Russian Academy of Sciences

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 85. Iss. 5

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

September–October

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:
В.Г. Байдулов – отв. секретарь
Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245
Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49
E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: http://pmm.ipmnet.ru

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706
ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:
V.G. Baydulov – executive secretary
E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia
Phone: 8 (495) 434-21-49
E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL : http://pmm.ipmnet.ru

The subscription index in Rospechat catalogue 70706
ISSN 0021-8928

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА **Том 85, № 5, 2021**

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 5, с. 547–564

УДК 531.381

К столетию со дня рождения академика В.В. Румянцева

ПОЛУРЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЖИДКИМ НАПОЛНЕНИЕМ

В. Ю. Ольшанский[1],*

[1] *Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия*
**e-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru*

Поступила в редакцию 10.01.2021 г.
После доработки 16.02.2021 г.
Принята к публикации 05.03.2021 г.

Для описания вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, используются уравнения Пуанкаре–Жуковского. Получены связи (называемые конфигурационными условиями) между моментами инерции твердого тела и полости с жидкостью, при которых твердое тело может совершать полурегулярную прецессию, когда скорость прецессии постоянна, а скорость собственного вращения изменяется со временем. При совпадении оси собственного вращения с главной осью инерции достаточно одного условия, если оси не совпадают, то конфигурационных условий два. Показано, что при выполнении конфигурационных условий полурегулярной прецессии уравнения Пуанкаре–Жуковского обладают инвариантной системой из трех линейных функций. Выполнен анализ конфигурационных условий для систем, близких к сферически симметричным.

Ключевые слова: твердое тело с жидким наполнением, уравнения Пуанкаре–Жуковского, полурегулярная прецессия

DOI: 10.31857/S0032823521040111

1. Введение. Известная модель Пуанкаре–Жуковского–Хафа широко применяется со времени своего создания [1–3] при анализе движения твердого тела с жидким наполнением из-за возможности использования системы обыкновенных дифференциальных уравнений для описания такого движения в случае эллипсоидальной полости с идеальной завихренной жидкостью.

Начиная с работ [2, 3], в которых изучены малые возмущения равномерного вращения системы “твердая мантия + жидкое ядро” в связи с задачей о свободной нутации земной оси, модель Пуанкаре–Жуковского–Хафа применялась для описания вращения Земли, некоторых других планет и спутников. Эта модель продолжает активно использоваться и в настоящее время. Изучено [4] вращение Земли и Венеры (при гравитационных возмущениях со стороны Солнца) в случае осесимметричной мантии и ядра. Рассмотрен [5] случай, когда эллипсоиды инерции мантии и ядра соосны и пропорциональны. Исследовалось [6–8] влияние вращения жидкого ядра на либрацию Меркурия. Выделены [9] случаи, когда трехосное жидкое ядро сильно сплющено и слабо сплющено. Модель Пуанкаре–Жуковского–Хафа использовалась также и для описания вращения твердого спутника с глобальным подповерхностным океаном [10]. При изучении состояний Кассини небесных тел [11] рассмотрен случай, когда оси эллипсоидального жидкого ядра не совпадают с главными осями инерции твердой мантии.

Важным простым и одновременно нетривиальным частным случаем, который встречается при описании движения некоторых технических объектов и естественных космических тел, является прецессия. Регулярная прецессия динамически симметричного свободного и тяжелого твердых тел хорошо изучена. Известны примеры регулярной прецессии несимметричного твердого тела в однородном поле тяжести [12], других силовых полях [13, 14].

Известно также, что осесимметричная система "тело + жидкость" может совершать прецессию как при отсутствии внешних сил, так и в однородном поле тяжести. Один частный случай регулярной прецессии неосесимметричной системы "тело + жидкость" был впервые отмечен [15] при нахождении условий существования линейной инвариантной системы уравнений Пуанкаре–Жуковского. Позже [16] были найдены конфигурационные условия, при которых несимметричная система "тело + жидкость" может совершать регулярную прецессию. Было показано [16], что если ось собственного вращения совпадает с одной из главных осей инерции, то достаточно одного конфигурационного условия, иначе число условий равно двум. Выполнено [17] упрощение конфигурационных условий и формул для вычисления скоростей прецессии и собственного вращения. Для интересного при изучении динамики планет случая, когда система мало отличается от сферически симметричной, показано [17], что отношение скоростей прецессии и собственного вращения совпадает с точностью до малых второго порядка включительно с отношением этих скоростей для прецессии соответствующего осесимметричного твердого тела с пустой (не заполненной жидкостью) полостью.

При рассмотрении нерегулярной прецессии выделяют [13] движения, когда постоянна величина либо скорости собственного вращения (полурегулярная прецессия первого рода), либо скорости прецессии (полурегулярная прецессия второго рода). Известны примеры таких прецессий твердых тел в различных силовых полях [13], твердого тела, несущего гиростаты [18].

Несколько частных случаев нерегулярной прецессии несимметричной системы "твердое тело + жидкость" отмечены при построении новых линейных инвариантных соотношений [19, 20].

Ниже решается следующая задача: определить при каких связях между коэффициентами уравнений Пуанкаре–Жуковского (т.е. при каких конфигурациях несимметричной системы "твердое тело + жидкость") эти уравнения допускают решение, описывающее полурегулярную прецессию первого рода.

Получены конфигурационные условия; как и для регулярной прецессии [16, 17] в случае совпадения оси собственного вращения с главной осью инерции достаточно одного условия, если оси не совпадают, то условий два. Выделены периодические решения. Найдены скорости прецессии и собственного вращения. Показано, что при выполнении полученных в работе конфигурационных условий полурегулярной прецессии уравнения Пуанкаре–Жуковского обладают инвариантной системой из трех линейных функций.

Выполнен анализ конфигурационных условий для систем, близких к сферически симметричным. Доказано, что для таких систем полурегулярная прецессия, так же как и регулярная прецессия [17] возможна, только если ось собственного вращения совпадает с одной из главных осей инерции.

2. Постановка задачи. Для описания движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной невязкой несжимаемой жидкостью, используются уравнения Пуанкаре–Жуковского–Хафа [1–3]. При отсутствии внешних сил уравнения могут быть записаны в виде (см. [21, 22])

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{K}\times\left(\mathbf{A}'\mathbf{K} + \mathbf{B}'\mathbf{S}\right), \quad \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\times(\mathbf{B}'\mathbf{K} + \mathbf{C}'\mathbf{S}) \tag{2.1}$$

Здесь **K** – кинетический момент системы, вектор **S** пропорционален завихренности жидкости **Ω**; в подвижной системе отсчета $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, жестко связанной с главными осями инерции твердого тела, компоненты вектора **S** имеют вид

$$S_1 = -\frac{2}{5}\mu d_2 d_3 \Omega_1 \quad (1\ 2\ 3),$$

где d_1, d_2, d_3 – полуоси полости и μ – масса жидкости.

Если главные центральные оси инерции твердого тела совпадают с осями эллипсоидальной полости, то элементы A_i, B_i, a_i, b_i, c_i диагональных матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$ задаются равенствами

$$\begin{gathered} A_1 = A_1^s + A_1^{\mathrm{eq}}, \quad A_1^{\mathrm{eq}} = \frac{\mu}{5}\frac{(d_2^2 - d_3^2)^2}{d_2^2 + d_3^2}, \quad B_1 = \frac{4\mu}{5}\frac{d_2^2 d_3^2}{d_2^2 + d_3^2} \quad (1\ 2\ 3) \\ a_i = \frac{1}{A_i}, \quad b_i = \beta_i a_i, \quad c_i = \gamma_i + \beta_i^2 a_i, \quad \beta_1 = \frac{2 d_2 d_3}{d_2^2 + d_3^2}, \quad \gamma_1 = \frac{5}{\mu(d_2^2 + d_3^2)} \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь A_i^s – главные моменты инерции твердого тела, параметры A_i и A_i^{eq} называют ([1], [22]) моментами инерции, соответственно, преобразованного и эквивалентного тела.

Система (2.1) при диагональных матрицах записывается в виде

$$\begin{gathered} \dot{K}_1 = -\Delta a_1 K_2 K_3 + b_3 S_3 K_2 - b_2 S_2 K_3, \quad \Delta a_1 = a_2 - a_3 \\ \dot{S}_1 = -\Delta c_1 S_2 S_3 + b_3 K_3 S_2 - b_2 K_2 S_3, \quad \Delta c_1 = c_2 - c_3 \quad (1\ 2\ 3) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Угловая скорость твердого тела выражается по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}'\mathbf{K} + \mathbf{B}'\mathbf{S} \tag{2.4}$$

В случае прецессии угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ имеет два компонента, направление одного из которых постоянно в инерциальной системе отсчета, а другого – постоянно в системе отсчета, связанной с телом. В рассматриваемом случае, когда момент внешних сил равен нулю, вектор кинетического момента постоянен в инерциальном пространстве и движением тела будет прецессия, если его угловая скорость представима в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_r \mathbf{m} + \omega_p \mathbf{K}^0 \tag{2.5}$$

Здесь ω_r, ω_p – скорости собственного вращения и прецессии, **m** – единичный вектор, фиксированный в подвижной системе, $\mathbf{K}^0$ – орт **K**.

Если скорости ω_r, ω_p постоянны, то прецессия называется регулярной, если постоянна только одна из скоростей – полурегулярной. Если постоянна скорость прецессии ω_p, то движение называют полурегулярной прецессией первого типа; всюду в статье рассматривается этот случай.

При условии (2.5) использование переменной φ, такой что

$$\dot{\varphi} = \omega_r \tag{2.6}$$

позволяет записать первое уравнение (2.1) как линейное

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} \times \mathbf{m} \tag{2.7}$$

Здесь и далее $(\,)' = d(\,)/d\varphi$.

Учитывая равенства (2.4) и (2.5), компоненты вектора **S** можно выразить через компоненты кинетического момента и скорости ω_r и ω_p

$$S_i = x_i K_i + \omega_r \frac{m_i}{b_i}, \quad x_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\tilde{\omega}_p - a_i}{b_i}, \quad \tilde{\omega}_p \overset{\text{def}}{=} \frac{\omega_p}{|\mathbf{K}|}, \quad i = 1,2,3 \tag{2.8}$$

Параметры x_i связаны условиями

$$b_2 x_2 - b_3 x_3 = \Delta a_1 \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.9}$$

Из равенств (2.6)–(2.8) получаем

$$\dot{S}_1 = \left(x_1 (m_3 K_2 - m_2 K_3) + \frac{m_1}{b_1} \omega_r' (\varphi) \right) \omega_r \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.10}$$

Вторая подсистема (2.3) после подстановки в нее S_i и $\dot{S}_i$ из равенств (2.8) и (2.10) принимает вид

$$\left(\frac{m_2}{b_2} (\rho_{23} - \Delta c_1 x_3) K_3 - \frac{m_3}{b_3} (\rho_{32} + \Delta c_1 x_2) K_2 \right) \omega_r + \sigma_1 K_2 K_3 - \frac{m_1}{b_1} \omega_r' \omega_r = \frac{m_2 m_3}{b_2 b_3} \Delta c_1 \omega_r^2 \tag{2.11}$$
$$\rho_{23} = b_3 + b_2 x_1, \quad \rho_{32} = b_2 + b_3 x_1 \quad (1\ 2\ 3)$$

Здесь

$$\sigma_1 = -\Delta c_1 x_2 x_3 + b_3 x_2 - b_2 x_3 \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.12}$$

Ниже определим, при каких связях между параметрами a_i, b_i, c_i и при какой функции $\omega_r(\varphi)$ могут быть выполнены условия (2.11) для функций K_i, являющихся решением системы (2.7). После определения $\omega_r(\varphi)$ связь между переменными t и φ находим, интегрируя равенство (2.6).

Ранее было показано [16, 17], что регулярная прецессия несимметричной системы “твердое тело + жидкость” возможна только если $m_1 m_2 m_3 = 0$. Примеров полурегулярной прецессии в случае, когда все три компонента вектора **m** не равны нулю, также не удается построить.

3. Полурегулярная прецессия, **случай** $m_2 = 1$, $m_1 = m_3 = 0$. Для случая, когда ось собственного вращения совпадает с главной осью инерции, определим конфигурации системы “твердое тело + жидкость”, при которых возможна полурегулярная прецессия и найдем скорости прецессии и собственного вращения.

Общее решение системы (2.7) и система (2.11) записываются в виде

$$K_1 = q_0 \cos\varphi, \quad K_2 = q_1, \quad K_3 = q_0 \sin\varphi, \quad q_0, q_1 = \text{const} \tag{3.1}$$

$$\sigma_i b_2 K_2 + \rho_i \omega_r = 0, \quad i = 1,3, \quad b_2 \sigma_2 K_1 K_3 = \omega_r \omega_r' \tag{3.2}$$

$$\rho_1 = -\Delta c_1 x_3 + b_3 + b_2 x_1, \quad \rho_3 = -\Delta c_3 x_1 - b_1 - b_2 x_3 \tag{3.3}$$

Нетрудно проверить, что условия (3.1) и (3.2) при $\omega_r \neq \text{const}$ могут быть выполнены, только если $q_1 = K_2 = 0$ и выполнены условия $\rho_1 = \rho_3 = 0$. Из этих условий, учитывая формулы (3.3), получаем следующие выражения для параметров x_1 и x_3

$$x_1 = -\frac{b_1 \Delta c_1 + b_2 b_3}{b_2^2 + \Delta c_1 \Delta c_3}, \quad x_3 = \frac{b_3 \Delta c_3 - b_1 b_2}{b_2^2 + \Delta c_1 \Delta c_3} \tag{3.4}$$

Учитывая связь (2.9), получим конфигурационное условие

$$b_1^2 \Delta c_1 + b_3^2 \Delta c_3 + b_2^2 \Delta a_2 + \Delta c_1 \Delta c_3 \Delta a_2 = 0 \tag{3.5}$$

Из равенств (3.1) и третьего равенства (3.2) найдем

$$\omega_r^2 = C - \frac{1}{2} b_2 \sigma_2 q_0^2 \cos 2\varphi$$

При $\rho_1 = \rho_3 = 0$ имеем $\sigma_2 = b_2 \left(x_1^2 - x_3^2\right)$ и формулу для скорости собственного вращения можно записать в виде

$$\omega_r^2 = (\dot{\varphi})^2 = C - \frac{1}{2} b_2^2 \left(x_1^2 - x_3^2\right) q_0^2 \cos 2\varphi \tag{3.6}$$

Скорость прецессии выражается по формуле (2.8)

$$\frac{\omega_p}{q_0} = \tilde{\omega}_p = a_1 + b_1 x_1 = a_3 + b_3 x_3 \tag{3.7}$$

Выше показано, что для того, чтобы движением системы “твердое тело + жидкость” в случае совпадения оси собственного вращения с главной осью была полурегулярная прецессия, необходимо выполнение конфигурационного условия (3.5). Это условие дает, при учете формул (2.2), одну связь между главными моментами инерции твердого тела и моментами инерции жидкого ядра. В разделе 5 показано, что при соответствующих начальных условиях данного условия также и достаточно для полурегулярной прецессии системы.

После интегрирования уравнения (3.6) получим либо периодическое решение $K_i(t)$, $S_i(t)$, либо решение, асимптотически приближающееся при $t \to \infty$ к стационарному. Далее будем рассматривать случай периодического решения, представляющий интерес при изучении динамики естественных космических тел.

Уравнение (3.6) преобразуем к виду

$$(\dot{\varphi})^2 = b_2^2 \left(\left(S_2^0\right)^2 + \left(x_3^2 - x_1^2\right)\left(\left(K_3^0\right)^2 - K_3^2\right)\right), \quad K_3 = q_0 \sin\varphi$$

Полагая

$$|x_3| > |x_1|, \quad \left(S_2^0\right)^2 > \left(x_3^2 - x_1^2\right)\left(K_1^0\right)^2$$

уравнение запишем в виде

$$\dot{\varphi} = \lambda\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}, \quad 0 < k^2 < 1$$

$$\lambda = \pm b_2 \sqrt{\left(S_2^0\right)^2 + \left(x_3^2 - x_1^2\right)\left(K_3^0\right)^2}, \quad k^2 = \frac{\left(x_3^2 - x_1^2\right)\left(\left(K_1^0\right)^2 + \left(K_3^0\right)^2\right)}{\left(S_2^0\right)^2 + \left(x_3^2 - x_1^2\right)\left(K_3^0\right)^2}$$

Выполнив интегрирование, запишем решение, используя эллиптические функции Якоби

$$K_1 = K \operatorname{cn} t', \quad K_2 = 0, K_3 = K \operatorname{sn} t', \quad K^2 = \left(K_1^0\right)^2 + \left(K_3^0\right)^2$$

$$S_1 = x_1 K \operatorname{cn} t', \quad b_2 S_2 = \omega_\varphi = \lambda \operatorname{dn} t', \quad S_3 = x_3 K \operatorname{sn} t'$$

$$\varphi = \operatorname{am} t', \quad \sin\varphi = \operatorname{sn} t', \quad \cos\varphi = \operatorname{cn} t', \quad \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \operatorname{dn} t', \quad t' = \lambda t + c$$

4. Полурегулярная прецессия, случай $m_2 = 0$, $m_1 m_3 \neq 0$. Найдем конфигурационные условия полурегулярной прецессии в случае, когда ось собственного вращения не совпадает с главной осью инерции.

Решение системы (2.7) записывается в виде

$$K_1 = q_1 m_1 - q m_3 \cos\varphi, \quad K_2 = q\sin\varphi, \quad K_3 = q_1 m_3 + q m_1 \cos\varphi \tag{4.1}$$

Получим условия, при которых могут быть выполнены уравнения (2.11) с данными функциями K_i.

Рассмотрим сначала случай $q_1 = 0$. Обозначив $z = \omega_r/(q\cos\varphi)$, второе уравнение (2.11) запишем в виде

$$\left(m_3^2 b_1 (b_1 - \Delta c_2 x_1 + b_3 x_2) + m_1^2 b_3 (b_3 + \Delta c_2 x_3 + b_1 x_2)\right) z + \\ + m_1 m_3 \Delta c_2 z^2 + b_1 b_3 m_1 m_3 \sigma_2 = 0 \tag{4.2}$$

Если $z = \text{const}$, то $\omega_r = \text{const}\cdot\cos\varphi$. В этом случае получаемое после интегрирования уравнения (2.6) решение $K_i(t)$, $S_i(t)$ будет не периодическим, а стремящимся при $t \to \infty$ к стационарному значению. Как и выше, этот случай не будем рассматривать.

Если же $z \neq \text{const}$, то условие (4.2) может быть выполнено, только если все коэффициенты при z равны нулю, т.е.

$$\Delta c_2 = 0 \tag{4.3}$$

$$b_3 x_1 = b_1 x_3, \quad m_3^2 \frac{b_1}{b_3} + m_1^2 \frac{b_3}{b_1} + x_2 = 0 \tag{4.4}$$

Первое и третье уравнения (2.11) записываются в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_1 K_2 K_3 - \left(\frac{m_3}{b_3}(b_2 + \Delta c_1 x_2 + b_3 x_1) K_2 + \frac{m_1}{b_1}\omega_r'\right)\omega_r = 0 \\ &\sigma_3 K_1 K_2 + \left(\frac{m_1}{b_1}(b_2 - \Delta c_3 x_2 + b_1 x_3) K_2 - \frac{m_3}{b_3}\omega_r'\right)\omega_r = 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Если здесь первое равенство умножить на $m_3 b_1$, второе – на $m_1 b_3$ и сложить, то, учитывая условия (4.3) и (4.4), получим

$$\left(m_3^2 \frac{b_1}{b_3} + m_1^2 \frac{b_3}{b_1}\right)(b_2 + \Delta c_1 x_2 + b_3 x_1)\,\omega_r = m_1 m_3 q\,(b_1\sigma_1 + b_3\sigma_3)\cos\varphi$$

Исключая, как и выше, случай $\omega_r = \text{const}\cdot\cos\varphi$, получим условия

$$b_2 + \Delta c_1 x_2 + b_3 x_1 = 0, \quad b_1\sigma_1 + b_3\sigma_3 = 0 \tag{4.6}$$

Уравнения (4.5) при условиях (4.3), (4.4) и (4.6) эквивалентны и могут быть записаны в виде

$$\omega_r \omega_r' = b_1 \sigma_1 q^2 \sin\varphi\cos\varphi \tag{4.7}$$

Выражения для параметров x_i найдем, используя связи (2.9) и (4.4)

$$x_1 = \frac{b_1 \Delta a_2}{b_1^2 - b_3^2}, \quad x_3 = \frac{b_3 \Delta a_2}{b_1^2 - b_3^2}, \quad x_2 = \frac{b_1^2 \Delta a_1 + b_3^2 \Delta a_3}{b_2 (b_1^2 - b_3^2)} \tag{4.8}$$

Если найденные значения параметров x_1 и x_2 подставить в первое условие (4.6), то получим второе конфигурационное условие

$$b_2^2 (b_1^2 - b_3^2) + b_1 b_2 b_3 \Delta a_2 - \left(b_1^2 \Delta a_1 + b_3^2 \Delta a_3\right)\Delta c_1 = 0 \tag{4.9}$$

Второе условие (4.6) следует из условий (4.3) и (4.4).

Таким образом, в рассматриваемом случае полурегулярная прецессия, задаваемая периодическим решением уравнений Пуанкаре–Жуковского возможна при выполнении двух условий (4.3) и (4.9). Компоненты решения выражаются через эллиптические функции Якоби, как и в разделе 3.

При учете равенств (4.6) из формулы (4.7) получим

$$\omega_r^2 = C - \frac{1}{2} b_1 b_3 q^2 \left(x_2 + x_1 x_3\right) \cos 2\varphi$$

Используя равенства (2.8) и (4.8), найдем скорость прецессии

$$\tilde{\omega}_p = \frac{b_3^2 a_1 - b_1^2 a_3}{b_3^2 - b_1^2}$$

Из равенств (4.4) получим формулы

$$m_1^2 = \frac{x_1\left(x_1 + x_2 x_3\right)}{x_1^2 - x_3^2}, \quad m_3^2 = -\frac{x_3\left(x_3 + x_1 x_2\right)}{x_1^2 - x_3^2}$$

Рассмотрим далее случай, когда $q_1 = (\mathbf{K}, \mathbf{m}) \neq 0$.

Из уравнений (4.5) получаем следствие

$$L\omega_r = \frac{m_3}{b_3}\sigma_1 K_3 - \frac{m_1}{b_1}\sigma_3 K_1 \tag{4.10}$$

$$L = \frac{m_1^2}{b_1^2}\left(b_2 + b_1 x_3 - \Delta c_3 x_2\right) + \frac{m_3^2}{b_3^2}\left(b_2 + b_3 x_1 + \Delta c_1 x_2\right) \tag{4.11}$$

Рассмотрим сначала случай $L = 0$.

Так как заданные формулами (4.1) функции K_1 и K_3 при $q_1 \neq 0$ линейно независимы, то из условия (4.10) следует

$$\sigma_1 = \sigma_3 = 0 \tag{4.12}$$

Выражая Δc_i через σ_i, условие $L = 0$ приводим к виду

$$\left(x_2 + x_1 x_3\right)\left(\frac{m_1^2}{b_1 x_1} + \frac{m_3^2}{b_3 x_3}\right) = 0 \tag{4.13}$$

Уравнения (4.5) при условии (4.12) принимают вид

$$\frac{m_1}{b_1}\omega_r' = -\frac{m_3}{x_3}\left(x_2 + x_1 x_3\right) K_2, \quad \frac{m_3}{b_3}\omega_r' = \frac{m_1}{x_1}\left(x_2 + x_1 x_3\right) K_2 \tag{4.14}$$

Два уравнения (4.14) при условии (4.13) эквивалентны. Так как $\omega_r' \neq 0$, то $x_2 + x_1 x_3 \neq 0$ и из условия (4.13) получим

$$\frac{m_1^2}{b_1 x_1} + \frac{m_3^2}{b_3 x_3} = 0, \quad m_1^2 = \frac{b_1 x_1}{\Delta a_2}, \quad m_3^2 = -\frac{b_3 x_3}{\Delta a_2} \tag{4.15}$$

Умножая первое уравнение (4.14) на $m_1 b_1$, второе – на $m_3 b_3$ и складывая, получим

$$\omega_r' = m_1 m_3 \left(x_2 + x_1 x_3\right) K_2 \left(\frac{b_3}{x_1} - \frac{b_1}{x_3}\right) = -\frac{m_1 m_3 \left(x_2 + x_1 x_3\right)\Delta a_2}{x_1 x_3} K_2 \tag{4.16}$$

Из условий (2.12) и (4.12) следует $\sigma_2 = 0$ и второе уравнение (2.11) записывается в виде

$$\frac{m_3}{b_3}\left(b_1 - \Delta c_2 x_1 + b_3 x_2\right) K_1 - \frac{m_1}{b_1}\left(b_3 + \Delta c_2 x_3 + b_1 x_2\right) K_3 = \frac{m_1 m_3}{b_1 b_3}\Delta c_2 \omega_r$$

Из равенства $\sigma_2 = 0$ следует

$$x_3(-\Delta c_2 x_1 + b_1) = b_3 x_1, \quad x_1(\Delta c_2 x_3 + b_3) = b_1 x_3$$

и последнее равенство для ω_r принимает вид

$$\frac{m_1 m_3}{b_1 b_3}\Delta c_2 \omega_r = \frac{m_3}{x_3}(x_1 + x_2 x_3) K_1 - \frac{m_1}{b_1}(x_3 + x_1 x_2) K_3 \tag{4.17}$$

Дифференцируя это равенство при учете формул (4.1), получим

$$\frac{m_1 m_3}{b_1 b_3}\Delta c_2 \omega_r' = \left(\frac{m_3^2}{x_3}(x_1 + x_2 x_3) + \frac{m_1^2}{x_1}(x_3 + x_1 x_2)\right) K_2$$

Подставляя ω_r' из формулы (4.16), получим условие

$$-\frac{m_1^2 m_3^2}{b_1 b_3}\Delta a_2 \Delta c_2 \frac{x_2 + x_1 x_3}{x_1 x_3} = \frac{m_3^2}{x_3}(x_1 + x_2 x_3) + \frac{m_1^2}{x_1}(x_3 + x_1 x_2) \tag{4.18}$$

Если подставить сюда m_i^2 из (4.15) и учесть, что при $\sigma_2 = 0$ имеем $b_1 x_3 - b_3 x_1 = \Delta c_2 x_1 x_3$, то условие (4.18) приведем к виду

$$\Delta c_2 = \Delta a_2 \tag{4.19}$$

Еще одно конфигурационное условие получим из условий (4.12). Используя связи (2.9), условия (4.12) запишем в виде

$$\Delta c_{1,3} b_2 x_2^2 \pm \left(b_2^2 - b_{3,1}^2 + \Delta c_{1,3}\Delta a_{1,3}\right) x_2 + b_2 \Delta a_{1,3} = 0$$

Исключая из этих равенств сначала x_2^2, затем свободные члены, получим

$$x_2 = b_2 \frac{\Delta c_3 \Delta a_1 - \Delta c_1 \Delta a_3}{S_c + \Delta c_1 \Delta c_2 \Delta c_3} = -\frac{S_a + \Delta a_1 \Delta a_2 \Delta a_3}{b_2(\Delta c_3 \Delta a_1 - \Delta c_1 \Delta a_3)}$$
$$S_a \overset{\text{def}}{=} \sum b_i^2 \Delta a_i, \; S_c \overset{\text{def}}{=} \sum b_i^2 \Delta c_i \tag{4.20}$$

Из равенств (4.20) следует необходимость условия

$$(S_a + \Delta a_1 \Delta a_2 \Delta a_3)(S_c + \Delta c_1 \Delta c_2 \Delta c_3) = -b_2^2 (\Delta c_3 \Delta a_1 - \Delta c_1 \Delta a_3)^2 \tag{4.21}$$

Учитывая условие (4.19), из равенств (2.9) и (4.20) найдем

$$x_1 = -\frac{S_a + \Delta c_1 \Delta a_2 \Delta a_3}{b_1(\Delta c_3 \Delta a_1 - \Delta c_1 \Delta a_3)}, \quad x_3 = -\frac{S_a + \Delta a_1 \Delta a_2 \Delta c_3}{b_3(\Delta c_3 \Delta a_1 - \Delta c_1 \Delta a_3)}$$

Для скоростей прецессии и собственного вращения получаем формулы

$$\tilde{\omega}_p = \frac{\sum\left(a_i c_i - b_i^2\right)\Delta a_i}{\sum c_i \Delta a_i}$$

$$\frac{m_1 m_3}{b_1 b_3}\Delta a_2 \omega_r = q_1 m_1 m_3 \left(\frac{x_1}{x_3} - \frac{x_3}{x_1}\right) - q(x_2 + x_1 x_3)\cos\varphi$$

Таким образом, в рассмотренном частном случае, когда параметр L, заданный равенством (4.11), равен нулю, получены два конфигурационных условия (4.19) и (4.21) полурегулярной прецессии, формулы для скоростей и для компонент направляющего вектора оси собственного вращения.

Рассмотрим теперь случай $L \neq 0$. Из равенства (4.10) следует, что ω_r — линейная комбинация K_1 и K_3. Учитывая формулы (4.1), запишем

$$\omega_r = \varkappa_1 K_1 + \varkappa_3 K_3, \quad \omega_r' = (m_3\varkappa_1 - m_1\varkappa_3) K_2$$

Уравнения (4.5) примут вид

$$\sigma_1 K_3 = (\varkappa_1 K_1 + \varkappa_3 K_3)\left(\frac{m_1}{b_1}(m_3\varkappa_1 - m_1\varkappa_3) + \frac{m_3}{b_3}(b_2 + \Delta c_1 x_2 + b_3 x_1)\right)$$

$$\sigma_3 K_1 = (\varkappa_1 K_1 + \varkappa_3 K_3)\left(\frac{m_3}{b_3}(m_3\varkappa_1 - m_1\varkappa_3) - \frac{m_1}{b_1}(b_2 - \Delta c_3 x_2 + b_1 x_3)\right)$$

В случае $q_1 \neq 0$ функции K_1 и K_3 линейно независимы и, если $\varkappa_1\varkappa_3 \neq 0$, то для выполнения последних условий необходимо $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$, $L = 0$ и приходим к рассмотренному выше случаю. Осталось рассмотреть вариант $\varkappa_1\varkappa_3 = 0$. Пусть $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_3 = \varkappa$, тогда

$$\omega_r = \varkappa K_3, \quad \omega_r' = -m_3\varkappa K_2 \tag{4.22}$$

Для выполнения уравнений (4.5) необходимы условия

$$\sigma_1 = \varkappa\left(\frac{m_3}{b_3}(b_2 + \Delta c_1 x_2 + b_3 x_1) - \frac{m_1^2}{b_1}\varkappa\right), \quad \sigma_3 = 0$$

$$b_3(b_2 - \Delta c_3 x_2 + b_1 x_3) + b_1 m_3 \varkappa = 0 \tag{4.23}$$

$$\sigma_2 = \varkappa\frac{m_3}{b_3}(\Delta c_2 x_1 - b_1 - b_3 x_2), \quad b_3 + \Delta c_2 x_3 + b_1 x_2 + \varkappa\frac{m_3}{b_3}\Delta c_2 = 0$$

Умножим первое равенство полученной системы на x_1, второе — на x_3, четвертое — на x_2 и сложим. Учитывая равенство (2.12), получим условие

$$\varkappa\frac{m_1^2}{b_1}x_1 + m_3\left(x_2^2 - x_1^2\right) = 0$$

Этим условием можно в системе (4.23) заменить первое условие и систему, обозначив $\alpha = \varkappa m_3$, запишем в виде

$$\alpha x_1 m_1^2 + b_1\left(x_2^2 - x_1^2\right)m_3^2 = 0, \quad b_2 x_1 - b_1 x_2 - \Delta c_3 x_1 x_2 = 0$$

$$b_3(b_1 x_3 - b_3 x_1 - \Delta c_2 x_1 x_3) + \alpha(b_1 - \Delta c_2 x_1 + b_3 x_2) = 0 \tag{4.24}$$

$$b_3(b_2 - \Delta c_3 x_2 + b_1 x_3) + \alpha b_1 = 0, \quad b_3(b_3 + \Delta c_2 x_3 + b_1 x_2) + \alpha\Delta c_2 = 0$$

Подставляя Δc_3 из второго условия данной системы в четвертое, найдем

$$\alpha = -\frac{b_3}{x_1}(x_2 + x_1 x_3) \tag{4.25}$$

Если пятое равенство (4.24) умножить на x_1 и сложить с третьим, то получим равенство

$$b_1 b_3(x_3 + x_1 x_2) + \alpha(b_1 + b_3 x_2) = 0$$

Подставив сюда α из формулы (4.25), получим условие

$$b_1\left(x_1^2 - 1\right) = b_3(x_2 + x_1 x_3) \tag{4.26}$$

Из первого равенства (4.24) и формул (4.25), (4.26) получим

$$m_1^2\left(x_1^2-1\right)=m_3^2\left(x_2^2-x_1^2\right),\quad m_1^2=\frac{x_1^2-x_2^2}{1-x_2^2},\quad m_3^2=\frac{1-x_1^2}{1-x_2^2} \tag{4.27}$$

Пятое условие (4.24) при учете формулы (4.25) приведем к виду

$$b_3x_1+b_1x_1x_2-\Delta c_2x_2=0 \tag{4.28}$$

Таким образом, система условий (4.24) дает формулы (4.25) и (4.27) для определения величин α, m_1^2, m_3^2 и три условия, связывающие параметры x_1, x_2, x_3 – это второе условие (4.24) и условия (4.26) и (4.28). Второе равенство (4.24) и равенство (4.28) образуют систему линейных уравнений относительно x_1^{-1}, x_2^{-1}, из которой находим

$$x_1=\frac{b_2\Delta c_2-b_1b_3}{b_3\Delta c_3+b_1b_2},\quad x_2=\frac{b_2\Delta c_2-b_1b_3}{b_1^2+\Delta c_2\Delta c_3} \tag{4.29}$$

Условие (4.26) при учете связи (2.9) запишем в виде $b_3x_2+b_1-\Delta a_2x_1=0$. Так как $b_2x_2-b_1x_1=\Delta a_3$, то получим выражения

$$x_1=\frac{b_1b_2+b_3\Delta a_3}{b_2\Delta a_2-b_1b_3},\quad x_2=\frac{b_1^2+\Delta a_2\Delta a_3}{b_2\Delta a_2-b_1b_3} \tag{4.30}$$

Сравнивая формулы (4.29) и (4.30), находим конфигурационные условия

$$\begin{aligned}(b_1^2+\Delta a_2\Delta a_3)\left(b_1^2+\Delta c_2\Delta c_3\right)&=(b_2\Delta a_2-b_1b_3)(b_2\Delta c_2-b_1b_3)=\\&=(b_3\Delta a_3+b_1b_2)(b_3\Delta c_3+b_1b_2)\end{aligned} \tag{4.31}$$

Используя равенства (2.8) и (4.30), запишем скорость прецессии

$$\tilde{\omega}_p=\frac{b_1^2b_2-b_1b_3a_2+b_2a_1\Delta a_2}{b_2\Delta a_2-b_1b_3}$$

Скорость собственного вращения, используя равенства (4.1) и (4.22), запишем в виде

$$\omega_r=\alpha\left(q_1+q\frac{m_1}{m_3}\cos\varphi\right)$$

Периодическое движение получим, если $|q_1m_3|>|qm_1|$.

После интегрирования уравнения (2.6) получим

$$\cos\varphi=\frac{-qm_1+q_1m_3\cos t'}{q_1m_3-qm_1\cos t'},\quad \sin\varphi=\frac{\sqrt{q_1^2m_3^2-q^2m_1^2}\sin t'}{q_1m_3-qm_1\cos t'}$$

$$t'=\sqrt{q_1^2-q^2\frac{m_1^2}{m_3^2}}(\alpha t+\mathrm{const})$$

Периодическое решение определяется данными равенствами с учетом формул (2.8), (4.1).

5. Связь между конфигурационными условиями полурегулярной прецессии и условиями существования линейной инвариантной системы. Покажем, что если коэффициенты a_i, b_i, c_i системы уравнений Пуанкаре–Жуковского таковы, что у этой системы существует решение, называемое выше полурегулярной прецессией, то у системы уравнений существует линейная инвариантная система (F_1, F_2, F_3). И наоборот – при существовании данной инвариантной системы и начальных условиях $F_i=0$ движением является полурегулярная прецессия.

Рассмотрим сначала описанный в разделе 3 случай $m_2 = 1$.

Пусть выполнено конфигурационное условие (3.5). Зададим параметры x_1 и x_3 равенствами (3.4), а линейные функции F_i равенствами

$$F_1 = x_1K_1 - S_1, \quad F_2 = K_2, \quad F_3 = x_3K_3 - S_3 \tag{5.1}$$

Проверяем, что производные F_i в силу системы (2.3) можно записать в виде

$$\dot{F}_i = (-x_i\Delta a_iK_j + (x_ib_j + b_2)S_j)F_2 - \Delta c_iS_2F_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 3$$

$$\dot{F}_2 = b_3K_1F_3 - b_1K_3F_1$$

Выполнение данных условий означает [23], что (F_1, F_2, F_3) – инвариантная система уравнений (2.3); если все функции этой системы равны нулю в начальный момент времени, то они равны нулю в любой момент времени. Если преобразовать систему (2.3), полагая $F_i = 0$, то получим систему трех уравнений

$$K_1'(\varphi) = -K_3, \quad K_3'(\varphi) = K_1, \quad \omega_r\omega_r' = \sigma_2b_2K_1K_3, \quad \omega_r = b_2S_2$$

Отсюда получаем формулы (3.1) для $K_i(\varphi)$ (где $q_1 = 0$) и (3.6) для скорости собственного вращения. Скорость прецессии зададим формулой (3.7). Из равенств (2.4) и (5.1) находим

$$\omega_1 = (a_1 + b_1x_1)K_1, \quad \omega_2 = b_2S_2, \quad \omega_3 = (a_3 + b_3x_3)K_3,$$

что позволяет записать угловую скорость в виде $\boldsymbol{\omega} = \tilde{\omega}_p\mathbf{K} + \omega_r\mathbf{e}_2$.

Таким образом, при конфигурационном условии (3.5) и выполнении начальных условий $F_i = 0$ твердое тело системы “тело + жидкость” будет совершать полурегулярную прецессию. Ось собственного вращения является одной из главных осей системы и ортогональна оси прецессии, скорость собственного вращения изменяется со временем.

Рассмотрим теперь полученные в разделе 4 при $m_2 = 0$, $m_1m_3 \neq 0$ условия (4.31) полурегулярной прецессии. Эти условия найдены для случая $\omega_r = \kappa K_3$ (формула (4.22)). В этом случае равенства (2.8) дают следующие связи между компонентами $\mathbf{S}$ и $\mathbf{K}$

$$S_1 = x_1K_1 + \frac{m_1}{b_1}\kappa K_3, \quad S_2 = x_2K_2, \quad S_3 = \left(x_3 + \frac{m_3}{b_3}\kappa\right)K_3 \tag{5.2}$$

Так как $\alpha = \kappa m_3$, то, учитывая равенства (4.25) и (4.26), получим

$$x_3 + \frac{m_3}{b_3}\kappa = -\frac{x_2}{x_1}, \quad \frac{m_1}{b_1}\kappa = \frac{m_1}{m_3}\frac{1 - x_1^2}{x_1}$$

Компоненты направляющего вектора оси собственного вращения определяются формулами (4.27) и последнее равенство запишем в виде

$$\frac{m_1}{b_1}\kappa = \mp\mu, \quad \mu \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{x_1}\sqrt{\left(1 - x_1^2\right)\left(x_1^2 - x_2^2\right)} \tag{5.3}$$

Обозначим

$$F_1^{\pm} = S_1 - x_1K_1 \pm \mu K_3, \quad F_2 = S_2 - x_2K_2, \quad F_3 = S_3 + \frac{x_2}{x_1}K_3 \tag{5.4}$$

Связи (5.2) теперь можно записать следующим образом

$$F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{5.5}$$

Ранее [15] были получены условия, при которых существует линейная инвариантная система $\tilde{F}_1, \tilde{F}_3$

$$\tilde{F}_1 = K_1 + \nu_1 S_1, \quad \tilde{F}_3 = K_3 + \nu_3 S_3 \tag{5.6}$$

Если в конфигурационных условиях (4.31) выполнить перестановку индексов $(1\ 2\ 3) \to (2\ 3\ 1)$, то они совпадут с условиями [15] существования линейной инвариантной системы (5.6). В принятых выше обозначениях (5.4) – это система двух функций F_2, F_3.

Существование инвариантной системы (F_2, F_3) при выполнении конфигурационных условий (4.31) нетрудно проверить непосредственно. Действительно, при выполнении этих условий зададим параметры x_1, x_2 равенствами (4.30), тогда будут выполнены условия (2.8), (4.26), (4.28) и второе условие (4.24). Далее можно проверить, что производные функций F_2, F_3 в силу системы (2.3) записываются в виде

$$\dot{F}_2 = (x_1 \Delta a_1 K_1 - \Delta c_2 S_1) F_3, \quad \dot{F}_3 = \left(\frac{\Delta a_3}{x_1} K_1 - \Delta c_3 S_1\right) F_2$$

Отсюда следует, что (F_2, F_3) – инвариантная система уравнений (2.3).

Покажем теперь, что при выполнении двух конфигурационных условий (4.31) у уравнений Пуанкаре–Жуковского существует не только, как показано ранее [15], инвариантная система (F_2, F_3), но и линейные инвариантные системы

$$(F_1^+, F_2, F_3), \quad (F_1^-, F_2, F_3), \quad (F_1^+, F_1^-, F_2, F_3) \tag{5.7}$$

Вычислим для этого производные функций $F_1^{\pm}$, заданных равенством (5.4), в силу системы (2.3).

$$\begin{gathered}\dot{F}_1^{\pm} = -\Delta c_1 S_2 S_3 + b_3 K_3 S_2 - b_2 K_2 S_3 - x_1(-\Delta a_1 K_2 K_3 + b_3 S_3 K_2 - b_2 S_2 K_3) \\ \pm \mu(-\Delta a_3 K_1 K_2 + b_2 S_2 K_1 - b_1 S_1 K_2)\end{gathered}$$

Подставляя сюда из равенств (5.4) выражения

$$S_1 = F_1^{\pm} + x_1 K_1 \mp \mu K_3, \quad S_2 = F_2 + x_2 K_2, \quad S_3 = F_3 - \frac{x_2}{x_1} K_3$$

получим

$$\begin{gathered}\dot{F}_1^{\pm} = -\Delta c_1 F_2 F_3 + \left(\left(\Delta c_1 \frac{x_2}{x_1} + b_3 + b_2 x_1\right) K_3 \pm \mu b_2 K_1\right) F_2 \mp \mu b_1 K_2 F_1^{\pm} - \\ -(\Delta c_1 x_2 + b_2 + b_3 x_1) K_2 F_3 + P K_2 K_3 + Q K_1 K_2\end{gathered} \tag{5.8}$$

Здесь

$$\begin{gathered}Q = \pm\mu(-\Delta a_3 + b_2 x_2 - b_1 x_1) = 0 \\ P = \Delta c_1 \frac{x_2^2}{x_1} + 2 b_3 x_2 + b_2 \frac{x_2}{x_1} + x_1 \Delta a_1 + b_2 x_1 x_2 + b_1 \mu^2\end{gathered} \tag{5.9}$$

Используя второе равенство (4.24) и равенство (4.28), запишем

$$\Delta c_1 = -\Delta c_2 - \Delta c_3 = b_1 \frac{1 - x_1^2}{x_1} - \frac{b_2}{x_2} - b_3 \frac{x_1}{x_2}$$

Равенство (5.9), учитывая формулы (2.9) и (5.3), запишем в виде

$$\begin{gathered}P = -b_3 x_2 - b_2 \frac{x_2}{x_1} + b_1 \frac{x_2^2}{x_1}\left(1 - x_1^2\right) + 2 b_3 x_2 + b_2 \frac{x_2}{x_1} + b_3 x_1 x_3 - \\ - b_2 x_1 x_2 + b_2 x_1 x_2 + b_1 \frac{\left(1 - x_1^2\right)\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{x_1^2} = b_3 (x_2 + x_1 x_3) + b_1 \left(1 - x_1^2\right)\end{gathered}$$

Учитывая равенство (4.26), получим $P = 0$.

При $P = Q = 0$ из равенств (5.8) следует, что у системы (2.3) действительно существуют инвариантные системы (5.7).

Отметим еще, что производные функций F_5^+ и F_6^+ в силу системы (2.3) обращаются в ноль, если $F_1^+ = F_2 = F_3 = 0$, и производные функций F_5^- и F_6^- равны нулю, если $F_1^- = F_2 = F_3 = 0$, где обозначено

$$F_5^\pm = K_1 \pm \frac{1 - x_1^2}{\mu x_1} K_3, \quad F_6^\pm = S_1 \pm \frac{x_2\left(1 - x_1^2\right)}{\mu x_1} S_3$$

Условия $F_{5,6}^\pm = \mathrm{const}$, учитывая равенства (4.27) и (5.3), записываются в виде

$$m_1 K_1 + m_3 K_3 = \mathrm{const}, \quad m_1 S_1 + x_2 m_3 S_3 = \mathrm{const}$$

Параметры m_1, m_3 заданы формулами (4.27).

Векторы **K** и **S** имеют постоянные модули; если в начальный момент $F_2 = F_3 = 0$ и $F_1^+ = 0$ или $F_1^- = 0$, то в системе, связанной с твердым телом эти векторы описывают круговые конусы, оси которых задаются векторами $(m_1, 0, m_3)$ и $(m_1, 0, x_2 m_3)$. Движение твердой оболочки в инерциальном пространстве в данном случае – полурегулярная прецессия.

6. Анализ возможности полурегулярной прецессии систем, близких к сферически симметричным. Ранее [16, 17] было показано, что в случае, когда система “твердое тело + жидкость” близка к сферически симметричной (т.е. главные моменты инерции твердого тела мало отличаются друг от друга, полость мало отличается от сферы) регулярная прецессия возможна, только если ось собственного вращения является главной осью инерции. Приведены примеры [17] неосесимметричных удлиненных систем, которые могут совершать регулярную прецессию и в случае, когда ось собственного вращения отклонена от главной оси инерции.

Ниже показано, что при распределении масс, близком к сферически симметричному, полурегулярная прецессия, так же как и регулярная прецессия, возможна только в случае, когда ось собственного вращения совпадает с одной из главных осей инерции системы.

Выделим сначала случай осевой симметрии, тогда

$$\begin{gathered} d_1 = d_3, \quad \beta_1 = \beta_3 \overset{\text{def}}{=} \beta, \quad \beta_2 = 1, \quad a_1 = a_3 \overset{\text{def}}{=} a, \quad b_1 = b_3 = \beta a \overset{\text{def}}{=} b \\ \Delta a_2 = \Delta b_2 = \Delta c_2 = 0, \quad b_2 = a_2 \end{gathered} \tag{6.1}$$

При условиях (6.1) выполнены конфигурационные условия (3.6) и условия (4.3) и (4.9). Условия (4.19) и (4.21) также выполнены, так как в случае осевой симметрии

$$S_a = S_c = 0, \quad \Delta c_3 \Delta a_1 - \Delta c_1 \Delta a_3 = \Delta c_2 \Delta a_3 - \Delta c_3 \Delta a_2 = 0$$

Отметим, что из формул (2.9) и (6.1) следует $x_1 = x_3$ и формула (3.6) тогда дает $\omega_r = \mathrm{const}$. Если же ось собственного вращения не совпадает с главной осью, второе уравнение (2.11) при учете формул (6.1) и (4.1) записывается в виде

$$(1 + x_2)\left(m_3 K_1 - m_1 K_3\right) = (1 + x_2) q \cos\varphi = 0$$

Из формулы (2.8) получаем, что при $b_2 = a_2$ и $x_2 = -1$ скорость прецессии равна нулю. Следовательно, при осевой симметрии полурегулярная прецессия невозможна.

Далее будем рассматривать случай, когда полуоси полости мало отличаются друг от друга, $d_i \approx d$, $i = 1, 2, 3$.

Для анализа полученных выше условий удобно использовать формулы, следующие из определений (2.2) используемых параметров

$$\Delta\gamma_1 = \frac{5}{\mu}\cdot\frac{\delta_2-\delta_3}{(\delta_1+\delta_2)(\delta_1+\delta_3)}, \quad \delta_i \overset{\text{def}}{=} d_i^2, \quad \Delta c_1 = \Delta\gamma_1 + \Delta a_1 + \zeta_3 a_3 - \zeta_2 a_2$$
$$\zeta_1 \overset{\text{def}}{=} 1-\beta_1^2 = r_1(\Delta\gamma_1)^2, \quad \beta_1 - \beta_2\beta_3 = s_1\Delta\gamma_2\Delta\gamma_3 \tag{6.2}$$
$$r_1 = \left(\frac{\mu}{5}\right)^2\frac{(\delta_1+\delta_2)^2(\delta_1+\delta_3)^2}{(\delta_2+\delta_3)^2}, \quad s_1 = -\left(\frac{\mu}{5}\right)^2\beta_1(\delta_2+\delta_3)^2 \ (1\ 2\ 3)$$

Рассмотрим сначала изученный в разделе 3 случай, когда ось собственного вращения совпадает с одной из главных осей.

Конфигурационное условие (3.5) после некоторых преобразований с учетом равенств (2.2) и (6.2) приводится к виду

$$(1-\zeta_2)\left(a_2\Delta a_2(\Delta\gamma_3-\Delta\gamma_1) + a_1a_2a_3(\zeta_3-\zeta_1) + a_2^2\Delta a_2\zeta_2\right) +$$
$$+ a_1a_3((1-\zeta_1)\Delta\gamma_1 + (1-\zeta_3)\Delta\gamma_3) + \Delta a_2\Delta\gamma_1\Delta\gamma_3 = 0 \tag{6.3}$$

Если теперь считать, что полость мало отличается от сферы $d_i \approx d$ и $\Delta\gamma_i = O(\varepsilon)$, то из условия (6.3) при учете равенств (6.2) получим

$$a_1a_3\Delta\gamma_2 + a_2\Delta a_2(\Delta\gamma_1-\Delta\gamma_3) - \Delta a_2\Delta\gamma_1\Delta\gamma_3 + a_1a_2a_3(\zeta_1-\zeta_3) - a_2^2\Delta a_2\zeta_2 = O\left(\varepsilon^3\right)$$

Это условие, учитывая формулы (6.2) для параметров ζ_i, запишем в виде

$$a_1a_3\Delta\gamma_2 + a_2\Delta a_2(\Delta\gamma_1-\Delta\gamma_3) - \Delta a_2\Delta\gamma_1\Delta\gamma_3 - a_2^2\Delta a_2 r(\Delta\gamma_2)^2 +$$
$$+ a_1a_2a_3 r(\Delta\gamma_3-\Delta\gamma_1) = O\left(\varepsilon^3\right),$$
$$r = \left(\frac{2\mu d^2}{5}\right)^2 \tag{6.4}$$

Если $\Delta\gamma_{1,3} = O(\varepsilon)$, то в случае, когда $a_i \approx a$, условие (6.4) может быть выполнено, если

$$\Delta\gamma_2 = O\left(\varepsilon^2\right), \quad \Delta a_2 = O(\varepsilon)$$

В этом случае $\Delta\gamma_1 = -\Delta\gamma_3 + O\left(\varepsilon^2\right)$ и условие (6.4) принимает вид

$$\Delta\gamma_2 = 2\frac{\Delta a_2}{a}\Delta\gamma_3 + O\left(\varepsilon^3\right)$$

Учитывая определения параметров (2.2) и формулы (6.2), последнее условие запишем в виде

$$\frac{A_3-A_1}{A_2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d_3-d_1}{d_2-d_1} + O\left(\varepsilon^2\right)$$

Здесь $d_2 - d_1 = O(\varepsilon)$, $A_3 - A_1 = O(\varepsilon)$, $d_3 - d_1 = O\left(\varepsilon^2\right)$.

Рассмотрим теперь возможность выполнения конфигурационных условий в случае несовпадения оси собственного вращения с главной осью инерции.

В разделе 4 для этого случая приведены три возможных варианта условий: 1) условия (4.3) и (4.9); 2) условия (4.19) и (4.21); 3) условия (4.31).

Рассмотрим сначала вариант 2. Из формул (4.12) и (2.12) следует равенство $\sigma_2 = 0$. Если в это равенство подставить x_1 и x_3 из формул (4.8) и учесть условие (4.19), то получим равенство

$$m_1^2b_3^2 + m_3^2b_1^2 = m_1^2m_3^2(\Delta a_2)^2$$

Отсюда следует, что случай, близкий к осевой симметрии, когда $\Delta a_2 \approx 0$, $b_1 \approx b_3$, здесь невозможен. Следовательно, недопустима и конфигурация, близкая к сферической.

Рассмотрим теперь вариант 3. Обозначим

$$\Psi_1 = (b_1^2 + \Delta a_2 \Delta a_3)\left(b_1^2 + \Delta c_2 \Delta c_3\right)$$

$$\Psi_i = \left(b_i \Delta a_i + (-1)^j b_1 b_j\right)\left(b_i \Delta c_i + (-1)^j b_1 b_j\right), \quad i, j = 2, 3, \quad i \neq j$$

Условия (4.31) можно записать в виде

$$\Psi_2 = \Psi_3, \quad 2\Psi_1 = \Psi_2 + \Psi_3 \tag{6.5}$$

При $\Delta\gamma_i = O(\varepsilon)$, учитывая равенства (2.2) и (6.2), получаем оценки

$$\Psi_1 = \varphi^2 + \varphi(\Delta\gamma_3 \Delta a_2 + \Delta\gamma_2 \Delta a_3 + \Delta\gamma_2 \Delta\gamma_3 + r a_2 a_3 \left((\Delta\gamma_2)^2 + (\Delta\gamma_3)^2\right) -$$

$$- r a_1 a_3 \left((\Delta\gamma_1)^2 + (\Delta\gamma_3)^2\right) - r a_1 a_2 \left((\Delta\gamma_1)^2 + (\Delta\gamma_2)^2\right)) + O\left(\varepsilon^3\right)$$

$$\Psi_i = \varphi(\varphi + (-1)^j a_i \Delta\gamma_i + r(a_2 a_3 (\Delta\gamma_j)^2 - a_1 a_i (\Delta\gamma_1)^2 - (\Delta\gamma_i)^2 + 2a_1 a_j \Delta\gamma_1 \Delta\gamma_j)) + O\left(\varepsilon^3\right)$$

$$i, j = 2, 3, \quad \varphi \overset{\text{def}}{=} a_2 (a_1 + a_3) - a_1 a_3$$

При $\varphi = 0$ получаем $A_2 = A_1 + A_3$. Если ядро близко к сферическому, то величины A_i^{eq} малы и при $\varphi = 0$ элементы твердого тела должны быть близки к некоторой плоскости; этот случай здесь не рассматриваем.

Из условий (6.5) следует

$$a_1 \Delta\gamma_1 + a_3 \Delta\gamma_3 = O\left(\varepsilon^3\right), \quad (a_1 - 2a_2)\Delta\gamma_1 + (2a_2 - a_3)\Delta\gamma_3 = O\left(\varepsilon^3\right)$$

Если $a_2 \approx a$, то эти условия не могут быть одновременно выполнены при сделанном изначально предположении $\Delta\gamma_i = O(\varepsilon)$.

Рассмотрим оставшийся вариант 1. Анализ, аналогичный приведенному выше для варианта 3, показывает, что система условий (4.3), (4.9) не может быть выполнена при конфигурации системы, близкой к сферической. Кратко пояснить невозможность выполнения этих условий можно следующим образом.

Условие (4.9) при учете формулы (4.8) запишем в виде

$$\Phi \overset{\text{def}}{=} \left(b_2 + x_2 \Delta c_1\right) \frac{b_1^2 - b_3^2}{\Delta a_2} + b_1 b_3 = 0$$

Для системы, близкой к сферической, это условие не может быть выполнено, так как в этом случае из формулы (4.4) следует $x_2 \approx -1$, а также имеем

$$b_i \approx a_i, \quad a_i \approx a, \quad b_1^2 - b_3^2 \approx -2a\Delta a_2, \quad \Delta c_i \approx 0$$

Отсюда следует $\Phi \approx -a^2 \neq 0$.

Заключение. Классическая модель Пуанкаре–Жуковского–Хафа, описывающая движение твердого тела с наполненной жидкостью эллипсоидальной полостью, продолжает широко использоваться в настоящее время. Многие задачи, детально исследованные для твердого тела, для системы "твердое тело + жидкость" еще не решены. В настоящей работе найдены конфигурационные условия, при которых тело может совершать полурегулярную прецессию. При совпадении оси собственного вращения с главной осью инерции достаточно одного условия, если оси не совпадают, то конфигурационных условий два. Получено в эллиптических функциях периодическое решение, описывающее полурегулярную прецессию. Показано, что конфигурационных условий полурегулярной прецессии достаточно для существования у уравнений Пуанкаре—Жуковского инвариантной системы из трех линейных функций.

Рассмотрено свободное вращение близкой к сферически симметричной системы “твердое тело + жидкость”. Доказано, что для таких систем полурегулярная прецессия возможна только при совпадении оси собственного вращения с одной из главных осей инерции. Выполненное упрощение конфигурационного условия дает простую связь между разностью экваториальных моментов инерции твердой мантии и соответствующей разностью моментов жидкого ядра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жуковский Н.Е.* Собр. соч. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1948. С. 31—152.
2. *Hough S.S.* The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid // Philos. Trans. R. Soc. Lond. 1895. A 186. P. 469—506.
3. *Пуанкаре А.* Последние работы. М.; Ижевск: НИЦ РХД, 2001. С. 74—111.
4. *Touma J., Wisdom J.* Nonlinear core—mantle coupling // Astron. J. 2001. V. 122. P. 1030—1050.
5. *Henrard J.* The rotation of Io with a liquid core // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2008. V. 101. Iss. 1—2. P. 1—12.
6. *Rambaux N., Hoolst Van T., Dehant V., Bois E.* Internal core-mantle coupling and libration of Mercury // Astron. & Astrophys. 2007. V. 468. P. 711—719.
7. *Dufey J., Noyelles B., Rambaux N., Lemaitre A.* Latitudinal librations of Mercury with a fluid core // Icarus. 2009. V. 203. P. 1—12.
8. *Noyelles B., Dufey J., Lemaitre A.* Core—mantle interactions for Mercury // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2010. V. 7. P. 479—496.
9. *Noyelles B.* Behavior of nearby synchronous rotations of a Poincaré—Hough satellite at low eccentricity // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2012. V. 112. Iss. 4. P. 353—383.
10. *Boué G., Rambaux N., Richard A.* Rotation of a rigid satellite with a fluid component: a new light onto Titan’s obliquity // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2017. V. 129. Iss. 4. P. 449—485.
11. *Boué G.* Cassini states of a rigid body with a liquid core // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2020. V. 132. Iss. 3. Article number: 21.
12. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle prezessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura e Appl. 1947. V. 26. Fasc. 3—4. P. 271—281.
13. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: ДонНУ, 2009. 222 с.
14. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // Egyp. J. Basic & Appl. Sci. 2015. 2:3 P. 200—205.
15. *Ольшанский В.Ю.* О регулярных прецессиях несимметричного твердого тела с жидким наполнением // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 5. С. 559—571.
16. *Ol’shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2019. V. 131. Iss. 12. Art. no. 57.
17. *Ol’shanskii V.Yu.* Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid bodies // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2020. V. 132. Iss. 9. Art. no. 46.
18. *Горр Г.В., Щетинина Е.К.* Полурегулярные прецессии тяжелого гиростата, несущего два ротора // Механика твердого тела. 2014. Вып. 44. С. 16—26.
19. *Ольшанский В.Ю.* Линейные инвариантные соотношения уравнений Пуанкаре—Жуковского // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 1. С. 29—45.
20. *Ольшанский В.Ю.* Частные линейные интегралы уравнений Пуанкаре—Жуковского (общий случай) // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 4. С. 399—419.
21. *Ламб Г.* Гидродинамика. ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. 928 с.
22. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
23. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики в 2 т. Т. 2, ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит. 1951. 555 с.

Semi-regular Precession of an Asymmetrical Rigid Body with a Liquid Filling

V. Yu. Ol'shanskii[a,#]

[a] *Institute of Precision Mechanics and Control RAS, Saratov, Russia*
[#] *e-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru*

To describe the rotation of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with an ideal vorticated liquid, the Poicare–Zhukovsky equations are used. It is obtained constraints (called as configuration conditions) for the bodies and cavities principal moments of inertia, under which the rigid body can perform the semi-regular precession when the precession rate is constant and the rate of its proper rotation changes with time. When the proper rotation axis coincides with the principal axis of inertia, one condition is sufficient, if the axes are not coincide, then number of configuration conditions is two. It is shown that, under fulfillment the configuration conditions of semi-regular precession, the Poincaré–Zhukovsky equations have an invariant system of three linear functions. The analysis of configuration conditions for systems close to spherically symmetric is carried out.

Keywords: liquid-filled rigid body, Poicare–Zhukovsky equations, semi-regular precession

REFERENCES

1. *Zhukovsky N.E.* On motion of rigid body with cavities filled by homogenous drop-like liquid // In: Sobranie sochinenii (Collection of Scientific Works), vol. 2. pp. 31–152. Moscow: Gostekhizdat. 1948.
2. *Hough S.S.* The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid // Philos. Trans. R. Soc. Lond., 1895, A 186, pp. 469–506.
3. *Poincaré H.* Sur la precession des corps deformables // Bull. Astr., 1910, vol. 27, pp. 321–356.
4. *Touma J., Wisdom J.* Nonlinear core–mantle coupling // Astron. J., 2001, vol. 122, pp. 1030–1050.
5. *Henrard J.* The rotation of Io with a liquid core // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2008, vol. 101, iss. 1–2, pp. 1–12.
6. *Rambaux N., Hoolst Van T., Dehant V., Bois E.* Internal core-mantle coupling and libration of Mercury // Astron.&Astrophys., 2007, vol. 468, pp. 711–719.
7. *Dufey J., Noyelles B., Rambaux N., Lemaitre A.* Latitudinal librations of Mercury with a fluid core // Icarus, 2009, vol. 203, pp. 1–12.
8. *Noyelles B., Dufey J., Lemaitre A.* Core–mantle interactions for Mercury // Mon. Not. R. Astron. Soc., 2010, vol. 7, pp. 479–496.
9. *Noyelles B.* Behavior of nearby synchronous rotations of a Poincaré–Hough satellite at low eccentricity // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2012, vol. 112, iss. 4, pp. 353–383.
10. *Boué G., Rambaux N., Richard A.* Rotation of a rigid satellite with a fluid component: a new light onto Titan's obliquity // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2017, vol. 129, iss. 4, pp. 449–485.
11. *Boué G.* Cassini states of a rigid body with a liquid core // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2020, vol. 132, iss. 3, Art. no. 21.
12. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle prezessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura e Appl., 1947, vol. 26, Fasc. 3–4, pp. 271–281.
13. *Gorr G.V., Maznev A.V., Shchetinina E.K.* Precession Motions in Rigid Body Dynamics and Dynamics of Linked Rigid Bodies Systems. Donetsk: Donetsk National Univ. 2009. (in Russian)
14. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // Egypt. J. Basic&Appl. Sci., 2015, 2:3, pp. 200–205.
15. *Ol'shanskii V.Yu.* On the regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // Mech. Solids, 2018, vol. 53 (Suppl. 2), pp. 95–106.
16. *Ol'shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2019, vol. 131, iss.12, Art. no. 57.

17. *Ol'shanskii V.Yu.* Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid bodies // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2020, vol.132, iss. 9, Art. no. 46.
18. *Gorr G.V., Shchetinina E.K.* Semi-regular precessions of a heavy gyrostat carrying two rotors // Mech. Solids, 2014, iss. 44, pp. 16–26.
19. *Ol'shanskii V.Yu.* Linear invariant relations of the Poincaré–Zhukovskii equations // JAMM, 2014, vol. 78, iss. 1, pp. 18–29.
20. *Ol'shanskii V.Yu.* Partial linear integrals of the Poincaré–Zhukovskii equations (the general case) // JAMM, 2017, vol. 81, iss. 4, pp. 270–285.
21. *Lamb H.* Hydrodynamics. N.Y.: Dover Publ., 1945.
22. *Moiseyev N.N., Rumyantsev V.V.* Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid. Berlin: Springer, 1968.
23. *Levi-Civita T., Amaldi U.*, Lezioni di Meccanica Razionale. Vol. 2, Pt 2. Bologna: N. Zanichelli, 1928.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 5, с. 565–575

УДК 531.391.1

К столетию со дня рождения академика В.В. Румянцева

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОСКАЛЬЗЫВАНИЕ ГИБКОЙ НЕРАСТЯЖИМОЙ НИТИ ЧЕРЕЗ ЗАКРУГЛЕННЫЙ КРАЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СТОЛА

А. С. Сумбатов[1,*]

[1]*ФИЦ “Информатика и управление” Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия*

**e-mail: sumbatow@ccas.ru*

Поступила в редакцию 10.12.2020 г.
После доработки 06.03.2021 г.
Принята к публикации 15.03.2021 г.

Рассматривается одна из классических контактных задач двумерной динамики нити без трения и с сухим трением. В работе найдена аналитическая формула натяжения нити в этой задаче по всей длине. Исследуются условия схода нити со связи. Наличие интеграла энергии в случае отсутствия трения позволяет получить эти условия аналитически. При наличии трения приведены численно-аналитические результаты исследования.

Ключевые слова: гибкая нерастяжимая нить, контактное движение, неудерживающая связь, натяжение нити, сухое трение

DOI: 10.31857/S0032823521040135

1. Введение. Простые задачи по динамике нити встречаются в классических текстах по теоретической механике [1–7] и др. Как справедливо отметил Ламб ([4], p. 142): “Хотя эти задачи едва ли важны сами по себе, они служат прекрасными иллюстрациями принципов Динамики”.

Пусть тяжелая однородная гибкая и нерастяжимая нить одним концом свешивается с горизонтального стола, а другой ее конец, имеющий расправленную прямолинейную форму, лежит на столе под прямым углом к его краю, который закруглен с радиусом R. Вся нить целиком расположена в одной вертикальной плоскости, и предполагается, что последующее движение нити происходит в этой неподвижной плоскости. Рассматриваются два случая: когда к нити в точках ее контакта со столом приложена сила сухого (кулонова) трения и когда трения нет. В случае наличия трения негоризонтальный участок нити должен быть достаточно массивным, чтобы нить начала скользить из состояния покоя. В ряде постановок задачи край стола предполагается острым ($R = 0$).

Задаче посвящены много работ, укажем основные из них.

Ляв ([2], с. 301–302) рассмотрел случай, когда верхняя часть нити свернута в клубок и лежит близко к острому краю стола (задача Кейли [8]), и отметил, что механическая энергия нити не сохраняется.

Ламб ([4], с. 142–143) нашел решение общей задачи о сползании нити с гладкого стола с острым краем двумя способами, один из которых следует из закона сохранения полной энергии нити.

В монографии [9] указано, что в этой задаче имеется разрыв вектора скорости в точке соприкосновения нити с острым краем стола, поэтому задачу следует решать с учетом условия скачка в данной точке. Опираясь на уравнение баланса т.н. материального количества движения нити, автором [9] в итоге получено то же дифференциальное уравнение движения нити, что и у Ламба

$$\frac{du}{dt} = \frac{gx}{l}, \tag{1.1}$$

где u — значение скорости нити в тот момент, когда длина свешивающейся части нити равна x, l — длина всей нити, g — ускорение свободного падения. Замечание Ламба о сохранении энергии также справедливо. При этом найдено векторное выражение реакции стола в указанной точке, равное по модулю $F = \rho x(l - x)l^{-1}g - \rho u^2$ (ρ — погонная масса нити). Отмечено, что при некотором значении скорости u величина $F = 0$, что физически означает, что контакт нити с краем стола при дальнейшем возрастании скорости скольжения будет нарушен.

В действительности, известно более сильное утверждение ([10], с. 212–216, [11, 12]), что уравнение (1.1) непригодно для вычисления времени полного соскальзывания нити со стола из положения равновесия, по причине, что контакт ее с опорой обязательно прекратится раньше. Причем, утверждается, что это верно как при наличии трения между нитью и столом, так и при отсутствии трения. Более того, угол стола может быть не острым, а закругленным конечного радиуса R.

Следует однако отметить что доказательство, которое приведено в [11] (см. также [13]), несостоятельно. В уравнении (5) проекции на нормаль сил, приложенных к элементу нити, пропущен сомножителем радиус закругления в произведении на силу N нормального давления опоры на нить, отнесенную к единице длины нити.

Любопытно, что в работе [12] предпринята, но до конца не доведена попытка вычислить силу реакции стола на закруглении (в правых частях полученных формул для ее горизонтальной и вертикальной компонент присутствует линейное ускорение точек нити с множителем R, который затем полагается равным нулю).

Близкая по постановке и результатам задача о движении тяжелой нити, свешивающейся с гладкого круглого шкива (машина Атвуда), рассматривалась в работах [14, 15]. В ней также обнаружено, что при безотрывном движении, начавшемся из положения равновесия, еще до того момента, когда хвост нити целиком сползет со шкива, происходит ослабление связи, и контакт нити с окружностью шкива будет нарушен. В работе [14] в предположении малости радиуса шкива построена картина движения нити и получена оценка расстояний, на которые опустится голова и поднимется хвост нити с момента начала движения до момента схода со связи.

В работе [15] радиус гладкого шкива предполагается конечным, а теретические выкладки продемонстрированы результатами экспериментов. При этом к одному из концов нити прикреплена масса M такой величины, что массой нити можно пренебречь и считать, что движение происходит с постоянным ускорением. Установлено, что эволюция движения нити во времени t проходит через три качественно различных фазы. При $0 \le t < t_{LO}$ нить движется вокруг шкива с ускорением, задаваемым массой M. В момент времени $t = t_{LO}$ нить начинает частично терять контакт со шкивом, и отрывается от него в точке C первого своего контакта со шкивом, потому что при $t > t_{LO}$ набегающая часть нити движется быстрее, чем остальная часть. Приходящаяся на дугу шкива между точками C и $C^*(t)$ избыточная длина нити образует арку. После того, как свободный конец пройдет мимо точки C, арка быстро выпрямляется и в момент $t = t^*$ со щелчком свободный хвост нити, начиная с конца, искривляется в противоположном направлении. Описана кинематика этого движения свободного конца нити в малой окрестности значения $t = t^*$.

Дискретная реализация решения задачи о сползании тяжелой нерастяжимой нити с гладкого горизонтального стола дана в [16]. Нить моделируется материальными точками одинаковой массы, которые соединены безмассовыми твердыми стержнями равной длины. Числовые расчеты с разным числом звеньев демонстрируют форму многозвенника, качественно очень близкую к результатам натурных экспериментов, опубликованных в работе [17], в которой представлено экспериментальное исследование динамики скольжения нити со стола с использованием видеоанализа для проверки теоретической модели. При этом мгновенные координаты $x(t)$ свисающего конца фиксируются с помощью видеоанализа. Сглаженные значения функции $x(t)$ и ее производных $v(t)$ и $a(t)$ вычисляются с использованием локального алгоритма регрессии. Таким образом, дифференциальное уравнение движения может быть проверено напрямую, вместо того, чтобы сравнивать положение точек нити с решением данного дифференциального уравнения. Описанная процедура оказалась весьма чувствительной к отклонениям между моделью и реальностью, поэтому точка, в которой нить перестает быть натянутой, определяется очень точно, и с этого момента контактная модель движения перестает действовать.

В работе [18] с помощью обобщения принципа Релея диссипации энергии, предложена теория особенностей диссипации в одномерном нерастяжимом континууме, который условно назван струной. На основе построенной теории даны решения трех задач динамики струны и отмечено, что разработанный общий подход заслуживает дальнейшего исследования и экспериментальной проверки. Эти задачи следующие: (a) имея вертикальную прямолинейную начальную конфигурацию, струна падает на горизонтальную плоскость; (b) в начальной конфигурации две ветви струны образуют вертикальную прямую, один конец струны зафиксирован, а другой отпущен и падающая ветвь струны сохраняет прямолинейную форму во все время движения; (c) расположенная на гладком горизонтальном столе струна соскальзывает вниз через отверстие, непрерывно удлиняясь за счет добавления своих неподвижных звеньев.

В задаче (c) внутренний удар в струне распространяется от точки отверстия в опорном столе, в то время как внешний удар сосредоточен в непосредственной близости от этой точки. В результате натяжение струны испытывает скачок, равный

$$\rho f u^2 \operatorname{sgn} u, \qquad f = \frac{1-e}{1+e},$$

e – коэффициент восстановления по Ньютону, $u = \dot{x}$. И уравнение для координаты $x(t)$ свисающего конца струны принимает вид

$$(1 + f \operatorname{sgn} u)u^2 + (\dot{u} - g)x = 0 \qquad (1.2)$$

При $f = 0$ уравнение совпадает с уравнением Кейли [8]. Особое решение уравнения (1.3) при начальном условии $x(0) = u(0) = 0$ соответствует равноускоренному спуску конца струны с ускорением

$$a = \frac{g}{3 + 2f},$$

где $g/5 \le a \le g/3$.

Из приведенного краткого обзора следует, что остается невыясненной в полной мере кинематика и динамика движения нити в задаче, указанной в заголовке данной статьи, когда радиусом R закругления края стола пренебречь нельзя. Условия нарушения контактного движения нити исследуются ниже.

2. Формула натяжения нити по всей длине. Предполагаем, что один конец нити свободно свешивается с закругленного края стола. На трех участках нити (рис. 1) движение ее описывается разными уравнениями. В осях OXY верхний конец нити A имеет абсциссу $x < 0$. Длину s нити отсчитываем от этого конца.

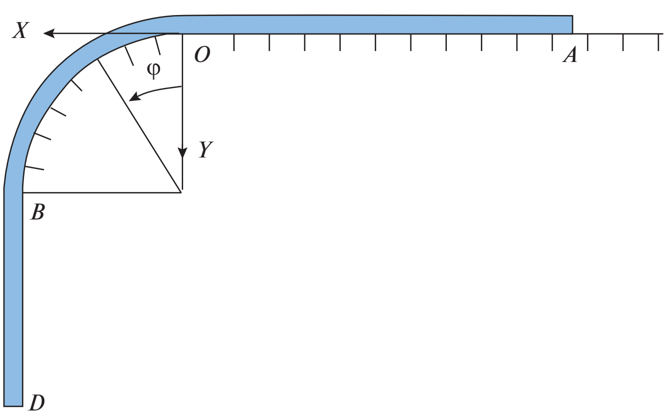


Рис. 1.

Уравнение безотрывного движения нити на участке AO имеет вид

$$-\rho x\ddot{x} = k\rho xg + T_O,$$

где ρ – масса единицы длины нити (погонная масса нити), k – коэффициент сухого трения, g – ускорение свободного падения тела в пустоте, T_O – сила натяжения нити, приложенная к отрезку AO в точке O. Обозначив v скорость $\dot{x}$, перепишем это уравнение в виде

$$x\dot{v} = -kxg - \rho^{-1}T_O \tag{2.1}$$

На участке OB уравнения безотрывного движения нити имеют вид ([2], с. 303)

$$\begin{aligned} \rho\dot{v} &= \rho g\sin\varphi + \frac{\partial T}{\partial s} - kN \\ \rho\frac{v^2}{R} &= \rho g\cos\varphi + \frac{T}{R} - N, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$\varphi = (s + x)/R$ – угол между осью OY и главной нормалью дуги OB окружности, $T(s,\varphi)$ – натяжение нити в точке, имеющей лагранжеву координату s $(-x \le s \le -x + a)$, N – сила нормального давления опоры, отнесенная к единице длины и приложенная к нити в данной точке.

И, наконец, на вертикальном участке BD движение нити описывается уравнением

$$l\dot{v} = gl - \rho^{-1}T_B, \tag{2.3}$$

где T_B – сила натяжения нити, приложенная к отрезку BD в точке B.

Здесь введены обозначения $l = L + x - a > 0$, $a = \pi R/2$, L – общая длина нити.

Сначала рассмотрим случай, когда трения нет ($k = 0$). Из уравнения $(2.2)_1$ находим

$$\underset{-x\le s\le -x+a}{T(s,t)} = \rho\left[s\dot{v}(t) + Rg\cos\frac{s + x(t)}{R}\right] + C(t)$$

В силу (2.1) и (2.3)

$$T_O = T(-x,t) = -\rho x\dot{v}, \quad T_B = T(-x + a,t) = \rho l(g - \dot{v})$$

Следовательно,

$$\dot{v} = g(l + R)L^{-1} < g \quad (l + R = y_D), \tag{2.4}$$

где y_D – ордината конца D нити и $C(t) = -\rho Rg$.

В итоге сила натяжения на закруглении равна

$$\underset{0\le\varphi\le\pi/2}{T(\varphi,t)} = \rho g\left[R(\cos\varphi - 1) + (R\varphi - x)y_D L^{-1}\right], \tag{2.5}$$

а силы натяжения нити на горизонтальном и вертикальном участках соответственно равны

$$\underset{0\le s\le -x}{T(s,t)} = -\rho s\dot{v}, \quad \underset{-x+a\le s\le L}{T(s,t)} = \rho(L-s)(g-\dot{v}),$$

где $\dot{v}$ определяется уравнением безотрывного движения нити (2.4).

Можно убедиться, что сила натяжения T нити принимает максимальное значение во внутренней точке закругления края стола (см. (2.5)). Таким образом, сила T как функция длины s нити возрастает от нуля в точке A до максимального значения и потом уменьшается до нуля в своем конце D.

Пусть $k \ne 0$, нить скользит с трением.

Из уравнений (2.2) находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{k}{R}T = W, \quad W = \rho\left[\dot{v} - \frac{kv^2}{R} - g(\sin\varphi - k\cos\varphi)\right],$$

где $W = W(s,t)$. Следовательно,

$$\underset{-x\le s\le -x+a}{T(s,t)} = \frac{\rho R}{k}\left\{\frac{kv^2}{R} - \dot{v} + \frac{g}{1+k^2}\left[k(1-k^2)\cos\varphi + 2k^2\sin\varphi\right]\right\} + C(t)e^{k\varphi} \tag{2.6}$$

Функции времени $\dot{v}, C(t)$ находим из условий (2.1) и (2.3).

$$\dot{v} = k\left\{-v^2 - jQ + \frac{g}{1+k^2}[(1+k^2)l - 2kR]\right\}Z^{-1}$$

$$C(t) = \rho Q + \rho(kx - R)(M + jQ)Z^{-1}$$

После исключения указанных функций в формуле (2.6) получим в результате следующую формулу для натяжения нити в точке s на закругленном участке стола как функцию $x(t), v(t)$ и параметров системы ρ, R, k, l:

$$\begin{gathered}\underset{-x\le s\le -x+a}{T(s,t)} = \rho e^{k\varphi}[Q + (kx - R)(M + jQ)Z^{-1}] + \\ + \rho\left\{v^2 + R(M + jQ)Z^{-1} + Rg\left[(1-k^2)\cos\varphi + 2k\sin\varphi\right](1+k^2)^{-1}\right\}\end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь

$$j = \exp\left(\frac{k\pi}{2}\right), \quad Q = \frac{g\left[(k^2-1)R - kx(1+k^2)\right]}{1+k^2} - v^2$$

$$M = \frac{g(2kR - (1+k^2)l)}{1+k^2} + v^2, \quad Z = k(l - jx) + R(j-1)$$

При $x < 0$ знаменатель $Z > 0$.

На элемент нити ρds, опирающийся на дугу OB, действует скатывающая сила $\rho gR\sin\varphi d\varphi$ и сила давления $\rho gR\cos\varphi d\varphi$. Следовательно, суммарная сила скатывания равна ρgR, полная сила сопротивления движению нити равна $k\rho g(R - x)$. Поэтому для начала движения нити из состояния покоя необходимо и достаточно выполнение условия

$$l > R(k-1) - kx \tag{2.8}$$

3. Где произойдет отрыв нити. Пусть $k = 0$, нить сползает с гладкого стола без начальной скорости.

Интеграл механической энергии нити имеет вид

$$E(v, l) = \frac{1}{2}\rho L v^2 + \rho g R^2 c - \rho g l\left(\frac{1}{2}l + R\right) = h \quad \left(c = 1 - \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда, положив $h = E(0, l_0)$, находим

$$v^2 = 2g(x - x_0)\left[L + \frac{1}{2}(x + x_0) + Rc\right]L^{-1} \tag{3.1}$$

(выражение в квадратных скобках положительно, так как функция $x(t)$ возрастает, $x(0) = x_0$).

В точке сегмента OB, в которой ослабнет контакт, мгновенное значение величины

$$N = -b\left[LR - 2(L + Rc)x_0 - x_0^2 - (L + Rc)s - 2LR\cos\frac{s + x}{R} + (2L - s + 2Rc)x + x^2\right] \quad \left(b = \frac{\rho g}{LR}\right) \tag{3.2}$$

равно нулю. Это выражение следует из уравнений $(2.2)_2$ и (2.5) с учетом интеграла (3.1).

Если контакт нити на закруглении сохраняется, то на отрезке $-x \le s \le -x + a$ величина N неотрицательна и имеет экстремум. Из (3.2) следует, что существует единственная точка эктремума строго внутри этого отрезка

$$\frac{dN}{ds} = 0 \Rightarrow \sin\varphi_{\text{extr}} = \frac{y_D}{2L} < \frac{1}{2}, \quad \frac{d^2N}{ds^2} = -\frac{2\rho g}{R^2}\cos\varphi_{\text{extr}} < 0$$

и в ней функция N достигает максимума. Следовательно, функция N первоначально обращается в нуль в одной из крайних точек закругления O или B.

Возникают два вопроса.

Во-первых, возможно ли движение нити из состояния покоя так, чтобы $x(t) = 0$, но при этом контакт нити на закруглении не был бы нарушен. Понятно, что при этом длина $-x_0$ горизонтального участка нити не должна быть большой, чтобы скорость v скольжения не возросла бы настолько, что центробежная сила оторвала бы нить от опоры.

Во-вторых, если при $x(t) < 0$ функция N на одном из концов обращается в нуль, то в какой точке, в O или B.

Подставив $s = -x_0 + a$ в формулу (15), получим отнесенную к единице длины силу давления на нить в точке B

$$P_B(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$$
$$a_0 = -2b, \quad a_1 = b(-3L + R - 4Rc)$$
$$a_2 = b\left[x_0(x_0 + 2L + 2Rc) + R(-L + R)c - R^2c^2\right]$$

Подстановкой $s = -x_0$ в формулу (3.2) получим силу давления на нить в точке O

$$P_O(x) = b_0x^2 + b_1x + a_2$$
$$b_0 = -2b, \quad b_1 = -3b(L + Rc), \quad b_2 = b\left[x_0(x_0 + 2L + 2Rc)) + LR\right]$$

Так как

$$P_B(x_0) = -\frac{1}{2}bl(x_0 + Rc) > 0, \quad P_O(x_0) = \frac{1}{2}b(-x_0y_B + LR) > 0,$$

то уравнения

$$P_B(x_0) = 0, \quad P_O(x_0) = 0$$

имеют по паре различных действительных корней, причем, один из корней в паре отрицательный.

Чтобы связь не ослабла при любом $x \le 0$, необходимо и достаточно, чтобы $a_2 > 0$ и $b_2 > 0$.

Уравнение $a_2(x_0) = 0$ имеет два отрицательных корня

$$r_1 = -L - Rc - U^{1/2}, r_2 = -L - Rc + U^{1/2}, U = L^2 + 3LRc + R^2c(2c-1)$$

так как

$$-L - Rc = -R - (L-a) < 0, 9c^2 - 4c(2c-1) = c(4+c) < 0$$

Следовательно, при $0 > x_0 > r_2$ значение $P_B(0) = a_2 > 0$. Случай $x_0 < r_1 < 0$ не реализуется, поскольку $-r_1 > L + (c-1)R > 0$.

Уравнение $b_2(x_0) = 0$ имеет корни

$$w_1 = -L - Rc - U_1^{1/2}, \quad w_2 = -L - Rc + U_1^{1/2}, \quad U_1 = L^2 + (2c-1)LR + R^2c^2,$$

если $U_1 \ge 0$, т.е. если

$$LR^{-1} \le \frac{1}{2} - c - \sqrt{\frac{1}{4} - c} \approx 0.164818 \quad \text{либо} \quad LR^{-1} \ge \frac{1}{2} - c + \sqrt{\frac{1}{4} - c} \approx 1.97677$$

Так как $LR^{-1} > \pi/2 \approx 1.5708$, то $P_O(0) = b_2 > 0$ в двух случаях: независимо от значения x_0 при $LR^{-1} < 1.97677$ или когда $0 > x_0 > w_2$. Случай $x_0 < w_1 < 0$ не реализуется, поскольку $-w_1 > L + (c-1)R > 0$. Нетрудно также проверить, что $w_2 < r_2$.

Ответим на первый вопрос. Конец A нити, первоначально покоящейся и сползающей под действием тяжести с горизонтального гладкого стола с закруглением, может достичь точки O с сохранением контакта на всей дуге OB. Для этого необходимо и достаточно, чтобы стартовое положение x_0 конца A находилось в интервале $0 > x_0 > r_2$.

При малых значениях радиуса закругления R длина указанного интервала стремится к нулю, поэтому рассматриваемый случай практически невозможен в случае гладкого стола с почти *острым* краем.

Для ответа на второй вопрос заметим, что $a_0 = b_0$, $a_1 > b_1$, $a_2 < b_2$. Действительно,

$$a_1 - b_1 = -bR(c-1) > 0, \quad a_2 - b_2 = -bR[Rc(c-1) + L(c+1)] < 0$$

Поэтому при $x < 0$

$$P_B(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2 < b_0x^2 + b_1x + b_2 = P_O(x),$$

т.е. контакт в точке B ослабнет раньше, чем в точке O.

Пусть нить скользит с трением ($k \ne 0$).

Из уравнения $(2.2)_2$ и формулы (2.7) находим выражение для силы N, которая приложена к нити в точках опоры OB и отнесена к единице длины нити

$$N = \rho\left\{e^{k\varphi}\left[g[l(1+k)(R-kx) + Rx(2+k) - R^2] + kv^2(x-l) + 2gR\frac{R - x - k(R+l)}{1+k^2}\right] + \right.$$
$$\left. + R[g[j(R-kx) - l] + v^2(1-j)] + 2gR^2\frac{k-j}{1+k^2}\right\}(RZ)^{-1} + \frac{2\rho g}{\sqrt{1+k^2}}\cos(\varphi - \alpha)$$
$$0 \le \varphi \le \pi/2, \quad \alpha = \mathrm{arctg}\,k$$

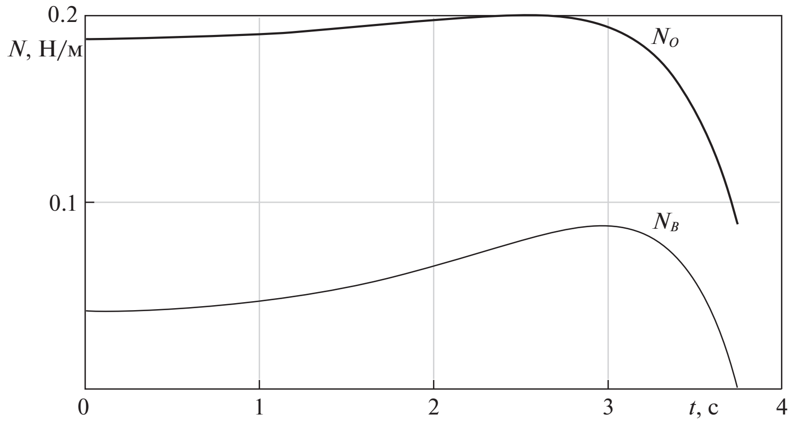


Рис. 2.

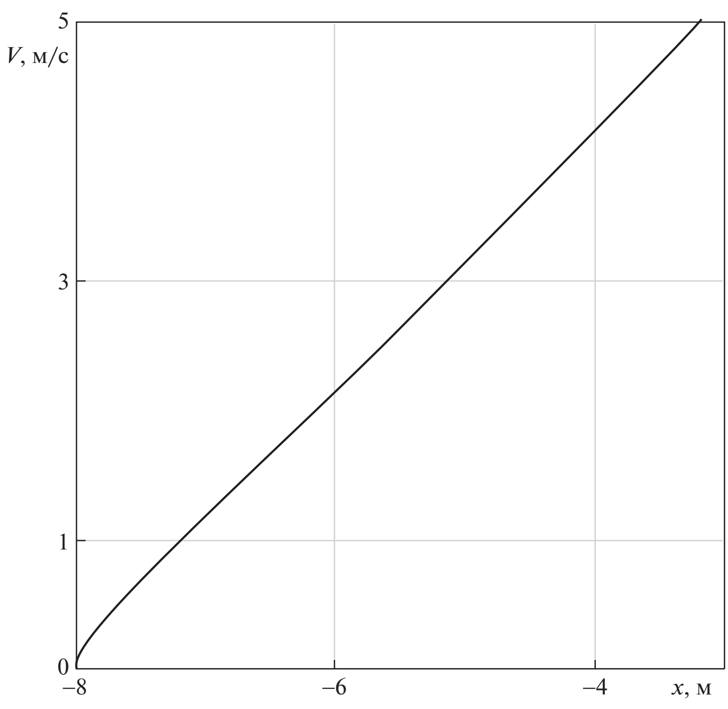


Рис. 3.

Если в точке $\varphi = \varphi_{\text{extr}}$ функция $N(\varphi)$ имеет экстремум, то в этой точке

$$\frac{dN}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d^2N}{d\varphi^2} = -2\rho g \cos\varphi_{\text{extr}} < 0$$

В силу непрерывности функции $N(\varphi)$ отсюда следует, что она может иметь не более одного локального максимума внутри сегмента OB, а минимальное (нулевое) значение принимает на одном из его концов, в точке O или B.

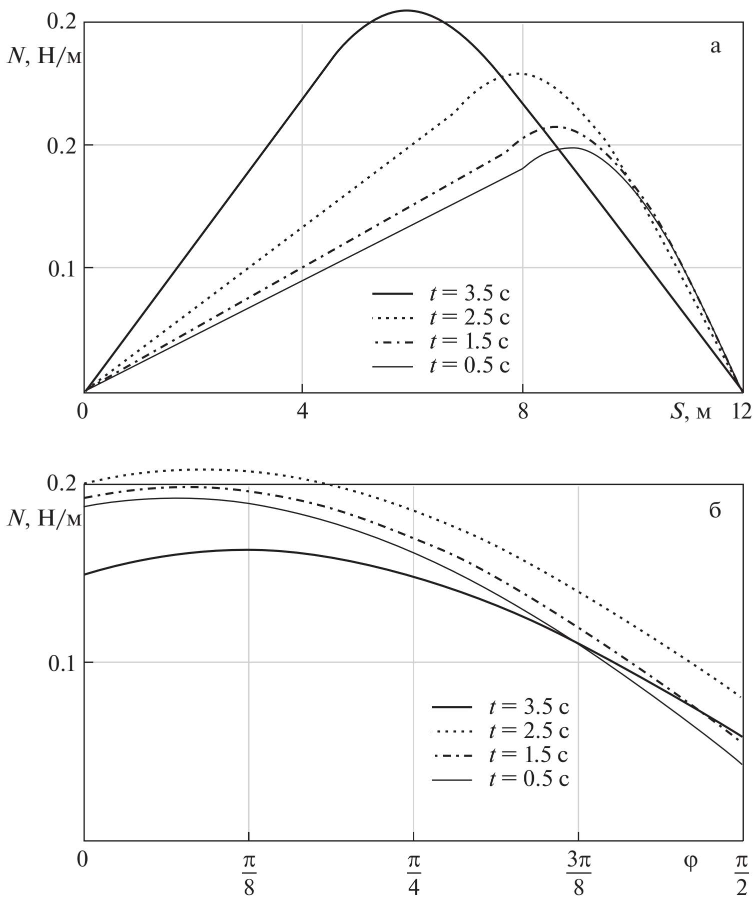


Рис. 4.

Рассмотрим числовой пример.

$$\rho = 0.01 \text{ кг/м}, \quad L = 12 \text{ м}, \quad x_0 = -8 \text{ м}, \quad R = 2 \text{ м}, \quad g = 9.8 \text{ м/с}^2, \quad k = 0.2.$$

Условие (2.8) выполнено.

Движение нити без нарушения контакта продолжается в течение примерно 3.7 секунды, пока давление N_B в точке B не становится равным нулю (рис. 2). В течение этого промежутка времени конец A нити укоротится с 8 до 3 с небольшим метров (рис. 3).

На рис. 4а приведены графики мгновенных значений натяжения нити по всей ее длине в четыре фиксированных момента времени $t_i < 3.7$с. Натяжение выражается непрерывной, но не гладкой функцией: в точках O и B нить испытывает “мягкий” удар за счет изменения скачком кривизны опорной кривой.

На рис. 4б прослеживается эволюция распределения давления на нить со стороны закругленного края стола во время движения.

Заключение. Многие технические проблемы приводят к необходимости изучения механических систем с неудерживающими связями. Встречаются такие задачи и в динамике нитей. В ряде работ получила значительное продвижение реология одномерной сплошной среды, с помощью моделей которой решаются сложные контактные задачи динамики нитей, в частности, учитывающие внешние и внутренние ударные взаимодействия. К сожалению, пока остается недостаточным экспериментальное обоснование таких моделей.

В настоящей работе на примере простой контактной задачи из динамики гибкой нерастяжимой нити показано, что существуют случаи, когда классическая механика позволяет исследовать движение нити без привлечения каких-либо дополнительных гипотез и предположений о свойствах нити.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tait P.G., Steel W.J.* A Treatise on the Dynamics of a Particle. 2nd ed. Cambridge, UK: Macmillan, 1865. xvi+363 p.
2. *Love A.E.H.* Theoretical Mechanics (An Introductory Treatise on the Principles of Dynamics). Cambridge: Univ. Press, 1897. xvi+379 p.
3. *Jeans J.H.* An Elementary Treatise on Theoretical Mechanics. Boston: GINN & Co Publ., 1907. viii+364 p.
4. *Ламб Г.* Динамика. Пер. с англ. 2-го изд. / Под ред. *Некрасова А.И.* М.; Л.: ГТТИ, 1935. 311 с.
5. *Раус Э.* Динамика систем твердых тел: В 2-х томах. Т. 2 / Под ред. *Архангельского Ю.А., Дёмина В.Г.* М.: Наука, 1983. 544 с.
6. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. Динамика системы. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
7. *Hamel G.* Theoretische Mechanik. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd LVII. Berlin: Springer, 1967. 796 s.
8. *Cayley A.* On a class of dynamical problems // Proc. R. Soc. London. 1857. V. 8. P. 506–511.
9. *O'Reilly O.M.* Modeling Nonlinear Problems in the Mechanics of Strings and Rods (The Role of the Balance Laws). Springer, 2017. xx+425 p.
10. *Lainé E.* Exercices de Mécanique. Librarie Vuibert, Paris. 1964.
11. *Sanmartin Juan R., Vallejo Miguel. A.* Widespread error in a standard problem in the dynamics of deformable bodies // Am. J. Phys. 1978. V. 46. № 9. P. 949–950.
12. *Prato D., Gleiser R.J.* Another look at the uniform rope sliding over the edge of a smooth table // Am. J. Phys. 1982. V. 50. № 6. P. 536–539.
13. *Sanmartin J.R., Vallejo M.A.* Comment on “Another look at the uniform rope sliding over the edge of a smooth table” // Am. J. Phys. 1983. V. 51. № 7. P. 585.
14. *Calcin M.G.* The dynamics of a falling chain: II // Am. J. Phys. 1989. V. 57. № 2. P. 157–159.
15. *Brun P.T., Audoly B., Goriely A., Vella D.* The surprising dynamics of a chain on a pulley: lift off and snapping // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 2016. V. 472:20160187.
16. *Vrbik J.* Chain sliding off a table // Am. J. Phys. 1993. V. 61. № 3. P. 258–261.
17. *Moreno R., Page A., Riera J., Hueso J.L.* Video analysis of sliding chains: A dynamic model based on variable-mass systems // Am. J. Phys. 2015. V. 83. № 6. P. 258–261.
18. *Virga E.G.* Chain paradoxes // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 2014. V. 471: 20140657.

Plane-Parallel Sliding of a Flexible Inextensible Chain over the Rounded Edge of a Horizontal Table

A. S. Sumbatov[a,#]

[a] *FRC “Computer Science and Control”, Dorodnitsyn Computing Center of RAS, Moscow, Russia*
[#] *e-mail: sumbatow@ccas.ru*

One of the classical problems of two-dimensional chain dynamics without and with dry friction is considered. In this problem an analytical formula for the chain tension along its total length is found. The conditions for chain contact release are studied. The existence of the energy integral in the frictionless case makes it possible to obtain these conditions in the analytical way. In the case when friction exists, the numerical-analytical research results are given.

Keywords: exible inextensible chain, contact motion, unilateral constraint, chain tension, dry friction

REFERENCES

1. *Tait P.G., Steel W.J.* A Treatise on the Dynamics of a Particle. 2nd ed. Cambridge, UK: Macmillan, 1865. xvi+363 p.
2. *Love A.E.H.* Theoretical Mechanics (An Introductory Treatise on the Principles of Dynamics). Cambridge: Univ. Press, 1897. xvi+379 p.
3. *Jeans J.H.* An Elementary Treatise on Theoretical Mechanics. Boston: GINN & Co Publ., 1907. viii+364 p.
4. *Lamb H.* Dynamics. Cambridge: Univ. Press. Reprinted, 1961. xii+351 p.
5. *Routh E.J.* Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part 2. 6-th ed. N.Y.: McMillan Comp., 1905. xiv+484 p
6. *Appell P.* Traité de Mécanique Rationnelle. T. 2. Dynamique des systèmes. Mécanique Analytique. 6-e éd. Paris: Gauthier-Villar. 1953.
7. *Hamel G.* Theoretische Mechanik. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd LVII. Berlin: Springer, 1967. 796 s.
8. *Cayley A.* On a class of dynamical problems // Proc. R. Soc. London, 1857, vol. 8, pp. 506–511.
9. *O'Reilly O.M.* Modeling Nonlinear Problems in the Mechanics of Strings and Rods (The Role of the Balance Laws). Springer, 2017. xx+425 p.
10. *Lainé E.* Exercices de Mécanique. Librarie Vuibert, Paris. 1964.
11. *Sanmartin Juan R., Vallejo Miguel. A.* Widespread error in a standard problem in the dynamics of deformable bodies // Am. J. Phys., 1978, vol. 46, no. 9, pp. 949–950.
12. *Prato D., Gleiser R.J.* Another look at the uniform rope sliding over the edge of a smooth table // Am. J. Phys., 1982, vol. 50, no. 6, pp. 536–539.
13. *Sanmartin J.R., Vallejo M.A.* Comment on "Another look at the uniform rope sliding over the edge of a smooth table" // Am. J. Phys., 1983, vol. 51, no. 7, p. 585.
14. *Calcin M.G.* The dynamics of a falling chain: II // Am. J. Phys., 1989, vol. 57, no. 2, pp. 157–159.
15. *Brun P.T., Audoly B., Goriely A., Vella D.* The surprising dynamics of a chain on a pulley: lift off and snapping // Proc. R. Soc. London. Ser. A, 2016, vol. 472: 20160187.
16. *Vrbik J.* Chain sliding off a table // Am. J. Phys., 1993, vol. 61, no. 3, pp. 258–261.
17. *Moreno R., Page A., Riera J., Hueso J.L.* Video analysis of sliding chains: A dynamic model based on variable-mass systems // Am. J. Phys., 2015, vol. 83, no. 6, pp. 258–261.
18. *Virga E.G.* Chain paradoxes // Proc. R. Soc. London. Ser. A, 2014, vol. 471: 20140657.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 5, с. 576–586

УДК 531.011:521.1

К столетию со дня рождения академика В.В. Румянцева

О МНОГООБРАЗИИ "ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПРОПЕЛЛЕР" В ОБОБЩЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ СИТНИКОВА

П. С. Красильников[1,*]

[1] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*

**e-mail: krasil06@rambler.ru*

Поступила в редакцию 01.02.2021 г.
После доработки 03.03.2021 г.
Принята к публикации 15.03.2021 г.

Исследуются поступательно-вращательные движения однородного стержня малой массы в круговой ограниченной задаче трех тел, когда притягивающие тела имеют одинаковые массы. Описан новый тип движений стержня, когда его центр масс перемещается вдоль нормали к плоскости вращения основных тел, при этом сам стержень непрерывно вращается вокруг этой нормали, образуя с ней постоянный угол $\pi/2$ (многообразие "гравитационный пропеллер").

Показано также, что указанное многообразие движений включает в себя, как частный случай, два типа движений стержня. К движениям первого типы мы относим вращения стержня с постоянной угловой скоростью, совпадающей с угловой скоростью вращения основных тел. Движения второго типа – плоские неравномерные вращения стержня в плоскости движения основных тел. Существует также многообразие движений, когда стержень поступательно движется вдоль нормали, будучи ориентирован вдоль нее. Дано описание движений на этих многообразиях.

Ключевые слова: поступательно вращательные движения, стержень, интегральные многообразия, задача Ситникова

DOI: 10.31857/S0032823521040081

1. Введение. Известно, что Румянцев В.В. уделял, вместе с учениками, особое внимание задаче о поступательно-вращательных движениях искусственных небесных тел. Так, в статье [1] спутник моделируется динамически-симметричным твердым телом, даны достаточные условия устойчивости его стационарных движений, когда центр масс спутника остается в точке либрации ограниченной задачи трех тел. Аналогичные исследования проведены в работе [2], но для спутника-гиростата. К сожалению, поступательно-вращательные движения твердого тела в ограниченной задаче трех тел исследованы мало. Приведем еще статьи [3, 4], в которых доказано существование частных движений гантели, расположенной в треугольной точке либрации круговой ограниченной задачи трех тел, исследована устойчивость этих движений. В статьях [5, 6] исследованы некоторые периодические режимы поступательно-вращательных движений космического аппарата в системе Земля–Луна и их устойчивость. В статье [7] исследуется движение материального отрезка в поле притяжения двух неподвижных притягивающих центров с равными массами и отстоящих друг от друга на чисто мнимом расстоянии $2ic$.

Рассмотрим задачу о поступательно-вращательном движении твердого тела (стержня) пренебрежимо малой массы в гравитационном поле двух одинаковых по массе основных тел (звезд) при условии, что основные тела вращаются вокруг общего центра масс по круговой орбите радиус a. С помощью стержня мы будем моделировать протяженный космический аппарат, длина которого существенно превалирует над его поперечными размерами. Если пренебречь размерами тела, рассматривая его как материальную точку, то движение тела описывается уравнениями копенгагенской ограниченной задачи трех тел. Известно, что уравнения этой задачи интегрируются для случая одномерного движения материальной точки вдоль оси, проходящей через центр масс основных тел перпендикулярно плоскости движения этих тел. Этот частный случай движения принято называть задачей Ситникова [8].

Исследуемую задачу будем называть обобщенной задачей Ситникова. Если классическая задача Ситникова (эллиптическая) имеет дело с частными движениями материальной точки вдоль указанной нормали в виде осциллирующих движений с нарастающей амплитудой, хаотических движений, периодических движений и движений с бифуркациями, с устойчивостью относительных равновесий и периодических движений [9—15], то в обобщенной задаче Ситникова исследуются вращения твердого тела, когда его центр масс перемещается вдоль нормали к плоскости движения основных тел. При этом следует различать два типа задач, отличающиехся друг от друга степенью сложности. К первому типу мы относим задачи динамики твердого тела, когда его силовая функция U вычисляется строго (как для случая стержня). Ко второму типу — задачи с приближенными значениями силовой функции, когда удерживаются несколько первых зональных гармоник в разложении силовой функции в ряд.

2. Уравнения движения стержня, силовая функция задачи. Запишем уравнения движения однородного стержня массы m и длины $2l$ в гравитационном поле притяжения двух одинаковых по массе M основных тел, вращающихся вокруг их общего центра масс C по круговой орбите радиуса a. Пусть $C\xi\eta\zeta$ инерциальная система координат, $Cxyz$ — синодическая система координат, в которой ось Cx соединяет основные тела во все время движения, ось Cz направлена по нормали к плоскости движения этих тел, ось Cy дополняет систему до правой тройки. Со стержнем свяжем оси $Ox'y'z'$ где O — центр масс стержня, z' направим вдоль стержня, оси x', y' — перпендикулярно стержню. Наряду со связанной системой координат $Ox'y'z'$ рассмотрим также поступательно движущиеся оси $O\xi'\eta'\zeta'$, ориентированные параллельно осям инерциальной системы $C\xi\eta\zeta$. Ориентацию осей $Ox'y'z'$ относительно $O\xi'\eta'\zeta'$ зададим с помощью углов Эйлера ψ, φ, θ, где ψ — угол прецессии, φ — угол собственного вращения, θ — угол нутации. Тогда уравнения движения центра масс стержня примут вид

$$m\ddot{\xi} = \frac{U}{\partial\xi}, \quad m\ddot{\eta} = \frac{\partial U}{\partial\eta}, \quad m\ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial\zeta}, \tag{2.1}$$

где ξ, η, ζ — координаты центра масс O стержня, $U = U(\xi, \eta, \zeta, \psi, \varphi, \theta, t)$ — силовая функция задачи.

Уравнения вращения по углам Эйлера можно записать в виде уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\psi} = \frac{\partial U}{\partial\psi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = \frac{\partial U}{\partial\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta} = \frac{\partial U}{\partial\theta} \tag{2.2}$$

Здесь

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2\right) + \frac{ml^3}{6}\left(\dot{\psi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)$$

кинетическая энергия стержня. Заметим, что второе равенство из системы уравнений (2.2) удовлетворяется тождественно, так как T и U не зависят от угла φ и ее производной по времени.

Подставляя кинетическую энергию в первое и третье уравнения системы (2.2), получим

$$\ddot{\psi} = -2\dot{\psi}\dot{\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{A\sin^2\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi}, \quad \ddot{\theta} = \dot{\psi}^2\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial\theta} \quad \left(A = \frac{ml^3}{3}\right) \tag{2.3}$$

Уравнения (2.1), (2.3) описывают абсолютные поступательно-вращательные движения стержня в поле притяжения двух массивных тел.

Опишем силовую функцию задачи $U = U_1 + U_2$, где U_j — силовая функция притяжения стержня со стороны основного тела с номером j. Фиксируем точку стержня массы dm с координатами $x' = y' = 0$, $z' = z'$ в связанных осях. В поступательно движущихся осях $O\xi'\eta'\zeta'$ имеем следующие координаты этой точки:

$$\xi' = \alpha'' z', \quad \eta' = \beta'' z', \quad \zeta' = \gamma'' z'$$

Здесь α'', β'', γ'' — направляющие косинусы оси z' с осями $O\xi'$, $O\eta'$, $O\zeta'$ соответственно. Несложно видеть, что

$$\alpha'' = \sin\psi\sin\theta, \quad \beta'' = -\cos\psi\sin\theta, \quad \gamma'' = \cos\theta$$

Учитывая, что координаты центра масс O стержня AB в инерциальных осях есть ξ, η, ζ, а координаты первой притягивающей массы есть ($a\cos\omega_0 t$, $a\sin\omega_0 t$, 0), где ω_0 — частота движения основных тел по круговой орбите, получим выражение для полярного радиуса r_1 массы dm:

$$r_1 = \sqrt{(\xi + \sin\psi\sin\theta z' - a\cos\omega_0 t)^2 + (\eta - \cos\psi\sin\theta z' - a\sin\omega_0 t)^2 + (\zeta + \cos\theta z')^2}$$

Полярный радиус r_2 вычисляется аналогично с условием замены a на $(-a)$.

Силовая функция задачи есть

$$U = U_1 + U_2, \quad U_j = fM\rho\int_{-l}^{l}\frac{1}{r_j}dz' \quad (j = 1, 2),$$

где ρ — постоянная плотность однородного стержня. Вычисления показывают, что

$$U_1 = -fM\rho\ln\left|\frac{\gamma - l + \sqrt{l^2 - 2l\gamma + (\xi - a\cos\omega_0 t)^2 + (\eta - a\sin\omega_0 t)^2 + \zeta^2}}{\gamma + l + \sqrt{l^2 + 2l\gamma + (\xi - a\cos\omega_0 t)^2 + (\eta - a\sin\omega_0 t)^2 + \zeta^2}}\right|$$
$$\gamma = -a\sin\theta\sin(\psi - \omega_0 t) + \zeta\cos\theta + \sin\theta(\xi\sin\psi - \eta\cos\psi)$$

Выражение для U_2 имеет аналогичный вид с учетом замены a на $(-a)$.

Очевидно, область возможных движений стержня соответствует положительным значениям подкоренных выражений, входящих в функцию U, что возможно при выполнении неравенства

$$l^2 + (\xi - a\cos\omega_0 t)^2 + (\eta - a\sin\omega_0 t)^2 + \zeta^2 > 2l|\gamma|$$

и родственного ему (a заменяется на $-a$) для любых значений углов θ, ψ и времени t. Всюду ниже считаем, что $a > l$.

3. Интегральные многообразия уравнений движения стержня. Рассмотрим многообразие решений системы уравнений (2.1), (2.3) следующего вида:

$$\textbf{I.} \quad \xi = \eta = 0, \quad \zeta = z(t), \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \omega_0 t + \delta(t) \tag{3.1}$$

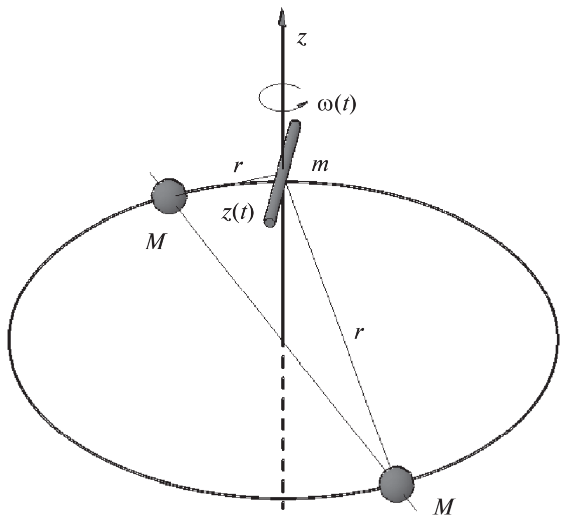


Рис. 1. Движение стержня по типу “гравитационный пропеллер”.

Вычисления показывают, что уравнения по ξ, η, θ удовлетворяются тождественно, уравнения по ζ, ψ приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -\frac{z}{l}\Big[\sqrt{\Delta_1}(l + a\sin\delta) + \sqrt{\Delta_2}(l - a\sin\delta)\Big] \\ l\ddot{\delta} &= \frac{3a\cos\delta}{l^3}\Big[\sqrt{\Delta_1}(a^2 + z^2 + la\sin\delta) - \sqrt{\Delta_2}(a^2 + z^2 - la\sin\delta)\Big] \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь двоеточием сверху обозначена вторая производная по новому времени τ

$$d\tau = \sqrt{\frac{fM}{(a^2\cos^2\delta + z^2)\sqrt{\Delta_1\Delta_2}}}\,dt$$

Величины Δ_1, Δ_2 описываются формулами

$$\Delta_1 = l^2 - 2la\sin\delta + a^2 + z^2, \quad \Delta_2 = l^2 + 2la\sin\delta + a^2 + z^2$$

Это значит, что (3.1) является интегральным многообразием, его конфигурационное пространство есть цилиндр $R \times S^1$. Система уравнений (3.2) описывает движения вдоль этого многообразия. Стержень совершает сложное движение: его центр масс движется вдоль неподвижной нормали (оси Cz) к плоскости Cxy движения главных тел, проходящей через их центр масс, а сам стержень вращается вокруг этой оси с абсолютной угловой скоростью $(\omega_0 + \dot{\delta})$ в плоскостях, паралелльных плоскости Cxy, при этом поступательные и вращательные движения завязаны (рис. 1). Заметим, что эти вращения подобны ротационному движению вертолета, когда вертолет планирует при выключенном двигателе за счет вращения лопастей.

Уравнения (2.1), (2.3) допускают также дополнительные интегральные подмногообразия вида (3.1), когда угол $\delta = \mathrm{const}$. Действительно, при $\delta = \pi/2,\ 3\pi/2$, либо $\delta = 0, \pi$ второе уравнение системы (3.2) удовлетворяется тождественно, в то время как первое уравнение задает закон движения вдоль оси Cz. Этот закон разный для разных значений δ. Этим многообразиям отвечает абсолютное вращение стержня с постоянной угловой скоростью ω_0, поэтому в синодической системе координат, вращающейся с той же самой угловой скоростью, стержень движется поступательно вдоль оси Cz.

Рассмотрим многообразия

$$\textbf{Ia.}\quad \xi = \eta = 0,\quad \zeta = z(t),\quad \theta = \frac{\pi}{2},\quad \psi = \omega_0 t + \frac{k\pi}{2}\quad (k = 1, 3) \tag{3.3}$$

Уравнение движения стержня вдоль оси z имеет вид

$$\ddot{z} = \frac{2fM\rho}{z}\left[\frac{a-l}{\sqrt{(a-l)^2 + z^2}} - \frac{a+l}{\sqrt{(a+l)^2 + z^2}}\right] \tag{3.4}$$

В этом случае стержень ориентирован параллельно оси Cx во все время движения и перемещается поступательно относительно синодических осей вдоль оси Cz. Отметим, что существование интегрального многообразия (3.3) следует также из физических соображений. Действительно, в силу симметрии задачи силы гравитационного притяжения дают составляющую вдоль оси Cz, в то время как проекции этих сил вдоль стержня уничтожают друг друга для каждой пары точек стержня, расположенных симметрично относительно его центра масс O. В равномерно вращающихся синодических осях переносные силы инерции также уничтожают друг друга для указанных пар точек стержня, кориолисовые силы инерции равны нулю. Итак, главный вектор сил направлен по оси Cz, главный момент сил равен нулю. Стержень движется поступательно вдоль оси Cz.

Для многообразия

$$\textbf{Ib.}\quad \xi = \eta = 0,\quad \zeta = z(t),\quad \theta = \frac{\pi}{2},\quad \psi = \omega_0 t + k\pi\quad (k = 0, 1) \tag{3.5}$$

уравнение движения вдоль оси z имеет вид

$$\ddot{z} = \frac{2Mfz}{\sqrt{l^2 + a^2 + z^2}(a^2 + z^2)} \tag{3.6}$$

Здесь стержень движется вдоль оси Cz поступательно (относительно синодических осей $Cxyz$) так, что он перпендикулярен оси Cx во все время движения.

Отметим также интегральное подмногообразие

$$\textbf{Ic.}\quad \xi = \eta = 0,\quad \zeta = 0,\quad \theta = \frac{\pi}{2},\quad \psi = \omega_0 t + \delta(t) \tag{3.7}$$

для которого уравнение по углу δ имеет вид

$$l\delta'' = \frac{3a\cos\delta}{l^3}\left[\sqrt{l^2 - 2la\sin\delta + a^2}(a^2 + la\sin\delta) - \sqrt{l^2 + 2la\sin\delta + a^2}(a^2 - la\sin\delta)\right] \tag{3.8}$$

В этом случае стержень вращается неравномерно вокруг собственного центра масс, совпадающего с центром масс основных притягивающих тел, плоскость его вращений совпадает с плоскостью движения этих тел.

В заключение исследований укажем еще на одно интегральное многообразие

$$\textbf{II}\quad \xi = \eta = 0,\quad \zeta = z(t),\quad \theta = 0, \tag{3.9}$$

которому соответствует поступательное движение стержня вдоль оси Cz, при этом сам стержень ориентирован вдоль оси Cz во все время движения. На этом многообразии вырождаются углы Эйлера и появляются особенности в правых частях уравнений (2.1), (2.3). Поэтому для доказательства интегральности многообразия (3.9) воспользуемся физическими соображениями. В силу симметрии расположения стержня в синодических осях и симметрии гравитационного воздействия главный вектор гравитационных сил ориентирован вдоль оси Cz, переносные и кориолисовые силы инерции равны нулю. Главный момент внешних сил относительно центра масс стержня равен нулю. Поэтому стержень, ориентированный вдоль оси Cz в начальный момент времени и движущийся поступательно вдоль этой оси, сохранит это движение.

Силовая функция стержня на этом многообразии имеет вид

$$U = 2fM\rho\ln\frac{z + l + \sqrt{(l+z)^2 + a^2}}{z - l + \sqrt{(l-z)^2 + a^2}}$$

Тогда колебания центра масс стержня вдоль оси Cz описываются уравнением

$$\ddot{z} = 2fM\rho\left(\frac{1}{\sqrt{(l+z)^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l-z)^2 + a^2}}\right) \tag{3.10}$$

4. Исследование движений на одномерных многообразиях. Рассмотрим движения вдоль одномерных многообразий (3.3), (3.5), (3.7),(3.9). Исследуем многообразие **Ia** (см. (3.3)). Уравнение движений (3.4) стержня допускает частное решение $z = 0$, несмотря на то, что правая часть этого уравнения неопределена в нуле при $a > l$ (неопределенность 0/0 устраняется стандартно). Этому решению отвечает относительное равновесие стержня в синодических осях, когда он ориентирован вдоль прямой, соединяющей притягивающие тела, при этом его центр масс совпадает с центром масс притягивающих тел, а сам стержень находится в плоскости движения этих тел. Такое стационарное движение является аналогом относительного равновесия стержня типа “спица” в центральном гравитационном поле [16].

Интеграл энергии задачи приводится к виду

$$m\frac{\dot{z}^2}{2} + fM\rho\ln\frac{\left(-a - l + \sqrt{(a+l)^2 + z^2}\right)\left(a - l + \sqrt{(a-l)^2 + z^2}\right)}{\left(-a + l + \sqrt{(a-l)^2 + z^2}\right)\left(a + l + \sqrt{(a+l)^2 + z^2}\right)} = h,$$

если движения стержня рассматривать в синодических осях. Вычисления показывают, что фазовый портрет задачи топологически подобен фазовому портрету колебаний материальной точки в круговой задаче Ситникова (рис. 2).

Отсюда следует, в частности, что положение относительного равновесия $z = 0$, в котором стержень принадлежит плоскости вращения основных тел и ориентирован вдоль оси Cx, соединяющей притягивающие тела, устойчиво по отношению к малым возмущениям в z и $\dot{z}$, сохраняющим движение стержня вдоль интегрального многообразия (3.3).

Рассмотрим интегральное многообразие (3.5). Отметим, что уравнение движения стержня (3.6) допускает частное решение z, при котором стержень расположен в плоскости движения основных тел, при этом его центр масс совпадает с центром масс этих тел, стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 в инерциальном пространстве так, что сохраняет постоянный угол $\pi/2$ с прямой, соединяющей основные тела. Такое стационарное движение является аналогом относительного равновесия типа “стрела”, обнаруженное Дубошиным Г.Н. [16] в центральном силовом поле. Интеграл энергии имеет следующий вид в синодических осях:

$$m\frac{\dot{z}^2}{2} - 2fM\rho\ln\frac{\sqrt{l^2 + a^2 + z^2} + l}{\sqrt{l^2 + a^2 + z^2} - l} = h$$

Фазовый портрет колебаний стержня вдоль оси Cz подобен фазовому портрету колебаний материальной точки в круговой задаче Ситникова.

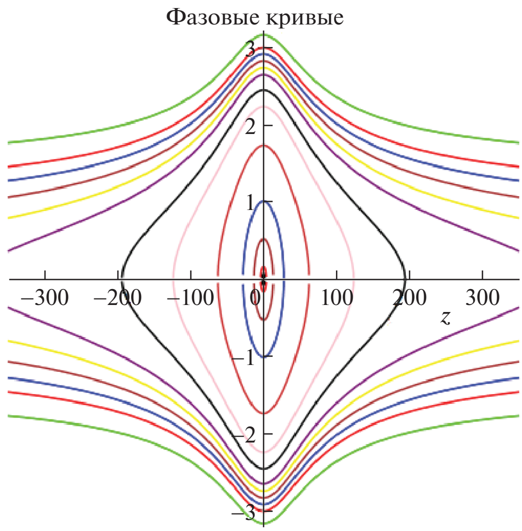


Рис. 2. Фазовый портрет колебаний на многообразии (3.3), $l = a/2$.

Исследуем многообразие (3.7). Интеграл энергии имеет вид

$$\frac{\rho l^3}{6}(\dot{\delta} + \omega_0)^2 - U = h,$$

$$U = fM\rho \ln \frac{\left(-a\sin\delta + l + \sqrt{l^2 - 2la\sin\delta + a^2}\right)\left(a\sin\delta + l + \sqrt{l^2 + 2la\sin\delta + a^2}\right)}{\left(-a\sin\delta - l + \sqrt{l^2 + 2la\sin\delta + a^2}\right)\left(a\sin\delta - l + \sqrt{l^2 - 2la\sin\delta + a^2}\right)}$$

Заметим, что выражение, стоящее под знаком логарифма, положительно, область возможных движений – цилиндр $R \times S^1$. Фазовый портрет колебаний подобен фазовому портрету колебаний математического маятника.

В заключение рассмотрим многообразие **II** (см. (3.9)). Интеграл энергии на этом многообразии вычисляется по формуле

$$\frac{m\dot{z}^2}{2} - 2fM\rho \ln \frac{z + l + \sqrt{(l + z)^2 + a^2}}{z - l + \sqrt{(l - z)^2 + a^2}} = h \tag{4.1}$$

Вычисления показывают, что фазовый портрет колебаний стержня вдоль оси Cz подобен фазовому портрету колебаний материальной точки в круговой задаче Ситникова.

Частное решение $z = 0$ отвечает абсолютному равновесию стержня, при котором он ориентирован вдоль оси Cz, а его центр масс совпадает с центром масс основных тел. Это равновесие подобно относительному равновесию стержня на круговой орбите в центральном гравитационном поле, когда стержень ориентирован по нормали к плоскости орбиты своего центра масс. Такие равновесия принято называть “поплавок” [16].

5. Описание движений на интегральном многообразии “гравитационный пропеллер”. Рассмотрим движение на сложном многообразии (3.1), (3.2), которые мы называем “гравитационный пропеллер”, если $z(t) \neq 0$. Воспользуемся асимптотическими методами исследования дифференциальных уравнений с малым параметром. В качестве малого параметра выбираем характерную длину стержня — l. При $l \to 0$ масса однородного стержня стремится к нулю, поэтому уравнения его поступательно-вращательных движений являются сингулярно возмущенными по δ.

Действительно, раскладывая правую часть второго уравнения системы (3.2) в ряд Тейлора по l, получим неопределенности 0/0 в первых трех членах разложения. Раскрывая эти неопределенности, имеем

$$l\delta'' = \frac{39a^2 \sin 2\delta\left(z^2 + a^2\cos^2\delta\right)}{\left(a^2 + z^2\right)^{3/2}} + O(l^2) \tag{5.1}$$

Уравнение по z является регулярным по малому параметру l, несмотря на то, что l содержится в знаменателе правой части:

$$z'' = -4z\frac{z^2 + a^2\cos^2\delta}{\sqrt{z^2 + a^2}} + O(l^2) \tag{5.2}$$

Отбрасываем члены порядка l^2, вводим новое время ν:

$$d\nu = \sqrt{\frac{z^2 + a^2\cos^2\delta}{\sqrt{z^2 + a^2}}}d\tau = \sqrt{\frac{fM}{\sqrt{\Delta_1\Delta_2(z^2 + a^2)}}}dt$$

Имеем приближенную систему уравнений, описывающую вращательные движения стержня:

$$l\frac{d^2\delta}{d\nu^2} = \frac{39a^2\sin 2\delta}{a^2 + z^2}, \quad z = c_1\cos 2\nu + c_2\sin 2\nu \quad (c_1, c_2 = \text{const}) \tag{5.3}$$

Очевидно, в данном приближении по l движение центра масс тела практически не зависит от вращения тела относительно центра масс и описывается гармонической функцией ν.

Уравнение (5.3) является неавтономным уравнением второго порядка с малым параметром при старшей производной, исследованным в статье [17]. Это уравнение не содержит диссипативных членов с δ'. Поэтому уравнение (5.3) не охватывается теоремой Тихонова А.Н. [18], следовательно, отсутствует предельный переход при $l \to 0$ от решения уравнения (5.3) к решению вырожденного уравнения

$$\frac{39a^2\sin 2\delta}{a^2 + (c_1\cos 2\nu + c_2\sin 2\nu)^2} = 0 \tag{5.4}$$

Легко видеть, что все решения уравнения (5.4) имеют вид $\delta^* = 0, \pi, \pi/2, 3\pi/2$, отвечающий значениям угла δ на интегральных подмногообразиях, описанных выше.

Как следует из статьи [17], решение $\delta(\nu, l)$ уравнения (5.3) не имеет предела при $l \to 0$, а колеблется с большой частотой порядка $1/l$ и конечной амплитудой, зависящей от начальных условий, около решения δ^* вырожденного уравнения (5.4). Совокупность максимумов и минимумов возмущения $\left(\delta(\nu, l) - \delta^*\right)$ приближаются при $l \to 0$ к некоторым непрерывным кривым $\delta = F_1(\nu)$, $\delta = F_2(\nu)$, не зависящим от l. Эти кривые были названы опорными и получены дифференциальные уравнения, описывающие эти кривые.

Расчеты показали справедливость этих выводов. Выбирая в качестве величин l, a характерные размеры объектов в солнечной системе ($l = 10$ км, $a = 1$ а.е.), имеем безразмерное значение $l \sim 10^{-7}$. Исследовались колебания, описываемые уравнением (5.3) в окрестности интегрального многообразия $\delta^* = 0$, $\delta^{*\prime} = 0$ при начальных данных

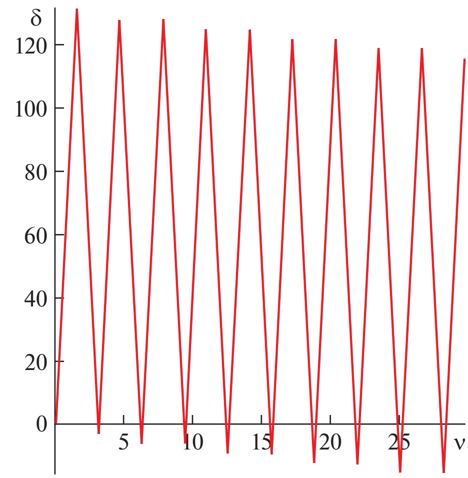


Рис. 3. Сингулярно-возмущенные колебания стержня в окрестности интегрального многообразия $\delta^* = 0$, $\delta^{*\prime} = 0$.

$\delta(0) = 10^{-7}$, $\delta'(0) = 0$ и параметрах $c_1 = 0$, $c_2 = 0.1$. Результаты расчетов изображены на рис. 3.

Отсюда следует, что в возмущенном движении стержень совершает в синодических осях приблизительно 21 оборот (130 рад) в одном направлении, потом 21 оборот – в противоположном и так далее, при этом величина прямого поворота со временем падает, что ведет к монотонному убыванию опорной кривой $\delta = F_1(\nu)$ проходящей через точки максимума решения $\delta(\nu, l)$.

Случай больших l не исследован.

Заключение. Исследование уравнений поступательно-вращательных движений стержня в круговой ограниченной задаче трех тел, когда основные тела имеют одинаковые массы и вращаются относительно собственного центра масс по круговым орбитам, показало, что существует семейство частных движений, когда центр масс стержня перемещается вдоль оси Cz, т.е. вдоль нормали к плоскости вращения основных тел. Сам стержень непрерывно вращается вокруг этой оси, сохраняя с ней неизменный угол $\pi/2$, при этом угловая скорость вращения стержня и скорость движения его центра масс вдоль оси Cz взаимосвязаны. В частном случае возможны вращения стержня с постоянной угловой скоростью ω_0, совпадающей с угловой скоростью орбитального движения основных тел, но при этом стержень постоянно ориентирован вдоль прямой, паралелльной отрезку, соединяющему основные тела, либо составляет с этим направлением угол, равный $\pi/2$; скорость движения его центра масс не зависит от ω_0, но определяется текущей координатой z (в силу наличия интеграла энергии). Возможны также неравномерные вращения стержня при $z(t) = 0$ (плоские движения стержня в плоскости вращения основных тел).

Особняком стоит частный вид движений стержня, когда он ориентирован вдоль оси Cz, перемещаясь вдоль неё поступательно, либо сохраняя абсолютное равновесие при $z(t) = 0$.

Показано, что на одномерных многообразиях колебания стержня подобны колебаниям материальной точки в круговой задаче Ситникова, либо подобны колебаниям математического маятника. В то же время, колебания стрежня малой длины вдоль двумерного многообразия “интегральный пропеллер” имеют сложный сингулярно-возмущенный характер в окрестности некоторых относительных равновесий: чатоты колебаний принимают большие значения при ограниченной амплитуде колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Румянцев В.В.* Об устойчивости ориентаций динамически симметричного спутника в точках либрации // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 2, 3.
2. *Джаникашвили Г.В.* Об относительных равновесиях спутника-гиростата в ограниченной задаче трех тел // Сообщ. АН ГССР. 1976. Т. 84. № 1. С. 49.
3. *Robinson W.J.* The restricted problem of three bodies with rigid dumb-bell satellite // Celest. Mech. 1973. V. 8. № 2. P. 323–330.
4. *Robinson W.J.* Attitude stability of a rigid body placed at an equilibrium point in the problem of three bodies// Celest. Mech. 1974. V. 10. № 1. P. 17–33.
5. *Guzzetti D., Howell K.C.* Natural periodic orbit-attitude behaviors for rigid bodies in three-body periodic orbits // Acta Astron. 2017. V. 130. P. 97–113.
6. *D. Guzzetti, Howell K.C.* Coupled orbit-attitude dynamics in the three-body problem: a family of orbit-attitude periodic solutions // AIAA. 2014. 4100.
7. *Pascal M.* Restraint problem of three bodies applied to a rod // Comptes rendus de l’Académie des Sciences. 1971. V. 272. № 1.
8. *Ситников К.А.* Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 2. С. 303–306.
9. *Corbera M., Llibre J.* Periodic orbits of the Sitnikov problem via a Poincare map // Celest. Mech. Dynam. Astronom. 2000. № 77. P. 273–303.
10. *Kovács T., Érdi B.* The structure of the extended phase space of the Sitnikov problem // Astron. Nachr. 2007. AN 328. № 8. P. 801–804.
11. *Martinez-Alfaro J., Chiralt C.* Invariant rotational curves in Sitnikov’s problem // Cel. Mech. & Dyn. Astr. 1993. V. 55. P. 351–367.
12. *Калас В.О., Красильников П.С.* Исследование устойчивости равновесия в задаче Ситникова в нелинейной постановке // Нелин. дин. 2015. Т. 11. № 1. С. 117–126.
13. *Belbruno E., Llibre J., Olle M.* On the families of periodic orbits which bifurcate from the circular Sitnikov motions // Celest. Mech.&Dynam. Astronom. 1994. № 60. P. 99–129.
14. *Sidorenko V.V.* On the circular Sitnikov problem: the alternation of stability and instability in the family of vertical motions // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2011. V. 109. P. 367–384.
15. *Маркеев А.П.* О субгармонических колебаниях в близкой к круговой эллиптической задаче Ситникова // ПММ. 2020. Т. 84. № 4. С. 442–454.
16. *Дубошин Г.Н.* Об одном частном случае задачи о поступательно-вращательном движении двух тел // Астрон. ж. 1959. Т. 36. № 1. С. 153–163.
17. *Волосов В.М.* Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной // Матем. сб. 1952. Т. 30 (72). № 2. С. 245–270.
18. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сб. 1952. Т. 31 (73). № 3. С. 575–586.

On the Manifold “Gravitational Propeller” in the Generalized Sitnikov Circular Problem

P. S. Krasilnikov[a,#]

[a] *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

[#] *e-mail: krasil06@rambler.ru*

We investigate the orbit-attitude behaviors for a homogeneous light rod in the circular restricted three-body problem with two same primaries. It is shown that there are exists an integral manifold such that the rod barycenter moves along the normal to the plane of the two primaries while the rod itself rotates continuously around this normal (manifold “gravitational propeller”). It is also shown this manifold includes particular different types of rod movements. The first type corresponds to a constant rod angular velocity that coincides with the angular velocity of primaries rotations. The second type corresponds to rod uneven rotations in the plane of the two primaries. There is also a manifold of motions when the rod moves translationally along the normal being directed along it. A description of motions on these manifolds is given.

Keywords: orbit-attitude motion, rod, integral manifolds, Sitnikov problem

REFERENCES

1. *Rumyantsev V.V.* On the stability of orientation of a dynamically symmetric satellite in the libration points // Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela, 1974, no. 2, pp. 3–8.
2. *Dzhanikashvili G.V.* Relative equilibria of a satellite gyrostat in the restricted three-body problem// Akad. Nauk Gruz. SSR, Soobshcheniia, 1976, vol. 84, pp. 53–56. (in Russian)
3. *Robinson W.J.* The restricted problem of three bodies with rigid dumb-bell satellite // Celest. Mech., 1973, vol. 8, no. 2, pp. 323–330.
4. *Robinson W.J.* Attitude stability of a rigid body placed at an equilibrium point in the problem of three bodies// Celest. Mech., 1974, vol. 10, no. 1, pp. 17–33.
5. *Guzzetti D., Howell K.C.* Natural periodic orbit-attitude behaviors for rigid bodies in three-body periodic orbits// Acta Astron., 2017, vol. 130, pp. 97–113.
6. *Guzzetti D., Howell K.C.* Coupled orbit-attitude dynamics in the three-body problem: a family of orbit-attitude periodic solutions // AIAA, 2014, 4100.
7. *Pascal M.* Problème restreint des trois corps appliqué à un bâtonnet// C.R. Acad. Sci., Paris, Sér. A, 1971, vol. 272. pp. 286–288.
8. *Sitnikov K.* The existence of oscillatory motions in the three-body problem// Sov. Phys. Dokl., 1961, vol, 5. pp. 647–650.
9. *Corbera M., Llibre J.* Periodic orbits of the Sitnikov problem via a Poincare map // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2000, no. 77, pp. 273–303.
10. *Kovács T., Érdi B.* The structure of the extended phase space of the Sitnikov problem // Astron. Nachr., 2007, AN 328, no. 8, pp. 801–804.
11. *Martinez-Alfaro J., Chiralt C.* Invariant rotational curves in Sitnikov's problem // Cel. Mech.&Dyn. Astron., 1993, vol. 55, pp. 351–367.
12. *Kalas V.O., Krasilnikov P.S.* On the investigation of stability of equilibrium in Sitnikov problem in nonlinear formulation // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2015, vol. 11, no. 1, pp. 117–126.
13. *Belbruno E., Llibre J., Olle M.* On the families of periodic orbits which bifurcate from the circular Sitnikov motions // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 1994, no. 60, pp. 99–129.
14. *Sidorenko V.V.* On the circular Sitnikov problem: the alternation of stability and instability in the family of vertical motions // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2011, vol. no. 109, pp. 367–384.
15. *Markeev A.P.* Subharmonic oscillations in the near-circular elliptic sitnikov problem // Mech. Solids, 2020, vol. 55, pp. 1162–1171.
16. *Duboshin G. N.* On one particular case of the problem of the translation¬al-rotational motion of two bodies // Sov. Astron., 1959, vol. 3, no. 1, pp. 154–165.
17. *Volosov V.M.* Second-order nonlinear differential equations with a small parameter at the highest derivative // Mat. Sb., 1952, vol. 72, no. 2, pp. 245–270.
18. *Tikhonov A.N.* Systems of differential equations containing small parameters at the derivatives // Mat. Sb., 1952, vol. 73, no. 3, pp. 575–586.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 5, с. 587–600

УДК 532.516:534:1

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПОТОК ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЕ

А. А. Гурченков[1,2,*]

[1]ФИЦ "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия
[2] МАИ (исследовательский университет), Москва, Россия
**e-mail: challenge2005@mail.ru*

Поступила в редакцию 06.02.2021 г.
После доработки 11.04.2021 г.
Принята к публикации 20.04.2021 г.

Изучается эволюция течения вязкой электропроводной жидкости на вращающейся пластине в присутствии магнитного поля. Представлено аналитическое решение трехмерных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики. Определено поле скоростей и индуцированное магнитное поле в потоке вязкой электропроводной жидкости, заполняющей полупространство, ограниченное плоской стенкой. Жидкость вместе с ограничивающей плоскостью вращается как одно целое с постоянной угловой скоростью вокруг неперпендикулярного к плоскости направления. Неустановившийся поток индуцирован внезапно начинающимися колебаниями стенки и приложенным магнитным полем, направленным перпендикулярно плоскости. Рассматривается ряд частных случаев движения стенки. На основании полученных результатов исследуются отдельные структуры пограничных слоев у стенки.

Ключевые слова: уравнения магнитной гидродинамики, электропроводная жидкость, нормальные колебания, пограничные слои

DOI: 10.31857/S0032823521050040

1. Введение. Магнитная гидродинамика (МГД) начала интенсивно развиваться с середины прошлого века в связи с бурным развитием исследований в астрофизике, термоядерной энергетике, а также созданием новых приборов и устройств для энергетических и двигательных систем.

Большой цикл работ был связан с исследованием магнитогидродинамических пограничных слоев. Интерес к подобной проблематике связан с возможностью использования электромагнитного поля как управляющего фактора, приводящего к перестройке всего течения, что особенно актуально в связи с развитием гиперзвуковой аэродинамики и ракетной техники. Была найдена глубокая аналогия между обтеканием тел и обтеканием локальных сопротивлений.

Данное исследование обобщает предыдущие результаты [1–5]. Изучалось [1] нестационарное движение вязкой жидкости, ограниченной перемещающейся плоской стенкой. Рассматривались [2] неустановившиеся пограничные слои вязкой несжимаемой жидкости (слои Рэлея–Стокса) на вращающейся пластине в отсутствие магнитного поля. Эволюция вязкого потока на вращающейся пластине, индуцированная продольными колебаниями стенки и вдувом (отсосом) среды в отсутствие магнитного поля, изучалась в [3]. Установившееся течение идеальной электропроводной жидкости вращающейся между параллельными стенками в постоянном магнитном поле исследовалось в [4]. Неустановившееся движение вязкой электропроводной жидкости между вращающимися параллельными стенками при наличии магнитного поля представлено в [5]. В настоящей работе изучается нестационарный поток несжимаемой вязкой электропроводной жидкости на вращающейся пластине при наличии магнитного поля. Жидкость занимает полупространство, ограниченное плоской стенкой и вращается вместе со стенкой с постоянной угловой скоростью вокруг некоторой оси. В момент времени $t > 0$ стенка начинает совершать продольные колебания и в тот же момент времени по нормали к стенке включается однородное магнитное поле, индукция которого постоянна. Далее исследуется распространение возмущений в однородной проводящей среде под действием однородного магнитного поля и продольных колебаний стенки. Побудительными мотивами написания данной работы явились как фундаментальный, так и сугубо прикладной аспекты в современных геофизических исследованиях. В частности, весьма насущна проблема определения параметров искусственного источника волн, по электромагнитному эффекту вызванного им волнения. Актуальность темы обусловлена необходимостью изучения Мирового океана, играющего все большую роль в жизни человечества. Это способствовало началу исследований макроскопических движений морской воды (проводящая жидкость), находящейся в магнитном поле Земли, которые сопровождаются появлением электрических токов и, как следствие, индуцированного магнитного поля. Тем самым задача определения индуцированного электромагнитного поля распадается на две части: определение поля скоростей волнения и нахождение по заданному полю скоростей электромагнитного возмущения. При этом скорость движения среды находят или из результатов натурных наблюдений, или из решения гидродинамической задачи. Представленная работа может служить математической моделью течений морской воды, находящейся в магнитном поле Земли, а также других процессов в астрофизических задачах (магнитосферах планет, джетах и аккреционных дисках и т.п.). В работе обсуждается случай резонанса (частота продольных колебаний стенки совпадает с удвоенной частотой проекции угловой скорости вращения системы тело–жидкость). Резонанс приводит к нетривиальному физическому эффекту: амплитуда колеблющегося поля скоростей не стремится к нулю на бесконечности, а остается ограниченной.

2. Аналитическое решение уравнений магнитной гидродинамики. Рассмотрим движение вязкой электропроводной несжимаемой жидкости в полупространстве, ограниченном плоской стенкой, которая вращается вместе со стенкой как одно целое с угловой скоростью $\omega_0 = \text{const}$, причем вектор ω_0 образует с этой плоскостью угол $\beta\left(0 < \beta \le \frac{\pi}{2}\right)$. Бесконечная пластина H ограничивает полупространство Q, заполненное несжимаемой жидкостью плотности ρ, кинематической вязкости ν и магнитной проницаемости μ. Жидкость находится в поле массовых сил с потенциалом U. Схематично геометрия представлена на рис. 1.

Свяжем с пластиной декартову систему координат Q_{xyz} с ортами $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ так, что плоскость O_{xz} совпадает с пластиной, а ось Q_y направлена перпендикулярно пластине внутрь жидкости.

В момент времени $t > 0$ пластина начинает двигаться в продольном направлении со скоростью $\vec{u}(t)$ и в этот момент включается однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}_0$, которое направлено перпендикулярно пластине, т.е. $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_y$.

Перед тем как написать уравнения движения вязкой электропроводной жидкости скажем несколько слов об уравнении индукции $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) + \dfrac{1}{\mu\sigma}\Delta\vec{B}$. Важным свойством этого уравнения является его инвариантность по отношению к переходу к вращающейся системе координат. Это объясняется тем, что в магнито-гидродинамическом приближении поле $\vec{B}$ обладает указанной инвариантностью. Другое важное

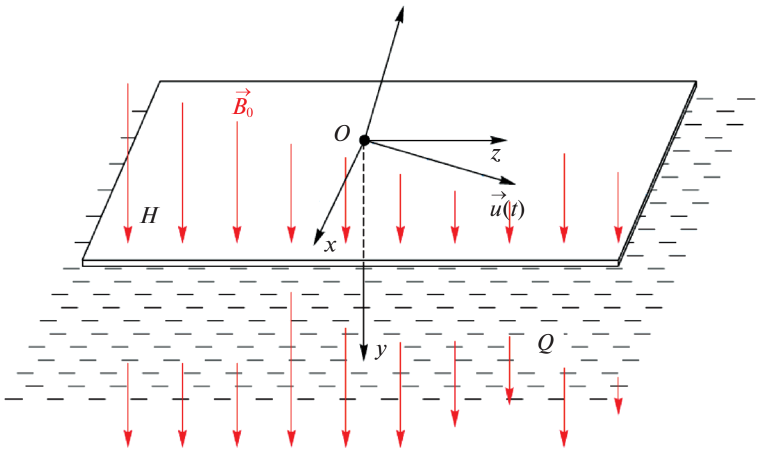


Рис. 1.

свойство этого уравнения заключается в том, что в случае бесконечно проводящей жидкости сохраняется поток поля $\vec{B}$ через любую материальную поверхность в жидкости (силовые линии вморожены в движущееся вещество). Магнитное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_m = \dfrac{VL}{\nu_m}$, выражающее отношение по порядку величины второго члена в правой стороне этого уравнения к первому, будем считать большим. Здесь V – характерная скорость задачи, L – характерный размер, ν_m – магнитная вязкость. Случай $\mathrm{Re}_m \ll 1$ реализуется не только при очень высокой проводимости, но и в случае больших размеров и скоростей системы, что характерно для астрофизических задач. Поскольку представленная задача может служить математической моделью течения морской воды (проводящая жидкость) в магнитном поле вращающейся Земли, то имеет место случай $\mathrm{Re}_m \gg 1$. В этом случае в уравнении индукции нужно оставить только первый член.

Уравнение движения жидкости в системе координат Q_{xyz}, вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$, а также граничные и начальные условия имеет вид:

$$\begin{gathered}
\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \\
+ \nabla U + \nu\Delta\vec{v} + \frac{1}{\mu\rho}\operatorname{rot}\vec{B} \times \vec{B} \\
\operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad \text{при} \quad \vec{r} \in Q \\
\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) \\
\operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad \text{при} \quad \vec{r} \in Q
\end{gathered} \tag{2.1}$$

граничные и начальные условия:

$$\begin{gathered}
\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{u}(t), \quad \vec{r} \in H, \quad t > 0 \\
|\vec{v}(\vec{r}, t)| \to 0, \quad |\vec{r}| \to \infty, \quad t > 0 \\
\vec{v}(\vec{r}, 0) = 0, \quad \vec{r} \in Q \\
\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 = \mathrm{const}, \quad \vec{r} \in H, \quad t > 0
\end{gathered}$$

$$\vec{B}(\vec{r},0) = 0, \quad \vec{r} \in Q$$

Здесь t — время, $\vec{r}$ — радиус-вектор относительно полюса O, $\vec{v}$ — скорость жидкости, P — давление.

Решение системы уравнений (2.1), удовлетворяющее начальным и граничным условиям ищем в виде:

$$\begin{gathered}\vec{v} = v_x(y,t)\vec{e}_x + v_z(y,t)\vec{e}_z \\ \vec{B} = B_x(y,t)\vec{e}_x + B_0\vec{e}_y + B_z(y,t)\vec{e}_z \\ P = \frac{\rho}{2}(\vec{\omega}_0 \times \vec{r})^2 + \rho U + \rho q(y,t)\end{gathered} \tag{2.2}$$

Тогда система (2.1) распадается на подсистемы:

$$\begin{gathered}\frac{\partial v_x}{\partial t} + 2\vec{\omega}_{0y}\vec{e}_y \cdot v_z = \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\mu\rho}B_0\frac{\partial B_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} - 2\vec{\omega}_{0y}\vec{e}_y \cdot v_x = \nu\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{1}{\mu\rho}B_0\frac{\partial B_z}{\partial y}\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = 2\vec{v}(\vec{\omega}_0 \times \vec{e}_y) - \frac{1}{\mu\rho}\left(B_z\frac{\partial B_z}{\partial y} + B_x\frac{\partial B_x}{\partial y}\right) \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = B_0\frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = B_0\frac{\partial v_z}{\partial y} \tag{2.5}$$

Обозначим $\omega_y = \vec{\omega}_0\vec{e}_y = \Omega$ и введем комплексную структуру

$$\hat{v} = v_x(y,t) + iv_z(y,t), \quad \hat{u} = u_x + iu_z, \quad \hat{B} = B_x(y,t) + iB_z(y,t)$$

Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\hat{v}}{\partial t} - i2\Omega\hat{v} = \nu\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial y^2} + \frac{B_0}{\mu\rho}\frac{\partial}{\partial y}\hat{B} \\ \frac{\partial\hat{B}}{\partial t} = B_0\frac{\partial\hat{v}}{\partial y}\end{gathered} \tag{2.6}$$

граничные и начальные условия запишутся в виде

$$\begin{gathered}\hat{v}(y,t) = \hat{u}(t), \quad \text{при} \quad y = 0, \quad \hat{B}(y,t) = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad t > 0 \\ \left|\hat{v}(y,t)\right| = 0, \quad \text{при} \quad y \to \infty, \quad \left|\hat{B}(y,t)\right| = 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty \\ \hat{v}(y,0) = 0, \quad \hat{B}(y,0) = 0, \quad \text{при} \quad t = 0, \quad y > 0\end{gathered}$$

Исключая магнитную индукцию из уравнений (2.6), получаем

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial t^2} - \left(i2\Omega + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\hat{v}}{\partial t} - \frac{B_0^2}{\mu\rho}\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial y^2} = 0 \\ \hat{v}(0,t) = \hat{u}(t) \quad \text{при} \quad y = 0 \\ \hat{v}(0,t) = 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty \\ \hat{v}(y,0) = 0\end{gathered} \tag{2.7}$$

Решение уравнения (2.7) ищем с помощью синус-преобразования Фурье, которое введем формулой [8]

$$\tilde{V}(\lambda,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\tilde{V}(y,t)\sin\lambda y dy$$

Дифференциальное уравнение (2.7) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}(\lambda,t)}{\partial t^2} + \left(\nu\lambda^2 - i2\Omega\right)\frac{\partial \tilde{V}(\lambda,t)}{\partial t} + \frac{\lambda^2 B_0^2}{\mu\rho}\tilde{V}(\lambda,t) = \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\nu\hat{u}_t' + \frac{B_0^2}{\mu\rho}\hat{u}\right) = \mu(\lambda,t)$$
$$\tilde{V}(\lambda,0) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{V}(\lambda,0)}{\partial t} = 0, \tag{2.8}$$

здесь $\mu(\lambda,t) = \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\nu\hat{u}_t' + \frac{B_0^2}{\mu\rho}\hat{u}\right)$.

Характеристическое уравнение (2.8) и его корни

$$q^2 + \left(\nu\lambda^2 - i2\Omega\right)q + \frac{\lambda^2 B_0^2}{\mu\rho} = 0$$

$$q_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\nu\lambda^2 - i2\Omega\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\nu\lambda^2 - i2\Omega\right)^2 - \frac{\lambda^2 B_0^2}{\mu\rho}} = \sigma \pm \omega,$$

где

$$\sigma = -\frac{1}{2}\left(\nu\lambda^2 - i2\Omega\right), \quad \omega^2 = \frac{1}{4}\left(\nu\lambda^2 - i2\Omega\right)^2 - \frac{\lambda^2 B_0^2}{\mu\rho} = \sigma^2 - \frac{\lambda^2 B_0^2}{\mu\rho}$$

Решение неоднородного уравнения (2.8) имеет вид

$$\tilde{V}(\lambda,t) = C_1 e^{q_1 t} + C_2 e^{q_2 t},$$

где c_1, c_2 находятся по методу Лагранжа вариации произвольных постоянных

$$c_1' e^{q_1 t} + c_2' e^{q_2 t} = 0$$
$$c_1' q_1 e^{q_1 t} + c_2' q_2 e^{q_2 t} = \mu(\lambda,t)$$

Откуда

$$c_1(t) = \tilde{c}_1 + \int_0^t \frac{\mu(\lambda,\tau)\, e^{-q_1\tau}}{q_1 - q_2} d\tau, \quad c_2(t) = \tilde{c}_2 - \int_0^t \frac{\mu(\lambda,\tau) e^{-q_2\tau}}{q_1 - q_2} d\tau$$

Наконец

$$\tilde{V}(\lambda,t) = \tilde{c}_1 e^{q_1 t} + \tilde{c}_2 e^{q_2 t} + \frac{1}{q_1 - q_2}\int_0^t \mu(\lambda,\tau)\left(e^{q_1(t-\tau)} - e^{q_2(t-\tau)}\right)d\tau \tag{2.9}$$

Удовлетворяя начальным условиям, получаем

$$\tilde{V}(\lambda,t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t \mu(\lambda,\tau) e^{\sigma(t-\tau)}\,\mathrm{sh}\,\omega(t-\tau)d\tau \tag{2.10}$$

Для нахождения $\hat{V}(y,t)$ применим обратное синус-преобразование Фурье

$$\hat{V}(y,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \tilde{V}(\lambda,t)\sin\lambda y d\lambda$$

имеем

$$\hat{V}(y,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda}{\omega}\int_0^t \left[\nu\hat{u}_t'(\tau) + \frac{B_0^2}{\mu\rho}\hat{u}(\tau)\right] e^{\sigma(t-\tau)}\,\mathrm{sh}\,\omega(t-\tau)d\tau\sin\lambda y d\lambda$$

или

$$\hat{V}(y,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t \left[\nu \hat{u}_t'(\tau) + \frac{B_0^2}{\mu\rho}\hat{u}(\tau) \right] \int_0^\infty \frac{\lambda \sin \lambda y}{\omega} e^{\sigma(t-\tau)} \operatorname{sh} \omega(t-\tau) d\lambda d\tau \tag{2.11}$$

Вектор касательных напряжений, действующий со стороны жидкости на стенку, определяется выражением [1]

$$\hat{F} = \rho\nu \left.\frac{\partial \hat{V}}{\partial y}\right|_{y=0}$$

Подставляя скорость $\hat{V}(y,t)$ из (2.11), получаем

$$\hat{F} = \rho\nu \frac{2}{\pi}\int_0^t \left[\nu \hat{u}_t'(\tau) + \frac{B_0^2}{\mu\rho}\hat{u}(\tau) \right] \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{\omega} e^{\sigma(t-\tau)} \operatorname{sh} \omega(t-\tau) d\lambda d\tau \tag{2.12}$$

Найденные соотношения полностью решают задачу.

3. Продольные квазигармонические колебания пластины. Рассмотрим квазигармонический режим, т.е. будем считать, что все временные факторы задачи зависят от времени посредством множителя $e^{\lambda t}$: $\lambda = -\alpha + i\omega$.

Система уравнений (2.6), (2.8) имеет вид:

$$\lambda v_x + 2\Omega v_z = \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_x + \frac{1}{\mu\rho} B_0 \frac{\partial}{\partial y} B_x$$

$$\lambda v_z - 2\Omega v_x = \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_z + \frac{1}{\mu\rho} B_0 \frac{\partial}{\partial y} B_z$$

$$\lambda B_x = B_0 \frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{3.1}$$

$$\lambda B_x = B_0 \frac{\partial v_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = 2\vec{v}(\vec{\omega}_0 \times \vec{e}_y) - \frac{1}{\mu\rho}\left(B_z \frac{\partial B_z}{\partial y} + B_x \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$

Исключим из уравнений (3.1) магнитную индукцию. Тогда система уравнений запишется в виде

$$\lambda v_x + 2\Omega v_z = \left(\nu + \frac{B_0^2}{\mu\rho\lambda} \right) \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$\lambda v_z - 2\Omega v_x = \left(\nu + \frac{B_0^2}{\mu\rho\lambda} \right) \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}$$

умножим второе уравнение на i и сложим с первым уравнением

$$\lambda(v_x + iv_z) - 2\Omega i(v_x + iv_z) = \left(\nu + \frac{B_0^2}{\mu\rho\lambda} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2}(v_x + iv_z) \tag{3.2}$$

Обозначим $v_x + iv_z = W_2$, $W_2|_{y=0} = u_x(0) + iu_z(0)$, тогда

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} = \frac{\lambda - i2\Omega}{\nu + B_0^2/\mu\rho\lambda} W_2; \quad W_2 \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty$$

Далее, умножая второе уравнение на i и вычитая из первого, получаем

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} = \frac{\lambda + i2\Omega}{\nu + B_0^2 / \mu\rho\lambda} W_1 \tag{3.3}$$

$$W_1 = v_x - iv_z, \quad W_1\big|_{y=0} = u_x(0) - iu_z(0), \quad W_1 \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty,$$

при этом

$$\begin{aligned} W_1 &= v_x - iv_z; \quad v_x = \frac{1}{2}(W_1 + W_2) \\ W_2 &= v_x + iv_z; \quad v_z = \frac{i}{2}(W_1 - W_2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Решение уравнений (3.2)–(3.4) существует при $\lambda \neq \pm i2\Omega$.

$$\begin{aligned} W_1 &= [u_x(0) - iu_z(0)]e^{\mu_1 y}, \quad \text{где} \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{\lambda + i2\Omega}{\nu + B_0^2/\mu\rho\lambda}}, \quad \operatorname{Re}\mu_1 < 0 \\ W_2 &= [u_x(0) + iu_z(0)]e^{\mu_2 y}, \quad \text{где} \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{\lambda - i2\Omega}{\nu + B_0^2/\mu\rho\lambda}}, \quad \operatorname{Re}\mu_2 < 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Наконец,

$$\begin{gathered} v_x = \frac{1}{2}\Big([u_x(0) - iu_z(0)]e^{\mu_1 y} + [u_x(0) + iu_z(0)]e^{\mu_2 y}\Big)e^{\lambda t} \\ v_z = \frac{i}{2}\Big([u_x(0) - iu_z(0)]e^{\mu_1 y} - [u_x(0) + iu_z(0)]e^{\mu_2 y}\Big)e^{\lambda t} \\ B_x = \frac{B_0}{\lambda}\frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad B_z = \frac{B_0}{\lambda}\frac{\partial v_z}{\partial y} \\ q(y,t) = 2\int \vec{v}\,(\vec{\omega}_0 \times \vec{e}_y)\,dy - \frac{1}{2\mu\rho}\Big(B_x^2 + B_z^2\Big) \end{gathered} \tag{3.6}$$

Или в векторной форме:

$$\vec{v}(y,t) = e^{\lambda t}\left[\vec{u}(0)\frac{E_1 + E_2}{2} + i\vec{u}(0)\times\vec{e}_y\,\frac{E_1 - E_2}{2}\right], \tag{3.7}$$

где $E_j = e^{\mu_j y}$; $j = 1, 2$, $\mu_j = \sqrt{\dfrac{\lambda \pm i2\Omega}{v + B_0^2/\mu\rho\lambda}}$.

Рассмотрим резонансный случай: $\lambda = \pm i2\Omega$. Тогда:

$$\begin{aligned} \vec{v}(y,t) &= e^{\lambda t}\left[\vec{u}(0)\frac{E_1 + 1}{2} + i\vec{u}(0)\times\vec{e}_y\,\frac{E_1 - 1}{2}\right] \quad \text{при} \quad \lambda = +i2\Omega \\ \vec{v}(y,t) &= e^{\lambda t}\left[\vec{u}(0)\frac{1 + E_2}{2} + i\vec{u}(0)\times\vec{e}_y\,\frac{1 - E_2}{2}\right] \quad \text{при} \quad \lambda = -i2\Omega \end{aligned}$$

В обоих случаях при $y \to \infty$ поле скоростей жидкости

$$\vec{v}(y,t) = \frac{1}{2}e^{\lambda t}\left[\vec{u}(0) \mp i\vec{u}(0)\times\vec{e}_y\right]$$

носит колебательный характер и, оставаясь ограниченным, не стремится к нулю. В этом резонансном случае $\lambda = \pm i2\Omega$ решение удовлетворяет условиям на пластинке H, но не удовлетворяет условиям на бесконечности. Это так называемый “гидродинамический парадокс”.

Из соотношений (3.7) находим поле $\vec{B} = (B_x, B_z)$

$$\vec{B}(y,t) = \frac{B_0}{\lambda} e^{\lambda t}\left[\vec{u}(0)\frac{\mu_1 E_1 + \mu_2 E_2}{2} + i\vec{u}(0)\times\vec{e}_y\frac{\mu_1 E_1 - \mu_2 E_2}{2}\right]$$

и поле давлений

$$q(y,t) = \left[(\vec{\omega}_0\times\vec{e}_y)\left[\vec{u}(0)\left(\frac{E_1}{\mu_1}+\frac{E_2}{\mu_2}\right) + i(\vec{u}(0)\times\vec{e}_y)\left(\frac{E_1}{\mu_1}-\frac{E_2}{\mu_2}\right)\right]\right]e^{\lambda t} - \frac{1}{2}\frac{1}{\mu\rho}\left|\vec{B}(y,t)\right|^2$$

4. Структура пограничных слоев. Пусть пластина движется со скоростью $\vec{u}(t) = \vec{u}(0)e^{\lambda t}$, $\lambda = -\alpha + i\omega$. Поле скоростей вязкой электропроводной жидкости имеет вид

$$\vec{v}(y,t) = e^{(-\alpha+i\omega)t}\left[\vec{u}(0)\frac{E_1 + E_2}{2} + i\vec{u}(0)\times\vec{e}_y\frac{E_1 - E_2}{2}\right], \tag{4.1}$$

где $E_1 = e^{\mu_1 y}$, $E_2 = e^{\mu_2 y}$, $\mu_{1,2} = \sqrt{\dfrac{\lambda \pm i2\Omega}{\nu + B_0^2/\mu\rho\lambda}}$, $\operatorname{Re}\mu_{1,2} < 0$.

Рассмотрим

$$\frac{\lambda \pm i2\Omega}{\nu + B_0^2/\mu\rho\lambda} = \frac{-\alpha A + B(\omega \pm 2\Omega) + i(\alpha B + A(\omega \pm 2\Omega))}{A^2 + B^2},$$

где $A = \nu - \dfrac{\alpha B_0^2}{\mu\rho\left(\alpha^2 + \omega^2\right)}$, $B = -\dfrac{\omega B_0^2}{\mu\rho\left(\alpha^2 + \omega^2\right)}$.

Тогда $A^2 + B^2 = \nu^2 + \dfrac{B_0^4 - 2\nu\alpha\mu\rho B_0^2}{\mu^2\rho^2\left(\alpha^2 + \omega^2\right)}$.

Обозначим

$$C = \frac{-\alpha A + B(\omega \pm 2\Omega)}{A^2 + B^2}, \qquad D = \frac{\alpha B + A(\omega \pm 2\Omega)}{A^2 + B^2}$$

Рассмотрим $\mu_{1,2} = \sqrt{C + iD}$.

Введем обозначения $\sqrt{C + iD} = \mu_{1,2} = \dfrac{1}{\delta_{1,2}} + ik_{1,2}$, где индекс 1 соответствует знаку +, индекс 2 – знаку –.

При этом

$$\frac{1}{\delta_{1,2}^2} = \frac{\sqrt{C^2 + D^2} + C}{2}, \qquad k_{1,2}^2 = \frac{\sqrt{C^2 + D^2} - C}{2}$$

С учетом введенных обозначений поле скоростей принимает вид:

$$\vec{v} = \hat{A}_1 e^{i(\omega t - k_1 y)} + \hat{A}_2 e^{i(\omega t + k_2 y)},$$

где $\hat{A}_1 = \dfrac{1}{2}\left[\vec{u}(0) + i\vec{u}(0)\times\vec{e}_y\right]e^{-\alpha t}e^{-y/\delta_1}$, $\hat{A}_2 = \dfrac{1}{2}\left[\vec{u}(0) - i\vec{u}(0)\times\vec{e}_y\right]e^{-\alpha t}e^{-y/\delta_2}$.

Полученное решение представляет суперпозицию двух волн с волновыми числами $k_{1,2}$ и частотой ω, распространяющихся вдоль оси Oy навстречу друг другу и экспоненциально затухающих на расстояниях порядка $\delta_{1,2}$ соответственно. Величина пограничного слоя определяется расстоянием, на котором амплитуда волны уменьшается в "e" раз, т.е. $\delta_{1,2}$ это толщины пограничных слоев, примыкающих к стенке.

Плоские волны индуцированы затухающими гармоническими колебаниями пластины. Фазовые скорости этих волн различны, т.к. волновые числа k_1, k_2 различны. Кроме того, скорости зависят от частоты. Это означает, что поток вязкой электропроводной жидкости представляет собой дисперсионную среду.

Групповые скорости этих волн $v_{gr} = \dfrac{d\omega}{dk}$ также различны. Они зависят от коэффициентов затухания и вращения системы, магнитной индукции и параметров жидкости. Амплитуды этих волн зависят от величины проекции угловой скорости на ось y, параметров движения стенки, магнитной индукции и параметров жидкости. Отметим, что волна, излучаемая стенкой, затухает на глубине δ_1, а другая волна, набегающая из бесконечности на стенку, затухает на глубине δ_2.

Выберем индукцию поля $B_0^2 = 2\nu\alpha\mu\rho$. Тогда $A^2 + B^2 = \nu^2$, где $A = \nu\dfrac{\omega^2 - \alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}$, $B = -\nu\dfrac{2\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$.

В этом случае волновые числа имеют вид

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{\alpha}{2\nu}}\left(\sqrt{1 + \frac{(\omega \pm 2\Omega)^2}{\alpha^2}} + \frac{2\omega(\omega \pm 2\Omega)}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{\omega^2 - \alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\delta_{1,2} = \sqrt{\frac{2\nu}{\alpha}}\left(\sqrt{1 + \frac{(\omega \pm 2\Omega)^2}{\alpha^2}} - \frac{2\omega(\omega \pm 2\Omega)}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{\omega^2 - \alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Волновые числа k_1 и k_2, а также величины пограничных слоев δ_1 и δ_2 не зависят от магнитной проницаемости и электропроводности жидкости и определяются лишь коэффициентом затухания α и вязкостью жидкости ν.

Кроме того, на характер распространения волн существенное влияние оказывает вращение жидкости (проекция угловой скорости вращения системы на ось Oy).

Введем безразмерную переменную $Y = \omega/\alpha$ и безразмерный параметр $S = 2\Omega/\alpha$. Тогда выражения для волновых чисел примут вид

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{\alpha}{2\nu}}\left(\sqrt{1 + (Y \pm S)^2} + \frac{2Y(Y \pm S)}{Y^2 + 1} + \frac{Y^2 - 1}{Y^2 + 1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\delta_{1,2} = \sqrt{\frac{2\nu}{\alpha}}\left(\sqrt{1 + (Y \pm S)^2} - \frac{2Y(Y \pm S)}{Y^2 + 1} - \frac{Y^2 - 1}{Y^2 + 1}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

На рис. 2 представлены графики зависимости волновых чисел k_1, k_2 от Y (частота ω при фиксированном $s = 2$).

В рассматриваемом случае $k(\omega)$ – волновое число, вообще говоря, комплексное. Его действительная часть характеризует зависимость фазовой скорости волны от частоты, а мнимая часть – зависимость коэффициента затухания амплитуды волны от частоты. Дисперсия, как правило, связана с внутренними свойствами материальной среды. При этом выделяются частотная (временная) дисперсия, когда поляризация в диспергирующей среде зависит от значений поля в предшествующие моменты времени (память), и пространственная дисперсия, когда поляризация в данной точке зависит от значений поля в некоторой области пространства (нелокальность). Из графиков видно, что волновое число k_2 монотонно возрастает с увеличением частоты коле-

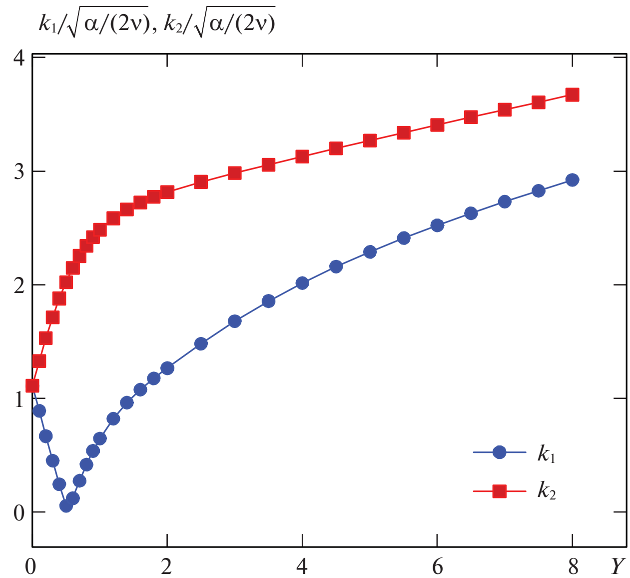


Рис. 2.

баний стенки, в то время как волновое число k_1 имеет сложный характер и угловую точку.

Анализ зависимостей волновых чисел δ_1 и δ_2 от Y (частоты ω) при фиксированном s ($s = 2$), представленных на рис. 3, показывает, что существуют особые точки нестационарной задачи, в окрестности которых волновые числа обращаются в бесконечность. При этом производные $\partial\delta_1/\partial Y$ и $\partial\delta_2/\partial Y$ терпят разрыв первого рода, поэтому вопрос распространения волновых пакетов в данной среде необходимо дополнительно исследовать. Для волны, излучаемой колеблющейся стенкой, особой точкой является $Y = 2.81$, в окрестности которой волновое число δ_1 терпит разрыв и с ростом частоты стремится к нулю. При этом скорость волнового пакета $v_{\mathrm{gr}1}$, представленная на рис. 4 терпит разрыв также в этой точке ($Y = 2.81$). Волна, набегающая на стенку, имеет особую точку $Y = 1.31$, в которой волновое число δ_2 имеет бесконечный разрыв и при дальнейшем росте частоты стремится к нулю.

Рассмотрим случай резонанса $\omega = 2\Omega$ (в безразмерных переменных $Y = S$). Волновое число и толщина пограничного слоя для волны, излучаемой стенкой, имеют вид

$$k_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{2\nu}}\left\{\sqrt{1+4S^2} + \frac{5S^2-1}{S^2+1}\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{\delta_1} = \sqrt{\frac{2\nu}{\alpha}}\left\{\sqrt{1+4S^2} - \frac{5S^2-1}{S^2+1}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

При этом набегающая волна имеет волновое число $k_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\nu}}\frac{S}{\sqrt{1+S^2}}$ и толщину пограничного слоя $\delta_2 = \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}\sqrt{1+S^2}$.

Представляет интерес сравнить полученное решение с решением задачи о колебаниях плоской стенки в вязкой несжимаемой жидкости, вращающейся в полупространстве ограниченном стенкой, рассмотренной в работе [6].

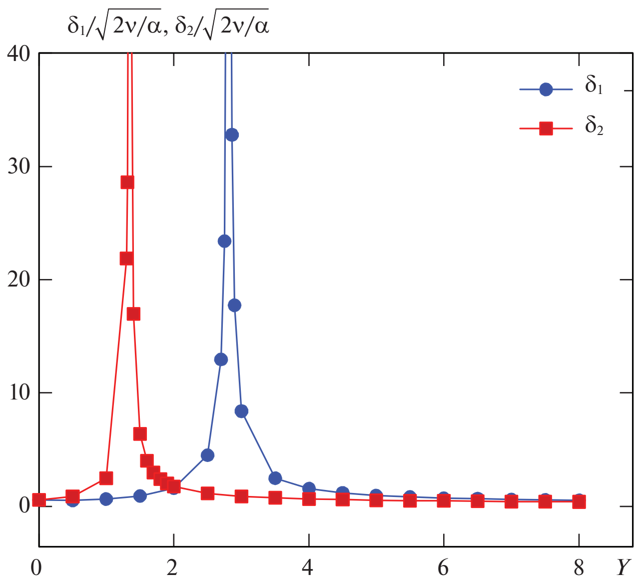


Рис. 3.

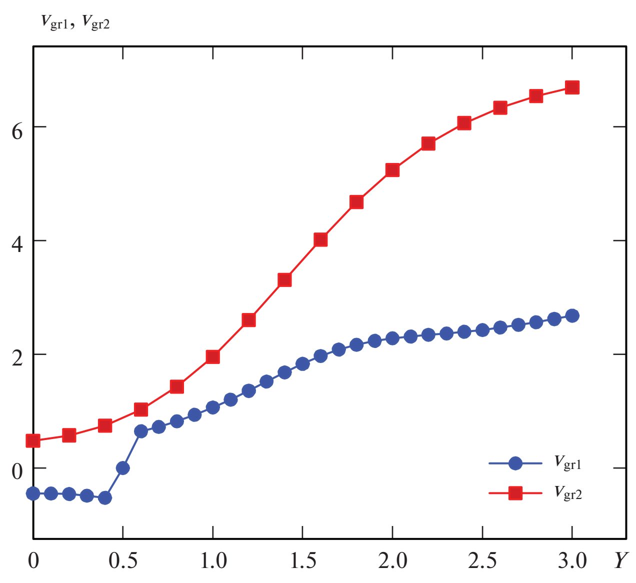


Рис. 4.

Структура решения имеет вид

$$\vec{v} = \hat{A}_1 e^{i(\omega t - k_1 y)} + \hat{A}_2 e^{i(\omega t + k_2 y)},$$

где

$$\hat{A}_1 = \frac{1}{2}\left[\vec{u}(0) + i\vec{u}(0)\times\vec{e}_y\right] e^{-\alpha t} e^{-y/\delta_1}$$
$$\hat{A}_2 = \frac{1}{2}\left[\vec{u}(0) - i\vec{u}(0)\times\vec{e}_y\right] e^{-\alpha t} e^{-y/\delta_2}, \tag{4.2}$$

но амплитуды волн и волновые числа волн разные, т.к. корни характеристического уравнения совершенно другие, а именно $\mu_j = \hat{\delta}_{1,2}^{-1} + i\hat{k}_{1,2}$, причем выбраны такие ветви корня, для которых $\operatorname{Re}\mu_j \le 0$; $j = 1,2$. Полученное решение представляет суперпозицию двух волн с волновыми числами k_j $(j = 1,2)$ и частотой ω, распространяющихся вдоль оси Oy навстречу друг другу и экспоненциально затухающих на расстояниях порядка δ_j соответственно. Решение (4.2) равномерно пригодно для всей области, как в нерезонансном, так и в резонансном случае $(2\Omega = \omega)$. Действительно, при $\Omega = \omega$

$$k_1 = \frac{4\Omega}{\sqrt{2\nu}}\left(\alpha^2 + 16\Omega^2\right)^{-1/4}, \quad \delta_1 = \frac{4\Omega}{k_1}\left(2\alpha^2 + 16\Omega^2\right)^{-1/2}, \quad k_2 = 0, \quad \delta_2 = \sqrt{\nu/\alpha}, \tag{4.3}$$

т.е. в резонансном случае волна, набегающая на пластину, отсутствует, однако решение продолжает затухать вглубь жидкости. При $\alpha = 0$ однако, $\delta_2 \to \infty$, и решение становится непригодным при $y \to \infty$, т.к. толщина одного из пограничных слоев неограниченно возрастает. Этот эффект отсутствия колебательного решения при $\omega = 2\Omega$ обсуждается в работе [2]. Важным заключением из приведенного анализа является тот факт, что затухание снимает трудности, отмеченные в [2]. В этом смысле оно играет аналогичную роль, что и отсос жидкости с поверхности пористой пластины, рассмотренный в [3]. Найдем связь между волновыми числами нашей задачи и волновыми числами задачи о колебаниях стенки в вязкой несжимаемой жидкости. Обозначим волновые числа этой задачи $\tilde{k}_{1,2}$, $\tilde{\delta}_{1,2}$. Выполняя простые, но громоздкие вычисления, получаем

$$k_{1,2} = \left\{\frac{\alpha}{\tilde{\delta}_{1,2}} - \omega\tilde{k}_{1,2}\right\}\frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \alpha}}, \quad \frac{1}{\delta_{1,2}} = \left\{\frac{\omega}{\tilde{\delta}_{1,2}} - \alpha\tilde{k}_{1,2}\right\}\frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \alpha}}$$

Сравним волновые числа для случая резонанса $\omega = 2\Omega$ $(Y = S)$ $\tilde{k}_{1,2} = 0$, $\tilde{\delta}_{1,2} = \sqrt{\nu/\alpha}$. Получаем $k_2 = \dfrac{\alpha}{\tilde{\delta}_{1,2}}\dfrac{1}{\sqrt{\omega^2 + \alpha}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\nu}}\dfrac{S}{\sqrt{1 + S^2}}$, $\delta_2 = \sqrt{\dfrac{\nu}{\alpha}}\sqrt{1 + S^2}$, т.е. в электропроводной жидкости в магнитном поле существует набегающая на стенку волна. Толщина пограничного слоя увеличилась в $\sqrt{1 + S^2}$ раз. Также различны волновые числа k_1 и $\hat{k}_1$. Сопоставляя результаты, видим, как магнитное поле меняет профиль скорости, толщину пограничного слоя и касательные напряжения на стенке. Интересно сопоставить результаты, полученные в [5] с результатами данной статьи. Различные краевые условия в задачах обеих работ приводят к различным решениям для поля скоростей. В [5] решение представлено в виде суперпозиции двух волн, одна из которых является отраженной от неподвижной стенки. Эти волны имеют равные волновые числа и толщины пограничных слоев, причем они отличаются от соответствующих величин в данной задаче. Скорости волновых пакетов [5] совпадают в отличие от представленной работы, где скорости волновых пакетов различны и отличны от [5]. И только в резонансном случае $\omega = 2\Omega$ волновые числа [5], которые имеют вид $k = \dfrac{\sqrt{\alpha/\nu}}{\sqrt{1 + \alpha^2/\left(4\Omega^2\right)}}$, $\delta = \sqrt{\dfrac{\nu}{\alpha}}\sqrt{1 + \dfrac{4\Omega^2}{\alpha^2}}$ совпадают с результатами для набегающей волны k_2 и δ_2, полученными в представленной статье.

Заключение. Проведен анализ задачи неустановившегося течения вязкой электропроводной несжимаемой жидкости в плоско-параллельной конфигурации. Найдены точные решения трехмерных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики. При этом никаких ограничений на характер движения пластины не накладывается. Определены поле скоростей в потоке и векторы касательных напряжений, действующие из жидкости на стенку. Для случая “нормальных” колебаний пластины рассмотрен случай резонанса и исследована структура пограничных слоев, примыкающих к стенке. Показано, как магнитное поле меняет характер течения электропроводной жидкости, изменяя поле скоростей жидкости, величины волновых чисел и пограничных слоев. Кроме того, меняются и касательные напряжения, действующие из жидкости на стенку.

Математическая процедура интегрирования системы дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи может быть использована при исследовании более сложных задач. Кроме того, полученные результаты могут быть использованы для учёта силовых воздействий при движении жидкости в полостях различной формы, а также в задачах фильтрации и при моделировании различных физических явлений в движущейся жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 521 с.
2. *Thornley Cl.* On Stokes and Rayleigh layers in a rotating system // Quan J. Mech. Appl. Math. 1968. V. 21. № 4. P. 455–462.
3. *Гурченков А.А., Яламов Ю.И.* Нестационарный поток на пористой пластине при наличии вдува (отсоса) среды // ПМТФ. 1980. № 4. С. 66–69.
4. *Холодова Е.С.* Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. С.-Петербургский государственный университет. С.-Петербург, 2019. 451 с.
5. *Гурченков А.А.* Неустановившееся движение вязкой электропроводной жидкости между вращающимися параллельными стенками при наличии магнитного поля // ПММ. 2019. Т. 83. № 5–6. С. 770–778.
6. *Гурченков А.А.* Динамика завихренной жидкости в полости вращающегося тела. М.: Физматлит, 2010. 221 с.
7. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.

Nonstationary Flow of Viscous Incompressible Electrically Conductive Fluid on a Rotating Plate

A. A. Gurchenkov[a,b,#]

[a] *FRC “Computer Science and Control” RAS, Moscow, Russia*

[b] *MAI (Research University), Moscow, Russia*

[#] *e-mail: challenge2005@mail.ru*

In this work, we study the evolution of the flow of a viscous electrically conductive fluid on a rotating plate in the presence of a magnetic field. An analytical solution of three-dimensional unsteady equations of magnetohydrodynamics is presented. The velocity field and the induced magnetic field in the flow of a viscous electrically conductive liquid filling a half-space bounded by a flat wall are determined. The fluid, together with the bounding plane, rotates as a whole with a constant angular velocity around a direction not perpendicular to the plane. An unsteady flux is induced by suddenly beginning vibrations of the wall and an applied magnetic field directed perpendicular to the plane. A number of special cases of wall motion are considered. On the basis of the results obtained, the individual structures of the boundary layers near the wall are investigated.

Keywords: equations of magnetohydrodynamics, electrically conductive fluid, normal vibrations, boundary layers

REFERENCES

1. *Slezkin N.A.* Dynamics of a Viscous Incompressible Fluid. M.: Gostekhizdat, 1955, 521 p. (in Russian)
2. *Thornley Cl.* On Stokes and Rayleigh layers in a rotating system // Quan J. Mech. Appl. Math. 1968. V. 21, no. 4, pp. 455–462.
3. *Gurchenkov A.A., Yalamov Yu.I.* Unsteady flow on a porous plate in the presence of injection (suction) of the medium // PMTF, 1980, no. 4, pp. 66–69. (in Russian)
4. *Gurchenkov A.A.* Unsteady motion of a viscous fluid between rotating parallel walls // PMM, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 251–255. (in Russian)
5. *Kholodova E.S.* Thesis for the degree of Doctor of Phys.-Math. Sciences, St. Petersburg, State Univ., St. Petersburg. 2019, 451 p. (in Russian)
6. *Gurchenkov A.A.* Swirling Fluid Dynamics in the Cavity of a Rotating Body. Moscow: Fizmatlit, 2010, 221 p. (in Russian)
7. *Dech G.* Guide to the Practical Application of the Laplace Transform and z-Transform. Moscow: Nauka, 1971, 288 p. (in Russian)
8. *Korn G., Korn T.* Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers Moscow: Nauka, 1978. 832 s.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 5, с. 601–614

УДК 532.542.2

ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ КРУГЛОЙ ТРУБЫ

© 2021 г. Л. И. Казаков[1,*]

[1]*ФГУП НИИАЭ (Автоэлектроники), Севастополь, Россия*

**e-mail: lev-kazakov@rambler.ru*

Поступила в редакцию 21.01.2021 г.
После доработки 07.07.2021 г.
Принята к публикации 14.07.2021 г.

Изложена приближенная теория стационарного осесимметричного ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в начальном участке круглой трубы. Она дает расчетные значения разных физических характеристик устанавливающегося течения, совпадающие в пределах ±2% с известными ранее расчетными и экспериментальными данными. Вместо традиционного применения для всей длины начального участка уравнения Бернулли, в представленной работе для определения величины давления используется уравнение среднего по сечению трубы осевого градиента давления.

Ключевые слова: начальный участок, пограничный слой, ядро течения, закон Гагена–Пуазейля

DOI: 10.31857/S0032823521050052

1. Введение. Важная в научном и практическом отношениях проблема установления течения Пуазейля в трубах имеет более чем вековую историю. Первым задачу о движении вязкой жидкости в начальном участке круглой трубы приближенно решил в 1891 году Буссинеск. Ему удалось довольно точно найти (судя по [1], с. 232) длину начального участка $L = 0.2445a\,\mathrm{Re}_a$, где a – радиус трубы, Re_a – число Рейнольдса по радиусу. Затем задачу решали (также приближенно) Л. Шиллер и С.М. Тарг [1–3]. Большое значение имели экспериментальные исследования, прежде всего, самого Пуазейля (и его предшественника Гагена) [4], классические измерения Никурадзе [5], а также многочисленные и весьма тщательные измерения течения по капиллярам разных жидкостей при разных температурах [6]. В наше время, с развитием вычислительной техники пришла возможность выполнять математические эксперименты, т.е. решать задачи численно. В кратком, но емком обзоре исследований по обсуждаемой проблеме [7], отмечено неудовлетворительное состояние вопроса: так, длины начального участка, найденные разными авторами, отличаются в три раза; даже полученные численно длины разнятся более чем на 20%.

В отечественной литературе по гидравлике за 1956–2016 гг. – в монографиях, справочниках, учебниках, справочных и учебных пособиях, конспектах лекций – для длины L начального участка чаще всего приводят формулу Л. Шиллера, что, вообще говоря, неверно, поскольку она выведена в рамках теории, пригодной лишь для первой четверти начального участка, не дает необходимого асимптотического стремления с расстоянием относительной скорости по оси трубы к 2, что наглядно подтверждает рис. 3, где кривая Шиллера на некотором расстоянии упирается в уровень 2. Это рас-

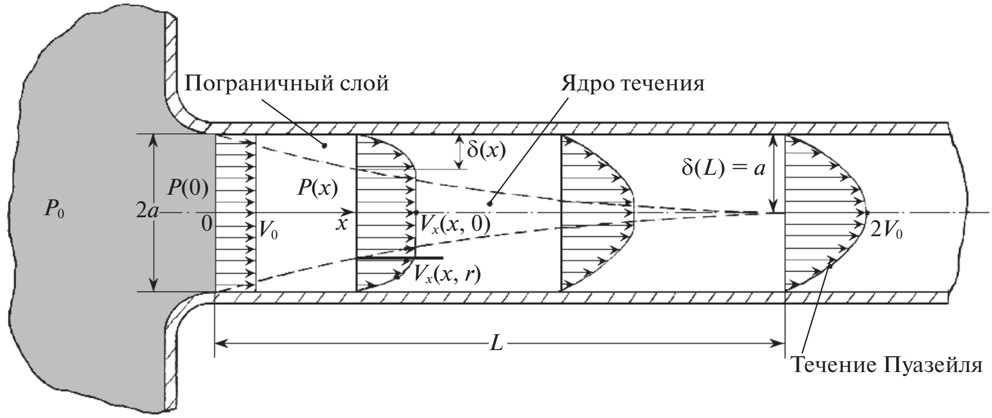


Рис. 1. Схема ламинарного течения вязкой жидкости в начальном участке L круглой трубы.

стояние и считают, по недоразумению, длиной начального участка. В мировой же литературе чаще ссылаются на Буссинеска, а в последнее время – на новые, более точные численные результаты. Так, в [7] для $\mathrm{Re}_a \gg 1$ найдено: $L = 0.2268a\,\mathrm{Re}_a$, что для ньютоновских жидкостей подтверждено в [8]. Близкое значение для $\mathrm{Re}_a > 100$ (0.2248) получено ранее в [9]. Но в работе [10] аналогичный численный результат для $\mathrm{Re}_a > 250$ (0.2181) на 4% меньше.

2. Нулевое приближение. Из уравнения Навье–Стокса и уравнения непрерывности при $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, $V_\varphi = 0$ имеем ([11], с. 76):

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2}\right) \tag{2.1}$$

$$V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} - \frac{V_r}{r^2}\right) \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial (rV_x)}{\partial x} + \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} = 0 \tag{2.3}$$

Здесь V_x, V_r – осевая и радиальная скорости частиц жидкости в потоке; $P = P(x,r)$ – давление; $\rho = \mathrm{const}$ – плотность жидкости; $\nu = \mu/\rho$ – ее кинематическая вязкость; μ – вязкость. На входе в трубу $(x = 0)$ скорость потока считаем однородной, т.е. $V_x(0,r) = V_0 = \mathrm{const}$. Далее благодаря вязкости жидкости на стенках трубы образуется и развивается пограничный слой, толщина которого $\delta(x)$ постепенно увеличивается от нуля $\delta(0) = 0$ до $\delta(L) = a$, где L – длина начального участка, как показано на рис. 1. Центральные части сечений начального участка трубы заполнены внешним (по отношению к пограничному слою) потоком, называемым ядром течения с неизменной в каждом сечении скоростью. При $x \ge L$ в трубе устанавливается течение Пуазейля с параболическим профилем скоростей [11, с. 82]:

$$V_x(x,r) = 2V_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \tag{2.4}$$

Так обычно (вслед за Л. Прандтлем [5], с. 34) представляют качественную картину течения в начальном участке трубы.

С помощью уравнений (2.1) и (2.3) найдем среднее по площади $S = \pi a^2$ сечения трубы значение осевой компоненты градиента давления ([3], с. 358, (2.7)):

$$\overline{\frac{\partial P}{\partial x}} = \frac{1}{S}\iint_S \frac{\partial P}{\partial x} dS = -\frac{4\rho}{a^2}\int_0^a rV_x \frac{\partial V_x}{\partial x} dr + \frac{2\mu}{a}\frac{\partial V_x}{\partial r}\bigg|_{r=a} \tag{2.5}$$

Выражение (2.5) – следствие уравнений движения, полученное без разделения течения на центральную область (ядро) и пограничный слой.

Обозначим через $V(x)$ скорость в ядре течения на оси трубы:

$$V(x) = V_x(x,0), \quad 0 \le x \le L$$

С учетом (2.4) имеем:

$$V_0 \le V(x) \le 2V_0$$

Поэтому вдоль трубы скорость заметно изменяется на расстоянии $x \sim L$, т.е.

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} \approx \frac{V(x)}{L} \approx \frac{V_0}{L} = \text{const} \tag{2.6}$$

В пределах пограничного слоя $\partial V_x/\partial r \approx V(x)/\delta(x)$. По опыту L обычно составляет десятки и более калибров трубы, и всегда можно считать

$$\delta(x) \le a \ll L$$

Как далее станет ясно (см. (3.28)), второе неравенство эквивалентно требованию $\mathrm{Re}_a \gg 4$. Тогда из уравнения непрерывности (2.3) и уравнений (2.1), (2.2), соответственно, следует:

$$V_r \sim \frac{a}{L}V \ll V, \quad \text{или} \quad \frac{V_r}{V_0} \ll 1 \tag{2.7}$$

$$\frac{|\partial P/\partial r|}{|\partial P/\partial x|} \sim \frac{\delta}{L} \ll 1, \quad \text{или} \quad \frac{\partial P}{\partial x} \approx \frac{dP}{dx}, \quad P = P(x) \tag{2.8}$$

Это дает возможность упростить исходную систему уравнений (2.1)–(2.3):

$$V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_r\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_x}{\partial r}\right) \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial(rV_x)}{\partial x} + \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} = 0 \tag{2.10}$$

Согласно (2.7) и (2.8) зависимостью давления от радиальной переменной r во всех сечениях вдоль трубы следует пренебречь и считать

$$\overline{\frac{\partial P}{\partial x}} = \frac{dP}{dx} \tag{2.11}$$

Для пограничного слоя удобно вместо r ввести поперечную координату $y = a - r$. В качестве нулевого приближения представим осевую скорость $V_x(x,r)$ в виде

$$V_x(x,y) = V(x)f(\eta), \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}, \tag{2.12}$$

где профили скоростей во всех сечениях пограничного слоя определяет задаваемая подходящим образом функция $f(\eta)$, а функции $V(x)$ и $\delta(x)$ предстоит найти. Для слоя конечной толщины функция $f(\eta)$ должна удовлетворять условиям:

$$f(0) = 0; \quad f(\eta \geq 1) = 1; \quad \lim_{\eta\to 1-0} \frac{df}{d\eta} = 0 \tag{2.13}$$

Эти условия вытекают из физической сути пограничного слоя.

Подставив (2.12) в (2.5), используя соотношения

$$\begin{gathered} r = a - y, \quad dr = -dy, \quad \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial y} \\ dy = \delta d\eta, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\delta'}{\delta}\eta \end{gathered} \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(Vf) = \frac{\nu}{\delta^2}\left(\lambda f - \zeta\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}\right), \tag{2.15}$$

где

$$\lambda = \frac{V'\delta^2}{\nu} \tag{2.16}$$

$$\zeta = \frac{V\delta\delta'}{\nu} \tag{2.17}$$

и, учитывая (2.11), найдем:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{4\mu V}{a\delta}\left\{\left(\lambda + \frac{\zeta}{2}\right)\int_0^{a/\delta} f^2 d\eta - \frac{\delta}{a}(\lambda + \zeta)\int_0^{a/\delta} \eta f^2 d\eta + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=0}\right\} \tag{2.18}$$

Параметры λ и ζ безразмерны. Штрих означает производную по x. Для любого профиля справедливо:

$$\int_0^{a/\delta} f^2(\eta)\, d\eta = \frac{a}{\delta} - \alpha, \qquad \int_0^{a/\delta} \eta f^2 d\eta = \frac{a^2}{2\delta^2} - \beta, \tag{2.19}$$

где $\alpha < 1$ и $\beta < 1$ – константы, зависящие от профиля $f(\eta)$. С учетом (2.19) выражение (2.18) можно представить в виде:

$$\frac{dP}{dx} = -\rho VV' - \frac{6\mu V}{a^2}R(x), \tag{2.20}$$

где

$$R(x) = \frac{1}{3}\left\{\lambda\left(\frac{a^2}{2\delta^2} - 2\alpha\frac{a}{\delta} + 2\beta\right) - \zeta\left(\alpha\frac{a}{\delta} - 2\beta\right) + \frac{a}{\delta}f'(0)\right\} \tag{2.21}$$

В самом начале трубы пограничный слой на стенке весьма тонок, его влияние на течение пренебрежимо малó, и жидкость почти по всему сечению можно считать идеальной. Тогда из уравнения Бернулли ([11], с. 25, 37) $P + \rho V^2/2 = \mathrm{const}$ следует, что

$$\frac{dP}{dx}\bigg|_{x=0} = -\rho VV' \tag{2.22}$$

Л. Шиллер ([2], с. 58) предполагал, что “...падение давления в начальном участке происходит по уравнению Бернулли...”, т.е. считал для всего начального участка $0 < x < L$ справедливым уравнение (2.22), а не (2.20). По этой причине его “... теория очень хорошо передает распределение скоростей...” (([2], с. 62), ([5], с. 35)) лишь в первой четверти начального участка и дает заниженное вдвое значение его длины L (см. рис. 3).

Согласно (2.20) и (2.22) должно выполняться условие $\lim\limits_{x\to 0} R(x) = 0$. За пределами начального участка трубы, где уже установилось течение Пуазейля, $\delta = a$, $\delta' = 0$, $V_r = 0$, $V = 2V_0$, $V' = 0$ и, следовательно, по (2.16) и (2.17) $\lambda = \zeta = 0$. Согласно (2.1), (2.4), (2.20), (2.21) здесь:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{8\mu V_0}{a^2} = -\frac{4\mu V_0 f'(0)}{a^2} \tag{2.23}$$

Отсюда следует, что функция $f(\eta)$ должна удовлетворять также условию

$$f'(0) = 2, \quad \text{т.е.} \quad f(\eta) \approx 2\eta; \quad \eta \ll 1 \tag{2.24}$$

Условиям (2.13), (2.24) удовлетворяет параболический профиль (([5], с. 34), ([2], с. 58))

$$f(\eta) = \begin{cases} 2\eta - \eta^2, & \eta \le 1 \\ 1, \quad \eta \ge 1 \end{cases} \tag{2.25}$$

который примем за основу. Тогда из уравнения постоянства расхода Q жидкости

$$Q = \pi a^2 V_0 = 2\pi \int\limits_{a-\delta(x)}^{a} V_x(x,r) r dr + \pi(a - \delta(x))^2 V(x),$$

подставив в него (2.12) и используя (2.14), найдем в нулевом приближении осевую скорость в ядре течения:

$$V(x) = V_0(\varepsilon) = \frac{V_0}{1 - \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{6}\varepsilon^2}, \tag{2.26}$$

где

$$\varepsilon(x) = \delta(x)/a \tag{2.27}$$

относительная толщина пограничного слоя. Теперь на основании (2.12), (2.14), (2.25)–(2.27) осевая скорость по сечению трубы в нулевом приближении примет вид:

$$V_x(x,r) = \begin{cases} V_0(\varepsilon)\left(2\eta - \eta^2\right), & \eta \le 1 \\ V_0(\varepsilon), \quad 1 \le \eta \le \dfrac{1}{\varepsilon(x)} \end{cases} \tag{2.28}$$

где

$$\eta(x,r) = \frac{1}{\varepsilon(x)}\left(1 - \frac{r}{a}\right) \tag{2.29}$$

При $x > L$ будет $\varepsilon(x) = 1$ и (2.28) переходит в течение Пуазейля (2.4). Из (2.28) видно, что в нулевом приближении осевая скорость течения от параметров λ (2.16) и ζ (2.17) не зависит. Можно установить, что эти параметры связаны соотношением:

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{V}\frac{dV}{d\varepsilon}\zeta \tag{2.30}$$

Из (2.17) также найдем выражение для обратной $\varepsilon(x)$ функции:

$$\frac{\nu x(\varepsilon)}{a^2 V_0} = \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\varepsilon V(\varepsilon)}{\zeta(\varepsilon) V_0} d\varepsilon \tag{2.31}$$

В нулевом приближении легко найти радиальные скорости течения. Из (2.10) и (2.14) следует:

$$\left(1-\frac{y}{a}\right)V_r(x,y)=\int_0^y\left(1-\frac{y}{a}\right)\frac{\partial V_x(x,y)}{\partial x}dy \tag{2.32}$$

Используя (2.15), (2.16), (2.25), найдем:

$$\frac{\partial V_x(x,r)}{\partial x}=\begin{cases}V'\left[2\eta\left(1-\frac{\zeta}{\lambda}\right)-\eta^2\left(1-\frac{2\zeta}{\lambda}\right)\right], & \eta\le 1\\ V', & \eta\ge 1\end{cases} \tag{2.33}$$

Подставив это в (2.32) с учетом (2.12), получим:

$$V_r(x,r)=\begin{cases}\frac{\varepsilon a^2V'}{r}\left[\left(1-\frac{\zeta}{\lambda}\right)\left(\eta^2-\frac{2\varepsilon}{3}\eta^3\right)-\left(1-\frac{2\zeta}{\lambda}\right)\left(\frac{\eta^3}{3}-\frac{\varepsilon\eta^4}{4}\right)\right], & \eta\le 1\\ -\frac{V'}{2}r, & \eta\ge 1\end{cases} \tag{2.34}$$

3. Первое приближение. Подставив (2.20) в уравнение (2.9), представим уравнения (2.9) и (2.10) соответственно в виде:

$$\frac{\partial(rV_x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(rV_rV_x)}{\partial r}-rVV'-\frac{6\nu V}{a^2}rR(x)=\nu\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_x}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial(rV_xV)}{\partial x}+\frac{\partial(rV_rV)}{\partial r}-rV_xV'=0$$

Вычтем первое уравнение из второго и, проинтегрировав обе части полученного уравнения по y от $y=0$ до y с учетом (2.14), найдем:

$$\frac{\nu}{V}\left(1-\frac{y}{a}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V_x}{V}\right)-\frac{\tau}{\rho V^2}=-\frac{V'}{V}[2\delta^{**}(y)+\delta^*(y)]-\int_0^y\left(1-\frac{y}{a}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{V_x}{V}\left(1-\frac{V_x}{V}\right)\right]dy+$$
$$+\frac{1}{V}\left(1-\frac{y}{a}\right)V_r(y)\left(1-\frac{V_x}{V}\right)-\frac{6\nu}{a^2V}R(x)\left(y-\frac{y^2}{2a}\right), \tag{3.1}$$

где обозначено:

$$\tau=\mu\left.\frac{\partial V_x}{\partial y}\right|_{y=0} \tag{3.2}$$

— напряжение трения на стенке трубы,

$$\delta^*(y)=\int_0^y\left(1-\frac{V_x}{V}\right)\left(1-\frac{y}{a}\right)dy \tag{3.3}$$

$$\delta^{**}(y)=\int_0^y\frac{V_x}{V}\left(1-\frac{V_x}{V}\right)\left(1-\frac{y}{a}\right)dy \tag{3.4}$$

При $y\to a$ должно быть: $V_x\to V$, $\delta^*(y)\to\delta^*$, $\delta^{**}(y)\to\delta^{**}$, где $\delta^*=\delta^*(a)$ — “толщина вытеснения”, $\delta^{**}=\delta^{**}(a)$ — “толщина потери импульса” ([12], с. 59, 60). Тогда (3.1) перейдет в “уравнение импульсов” ([12], с. 89)

$$\int_0^a\left(1-\frac{y}{a}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{V_x}{V}\left(1-\frac{V_x}{V}\right)\right]dy+\frac{V'}{V}[2\delta^{**}+\delta^*]=\frac{\tau}{\rho V^2}-\frac{3\nu}{aV}R(x) \tag{3.5}$$

При $x \to \infty$ согласно (2.21) имеем: $\frac{\partial}{\partial x} = 0$, $V' = 0$, $\lambda = \zeta = 0$, $R(\infty) = \frac{a}{3\delta}\frac{df}{d\eta}\Big|_{\eta=0}$. Тогда из (3.5) следует: $\tau = \frac{3\mu V}{a}R(\infty) = \frac{\mu V}{\delta}\frac{df}{d\eta}\Big|_{\eta=0} = \mu\frac{\partial V_x}{\partial y}\Big|_{y=0}$ ч.т.д.

Исключим из уравнения (3.1) величины τ и $V_r(y)$ с помощью соотношений (3.5) и (2.32) и учтем (3.3), (3.4). Проинтегрировав обе части полученного уравнения по y, найдем:

$$\left(1-\frac{y}{a}\right)\frac{V_x(x,y)}{V(x)} = -\frac{1}{a}\int_0^y \frac{V_x}{V}dy +$$

$$+\frac{V'}{\nu}\left\{2\int_0^y\int_y^a \frac{V_x}{V}\left(1-\frac{V_x}{V}\right)\left(1-\frac{y}{a}\right)dydy + \int_0^y\int_y^a\left(1-\frac{V_x}{V}\right)\left(1-\frac{y}{a}\right)dydy\right\} +$$

$$+\frac{V}{\nu}\int_0^y\int_y^a\left(1-\frac{y}{a}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{V_x}{V}\left(1-\frac{V_x}{V}\right)\right]dydy +$$

$$+\frac{1}{\nu}\int_0^y\left\{\left(1-\frac{V_x}{V}\right)\int_0^y\left(1-\frac{y}{a}\right)\frac{dV_x}{dx}dy\right\}dy + R(x)\left(1-\frac{r^3}{a^3}\right) \tag{3.6}$$

Первое приближение к искомому профилю скорости $V_x(x,y)$ получим, подставив в правую часть (3.6) функцию нулевого приближения (2.12) и перейдя к переменным (2.29), (2.27) η и ε:

$$\left(1-\frac{y}{a}\right)\frac{V_x(x,y)}{V(x)} = (2\lambda+\zeta)\int_0^\eta\int_\eta^{\varepsilon^{-1}}\left(1-f^2\right)(1-\varepsilon\eta)\,d\eta d\eta +$$

$$+(\lambda+\zeta)\int_0^\eta\left\{(1-f)\int_0^\eta f(1-\varepsilon\eta)\,d\eta - \int_\eta^{\varepsilon^{-1}}(1-f)(1-\varepsilon\eta)\,d\eta\right\}d\eta -$$

$$-\varepsilon\int_0^\eta\left\{f+\zeta\int_\eta^{1/\varepsilon}\eta f(1-f)\,d\eta + (1-f)\zeta\int_0^\eta \eta f d\eta\right\}d\eta + R(\varepsilon)\left(1-\left(1-\frac{y}{a}\right)^3\right) \tag{3.7}$$

Последнее слагаемое здесь имеет “кубический” профиль $\left(1-r^3/a^3\right)$, который по мере роста этого слагаемого с ростом x будет несколько “скруглять” края плоской части ядра течения, придавая пограничному слою асимптотические черты так, что для первого приближения в отличие от (2.13)

$$\lim_{\eta\to 1-0}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{V_x}{V}\right) \neq 0$$

Поэтому только на оси трубы ($r = 0$, $y = a$) будет верным условие

$$\frac{V(x,0)}{V(x)} = 1,$$

как и в случае асимптотического пограничного слоя, например, при начальном профиле Блазиуса для пластины ([12], с. 29).

Подставив в (3.7) исходный параболический профиль (2.25), вычислив для него по формулам (2.19) входящие в $R(x)$ (2.21) постоянные

$$\alpha = \frac{7}{15}, \quad \beta = \frac{2}{15} \tag{3.8}$$

и по результатам интегрирования, найдем первое приближение для функции $V_x(x, r)$ в переменных

$$\eta = \frac{1}{\varepsilon(x)}\left(1 - \frac{r}{a}\right); \quad \varepsilon(x) = \frac{\delta(x)}{a} \tag{3.9}$$

$$\frac{V_x(x,r)}{V_0}\frac{r}{a} = \mathrm{Z}(\varepsilon)\left[F(\varepsilon,\eta) + R(\varepsilon)\left(1 - \frac{r^3}{a^3}\right)\right], \tag{3.10}$$

где

$$\mathrm{Z}(\varepsilon) = \frac{V(\varepsilon)}{V_0} \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered} F(\varepsilon,\eta) = \left(1 - \frac{r}{a}\right)\left[-\eta + \frac{\eta^2}{3} + \frac{\lambda(\varepsilon)}{\varepsilon}\left\{\frac{3}{5} - \frac{\eta}{2} + \frac{\eta^3}{6} - \frac{\eta^4}{15} + \frac{\eta^5}{90} - \right.\right. \\ \left. - \varepsilon\left(\frac{11}{60} - \frac{\eta^2}{6} + \frac{2}{15}\eta^4 - \frac{13}{180}\eta^5 + \frac{1}{84}\eta^6\right)\right\} + \frac{\zeta(\varepsilon)}{\varepsilon}\left\{\frac{2}{15} - \frac{\eta^3}{6} + \right. \\ \left.\left. + \frac{2}{15}\eta^4 - \frac{1}{45}\eta^5 - \varepsilon\left(\frac{1}{10} - \frac{2}{15}\eta^4 + \frac{11}{90}\eta^5 - \frac{1}{42}\eta^6\right)\right\}\right] \\ 0 \le \eta \le 1, \quad \varepsilon \ge 1 - \frac{r}{a} \end{gathered} \tag{3.12}$$

$$\frac{V_x(x,r)}{V_0}\frac{r}{a} = \mathrm{Z}(\varepsilon)\left[\frac{r}{a} - 1 + \varepsilon + F(\varepsilon,1) + R(\varepsilon)\left(1 - \frac{r^3}{a^3}\right)\right]; \quad 1 \le \eta \le \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \le 1 - \frac{r}{a} \tag{3.13}$$

При $r = 0$ $\left(\eta = \varepsilon^{-1} \ge 1\right)$ из (3.13) и (3.12) следует:

$$R(\varepsilon) = 1 - \varepsilon - F(\varepsilon,1) = 1 - \frac{\varepsilon}{3} - \lambda(\varepsilon)\left(\frac{19}{90} - \frac{113}{1260}\varepsilon\right) - \zeta(\varepsilon)\left(\frac{7}{90} - \frac{41}{630}\varepsilon\right) \tag{3.14}$$

Выразив в (3.13) $F(\varepsilon,1)$ через $R(\varepsilon)$ из (3.14), получим:

$$\frac{V_x(x,r)}{V_0} = \mathrm{Z}(\varepsilon)\left[1 - R(\varepsilon)\frac{r^2}{a^2}\right]; \quad \varepsilon \le 1 - \frac{r}{a} \tag{3.15}$$

Приравняв (3.14) и (2.21) с учетом (2.24), (3.8), найдем соотношение между параметрами $\lambda(\varepsilon)$ и $\zeta(\varepsilon)$, соответствующее первому приближению:

$$\lambda\left(1 - \frac{28}{15}\varepsilon + \frac{9}{5}\varepsilon^2 - \frac{113}{210}\varepsilon^3\right) - \zeta\left(\frac{14}{15}\varepsilon - \varepsilon^2 + \frac{41}{105}\varepsilon^3\right) = -4\varepsilon + 6\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3 \tag{3.16}$$

Используя выражения (3.10)–(3.14), (3.9), (2.14), запишем уравнение постоянства расхода жидкости для первого приближения осевой скорости:

$$Q = \pi a^2 V_0 = 2\pi a^2 V(\varepsilon)\left\{\frac{1}{2}(1 - \varepsilon)^2 + \left(\varepsilon - \frac{1}{4}\right)R(\varepsilon) + \varepsilon\int_0^1 F(\varepsilon,\eta)d\eta\right\}$$

Вычисляя по (3.12)

$$\int_0^1 F(\varepsilon,\eta)d\eta = -\frac{\varepsilon}{4} + \lambda\left(\frac{11}{70} - \frac{71}{1120}\varepsilon\right) + \zeta\left(\frac{11}{210} - \frac{71}{1680}\varepsilon\right)$$

и учитывая (3.14), получим:

$$V(\varepsilon) = \frac{2V_0}{1 + \frac{\varepsilon}{3}(1-\varepsilon) + \lambda\left(\frac{19}{90} - \frac{11}{36}\varepsilon + \frac{53}{504}\varepsilon^2\right) + \zeta\left(\frac{7}{90} - \frac{1}{6}\varepsilon + \frac{23}{252}\varepsilon^2\right)} \tag{3.17}$$

Найденные соотношения первого приближения (3.16), (3.17) и точное выражение (2.30) составляют систему уравнений для определения неизвестных функций $V(\varepsilon)$ (или $Z(\varepsilon)$ (3.11)), $\lambda(\varepsilon)$, $\zeta(\varepsilon)$. Исключив из нее λ и ζ, для $Z(\varepsilon)$ получим дифференциальное уравнение

$$Z'(\varepsilon) = -\frac{Z}{\varepsilon}\frac{a_{22}b_1 - a_{12}\left(\frac{2}{Z} - 1 - \frac{\varepsilon}{3}(1-\varepsilon)\right)}{a_{21}b_1 - a_{11}\left(\frac{2}{Z} - 1 - \frac{\varepsilon}{3}(1-\varepsilon)\right)}, \tag{3.18}$$

где $b_1(\varepsilon)$, $a_{ik}(\varepsilon)$ – известные полиномы. Уравнение (3.18) – уравнение Абеля второго рода ([13], с. 48, п. 4.11(б)). Его приближенное решение найдем сначала, для граничных условий $Z(0) = 1$, $Z(1) = 2$, а затем вычисляя по (3.18) наклоны интегральной кривой $Z(\varepsilon)$ в начальной и конечной точках и применяя метод последовательных приближений [13, с. 23], найдем:

$$Z(\varepsilon) = 1 + \frac{28}{45}\varepsilon + \frac{64}{195}\varepsilon^2 + \frac{71}{585}\varepsilon^3 - \frac{14}{195}\varepsilon^4 \tag{3.19}$$

$$Z'(\varepsilon) = \frac{28}{45} + \frac{128}{195}\varepsilon + \frac{71}{195}\varepsilon^2 - \frac{56}{195}\varepsilon^3 \tag{3.20}$$

Приближенное решение (3.19) уравнения (3.18) хорошо удовлетворяет последнему: значения $Z'(\varepsilon)/Z(\varepsilon)$, вычисленные по (3.19), (3.20), а также при подстановке функции (3.19) в правую часть уравнения (3.18), разнятся менее чем на 0.27%.

Зная $Z(\varepsilon)$ и $Z'(\varepsilon)$, найдем параметры $\lambda(\varepsilon)$ и $\zeta(\varepsilon)$:

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{90\varepsilon}{7S(\varepsilon)}\left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)Z'(\varepsilon) \tag{3.21}$$

$$\zeta(\varepsilon) = \frac{90}{7S(\varepsilon)}\left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)Z(\varepsilon), \tag{3.22}$$

где

$$S(\varepsilon) = 1 + \frac{251}{910}\varepsilon - \frac{1886}{3185}\varepsilon^2 + \frac{10}{21}\varepsilon^3 - \frac{9198}{3185}\varepsilon^4 + \frac{20443}{7644}\varepsilon^5 - \frac{267}{455}\varepsilon^6 \tag{3.23}$$

Отсюда при $\varepsilon \ll 1$ следует:

$$\lambda(\varepsilon) \approx 8\varepsilon, \quad \zeta(\varepsilon) \approx \frac{90}{7}; \quad \lambda(1) = \zeta(1) = 0 \tag{3.24}$$

Подставив полученные разложения в (2.31), после интегрирования найдем:

$$\frac{\nu x(\varepsilon)}{a^2 V_0} = \frac{x(\varepsilon)}{a\,\mathrm{Re}_a} = \frac{1}{100}\left\{\frac{24\,301}{351}\varepsilon + \frac{4633}{234}\varepsilon^2 + \frac{727}{81}\varepsilon^3 + \frac{1007}{252}\varepsilon^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{2687}{945}\varepsilon^5 - \frac{178}{117}\varepsilon^6 + \frac{52\,528}{351}\ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{151}{27}\ln(1-\varepsilon)\right\}, \tag{3.25}$$

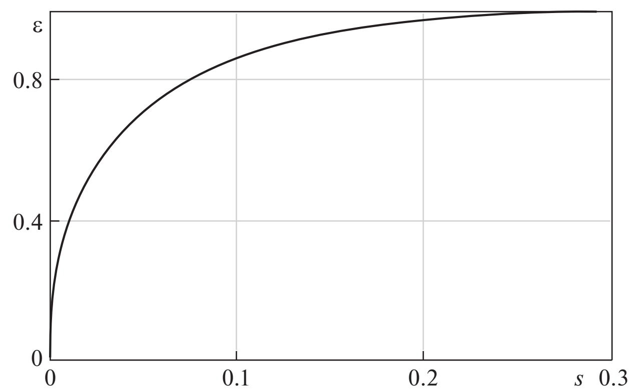


Рис. 2. Относительная толщина $\varepsilon(s)$ пограничного слоя в начальном участке трубы, $s = x/(a\,\mathrm{Re}_a)$.

где

$$\mathrm{Re}_a = \frac{V_0 a}{\nu} \tag{3.26}$$

— число Рейнольдса.

В (3.25) разложение правой части начинается с квадратичного члена, как это и должно быть в силу того, что при $\varepsilon \ll 1$

$$\frac{\nu x(\varepsilon)}{a^2 V_0} \approx \frac{7}{90}\int_0^{\varepsilon} \varepsilon d\varepsilon = \frac{7\varepsilon^2}{180} = \frac{7}{180}\frac{\delta^2}{a^2}$$

Отсюда для самого начала трубы имеем:

$$\delta(x) = 5.071\sqrt{\frac{\nu x}{V_0}}, \tag{3.27}$$

что совпадает с оценкой толщины пограничного слоя на пластине в задаче Блазиуса ([12], с. 32). При $x \to \infty$ из (3.25) следует:

$$\delta(x) \approx a\left[1 - \exp\left(-0.08 - \frac{17.88}{\mathrm{Re}_a}\frac{x}{a}\right)\right]$$

Графическое представление относительной толщины пограничного слоя вдоль начального участка (пунктир на рис. 1) дает рис. 2, где показана зависимость $\varepsilon(s)$, $s = x/(a\,\mathrm{Re}_a)$, соответствующая уравнению (3.25).

Длину L начального участка трубы, следуя Прандтлю ([1], с. 225), определим условием $V(L) = 0.99 \cdot 2V_0$. Согласно (3.19) этому соответствует значение $\varepsilon(L) = 0.9852$. Тогда по (3.25) найдем:

$$L = 0.2305a\,\mathrm{Re}_a \tag{3.28}$$

Эта величина меньше, чем дает формула Буссинеска $L = 0.26a\,\mathrm{Re}_a$ (([5], с. 36), ([14], с. 164)), заметно больше расчетных значений Л. Шиллера ($L = 0.115a\,\mathrm{Re}_a$, ([2], с. 60)) и С.М. Тарга ($L = 0.16a\,\mathrm{Re}_a$, ([1], с. 248)) и почти совпадает с численным результатом работы [7] $L = 0.2268a\,\mathrm{Re}_a$.

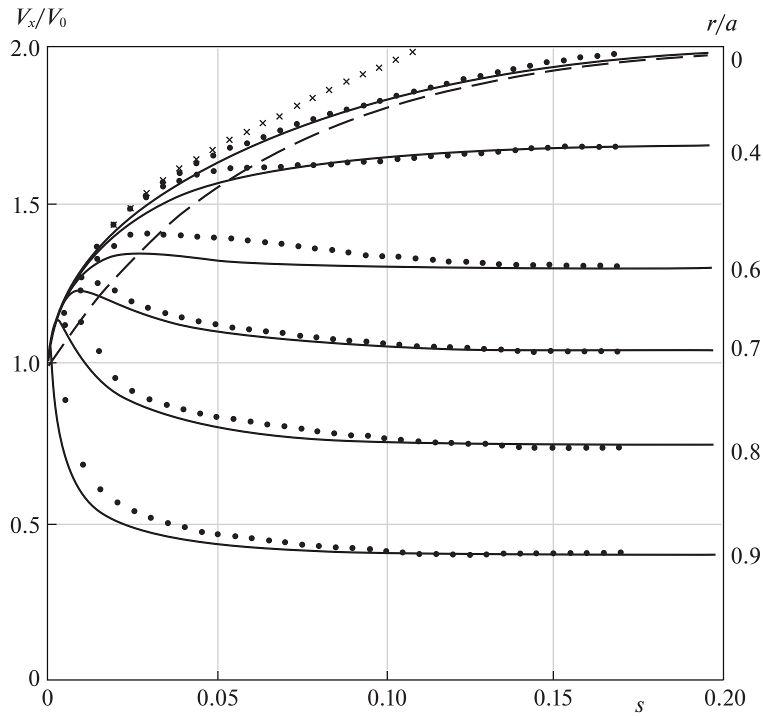


Рис. 3. Зависимость осевых скоростей $V_x(x,r)/V_0$ на начальном участке круглой трубы при ламинарном течении вязкой жидкости от $s = x/(a\,\mathrm{Re}_a)$: • • • • – экспериментальные кривые Никурадзе; – – – теория Буссинеска; ×××× – теория Шиллера; —— – расчет по формулам (3.10), (3.15) с учетом (3.14), (3.19)–(3.23).

Теперь, зная $V(\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon)$ и $\zeta(\varepsilon)$, можем вычислить по формулам первого приближения (3.9)–(3.15) осевую скорость жидкости в сечениях трубы. При этом найдем, что, поскольку при $x > L$ $\varepsilon \to 1$, $\lambda(\varepsilon) \to 0$, $\zeta(\varepsilon) \to 0$, $\eta \to 1 - \dfrac{r}{a}$, $V(\varepsilon) \to 2V_0$, то

$$V_x(\infty, r) = \frac{2V_0}{r/a}\left[-\left(1-\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{2}{3}+\frac{r}{3a}\right)+\frac{2}{3}\left(1-\frac{r^3}{a^3}\right)\right] = 2V_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right),$$

т.е. на больших расстояниях $x > L$ течение переходит в течение Пуазейля.

Далее вычислим распределение удельного трения жидкости о стенки начального участка трубы. Согласно (3.2), (2.14), (3.9)–(3.12), (3.14)

$$\tau = \frac{\mu V(\varepsilon)}{a\varepsilon}\left\{3\varepsilon - \varepsilon^2 + \lambda(\varepsilon)\left(\frac{3}{5}-\frac{49}{60}\varepsilon+\frac{113}{420}\varepsilon^2\right)+\zeta(\varepsilon)\left(\frac{2}{15}-\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{41}{210}\varepsilon^2\right)\right\}$$

При $\varepsilon \ll 1$, учитывая (3.24) и (3.27), получим:

$$\tau = \frac{12}{7}\frac{\mu V_0}{\delta(x)} = 0.3381\sqrt{\frac{\rho\mu V_0^3}{x}},$$

что лишь на 1.8% превышает результат Блазиуса для пластины ([12], с. 29). При $\varepsilon \to 1$

$$\tau = \frac{4\mu V_0}{a},$$

как и должно быть для течения Пуазейля.

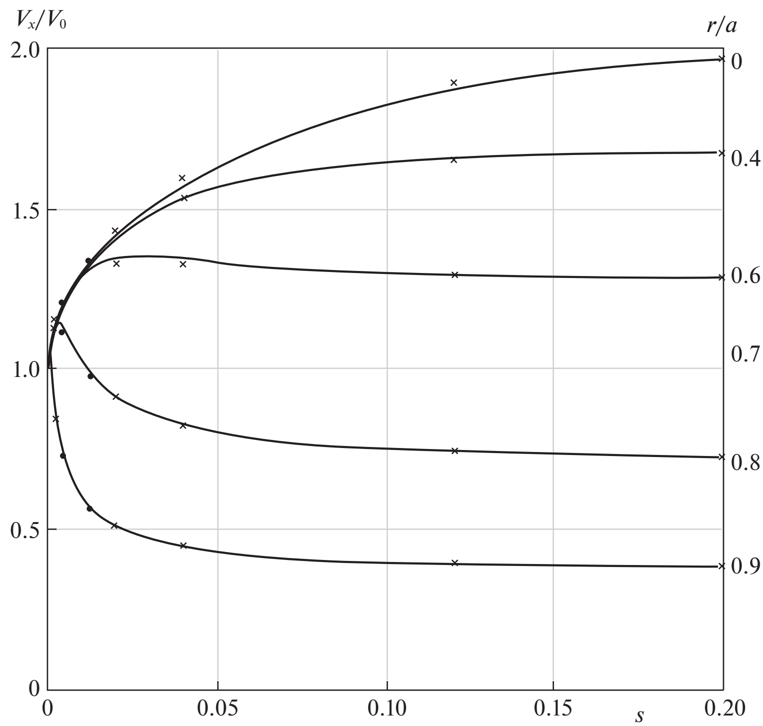


Рис. 4. Сравнение приближенных кривых $V_x(x,r)/V_0$ с численными расчетами: —— – расчет по формулам (3.10), (3.15); ● – данные работы [10]; × – данные работы [14].

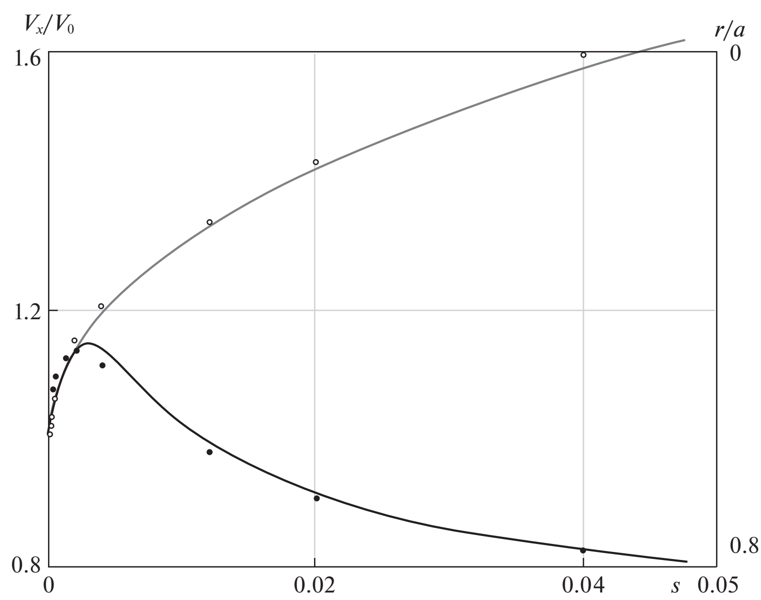


Рис. 5. Сравнение приближенных кривых $V_x(x,r)/V_0$ с точными данными работы [10] при малых аргументах s для $r/a = 0$ (○) и $r/a = 0.8$ (●).

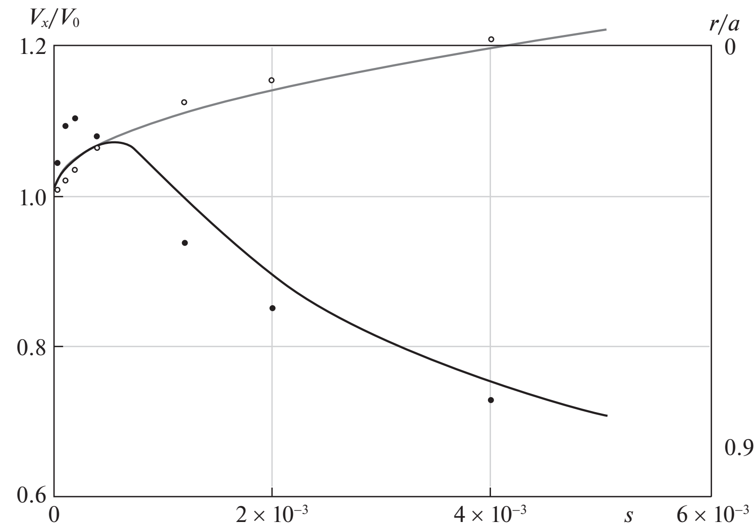


Рис. 6. Сравнение приближенных кривых $V_x(x,r)/V_0$ с точными данными работы [10] при малых аргументах s для $r/a = 0$ (○) и $r/a = 0.9$ (●).

Рисунок 3 демонстрирует степень соответствия расчета по первому приближению (3.10), (3.15) относительных осевых скоростей $V_x(x,r)/V_0$ результатам измерений ([5], с. 36, рис. 13). Совпадение расчета с экспериментом в начале трубы не очень хорошее, что, видимо, обусловлено наличием “закругления” на входе в трубу, обеспечивающего ламинарность течения, но не учитываемого всеми известными теориями, однако, в дальнейшем расчетные и экспериментальные кривые асимптотически сливаются. Показаны также теоретические кривые Буссинеска и Шиллера установления с расстоянием скорости жидкости на оси трубы.

На рис. 4 приведено сравнение рассчитанных по (3.10), (3.15) кривых $V_x(x,r)/V_0$ с результатами численных расчетов, взятыми из работ [10, 14]. Почти все расчетные точки этих работ точно ложатся на соответствующие приближенные кривые. На рис. 5, 6 показано сравнение $V_x(x,r)/V_0$ с численными данными работы [10] для малых значений аргумента s.

Заключение. Развита теория установления течения Гагена–Пуазейля в начальном участке круглой трубы. Найденная длина начального участка $L = 0.2305a\mathrm{Re}_a$ [15] близка к современному значению, полученному численным методом [7]. Теория хорошо объясняет известные экспериментальные результаты И. Никурадзе [5] и подтверждается численными данными работ [10, 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарг С.М.* Основные задачи теории ламинарных течений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. 420 с.
2. *Шиллер Л.* Движение жидкости в трубах М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 230 с.
3. *Слёзкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955. 519 с.
4. *Воларович М.П.* Работы Пуазейля о течении жидкости в трубах // Изв. АН СССР. Серия физ. 1947. Т. 11. № 1.
5. *Прандтль Л., Титьенс О.* Гидро- и аэромеханика. Т. 2 М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 283 с.
6. *Schiller L. und Kirsten H.* Über den Widerstand strömender Flüssigkeit in kurzen Rohrstücken // Physikalische Zeitschrift. 1921. V. 22. S. 523–528.
7. *Durst F., Ray S., Ünsal B., Bayoumi O.A.* The development lengths of laminar pipe and channel flows // J. Fluid. Eng. 2005. V. 127. № 6. P. 1154–1160.

8. *Poole R.J., Ridley B.S.* Development – length requirements for fully developed laminar pipe flow of inelastic non-Newtonian liquids // J. Fluid. Eng. 2007. V. 129. P. 1281–1287.
9. *Mehrotra A.K., Patience G.S.* Unified entry length for Newtonian and power – law fluids in laminar pipe flow // Can. J. Chem. Eng. 1990. V. 68. P. 529–533.
10. *Shimomukay K., Kanda H.* Numerical study of normal pressure distribution in entrance pipe flow // Electr. Trans. Numer. Anal. 2008. V. 30. P. 10–25.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
12. *Лойцянский Л.Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: ГИФМЛ, 1962. 479 с.
13. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
14. *Hornbeck R.W.* Laminar flow in the entrance region of a pipe // Appl. Sci. Res. A. 1964. V. 13. P. 224–236.
15. *Казаков Л.И.* Развитие течения Пуазейля в круглой трубе. Севастополь: 2019. 32 с. – Деп. в ВИНИТИ 07.10.2019 № 80-В2019.

Laminar Flow of a Viscous Liquid in the Entrance Region of a Circular Pipe

L.I. Kazakov[a,#]

[a] *Research Institute of Autoelectronics, Sevastopol, Russia*
[#]*e-mail: lev-kazakov@rambler.ru*

An approximate theory of stationary axisymmetric laminar flow of a viscous incompressible fluid in the entrance region of a circular pipe is presented. It gives correct (within ±2%) calculated values of different physical characteristics of the established flow, which coincide with the known calculated and experimental data. The success of the theory is largely due to the use of an exact equation for the average axial pressure gradient over the pipe section, instead of the usual application for the entire length of the entrance region of the Bernoulli equation.

Keywords: entrance region, boundary layer, flow core, Hagen–Poiseuille law

REFERENCES

1. *Targ S.M.* Basic Problems of the Theory of Laminar Flows. Moscow; Leningrad: GITTL, 1951. 420 p. (in Russian)
2. *Shiller L.* Movement of Liquid in Pipes. Moscow; Leningrad: ONTI, 1936. 230 p. (in Russian)
3. *Slezkin N.A.* Dynamics of a Viscous Incompressible Liquid. Moscow: GITTL, 1955. 519 p. (in Russian)
4. *Volarovich M.P.* Poiseuille's works on the flow of liquid in pipes // Izv. USSR Acad. Sci. Ser. Phys., 1947, vol. 11, no. 1.
5. *Prandtl L.,Titiens O.* Hydro- and Aeromechanics. Vol. 2. Moscow; Leningrad: ONTI, 1935. 283 p. (in Russian)
6. *Schiller L., Kirsten H.* Über den Widerstand strömender Flüssigkeit in kurzen Rohrstücken (in connection with the discussion of the results of experimental studies V. Zarkow) // Physikalische Zeitschrift, 1921, vol. 22, S. 523–528.
7. *Durst F., Ray S., Ünsal B., Bayoumi O.A.* The development lengths of laminar pipe and channel flows // J. Fluid. Eng., 2005, vol. 127, no. 6, pp. 1154–1160.
8. *Poole R.J., Ridley B.S.* Development – length requirements for fully developed laminar pipe flow of inelastic non–Newtonian liquids // J. Fluid. Eng., 2007, vol. 129, pp. 1281–1287.
9. *Mehrotra A.K., Patience G.S.* Unified entry length for Newtonian and power–law fluids in laminar pipe flow // Can. J. Chem. Eng., 1990, vol. 68, pp. 529–533.
10. *Shimomukay K., Kanda H.* Numerical study of normal pressure distribution in entrance pipe flow // Electr. Trans. Numer. Anal., 2008, vol. 30, pp. 10–25.
11. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Theoretical Physics: Vol. VI. Hydrodynamics. Moscow: Nauka, 1986. 736 p. (in Russian)
12. *Loitsyansky L.G.* Laminar Boundary Layer. Moscow: GIFML, 1962. 479 p. (in Russian)
13. *Kamke E.* Handbook of Ordinary Differential Equations. Moscow: Nauka, 1976. 576 p. (in Russian)
14. *Hornbeck R.W.* Laminar flow in the entrance region of a pipe // Appl. Sci. Res. A., 1964, vol. 13, pp. 224–236.
15. *Kazakov L.I.* Development of the Poiseuille flow in a round tube. Sevastopol, 2019. 32 p. – Dep. in VINITI 07.10.2019 No. 80-B2019.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 5, с. 615–625

УДК 533.6.011.8

КИНЕТИЧЕСКИЙ УДАРНЫЙ СЛОЙ В ПЛОСКОСТИ РАСТЕКАНИЯ АППАРАТА ТИПА НЕСУЩИЙ КОРПУС

© 2021 г. А. Л. Анкудинов[1,*]

[1]*ФГУП ЦАГИ, Жуковский, Россия*

**e-mail: ankudin2@yandex.ru*

Поступила в редакцию 26.11.2020 г.
После доработки 09.07.2021 г.
Принята к публикации 26.07.2021 г.

Предложена эффективная вычислительная математическая интерпретация задачи о неравновесном течении многоатомного газа в кинетическом тонком вязком ударном слое вблизи затупленного тела в плоскости его симметрии. Указано на корреляцию течений в кинетическом и навье-стоксовском тонком вязком ударном слое на лобовой линии растекания, позволяющую построить решение кинетической задачи полностью на базе уравнений Навье–Стокса. С использованием предлагаемого подхода проведено численное исследование теплообмена на стенке на всей линии растекания модели аэрокосмического летательного аппарата типа несущий корпус. Результаты расчета сопоставлены с данными трубного эксперимента.

Ключевые слова: макрокинетический тонкий вязкий ударный слой, плоскость растекания, молекулярный газ, неравновесность, корреляция, численный расчет, сравнение с экспериментом

DOI: 10.31857/S0032823521050027

Одним из перспективных и эффективных средств исследования высокоскоростных течений разреженного газа в условиях, когда становится некорректным применение уравнений Навье–Стокса, является приближение гиперзвукового тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС) вблизи нетонких тел, кинетические версии которого, построенные на основе макроскопических моментных уравнений кинетической теории газов, были сформулированы порядка 3-х десятилетий назад: в [1] – для многоатомного (молекулярного) однородного газа с внутренними степенями свободы с применением моментных уравнений общего вида (дальнейшее развитие концепции см. [3, 4]) и [2] – для одноатомного газа (поступательные степени свободы) на базе 13-моментных уравнений Греда кинетической теории газов (развитие в [5, 6]). Предлагаемый анализ, использующий приближение кинетического ТВУС, посвящен важному и малоизученному вопросу современной практической аэротермодинамики – теплообмену летательного объекта с высокоскоростным неравновесным потоком (суборбитальный полет, вход космического аппарата в атмосферу и др.).

Последнее десятилетие принесло целый ряд интересных и важных для практики результатов по тематике гиперзвуковой аэродинамики в переходных режимах течения [7–12].

Существенная часть этих результатов получена с использованием модели континуального вязкого ударного слоя, который зарекомендовал себя как эффективное и оперативное средство анализа подобного рода течений.

Рассматриваемый в предлагаемой статье подход относится к этой же категории средств исследования потоков, т.е. является континуальным вязким ударным слоем, отличающимся тем качеством, что он целиком выстроен на базе аппарата кинетической теории газов, аппарата наиболее адекватного классу рассматриваемых режимов; таким образом, данная модель может быть квалифицирована как кинетический вязкий ударный слой.

1. Корреляция. Уравнения кинетического ТВУС (кинетического тонкого вязкого ударного слоя около нетонких тел), представленные в широко используемых в уравнениях пограничного слоя криволинейных ортогональных координатах, связанных с обтекаемой поверхностью, имеют следующий вид в плоскости симметрии поля течения:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial h_3 \rho u}{\partial x} + \frac{\partial h_1 h_3 \rho v}{\partial y} + h_1 \rho w_\phi = 0 \\
\frac{\rho u}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}_0}\frac{\partial}{\partial y} p_{12} = 0 \\
p_{12} = -\frac{P_{22}}{p}\mu\frac{\partial u}{\partial y} \\
\frac{\partial P_{22}}{\partial y} - \frac{\rho u^2}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} = 0 \\
\frac{\rho u}{h_1}\frac{\partial w_\phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w_\phi}{\partial y} + \frac{\rho w_\phi^2}{h_3} + \frac{\rho u w_\phi}{h_1 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial x} - \frac{\rho u^2}{h_1 h_3}\frac{\partial^2 h_1}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}_0}\frac{\partial}{\partial y} p_{32\phi} = 0 \\
p_{32\phi} = -\frac{P_{22}}{p}\mu\frac{\partial w_\phi}{\partial y} \\
\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}_0}\frac{\partial}{\partial y}(q_2 + u p_{12}) = 0 \\
q_2 = -\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{P_{22}}{p}\mu\frac{\partial h}{\partial y} \\
p = 2\varepsilon\rho h, \quad \mu = \mu(h), \quad H = h + \frac{u^2}{2} \\
\frac{p}{P_{22}} = 1 + \frac{2}{3a}\left(\frac{1}{\mathrm{Re}_0}\frac{\mu}{p}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Условия на внешней границе y_e (при $y = y_e$) записываются как

$$\begin{gathered}
\rho v = \rho_\infty v_\infty \\
\rho_\infty v_\infty (u - u_\infty) + \frac{1}{\mathrm{Re}_0} p_{12} = 0 \\
P_{22} = \rho_\infty v_\infty^2, \quad \rho_\infty v_\infty w_\phi + \frac{1}{\mathrm{Re}_0} p_{32\phi} = 0 \\
\rho_\infty v_\infty (H - H_\infty) + \frac{1}{\mathrm{Re}_0}(q_2 + u p_{12}) = 0,
\end{gathered} \tag{1.2}$$

а условия на поверхности (т.е. при $y = 0$) в виде

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w_\phi = 0, \quad H = H_w \tag{1.3}$$

Внешняя граница ударного слоя $y_e = y_e(x)$ (в терминах теории ТВУС величина y_e – отход скачка) является подлежащей определению изначально неизвестной величиной.

Обезразмеривание переменных задачи:

$$u = \frac{u^*}{U_\infty^*}, \quad v = \frac{v^*}{U_\infty^*}, \quad w = \frac{w^*}{U_\infty^*}, \quad H = \frac{H^*}{U_\infty^{*2}}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}}, \quad h = \frac{h^*}{U_\infty^{*2}}$$

$$T = \frac{T^*}{(U_\infty^{*2}/c_p^*)}, \quad x = \frac{x^*}{L^*}, \quad y = \frac{y^*}{L^*}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_0^*}$$

$$r = \frac{r^*}{L^*}, \quad P_{22} = \frac{P_{22}^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}}$$

Принятые обозначения: x, y, ϕ – связанная с обтекаемой поверхностью классическая ортогональная криволинейная система координат трехмерного погранслоя, где (x, y) – расстояния от критической точки вдоль поверхности тела в плоскости его симметрии (x) и по нормали от поверхности (y) соответственно, а ϕ – азимутальный угол; h_1, h_3 – метрические коэффициенты для направлений x и ϕ соответственно; u, v, w – компоненты скорости течения в продольном (x), поперечном (y) и азимутальном (ϕ) направлениях соответственно; $w_\phi = \partial w/\partial\phi$; h, H – статическая и полная энтальпии соответственно; $\mathrm{Re}_0 = U_\infty^* L^* \rho_\infty^*/\mu_0^*$ – число Рейнольдса; $\mathrm{Pr} = \mu^* c_p^*/\lambda^*$ – число Прандтля; L^* – характерный линейный размер; под геометрической критической точкой поверхности понимается точка касания лобовой поверхности аппарата плоскостью, нормаль к которой параллельна вектору набегающего невозмущенного потока.

Индексы характеризуют: “e” – внешнюю границу ТВУС, “w” – стенку, “∞” – набегающий невозмущенный поток. Индекс в виде звездочки $*$ относится к размерным величинам.

p – давление; ρ – плотность; T – температура; T_0^* – температура торможения; γ – отношение удельных теплоемкостей, т. е. $\gamma = c_p^*/c_v^*$, где c_p^* и c_v^* – удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и при постоянном объеме соответственно; $\varepsilon = (\gamma - 1)/2\gamma$;

μ^* – коэффициента вязкости; μ_0^* – значение коэффициента вязкости μ^* при температуре торможения T_0^*; λ^* – коэффициент теплопроводности;

a – отношение времен релаксации при упругих и неупругих столкновениях молекул газа, где $a = a(T)$;

$P_{22} = p + p_{22}$, где $p_{22}\rho_\infty^* U_\infty^{*2}$ – компонента девиаторной части тензора напряжений $p_{ij}\rho_\infty^* U_\infty^{*2}$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$ при индексах 1, 2 и 3, ассоциируемых с направлениями x, y и ϕ соответственно; $p_{32\phi} = \partial p_{32}/\partial\phi$;

$q_i \rho_\infty^* U_\infty^{*3}$ – вектор теплового потока, т.е. q_2 – нормальная составляющая вектора теплового потока.

Соотношениями (1.1)–(1.3) представлена (адаптированная к плоскости растекания) разработанная в [1] модель макрокинетического ТВУС, сформулированная на базе уравнений моментов кинетической теории газов (тонкослойная версия общего вида моментных уравнений кинетической теории газов, упрощенных в рамках концепции ТВУС) для многоатомного однородного газа и условий быстрого обмена энергией между поступательными и внутренними степенями свободы его молекул; режимы течения, при которых влияние процессов диссоциации и электронного возбуждения несущественно.

Данная кинетическая модель позволяет корректно описывать гиперзвуковое обтекание тел в условиях сильного нарушения равновесия по внутренним и поступательным степеням свободы частиц газа (см. [1, 3, 4]).

Аналогичная кинетическому ТВУС задача классического навье-стоксовского ТВУС, привлекаемая для последующего анализа, может быть представлена в таком же формате, как и кинетический ТВУС, т.е. в виде (1.1)–(1.3), лишь последнее уравнение системы (1.1) в данном случае (ТВУС в модели Навье–Стокса) должно быть заменено на уравнение такого рода, как $p/P_{22} = 1$.

Сопоставление обсуждаемых здесь двух задач ТВУС свидетельствует о том, что кинетический вариант ТВУС, представленный соотношениями (1.1)–(1.3), гораздо сложнее для прямых вычислений, чем задача ТВУС для модели Навье–Стокса: дополнительная неизвестная функция, более высокий уровень нелинейности, усложненный нелинейный коэффициент перед старшей производной в главных уравнениях системы и краевых условиях.

Удобными для исследования кинетического ТВУС в плоскости растекания являются связанные с полем течения независимые переменные (ξ, ς), которые описываются следующего вида соотношениями:

$$\xi = x; \quad \frac{\partial r^2\varsigma^2}{\partial x} = -2h_1h_3\rho v, \quad \varsigma(x,0) = 0 \tag{1.4}$$

Переменные (ξ, ς), вводимые предлагаемой математической моделью для анализа течения в ТВУС, обладают такого рода свойствами:

• новые переменные выявляют корреляцию решений кинетической и навье-стоксовской задач ТВУС;

• новые переменные с точностью главного приближения асимптотической теории тонкого вязкого ударного слоя интерпретируют задачу ТВУС, являющуюся проблемой с неизвестной границей, как краевую задачу в фиксированной области.

Математическая модель ТВУС, основанная на предлагаемых переменных, открывает возможность прежде всего использовать корреляцию течений в кинетическом и навье-стоксовском ТВУС, имеющую вид

$$(q_2)_k = (q_2)_n, \quad (T)_k = (T)_n, \quad (H)_k = (H)_n \tag{1.5}$$

для конструирования решения задачи кинетического ТВУС.

Здесь и далее индексы k и n относятся к кинетическому и навье-стоксовскому ТВУС соответственно.

Данная корреляция имеет место для ТВУС, трактуемого в переменных вида (ξ, ς), и может быть использована для выстраивания решения задачи кинетического ТВУС через посредство решения более простой задачи ТВУС в рамках модели Навье–Стокса. Корреляция показана в (1.5) применительно к тепловой составляющей решения, представляющей основной интерес в заявленном изучении теплообмена на линии растекания. Прочие функции, описывающие течение в ТВУС, связываются в обеих задачах (кинетического и навье-стоксовского ТВУС) в целом аналогичным образом, кроме величин давления и плотности, связь между которыми ($(p)_k \leftarrow (p)_n$, $(\rho)_k \leftarrow (\rho)_n$) имеет более сложный вид, зависящий от переменных (ξ, ς). Для величины же $(P_{22})_k$, которая отсутствует как таковая в постановке задачи навье-стоксовского ТВУС, соотнесение ее с решением для ТВУС в рамках модели Навье–Стокса выглядит как $(P_{22})_k = (p)_n$.

В соответствии с указанной корреляцией решение для кинетического ТВУС в полном объеме формируется исключительно только на основе решения ТВУС в рамках модели Навье–Стокса. Сопутствующие кинетической задаче соотношения (1.4) после несложных процедур их обращения устанавливают соответствие новых переменных (ξ, ς) физическим (x, y), т.е. привязывают сконструированное в переменных (ξ, ς) решение кинетического ТВУС к физической плоскости.

Математическая модель ТВУС, основанная на предлагаемых переменных, открывает возможность заменить исходную специфическую усложненную задачу с неизвестной границей краевой задачей классического типа в фиксированной области независимых переменных.

Областью определения решения задач ТВУС в переменных (ξ, ς) является полуполоса вида $\xi \ge 0,\ 0 \le \varsigma \le 1$.

В передней критической точке обтекаемого затупленного тела (где областью определения решения в переменных (ξ, ς) является отрезок $\xi = 0,\ 0 \le \varsigma \le 1$).

Проблема ТВУС вырождается в краевую задачу для системы обыкновенных уравнений, результат решения которой является начальным условием для численного интегрирования уравнений ТВУС при $\xi > 0$.

Из соотношений (1.5) следует, что для представляющей интерес величины теплового потока к стенке $(q_2)_w$ имеет место следующий результат:

$$(q_{2w})_k = (q_{2w})_n, \quad \text{где} \quad q_{2w} = (q_2)_w, \tag{1.6}$$

т.е. получаем равенство величин теплового потока на стенке для задач кинетического и навье-стоксовского ТВУС и, стало быть, задача теплообмена на стенке в кинетическом ТВУС может быть решена хорошо разработанными вычислительными средствами теории классического ТВУС построенного в рамках модели Навье–Стокса, имеющего (в сопоставлении с кинетическим ТВУС) существенно меньшую математическую сложность. Таким образом, при использовании предлагаемой математической модели анализ усложненного для исследования кинетического ТВУС подменяется решением уже освоенного ТВУС в рамках модели Навье–Стокса.

Подобный результат (1.6) отмечался в разных версиях кинетического ТВУС: в [2] для одноатомного газа (поступательная неравновесность), а в [14] для многоатомного газа (неравновесность по внутренним и поступательным степеням свободы) и для случая двумерной задачи. Здесь этот результат сформулирован для пространственной квазидвумерной задачи кинетического ТВУС и течения молекулярного газа.

Вышеизложенное позволяет констатировать: для того чтобы на основе решения ТВУС в рамках модели Навье–Стокса построить решение кинетического ТВУС в полном объеме (определить все неизвестные кинетического ТВУС во всем поле течения), необходимо знать решение ТВУС в рамках модели Навье–Стокса, сформулированное в специального вида переменных, а именно таких, в которых реализуется описанная выше корреляция, присущая предлагаемой математической модели. Для того чтобы для кинетического ТВУС получить только тепловой поток на стенке (как, впрочем, и трение на стенке), можно решать задачу ТВУС в рамках модели Навье–Стокса, вообще говоря, любым способом (т.е. с использованием произвольного вида переменных), поскольку результат (1.6) не зависит от способа его получения (от способа решения задачи).

Расчеты ТВУС, результаты которых представляются ниже (см. в п. 2), производились с помощью предлагаемой вычислительной модели, т.е. вводимые этой моделью новые переменные квазидвумерной задачи ТВУС в плоскости растекания позволяли выстроить решение кинетического ТВУС в полном объеме. При численном решении задачи ТВУС использовался конечно-разностный метод повышенной точности [13].

2. Численный расчет. С применением вышеизложенной математической интерпретации проблемы течения в кинетическом ТВУС была проведена серия расчетов, посвященных численному исследованию теплообмена вблизи наветренной поверхности

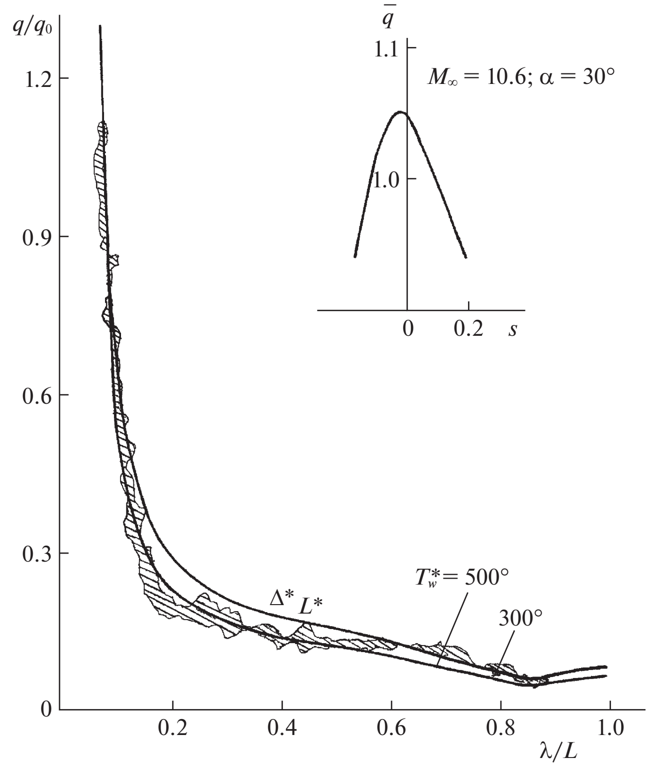


Рис. 1.

корпуса модели аэрокосмического аппарата в плоскости симметрии поля течения около нее для условий трубного эксперимента, имитирующих режим входа в атмосферу.

Тепловые результаты, а именно распределения величины удельного теплового потока к стенке вдоль поверхности в плоскости симметрии испытуемой модели, для одного из вариантов этих численных расчетов в сопоставлении с опытными данными (см. рис. 1) приводятся на рис. 1 и 2.

Расчет, результаты которого там представлены, проводился при следующих числе Маха M_∞, температуре торможения T_0^* и числе Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_{\infty,L} = \frac{U_\infty^* L^* \rho_\infty^*}{\mu_\infty^*}, \quad M_\infty = 10.6, \quad T_0^* = 1120°\mathrm{K}, \quad \mathrm{Re}_{\infty,L} = 1.4 \times 10^6$$

Рассматривались углы атаки $\alpha = 30°$ и $\alpha = 40°$.

Приведенный выше набор параметров обтекания соответствует одному из возможных вариантов режима спуска воздушно-космического аппарата в атмосфере земли.

В расчетах предполагалось: величина $\gamma = 1.4$; число Прандтля $\mathrm{Pr} = 0.7$; зависимость коэффициента вязкости μ^* от температуры T^* линейная, т.е. $\mu^* \sim T^*$. Имеющийся в конструкции летательного аппарата отклоняемый хвостовой щиток считался неотклоненным (началу щитка на нижней части поверхности модели соответствует коор-

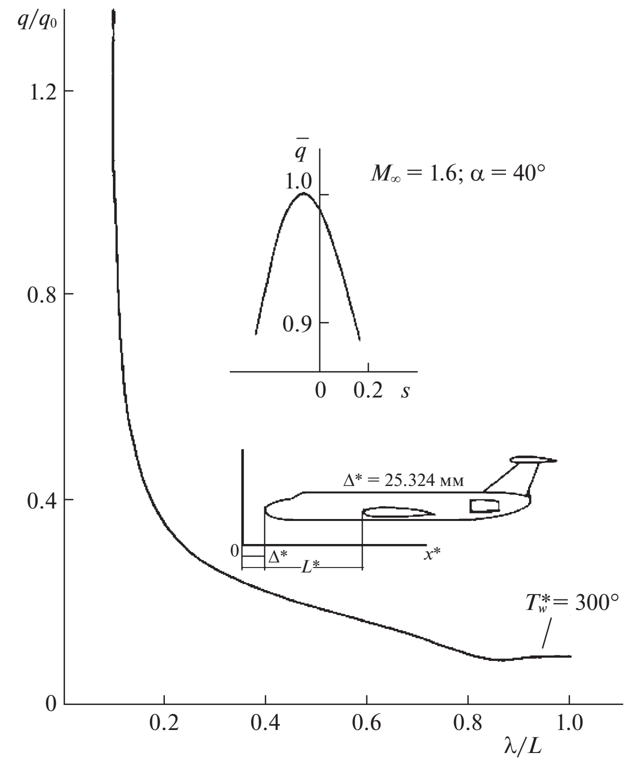


Рис. 2.

дината $x^*/L^* \approx 0.9$ или $s \approx 33$). Расчеты выполнялись при постоянной температуре стенки T_w^*.

В итоге проведенных численных расчетов были получены распределения целого ряда аэротермодинамических характеристик течения в ТВУС вдоль линии растекания на наветренной поверхности модели ЛА (q, τ, p_w, y_e).

Из этих характеристик для демонстрационного представления на рисунках выбрана одна из наиболее интересных и значимых величин отнесенного теплового потока к стенке q/q_0 (как результат, который можно сравнить с имеющимися опытными данными).

В разд. 2, используются обозначения:

$\bar{q} = q\sqrt{\mathrm{Re}}$, $\bar{\tau} = \tau\sqrt{\mathrm{Re}}$, $\mathrm{Re} = U_\infty^* R_0^* \rho_\infty^* / \mu_0^*$; $p_w = p_w^* / \rho_\infty^* U_\infty^*$, p_w^* – давление на поверхности;

$y_e = y_e^*/R_0^*$, y_e^* – отход скачка; $q = q^*/\rho_\infty^* U_\infty^{*3}$, q^* – удельный тепловой поток к поверхности; $\tau = \tau^*/\rho_\infty^* U_\infty^{*2}$, τ^* – напряжение трения на поверхности; R_0^* – радиус кривизны носка модели ($R_0^* \approx 5.2$ мм);

$x = x^*/R_0^*$, x^* – продольная координата, условно показанная на рисунке 2 (следует отличать переменную x, введенную в разд. 2 для представления результатов, от переменной x, использованной в разд. 1 при описании уравнений задачи ТВУС);

$s = s^*/R_0^*$, s^* – длина дуги линии растекания, отсчитываемая от передней критической точки модели; $L = L^*/R_0^*$, L^* – характерный линейный размер ($L^* = 310$ мм); $q_0 = q_0^*/\rho_\infty^* U_\infty^{*3}$, q_0^* – значение величины теплового потока в критической точке сферы радиуса, равного 20 мм, при прочих параметрах и условиях обтекания таких же, как параметры и условия, принятые для основных расчетов; μ_0^* – значение коэффициента вязкости μ^* при температуре торможения T_0^*; U_∞^*, ρ_∞^* – скорость и плотность в набегающем невозмущенном потоке соответственно; величины со звездочками в качестве верхнего индекса считаются размерными, безразмерные линейные (связанные с длиной) величины отнесены к R_0^*; индексы ∞ и w относятся соответственно к величинам в набегающем невозмущенном потоке и к величинам на стенке.

Пояснения к рисункам:

переменная x служит для показа отнесенного теплового потока к стенке вдоль всей линии растекания, переменная s – для малой окрестности носка модели;

на обоих рисунках фрагмент результата, относящийся к носку, вынесен вверх-вправо от основной протяженной кривой;

на рис. 1 штриховкой обозначена область экспериментальных значений.

Расчеты в целом хорошо согласуются с результатами, полученными при тепловых испытаниях в аэродинамической трубе.

Сопоставление расчетных и опытных тепловых данных, представленных на рис. 1, позволяет отследить: заштрихованная область экспериментальных значений более близка к расчетной кривой с параметром $T_w^* = 500°$ в начальной области расчета и более близка к расчетной кривой с $T_w^* = 300°$ в конечной, что является очевидным следствием более горячей стенки в головной части модели, чем в хвостовой; последнее обстоятельство отмечается и в измерениях, которые дают температуру стенки в голове порядка 500–600°, а в хвосте порядка 300°.

Прослеживаются две главные особенности распределения (вдоль линии растекания) величины теплового потока к поверхности. Эти особенности характерны для всех вариантов расчета и хорошо видны на приведенных рисунках.

Это, во-первых, смещение положения максимума теплового потока с геометрической критической точки в сторону носка модели (т.е. вдоль линии растекания на подветренную сторону поверхности) и, во-вторых, наличие локального минимума теплового потока в хвостовой части поверхности.

Можно отметить, что, согласно численному решению, максимум отнесенного теплового потока q/q_0 (и соответственно величины $\overline{q}$), как говорилось выше, имеет место не в геометрической критической точке (которая в приближении тонкого вязкого ударного слоя совпадает с передней точкой торможения), а несколько смещается от нее вдоль линии растекания в сторону носка модели (количественно для угла атаки $\alpha = 30°$ это смещение положения максимума $\overline{q}$ составляет $\sim R_0^*/3$, а превышение максимального $\overline{q}$ над уровнем теплового потока в геометрической критической точке не превосходит 1% по отношению к этому уровню; для угла атаки $\alpha = 40°$ эти же величины, т.е. вышеупомянутые смещение и превышение, составляют соответственно $0.5R_0^*$–$0.7R_0^*$ и 0.7%–1.4%); данный эффект, вследствие относительной его малости и ввиду известных трудностей для адекватных тепловых измерений в ближней окрестности критической точки, не может быть отслежен в эксперименте на модели (т.е. не улавливается в опытах с малоразмерной моделью).

И далее, полученная в расчете кривая распределения вдоль поверхности величины q/q_0 (и соответственно $\overline{q}$) имеет локальный минимум на участке линии растекания, относящемся к хвостовой части модели, в области непосредственно перед (неотклоненным) хвостовым щитком: это явно выраженное местное снижение (в виде выемки) демонстрационной кривой распределения величины теплового потока на стенке; аналогичную тенденцию можно отследить на рисунке и в поведении экспериментальных данных.

В завершение – два сопутствующие рассматриваемой теме замечания, которые могут представлять практический интерес вычислительного плана и которые относятся к приближенной интерпретации как расчетных данных по теплообмену на линии растекания, так и собственно геометрии содержащего эту линию наветренного участка поверхности модели (в малой азимутальной окрестности ее плоскости симметрии).

Во-первых, представление результатов расчета в приведенной форме $\overline{q} = q\sqrt{\mathrm{Re}}$ существенно сближает полученные для разных режимов данные по теплообмену на поверхности на всем протяжении линии растекания.

Во-вторых, при численном исследовании тонкого вязкого ударного слоя на линии растекания летательного аппарата (ЛА) в прикидочном (оценочном) варианте для значительной части области расчета его поверхность (вне явно выраженного головного ее фрагмента) может быть загрубленно представлена плоскостью с соответствующим углом атаки к набегающему невозмущенному потоку, головная же часть ЛА может быть интерпретирована участком поверхности, например, эллиптического гиперболоида (речь идет, безусловно, об имитации поверхности в малой азимутальной окрестности линии растекания и о форме ЛА типа несущий корпус, имеющего специфические плоскостные обводы в донной области).

Представленные на рисунке экспериментальные данные получены на основе измерений в гиперзвуковой аэродинамической трубе (АДТ-117) ЦАГИ, проведенных силами теплового отдела 8-го отделения с применением методологии термоиндикаторных покрытий [15].

Заключение. Приводятся результаты численного решения задачи кинетического тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС) около наветренной поверхности модели воздушно-космического летательного аппарата (ЛА) типа несущий корпус в плоскости его симметрии в сопоставлении с данными теплового эксперимента в аэродинамической трубе.

Отмечаются характерные особенности распределения теплового потока к поверхности модели ЛА на лобовой линии растекания.

Указано на существование подобия решения рассмотренной задачи о неравновесном течении многоатомного газа в кинетическом ТВУС около поверхности ЛА в плоскости растекания с решением аналогичной задачи для ТВУС в рамках модели Навье–Стокса; подобие, имеющее место в предлагаемых переменных специального вида, дает возможность во всей полноте выстроить решение кинетической задачи ТВУС на базе решения для ТВУС в рамках модели Навье–Стокса.

Показано, что средства вычислительного исследования течения в кинетическом ТВУС (математическая интерпретация течения и численный метод), примененные в представленном анализе, адекватны изучаемой проблеме и позволяют получать достоверный, важный для практики результат.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 20-08-00790А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузнецов М.М., Никольский В.С.* Кинетический анализ гиперзвуковых вязких течений многоатомного газа в тонком трехмерном ударном слое // Уч. зап. ЦАГИ. 1985. Т. 16. № 3. С. 38–49.
2. *Cheng H.K., Wong E.Y., Dogra V.K.* A shock-layer theory based on thirteen-moment equations and DSMC calculations of rarefied hypersonic flows // AIAA Paper. 1991. 91-0783.

3. *Никольский В.С.* Кинетическая модель гиперзвуковых течений газа // Матем. модел. 1996. Т. 8. № 12. С. 29–46.
4. *Кузнецов М.М., Липатов И.И., Никольский В.С.* Реология течения разреженного газа в гиперзвуковом ударном и пограничном слоях // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 5. С. 189–196.
5. *Cheng H.K.* The viscous shock layer problem revisited // Int. Conf. Res. in Hypersonic Flows and Hypersonic Technol. Sept. 19–21, 1994, Zhukovsky.
6. *Cheng H.K., Emanuel G.* Perspective on hypersonic nonequilibrium flow // AIAA J. 1995. V. 33. № 3. P. 385–400.
7. *Брыкина И.Г.* Асимптотические решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя в окрестности плоскости симметрии затупленных тел, обтекаемых гиперзвуковым потоком разреженного газа // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 3. С. 120–131.
8. *Брыкина И.Г., Рогов Б.В., Тирский Г.А., Утюжников С.В.* Влияние кривизны поверхности на граничные условия в модели вязкого ударного слоя при гиперзвуковом обтекании разреженным газом // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 6. С. 938–953.
9. *Брыкина И.Г., Рогов Б.В., Тирский Г.А., Титарев В.А., Утюжников С.В.* Сравнительный анализ подходов к исследованию гиперзвукового обтекания затупленных тел в переходном режиме // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 1. С. 15–26.
10. *Брыкина И.Г.* Асимптотическое исследование теплопередачи и трения в трехмерных гиперзвуковых течениях разреженного газа // ПММ. 2016. Т. 80. № 3. С. 344–365.
11. *Noori S., Ghasemloo S., Mani M.* Viscous shock layer around slender bodies with nonequilibrium air chemistry // Iranian J. Sci.&Technol. Trans. Mech. Engng. Shiraz Univ. 2017. V. 41. P. 251–264.
12. *Брыкина И.Г.* Приближенные аналитические решения для тепловых потоков при трехмерном гиперзвуковом обтекании затупленных тел // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 4. С. 125–139.
13. *Анкудинов А.Л.* Об одной разностной схеме расчета вязкого ударного слоя // Тр. ЦАГИ. 1981. Вып. 2107. С. 154–160.
14. *Анкудинов А.Л.* Тонкий вязкий ударный слой с учетом эффектов разреженности газа // Уч. зап. ЦАГИ. 2007. Т. 38. № 3–4. С. 88–93.
15. *Бражко В.Н., Ковалева Н.А., Майкапар Г.И.* О методе измерения теплового потока с помощью термоиндикаторных покрытий // Уч. зап. ЦАГИ. 1989. Т. 20. № 1. С. 1–12.

Kinetic Shock Layer in the Spreading Plane of a Lifting Body Apparatus

A. L. Ankudinov[a,#]

[a]*Zhukovskii Central Institute of Aerohydrodynamics, Zhukovskii, Russia*
[#]*e-mail: ankudin2@yandex.ru*

An effective computational mathematical interpretation of the problem of the nonequilibrium flow of a polyatomic gas in a kinetic thin viscous shock layer near a blunt body in the plane of its symmetry is proposed. The correlation of flows in the kinetic and Navier–Stokes thin viscous shock layer on the frontal spreading line is indicated, which makes it possible to construct the solution of the kinetic problem entirely on the basis of the Navier–Stokes equations. Using the proposed approach, a numerical study of heat transfer on the wall along the entire spreading line of a model of an aerospace aircraft of the type carrying body was carried out. The calculation results are compared with the experimental data in a wind tunnel.

Keywords: macrokinetic thin viscous shock layer, spreading plane, molecular gas, nonequilibrium, correlation, numerical calculation, comparison with experiment

REFERENCES

1. *Kuznetsov M.M., Nikolsky V.S.* Kinetic analysis of hypersonic viscous flows of a polyatomic gas in a thin three-dimensional shock layer // TsAGI Sci. J., 1985, vol. 16, no. 3, pp. 38–49. (in Russian)

2. *Cheng H.K., Wong E.Y., Dogra V.K.* A shock-layer theory based on thirteen-moment equations and DSMC calculations of rarefied hypersonic flows // AIAA Paper, 1991, 91-0783.
3. *Nikol'sky V.S.* Kinetic model of hypersonic rarefied gas flows // Matem. Mod., 1996, vol. 8, no. 12, pp. 29–46. (in Russian)
4. *Kuznetsov M.M., Lipatov I.I., Nikolskii V.S.* Rheology of rarefied gas flow in hypersonic shock and boundary layers // Fluid Dyn., 2007, no. 5, pp. 851–857.
5. *Cheng H.K.* The viscous shock layer problem revisited // Int. Conf. Res. in Hypersonic Flows and Hypersonic Technol. Sept. 19–21, 1994, Zhukovsky.
6. *Cheng H.K., Emanuel G.* Perspective on hypersonic nonequilibrium flow // AIAA J., 1995, vol. 33, no. 3, pp. 385–400.
7. *Brykina I.G.* Asymptotic solutions of the thin viscous shock layer equations near the symmetry plane of blunt bodies in hypersonic rarefied gas flow // Fluid Dyn., 2011, vol. 3, pp. 444–455.
8. *Brykina I.G., Rogov B.V., Tirskiy G.A., Utyuzhikov S.V.* The effect of surface curvature on the boundary conditions in the viscous shock layer model for hypersonic rarefied gas flow // JAMM, 2012, vol. 76, iss. 6, pp. 677–687.
9. *Brykina I.G., Rogov B.V., Tirskiy G.A., Titarev V.A., Utyuzhnikov S.V.* A comparative analysis of approaches for investigating hypersonic flow over blunt bodies in a transitional regime // JAMM, 2013, vol. 77, iss. 1, pp. 9–16.
10. *Brykina I.G.* Asymptotic investigation of heat transfer and skin friction in three-dimensional hypersonic rarefied gas flows // JAMM, 2016, vol. 80, iss. 3, pp. 244–256.
11. *Noori S., Ghasemloo S., Mani M.* Viscous shock layer around slender bodies with nonequilibrium air chemistry // Iranian J. Sci.&Technol. Trans. Mech. Engng. Shiraz Univ. 2017. vol. 41. pp. 251–264.
12. *Brykina I.G.* Approximate analytical solutions for heat fluxes in three-dimensional hypersonic flow over blunt bodies // Fluid Dyn., 2017, no. 4, pp. 572–586.
13. *Ankudinov A.L.* On one difference scheme for calculating a viscous shock layer // Proc. TsAGI, 1981, iss. 2017, pp. 154–160. (in Russian)
14. *Ankudinov A.L.* Thin viscous shock layer taking into account the effects of rarefaction of the gas // TsAGI Sci. J., 2007, vol. 38, no. 3–4, pp. 88–93. (in Russian)
15. *Brazhko V.N., Kovaleva N.A., Maykapar G.I.* On the method of measuring heat flux using thermal indicator coatings// TsAGI Sci. J., 1989, vol. 20, no. 1, pp. 1–12. (in Russian)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 5, с. 626–634

УДК 532.59:534.1

РАВНОМЕРНЫЕ И НЕРАВНОМЕРНЫЕ АСИМПТОТИКИ ДАЛЬНИХ ПОЛЕЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ОТ ВСПЫХНУВШЕГО ЛОКАЛИЗОВАННОГО ИСТОЧНИКА

В. В. Булатов[1,*], Ю. В. Владимиров[1,], И. Ю. Владимиров[2,***]**

[1]*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
[2]*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия*
**e-mail:internalwave@mail.ru*
***e-mail: vladimyura@yandex.ru*
****e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*

Поступила в редакцию 27.02.2021 г.
После доработки 05.06.2021 г.
Принята к публикации 10.06.2021 г.

В работе исследованы дальние поля поверхностных волновых возмущений от локализованного источника, вспыхнувшего в тяжелой жидкости конечной глубины. Построены интегральные представления решения, описывающие структуру волновых поверхностных возмущений. Изучены характеристики возбуждаемых волновых полей вдали от источника возмущений. Построены равномерные и неравномерные асимптотические решения, выражающиеся через функцию Эйри и ее производную, позволяющие описывать амплитудно-фазовую структуру дальних полей поверхностных возмущений как вблизи, так и вдали от волнового фронта.

Ключевые слова: поверхностные волны, равномерные асимптотики, волновой фронт, функция Эйри

DOI: 10.31857/S0032823521050039

1. Введение. Поверхностные волновые движения в морской среде могут возникать как вследствие естественных причин, так и порождаться искусственными источниками возмущений [1–4]. Современное состояние результатов исследований линейных и нелинейных поверхностных волновых возмущений содержится в [5–10]. Основные результаты решений задач о генерации поверхностных волновых возмущений представляются в самой общей интегральной форме, и в этом случае полученные интегральные решения требуют разработки асимптотических методов их анализа, допускающих качественный анализ и проведение экспресс-оценок получаемых решений [11–16]. В ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге волновых явлений можно получить на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования [1–4, 7, 8]. В этой связи необходимо отметить классические задачи гидродинамики о построении асимптотических решений, описывающих эволюцию поверхностных возмущений, возбуждаемых источниками различной природы в тяжелой однородной жидкости [1–4, 13, 15–17]. Модельные решения позволяют в дальнейшем получить представления поверхностных волновых полей с учетом изменчивости и нестационарности реальных природных сред. Ряд результатов асимптотического анализа линейных задач, описывающих различные режимы возбуждения и распространения поверхностных возмущений, лежит в основе активно развивающейся в настоящее время нелинейной теории генерации океанических волн экстремально большой амплитуды — волн-убийц [8–10]. Для мониторинга и предупреждения опасных природных волновых явлений в океане, в том числе обнаружения волн большой амплитуды, необходимо проводить оперативный анализ волновых явлений с помощью различных математических моделей. Одной из основных используемых моделей можно считать предположение о генерации волновых пакетов импульсным воздействием. Для проведения прогнозных расчетов необходимо подбирать параметры использованной модели так, чтобы приблизить смоделированную волновую систему к реально наблюдаемым, в том числе по фотоснимкам из космоса, волновым картинам [7, 8, 11, 12]. Таким образом, математические модели волновой генерации могут быть не только верифицированы, но и использованы для проведения прогнозных оценок.

Целью настоящей работы является построение равномерных и неравномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений, возбуждаемых вспыхнувшим источником возмущений в тяжелой однородной жидкости конечной глубины.

2. Постановка задачи и интегральные формы решений. Рассматриваются волновые возмущения на поверхности идеальной тяжелой жидкости конечной глубины H, распространяющиеся от точечного импульсного источника возмущений, вспыхнувшего в момент $t = 0$. Источник находится на глубине z_0 (т.е. в точке $(0,0,-z_0)$; $0 < z_0 < H$) и мгновенно выбрасывает объем жидкости Q. Следуя [1–5, 7, 8] потенциал $\Phi(x,y,z,t)$ ($\nabla\Phi = (u,v,w)$, u,v,w — компоненты возмущения вектора скорости поверхностных волн) в линейном приближении можно описать уравнением с соответствующим линеаризованным граничным условием на поверхности жидкости

$$\Delta\Phi(x,y,z,t) = Q\delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z+z_0)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad z = -H \quad \Phi \equiv 0, \quad t < 0,$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, g — ускорение свободного падения. Решение этой задачи получается путем применения преобразования Фурье по переменным x, y, t. Тогда возвышение свободной поверхности жидкости $\eta(x,y,t)$ можно представить в виде

$$\eta(x,y,t) = \frac{iQ}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i(\omega t + \nu y + \mu x))\frac{\omega\,\mathrm{ch}(k(H - z_0))}{\mathrm{ch}(kH)(\omega^2 - \Omega^2(k))}d\nu d\mu d\omega, \tag{2.1}$$

где $\Omega^2(k) = gk\,\mathrm{th}\,kH$ — дисперсионное соотношение для поверхностных волн в слое конечной толщины [1–5, 7].

3. Неравномерные асимптотики решений. Далее будут исследоваться асимптотики интеграла (2.1), позволяющие эффективно рассчитывать амплитудно-фазовые характеристики волновых полей вдали от источника возмущений. Внутренний интеграл в (2.1) по переменной ω вычисляется с помощью теоремы о вычетах. Контур интегрирования необходимо сместить в область $\mathrm{Im}\,\omega > 0$, тогда замыкая его в нижнюю полуплоскость, учитывая полюса при $\omega = \pm\Omega(k)$, можно получить

$$\eta(x,y,t) = \frac{Q}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i(\mu x + \nu y))\frac{\mathrm{ch}(k(H - z_0))}{\mathrm{ch}(kH)}\cos(\Omega(k)t)d\nu d\mu$$

Перейдем далее к полярным координатам: $\mu = k\cos\psi$, $\nu = k\sin\psi$, $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, проинтегрируем по переменной ψ, в результате имеем

$$\eta(r,t) = \frac{Q}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}(k(H-z_0))}{\mathrm{ch}(kH)} kJ_0(kr)\cos(\Omega(k)t)dk \tag{3.1}$$

Заменим функцию Бесселя $J_0(kr)$ на ее асимптотику при $kr \gg 1$: $J_0(kr) \approx \cos(kr - \pi/4)\sqrt{2/\pi kr}$ [18]. Получающийся в результате интеграл можно представить в виде

$$\eta(r,t) = I_+(r,t) + I_-(r,t)$$

$$I_\pm(r,t) = \frac{Q}{2}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\exp(it(kV \pm \Omega(k)) - i\pi/4)k^{-1/2}dk$$

$$F(k) = \frac{k\,\mathrm{ch}(k(H-z_0))}{2\sqrt{2r}\pi^{3/2}\,\mathrm{ch}(kH)},$$

где $V = r/t$, функция $\Omega(k)$ продолжается при $k < 0$ нечетным образом, и $\sqrt{k} = i\sqrt{|k|}$ при $k < 0$. Далее рассматривается асимптотика интегралов $I_\pm(r,t)$ при больших значениях r,t и фиксированных значениях V, то есть в точке движущейся в радиальном направлении со скоростью V. Поскольку $\Omega(k)$ – монотонно возрастающая функция k, то фазовая функция интеграла $I_+(r,t)$ не имеет стационарных точек на действительной оси k, потому этот интеграл экспоненциально мал при $t \to \infty$ (точнее, при $Vt/H \gg 1$). Фазовая функция интеграла $I_-(r,t)$ имеет две стационарных точки на действительной оси: $\pm k_0$, где k_0 – положительный корень уравнения: $q'(k) = 0$, $q(k) = kV - \Omega(k)$. Тогда главный член асимптотики возвышения $\eta(r,t)$ при $t \to \infty$, может быть вычислен по методу стационарной фазы

$$\eta(r,t) \approx Q\sqrt{\frac{2\pi}{tk_0 q''(k_0)}}F(k_0)\cos(tq(k_0)) \tag{3.2}$$

Асимптотика (3.2) становится непригодной при $V \to C$ ($C = \sqrt{gH}$ – максимальная групповая скорость поверхностных волн), то есть вблизи волнового фронта, где стационарные точки $\pm k_0$ сливаются друг с другом, а также с точкой ветвления $k = 0$. Для построения локальных асимптотик с помощью подходящей замены следует свести исходный интеграл к эталонному интегралу. Выбор эталонного интеграла определяется распределением стационарных точек фазовой функции и особых точек подынтегральной функции в зависимости от параметров задачи. Построение асимптотики сводится к выбору соответствующей специальной функции, ее нескольких первых производных и к определению зависимости аргументов этой специальной функции, а также амплитудных и фазовых множителей [19–22]. Вычислим далее локальную асимптотику интеграла $I_-(r,t)$ вблизи волнового фронта, то есть при $V \to C$, и, соответственно, при $r \approx Ct$. Очевидно, что основной вклад в локальную асимптотику дает окрестность значения $k = 0$, которая отвечает распространению длинных волн с максимальной групповой скоростью [1–4, 17]. При малых значениях k функции $F(k)$, $q(k)$ допускают следующие разложения: $F(k) = F'(0)k + \ldots$, $q(k) = q'(0)k + q'''(0)k^3/6 + \ldots$, где $F'(0) = (2\pi)^{-3/2}r^{-1/2}$, $q'(0) = V - C$, $q'''(0) = \sqrt{g}H^{5/2}$. Тогда, аппроксимируя фазовую функцию $q(k)$ кубичным полиномом, $F(k)$ – линейной функцией, можно получить

$$I_-(r,t) \approx \frac{Q}{2}\int_{-\infty}^{\infty} F'(0)\sqrt{k}\exp(it(q'(0)k + q'''(0)k^3/6) - i\pi/4)dk$$

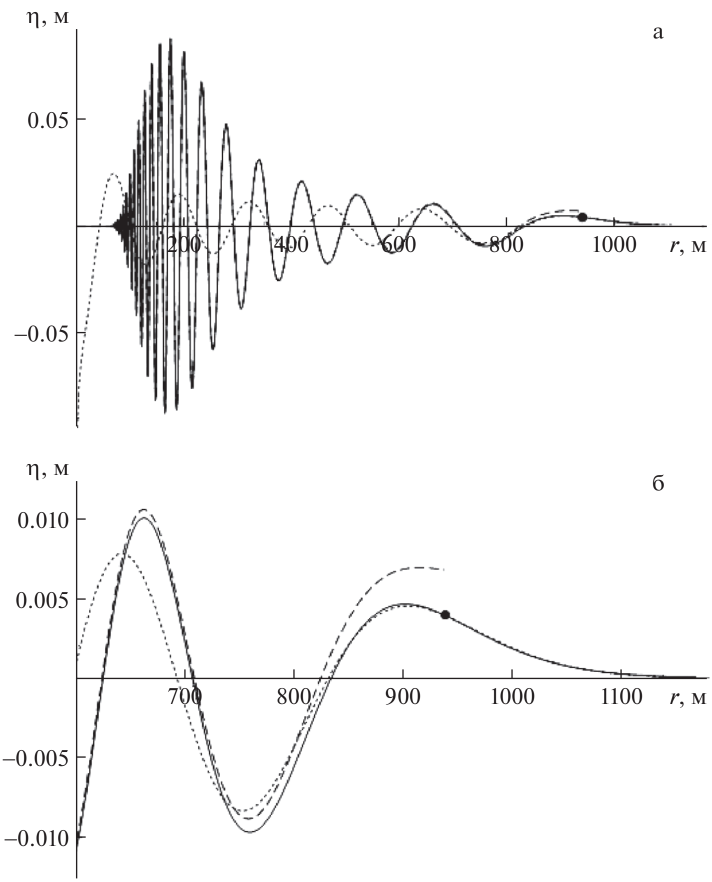


Рис. 1. Точное решение, приближение стационарной фазы и локальная асимптотика.

Локальная асимптотика возвышения $\eta(r,t)$ при $t \to \infty$ в окрестности волнового фронта $r \approx Ct$ выражается через функцию Эйри и ее производную [20–22]

$$\eta(r,t) \approx -Q(2\pi)^{3/2}F'(0)(q'''(0)t)^{-1/2}\,\mathrm{Ai}(\theta)\,\mathrm{Ai}'(\theta)$$
$$\theta = q'(0)t^{2/3}(2q'''(0))^{-1/3},\quad \mathrm{Ai}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i(\theta s + s^3/3))ds \tag{3.3}$$

На рис. 1 изображены результаты расчетов по точным формулам (3.1) (сплошная линия), в приближении стационарной фазы (3.2) (штриховая линия), и по формуле (3.3) – локальная асимптотика (пунктирная линия), точкой отмечено положение волнового фронта. Для наглядности приведены результаты расчетов для двух пространственных масштабов. Полученные результаты показывают, что вне окрестности волнового фронта метод стационарной фазы позволяет точно описать поведение волнового поля. В окрестности волнового фронта локальная асимптотика практически совпадает с точным решением. Параметры расчетов были следующие: $Q = 10^3$ м^3, $t = 60$ с, $H = 25$ м, $z_0 = 5$ м. Использованные в расчетах пространственно-временные параметры соответствуют возможным масштабам нелокальных источников возбуждения поверхностных волн в океане [5, 7, 8, 11, 12].

4. Равномерные асимптотики решений. Для построения равномерной асимптотики интеграла (3.1) выполним регулярную замену переменных $k = k(s)$, переводящую фазовую функцию $q(k)$ в новую функцию: $\tau(s) = q(k(s)) = -\sigma s + s^3/3$. При этом стационарные точки $\pm k_0$ будут отвечать точкам $s_\pm = \pm\sqrt{\sigma}$ соответственно. Из этого условия можно получить: $\sigma = (-3q(k_0)/2)^{2/3}$, в результате интеграл $I_-(r,t)$ можно представить в виде

$$I_-(r,t) = \frac{Q}{2}\int_{-\infty}^{\infty} G(s)s^{-1/2}\exp(it\tau(s) - i\pi/4)ds,$$

где $G(s) = F(k(s))\sqrt{s/k(s)}\dfrac{dk}{ds}$ – регулярная функция переменной s. Действительно, по построению функция $k = k(s)$ является нечетной регулярной функцией, принимающей положительные значения при $s > 0$. Поэтому $\dfrac{dk}{ds}$ – четная регулярная функция, $s/k(s)$ – четная регулярная функция, принимающая только положительные значения, $\sqrt{s/k(s)}$ – четная регулярная функция и, следовательно, $G(s)$ – регулярная функция, как произведение трех регулярных функций. Следуя общей схеме метода построения равномерных асимптотик (метода эталонных интегралов) функцию $G(s)$ представим в виде [20–22]: $G(s) = P(s) + R(s)$, $P(s) = as^2 + bs + c$, где $P(s)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $G(s)$, построенный по точкам $-\sqrt{\sigma}, 0, \sqrt{\sigma}$, $R(s) = s(s^2 - \sigma)R_1(s)$, где $R_1(s)$ – регулярная функция. В результате можно получить

$$I_-(r,t) = I_0(r,t) + I_1(r,t)$$

$$I_0(r,t) = \frac{Q}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(as^2 + bs + c)s^{-1/2}\exp(it(-\sigma s + s^3/3) - i\pi/4)ds$$

$$I_1(r,t) = \frac{Q}{2}\int_{-\infty}^{\infty} R(s)s^{-1/2}\exp(it\tau(s) - i\pi/4)ds$$

Интеграл $I_0(r,t)$ вычисляется аналитически [19, 20]

$$I_0(r,t) = \frac{Q}{2}\pi^{3/2}(-ic2^{5/3}t^{-1/6}\,\mathrm{Ai}^2(\xi) - 2bt^{-1/2}(\mathrm{Ai}^2(\xi))' + \mathrm{ai}\,2^{1/3}t^{-5/6}(\mathrm{Ai}^2(\xi))''),$$

где $\xi = -\sigma(t/2)^{2/3}$. Для интеграла $I_1(r,t)$ справедлива оценка: $I_1(r,t) = O(I_0(r,t)/t)$, так как этот интеграл интегрированием по частям можно привести к виду

$$I_1(r,t) = \frac{iQ}{2t}\int_{-\infty}^{\infty}(sR_1'(s) + R_1(s)/2)s^{-1/2}\exp(it(-\sigma s + s^3/3) - i\pi/4)ds =$$

$$= \frac{iQ}{2t}\int_{-\infty}^{\infty} G_1(s)s^{-1/2}\exp(it\tau(s) - i\pi/4)ds,$$

где $G_1(s)$ – регулярная функция. Таким образом $I_1(r,t)$ с точностью до множителя t^{-1} того же вида, что интеграл $I_0(r,t)$. Далее, в силу нечетности функции $F(k)$ можно получить: $a = c = 0$, $b = G(\sqrt{\sigma})/\sqrt{\sigma} = F(k_0)(2/k_0q''(k_0))^{1/2}$. Тогда главный член равномерной (по параметру V) асимптотики $\eta(r,t)$ при $t \to \infty$ имеет вид

$$\eta(r,t) \approx -2Q\pi^{3/2}\sqrt{\frac{2}{tk_0q''(k_0)}}F(k_0)\,\mathrm{Ai}(-\sigma(t/2)^{2/3})\,\mathrm{Ai}'(-\sigma(t/2)^{2/3}) \tag{4.1}$$

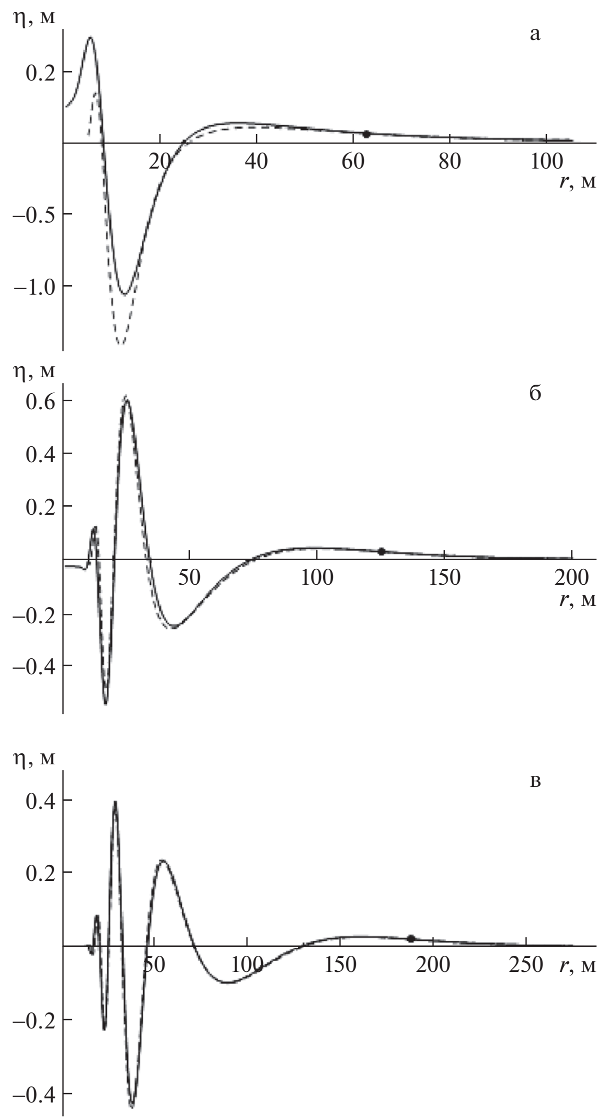


Рис. 2. Точное решение и равномерная асимптотика: а – $t = 4$ с, б – $t = 8$ с, в – $t = 12$ с.

На рис. 2 представлены результаты расчетов по точным формулам (3.1) (сплошная линия), по формуле (4.1) – равномерная асимптотика (штриховая линия) для различных моментов времени, точкой отмечено положение волнового фронта.

Заключение. В работе изучены дальние поля поверхностных возмущений от вспыхнувшего локализованного источника в тяжелой жидкости конечной глубины. Построены равномерные и неравномерные асимптотические решения, выражающиеся через функцию Эйри и ее производную, позволяющие описывать амплитудно-фазовую структуру дальних полей поверхностных возмущений как вблизи, так и вдали от волнового фронта. Изучены характеристики возбуждаемых поверхностных возмущений в зависимости от основных параметров волновой генерации. Полученные асимптотики дальних полей поверхностных волновых возмущений дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых полей, и, кроме того, качественно анализировать полученные решения, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики поверхностных возмущений реальных природных сред. Использованное модельное представление вспыхнувшего источника возмущений может адекватно описать различные физически обоснованные механизмы генерации волновых пакетов, в том числе волн больших амплитуд [7, 9–12]. Полученные асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров дают возможность в дальнейшем провести оценку основных характеристик начального возмущения.

Работа выполнена по темам государственного задания: В.В. Булатов, Ю.В. Владимиров (№ АААА-А20-120011690131-7), И.Ю. Владимиров (№ 0128-2021-0002), и частичной финансовой поддержке РФФИ проект № 20-01-00111А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wehausen J.V., Laitone E.V.* Surface waves // in: Handbuch der Physik, Springer, 1960. V. 9. P. 446–778.
2. *Черкесов Л.В.* Поверхностные и внутренние волны. Киев: Наукова думка, 1973. 247 с.
3. *Алешков Ю.З.* Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.
4. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
5. *Шамин Р.В.* Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008. 133 с.
6. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
7. *Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P.* Theory and Applications of Ocean Surface Waves. Advanced Series of Ocean Engineering. Vol. 42. London: World Sci. Publ., 2017. 1500 p.
8. *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.).* The Ocean in Motion. Springer Oceanography. Springer AG, 2018. 625 p.
9. *Kharif C., Pelinovsky E., Slynyaev A.* Rogue Waves in the Ocean. Berlin: Springer, 2009. 260 p.
10. *Шамин Р.В.* Математические вопросы волн-убийц. М.: ЛЕНАНД, 2016. 168 с.
11. *Беляев М.Ю., Десинов Л.В., Крикалев С.К., Кумакшев С.А., Секерж-Зенькович С.Я.* Идентификация системы океанских волн по фотоснимкам из космоса // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 1. С. 117–127.
12. *Беляев М.Ю., Виноградов П.В., Десинов Л.В., Кумакшев С.А., Секерж-Зенькович С.Я.* Идентификация по снимкам из космоса источника океанских кольцевых волн вблизи острова Дарвин // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 1. С. 70–83.
13. *Chen X.-B., Wu G.X.* On singular and highly oscillatory properties of the Green function for ship motions // J. Fluid Mech. 2001. V. 445. P. 77–91.
14. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A.* New method for numerical simulations of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Eur. J. Mech. B Fluids. 2002. V. 21. P. 283–291.
15. *Dobrokhotov S.Yu., Grushin V.V., Sergeev S.A., Tirozzi B.* Asymptotic theory of linear water waves in a domain with non-uniform bottom with rapidly oscillating sections // Rus. J. Math. Phys. 2016. V. 23. P. 455–475.
16. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Владимиров И.Ю.* Дальние поля поверхностных возмущений от пульсирующего источника в жидкости бесконечной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 5. С. 23–29.
17. *Свиркунов П.Н., Калашник М.В.* Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // УФН. 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.
18. *Watson G.N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions (Reprint of the 2nd ed.). Cambridge: Univ. Press, 1995. 804 p.

19. *Грикуров В.Э.* Явление перекрытия приакустических зон в приповерхностном волноводе и связанное с ним обобщение лучевого метода // Изв. вузов. Радиофизика, 1980. Т. 23. № 9. С. 1038–1045.
20. *Froman N., Froman P.* Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method. Cambridge. Univ. Press, 2002. 214 p.
21. *Kravtsov Yu., Orlov Yu.* Caustics, catastrophes and wave fields. Berlin: Springer. 1999. 228 p.
22. *Borovikov V.A.* Uniform Stationary Phase Method. IEE Electromagnetic Waves. Ser. 40. London: Inst. Electr. Engin., 1994. 233 p.

Uniform and Non-Uniform Asymptotics of Far Surface Fields from Flashed Localized Source

V.V. Bulatov[a,#], Yu.V. Vladimirov[a,##], and I.Yu. Vladimirov[b,###]

[a]*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*
[b]*Shirshov Institute of Oceanology RAS, Moscow, Russia*
[#]*e-mail:internalwave@mail.ru*
[##]*e-mail: vladimyura@yandex.ru*
[###]*e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*

The problem of surface wave far fields generation from a localized source that flashed in a heavy liquid of finite depth is investigated. Integral representations of the solution are constructed that describe the structure of wave surface disturbances. The characteristics of the excited wave fields far from the source of disturbances are studied. Uniform and non-uniform asymptotic solutions are constructed, expressed in terms of the Airy function and its derivative, which make it possible to describe the far fields of surface perturbations both near and far from the wave front.

Keywords: surface waves, uniform asymptotics, wave front, Airy function

REFERENCES

1. *Wehausen J.V., Laitone E.V.* Surface waves // in: Handbuch der Physik, Springer, 1960. Vol. 9, pp. 446–778.
2. *Cherchesov L.V.* Surface and Internal Waves. Kiev: Naukova Dumka, 1973. 247 p. (in Russian)
3. *Aleshkov Yu.Z.* Theory of Waves on the Surface of a Heavy Liquid. Leningrad: Univ. Press, 1981.
4. *Lighthill J.* Waves in Fluids. Cambridge: Univ. Press, 2001. 524 p.
5. *Shamin R.V.* Computational Experiments in Modeling of the Surface Waves in the Ocean. Moscow: Nauka, 2008. 133 p. (in Russian)
6. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Waves in Stratified Media. Moscow: Nauka, 2015. 735 p. (in Russian)
7. *Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P.* Theory and Applications of Ocean Surface Waves. Advanced Series of Ocean Engineering. Vol. 42. London: World Sci. Publ., 2017. 1500 p.
8. *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.).* The Ocean in Motion. Springer Oceanography. Springer AG, 2018. 625 p.
9. *Kharif C., Pelinovsky E., Slynyaev A.* Rogue Waves in the Ocean. Berlin: Springer, 2009. 260 p.
10. *Shamin R.V.* Mathematical Modelling of Rogue Waves. Moscow: Lenand, 2016. 168 p. (in Russian)
11. *Belyaev M.Y., Desinov L.V., Kumakshev S.A., Sekerzh-Zen'kovich S.H., Krikalev S.K.* Identification of a system of oceanic waves based on space imagery // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 2009, no. 1, pp. 110–120.
12. *Belyaev M.Y., Vinogradov P.V., Desinov L.V., Kumakshev S.A., Sekerzh-Zen'kovich S.H.* Identification of a source of oceanic ring waves near Darwin's island based on space photos // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 2011, no. 1, pp. 67–80.
13. *Chen X.-B., Wu G.X.* On singular and highly oscillatory properties of the Green function for ship motions // J. Fluid Mech., 2001, vol. 445, pp. 77–91.
14. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A.* New method for numerical simulations of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Eur. J. Mech.. B Fluids, 2002, vol. 21, pp. 283–291.

15. *Dobrokhotov S.Yu., Grushin V.V., Sergeev S.A., Tirozzi B.* Asymptotic theory of linear water waves in a domain with non-uniform bottom with rapidly oscillating sections // Rus. J. Math. Phys., 2016, vol. 23, pp. 455–475.
16. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V., Vladimirov I.Yu.* Far fields of the surface disturbances produced by a pulsating source in an infinite-depth fluid // Fluid Dyn., 2017, no. 5, pp. 617–622.
17. *Svirkunov P.N., Kalashnik M.V.* Phase patterns of dispersive waves from moving localized sources // Phys. Uspekhi, 2014, vol. 57, pp. 80–91.
18. *Watson G.N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions (Reprint of the 2nd ed.). Cambridge: Univ. Press, 1995. 804 p.
19. *Grikurov V.É.* Caustic overlap in a surface waveguide and a generalization of the ray method // Radiophys.&Quantum Electr., 1980, vol. 23, iss. 9, pp. 690–695.
20. *Froman N., Froman P.* Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method. Cambridge: Univ. Press, 2002. 214 p.
21. *Kravtsov Yu., Orlov Yu.* Caustics, catastrophes and wave fields. Berlin: Springer, 1999. 228 p.
22. *Borovikov V.A.* Uniform Stationary Phase Method. IEE Electromagnetic Waves. Ser. 40. London: Inst. Electr. Engin., 1994. 233 p.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 5, с. 635–663

УДК 531.68

АЭРОТЕРМОБАЛЛИСТИКА ДРОБЯЩИХСЯ МЕТЕОРОИДОВ В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

© 2021 г. Г. А. Тирский[1,*]

[1] *Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

**e-mail: tirskiy@imec.msu.ru*

Поступила в редакцию 20.01.2021 г.
После доработки 14.06.2021 г.
Принята к публикации 01.07.2021 г.

Проведено численное и аналитическое решение полных уравнений физической теории метеоров (ФТМ, уравнения торможения, уравнения энергии и угла наклона траектории) метероида как единого тела. Методом последовательных приближений получены выражения для безразмерных скорости и массы с учетом переменности угла наклона траектории метеороида. На их основе в аналитическом виде получено выражение для скоростного напора и погонной (на единицу пути) кинетической энергии, как для единого тела, так и дробящегося тела. Показано, что для единого тела формулы скорости и массы зависят от одного эффективного параметра.

Ключевые слова: аэротермобаллистика дробящихся тел с уносом массы, аналитическое решение дробящегося тела в изотермической и неизотермической атмосферах

DOI: 10.31857/S003282352105009X

Создана модель прогрессивного равновесного дробления (ПРД), с помощью которой исключается из уравнения торможения масса тела. В статье рассмотрена созданная с использованием гипотезы Вэйбулла [1] модель ПРД под действием аэродинамического сопротивления. Проведено усовершенствование этой модели с учетом задержки в образовании отдельных фрагментов в виду наличия конечной скорости их расхождения.

Приведена полная система уравнений ФТМ, содержащая действие силы тяжести, реактивную силу и влияние подъемной силы на угол отклонения траектории. Эта полная система уравнений решена численно и оказалось, что для типичных метеороидов больше 1 кг результаты не зависят от учета дополнительных членов, связанных с учетом силы тяжести, реактивной силы и влияния подъемной силы на угол наклона траектории.

Обнаруженный максимум погонной кинетической энергии на высоте примерно 10 км приводит к терминальному (тепловому) взрыву в воздухе крупных метеороидов [2].

1. Прочность разрушения метеороидов. Случаи дробления метеороидов при полете в атмосфере – достаточно давно установленный в метеорной физике факт [3–5]. Дробление многократно наблюдалось как визуально, так и фотографически, а также рядом других методов. Примерами тому являются Челябинский метеорит (2013) [6], Витимский болид (Восточная Сибирь, 2002) и многие десятки других. Пршибрам был первым метеоритом, падение которого было зафиксировано фотографическими способами на станциях наблюдения в Чехии [7]. Около 6-ти килограмм осколков было собрано на поле около 15×1 км^2. Три метеорита были почти полностью покрыты "корой плавления”. Фрагменты Пршибрама представляют собой обычные хондриты, его масса оценивалась примерно в 700–5000 кг. Метеорит Lost-City был сфотографирован в полете и сетью Prairie (США) в 1970 году [8]. Найдено четыре фрагмента массой 17 кг. Lost-City – обычный хондрит. Все найденные фрагменты метеорита были полностью покрыты корой плавления. Это говорит о том, что фрагментация в основном прекратилась до прекращения абляции. Начальная масса Lost-City составляла около 163 кг. В полете было обнаружено десять точек фрагментации. Вся масса выделялась в виде пыли. Метеорит Innisfree стал третьим падением, для которого точные орбитальные данные были записаны камерой Network [9]. Девять фрагментов метеорита составляли массу 4.58 кг. Метеорит Peekskill упал в 1992 году. Яркий огненный шар, продолжавшийся более сорока секунд, был записан пятнадцатью видеокамерами случайных свидетелей. Метеорит был полностью покрыт корой плавления [10]. Обширная фрагментация начиналась на высоте около 41.5 км. Было найдено около 70 фрагментов разного размера. Была зафиксирована вспышка на высоте 36.2 км. Скоростной напор оценивается как 0.7–1 МПа. Начальная масса Peekskill оценивалась в 10 т. Также известны метеорит Моравки [11], метеорит Нойшванштайн, метеорит Park Forest [12, 13], метеорит Bunburra Rockhole [14], метеорит Almahata Sitta [15], метеорит Есенице [16], метеорит Гримсби [17]. Данные о вышеперечисленных метеоритах можно найти в соответствующих ссылках [18]. Мелкие тела тормозятся и сгорают на больших высотах. Примерно половина больших тел (>1 м) разрушается (дробится) в полете, не долетая до земли. Разрушение сопровождается вспышками – резкими свечениями в полете по нескольку раз. После дробления на мелкие осколки 0.01–0.04 мм через одну секунду происходит их быстрое и яркое сгорание – вспышка [3]. Например, у Челябинского метеорита наблюдалось 3–4 вспышки [6]. Важно отметить, что дробление метеорных тел в полете проявляется в разных видах, в частности, в форме квазинепрерывного поверхностного дробления (пиролиза), (см. далее) когда под действием поверхностных касательных и нормальных аэродинамических сил, ослабления за счет возможного пиролиза и выдува летучих компонентов, дефектов, плавления, трещин, термонапряжений поверхность метеороида эродирует – происходит отделение и унос твердых частиц и отдельных фрагментов разных размеров и капель, которые догорают в ударном слое.

В другом крайнем случае тело может распадаться на несколько крупных отдельных фрагментов (так называемая gross-фрагментация) [19], которые продолжают свое движение независимо друг от друга или же происходит дезинтеграция всего объема тела, которое далее распадается на множество мелких фрагментов. Необходимо также подчеркнуть, что в той или иной форме “дроблению подвержены любые метеорные тела, крупные и мелкие, железные или каменные, а тем более тела “кометной природы” [20, 21].

До сих пор остается открытым вопрос о построении адекватной математической модели этого явления.

Особенно это касается так называемого “air blast” – взрывного воздушного разрушения крупных (Челябинского, Тунгусского) метеоритов. При этой модели разрушения в атмосфере на высоте 5–10 км достигается максимум потери кинетической энергии метеороида, которая уходит в кинетическую энергию атмосферы с образованием воздушной ударной волны и потоком за ней нагретого до очень высоких температур пара (до нескольких десятков тысяч градусов заполненного очень мелкими частицами). Так, образовавшаяся взрывоподобная ударная волна от Тунгусского метеорита повалила лес на площади порядка 2000 км^2. Это явление называется “air blast” и оно сопровождается образованием ярко светящихся шаров.

По-видимому, одной из первых работ, в которых упоминается дробление метеороидов в полете, является работа Яккиа [22], рассматривающая проблему лишь качественно. В ранних работах по разрушению метеороидов преимущественно изучались кривые блеска (свечения), т.е. вспышки метеоров [23, 24]. В работе [24] были качественно рассмотрены различные типы дробления и их влияние на фотометрические кривые. Дробление в виде облака мелких фрагментов (пыли) сопровождается далее (через одну–две секунды) после выдува с поверхности вспышкой, ярким свечением [3]. Если выделение мелких частиц не происходит с поверхности обтекаемого тела, то вспышка отсутствует. Вспышку часто называют взрывом [25]. Однако под взрывом, согласно Большой российской энциклопедии, понимается выделение энергии за очень короткий промежуток времени. При этом образуется ударная волна, которая не наблюдается при вспышке.

Оригинальная модель взрывного лавинообразного разрушения развивалась в работах Покровского (1996). Однако анализ прочности и действующих на тело аэродинамических нагрузок в первых работах не проводился. Обзор этих и других ранних работ, содержит лишь качественное рассмотрение моделей дробления [5] и [26].

Дальнейшее развитие моделей фрагментации (их математическое моделирование) можно условно разбить на два направления: ПРД на все более мелкие осколки и взрывоподобное разрушение с образованием связного конгломерата осколков с квазистатистическими свойствами (рой мелких осколков). В первой группе пионерской работой была работа Ю.И. Фадеенко (1967), идея которой была использована и далее развита в дальнейшем [27–30]. Модель последовательного разрушения осколков на две половины исследована в работе [31], аналогичная модель развита в [32]. Относительно недавно предложена модель сплющивающегося метеороида [33], когда рой осколков, объединенных одной головной ударной волной, сжимается в продольном направлении и расширяется в поперечном. Ряд работ по взаимодействию крупных метеороидов с атмосферой были посвящены Тунгусскому метеориту. Автор статьи не касается Тунгусского метеорита, так как эта тема требует специального рассмотрения [34]. Второй, так называемый, гидродинамический подход развивался также в работах Ю.И. Фадеенко (1967) и особенно С.С. Григоряна (1976, 1979), группы Коробейникова [35–38], Хиллса и Годы [39], Чайбы и коллег [40], группы Немчинова [26, 41], хотя конкретные математические модели, использовавшиеся этими авторами, были различны.

Сначала обсудим принципиальные аспекты аэродинамического нагружения и разрушения тела в атмосфере. Рассмотрим движение метеороида, считая его не подверженным аэродинамическому нагреванию, но испытывающим торможение и деформацию за счет перегрузки, т.е. за счет увеличивающегося “веса” в собственной системе координат. Деформация происходит за счет массовых сил инерции, которые уравновешиваются аэродинамическими поверхностными силами с наветренной (обращенной в обратную сторону движения) стороны и малыми поверхностными силами с подветренной (обращенной в сторону движения) стороны. В реальных условиях эта модель (в пренебрежении аэродинамическим нагреванием) хорошо описывает взаимодействие с атмосферой достаточно крупных тел ($R > 10$ см), что впервые было показано [42] с помощью количественных оценок, уравнений гидродинамики, которые несколько другим способом воспроизводятся ниже. Действительно, толщина прогрева поверхностного слоя, слабо зависящая от физико-химических процессов, протекающих на поверхности метеороида (диссоциация, ионизация, возбуждение, внутренних степеней свободы, а также плавление, испарение, горение), т.е. аэродинамическая тепловая эрозия (прогрев) оценивается по порядку величины выражением $\Delta(t) \sim \sim \sqrt{\lambda t} = 0.1\sqrt{t}$ см, $[t] = $ с, где $\lambda \approx 10^{-2}$ см^2/с – коэффициент теплопроводности. Время воздействия аэродинамического нагрева до достижения максимальных перегрузок, которая составляет величину по времени порядка $h/V_e \sin\theta \sim 1$ с (h – шкала высот по давлению, равная примерно 7 км, θ – угол наклона траектории к горизонту, V_e – скорость входа тела в атмосферу). За это время метеороид прогревается не более чем на

1–2 мм (для железных метеороидов.. $\Delta \sim 0.3\sqrt{t} < 3$–4 мм. Другими словами перепад температуры в 2200/3000 K (начало интенсивного испарения в приповерхностном слое метеороида ограничено весьма тонким слоем в несколько миллиметров). Следовательно, для достаточно больших метеороидов, рассматриваемых в данной работе, аэродинамический нагрев не может изменить исходных механических свойств основной массы тела. Термонапряжения, возникающие в приповерхностном слое, т.е. в области большого перепада температур, не могут существенно повлиять на напряженное состояние основной его массы. Поэтому рассмотрение модели холодного деформирующего тела и в итоге разрушающегося метеороида представляет практический интерес.

Как показывают наблюдения, механическое разрушение метеороидов размером более 10 см происходит на высотах ниже 50 км [43]. При этом воздействии атмосферы на метеороиды сводится в основном к нормальному давлению (касательные силы–силы трения на этих высотах пренебрежимо малы из-за достаточно малых чисел Рейнольдса). Давление на поверхности выпуклого тела, например, шара, будем определять по закону Ньютона.

$$P = \nu\rho v^2 \cos^2 \varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/2 \quad (\text{наветренная сторона сферы}), \tag{1.1}$$

$$P = 0, \quad \pi/2 \le \varphi \le \pi \quad (\text{подветренная сторона сферы}), \tag{1.2}$$

где φ – угол между нормалью к поверхности тела и направлением его движения, коэффициент $\nu = 0.90$–0.97 при числах Маха $M \ge 5$ [44].

За счет поверхностных (нормальных и касательных) аэродинамических сил тело тормозится, поэтому возникают непрерывно распределенные по объему массовые силы инерции (отличны от нуля все компоненты тензора напряжений). Максимальная величина этих сил зависит от квадрата скорости входа (скоростного напора), шкалы высот, угла входа. При метеорных скоростях они достигают нескольких тысяч земных ускорений g (возьмем для примера $V_e = 43$ км/с перегрузка в атмосфере Земли будет равна $5000g$). Формула для перегрузки приведена далее в тексте. Пример перегрузки при 43 км/с взят для того, чтобы представить ее возможное максимальное значение. Под действием скоростного напора метеороид сдавливается и начинает деформироваться. Деформация будет зависеть от времени (высоты). В работах [45, 46] было показано, что напряженное состояние можно считать квазистационарным для больших тел размером $D < 0.1H$ ($H \sim 7$–10 км), т.е. $D < 700$ м для атмосферы Земли. Для атмосферы Юпитера ($H = 25$–90 км) условие квазистационарного нагружения будет выполняться при $D < 2$–3 км. Следовательно, как для Тунгусского тела [38] ($D = 60$ м), так и для кометы Шумейкеров–Леви 9 [47] ($D = 1$ км), условие квазистационарного нагружения выполняется с большим запасом.

Нерегулярность формы реального метеороида, создающая локальную концентрацию повышенных напряжений и отрыв отдельных небольших частей (например, за счет напряжений при изгибе) не меняет общей качественной картины напряженного состояния основной массы метеороида, которое в силу линейности классических уравнений теории упругости будет пропорционально скоростному напору ρv^2. Концентрация максимальных напряжений в угловых точках проявляется в начале дробления метеороида, примерно до появления десяти осколков [37]. Задача о напряженном состоянии упругого тела (шара) хорошо известная по теории упругости. Для шара эта задача теории упругости решается аналитически в виде рядов по полиномам Лежандра, что позволяет детально определить деформацию и поле упругих напряжений в метеороиде в любой момент времени (на любой высоте), пропорционально скоростному напору ρv^2 [48]. Из точного решения этой задачи о напряженном состоянии для шара [49, 50] следует, что растягивающие напряжения σ_e максимальны на поверхности шара на его тыльной (подветренной) стороне в точке, противоположной передней лобовой (критической) точке. Интенсивная касательная (скалывающая) компонента напряжений σ_τ максимальна внутри шара на окружности при $\varphi = 60°$ на расстоянии 0.25–0.35 радиуса от центра в зависимости от коэффициента Пуассона материала метеороида. Зависимость $(\sigma_e)_{max}$ и $(\sigma_\tau)_{max}$ от этого коэффициента слабая, и с достаточной для оценок точностью можно положить $(\sigma_e)_{max} = 0.365\rho v^2$, $(\sigma_\tau)_{max} = 0.265\rho v^2$. Напряженное состояние метеороида будет зависеть от соотношения между его характерной прочностью на сжатие, которая достигается в лобовой точке, характерными прочностями на растяжение и на сдвиг, которые также могут быть достигнутыми с ростом скоростного напора, монотонно увеличивающегося на траектории входа до своего максимального значения и далее монотонно уменьшающегося. У большинства материалов при комнатной температуре предел прочности на сдвиг σ_τ^* ниже предела прочности на растяжение σ_p. Для хрупких материалов (или материалов при низкой температуре) это соотношение будет обратным, т.е. $\sigma_e^* < \sigma_\tau^*$. Поэтому условие начала разрушения можно написать в общем виде, не останавливаясь на каком-либо конкретном начале разрушения

$$\rho v^2 = \kappa\sigma^*, \tag{1.3}$$

где $\kappa = 3$–4, σ^* – некая условная прочность, фигурирующая в какой-либо теории разрушения. После достижения на траектории условия разрушения (1.3) начинается раскалывание метеороида на части – его фрагментация (дробление). Если условие (1.3) на траектории не достигается, например, для достаточно прочного метеороида, то последний проходит атмосферу и сталкивается с поверхностью планеты, образуя на суше кратер, а на воде – гравитационные волны (цунами для очень больших тел) [42, 51]. Хотя не все метеороиды дробятся, статистика показывает, что половина из них падает на землю раздробленными частями [3]. Более того, было обнаружено, что процентное содержание числа дробящихся в полете метеороидов резко увеличивается с увеличением их внеатмосферной массы [18]. Увеличение массы метеороида ведет к большому погружению в атмосфере и к увеличению максимального скоростного напора до достижения максимального значения, т.е. к большей вероятности его фрагментации по сравнению с метеороидом меньшей начальной массы.

Для трех болидов зарегистрированных астрономическими сетями, разрушение происходило в момент, когда скоростной напор составлял от 10 до 100 атмосфер. Оба эти предела больше, чем напряжения разрушения. Приведенные данные [28, 52] убедительно свидетельствуют, что прочность метеороидов в полете существенно меньше прочности метеоритов на земле. Данные по изменению скорости с высотой разрушения материала Пршибрам, Лост-Сити и Иннисфри [28, 52] показывают, что скоростной напор нигде не достигал пределов прочности их фрагментов. Более того, разница между скоростным напором, при котором начиналось дробление метеорита Пршибрам и прочностью на разрыв достигала не менее 200 атм, а разница с прочностью сжатия была не менее 1000 атм (естественно, последняя выше на разность этих величин). Аналогичная картина наблюдалась и для других каменных метеороидов.

Столь большую разницу между аэродинамическими нагрузками, приводящими к разрушению каменных метеороидов и прочностью их метеоритов, можно отнести только за счет их первоначальной (до разрушения) неоднородности. Прочность структурно неоднородных тел дает феноменологическая статистическая теория прочности, предложенная Вейбуллом еще в конце 30-х годов [1]. Согласно этой теории, вероятность разрушения при наличии этих дефектов увеличивается с увеличением объема нагруженного материала, т.е. прочность неоднородного тела уменьшается с увеличением его размера. Другими словами, при возрастании нагрузки тело разрушается по этим дефектам с образованием фрагментов большей прочности, чем исходное тело. Вероятностное рассмотрение этого эффекта проводит к степенной зависимости предела прочности осколков дробящегося тела (тела с дефектами) от их размеров (массы)

$$\sigma^* = \sigma_e \left(\frac{M_{e*}}{M_f} \right)^{\alpha}, \tag{1.4}$$

где σ_e, M_{e*} – предел прочности и масса метеороида к началу дробления (фрагментации) метеороида или испытываемого образца. Заметим, что $M_{e*} < M_e$, т.е. внеатмосферная масса M_e больше, чем масса этого тела к началу дробления за счет уноса массы на интервале от входа в атмосферу до начала дробления. При этом σ_e может зависеть от начального размера и формы космического тела, его космической предыстории и др., M_f – масса отдельного фрагмента. Показатель степени α, называемый масштабным фактором, характеризует степень неоднородности разрушающегося материала. Чем неоднороднее материал, тем больше значение α. При $\alpha > 0$ прочность увеличивается с уменьшением размера образца (для гранита при растяжении $\alpha = 1/6$, при сжатии – $\alpha = 1/12$; для бетона [53] $\alpha = 1/3$, для стали $\alpha \approx 1/25$). Указанные значения установлены в лабораторных условиях на больших образцах массой 100–1000 г. При величине M_{e*} до нескольких тонн и более зависимость (1.4), качественно оставаясь верной, может приводить к количественным ошибкам. По-видимому, было бы весьма целесообразно ввести зависимость α от размера тела, что уже отмечалось в литературе [54]. Однако, закон изменения α от массы пока не установлен. Отмеченная выше большая разница между пределами прочности метеороидов и величинами их указывает на большие значения масштабного фактора α. На последнем этапе фрагментации образуются части с прочностью много большей, чем прочность исходного тела. Поэтому дробление на этом этапе прекращается и далее на землю падает разрозненный рой (метеоритный дождь) уже не дробящихся осколков (если допустимо пренебречь последующим разрушением от термонапряжений достаточно мелких фрагментов). Из данных полученных для метеорита Lost-City [8] следует, что его распад произошел на высоте 32 км, где скоростной напор был порядка 20 атм, на более чем три части, которые были затем найдены на земле.

Параметры метеорита Лост-Сити были выбраны в качестве модельного примера в работе [29]. При этом полагалось $\alpha = 0$, что соответствует мгновенному раздроблению тела, независимо от его размера, а прочность тела считалась прямо пропорциональной числу образующихся фрагментов. Такая зависимость, для начального этапа разрушения тела [27] пригодна до тех пор, пока число фрагментов невелико (не более 10), т.е. на начальном этапе разрушения. Однако, решения, полученные в [29], применялись на всей траектории, вплоть до окончания дробления. Таким образом, предложенная модель оказалась пригодной для описания образования нескольких фрагментов метеорита Лост-Сити, но применимость ее для моделирования дробления Челябинского тела или Сихоте-Алинского метеорита, сопровождавшегося образованием многочисленных мелких осколков, остается под вопросом. В рамках формулы (1.4) при $\alpha = 0$ метеороид разрушается на фрагменты неопределяемых размеров и далее он движется, как можно схематизировать, в гидродинамическом режиме в виде роя, содержащего широкий и непрерывный спектр масс осколков, взаимодействующих с атмосферой как большая “капля несжимаемой жидкости”, движущаяся в атмосфере с большой скоростью. Эта модель впервые была предложена и качественно разработана для разрушения крупных тел при их входе в атмосферу в работах [49, 50].

Согласно идее Григоряна, после того, как давление на лобовой поверхности тела достигает разрушающих величин, по телу с большой скоростью (3–5 км/с) начинает перемещаться фронт разрушения, а раздробленная масса растекается в боковые стороны (тело расплющивается). Причем, уравнение растекания облака раздробленных осколков (расплющивания большой капли [55], см. далее) большой капли существенно зависит от положения внешней границы раздробленной массы относительно начального радиуса тела. Границей между двумя режимами является точка (высота), соответствующая движению начального размера тела в направлении, перпендикулярном направлению полета за счет сжатия облака раздробленного тела. К этому моменту весь метеороид раздроблен, а распределение давлений на поверхности дробленой массы на боковой части имеет минимум, так что растекание приводит к сжатию объема с дробленой массой в продольном направлении и к ее расширению в поперечном. В результате краевые части тела под действием скоростного напора встречного потока будут отгибаться назад, придавая всему жидкому объему форму медузы. Рассматривая движение подобного образования, Григорян оценил высоту, на которой скорость тела упадет до величин порядка скорости звука. Здесь баллистическая головная ударная волна перестает получать подпитку от тела и происходит его повышенное торможение и полный распад с передачей всей кинетической энергии окружающему газу. Данный процесс, полученный качественным анализом, представляет собой квазимгновенный взрыв. Здесь рассуждение Григоряна трудно воспринимаются с точки зрения газовой динамики.

Следует отметить, что гидродинамический режим после мгновенного дробления тела ($\alpha = 0$) рассмотрен ранее [50]. Вместо большой “капли” он рассматривал движение жидкого тела в виде кумулятивной струи до ее полного исчезновения.

Эти рассуждения о деформации большой капли (размером примерно 50–60 м для Тунгусского метеорита) идеальной несжимаемой жидкости противоречат реальной картине, ее деформации. Вследствие развития неустойчивостей Рэлея–Тейлора и Кельвина–Гельмгольца на границах (капли), а также уноса массы, раздробленное тело принимает различную форму, которую заранее невозможно точно определить. В некоторых случаях тело стремится принять коническую форму и легче выдерживает полет сквозь атмосферу, в других оно распадается и принимает форму тора. Эти результаты были получены прямым численным решением уравнений Эйлера при помощи свободного лагранжева-эйлерова метода (ALE method) со специальным способом маркировки границы тела [26]. При скорости входа 20 км/с 200-метровое ледяное тело теряет перед падением кинетическую энергию, но увеличивает свой радиус и уменьшает свою среднюю плотность. Несмотря на разрушение, единая головная баллистическая ударная волна охватывает тело.

Идея распространения фронта дробления по телу фигурирует также в работе [35]. Однако, в модели этих авторов дробление тела начинается изнутри под действием касательных напряжений и распространяется к периферийным участкам метеороида до полного дробления всего тела. Напряжения в твердом теле рассматривались в рамках решения уравнений теории термоупругости. Распределение температуры внутри тела и ее влияние на напряженное состояние тела, учитывавшиеся Коробейниковым и его коллегами, как было показано выше, незначительно для крупных тел, но может быть существенным для более мелких. Условием окончания дробления считался момент, когда объем разрушенной области тела достигал определенной, заранее выбранной доли общего объема. Далее в газодинамической постановке рядом авторов решалась задача о разлете осколков разрушенного тела, который рассматривался условно как взрыв по модели распада произвольного сферического взрыва. Модель газодинамического взрыва обычно не пригодна для модели метеорного взрыва под воздействием сжатых и горячих паров разрушенного метеороида.

2. Модель ПРД. При построении количественной теории дробления (фрагментации) метеороида будем предполагать, что метеороид с массой M непрерывно дробиться на N частей дробленой массы: $M_f = M/N$, прочность которых далее будет зависеть от их массы M_f по закону $\sigma^* = \sigma_e\left(M_e/M_f\right)^{\alpha}$. После начала разрушения скоростной напор в каждый момент будет определять число разных фрагментов, если подчинить его равновесному условию при соответствующих значениях масштабного фактора α

$$\rho V^2 = \sigma^*(N) \equiv k\sigma_e\left(\frac{M_{e*}}{M}N\right)^{\alpha} = k\sigma_e\left(\frac{M_{e*}}{M_f}\right)^{\alpha}, \tag{2.1}$$

где $\sigma^*(N)$ – предел прочности на разрушение тела, образовавшегося после распада метеороида на $N-1$ частей. При наложении этого условия, следуя пионерской работе [50], делается предположение о равновесном размножении осколков, состоящее в том, что размер осколка или в итоге их число N определяются условием равенства его прочности скоростному напору, и эти размеры частей непрерывно меняются вместе с возрастающим скоростным напором по закону (1.4) или (2.3).

Из (2.1) с учетом условия начала разрушения

$$\rho_* V_*^2 = k\sigma_e\left(\frac{M_{e*}}{M_*}\right)^{\alpha} \equiv \sigma^* \tag{2.2}$$

получаем формулу для числа осколков в зависимости от скоростного напора и текущей суммарной массы всех осколков M, которая определяется суммарным уносом массы со всех осколков.

Тем самым число осколков N на траектории дробящегося метеороида определится через V и M роя осколков, которые находятся из решения уравнений ФТМ

$$N = \frac{M}{M_*}\left(\frac{\rho V^2}{\rho_* V_*^2}\right)^{1/\alpha} \tag{2.3}$$

При $V_e = V_*$, $\rho V^2 = \rho_* V_*^2$, $N = 1$, где M_* и M_e – масса метеороида к моменту начала дробления и его внеатмосферная масса, ρ_*, V_* – плотность (высота) атмосферы и скорость метеорного тела в момент начала разрушения. Так как метеороид подвергается аэродинамической эрозии еще до начала появления дробления, то $M_* < M_e$.

В режиме дробящегося тела эффективная площадь миделя роя осколков S увеличивается и будет тем самым зависеть от числа фрагментов N. Примем далее для тела произвольной формы (феноменологическое соотношение для S) $S = f\left(M/\delta\right)^{2/3}$, ($f$ – форм-фактор, δ – плотность метеороида), если тело меняется подобно себе. Если тело массы M дробится каждый раз на $N = M/M_f$ частей, которые не перекрываются (успели разойтись), то из условия сохранения массы для эффективной площади миделя S такого роя осколков можно получить равенство

$$S = f\left(\frac{M}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}} N^{\frac{1}{3}} = S_*\left(\frac{M}{M_*}\right)^{\frac{2}{3}} N^{\frac{1}{3}}, \quad f = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_k, \quad S_* = f\left(\frac{M_*}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{2.4}$$

В этом выражении форм-фактор f предполагается средним между N форм-факторами f_i отдельных фрагментов, S_* – площадь миделева сечения к моменту начала дробления. Площадь миделя одного осколка равна

$$S_i = f_i\left(M_i/\delta\right)^{2/3}, \quad S = \sum S_i = f\left(M/\delta\right)^{2/3} N^{1/3}, \quad M = NM_f$$

При дроблении размер осколков R_i уменьшается. Действительно, если для единого тела и одного фрагмента обозначить радиусы соответственно $R = \sqrt{S/\pi} = \sqrt{f/\pi}\,(M/\delta)^{1/3}$ и

$$R_i = \sqrt{\frac{f_i}{f}}\sqrt{\frac{f}{\pi}}\left(\frac{M}{\delta}\right)^{1/3} N^{-1/3} = \sqrt{\frac{f_i}{f}} R N^{-1/3}, \tag{2.5}$$

при $f_i = f$, $R_i = RN^{-1/3}$, то радиус фрагмента R_i, отнесенный к радиусу исходного до дробления тела R уменьшается с увеличением числа раздробленных фрагментов пропорционально $N^{-1/3}$. Написанные выше формулы проистекают из предположения, что дробящееся тело изменяет свои размеры подобно исходной форме, $S = fM\delta^{-2/3}$.

Если осколки перекрываются (не успевают разойтись), то степень N в выше полученных выше формулах для S и R_i будет меньше 1/3. Поэтому замена 1/3 на меньший коэффициент в приведенном решении может в какой-то мере служить оценкой учета эффекта перекрытия (экранирования) осколков между собой в процессе дробления.

Понятно, что предположение дробления на равные осколки при заданном скоростном напоре на каждом этапе дробления на всем режиме разрушения метеороида, но с размерами частей, зависящими от скорости их роя, является дополнительным результатом, особенно для железных или не очень крупных метеороидов, которые разрушаются примерно при одинаковых значениях скоростного напора и дробятся примерно на равные части. Однако дробление на равные фрагменты следует здесь понимать в среднем статистическом смысле. С другой стороны, все части с одинаковой прочностью подвергаются одному и тому же давлению, поэтому они примерно разделяются на части одинакового размера на каждом этапе дробления. Размер частей уменьшается с ростом скорости метеороида. Так как все части на каждой стадии разрушения подвергаются одному и тому же скоростному напору, то их размер будет близок друг к другу. Для простоты получения дальнейших решений мы оставим степень 1/3 и не будем учитывать это обстоятельство (перекрытие площади осколков).

Движение такого тела рассматривалось в работе [44]. Точка на траектории с плотностью ρ_*, где начинается дробление, будет определяться из условия (2.2). Для изотермической атмосферы плотность газа и высота начала дробления с учетом (2.2) будут определяться, соответственно, из выражений [44]:

$$\rho = \frac{\sigma^*}{V_e^2}, \quad [\rho_*] = \text{кг/м}^3, \quad [V_e] = \text{км/с}, \quad [\sigma^*] = \text{атм}$$

$$z_* = h\ln\left(\rho_0/\rho_*\right) = h\ln\left(\rho_0 V_e^2/\sigma^*\right),$$

где $\rho_0 = 1.25\times10^{-3}$ г/м^3 – средняя плотность воздуха на уровне моря, $[z_*]$ = км, h – шкала высот атмосферы по плотности.

Далее с высоты z_* будет двигаться рой раздробленных осколков с прогрессивно увеличивающимся их числом по мере приближения их к поверхности планеты. Уравнение движения роя дробящихся и теряющих массу за счет аэродинамической эрозии осколков, в каждый момент будет совпадать с уравнением движения единого тела, но с переменной площадью миделя, определяемой выражением (2.4). Здесь под скоростью понимается средняя скорость осколков или скорость роя осколков. Эту модель будем называть моделью ПРД. При переменном значении параметра уноса массы $\sigma = C_H/(QC_D)$ (C_H – коэффициент теплопередачи, Q – эффективная теплота уноса массы, $C_D = 1$ – коэффициент сопротивления) она допускает только численное решение в случае изотермической атмосферы. Модель ПРД может быть усовершенствована, если учесть некоторое запаздывание в образовании отдельно летящих фрагментов после удовлетворения равновесного условия разрушения. Это запаздывание определяется временем расхождения фрагментов. Относительная скорость поперечного движения их центров масс может быть аппроксимирована выражением [44], которое запишем в виде, вытекающем из равенства скоростных напоров в лобовой и боковой точках жидкой капли $\delta(ds/dt)^2 = K^2\rho V^2$ (s — площадь миделевого сечения) в виде

$$\frac{ds}{dt} = K\sqrt{\frac{\rho}{\delta}}V, \quad K \in [0.17, 1.5] \tag{2.6}$$

Это выражение впервые было получено в работе [46] из рассмотрения фрагментации жидкой капли — раздробленного тела. Переходя в этом уравнении к дифференцированию по независимой переменной ρ, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$ds = \frac{Kh}{\sin\theta}\frac{d\rho}{\sqrt{\rho\delta}},$$

где θ — угол наклона траектории к горизонту.

Интегрируя это уравнение от значений, определяющих равновесной моделью разрушения до искомых поправочных, получим

$$s_N - s_{N_\rho} \equiv \Delta S_N \frac{2Kh}{\sin\theta}\frac{\rho_{N_\rho}}{\delta}\left(\sqrt{\frac{\rho}{\rho_{N_\rho}}} - 1\right) = \frac{2Kh}{\sin\theta}\sqrt{\frac{\rho_{N_\rho}}{\delta}}\left(\frac{\Delta z_N}{\exp(2h)} - 1\right), \tag{2.7}$$

где $z_{N\rho} - z_N \equiv \Delta z_N$ — интервал высот, через который после выполнения равновесного условия разрушения образуется N разошедшихся частей.

Известно, что фрагменты можно считать летящими независимо друг от друга, если расстояние между ними порядка их размеров. Если размер исходного тела обозначить через D, размер каждого из N фрагментов будет равен $D_N = D/N^{1/3}$.

Путь, проходимый центрами масс фрагментов от момента, когда их N штук до момента, когда их будет L штук

$$\Delta s_{NL} = (2L-1)D_L - (2N-1)D_N$$

В частности,

$$\Delta s_{N-1N} = (2N-1)D_N - (2N-3)D_{N-1}$$

Полагая, что количество фрагментов каждый раз увеличивается на единицу, т.е. в момент выполнения равновесного условия образование N фрагментов имеется $N - 1$ летящих независимо фрагментов, будет иметь $\Delta S_N = \Delta s_{N-1,N}$. Из (2.7) найдем поправку к значению высоты образования N фрагментов, даваемой моделью ПРД.

$$\Delta z_{N-1,N} = 2h\ln\left(\frac{\Delta z_{N-1,N}\sin\theta}{2Kh}\sqrt{\frac{\delta}{\rho N_p}} + 1\right),$$

где было учтено, что $\rho_{N-1} = \rho_{N_p}$, N_p — плотность (высота равновесных осколков).

Высота, на которой N фрагментов можно считать летящими независимо, определяется следующей величиной

$$z_N = z_{N_p} - 2h\ln\left(\sqrt{\frac{\delta}{\rho_{N_p}}}\frac{(2N-1)D_N - (2N-3)D_{N-1}}{2Kh}\sin\theta + 1\right) \tag{2.8}$$

Если на высоте z_N выполняется условие образования $N + 1$ фрагмента модели ПРД, то значение z_{N+1} следует отсчитывать от z_N. В противном случае надо определить высоту $\Delta z_{N+1,\rho}$. Иногда может реализоваться ситуация, когда скоростной напор возраста-

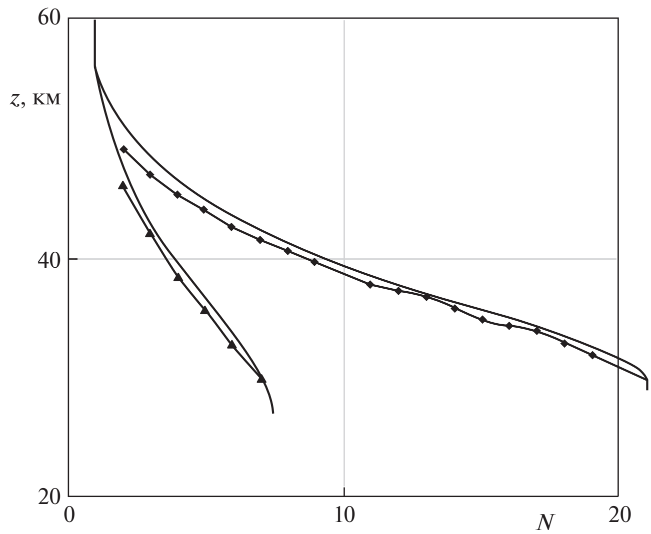


Рис. 1. Зависимость количества образующихся фрагментов от высоты с учетом поправок на их расхождение: ◆ – $\alpha = 0.95$; ▲ – $\alpha = 1.62$.

ет столь быстро, что для всех N условие образования следующего числа фрагментов выполняется раньше, чем они успевают разойтись. В этом случае поправочные высоты для любого N можно выразить через высоту первой фрагментации (когда $N = 2$), определяемую в равновесной модели. В этом случае путь, проходимый центром масс N-го фрагмента, выразится в виде $\Delta s_N = (2N - 1)D_N - D$.

А положение высоты N фрагментов определяется как

$$z_N = z_{2_\rho} - 2h\ln\left(\frac{[(2N-1)\,D_N - D]\sin\theta}{2Kh}\sqrt{\frac{\delta}{\rho_{2_p}}} + 1\right) \tag{2.9}$$

При выполнении условий применимости формулы (2.9) расчет можно вести и по формуле (2.8), хотя это менее удобно, т.к. она имеет “пошаговый” характер, в то время как формула (2.9) позволит определять z_N непрерывным образом для любого N.

Зависимость количества образующихся фрагментов от высоты с учетом поправок на их расхождение. Модель ПРД может быть усовершенствована, если учесть запаздывание образования фрагментов после равновесного образования фрагментов. На рис. 1 для входных параметров болида Бенешов приведен пример расчета (формула (2.8)) поправок к высоте образования фрагментов (кривые зависимостей количества образовавшихся фрагментов от высоты соответствуют разным значениям параметра α: ромбики – $\alpha = 0.95$, треугольники – $\alpha = 1.62$). При этом зависимости числа образующихся фрагментов от высоты получены с учетом поправок на их расхождение. Большие значения α взяты потому, что они соответствуют сравнительно малому числу образующихся осколков, при увеличении масштабного фактора α число осколков существенно уменьшается. Так, например, менее, чем двукратное уменьшение величины α влечет более, чем трехкратное увеличение числа образующихся фрагментов.

В заключение этого раздела приведем полную систему уравнений ФТМ включающую силу тяжести, реактивную силу (уравнение Мещерского) и подъемную силу (угол

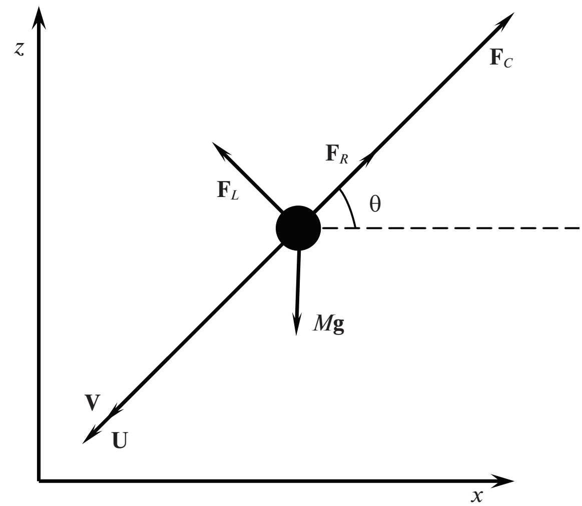


Рис. 2. Силовая схема движения метеороида. $\mathbf{F}_C$ – сила сопротивления, $\mathbf{F}_R$ – реактивная сила, $M\mathbf{g}$ – сила тяжести, направленная вертикально вниз, $\mathbf{F}_L$ – подъемная сила, действующая под прямым углом на траекторию метеороида, $\mathbf{V}$ – скорость метеороида.

атаки – наклон траектории метеороида – θ). Уравнение движения (уравнение Ньютона) связывает величину $d\ln V/d\bar{Z}$ с реактивной силой уноса массы.

$$\begin{gathered}\frac{d\ln V}{d\bar{Z}}=\frac{1}{2}\frac{\bar{\rho}}{\bar{M}^{1/3}\sin\theta}-\frac{gh}{V^2}+\frac{U-V}{V}\frac{d\ln M}{d\bar{Z}};\quad \bar{Z}=\frac{Z}{h},\quad \bar{\rho}=\frac{\rho}{\rho_m}\\ \frac{dM^{1/3}}{d\bar{Z}}=\frac{1}{6}\frac{\bar{\rho}}{\sin\theta}\sigma V^2;\quad \sigma V^2=\frac{1}{6}\frac{C_H}{QC_D}V^2=\frac{1}{6}\frac{C_H}{QC_D}\\ \frac{d\sin^2\theta}{dZ}=\left[2\left(\left(\frac{h}{R_\otimes+Z}-\frac{gh}{V^2}\right)+\frac{\bar{\rho}K}{\bar{M}^{1/3}\cos\theta}\right)\right]\cos^2\theta;\quad K=\frac{C_L}{C_D},\end{gathered}\tag{2.10}$$

где $\rho_m=\delta^{2/3}M_e^{1/3}/(fhC_D)=6\times10^{-3}$ г/см^3, K – коэффициент качества, $C_L=0.1$ – коэффициент подъемной силы, $C_D=1$ – коэффициент сопротивления, C_H – коэффициент теплопередачи, Q – эффективная теплота уноса массы, V и M – скорость и масса метеороида, $U=10$ м/с – скорость испарения (направлена по скорости V), S – миделево сечение, $h=7$ км, $f=1.21$, $R_\otimes=6377$ км. Третье уравнение описывает изменение угла наклона траектории θ с учетом влияния подъемной силы. На рис. 2 приведены силы, действующие на метеороид.

Система уравнений (2.10) – второй закон Ньютона, учитывающий силу тяжести и реактивную силу уноса массы (силу Мещерского), влияющую в том числе на угол траектории метеороида, отличается от классической системы уравнений ФТМ. Далее система уравнений (2.10) будет записана через независимую переменную ρ. Используя формулу преобразования $d/dz=d/d\rho-\rho/h$, получим систему уравнений с независимой переменной ρ без учета силы тяжести, реактивной силы и члена изменения угла наклона:

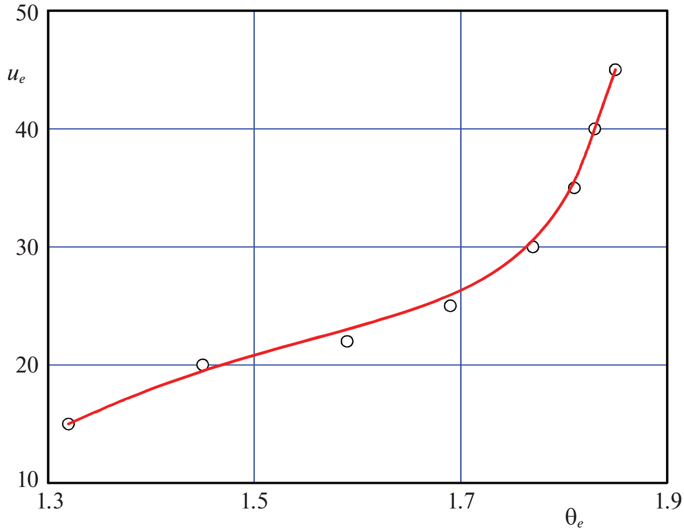


Рис. 3. Зависимость параметра задачи $u_e = \frac{1}{6}\sigma V_e^2$ в зависимости от угла θ_e входа метеороида в атмосферу.

$$\frac{d\ln\bar{V}}{d\bar{\rho}} = -\frac{1}{2\bar{M}^{1/3}\sin\theta} + \frac{gh}{V^2}$$
$$\frac{d\bar{M}^{1/3}}{d\bar{\rho}} = -u; \quad u = \frac{1}{6}\sigma V^2 \tag{2.11}$$

Будем решать систему (2.11) методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения для скорости возьмем $\bar{V}^{(0)} = 1$. Тогда уравнение для $\bar{M}$ будет, $d\bar{M}^{1/3}/d\bar{\rho} = -u_e$, решение которого даст первое приближение для $\bar{M}$: $\bar{M}^{1/3} = 1 - u_e\bar{\rho}$, где $\bar{\rho} = \rho/(\rho_m \sin\theta)$. На рис. 3 приведена зависимость параметра u_e от угла θ_e входа метеороида в атмосферу.

Первое приближение для скорости найдется из уравнения

$$\frac{d\ln\bar{V}}{d\bar{\rho}} = -\frac{1}{2(1-u_e\bar{\rho})\sin\theta},$$

решение которого будет $\bar{V}^{(1)} = (1-u_e\bar{\rho})^{1/(2u_e)}$.

Подставив это решение в уравнение для $\bar{M}$, получим

$$d\bar{M}^{1/3} = (1-u_e\bar{\rho})^{1/u_e}\, d(1-u_e\bar{\rho}),$$

решение которого даст выражение второго приближения для массы

$$a\bar{M}^{1/3} = \frac{1}{u_e} + (1-u_e\bar{\rho})^a,$$

где $a = 1/(u_e+1)$. В свою очередь, подстановка второго приближения для $\bar{M}$ в уравнение для скорости приводит к квадратуре, задающей решение в неявном виде.

Решение для V и M сравнивалось с численным решением полной системы (2.10) при переменном параметре уноса массы σ. Параметр u_e был подобран методом наи-

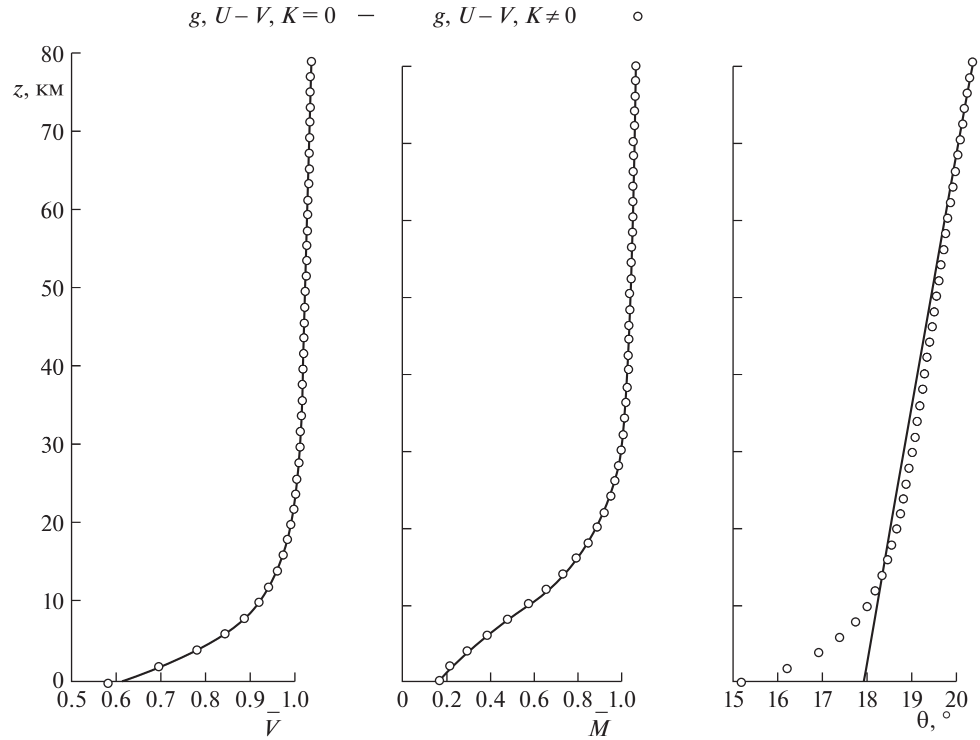


Рис. 4. Профили скорости, массы и угла наклона траектории. Сплошной линией обозначено аналитическое решение σ, кружочками – численное решение (при переменном σ).

меньших квадратов таким образом, чтобы полученное решение для скорости и массы совпадало с численным решением, полученным при переменном σ. На рис. 4 приведены профиль скорости и массы для тела, движущегося под углом 20° при $Q = 5$ км^2/с^2. Оказалось, что значение эффективного параметра u_e разное для скорости и массы. Для скорости u_e равняется 1.45, для массы u_e равняется 1.7. На рис. 5 приведено изменение скорости и массы с высотой.

Получены численные решения для скорости и массы и угла θ для двух случаев. Первый случай, когда сила тяжести, реактивная сила и влияние угла траектории к горизонту учитывается, а во втором случае эти величины не учитываются. Для метеороидов от 1 до 10^9 кг при скоростях до 30 км/с кривые для $\bar{V}$ и $\bar{M}$ совпадают. Это означает что для типичных метеороидов и скоростей отброшенные члены в уравнении: сила тяжести, реактивная сила и влияние на угол траектории подъемной силы практически не влияют, поэтому в такой постановке, как правило, решается большинство задач ФТМ. Используя полученное аналитическое решение, могут быть получены явные выражения для скоростного напора и кинетической энергии метеороида.

3. Баллистика дробящегося метеороида. Под действием сил инерции (или, другими словами, увеличение “веса” в собственной системе координат) космические тела, движущиеся в атмосфере планеты, испытывают дробление. В данной работе будем количественно рассматривать следующий сценарий этого процесса.

<ins>Первый этап.</ins> Вход в атмосферу тела с заданными коэффициентами сопротивления и теплопередачи как единого тела до момента начала разрушения.

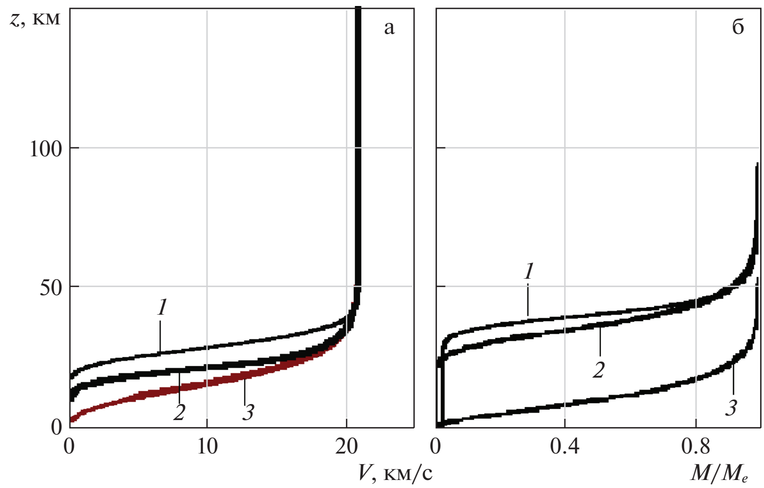


Рис. 5. Изменение скорости (а) и массы (б) с высотой: *1* — численное решение с учетом дробления; *2* — численное решение без дробления; *3* — классическое аналитическое решение при σ = const.

Второй этап. Дальнейшее торможение тела с потерей массы (абляцией), а также с учетом дробления на фрагменты (части) при выполнении равновесного условия разрушения.

Третий этап. Падение осколков на землю с учетом силы тяжести и уноса массы.

Критерием перехода от первого этапа ко второму будет служить условие начала разрушения. При решении системы уравнений (3.1) (см. ниже) ФТМ оно используется как начальное условие. Результатом решения являются значения всех параметров в момент начала разрушения. Эти величины, в свою очередь, служат начальными значениями при решении уравнений второго этапа, которое сводится к решению следующей системы уравнений баллистики дробящегося тела:

$$M\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2}C_D S\rho V^2$$

$$Q\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{2}C_H S\rho V^3 \qquad (3.1)$$

$$\frac{dz}{dt} = -V\sin\theta$$

$$S = f\left(\frac{M}{\delta}\right)^{2/3} N^{1/3}, \quad N = \frac{M}{M_*}\left(\frac{\rho V^2}{\rho_* V_*^2}\right)^{1/\alpha},$$

где выражение для плотности $\rho = \rho_0 \exp(-z/h)$ следует из решения уравнения для равновесной атмосферы $dP/dz = -\rho g$.

Система уравнений (3.1) отличается от системы уравнений для единого тела тем, что площадь миделя S здесь пропорциональна числу осколков в степени 1/3. Величины со звездочкой ρ_*, V_*, M_* относятся к высоте (плотности) начала дробления. Система (3.1) описывает движение дробящихся осколков и отличается от системы уравнений единого (не дробящегося) тела тем, что площадь миделевого сечения теперь зависит от числа осколков, которое в свою очередь связано со скоростным напором и общей массой роя осколков M (выражение для N). Рассмотрим сначала баллистику для случая изотермической атмосферы, когда шкала высот атмосферы по плотности h и шкала высот атмосферы по давлению H постоянны и равны между собой. Из наблюдений полетов достаточно крупных метеороидов (Пршибрам, 1959; Lost-City, 1970; Пикскилл, 1972; Иннисфри, 1977, рис. 1) и других метеороидов видно, что они начинают дробиться, не успев существенно затормозиться, т.е. $V_* \approx V_e$. Этот эффект неоднократно обсуждался в литературе (см., например, [4, 22, 29]). Причем в двух последних упомянутых работах не совсем корректно говорится, что дробление предшествует торможению и уносу массы. Дело в том, что и унос массы, и торможение происходят с самого начала входа метеороида в атмосферу, но к моменту начала разрушения их относительные величины оказываются незначительными по сравнению с самими массой M и скоростью V. По-видимому, процитированные работы следует понимать в том смысле, что торможением и уносом массы до начала фрагментации метеороида можно пренебречь ввиду их относительной малости. Строго в этом можно убедиться с помощью решения задачи баллистики для достаточно крупных метеороидов с учетом эффекта уноса массы.

Таким образом, при расчетах можно считать, что скорость метеороида до начала разрушения не меняется, т.е. к началу разрушения скорость метеороида равна скорости входа метеороида в атмосферу ($V_* \approx V_e$). Массу также для достаточно больших тел можно либо полагать постоянной, либо рассчитать по формуле для уноса массы единого тела.

Рассмотрим баллистику (уравнения) роя осколков в рамках модели ПРД. Первое уравнение (уравнение торможения) системы (3.1) при переходе к новой независимой переменной $\tilde{\rho} = \rho/\rho_*$ (высоте) принимает вид с учетом исключения массы из условия равновесного дробления:

$$\frac{d\tilde{V}}{d\tilde{\rho}} = -\frac{\overline{\rho}_*}{2}\tilde{V}\left(\tilde{\rho}\tilde{V}^2\right)^{1/3\alpha}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{V_*}, \quad \overline{\rho}_* = \frac{\rho_*}{\rho_{m*}} \tag{3.2}$$

Получим это уравнение из исходного уравнения торможения (3.1) с использованием граничного (начального) условия РПД:

$$\rho V^2 = K\sigma^*\left(\frac{M_*}{M_f}N\right)^{\alpha}, \quad N = \frac{M}{M_*}\left(\frac{\rho V^2}{\rho_* V_*^2}\right)^{1/\alpha}, \quad K\sigma^* = \rho_* V_*^2,$$

которое дает число осколков, выраженное через массу всех осколков M, и с использованием уравнения (3.2)

$$\frac{dV}{d\rho} = -\frac{C_D hSV}{2M\sin\theta} = -\frac{fC_D hV}{2\delta M_*^{1/3}\sin\theta}\left(\frac{\rho V^2}{\rho_* V_*^2}\right)^{1/3\alpha} = -\frac{1}{2\rho_{m*}}\left(\frac{\rho V^2}{\rho_* V_*^2}\right)^{1/3\alpha}$$

Откуда получаем искомое фундаментальное оригинальное уравнение торможения, справедливое после начала дробления (для дробящегося тела)

$$\frac{d\tilde{V}}{d\tilde{\rho}} = -\frac{1}{2}\overline{\rho}_*\tilde{V}\left(\frac{\rho V^2}{\rho_* V_*^2}\right)^{1/3\alpha}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_*}, \quad \overline{\rho}_* = \frac{\rho_*}{\rho_{m*}}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{V_*}, \tag{3.3}$$

где $\overline{\rho}_*$ – параметр взаимодействия, отнесенный к плотности

$$\rho_{m*} = \frac{\delta^{2/3}M_e^{1/3}}{fhC_D}\sin\theta = 6\times10^{-3}\sin\theta \text{ г/см}^3,$$

где значения для величин δ и M_e взяты для Челябинского метеорита.

Важно отметить, что в полученное уравнение торможения (3.3) или (3.2) дробящегося тела не вошла масса роя осколков благодаря использованию условия равновесного дробления, связывающего массу роя осколков M со скоростным напором. Ранее

[44] в режиме движения единого тела масса тела M исключалась из уравнения торможения с использованием уравнения энергии и тем самым получалось уравнение, содержащее переменный параметр уноса массы σ. В случае баллистики дробящегося тела параметр σ в уравнение торможения не входит, т.к. масса тела исключалась с помощью условия равновесного дробления, которое параметр σ не содержит.

Интегрируя уравнение (3.3) для изотермической атмосферы ($f = 1.21$, $h = 7$ км, $C_D = 1$), начиная от высоты начала дробления с плотностью воздуха $\rho_* = 2.01 \times 10^{-6}$ г/см^3 получим решение уравнения для скорости V в аналитическом виде, зависящем от масштабного фактора α:

$$V = V_*\left[1 + \frac{\bar{\rho}_*}{1+3\alpha}\left(\tilde{\rho}^{1+\frac{1}{3\alpha}} - 1\right)\right]^{-\frac{3\alpha}{2}}, \quad \tilde{\rho} = \rho/\rho_*, \quad \bar{\rho}_* = \rho_*/\rho_m \tag{3.4}$$

При $\alpha \to \infty$ это решение переходит в решение для единого абсолютно твердого тела (идеального не дробящегося метеороида):

$$V = V_e \exp\left(-\bar{\rho}/2\right)$$

$$\bar{\rho} = \rho/\rho_m, \quad \rho_e = \rho_*/\rho_m, \quad \bar{\rho} \approx \rho - \rho_*$$

Так и должно быть, т.к. при $\alpha \to \infty$ получаем тело с бесконечно большой прочностью, т.е. абсолютно прочное твердое тело.

Разрушение, начавшееся на высоте с плотностью ρ_*, будет продолжаться, если плотность ρ_* достигается до высоты появления соответствующего максимального скоростного напора единого тела, т.е. при выполнении условия $\bar{\rho}_* < \bar{\rho}_m$.

При выполнении этого условия лавинное разрушение осколков, движущихся со скоростью, меньшей скорости единого тела будет продолжаться до тех пор, пока скоростной напор не достигнет максимального значения. Этот максимум, вычисляемый с помощью (3.4), будет достигаться на высоте с относительной плотностью $\tilde{\rho}_\times$, равной

$$\tilde{\rho}_\times = \frac{\rho_\times}{\rho_*} = \frac{\tilde{\rho}_*}{\tilde{\rho}_*}\left[1 + n\left(1 - \bar{\rho}_*\right)\right]^{\frac{1}{n+1}}; \quad n = 1/\left(3\alpha\right) \tag{3.5}$$

и будет равен

$$\rho_\times V_\times^2 = \rho_* V_*^2 \rho_*^{\frac{1}{n+1}}\left[1 + n\left(1 - \bar{\rho}_*\right)\right]^{-\frac{1}{n(n+1)}} \tag{3.6}$$

Скорость на этой высоте будет равна

$$V_\times = V_*\left[1 + n(1 - \bar{\rho}_*)\right]^{-1/2n} \tag{3.7}$$

При $\alpha \to \infty$ ($n \to 0$) из (3.7) получаем $\tilde{\rho}_\times \to \rho_\times/\rho_*$ ($\rho_\times = \rho_m$), $\rho_\times V_\times^2 \to \rho_m V_m^2$, как и должно быть для единого тела.

Таким образом, лавинное (последовательное) разрушение метеороида будет происходить в интервале высот, соответствующем интервалу плотности $\rho_* < \rho < \rho_\times$.

Из уравнения (3.4), используя (3.1) для величины торможения ($-\dot{V}$), получаем

$$j \equiv -\dot{V} = \frac{\rho_* V_*^2}{2\beta_*}\left(\frac{\rho_* V^2}{\rho_* V_*^2}\right)^{1+n}; \quad \beta_* = \frac{m}{C_D} = \frac{M_*}{S_* C_D} \tag{3.8}$$

Отсюда видно, что максимальная перегрузка $\dot{V}$ будет достигаться при той же безразмерной плотности $\bar{\rho}_*$, что и максимальный скоростной напор. Подставляя (3.6) в (3.8), найдем

$$j_{\max} = \frac{\rho_* V_*^2}{2\beta_*} \frac{1}{\bar{\rho}_* \left[1 + n\left(1 - \bar{\rho}_*\right)\right]_{\max}^{1/n}} \qquad (3.9)$$

При $\alpha \to \infty$ ($n \to 0$) из (3.8) получаем максимальную перегрузку для единого тела. Из (3.9) также следует, что при $\bar{\rho}_* < 1$ (условие появления и продолжения дробления) для любого $\alpha = 1/(3n)$ перегрузки будут больше, чем для единого тела. Следовательно, рой осколков будет тормозиться сильнее, чем единое тело той же массы, влетающее в атмосферу с той же скоростью. Этот очевидный эффект более сильного торможения роя осколков по сравнению с торможением единого тела будет проявляться тем сильнее, чем меньше $\bar{\rho}_*$, т.е. чем выше начнет дробиться тело, тем меньше будет прочность на разрушение влетающего в атмосферу тела.

Из (3.1) находим максимальное число фрагментов в конце разрушения метеороида

$$N_\times = \frac{M_\times}{M_*}\left(\frac{\rho_\times V_\times^2}{\rho_* V_*^2}\right)^{1/\alpha} = \frac{M_\times}{M_*}\left\{\bar{\rho}_*^n \left[1 + n(1 - \bar{\rho}_*)\right]\right\}^{-3/(1+n)}$$

Здесь следует брать целую часть от $N_\times$, округляя его в сторону ближайшего целого числа.

Выше $M_\times$ – суммарная масса роя осколков на высоте прекращения дробления метеороида. Найдем $M_\times$. Если считать, что как единое тело до дробления, так и осколки имеют одинаковое значение параметра уноса массы σ, то интеграл массы (3.10) будет описывать потерю массы метеороида на всей траектории, включая и этап дробления, за исключением последней фазы полета, когда унос массы за счет аэродинамической эрозии прекращается. Это происходит, когда скорость метеороида падает примерно до величин порядка 2–4 км/с, что вытекает из уравнения для скорости и массы записанного для дробящегося тела (3.1). На основании первых двух уравнений системы (3.1) получаем интеграл массы

$$M_\times = M_{e\times} \exp\left[\frac{\sigma}{2}\left(V_\times^2 - V_{e\times}^2\right)\right] \quad \text{или} \quad M_\times = M_* \exp\left[\frac{\sigma}{2}\left(V_\times^2 - V_*^2\right)\right] \qquad (3.10)$$

Площадь эффективного миделя (для всего роя осколков) в конце дробления будет равна

$$S_\times = S_* \frac{M_\times}{M_*}\left(\frac{\rho_\times V_\times^2}{\rho_* V_*^2}\right)^{\frac{1}{3\alpha}} = S_*\left(\frac{M_\times}{M_*}\right)^{\frac{2}{3}} N_\times^{1/3} = S_* \frac{M_\times}{M_*}\left\{\bar{\rho}_*^n \left[1 + n\left(1 - \bar{\rho}_*\right)\right]\right\}^{-\frac{1}{1+n}} \qquad (3.11)$$

Средний минимальный размер фрагмента "метеоритного дождя" и их масса в рамках рассматриваемой модели дробления будут равны.

$$R_\times = \sqrt{\frac{S_\times}{\pi}} = \sqrt{\frac{S_* M_\times}{\pi M_*}}\left\{\bar{\rho}_*^n \left[1 + n\left(1 - \bar{\rho}_*\right)\right]\right\}^{-\frac{1}{2(1+n)}}$$

$$M_{\min} = \frac{M_\times}{N_\times} = M_*\left\{\bar{\rho}_*^n \left[1 + n\left(1 - \bar{\rho}_*\right)\right]\right\}^{\frac{3}{(1+n)}},$$

где S_x – эффективная площадь роя осколков на высоте окончания дробления.

Оценим количественно полученные параметры "метеоритного дождя". Примем $C_D = 1.6$, $C_H = 0.01$, $Q = 5 \times 10^{10}$ эрг/г, $V_e = 20$ км/с (метеороид Пршибрам). Тогда $\sigma V_e^2 = C_H V_e^2/(QC_D) = 0.5$. Для $M_\times/M_e$ из (3.10) получаем $M_\times/M_e = \exp\left\{-0.25\left[1 - (V_\times/V_e)^2\right]\right\}$. На фотографиях полета метеороида Пршибрам видно, что окончание дробления наступило при $V_\times \approx 10$ км/с [1]. Тогда $M_\times = 0.83M_e$, т.е. суммарная масса метероида к моменту окончания его дробления уменьшилась всего на 17%. На самом деле величина параметра уноса массы σ может быть существенно больше, $\sigma \approx 0.02–0.03$ с^2/км^2, так как σ напрямую зависит от коэффициента радиационной теплопередачи, который сильно меняется со скоростью метероида [44]. Тогда уменьшение массы к моменту окончания дробления оценивается десятками процентов.

Итак, внеатмосферная масса крупного метероида к моменту окончания дробления может уменьшаться существенно больше, чем наполовину. Таким образом, возможность пренебрежения уносом массы рассмотренной модели динамики роя осколков является оправданной только для достаточно малых коэффициентов теплопередачи C_H и больших значений эффективной теплоты уноса массы Q.

Если далее принять $h = 7$ км, $C_D = 1.6$, $D = 10$ м, $\sin\theta = \sin 45° = 0.71$, $\delta = 3.5$ г/см^3, то параметр взаимодействия к моменту начала дробления будет равен

$$\bar{\rho}_* = \frac{hC_D\rho_*}{\delta D\sin\theta} = 310\rho_* \quad ([r_*] = \text{г/см}^3)$$

Если тело начинает дробиться, скажем, на высоте $z = 50$ км ($\rho_* = 0.98 \times 10^{-6}$ г/см^3), то $\bar{\rho}_* = 3.04\times 10^{-4}$. Значение этого параметра является определяющим при нахождении числа осколков, их размеров и массы. В силу малости $\bar{\rho}_*$ из (3.9) получаем для максимального числа осколков очень простую приближенную формулу

$$N_\times = \frac{M_\times}{M_*}\bar{\rho}_*^{-\frac{3n}{1+n}} = \frac{M_\times}{M_*}\left[\frac{(3\alpha)^{3\alpha}}{\bar{\rho}_*}\right]^{\frac{3}{1+3\alpha}},$$

из которой следует, что при $\alpha = 1/3$ и $\alpha = 1/6$ число осколков в конце дробления, соответственно, будет равно

$$N_\times = \frac{M_\times}{M_*}\rho_*^{3/2} = 1.5\times 10^5 \quad \text{и} \quad N_\times = \frac{M_\times}{M_*}\rho_*^{-2} = 4.4\times 10^6$$

Таким образом, при увеличении масштабного фактора α в два раза число осколков уменьшается при фиксированном значении параметра взаимодействия $\bar{\rho}_*$ более чем в 25 раз. Чем больше значение α, тем материал метероида неоднороднее, следовательно, он дробится на меньшее число частей. С другой стороны, уменьшение α соответствует переходу к более однородному материалу и его дроблению на большее число осколков. В пределе при $\alpha \to 0$ развиваемая в этой работе модель прогрессивного дробления переходит в модель мгновенного разрушения тела до весьма малых (мелких) осколков, и динамику такого разрушенного тела дальше можно описывать по модели работы [49], т.е. как единого тела несжимаемой жидкости, подверженного неустойчивостям Рэлея–Тейлора и Кельвина–Гельмгольца.

Начиная с высоты с плотностью $\rho_\times$, скоростной напор будет монотонно убывать, и рой осколков без увеличения их числа, но с уносом массы (согласно рассматриваемой модели) будет продолжать двигаться к поверхности планеты, если, конечно, он не достиг ее раньше, чем плотность окружающей атмосферы стала равной $\rho_\times$.

Интеграл массы (3.10) для текущей массы M можно записать в виде

$$\ln\bar{M} = -\frac{\sigma V_e^2}{2}\left(1-\bar{V}^2\right) \quad \text{или} \quad \bar{M} = \exp\left[-\frac{\sigma V_e^2}{2}\left(1-\bar{V}^2\right)\right]$$

Отсюда следует, что при больших скоростях (V_e = 30–35 км/с) масса тела становится весьма малой, близкой к нулю. Отсюда видно, что параметр напрямую определяет уменьшение массы тела.

То есть масса существенно уменьшается. Уменьшение будет тем больше, чем больше начальная скорость тела и коэффициент теплопередачи C_H.

Из решения и других параметров дробящегося тела, рассмотренных в этом разделе следует, что модель ПРД является весьма содержательной, охватывающей дробящиеся и не дробящиеся тела.

4. Баллистика дробящегося метеороида в неизотермической атмосфере. Рассмотрим далее более реальный процесс – баллистику дробящегося метеороида с учетом уноса массы в неизотермической (произвольной) атмосфере (с переменной температурой по высоте).

Уравнение движения с учетом неизотермичности атмосферы и переменности коэффициента сопротивления C_D в случае его переменности и шкалы высот по плотности h запишется в виде:

$$\tilde{V}^{-\left(1+\frac{2}{3\alpha}\right)}\frac{d\tilde{V}}{dt} = -\frac{\overline{\rho}_*}{2}\tilde{h}\tilde{C}_D\tilde{\rho}^{\frac{1}{3\alpha}}\frac{d\tilde{\rho}}{dt}, \tag{4.1}$$

где волной обозначены величины, отнесенные к своим значениям в момент (на высоте) начала разрушения метеороида. Интегрируя уравнение (4.1) от высоты начала дробления $\tilde{\rho} = \tilde{V} = 1$, получим

$$\tilde{V} = \left(1 + \frac{\overline{\rho}_*}{3\alpha}I\right)^{-\frac{3\alpha}{2}} \tag{4.2}$$

$$\mathrm{I}(\tilde{\rho}) = \int \tilde{h}\tilde{C}_D\tilde{\rho}^{\frac{1}{3\alpha}}d\tilde{\rho} \approx \frac{3\alpha}{1+3\alpha}\left(\tilde{\rho}^{\frac{1}{3\alpha}+1} - 1\right) \tag{4.3}$$

Здесь выражение для I, полученное при постоянных h и C_D ($\overline{h}$ = 7 км, $\overline{C}_D = 1$), может быть полезно для получения оценок.

Число фрагментов N в переменных $\tilde{\rho}$, $\tilde{V}$ будет находиться из выражения

$$N = \frac{M}{M_*}\left(\tilde{\rho}\tilde{V}^2\right)^{1/\alpha}, \quad \frac{M}{M_*} = \exp\left[\frac{\sigma V_*^2}{2}\left(\tilde{V}^2 - 1\right)\right] \tag{4.4}$$

Лавинообразно разрушенный метеороид, который представляет собой уже рой осколков, движущийся со скоростью (4.2), будет продолжать разрушаться до тех пор, пока число осколков, вычисленное по формуле (4.4), не достигнет максимального значения. Вычислим сначала $N_\times = N_{\max}$, считая M слабо меняющейся функцией. Тогда из условия $\dfrac{d(\rho V^2)}{d\rho} = V_*^2\dfrac{d\left(\tilde{\rho}\tilde{V}^2\right)}{d\tilde{\rho}} = 0$ найдем безразмерную плотность атмосферы $\tilde{\rho}_\times = \rho_\times/\rho_*$, при которой достигается максимум скоростного напора ρV^2. Это значение для неизотермической атмосферы при переменном коэффициенте сопротивления и переменной шкале атмосферы по плотности h будет определяться неявно

$$\overline{\rho}_*\left[\tilde{h}(\tilde{\rho}_\times)\tilde{C}_D(\tilde{\rho}_\times)\tilde{\rho}_\times^{1+\frac{1}{3\alpha}} - \frac{1}{3\alpha}\mathrm{I}(\tilde{\rho}_\times)\right] = 1 \tag{4.5}$$

Если воспользоваться приближенным выражением (4.3) для $\mathrm{I}(\tilde{\rho}_\times)$, то получим $\tilde{\rho}_\times$ в явном виде, совпадающим с выражением (3.5).

Максимальный скоростной напор будет равен

$$\left(\tilde{\rho}\tilde{V}^2\right)_{\max} = \left(\frac{\rho_\times V_\times^2}{\rho_* V_*^2}\right) = \left[\tilde{h}(\tilde{\rho}_\times)\tilde{C}_D(\tilde{\rho}_\times)\tilde{\rho}_\times\bar{\rho}_*\right]^{-3\alpha} \approx$$

$$\approx \bar{\rho}_*^{-\frac{3\alpha}{1+3\alpha}}\left[1+\frac{1}{3\alpha}(1-\bar{\rho}_*)\right]^{-\frac{9\alpha^2}{1+3\alpha}} \approx \bar{\rho}_*^{-\frac{3\alpha}{1+3\alpha}}\left(\frac{3\alpha}{1+3\alpha}\right)^{\frac{9\alpha^2}{1+3\alpha}} \tag{4.6}$$

Второе выражение в (4.6) получено при постоянных h и C_D, третье выражение – при дополнительном предположении $\bar{\rho}_* \ll 1$.

Максимальное число осколков согласно формуле (4.4) при упрощающем предположении $M \approx \mathrm{const}$ в процессе прогрессивного дробления будет равно

$$N_{\max} = N_\times = \frac{M_\times}{M_*}\left[\tilde{h}(\tilde{\rho}_\times)\tilde{C}_D(\tilde{\rho}_\times)\tilde{\rho}_\times\bar{\rho}_*\right]^{-1} \approx$$

$$\approx \frac{M_\times}{M_*}\bar{\rho}_*^{-\frac{3}{1+3\alpha}}\left[1+\frac{1}{3\alpha}(1-\bar{\rho}_*)\right]^{-\frac{9\alpha}{1+3\alpha}} \approx \frac{M_\times}{M_*}\bar{\rho}_*^{-\frac{3}{1+3\alpha}}\left(\frac{3\alpha}{1+3\alpha}\right)^{\frac{9\alpha}{1+3\alpha}} \tag{4.7}$$

Размер и масса отдельных фрагментов при этом будут равны

$$R_{\min} = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{M_\times}{\pi m_*}\left(\tilde{\rho}_\times\tilde{V}_\times^2\right)^{1/3\alpha}} = \sqrt{\frac{M_\times}{\pi m_*}}\left[\tilde{h}(\tilde{\rho}_\times)\tilde{C}_D(\tilde{\rho}_\times)\tilde{\rho}_\times\bar{\rho}_*\right]^{-1/2} \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{M_\times}{\pi m_*}}\bar{\rho}_*^{-\frac{1}{2(1+3\alpha)}}\left[1+\frac{1}{3\alpha}(1-\bar{\rho}_*)\right]^{-\frac{3\alpha}{2(1+3\alpha)}} \approx \sqrt{\frac{M_\times}{\pi m_*}}\bar{\rho}_*^{-\frac{1}{2(1+3\alpha)}}\left(\frac{3\alpha}{1+3\alpha}\right)^{\frac{3\alpha}{2(1+3\alpha)}} \tag{4.8}$$

$$M_{\min} = \frac{M_\times}{N_\times} = M_*\left[\tilde{h}(\tilde{\rho}_\times)\tilde{C}_D(\tilde{\rho}_\times)\tilde{\rho}_\times\bar{\rho}_*\right]^3 \approx$$

$$\approx M_*\bar{\rho}_*^{\frac{3}{1+3\alpha}}\left[1+\frac{1}{3\alpha}(1-\bar{\rho}_*)\right]^{\frac{9\alpha}{1+3\alpha}} \approx M_*\bar{\rho}_*^{\frac{3}{1+3\alpha}}\left(\frac{1+3\alpha}{3\alpha}\right)^{\frac{9\alpha}{1+3\alpha}} \tag{4.9}$$

Таким образом, отличие результатов настоящего раздела от соответствующих результатов, полученных в предыдущем разделе для изотермической атмосферы при $C_D = \mathrm{const}$ и $h = \mathrm{const}$, состоит в появлении функции $\tilde{h}(\tilde{\rho})\tilde{C}_D(\tilde{\rho})$ и интеграла (4.3), зависящего от этой функции, которая должна быть затабулирована для получения оценки влияния неизотермичности атмосферы и переменности коэффициентов C_D и h на характерные параметры баллистики прогрессивно дробящегося метеороида. Однако в силу экспоненциального нарастания скоростного напора с уменьшением высоты полета дробящегося метеороида главный вклад в характерные значения параметров баллистики роя осколков будет давать значение определяющего параметра $\bar{\rho}_*$, равное отношению заметенной поперечным сечением метеороида массы газа к моменту начала дробления, умноженной на коэффициент сопротивления, к массе метеороида в момент начала дробления. Этот параметр может меняться на порядки в зависимости от размера, скорости и прочности метеороида и, как правило, $\bar{\rho}_* \ll 1$.

Еще раз отметим, что при предположении постоянства на траектории метеороида параметра уноса массы σ и параметра изменения формы $f = 1.21$, входящего в феноменологическое определение S^* по формуле(2.4), выражение для массы (3.10) остается справедливым при любом механизме дробления метеороида и зависит только от интенсивности аэродинамической эрозии. При $\sigma = \text{const}$ это означает, что как единое тело до начала дробления, так и совокупность его фрагментов в процессе дробления теряют массу одинаковым образом. Предположение $\sigma = \text{const}$ является основным в ФТМ [3], хотя на самом деле параметр σ меняется примерно в диапазоне $0.02 < \sigma < 0.03$ с^2/км^2 для известных автору метеороидов [3, 47]. Переменность параметра σ приводит к необходимости численного решения задачи с учетом переменности C_H, Q и C_D на траектории входа метеороида в атмосферу. Однако в разд. 2 был введен эффективный параметр u_e, который учитывает переменность параметра σ и дает возможность при этом получать аналитические решения близкие к численным.

В данной работе получено численное решение задачи в рамках модели ПРД с учетом переменности коэффициентов. В равновесной модели предполагается, что число осколков увеличивается непрерывно и коэффициенты, фигурирующие в уравнениях, меняются мгновенно с изменением размеров осколков. Исходная прочность тела и масштабный фактор α были заданы таким образом, чтобы высота начала и окончания дробления совпадала с наблюдениями [56].

Для сравнения интенсивности уноса массы в модели дробящегося и единого тела построена кривая изменения массы единого метеороида так же при переменных коэффициентах. Как видно, наличие фрагментации ведет к более быстрой потере массы при прочих равных условиях.

5. Заключительная (третья) стадия движения раздробленного метеороида. Процесс дробления метеороида происходит, как правило, в довольно небольшом диапазоне высот, так что после его окончания рой осколков движется с космической скоростью в нескольких километров от поверхности планеты. Поскольку в развиваемой модели разрушения считается, что если образуются близкие по массе фрагменты для каждой скорости, то достаточно следить за движением одного. Оно описывается той же системой уравнений, что и движение единого тела (3.1), (3.2). На последнем этапе дробления происходит интенсивное торможение, и возникает необходимость учета силы тяжести. Уравнение торможения в этом случае принимает вид

$$M\dot{V} = -\frac{1}{2}SC_D\rho V^2 + Mg\sin\theta \tag{5.1}$$

и система (3.1), (3.2) дополняется уравнением изменения угла наклона траектории к плоскости горизонта.

6. Применение модели ПРД к определению высоты свечения Челябинского метеорита. Модель ПРД применима к количественному объяснению баллистики (скорости и массы) как единого, так и дробящегося тела. В этих задачах подбор масштабного фактора α дает разную модель разрушения. Так, при $\alpha \to 0$ тело дробится на мелкие части с образованием жидкого объема (модель С.С. Григоряна). При $\alpha \to \infty$ (gross фрагментация) тело не дробится или дробится на крупные части (Ceplecha). По модели ПРД моделируются скорость, масса, плотность метеорита и не моделируется высота начала дробления метеорита, которая для большинства тел находится на высоте примерно 45–50 км. Именно на этот диапазон скоростей указывает работа [2]. Однако, в данной статье построена аналитическая теория испарения метеоритов, из которой устанавливается связь между высотой вспышки и высотой дробления метеорита. По этой теории по наблюдаемой высоте вспышки возможно определение высоты начала дробления. По результатам этой теории предлагается оригинальный метод определения высоты дробления в зависимости от высоты вспышки.

6.1. Математическая постановка задачи о свечении метеоритов. В литературе по данной тематике под светимостью (свечением) понимается скорость уменьшения кинетической энергии метеорита за единицу времени

$$\frac{I}{\tau_0} = -V^n \frac{d}{dt}\left(\frac{MV^2}{2}\right) = -V^n\left(\frac{dM}{dt}\frac{V^2}{2} + MV\frac{dV}{dt}\right) \tag{6.1}$$

Используя выражения для dV/dt и dM/dt из уравнений баллистики единого и дробящегося метеороида (см. разд. 3), получим

$$\frac{I}{\tau_0} = V^n K\rho M^{2/3}\left(\frac{1}{2}V^{5+n}\sigma + V^{3+n}\right), \tag{6.2}$$

где $K = fC_D/\delta^{2/3}$, далее будем полагать константу n эмпирической величиной, константа свечения τ_0 также является эмпирической величиной. График правой части (6.2) как функции ρ имеет куполообразный вид, потому что при возрастании ρ – M и V уменьшаются (или при уменьшении ρ – M и V возрастают). Таким образом, последняя функция имеет экстремум. Для его нахождения необходимо приравнять производную от этой функции к нулю и тем самым найти плотность (высоту) ρ, при которой эта функция достигает экстремума. Вычислим производные $dM/d\rho$ и $dV/d\rho$ по формулам дробящегося тела (см. разд. 3):

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{d\rho} = \sigma V^2\frac{d\ln V}{d\rho}, \quad \rho\frac{d\ln V}{d\rho} = -\frac{a\tilde{\rho}^{1/(3\alpha+1)}}{1 - a + a\tilde{\rho}^{1/(3\alpha+1)}} = \frac{x}{1+x}, \tag{6.3}$$

где $x = a\tilde{\rho}^{1/(3\alpha+1)}$, $a = \rho_*/[(1+3\alpha)\rho_m \sin\theta]$, ρ_* – плотность (высота) начала дробления метеорита, обычно полагаемая равной 50 или 45 км, $\theta = \theta_e = 0.309$ – угол входа метеорита в атмосферу. Таким образом, $\rho\frac{d\ln V}{d\rho} = \frac{x}{1-a+x} \approx \frac{x}{1+x}$, т.к. a меньше 10^{-2}–10^{-3}. Величина ρ_m называется суммарной плотностью, $\rho_m = \delta^{2/3}M_e^{1/3}/fhC_D \approx 5.4\times10^{-3}$ г/см^3.

Тогда в итоге получаем

$$\frac{F(\rho)}{M^{\frac{2}{3}}V^{3+n}} = \frac{\sigma V^2}{2}\left[1 - \frac{\frac{2}{3}\sigma V_e^2 + (5+n)(1+x)^{3\alpha}}{(1+x)^{3\alpha}}\frac{x}{1+x}\right] + 1 - \\ - \frac{\frac{2}{3}\sigma V_e^2 + (3+n)(1+x)^{3\alpha}}{(1+x)^{3\alpha}}\frac{x}{1+x} = 0 \tag{6.4}$$

Первое слагаемое этого выражения связано со свечением метеороида от уноса массы. Второе слагаемое связано со свечением от торможения (уменьшения скорости).

Это алгебраическое трансцендентное нелинейное уравнение (6.4) для определения x от α, которое может быть решено численно во всем диапазоне α от 0 до 1.

6.2. Определение высоты максимального свечения. Имея этот результат, можно вычислить плотность (высоту) максимального свечения. Для этого необходимо решить уравнение

$$\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^{1/(3\alpha+1)} = \mathrm{const}\cdot x(1+3\alpha),$$

где и с левой, и с правой стороны стоят величины порядка 10^{-10}. Проведенный расчет высоты максимального свечения для значений параметров $x = 0.1$, $3\alpha = 1$, $\rho_m = 5.4\times10^{-3}$

дает совпадение наблюдаемой высоты свечения и высоты плотности свечения, рассчитанной по модели ПРД.

Из полученной в статье теории ПРД следует, что высота свечения существенно зависит от высоты дробления, которая была принята здесь равной 50 км (это типичная высота дробления многих метеоритов) ($\rho_* = 0.98 \times 10^{-6}$). Кроме этого, данная модель свечения дает при $\alpha = 0$ модель идеальной несжимаемой жидкости [49] и при $\alpha \to 0$ – модель gross фрагментации (Ceplecha, 2005).

Заключение. Статья посвящена численным и аналитическим решениям уравнений аэротермобалистики единого и дробящегося тела. В рамках модели прогрессивно равновесного дробления появляется возможность управления числом осколков от 0 до большого их числа с помощью масштабного фактора α ($0 < \alpha < \infty$). При малых α тело дробится на бесконечно большое число осколков, и в этом случае раздробленное тело моделируется большой каплей несжимаемой жидкости [49], которая неустойчива (неустойчивость Рэлея – Тейлора раздробленного тела, имеющего непредсказуемую форму и неустойчивость Кельвина–Гельмгольца за счет испарения с поверхности). В другом крайнем случае, при больших масштабных факторах α, тело фактически не дробится. Таким образом, модель ПРД существенно расширяет возможность моделирования различных видов дробления метеороидов. Предложен и развит метод последовательных приближений для получения аналитических решений основных уравнений ФТМ. Полученные решения для скорости и массы единого тела по первому приближению сравнены с численным решением и дают хорошее совпадение. С использованием этого решения находятся простые аналитические выражения для скоростного напора и погонной кинетической энергии метеороида. Найдена точная аналитическая формула для скорости дробящегося тела. Полученная модель прогрессивно равновесного дробления метеороида под действием аэродинамического сопротивления усовершенствована так, чтобы учесть задержки в образовании отдельных фрагментов ввиду наличия конечной скорости их расхождения. В статье приведена полная система уравнений аэротермобалистики, включающая в себя силу тяжести, реактивную силу испарения и подъемную силу, действующую на траекторию метеороида. Эта полная система решена численно. Показано, что для типичных метеороидов от 1 кг и больше решение этой полной системы совпадает с решением без учета этих дополнительных сил.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Weibull W.* A statistical theory of the strength of materials // Proc. Roy. Swedish Inst. Engng. Res. 1939. № 151.
2. *Tirskiy G.A., Khanukaeva D.Y.* The modeling of bolide terminal explosions // Earth, Moon&Planets. 2004. V. 95. № 1–4. P. 513–520.
3. *Бронштэн В.А.* Физика метеорных явлений. М.: Наука, 1981. 416 с.
4. *Бронштэн В.А.* Абляция метеороидов // Метеорные исследования. 1983. №8. С. 38–50.
5. *Бронштэн В.А.* О динамике разрушения крупных метеороидов // Космич. исслед. 1985. Т. 23. № 5. С. 797–799.
6. *Емельяненко В.В., Попова О.П., Чугай Н.Н. и др.* Астрономические и физические аспекты челябинского события 15 февраля 2013 г. // Астрон. вестн. Исслед. солнечной системы. 2013. Т. 47. № 4. С. 262–262.
7. *Ceplecha Z.* Multiple fall of Pribram meteorites photographed. 1. Double-station photographs of the fireball and their relations to the found meteorites // Bull. Astron. Inst. Czechosl. 1961. V. 12. P. 21.
8. *McCrosky R.E., Posen A., Schwartz G., Shao C.-Y.* Lost City meteorite – its recovery and a comparison with other fireballs // J. Geophys. Res. 1971. V. 76. P. 4090–4108.
9. *Halliday I., Griffin A.A., Blackwell A.T.* The Innisfree meteorite fall: A photographic analysis of fragmentation, dynamics and luminosity // Meteoritics. 1981. V. 16(2). P. 153–170.

10. *Brown P., Ceplecha Z., Hawkes R. et al.* The orbit and atmospheric trajectory of the Peekskill meteorite from video records // Nature. 1994. V. 367. P. 624–626.
11. *Borovicka J., Spurný P., Kalenda P., Tagliaferri E.* The Morávka meteorite fall: 1. Description of the events and determination of the fireball trajectory and orbit from video records // Meteor.&Planet. Sci. 2003. V. 38. № 7. P. 975–987.
12. *Brown P., Pack D., Edwards W.N. et al.* The orbit, atmospheric dynamics, and initial mass of the Park Forest meteorite // Meteor.&Planet. Sci. 2004. V. 39. P. 1781–1796.
13. *Simon S.B., Grossman L., Clayton R.N. et al.* The fall, recovery, and classification of the Park Forest meteorite // Meteor.&Planet. Sci. 2004. V. 39. P. 625–634.
14. *Spurný P., Bland Ph.A. et al.* The Bunburra Rockhole meteorite fall in SW Australia: fireball trajectory, luminosity, dynamics, orbit, and impact position from photographic and photoelectric records // Meteor.&Planet. Sci. 2012. V. 47. № 2. P. 163–185.
15. *Jenniskens P., Shaddad M.H. et al.* The impact and recovery of asteroid 2008 TC3 // Nature. 2009. V. 458. P. 485–488.
16. *Spurný P., Borovička J. et al.* Analysis of instrumental observations of the Jesenice meteorite fall on April 9, 2009 // Meteor.&Planet. Sci. 2010. V. 45. № 8. P. 1392–1407.
17. *Brown P.G., McCausland P.J.A. et al.* The fall of the Grimsby meteorite-I: Fireball dynamics and orbit from radar, video, and infrasound records // Meteorit.&Planet. Sci. 2011. V. 46. № 3. P. 339–363.
18. *Popova O., Borovicka J. et al.* Very low strengths of interplanetary meteoroids and small asteroids // Meteorit.&Planet. Sci. 2011. V. 46. № 10. P. 1525–1550.
19. *Ceplecha Z., Revelle D.O.* Fragmentation model of meteoroid motion, mass loss, and radiation in the atmosphere // Meteorit.&Planet. Sci. 2005. V. 40. № 1. P. 35–54.
20. *Бронштэн В.А.* Применение теории Григоряна к расчету дробления гигантских метеороидов // Астрон. вестник. 1994. Т. 28. № 2. С. 118–124.
21. *Бронштэн В.А.* Дробление и разрушение крупных метеорных тел в атмосфере // Астрон. вестн. 1995. Т. 29. № 5. С. 450–458.
22. *Jacchia L.G.* The physical theory of meteors. VIII. Fragmentation as cause of the faint meteor anomaly // Astrophys. J. 1955. V. 121. P. 521.
23. *Левин Б.Ю., Симоненко А.Н.* Параметры фрагментации метеоров // Астрон. ж. 1967. Т. 44. № 3. С. 630–637.
24. *Симоненко А.Н.* Размеры частиц, отделяющихся от метеорных тел во время вспышек // Кометы и метеоры. 1967. № 15. С. 34–44.
25. *Фортов В.Е., Султанов В.Г., Шутов А.В.* Взрыв Челябинского суперболида в атмосфере Земли: рядовое событие или уникальное стечение обстоятельств? // Геохимия. 2013. № 7. С. 609–609.
26. *Svetsov V.V., Nemtchinov I.V., Teterev A.V.* Disintegration of large meteoroids in Earth's atmosphere: theoretical models // Icarus. 1995. V. 116. № 1. P. 131–153.
27. *Baldwin B., Sheaffer Y.* Ablation and breakup of large meteoroids during atmospheric entry // J. Geophys. Res. 1971. V. 76. № 19. P. 4653–4668.
28. *Цветков В.И., Скрипник А.Я.* Атмосферное дробление метеоритов с точки зрения механической прочности // Астрон. вестн. 1991. Т. 25. № 3. С. 364–371.
29. *Стулов В.П.* Аналитическая модель последовательного дробления и абляции метеорного тела в атмосфере // Астрон. вестн. 1998. Т. 32. № 5. С. 455–458.
30. *Немчинов И.В., Попова О.П.* Анализ Сихотэ-Алинского события 1947 г. и его сравнение с явлением 1 февраля 1994 г. // Астрон. вестн. 1997. Т. 31. С. 458–471.
31. *Иванов А.Г., Рыжанский В.А.* Фрагментация малого небесного тела при его взаимодействии с атмосферой // Докл. АН. 1997. Т. 353. № 3. С. 334–337.
32. *Стулов В.П., Титова Л.Ю.* Модель фрагментации метеороида в атмосфере // Докл. АН. 2001. Т. 376. № 1. С. 53–54.
33. *Brykina I.G., Bragin M.D.* On models of meteoroid disruption into the cloud of fragments // Planet.&Space Sci. 2020. V. 187. P. 104942.
34. *Шуршалов Л.В.* Взрыв в полете // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 126–129.
35. *Коробейников В.П., Чушкин П.И., Шуршалов Л.В.* О гидродинамических эффектах при полете и взрыве в атмосфере Земли крупных метеоритных тел // Метеоритика. 1973. Вып. 3. С. 73–89.

36. *Коробейников В.П.* Математическое моделирование катастрофических явлений природы // Знание. 1986. № 1. 48 с.
37. *Коробейников В.П., Чушкин П.И., Шуршалов Л.В.* Комплексное моделирование полета и взрыва в атмосфере метеорного тела // Астрон. вестн. 1991. Т. 25. № 3. С. 61–75.
38. *Korobeinikov V.P., Shurshalov L.V., Vlasov V.I., Semenov I.V.* A complex modeling of the Tunguska catastrophe // Planet Space Sci. 1998. V. 46. № 213. P. 231–244.
39. *Hills J.A., Goda M.P.* The fragmentation of small asteroids in the atmosphere // Astron. J. 1993. V. 5. № 3. P. 1114–1144.
40. *Chyba C.F., Thomas P.J., Zahnle K.J.* The 1908 Tunguska explosion: Atmospheric disruption of a stony asteroid // Nature. 1993. V. 361. P. 40–44.
41. *Немчинов И.В., Попова О.П., Тетерев А.В.* Внедрение крупных метеороидов в атмосферу: теория и наблюдения (Обзор) // ИФЖ. 1999. Т. 72. № 6. С. 1233–1265.
42. *Artem'eva N.A., Shuvalov V.V.* Interaction of shock waves during the passage of a disrupted meteoroid through the atmosphere // Shock Waves. 1996. № 5. P. 359–367.
43. *Khanukaeva D.Y., Tirskiy G.A.* A model of single and fragmenting meteoroid interaction with isothermal and non-isothermal atmosphere // Earth Moon Planet. 2004. V. 95. P. 395–402.
44. *Брагин М.Д., Тирский Г.А.* Аналитическое решение уравнений физической теории метеоров для недробящегося тела с уносом массы в неизотермической атмосфере // ПМТФ. 2019. Т. 60. № 5. С. 13–18.
45. *Лунев В.В.* Гиперзвуковая аэродинамика: М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
46. *Григорян С.С.* О движении и разрушении метеоритов в атмосферах планет // Космич. исслед. 1979. Т. 17. № 6. С. 875–893.
47. *Фортов В.Е., Гнедин Ю.Н., Иванов М.Ф. и др.* Столкновение кометы Шумейкеров–Леви 9 с Юпитером: что мы увидели // УФН. 1996. Т. 166. С. 391–422.
48. *Тирский Г.А., Ханукаева Д.Ю.* Баллистика единого метеорного тела с учетом уноса массы в неизотермической атмосфере // Космич. исслед. 2007. Т. 45. № 6. С. 476–485.
49. *Егорова Л.А.* Напряженно-деформированное состояние и разрушение метеороида при движении в атмосфере // ПММ. 2011. Т. 75. № 3. С. 513–518.
50. *Фадеенко Ю.И.* Разрушение метеорных тел в атмосфере // Физика горения и взрыва. 1967. Т. 3. № 2. С. 278–280.
51. *Nemtchinov I.V., Popova O.P., Shuvalov V.V., Svetsov V.V.* Radiation emitted during the flight of asteroids and comets through the atmosphere // Planet.&Space Sci. 1994. V. 42. № 6. P. 491–506.
52. *Медведев Р.В.* Определение механических и тепловых свойств метеоритов Кунашак и Еленовка // Метеоритика. 1974. № 33. С. 100–104.
53. *Болотин В.В.* Статистические методы в строительной механике. М.: Госстройиздат, 1961. 264 с.
54. *Брыкина И.Г., Брагин М.Д., Егорова Л.А.* О моделях фрагментации метеороидов в атмосфере // Физ.-хим. кинетика в газовой динамике. 2019. Т. 20, № 2. Эл. журнал. http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-2/articles/822
55. *Тирский Г.А., Брыкина И.Г., Жлуктов С.В.* Численно-аналитический метод решения уравнений физической теории метеоров при переменном параметре абляции // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2020, № 6. С. 48–53.
56. *Ceplecha Z., Borovička J., Elford W.G. et al.* Meteor Phenomena and Bodies // Space Sci. Rev. 1998. V. 84. P. 327–471.

Aerothermoballistics of Fragmenting Meteoroids in the Earth Atmosphere

G.A. Tirskiy[a,#]

[a] *Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[#] *e-mail: Tirskiy@imec.msu.ru*

The fragmentation of rather large meteoroids (more than 1 m) under the action of aerodynamic inertial forces (an increase in weight in its own coordinate system) is a common phenomenon and reaches half of the cosmic bodies entering the Earth's atmosphere. A characteristic feature of this phenomenon is the fact that it has a lower fracture strength compared to meteorites that fell to the ground. On average, the fracture strength under the action of a high-speed pressure reaches 100 atmospheres. The lower limit is equal to one atmosphere, but this is not an absolute rule, there are many cases of exceptions from it. Examples of exceptions to this rule are given. A numerical and analytical solution of the basic equations (braking equations, equations of energy and trajectory inclination) of the meteoroid as a single body is given. Using the Weibull hypothesis, a model of sequential equilibrium fragmentation (SRD) was created, with the help of which body weight is excluded from the deceleration equation. This universal and fundamental equation does not contain the massloss parameter, which depends on the velocity, meteoroid mass and air density, in contrast to the classical approach, when the body mass is excluded from the deceleration equation and makes it dependent on the nonlinear parameter σ. The obtained equation of universal crushing and deceleration contains a scale factor on which the size of the fragments depends, the condition of equilibrium between the air pressure and the strength of the fragments, which determine their number. Using the conditions of the fracture equation, a deceleration equation is derived and does not contain the mass loss parameter σ. This equation is integrated in the final form. Using this equation, the speed of the meteoroid is obtained from the air density (height). The maximum number of fragments was found before reaching the maximum air pressure. Under this height, the swarm of fragments moves further as a single body to the surface of the Earth. At this stage, the deceleration equation is written down and numerically solved taking into account the action of gravity. When the velocity reach about 3 km/s or more, the mass loss due to aerodynamic heating stops. After a brief review of available literature, which is devoted to the problem of Tunguska meteorite fall, which does not have a correct mechanical explanation, the author refers to the work [48].

Keywords: aerothermoballistics of crushing, bodies with mass entrainment, analytical solution, isothermal and non-isothermal atmospheres

REFERENCES

1. *Weibull W.* A statistical theory of the strength of materials // Proc. Roy. Swedish Inst. Engng. Res., 1939, no. 151.
2. *Tirskiy G.A., Khanukaeva D.Y.* The modeling of bolide terminal explosions // Earth, Moon&Planets, 2004, vol. 95, no. 1–4, pp. 513–520.
3. *Bronshten V.A.* Physics of meteoric phenomena. Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1983. xviii+358 p.
4. *Bronshten V.A.* Ablation of meteoroids // in: Physics of Meteoric Phenomena. 1983, pp. 91–138.
5. *Bronsten V.A.* On dynamic of destruction of large // Cosmic Res., 1985, vol. 23, no. 5, pp. 797–799.
6. *Emel'yanenko V.V., Popova O.P., Chugai N.N. et al.* Astronomical and physical aspects of the Chelyabinsk event (February 15, 2013) // Solar Syst. Res., 2013, vol. 47, no. 4, pp. 240–254.
7. *Ceplecha Z.* Multiple fall of Pribram meteorites photographed. 1. Double-station photographs of the fireball and their relations to the found meteorites // Bull. Astron. Inst. Czechosl., 1961, vol. 12, pp. 21.
8. *McCrosky R.E., Posen A., Schwartz G., Shao C.-Y.* Lost City meteorite – its recovery and a comparison with other fireballs // J. Geophys. Res., 1971, vol. 76, pp. 4090–4108.
9. *Halliday I., Griffin A.A., Blackwell A.T.* The Innisfree meteorite fall: A photographic analysis of fragmentation, dynamics and luminosity // Meteoritics, 1981, vol. 16(2), pp. 153–170.
10. *Brown P., Ceplecha Z., Hawkes R. et al.* The orbit and atmospheric trajectory of the Peekskill meteorite from video records // Nature, 1994, vol. 367, pp. 624–626.
11. *Borovicka J., Spurný P., Kalenda P., Tagliaferri E.* The Morávka meteorite fall: 1. Description of the events and determination of the fireball trajectory and orbit from video records // Meteor.&Planet. Sci., 2003, vol. 38, no. 7, pp. 975–987.
12. *Brown P., Pack D., Edwards W.N. et al.* The orbit, atmospheric dynamics, and initial mass of the Park Forest meteorite // Meteor.&Planet. Sci., 2004, vol. 39, pp. 1781–1796.
13. *Simon S.B., Grossman L., Clayton R.N. et al.* The fall, recovery, and classification of the Park Forest meteorite // Meteor.&Planet. Sci., 2004, vol. 39, pp. 625–634.
14. *Spurný P., Bland Ph.A. et al.* The Bunburra Rockhole meteorite fall in SW Australia: fireball trajectory, luminosity, dynamics, orbit, and impact position from photographic and photoelectric records // Meteor.&Planet. Sci., 2012, 47, no. 2, pp. 163–185.

15. *Jenniskens P., Shaddad M.H. et al.* The impact and recovery of asteroid 2008 TC3 // Nature, 2009, vol. 458, pp. 485–488.
16. *Spurný P., Borovička J. et al.* Analysis of instrumental observations of the Jesenice meteorite fall on April 9, 2009 // Meteor.&Planet. Sci., 2010, vol. 45, no. 8, pp. 1392–1407.
17. *Brown P.G., McCausland P.J.A. et al.* The fall of the Grimsby meteorite-I: Fireball dynamics and orbit from radar, video, and infrasound records // Meteorit.&Planet. Sci., 2011, vol. 46 (3), pp. 339–363.
18. *Popova O., Borovicka J. et al.* Very low strengths of interplanetary meteoroids and small asteroids // Meteorit.&Planet. Sci., 2011, vol. 46, no. 10, pp. 1525–1550.
19. *Ceplecha Z., Revelle D.O.* Fragmentation model of meteoroid motion, mass loss, and radiation in the atmosphere // Meteorit.&Planet. Sci., 2005, vol. 40, no. 1, pp. 35–54.
20. *Bronshten V.A.* Application of Grigoryan's theory to the calculation of the fragmentation of big meteoroids // Astron. Vestn., 1994, vol. 28, no. 2, pp. 118–124.
21. *Bronshten V.A.* Fragmentation and destruction of large meteor bodies in atmosphere // Astron. Vestn., 1995, vol. 29, no. 5, pp. 450–458.
22. *Jacchia L.G.* The physical theory of meteors. VIII. Fragmentation as cause of the faint meteor anomaly // Astrophys. J., 1955, vol. 121, pp. 521.
23. *Levin B.Yu., Simonenko A.N.* Parameters of meteor fragmentation // Sov. Astron., 1967, vol. 11, no. 3, pp. 501–506.
24. *Simonenko A.N.* The sizes of the particles separating from the meteoroids during the flares // Komety&Meteory, 1967, no. 15, pp. 34–44. (in Russian)
25. *Fortov V.E., Sultanov V.G., Shutov A.V.* Chelyabinsk superbolide explosion in the Earth's atmosphere: a common phenomenon or unique coincidence? // Geochem. Int., 2013, vol. 51, no. 7, pp. 549–567.
26. *Svetsov V.V., Nemtchinov I.V., Teterev A.V.* Disintegration of large meteoroids in Earth's atmosphere: theoretical models // Icarus, 1995, vol. 116, no. 1, pp. 131–153.
27. *Baldwin B., Sheaffer Y.* Ablation and Breakup of Large Meteoroids during Atmospheric Entry // J. Geophys. Res., 1971, vol. 76, no. 19, pp. 4653–4668.
28. *Tsvetkov V.I., Skripnik A.Ya.* Atmospheric fragmentation of meteorites according to the strength theory // Solar Syst. Res., 1991, vol. 25, no. 3, pp. 364.
29. *Stulov V.P.* An analytical model for the sequential disintegration and ablation of a meteoric body in the atmosphere // Solar Syst. Res., 1998, vol. 32, no. 5, pp. 401–404.
30. *Nemtchinov I.V., Popova O.P.* An analysis of the 1947 Sikhote-Alin event and a comparison with the phenomenon of February 1, 1994 // Solar System Res., 1997, vol. 31, no. 5, pp. 408–420.
31. *Ivanov A.G., Ryzhanskiy V.A.* Fragmentation of a med celestial body due to interaction with the atmosphere // Dokl. Phys., 1997, vol. 353, no. 3, pp. 334–337.
32. *Stulov V.P., Titova Y.L.* Comparative analysis of models for disintegration of meteoric bodies // Solar Syst. Res., 2001, vol. 35, no. 4, pp. 315–319.
33. *Brykina I.G., Bragin M.D.* On models of meteoroid disruption into the cloud of fragments // Planet.&Space Sci., 2020, vol. 187, pp. 104942.
34. *Shurshalov L.V.* Explosion of a body in flight // Fluid Dyn., 1985, no. 5, pp. 779–782.
35. *Korobeinikov V.P., Chushkin P.I., Shurshalov L.V.* Hydrodynamic effects of the flight and explosion in the Earth's atmosphere of large meteorite bodies // Meteoritika, 1973, no. 32, pp. 73–80.
36. *Korobeinikov V.P.* Mathematical modeling of catastrophic nature phenomena. // Znanie, 1986, no. 1, pp. 48. (in Russian)
37. *Korobeinikov V.P., Chushkin N.N., Shurshalov L.V.* Complex modelling of flight and explosion in the meteor body atmosphere // Astron. Vestn., 1991, vol. 25, no. 3, pp. 327–343.
38. *Korobeinikov V.P., Shurshalov L.V., Vlasov V.I., Semenov I.V.* A complex modeling of the Tunguska catastrophe // Planet Space Sci., 1998, vol. 46, no. 213, pp. 231–244.
39. *Hills J.A. Goda M.P.* The fragmentation of small asteroids in the atmosphere // Astron. J., 1993, vol. 5, no. 3, pp. 1114–1144.
40. *Chyba C.F., Thomas P.J., Zahnle K.J.* The 1908 Tunguska explosion: Atmospheric disruption of a stony asteroid // Nature, 1993, vol. 361, pp. 40–44.
41. *Nemchinov I.V., Popova O.P., Teterev A.V.* Penetration of large meteoroids into the atmosphere: Theory and observations // J. Engng. Phys.&Thermophys., 1999, vol. 72, pp. 1194–1223.

42. *Artem'eva N.A., Shuvalov V.V.* Interaction of shock waves during the passage of a disrupted meteoroid through the atmosphere // Shock Waves, 1996, no. 5, pp. 359–367.
43. *Khanukaeva D.Y., Tirskiy G.A.* A model of single and fragmenting meteoroid interaction with isothermal and non-isothermal atmosphere // Earth Moon Planet, 2004, vol. 95, pp. 395–402.
44. *Bragin M.D., Tirskiy G.A.* Analytical solution of equations of the physical theory of meteors for a non-fragmenting body with ablation in a nonisothermal atmosphere // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 2019, vol. 60, no. 5, pp. 793–797.
45. *Lunev V.V.* Hypersonic Aerodynamic. Moscow: Mashinostroenie, 1975. 327 p. (in Russian)
46. *Grigorian S.S.* Motion and disintegration of meteorites in planetary atmospheres // Cosm. Res., 1979, vol. 17, no. 6, pp. 724–743.
47. *Fortov V.E., Gnedin Yu.N., Ivanov M.F., et al.* Collision of comet Shoemaker–Levy 9 with Jupiter: what did we see // Phys. Usp., 1996, vol. 39, pp. 363–392.
48. *Tirskii G.A., Khanukaeva D.Y.* Ballistics of a nonfragmenting meteor body with allowance made for mass outflow in the non-isothermal atmosphere // Cosmic Res., 2007, vol. 45, no. 6, pp. 476–485.
49. *Yegorova L.A.* The stress–strain state and disintegration of a meteoroid moving through the atmosphere // JAMM, 2011, vol. 75, no. 3, pp. 363–366.
50. *Fadeenko Yu.I.* Destruction of meteor body in the atmosphere // Combustion, Explosion&Shock Waves, 1967, vol. 3, no. 2, pp. 278–280.
51. *Nemtchinov I.V., Popova O.P., Shuvalov V.V., Svetsov V.V.* Radiation emitted during the flight of asteroids and comets through the atmosphere // Planet.&Space Sci., 1994, vol. 42, no. 6, pp. 491–506.
52. *Medvedev R.V.* Determination of the mechanical and thermal properties of Kunashak and Elenovka meteorites // Meteoritika, 1974, no. 33, pp. 100–104. (in Russian)
53. *Bolotin V.* Statistical Methods in Structural Mechanics. Moscow: Gosstroyizdat, 1961. 264 p.
54. *Brykina I.G., Bragin M.D., Egorova L.A.* On models of meteoroids fragmentation in the atmosphere // Phys.-Chem. Kinetics in Gas Dyn., 2019, vol. 20, iss. 2. http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-2/articles/822
55. *Tirskii G.A., Brykina I.G., Zhluktov S.V.* Numerical-analytical method for solving equations of the physical theory of meteors at variable ablation parameter // Moscow Univ. Math. Mech. Bull., 2020, vol. 75, no. 6, pp. 170–175.
56. *Ceplecha Z., Borovička J., Elford W.G. et al.* Meteor phenomena and bodies // Space Sci. Rev., 1998, vol. 84, pp. 327–471.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 5, с. 664–674

УДК 621.9.047;532.528

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЯВЛЕНИЯ "СТРУЙНОСТИ" ПРИ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ МЕТАЛЛОВ

© 2021 г. Н. М. Миназетдинов[1,*]

[1]Российский новый университет, Москва, Россия

**e-mail: nminazetdinov@yandex.ru*

Поступила в редакцию 02.02.2021 г.
После доработки 19.06.2021 г.
Принята к публикации 14.07.2021 г.

При электрохимической обработке металлов в межэлектродном промежутке в местах с пониженным статическим давлением возникает кавитация. В рамках модели "идеального процесса" электрохимической обработки решена двумерная задача, связанная с определением формы обрабатываемой поверхности с учетом присоединенной кавитации. Применяется условие, позволяющее учесть влияние электрического поля на гидродинамику кавитационного течения идеальной несжимаемой жидкости в межэлектродном промежутке.

Ключевые слова: электрохимическая обработка металлов, кавитация, идеальная несжимаемая жидкость

DOI: 10.31857/S0032823521050064

1. Введение. Существенное влияние на процесс электрохимической обработки металлов оказывают гидродинамические факторы. Поток раствора электролита в межэлектродном промежутке между границами электрода-инструмента (катода) и обрабатываемой заготовки (анода) должен обеспечивать стабильное протекание электродных реакций, удаление продуктов этих реакций и охлаждение электродов: анода и катода [1–3].

При определенных условиях в результате обтекания потоком электролита острых кромок катода возникают каверны, заполненные парами жидкости и газом, выделяющимся в процессе электрохимической обработки. Электропроводность газовой среды, заполняющей каверну, существенно ниже электропроводности электролита, и как следствие, происходит неравномерное растворение металла на различных участках анода, чем можно объяснить появление струйных неровностей в виде волнистой поверхности, ориентированной в направлении потока электролита [1].

В монографии [4] выполнен обзор различных механизмов образования и способов устранения данного нежелательного явления, которое в научно-технической литературе получило название "струйности". Там же отмечено, что значительная роль в образовании "струйности" принадлежит явлению присоединенной кавитации [5].

В работах [6, 7], представлены решения двумерных задач, связанных с определением установившейся [8] анодной границы с учетом кавитации в предположение, что течение электролита описывается моделью идеальной несжимаемой жидкости. Для описания кавитационного обтекания острой кромки катода бесконечно длинной каверной была применена схема Кирхгофа [5].

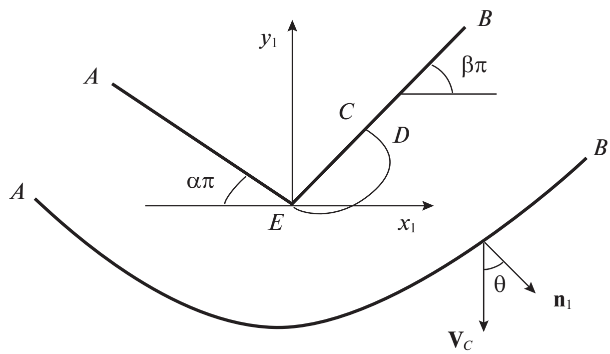


Рис. 1.

В данной работе в рамках математической модели [6], рассматривается двумерная схема электрохимического формообразования с учетом каверны конечной протяженности.

2. Схема электрохимической обработки. Геометрия сечения межэлектродного промежутка представлена на рис. 1. Двугранный угол AEB соответствует границе катода. Введем систему декартовых координат (x_1, y_1), связанную с катодом. Начало координат выбрано в точке E, точки A и B являются бесконечно удаленными. Углы наклона граней AE и EB к оси абсцисс определяется значениями $\alpha\pi$ и $\beta\pi$ соответственно, причем $0 \le \alpha < \pi/2$, $0 \le \beta < \pi/2$. Катод совершает поступательное перемещение в направлении, противоположном оси ординат, с постоянной скоростью V_c. В процессе обработки с течением времени формируется установившаяся анодная граница AB. В установившемся режиме геометрия межэлектродного промежутка не меняется во времени [8].

Граница AEB катода отделена от границы AB анода зазором, в котором осуществляется установившееся течение идеальной несжимаемой жидкости. Для определенности будем считать, что течение осуществляется в направлении от входа в межэлектродный канал в окрестности точки A к точке B. В точке E происходит отрыв потока с поверхности катода-инструмента с образованием каверны. В модели задачи считается, что граница каверны DE, согласно схеме Рябушинского [5], замыкается на фиктивную пластинку DC, перпендикулярную грани EB катода.

При постановке задачи и ее решении рассматриваются два векторных поля: стационарное электрическое поле и поле скоростей установившегося течения идеальной несжимаемой жидкости в межэлектродном промежутке, а также их взаимосвязь.

3. Математическая модель процесса электрохимической обработки. Согласно [9] введем аналитическую функцию $W_1(z_1) = v(x_1, y_1) + iu(x_1, y_1)$ комплексной переменной $z_1 = x_1 + iy_1$, где $v(x_1, y_1)$ – функция тока, а $u(x_1, y_1)$ – потенциал электрического поля. Величина $u(x_1, y_1)$ принимает постоянные значения на границах электродов

$$u\big|_{AB} = u_a, \quad u\big|_{AE} = u\big|_{BC} = u_c \tag{3.1}$$

В модели каверна считается диэлектриком [6], и ее граница CDE является участком линии тока, и на ее поверхности существует точка M раздвоения этой линии. Для определенности рассмотрим случай, когда точка M расположена между точками D и E. Будем считать, что

$$v(x_1, y_1)\big|_{CDE} = 0 \tag{3.2}$$

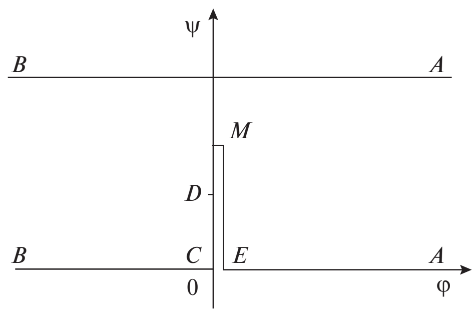


Рис. 2.

Нормальная производная потенциала электрического поля на искомой установившейся анодной границе AB удовлетворяет условию

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{1}{\kappa a_0}\left(-a_1 + \frac{\rho V_c}{\varepsilon}\cos\theta\right), \tag{3.3}$$

где κ — удельная электропроводность среды, ε — электрохимический эквивалент металла, ρ — плотность материала анода, θ — угол между вектором $\mathbf{V}_c$ скорости подачи катода и вектором $\mathbf{n}_1$ нормали к анодной границе (рис. 1), a_0, a_1 — постоянные величины [10].

Произведем замену переменных по формулам

$$\psi = (u - u_c)/(u_a - u_c), \quad \varphi = \nu/(u_a - u_c), \quad z = z_1/H = x + iy,$$

где $H = a_0\kappa(u_a - u_c)/j_0$ — характерная длина, $j_0 = \rho V_c/\varepsilon$ — характерная плотность тока [11].

Безразмерный комплексный потенциал $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, согласно формулам (3.1)–(3.3) удовлетворяет граничным условиям

$$\psi|_{AB} = 1, \quad \psi|_{AE} = \psi|_{BC} = 0 \tag{3.4}$$

$$\varphi|_{CDE} = 0 \tag{3.5}$$

$$\left|\frac{dW}{dz}\right|_{AB} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{AB} = b + \cos\theta, \quad b = -\frac{a_1}{j_0} \tag{3.6}$$

Область изменения безразмерного комплексного потенциала электрического поля представлена на рис. 2.

Из условий (3.4), (3.6) следует, что безразмерные величины межэлектродных зазоров на бесконечности в окрестностях точек A и B равны соответственно

$$h_1 = \frac{1}{b + \cos\alpha\pi}, \quad h_2 = \frac{1}{b + \cos\beta\pi} \tag{3.7}$$

4. Параметрическое представление безразмерного комплексного потенциала электрического поля. Введем параметрическую комплексную переменную $t = \xi + i\delta$, изменяющуюся в области G_t $(0 < \xi < \pi/2,\ 0 < \delta < \pi|\tau|/4)$ $(\tau = i|\tau|)$ (рис. 3).

Согласно условиям (3.4) и (3.5) функция $W(t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{gathered}\varphi(\xi) = 0; \quad \xi \in [0, \pi/2], \quad \varphi(i\delta) = 0; \quad \delta \in [0, c], \quad \psi(i\delta) = 0; \quad \delta \in [c, \pi|\tau|/4) \\ \psi(\pi/2 + i\delta) = 0; \quad \delta \in [0, \pi|\tau|/4), \quad \psi(\xi + \pi\tau/4) = 1; \quad \xi \in (0, \pi/2)\end{gathered} \tag{4.1}$$

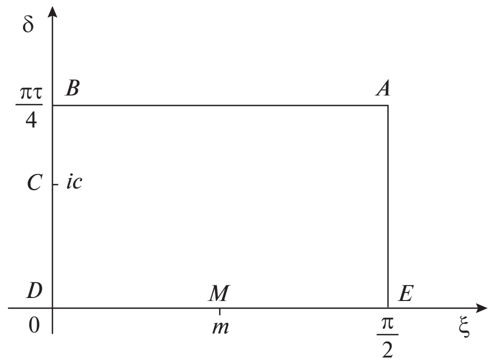


Рис. 3.

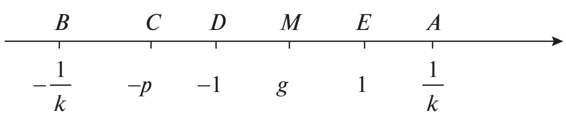


Рис. 4.

Введем вспомогательную комплексную переменную u, область изменения которой — верхняя полуплоскость G_u (рис. 4) и выполним конформное отображение прямоугольника G_t (рис. 3) на полуплоскость G_u с помощью эллиптического синуса [12]

$$u = \operatorname{sn}\left(2K(k)\left(\frac{2t}{\pi} - \frac{1}{2}\right), k\right) = -\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_2(2t)}{\vartheta_3(2t)}; \quad k = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^2$$
$$K(k) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(1-k^2u^2\right)}} = \frac{\pi\vartheta_3^2}{2}, \quad g = -\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(2m)}{\vartheta_3(2m)}, \quad p = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(2ci)}{\vartheta_3(2ci)}, \tag{4.2}$$

где $\vartheta_i(t)$, $i = 1,2,3,4$ — тета-функции для периодов π и $\pi\tau$, $\vartheta_i = \vartheta_i(0)$ [12].

С помощью интеграла Кристоффеля–Шварца [13], найдем производную функции, отображающей область G_u на область изменения комплексного потенциала (рис. 2)

$$\frac{dW}{du} = N\frac{u-g}{\left(1-u^2k^2\right)\sqrt{(u-1)(u+p)}}; \quad N = \text{const} \tag{4.3}$$

Используя эллиптические функции Якоби [12]

$$\operatorname{cn}(w) = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2\left(w/\vartheta_3^2\right)}{\vartheta_4\left(w/\vartheta_3^2\right)}, \quad \operatorname{dn}(w) = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3\left(w/\vartheta_3^2\right)}{\vartheta_4\left(w/\vartheta_3^2\right)}$$

и равенство [12]

$$\frac{d}{dw}\operatorname{sn}(w) = \operatorname{cn}(w)\operatorname{dn}(w),$$

из соотношения (4.2) найдем

$$\frac{du}{dt} = \frac{4K(k)}{\pi}\frac{\vartheta_4^2}{\vartheta_2\vartheta_3}\frac{\vartheta_1(2t)\vartheta_4(2t)}{\vartheta_3^2(2t)} \tag{4.4}$$

Подставляя формулы (4.2)–(4.4) в соотношение

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{du}\frac{du}{dt},$$

получим

$$\frac{dW}{dt} = N_1 \frac{\vartheta_1(2t)\vartheta_4(2t)}{\vartheta_3^2\vartheta_3^2(2t) - \vartheta_2^2\vartheta_2^2(2t)} \frac{F(t,m)}{\sqrt{F(t,ci)(\vartheta_3\vartheta_2(2t) + \vartheta_2\vartheta_3(2t))}}; \quad N_1 = \text{const}$$

$$F(t,a) = \vartheta_3(2a)\vartheta_2(2t) - \vartheta_2(2a)\vartheta_3(2t)$$

Из формулы [12]

$$\vartheta_4(y+z)\vartheta_4(y-z)\vartheta_4^2 = \vartheta_3^2(y)\vartheta_3^2(z) - \vartheta_2^2(y)\vartheta_2^2(z) \tag{4.5}$$

следует

$$\vartheta_3^2\vartheta_3^2(2t) - \vartheta_2^2\vartheta_2^2(2t) = \vartheta_4^2(2t)\vartheta_4^2$$

Тогда

$$\frac{dW}{dt} = N_2 \frac{\vartheta_1(2t)}{\vartheta_4(2t)} \frac{F(t,m)}{\sqrt{F(t,ci)(\vartheta_3\vartheta_2(2t) + \vartheta_2\vartheta_3(2t))}}; \quad N_2 = \text{const} \tag{4.6}$$

Используя формулы прибавления полупериодов для тета-функций [12]

$$\vartheta_4(2t) = iq^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-2ti}\vartheta_1(2t - \pi\tau/2); \quad q = e^{-\pi|\tau|}, \tag{4.7}$$

затем, используя формулу удвоения [12]

$$\vartheta_1(2t)\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4 = 2\vartheta_1(t)\vartheta_2(t)\vartheta_3(t)\vartheta_4(t), \tag{4.8}$$

найдем

$$\vartheta_4(2t) = 2iq^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-2ti}\frac{\vartheta_1(t_2)\vartheta_2(t_2)\vartheta_3(t_2)\vartheta_4(t_2)}{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4}; \quad t_2 = t - \pi\tau/4$$

Выражение (4.6) с учетом формул (4.7), (4.8) представим в виде

$$\frac{dW}{dt} = N_2 \frac{-iq^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{2ti}\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4\vartheta_1(2t)}{2\vartheta_1(t_2)\vartheta_2(t_2)\vartheta_3(t_2)\vartheta_4(t_2)} \frac{F(t,m)}{\sqrt{F(t,ci)(\vartheta_3\vartheta_2(2t) + \vartheta_2\vartheta_3(2t))}} \tag{4.9}$$

Из граничных условий (4.1) следует

$$\frac{1}{4}\oint_{t=\pi\tau/4}\frac{dW}{dt}dt = i, \quad \frac{1}{4}\oint_{t=\pi/2+\pi\tau/4}\frac{dW}{dt}dt = -i \tag{4.10}$$

В формулах (4.10) выражение (4.9) интегрируется соответственно по четверти дуг окружностей бесконечно малого радиуса с центрами в точках B $(t = \pi\tau/4)$ и A $(t = \pi/2 + \pi\tau/4)$ против часовой стрелки. Используя соотношение (4.9), и первую формулу из (4.10) с помощью теории вычетов [13], найдем

$$N_2 = \frac{4\vartheta_2\vartheta_3}{\pi}\frac{\sqrt{\left(\vartheta_3^2 + \vartheta_2^2\right)(\vartheta_3\vartheta_3(2ci) - \vartheta_2\vartheta_2(2ci))}}{\vartheta_3\vartheta_3(2m) - \vartheta_2\vartheta_2(2m)} \tag{4.11}$$

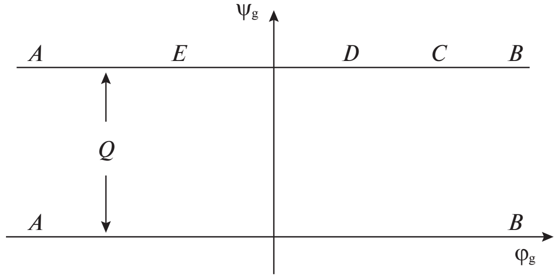


Рис. 5.

Далее, с помощью выражений (4.9), (4.11), и второй формулы из (4.10) получим уравнение

$$\sqrt{\frac{\left(\vartheta_3^2+\vartheta_2^2\right)\left(\vartheta_3\vartheta_3(2ci)-\vartheta_2\vartheta_2(2ci)\right)}{\left(\vartheta_3^2-\vartheta_2^2\right)\left(\vartheta_3\vartheta_3(2ci)+\vartheta_2\vartheta_2(2ci)\right)}}\left(\frac{\vartheta_3\vartheta_3(2m)+\vartheta_2\vartheta_2(2m)}{\vartheta_3\vartheta_3(2m)-\vartheta_2\vartheta_2(2m)}\right)=1 \tag{4.12}$$

5. Гидродинамика кавитационного течения идеальной жидкости в межэлектродном промежутке. Введем комплексный потенциал двумерного установившегося течения идеальной несжимаемой жидкости $W_g(z)=\varphi_g(x,y)+i\psi_g(x,y)$, где $\varphi_g(x,y)$ – потенциал скорости $\mathbf{V}=\operatorname{grad}\varphi_g$, $\psi_g(x,y)$ – функция тока [5].

Твердые и свободные границы течения являются линиями тока, следовательно

$$\begin{gathered}\psi_g(\xi)=Q;\quad \xi\in[0,\pi/2],\quad \psi_g(i\delta)=Q;\quad \delta\in[0,\pi|\tau|/4)\\ \psi_g(\pi/2+i\delta)=Q;\quad \delta\in[0,\pi|\tau|/4),\quad \psi_g(\xi+\pi\tau/4)=0;\quad \xi\in(0,\pi/2)\end{gathered} \tag{5.1}$$

В плоскости комплексного потенциала W_g области течения соответствует полоса ширины $Q=V_1h_1=V_2h_2$, V_1,V_2 – значения скорости в точках A и B соответственно (рис. 5).

Функция dW_g/dt на горизонтальных сторонах прямоугольника G_t принимает действительные значения, а на вертикальных – мнимые, имеет нули первого порядка в точках D $(t=0)$, E $(t=\pi/2)$, полюса первого порядка в точках B $(t=\pi\tau/4)$, A $(t=\pi/2+\pi\tau/4)$. Согласно принципу симметрии Шварца [13], функцию dW_g/dt можно аналитически продолжить через границы области G_t на всю плоскость. Продолженная таким образом функция будет двоякопериодической с периодами π, $\pi\tau$ и известными особенностями в прямоугольнике периодов [12]. Согласно теории эллиптических функций функцию dW_g/dt можно представить в виде [14]

$$\frac{dW_g}{dt}=N_3\frac{\vartheta_1(t)\vartheta_2(t)\vartheta_3(t)\vartheta_4(t)}{\vartheta_1(t-\pi\tau/4)\vartheta_2(t-\pi\tau/4)\vartheta_1(t+\pi\tau/4)\vartheta_2(t+\pi\tau/4)};\quad N_3=\text{const}$$

Применяя преобразование (4.8) представим полученное выражение в виде

$$\frac{dW_g}{dt}=\frac{N_3\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4}{2}\frac{\vartheta_1(2t)}{\vartheta_1(t-\pi\tau/4)\vartheta_2(t-\pi\tau/4)\vartheta_1(t+\pi\tau/4)\vartheta_2(t+\pi\tau/4)} \tag{5.2}$$

Интегрируя выражения (5.2) по четверти дуги окружности бесконечно малого радиуса с центром в точке B $(t=\pi\tau/4)$ против часовой стрелки и используя равенство $\frac{1}{4}\oint_{t=\pi\tau/4}(dW_g/dt)\,dt=-iQ$, вытекающее из граничных условий (5.1), найдем

$$N_3=-\frac{4Q}{\pi}\vartheta_2\vartheta_3 q^{-1/4};\quad q=\exp(\pi\tau i) \tag{5.3}$$

Применяя формулы (4.7), (4.8) и (5.3) выражения (5.2) представим в виде

$$\frac{dW_g}{dt}=-\frac{4Q}{\pi}\vartheta_2\vartheta_3\frac{\vartheta_1(2t)}{\vartheta_4(2t)} \tag{5.4}$$

Введем в рассмотрение функцию Жуковского [5]

$$\chi(t)=\ln\frac{V_0 dz}{dW_g}=r+i\theta_g;\quad r=\ln\frac{V_0}{V} \tag{5.5}$$

где V – модуль скорости, V_0 – величина скорости на свободной поверхности DE, θ_g – угол скорости с осью абсцисс x.

Представим функцию $\chi(t)$ в виде суммы [5, 15]

$$\chi(t)=\chi_0(t)+\omega(t), \tag{5.6}$$

где $\chi_0(t)=r_0+i\theta_0$ – функция Жуковского для вспомогательного течения жидкости по заданной схеме при условии, что на границе AB модуль скорости постоянный и равен V_*, $\omega(t)$ – функция, аналитическая в области G_t и непрерывная в ее замыкании $\bar{G}_t$.

Согласно схеме течения, выполняются граничные условия

$$\begin{gathered}\operatorname{Im}\chi(i\delta)=\operatorname{Im}\chi_0(i\delta)=(0.5+\beta)\pi;\quad \delta\in[0,c)\\ \operatorname{Im}\chi(i\delta)=\operatorname{Im}\chi_0(i\delta)=\beta\pi;\quad \delta\in(c,\pi|\tau|/4]\\ \operatorname{Im}\chi(\pi/2+i\delta)=\operatorname{Im}\chi_0(\pi/2+i\delta)=-\alpha\pi;\quad \delta\in[0,\pi|\tau|/4]\end{gathered} \tag{5.7}$$

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\chi(\xi)=\operatorname{Re}\chi_0(\xi)=0;\quad \xi\in[0,\pi/2]\\ \operatorname{Re}\chi_0(\xi+\pi\tau/4)=\ln\frac{V_0}{V_*}=r_0;\quad \xi\in[0,\pi/2]\end{gathered} \tag{5.8}$$

на границе AB при $t=\xi+\pi\tau/4$, граничные значения гармонически сопряженных функций $r(\xi+\pi\tau/4)$ и $\theta_g(\xi+\pi\tau/4)$ связаны соотношением [6]

$$e^{-r(\xi+\pi\tau/4)}=\frac{(b+\cos\theta_g(\xi+\pi\tau/4))}{V_0}\left|\frac{d\varphi_g}{d\xi}\frac{d\xi}{d\varphi}\right| \tag{5.9}$$

Используя формулы (4.6), (4.11) и (5.4) условие (5.9) представим в виде

$$C\frac{Q}{V_0}F_2(\xi)\left(b+\cos\theta_g\left(\xi+\frac{\pi\tau}{4}\right)\right)\mathrm{e}^{r(\xi+\pi\tau/4)}=1,$$

$$C=\frac{F_1(0,m)}{\sqrt{F_1(0,ci)\left(\vartheta_3^2+\vartheta_2^2\right)}},\quad F_1(t,a)=\vartheta_3(2a)\vartheta_3(2t)-\vartheta_2(2a)\vartheta_2(2t), \tag{5.10}$$

$$F_2(\xi)=\frac{\sqrt{F_1(\xi,ci)(\vartheta_3\vartheta_3(2\xi)+\vartheta_2\vartheta_2(2\xi))}}{F_1(\xi,m)}$$

Используя условия $\theta_g(\pi\tau/4)=\operatorname{Im}\chi(\pi\tau/4)=\beta\pi$ из соотношения (5.10) найдем

$$\frac{Q}{V_0}=\frac{\mathrm{e}^{-r(\pi\tau/4)}}{b+\cos\beta\pi} \tag{5.11}$$

С учетом равенства (5.11) выражение (5.10) представим в виде

$$\frac{CF_2(\xi)}{b+\cos\beta\pi}\left(b+\cos\theta_g\left(\xi+\frac{\pi\tau}{4}\right)\right)\mathrm{e}^{r(\xi+\pi\tau/4)-r(\pi\tau/4)}=1 \tag{5.12}$$

Функция $d\chi_0/dt$ в точке C $(t=ic)$ имеет полюс первого порядка с вычетом равным 1/2. Учитывая, что на сторонах прямоугольника G_t выполняется условие $\mathrm{Re}\left(d\chi_0/dt\right)=0$, продолжим функцию $d\chi_0/dt$ по принципу симметрии Шварца на всю плоскость и получим эллиптическую функцию с периодами π, $\pi\tau$. Представляя функцию $d\chi_0/dt$ в виде линейной комбинации логарифмических производных тета-функций [12] и затем интегрированием получим выражение функции $\chi_0(t)$ [15]

$$\chi_0(t)=\frac{1}{2}\ln\frac{\vartheta_1(t+ic)\,\vartheta_4(t+ic)}{\vartheta_1(t-ic)\,\vartheta_4(t-ic)}+iA_0t+iB_0 \tag{5.13}$$

Используя условия

$$\mathrm{Im}\,\chi_0(0)=(0.5+\beta)\pi,\quad \mathrm{Im}\,\chi_0(\pi/2)=-\alpha\pi,$$

получим

$$A_0=-2(\alpha+\beta)\quad \text{и}\quad B_0=\beta\pi$$

Учитывая, что $\chi_0(\pi\tau/4)=r_0+i\beta\pi$ из соотношения (5.13) выразим величину r_0

$$r_0=c+(\alpha+\beta)\frac{\pi|\tau|}{2} \tag{5.14}$$

Для неизвестной функции $\omega(t)$, выполняются граничные условия

$$\mathrm{Im}\,\omega(i\delta)=0,\quad \mathrm{Im}\,\omega(\pi/2+i\delta)=0,\quad \delta\in\left[0,\pi|\tau|/4\right] \tag{5.15}$$

$$\mathrm{Re}\,\omega(\xi)=0,\quad \xi\in\left[0,\pi/2\right] \tag{5.16}$$

$$\begin{gathered}\frac{CF_2(\xi)}{b+\cos\beta\pi}\left(b+\cos\left(T(\xi)+\mu(\xi)\right)\right)\mathrm{e}^{\nu(\xi)-\nu(0)}=1\\ T(\xi)=\mathrm{Im}\,\chi_0\left(\xi+\frac{\pi\tau}{4}\right),\quad \mu(\xi)=\mathrm{Im}\,\omega\left(\xi+\frac{\pi\tau}{4}\right),\quad \nu(\xi)=\mathrm{Re}\,\omega\left(\xi+\frac{\pi\tau}{4}\right)\end{gathered} \tag{5.17}$$

Учитывая граничные условия (5.15), (5.16) функцию $\omega(t)$ можно разложить в ряд с вещественными коэффициентами [6, 15]

$$\omega(t)=2i\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin(2tk) \tag{5.18}$$

Тогда $\mu(\xi)=2\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin(2\xi k)\,\mathrm{ch}\left(\frac{\pi|\tau|}{2}k\right)$, $\nu(\xi)=-2\sum_{k=1}^{\infty}b_k\cos(2\xi k)\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi|\tau|}{2}k\right)$.

Используя условия

$$\chi\left(\frac{\pi\tau}{4}\right)=\ln\frac{V_0}{V_2}+\beta\pi i,\quad \chi\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{4}\right)=\ln\frac{V_0}{V_1}-\alpha\pi i,$$

найдем

$$\frac{V_0}{V_2}=\exp\left(r_0-2\sum_{k=1}^{\infty}b_k\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi|\tau|k}{2}\right)\right),\quad \frac{V_0}{V_1}=\exp\left(r_0-2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,b_k\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi|\tau|k}{2}\right)\right) \tag{5.19}$$

Таблица 1. Результаты расчета гидродинамических характеристик

L	V_0/V_1	V_0/V_2	V_1/V_2	Q/V_0
0.5	1.93258	2.61023	1.35065	0.45865
0.7	2.03995	2.75523	1.35065	0.43451
0.9	2.24487	3.03204	1.35065	0.39485

Из условия $V_1h_1 = V_2h_2$, формул (3.7) и (5.19) следует, что должно выполняться равенство

$$\frac{V_1}{V_2} = \exp\left(2\sum_{k=1}^{\infty} b_k\left((-1)^k - 1\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi|\tau|k}{2}\right)\right) = \frac{h_2}{h_1} = \frac{b+\cos\alpha\pi}{b+\cos\beta\pi} \tag{5.20}$$

Зависимость $z(t)$ может быть получена интегрированием функции

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\exp(\chi(t))}{V_0}\frac{dW_g}{dt} \tag{5.21}$$

Подставляя в (5.21) формулы (5.4), (5.6), (5.13) и (5.18) получим

$$\frac{dz}{dt} = M\frac{\vartheta_1(2t)}{\vartheta_4(2t)}\left(\frac{\vartheta_1(t+ic)\vartheta_4(t+ic)}{\vartheta_1(t-ic)\vartheta_4(t-ic)}\right)^{0.5}\exp\left(2i\sum_{k=1}^{\infty}c_k\sin(2tk) - 2(\alpha+\beta)ti\right), \tag{5.22}$$

где $M = -\dfrac{4Q}{\pi V_0}\vartheta_2\vartheta_3\exp(\beta\pi i)$.

Согласно схеме течения (см. рис. 1) точка C принадлежит лучу EB, расположенному под углом $\beta\pi$ относительно оси абсцисс, следовательно, должно выполняться равенство

$$\frac{\operatorname{Im} z_C}{\operatorname{Re} z_C} = \frac{\operatorname{Im} z(ic)}{\operatorname{Re} z(ic)} = \operatorname{tg}\beta\pi \tag{5.23}$$

Длина L отрезка EC, характеризующая длину каверны, определяется по формуле

$$L = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z_C + \operatorname{Im}^2 z_C} = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z(ic) + \operatorname{Im}^2 z(ic)} \tag{5.24}$$

Для численного решения задачи задаются геометрические величины α, β, L и параметры a_0, a_1, j_0. В разложении (5.18) сохраняется конечное число n слагаемых и составляется система уравнений, в которой требуется выполнение условия (5.17) в дискретных точках $\xi_k = \pi/(2k)$, где $k = \overline{1,n}$. К полученной системе добавляются уравнения (4.12), (5.23) и (5.24). В процессе решения определяются коэффициенты b_k, $k = \overline{1,n}$ и параметры m, c, $|\tau|$. Затем с помощью соотношений (5.11), (5.19), (5.20) и (5.22) определяются гидродинамические и геометрические характеристики течения.

6. Результаты расчетов. Задача решена при

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0.25, \quad a_0 = 0.906, \quad a_1 = -12.82, \quad j_0 = 100\ \text{А}/\text{см}^2$$

Для заданных значений получаем, что $h_2/h_1 = 1.35065$. В табл. 1 представлены результаты расчетов величин V_0/V_1, V_0/V_2, V_1/V_2, Q/V_0 для трех значений величины L: 0.5, 0.7, 0.9. Величина отношения V_1/V_2 при различных значениях L одна и та же, и совпадает с величиной отношения h_2/h_1.

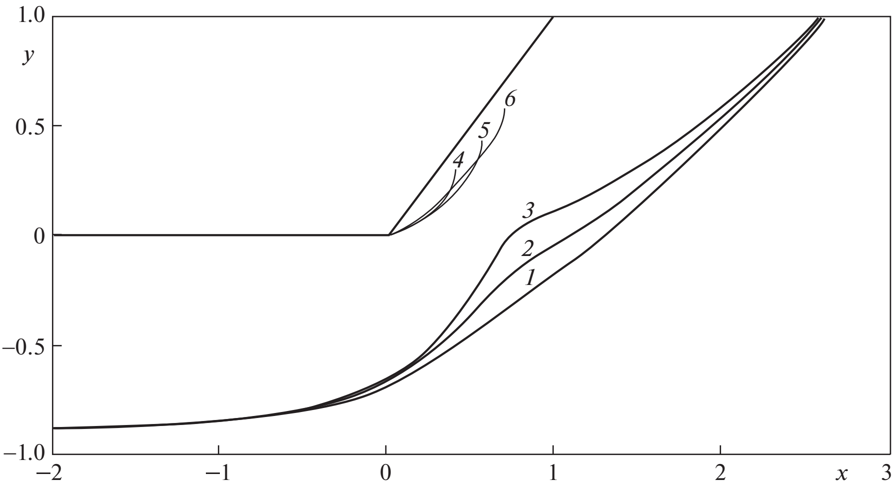


Рис. 6.

На рис. 6 представлены графики анодных границ и каверн. Линии *1* и *4* соответствуют анодной границе и границе каверны для значения $L = 0.5$, линии *2* и *5* для значения $L = 0.7$, линии *3* и *6* для значения $L = 0.9$.

Заключение. Результаты решения отражают качественные эффекты, связанные с влиянием каверны и ее размеров на образование макродефектов обрабатываемой поверхности, высота которых может составлять от 10 до 100 мк [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мороз И.И., Алексеев Г.А., Водяницкий О.А и др.* Электрохимическая обработка металлов. М.: Машиностроение, 1969. 208 с.
2. *Wilson J.F.* Practice and Theory of Electrochemical Machining. R.E. Publishing Company, 1982. 252 p.
3. *Rajurkar K.P., Sundaram M.M., Malshe A.P.* Review of electrochemical and electrodischarge machining // Proc. Seventeenth SIRP conference of electro physicals and chemical machining (ISEM). 2013. V. 6. P. 13–26.
4. *Житников В.П., Зайцев А.Н.* Импульсная электрохимическая размерная обработка. М.: Машиностроение, 2008, 413 с.
5. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
6. *Миназетдинов Н.М.* О кавитационном течении идеальной несжимаемой жидкости при электрохимической обработке металлов // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 1. С. 45–53.
7. *Миназетдинов Н.М.* Об одной модели кавитационного течения при электрохимической обработке // Вестн. Российского нового университета. Сер.: Сложные системы: модели, анализ и управление. 2020. № 3. С. 41–51.
8. *Давыдов А.Д., Козак Е.* Высокоскоростное электрохимическое формообразование. М.: Наука, 1990. 272 с.
9. *Крылов А.Л.* Задача Коши для уравнения Лапласа в теории электрохимической обработки металлов // Докл. АН СССР. 1968. Т. 178. № 2. С. 321–323.
10. *Миназетдинов Н.М.* Гидродинамическая интерпретация одной задачи теории размерной электрохимической обработки металлов // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 60–68.
11. *Клоков В.В.* Электрохимическое формообразование. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. 80 с.

12. *Уитекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа Т. 2. Трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
13. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
14. *Терентьев А.Г.* Струйное обтекание системы двух препятствий // Тр. сем. по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1964. Вып. 1. С. 110–123.
15. *Киселев О.М., Котляр, Л.М.* К задаче о течении тяжелой жидкости с двумя свободными поверхностями. // ПММ. 1973. Т. 37. № 5. С. 849–856.

Hydrodynamic Model of the Phenomenon of "Jet" in Electrochemical Machining of Metals

N. M. Minazetdinov[a,#]

[a] *Russian New University Moscow, Russia*
[#] *e-mail: nminazetdinov@yandex.ru*

During electrochemical machining of metals in the nterelectrode gap in places with low static pressure there is a phenomenon of cavitation. As part of the "ideal process" model of electrochemical processing, a two-dimensional problem is solved related to determining the shape of the treated surface taking into account attached cavitation. A condition is applied that allows taking into account the influence of the electric field on the hydrodynamics of the cavitating flow of an ideal incompressible liquid in the interelectrode gap.

Keywords: electrochemical machining of metals, cavitation, ideal incompressible fluid

REFERENCES

1. *Moroz I.I., Alekseev G.A., Vodyanitskii O.A. et al.* Electrochemical Machining of Metals. Moscow: Mech. Engng., 1969. 208 p. (in Russian)
2. *Wilson J.F.* Practice and Theory of Electrochemical Machining. R.E. Publ. Co., 1982. 252 p.
3. *Rajurkar K.P., Sundaram M.M., Malshe A.P.* Review of electrochemical and electrodischarge machining // Proc. Seventeenth SIRP conference of electro physicals and chemical machining (ISEM). 2013. vol. 6, pp. 13–26.
4. *Zhitnikov V.P., Zaytsev A.N.* Pulse Electrochemical Machining. Moscow: Mech. Engng., 2008. 413 p. (in Russian).
5. *Gurevich M.I.* Theory of Jets in Ideal Fluids. N.Y.: Acad. Press, 1957. 585 p.
6. *Minazetdinov N.M.* Cavitation flow of an ideal incompressible fluid in the electrochemical machining of metals // JAMM, 2017, vol. 81, no. 1, pp. 29–35.
7. *Minazetdinov N.M.* On one model of cavitation flow of electrolyte in electrochemical machining // Vestn. of Russian New Univ. Complex Systems: Models, Analysis, Management, 2020, no. 3, pp. 41–51 (in Russian).
8. *Davydov A.D., Kozak Ye.* High-Speed Electrochemical Forming. Moscow: Nauka, 1990. 272 p. (in Russian).
9. *Krylov A.L.* Cauchy problem for Laplace equation in the theory of electrochemical metal processing // Dokl Akad Nauk SSSR, 1968, vol. 178, no. 2, pp. 321–323 (in Russian).
10. *Minazetdinov N.M.* A hydrodynamic interpretation of a problem in the theory of the dimensional machining of metals // JAMM, 2017, vol. 73, no. 1, pp. 41–47.
11. *Klokov V.V.* Electrochemical Forming. Kazan: Izd. Kazan Univ., 1984. 80 p. (in Russian).
12. *Whitaker E.T., Watson G.N.* A Course of Modern Analysis. Cambridge: Univ. Press, 1927. 612 p.
13. *Lavrent'ev M.A., Shabat B.V.* Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable. Moscow: Nauka, 1987. 688 p. (in Russian).
14. *Terentyev A.G.* Jet flow of two obstacles system // Workshop of the Seminar on Boundary Value Problems, 1964, vol. 1, pp. 110–123. (in Russian).
15. *Kiselev O.M., Kotliar L.M.* On the problem of flow of a heavy fluid with two free surfaces // JAMM, 1973, vol. 37, no. 5, pp. 804–811.

ПАМЯТИ АЛЕКСАНДРА ВЛАДИЛЕНОВИЧА КАРАПЕТЯНА (11.05.1950–31.05.2021)

DOI: 10.31857/S0032823521050076

31 мая 2021 года скоропостижно скончался выдающийся ученый-механик, доктор физико-математических наук, заслуженный профессор Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, член редакционной коллегии журнала Александр Владиленович Карапетян.

Александр Владиленович – яркий представитель школы теории устойчивости движений механических систем, ученик академика Валентина Витальевича Румянцева. В его работах методы Рауса–Ляпунова–Сальвадори исследования устойчивости стационарных движений механических систем были распространены на системы с дифференциальными связями и системы с трением. В докторской диссертации (1983 год) им доказана корректность по Тихонову предельного перехода от систем с вязким трением к системам с дифференциальными связями.

Александр Владиленович успешно занимался теорией систем с сухим трением: разработал новые модели силового взаимодействия при движении твердого тела по плоскости с трением и исследовал возникающие в таких моделях новые динамические эффекты. Он развил метод качественного анализа динамики диссипативных систем на основе бифуркационных диаграмм Смейла.

Среди его учеников три лауреата Золотой медали РАН за лучшие работы по механике среди молодых ученых и студентов, семнадцать кандидатов физико-математических наук и один доктор физико-математических наук.

Александр Владиленович был постоянным автором журнала ПММ. Его первая статья в журнале с результатами, вошедшими в кандидатскую диссертацию, вышла в 1975 году. Являясь членом редколлегии журнала с 2008 года, Александр Владиленович большое внимание уделял качеству научных публикаций, помогая авторам статей советами и ценными замечаниями. Его усилиями подготовлен четвертый номер журнала за 2021 год, посвященный столетнему юбилею Валентина Витальевича Румянцева.

Коллеги и ученики Александра Владиленовича из Москвы, Петербурга, Ульяновска, других городов России и за ее пределами глубоко скорбят в связи с внезапной кончиной этого прекрасного человека и ученого. Память о нем будет жива в сердцах всех, кто его знал.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. В журнале публикуются результаты в области механики, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях, по следующим направлениям:

- общая механика, или механика систем, включая проблемы управления механическими системами;
- механика жидкости и газа;
- механика деформируемого твердого тела;
- вычислительная механика.

По согласованию с редколлегией в журнале печатаются также обзорные статьи по указанным направлениям. Авторы обязаны предъявлять повышенные требования к изложению и языку рукописи. Рекомендуется безличная форма изложения.

2. Фамилии авторов статьи располагаются в алфавитном порядке, инициалы ставятся перед фамилией. Сведения об авторах с указанием имени, отчества, почтового домашнего адреса, места работы и телефонов (каждого из соавторов), а также адреса электронной почты, по которому будет выслана корректура, помещаются дополнительно на отдельной странице после текста статьи и фигур.

3. Статья должна быть представлена в электронном виде (Word – шрифт № 14 Times New Roman), формулы должны быть отделены от текста бóльшим интервалом и напечатаны более свободно, чем основной текст.

4. “Шапка” статьи и ее перевод в конце статьи должны быть оформлены по единому стандарту. Вся информация об авторах размещается в “шапке” статьи.

а) Ссылки на места работы латинскими буквами: [a], [b], [c] и т.д.;

б) Ссылки на электронные адреса: *, ** и т.д.

Образец оформления шапки приведен ниже:

УДК 531.36

О СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЯХ СПУТНИКА
ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ УПРУГИХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

© 2018 г. А. Б. Иванов[a,*], В. Г. Петров[b,]**

[a] Московский физико-технический институт

[b] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

** e-mail: ivanov@mail.ru*

***e-mail: petrov@rambler.ru*

Поступила в редакцию 14.07.2016 г.

После доработки 20.10.2016 г.

Принята к публикации 25.12.2016 г.

Для изучения влияния внутренних сил на вращательное движение спутника в центральном гравитационном поле используется модель М.А. Лаврентьева (спутник моделируется твердой оболочкой с шаровым демпфером) в предположении, что при относительных перемещениях демпфера возникают как диссипативные, так и упругие внутренние силы. В рамках этой модели для динамически симметричного спутника на круговой орбите определены все стационарные вращения и исследована их устойчивость в зависимости от значений коэффициентов демпфирования и жесткости.

Ключевые слова: стационарные вращения, спутник, центр масс, устойчивость

DOI:

5. Все материалы статьи – текст, подстрочные примечания, литература печатаются через два интервала. Там, где впервые в тексте встречается ссылка на рисунок, необходимо написать на полях рукописи ее номер (рис. 1, рис. 2 и т.д.). Нумерация рисунков последовательная цифровая, независимо от их количества в тексте. На поля рукописи выносятся также ссылки на таблицы. В заголовках таблиц следует пользоваться обозначениями. Таблицы и список цитируемой литературы следует печатать на отдельных от текста страницах. В левом верхнем углу первой страницы необходимо указать индекс УДК.

Для редакции отдельно от статьи прилагаются: фамилии авторов и название статьи на английском языке, список принятых обозначений.

При пересылке статьи в редакцию обычной почтой не использовать ценную почту и уведомления.

6. Необходимо соблюдать строгое различие в начертании строчных (малых) и прописных (больших) латинских букв: например, V и v, S и s, O и o, U и u, K и k, P и p и т.п., а также букв, похожих одна на другую: например, g и q, l и e, u и n и др. Латинскую букву I следует писать как римскую единицу I, в отличие от J – буква "жи". Следует делать различие между O и o (буквами) и 0 (нулем). Индексы и степени должны быть написаны строго выше символов, к которым они относятся; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а в нижних индексах – единицу от запятой.

Для математических обозначений рекомендуется употреблять наиболее простые символы и индексы. Не следует применять индексы из заглавных букв и букв русского алфавита. Для критических значений рекомендуется в качестве индекса звездочка внизу (a_*), для индексов вверху – градус (a°) и т.п.

7. При нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой, первая цифра – раздел, вторая цифра после точки – номер формулы в этом разделе ((1.1), (1.2) и т.д.). Номер формулы ставить с правой стороны в конце формулы, а для группы формул – в средней части.

8. Литература приводится по порядку цитирования в конце статьи с указанием фамилии и инициалов автора, полного названия книги (статьи), издательства, названия журнала полностью (год, том, номер, номера страниц) в соответствии с новыми правилами ГОСТ; в тексте должны быть ссылки в квадратных скобках: [1], [2, 3] и т.д.

Ссылки на иностранные источники даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются, в случае перевода на русский язык, указанием на перевод.

Ссылки на препринты, депонированные рукописи, диссертации и авторефераты даются в подстрочных примечаниях.

9. В случае переработки статьи датой поступления считается дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией.

10. Автору следует переоформить принятую к печати статью после научного редактирования в кратчайший срок и вернуть первоначальный вариант вместе с переоформленным; к переоформленному варианту приложить диск или переслать электронный вариант статьи на почту редакции. Если статья находится на переоформлении более 30 дней, датой поступления считается дата получения редакцией переоформленного варианта.

11. Редколлегия не сообщает мотивов отказа в публикации работы и оставляет за собой право не возвращать автору один экземпляр.

Технические требования к изготовлению иллюстративных материалов.

1. Иллюстрационный материал прилагается *на отдельных страницах*. Графики должны быть пригодными для прямого воспроизведения; графики выполняются с обязательным нанесением квадратной сетки (не более трех-четырех квадратов по горизонтали и вертикали). Размер графиков по ширине рекомендуется не более 15–17 см. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках.

2. Иллюстрации должны иметь размеры, соответствующие их информативности, и иметь ширину, равную полосе набора, 2/3, 1/2, 1/3 полосы набора.

3. В случае изменения размера иллюстрации на процессе внесения редакционной правки, текст уменьшается пропорционально всему изображению.

4. Толщина рамки, шкал графиков и засечек – 0.5 pt; толщина сетки – 0.25 pt; длина засечек – 1.2 мм, промежуточные – 0.8 мм. Засечки по возможности должны быть направлены внутрь графиков.

5. Толщина основных линий графиков – 1 pt (в случае высокой информационной загруженности иллюстрации допускается уменьшение толщины основных линий до 0.5 pt).

6. Масштабные линейки (по возможности) наносятся в нижнем правом углу изображения справа, толщина линии масштабной линейки 0.5 pt.

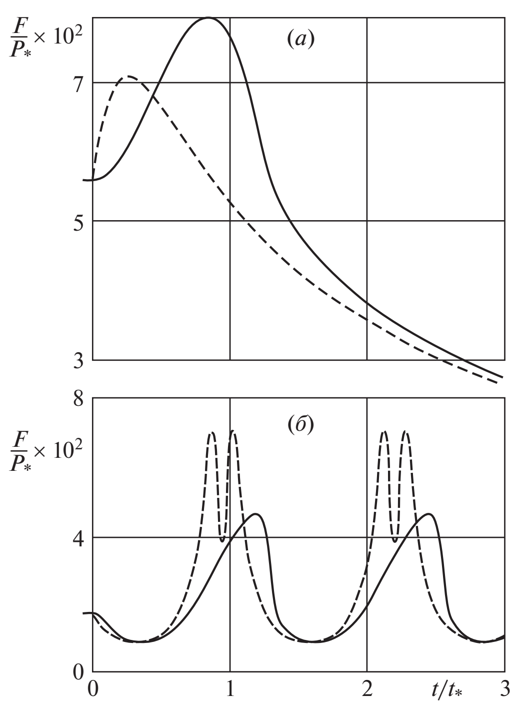
7. Если иллюстрация состоит из нескольких изображений (графиков), то каждое из этих изображений (графиков) обозначается буквами кириллического алфавита, заключенными в скобки – (а), (б), и т.д., шрифтом 10 pt, по центру каждого изображения (графика).

8. Символы греческого алфавита в иллюстрациях должны быть набраны прямым шрифтом Symbol.

9. Авторские рисунки, предоставленные в цвете, изготавливаются цветными (в цветовой модели RGB), если это имеет смысловое (цвет одиночного графика всегда черный).

10. Точка не ставится после размерностей (с – секунда, г – грамм, мин – минута, сут – сутки, град – градус) и некоторых числительных (млн – миллион, млрд – миллиард, трлн – триллион).

Пример оформления рисунка приведен ниже.



11. К статье должны прилагаться файлы с рисунками в одном из форматах: eps, tiff, jpg, bmp, ppt, png.

Правила оформления библиографических ссылок

I. Книга

Сагомонян А.Я. (1974) Проникание, Изд-во МГУ, Москва.

Whittaker E.T. (1927) Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, Cambridge Univ. Press, Cambridge = Уиттекер Е.Т. (1937) Аналитическая динамика, ОНТИ, Москва.

II. Журнал

Вильке В.Г. (2002) Условия качения колеса с армированной шиной без проскальзывания, Вестн. МГУ, Сер. 1, Математика, механика. Вып. 5, 38.

Stewartson K. (1968) On the flow near the trailing edge of a plate, Proc. R. Soc. London, Ser. A, 306 (1486), 275.

Rohde S.M. (1972) The optimum slider bearing in terms of friction, J. Lubr. Technol., 94(3), 275 = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки, 94 (3), 82.

III. Препринт

Чашечкин Ю.Д., Байдулов В.Г. (2017) Исследование тонкой структуры периодических течений в неоднородных жидкостях, Препринт № 1155, ИПМ им. А.Ю. Ишлинского, Москва.

IV. Диссертация, автореферат

Чиж Г.К. (1972) Диссертация на соискание ученой степени канд. хим. наук, Химико-технологический институт, Днепропетровск.

Примечания

1. Если авторов более четырех, необходимо давать первые три фамилии и др. (*Иванов Р.И.*, *Семенов Г.П.*, *Терехов П.И.* и др.).
2. Если составителей, редакторов, переводчиков три и более, то оставляют только первую фамилию и др. (Земля / Под ред. Иванова Р.И. и др).
3. Рус. перев.— эти слова заменяются знаком = (равно).