства  $p(u) > 0$  при  $u \in (0.5\varepsilon, \varepsilon)$ , вычисляем производные

$$p'(u) = 3\sqrt{1+\varepsilon}\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon + 2u), \quad p''(u) = \frac{3\sqrt{1+\varepsilon}}{2\sqrt{u}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Несложно проверить, что  $p''(u) > 0$  при  $u \in (0.5\varepsilon, \varepsilon)$ . Тогда имеем на этом участке и  $p'(u) > 0$ , так как несложно проверяется, что  $p'(0.5\varepsilon) > 0$ . Таким образом, для справедливости неравенства  $p(u) > 0$  при  $u \in (0.5\varepsilon, \varepsilon)$  достаточно установить, что  $p(0.5\varepsilon) > 0$ . Вычисляем

$$p(0.5\varepsilon) = 2\sqrt{1+\varepsilon}\frac{\varepsilon^{3/2}}{2^{3/2}} - \frac{3}{4\sqrt{3}}\varepsilon^2 + \sqrt{3}A^2 > \varepsilon^{3/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\varepsilon} - \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\varepsilon}\right) > 0$$

Таким образом, установлено, что  $Q(u) > Q_1(u) > 0$  при  $u \in (0.5\varepsilon, \varepsilon)$ . Таким образом, неравенство  $Q(u) > 0$  верно и в этом случае.

Утверждение полностью доказано.

**5. Заключение.** В статье рассмотрены задачи о поиске равновесных конфигураций тяжелой нерастяжимой нити-цепочки на гладких поверхностях: конусе и сфере. Полное исследование таких задач сводится к аналитическому исследованию эллиптических интегралов 3-го рода как функций некоторого числа параметров. Такие исследования, как показано в настоящей статье, наталкиваются на определенные математические трудности, которые в случае конической или сферической поверхностей могут быть преодолены. Для более сложных типов поверхностей, вероятно, потребуется использование численных методов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. М.: Государственное издательство физико-математической литературы. 1960. 515 с.
2. *Меркин Д.Р.* Введение в механику гибкой нити. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1980. 240 с.
3. *Byrd Paul F., Morris Friedman.* Handbook of Elliptic Integrals. Springer, 1954. 358 p.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матге. (Серия: справочная математическая библиотека). М.: Издательство "НАУКА", 1967. Главная редакция физико-математической литературы. 300 с.
5. Higher Transcendental Functions. V. 3. Based, in part, on notes left by Harry Bateman and compiled by the Staff of the Bateman Manuscript Project Director Arthur Erdelyi. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1955. 396 p.
6. *Legendre A.M.* Traite des Fonctions Elliptiques et des Integrales Euleriennes. V. 1. Paris. 1825.vii. 590 p.
7. *Розенблат Г.М.* О равновесии нерастяжимой тяжелой нити на конусе или сфере // Доклады академии наук. 2018. Т. 482. № 5. С. 521–526.

8. *Зубелевич О.Э.* Задача о равновесии цепи на конусе // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2017. Т. 17. № 4. С. 57–63.
9. *Якубовский Ю.В., Живов В.С., Коритынский Я.И., Мигушов И.И.* Основы механики нити. М.: Легкая индустрия, 1973. 271 с.
10. *Appell P.* Sur la chaînette spherique // Bulletin de la S. M. F., tome 13 (1885). P. 65–71.
11. *Пожарицкий Г.К.* Устойчивость равновесий механических систем, включающих гибкую нерастяжимую нить // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4.
12. *Минаков А.П.* Основы механики нити. Научно-исследовательские труды Московского текстильного института. 1941. Т. 9. Вып. 1.
13. *Светлицкий В.А.* Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978.
14. *Щедров В.С.* Основы механики гибкой нити. М.: Машгиз, 1961.
15. *Алексеев Н.И.* Статика и установившееся движение гибкой нити. М.: Легкая индустрия, 1970.
16. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961.
17. *Weinstein A.* The Spherical Pendulum and Complex Integration // Amer. Math. Monthly. 1942. V. 49. P. 521–523.

УДК 539.374

## ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ ПРИ ВЫСОКОМ ДАВЛЕНИИ С НЕОДНОРОДНЫМ НАПРЯЖЕННЫМ СОСТОЯНИЕМ

© 2021 г. Г. М. Севастьянов

*Хабаровский федеральный исследовательский центр ДВО РАН,  
Комсомольск-на-Амуре, Россия  
e-mail: akela.86@mail.ru*

Поступила в редакцию 18.06.2020 г.

После доработки 04.07.2020 г.

Принята к публикации 13.08.2020 г.

Получено аналитическое решение для кручения при высоком давлении цилиндрического образца, помещенного в жесткую обойму. Деформируемый материал полагается изотропным идеально пластическим. Учтена зависимость предела текучести от давления. Используется модель неассоциированного пластического течения, включающая пластический потенциал Треска и условие текучести Мора–Кулона. Решение прогнозирует неоднородность тензора напряжений в образце. Напряженное состояние соответствует гипотезе Хаара–Кармана (условию полной пластичности). Определены крутящий момент, среднее нормальное давление на торце цилиндрического образца, а также распределение среднего напряжения по радиусу образца. Указаны условия, при которых отсутствует проскальзывание на контактной поверхности.

*Ключевые слова:* кручение при высоком давлении, интенсивная пластическая деформация, чувствительные к давлению материалы, неассоциированное пластическое течение, неоднородные материалы, гипотеза Хаара–Кармана

**DOI:** 10.31857/S0572329921030119

**Введение.** Влияние высокого давления на способность материалов сопротивляться пластическому сдвигу, вероятно, впервые было рассмотрено в работах Бриджмена [1, 2]. Его опыты по кручению образцов, подвергнутых сильному сжатию, показывают, что для самых разных материалов (в том числе, металлических) кривые крутящего момента и предельная разрушающая нагрузка зависят от величины приложенного гидростатического давления. Дальнейшие экспериментальные исследования в этом направлении проводились различными научными группами [3–5]. Достаточно полный исторический обзор представлен в работе [6]. В 1988 году группой профессора Валиева было сообщено о получении в алюминииевом сплаве размера зерна меньше 1 микронметра при обработке образца кручением под высоким давлением [5]. С этих пор процессы кручения под высоким давлением (НРТ – high-pressure torsion) интенсивно исследуются методами механики твердого тела, материаловедения и физики материалов [7, 8]. Схемы деформирования при кручении под высоким давлением различаются по степени ограниченности течения образца [9] (рис. 1,  $U$  – неограниченная,  $L$  – ограниченная,  $QL$  – квазиограниченная). Неограниченная схема никак не препятствует радиальному течению материала, при этом образец в ходе деформирования существенно изменяет толщину и диаметр. Квазиограниченная схема [10] допускает некоторое радиальное течение, однако основной объем образца не слишком сильно из-

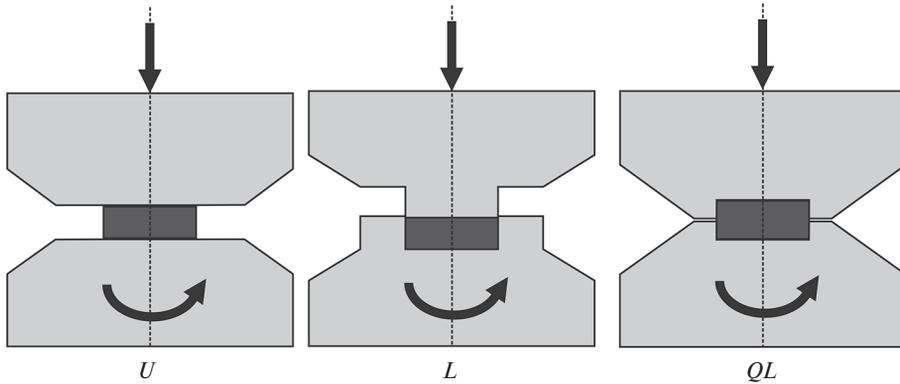


Рис. 1

меняет свою геометрию. При полностью ограниченной схеме деформирования образец может менять свои размеры только за счет изменения плотности и деформирования оснастки. Различные варианты деформирования, близкие к полностью ограниченной схеме описаны, например, в работах [4, 11, 12]. Как правило, используются цилиндрические образцы с достаточно большим отношением диаметра к толщине. Процесс проводят в два этапа. На первом к образцу прикладывается начальное давление путем сведения наковален. При этом для ограниченных схем деформирования создается начальное давление, близкое к однородному гидростатическому [9]. На втором этапе одна или обе наковальни сообщают образцу деформации кручения.

Для прогнозирования напряженного состояния образца и его итоговых свойств широко используются различные аналитические и вычислительные модели. Отметим здесь работу [13], в которой учитываются процессы фазовых превращений в материалах, протекание которых связано с накоплением пластической деформации и зависит от локальной величины давления, а также их влияние на механические характеристики образца. Также учитываются контактные условия между образцом и наковальнями, деформирование оснастки. А, кроме того, в численных расчетах учтено влияние давления на предел текучести образца при изохорной пластической деформации. В ряде работ строятся жестко-пластические решения для различных постановок задачи. В [14] для упрочняющегося по степенному закону материала рассмотрено кручение, нелинейное по высоте образца, с учетом дополнительного кругового сдвига (упомянем, что для комбинации кручения с круговым сдвигом есть точное нелинейно-упругое решение [15]); модель [14] прогнозирует однородное распределение давления. В [16] рассмотрено влияние сдвига в радиальном направлении, вызванного радиальным течением материала, и на основе упрощенного уравнения равновесия получено неоднородное распределение давления в образце. Также упомянем некоторые результаты, связанные с использованием градиентных теорий пластичности [17, 18].

Следует отметить, что для полностью закрепленной схемы деформирования принятие пластического потенциала Мизеса приводит к тому, что напряженное состояние образца в цилиндрическом координатном базисе  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$  представляется тензором напряжений Коши вида

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_0 \mathbf{I} + \sigma_{\varphi z} (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi)$$

Здесь  $p_0 = \text{const}$  – величина начального гидростатического давления в образце перед фазой кручения. Таким образом, полагается, что давление в образце однородно и постоянно в течение всего процесса деформирования.

В экспериментах с использованием квазиограниченной схемы деформирования, которые, как правило, проводятся при постоянном давлении, в фазе кручения наблюдается уменьшение толщины образца (по сравнению с гидростатически сжатым образцом перед началом кручения) за счет радиального течения. Это дает основания ожидать, что если в начале фазы кручения расстояние между наковальнями (и, следовательно, высота образца) будет зафиксировано, то нормальное давление на наковальни и среднее давление в образце будут снижаться, а радиальное течение материала будет сведено к минимуму. Это ничего не говорит об однородности среднего давления в образце, но, тем не менее, не соответствует указанному выше напряженному состоянию, поскольку величина  $p_0$  остается неизменной в ходе деформирования. Отметим также, что проведенные непосредственные измерения на контактной поверхности между образцом и наковальней в ходе процесса [19] демонстрируют неоднородность давления по радиусу образца. По косвенным данным, в частности, по распределению микротвердости по радиусу обработанного образца, теоретически возможно оценить степень неоднородности давления. Однако, при том условии, что ключевым механизмом изменения твердости является выделение новых фаз материала, связанное с локальной величиной давления. Эта оценка, однако, представляет собой достаточно нетривиальную задачу. Кроме того, данные МКЭ-моделирования также говорят о достаточно сильной неоднородности давления в образце. В качестве причин называются: радиальное течение материала, деформирование оснастки, фазовые превращения и соответствующая им объемная деформация, а также изменение механических свойств, начальная неоднородность давления и другие факторы. Тем не менее, кажется интересным, что даже на базе очень простой жестко-пластической модели можно построить решение указанной проблемы, которое не приводит к однородности давления в образце.

Далее будет использована модель изотропного идеально-пластического несжимаемого материала. Это положение основывается на том, что заметное изменение предела текучести материалов из-за деформационного упрочнения (или разупрочнения) прекращается после некоторой степени деформации (которая обычно имеет порядок единицы) [20]. При обработке кручением при высоком давлении величины деформации могут превышать это значение на 1–2 порядка. В таком случае будет разумно использовать в качестве предела текучести при чистом сдвиге его предельную величину.

В этих же условиях вызванная пластической деформацией анизотропия также не проявляется при монотонном нагружении, если исходный (недеформированный) материал изотропен. Эти положения нашли подтверждение при деформировании самых различных материалов [20]. Кроме этого, мы не рассматриваем процессы фазовых превращений в материале, однако учитываем, что давление может оказывать существенное влияние на локальный предел текучести в образце. Последнее утверждение верно в той или иной значимой степени для самых различных материалов – металлических стекол, полимеров, а также металлов в твердом состоянии. Для металлов зависимость предела текучести от величины всестороннего сжатия нехарактерна при обычных условиях, однако отметим, что в случае рассматриваемого процесса речь может идти о давлениях в десятки гигапаскаль. Пластическая несжимаемость компактных материалов в процессе интенсивной деформации является естественным допущением. Отметим, что для кручения с конечными деформациями изотропного неупрочняющегося несжимаемого материала нечувствительного к среднему напряжению имеются аналитические упруго-пластические решения [21–23]. Также отметим недавнее исследование [24], в котором построено приближенное аналитическое решение, которое учитывает зависимость предела текучести от давления.

**1. Постановка задачи и уравнения модели.** Рассмотрим изохорную деформацию кручения цилиндрического образца высотой  $h$  и радиусом  $R$ , подвергнутого начальному однородному гидростатическому сжатию величиной  $p_0$ . Будем рассматривать идеализированный случай полностью ограниченного деформирования и пренебрегать обратимыми деформациями. Тензор скорости (пластической) деформации имеет вид

$$2\boldsymbol{\varepsilon} = 2\boldsymbol{\varepsilon}^p = (\nabla \otimes \mathbf{v}) + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T = 2r\theta_t (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi) \quad (1.1)$$

Здесь вектор скорости  $\mathbf{v} = rz\theta_t \mathbf{e}_\varphi$ ,  $\theta_t = \partial\theta/\partial t$ ,  $t$  – время,  $\theta(t)$  – угол кручения на единицу высоты цилиндрического образца.

Напряженное состояние характеризуется тензором Коши вида

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{rr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_{\varphi\varphi} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \sigma_{zz} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \sigma_{\varphi z} (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi) \quad (1.2)$$

Условие равновесия  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  приводит к уравнению

$$r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0 \quad (1.3)$$

Мы используем неассоциированную пластическую модель, которая включает условие текучести Мора–Кулона

$$(\sigma_1 - \sigma_3) + \vartheta(\sigma_1 + \sigma_3) = 2\kappa \quad (1.4)$$

и пластический потенциал Треска

$$f = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (1.5)$$

Здесь  $\sigma_1, \sigma_3$  – наибольшее и наименьшее собственные значения тензора напряжений Коши,  $\vartheta \in (0, 1)$  – параметр материала. Функция (1.5) дифференцируема везде, кроме угловых точек [25] (рис. 2):  $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Lambda \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$ , где  $\Lambda$  – скалярный пластический множитель. Правило определения тензора скорости пластической деформации в угловых точках функции пластического потенциала оговорим далее отдельно. Уравнение равновесия (1.3), условие текучести (1.4) и ассоциированный с пластическим потенциалом (1.5) закон должны исчерпывающе определять компоненты тензоров (1.1) и (1.2) с учетом граничного условия  $\sigma_{rr}|_{r=R} = -p_0$ .

**2. Анализ напряженного состояния.** Исходя из (1.2), собственные значения тензора напряжений выражаются в следующем виде (нумерация произвольная):

$$\lambda_2 = \sigma_{rr}, \quad \lambda_{1,3} = (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})/2 \pm \sqrt{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})^2/4 + \sigma_{\varphi z}^2} \quad (2.1)$$

Согласно правилу нормальности  $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Lambda \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$  и (9), из первого равенства в (2.1) следует, что радиальная компонента тензора скорости пластической деформации может быть нулевой, только если напряженное состояние соответствует либо стороне  $AB$  с примыкающими узловыми точками (рис. 2), либо симметричной ей стороне. Последний случай исключен, поскольку  $\lambda_1 > \lambda_3$ . Будем полагать, что в пластическом состоянии при достаточно большой величине деформации напряженное состояние всех точек образца соответствует одной и той же точке на  $AB$ .

Для угловых точек пластического потенциала Койтер [26] ввел обобщенное правило нормальности, которое говорит о том, что собственный вектор тензора скорости деформации принадлежит вееру, ограниченному нормальными к смежным сторонам шестиугольника (рис. 2). В рассматриваемой задаче кинематические ограничения (1.1) приводят к тому, что и в угловых точках  $A$  или  $B$  собственный вектор

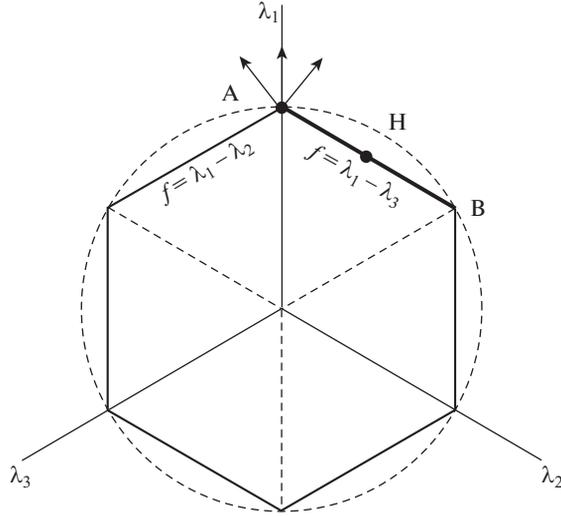


Рис. 2

тензора скорости деформации ортогонален  $AB$ . Тогда тензор скорости деформации имеет вид [27]

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Lambda \frac{\partial(\lambda_1 - \lambda_3)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \Lambda \frac{\boldsymbol{\sigma} - \lambda_2 \mathbf{I}}{\lambda_1 - \lambda_3} \left( \frac{\boldsymbol{\sigma} - \lambda_3 \mathbf{I}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\boldsymbol{\sigma} - \lambda_1 \mathbf{I}}{\lambda_2 - \lambda_3} \right)$$

С учетом (2.1) и (1.2), имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{\Lambda}{\sqrt{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{\varphi z}^2}} \left( \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}}{2} (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) + \sigma_{\varphi z} (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi) \right) \quad (2.2)$$

Из (2.2) и (1.1) следует  $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz}$ . Условие пластичности (1.4) с учетом  $\sigma_{\varphi z} > 0$  имеет вид

$$\sigma_{\varphi z} + \vartheta \sigma_{\varphi\varphi} = \kappa \quad (2.3)$$

Введем параметр напряженного состояния

$$L = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} = \frac{\sigma_{\varphi z} - (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})}{\sigma_{\varphi z} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})} \quad (2.4)$$

Значение  $L = 1$  соответствует точке  $H$  и состоянию гидростатического сжатия с наложенной деформацией сдвига, значение  $L = 0$  соответствует угловой точке  $B$ , значения  $L \rightarrow +\infty$  – угловой точке  $A$ . Из (2.4) следует

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -\sigma_{\varphi z} \frac{L-1}{L+1} \quad (2.5)$$

Из (2.3) и (2.5) следует

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \left( \sigma_{rr} + \kappa \frac{L-1}{L+1} \right) \left( 1 + \vartheta \frac{L-1}{L+1} \right)^{-1} \quad (2.6)$$

Тогда, согласно уравнению равновесия (1.3), при  $0 \leq L < 1$   $\partial \sigma_{rr} / \partial r < 0$ , а также  $\partial \sigma_{\varphi\varphi} / \partial r < 0$  и  $\partial \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} / \partial r < 0$ , что не согласуется с расчетными и экспериментальными

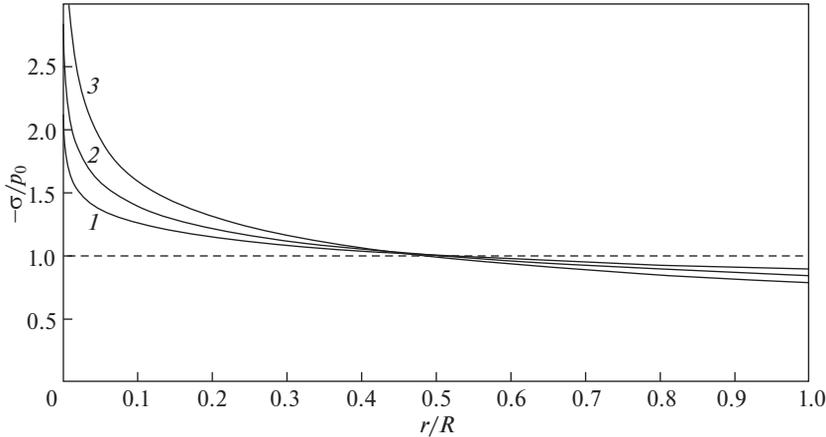


Рис. 3

данными. Таким образом, мы будем рассматривать только напряженные состояния, которым соответствуют точки из отрезка  $AH$ .

Поскольку параметр  $L$  неизвестен, промежуточное главное напряжение остается неопределенным, система уравнений не имеет однозначного решения без принятия дополнительных условий.

В качестве такого условия может выступать уже упомянутое предположение  $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = -p_0$ . В этом случае напряженное состояние однородно (соответствует точке  $H$  на рис. 2):

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_0 \mathbf{I} + (\kappa + \nu p_0)(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi) \quad (2.7)$$

Другой возможный вариант – принятие условия полной пластичности [28] (гипотезы Хаара–Кармана). В этом случае напряженное состояние соответствует угловой точке  $A$  ( $L \rightarrow +\infty$ ). Уравнение равновесия принимает вид

$$r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \sigma_{rr} \frac{\nu}{1 + \nu} - \frac{\kappa}{1 + \nu} = 0$$

и интегрируется с краевым условием  $\sigma_{rr}(R) = -p_0$ :

$$\sigma_{rr}(r) = \kappa/\nu - (p_0 + \kappa/\nu)(r/R)^{-\nu/(1+\nu)} \quad (2.8)$$

Напряженное состояние в этом случае неоднородно. Среднее напряжение согласно (2.8) и (2.6) равно

$$\sigma = (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})/3 = \frac{\kappa}{\nu} - \frac{3 + \nu}{3\nu(1 + \nu)}(\kappa + \nu p_0) \left(\frac{r}{R}\right)^{-\nu/(1+\nu)} \quad (2.9)$$

На рис. 3 приведено распределение среднего напряжения при различных значениях параметра  $\nu$ , полученное по формуле (2.9) при  $\kappa/p_0 = 0.15$ ; кривая 1 соответствует значению  $\nu = 0.01$ , кривая 2 значению  $\nu = 0.1$ , кривая 3 значению  $\nu = 0.25$ .

На рис. 4 приведено распределение среднего напряжения при различных значениях параметра  $\kappa/p_0$ , полученное по формуле (2.9) при  $\nu = 0.05$ ; кривая 1 соответствует значению  $\kappa/p_0 = 0.05$ , кривая 2 значению  $\kappa/p_0 = 0.15$ , кривая 3 значению  $\kappa/p_0 = 0.3$ .

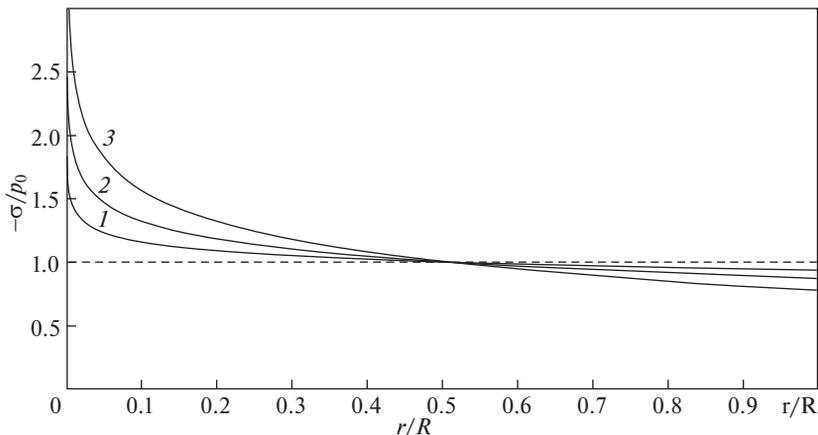


Рис. 4

Касательное напряжение

$$\sigma_{\varphi z} = \frac{\kappa + \vartheta p_0}{1 + \vartheta} \left( \frac{r}{R} \right)^{-\vartheta/(1+\vartheta)} \quad (2.10)$$

Крутящий момент

$$M = 2\pi \int_0^R r^2 \sigma_{\varphi z} dr = \frac{2\pi R^3 (\kappa + \vartheta p_0)}{3 + 2\vartheta} \quad (2.11)$$

Среднее осевое давление

$$\langle \sigma_{zz} \rangle = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \sigma_{zz} dr = -\frac{p_0 - \kappa/2}{1 + \vartheta/2}$$

**3. Заключительные замечания.** Соответствующее решению (2.8) напряженное состояние следует трактовать как предельное при неограниченном росте пластической деформации. В таком случае сингулярность тензора напряжений в центре образца просто отражает тот факт, что для упруго-пластического материала условие пластичности никогда не выполнится в точке  $r = 0$ .

Предельный переход  $\vartheta \rightarrow 0$  в (2.9) дает  $\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \sigma = -p_0 + 2\kappa/3 + \kappa \ln(R/r)$ . Интересно вспомнить работу [29], в которой полученное напряженное состояние в задаче о кручении материала, не чувствительного к среднему напряжению, также имеет логарифмическую сингулярность на оси симметрии.

Крутящий момент, согласно (2.11) несколько ниже, чем прогнозируется решением с однородным напряженным состоянием ( $M = 2\pi R^3 (\kappa + \vartheta p_0)/3$ ). Учет неоднородности напряженного состояния в частности может повлиять на результаты определения величины  $\vartheta$  по экспериментальным данным крутящего момента. Среднее осевое давление ниже начального значения, причем снижение существеннее для материалов с большим пределом текучести при чистом сдвиге  $\kappa$ . Локальная величина среднего напряжения на периферии образца также может быть существенно ниже  $p_0$ . Среднее напряжение должно мало отличаться от  $p_0$  в средней зоне образца ( $r/R \approx 1/2$ ) в достаточном широком диапазоне используемых параметров материала.

Приведенное аналитическое решение может реализоваться при ограничении на величину  $\kappa/p_0$ . Отношение локального касательного напряжения  $\sigma_{\varphi z}$  к локальному осевому давлению  $\sigma_{zz}$  согласно (2.6), (2.8) и (2.10) есть

$$-\sigma_{\varphi z}/\sigma_{zz} = \vartheta[1 - \kappa(1 + \vartheta)(\kappa + \vartheta p_0)^{-1} (r/R)^{\vartheta/(1+\vartheta)}]^{-1}$$

Эта функция растёт с ростом координаты  $r$ , для отсутствия кругового сдвига, вызванного проскальзыванием между образцом и наковальнями, требуется, чтобы выполнялось

$$0 < -\sigma_{\varphi z}/\sigma_{zz}|_{r=R} = (\kappa + \vartheta p_0)/(p_0 - \kappa) < \mu$$

где  $\mu$  – коэффициент трения покоя (для сухого трения без адгезии  $\mu \leq 1$ ). Следовательно, принятая кинематика (1.1) не нарушается только если

$$p_0 > \kappa(1 + \mu)(\mu - \vartheta)^{-1}, \quad \vartheta < \mu$$

Предельное (при неограниченном росте деформации кручения) напряженное состояние в упруго-пластическом материале может существенно отличаться как от однородного, так и от прогнозируемого решением (2.8). Отметим, что для материала нечувствительного к давлению с условием текучести Треска локальное значение параметра напряженного состояния  $L$  в каждой точке образца не меняется после прохождения упруго-пластической границы через эту точку [22]. При этом распределение параметра  $L$  однородно в пластической зоне, значение  $L$  конечно и больше единицы (то есть напряженное состояние соответствует некоторой точке между  $A$  и  $H$ , рис. 2). В этой же задаче, но с учетом изменения свойств материала (из-за нагрева вследствие пластической диссипации [23]) параметр  $L$  изменяется в ходе необратимого деформирования. Вместе с тем, учет чувствительности материала к давлению приводит к практически стационарному, но неоднородному распределению параметра  $L$  в пластической области [24].

Работа выполнена в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bridgman P.W.* Effects of high shearing stress combined with high hydrostatic pressure // *Phys. Rev.* 1935. V. 48. P. 825–847.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.48.825>
2. *Bridgman P.W.* Studies in large plastic flow and fracture: With special emphasis on the effects of hydrostatic pressure. New York-London: McGraw-Hill, 1952. 362 p.
3. *Верещагин Л.Ф., Шапочкин В.А.* Влияние гидростатического давления на сопротивление сдвигу в твердых телах // *ФММ.* 1960. Т. 9. С. 258–264.
4. *Бланк В.Д., Коняев Ю.С., Кузнецов А.И., Эстрин Э.И.* Алмазная камера для исследования влияния деформации сдвига на структуру и свойства твердых тел при давлении до 43 ГПа // *ПТЭ.* 1984. № 5. С. 178–180.
5. *Валиев Р.З., Кайбышев О.А., Кузнецов Р.И., Мусалимов Р.Ш., Ценев Н.К.* Низкотемпературная сверхпластичность металлических материалов // *Докл. АН СССР.* 1988. Т. 301. С. 864–866.
6. *Edalati K., Horita Z.* A review on high-pressure torsion (HPT) from 1935 to 1988 // *Mat. Sci. Eng. A – Struct.* 2016. V. 652. P. 325–352.  
<https://doi.org/10.1016/j.msea.2015.11.074>
7. *Valiev R.Z., Islamgaliev R.K., Alexandrov I.V.* Bulk nanostructured materials from severe plastic deformation // *Prog. Mater. Sci.* 2000. V. 45. P. 103–189.  
[https://doi.org/10.1016/S0079-6425\(99\)00007-9](https://doi.org/10.1016/S0079-6425(99)00007-9)
8. *Levitas V.I.* High-pressure phase transformations under severe plastic deformation by torsion in rotational anvils // *Mater. Trans.* 2019. V. 60(7). P. 1294–1301.  
<https://doi.org/10.2320/matertrans.MF201923>

9. *Zhilyaev A.P., Langdon T.G.* Using high-pressure torsion for metal processing: Fundamentals and applications // *Prog. Mater. Sci.* 2008. V. 53. P. 893–979.  
<https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2008.03.002>
10. *Wadsack R., Pippan R., Schedler B.* Structural refinement of chromium by severe plastic deformation // *Fusion Eng. Des.* 2003. V. 66–68. P. 265–269.  
[https://doi.org/10.1016/S0920-3796\(03\)00136-4](https://doi.org/10.1016/S0920-3796(03)00136-4)
11. *Ma Y., Levitas V.I., Hashemi J.* X-ray diffraction measurements in a rotational diamond anvil cell // *J. Phys. Chem. Solids.* 2006. V. 67 (9). P. 2083–2090.  
<https://doi.org/10.1016/j.jpcs.2006.05.052>
12. *Joo S.-H., Kim H.S.* Ring-constraint high-pressure torsion process // *Metall. Mater. Trans. A.* 2016. V. 47 (7). P. 3473–3478.  
<https://doi.org/10.1007/s11661-016-3518-3>
13. *Feng B., Levitas V.I., Li W.* FEM modeling of plastic flow and strain-induced phase transformation in BN under high pressure and large shear in a rotational diamond anvil cell // *Int. J. Plasticity.* 2019. V. 113. P. 236–254.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2018.10.004>
14. *Beygelzimer Y., Kulagin R., Toth L.S., Ivanisenko Y.* The self-similarity theory of high pressure torsion // *Beilstein J. Nanotechnol.* 2016. V. 7. P. 1267–1277.  
<https://doi.org/10.3762/bjnano.7.117>
15. *Sevastyanov G.M.* Torsion with circular shear of a Mooney – Rivlin solid // *Mech. Solids.* 2020. V. 55 (2). P. 273–276.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654420020156>
16. *Levitas V.I.* High-pressure mechanochemistry: Conceptual multiscale theory and interpretation of experiments // *Phys. Rev. B.* 2004. V. 70, 184118.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.70.184118>
17. *Estrin Y., Molotnikov A., Davies C.H.J., Lapovok R.* Strain gradient plasticity modelling of high-pressure torsion // *J. Mech. Phys. Solids.* 2008. V. 56 (4). P. 1186–1202.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2007.10.004>
18. *Lubarda V.A.* Rigid-plastic torsion of a hollow tube in strain-gradient plasticity // *Int. J. Solids Struct.* 2016. V. 100–101. P. 127–137.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.07.029>
19. *Levitas V.I., Ma Y., Hashemi J., Holtz M., Guven N.* Strain-induced disorder, phase transformations, and transformation-induced plasticity in hexagonal boron nitride under compression and shear in a rotational diamond anvil cell: In situ x-ray diffraction study and modeling // *J. Chem. Phys.* 2006. V. 125, 044507.  
<https://doi.org/10.1063/1.2208353>
20. *Levitas V.I.* Large deformation of materials with complex rheological properties at normal and high pressure. N.-Y.: Nova Science Publishers, 1996. 385 p.
21. *Arutyunyan N.Kh., Radayev Yu.N.* Elastoplastic torsion of a cylindrical rod for finite deformations // *J. Appl. Math. Mech.* 1989. V. 53 (6). P. 804–811.  
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(89\)90090-7](https://doi.org/10.1016/0021-8928(89)90090-7)
22. *Sevastyanov G.M., Burenin A.A.* Finite strain upon elastic–plastic torsion of an incompressible circular cylinder // *Dokl. Phys.* 2018. V. 63. P. 393–395.  
<https://doi.org/10.1134/S1028335818090094>
23. *Sevast'yanov G.M., Burenin A.A.* Local adiabatic heating effect in finite-strain elastic-plastic torsion // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2019. V. 60. P. 1104–1114.  
<https://doi.org/10.1134/S0021894419060166>
24. *Sevastyanov G.M.* Analytical solution for high-pressure torsion in the framework of geometrically nonlinear non-associative plasticity // *Int. J. Solids Struct.* 2020. V. 206. P. 383–395.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.09.028>

- 
25. *He Q.-C., Vallée C., Lerintiu C.* Explicit expressions for the plastic normality-flow rule associated to the Tresca yield criterion // *Z. Angew. Math. Phys.* 2005. V. 56 (2). P. 357–366.  
<https://doi.org/10.1007/s00033-005-4121-4>
  26. *Koiter W.T.* Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elasto-plastic materials with a singular yield surface // *Quart. Appl. Math.* 1953. V. 11. P. 350–354.  
<https://doi.org/10.1090/qam/59769>
  27. *Itskov M.* Tensor algebra and tensor analysis for engineers with applications to continuum mechanics. Springer, 2015. 300 p.
  28. *Ивлев Д.Д.* Механика пластических сред. Т. 1. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001.
  29. *Seth B.R.* Elastic-plastic transition in torsion // *Z. Angew. Math. Mech.* 1964. V. 44 (6). P. 229–233.  
<https://doi.org/10.1002/zamm.19640440602>

УДК 539.3:534.1

## ДЕЙСТВИЕ ПОДЗЕМНОГО ВЗРЫВА: БЫСТРОЕ РАСШИРЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

© 2021 г. М. Ш. Исраилов<sup>a,\*</sup>, Х. Хамиду<sup>b,\*\*</sup>

<sup>a</sup> Комплексный НИИ РАН, Грозный, Россия

<sup>b</sup> Университет в Ниамей, Ниамей, Нигер

\*e-mail: israiler@hotmail.com

\*\*e-mail: hamidou\_haoua@yahoo.com

Поступила в редакцию 31.07.2020 г.

После доработки 03.08.2020 г.

Принята к публикации 15.10.2020 г.

Получено точное аналитическое решение задачи о динамическом расширении сферической полости в упругой среде (грунте) с произвольной постоянной скоростью. Допускается, что эта скорость может быть большой, вплоть до скорости распространения объемных волн в среде, и потому, краевые условия должны задаваться на подвижной границе. Найденное решение позволяет судить о воздействии (или управлять воздействием) подземных взрывов на объекты в “дальней” зоне, на расстояниях, значительно превышающих размер полости. Исправлены некорректности в приближенном решении этой задачи, данным Дж. Ахенбахом и С. Саном. Выяснено, что приближенное решение, полученное по методу Горна, требующим наличие большого параметра в задаче, не справедливо в некоторых областях изменения коэффициента Пуассона среды и скорости расширения полости. Показано, что при тех значениях указанных параметров, при которых приближенное решение может быть принято, оно согласуется с точным решением.

*Ключевые слова:* подземный взрыв, сферическая полость, динамическое расширение, упругие волны, точное и приближенное решения

DOI: 10.31857/S0572329921030053

**1. Введение.** Работа посвящена исследованию нестационарных процессов, возникающих в упругих средах, в частности, в грунтах под действием динамической нагрузки (давления), приложенного на границе сферической полости. Считается, что полость расширяется с течением времени с постоянной и произвольной по величине скоростью, которая может принимать значения вплоть до скорости объемных упругих волн. Если при этом поверхность полости идентифицируется с поверхностью раздавливания, дробления и обрушения грунта, то описанная задача служит в некоторых случаях приемлемой моделью камуфлетного подземного взрыва, например, взрыва в скальных грунтах. В других случаях, эта задача является одним из важных этапов (элементов) в более сложной модели подземного взрыва и ее решение позволяет оценивать действие взрыва в “дальней зоне”, на расстояниях, значительно превышающих первоначальный размер полости.

Практически во всех существующих постановках данной проблемы с динамическим расширением полости в упругой среде, когда отсутствуют или пренебрегается наличием зон пластических деформаций вокруг полости, деформации считаются малыми и граничные условия с текущей поверхности полости сносятся на ее первоначальную.

чальное положение в момент возникновения ударной нагрузки от взрыва. Такая постановка сильно упрощает задачу, сводя ее к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. В настоящем исследовании допускается возможность быстрого расширения полости с большими скоростями, когда краевые условия удовлетворяются на подвижной границе полости; снесение их на начальное положение полости привело бы к значительным ошибкам. Формулировка краевых условий задачи на движущейся границе приводит к необходимости интегрирования дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Дж. Ахенбах и С. Сан [1] нашли приближенное решение этой задачи в случае присутствия большого параметра в полученном дифференциальном уравнении с переменными коэффициентами, когда возможно использование метода Горна для его интегрирования.

Однако, работа Дж. Ахенбаха и С. Сана содержит ряд существенных недостатков, которые требуется исправить, ввиду практической важности данной задачи.

1. Рассматривая в качестве основного расчетного примера случай полости, расширяющейся с постоянной скоростью, авторы не заметили, что в этом случае дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, к которому они свели задачу, является уравнением типа Эйлера, допускающим точное решение.

2. За большой параметр в дифференциальном уравнении принимается размерная величина, а именно, скорость распространения в среде объемных упругих волн, что некорректно и не позволяет судить о точности и границах применимости полученного приближенного решения.

3. Для возможности применения метода Горна необходимо, чтобы введенный нами ниже безразмерный параметр  $h$ , равный отношению скорости объемных упругих волн среды к “приведенной” скорости расширения полости, был хотя бы больше единицы или, иначе, чтобы скорость расширения полости была меньше половины скорости объемной упругой волны. Но даже если это условие ( $h > 1$ ) выполнено, то, как мы покажем, существует интервал изменения параметра Пуассона среды  $\nu$ , примыкающий к точке  $\nu = 0.5$  (слабосжимаемые среды), на котором представление решения в форме метода Горна не справедливо (на этом интервале решение имеет другой аналитический вид). Правда при малых скоростях расширения полости этот интервал весьма мал. Тем не менее из сказанного следует, что решение Дж. Ахенбаха и С. Сана не является полным.

**2. Постановка задачи. 2.1. Физические предпосылки.** Пусть в начальный момент времени ( $t = 0$ ) в неограниченной изотропной упругой среде имеется сферическая полость радиуса  $a_0$ . Предполагается, что полость с течением времени расширяется и имеет в текущий момент времени  $t$  радиус  $r = a(t)$  в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  с полюсом в центре полости. Рассматривается случай, когда расширяющаяся граница полости является, подобно фронту волны, геометрической или нематериальной поверхностью в том смысле, что в разные моменты времени она состоит из разных физических частиц среды. К границе полости с момента времени  $t = 0$  приложено равномерное, т.е. не зависящее от координат  $\theta$  и  $\varphi$ , и переменное по времени давление  $P(t)$ . Задача состоит в исследовании возникающих в этом случае динамических возмущений в среде или, иными словами, в нахождении волн, распространяющихся по среде от расширяющейся нагруженной полости.

Физическим явлением, описываемым рассматриваемой задачей, служит, например, камуфлетный подземный взрыв, когда под действием высокого давления в газобразных продуктах взрыва, возникающего при детонации взрывчатого вещества в объеме  $r \leq a_0$ , происходит раздавливание и обрушение грунта. Такая ситуация, когда в результате взрыва образуется расширяющаяся до некоторого предела зона обрушения (или разрушения), а вне этой зоны сохраняется область чисто упругих деформаций характерна для взрывов в скальных грунтах или хрупких средах. При этом в самой упру-

гой области к расширяющейся полости (зоне разрушения) может примыкать зона, в которой после прохождения взрывной волны образовались микро- или макротрещины и дефекты, которые не приводят к макроразрушению. Будем считать также, что эти трещины и дефекты не изменяют заметно упругие свойства грунта.

Представленная картина последствий подземного взрыва в общем случае для произвольных грунтов разумеется не является полной. Достаточно полное и основанное на экспериментальных данных описание явлений, возникающих при подземных взрывах, включая ядерные взрывы, можно найти в обширной литературе по данному вопросу (см., например, обзорные работы [2–5]). Главное отличие результатов этих исследований от представленной выше картины явления состоит в том, что за областью обрушения для многих грунтов имеется зона чисто пластических или упругопластических деформаций. Однако, можно избежать решения этой более сложной задачи, пренебрегая существованием пластической зоны, если интересоваться эффектом подземного взрыва в “дальней зоне”, на расстояниях от места взрыва значительно (на многие порядки) превышающих ширину пластической зоны. Очевиден и практический интерес таких постановок задач в связи с вопросами обнаружения и оценок мощности подземных взрывов.

Упомянем теперь и другое упрощающее предположение, которое принимается нами в постановке задачи, — это то, что полость считается расширяющейся на бесконечном промежутке времени. В реальности при расширении полости давление во взрывных газах падает и при падении его до некоторого значения (своего для каждого типа грунта) процесс дробления и обрушения грунта прекращается. Тем самым, полость имеет максимальный размер или максимальный радиус (в предположении сферической симметрии процесса). В силу сказанного, давление газов в полости принимает максимальное значение в начальный момент времени при полной детонации к этому моменту времени взрывчатого вещества, заложенного в объеме шара радиуса  $a_0$  (тогда взрывные газы имеют минимально возможный объем), либо максимальное значение давления достигается очень скоро после взрыва до момента “остановки” полости как, например, в случае подземных ядерных взрывов [6, 7]. Таким образом, если интересоваться максимальными напряжениями при подземном взрыве в дальней зоне упругой области, то можно считать полость расширяющейся на всем рассматриваемом промежутке времени. Что касается задачи с полостью, расширяющейся на конечном интервале времени (задачи “с остановкой”), метод ее точного аналитического решения дан в диссертации Х. Хамиду [8] (более полное и детальное изложение решения этой задачи авторы намереваются опубликовать в скором времени).

*2.2. Уравнения, начальные и краевые условия.* Считая среду (грунт) линейно упругой, перейдем к математической формулировке задачи. В этом случае предполагаются малыми деформации и перемещения (в сравнении, скажем, с первоначальным радиусом полости  $a_0$ ), а также скорости физических частиц (материальных точек) среды (в сравнении со скоростью распространения упругой волны от полости). Тогда лагранжевы и эйлеровы координаты точек среды неразличимы и в выражении ускорения при записи уравнений движения в эйлеровой (пространственной) системе координат можно пренебречь конвективным членом, то есть считать, что ускорение материальных точек дается, как и в лагранжевых координатах, частной производной вектора скорости по времени. Что касается скорости нематериальной поверхности разрушения (границы полости)  $V = da/dt \equiv \dot{a}(t)$ , то, как было сказано, мы не накладываем на ее величину никаких ограничений, кроме естественного ограничения, что она должна быть меньше скорости распространения объемных волн в среде:  $0 < V < c_1$ . В то время как в работе Дж. Ахенбаха и С. Сана [1] эта скорость считается малой, что связано с методом решения задачи (максимальное значение ее в рассмотренных в [1] примерах составляет  $V = 0.05c_1$ ).

В силу сферической симметрии задачи только одна (радиальная) компонента вектора перемещения точек среды отлична от нуля и она есть только функция координаты  $r$  и времени  $t$ , т.е.

$$u_r \equiv u(r, t), \quad u_\theta \equiv 0, \quad u_\varphi \equiv 0 \quad (2.1)$$

Тензор малых деформации в криволинейной системе координат определяется теми же формулами Коши, что и в декартовой системе координат, только необходимо в них частные производные по координатам заменить на ковариантные производные (см., например, [9], Ch. III); по повторяющимся дважды латинским индексам принято, если не оговорено противное, правило суммирования по всем значениям, принимаемым индексами):

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i||j} + u_{j||i}, \quad u_{i||j} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial q^j} - u_n \Gamma_{ij}^n \quad (2.2)$$

Здесь  $(q^1, q^2, q^3)$  – криволинейные координаты, а величины  $\Gamma_{ij}^n$ , называемые символами Кристоффеля, являются коэффициентами в выражениях производных по координате от базисных векторов  $\mathbf{G}_i$ , т.е. в равенствах  $\partial \mathbf{G}_i / \partial q^j = \Gamma_{ij}^n \mathbf{G}_n$ . При этом базисные или координатные вектора в произвольной точке  $(q^1, q^2, q^3)$  определяются как производные радиус-вектора  $\mathbf{r}$  этой точки по криволинейным координатам, т.е.  $\mathbf{G}_i = \partial \mathbf{r} / \partial q^i$ . Не все из этих векторов являются единичными и безразмерными, и потому, не все компоненты тензора деформаций, определенного формулой (2.2), будут безразмерными. Чтобы избавиться от этого неудобства, вводят в рассмотрение физические компоненты тензора деформаций (аналогично и других тензоров второго порядка) равенствами  $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} / \sqrt{G_{ii} G_{jj}}$  (по индексам  $i$  и  $j$  не суммировать), где  $G_{ii}$  и  $G_{jj}$  есть квадраты длин координатных векторов  $\mathbf{G}_i$  и  $\mathbf{G}_j$  или, иначе, компоненты метрического тензора, определяемого как скалярное произведение координатных векторов:  $G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j$ . Переход к физическим компонентам тензоров имеет еще и то преимущество, что ковариантные и контрвариантные физические компоненты совпадают друг с другом (и потому, индексы у физических компонент можно всегда писать внизу), однако, есть и неудобство, связанное с тем, что физические компоненты не образуют тензора, т.е. они при переходе к новой системе координат не преобразуются по правилам преобразования компонент тензора.

В случае сферической системы координат, пользуясь известными значениями для символов Кристоффеля и ко- и контрвариантных компонент метрического тензора (см., например, [10]), получаем из (2.2) следующие выражения для физических компонент тензора деформаций:

$$\tilde{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta} = \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} \equiv 0 \quad \text{при} \quad i \neq j \quad (2.3)$$

Как легко показать, закон Гука, связывающий тензоры напряжений и деформаций и записываемый в декартовой системе координат для изотропной упругой среды в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \Theta \equiv \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (2.4)$$

в котором  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные, называемые параметрами Ламе, будет иметь аналогичный вид и в любой криволинейной ортогональной системе координат с заменой единичного тензора Кронекера  $\delta_{ij}$  (принимаящего значение 1 при  $i = j$  и 0 при  $i \neq j$ ) на метрический тензор  $G_{ij}$  криволинейной системы ( $\delta_{ij} \rightarrow G_{ij}$ ). Отсюда следует, что физические компоненты тензора напряжений  $\tilde{\sigma}_{ij}$  и деформаций  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  (к которым, в силу ука-

занных выше причин, удобно перейти в криволинейных координатах), связаны ровно соотношением (2.4). На указанную разницу в написании закона Гука не всегда обращается внимание; так, например, в книге В.Б. Поручикова [11] (с. 8) ошибочно полагается, что соотношение между тензорами напряжений и деформаций в виде (2.4) справедливо кроме декартовой и в любой ортогональной криволинейной системе координат.

В нашем случае, когда физические компоненты тензора деформаций определены формулами (2.3), получаем из закона Гука (2.4), записанного в физических переменных

$$\tilde{\sigma}_{rr} = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} = (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\nu u}{1 - \nu r} \right) \quad (2.5)$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta} = \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{u}{r} = \frac{\lambda + 2\mu}{1 - \nu} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right), \quad \tilde{\sigma}_{ij} \equiv 0 \quad \text{при } i \neq j$$

В соотношениях закона Гука (2.4), (2.5) величины  $\sigma_{ij}$  и  $\tilde{\sigma}_{ij}$  можно понимать как компоненты и физические компоненты тензора условных напряжений, когда вектора внутренних усилий (напряжений), возникающие на элементарных (т.е. бесконечно малых) координатных площадках в текущем деформированном состоянии, отнесены к соответствующим площадкам до деформации, поскольку в случае малых деформаций (и малых перемещений) физических частиц эти компоненты мало отличаются от компонент тензора истинных напряжений, в котором вектора внутренних усилий отнесены к деформированным площадкам, т.е. к площадкам, на которых эти усилия возникают.

Дифференциальные уравнения движения (или равновесия) сплошной среды в криволинейных, в частности, сферических эйлеровых координатах, вытекающие из закона сохранения или изменения количества движения любого объема тела и выраженные через физические компоненты тензора напряжений, получены в курсах по механике сплошной среды и теории упругости (см., например, [12, 13]). Легко проверить, что при отсутствии массовых сил, наличии сферической симметрии и равенстве нулю касательных напряжений (2.5), два из этих уравнений тождественно выполнены, а остающимся является уравнение

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{rr}}{\partial r} + \frac{2\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\theta\theta} - \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

где  $\rho$  – плотность среды.

Подставляя в (2.6) выражения (2.5), следующие из закона Гука, приходим для радиального перемещения точек упругого грунта к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

в котором через  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  обозначена скорость распространения в среде объемных волн.

Уравнение (2.7) решается в области  $r > a(t)$ , т.е. во внешности полости переменного радиуса, при нулевых начальных условиях

$$u(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = 0 \quad \text{при } r > a_0 \quad (a_0 \equiv a(0)) \quad (2.8)$$

К уравнению (2.7) и начальным условиям (2.8) необходимо присоединить краевое условие

$$\tilde{\sigma}_{rr}|_{r=a(t)} \equiv \tilde{\sigma}_{rr}(r = a(t), t) = -P(t)$$

означающее, что на расширяющейся полости задано давление  $P(t)$  (знак минус характеризует то обстоятельство, что сила  $\mathbf{P}(t)$  и внешняя по отношению к области  $r > a(t)$  нормаль  $\mathbf{n}$  к границе полости направлены в разные стороны).

Используя выражение для  $\tilde{\sigma}_{rr}$  из закона Гука (2.5), можно переписать краевое условие в терминах функции перемещения  $u$ :

$$\left. \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\nu}{1-\nu} \frac{u}{r} \right) \right|_{r=a(t)} \equiv \left. \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right|_{r=a(t)} + \frac{2\nu}{1-\nu} \frac{1}{a(t)} (u)_{r=a(t)} = -\frac{P(t)}{\rho c_1^2} \quad (2.9)$$

Некоторые авторы [14, 15] сносят краевое условие (2.9) на начальное положение полости  $r = a_0$ , что существенно упрощает задачу в математическом отношении. Однако, в большинстве случаев при сильных взрывах область разрушения значительна, радиус полости заметно увеличивается и снесение краевого условия на начальное положение полости может привести к не приемлемым ошибкам.

2.3. *Приведение краевой задачи (2.7)–(2.9) к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.* Если ввести в рассмотрение потенциал перемещений по формуле

$$u(r, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (2.10)$$

то, как нетрудно видеть, уравнение (2.7) сведется к уравнению сферических волн

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

Как известно, общее решение волнового уравнения (2.11) дается формулой

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{r} \left[ f \left( t - \frac{r}{c_1} \right) + g \left( t + \frac{r}{c_1} \right) \right] \quad (2.12)$$

в которой произвольные функции  $f$  и  $g$  являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями в случае классического решения ( $f, g \in C^2$ ) или дважды кусочно непрерывно дифференцируемыми функциями, если рассматриваются решения с разрывами (волны).

Если функции  $f(\xi_-)$  и  $g(\xi_+)$ ,  $\xi_{\mp} \equiv t \mp r/c_1$  таковы, что они равны тождественно нулю при отрицательных значениях аргументов  $\xi_{\mp} < 0$ , то первое слагаемое в (2.12) есть волна уходящая на бесконечность, а вторая – идущая из бесконечности. Тогда, в силу начальных условий (2.8), решение краевой задачи (2.7)–(2.9) должно быть представимо в виде волны, уходящей от полости на бесконечность, т.е. в виде первого слагаемого в (2.12). Выполняя в этом слагаемом сдвиг по времени на величину  $-a_0/c_1$ , чтобы волна зарождалась на границе полости в тот же момент времени  $t = 0$ , с которого действует давление  $P(t)$ , получим решение указанной выше краевой задачи в виде

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{r} f(s), \quad s \equiv t - \frac{r - a_0}{c_1} \quad (2.13)$$

Подставляя это решение в краевое условие (2.9), приходим после ряда элементарных преобразований к обыкновенному дифференциальному уравнению для неизвестной функции  $f$ :

$$\begin{aligned} a^2(t) f'' \left( t - \frac{a(t) - a_0}{c_1} \right) + 2a(t) c_1 \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} f' \left( t - \frac{a(t) - a_0}{c_1} \right) + \\ + 2c_1^2 \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} f \left( t - \frac{a(t) - a_0}{c_1} \right) = -\frac{a^3(t) P(t)}{\rho} \end{aligned}$$

в котором  $f'$ ,  $f''$  означают производные функции  $f$  по аргументу.

Обозначим в этом уравнении аргумент неизвестной функции через

$$\tau \equiv s|_{r=a(t)} = t - \frac{a(t) - a_0}{c_1} \quad (2.14)$$

Поскольку функция  $\tau(t)$ , определенная равенством (2.14), есть непрерывная монотонно возрастающая функция  $t$ , то существует однозначная непрерывная обратная функция  $t = t(\tau)$ . Тогда, вводя обозначения  $a(t) = a(t(\tau)) \equiv \bar{a}(\tau)$ ,  $P(t) = P(t(\tau)) \equiv \bar{P}(\tau)$  и константу

$$\beta = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}, \quad 0 < \beta < 1 \quad (2.15)$$

перепишем полученное выше уравнение для  $f$  в виде

$$\bar{a}^2(\tau)f''(\tau) + 2c_1\beta\bar{a}(\tau)f'(\tau) + 2c_1^2\beta f(\tau) = -\frac{\bar{a}^3(\tau)\bar{P}(\tau)}{\rho} \quad (2.16)$$

В уравнении (2.16)  $\tau \geq 0$  (что соответствует моментам времени  $t \geq 0$ ) и для выделения единственного его решения нужно поставить два начальных условия. В работе Дж. Ахенбаха и С. Сана и многочисленных работах с полостью постоянного радиуса (когда уравнение подобное (2.16) является уравнением с постоянными коэффициентами) в качестве начальных условий для функции  $f$  ставятся однородные условия

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0 \quad (2.17)$$

ограничиваясь замечанием, что они следуют из нулевых начальных условий (2.8), означающих, что среда в момент времени  $t = 0$  (и в более ранние моменты времени) находилась в состоянии покоя. Однако, этот вывод не столь очевиден и требует разъяснений. Для этого от функции  $f$  вернемся к функции, имеющей физический смысл, а именно к функции перемещений точек среды по формуле (2.10), в которую подставим выражение (2.13). Тогда имеем

$$u(r, t) = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{f(s)}{r} \right] = -\frac{f'(s)}{c_1 r} - \frac{f(s)}{r^2} \quad (2.18)$$

где  $f' \equiv df/ds$ .

Заметим, что значению аргумента  $s = 0$  соответствует, в силу определения  $s$  в (2.13), значение функции на фронте волны. Следовательно, условие непрерывности перемещений в упругой области при переходе через фронт волны (условие сплошности подразумевается), согласно первому начальному условию в (2.8) и (2.18), записывается в виде

$$-\frac{f'(0)}{c_1 r} - \frac{f(0)}{r^2} = 0 \quad (2.19)$$

Здесь и далее за  $f'(0)$  и  $f(0)$  принимаются предельные значения этих функций при  $s \rightarrow 0+$ , т.е. их значения за фронтом волны; соответствующие значения перед фронтом тождественно равны нулю, поскольку перед фронтом среда находится в состоянии покоя (условия (2.8)).

Получим теперь второе начальное условие. Нужно ожидать, что потенциал перемещений  $\Phi$ , а значит и  $f$ , более гладкие функции, чем перемещение  $u$ . Действительно, равенство (2.10), используя (2.13), можно переписать в виде

$$u(s, t) = -\frac{1}{c_1} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{f(s)}{c_1(t-s) + a_0} \right)$$

или, интегрируя по  $s$ , в виде ( $0 < s < t$ )

$$\frac{f(s)}{c_1(t-s) + a_0} = -c_1 \int_0^s u(s, t) ds' \quad (2.20)$$

При этом, константа интегрирования в (2.20) положена равной нулю, поскольку потенциал перемещений (2.10) определен с точностью до константы.

Из (2.20) следует, что при  $s = 0$  (на фронте волны)  $f(0) = 0$ . Объединяя этот результат с условием (2.19), получаем, что функция  $f$  должна удовлетворять однородным начальным условиям (2.17). Таким образом, краевая задача (2.7)–(2.9) сведена к задаче Коши (2.16), (2.17) для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами.

**3. Точное решение задачи в случае полости, расширяющейся с постоянной скоростью.**  
 3.1. Преобразование уравнения и сведение проблемы к задаче Коши для уравнения с постоянными коэффициентами. В уравнении (2.16) перейдем к новой независимой переменной  $\eta$ , задаваемой равенствами

$$\eta = \chi(\tau), \quad \chi'(\tau) = \frac{a_0}{\bar{a}(\tau)} \quad (3.1)$$

Тогда

$$f'(\tau) = f'_\eta(\eta) \cdot \eta'_\tau = f'_\eta(\eta) \cdot \frac{a_0}{\bar{a}(\tau)}, \quad f''(\tau) = f''_{\eta\eta}(\eta) \cdot \frac{a_0^2}{\bar{a}^2(\tau)} + f'_\eta(\eta) \cdot \left( -\frac{a_0}{\bar{a}^2(\tau)} \bar{a}'(\tau) \right)$$

и уравнение (2.16) переписывается в виде

$$f''_{\eta\eta}(\eta) + \frac{1}{a_0} [2\beta c_1 - \bar{a}'(\tau)] f'_\eta(\eta) + 2\beta \frac{c_1^2}{a_0^2} f(\eta) = -\frac{\bar{a}^3[\tau(\eta)]}{\rho a_0^2} \bar{P}[\tau(\eta)] \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) будет уравнением с постоянными коэффициентами, если величина  $\bar{a}'(\tau) \equiv \frac{d\bar{a}(\tau)}{d\tau}$  есть константа. Последнее имеет место при равномерном расширении полости (расширении с постоянной скоростью). Действительно, пусть

$$a(t) = a_0 + Vt, \quad V = \text{const} < c_1 \quad (3.3)$$

В этом случае, в силу (2.14),

$$\tau = t \left( 1 - \frac{V}{c_1} \right), \quad t = \frac{\tau}{1 - V/c_1} \quad (3.4)$$

Следовательно,

$$\bar{a}(\tau) \equiv \bar{a}(t(\tau)) = a_0 + \frac{V\tau}{1 - V/c_1}, \quad \bar{a}'(\tau) \equiv \frac{d\bar{a}(\tau)}{d\tau} = \frac{V}{1 - V/c_1} \equiv V_1 = \text{const} > V \quad (3.5)$$

Кроме того, когда переменные  $t$ ,  $\tau$  и переменный радиус полости  $a(t)$  связаны соотношениями (3.3)–(3.5), закон преобразования (3.1) может быть выражен в явном виде. Для этого первое соотношение из (3.5) подставим во второе равенство в (3.1). Тогда приходим к равенству

$$\chi'(\tau) = \frac{a_0}{a_0 + V_1\tau} = \frac{1}{1 + (V_1/a_0)\tau}$$

интегрирование которого дает явное выражение между переменными  $\tau$  и  $\eta$ :

$$\eta = \int \frac{d\tau}{1 + (V_1/a_0)\tau} = \frac{a_0}{V_1} \ln \left( 1 + \frac{V_1}{a_0} \tau \right), \quad \tau = \frac{a_0}{V_1} \left( e^{\frac{V_1}{a_0} \eta} - 1 \right) \quad (3.6)$$

Заметим, что здесь константа интегрирования выбрана равной нулю, чтобы значению  $\tau = 0$  соответствовало значение  $\eta = 0$ . Видно также, что  $\eta \rightarrow \tau$  при  $V_1 \rightarrow 0$ .

Обозначая правую часть уравнения (3.2) через  $F(\eta)$ , выразим ее через переменную  $\eta$ ; имеем в соответствии с (3.5) и (3.6)

$$F(\eta) = -\frac{[a_0 + V_1\tau(\eta)]^3}{\rho a_0^2} \bar{P}\{\tau(\eta)\} = -\frac{a_0}{\rho} e^{\frac{3V_1}{a_0}\eta} \bar{P} \left\{ \frac{a_0}{V_1} \left( e^{\frac{V_1}{a_0}\eta} - 1 \right) \right\} \quad (3.7)$$

В частном случае, когда давление в полости постоянно, т.е.  $P(t) = P_0 H(t)$ ,  $P_0 = \text{const}$  ( $H(t)$  – единичная функция Хевисайда, равная 1 при  $t > 0$  и 0 при  $t < 0$ )

$$F(\eta) = -\frac{a_0 P_0}{\rho} e^{\frac{3V_1}{a_0}\eta} \quad (3.8)$$

Следовательно, при расширении полости с постоянной скоростью уравнение (3.2) принимает вид

$$f_{\eta\eta}''(\eta) + \frac{c_1}{a_0} (2\beta - V_1^*) f_{\eta}'(\eta) + 2\beta \left( \frac{c_1}{a_0} \right)^2 f(\eta) = F(\eta) \quad (3.9)$$

в котором правая часть  $F(\eta)$  определена выражением (3.7) (или (3.8)), а безразмерная приведенная скорость расширения полости  $V_1^*$  определена равенством

$$V_1^* = \frac{V_1}{c_1} = \frac{V/c_1}{1 - V/c_1}, \quad 0 < V_1^* < +\infty \quad (3.10)$$

Наконец, поскольку значению переменной  $\tau = 0$  соответствует значение  $\eta = 0$ , то при переходе к новой независимой переменной начальные условия остаются однородными и совпадают с (2.17). Таким образом, наша задача с полостью, расширяющейся с постоянной скоростью, свелась к задаче Коши (3.9), (2.17) для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

*3.2. Точное решение задачи Коши.* Известно (см., например, [16]), что общее решение  $f(\eta)$  линейного неоднородного уравнения (3.9) легко выписывается, если известна фундаментальная система решений соответствующего (3.9) однородного уравнения, состоящего из двух линейно независимых решений  $f_1(\eta)$  и  $f_2(\eta)$ . Тогда

$$f(\eta) = D_1 f_1(\eta) + D_2 f_2(\eta) - \int_0^{\eta} \begin{vmatrix} f_1(\eta) & f_2(\eta) \\ f_1(\eta') & f_2(\eta') \end{vmatrix} \frac{1}{W(f_1(\eta'), f_2(\eta'))} F(\eta') d\eta' \quad (3.11)$$

где через  $W(f_1, f_2)$  обозначен вронскиан функций  $\{f_1, f_2\}$ , т.е. определитель (штрих у функций означает производную по аргументу)

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$$

Последнее слагаемое в (3.11) есть частное решение неоднородного уравнения (3.9), а два первых слагаемых, содержащие произвольные константы  $D_1$  и  $D_2$ , образуют общее решение соответствующего (3.9) однородного уравнения.

Легко показать, что решение (3.11) удовлетворяет нулевым начальным условиям (2.17) когда  $D_1 = D_2 = 0$ . Следовательно, последнее слагаемое в (3.11) является решением сформулированной в предыдущем пункте задачи Коши. Для явного выражения этого решения найдем фундаментальную систему решений  $\{f_1, f_2\}$  уравнения (3.9) с нулевой правой частью.

Вид функций  $f_1(\eta)$  и  $f_2(\eta)$  зависит от корней характеристического уравнения

$$\Lambda^2 + \frac{c_1}{a_0}(2\beta - V_1^*)\Lambda + 2\beta\left(\frac{c_1}{a_0}\right)^2 = 0 \quad (3.12)$$

Корни уравнения (3.12) даются формулой

$$\Lambda_{1,2} = \frac{c_1}{a_0}(-\kappa \pm \sqrt{\Delta}) \quad (3.13)$$

где обозначено

$$\kappa = \beta - \frac{V_1^*}{2}, \quad \Delta = \left(\beta - \frac{V_1^*}{2}\right)^2 - 2\beta \quad (3.14)$$

В зависимости от значения величины  $\Delta$  имеем случаи, когда корни (3.13) являются комплексными и сопряженными ( $\Delta < 0$ ), оба корня совпадают и являются действительными ( $\Delta = 0$ ) и случай двух различных действительных корней ( $\Delta > 0$ ).

Соответствующие этим корням фундаментальные решения имеют следующий вид ( $\omega \equiv \sqrt{|\Delta|}$ ):

$$1) f_1(\eta) = e^{-\frac{c_1 \kappa \eta}{a_0}} \cos\left(\frac{c_1 \omega \eta}{a_0}\right), \quad f_2(\eta) = e^{-\frac{c_1 \kappa \eta}{a_0}} \sin\left(\frac{c_1 \omega \eta}{a_0}\right) \quad \text{при } \Delta < 0 \quad (3.15)$$

$$2) f_1(\eta) = e^{-\frac{c_1 \kappa \eta}{a_0}}, \quad f_2(\eta) = \eta e^{-\frac{c_1 \kappa \eta}{a_0}} \quad \text{при } \Delta = 0 \quad (3.16)$$

$$3) f_1(\eta) = e^{-\frac{c_1(\kappa - \omega)\eta}{a_0}}, \quad f_2(\eta) = \eta e^{-\frac{c_1(\kappa + \omega)\eta}{a_0}} \quad \text{при } \Delta > 0 \quad (3.17)$$

Подставляя найденные фундаментальные системы решений (3.15)–(3.17) в (3.11) и проводя элементарные вычисления, получаем решение исходной задачи Коши в каждом из возникающих здесь случаев, а именно

$$f(\eta) = \frac{a_0}{c_1 \omega} \int_0^\eta e^{-\frac{c_1 \kappa(\eta - \eta')}{a_0}} \sin\left(\frac{c_1 \omega(\eta - \eta')}{a_0}\right) F(\eta') d\eta' \quad \text{при } \Delta < 0 \quad (3.18)$$

$$f(\eta) = \int_0^\eta e^{-\frac{c_1 \kappa(\eta - \eta')}{a_0}} (\eta - \eta') F(\eta') d\eta' \quad \text{при } \Delta = 0 \quad (3.19)$$

$$f(\eta) = \frac{a_0}{c_1 \omega} \int_0^\eta e^{-\frac{c_1 \kappa(\eta - \eta')}{a_0}} \sinh\left(\frac{c_1 \omega(\eta - \eta')}{a_0}\right) F(\eta') d\eta' \quad \text{при } \Delta > 0 \quad (3.20)$$

В формулы (3.18)–(3.20) необходимо подставить значение правой части уравнения (3.9), выраженное формулой (3.7) при произвольном давлении на поверхности полосты и (3.8), если это давление постоянно.

Условия наличия разных типов корней характеристического уравнения и различного представления решения задачи Коши, выраженные выше через равенство нулю или знак величины  $\Delta$ , полезно представить в виде условий на величину скорости рас-

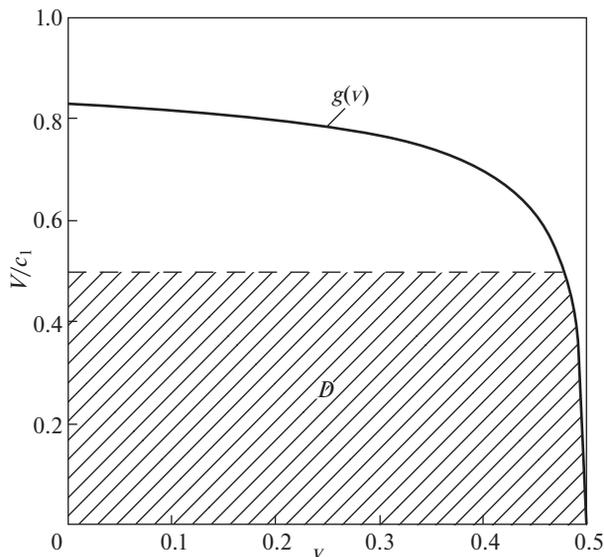


Рис. 1

ширения полости. Подставляя в (3.14) выражение (3.10) для  $V_1^*$  и затем (2.15) для  $\beta$ , легко установить эквивалентность следующих неравенств:

$$(a) \Delta < 0 \sim \frac{V}{c_1} < g(v), \quad (b) \Delta = 0 \sim \frac{V}{c_1} = g(v), \quad (c) \Delta > 0 \sim \frac{V}{c_1} > g(v) \quad (3.21)$$

где

$$g(v) = \frac{2(\beta + \sqrt{2\beta})}{1 + 2(\beta + \sqrt{2\beta})} \equiv 2 \left( \frac{1-2v}{1-v} + \sqrt{2 \frac{1-2v}{1-v}} \right) \cdot \left[ 1 + 2 \left( \frac{1-2v}{1-v} + \sqrt{2 \frac{1-2v}{1-v}} \right) \right]^{-1} \quad (3.22)$$

На рис. 1 представлен график функции  $V/c_1 = g(v)$ , задаваемой формулой (3.22), в зависимости от коэффициента Пуассона грунта  $\nu$ , изменяющегося на интервале от нуля до 0.5. Графиком является кривая, проходящая через точки  $g(0) = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0.82$  и  $g(0.5) = 0$ . Если относительная скорость расширения полости  $V/c_1$  принадлежит области под кривой  $g(v)$ , то имеется два комплексно-сопряженных корня характеристического уравнения (3.12), в точках самой кривой имеется один кратный действительный корень этого уравнения и в точках области между кривой  $g(v)$  и горизонтальной прямой  $V/c_1 = 1$ , определяющей предельное значение скорости расширения полости, существуют два различных действительных корня уравнения (3.12). Как видно из рис. 1, неверно считать, что при малых отношениях  $V/c_1$  имеются только комплексные корни: при коэффициенте Пуассона среды  $\nu$  близких к 0.5 (слабо сжимаемые среды) и при малых значениях  $V/c_1$  существуют действительные корни уравнения (3.12). Отметим здесь сразу же, что в силу особенности использованного метода, Дж. Ахенбах и С. Сан [1] при приближенном рассмотрении данной задачи смогли выписать только решение, соответствующее комплексным корням. Потому полученное ими решение не является полным даже для малых значений  $V/c_1$ . Это обстоятельство тем более важно, поскольку динамический коэффициент Пуассона (при вибрациях) для песчаных и

глинистых грунтов оказывается несколько большим, чем при статических испытаниях и для глинистых грунтов он может принимать значения из интервала 0.40÷0.50 ([17], с. 354).

Чтобы найти окончательную форму решений необходимо в формулы (3.18)–(3.20) подставить выражение (3.7) (или (3.8)) для правой части  $F(\eta)$  и вернуться от переменной  $\eta$  и функции  $f(\eta)$  к переменной  $s$  и функции (потенциалу перемещений среды)  $\Phi(r, t)$ , определенными формулами (2.13).

В некоторых частных случаях задания закона изменения давления  $P(t)$  на границе полости интегралы в (3.18)–(3.20) вычисляются в конечном виде, что приводит к простым аналитическим решениям, удобным для исследования. Имея ввиду сравнение точного решения с приближенным решением Дж. Ахенбаха и С. Сана [1], ниже мы получим окончательную форму решения для случая, когда давление  $P(t)$  в полости является постоянным, т.е.  $P(t) = P_0 H(t)$ . Тогда правая часть в уравнении (3.9), входящая в решения (3.18)–(3.20), определена формулой (3.8). Подставляя это выражение для  $F(\eta)$  в (3.18) и интегрируя, получаем в области  $(a)$ , определенной в (3.21),

$$f(\eta) = -\frac{a_0^3 P_0}{\rho c_1^2 [(\chi + 3V_1^*)^2 + \omega^2]} e^{\frac{3V_1^* \eta}{a_0}} \times \left\{ 1 - e^{-\frac{c_1(\chi + 3V_1^*)}{a_0}} \left[ \frac{\chi + 3V_1^*}{\omega} \sin\left(\frac{c_1}{a_0} \omega \eta\right) + \cos\left(\frac{c_1}{a_0} \omega \eta\right) \right] \right\} \quad (3.23)$$

Используя формулы (3.14), введем обозначения

$$\chi + 3V_1^* = \beta - \frac{V_1^*}{2} + 3V_1^* = \beta + \frac{5}{2}V_1^* \equiv V_1^* A, \quad \omega = \sqrt{|\Delta|} = \sqrt{(2\beta - \beta^2) + \beta V_1^* - \frac{1}{4}V_1^{*2}} \equiv V_1^* B$$

$$A = \frac{5}{2} + \frac{\beta}{V_1^*}, \quad B = \sqrt{\frac{\alpha^2}{V_1^{*2}} + \frac{\beta}{V_1^*} - \frac{1}{4}}, \quad \alpha^2 \equiv 2\beta - \beta^2 = \frac{1 - 2\nu}{(1 - \nu)^2} \quad (3.24)$$

Возвращаясь теперь в решении (3.23) от переменной  $\eta$  к переменной  $\tau$  по формуле (3.6), а затем и к переменной  $s$  и потенциалу перемещений  $\Phi$ , определенными соотношениями (2.13), имеем окончательно

$$\Phi(r, t) = -\frac{P_0 (a_0 + V_1 s)^3}{r \rho V_1^2 A^2 + B^2} \times \left\{ 1 - \left(\frac{a_0 + V_1 s}{a_0}\right)^{-A} \left[ \frac{A}{B} \sin\left(B \ln \frac{a_0 + V_1 s}{a_0}\right) + \cos\left(B \ln \frac{a_0 + V_1 s}{a_0}\right) \right] \right\} \quad (3.25)$$

Заметим здесь же, что в случае полости постоянного радиуса ( $V = 0$ ) корни характеристического уравнения (3.12) являются комплексно сопряженными и преобразование (3.6) является тождественным, т.е.  $\eta \rightarrow \tau$  при  $V \rightarrow 0$  ( $V_1 \rightarrow 0$ ).

Следовательно, решение задачи с полостью постоянного радиуса получается непосредственно из решения (3.23), полагая в нем  $\eta = s$  и  $V_1^* = 0$ . В результате приходим к известному результату [18] ( $\alpha$  такое же, как и в (3.24)).

Таким же образом, вычисляя интегралы, входящие в решения (3.19), (3.20) при  $F(\eta)$ , определяемом выражением (3.8), получаем в замкнутой форме решения и для случаев (b) и (c) из (3.21), а именно

$$(b) \Phi(r, t) = -\frac{P_0}{r\rho V_1^2} \frac{(a_0 + V_1 s)^3}{A^2} \left[ 1 - \left( \frac{a_0 + V_1 s}{a_0} \right)^{-A} \left( 1 - A \ln \frac{a_0 + V_1 s}{a_0} \right) \right] \quad (3.26)$$

$$(c) \Phi(r, t) = -\frac{P_0}{2r\rho V_1^2} \frac{(a_0 + V_1 s)^3}{B} \times \left\{ \frac{1}{-A+B} \left[ \left( \frac{a_0 + V_1 s}{a_0} \right)^{-A+B} - 1 \right] + \frac{1}{A+B} \left[ \left( \frac{a_0 + V_1 s}{a_0} \right)^{-A-B} - 1 \right] \right\} \quad (3.27)$$

#### 4. О приближенном решении задачи по методу Горна. Сравнение с точным решением.

4.1. Преобразование уравнения к виду, пригодному для применения схемы Горна, недостатка метода. Дж. Ахенбах и С. Сан [1] также, используя автомодельность, сводят проблему о динамическом расширении сферической полости в упругой среде к задаче Коши для уравнения (2.16) при начальных условиях (2.17). Однако, решение последней предлагается искать путем, отличным от предложенного нами в п. 3. Этот путь состоит в переходе в уравнении (2.16) к новой неизвестной функции  $w(\tau)$ , определяемой преобразованием

$$f(\tau) = w(\tau) \exp \left[ -\beta c_1 \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\bar{a}(\tau')} \right] \quad (4.1)$$

Здесь и далее, если обозначения работы Дж. Ахенбаха и С. Сана не совпадают с нашими, то они заменены на обозначения, принятые в настоящей работе. Напомним, что переменная  $\tau$  определена равенством (2.14) и что  $\bar{a}(\tau) = a(t(\tau))$ .

В результате перехода к новой неизвестной функции по формуле (4.1) уравнение (2.16) сводится к следующему

$$w''(\tau) + \left[ \frac{c_1^2 \alpha^2}{\bar{a}^2(\tau)} + \frac{c_1 \beta \bar{a}'(\tau)}{\bar{a}^2(\tau)} \right] w(\tau) = -\frac{\bar{a}(\tau) \bar{P}(\tau)}{\rho} \quad (4.2)$$

Проблема состоит в нахождении фундаментальной системы решений однородного уравнения (4.2), с правой частью равной нулю. Когда эта система решений найдена, решение задачи Коши для неоднородного уравнения (4.2) выписывается так, как указано выше в п. 3.2 (формулой (3.11)).

Целью преобразования уравнения (2.16) к виду (4.2) является использование для его решения метода асимптотического интегрирования, предложенного Горном [19] и получившего дальнейшее развитие в ряде статей [20] и монографии [21]. Как следует из этих работ, метод применим к уравнениям типа (4.2) без правой части, когда коэффициент при  $w(\tau)$  (выражение в квадратных скобках) содержит большой параметр  $h$  и имеет форму

$$h^2 \chi_0(\tau) + h \chi_1(\tau) + \chi_2(\tau) \quad (4.3)$$

Дж. Ахенбах и С. Сан приняли в своей работе за большой параметр скорость распространения объемных волн  $c_1$ . Формально это приводит в данной задаче к правильному результату (в области  $D$  рис. 1, как будет установлено ниже), однако, принятие за большой параметр размерной величины не является корректным и не выявляет области применимости метода.

Хотя безразмерный параметр  $h$  (который при определенных условиях может рассматриваться как большой) может быть введен строго и при произвольном законе рас-

ширения полости, мы ограничимся случаем полости, расширяющейся с постоянной скоростью, когда имеется возможность сравнения приближенных результатов, получаемых по методу большого параметра с точным решением, представленным в предыдущих разделах.

В случае линейно расширяющейся полости в уравнении (4.2) нужно положить

$$\bar{a}(\tau) = a_0 + V_1\tau \quad \text{и} \quad \bar{a}'(\tau) = V_1 \equiv \frac{V}{1 - V/c_1} \quad (4.4)$$

в силу соотношений (3.3)–(3.5). Тогда, выполняя в уравнении (4.2) замену  $\tau \rightarrow \tau_1$ ,  $\tau_1 = a_0 + V_1\tau$ ,  $\frac{\partial}{\partial \tau} = V_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}$  приводим однородное уравнение (4.2) к виду

$$\frac{d^2 w(\tau_1)}{d\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_1^2} \left[ \left( \frac{c_1}{V_1} \right)^2 \alpha^2 + \left( \frac{c_1}{V_1} \right) \beta \right] w(\tau_1) = 0 \quad (4.5)$$

В этом месте, прежде всего, отметим следующее. Хотя авторы работы [1] рассмотрели подробно случай линейного расширения полости в качестве основного примера на приложение метода Горна, они, однако, не заметили, что соответствующее линейному расширению однородное уравнение (4.5) (которое в работе [1] не выписано) является уравнением типа Эйлера, допускающим точное решение (см., например, [22], часть 2, уравнение 2.148). Кроме того, из вида коэффициента перед  $w$  в уравнении (4.5) следует, что большой параметр при расширении полости с постоянной скоростью может быть введен строго как отношение

$$h = \frac{c_1}{V_1} = \frac{c_1}{V} \left( 1 - \frac{V}{c_1} \right) = \frac{c_1}{V} - 1 \quad (4.6)$$

т.е. как отношение скорости распространения объемных волн в грунте к приведенной скорости расширения полости (4.4), вместо некорректного принятия за большой параметр размерной скорости распространения упругих волн  $c_1$ . Это позволило бы определить область применимости приближенного метода, о чем Дж. Ахенбах и С. Сан ничего не смогли сказать в своей работе. При введении большого параметра формулой (4.6), коэффициент при  $w$  записывается в виде

$$\frac{H(h, \nu)}{\tau_1^2}, \quad H(h, \nu) \equiv h^2 \alpha^2 + h\beta = h^2 \frac{1 - 2\nu}{(1 - \nu)^2} + h \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \quad (4.7)$$

имеющим форму (4.3) с  $\chi_2 = 0$  и уравнение (4.5) подпадает под тип, к которому можно применить метод Горна (при  $h \gg 1$ ). Однако использование данного метода в нашей задаче имеет следующие ограничения, которые заслуживают быть отмеченными.

1. Точное решение уравнения (4.5) имеет (три) различные формы в случаях, когда

$$\text{a) } H(h, \nu) > 1/4, \quad \text{b) } H(h, \nu) = 1/4 \quad \text{и} \quad \text{c) } H(h, \nu) < 1/4 \quad (4.8)$$

Эти формы как раз соответствуют решениям (3.15)–(3.17), полученным в п. 3 в случаях комплексных и действительных корней характеристического уравнения, а условия (4.8) совпадают с условиями существования таких корней. Между тем метод Горна позволяет выписать только решение, соответствующее случаю (a) из (4.8), что и выполнено в работе [1]. Однако, сколь бы большим ни был параметр  $h$ , в силу определения функции  $H(h, \nu)$  формулой (4.7), существует, хотя и весьма малая, левая полукрестность точки  $\nu = 0.5$ , в которой  $H(h, \nu) < 1/4$  и на левой границе которой  $H(h, \nu) = 1/4$ ; на рис. 2, где изображены функции  $H(1, \nu)$ ,  $H(2, \nu)$  и  $H(5, \nu)$  названная окрестность определяется интервалами, на которых графики этих функций лежат ниже пунктирной прямой. На этих интервалах и в их левых концах решение

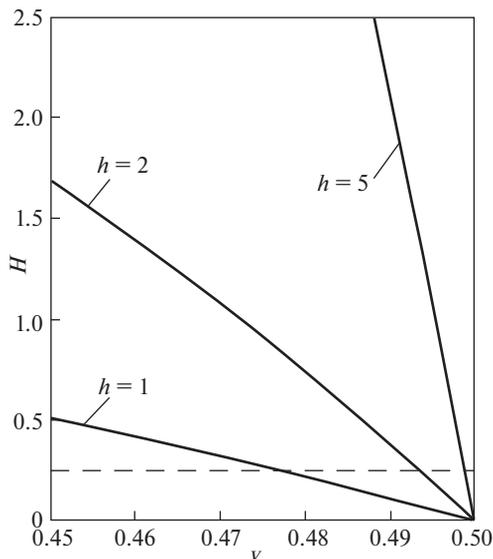


Рис. 2

имеет другие представления и метод Горна не применим (т.е. решения (3.26), (3.27) не могут быть получены по методу Горна).

2. В области, где решение в форме метода Горна правомерно (т.е. там, где функция  $H(h, v)$  принимает значения большие, чем 0.25), использование метода ограничено другим условием, а именно требованием, что параметр  $h$  должен быть большим или, по крайней мере, большим единицы. Таким образом, метод Горна применим и приближенное решение Дж. Ахенбаха и С. Сана для полости, расширяющейся с постоянной скоростью, справедливо, когда  $v$  и  $V/c_1$  определены точками заштрихованной на рис. 1 области  $D$ .

Имея ввиду эти ограничения, изложим в краткой форме способ получения решения и приведем полученный в [1] результат для линейного расширения полости. Решение уравнения (4.5) с коэффициентом при  $w$ , определенным формулой (4.7) и содержащим большой параметр  $h$ , в методе Горна разыскивается в форме [21]

$$w(\tau_1) = Q(\tau_1)e^{h\omega(\tau_1)}\Psi(\tau_1, h), \quad \Psi(\tau_1, h) = 1 + O(1/h) = 1 + \sum \Psi_m(\tau_1)/h^m \quad (4.9)$$

Подстановка представления (4.9) в уравнение (4.5) и приравнивание членов при одинаковых степенях  $h$ , приводит к уравнениям для неизвестных функций, содержащихся в этом представлении. В частности, приравнивание коэффициентов при  $h^2$  и  $h$  дает следующие уравнения для первого приближения с  $\Psi = 1$ :

$$\omega'^2 = -\chi_0, \quad \chi_0 = \alpha^2/\tau_1^2 \quad (4.10)$$

$$\omega''Q + 2\omega'Q' = -\chi_1Q, \quad \chi_1 = \beta/\tau_1^2 \quad (4.11)$$

Уравнение (4.11) есть линейное уравнение относительно  $Q$ . Интегрируя это уравнение с учетом алгебраического уравнения (4.10) для  $\omega'$  и подставляя результат в (4.9), получаем общее решение уравнения (4.5) в первом приближении

$$w(\tau_1) = D_1 \chi_0^{-1/4} \exp \left[ i \int_0^{\tau_1} \left( h \chi_0^{1/2} + \frac{\chi_1}{2\chi_0^{1/2}} \right) d\tau_1 \right] + D_2 \chi_0^{-1/4} \exp \left[ -i \int_0^{\tau_1} \left( h \chi_0^{1/2} + \frac{\chi_1}{2\chi_0^{1/2}} \right) d\tau_1 \right] \quad (4.12)$$

где  $\chi_0$  и  $\chi_1$  определены в (4.10) и (4.11).

Находя теперь, пользуясь (4.11), общее решение неоднородного уравнения (4.2) (так же, как и в п. 3) и константы  $D_1$ ,  $D_2$  из однородных начальных условий, приходим в случае постоянного давления на границе полости к результату Дж. Ахенбаха и С. Сана [1], который в наших обозначениях имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(r, t) = & -\frac{P_0}{r\rho V_1^2} \frac{(a_0 + V_1 s)^3}{A^2 + B_1^2} \times \\ & \times \left\{ 1 - \left( \frac{a_0 + V_1 s}{a_0} \right)^{-A} \left[ \frac{A}{B_1} \sin \left( B_1 \ln \frac{a_0 + V_1 s}{a_0} \right) + \cos \left( B_1 \ln \frac{a_0 + V_1 s}{a_0} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Все величины здесь имеют те же значения, что и в полученном в п. 3 точном решении (3.25), а через  $B_1$  обозначена величина

$$B_1 = \frac{\alpha}{V_1^*} + \frac{\beta}{2\alpha} = \alpha h + \frac{\beta}{2\alpha} \quad (4.14)$$

*4.2. Сравнение приближенного решения с точным.* Как видно, приближенное выражение (4.13) для потенциала перемещений, полученное по методу Горна, отличается в области его справедливости  $D$  (рис. 1) от точного решения (3.25) только тем, что в него входит величина  $B_1$ , определенная формулой (4.14), вместо  $B$  в точном решении.

При сравнении точного и приближенного решений примем для коэффициента Пуассона грунта численное значение  $\nu = 0.3$ ; тогда параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , от которых зависят константы в уравнениях (3.25) и (4.13), принимают численные значения

$$\beta = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \approx 0.57, \quad \alpha = \sqrt{\beta(2-\beta)} = \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \approx 0.9 \quad (4.15)$$

Близость приближенного и точного решений демонстрируют графики радиальных и окружных напряжений, представленные на рис. 3, 4. Напряжения вычисляются в точке с координатой  $r = r_0 = 2a_0$  по формулам (2.5), (2.10) путем вполне элементарных, но довольно длинных выкладок, и даны как функции от аргумента  $T \in [1, 2]$ :

$$T = \left( \frac{a_0 + V_1 s}{a_0} \right) \Bigg|_{r=2a_0} = 1 + \frac{V_1}{c_1} (t^* - 1)$$

где  $t^* = \frac{t}{a_0/c_1} = c_1 t/a_0$  есть безразмерное время, отнесенное к времени прохождения первоначального радиуса полости объемной упругой волной и отсчитываемое от момента времени  $t_1^* = 1$  прибытия волны в точку  $r = 2a_0$  до момента  $t_2^* = \frac{a_0/V}{a_0/c_1} = c_1/V$  поглощения этой точки фронтом разрушения (расширяющейся полостью).

Изображенные на рис. 3, 4 графики радиальных и окружных напряжений относятся к значению параметра  $h = 1$  (или  $V_1/c_1 = 1$ ,  $V/c_1 = 0.5$ ), т.е. к случаю, когда  $h$  не является большим параметром и формально метод Горна не применим. При этом, сплошные линии соответствуют точному решению, а штриховые – приближенному. Тот

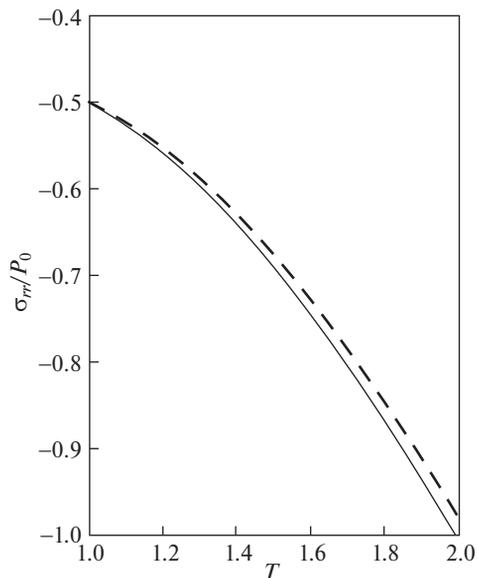


Рис. 3

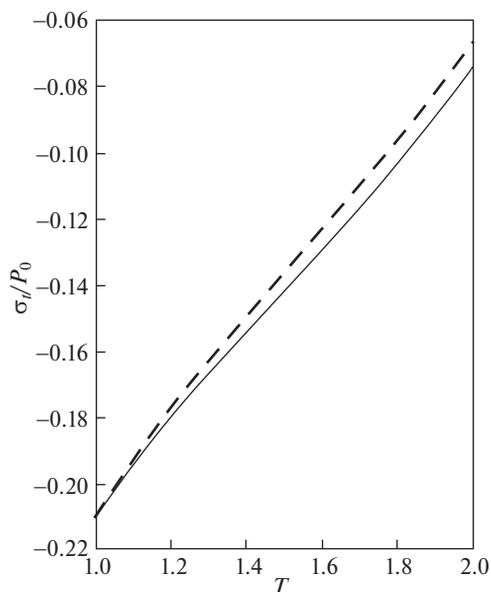


Рис. 4

факт, что даже в этом случае приближенное решение весьма близко к точному объясняется тем, что, согласно формулам (3.24) и (4.14),  $B \approx B_1$  и  $\tilde{\Phi}$  служит приближением для  $\Phi$ , если  $\beta/\alpha^2 h < 1$  или  $h > \beta/\alpha^2$ . Последнее условие приводит к тому, что для численных значений параметров (4.15) близость решений, на самом деле, имеет место при  $h > \approx 0.7$  или при  $V/c_1 < \approx 0.58$  в силу определения (4.6), а не только когда  $V/c_1 < 0.5$  и

метод Горна применим (рис. 1). Как показывают расчеты, для больших значений параметра  $h$  решения в напряжениях еще меньше отличаются друг от друга.

Работа является частью материала, доложенного на семинаре “Лаборатории прочности и разрушения материалов и конструкций” в Институте проблем механики РАН и семинаре по “Механике деформируемого твердого тела” в Институте механики Московского университета. Авторы выражают благодарность участникам этих семинаров, в особенности академику РАН Горячевой И.Г., профессору Шифрину Е.И. и профессору Тарлаковскому Д.В. за полезные замечания.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Achenbach J.D., Sun C.T.* Propagation of waves from a spherical surface of time-dependent radius // *J. Acoust. Soc. Am.* 1966. V. 40. № 4. P. 877–882.
2. *Bishop R.H.* Spherical shock waves from underground explosions, close-in phenomenon of buried explosions. Final Rept. SC-4907. Scandia Corporation. 1963. P. 115–158.
3. *Chadwick P., Cox A.D., Hopkins H.G.* Mechanics of deep underground explosions // *Philos. Trans. Roy Soc. London. Ser. A.* 1964. V. 236. № 1070. P. 235–300. = Чедвик П., Кокс А., Гопкинс Г. Механика глубоких подземных взрывов. М.: Мир, 1966. 126 с.
4. *Родионов В.Н., Адушкин В.В., Костюченко В.Н., Николаевский В.Н., Ромашов А.Н., Цветков В.М.* Механический эффект подземного взрыва. М.: Недра, 1971. 224 с.
5. *Rodean H.C.* Nuclear-explosion seismology. Washington: US Atomic Energy Commission, 1971. 156 p. = Родин Г. Сейсмология ядерных взрывов. М.: Мир, 1974. 192 с.
6. *Werth G.C., Herbst R.F.* Comparison of amplitudes of seismic waves from nuclear explosions in four mediums // *J. Geophys. Res.* 1963. V. 68. № 5. P. 1463–1475.
7. *Haskell N.A.* Analytical approximation for the elastic radiation from a contained underground explosion // *J. Geophys. Res.* 1967. V. 72. № 10. P. 2583–2587.
8. *Хамиду Х.* Динамическое расширение сферической полости в упругой среде (асимптотические методы). Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1997.
9. *Thomas T.Y.* Concepts from tensor analysis and differential geometry. N.-Y.: Academic Press, 1961. 120 p.
10. *Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П.* Задачи и упражнения по механике сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. 164 с.
11. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
12. *Eringen A.C.* Mechanics of continua. N.-Y.: Wiley, 1967. 502 p.
13. *Sokolnikoff I.S.* Mathematical theory of elasticity. N.-Y.: McGraw-Hill, 1946. 374 p.
14. *Favreau R.F.* Generation of strain waves in rock by an explosion in a spherical cavity // *J. Geophys. Res.* 1969. V. 74. № 17. P. 4267–4280.
15. *Дугарцыренов А.В.* Динамика напряженно-деформированного состояния горных пород при камуфлетном взрыве сосредоточенного заряда // Горный информационно-аналитический бюллетень (ГИАБ). 2007. № 4. С. 166–179.
16. *Ince E.L.* Ordinary differential equations. London: Longmans, Green and Co., 1927. 558 p. = Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ДНТБУ, 1939. 720 с.
17. *Цытович Н.А.* Механика грунтов. М.–Л.: Гос. изд-во лит-ры по строительству и архитектуре, 1951. 528 с.
18. *Hopkins H.G.* Dynamic expansion of spherical cavities in metals. In: *Progress in Solid Mechanics*, Vol. I. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1960. P. 84–164. = Гопкинс Г. Динамические неупругие деформации металлов. М.: Мир, 1964. 160 с.
19. *Horn J.* Uber eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkurlichen Parameter // *Math. Annalen.* 1899. Bd. 52. Heft 1. S. 271–292.
20. *Collected Papers of sir Harold Jeffreys on geophysics and other sciences.* Vol. 6. London: Gordon and Breach, 1977. 622 p.
21. *Jeffreys H.* Asymptotic approximations. Oxford: Clarendon Press, 1962. 144 p.
22. *Kamke E.* Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen I. Leipzig: Becker & Erter Verlag, 1944. 666 s. = Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1951. 828 с.

УДК 539.376:539.4.014.13

## РЕЛАКСАЦИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОВЕРХНОСТНО УПРОЧНЕННОМ ЦИЛИНДРЕ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ ЖЕСТКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ЛИНЕЙНЫЕ И УГЛОВЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

© 2021 г. Е. Е. Деревянка<sup>а</sup>, В. П. Радченко<sup>а,\*</sup>, В. В. Цветков<sup>а,\*\*</sup>

<sup>а</sup> Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

\*e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

\*\*e-mail: vi.v.tsvetkoff@gmail.com

Поступила в редакцию 28.05.2020 г.

После доработки 18.06.2020 г.

Принята к публикации 13.07.2020 г.

Разработан метод решения краевой задачи релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненном сплошном цилиндре в условиях ползучести при жестко зафиксированных первоначально заданных осевой деформации и угле закручивания, включающий феноменологическую методику реконструкции напряженно-деформированного состояния после упрочнения и его кинетику на фоне релаксации осевой нагрузки и крутящего момента вследствие ползучести. В качестве иллюстрации метода рассмотрен цилиндрический образец из сплава ЖСБКП после пневмодробеструйной обработки. Выполнено детальное исследование релаксации остаточных напряжений для различных комбинаций первоначально заданных и зафиксированных осевой и угловой деформаций при температуре 900°С. Приведены результаты сравнительного анализа полученных данных с данными по релаксации остаточных напряжений в условиях чисто температурного нагружения при отсутствии механических нагрузок.

*Ключевые слова:* остаточные напряжения, поверхностное пластическое упрочнение, сплошной цилиндрический образец, первоначальные осевые и угловые деформации, жесткое защемление, ползучесть, релаксация

DOI: 10.31857/S057232992103003X

**Введение.** Поверхностное упрочнение деталей, являющееся штатной технологией в авиадвигателестроении, энергетическом машиностроении, самолетостроении и других отраслях, является одним из методов повышения показателей надежности изделий (предела сопротивления усталости, износостойкости, микротвердости и других характеристик). Положительное влияние поверхностного пластического деформирования связывают с созданием в тонком приповерхностном слое сжимающих остаточных напряжений (ОН), с которыми и связывают повышение ресурса упрочненных деталей по сравнению с неупрочненными. Это показано в необозримом количестве публикаций отечественных и зарубежных исследователей, например, в [1–4] и многих других.

Одной из важных задач является реконструкция напряженно-деформированного состояния после процедуры упрочнения, поскольку эта информация является решающей при разработке методов решения краевых задач для упрочненных элементов конструкций в условиях ползучести. Различные экспериментальные методы применительно к цилиндрическим и призматическим деталям позволяют определить распре-

деление лишь одной или двух компонент тензора ОН по глубине упрочненного слоя [2], но не позволяют установить распределение компонент тензора остаточных пластических деформаций (ПД).

Развитие теоретических методов реконструкции полей ОН и ПД на основе непосредственного моделирования конкретного технологического процесса, в первую очередь, связано с появлением мощных вычислительных комплексов, что и стимулировало появление ряда работ, в которых рассмотрено решение контактных динамических и квазистатических упругопластических задач [5–7]. Однако учесть в полном объеме все параметры технологий упрочнения поверхности деталей практически невозможно. Поэтому полученные результаты носят преимущественно качественный характер.

Второй важной проблемой является оценка кинетики наведенных остаточных напряжений в поле температурно-силовых (эксплуатационных) нагрузок, поскольку вследствие деформации ползучести происходит релаксация ОН. Как следствие, возникает необходимость разработки методов решения краевых задач с начальным напряженно-деформированным состоянием в условиях ползучести. Анализ публикаций свидетельствует, что данная тематика находится в стадии становления и развивается в основном в научной школе Самарского государственного технического университета при участии авторов настоящей статьи. Выделим здесь работу [8], в которой реализован метод решения краевой задачи релаксации ОН в упрочненном цилиндре при действии растягивающей осевой нагрузки и крутящего момента. Однако в прикладных исследованиях возникают задачи и другого рода, когда поверхностно упрочненные стержни в начальный момент получают осевые и окружные деформации, которые в дальнейшем жестко фиксируются. Техническим примером такого режима эксплуатации являются бандажированные рабочие лопатки компрессора и турбины авиационного двигателя (разумеется, с более сложной геометрической конструкцией). В связи с вышеизложенным целью настоящей работы является обобщение метода, предложенного в [8], на случай релаксации ОН в сплошном поверхностно упрочненном цилиндрическом образце в условиях ползучести при жестких (зафиксированных) ограничениях на линейные и угловые деформации.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается сплошной цилиндрический образец радиуса  $R$ , в поверхностном слое которого методом поверхностного пластического деформирования наведены ОН и ПД при нормальной (“комнатной”) температуре  $T = T_0$ . На первом этапе решается обратная краевая задача реконструкции полей ОН и ПД по частично известной (экспериментальной) информации об одной или двух (в зависимости от технологии упрочнения) компонентах тензора ОН. Далее происходит изменение температуры до рабочей  $T = T_1 (T_1 > T_0)$ ; прикладываются осевая растягивающая нагрузка  $F_0$  и крутящий момент  $M_0$ , приводящие к линейной однородной осевой и угловой деформациям (соответственно), которые в дальнейшем жестко фиксируются. Затем решается краевая задача о релаксации усилий  $F = F(t)$  ( $F(0) = F_0$ ) и  $M = M(t)$  ( $M(0) = M_0$ ), на фоне которой происходит релаксация ОН в приповерхностном слое цилиндра вследствие ползучести материала. Рассматривается осесимметричная постановка в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$ , поэтому все компоненты тензоров напряжений и деформаций зависят лишь от координаты  $r \in [0, R]$ .

**2. Реконструкция напряженно-деформированного состояния в сплошном цилиндре после процедуры упрочнения.** Первый этап решения поставленной задачи состоит в реконструкции полей ОН и ПД после упрочнения. Обозначим через  $\sigma_r^{\text{res}}$ ,  $\sigma_\theta^{\text{res}}$ ,  $\sigma_z^{\text{res}}$  радиальную, окружную и осевую компоненты тензора ОН, а через  $q_r$ ,  $q_\theta$ ,  $q_z$  соответствующие компоненты тензора ПД. Для определения ОН и ПД воспользуемся феноменологическим методом [9], исходной информацией для которого в зависимости

сти от технологии упрочнения являются одна ( $\sigma_\theta^{\text{res}}$ ) или две ( $\sigma_\theta^{\text{res}}$  и  $\sigma_z^{\text{res}}$ ) экспериментально определенные эпюры ОН по глубине упрочненного слоя.

Как и для любой обратной краевой задачи, необходимо ввести ряд ограничений на компоненты тензоров ОН и ПД для получения единственного решения. В данном методе вводятся следующие гипотезы: 1) недиагональные компоненты тензоров ОН и ПД на порядок и более меньше (по модулю) нормальных компонент [10], поэтому ими можно пренебречь; 2) осевая и окружная компоненты тензора ПД пропорциональны:  $q_z(r) = \alpha q_\theta(r)$ , где  $\alpha$  – феноменологический параметр анизотропии упрочнения [9]; 3) в области сжатия материала вторичные пластические деформации отсутствуют. Тогда для компонент тензоров ОН и ПД справедливы следующие соотношения [9]:

$$\sigma_r^{\text{res}}(r) = \frac{1}{r} \int_0^r \sigma_\theta^{\text{res}}(\xi) d\xi \quad (2.1)$$

$$q_\theta(r) = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E_0(1+\alpha\mu)^2} r^{-\nu} \int_0^r \xi^{\nu-1} [\sigma_r^{\text{res}}(\xi) + (1+\alpha)\sigma_\theta^{\text{res}}(\xi)] d\xi - \frac{1+\mu}{E_0(1+\alpha\mu)} [(1-\mu)\sigma_\theta^{\text{res}}(r) - \mu\sigma_r^{\text{res}}(r)], \quad \nu = \frac{2+\alpha}{1+\alpha\mu} \quad (2.2)$$

$$q_z(r) = \alpha q_\theta(r), \quad q_r(r) = -(1+\alpha)q_\theta(r) \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_z^0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \{q_z(r) - \frac{\mu}{E_0} [\sigma_r^{\text{res}}(r) + \sigma_\theta^{\text{res}}(r)]\} dr \quad (2.4)$$

$$\sigma_z^{\text{res}}(r) = E_0[\varepsilon_z^0 - q_z(r)] + \mu[\sigma_r^{\text{res}}(r) + \sigma_\theta^{\text{res}}(r)] \quad (2.5)$$

где  $E_0$  – модуль Юнга материала при температуре упрочнения  $T_0$ ,  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Искомые компоненты тензоров ОН и ПД в поверхностно упрочненном сплошном цилиндре определяются в следующей последовательности:

$$\sigma_\theta^{\text{res}}(r), \quad \alpha \xrightarrow{(2.1)} \sigma_r^{\text{res}}(r) \xrightarrow{(2.2)} q_\theta(r) \xrightarrow{(2.3)} q_r(r) \quad (2.6)$$

$$q_z(r) \xrightarrow{(2.4)} \varepsilon_z^0 \xrightarrow{(2.5)} \sigma_z^{\text{res}}(r)$$

здесь над стрелками указаны номера формул, по которым рассчитываются соответствующие величины.

Исходной информацией для применения схемы (2.6) являются зависимость для окружной компоненты тензора остаточных напряжений  $\sigma_\theta^{\text{res}} = \sigma_\theta^{\text{res}}(r)$  и параметр анизотропии упрочнения  $\alpha$ .

Экспериментальными методами распределение компоненты  $\sigma_\theta^{\text{res}} = \sigma_\theta^{\text{res}}(r)$  можно определить лишь в тонком поверхностном слое. Для получения непрерывных полей ОН и ПД по схеме (2.6) эту информацию необходимо экстраполировать на всю область интегрирования  $r \in [0, R]$ . Для этого предлагается следующая аппроксимация:

$$\sigma_\theta^{\text{res}}(r) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp\left(-\frac{(R-h^*-r)^2}{b^2}\right) \quad (2.7)$$

где  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $h^*$ ,  $b$  – параметры, подлежащие определению.

Методика идентификации параметра  $\alpha$  также изложена в работе [9], причем для методов изотропного упрочнения поверхности (пневмодробеструйная обработка, ультразвуковое упрочнение и др.) величина  $\alpha = 1$  и эпюры напряжений  $\sigma_\theta^{\text{res}} = \sigma_\theta^{\text{res}}(r)$  и

$\sigma_z^{\text{res}} = \sigma_z^{\text{res}}(r)$  практически совпадают, а для методов анизотропного упрочнения (обкатка роликом, алмазное выглаживание и др.) параметр  $\alpha \neq 1$  и наблюдается существенное различие эпюр осевой и окружной компонент тензора ОН в упрочненном слое [9].

**3. Определение характеристик напряженно-деформированного состояния в поверхности упрочненного сплошном цилиндре при температурно-силовом нагружении.** Вначале рассмотрим режим температурного нагружения цилиндрического образца с температуры при упрочнении  $T_0$  (как правило, “комнатная” температура), при которой модуль Юнга материала равен  $E_0$ , до температуры “эксплуатации”  $T_1$  ( $T_1 > T_0$ ), при которой в материале развиваются деформации ползучести и которой соответствует значение модуля Юнга  $E_1$  ( $E_1 < E_0$ ).

Предполагая, что при температурном нагружении дополнительных пластических деформаций не возникает, а, следовательно, величина  $q_\theta = q_\theta(r)$  не зависит от температуры, запишем соотношение (2.2) для момента полного прогрева образца до температуры  $T_1$  в виде

$$q_\theta(r) = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E_1(1+\alpha\mu)^2} r^{-\nu} \int_0^r \xi^{\nu-1} \frac{E_1}{E_0} [\sigma_r^{\text{res}}(\xi) + (1+\alpha)\sigma_\theta^{\text{res}}(\xi)] d\xi - \frac{1+\mu}{E_1(1+\alpha\mu)} \frac{E_1}{E_0} [(1-\mu)\sigma_\theta^{\text{res}}(r) - \mu\sigma_r^{\text{res}}(r)] \quad (3.1)$$

Соотношение (3.1) по форме будет аналогично (2.2), если все эпюры ОН после процедуры упрочнения умножить на коэффициент  $E_1/E_0$ . Таким образом, получаем распределения ОН при температуре  $T_1$ . Отметим, что температурные деформации здесь не учитываются, поскольку мы условно считаем, что прогрев образца выполнен мгновенно, а однородное температурное поле приводит лишь к объемному изменению геометрии образца и не влияет на напряженное состояние.

Теперь рассмотрим нагружение упрочненного цилиндра в момент времени  $t = 0 + 0$  осевой силой  $F_0$  и крутящим моментом  $M_0$ . Предполагается, что при повторной нагрузке цилиндрического образца (после упрочнения) его материал находится в упругой области. При этом происходит ступенчатое изменение осевого и касательного напряжений на величину “рабочих” напряжений, возникающих за счет внешних нагрузок, и напряженное состояние задается соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, 0+0) &= \frac{E_1}{E_0} \sigma_z^{\text{res}}(r) + \frac{F_0}{\pi R^2}, & \sigma_\theta(r, 0+0) &= \frac{E_1}{E_0} \sigma_\theta^{\text{res}}(r) \\ \sigma_r(r, 0+0) &= \frac{E_1}{E_0} \sigma_r^{\text{res}}(r), & \tau(r, 0+0) &= \frac{M_0}{J} r \end{aligned} \quad (3.2)$$

а компоненты тензора полных деформаций будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(r, 0+0) &= \frac{1}{E_1} [(1+\mu)\sigma_i(r, 0+0) - \mu\sigma^*] + q_i(r) \quad (i = r, \theta, z) \\ \gamma(r, 0+0) &= \frac{\tau(r, 0+0)}{G_1}, & G_1 &= \frac{E_1}{2(1+\mu)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь и далее через  $\sigma_i = \sigma_i(r, t)$  и  $\varepsilon_i = \varepsilon_i(r, t)$  ( $i = r, \theta, z$ ) обозначены зависимости для компонент тензоров напряжений и полных деформаций от пространственной и временной координат;  $\sigma^* = \sigma_z(r, 0+0) + \sigma_\theta(r, 0+0) + \sigma_r(r, 0+0)$ ;  $\tau(r, t) = \sigma_{\theta z}(r, t)$  – касательное напряжение;  $\gamma(r, t) = 2\varepsilon_{\theta z}(r, t)$  – деформация сдвига;  $J = \pi R^4/2$  – момент

инерции сечения относительно оси цилиндра,  $G_1$  – модуль сдвига материала при температуре  $T_1$ .

Для описания процесса релаксации остаточных напряжений, осевой силы и крутящего момента необходимо решить краевую задачу ползучести поверхностно упрочненного цилиндра при температуре  $T_1$  в режиме жесткого ограничения на осевую деформацию и угол поворота с начальным напряженно-деформированным состоянием, определяемым напряжениями (3.2) и деформациями (3.3).

**4. Методика решения краевой задачи ползучести поверхностно упрочненного сплошного цилиндра, нагруженного осевой силой и крутящим моментом, в режиме жесткого ограничения на линейные и угловые деформации.** Опишем процесс релаксации остаточных напряжений, осевой силы  $F = F(t)$  и крутящего момента  $M = M(t)$  в процессе ползучести поверхностно упрочненного сплошного цилиндра в режиме жесткого нагружения, когда заданы полная осевая деформация  $\varepsilon_z(r, t) = \varepsilon_z(r, 0 + 0) = \varepsilon_z^* = \text{const}$  и относительный угол закручивания  $\varphi(t) = \varphi(0 + 0) = \varphi^* = \text{const}$ . Постановка соответствующей краевой задачи ползучести включает в себя следующие соотношения:

– уравнения равновесия:

$$r \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} + \sigma_r(r, t) = \sigma_\theta(r, t) \quad (4.1)$$

$$2\pi \int_0^R \sigma_z(r, t) r dr = F(t) \quad (4.2)$$

$$2\pi \int_0^R \tau(r, t) r^2 dr = M(t) \quad (4.3)$$

– уравнение совместности деформаций:

$$r \frac{d\varepsilon_\theta(r, t)}{dr} + \varepsilon_\theta(r, t) = \varepsilon_r(r, t) \quad (4.4)$$

– гипотеза плоских сечений:

$$\varepsilon_z(r, t) = \varepsilon_z^* \quad (4.5)$$

– гипотеза прямых радиусов:

$$\gamma(r, t) = r\varphi^*, \quad (4.6)$$

где  $\varphi^* = \gamma(r, 0 + 0)/r = \text{const}$ ;

– краевые условия:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} = 0, \quad \sigma_r(R, t) = 0 \quad (4.7)$$

Поскольку время  $t$  входит в соотношения (4.1)–(4.7) параметрически, здесь и в дальнейшем для производных компонент тензоров напряжений и деформаций по  $r$  используется оператор полной производной.

Опишем процесс релаксации остаточных напряжений вследствие ползучести при температуре  $T = T_1$ . Запишем соотношения для компонент тензора полных деформаций в виде

$$\varepsilon_i(r, t) = e_i(r, t) + q_i(r) + p_i(r, t) \quad (i = r, \theta, z) \quad (4.8)$$

$$\gamma(r, t) = \gamma^e(r, t) + \gamma^p(r, t) \quad (4.9)$$

где  $e_z, e_\theta, e_r, \gamma^e$  – компоненты тензора упругих деформаций;  $p_z, p_\theta, p_r, \gamma^p$  – компоненты тензора деформаций ползучести. При этом в начальный момент времени компоненты тензора деформаций ползучести равны нулю для всех  $r \in [0, R]$ :

$$p_z(r, 0) = 0; \quad p_\theta(r, 0) = 0; \quad p_r(r, 0) = 0; \quad \gamma^p(r, 0) = 0$$

Задача сводится к разрешению системы (4.8), (4.9) относительно компонент тензора напряжений.

Запишем закон Гука для упругих деформаций:

$$e_i(r, t) = \frac{1}{E_1} [(1 + \mu) \sigma_i(r, t) - \mu \bar{\sigma}] \quad (i = r, \theta, z) \quad (4.10)$$

$$\gamma^e(r, t) = \frac{1}{G_1} \tau(r, t) \quad (4.11)$$

где  $\bar{\sigma} = \sigma_z(r, t) + \sigma_\theta(r, t) + \sigma_r(r, t)$ .

Подставляя (4.5) и (4.10) при  $i = z$  в соотношение (4.8) при  $i = z$ , находим зависимость для осевой компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_z(r, t) = E_1 [\varepsilon_z^* - q_z(r) - p_z(r, t)] + \mu [\sigma_\theta(r, t) + \sigma_r(r, t)] \quad (4.12)$$

Применяя далее методику работы [8], в которой реализован метод решения краевой задачи релаксации ОН в упрочненном цилиндре при действии растягивающей осевой нагрузки и крутящего момента, с использованием (4.1), (4.4), (4.5), (4.12) в системе уравнений (4.8), (4.9) последовательно исключаются компоненты тензора напряжений  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_z$ . В итоге получаем неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно  $\sigma_r$ :

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r(r, t)}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} = g(r, t) \quad (4.13)$$

с правой частью

$$g(r, t) = \frac{E_1}{1 - \mu^2} \left[ \frac{2 + \alpha}{1 + \alpha} q_r(r) + p_r(r, t) - p_\theta(r, t) - \right. \\ \left. - r \left( \frac{dp_\theta(r, t)}{dr} + \mu \frac{dp_z(r, t)}{dr} \right) + \frac{r(1 + \alpha\mu)}{1 + \alpha} \frac{dq_r(r)}{dr} \right]$$

Решение уравнения (4.13) при граничных условиях (4.7) записывается следующим образом:

$$\sigma_r(r, t) = - \int_r^R \frac{1}{\xi^3} \int_0^\xi g(\eta, t) \eta d\eta d\xi$$

При известном  $\sigma_r$  из уравнения (4.1) находим зависимость для окружной компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_\theta(r, t) = \frac{d}{dr} [r \sigma_r(r, t)]$$

Зная величины  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  можно определить  $\sigma_z$  по формуле (4.12) и далее – значение  $F(t)$  из уравнения (4.2).

Подставляя (4.11) в соотношение (4.9) с учетом (4.6), получаем распределение касательной компоненты тензора напряжений:

$$\tau(r, t) = G_1 [r \varphi^* - \gamma^p(r, t)]$$

после чего определяем величину  $M(t)$  из соотношения (4.3).

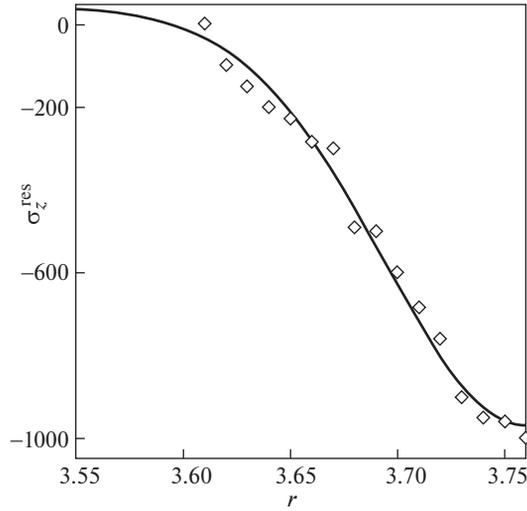


Рис. 1

**5. Результаты расчетов и их анализ.** В модельных расчетах использовались цилиндрические образцы из сплава ЖС6КП радиуса  $R = 3.76$  мм ( $r \in [0, 3.76]$  мм), упрочненные пневмодробеструйной обработкой поверхности, которая является штатной технологией упрочнения деталей из этого сплава, например, в двигателестроении.

В расчетах полагалось  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ,  $T_1 = 900^\circ\text{C}$ ,  $E_0 = 2 \times 10^5$  МПа,  $E_1 = 1.364 \times 10^5$  МПа,  $\mu = 0.3$ . В качестве исходной информации использовались экспериментальные данные для компоненты  $\sigma_z^{\text{res}} = \sigma_z^{\text{res}}(r)$  в поверхностном слое, приведенные в работе [8]. При пневмодробеструйной обработке поверхности коэффициент анизотропии упрочнения  $\alpha = 1$  и эпюры для окружных и осевых ОН близки. Поэтому для идентификации параметров аппроксимации (2.7) в первом приближении использовались экспериментальные данные для осевой компоненты тензора ОН (точки на рис. 1). Затем параметры  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  и  $b$  в (2.7) варьировались, и для каждого набора значений реализовывался алгоритм (2.6) до достижения минимума функционала среднеквадратического отклонения расчетных данных для  $\sigma_z^{\text{res}}$  от экспериментальных значений. В результате получены следующие значения параметров аппроксимации (2.7) для  $\sigma_\theta^{\text{res}}$ :  $\sigma_0 = 22.554$  МПа,  $\sigma_1 = 1027.454$  МПа и  $b = 9.313 \times 10^{-2}$  мм. Величина  $h^* = 0$  изначально, поскольку  $h^* \neq 0$  только в случае, если экстремум зависимости  $\sigma_\theta^{\text{res}} = \sigma_\theta^{\text{res}}(r)$  находится не на поверхности, а в подповерхностном слое [9]. На рис. 1 сплошной линией показана зависимость для  $\sigma_z^{\text{res}} = \sigma_z^{\text{res}}(r)$  (МПа).

Для моделирования процесса релаксации ОН и усилий  $F = F(t)$  и  $M = M(t)$  использовалась теория установившейся ползучести:

$$\dot{\rho}_{ij} = \frac{3}{2} c S^{m-1} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (5.1)$$

где  $S$  – интенсивность напряжений;  $c$ ,  $m$  – константы материала. Для сплава ЖС6КП при температуре  $T_1 = 900^\circ\text{C}$  имеем [8]:  $c = 1.5 \times 10^{-20}$  (МПа) $^{-m}$  ч $^{-1}$ ,  $m = 6.62$ .

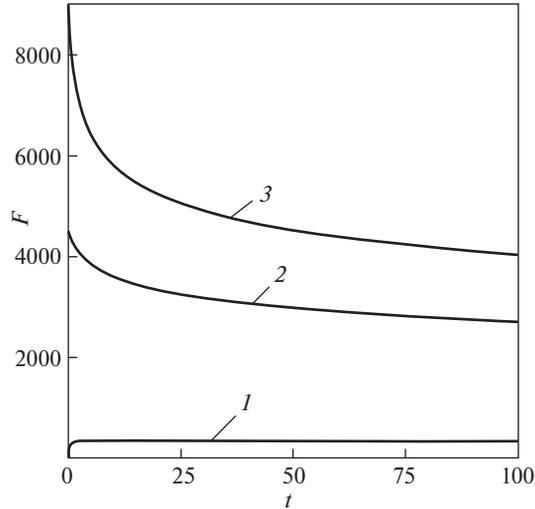


Рис. 2

Отметим, что задача ползучести решалась численно известным методом – “шагами по времени” [8], при этом соотношения (5.1) интегрировались по методу Эйлера.

Расчеты выполнены при различных комбинациях первоначальных растягивающей нагрузки  $F_0$  и закручивающего момента  $M_0$ . На рис. 2 приведена типичная картина релаксации осевого усилия  $F = F(t)$  ( $t \in [0, 100]$  ч) при фиксированном значении первоначального угла закручивания моментом  $M_0 = 16700 \text{ Н} \cdot \text{мм}$ . Сплошные линии 1, 2, 3 соответствуют значениям  $F = F(t)$  при первоначальных значениях  $F_0 = \{0, 4441.5, 8882.9\} \text{ Н}$  соответственно.

На рис. 3 в качестве иллюстрации результатов расчетов сплошными линиями приведено типичное распределение  $\sigma_z = \sigma_z(r, t)$  (МПа) при  $F_0 = 8882.9 \text{ Н}$ ,  $M_0 = 16700 \text{ Н} \cdot \text{мм}$  в различные моменты времени. Цифра 1 соответствует исходному состоянию после упрочнения ( $t = 0 - 0$ ), цифра 2 – температурному нагружению, цифра 3 – силовому нагружению ( $t = 0 + 0$ ), цифры 4 и 5 – моментам времени  $t = 20$  ч и  $t = 100$  ч соответственно. Здесь же штриховыми линиями показано распределение этой же компоненты тензора ОН в условиях чистой термоэкспозиции при  $T_1 = 900^\circ\text{C}$ .

На рис. 4 сплошными линиями приведены зависимости для напряжения  $\sigma_z = \sigma_z(R, t)$  (МПа) на поверхности цилиндра после температурно-силового нагружения при  $t \in [0, 100]$  ч (цифры 1, 2, 3 соответствуют режимам нагружения на рис. 2). Здесь же для сравнения штриховой линией показана зависимость для этого же напряжения в условиях термоэкспозиции (чисто температурное нагружение при  $F_0 = 0$ ,  $M_0 = 0$  и  $T_1 = 900^\circ\text{C}$ ). Отметим, что для окружной компоненты происходит ступенчатое изменение ее величины лишь вследствие изменения температуры, а при приложении внешних силовых возмущений ступенчатого изменения  $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r, t)$  не происходит, в отличие от компоненты  $\sigma_z = \sigma_z(r, t)$ .

Детально выполненное параметрическое исследование задачи релаксации ОН  $\sigma_z$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_r$  показало несущественное влияние первоначально заданных (и жестко зафиксиро-

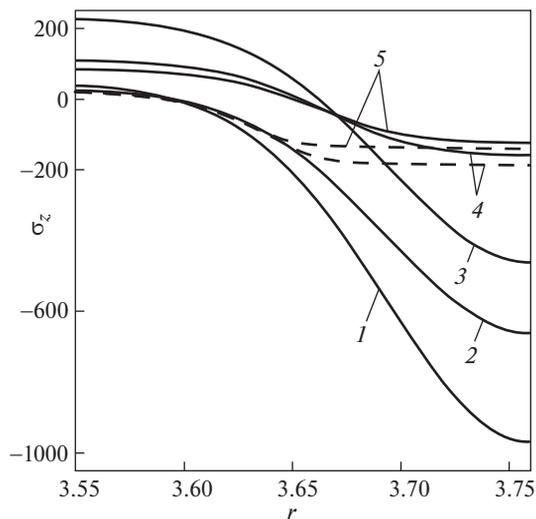


Рис. 3

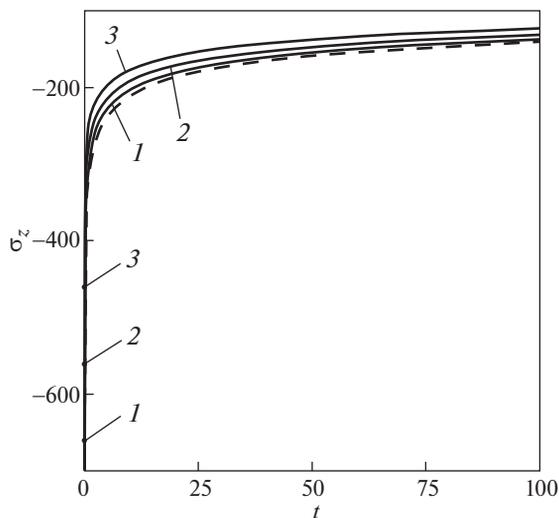


Рис. 4

рованных) упругих осевой и угловой деформаций на кинетику всех компонент тензора ОН.

**Выводы.** Разработана методика решения краевых задач релаксации ОН в поверхностно упрочненных сплошных цилиндрах в условиях ползучести с начальным напряженно-деформированным состоянием (НДС), вызванным заданными (и жестко зафиксированными) осевой и угловой деформациями. Анализ модельных расчетов для упрочненных образцов из сплава ЖС6КП при  $T = 900^\circ\text{C}$  показал незначительное влияние первоначального НДС на процесс релаксации ОН по отношению к случаю

чистой термоэкспозиции, что является позитивным фактором в прикладном плане с точки зрения инженерной практики, например, в авиадвигателестроении, где поверхностное пластическое упрочнение является штатной технологической операцией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00062).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сулима А.М., Шулов В.А., Ягодкин Ю.Д. Поверхностный слой и эксплуатационные свойства деталей машин. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
2. Павлов В.Ф., Кирпичёв В.А., Вакулюк В.С. Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочненных деталей по остаточным напряжениям. Самара: СНЦ РАН, 2012. 125 с.
3. Altenberger I., Nalla R.K., Sano Y., Wagner L., Ritchie R. O. On the effect of deep-rolling and laser-peening on the stress-controlled low- and high-cycle fatigue behavior of Ti-6Al-4V at elevated temperatures up to 550°C // Int. J. Fatigue. 2012. V. 44. P. 292–302.
4. Terres M.A., Laalai N., Sidhom H. Effect of nitriding and shot-peening on the fatigue behavior of 42CrMo4 steel: Experimental analysis and predictive approach // Mater. Des. 2012. V. 35. P. 741–748.
5. Келлер И.Э., Трофимов В.Н., Владыкин А.В., Плюснин В.В., Петухов Д.С., Виндокуров И.В. К вопросу о реконструкции остаточных напряжений и деформаций пластины после дробеструйной обработки // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 1. С. 40–64.
6. Jebahi M., Gakwaya A., Lévesque J., Mechri O., Ba K. Robust methodology to simulate real shot peening process using discrete-continuum coupling method // Int. J. Mech. Sci. 2016. V. 107. P. 21–33.
7. Gallitelli D., Boyer V., Gelineau M., Colaitis Y., Rouhaud E., Retraint D., Kubler R., Desvignes M., Barrallier L. Simulation of shot peening: From process parameters to residual stress fields in a structure // Comptes Rendus Mécanique. 2016. V. 344. № 4–5. P. 355–374.
8. Радченко В.П., Цветков В.В. Кинетика напряженно-деформированного состояния в поверхностно упрочненном цилиндрическом образце при сложном напряженном состоянии в условиях ползучести // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2014. № 1. С. 93–108.
9. Радченко В.П., Павлов В.Ф., Саушкин М.Н. Исследование влияния анизотропии поверхностного пластического упрочнения на распределение остаточных напряжений в полых и сплошных цилиндрических образцах // Вестник ПНИПУ. Механика. 2015. № 1. С. 130–147.
10. Радченко В.П., Павлов В.Ф., Саушкин М.Н. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в поверхностно упрочненных втулках с учетом остаточных касательных напряжений // Вестник ПНИПУ. Механика. 2019. № 1. С. 138–150.

УДК 531.36

## ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОИСКА АВТОРОТАЦИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

© 2021 г. Л. А. Климина<sup>а,\*</sup>, А. А. Мастерова<sup>а</sup>, В. А. Самсонов<sup>а</sup>, Ю. Д. Селюцкий<sup>а</sup>

<sup>а</sup> НИИ механики МГУ, Москва, Россия

\*e-mail: klimina@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 20.05.2020 г.

После доработки 14.06.2020 г.

Принята к публикации 03.07.2020 г.

Рассматривается механическая система с двумя вращательными степенями свободы. Математическая модель представлена в форме динамической системы четвертого порядка. Предложен численно-аналитический итерационный метод поиска близких к периодическим решений, соответствующих режимам авторотации механической системы. В качестве нулевого приближения используются неподвижные точки (в том числе седла) системы, усредненной по двум углам. На каждой итерации численно строятся периодические решения двух вспомогательных подсистем с использованием подхода, родственного методу Андронова–Понтрягина. При условии сходимости метода получается набор периодических функций, которые предположительно приближенно описывают близкие к периодическим траектории, в частности, квазипериодические. Обсуждаются условия применимости подхода. Предложенный метод проиллюстрирован на примере отыскания авторотационных режимов двух взаимодействующих роторов Савониуса.

*Ключевые слова:* усреднение по двум углам, метод Андронова–Понтрягина, численно-аналитический метод, квазипериодическое решение, авторотация, тело в потоке среды

DOI: 10.31857/S0572329921030065

**1. Введение.** Рассмотрим автономную механическую систему с двумя вращательными степенями свободы. В частности, такие системы возникают при моделировании двухроторных ветроэнергетических установок. Существенную фундаментальную и прикладную значимость имеет описание установившихся движений таких систем.

Пусть требуется найти режимы движения, при которых по обеим угловым координатам происходит авторотация. Под авторотацией будем подразумевать режим движения, на котором обе угловые скорости сколь угодно долго не меняют знак (для системы с одной степенью свободы термин “авторотация” введен, например, в [1]).

Рассмотрим случай, когда обе угловые координаты явно входят в уравнения движения. Соответствующая автономная динамическая система имеет четвертый порядок. Режимам авторотации могут отвечать периодические, а также близкие к периодическим решения динамической системы.

Для поиска периодических решений можно принять за новое время одну из угловых координат и рассмотреть задачу поиска периодического (по этой координате) решения неавтономной динамической системы. Тогда в случае наличия соответствующего малого параметра можно использовать классический метод усреднения [2]. Если

же малый параметр отсутствует, можно использовать, например, обобщение [3] метода усреднения [2] или другие методы поиска периодических решений неавтономных динамических систем: метод пристрелки с применением прямого численного интегрирования, проекционные методы, методы, основанные на продолжении по параметру решений порождающей системы, и другие подходы [4–8].

В данной работе остановимся на задаче поиска режимов авторотации, которым отвечают не периодические, а в некотором смысле близкие к периодическим, например, квазипериодические решения динамической системы. Если при этом обе угловые скорости можно считать медленными переменными, а углы – быстрыми, то естественно в качестве первого приближения для авторотаций рассмотреть неподвижные точки системы, усредненной по двум углам (как, например, в [9] для задачи о вращении тела в среде). Тем самым, на первом этапе задача сводится к рассмотрению “порождающей системы”, в которой обе координаты циклические. Подробно такой подход описан в работах [2, 10–14].

При отсутствии малого параметра можно попытаться использовать неподвижные точки “порождающей” системы, чтобы при помощи численно-аналитических методов искать установившиеся решения полной системы “вблизи” таких точек. На практике этот подход хорошо работает для многих задач. Например, в работе [15] он реализован на основе продолжения по параметру и метода сечений Пуанкаре. При этом обнаружены не только аттракторы, но и такие квазипериодические решения, которые соответствуют седловым точкам усредненной системы и не являются притягивающими ни в прямом, ни в обратном времени.

Отметим, что систематизированный анализ методов поиска квазипериодических решений и описание соответствующих исторических фактов приведены в [16]. При этом выделены такие направления, как метод спектрального баланса [17, 18], который расширяет метод гармонического баланса (Фурье–Галеркина); метод обобщенных сечений Пуанкаре [19]; подходы, опирающиеся на вычисление инвариантных торов, в том числе метод ускоренной сходимости [20, 21], непрерывная по Липшицу аппроксимация нормального расслоения [22], естественная параметризация [16, 23]. Помимо этого можно привести примеры относительно новых подходов: метод гармонического баланса с переменными коэффициентами [24]; комбинация метода гармонического баланса и продолжения по длине дуги [25]; комплексификация с выделением быстрой и медленной компонент и усреднением [26], продолжение по параметру порождающего решения усредненной системы [15], комбинаторно-топологический анализ [27], численные алгоритмы построения седловых инвариантных торов [28].

В настоящей работе предлагается метод поиска близкого к периодическому решению, “порожденного” неподвижной точкой усредненной системы, но при этом используется не численное продолжение по параметру, а процедура, сочетающая усреднение и итерационный алгоритм построения периодических решений, предложенный в [29]. Наличие малого параметра не предполагается. В результате применения метода формируется набор торов в фазовом пространстве; около каждого такого тора можно ожидать существования близкой к периодической траектории.

Метод отличается простотой численной реализации по сравнению с перечисленными выше подходами. Но при этом он применим только к системам определенного вида.

Рассматривается пример применения предложенной методики для отыскания авторотаций в модели ветроэнергетической установки, состоящей из двух соосных роторов Савониуса. При этом для описания зависимости аэродинамического момента, действующего на ротор Савониуса, от угла поворота ротора используется функция, построенная на основе аппроксимации экспериментальных данных [30]. Найдены приближения для режимов авторотации ветротурбины. Дана оценка скорости сходимости метода.

**2. Постановка задачи.** Рассматривается автономная неконсервативная механическая система с двумя вращательными степенями свободы. Пусть в безразмерных переменных динамика системы описывается уравнениями следующего вида (точкой обозначена производная по безразмерному времени):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_i &= \omega_i, \quad i = 1, 2 \\ \dot{\omega}_1 &= a(f_1(\varphi_1, \omega_1) - \omega_2 q_1(\varphi_1, \omega_1)) \\ \dot{\omega}_2 &= a(f_2(\varphi_2, \omega_2) - \omega_1 q_2(\varphi_2, \omega_2)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $\varphi_i$  – обобщенные координаты (углы),  $\omega_i$  – соответствующие обобщенные скорости (угловые скорости);  $a$  – параметр, характеризующий инерционные свойства, который рассматривается как бифуркационный параметр модели и не предполагается малым. Все функции в правой части  $2\pi$ -периодические по переменным  $\varphi_i$ . Дополнительно предположим, что  $\omega_i q_i(\varphi_i, \omega_i) > 0$  при  $\omega_i \neq 0$ .

Уравнения вида (2.1) возникают, например, в некоторых задачах ветроэнергетики. Одна из таких задач будет рассмотрена подробно далее в примере реализации метода.

Задача состоит в том, чтобы приближенно описать посредством периодических функций те траектории системы (2.1), которые в некотором смысле близки к периодическим, например, являются квазипериодическими. Будем рассматривать систему (2.1) в области  $G = \{\omega_1 \in [A_1, B_1], \omega_2 \in [A_2, B_2]\}$  фазового пространства, где  $A_i, B_i$  – некоторые положительные значения. Случаи, когда обе или одна из переменных  $\omega_i$  отрицательны, можно рассмотреть аналогично. Близким к периодическим траекториям, расположенным в области  $G$ , отвечают авторотации механической системы.

Будем искать траектории близкие к периодическим, но не являющиеся периодическими.

**3. Система нулевого приближения.** Рассмотрим вспомогательную усредненную систему вида:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= a(F_1(\Omega_1) - \Omega_2 Q_1(\Omega_1)), \quad F_i(\Omega_i) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f_i(\varphi, \Omega_i) d\varphi \\ \dot{\Omega}_2 &= a(F_2(\Omega_2) - \Omega_1 Q_2(\Omega_2)), \quad Q_i(\Omega_i) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} q_i(\varphi, \Omega_i) d\varphi \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $\Omega_i$  отвечают переменным  $\omega_i$  системы (2.1). Функции  $F_i(\Omega_i)$  и  $Q_i(\Omega_i)$  – усредненные по соответствующим углам слагаемые правой части системы (2.1).

Отметим, что, по крайней мере, при  $a \ll 1$  можно установить соответствие между поведением переменных  $\omega_i$  в системе (2.1) и переменных  $\Omega_i$  в системе (3.1). При  $a \ll 1$  в области  $G$  оба угла  $\varphi_i$  являются быстрыми переменными, а безразмерные угловые скорости  $\omega_i$  – медленными. Формальное усреднение по быстрым переменным (без учета влияния резонансов) приводит к системе (3.1). Более того, и в окрестности резонансного соотношения частот усреднение тоже приводит к системе (3.1). Это легко показать, следуя методике, описанной в [10, 13]: в окрестности резонанса можно ввести дополнительную медленную переменную и усреднить систему по единственной быстрой переменной ([2]), при этом потребуется использовать то, что каждое слагаемое в правой части системы (2.1) зависит не более чем от одной из переменных  $\varphi_i$ . В работе [31] приведены соответствующие выкладки для частного случая системы (2.1).

В силу вышесказанного для системы (2.1) при  $a \ll 1$  и начальных условиях из области  $G$  вид усредненной системы вдали от резонансов и вблизи резонансов совпадает с (3.1). Следовательно, если для системы (2.1) выполнены условия теоремы [10], то на

интервале времени порядка  $a^{-1}$  отличие между решением  $\omega_i(t)$  системы (2.1) и решением  $\Omega_i(t)$  системы (3.1) с аналогичными начальными условиями имеет порядок  $a$ .

Вопрос о соответствии между решениями систем (2.1) и (3.1) на бесконечном интервале времени в общем случае остается открытым. Однако естественно рассмотреть неподвижные точки системы (3.1) в качестве нулевого приближения для периодических и близких к периодическим траекторий системы (2.1). Например, подобный подход используется в работах [9, 15].

**4. Описание метода построения приближенного решения.** Предложим метод построения приближения для близкого к периодическому решения  $(\hat{\varphi}_1(t), \hat{\varphi}_2(t), \hat{\omega}_1(t), \hat{\omega}_2(t))$  системы (2.1), если такое решение существует.

Метод состоит из трех этапов:

1) построение вспомогательных систем, отыскание  $2\pi$ -периодических по  $\varphi_i$  траекторий этих систем;

2) выбор тех периодических траекторий вспомогательных систем, которым могут соответствовать близкие к периодическим решения системы (2.1);

3) проверка наличия соответствия между найденными периодическими траекториями вспомогательных систем и близкими к периодическим траекториями системы (2.1).

Опишем каждый этап подробно.

*4.1. Вспомогательные системы и их периодические траектории.* Рассмотрим вспомогательную систему вида:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \omega_1 \\ \dot{\omega}_1 &= a(f_1(\varphi_1, \omega_1) - \Omega_2 q_1(\varphi_1, \omega_1)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь значение  $\Omega_2$  – константа (параметр). Система (4.1) относится к классу, рассмотренному в [29]. При изменении параметра  $\Omega_2$  происходит поворот векторного поля системы (4.1) (используем определение поворота поля, данное в [1, 32]). Будем рассматривать различные начальные значения  $\omega_{10}$  переменной  $\omega_1$ , лежащие на отрезке  $[A_1, B_1]$ .

Для заданного значения  $\omega_{10}$  будем искать такое значение  $\Omega_2 = \hat{\Omega}_2(\omega_{10})$ , при котором система (4.1) имеет  $2\pi$ -периодическую по  $\varphi_1$  траекторию  $\hat{\omega}_1(\varphi_1; \omega_{10})$ , проходящую через точку  $\varphi_1 = 0, \omega_1 = \omega_{10}$ . В силу свойств поворота векторного поля такое значение  $\Omega_2 = \hat{\Omega}_2(\omega_{10})$ , если существует, единственно. Для отыскания  $\hat{\Omega}_2(\omega_{10})$  можно воспользоваться разнообразными методами (в том числе методом стрельбы, методом гармонического баланса, методом [3]). В настоящей работе используем метод [29], который основан на построении последовательности “порождающих” гамильтоновых систем. На нулевой итерации метода [29] приближение для  $\hat{\Omega}_2(\omega_{10})$  задается следующим образом:

$$\hat{\Omega}_{20} = \left( \int_0^{2\pi} q_1(\varphi_1, \omega_{10}) d\varphi_1 \right)^{-1} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi_1, \omega_{10}) d\varphi_1$$

На каждой итерации алгоритма [29] приближение для значения  $\hat{\Omega}_2(\omega_{10})$  определяется как явная функция от  $\omega_{10}$ . Если для некоторых  $\omega_{10}$  не удалось построить  $\hat{\Omega}_2(\omega_{10})$  (не сошелся итерационный процесс, примененный для поиска), то при таких значениях аргумента функция  $\Omega_2 = \hat{\Omega}_2(\omega_{10})$  не определена.

В результате выполнения итерационной процедуры [29] для каждого  $\omega_{10}$ , при котором найдена  $\hat{\Omega}_2(\omega_{10})$ , будет построена соответствующая  $2\pi$ -периодическая по углу  $\varphi_1$

траектория  $\hat{\omega}_1(\varphi; \omega_{10})$  системы (4.1). Вычислим среднее по времени за период значение переменной  $\omega_1$  вдоль этой траектории (отметим, что это значение в общем случае отличается от среднего по углу):

$$\bar{\Omega}_1(\omega_{10}) = 2\pi \left( \int_0^{2\pi} (\hat{\omega}_1(\varphi; \omega_{10}))^{-1} d\varphi \right)^{-1}$$

Итак, пусть на отрезке  $\omega_{10} \in [A_1, B_1]$  построены функции  $\hat{\Omega}_2(\omega_{10})$  и  $\bar{\Omega}_1(\omega_{10})$  (возможно, не везде определены). Рассмотрим на плоскости  $(\Omega_1, \Omega_2)$  кривую  $\Gamma_1 = \{(\Omega_1, \Omega_2): \Omega_1 = \bar{\Omega}_1(\omega_{10}), \Omega_2 = \hat{\Omega}_2(\omega_{10})\}$ , заданную параметрически. В силу свойств поворота векторного поля кривую  $\Gamma_1$  можно представить в виде некоторой явной функции  $\Omega_2 = \tilde{\Omega}_2(\Omega_1)$ , при этом каждому значению аргумента  $\Omega_1$  отвечает не более одного значения  $\Omega_2$  (доказательство аналогично утверждению из [33]).

Аналогично рассмотрим различные начальные значения  $\omega_{20} \in [A_2, B_2]$  переменной  $\omega_2$ . Построим функции  $\hat{\Omega}_1(\omega_{20})$  и  $\bar{\Omega}_2(\omega_{20})$ , вводя для переменных  $\varphi_2$  и  $\omega_2$  систему, аналогичную (4.1), и используя для нее метод [29]. На плоскости  $(\Omega_1, \Omega_2)$  эти функции задают параметрически кривую  $\Gamma_2 = \{(\Omega_1, \Omega_2): \Omega_1 = \hat{\Omega}_1(\omega_{20}), \Omega_2 = \bar{\Omega}_2(\omega_{20})\}$ , которая может быть описана явной однозначной функцией  $\Omega_1 = \tilde{\Omega}_1(\Omega_2)$ .

*4.2. Выбор “особых” траекторий.* Каждая точка  $(\Omega_1^*, \Omega_2^*)$  пересечения кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , полученных в результате решения подзадачи, определяет пару  $(\omega_{10}^*, \omega_{20}^*)$ :

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_1(\omega_{10}^*) &= \hat{\Omega}_1(\omega_{20}^*) \\ \hat{\Omega}_2(\omega_{10}^*) &= \bar{\Omega}_2(\omega_{20}^*) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Пусть значения  $(\omega_{10}^*, \omega_{20}^*)$  удовлетворяют системе (4.2). Тогда можно ожидать, что в системе (2.1) существует близкая к периодической траектория  $(\hat{\varphi}_1(t), \hat{\varphi}_2(t), \hat{\omega}_1(t), \hat{\omega}_2(t))$ , проекции которой на плоскости  $(\varphi_i, \omega_i)$  расположены в окрестностях кривых  $\hat{\omega}_i(\varphi_i; \omega_{i0}^*)$ .

Рассмотрим некоторую пару  $(\Omega_1^{**}, \Omega_2^{**})$ , для которой определены функции  $\tilde{\Omega}_2(\Omega_1^{**})$ ,  $\tilde{\Omega}_1(\Omega_2^{**})$  и при этом точка  $(\Omega_1^{**}, \Omega_2^{**})$  не является общей точкой кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  (при  $a \ll 1$  это означает, что точка  $(\Omega_1^{**}, \Omega_2^{**})$  не является неподвижной точкой системы (3.1)). Можно ожидать, что в системе (2.1) отсутствует близкая к периодической траектория, на которой средние по времени значения переменных  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равны  $\Omega_1^{**}$  и  $\Omega_2^{**}$ . Это предположение основано на том, что соответствующее значение  $\Omega_2 = \tilde{\Omega}_2^{**}$  приводит во вспомогательной системе вида (4.1) к росту/убыванию среднего значения  $\Omega_1$  переменной  $\omega_1$ .

*Замечание 1.* Предложенный алгоритм не предназначен для отыскания периодических траекторий системы (2.1), поскольку учитывает только усредненные перевязки между уравнениями без учета согласованного изменения фазовых координат, свойственного периодическим решениям.

*Замечание 2.* Отметим, что в случае  $a \ll 1$  алгоритм [29] сводится только к нулевой итерации, которая представляет собой не что иное, как применение метода Андронова–Понтрягина [1, 34]. В результате при  $a \ll 1$  получаем:  $\bar{\Omega}_2(\omega_{10}) = \bar{\Omega}_{20}$ ,  $\bar{\Omega}_1(\omega_{10}) = \omega_{10}$  и аналогично для  $\omega_{20}$ . Таким образом, в случае  $a \ll 1$  кривая  $\Gamma_i$  представляет собой кривую, на которой обращается в нуль правая часть  $i$ -го уравнения системы (3.1). Тем са-

мым, при  $a \ll 1$  предложенный алгоритм сводится к поиску неподвижных точек системы (3.1).

*Замечание 3.* Пусть в точке  $(\Omega_1^*, \Omega_2^*)$  определены значения производных  $\alpha_1 = d\tilde{\Omega}_2/d\Omega_1$ ,  $\alpha_2 = d\tilde{\Omega}_1/d\Omega_2$ . Если выполнено  $\alpha_1 < 0$ ,  $\alpha_2 < 0$ ,  $\alpha_1\alpha_2 > 1$ , то будем условно называть такую точку  $(\Omega_1^*, \Omega_2^*)$  “притягивающим узлом”. При  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ ,  $\alpha_1\alpha_2 > 1$  будем условно называть такую точку  $(\Omega_1^*, \Omega_2^*)$  “неустойчивым узлом” (замена времени  $t$  на  $-t$  делает эту точку “притягивающим узлом”). При  $\alpha_1\alpha_2 < 1$  будем условно называть точку  $(\Omega_1^*, \Omega_2^*)$  “седлом”. В случае  $a \ll 1$  таким точкам отвечают неподвижные точки системы (3.1), в прямом смысле являющиеся точками соответствующих типов. Нетрудно показать, что неподвижные точки типа центра и фокуса в системе (3.1) отсутствуют.

*4.3. Этап проверки.* Пусть построены траектории  $\hat{\omega}_i(\varphi_i; \omega_{i0}^*)$  систем вида (4.1). Проверим численно, существует ли в системе (2.1) притягивающее близкое к периодическому решение, проекции которого на фазовые плоскости расположены в окрестностях кривых  $\hat{\omega}_i(\varphi_i; \omega_{i0}^*)$ . Выполним прямое численное интегрирование системы (2.1) с начальными условиями  $\varphi_i(0) = 0$ ,  $\omega_i(0) = \omega_{i0}^*$  на относительно большом интервале времени  $T$ . Проверим, остаются ли проекции решения вблизи кривых  $\hat{\omega}_i(\varphi_i; \omega_{i0}^*)$ .

Для проверки наличия в системе (2.1) близкой к периодической траектории, притягивающей в обратном времени, можно выполнить аналогичную процедуру, заменив в системе (2.1) время  $t$  на  $-t$ .

Отметим, что особый интерес представляет вопрос о решениях, “порожденных” седловыми точками усредненной системы (подобно [15]). Естественно предположить, что в полной системе соответствующее близкое к периодическому решение, если существует, не является притягивающим ни в прямом, ни в обратном времени. Непосредственно наблюдать такое решение при численном интегрировании полной системы в общем случае не представляется возможным. В данной работе используем следующий подход: если для пары  $\hat{\omega}_i(\varphi_i; \omega_{i0}^*)$  не обнаружена соответствующая ей близкая к периодической траектория системы (2.1), притягивающая в прямом/обратном времени, то проверим, проходит ли в окрестности тора  $\hat{\omega}_1(\varphi_1; \omega_{10}^*) \times \hat{\omega}_2(\varphi_2; \omega_{20}^*)$  граница между областями притяжения различных аттракторов. Для этого выполним прямое численное интегрирование системы (2.1) с различными начальными условиями, расположенными в окрестности кривых  $\hat{\omega}_i(\varphi_i; \omega_{i0}^*)$ .

**5. Пример применения алгоритма (поиск авторотаций ветротурбины).** Проиллюстрируем возможности предложенного алгоритма на примере задачи отыскания авторотаций ветротурбины, состоящей из двух соосных роторов Савониуса. Математическая модель такой системы построена по аналогии с моделями [35–39] для однороторных ветроэнергетических устройств и моделями [31, 40] для двухроторных ветротурбин других типов.

*5.1. Описание механической системы, уравнения движения.* Рассмотрим механическую систему, которая состоит из двух вертикально-осевых роторов Савониуса. Схема системы представлена на рис. 1. Валы роторов соосны. Лопастей ориентированы так, чтобы воздействие потока поддерживало вращение роторов в противоположных направлениях. Система помещена в поток воздуха постоянной скорости  $\mathbf{V}$ . На оси одного ротора Савониуса жестко закреплен статор электрогенератора ветроустановки, на оси другого – ротор того же электрогенератора. Генератор подключен к локальной электрической цепи с внешним сопротивлением  $R$ .

Ось вращения роторов обозначим  $Oz$ . Положительные направления отсчета углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  поворота роторов выберем противоположными друг другу в соответствии с

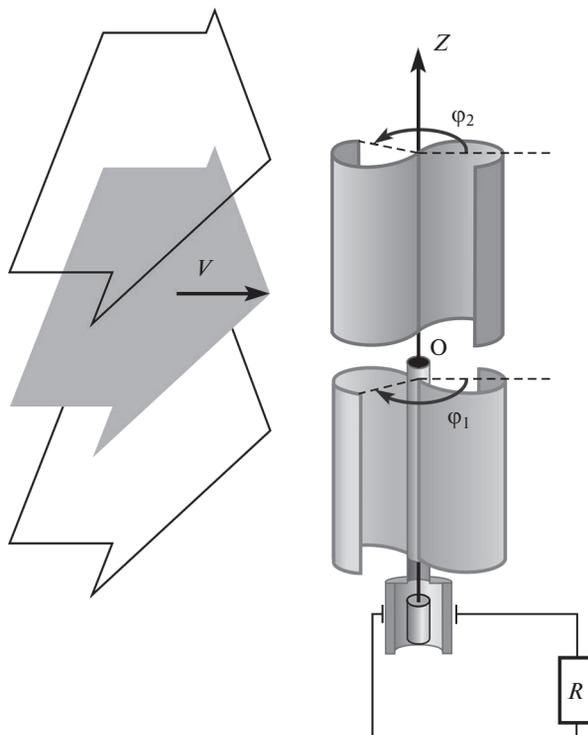


Рис. 1

ожидаемыми направлениями вращения роторов. Оба угла отсчитываются от направления скорости  $\mathbf{V}$  ветра, как показано на рис. 1.

Будем считать, что геометрические размеры и форма роторов одинаковы. Радиус каждого ротора обозначим  $r$ . Пусть  $J_1$  и  $J_2$  – моменты инерции роторов относительно оси  $Oz$ .

Будем считать, что аэродинамическое воздействие на каждый из роторов определяется текущими значениями угла поворота и угловой скорости этого ротора и не зависит напрямую от характеристик движения другого ротора. Аэродинамический момент  $M_i$  ( $i = 1, 2$ ), действующий на ротор Савониуса, будем описывать при помощи подхода [39], основанного на квазистатической модели:

$$M_i = 0.5\rho S V^2 r C_m(\varphi_i, \omega_i)$$

$$\omega_i = V^{-1} r d\varphi_i/dt$$

Здесь  $\rho$  – плотность воздуха,  $S$  – площадь, ометаемая ротором,  $\omega_i$  – быстроходность ротора (безразмерная угловая скорость). Функция  $C_m(\varphi_i, \omega_i)$  – безразмерный коэффициент аэродинамического момента,  $\pi$ -периодический по переменной  $\varphi_i$ . Эта функция может быть идентифицирована по экспериментальным данным. Соответствующие эксперименты были проведены в НИИ механики МГУ. Результаты экспериментов описаны и проанализированы в статье [30], где построена кусочно-гладкая аппроксимация для функции  $C_m(\varphi_i, \omega_i)$  аэродинамического момента в широком диапазоне  $\omega$ . В настоящей статье для того, чтобы избежать необходимости работать с ку-

сочно-гладкими (хотя и непрерывными) функциями, упростим аппроксимационные формулы. Построим гладкую функцию, которая может быть использована для приближенного описания аэродинамического момента при  $\omega > 0$ :

$$C_m(\varphi, \omega) = 0.11 + 0.17\omega - 0.25\omega^2 + \frac{0.01\omega(\omega + 0.6)}{0.3^2(\omega + 0.3)^2} + \frac{\sin(2\varphi - 0.1 - 4(\omega - 0.01)^2)}{(2.8 + 60(\omega + 0.2)^2)}$$

Электромагнитные процессы в генераторе приводят к тому, что на его ротор и статор действуют равные по величине противоположно направленные моменты. Величина  $M_e$  каждого из этих моментов описывается следующим выражением (следуя модели [36]):

$$M_e = (\sigma + R)^{-1} Kr^{-1} V(\omega_1 + \omega_2)$$

Здесь  $K$  – коэффициент электромеханического взаимодействия,  $\sigma$  – внутреннее сопротивление генератора (положительные константы, определяемые характеристиками генератора).

Введем безразмерное время  $\tau = r^{-1} V t$  и запишем уравнения движения системы в безразмерной форме (точкой обозначена производная по безразмерному времени):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_i &= \omega_i, \quad i = 1, 2 \\ \dot{\omega}_1 &= a(C_m(\varphi_1, \omega_1) - b(\omega_1 + \omega_2)) \\ \dot{\omega}_2 &= ap(C_m(\varphi_2, \omega_2) - b(\omega_1 + \omega_2)) \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$a = 0.5J_1^{-1} \rho S r^3, \quad p = J_2^{-1} J_1, \quad b = 2V^{-1} \rho^{-1} S^{-1} r^{-2} (\sigma + R)^{-1} K$$

Уравнения движения имеют форму системы (2.1). В данном примере  $f_1 = (C_m(\varphi_1, \omega_1) - b\omega_1)$ ,  $f_2 = p(C_m(\varphi_2, \omega_2) - b\omega_2)$ ,  $q_1 \equiv b$ ,  $q_2 \equiv pb$ . Отметим, что при физически осмысленных значениях параметров выполнено  $a < 1$ . Параметр  $b$  характеризует внешнюю электрическую нагрузку в цепи генератора.

Если значение  $p$  близко к единице, то можно ожидать проявления эффектов синхронизации, поскольку при  $p = 1$  система состоит из двух идентичных подсистем. Предложенный метод не предназначен для описания таких эффектов, для этого существуют специальные подходы (например, [41]). Для иллюстрации работы метода положим  $p = 0.8$ .

*5.2. Анализ системы нулевого приближения.* Система (3.1) нулевого приближения имеет в данной задаче вид:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= a(C_T(\Omega_1) - b(\Omega_1 + \Omega_2)), \\ \dot{\Omega}_2 &= ap(C_T(\Omega_2) - b(\Omega_1 + \Omega_2)), \end{aligned} \quad C_T(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi C_m(\varphi, \Omega) d\varphi \quad (5.2)$$

График функции  $C_T(\Omega)$  усредненного аэродинамического момента приведен на рис. 2; точки соответствуют экспериментальным данным для ротора радиуса  $r = 0.2$  м при скоростях ветра 6 и 8 м/с [30].

У системы (5.2) для каждой неподвижной точки  $(\Omega_1^*, \Omega_2^*)$  существует симметричная ей:  $(\Omega_2^*, \Omega_1^*)$ . Таким образом, достаточно описать неподвижные точки, в которых  $\Omega_1^* \leq \Omega_2^*$ . Зависимости  $\Omega_1^*(b)$  при  $0 < \Omega_1^* \leq \Omega_2^*$  представлены на рис. 3. Пунктиром обозначены семейства седловых точек, сплошной кривой – семейство устойчивых узлов. Черным цветом обозначено семейство неподвижных точек, для которых  $\Omega_1^* = \Omega_2^*$ . Серым цветом – семейство, на котором  $\Omega_1^* < \Omega_2^*$ . Для него существует симметричное семейство с  $\Omega_1^* > \Omega_2^*$ .

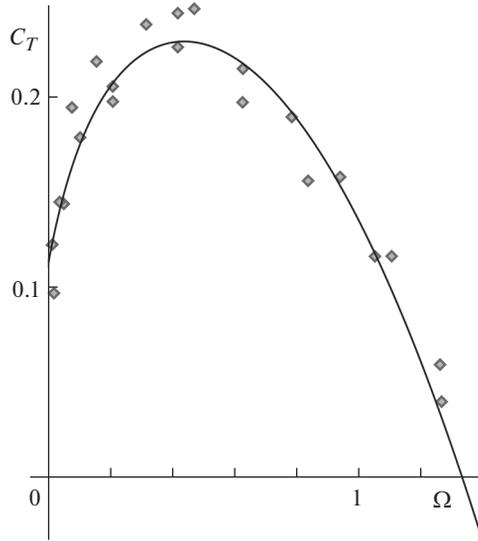


Рис. 2

При  $b > b_1$  у системы (5.2) есть только одна неподвижная точка в области  $G_1 = \{\Omega_i > 0\}$ , и это седло с  $\Omega_1^*(b) = \Omega_2^*(b)$ . При уменьшении параметра  $b$  до значения  $b = b_1 \approx 0.2611$  происходит бифуркация: седло распадается на три неподвижные точки: устойчивый узел с  $\Omega_1^*(b) = \Omega_2^*(b)$  и два седла. Эти седла на плоскости  $(\Omega_1, \Omega_2)$  расположены симметрично друг другу относительно прямой  $\Omega_1 = \Omega_2$ . При  $b \in (b_0, b_1)$  существуют три неподвижные точки в области  $G_1$ . При уменьшении параметра  $b$  до значения  $b = b_0$  обе седловые точки выходят из области  $G_1$  (для одной из них обращается в нуль  $\Omega_1^*$ , для симметричной ей:  $\Omega_2^*$ ).

При  $b = 0.262 > b_1$  у системы (5.2) в области  $G_1$  есть единственная неподвижная точка – седло с  $\Omega_1^* = \Omega_2^* \approx 0.433$  – и, соответственно, отсутствуют циклы, расположенные целиком в  $G_1$ . Таким образом, при таком  $b$  и достаточно малом  $a$  можно ожидать, что у системы (5.1) нет аттракторов в области, где  $\omega_i$  положительны и отделены от нуля.

*5.3. Поиск авторотаций при конечных значениях  $a$ .* Далее будем рассматривать систему (5.1) при  $b = 0.262$ . Применим предложенный итерационный метод. Начнем с рассмотрения относительно небольших конечных значений параметра  $a$ . При  $a = 0.1$  получаем одну точку  $P_1$  пересечения кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  на плоскости  $(\Omega_1, \Omega_2)$ :  $\Omega_1^* = 0.40$ ,  $\Omega_2^* = 0.48$ . В этом случае для определения  $\Omega_i^*$  с точностью до второго знака после запятой достаточно одной итерации метода [29], применяемого на этапе построения периодических траекторий вспомогательных систем (п. 4.1). Найденная точка “седловая” (в терминах Замечания 3). Численное интегрирование (этап проверки п. 4.3) системы (5.1) показывает, что при небольших отклонениях начальных значений  $\omega_i$  от  $\Omega_i^*$  в ту или иную сторону реализуется один из двух сценариев: или  $\omega_1$  значительно возрастает, при этом  $\omega_2$  убывает до нуля, или наоборот. Продолжать численное интегрирование в области, где угловая скорость хотя бы одной турбины от-

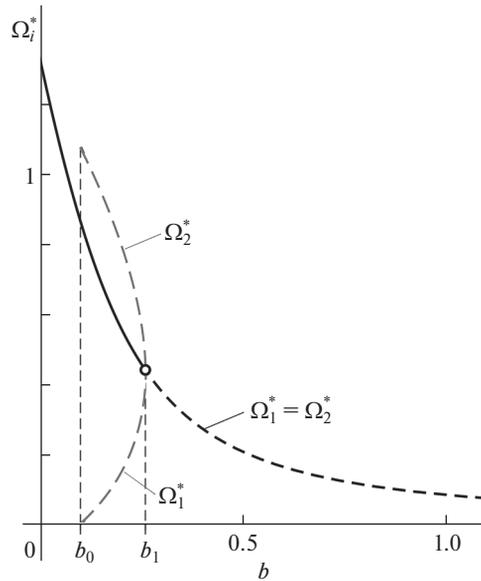


Рис. 3

рицательна, нецелесообразно, поскольку используемая функция аэродинамического момента хорошо согласуется с экспериментальными данными только в области  $\{\omega_i > 0\}$ .

При увеличении параметра  $a$  возникают и начинают “расходиться” друг от друга еще две точки  $P_2$  и  $P_3$  пересечения кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Эти “дополнительные” точки появляются при  $a \approx 0.3$  около точки  $(0.47, 0.40)$ ; при этом точка  $P_1$  примерно описывается координатами  $(0.36, 0.50)$ .

Рассмотрим подробно случай  $a = 0.5$ . В этом случае на плоскости  $(\Omega_1, \Omega_2)$  есть три точки  $(\Omega_1^*, \Omega_2^*)$ :  $P_1 = (0.36, 0.51)$  – “седло”,  $P_2 = (0.46, 0.42)$  – “устойчивый узел”,  $P_3 = (0.50, 0.37)$  – “седло” (для получения этих значений выполнено 10 итераций на этапе поиска периодических решений вспомогательных систем). Здесь и далее одинаково обозначены точки, которые непрерывно переходят друг в друга при изменении параметра  $a$ .

Для точки  $(\Omega_1^*, \Omega_2^*) = (0.46, 0.42)$  на рис. 4 черным показаны проекции на плоскость  $(\sin \varphi_i, \omega_i)$  найденного приближения  $\hat{\omega}_i(\varphi_i; \omega_{i0}^*)$  для близкой к периодической траектории. Прямое численное интегрирование системы (5.1) с начальными условиями  $\varphi_i(0) = 0, \omega_i(0) = \omega_{i0}^*$  показывает наличие аттрактора “близкого к периодическому”, проекции которого на соответствующие плоскости показаны на рис. 4 серым цветом.

Из рис. 4 видно, что при  $(\Omega_1^*, \Omega_2^*) = (0.46, 0.42)$  построенные итерационным методом кривые  $\hat{\omega}_i(\varphi_i; \omega_{i0}^*)$  позволяют достаточно точно описать местоположение аттрактора, который представляет собой близкую к периодической траекторию.

Несоизмеримость значений  $\Omega_i^*$  приводит к тому, что на плоскости  $(\sin \varphi_1, \sin \varphi_2)$  близкое к периодическому решение “заполняет” единичный квадрат.

Отметим, что при  $b = 0.262, a = 0.5$  поведение решений системы (5.2) и переменных  $\omega_i$  полной системы (5.1) принципиально отличается: в последней существует ат-

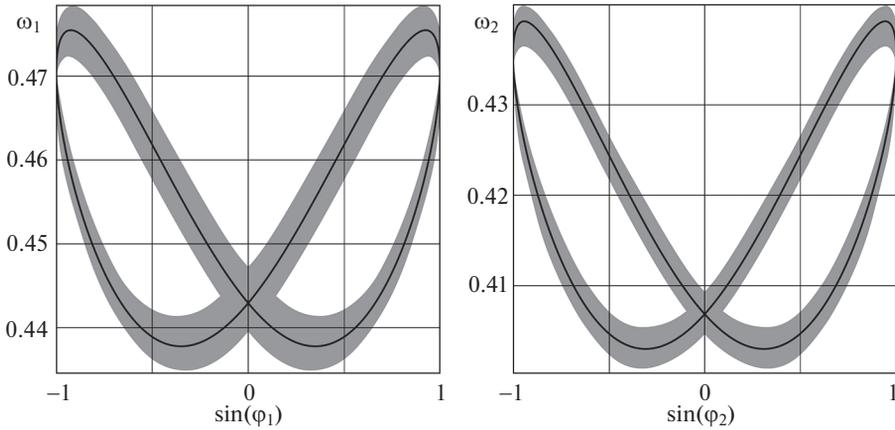


Рис. 4

трактор, не имеющий аналога в системе (5.2). Этот аттрактор удается найти и описать предложенным методом.

Рассмотрим поведение системы (5.1) в окрестности тора  $\bar{\omega}_1(\varphi_1; \omega_{10}^*) \times \bar{\omega}_2(\varphi_2; \omega_{20}^*)$ , соответствующего “седловой” точке  $P_3 = (0.50, 0.37)$  пересечения кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , “аналог” которой отсутствует в системе (5.2). На рис. 5 показаны зависимости  $\omega_i(t)$ , полученные путем прямого численного интегрирования системы (5.1) методом Рунге–Кутты с начальными условиями  $\varphi_i(0) = 0$ ,  $\omega_i(0) = \omega_{i0}^*$  (кривые  $\omega_i^1(t)$ ) и с начальными условиями  $\varphi_i(0) = 0$ ,  $\omega_1(0) = \omega_{10}^* + 0.002$ ,  $\omega_2(0) = \omega_{20}^* - 0.002$  (кривые  $\omega_i^2(t)$ ).

С течением времени решение  $(\varphi_1^1(t), \varphi_2^1(t), \omega_1^1(t), \omega_2^1(t))$  системы (5.1), представленное на рис. 5 кривыми  $\omega_i^1(t)$ , выходит на близкое к периодическому решение, соответствующее точке  $P_2$  (оно было рассмотрено выше). Решение  $(\varphi_1^2(t), \varphi_2^2(t), \omega_1^2(t), \omega_2^2(t))$ , изображенное кривыми  $\omega_i^2(t)$ , пересекает гиперплоскость  $\omega_2 = 0$ . Далее расчет не проводился, поскольку вне области  $\{\omega_i > 0\}$  правая часть системы (5.1) не задана. При численном интегрировании в обратном времени в окрестности тора, отвечающего “седловой” точке  $P_3$ , были обнаружены начальные условия, при которых обе угловые скорости неограниченно возрастают, а также начальные условия, при которых обе угловые скорости убывают к нулю. Таким образом, в указанной окрестности проходит граница областей притяжения различных аттракторов системы (5.1) и в прямом, и в обратном времени.

При увеличении параметра  $a$  точки  $P_1$  и  $P_2$  сближаются и при  $a \approx 0.95$  исчезают около точки  $(0.42, 0.45)$  (когда координаты точки  $P_3$  примерно равны  $(0.50, 0.38)$ ).

**6. Обсуждение результатов.** При помощи предложенного метода описаны близкие к периодическим траектории системы (5.1). В том числе не только решения, которые при уменьшении параметра  $a$  непрерывно переходят в неподвижные точки системы (5.2), но и “дополнительные” решения – такие, которые при уменьшении параметра  $a$  разрушаются, сливаясь друг с другом.

Отметим, что ряд известных методов поиска квазипериодических траекторий (например, [15]) основан на продолжении по параметру решений, порожденных неподвижными точками усредненной системы. Наличие/введение нескольких параметров

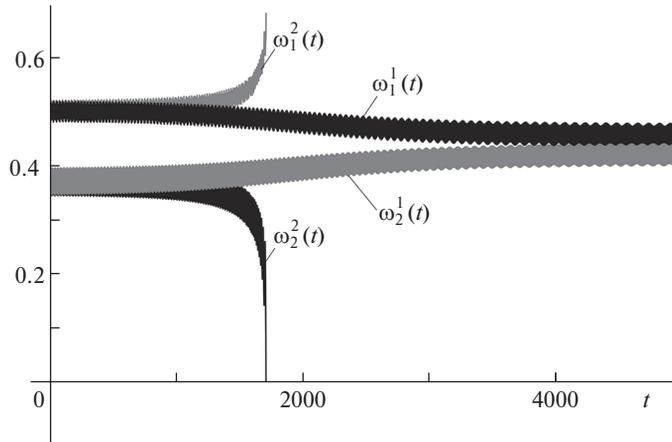


Рис. 5

(в рассмотренном примере:  $a$  и  $b$ ) позволяет организовать продолжение по параметрам так, чтобы отследить эволюцию “дополнительных” близких к периодическим траекторий. Так, например, в [15] помимо параметра, аналогичного  $a$ , используются еще два параметра.

Возникновение “дополнительных” близких к периодическим траекторий при увеличении параметра  $a$  можно рассматривать в контексте эволюции диаграммы  $\Omega_r^*(b)$  с ростом параметра  $a$ . Так, в представленном примере траектории, возникающие в случае  $b = 0.262$  при  $a \approx 0.3$ , можно рассматривать как “продолжение” по параметрам  $a$  и  $b$  неподвижных точек усредненной системы (5.2), существующих при меньших значениях  $b$ :  $b < 0.261$ . Отметим, что при  $b \geq 0.264$  “дополнительные” траектории обнаружены не были.

Диапазон значений параметров  $a$  и  $b$ , при которых обнаружен “дополнительный” аттрактор рассмотренной системы, очень узкий. Тем не менее, предложенный метод позволил его отыскать.

Помимо возможности описания “дополнительных” решений, к преимуществам предложенного метода можно отнести то, что он не зависит от свойств притяжения искомого решения. В частности, он позволяет выявлять траектории, являющиеся аттракторами (в прямом или обратном времени), а также порожденные седловыми точками усредненной системы кривые, расположенные вблизи границы областей притяжения различных аттракторов. Более того, метод, в отличие от прямого численного интегрирования, не использует область притяжения аттракторов. В частности трудоемкость предложенного алгоритма не зависит от того, содержит ли область притяжения неподвижные точки системы.

Предложенный метод можно распространить на системы более общего вида, чем (2.1). Для этого на этапе построения вспомогательных систем можно ввести дополнительные слагаемые, отвечающие за поворот векторного поля, в методе [29]. Однако это обобщение выходит за рамки данной работы. Помимо этого, среди путей развития предложенного метода можно выделить создание алгоритма для поиска автоколебаний в системах вида (2.1), а также режимов, при которых по одному из углов происходит ротация, а по другому углу – колебания. В этом случае на начальном этапе алгоритма (п. 4.1) можно применить итерационные методы поиска автоколебаний, предложенные в работах [42, 43].

Возможно развитие метода в направлении отыскания режимов, которым на плоскости  $(\Omega_1, \Omega_2)$  усредненных скоростей отвечают не точки, а замкнутые кривые.

**7. Заключение.** Для механических систем с двумя угловыми координатами предложен метод отыскания авторотаций, основанный на усреднении и применении итерационной процедуры [29].

Метод родственен подходам, использующим в качестве нулевого приближения для режимов авторотации неподвижные точки системы, усредненной по двум углам.

Приведен пример применения метода к математической модели двухроторной ветротурбины Савониуса. Описаны некоторые тенденции эволюции режимов авторотации при изменении параметров модели. В частности, обнаружен аттрактор, которому не отвечает ни одна неподвижная точка усредненной системы. Помимо этого, построены кривые, расположенные вблизи границы областей притяжения различных аттракторов. Такие кривые можно взять за основу при построении границы областей притяжения аттракторов методом продолжения по начальным условиям.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ: гранты № 18-31-20029, 19-31-90073.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967. 488 с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 2-е. М.: Наука, 1974. 408 с.
3. Самойленко А.М. Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Укр. мат. журн. 1965. Т. 17. № 4. С. 82–93.
4. Delamotte B. Nonperturbative (but Approximate) Method for Solving Differential Equations and Finding Limit Cycles // Physical Review Letters. 1993. V. 70. Iss. 22. P. 3361.
5. Buonomo A., Schiavo A.L. A Constructive Method for Finding the Periodic Response of Nonlinear Circuits // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. 2003. V. 50. Iss. 7. P. 885–893.
6. Bindel D., Friedman M., Govaerts W., Hughes J., Kuznetsov Y.A. Numerical Computation of Bifurcations in Large Equilibrium Systems in Matlab // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2014. V. 261. P. 232–248.
7. Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Prasad A. Hidden Attractors in Dynamical Systems // Physics Reports. 2016. V. 637. P. 1–50.
8. Renon L., Kerschen G., Cochelin B. Numerical Computation of Nonlinear Normal Modes in Mechanical Engineering // Journal of Sound and Vibration. 2016. V. 364. P. 177–206.
9. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. РАН. МТТ. 1982. № 3. С. 5–13.
10. Волосов В.М. О методе усреднения // ДАН. 1961. Т. 137. № 1. С. 21–24.
11. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во Московского университета, 1971. 508 с.
12. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
13. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
14. Sanders J.A., Verhulst F., Murdock J. Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. New York: Springer, 2007. 433 p.
15. Kamiyama K., Komuro M., Endo T. Bifurcation of Quasi-Periodic Oscillations in Mutually Coupled Hard-Type Oscillators: Demonstration of Unstable Quasi-Periodic Orbits // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2012. V. 22. Iss. 6. P. 1230022.
16. Schilder F., Osinga H.M., Vogt W. Continuation of Quasi-Periodic Invariant Tori // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2005. V. 4. Iss. 3. P. 459–488.

17. *Chua L.O., Ushida A.* Algorithms for Computing Almost Periodic Steadystate Response of Nonlinear Systems to Multiple Input Frequencies // *IEEE Trans. Circuits and Systems*. 1981. V. 28. Iss. 10. P. 953–971.
18. *Parker T.S., Chua L.O.* Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. New York: Springer-Verlag, 1989. 348 p.
19. *Kaas-Petersen Chr.* Computation of Quasiperiodic Solutions of Forced Dissipative Systems // *J. Comput. Phys*. 1985. V. 58. Iss. 3. P. 395–408.
20. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной динамике. Киев: Наукова думка, 1969. 248 с.
21. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний: Инвариантные торы. М.: Наука, 1987. 301 с.
22. *Broer H., Hagen A., Vegter G.* Multiple Purpose Algorithms for Invariant Manifolds // *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms*. 2003. V. 10. P. 331–344.
23. *Schilder F., Vogt W., Schreiber S., Osinga H.M.* Fourier Methods for Quasi-Periodic Oscillations // *International journal for numerical methods in engineering*. 2006. V. 67. Iss. 5. P. 629–671.
24. *Zhou B., Thouverez F., Lenoir D.* A Variable-Coefficient Harmonic Balance Method for the Prediction of Quasi-Periodic Response in Nonlinear Systems // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2015. V. 64. P. 233–244.
25. *Chen G., Dunne J.F.* A Fast Continuation Scheme for Accurate Tracing of Nonlinear Oscillator Frequency Response Functions // *Journal of Sound and Vibration*. 2016. V. 385. P. 284–299.
26. *Kerschen G., Gendelman O., Vakakis A.F., Bergman L.A., McFarland D.M.* Impulsive Periodic and Quasi-Periodic Orbits of Coupled Oscillators with Essential Stiffness Nonlinearity // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2008. V. 13. Iss. 5. P. 959–978.
27. *Bush J., Gameiro M., Harker S., Kokubu H., Mischaikow K., Obayashi I., Pilarczyk P.* Combinatorial-Topological Framework for the Analysis of Global Dynamics // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2012. V. 22. Iss. 4. P. 047508.
28. *Kamiyama K., Komuro M., Endo T.* Algorithms for Obtaining a Saddle Torus Between Two Attractors // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2013. V. 23. Iss. 9. P. 1330032.
29. *Климина Л.А.* Метод построения периодических решений в управляемой динамической системе с цилиндрическим фазовым пространством // *Изв. РАН. ТИСУ*. 2020. № 2. С. 5–16.
30. *Masterova A., Selyutskiy Yu., Zubkov A. Garziera R.* On Empirical Model of Aerodynamic Torque Acting on Savonius Rotor // *2020 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB)*. IEEE. 2020. P. 1–3.
31. *Досаев М.З., Климина Л.А., Локшин Б.Я., Селюцкий Ю.Д., Шалимова Е.С.* О режимах авротации двухроторной ветротурбины Дарье // *Изв. РАН. МТТ*. 2021. № 2. С. 133–147.
32. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 486 с.
33. *Черкас Л.А., Гринь А.А., Булгаков В.И.* Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход). Гродно: ГрГУ, 2013. 489 с.
34. *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // *ЖЭТФ*. 1934. Т. 4. № 9. С. 234–238.
35. *Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* О динамике малой ветроэлектростанции // *ДАН*. 2007. Т. 416. № 1. С. 50–53.
36. *Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д., Вен-Лон Лю, Чин-Хуэй Линь.* Бифуркации режимов функционирования малых ветроэлектростанций и оптимизация их характеристик // *Изв. РАН. МТТ*. 2009. № 2. С. 59–66.
37. *Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* Математическая модель поведения малых ветровых электростанций // *Математическое моделирование*. 2015. Т. 27. № 2. С. 85–95.
38. *Селюцкий Ю.Д.* О динамике малых ветроэнергетических установок // *Математическое моделирование*. 2018. Т. 30. № 1. С. 31–39.
39. *Selyutskiy Y.D., Klimina L.A., Masterova A.A., Hwang S.S., Lin C.H.* Savonius Rotor as a Part of Complex Systems // *J. Sound and Vibration*. 2019. V. 442. P. 1–10.

40. *Климина Л.А., Шалимова Е.С.* Двухпропеллерная ветроэнергетическая установка с дифференциальной планетарной передачей // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18. № 10. С. 679–684.
41. *Барабанов И.Н., Тхай В.Н.* Конструирование устойчивого цикла в слабо связанных идентичных системах // Автоматика и телемеханика. 2017. № 2. С. 27–35.
42. *Климина Л.А.* Метод поиска периодических траекторий центрально-симметричных динамических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 2. С. 159–168.
43. *Климина Л.А., Селюцкий Ю.Д.* Метод построения периодических решений в управляемой динамической системе второго порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 4. С. 3–15.

УДК 539.3

## ОБ ОДНОЙ АНАЛОГИИ МЕЖДУ УРАВНЕНИЯМИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

© 2021 г. В. В. Васильев<sup>a,\*</sup>, Л. В. Федоров<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

<sup>b</sup> АО ВПК НПО Машиностроение, Реутов, Россия

\*e-mail: vvas@dol.ru

Поступила в редакцию 14.09.2020 г.

После доработки 21.09.2020 г.

Принята к публикации 07.10.2020 г.

В статье предлагается новая интерпретация основной геометрической концепции общей теории относительности, согласно которой гравитация ассоциируется не с кривизной порождаемого ей риманова пространства, а с деформациями этого пространства. При такой формулировке линеаризованные уравнения общей теории относительности для пустого пространства оказываются аналогичными уравнениям совместности деформаций линейной теории упругости. Существенно, что операторы уравнений, соответствующих этим двум теориям, обладают одним и тем же свойством — их дивергенция тождественно равна нулю. В теории относительности это свойство уравнений порождает одну из основных проблем теории — система уравнений, описывающих гравитационное поле, оказывается неполной, так как обращение в нуль дивергенции операторов этих уравнений снижает число взаимно независимых уравнений поля, которое оказывается меньше числа неизвестных компонентов метрического тензора. Общая форма уравнений, которыми следует дополнить уравнения поля для получения полной системы, в общей теории относительности до настоящего времени неизвестна. Однако в теории упругости такие уравнения известны — это уравнения равновесия, представляющие собой равенство нулю дивергенции тензора напряжений, линейно связанного с тензором деформаций. Предлагается использовать отмеченную аналогию для получения уравнений, дополняющих уравнения поля в общей теории относительности. В качестве приложения рассматривается задача со сферической симметрией. Полученное решение не совпадает с известным решением Шварцшильда. Оно не является сингулярным и определяет критический радиус, составляющий  $2/3$  гравитационного радиуса.

*Ключевые слова:* теория упругости, общая теория относительности, сферически симметричная задача

DOI: 10.31857/S0572329921030120

**1. Введение — уравнения общей теории относительности.** В настоящей работе общая теория относительности (ОТО) рассматривается как феноменологическая теория, основанная на изотропной и однородной модели среды, не учитывающей ее возможную внутреннюю структуру. В рамках этой модели задача общей теории относительности заключается в определении метрического тензора, входящего в метрическую форму

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (1.1)$$

четырёхмерного риманова пространства, моделирующего среду, из системы уравнений, связывающей тензор Эйнштейна  $G_{ij}$  с тензором энергии-импульса  $T_{ij}$

$$G_{ij} = \chi T_{ij} \quad (1.2)$$

Здесь тензор

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \quad (1.3)$$

выражается через тензор кривизны Риччи  $R_{ij}$  ( $R = g^{ij} R_{ij}$ ). В уравнение (1.2) входит гравитационная постоянная ОТО

$$\chi = 8\pi\gamma/c^4 \quad (1.4)$$

выражающаяся через классическую гравитационную постоянную  $\gamma$  и скорость света  $c$ . Согласно законам сохранения, дивергенция материального тензора  $T_{ij}$  равна нулю. В силу соотношения (1.2) аналогичным свойством обладает и тензор Эйнштейна, то есть

$$\nabla_j G_{ij} = 0 \quad (1.5)$$

Для пустого пространства (вне источника гравитации)  $T_{ij} = 0$  и уравнение (1.2) принимает вид

$$G_{ij} = 0 \quad (1.6)$$

Десять уравнений (1.6) включают в качестве неизвестных десять компонентов метрического тензора  $g_{ij}$ . Однако в силу того, что операторы  $G_{ij}$  связаны четырьмя уравнениями (1.5), из этих десяти уравнений только шесть являются взаимно независимыми. Проблема неполноты системы (1.6) известна и широко обсуждается в литературе по ОТО [1–6]. Систему (1.6) предлагается дополнить так называемыми координатными условиями. В частности, известны гармонические координатные условия [3], накладываемые на метрический тензор

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{d} g^{ij}) = 0 \quad (1.7)$$

где  $d$  — определитель метрического тензора. Несмотря на наличие математического обоснования существования решения уравнений ОТО, дополненных условиями (1.7) [7] и полученного решения внешней сферически симметричной задачи [8], широкого признания условия (1.7) в качестве дополнительных уравнений к уравнениям (1.6) не получили. При решении конкретных задач число неизвестных, как правило, приводится к числу уравнений (1.6) приравниванием части компонентов метрического тензора соответствующим компонентам тензора для эвклидова пространства.

В настоящей работе предлагается новая форма дополнительных уравнений, следующая из аналогии между уравнениями теории упругости и линеаризованными уравнениями ОТО. Предварительно вводится новая геометрическая интерпретация гравитации в рамках ОТО. Согласно традиционной интерпретации ОТО, гравитация ассоциируется с кривизной риманова пространства. Однако для пространств с размерностью больше двух кривизна пространства не имеет физического содержания. Вводятся деформации пространства как разности между метрическими коэффициентами, соответствующими риманову пространству, порождаемого гравитацией, и исходного евклидова пространства. Таким образом, считается, что гравитация вызывает деформации пространства, которые представляются более наглядными чем кривизны.

**2. Линеаризованные уравнения ОТО.** Рассмотрим линеаризованную задачу статики для пустого пространства, отнесенного к декартовым координатам  $x_i$ . Вводя деформации по Коши и считая их малыми, запишем компоненты метрического тензора для риманова пространства

$$\begin{aligned} g_{ii} &= (1 + \varepsilon_{ii})^2 \approx 1 + 2\varepsilon_{ii} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ g_{ij} &= 2\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3), \quad g_{i4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Подставляя равенства (2.1) в уравнения (1.6) и осуществляя линеаризацию по деформациям, получим следующие уравнения для гравитационного поля:

$$G_{11} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{44}) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (\varepsilon_{33} + \varepsilon_{44}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.2)$$

$$G_{12} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (\varepsilon_{33} + \varepsilon_{44}) + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} G_{44} &= 2 \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \right) - \\ &- \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь символ (1, 2, 3) обозначает круговую перестановку индексов. В соответствие с уравнениями (1.5), шесть операторов уравнений (2.2) и (2.3) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial G_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{31}}{\partial x_3} = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (2.5)$$

Как и в общем случае, только три уравнения из шести уравнений (2.2) и (2.3) являются взаимно независимыми, что не позволяет найти деформации.

**3. Уравнения теории упругости.** В теории упругости деформации  $\varepsilon_{ij}^e$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) удовлетворяют следующим шести уравнениям совместности деформаций, обеспечивающим непрерывность деформированного пространства:

$$E_{11} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}^e}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}^e}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}^e}{\partial x_2^2} = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (3.1)$$

$$E_{12} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}^e}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}^e}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}^e}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}^e}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (3.2)$$

Непосредственной проверкой можно установить, что операторы уравнений (3.1) и (3.2) удовлетворяют уравнению аналогичному уравнению (2.5), то есть

$$\frac{\partial E_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial E_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial E_{31}}{\partial x_3} = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (3.3)$$

Таким образом, в силу уравнений (3.3) только три из шести уравнений (3.1) и (3.2), включающих шесть упругих деформаций, являются взаимно независимыми. Однако в теории упругости, в отличие от ОТО, уравнения, которыми следует дополнить уравне-

ния (3.1) и (3.2), для получения физически обусловленного решения известны. Этими уравнениями являются уравнения равновесия, которые имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (3.4)$$

Напряжения  $\sigma_{ij}$  связаны с упругими деформациями законом Гука. Рассматривая изотропный материал с модулем сдвига  $G$  и равным нулю коэффициентом Пуассона, имеем

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}^e \quad (3.5)$$

Подставляя равенства (3.5) в уравнения (3.4), получим

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}^e}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{21}^e}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{31}^e}{\partial x_3} = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (3.6)$$

Заметим, что это уравнение совпадает с уравнением (3.3), которому удовлетворяют операторы уравнений (3.1) и (3.2). В теории упругости доказываются теоремы существования и единственности решения системы (3.1), (3.2) и (3.6) [9].

Установим аналогию между уравнениями ОТО и теории упругости. Сопоставляя уравнения (2.2), (2.3) и уравнения (3.1), (3.2), можно заключить, что уравнения ОТО формально совпадают с уравнениями теории упругости, если принять в уравнениях (3.1) и (3.2)

$$\varepsilon_{ii}^e = \varepsilon_{ii} + \varepsilon_{44}, \quad \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.7)$$

Подставляя равенства (3.7) в уравнения (3.6), получим

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{44}) + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_3} = 0 \quad (3.8)$$

Этими уравнениями и предлагается дополнить уравнения ОТО (2.2)–(2.4). Установленная аналогия используется далее для решения сферически симметричной задачи ОТО, которая допускает точное решение.

**4. Сферически симметричная задача.** Рассмотрим изотропное твердое сплошное сферическое тело (далее – сфера) с радиусом  $R$  и с постоянной плотностью  $\mu$ , отнесенное к сферическим координатам  $r, \theta, \varphi$ . Радиальная и кольцевая деформации сферы связаны с радиальным перемещением известными соотношениями

$$\varepsilon_r^e = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\theta^e = \frac{u_r}{r} \quad (4.1)$$

Из геометрического вывода этих соотношений следует, что они справедливы при любых величинах перемещения и деформаций. Исключая перемещение из равенств (4.1), получим уравнение совместности деформаций

$$\varepsilon_r^e - (r\varepsilon_\theta^e)' = 0 \quad (4.2)$$

где  $(\dots)' = d(\dots)/dr$ . В теории упругости уравнение (4.2) решается совместно с уравнением равновесия

$$\sigma_r' + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \quad (4.3)$$

в котором  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  – радиальные и кольцевые напряжения. Для материала с нулевым коэффициентом Пуассона имеем  $\sigma_{r,\theta} = E\varepsilon_{r,\theta}^e$ , где  $E$  – модуль упругости. Таким образом, уравнение (4.3) принимает вид

$$(\varepsilon_r^e)' + \frac{2}{r}(\varepsilon_r^e - \varepsilon_\theta^e) = 0 \quad (4.4)$$

Это уравнение аналогично уравнению (3.6).

Рассмотрим статическую задачу ОТО. В сферических координатах метрическая форма (1.1) имеет вид

$$ds^2 = g^2 dr^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - h^2 c^2 dt^2 \quad (4.5)$$

где  $t$  – время, а коэффициенты  $g$ ,  $\rho$ ,  $h$  зависят только от радиальной координаты. Для пустого пространства, окружающего сферу ( $R \leq r < \infty$ ), уравнения гравитационного поля (1.6) записываются следующим образом [2]:

$$E_1^1 = \frac{1}{\rho_e^2} - \frac{\rho_e'}{g_e^2 \rho_e} \left( \frac{\rho_e'}{\rho_e} + \frac{2h_e'}{h_e} \right) = 0 \quad (4.6)$$

$$E_2^2 = -\frac{1}{g_e^2} \left[ \frac{h_e''}{h_e} + \frac{\rho_e''}{\rho_e} + \frac{\rho_e'}{\rho_e} \left( \frac{h_e'}{h_e} - \frac{g_e'}{g_e} \right) - \frac{g_e' h_e'}{g_e h_e} \right] = 0 \quad (4.7)$$

$$E_4^4 = \frac{1}{\rho_e^2} - \frac{1}{g_e^2} \left[ \left( \frac{\rho_e'}{\rho_e} \right)^2 + \frac{2\rho_e''}{\rho_e} - \frac{2g_e' \rho_e'}{g_e \rho_e} \right] = 0 \quad (4.8)$$

Здесь используются смешанные компоненты тензоров так как для сферически симметричной задачи они совпадают с физическими компонентами. Индекс “ $e$ ” соответствует наружному пространству. Найдем решение уравнений (4.6)–(4.8) [10]. Уравнение (4.8) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{\rho_e (\rho_e')^2}{g_e^2} \right] = \rho_e'$$

и его общее решение имеет вид

$$g_e^2 = \frac{\rho_e (\rho_e')^2}{\rho_e + C_1}$$

Подставляя это решение в уравнение (4.6) и интегрируя, получим

$$h_e^2 = C_2 \left( 1 + \frac{C_1}{\rho_e} \right)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются из асимптотических условий, согласно которым при  $r \rightarrow \infty$  полученное решение должно совпадать с решением, сле-

дующим из теории Ньютона [1]. Полагая, что  $\rho_e(r \rightarrow \infty) \rightarrow r$ , получим  $C_2 = 1$  и  $C_1 = r_g$ , где

$$r_g = 2m\gamma/c^2 \quad (4.9)$$

– так называемый гравитационный радиус, который зависит от массы шара  $m$  и классической гравитационной постоянной  $\gamma$ . Окончательно имеем

$$g_e^2 = \frac{(\rho_e')^2}{1 - r_g/\rho_e}, \quad h_e^2 = 1 - \frac{r_g}{\rho_e} \quad (4.10)$$

Подставив решение (4.10) в уравнение (4.7), можно убедиться в том, что оно тождественно удовлетворяется при любой функции  $\rho_e(r)$ . Таким образом, для продолжения решения необходимо еще одно уравнение. Для получения этого уравнения воспользуемся аналогией, которая обсуждается в разделе 3. Введем деформации пространства, порождаемые гравитацией, представив метрические коэффициенты в виде

$$g = 1 + \varepsilon_r, \quad \rho = r(1 + \varepsilon_\theta), \quad h = 1 + \varepsilon_t \quad (4.11)$$

где  $\varepsilon_t$  – деформация времени. Из уравнений (4.10) следует, что

$$g_e h_e = \rho_e' \quad (4.12)$$

Подставляя равенства (4.11), получим

$$\varepsilon_r - (r\varepsilon_\theta)' = -\varepsilon_t(1 + \varepsilon_r) \quad (4.13)$$

Это уравнение совпадает с уравнением совместности деформаций (4.2) если ввести условные деформации

$$\varepsilon_r^e = \varepsilon_r + \varepsilon_t(1 + \varepsilon_r), \quad \varepsilon_\theta^e = \varepsilon_\theta \quad (4.14)$$

Как следует из теории упругости, для получения физически обусловленного решения к уравнению (4.12) следует добавить уравнение (4.4), которое с учетом равенств (4.14) принимает вид

$$\varepsilon_r'(1 + \varepsilon_t) + \varepsilon_t'(1 + \varepsilon_r) + \frac{2}{r}[\varepsilon_r - \varepsilon_\theta + (1 + \varepsilon_r)\varepsilon_t] = 0$$

Используя равенства (4.11), исключим из этого уравнения деформации. В результате получим

$$(g_e h_e)' + \frac{2}{r} \left( g_e h_e - \frac{\rho_e}{r} \right) = 0$$

Отсюда с учетом уравнения (4.12) имеем

$$r^2 \rho_e'' + 2r \rho_e' - 2\rho_e = 0 \quad (4.15)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\rho_e = C_3 r + \frac{C_4}{r^2}$$

Из асимптотического условия при  $r \rightarrow \infty$  найдем  $C_3 = 1$ . Коэффициенты  $g_e$  и  $h_e$  определяются из равенств (4.10). Вводя безразмерные переменные

$$\bar{r} = r/R, \quad \bar{r}_g = r_g/R, \quad \bar{\rho} = \rho/R \quad (4.16)$$

и новую постоянную  $C$ , окончательно получим

$$g_e^2 = \frac{1 - 2C/\bar{r}^3}{1 - \frac{\bar{r}_g}{\bar{r}(1 + C/\bar{r}^3)}}, \quad \bar{\rho}_e = \bar{r} \left( 1 + \frac{C}{\bar{r}^3} \right), \quad h^2 = 1 - \frac{\bar{r}_g}{\bar{r}(1 + C/\bar{r}^3)} \quad (4.17)$$

При  $C = 0$  это решение совпадает с решением Шварцшильда

$$g_e^2 = \frac{1}{1 - \bar{r}_g/\bar{r}}, \quad \bar{\rho}_e = \bar{r}, \quad h_e = 1 - \frac{\bar{r}_g}{\bar{r}} \quad (4.18)$$

полученным при координатном условии  $\rho = r$  [2]. Особенностью этого решения является наличие радиуса  $r = r_g$  при котором  $g_e$  обращается в бесконечность и который называется радиусом горизонта событий черной дыры. В отличие от решения (4.17), решение (4.18) не содержит постоянной интегрирования и определяет геометрию внешнего пространства независимо от решения уравнений ОТО для внутренней области шара. Это связано с условием  $\rho_e = r$ , при котором уравнение (4.8), имеющее второй порядок, вырождается в уравнение первого порядка. Решение этого уравнения содержит только одну произвольную постоянную, которая определяется из асимптотического условия при  $r \rightarrow \infty$ . Деформации пространства, соответствующие решению Шварцшильда, определяются из равенств (4.11) и имеют вид

$$\varepsilon_r = \frac{1 - \sqrt{1 - \bar{r}/\bar{r}_g}}{\sqrt{1 - \bar{r}/\bar{r}_g}}, \quad \varepsilon_\theta = 0, \quad \varepsilon_t = \sqrt{1 - \frac{\bar{r}_g}{\bar{r}}} - 1$$

Отсюда следует, что кольцевая деформация отсутствует, а радиальная деформация при  $r = r_g$  оказывается бесконечно большой и пространство теряет непрерывность.

Постоянная  $C$  в решении (4.17) определяется из граничного условия на поверхности сферы. С этой целью получим решение для внутреннего пространства сферы ( $0 \leq r \leq R$ ). Для сплошного твердого сферического тела уравнения поля (1.2), (1.3) имеют вид [10]

$$E_1^1 = \frac{1}{\rho_i^2} - \frac{\rho_i'}{g_i^2 \rho_i} \left( \frac{\rho_i'}{\rho_i} + \frac{2h_i'}{h_i} \right) = \chi \sigma_r \quad (4.19)$$

$$E_2^2 = -\frac{1}{g_i^2} \left[ \frac{h_i''}{h_i} + \frac{\rho_i''}{\rho_i} + \frac{\rho_i'}{\rho_i} \left( \frac{h_i'}{h_i} - \frac{g_i'}{g_i} \right) - \frac{g_i' h_i'}{g_i h_i} \right] = \chi \sigma_\theta \quad (4.20)$$

$$\frac{1}{\rho_i^2} - \frac{1}{g_i^2} \left[ \left( \frac{\rho_i'}{\rho_i} \right)^2 + \frac{2\rho_i''}{\rho_i} - \frac{2g_i' \rho_i'}{g_i \rho_i} \right] = \chi \mu c^2 \quad (4.21)$$

Индекс “ $i$ ” соответствует внутреннему пространству. Напряжения удовлетворяют уравнению, следующему из уравнений (1.2) и (1.5), то есть

$$\sigma_r' + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{h_r'}{h_i} (\sigma_r - \mu c^2) = 0 \quad (4.22)$$

В силу уравнения (4.22), которому тождественно удовлетворяют операторы, записанные в левых частях уравнений (4.19)–(4.21), только два из этих уравнений являются линейно независимыми. Таким образом, как и для внешнего пространства, для трех метрических коэффициентов имеется только два уравнения, т.е. система является неполной. Более того, для двух напряжений имеется только одно уравнение (4.22). Недостающее уравнение для напряжений получено в работе [11]. Однако для опреде-

ления метрических коэффициентов напряжений не требуется, поэтому продолжим анализ. Уравнение (4.21) можно привести к виду [10]

$$1 - \frac{1}{\rho_i} \frac{d}{dr} \left[ \frac{\rho_i (\rho_i')^2}{g_i^2} \right] = \chi \mu c^2 \rho_i^2$$

Для постоянной плотности  $\mu$  его общее решение можно записать следующим образом:

$$g_i^2 = \frac{(\rho_i')^2}{1 - u\rho_i^2 + B_1/\rho_i}, \quad u = \frac{1}{3}\chi\mu c^2$$

Здесь следует принять  $B_1 = 0$ , так как в противном случае метрический коэффициент оказывается сингулярным в центре сферы независимо от ее размера и уровня гравитации. В результате имеем

$$g_i^2 = \frac{(\rho_i')^2}{1 - u\rho_i^2} \quad (4.23)$$

Введем деформации пространства в соответствие с равенствами (4.11).

Тогда из равенства (4.23) получим

$$\varepsilon_r - (r\varepsilon_\theta)' = (1 + \varepsilon_r)(1 - \sqrt{1 - u\rho_i^2})$$

Это уравнение приводится к уравнению совместности деформаций (4.2) если ввести условные деформации

$$\varepsilon_r^e = \varepsilon_r - (1 + \varepsilon_r)(1 - \sqrt{1 - u\rho_i^2}), \quad \varepsilon_\theta^e = \varepsilon_\theta$$

Подставляя эти выражения в уравнение (4.4) и выражая деформации через метрические коэффициенты с помощью равенств (4.11), имеем

$$\left( g_i + \frac{2g_i}{r} \right) \sqrt{1 - u\rho_i^2} - \frac{g_i u \rho_i \rho_i'}{\sqrt{1 - u\rho_i^2}} - \frac{2\rho_i}{r^2} = 0$$

Исключая из этого уравнения  $g_i$  с помощью равенства (4.23), окончательно получим уравнение

$$r^2 \rho_i'' + 2r\rho_i' - 2\rho_i = 0 \quad (4.24)$$

совпадающее с уравнением (4.15) для внешней задачи. Регулярное решение уравнения (4.24) имеет вид  $\rho_i = B_2 r$ . Используя безразмерные переменные (4.16) и вводя новую постоянную, окончательно получим

$$g_i^2 = \frac{B}{1 - B^2 \alpha \bar{r}^2}, \quad \bar{\rho}_i = B\bar{r}, \quad \alpha = uR^2 = \frac{1}{3}\chi\mu R^2 c^2 \quad (4.25)$$

Преобразуем выражение (4.25) для  $\alpha$ . Используя равенства (1.4) и (4.9) для  $\chi$  и  $r_g$ , найдем

$$\alpha = \frac{m_0}{m} \bar{r}_g, \quad m_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu \quad (4.26)$$

Здесь,  $m_0$  – масса сферы с постоянной плотностью, соответствующая евклидову внутреннему пространству, а  $m$  – масса сферы, соответствующая риманову пространству с метрическими коэффициентами (4.25), которая имеет вид

$$\begin{aligned} m &= 4\pi\mu R^3 \int_0^1 g_i \bar{\rho}_i^2 d\bar{r} = 4\pi\mu R^3 B^3 \int_0^1 \frac{\bar{r}^2 d\bar{r}}{\sqrt{1 - B^2\alpha\bar{r}^2}} = \\ &= \frac{2\pi\mu R^3}{\alpha\sqrt{\alpha}} [\arcsin(B\sqrt{\alpha}) - B\sqrt{\alpha}\sqrt{1 - B^2\alpha}] \end{aligned}$$

Используя равенства (4.26), окончательно получим

$$\frac{1}{B\sqrt{\alpha}} \arcsin(B\sqrt{\alpha}) - \sqrt{1 - B^2\alpha} = \frac{2\bar{r}_g}{3B} \quad (4.27)$$

Это уравнение связывает параметр  $\alpha$  и постоянную  $B$  с безразмерным гравитационным радиусом  $\bar{r}_g$ .

Для определения постоянных  $C$  и  $B$ , входящих в решения (4.17) и (4.25), воспользуемся условиями непрерывности метрических коэффициентов на поверхности шара, то есть

$$\bar{\rho}_e(\bar{r} = 1) = \bar{\rho}_i(\bar{r} = 1), \quad g_e(\bar{r} = 1) = g_i(\bar{r} = 1)$$

Подставляя равенства (4.17) и (4.25), получим

$$B = 1 + C, \quad \frac{1 - 2C}{\sqrt{1 - \frac{\bar{r}_g}{1 + C}}} = \frac{B}{\sqrt{1 - B^2\alpha}} \quad (4.28)$$

Исключая из второго уравнения  $C$ , окончательно имеем

$$\frac{3 - 2B}{\sqrt{1 - \frac{\bar{r}_g}{B}}} = \frac{B}{\sqrt{1 - B^2\alpha}} \quad (4.29)$$

Таким образом, решение сводится к уравнениям (4.27) и (4.29), которые определяют  $B$  и  $\alpha$  в зависимости от параметра  $\bar{r}_g$ . Результаты численного решения этих уравнений представлены в табл. 1.

Рассмотрим предельные случаи. При отсутствии гравитации имеем  $\bar{r}_g = 0$  и  $\alpha = 0$ . В этом случае из уравнений (4.27) и (4.29) следует  $B = 1$ ,  $C = 0$  и  $g = 1$ ,  $\rho = r$ , что соответствует евклидову пространству.

При относительно низком уровне гравитации можно считать, что параметры  $\bar{r}_g$  и  $\alpha$  много меньше единицы. Тогда уравнения (4.27) и (4.29) дают  $B = 0$ ,  $C = 1$  и из равенств (4.10), (4.17) и (4.25) следует

$$g_e^2 = 1 + \frac{\bar{r}_g}{\bar{r}}, \quad \bar{\rho}_e = \bar{r}, \quad h_e^2 = 1 - \frac{\bar{r}_g}{\bar{r}}, \quad g_i^2 = 1 + \bar{r}_g \bar{r}^2, \quad \bar{\rho}_i = \bar{r}$$

Это известное линеаризованное решение сферически симметричной задачи ОТО, которое согласуется с экспериментальными результатами.

При высоком уровне гравитации уравнения (4.27) и (4.29) имеют действительное решение при  $\bar{r}_g < 1.5$ . В предельном случае имеем  $\bar{r}_g = 1.5$  и  $B = \bar{r}_g$ . При этом числитель и знаменатель в левой части уравнения (4.29) обращаются в ноль. Получаемая не-

определенность раскрывается с помощью правой части уравнения (4.29), которая дает 2.841. Таким образом, предельные параметры сферы оказываются следующими:

$$\begin{aligned} \bar{r}_g = 1.5, \quad R = 2r_g/3, \quad g_e(R) = g_i(R) = g_R = 2.841, \\ \rho_e(R) = \rho_i(R) = \rho_R = 1.5R, \quad m = 4.68m_0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Рассмотрим решение Шварцшильда. Как следует из равенства (4.18), для получения соответствующего внешнего решения необходимо принять  $C = 0$ . Тогда из первого уравнения (4.18) следует  $B = 1$  и внутреннее решение (4.25) принимает вид

$$g_i^2 = \frac{1}{1 - \alpha \bar{r}^2}, \quad \bar{\rho}_i = \bar{r}$$

Согласно равенству (4.18), граничное условие на поверхности шара  $\bar{\rho}_e(1) = \bar{\rho}_i(1)$  выполняется, если  $\alpha = \bar{r}_g$ , что не соответствует первому равенству (4.26). Таким образом, граничное условие для радиального метрического коэффициента в решении Шварцшильда не выполняется. При минимально возможном для внешнего решения (4.18) радиусе  $\bar{r} = 1$ , т.е. на поверхности сферы, внешнее решение является сингулярным и радиальная деформация внешнего пространства оказывается бесконечно большой. Заметим, что в полученном варианте решения Шварцшильда горизонт событий располагается на поверхности сферы.

Таблица 1

$\bar{r}_g$	$B$	$C$	$\alpha$	$m/m_0$
0.0001	1.000000	0.000000001	0.000100	1.000003
0.001	1.000000	0.000000050	0.001000	1.000300
0.01	1.000005	0.00000505	0.010000	1.003022
0.1	1.000550	0.000555	0.096861	1.032406
0.2	1.002433	0.002433	0.186819	1.070556
0.3	1.006078	0.006078	0.268762	1.116228
0.4	1.012048	0.012048	0.341337	1.171861
0.5	1.021066	0.021066	0.402966	1.240801
0.6	1.034036	0.034036	0.451942	1.327604
0.7	1.052032	0.052032	0.486659	1.438378
0.8	1.076246	0.076246	0.505978	1.581095
0.9	1.107872	0.107872	0.509678	1.765822
1.0	1.147970	0.147970	0.498788	2.004859
1.1	1.197356	0.197356	0.475585	2.312940
1.2	1.256611	0.256611	0.443158	2.707836
1.3	1.326234	0.326234	0.404756	3.211779
1.4	1.406922	0.406922	0.363199	3.854631
1.42	1.424487	0.424487	0.354706	4.003317
1.44	1.442558	0.442558	0.346184	4.159643
1.46	1.461153	0.461153	0.337643	4.324091
1.48	1.480293	0.480293	0.329094	4.497191
1.49	1.490073	0.490073	0.324819	4.587168
1.499999	1.499999	0.499999	0.320545	4.679526

Рассмотрим проблему распространения света от сферы с параметрами (4.30). Траектория света в экваториальной плоскости  $\theta = \pi/2$  определяется следующими уравнениями [12]:

$$\frac{dr}{dt} = c \frac{h_e}{g_e} \sqrt{1 - \left(\frac{qh_e}{\rho_e}\right)^2}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = cq \left(\frac{h_e}{\rho_e}\right)^2 \quad (4.31)$$

здесь  $g_e$  и  $h_e$  определяются равенствами (4.10), а через  $q$  обозначена постоянная интегрирования, которая определяется из начального условия. Физические компоненты скорости имеют вид

$$v_r = \frac{g_e}{h_e} \frac{dr}{dt} = c \sqrt{1 - \left(\frac{qh_e}{\rho_e}\right)^2}, \quad v_\varphi = c \frac{qh_e}{\rho_e} \quad (4.32)$$

и  $v_r^2 + v_\varphi^2 = c^2$ . Предположим, что свет распространяется от поверхности шара  $r = R$  по направлению, составляющему угол  $\beta$  с радиусом. Тогда начальные условия записываются следующим образом:  $v_r = c \cos \beta$ ,  $v_\varphi = c \sin \beta$  и из равенств (4.32) следует  $q = (\rho_R/h_R) \sin \beta$ , где  $\rho_R = \rho_e(R)$ ,  $h_R = h_e(R)$ . Рассмотрим случай  $\beta = 0$ , для которого  $v_r = c$ ,  $v_\varphi = 0$ . Отсюда следует, что в радиальном направлении свет распространяется со скоростью  $c$  для любой сферы. Теперь рассмотрим случай  $\beta \neq 0$ . Используя уравнения (4.10), (4.31) и обозначения (4.16), получим

$$\frac{d\bar{\rho}_e}{d\varphi} = \frac{d\bar{r}}{d\varphi} \frac{d\bar{\rho}_e}{d\bar{r}} = \bar{\rho}_e^2 \sqrt{\frac{1}{\bar{\rho}_R^2 \sin^2 \beta} \left(1 - \frac{\bar{r}_g}{\bar{\rho}_R}\right) - \frac{1}{\bar{\rho}_e^2} \left(1 - \frac{\bar{r}_g}{\bar{\rho}_e}\right)} \quad (4.33)$$

Для сферы с предельными характеристиками (4.30) имеем  $\bar{r}_g = \bar{\rho}_R = 1.5$ . В результате первый член в правой части этого уравнения обращается в ноль и оно не имеет действительного решения. Таким образом, при  $\beta \neq 0$  свет не распространяется с поверхности сферы с предельными характеристиками. Аналогичным свойством обладает черная дыра, следующая из решения Шварцшильда для которой  $\bar{\rho}_R = \bar{r}_g$ . Однако в отличие от решения Шварцшильда полученное решение не является сингулярным и предельные характеристики шара определяются равенствами (4.30).

В заключение, с целью дальнейшего анализа решения Шварцшильда рассмотрим сферически симметричную задачу динамики. Предположим, что в метрической форме (4.5) коэффициенты  $g$ ,  $\rho$ ,  $h$  являются функциями  $r$  и  $t$ . Тогда статические уравнения (4.6)–(4.8) обобщаются следующим образом:

$$(E_1^1)_D = E_1^1 + \frac{1}{h^2} \left[ \frac{2\dot{\rho}}{\rho} + \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2 - \frac{2\dot{\rho}\dot{h}}{\rho h} \right] = 0 \quad (4.34)$$

$$(E_2^2)_D = E_2^2 - \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\ddot{\rho}}{2\rho} + \frac{\ddot{g}}{2g} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{g}}{g}\right)^2 + \frac{\dot{g}\dot{\rho}}{g\rho} - \frac{\dot{g}\dot{h}}{gh} - \frac{\dot{\rho}\dot{h}}{\rho h} \right] = 0 \quad (4.35)$$

$$(E_4^4)_D = E_4^4 + \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{g^2} \left[ \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + \frac{2\rho''}{\rho} - \frac{2\rho'g'}{\rho g} \right] + \frac{1}{h^2} \left[ \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2 + \frac{2\dot{\rho}\dot{g}}{\rho g} \right] = 0 \quad (4.36)$$

и дополняются еще двумя уравнениями

$$(E_1^4)_D = \frac{2}{g^2} \left( \frac{\dot{g}}{g} - \frac{\dot{g}\rho'}{g\rho} - \frac{\dot{\rho}\rho'}{\rho^2} - \frac{\dot{\rho}h'}{\rho h} \right), \quad (E_4^1)_D = -\left(\frac{g}{h}\right)^2 (E_1^4)_D \quad (4.37)$$

Здесь  $E_i^i$  ( $i = 1, 2, 4$ ) определяются равенствами (4.6)–(4.8), штрих обозначает, как и ранее, производную по  $r$ , а точка – производную по  $t$ . Решение Шварцшильда получено при координатном условии  $\rho = r$ . Поскольку  $r$  является независимой переменной,  $\dot{r} = \dot{r} = 0$  и уравнения (4.34) и (4.35) совпадают со статическими уравнениями (4.6) и (4.8). Решение этих уравнений при  $\rho = r$  определяется равенствами (4.18), а уравнения (4.7), (4.35) и (4.37) удовлетворяются тождественно. Таким образом, динамическое решение совпадает со статическим. Этот результат известен как теорема Биркгофа [2], согласно которой внешняя сферически симметричная задача имеет только статическое решение. Как следует из изложенного выше, такая формулировка неполна – теорема справедлива только при координатном условии  $\rho = r$ . Если  $\rho \neq r$ , динамическая задача не вырождается в статическую. Координатное условие  $\rho(r, t) = r$ , используемое в решении Шварцшильда, представляется не вполне обоснованным – функция двух переменных приравнивается одному из аргументов.

**5. Заключение.** На основе новой интерпретации гравитации в ОТО, ассоциируемой не с кривизной  $a$  с деформацией пространства, порождаемой гравитацией, установлена аналогия между линейризованными статическими уравнениями ОТО и уравнениями теории упругости, позволяющая использовать аппарат теории упругости для получения полной системы уравнений ОТО для метрического тензора. С использованием этой аналогии получено новое решение сферически симметричной статической задачи ОТО, не совпадающее с решением Шварцшильда. Решение предсказывает теоретическую возможность существования сплошного твердого сферического тела с постоянной плотностью, аналогичного черной дыре, но характеризуемого ограниченным уровнем гравитации и обладающего радиусом поверхности, составляющим  $2/3$  гравитационного радиуса.

В настоящей статье представлен новый подход к общей теории относительности. Редакция полагает, что он должен быть обсужден специалистами в данной области.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.
2. Синг Д.Л. Общая теория относительности. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. 432 с.
3. Вейнберг С. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. 696 с.
4. Чандрасекар С. Математическая теория черных дыр. М.: Мир, 1986. Ч. 1. 276 с. Ч. 2. 355 с.
5. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М.: Мир, 1977. Т. 1. 480 с. Т. 2. 525 с. Т. 3. 510 с.
6. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977. 431 с.
7. Yvonne Choquet-Bruhat. Theoreme d'Existence pour Certains Systemes d'Equations aux Derivees Partielles non Lineares. Acta Mathematica. 1952. V. 88. P. 141–225.
8. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Изд. ЛКИ, 2007. 568 с.
9. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
10. Васильев В.В., Федоров Л.В. Напряженное состояние упругого шара в сферически симметричном гравитационном поле // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 4. С. 15–29.
11. Васильев В.В., Федоров Л.В. Релятивистская теория упругости // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 3. С. 20–27.
12. Логунов А.А. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 2006. 253 с.

УДК 541.64:532.13:537.3

**ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛИЭТИЛЕНА  
ВЫСОКОЙ ПЛОТНОСТИ ПОСЛЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
ПОД ВЫСОКИМ ДАВЛЕНИЕМ**

© 2021 г. В. А. Жорин<sup>a,\*</sup>, М. Р. Киселев<sup>b,\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Институт химической физики им. Н.Н. Семенова РАН, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Институт физической химии и электрохимии им. А.Н. Фрумкина РАН, Москва, Россия*

\**e-mail: vzhorin@mail.ru*

\*\**e-mail: kisselev@phych.ac.ru*

Поступила в редакцию 11.03.2020 г.

После доработки 15.06.2020 г.

Принята к публикации 03.07.2020 г.

Исследовали термомеханические свойства образцов полиэтилена высокой плотности ( $T_{\text{mт}} = 142^\circ\text{C}$ ) подвергнутых пластическому деформированию под давлением 0.5–1.0–2.0 ГПа при комнатной температуре на аппарате высокого давления типа наковален. Уменьшение толщины деформированных образцов при нагревании зависит от давления обработки и состояния сжимающих наковален – заземленные или изолированные. УФ-облучение и хранение образцов при комнатной температуре уменьшало эффект вызванный деформированием. Установленные эффекты связывали с существенным влиянием на термомеханические свойства деформированных образцов зарядов, захваченных структурными дефектами, образовавшимися при пластическом деформировании полимера.

*Ключевые слова:* пластические деформации, высокое давление, полиэтилен высокой плотности

DOI: 10.31857/S0572329921030132

**1. Введение.** При пластическом деформировании под давлением 0.5–4.0 ГПа на аппарате высокого давления типа наковален Бриджмена в полиэтилене (ПЭ) регистрировали изменения как в кристаллической фазе, так и в аморфной. По данным ИК-спектроскопии [1] деформирование под давлением приводило к переходу орторомбической структуры ПЭ в триклинную; этот переход был зарегистрирован и рентгеноструктурным методом [2]. По данным ДСК при деформировании в полимере формируются сверхмелкие кристаллиты [3]. О возможности протекания процесса кристаллизации в деформируемом под давлением ПЭ указывают результаты по изучению вязкоупругих свойств полимера [4]. Полное восстановление кристаллической структуры деформированного ПЭ происходило при нагреве до  $100^\circ\text{C}$ .

В работе [5] при изучении молекулярной подвижности в деформированных под давлением образцах ПЭ использовали метод спинового зонда и ЯМР-анализ формы спадов свободной индукции. Было установлено общее снижение молекулярной подвижности в аморфной фазе, а также образование областей, плотность которых была выше плотности аморфной фазы в исходном полимере. Такие изменения в аморфной фазе связывали с формированием упорядоченных областей.

Важной характеристикой твердого тела, связанной с процессом пластического деформирования в микрообластях, является микротвердость. Для материалов с однородной структурой она не зависит от глубины вдавливания индентора в образец. В случае неоднородных образцов, например, слоистых структур это правило нарушается. Микротвердость существенно зависит от структуры твердого тела – рост количества структурных дефектов в металлах приводит к увеличению микротвердости.

В работе [6, 7] измеряли микротвердость образцов ПЭВП, деформирование которых под давлением проводили с наложением магнитного поля направленного перпендикулярно плоскости течения. Оказалось, что микротвердость таких образцов была существенно меньше, чем в образцах, обработанных под давлением без приложения магнитного поля. В работе [8] образцы ПЭВП деформированные под давлением на несколько минут помещали в постоянное магнитное поле. После такой “магнитной обработки” величина микротвердости образцов была существенно ниже, чем в исходном образце. Магнитное поле по своему энергетическому воздействию не может оказать прямого влияния на структуру твердого тела, а только на поведение зарядов в твердом теле.

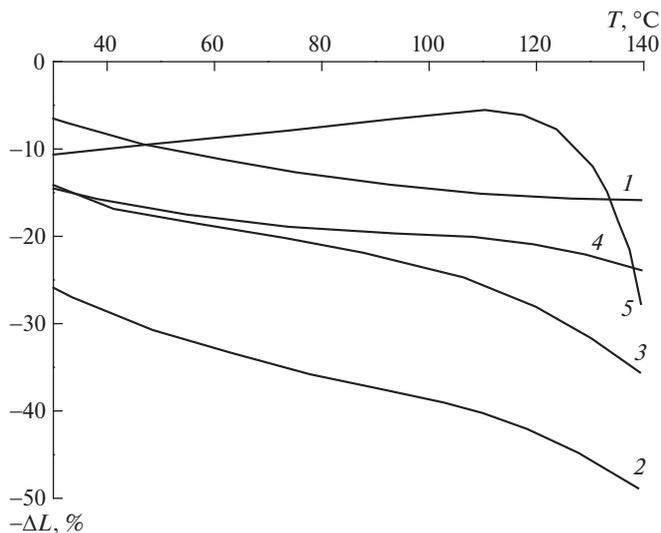
Структурные дефекты в твердых телах являются ловушками для электронов. При пластическом деформировании количество структурных дефектов в твердых телах увеличивается. В то же время воздействие высокого давления усиливает инжекцию электронов из металла наковален в деформируемый полимер, увеличивая, таким образом, число зарядов, которые могут быть захвачены структурными дефектами [9, 10]. По завершению деформирования и снятия давления часть структурных дефектов с захваченными электронами выйдет из материала образца, а часть останется. Это подтверждают проведенные в работах [11, 12] измерения термостимулированных токов на образцах ПЭВП деформированных под давлением.

Ячейка высокого давления по сути дела является конденсатором – между двумя металлическими наковальнями (обкладки конденсатора) помещен диэлектрик (полиэтилен). Процессы, протекающие в таком конденсаторе, будут зависеть от того, в каком состоянии находятся обкладки – заземленном, когда заряды могут стекать, или изолированном, когда заряды сохраняются.

Таким образом, имеющиеся данные свидетельствуют о том, что при пластическом деформировании под высоким давлением в ПЭ происходит перестройка, как в кристаллических, так и в аморфных областях. Наряду с изменениями в надмолекулярной структуре происходит захват инжектированных электронов структурными дефектами – это приводит к существенным изменениям электрофизического состояния полимера. При нагревании в полимере протекают релаксационные процессы, приводящие как к восстановлению надмолекулярной структуры, так и к изменению электрофизического состояния полимера.

Представляет интерес изучение физико-механических свойств ПЭСВМ деформированного под высоким давлением при нагревании таких образцов в зависимости от условий обработки.

**2. Экспериментальная часть.** В качестве объекта исследования был выбран порошкообразный сверхвысокомолекулярный полиэтилен (ПЭСВМ) с температурой плавления  $T_m = 141^\circ\text{C}$  и энтальпией плавления  $170 \text{ Дж} \cdot \text{г}^{-1}$ . Обработке под давлением подвергали также смеси ПЭСВМ-10 мас. % антрацена, янтарной кислоты, медного комплекса фталоцианина, адамантана, пентаэритрита, ацетиленовой сажи; смеси ПЭСВМ-10 мас. % низкомолекулярного компонента готовили в ступке. Для получения пленки исходного полимера порошкообразный полимер прессовали при температуре  $180^\circ\text{C}$  в течение 10 мин, а охлаждали при комнатной температуре. Деформированию под давлением 0.5–2.0 ГПа и комнатной температуре в ячейке высокого давления типа наковален подвергали порошкообразный полимер и порошкообразные смеси ПЭСВМ-низкомолекулярный компонент. Обработку под давлением проводи-



**Рис. 1.** Уменьшение толщины образцов ( $\Delta L$ , %) при нагревании: исходный полимер (1); после пластического деформирования под давлением 1 ГПа (2), повторный нагрев деформированного образца (3), нагрев деформированного образца через сутки (4)

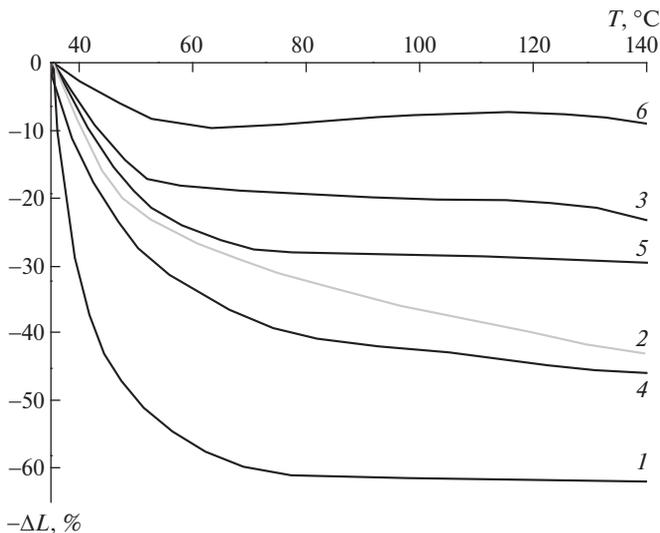
ли на наковальнях из закаленной стали ХВГ и твердого сплава ВК6. Образцы после обработки под давлением представляли собой прозрачные диски диаметром 20 мм (кроме смеси с сажей); для термомеханического исследования выбирали полимер из кольца 10–20 мм. Термомеханические измерения проводили на анализаторе ТМА Q 400 фирмы Intertech Corporation с расширительным микрозондом диаметром 2.54 мм; нагрузка на зонд составляла 2 г; измерения проводили в температурном диапазоне 35–140°C, а скорость подъема температуры составляла 20 град · мин<sup>-1</sup>.

**3. Результаты и их обсуждение.** На зависимости толщины образца от температуры (термограмме) исходного ПЭСВМ монотонное снижение толщины начиналось при 35°C, продолжалось до 140°C и достигало 15% (рис. 1). Известно, что при нагревании образцов полиэтилена высокой плотности в диапазоне 0–150°C происходит монотонное снижение как плотности [13], так и модуля упругости [14].

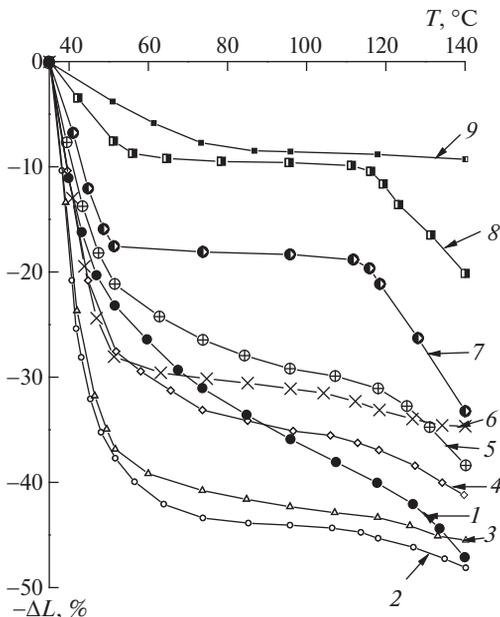
После пластического деформирования под давлением 1 ГПа все образцы были наэлектризованы и прилипали к рукам. Термограмма деформированного ПЭСВМ шла значительно ниже термограммы исходного полимера, а уменьшение толщины при 140°C достигало 48–49%. При повторном нагреве деформированного образца, следовавшем сразу после охлаждения до комнатной температуры, термограмма до 120°C шла выше, чем в исходном образце; уменьшение толщины ( $\Delta L$ ) в деформированном образце при 120°C составило 9%, а в исходном – 15%. При дальнейшем увеличении температуры снижение толщины ускорялось, и при 140°C достигало 28%.

При хранении деформированного образца при комнатной температуре в течение суток в материале протекали релаксационные процессы, приводившие к тому, что термограмма такого образца располагалась выше термограммы образца, полученной сразу после деформирования (рис. 1).

В деформированных образцах и при комнатных условиях и, тем более, при нагреве протекают процессы, приводящие к восстановлению надмолекулярной структуры. Релаксационные процессы приведут к уменьшению числа электронов в структурных



**Рис. 2.** Уменьшение толщины образцов ( $\Delta L$ , %) при нагревании после деформирования под давлением 0.5 ГПа (1), 1.0 ГПа (2), 2.0 ГПа (3); под давлением 1.0 ГПа на наковальнях ХВГ-ХВГ (2), ВК6-ВК6 (4), ХВГ-ВК6 (5); деформирование под давлением 1 ГПа на наковальнях ХВГ-ХВГ в изолированном режиме (6)



**Рис. 3.** Уменьшение толщины образцов ( $\Delta L$ , %) при нагревании в смесях содержащих 10 масс. % добавок после деформирования под давлением 1 ГПа: полимер без добавок (1), антрацен (2), янтарная кислота (3), фталоцианиновый комплекс меди (4), углерод (5), фенолфталеин (6), алмаantan (7), пентаэритрит (8), исходный ПЭСВМ (9), повторный нагрев образца с углеродом (9)

ловушках. Таким образом, уменьшение  $\Delta L$  в образцах как при хранении при комнатных условиях, так и при отжиге может быть связано как с изменениями в надмолекулярной структуре (кристаллической и аморфной фазах), так и в электронной подси-

Таблица 1

$P$ , ГПа	$-\Delta L$ , %				
	заземленные	изолированные	$-\Delta L$ , %	$t$	УФ
0.5	61	12	35	1	30
1.0	36	8	21	10	19
2.0	20	6	13	30	10

стеме деформированного полимера. Для того, чтобы разделить влияние этих двух факторов на исследуемый процесс, деформированный образец подвергли УФ-облучению с энергией 2.5 эВ в течение 10 мин так как согласно данным работ [15, 16] при УФ-облучении полимеров происходит выбивание электронов из ловушек.

Термограмма УФ-облученного образца проходила лишь несколько ниже термограммы исходного ПЭСВМ. Следует также обратить внимание на то, что в диапазоне 35–100°C, термограмма деформированного полимера через сутки хранения совпадала с термограммой деформированного УФ-облученного полимера. УФ-облучение по уровню своего энергетического воздействия на вещество не может изменить надмолекулярную структуру полимера, но оказывает влияние на количество и поведение захваченных зарядов в деформированном полимере. Таким образом, оказывая влияние на электронную подсистему, удается изменить свойство, которое обычно связывают с состоянием надмолекулярной структуры.

При нагревании полимера до температур близких к  $T_m$  происходит восстановление надмолекулярной структуры. При этом из материала образца выходят структурные дефекты с захваченными зарядами. При повторном нагреве такого образца значения  $\Delta L$  в диапазоне температур 80–130°C были даже меньше, чем в исходном полимере.

Описанные результаты были получены на образцах, обработку которых под давлением проводили на заземленных наковальнях. Для сравнения обработку под давлением 1 ГПа на паре стальных наковален провели в изолированном режиме. Для этого наковальни изолировали от массы прессы с помощью листов бумаги толщиной 0.5–1.0 мм. Термограмма такого образца лежала значительно выше термограммы образца, обработанного на заземленных наковальнях (рис. 2). Таким образом, состояние “обкладок конденсатора” (заземленные-изолированные) оказывает сильное влияние на физико-механические свойства деформированного полимера.

На рис. 2 приведены термограммы образцов ПЭСВМ деформированных при разных давлениях. Наибольшие значения  $\Delta L = 60$ –61% были зарегистрированы уже при 80–100°C в полимере, обработанном под давлением 0.5 ГПа. После обработки под давлением 2.0 ГПа значение  $\Delta L$  при 100°C составило 20%; т.е. при увеличении давления обработки значение  $\Delta L$  приближалось к значению в исходном полимере.

Термограммы образцов, обработанных при всех выбранных давлениях на изолированных наковальнях, лежали выше термограмм образцов обработанных на заземленных наковальнях. Значения  $\Delta L$  при 100°C после обработки при разных давлениях в изолированном варианте в 3.5–5 раз меньше, чем при обработке на заземленных наковальнях (табл. 1).

В табл. 1 приведены значения  $-\Delta L$  для образцов ПЭСВМ деформированных при разных давлениях ( $P$ , ГПа) в заземленном и изолированном режимах; после хранения при комнатных условиях ( $-\Delta L$ , % –  $t_{\text{хранения}}$  в сутки), а также после УФ-облучения.

Данные таблицы свидетельствуют о том, что в образцах при комнатной температуре протекают релаксационные процессы, приводящие к уменьшению  $\Delta L$ ; относительные изменения  $\Delta L$  практически совпадают для разных давлений обработки (0.5 ГПа –

61/35 = 1.7; 1.0 ГПа – 36/21 = 1.7; 2.0 ГПа – 20/13 = 1.5). Такое совпадение величин  $\Delta L$  может быть связано с тем, что основные релаксационные процессы протекают в деформированных образцах уже в течение первых суток после завершения обработки под давлением.

Релаксационные процессы при УФ-облучении приводят к двукратному снижению  $\Delta L$  по сравнению со свежеприготовленным образцом – эти изменения немного больше, чем при релаксации в комнатных условиях.

Следует отметить, что различие в величинах  $\Delta L$  при 100°C для образцов, обработку которых под давлением 0.5 и 2.0 ГПа проводили на заземленных наковальнях, а затем такие образцы выдерживали при комнатной температуре, а также подвергали УФ-облучению, составило 2.7–3.0 раза. В то же время для образцов, обработанных при разных давлениях на изолированных наковальнях, разница составила 2 раза.

Таким образом, релаксационные процессы в деформированном полимере протекают как при нагревании, так и при комнатной температуре при длительном хранении, а также при УФ-облучении.

При совместном воздействии высокого давления и сдвиговых деформаций на твердые тела с разным типом химической связи в образцах увеличивается количество структурных дефектов, являющихся ловушками зарядов. По данным рентгеноструктурного анализа это проявляется в уменьшении размеров областей когерентного рассеяния (ОКР). Минимальное значение ОКР в наших условиях достигается при угле поворота наковален 400–500 град. Увеличении давления деформирования также приводит к уменьшению размеров ОКР; наиболее сильно этот эффект проявляется при давлениях обработки до 2 ГПа. Наряду с этим при увеличении давления обработки усиливается процесс инжекции электронов из металла наковален в диэлектрик. Таким образом, при пластическом деформировании под высоким давлением увеличивается как количество структурных ловушек для носителей тока, так и количество инжектированных электронов, часть из которых может быть захвачена структурными ловушками.

Представлял интерес вопрос о том, можно ли в условиях данной методики изменить и количество структурных дефектов, и количество инжектированных электронов, и как это отразится на величине  $\Delta L$ . Для ответа на этот вопрос образцы полимера начинали деформировать под давлением 2 ГПа и при угле поворота наковален 300 град, не прекращая деформирования, начинали снижать давление (режим “деформирование при снижении давления”). По мере снижения давления из образца выходили структурные дефекты с большим количеством захваченных электронов; при этом снижалось количество дефектов, а также количество захваченных зарядов из-за ослабления процесса инжекции. Суммарный угол поворота при такой обработке не превышал 600–700 град, а значение  $\Delta L$  в диапазоне 80–120°C составило 14%, т.е. мало отличалось от величины в исходном полимере.

Известно, что физико-механические свойства полимеров возрастают при увеличении молекулярной массы до определенного предела и после этого не меняются. В работе [17] было показано, что деформирование под давлением приводит к снижению молекулярной массы полимера: если в исходном полиэтилене молекулярная масса составляла  $10^{6.7}$ , то после обработки под давлением 0.5 ГПа она снижалась до  $10^{6.6}$ , а после 2.0 ГПа – до  $10^{6.4}$ . Такие изменения молекулярной массы вряд ли могут существенно повлиять на физико-механические свойства полимера.

Описанные выше результаты были получены на образцах, обработку которых под давлением проводили на наковальнях из стали ХВГ. Для изучения влияния материала наковален (материала “обкладок конденсатора”) на свойства деформированного полимера обработку под давлением 1 ГПа провели на наковальнях из твердого сплава ВК6 и на паре разнородных наковален – ХВГ-ВК6. Сплав ВК6 превосходит по твердо-

сти сталь ХВГ и, кроме того, работа выхода электрона для твердого сплава выше, чем для стали.

Как видно из данных приведенных на рис. 2 термограмма полимера, обработанного на твердосплавных наковальнях, идет несколько ниже термограммы образца, обработанного на стальных наковальнях. В то же время термограмма образца, обработанного на паре разнородных наковален (сталь ХВГ–твердый сплав ВК6), в диапазоне 80–140°C лежит значительно выше термограмм образцов, обработанных на однородных наковальнях.

Таким образом, величина  $\Delta L$  в деформированных образцах ПЭСВМ зависит от материала наковален, давления обработки, процедуры обработки (снижение давления при деформировании).

Повлиять на заряды в полимере можно, вводя в него различные добавки. При пластическом деформировании под высоким давлением в смесях уменьшаются размеры гетерогенных областей. Этот процесс сопровождается формированием протяженной межфазной границей, на которой локализуются заряды – образуются двойные электрические слои. Кроме того, согласно данным работы [18] межфазные границы, обладают повышенной атомарно-молекулярной подвижностью.

На рис. 3 приведены термограммы смесей ПЭСВМ с 10 мас. % различных органических соединений и углерода (ацетиленовая сажа) после деформирования под давлением 1 ГПа. Для всех выбранных добавок  $T_m$  были значительно выше 140°C. Значения  $\Delta L$  в смесевых образцах лежали в широких пределах: от 42–44% в смесях с антраценом и янтарной кислотой до 9% в смеси с пентаэритритом. Представляет интерес сопоставить результаты, полученные для смесей, с результатами для ПЭСВМ: пентаэритрит – исходный ПЭСВМ = 9–13%; адамантан – ПЭСВМ после 2 ГПа = 19–20%; фенолфталин, сажа – ПЭСВМ наковальни ХВГ-ВК = 29–31%–29%; медный комплекс фталоцианина – ПЭСВМ после 1 ГПа = 35–36%; антрацен, янтарная кислота – ПЭСВМ наковальни ВК-ВК = 42–44%–42%.

Образец смеси с углеродом подвергали повторному нагреву. В этом случае термограмма лежала выше термограммы исходного ПЭСВМ (рис. 3).

Химические соединения, выбранные в качестве добавок к ПЭСВМ, в обычных условиях различаются по строению и химическим свойствам. Так пентаэритрит – это четырехатомный спирт, гидроксильные группы которого, образуют водородные связи. Близкий к нему по величине  $\Delta L$  малоактивный адамантан имеет сферически симметричную молекулу. Двухосновная янтарная кислота в ряду органических кислот является одной из наиболее активных и образует водородные связи. Антрацен – устойчивое химическое соединение, значение  $\Delta L$  для смесей которого мало отличается от  $\Delta L$  для смеси с янтарной кислотой, сильно электризуется при перетирании в ступке. Сажа является электропроводящим материалом. Близким компонентом к саже по величине  $\Delta L$  является фталоцианин меди, электропроводность которого при деформировании под давлением 1 ГПа возрастает в  $10^6$  раз, приближаясь по проводимости к хорошим металлам [19].

Следует также отметить, что все вещества, выбранные в качестве добавок, при обработке под давлением 1 ГПа не испытывают химических превращений.

При нагревании исходного ПЭСВМ происходит уменьшение толщины полимерной пленки, которое при 100°C составляет  $\Delta L = 13\%$ . В результате деформирования под давлением в полимере формируются дефекты, способные захватывать электроны, как инжектированные в полимер из металла наковален, так и образовавшиеся при деструкции полимера. Таким образом, в определенной мере пластические свойства деформированного полимера могут определяться структурными дефектами с захваченными электронами. Пластическое деформирование полимера под давлением 1 ГПа на заземленных наковальнях приводит к возрастанию  $\Delta L$  до 36% – образец становится как бы более пластичным. УФ-облучение выбивает из образца может быть только

часть захваченных структурными дефектами зарядов. При этом значение  $\Delta L$  уменьшается до 19%, т.е. образец теряет часть своих пластических свойств, приближаясь к исходному полимеру.

При нагреве до 140°C в деформированном образце происходит восстановление надмолекулярной структуры. При повторном нагрева такого образца (отожженное состояние) значение  $\Delta L$  при 100°C составило 7% – это меньше, чем в исходном образце.

Разница между  $\Delta L = 36\%$  в образце, обработанном под давлением 1 ГПа и  $\Delta L = 7\%$  в отожженном образце составляет 29%. Увеличение  $\Delta L$  в результате УФ-облучения составляет 17%. Таким образом, можно сказать, что вклад в увеличение пластичности в деформированном образце на 58.6% связан с присутствием в образцах локализованных зарядов. Разница между  $\Delta L$  в облученных образцах и в отожженном состоянии составляет 12% – это может означать, что увеличение пластичности деформированного образца на 41.4% связано со структурными изменениями.

**Заключение.** Для понимания процессов проходящих в смесевых образцах при деформировании под давлением и приводящих к изменениям термомеханических свойств, необходимо принимать во внимание ряд факторов. В деформированных бicomпонентных смесях количество структурных дефектов в каждом из компонентов значительно больше, чем при деформировании индивидуальных веществ. В смесевых образцах при деформировании возникает разветвленная межфазная граница, на которой формируются двойные электрические слои. Разноименные заряды на противоположных поверхностях могут приводить к усилению межмолекулярного взаимодействия, оказывая, таким образом, влияние на термомеханические свойства образцов. Компоненты, способные образовывать водородные связи, также могут оказать влияние на межмолекулярные связи. Образующиеся при деформировании активные свежевысвобожденные поверхности на частицах органической добавки могут оказать влияние на процесс формирования надмолекулярной структуры полимера – эпитаксиальный рост кристаллитов. Необходимо также учитывать, что добавки могут при пластическом деформировании менять свои электрофизические и химические свойства.

Работа выполнена за счет субсидии, выделенной ИХФ РАН на выполнение государственного задания; тема 0082-2019-0003 “Разработка методологии синтеза новых высокополимеров, олигомеров и макрономеров и изучение влияния структуры полимеров на их свойства”; АААА-А17-117032750201-9.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жорин В.А., Киссин Ю.В., Луизо Ю.В., Фридман Н.М., Ениколопан Н.С. Структурные изменения в полиолефинах при высоких давлениях в сочетании с деформациями сдвига // Высокомолек. соед. А. 1976. Т. 18. № 12. С. 2677–2680.
2. Купцов С.А., Ерина Н.А., Жорин В.А., Антипов Е.М., Прут Э.В. Структура полиолефинов, подвергнутых пластическому течению в условиях высокого давления // Высокомолек. соед. А. 1995. Т. 37. № 10. С. 1692–1698.
3. Жорин В.А., Годовский Ю.К., Ениколопан Н.С. Калориметрическое исследование изменений в кристаллических полимерах и их смесях, вызванных совместным воздействием высоких давлений и сдвиговых деформаций // Высокомолек. соед. А. 1982. Т. 24. № 5. С. 953–959.
4. Бадаев А.С., Жорин В.А., Перепечко И.И., Ениколопан Н.С. Вязкоупругие свойства полиэтилена после пластического течения под высоким давлением // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289. № 5. С. 1148–1151.
5. Жорин В.А., Сапрыгин О.Н., Барашкова И.И., Литвинов В.М., Ениколопан Н.С. Молекулярная подвижность в полиэтилене после пластического течения под давлением // Высокомолек. соед. А. 1988. Т. 31. № 6. С. 1311–1315.
6. Жорин В.А., Мухина Л.Л., Разумовская И.В. Изменение микротвердости полиэтилена и полипропилена в результате пластического течения под высоким давлением // Высокомолек. соед. Б. 1998. Т. 40. № 6. С. 1035–1039.

7. Жорин В.А., Мухина Л.Л., Разумовская И.В. Влияние электрофизических факторов на микропластические свойства некоторых полиолефинов, формируемые в процессе пластического течения под высоким давлением // Докл. АН СССР. 1998. Т. 358. № 4. С. 502–504.
8. Жорин В.А., Мухина Л.Л., Разумовская И.В. Влияние магнитной обработки на микротвердость полиэтилена и полипропилена // Высокомолек. соед. Б. 1998. Т. 40. № 7. С. 1213–1215.
9. Ениколопан Н.С., Берлин Ю.А., Бешенко С.И., Жорин В.А. Новое высокопроводящее состояние композиций металл-полимер // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 6. С. 1400–1403.
10. Берлин Ю.А., Бешенко С.И., Жорин В.А., Ениколопан Н.С. Влияние высокого давления на положение дна зоны проводимости диэлектриков и возможная физическая природа высокопроводящего состояния композиций металл-полимер // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 2. С. 364–367.
11. Жорин В.А., Луцкейкин Г.А., Разумовская И.В. Электрические заряды, формируемые при пластическом течении под высоким давлением // Высокомолек. соед. А. 2001. Т. 43. № 12. С. 2163–2169.
12. Жорин В.А., Луцкейкин Г.А., Разумовская И.В. Термостимулированные токи в полиэтилене высокой плотности и его смесях с различными компонентами после пластического деформирования под высоким давлением // Пластические массы. 2013. № 10. С. 18–21.
13. Пивень А.Н., Гречаная Н.А., Чернобыльский И.И. Теплофизические свойства полимерных материалов. Киев, Визша школа. С. 102.
14. Майгельдинов И.А., Цюр К.И. Термомеханические свойства кристаллических полимеров // Высокомолек. соед. 1963. Т. 5. № 2. С. 243–250.
15. Никольский В.Г., Алфимов М.В., Бубен Н.Я. Изменение спектров ЭПР при оптическом отбеливании облученных органических веществ // Журн. физ. химии. 1963. Т. 37. № 12. С. 2797–2798.
16. Никольский В.Г. Изменение термолюминесценции облученного полиэтилена при освещении монохроматическим светом // Химия высоких энергий. 1968. Т. 2. № 3. С. 271–273.
17. Жорин В.А. Процессы в полимерах и низкомолекулярных веществах, сопровождающие пластическое течение под высоким давлением // Высокомолек. соед. А. 1994. Т. 36. № 4. С. 559–578.
18. Галиханов М.Ф., Лучихина Т.А. Электретные свойства смесей полиэтилена высокой плотности и полистирола // Журн. прикл. хим. 2006. Т. 79. № 7. С. 1163–1167.
19. Берлин Ю.А., Бешенко С.И., Жорин В.А., Ениколопан Н.С. Роль дативного  $\pi$ -эффекта в механизме электропроводности металлокомплексов фталоцианинов в условиях высокого давления и сдвиговых деформаций // Журн. физ. химии. 1982. Т. 56. № 2. С. 499–450.

**ГЕННАДИЙ ИСААКОВИЧ КАНЕЛЬ**  
**(30.06.1944–31.01.2021)**

DOI: 10.31857/S0572329921030089

31 января 2021 года ушел из жизни член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, член редколлегии журнала “Известия РАН. Механика твердого тела” Геннадий Исаакович Канель.

Г.И. Канель был выдающимся специалистом в области физики и механики ударных волн в конденсированных средах, физики прочности, теплофизики и химической физики. Г.И. Канель – лауреат Государственной премии СССР 1988, кавалер медали ордена “За заслуги перед отечеством” 2005. Лауреат Международной премии Джорджа Дюваля Американского физического общества 2013 “За выдающийся вклад в физику ударных волн в конденсированных средах, открытие и исследование аномального термического упрочнения, перегретых твердотельных состояний, волн разрушения, исследования субмикросекундных прочностных свойств материалов в широком диапазоне нагрузки и температуры”.

Г.И. Канель на протяжении многих лет был членом редколлегии журнала “Известия РАН. Механика твердого тела”, публиковал в нем свои работы. Геннадий Исаакович был не только крупным ученым, но и яркой личностью, отзывчивым и доброжелательным человеком, готовым делиться своими знаниями и опытом.