
СОДЕРЖАНИЕ

Номер 6, 2022

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

- Математическая модель управления техническим состоянием элементов сложных технических систем на основе закона распределения функции отказов элементов
О. И. Кос, В. Ю. Смирнов 3
-

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

- Система взаимосвязанного управления группой беспилотных летательных аппаратов в условиях информационного противодействия
В. А. Болдинов, В. А. Бухалёв, А. А. Скрынников 11
-

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

- Приближенно-оптимальный синтез систем оперативного управления динамическими объектами на основе квазилинеаризации и достаточных условий оптимальности
А. В. Данеев, В. Н. Сизых 20
- Диаграммы функций оптимального управления в задаче наивысшего перемещения платформы с двумя осцилляторами
О. Р. Каюмов 38
-

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

- Оптимизация информационных обменов в сети автономных абонентов
А. М. Грузликов, Н. В. Колесов, Е. Г. Литуненко, Ю. М. Скородумов 56
- Некоторые модификации целочисленных оптимизационных задач с учетом неопределенности и риска
М. А. Горский, А. В. Мищенко, Л. Г. Нестерович, М. А. Халиков 65
- Идентификация параметров дискретного газлифтного процесса
Ф. А. Алиев, Н. С. Гаджиева, Г. Г. Маммадова, А. А. Намазов, М. С. Халилов 77
-

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

- Об оптимальном раскачивании качелей стоящим на них человеком
Л. А. Климина, А. М. Формальский 85
-

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

- Матрица нечетких корреспонденций модели авиационных перевозок
В. А. Нестеров, В. А. Судаков, К. И. Сыпало, Ю. П. Титов 95
- Декомпозиционный метод решения трехиндексной задачи об эффективной стрельбе
Н. В. Антипова, Л. Ванг, А. П. Тизик, В. И. Цурков 103
- Анализ распределения нагрузки и межузловых потоков при различных стратегиях маршрутизации в многопользовательской сети
Ю. Е. Малашенко, И. А. Назарова 112
- Согласование индивидуальных ранжировок методом ветвей и границ
В. Н. Нефедов, В. А. Осипова 123
-

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Интеллектуальная поддержка решения задачи оперативного целеполагания экипажем самолета на этапе “Посадка”: коллизия «Пробег по взлетно-посадочной полосе – угроза “Слабое торможение”» <i>А. М. Аспидова, А. И. Еремин, Б. Е. Федунов</i>	133
Фреймовая регуляризация сверточной нейронной сети в задачах классификации изображений <i>А. Н. Гнеушев, А. Д. Григорьев, И. А. Матвеев</i>	150

РОБОТОТЕХНИКА

Применение каркасных геометрических моделей для управления причаливанием космических объектов <i>Ю. Ф. Голубев, В. М. Мирхайдаров, А. В. Яскевич</i>	161
---	-----

**ТЕОРИЯ СИСТЕМ
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ**

УДК 004.052,519.718

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИМ
СОСТОЯНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ
СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ФУНКЦИИ ОТКАЗОВ ЭЛЕМЕНТОВ**

© 2022 г. О. И. Кос^{а,*}, В. Ю. Смирнов^а

^а МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

*e-mail: kosoksana90@gmail.com

Поступила в редакцию 03.07.2022 г.

После доработки 13.07.2022 г.

Принята к публикации 01.08.2022 г.

Задача разработки математического обеспечения управления техническим состоянием сложных технических систем по их фактическому состоянию становится все более актуальной. Построенная вероятностная модель сложной технической системы позволит осуществлять замены или ремонты элементов в оптимальные моменты времени, обеспечивающие максимизацию вероятности безотказной работы систем при минимуме экономических затрат.

DOI: 10.31857/S0002338822060129

Введение. Для определения срока службы сложной системы по фактическому техническому состоянию, а не по нормируемым межремонтным срокам необходимо построить вероятностную модель этой системы. Это позволит осуществлять замены или ремонты элементов сложной технической системы в соответствии с максимально возможным сроком службы, обеспечивающим заданную вероятность безотказной работы.

1. Постановка задачи. В качестве показателя надежности сложной технической системы возьмем коэффициент оперативной готовности. Он характеризует способность элемента системы быть готовым к эксплуатации в произвольный момент времени и проработать после этого еще определенное время с заданной вероятностью безотказной работы.

Коэффициент оперативной готовности представим вероятностью $p(x, t)$ того, что в момент t элемент будет в работоспособном состоянии и после момента t элемент проработает время x [1–4]. Назовем обозначенное выше время x интервалом безотказности. За единицу времени примем интервал, в течение которого сложная техническая система испытывает единичную нагрузку.

Обозначим через T_1 среднюю длительность планового предупредительного ремонта или замены, а через T_2 – среднюю длительность внепланового аварийного ремонта или замены. Пусть $G(t)$ – функция распределения интервалов времени между плановыми заменами или ремонтами, т.е. заменами или ремонтами, происходящими по определенному графику.

Будем считать отказом сложной технической системы момент времени, при котором вероятность безотказной работы системы достигает своего установленного предельного значения, например 0.95 или 0.98.

Допустим, что $F(t)$ – функция распределения интервалов времени между внеплановыми заменами или ремонтами, т.е. заменами или ремонтами, возникающими при обнаружении отказа; $H(t)$ – математическое ожидание числа отказов за время от 0 до t . Функция $H(t)$ дифференцируема.

2. Решение задачи максимизации показателя надежности. Сложная техническая система функционирует долгий период. Следовательно, коэффициент оперативной готовности $p(x, t)$ можно рассмотреть при $t \rightarrow \infty$ [5]. Обозначим

$$p(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t). \quad (2.1)$$

В этом случае задача максимизации выбранного показателя надежности $p(x, t)$ сводится к выбору такого закона распределения $G(t)$, при котором вероятность $p(x)$ принимает максимальное значение, так как можно произвольно варьировать интервалами времени между плановыми заменами или ремонтами. Назовем профилактикой ремонт или замену работоспособного элемента.

Так как вероятность $p(x, t)$ характеризует событие, состоящее в том, что в момент времени t элемент находится в рабочем состоянии и он безотказно проработает интервал длительностью x (т.е. вероятность безотказной работы системы к моменту $t + x$ не достигнет своего установленного предельного значения), то это событие является суммой двух следующих событий [6] в течение интервала времени:

в интервале $(0, t)$ не планируется проведение профилактик, а в интервале $(0, t + x)$ элемент не отказал;

в момент ξ ($0 \leq \xi \leq t$) окончилось восстановление системы (внеплановый аварийный ремонт либо плановая предупредительная профилактика), а далее в оставшемся интервале (ξ, t) не планируется проведение плановой предупредительной профилактики и в интервале $(\xi, t + x)$ не произошло ни одного отказа этого элемента [1, 2, 7, 8].

Вероятность первого события:

$$[1 - F(t + x)][1 - G(t)]. \quad (2.2)$$

Вероятность второго события выразим через интеграл Лебега—Стилтьеса:

$$\int_0^t [1 - G(t - \xi)][1 - F(t + x - \xi)] dH(\xi). \quad (2.3)$$

В силу несовместности этих событий коэффициент оперативной готовности запишем следующим образом:

$$p(x, t) = [1 - G(t)][1 - F(t + x)] + \int_0^t [1 - G(t - \xi)][1 - F(t + x - \xi)] dH(\xi). \quad (2.4)$$

Обозначим

$$Q(t) = [1 - G(t)][1 - F(t + x)]. \quad (2.5)$$

Чтобы в выражении (2.4) перейти к пределу при $t \rightarrow \infty$, воспользуемся узловой теоремой восстановления: поскольку $Q(t)$ — неотрицательная, невозрастающая функция, определенная при всех t и $Q(t) < \infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t Q(t - u) dH(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} Q(u) du, \quad (2.6)$$

где μ — математическое ожидание интервала между заменами (ремонтами) элемента (либо после отказа, либо после выработанного расчетного ресурса), т.е. математическое ожидание времени между двумя соседними моментами замен (ремонта) элемента [9]. Переходя в выражении (2.4) к пределу при $t \rightarrow \infty$ и учитывая, что первое слагаемое стремится к нулю, получим

$$p(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} [1 - G(t)][1 - F(t + x)] dt. \quad (2.7)$$

Интервал между моментами обновления системы состоит из двух частей: интервала от момента окончания предыдущего обновления до момента начала восстановительных работ, который равен $\min(\theta, \eta)$, где θ — случайное время безотказной работы системы, η — случайная величина, определяющая момент последующей предупредительной профилактики. Поэтому μ находится по формуле полного математического ожидания:

$$\mu = M\{\min(\theta, \eta)\} + T_1 P\{\theta > \eta\} + T_2 P\{\theta \leq \eta\} = \quad (2.8)$$

$$= \int_0^{\infty} (1 - G(t))(1 - F(t)) dt + T_1 \int_0^{\infty} G(t) dF(t) + T_2 \int_0^{\infty} F(t) dG(t).$$

После подстановки выражения из правой части (2.8), в уравнение (2.7) получим

$$p(x) = \frac{\int_0^{\infty} [1 - G(t)][1 - F(t+x)] dt}{\int_0^{\infty} [1 - G(t)][1 - F(t)] dt + T_1 \int_0^{\infty} G(t) dF(t) + T_2 \int_0^{\infty} F(t) dG(t)}. \quad (2.9)$$

Так как числитель и знаменатель выражения из правой части (2.9) представлены интегралами, то математические преобразования для упрощения громоздких выкладок проведем отдельно для числителя и знаменателя, а потом соберем вместе.

Интегрируем по частям числитель в уравнении (2.9):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (1 - G(t))(1 - F(t+x)) dt &= \int_0^{\infty} (1 - F(t+x)) - G(t)(1 - F(t+x)) dt = \\ &= \int_0^{\infty} (1 - F(t+x)) dt - \int_0^{\infty} G(t)(1 - F(t+x)) dt = \left[\int_0^t [1 - F(t+x)] dt \right] G(t) \Big|_0^{\infty} - \\ &- \int_0^{\infty} G(t) d \left(\int_0^t [1 - F(t+x)] dt \right) = \int_0^{\infty} \left[\int_0^t [1 - F(t+x)] dt \right] dG(t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Тогда последнее выражение в равенствах (2.10), а следовательно, числитель в выражении (2.9) преобразуются к виду

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^t [1 - F(t+x)] dt \right] dG(t) = \int_0^{\infty} \omega(t, x) dG(t). \quad (2.11)$$

Интегрируем по частям знаменатель выражения, стоящего в правой части (2.9):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (1 - F(t))(1 - G(t)) dt + T_1 \int_0^{\infty} G(t) dF(t) + T_2 \int_0^{\infty} F(t) dG(t) &= \\ = \left(\int_0^t [1 - F(t)] dt \right) G(t) d \left(\int_0^{\infty} [1 - F(t)] dt \right) + T_1 G(t) F(t) \Big|_0^{\infty} - T_1 \int_0^{\infty} F(t) dG(t) + T_2 \int_0^{\infty} F(t) dG(t). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Подставив $\omega(t, x)$ из (2.11) в (2.12), получим (2.13) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t [1 - F(t)] dt \right) G(t) d \left(\int_0^{\infty} [1 - F(t)] dt \right) + T_1 G(t) F(t) \Big|_0^{\infty} - T_1 \int_0^{\infty} F(t) dG(t) + T_2 \int_0^{\infty} F(t) dG(t) &= \\ = \omega(t, 0) G(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} G(t) d\omega(t, 0) + T_1 + \int_0^{\infty} (T_2 + T_1) F(t) dG(t) = \int_0^{\infty} \omega(t, 0) dG(t) + \\ + \int_0^{\infty} [T_1 + (T_2 - T_1) F(t)] dG(t) = \int_0^{\infty} [\omega(t, 0) + T_1 + (T_2 - T_1) F(t)] dG(t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Подставляя числитель из (2.11) и знаменатель из (2.13) в (2.9), получим выражение для $p(x)$:

$$p(x) = \frac{\int_0^{\infty} \psi(t, x) dG(t)}{\int_0^{\infty} [\psi(t, 0) + T_1 + (T_2 - T_1) F(t)] dG(t)}, \quad (2.14)$$

где $\omega(t, x)$ определяется из (2.11).

Обозначим:

$$\begin{aligned} A(t) &= \omega(t, 0) > 0, \\ B(t) &= \omega(t, 0) + T_1 + (T_2 - T_1)F(t) > 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Тогда выражение для $p(x)$ из (2.14) представляется как

$$p(x) = \frac{\int_0^{\infty} A(t) dG(t)}{\int_0^{\infty} B(t) dG(t)}. \quad (2.16)$$

Правая часть уравнения (2.16) является дробно-линейным функционалом относительно $G(t)$.

Для достижения поставленной цели требуется обеспечить максимум вероятности $p(x)$ за счет выбора $G(t)$. Это задача чрезвычайно сложна, однако ее можно свести к задаче нахождения экстремума функции одного аргумента. Если предположить, что элемент будет ремонтироваться через постоянное время τ , тогда $G(t)$ можно представить в виде ступенчатого распределения:

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq \tau, \\ 1 & \text{при } t > \tau. \end{cases} \quad (2.17)$$

Исследования, проведенные в [10], показали, что распределение (2.17) в виде функции Хевисайда обеспечивает максимум дробно-линейного функционала (2.16). Учитывая (2.17), получим выражение (2.18):

$$p(x, \tau) = \frac{\int_0^{\tau} [1 - F(t + x)] dt}{\int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt + T_1 + (T_2 - T_1)F(\tau)}. \quad (2.18)$$

Продифференцируем выражение (2.18) по τ :

$$\begin{aligned} (p(x, \tau))' &= \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} [1 - F(t + x)] dt \right] \left[\int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt + T_1 + (T_2 - T_1)F(\tau) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt + T_1 + (T_2 - T_1)F(\tau) \right) \right] \int_0^{\tau} [1 - F(t + x)] dt \right\} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\left[\int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt + T_1 + (T_2 - T_1)F(\tau) \right]^2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Используем правило Лейбница дифференцирования по параметру:

$$\frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\omega(y)} f(x, y) dx = f(\omega(y), y) \omega'(y) - f(\varphi(y), y) \varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\omega(y)} f'(x, y) dx.$$

Воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} [1 - F(t + x)] dt \right) &= 1 - F(\tau + x) \frac{\tau}{\partial \tau} - ((1 - F(x)) * 0) + \\ &+ \int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} [1 - F(t + x)] dt = 1 - F(\tau + x), \end{aligned} \quad (2.20)$$

а также тем, что

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt + T_1 + (T_2 - T_1) F(\tau) \right) = 1 - F(\tau) + (T_2 - T_1) \frac{dF(\tau)}{d\tau}. \quad (2.21)$$

Для поиска экстремума функции $p(x, \tau)$ приравняем выражение в фигурных скобках из (2.19) к 0 и, применяя (2.20) и (2.21), получим

$$\int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt + T_1 + (T_2 - T_1) F(\tau) - F(\tau + x) \int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt - F(\tau + x) T_1 - (T_2 - T_1) F(\tau) F(\tau + x), \quad (2.22)$$

$$\left[\int_0^{\tau} [1 - F(t + x)] dt - F(\tau) \int_0^{\tau} [1 - F(t + x)] dt + (T_2 - T_1) \frac{dF(\tau)}{d\tau} \int_0^{\tau} [1 - F(t + x)] dt \right] = 0.$$

После упрощений (2.22) найдем, что

$$(1 - F(\tau + x)) T_1 = (T_2 - T_1) \left[(1 - F(\tau + x)) \left(-F(\tau) - \frac{dF(\tau)}{d\tau} (1 - F(\tau + x)) \right) dt \right] + \int_0^{\tau} [1 - F(t) dt - F(\tau + x) \int_0^{\tau} [1 - F(t + x)] dt]. \quad (2.23)$$

Дальнейшие упрощения (2.23) приводят к следующему результату:

$$\frac{T_1}{T_2 - T_1} = \left[\frac{(F(\tau + x) - 1) F(\tau)}{1 - F(\tau + x)(1 - F(\tau))} + \frac{\partial F(\tau)}{1 - F(\tau)(1 - F(\tau + x))} \int_0^{\tau} (1 - F(t + x)) dt \right] (1 - F(\tau)) + \frac{(-1)}{T_2 - T_1} \left[\frac{(1 - F(\tau + x))}{1 - F(\tau + x)} \int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt \right] + \frac{(F(\tau) - 1)}{1 - F(\tau + x)} \int_0^{\tau} [1 - F(t + x)] dt. \quad (2.24)$$

Преобразуем уравнение (2.24):

$$\frac{T_1}{T_2 - T_1} = \left[\frac{(F(\tau + x) - 1)}{1 - F(\tau)} F(\tau) + \lambda(\tau) \int_0^{\tau} (1 - F(t + x)) dt \right] \frac{1 - F(\tau)}{1 - F(\tau + x)} + \frac{1}{T_2 + T_1} \left[\frac{1 - F(\tau)}{1 - F(\tau + x)} \int_0^{\tau} [1 - F(t + x)] dt - \int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt \right]. \quad (2.25)$$

После упрощений окончательно получим

$$\frac{T_1}{T_2 - T_1} = \left[\frac{F(\tau + x) - 1}{1 - F(\tau)} F(\tau) + \lambda(\tau) \int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt \right] \frac{1 - F(\tau)}{1 - F(\tau + x)} + \frac{1}{T_2 - T_1} \left[\frac{1 - F(\tau)}{1 - F(\tau + x)} \int_0^{\tau} [1 - F(t + x)] dt - \int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt \right], \quad (2.26)$$

где $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$.

Уравнение (2.27) разрешимо, так как легко проверить, что оно обращается в верное равенство при $\tau = 0$ и при $\tau \rightarrow \infty$. Чтобы решить поставленную задачу, нужно из корней уравнения (2.27) найти такой, в котором функция $p(x, \tau)$ достигает наибольшего значения. Пусть τ_1, \dots, τ_n – корни уравнения (2.27). Поскольку $T_2 > T_1$ и $\lambda'(t) > 0$, оптимальным значением корня (обозначим его через τ_0) следует считать наименьший положительный корень уравнения (2.27), так как в данном случае функция $\max p(x, \tau_i), i = \overline{1, n}$, является монотонно убывающей по τ .

При некоторых допущениях (2.27) можно упростить, например, если считать, что интервал безотказности x намного меньше среднего времени безотказной работы элемента, что чаще всего и бывает на практике, т.е.

$$x \ll T_0,$$

где T_0 – среднее время безотказной работы элемента, которое можно вычислить по формуле

$$T_0 = \int_0^{\infty} [1 - F(t)] dt.$$

Тогда на основании теоремы Лагранжа о среднем в дифференциальном исчислении

$$1 - F(1+x) \approx 1 - F(t) + [1 - F(t)]' x = 1 - F(t) - f(t)x.$$

В этом случае (2.19) преобразуется к виду

$$p(x, \tau) \approx \frac{\int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt - xF(\tau)}{\int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt + T_1 + (T_2 - T_1)F(\tau)}. \quad (2.27)$$

Дифференцируя (2.28) по τ и приравнявая полученный результат к нулю, получаем уравнение, которое является необходимым условием экстремума функции $p(x, \tau)$ с учетом введенного допущения:

$$\frac{T_1}{T_2 - T_1 + x} \approx -F(\tau) + \lambda(\tau) \int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt - \frac{T_1}{T_2 - T_1 + x} x \lambda(\tau). \quad (2.28)$$

При $T_1 < T_2$ и $\lambda'(t) > 0$ уравнение (2.29), в силу монотонного возрастания функции, стоящей в правой части этого уравнения, имеет единственный корень τ_0 – величину оптимального значения интервала предупредительных замен (ремонта). По истечении интервала τ_0 элемент должен быть обязательно заменен (отремонтирован).

Если задать еще одно часто выполняемое на практике допущение $T_1 \lambda(\tau)x \ll 1$, то (2.29) запишем как

$$\frac{T_1}{T_2 - T_1 + x} \approx \lambda(\tau) \int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt - F(\tau). \quad (2.29)$$

Уравнение (2.30) можно привести к виду уравнения Трулава [1]:

$$\frac{T_1}{T_2 + x} \approx 1 - \frac{1}{1 - F(\tau) + \lambda(\tau) \int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt}. \quad (2.30)$$

3. Решение интегродифференциального уравнения. Решением уравнения (2.29) является оптимальный интервал замен или ремонтов элементов τ_0 , который обеспечивает экстремум функции (2.25) и, следовательно, максимум функционала (2.27). Таким образом, если произвести замену или ремонт элемента сложной технической системы через интервал времени τ_0 , то будет обеспечен максимум вероятности безотказной работы данного элемента от этого момента времени в течение предупредительного интервала x . Решение интегродифференциального уравнения (2.29) в аналитическом виде не представляется возможным. Следовательно, необходимо применение численных методов.

Для нахождения величины оптимального значения интервала предупредительной замены (ремонта) необходимо решить интегродифференциальное уравнение (2.29). Оно может быть решено с помощью различных численных методов, одним из которых является графический метод, основанный на построении графиков функции и определении точек их пересечения. Данный метод весьма приближенный и имеет невысокую точность.

Для численного решения уравнения (2.29) необходимо выбрать оптимальный метод вычисления интегралов, входящих в это уравнение. Поставим в соответствие интегралу в правой части (2.29) квадратурную формулу:

$$\int_0^1 f(s) ds \approx \sum_{k=0}^m p_k f_{s_k}, \quad (2.31)$$

где s – фиксированный аргумент, p_k – весовые коэффициенты квадратурной формулы.

Проведенный анализ показал, что для (2.30) оптимальным будет вычисление интеграла в правой части уравнения методом Симпсона. Суть метода заключается в приближении подынтегральной функции на отрезке $[a, b]$ интерполяционным многочленом второй степени $p_2(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_2(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right), \quad (2.32)$$

где $f(a)$, $f(b)$,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (2.33)$$

– значения функции в соответствующих точках: на концах отрезка и в его середине.

Таким образом решение интегродифференциального уравнения (2.30) производится с использованием метода Симпсона. С помощью представленного алгоритма проведены расчеты оптимальных интервалов предупредительных замен (ремонтов) элементов целого ряда эксплуатируемых в настоящее время сложных технических систем [11].

Заключение. В настоящее время наблюдается устойчивая тенденция перехода от стратегии управления техническим состоянием сложных технических систем на основе нормируемых межремонтных сроков к стратегии управления по фактическому техническому состоянию, при применении которой решается задача оптимального управления по критерию “надежность–затраты” [12–14]. В результате решения полученного интегродифференциального уравнения (2.30) с помощью численного метода находится величина оптимального значения интервала предупредительной замены (ремонта) для каждого элемента системы. Построенная вероятностная модель сложной технической системы позволит осуществлять замены или ремонты элементов в оптимальные моменты времени, обеспечивающие максимизацию вероятности безотказной работы сооружений при минимуме экономических затрат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барзилович Е.Ю., Каштанов В.А. Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем. М.: Сов. радио, 1971. 340 с.
2. Барзилович Е.Ю. Оптимально управляемые случайные процессы и их приложения. Егорьевск: ЕАТК ГА, 1996. 299 с.
3. Барзилович Е.Ю., Воскобоев В.Ф. Эксплуатация авиационных систем по состоянию (элементы теории). М.: Транспорт, 1981. 380 с.
4. Иосилевский Л.И. Практические методы управления надежностью железобетонных мостов. 2-е изд., испр. и доп. М.: НИЦ “Инженер”, 2001. 295 с.
5. Кос О.И., Смирнов В.Ю. Оптимальный интервал предупредительных замен для искусственных сооружений железных дорог. Мир транспорта. М.: МИИТ, 2013. С. 152–155.
6. Гнеденко Б.В. Математические вопросы теории надежности / Под ред. Б.В. Гнеденко. М.: Радио и связь, 1983. 440 с.
7. Васильев А.И. Основы надежности транспортных сооружений: учеб. пособие. М.: МАДИ, 1980. 46 с.
8. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. 4-е изд. Перераб. и доп. М.: Наука, 1969. 576 с.
9. Кос О.И. Схема управления техническим состоянием искусственных сооружений. Мир транспорта. М.: МИИТ, 2016.
10. Барзилович Е.Ю., Каштанов В.А. Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем. М.: Сов. радио, 1971. 340 с.
11. Кос О.И. Схема управления техническим состоянием искусственных сооружений. Мир транспорта. М.: МИИТ, 2016.

12. *Smirnov V.U., Kos O.I.* Program Module for Calculating the Optimal Interval of Preventive Substitutions // Intern. Conf. “Quality management, Transport and Information. Security Information Technologies” (IT&QM&IS). St. Petersburg, Russia, 2017.
<https://doi.org/10.1109/ITMQIS.2017.8085811>
13. *Kos O.I., Smirnov V.U., Eseva E.A.* Adaptation of Reliability Calculation Software Packages for High Performance Distributed Computing Systems // Proc. IEEE Intern. Conf. “Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies” (IT&QM&IS). St. Petersburg, Russia: St. Petersburg Electrotechnical University “LETI”, 2018. P. 219–221.
<https://doi.org/10.1109/ITMQIS.2018.8525095>.
14. *Smirnov V.U., Yeseva E.A., Kos O.I.* Rules and Regulations of Potential Impact of Acoustic Factors from High-Speed Railway Lines on Environment and Human Body. During Construction of New Facilities // Chaotic Modeling & Simulation Web Conf. St. Petersburg, Springer Proceedings in Complexity, Springer Nature Switzerland AG, 2021. P. 1–12.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-70795-8_61

**УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ
И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

УДК 517.977

**СИСТЕМА ВЗАИМОСВЯЗАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ГРУППОЙ
БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ
В УСЛОВИЯХ ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ¹**© 2022 г. В. А. Болдинов^{a,*}, В. А. Бухалёв^b, А. А. Скрынников^{a,c}^a МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия^b Московский научно-исследовательский телевизионный ин-т, Москва, Россия^c ФАУ “ГосНИИАС”, Москва, Россия

*e-mail: viktorboldinov@mail.ru

Поступила в редакцию 19.04.2022 г.

После доработки 12.05.2022 г.

Принята к публикации 01.08.2022 г.

Рассматривается задача взаимосвязанного управления группой беспилотных летательных аппаратов, наводящихся на группу объектов, часть которых является ложными, создаваемыми с помощью имитационных помех и усиливаемыми маскирующими помехами, которые вызывают перерывы информации. Разработан информационно-управляющий алгоритм взаимодействующих беспилотных летательных аппаратов, осуществляющий распознавание помеховых ситуаций, оценивание координат объектов и наведение с требуемой точностью к заданной дистанции между соседними беспилотными летательными аппаратами. Приведен пример построения информационно-управляющего взаимосвязанного алгоритма в задаче наведения двух беспилотных летательных аппаратов на один и тот же объект, прикрываемый имитационной и маскирующей помехами.

DOI: 10.31857/S000233882206004X

Введение. Современные наземные, морские и воздушные объекты обладают высокоразвитыми эффективными системами информационного противодействия управлению беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) [1–4].

Информационное противодействие создается с помощью *маскирующих* помех, предназначенных для “подавления” приемных устройств систем наведения БПЛА, и *имитационных* помех, способных дезориентировать БПЛА. Для защиты от противодействия кроме технических и алгоритмических способов и средств распознавания помех и соответствующего изменения технических характеристик систем наведения применяются различные тактические приемы, одним из которых является наведение *группы взаимодействующих* БПЛА [5].

Для повышения эффективности противодействия, а также из-за ограничений по электромагнитной совместимости при выполнении других задач объект осуществляет резкую внезапную и, как правило, скрытую перестройку параметров и характеристик противодействия, что приводит к возникновению случайных скачкообразных процессов в системах наведения БПЛА.

В настоящей статье рассматривается задача построения алгоритмов *взаимодействия* БПЛА в группе при *распознавании* помеховой ситуации и *оценивании* координат объектов и расстояния между соседними участниками группы БПЛА. Задача решается на основе теории систем со случайной скачкообразной структурой (ССС) [3, 4, 6–13].

1. Постановка задачи. Группа БПЛА наводится на некоторый объект. С учетом ложных целей число *одновременно* наблюдаемых объектов i в системе наведения каждого БПЛА равно m ; число классов объектов j равно n , из них первый класс – цель (Ц), остальные – различные помехи (П). В системе наведения производится *разделение* сигналов от пространственно разнесенных источников излучения и сигналов по информационным признакам различия по каналам. Предварительный анализ информации осуществляется отдельно в каждом канале, а затем выполняется ее

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00708).

Таблица 1. Ситуации противодействия в СН БПЛА при захвате цели

s	$i = 1$	$i = 2$
1	$j = 1$ (Ц)	$j = 2$ (П)
2	$j = 2$ (П)	$j = 1$ (Ц)
3	$j = 2$ (П)	$j = 2$ (П)
4	0	0

комплексирование, в результате чего происходит распознавание текущей ситуации противодействия и оценивание пространственных координат объекта.

В зависимости от конкретных условий (тип системы наведения, класс объектов и пр.) в качестве используемых признаков могут быть выбраны различные пространственные, геометрические, кинематические, спектральные и энергетические информационные различительные признаки. При выборе признака различия основную роль играют три фактора: *сложность* определения признака, *точность* его оценивания и *инвариантность* к условиям применения. Идеальным вариантом является независимость характеристик признака от условий применения, приемлемым – незначительная зависимость от тех условий, которые в системе не определяются.

Выбранные признаки делятся на две группы: 1) континуальные (принадлежащие к непрерывному множеству значений) и 2) принадлежащие конечному множеству значений. Первая группа наблюдается с помощью измерителей, вторая – с помощью индикаторов. Число возможных ситуаций противодействия (состояний структуры $s(i)$), составляющих полную группу несовместных случайных событий, равно $N: s = \overline{1, N}$.

Состояния структуры представляют собой различные сочетания наблюдаемых объектов i и классов j . Например, множество возможных ситуаций противодействия (состояний структуры s), составляющих полную группу несовместных случайных событий для $m = 2, n = 2$, представлено в табл. 1.

Как видно из таблицы, s -я ситуация при $s = \overline{1, 3}$ состоит в том, что i -й объект принадлежит j -му классу ($j = 1$ – цель, $j = 2$ – ложная цель (помеха)), $i = 1, 2; j = 1, 2$. Ситуация $s = 4$ означает, что система наведения подавлена мощной шумовой помехой. Ситуации, когда подавлен только один из каналов ($i = 1$ или 2), а другой – нет, принципиально возможны, но их вероятность по сравнению с вероятностями перечисленных в таблице ситуаций ничтожно мала.

Динамика и измерение непрерывнозначных различительных признаков описываются линейными уравнениями (в дискретной форме), позволяющими применить фильтры Калмана для синтеза алгоритмов, что широко используется на практике при конструировании систем управления летательных аппаратов:

$$x_{k+1}(j) = A_k(j)x_k(j) + B_k(j)u_k(j) + H_k(j)w_k(j) + F_k(j)\xi_k(j), \quad (1.1)$$

$$z_k^{(i)}(j) = x_k(j) + \zeta_k(j), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.2)$$

где $x_k(j)$ – вектор континуальных различительных признаков j -го класса объектов; $z_k^{(i)}(j)$ – вектор континуальных измерений различительных признаков i -го объекта; $\xi_k(j)$ и $\zeta_k(j)$ – векторы возмущений и помех – последовательности независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и с ковариациями $G_k(j)$ и $Q_k(j)$ соответственно; $u_k(j)$ – вектор управляющих сигналов; $w_k(j)$ – вектор известных функций времени k ; $A_k(j), B_k(j), H_k(j), F_k(j)$ – матрицы известных коэффициентов соответствующих размерностей.

Различительные признаки, принадлежащие к конечному множеству, распознаются с помощью индикаторов признаков, которые используются для составления формул, описывающих индикаторы структуры s_k :

$$\begin{aligned} \pi_{k+1}(r_{k+1} | r_k, s_{k+1}) &= \prod_{v=1}^l \pi_{k+1}(r_{k+1}^{(v)} | r_k^{(v)}, s_{k+1}), \\ \pi_{k+1}(r_{k+1}^{(v)} | r_k^{(v)}, s_{k+1}) &= \begin{cases} 1 - \pi_{k+1}^{*(v)} & \text{при } r_{k+1}^{(v)} \neq r_k^{(v)}, \\ \pi_{k+1}^{*(v)} & \text{при } r_{k+1}^{(v)} = r_k^{(v)}, \end{cases} \\ \pi_{k+1}^{*(v)} &= \pi_k^{*(v)} e^{-\frac{\Delta t}{T}} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}}\right) \bar{\pi}_{k+1}(r_{k+1}^{(v)} | s_{k+1}), \\ r_k^{(v)} &= \overline{1, N}; \quad s_k = \overline{1, N}; \quad v = \overline{1, l}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где s_k – состояние структуры – марковская цепь, заданная вероятностями переходов из s_k в s_{k+1} : $q_k(s_{k+1} | s_k)$; r_k – состояние индикатора структуры, описываемое формулой (1.3); l – число индикаторов; $\Delta t = t_{k+1} - t_k$; T – параметр инерционности индикатора; $\pi_{k+1}(r_{k+1}^{(v)} | r_k^{(v)}, s_{k+1})$ – вероятность показаний v -го индикатора структуры, представляющего собой условную марковскую цепь, которая описывается вероятностью перехода состояния индикатора из r_k в r_{k+1} при фиксированном состоянии структуры s_{k+1} ; $\bar{\pi}_{k+1}(r_{k+1}^{(v)} | s_{k+1})$ – известные установившиеся значения вероятностей *правильных* (при $r_{k+1} = s_{k+1}$) и *ошибочных* (при $r_{k+1} \neq s_{k+1}$) показаний индикатора.

Индикаторы структуры применяются в системах наведения для обнаружения и распознавания ситуаций противодействия и помех. Например, индикаторы скачков мощности и амплитуды предназначены для обнаружения факта отстрела инфракрасных и радиолокационных ловушек, а также включения форсажа двигателей истребителя при маневре, указывающего на увеличение его ускорения. Индикаторы, измеряющие отношение “сигнал–шум”, используются для обнаружения шумовых маскирующих помех, гребенчатые доплеровские фильтры – для разрешения целей в группе. Индикаторы таких геометрических признаков, как, например, площадь или конфигурация изображения объектов применяются в фокальной плоскости приемников телевизионных и тепловизионных систем, индикаторы эффективной площади рассеивания электромагнитного излучения – в радиолокационных системах наведения и др. [1, 4, 14].

Основными алгоритмическими характеристиками индикаторов являются *вероятность обнаружения* или *распознавания* и *время обработки информации* от момента поступления входного сигнала до момента принятия решения, характеризуемое параметром инерционности T .

В научно-технической литературе используются такие хорошо известные специалистам по теории и системам управления общепринятые понятия, как, например, “вероятность пропуска сигнала” и “вероятность ложной тревоги” в задачах различения двух альтернативных гипотез [4, 5, 15, 16].

Требуется построить алгоритм взаимосвязанного *распознавания* помеховых ситуаций, *оценивания* координат объекта и *определения* расстояния между соседними участниками *группы* БПЛА.

2. Алгоритм распознавания помеховых ситуаций, оценивания координат объекта и управления БПЛА. Информационно-управляющий алгоритм, основанный на теории ССС, состоит из пяти блоков [3, 4, 6–8]:

- классификатор структуры,
 - идентификатор структуры,
 - фильтр Калмана,
 - дисперсиометр,
 - регулятор,
- которые описываются следующими формулами.

1. *Классификатор структуры*:

$$\hat{p}_{k+1}(s_{k+1}) = \frac{\vartheta_{k+1}(s_{k+1})}{\sum_{s_{k+1}} \vartheta_{k+1}(s_{k+1})}, \quad \hat{p}_0(s_0) = p_0(s_0), \quad (2.1)$$

$$\vartheta_{k+1}(s_{k+1}) \triangleq \tilde{p}_{k+1}(s_{k+1})\pi_{k+1}(r_{k+1}|r_k, s_{k+1})\exp[-\Delta_{k+1}(s_{k+1})], \quad (2.2)$$

$$\Delta_{k+1}(s_{k+1}) \triangleq \left[\sum_{j=1}^m \sum_{j^*(s)\beta=1}^b \frac{(z^{j\beta} - \tilde{x}^{j^*(s)\beta})^2}{2\Theta^{j^*(s)\beta}} \right]_{k+1}, \quad (2.3)$$

где индекс $k+1$ у квадратной скобки $[\cdot]_{k+1}$ относится ко всем переменным внутри нее (т.е. z , \tilde{x} , Θ и s); $j^*(s) = \overline{1, n}$ – номер объекта $j = \overline{1, n}$, соответствующего номеру структуры $s = \overline{1, N}$; $\beta = \overline{1, b}$ – номер непрерывнозначного различительного признака;

$$\tilde{p}_{k+1}(s_{k+1}) = \sum_{s_k=1}^N q_k(s_{k+1}|s_k)\hat{p}_k(s_k), \quad s_k = \overline{1, N}, \quad (2.4)$$

$$\Theta^{j^*(s)\beta} \triangleq [\tilde{R}^{j^*(s)\beta} + Q^{j^*(s)\beta}]_{k+1}, \quad (2.5)$$

где $\hat{p}_k(s_k)$ и $\tilde{p}_k(s_k)$ – соответственно апостериорная и прогнозируемая на один шаг вперед вероятности состояния структуры; $\tilde{x}_k^{j^*(s_k)\beta}$ – прогнозируемая оценка β -го различительного признака $j^*(s_k)$ -го объекта; $\tilde{R}_k^{j^*(s_k)\beta}$ – прогнозируемая дисперсия оценивания β -го признака $j^*(s_k)$ -го объекта; $Q_k^{j^*(s_k)\beta}$ – дисперсия ошибки измерения β -го признака $j^*(s_k)$ -го объекта.

Например, для частного случая, приведенного в табл. 1 ($m = 2, n = 2, N = 4$) и при двух ($b = 2$) непрерывнозначных различительных признаках $\beta = 1, 2$, формула (2.3) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta_{k+1}(1) &= \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^2 \left[\frac{(z^{1\beta} - \tilde{x}^{1\beta})}{\Theta^{1\beta}} + \frac{(z^{2\beta} - \tilde{x}^{2\beta})}{\Theta^{2\beta}} \right]_{k+1}, & \Delta_{k+1}(2) &= \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^2 \left[\frac{(z^{1\beta} - \tilde{x}^{2\beta})}{\Theta^{2\beta}} + \frac{(z^{2\beta} - \tilde{x}^{1\beta})}{\Theta^{1\beta}} \right]_{k+1}, \\ \Delta_{k+1}(3) &= \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^2 \left[\frac{(z^{1\beta} - \tilde{x}^{2\beta})}{\Theta^{2\beta}} + \frac{(z^{2\beta} - \tilde{x}^{2\beta})}{\Theta^{2\beta}} \right]_{k+1}, & \Delta_{k+1}(4) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

2. Идентификатор структуры:

$$\hat{s}_k = \arg \max_{s_k} \hat{p}_k(s_k), \quad \tilde{s}_k = \arg \max_{s_k} \tilde{p}_k(s_k). \quad (2.7)$$

3. Фильтр Калмана:

$$\hat{X}_{k+1} = [\tilde{X} + \tilde{R}\Theta^{-1}(Z - \tilde{X})]_{k+1}, \quad (2.8)$$

$$\tilde{X}_{k+1} = [A\hat{X} + BU + HW]_k, \quad (2.9)$$

где \hat{X} , \tilde{X} , Z – блочные векторы с элементами соответственно $\hat{x}(j)$, $\tilde{x}(j)$, $z(j)$, описываемые формулами (1.1), (1.2); A , B , H – блочные диагональные матрицы с элементами $A(j)$, $B(j)$, $H(j)$ из (1.1); \tilde{R} и Θ – блочные диагональные матрицы с элементами $\tilde{R}^{j^*\beta}$ и $\Theta^{j^*\beta}$ из (2.5).

4. Дисперсиометр:

$$\hat{R}_{k+1} = [\tilde{R} + \tilde{R}\Theta^{-1}\tilde{R}]_{k+1}, \quad (2.10)$$

$$\tilde{R}_{k+1} = [A\hat{R}A^T + FGF^T]_k, \quad (2.11)$$

где

$$\Theta_k \triangleq \tilde{R}_k + Q_k, \quad (2.12)$$

F_k , G_k – блочные диагональные матрицы с элементами соответственно $F_k(j)$, $G_k(j)$ из (1.1); \hat{R}_k – блочная диагональная матрица с элементами $\hat{R}_k^{j^*\beta}$ (апостериорными дисперсиями оценивания β -го признака j^* -го объекта).

5. Регулятор. Представляет собой закон управления БПЛА u_k^* , зависящий от \hat{x}_k^{Π} , \hat{L}_k и их производных, где \hat{x}_k^{Π} – оценка вектора пространственных координат цели; \hat{L}_k – оценка расстояния

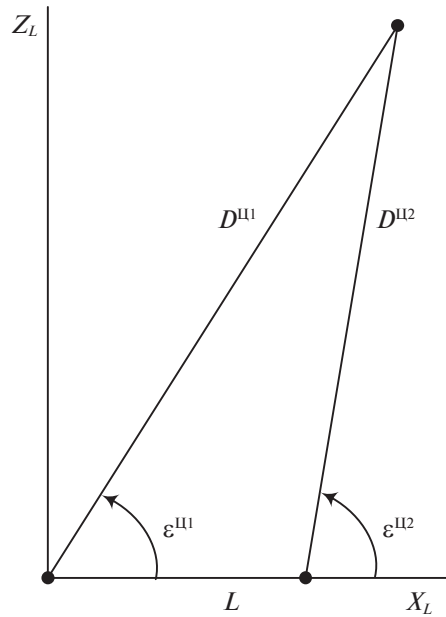


Рис. 1.

между двумя соседними БПЛА. Вектор x_k^{Π} — это часть общего вектора различительных признаков x_k , описываемого уравнением (1.1).

В зависимости от условий конкретной задачи (типы и характеристики объектов и БПЛА) закон управления может иметь различный вид. Оценка расстояния \hat{L}_k также может иметь различную форму зависимости от $\hat{x}_k^{\Pi 1}$ и $\hat{x}_k^{\Pi 2}$, вычисляемых в системах управления двух соседних БПЛА (см. п. 3).

3. Пример. В горизонтальной плоскости декартовой прямоугольной системы координат (z_L, x_L) , ось x_L которой совпадает с направлением L_k , с различных направлений на одну цель, прикрываемую одной ложной целью (“помехой”), наводится два БПЛА (рис. 1).

Непрерывнозначными различительными признаками являются: D_k^{Π} — дальность до цели; D_k^{Π} — дальность до помехи; ϵ_k^{Π} — угол пеленга цели; ϵ_k^{Π} — угол пеленга помехи. Различительные признаки принадлежат конечному множеству: “геометрические” σ^{Π} , σ^{Π} и “спектральные” λ^{Π} , λ^{Π} (σ^{Π} , σ^{Π} , λ^{Π} , λ^{Π} — константы). Таким образом, $m = 2$, $n = 2$, $b = 2$, $l = 2$.

Множество возможных помеховых ситуаций (состояний структуры s) представлено в табл. 2.

Системы наведения обоих БПЛА по двухсторонней линии связи обмениваются информацией об оценках дальностей и углов. На основании этой информации в обеих системах вычисляется расстояние L_k между БПЛА, которое затем регулируется в заданных пределах.

Число состояний структуры $N = 3$ (см. табл. 1). В общем случае структура s_k — марковская цепь с вероятностями переходов $q_k(s_{k+1} | s_k)$, которые учитывают возможность пересечения трасс объектов в фокальной плоскости приемного устройства в промежутке времени между двумя соседними измерениями. При малом Δt пересечение трасс фиксируется с высокой вероятностью.

Таблица 2. Ситуации противодействия в СН БПЛА при автосопровождении цели

s	$i = 1$	$i = 2$
1	$j = \Pi$	$j = \Pi$
2	$j = \Pi$	$j = \Pi$
3	0	

Тогда происходит обмен номерами каналов L , и это равносильно тому, что пересечения как бы не произошло. Математически это формулируется в следующем виде: при $s_k, s_{k+1} = 1, 2$

$$q_k(s_{k+1}|s_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } s_{k+1} = s_k, \\ 0 & \text{при } s_{k+1} \neq s_k, \end{cases} \quad (3.1)$$

а при $s_k = 3$

$$q_k(1|3) = q_k(2|3) = d, \quad q_k(3|1) = q_k(3|2) = g, \quad (3.2)$$

$$d, g \in [0, 0.5].$$

Представим математическую модель изменения дальностей, углов пеленга и угловых скоростей линии визирования до Ц и до П, также спектральных (λ) и геометрических (σ) информационных различительных признаков и всех их измеряемых значений уравнениями [3]

$$\begin{aligned} D_{k+1}^j &= [D^j - \Delta t v + \zeta^{Dj}]_k, \quad j = \text{Ц, П}; \quad D_0^{\text{Ц}} \neq D_0^{\text{П}}, \\ \varepsilon_{k+1}^j &= [\varepsilon^j + \Delta t \omega^j]_k, \quad \varepsilon_0^{\text{Ц}} \neq \varepsilon_0^{\text{П}}, \\ \omega_{k+1}^j &= \left[\omega^j + \frac{\Delta t}{\tau} (2\omega^j + u + w^j + \zeta^{\varepsilon j}) \right]_k, \quad \omega_0^{\text{Ц}} \neq \omega_0^{\text{П}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\check{D}_k^i = [D^i + \zeta^{Dj}]_k [1 - \delta(s_k, 3)], \quad \check{\varepsilon}_k^i = [\varepsilon^i + \zeta^{\varepsilon j}]_k [1 - \delta(s_k, 3)], \quad (3.4)$$

$$\pi(\check{\lambda}_k^i | \lambda^j), \quad \pi(\check{\sigma}_k^i | \sigma^j); \quad i = 1, 2; \quad j = \text{Ц, П}. \quad (3.5)$$

Здесь символом $\check{}$ обозначены *измеряемые* значения соответствующих переменных: D_k^j – дальности БПЛА до Ц и до П; ε_k^j – углы пеленга Ц и П; ω_k^j – скорости изменения углов пеленга; u_k – сигнал управления БПЛА; w_k^j – известные детерминированные функции k ; ξ_k^{Dj} , $\xi_k^{\varepsilon j}$ – возмущения – последовательности независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и с дисперсиями соответственно G^{Dj} и $G^{\varepsilon j}$; v_k – априорная оценка скорости сближения БПЛА с объектами – известная функция времени; ζ_k^{Dj} , $\zeta_k^{\varepsilon j}$ – ошибки измерений – последовательности независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и с дисперсиями соответственно Q^{Dj} , $Q^{\varepsilon j} / (\tau_k^j)^2$; $\tau_k^j = D_k^j / v_k$ – время, оставшееся до конца наведения БПЛА соответственно на цель и на помеху.

Символ Кронекера

$$\delta(s_k, 3) = \begin{cases} 1 & \text{при } s_k = 3, \\ 0 & \text{при } s_k \neq 3 \end{cases}$$

описывает перерывы поступления информации при подавлении приёмного устройства маскирующей помехой. Вероятности $\pi(\check{\lambda}_k^i | \lambda^j)$, $\pi(\check{\sigma}_k^i | \sigma^j)$ – соответственно вероятности ошибочных (при $\check{\lambda}^i \neq \lambda^j$, $\check{\sigma}^i \neq \sigma^j$) и правильных (при $\check{\lambda}^i = \lambda^j$, $\check{\sigma}^i = \sigma^j$) показаний индикаторов в первом и во втором каналах наблюдения спектрального λ и геометрического σ признаков; $i = 1, 2$; $j = \text{Ц, П}$.

Как видно из выражений для дисперсий ошибок измерения углов пеленга, они обратно пропорциональны квадратам дальностей до Ц и до П. Это объясняется тем, что в активных и полупассивных радиолокационных системах, а также в корреляционных оптико-электронных системах ошибки измерения угла пеленга – так называемое “блуждание центра отражения” – зависят от линейного размера объекта [12].

Информационно-управляющий алгоритм, согласно (2.1)–(2.12), с учетом (3.1) имеет следующий вид.

Классификатор структуры:

$$\hat{p}_k(s_k) = \frac{\vartheta_k(s_k)}{\sum_{s_k} \vartheta_k(s_k)}, \quad x\hat{p}_0(s_0) = \begin{cases} 0.5 & \text{при } s_0 = 1, 2, \\ 0 & \text{при } s_0 = 3, \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_k(1) &= \left[\tilde{p}(1)\pi^\lambda(\tilde{\lambda}^1|\lambda^{\text{II}})\pi^\sigma(\tilde{\sigma}^1|\sigma^{\text{II}})\pi^\lambda(\tilde{\lambda}^2|\lambda^{\text{II}})\pi^\sigma(\tilde{\sigma}^2|\sigma^{\text{II}})e^{-\Delta(1)} \right]_k, \\ \vartheta_k(2) &= \left[\tilde{p}(2)\pi^\lambda(\tilde{\lambda}^1|\lambda^{\text{II}})\pi^\sigma(\tilde{\sigma}^1|\sigma^{\text{II}})\pi^\lambda(\tilde{\lambda}^2|\lambda^{\text{II}})\pi^\sigma(\tilde{\sigma}^2|\sigma^{\text{II}})e^{-\Delta(2)} \right]_k, \\ \vartheta_k(3) &= \tilde{p}_k(3); \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \Delta_k(1) &= \frac{1}{2} \left[[K^D(\tilde{D}^1 - \hat{D}^{\text{II}})]^2 + [K^\varepsilon(\tilde{\varepsilon}^1 - \hat{\varepsilon}^{\text{II}})]^2 + [K^D(\tilde{D}^2 - \hat{D}^{\text{II}})]^2 + [K^\varepsilon(\tilde{\varepsilon}^2 - \hat{\varepsilon}^{\text{II}})]^2 \right]_k, \\ \Delta_k(2) &= \frac{1}{2} \left[[K^D(\tilde{D}^1 - \hat{D}^{\text{II}})]^2 + [K^\varepsilon(\tilde{\varepsilon}^1 - \hat{\varepsilon}^{\text{II}})]^2 + [K^D(\tilde{D}^2 - \hat{D}^{\text{II}})]^2 + [K^\varepsilon(\tilde{\varepsilon}^2 - \hat{\varepsilon}^{\text{II}})]^2 \right]_k, \\ \Delta_k(3) &= 0; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{k+1}(1) &= \hat{p}_k(1) + d\hat{p}_k(3), \\ \tilde{p}_{k+1}(2) &= \hat{p}_k(2) + d\hat{p}_k(3), \\ \tilde{p}_{k+1}(3) &= g[\hat{p}_k(1) + \hat{p}_k(2)] + (1 - 2d)\hat{p}_k(3). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Идентификатор структуры:

$$\hat{s}_k = \arg \max_{s_k} \hat{p}_k(s_k), \quad s_k = \overline{1, 3}. \quad (3.10)$$

Фильтр дальности:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{k+1}^j &= [\tilde{D}^j + (1 - \delta(\hat{s}, 3))K^{Dj}(\tilde{D}^{i(s)} - \tilde{D}^j)]_{k+1}, \\ \tilde{D}_{k+1}^j &= [\hat{D}^j - \Delta tv]_k. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Фильтр углов пеленга:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{k+1}^j &= [\tilde{\varepsilon}^j + (1 - \delta(\hat{s}, 3))K^{\varepsilon j}(\tilde{\varepsilon}^{i(s)} - \tilde{\varepsilon}^j)]_{k+1}, \\ \tilde{\varepsilon}_{k+1}^j &= [\hat{\varepsilon}^j - \Delta t \hat{\omega}^j]_k. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Фильтр угловых скоростей пеленга:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{k+1}^j &= [\tilde{\omega}^j + (1 - \delta(\hat{s}, 3))(K^{\omega j} + K^{\varepsilon j} \tau^{-1})(\tilde{\varepsilon}^{i(s)} - \tilde{\varepsilon}^j)]_{k+1}, \\ \tilde{\omega}_{k+1}^j &= [\hat{\omega}^j + \Delta t \tau^{-1}(2\hat{\omega}^j + u^* + w^j)]_k, \\ \hat{D}_0^j &= D_0^j; \quad \hat{\varepsilon}_0^j = \varepsilon_0^j; \quad \hat{\omega}_0^j = \omega_0^j, \\ i &= 1, 2; \quad s = 1, 2, 3; \quad j = \text{Ц, П}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

При $j = \text{Ц}$

$$i = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{s}_k = 1, \\ 2 & \text{при } \hat{s}_k = 2, \end{cases} \quad (3.14)$$

при $j = \text{П}$

$$i = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{s}_k = 2, \\ 2 & \text{при } \hat{s}_k = 1. \end{cases} \quad (3.15)$$

В формулах (3.11)–(3.13): u_k^* – оптимальное управление БПЛА, зависящее от оценок координат цели (см. блок Регулятор), $K_k^{\beta j}$ – так называемый коэффициент доверия, $\beta = D, \varepsilon, \omega; j = \text{Ц, П}$ (см. блок Дисперсиометр).

Как видно из рисунка, расстояние L_k между соседними БПЛА определяется как

$$L_k = [D^{\text{II1}} \sin \varepsilon^{\text{II1}} - D^{\text{II2}} \sin \varepsilon^{\text{II2}}]_k,$$

откуда следует выражение для оценки \hat{L}_k :

$$\hat{L}_k = [\hat{D}^{\text{II1}} \sin \hat{\varepsilon}^{\text{II1}} - \hat{D}^{\text{II2}} \sin \hat{\varepsilon}^{\text{II2}}]_k. \quad (3.16)$$

Дисперсиометр. Алгоритм дисперсиометра состоит из формул для коэффициентов $K_k^{\beta j}$, полученных в результате решений уравнений (2.10)–(2.12) для \hat{R}_k в *установившемся* режиме (т.е. при $\hat{R}_{k+1} = \hat{R}_k = \hat{R}$) [3]:

$$K^{Dj} = \Delta\omega^j \left(\sqrt{1 + \frac{G^{Dj}}{Q^{Dj}}} - 1 \right), \quad K^{\varepsilon j} = \sqrt{2K^{\omega j}}, \quad K^{\omega j} = \sqrt{\frac{G^{\omega j}}{Q^{\omega j}}}, \quad j = \text{Ц, П}, \quad (3.17)$$

где $\Delta\omega^j$ – ширина спектра дискретного белого шума ξ_k^{Dj} в (3.3).

Как видно из (3.16), чем меньше дисперсия ошибки измерения $Q^{\beta j}$ ($\beta = D, \varepsilon, \omega; j = \text{Ц, П}$), тем больше коэффициент доверия $K^{\beta j}$ и тем самым, как следует из (3.11)–(3.13), меньше разность между оценкой \hat{X}_k и измерением Z_k ($\hat{X}_k = \hat{D}_k^j, \varepsilon_k^j, \hat{\omega}_k^j; Z_k = \bar{D}_k, \bar{\varepsilon}_k$).

Регулятор. Регулятор – это закон управления движением БПЛА. В зависимости от конкретной задачи (типы и характеристики объектов и БПЛА и другие условия наведения) закон управления может иметь тот или иной вид из перечня известных стандартных методов наведения. Например, можно применить закон управления, задаваемый формулой [3]

$$u_k^* = - \left[\frac{c^\varepsilon}{\tau} (\hat{\varepsilon}^{\text{II}} - \bar{\varepsilon}) + c^\omega (\hat{\omega}^{\text{II}} - \bar{\omega}) + c^L (\hat{L} - \bar{L}) + c^v (\hat{v} - \bar{v}) \right]_k, \quad (3.18)$$

где $\bar{\varepsilon}_k, \bar{\omega}_k, \bar{L}_k, \bar{v}_k$ – требуемые значения переменных $\varepsilon_k, \omega_k, L_k, v_k$; $v \triangleq \hat{L}, \hat{v} = \hat{L}; c^\varepsilon, c^\omega, c^L, c^v$ – коэффициенты усиления обратной связи, определяемые способом параметрической оптимизации в процессе имитационного математического моделирования.

В целом, информационно-управляющий алгоритм каждого из соседних взаимодействующих БПЛА описывается замкнутой системой рекуррентных уравнений (3.6)–(3.18).

Заключение. Представлены взаимосвязанные информационно-управляющие алгоритмы соседних участников *группы* БПЛА, наводящихся на группу объектов, часть из которых – ложные цели, создаваемые с помощью имитационных помех. Кроме того, противодействие осуществляется путем постановки маскирующих помех, приводящих к перерывам информации в системах управления.

Алгоритмы, основанные на теории систем со случайной скачкообразной структурой [3, 5–11], осуществляют распознавание помеховых ситуаций, оценивание координат объектов и соседних участников группы БПЛА и управление БПЛА, обеспечивающее требуемые точность наведения и дистанцию между соседними БПЛА.

Приведен пример наведения двух соседних взаимодействующих БПЛА на одну и ту же цель, прикрываемую одной имитационной помехой, которая дезориентирует систему управления БПЛА, и маскирующей помехой, вызывающей перерывы информации в двух каналах наблюдения. В каждом из информационных каналов измеряются координаты объектов – дальности и углы пеленга, а также спектральные и геометрические различительные признаки наблюдаемых объектов.

Представлены взаимосвязанные информационно-управляющие алгоритмы двух соседних участников группы БПЛА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баханов Л.Е., Давыдов А.Н., Корниенко В.Н. и др. Системы управления вооружением истребителей. Основы интеллекта многофункционального самолета / Под ред. Федосова Е.А. М.: Машиностроение, 2005.

2. Себряков Г.Г., Красильщиков М.Н. Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий. М.: Физматлит, 2003.
3. Бухалёв В.А., Скрынников А.А., Болдинов В.А. Алгоритмическая помехозащита беспилотных летательных аппаратов. М.: Физматлит, 2018.
4. Бухалёв В.А. Обработка информации и управление ракетами в условиях противодействия. М.: Изд-во Военно-воздушной акад. им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, 2009.
5. Евдокименков В.Н., Красильщиков М.Н., Оркин С.Д. Управление смешанными группами пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов в условиях единого информационно-управляющего поля. М.: Изд. МАИ, 2015.
6. Бухалёв В.А. Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой. М.: Наука, 1996.
7. Бухалёв В.А., Скрынников А.А., Болдинов В.А. Игровое управление системами со случайной скачкообразной структурой. М.: Физматлит, 2021.
8. Бухалёв В.А., Скрынников А.А., Болдинов В.А. Системы со случайной скачкообразной структурой. М.: ИД Академии Жуковского, 2022.
9. Piers B.D., Swarder D.D. Bayes and Minimax Controllers for a Linear Systems for Stochastic Jump Parameters // IEEE Trans. AC-16. 1971. № 4. P. 677–685.
10. Kazakov Y.E., Artemiev V.M., Bukhalev V.A. Principles of the Construction on Complex Algorithms for Information Processing and Control in System with Stochastic Exchange Structure // II IFAC Sympos on Stochastic Control. Tallinn, 1986. Pt 1.
11. Moon J. A Sufficient Condition for Linear-Quadratic Stochastic Zero-Sum Differential Games for Markov Jump Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2019. V. 64. № 4. P. 1619–1626.
12. Mariton M. Jump Linear Systems in Automatic Control. N.Y.: CRC Press, 1990.
13. Kats I.Ya., Martynyuk A.A. Stability and Stabilization of Nonlinear Systems with Random Structures. CRC Press, 2003.
14. Дудник П.И., Чересов Ю.А. Авиационные радиолокационные устройства. М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1986.
15. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974.
16. Патрик Э. Основы теории распознавания образов. М.: Сов. радио, 1980.

УДК 517.997

ПРИБЛИЖЕННО-ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ ОПЕРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ НА ОСНОВЕ КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИИ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

© 2022 г. А. В. Данеев^{a,*}, В. Н. Сизых^{a,**}^a Иркутский государственный ун-т путей сообщения, Иркутск, Россия

*e-mail: daneev@mail.ru

**e-mail: sizykh_vn@mail.ru

Поступила в редакцию 24.03.2022 г.

После доработки 13.04.2022 г.

Принята к публикации 30.05.2022 г.

Изложен новый подход к аналитическому конструированию линейных и нелинейных иерархических по контурам управления, многофункциональных систем автоматического управления реального (ускоренного) масштаба времени, базирующийся на совместном использовании технологий динамического программирования и метода квазилинеаризации. Для непрерывных динамических систем приведены основы теории нелинейного синтеза в формулировке, которая допускает формирование оптимальной, приближенно-оптимальной и субоптимальных стратегий управления относительно заранее неизвестной, но определяемой на малых длинах оптимизации вектор-функции оптимального управления.

DOI: 10.31857/S0002338822060063

Введение. Управление — создание в каждый текущий момент времени целенаправленных воздействий на объект управления в зависимости от доступной информации о поведении объекта и действующих на него возмущений. В теории управления рассматриваются три принципа управления: 1) по разомкнутому контуру, 2) по замкнутому контуру, 3) в реальном или в ускоренном времени (времени, на которое прогнозируется движение объекта [1, 2]). При использовании первого принципа до начала процесса управления по априорной информации строится программа (программное управление), которая в процессе управления не корректируется. При втором принципе управления текущие управляющие воздействия (позиционные управления) создаются по заранее (до начала процесса управления) составленным правилам, определенным на всевозможной информации, которая может появиться о поведении объекта и действующих на него возмущений в процессе управления. Эти правила реализуются в форме прямых, обратных и комбинированных связей. При использовании третьего принципа управления перечисленные связи заранее не создаются, их текущие (потребные будущие) значения вычисляются в реальном (ускоренном) масштабе времени в процессе функционирования объекта. Здесь эти связи являются гомеостатическими (нежесткими), как у обычных систем автоматического управления (САУ). Они создаются и обновляются в процессе функционирования объекта в управляющем устройстве.

Подход к проблеме синтеза непрерывных динамических систем, ориентированный на принцип оптимального управления (ОУ) в реальном или в ускоренном времени, был предложен в начале 70-х годов В.С. Шендриком (по инициативе Б.Н. Петрова) и развит А.А. Красовским и его учениками [1]. Наибольший вклад в развитие данного направления теории ОУ внес В.Н. Буков [2]. В начале 90-х годов принцип управления в реальном времени был “переоткрыт” Р. Габасовым и Ф.М. Кирилловой и успешно развивается в белорусской школе математиков [3].

Известно, что на традиционные алгоритмы последовательных улучшений накладываются достаточно жесткие условия по сходимости и выбору начальных приближений [8, 9]. На пути использования только достаточных условий оптимальности или теории квазилинеаризации простых и надежных (гарантирующих поточечную сходимость) методов, как отмечалось еще

Р. Беллманом [4], создать не удалось. Для преодоления этих трудностей в статье развивается многометодная технология, основанная на сочетании метода квазилинеаризации с достаточными условиями оптимальности. Предлагается применить квазилинеаризацию для **локальной** оптимизации в окрестности стационарности точек функции Гамильтона, а достаточные условия оптимальности — для **интервальной** оптимизации. Основная идея предлагаемой двухметодной технологии: за счет интервальной оптимизации осуществлять грубый поиск начального приближения по достаточным условиям, а затем итерационным путем уточнять полученное приближение по условиям локальной оптимальности (стационарности или в форме принципа минимума).

Для организации минимизирующих последовательностей слабой минимали формулируется вспомогательная (вырожденная по формулировке) задача приближенно-оптимального синтеза. Вырожденность здесь заложена в саму постановку проблемы управления и проявляется особым образом: исходная (невырожденная) задача синтеза доопределяется до сингулярной с целью включения предельных функций управления в множество допустимых, но таким образом, чтобы преобразованная задача содержала оптимальное решение. Если в традиционных постановках вырожденных задач управления сингулярная кривая подлежит определению, то в преобразованной задаче она известна: ею является оптимальная траектория исходной задачи.

Таким образом, в отличие от известных подходов к решению задачи приближенно-оптимального синтеза регуляторов, когда в методе решения используется имеющаяся неоднозначность в выборе производящих функций со свойствами функции Ляпунова, в данном случае существует место другое продолжение теории достаточных условий: путем фазовой линеаризации уравнений динамической системы и интегранта функционала исходной задачи нелинейного синтеза относительно заранее неизвестных, но определяемых в процессе функционирования объекта постоянных на малых интервалах времени оптимальных значений вектор-функций управления (квазилинеаризации) и через формирование градиентной стратегии ньютоновского типа по вариациям управлений на тех же интервалах последовательно определяются и уточняются точки стационарности искомой минимали. С целью фиксации предельных элементов минимизирующих последовательностей поиска оптимального решения по условиям стационарности предлагается использовать функционал обобщенной работы А.А. Красовского.

Разработаны эффективный метод совмещенного синтеза и процедуры решения двухточечной краевой задачи по схеме дифференциального динамического программирования (ДП), обеспечивающие поинтервальную монотонно убывающую (релаксационную) сходимосты процессов управления по необходимым условиям локальной оптимальности. Сформулированы основные теоремы и приводится один из вариантов алгоритмической реализации метода. Необходимость в такой разработке обусловлена фактическим отсутствием надежных методов нелинейного синтеза цифровых регуляторов, гарантирующих высокую точность и устойчивость решения при приемлемых вычислительных затратах.

1. Постановка задачи приближенно-оптимального синтеза управлений. Под оптимизацией непрерывных процессов управления будем понимать решение задачи выбора на отрезке времени $T = [t_0, t_k]$ позиционного управления

$$u = u(t_0, x(t_0), t, x(t)) \tag{1.1}$$

для динамической системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{1.2}$$

такого, чтобы на траектории движения объекта $x(t)$, удовлетворяющей заданным ограничениям на множествах начального и конечного состояний

$$\mu(t_0, x(t_0), t_k, x(t_k)) = 0, \quad \mu \in R^p, \tag{1.3}$$

функционал

$$I = V_3(t_0, x(t_0), t_k, x(t_k)) + \int_{t_0}^{t_k} f_0(t, x(t), u(t))dt, \quad I \in R^1, \tag{1.4}$$

достигал минимума (максимума) или наименьшей (наибольшей) точной грани (инфимума \inf или супремума \sup). Здесь $u \in R^m, x \in R^n$, функции f, μ, V_3 и f_0 — заданные кусочно-непрерывные по t и непрерывные и достаточно гладкие по x, u (дифференцируемые или абсолютно непрерывные) векторные и скалярные функции указанных аргументов.

В дальнейшем будем рассматривать менее общую постановку задачи оптимизации – постановку задачи нелинейного синтеза, для которой условие (1.3) без потери общности может учитываться в конструкции модифицированного лагранжиана; а скалярная функция $V_3(x(t_k)) = V_3(t_k, x(t_k))$ определяет граничные условия только на правом конце траектории (терминальное множество). Граничные условия на левом конце траектории $x(t_0) = x^0 \in R^n$ выбираются произвольными. Конечные ограничения на граничные условия и на значения управляющих функций и траектории процесса (1.3) будем записывать как

$$(x(t), u(t)) \in F(t), \quad (1.5)$$

где $F(t) \subset G_x \times G_u$, $G_x = X$, $G_u = U$ является декартовым произведением множеств топологической степени $(n + m)$, зависящим от времени t .

Множество пар вектор-функций $\{x(t), u(t)\}$, удовлетворяющих дифференциальной связи (1.2) и конечным ограничениям (1.5), называют множеством допустимых D . Предполагается, что $D \neq \emptyset$.

Пару функций $\{x_{\text{оп}}(t), u_{\text{оп}}(t)\} \in D$ будем называть оптимальным процессом (минималью) для I на D , если

$$I(x_{\text{оп}}(t), u_{\text{оп}}(t)) = d. \quad (1.6)$$

Здесь $d = \inf_D I(x(t), u(t))$ – нижняя точная грань функционала (1.4).

Нижнюю точную грань функционала (1.4) в общей теории экстремальных задач называют опорным функционалом (опорой) [5].

Последовательность $\{x_s(t), u_s(t)\} \in D$, на которой

$$I(x_s, u_s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} d, \quad (1.7)$$

является минимизирующей для функционала I на множестве D .

2. Квазилинеаризация и достаточные условия оптимальности. Введем непрерывную и достаточно гладкую (дифференцируемую или абсолютно непрерывную) функцию $\varphi(t, x) \in \Phi$ и рассмотрим следующие конструкции [5, с. 263]:

$$R(t, x, u) = \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} f(t, x, u) + f_0(t, x, u), \quad (2.1)$$

$$\Phi(x(t_0), x(t_k)) = V_3(x(t_k)) - \varphi(t_k, x(t_k)) + \varphi(t_0, x(t_0)). \quad (2.2)$$

Для того чтобы пара $(x_{\text{оп}}, u_{\text{оп}}) \in D$ была минималью в задаче (1.1)–(1.5), достаточно существования такой гладкой функции $\varphi(t, x)$, чтобы выполнялись условия [6]

$$\mu(t) = R(t, x_{\text{оп}}, u_{\text{оп}}) = \inf_{(x, u) \in F(t)} R(t, x, u) \quad \text{для любого } t \in [t_0, t_k], \quad (2.3)$$

$$\Phi(x_{\text{оп}}(t_0), x_{\text{оп}}(t_k)) = \inf_{\substack{x(t_0) \in F_x(t_0) \\ x(t_k) \in F_x(t_k)}} \Phi(x(t_0), x(t_k)), \quad (2.4)$$

где включение $x(t) \in F_x(t)$ определяет ограничение на значения вектора состояния системы (1.2), $F_x(t)$ – проекция множества $F(t)$ на пространство X .

Учтем в исходных конструкциях (2.3), (2.4) тейлоровское разложение функций f, f_0 в малой окрестности локальной минимали $(x_0(t), u_0(t)) = (x_{\text{оп}}(t), u_{\text{оп}}(t, \tau)|_{\tau=t})$:

$$f(t, x, u) = f(t, x_0, u_0) + \frac{\partial f(t, x_0, u)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f(t, x_0, u)}{\partial u} \delta u + \lim_{\substack{|\delta x| \rightarrow 0 \\ |\delta u| \rightarrow 0}} O(|\delta x|, |\delta u|), \quad (2.5)$$

$$f_0(t, x, u) = f_0(t, x_0, u_0) + \frac{\partial f_0(t, x_0, u)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_0(t, x_0, u)}{\partial u} \delta u + \lim_{\substack{|\delta x| \rightarrow 0 \\ |\delta u| \rightarrow 0}} O(|\delta x|, |\delta u|), \quad (2.6)$$

где для краткости обозначим

$$\frac{\partial f(t, x_0, u)}{\partial x} = \left[\frac{\partial f(t, x, u)}{\partial x} \right]_{x=x_0}, \quad \frac{\partial f_0(t, x_0, u)}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_0(t, x, u)}{\partial x} \right]_{x=x_0},$$

$$\frac{\partial f(t, x, u_0)}{\partial u} = \left[\frac{\partial f(t, x, u)}{\partial u} \right]_{u=u_0}, \quad \frac{\partial f_0(t, x, u_0)}{\partial u} = \left[\frac{\partial f_0(t, x, u)}{\partial u} \right]_{u=u_0}.$$

Здесь $O(|\delta x|, |\delta u|)$ представляет члены более высокого порядка малости [7, с. 19], чем модули $|\delta x|$ и $|\delta u|$ (т.е. $\lim_{\substack{|\delta x| \rightarrow 0 \\ |\delta u| \rightarrow 0}} O(|\delta x|, |\delta u|)$) на длинах оптимизации Δt с точностью определения погрешностей вы-

числений 5–7% в точках стационарности функции Гамильтона, причем в (2.5) остаточный член представляет собой вектор, а в (2.6) – скаляр. Так как предполагается, что члены разложения выше второго порядка пренебрежительно малы, и принимается, что незначимая функция времени $\mu(t) = R(t, x_{\text{оп}}, u_{\text{оп}}) = \inf_{(x, u) \in F(t)} R(t, x, u) = 0$, то достаточные условия (2.3), (2.4) с учетом (2.5), (2.6) переписутся в виде

$$\inf_{x \in F_x} \left(\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} f(t, x_0, u_0) + f_0(t, x_0, u_0) \right) + \inf_{x \in F_x} \left(\left[\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial x} \right] \delta x \right) +$$

$$+ \inf_{u \in U} \left(\left[\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f_0}{\partial u} \right] \delta u \right) = 0, \quad (2.7)$$

$$\inf_{\substack{x(t_0) \in F_x(t_0) \\ x(t_k) \in F_x(t_k)}} \left(\left(\frac{\partial V_k(x_0(t_k))}{\partial x(t_k)} - \frac{\partial \varphi(t_k, x_0(t_k))}{\partial x(t_k)} \right) \delta x(t_k) + \frac{\partial \varphi(t_0, x_0(t_0))}{\partial x(t_0)} \delta x(t_0) \right) = 0. \quad (2.8)$$

Выражения в квадратных скобках формулы (2.7) могут быть записаны через скалярную функцию $H(t, x, \varphi_x, u) = \partial \varphi(t, x) / \partial x \cdot f + f_0$. Тогда формулу (2.8) можно представить как

$$\inf_{x \in F_x} \left(\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} f(t, x_0, u_0) + f_0(t, x_0, u_0) \right) + \inf_{x \in F_x} \left(\frac{\partial H(t, x_0, \varphi_x, u)}{\partial x} \delta x \right) +$$

$$+ \inf_{u \in U} \left(\frac{\partial H(t, x, \varphi_x, u_0)}{\partial u} \delta u \right) = 0. \quad (2.9)$$

Соотношение (2.9) будет характеризовать четыре различные ситуации, каждой из которых соответствуют свои конструкции алгоритмов оптимального управления.

Первая ситуация типична при решении задач ОУ на основе принципа минимума, где постулируется сам факт существования экстремали Понтрягина: $x = x_0(t)$, $u_{\text{оп}}(t, t) = u_0(t)$, $\varphi_x = \psi^T(t)$. Тогда при фиксированных начальных условиях ($\delta x(t_0) = 0$) из (2.9) можно формально выписать уравнение сопряженной системы (уравнение импульсов), а из формулы (2.8) определить условия его трансверсальности.

Вторая ситуация имеет место при решении задач синтеза ОУ методом дифференциального ДП [8], когда об оптимальности траектории $x = x_0(t)$ можно косвенно судить по условиям оптимальности отдельных ее участков (интервалов $[t, t_k]$) при ненулевой вариации управления ($\delta u \neq 0$) на этих участках. Такой способ вычислений не связан с непосредственным варьированием управления и траектории и, как следует из формулы (2.9), сводится к поиску минимизирующей последовательности (к организации процедуры слабого локального улучшения) $u_{\text{оп}}(t, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} u_{\text{оп}}(t, t) = u_0(t)$, где локально-оптимальное управление $u_0(t)$ определяется по условию стационарности. При $x = x_0(t)$ функция $\varphi(t, x)$ является функцией Беллмана $S(t, x)$ ($S_x = \psi^T(t)$).

Третья ситуация соответствует случаю $x \neq x_0(t)$, $u_{\text{оп}}(t, t) = u_0(t)$, допускает и фактически рекомендует тип приближения, называемый приближением в пространстве политик [4], который

также отсутствует в классическом анализе. Политика (процедура сильного локального улучшения) $x(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} x_0(t)$, согласно (2.7), (2.8), формируется по условию

$$\inf_{x \in F_x} \left(\left[\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial x} \right] \delta x \right) = \inf_{x \in F_x} \left(\frac{\partial H(t, x_0, \varphi_x, u_0)}{\partial x} \delta x \right) = 0, \quad (2.10)$$

из которого в силу стационарности точек $x_0(t)$ (функция H не зависит от x) при малой ненулевой вариации траектории δx следует тождество

$$\frac{\partial H(t, x_0, \varphi_x, u_0)}{\partial x} \equiv 0 \quad (2.11)$$

и определяется вектор x_0 . За счет организации процедуры улучшения $x(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} x_0(t)$ обеспечивается приближенное вычисление функции Беллмана $S(t, x_0)$ через функцию $\varphi(t, x)$, которая здесь может быть выбрана произвольной, т.е. фактически является функцией Ляпунова.

Четвертая ситуация формально напоминает классическую постановку решения вариационных задач, так как в ней за счет квазилинеаризации предполагается использовать ненулевые вариации траектории и управления: $x \neq x_0(t)$, $u \neq u_0(t)$. Через соотношения $\frac{\partial H(t, x, \varphi_x, u_0)}{\partial u} \equiv 0$, $\frac{\partial H(t, x_0, \varphi_x, u)}{\partial x} \equiv 0$ здесь организуются итерационные процедуры улучшения $u_{\text{он}}(t, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} u_{\text{он}}(t, t) = u_0(t)$, $x(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} x_0(t)$, обеспечивающие выполнение необходимого условия абсолютного локального минимума функционала (1.4): при $\delta x \rightarrow 0$, $\delta u \rightarrow 0$ ожидается сходимость

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \rightarrow 0, \quad \delta f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_0}{\partial u} \delta u \rightarrow 0.$$

Определим множества

$$D_1(\varepsilon) = \{(x(t), u(t)) \in D : |x(t) - x_0(t)| < \varepsilon, t \in [t_0, t_k]\},$$

$$D_2(\varepsilon) = \{(x(t), u(t)) \in D : |u(t) - u_0(t)| < \varepsilon, t \in [t_0, t_k]\}.$$

Определение 1 [9]. Пара функций $(x_0(t), u_0(t)) \in D$ называется сильной (слабой) локальной минималью, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что $I(x_0, u_0) \leq I(x, u)$ для всех $(x(t), u(t)) \in D_1(\varepsilon)(D_2(\varepsilon))$.

Сформулируем теперь ряд теоретических положений о слабой минимали, которые формально следуют из анализа формул (2.8), (2.9).

Теорема 1 (условия локальной оптимальности в форме принципа минимума¹). Если в задаче (1.1)–(1.5) существует локальная минималь (x_0, u_0) , то в каждой точке стационарности выполняются следующие условия:

$$1) \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial t} + \bar{H}(t, x_0, \psi) = 0, \quad \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x} = \psi^T(t),$$

$$2) V_3(x_0(t_k)) = \varphi(t_k, x_0(t_k)) - \varphi(t_0, x_0(t_0)),$$

$$3) \bar{H}(t, x_0, \psi) = H(t, x_0, \psi, u_0) = \inf_{u \in U} H(t, x_0, \psi, u).$$

¹ Формально условия теоремы 1 совпадают с принципом максимума Л.С. Понтрягина. Связь этих условий с достаточными условиями оптимальности установлена в работах В.Ф. Кротова [10]. Однако они также соответствуют традиционной схеме ДП (в форме принципа минимума [5]) и определяют решение не одной, а семейства задач оптимального управления.

Здесь условиям 1), 2) соответствует канонически сопряженная система уравнений, формирующая двухточечную краевую задачу:

$$\dot{x}_0 = \frac{\partial \bar{H}^T(t, x_0, \Psi)}{\partial \Psi} = f(t, x_0, u_0), \quad x_0(t_0) = x^0, \quad (2.12)$$

$$\dot{\Psi} = -\frac{\partial \bar{H}^T(t, x_0, \Psi)}{\partial x} = -\frac{\partial f^T(t, x_0, u_0)}{\partial x} \Psi - \frac{\partial f_0^T(t, x_0, u_0)}{\partial x}, \quad \Psi^T(t_k) = \frac{\partial V_3(x_0(t_k))}{\partial x(t_k)}. \quad (2.13)$$

Из условия 3) определяется вектор управления $u_0(t) = u_{\text{оп}}(t, t) = \arg \min_{u \in U} H(t, x_0, \Psi, u)$, в локальном смысле доставляющий минимум функционалу (1.4):

$$I_* = V_3(x_0(t_k)) + \int_{t_0}^{t_k} f_0(t, x_0(t), u_0(t)) dt, \quad I_* = \inf_{(x, u) \in D} I(x, u). \quad (2.14)$$

Таким образом, в рассмотренной выше первой ситуации локальная минималь (оптимальная программа) и опорный функционал I_* вычисляются через решение двухточечной краевой задачи (2.12), (2.13).

Отметим, что предположение теоремы 1 о том, что пара (x_0, u_0) – локальная минималь в задаче (1.1)–(1.5), несколько эвристично, пока не доказан факт ее существования [7, с. 24–26]. Этот факт устанавливается путем такой переформулировки исходной задачи ОУ, при которой имеется возможность организации процедур поиска минимизирующих последовательностей, монотонно сходящихся по u к локальной минимали.

Теорема 2 (условия первого порядка локального минимума²). Для того чтобы пара (x_0, u_0) была слабой локальной минималью задачи (1.1)–(1.6), необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$1) \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x} f(t, x_0, u_0) + f_0(t, x_0, u_0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x} = \frac{\partial S(t, x_0)}{\partial x} = \Psi^T(t),$$

$$2) V_3(x_0(t_k)) = \varphi(t_k, x_0(t_k)) - \varphi(t_0, x_0(t_0)),$$

3) $\partial H(t, x_0, \Psi, u_0) / \partial u \equiv 0$ для $u \in \text{int } U$ или $U = R^m$ и при ненулевой допустимой вариации управления δu .

Замечание 1. По-видимому, на границах множества U следующее из анализа (2.9) равенство $\inf_{u \in U} (\partial H(t, x, \varphi_x, u_0) / \partial u \cdot \delta u) = 0$ уступит место соотношению $\inf_{u \in U} (H(t, x_0, \Psi, u) - \xi(t)) = 0$, где ε – малое число, $\xi(t)$ – непрерывная и кусочно-гладкая на множестве малой меры функция. Тогда условие 3) теоремы 2 можно заменить на условие $\inf_{u \in U} H(t, x_0, \Psi, u) \equiv 0$.

Теорема 2 соответствует случаю решения задачи локально-оптимального синтеза ОУ по схеме дифференциального ДП [8]. Здесь локальное улучшение управления осуществляется через квазилинеаризацию дифференциальной связи (1.3) и интегранта функционала качества (1.4) в окрестности $u_0(t)$, т.е.

$$\dot{x} = f(t, x_0, u_0) + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u, \quad (2.15)$$

$$I(u(\cdot)) = V_3(x_0(t_k)) + \int_{t_0}^{t_k} (f_0(t, x_0(t), u_0(t)) + \frac{\partial f_0}{\partial u} \delta u) dt = I_* + \int_{t_0}^{t_k} \left(\frac{\partial f_0}{\partial u} \delta u \right) dt. \quad (2.16)$$

Непосредственно из формул (2.15), (2.16) видно, что при организации процедуры приближений $u_{\text{оп}}(t, \tau) \rightarrow u_{\text{оп}}(t, t) = u_0(t)$ значения функционала (2.16) стремятся к нижней точной грани I_* функционала исходной задачи (1.1)–(1.5).

Аналогичные теореме 2 утверждения сформулированы в [11, 12] для схемы приближения в пространстве политик и аналога вариационной схемы в задаче локализации и улучшения.

² В оптимальном управлении эти условия получены и доказаны В.А. Батуриным [9].

3. Метод решения двухточечных краевых задач для непрерывных динамических систем по схеме дифференциального ДП. 3.1. Релаксационное расширение пространства состояний. Следующий конструктивный шаг к практической реализации рассмотренных выше схем решения задачи (1.1)–(1.5) состоит в определении стратегии приближенного синтеза оптимальных в локальном смысле управлений через релаксационное расширение пространства состояний. Релаксационное расширение связано с исследованием свойств предельных элементов минимизирующих последовательностей поиска управлений, которые определяют исходную постановку задачи синтеза для дифференциальной системы (1.3).

В основу организации поиска предельных элементов положены [13]:

идея квазилинеаризации – фазовой линеаризации процесса (1.3) и интегранта функционала (1.4) относительно оптимальных, определяемых в процессе функционирования объекта, и постоянных на конечном числе малых длин оптимизации Δt параметров $u_0 = u^*$ по формулам (2.15), (2.16);

предположение о допустимости выбора управлений и/или траекторий, мало отличающихся от оптимальных на конечном числе длин Δt , что дает возможность организовать приближенную стратегию синтеза на паре (u, u_0) по схеме дифференциального ДП:

$$\frac{d \delta u}{dt} = \vartheta, \quad \delta u = u - u_0, \quad (3.1)$$

где ϑ – “новый” m -вектор управления.

Если длины оптимизации Δt малы, то производные в (3.1) с достаточной степенью точности описываются соотношением

$$u(t) = u_0(t) + \vartheta \Delta t,$$

которое может быть реализовано в виде итерационной процедуры ньютоновского типа для определения локальной минимали: при $\vartheta \rightarrow 0$ в каждой точке стационарности обеспечивается выполнение условия $u(t) \rightarrow u_0(t)$. Поэтому выбор градиентной стратегии типа (3.1) естественен, соответствует идеологии квазилинеаризации и идее нелинейного синтеза в процессе функционирования объекта (1.3) (совмещенного синтеза) на малых длинах Δt . Этим самым и сама задача синтеза представляется в линеаризованном виде: множество всех точек $x(t_k)$ терминального члена функционала (1.5) становится близко к выпуклому [14].

3.2. Применение функционала обобщенной работы в задаче приближенно-оптимального синтеза регуляторов. Суть градиентной стратегии (3.1) – релаксационное расширение пространства состояний (1.3): $y = (x, \delta u)$ для схемы дифференциального ДП. Поэтому требуется таким образом переформулировать исходную постановку задачи оптимизации (1.1)–(1.5), чтобы была возможность зафиксировать предельные элементы минимизирующих последовательностей в точках стационарности $u = u_0$. Для этого предлагается применить функционал обобщенной работы (ФОР) [1]

$$I(y(\cdot)) = S_3(y(t_k)) + \int_{t_0}^{t_k} [Q_p(\theta, y) + L_{31}(\vartheta) + L_{31}(\vartheta_0)] d\theta, \quad (3.2)$$

результат минимизации которого есть цена I_* исходной задачи синтеза. Здесь $L_{31}(\vartheta) = 0.5 \vartheta^T r^{-1} \vartheta$, $L_{31}(\vartheta_0) = 0.5 \vartheta_0^T r^{-1} \vartheta_0$ – некоторые квадратичные формы от “новых” управлений. Интегрант линеаризованного в окрестности вектора $u_0(t)$ функционала (1.4) в ФОР (3.2) для схемы дифференциального ДП задается в виде

$$Q_p(t, y) = f_0(t, x_0, u_0) + \frac{\partial f_0}{\partial u} \delta u.$$

Переменная ϑ_0 на длинах Δt является постоянным, не варьируемым параметром: $\vartheta_0 = \vartheta^*$.

Задача получения оптимального решения линеаризованного на малых длинах оптимизации Δt процесса (1.3) формулируется следующим образом: организовать итерационные процедуры поиска слабой минимали (теорема 2), обеспечивающие инфимум ФОР (3.2) при дифференциальных связях (1.3).

Сформулированная задача приближенно-оптимального синтеза решается методом характеристических полос [1]. Основной результат формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Для процесса (1.3) оптимальное в смысле достижения локального минимума функционала (1.3) и ФОР (3.2) управление определяется процедурой слабого улучшения $u_{оп}(t, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} u_{оп}(t, t) = u_0(t)$, получаемой из канонически сопряженной системы: дифференциальной связи (2.15) и уравнений

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial f_0^T(t, x_0, u_0)}{\partial x} - \frac{\partial f^T(t, x_0, u_0)}{\partial x} p_x + \frac{\partial(\delta u^T \dot{p}_{\delta u})}{\partial x}, \quad (3.3)$$

$$\dot{p}_{\delta u} = -\frac{\partial f_0^T(t, x_0, u_0)}{\partial u} - \frac{\partial f^T(t, x_0, u_0)}{\partial u} p_x, \quad (3.4)$$

$$\vartheta = -r p_{\delta u}, \quad (3.5)$$

$$\dot{S}(t, x, \delta u) = -f_0(t, x_0, u_0) - \frac{\partial f_0(t, x_0, u_0)}{\partial u} \delta u, \quad (3.6)$$

где S – функция Беллмана для задачи с расширенным вектором состояния; $p_x = \partial S^T / \partial x = \psi_x(t)$, $p_{\delta u} = \partial S^T / \partial \delta u = \psi_{\delta u}(t)$ – котраектории состояния и вариаций управления.

Доказательство теоремы 3 осуществляется через прямое преобразование условий оптимальности к более простым условиям в форме уравнения Ляпунова для расширенного пространства состояний с последующим его решением методом характеристик и приведено в Приложении.

4. Алгоритмы с прогнозирующей моделью. Известны и получили развитие различные варианты и редакции алгоритмов с прогнозирующей моделью [1, 2]. Базовыми из них являются алгоритм модифицированный и алгоритм с матрицей чувствительности, программную реализацию первого из которых покажем на примере использования схемы дифференциального ДП (теорема 3).

Алгоритм основан на непосредственном вычислении градиентов p_x , $p_{\delta u}$ по формулам (3.3), (3.4) и реализует процедуру слабого локального улучшения через последовательность следующих операций.

Шаг 1. Прогнозируется состояние объекта на интервале $[t_u, t_k]$ с помощью модели

$$\dot{x}_m = \chi F_m(\tau, x_m, u_m), \quad (4.1)$$

где $F_m = f(\tau, x_m, u_0) + \partial f / \partial u_m \cdot \delta u$, $x_m(\tau_u) = x(t_u)$, $u_m(\tau_u) = u(t_u)$; t_u – моменты времени, соответствующие окончанию очередного цикла оптимизации длиной Δt ; индекс “ m ” обозначает принадлежность к модельному (прогнозному) движению, χ – коэффициент масштабирования времени ($\chi = 1$ – реальный масштаб времени, $\chi \geq 2$ – ускоренный масштаб времени). Прогноз движения модели осуществляется интегрированием уравнений (4.1) в ускоренном прямом времени τ с различными начальными условиями $x_m^i(t_u)$, $i = \bar{1}, m+1$, лежащими в окрестности текущего состояния объекта $x(t_u)$.

Шаг 2. Определяются значения вектора $x_m(\tau_k)$ и на основе предварительно продифференцированной по x_m и по u_m функции S_3 вычисляются ее градиенты в конечный момент времени $\tau_k = t_k$:

$$p_k(\tau_k) = -\frac{\partial S_3^T(x_m(\tau_k), \delta u(\tau_k))}{\partial x_m(\tau_k)}, \quad p_{\delta u}(\tau_k) = -\frac{\partial S_3^T(x_m(\tau_k), \delta u(\tau_k))}{\partial \delta u(\tau_k)}. \quad (4.2)$$

Шаг 3. С начальными условиями (4.2) на интервале $[\tau_0, \tau_k]$ с шагом $\Delta \tau$ при $j = 0$ интегрируется в ускоренном обратном времени система уравнений (2.15), (3.3)–(3.6):

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= -\chi F_m(\tau, x_m, u_{mj}), \\ \dot{p}_x &= \frac{\partial f_0^T(\tau, x_m, u_{mj})}{\partial x_m} + \frac{\partial f^T(\tau, x_m, u_{mj})}{\partial x_m} p_x - \frac{\partial(\delta u^T \dot{p}_{\delta u})}{\partial x_m} \end{aligned}$$

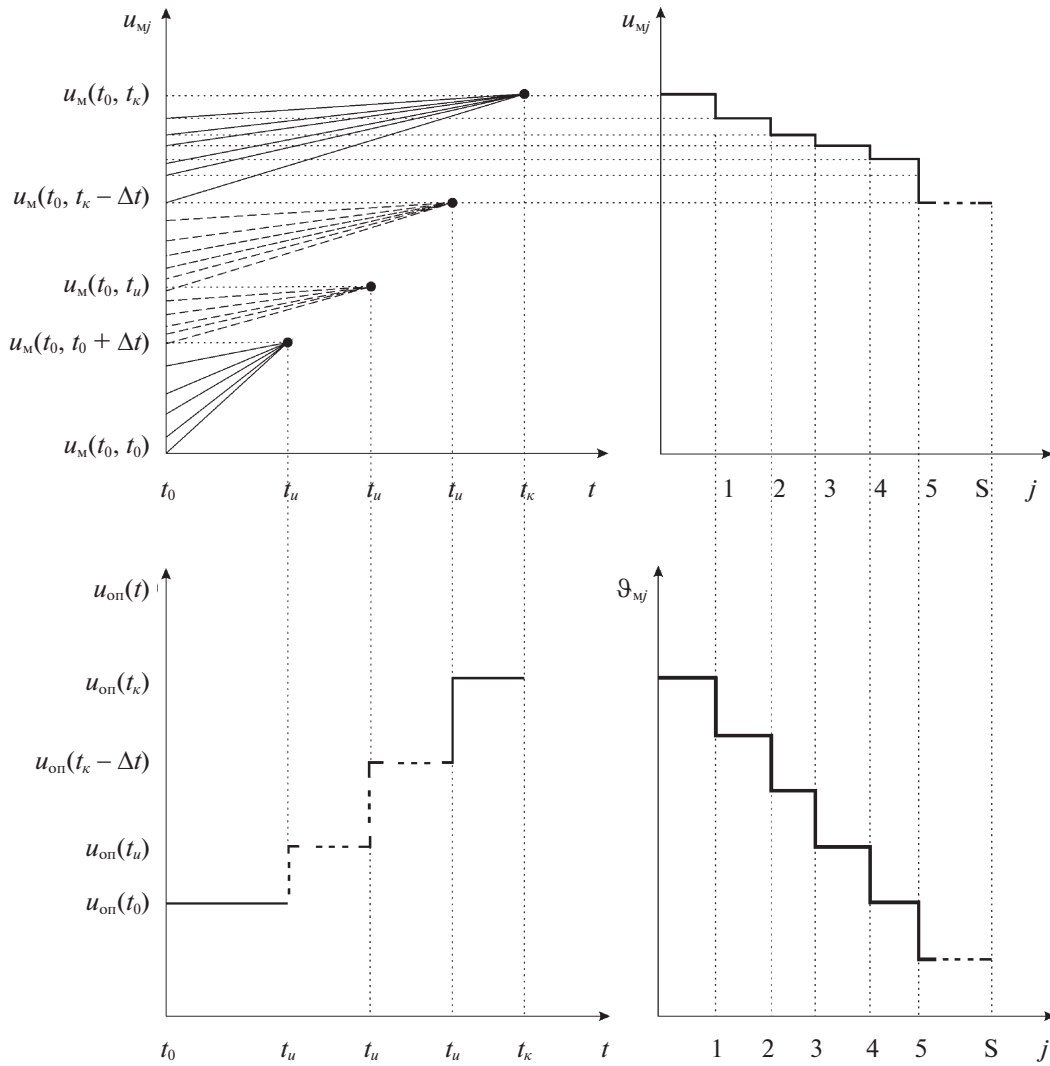


Рис. 1. Алгоритм модифицированный

$$\dot{p}_{\delta u} = \frac{\partial f_0^T(\tau, x_M, u_{Mj})}{\partial x_M} + \frac{\partial f^T(\tau, x_M, u_{Mj})}{\partial u_M} p_k, \quad \vartheta_{Mj} = r p_{\delta u}, \quad (4.3)$$

$$u_{M,j+1} = u_{M,j} - \vartheta_{M,j+1}(T_{\Pi} - n \Delta\tau),$$

$$T_{\Pi} = t_k - t_0, \quad \Delta\tau = k \Delta t, \quad k = T_{\Pi} / \Delta\tau, \quad k = \overline{1, l}.$$

Здесь T_{Π} – время прогнозирования.

Замечание 2. При организации итерационной процедуры в уравнениях прогнозирующей модели (ПМ) вместо вектора u_0 рассматривается модельное управление предыдущей итерации u_{Mj} .

Дополнительно вместе с соотношениями (4.3) вычисляется функция Беллмана для задачи с расширенным вектором состояния

$$\dot{S}(\tau, x_M, \delta u) = \chi Q_p(\tau, x_M, \delta u), \quad \delta u = u_{M,j+1} - u_{Mj}. \quad (4.4)$$

Матрицы частных производных векторной и скалярной функций F_M, Q_p по компонентам $x_M, \delta u$ вычисляются на основе прогнозов (4.1).

Шаг 4. На длинах оптимизации Δt организуется итерационная процедура уточнения точек стационарности локальной минимали (рис. 1) при $j = \overline{1, N_3}$ по формулам (4.3), (4.4). Условием останова итерационной процедуры является выполнение неравенства $\delta u \leq \varepsilon_3$ или при более грубой оценке по точности вычислений: $j \leq N_3$.

Шаг 5. При выполнении условия останова вновь полученное управление принимается за оптимальное управление $u_{mj+1} = u_0$ и подается на объект (1.3). Через промежуток времени Δt шаги 1 – 4 алгоритма повторяются (рис. 1). При этом на каждом участке Δt в модели (4.3) с заданной точностью выполняется условие: $\vartheta_{mj} = \vartheta_0 = 0$.

5. Свойства сходимости алгоритмов с прогнозирующей моделью. Недостатком всех современных численных методов, используемых в прямых методах (например, метода обратных задач динамики [15]) и в непрямых методах интервальной оптимизации в точной формулировке, служит отсутствие строго математического доказательства их сходимости. Процедуры прямых методов являются градиентными и позволяют определить только локальный экстремум, а не минимизировать функционал (1.4) во всей области его определения. Для рассмотренных же выше методов интервальной оптимизации зачастую характерна “овражная” ситуация: застревание процесса в окрестности одной из точек локального экстремума, в силу чего задача (1.1)–(1.5) или имеет решение, далекое от истинного, или же вообще может наблюдаться расходимость процессов управления.

Для преодоления этих трудностей предлагается применить процедуру дифференциального ДП для получения грубого начального приближения точек стационарности локальной минимали, а градиентную процедуру квазилинеаризации – для последующего уточнения этих точек. Поэтому доказательство сходимости алгоритмов, построенных на основе формул (2.15), (3.3), (3.4) теоремы 3, должно состоять из двух этапов: доказательства сходимости процессов по условиям стационарности к решению исходной задачи (1.1) – (1.5), доказательства сходимости к локальной минимали в окрестности точек стационарности по методу квазилинеаризации. Рассмотрим оба эти этапа.

5.1. Свойства сходимости алгоритмов с прогнозирующими моделями при интервальной оптимизации процессов управления. Доказательство сходимости по рассмотренной выше схеме дифференциального ДП основывается на рассмотрении свойств предельных элементов минимизирующих последовательностей поиска локальной минимали (x_0, u_0) . Для выявления этих свойств введем понятие множества достижимости [16–18].

Определение 2. Множеством достижимости $X(t, X_0, \tau)$ в момент времени τ систем (2.15), (3.3), (3.4) называется множество, порожденное в момент времени t множеством начальных состояний X_0 этих систем.

Множество достижимости при $\tau \rightarrow t$ оценивается результатом минимизации функционала (3.2) – приближенно вычисленным через итерационную процедуру улучшения $u_{оп}(t, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} u_{оп}(t, t) = u_0(t)$ значением опорного функционала I_* в момент времени t ($t \in [t_0, t_k]$), равного значению оптимального в локальном смысле функционала (1.4) исходной задачи синтеза (1.1)–(1.5).

Определение 3. Предельным множеством достижимости $X^*(t, X_0, \tau)$ систем (2.15), (3.3), (3.4) будем называть фиксированное в момент времени $\tau = t$ множество, порожденное множеством начальных состояний X_0 этих систем.

Предельное множество достижимости при $u_{оп}(t, t) = u_0(t)$ определяет одинаковый результат минимизации ФОР (3.2) в расширенной формулировке (теорема 3) и функционала (1.4) в исходной постановке задачи нелинейного синтеза (1.1)–(1.5).

Теорема 4 (об определении элементов предельного множества достижимости). Если управление $u = u_0(t)$ соответствует локальному минимуму функционала (1.4) и определяет локальную минималь процесса (1.3) на незамкнутых множествах $u \in R^m, x \in R^n$, то существуют такие векторная, ненулевая и непрерывная функция p_x и скалярная функция ϕ , которые удовлетворяют следующим условиям:

1) управляемой прогнозирующей модели – решаемой в ускоренном времени системе канонически сопряженных уравнений: дифференциальной связи (1.3) и векторному уравнению

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial f_0^T(t, x_0, u_0)}{\partial x} - \frac{\partial f^T(t, x_0, u_0)}{\partial x} p_x, \quad p(t_k) = \frac{\partial V_3^T(x(t_k))}{\partial x(t_k)}, \quad (5.1)$$

2) условию стационарности точек функции Гамильтона по u .

$$\frac{\partial H^T}{\partial \delta u} = \dot{p}_{\delta u} = \frac{\partial f_0^T(t, x_0, u_0)}{\partial u} - \frac{\partial f^T(t, x_0, u_0)}{\partial u} p_x = 0, \quad (5.2)$$

3) условию равенства нулю предельных элементов минимизирующей последовательности по u в градиентной процедуре (3.5):

$$\vartheta = \vartheta_0 = -rp_{\delta u} = 0, \quad (5.3)$$

4) условию минимума локального функционала, определяемого через вычисление функции Ляпунова:

$$\dot{I}(t) = \dot{\phi}(t, x_0) = -f_0(t, x_0, u_0), \quad \phi(t_k, x_0(t_k)) = V_3(x_0(t_k)). \quad (5.4)$$

Доказательство теоремы 4 приведено в Приложении.

Таким образом, теорема 4 завершает доказательство сходимости алгоритмов с прогнозирующей моделью по условиям стационарности. Основное свойство слабой локальной минимали состоит в том, что при отсутствии ограничений на управление она определяется стационарными точками функции Гамильтона, которые удовлетворяют векторному уравнению $\partial H / \partial \delta u = 0$.

Заметим, что один и тот же результат минимизации ФОР (3.2) в постановке задачи синтеза ОУ с релаксационным расширением пространства состояний и функционала (1.4) в исходной постановке позволяет сделать вывод о том, что предельные множества достижимости для расширенной задачи совпадают с множеством достижимости задачи (1.1)–(1.5). Главное отличие расширенной формулировки задачи нелинейного синтеза заключается в том, что она определяет минимизирующую последовательность по u поиска слабой локальной минимали, тогда как в исходной формулировке только констатируется факт ее существования. Если управление можно однозначно определить (синтезировать) в виде обратных связей $u = u_0(t, x, p_x)$, то решение исходной задачи (1.1)–(1.5) сводится к решению двухточечной краевой задачи для дифференциальной системы (1.3), (5.1), (5.2).

По-видимому, слабая локальная минимальность существует только тогда, когда при выполнении необходимого условия (стационарности или принципа минимума) одновременно (как в теории устойчивости) выполняется и достаточное условие оптимальности, но не наоборот. В задаче нелинейного синтеза это не совсем очевидно.

5.2. Свойства сходимости алгоритмов с прогнозирующей моделью в окрестности точек стационарности локальной минимали. Процедура дифференциального ДП позволяет получить грубое начальное приближение точек стационарности локальной минимали на длинах оптимизации Δt (рис. 1). Для уточнения данного решения используется квазилинеаризация – градиентная процедура (3.1) последовательного улучшения точек стационарности. Поэтому можно утверждать, что в алгоритмах с прогнозирующей моделью метод квазилинеаризации есть просто применение метода Ньютона–Рафсона–Канторовича в функциональном пространстве [4, 19]. Так как сходимость метода имеет место для начальных приближений из какой-либо окрестности точек стационарности слабой локальной минимали, то градиентная процедура (3.1) является локально сходящейся.

Известно [4], что метод квазилинеаризации имеет основные свойства – монотонность и квадратичную сходимость. Докажем аналогичные свойства локальной сходимости алгоритмов с прогнозированием, следуя методике Беллмана.

1. Монотонность.

Определение 4 [20]. Если при реализации градиентной процедуры (3.1) значения функционала (3.2) на итерациях u_j монотонно убывают, то последовательность $u_j \rightarrow u_0$ называется релаксационной, а параметр ϑ – релаксационным параметром.

Различают два вида сходимости градиентных процедур: сходимость по функционалу и сильную сходимость (сходимость).

Определение 5. Градиентная процедура (3.1) называется сходящейся, если

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j - u_0\| = 0.$$

Очевидно, сходимость процедур влечет сходимость по функционалу. Обратное, вообще говоря, не верно.

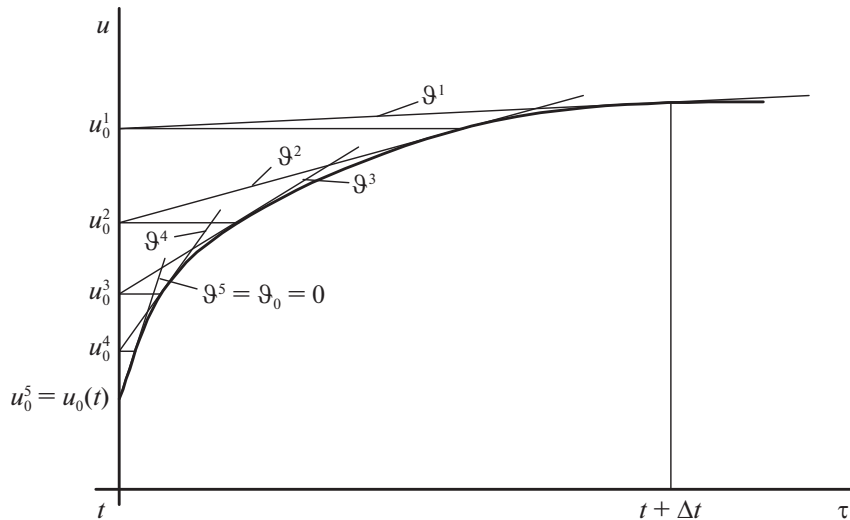


Рис. 2. График, поясняющий свойство монотонной сходимости градиентных процедур

Свойство монотонности в алгоритмах с прогнозирующей моделью подразумевает сходимость градиентной процедуры (3.1), которая в свою очередь зависит от начальных приближений в окрестности точек стационарности слабой локальной минимали и выбранного релаксационного параметра. Так как начальные приближения вычисляются по схеме дифференциального ДП, то для доказательства монотонности итерационных процедур остается определить свойство релаксационного параметра ϑ . Этот параметр имеет функциональный смысл и вычисляется по формуле (3.5): $\vartheta = -r\partial\varphi^T/\partial\delta u = -rp_{\delta u}$.

На длинах оптимизации Δt в каждой точке стационарности слабой локальной минимали параметр ϑ обращается в нуль (см. Приложение). В силу чего можно утверждать, что при $r > 0$ градиент $p_{\delta u}$ является убывающей положительной функцией времени, а переменная u по шагам итераций подчинена условию

$$u_0(t) < u_0^j(t) < \dots < u_0^2(t) < u_0^1(t).$$

Это условие характеризует свойство монотонности процесса (3.1) и для процедуры квазилинеаризации по вычисленному начальному приближению локально-оптимального управления поясняется рис. 2.

2. Квадратичная сходимость.

Второе важное и не так очевидное свойство градиентной процедуры (3.1) – это квадратичная сходимость.

Утверждение 1. Для градиентной процедуры (3.1) справедлива следующая оценка:

$$\|u_0^{j+1} - u_0\| \leq k_1 \|u_0^j - u_0\|^2, \quad |u_0^{j+1} - u_0^j| \leq k_2 \|u_0^j - u_0^{j-1}\|^2, \quad (5.5)$$

где $k_1 = \max_{u_0 \leq \theta \leq u_0^1} (\xi^1(\theta)/2)$, $k_2 = \max_{u_0 \leq \theta \leq u_0^1} (|\xi^1(\theta)|/2 + 1/\Delta t E_2)$, E_2 – единичная матрица размера $m \times m$.

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Вторая оценка в формуле (5.5) получается путем непосредственного преобразования рекуррентного соотношения (см. Приложение)

$$u_{0i}^{j+1} - u_{0i}^j = \xi_i^1(u_{0i}^j) - \xi_i^1(u_{0i}^{j-1}) = (u_{0i}^j - u_{0i}^{j-1}) \xi_i^1(u_{0i}^{j-1}) + \frac{(u_{0i}^j - u_{0i}^{j-1})^2}{2} \xi_i^1(\theta), \quad (5.6)$$

где $u_{0i}^{j-1} \leq \theta \leq u_{0i}^j$, $\xi_i^1(u_{0i}^{j-1}) = \dot{u}_{0i}^{j-1} + \vartheta_i(u_{0i}^{j-1})\Delta t$.

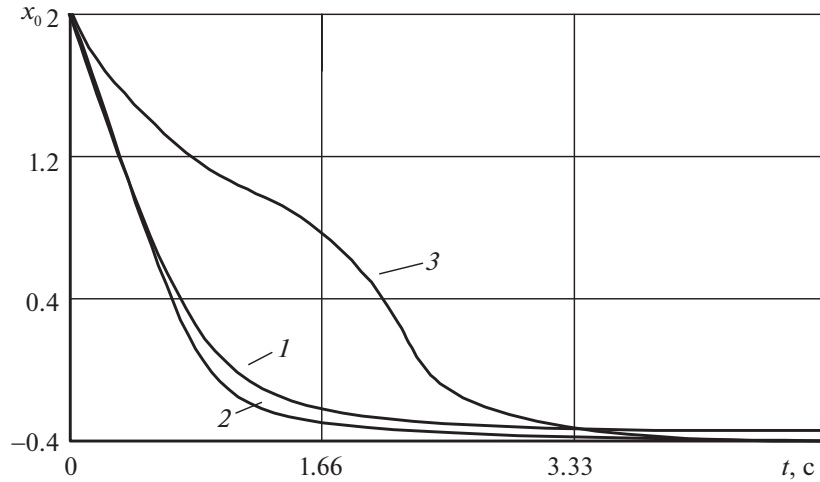


Рис. 3. Результаты моделирования при различных стратегиях управления по координате x_1

С другой стороны, $\dot{u}_{0i}^j = \dot{u}_{0i}^{j-1} + \dot{\vartheta}_i(u_{0i}^{j-1})\Delta t$ (см. Приложение). Тогда $\xi_i^1(u_{0i}^{j-1}) = \dot{u}_{0i}^j = (u_{0i}^j - u_{0i}^{j-1})/\Delta t$ и уравнение (5.6) запишется в виде

$$u_{0i}^{j+1} - u_{0i}^j = (u_{0i}^j - u_{0i}^{j-1})^2 \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} \xi_i^1(\theta) \right), \quad (5.7)$$

из которого получается оценка

$$|u_{0i}^{j+1} - u_{0i}^j| \leq k_{2i} |u_{0i}^j - u_{0i}^{j-1}|^2, \quad (5.8)$$

где $k_{2i} = \max_{u_0 \leq \theta \leq u_0} (|\xi_i^1(\theta)|/2 + 1/\Delta t)$.

Уравнение (5.8), записанное в векторной форме, является второй искомой оценкой в формулах (5.5). Свойство, выражаемое вторыми оценками в выражениях (5.5), называется квадратичной сходимостью [4]. Очевидно, что сходимость метода квазилинеаризации значительно ускоряется по мере приближения $(x_0^j, u_0^j) \rightarrow (x_0, u_0)$. Получается, что каждый следующий шаг асимптотически удваивает число правильных знаков в данном приближении. Следовательно, свойство квадратичной сходимости оказывается особенно полезным при решении многомерных задач, и не только потому, что время расчета прямо пропорционально числу итераций, но и в силу возрастания ошибок округления при этих итерациях.

Пример. Управление колебательным процессом на скользящем интервале оптимизации.

Рассмотрим управление квазилинейным колебательным звеном в задаче слежения ($t_k = t + T_n$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_1 x_1 + a_2 x_3^3 + bu, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где $a_1 = -2$, $a_2 = -1$, $b = 1$.

Цель управления состоит в стабилизации заданного состояния $x_3 = -0.4$ при ограничении на управление $|u| = 2$ и выбранных начальных условиях: $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 0$.

Требуется решить задачу синтеза оптимального управления: через минимизацию ФОР (3.2):

$$I = \int_{t_0}^{t+T_n} \{0.5\beta(x_1(t) - x_3)^2 + u_{\text{оп}} k^{-1} u + 0.5r^{-1}(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\vartheta}_{\text{оп}}^2)\} d\theta, \quad (5.10)$$

реализовать стабилизирующую заданное состояние приближенно-оптимальную стратегию управления $u(t, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} u_{\text{оп}}(t, t) = u_0(t)$ и сравнить полученный результат с результатами минимизации критерия взвешенной обобщенной работы (КВОР) [21]:

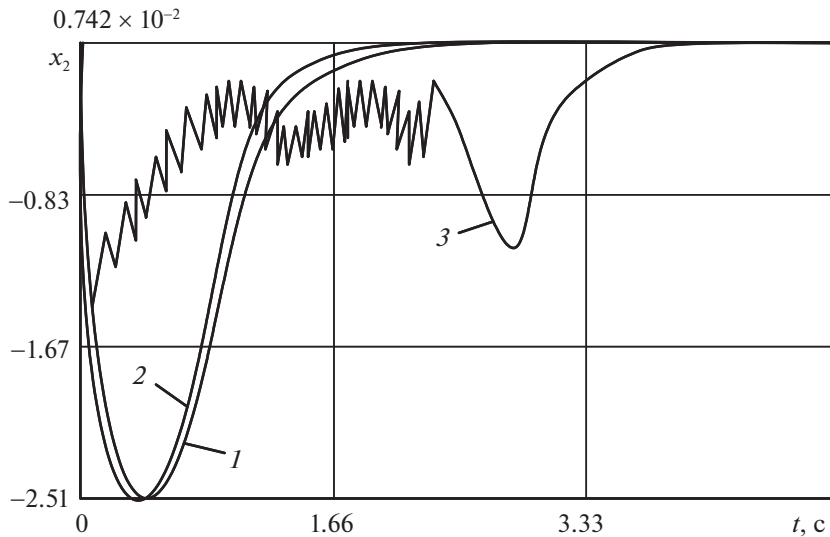


Рис. 4. Результаты моделирования при различных стратегиях управления по координате x_2

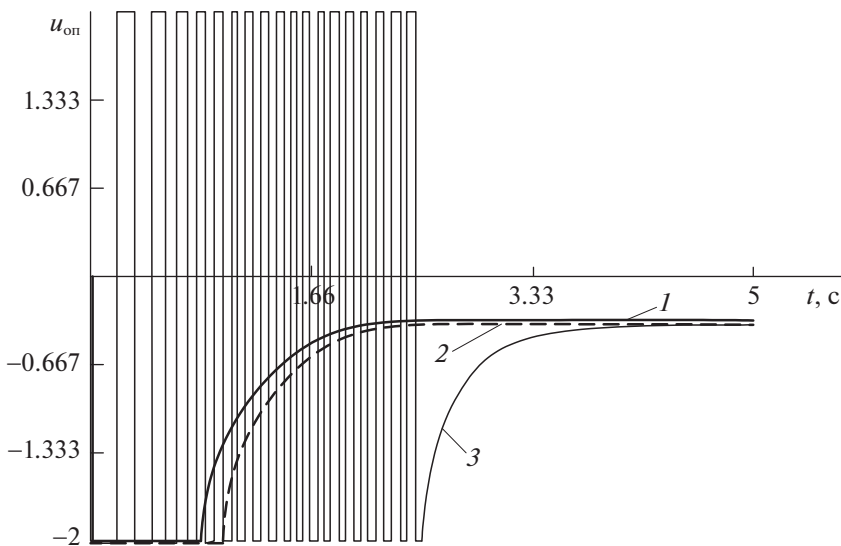


Рис. 5. Реализация различных стратегий управления

$$I = \int_{t_0}^{t+T_n} \{0.5\beta(x_1(t) - x_3)^2 + u_{оп}k^{-1}u\}d\theta, \quad (5.11)$$

при релейном $u = 2\text{sign}u_{оп}$, $-2 \leq u \leq 2$ и релейно-линейном законах управления $u = 2\text{sat}u_{оп}$: $u = 2u_{оп}$, если $u \in \text{int}U$, $U \subseteq R^m$ и $u = 2\text{sign}u_{оп}$, если $|u| \geq 2$.

Результаты минимизации ФОР (5.10) и КВОР (5.11) на основе так называемого “алгоритма модифицированного” (рис. 1) приведены на рис. 3–5.

Для проверки работоспособности алгоритма при стратегии совмещенного синтеза $u \rightarrow u_{оп}$ (кривые 2) и при субоптимальных стратегиях управления (кривые 1, 3) проводился сравнительный анализ численных расчетов.

Моделирование проводилось при шаге оптимизации $\Delta t = 0.05c$, $\varepsilon_3 = 0.01$ и при выбранных эмпирическим путем значениях параметров ФОР (5.10) и КВОР (5.11): $T_{\text{п}} = 1.6$, $\beta = 1.5$, $k = 1.2$, $r = 0.4$.

Сравнительный анализ численных расчетов показывает, что по точности и затратам на управление наиболее предпочтительна приближенно-оптимальная стратегия управления (кривые 2). Точность вычислений здесь обеспечивается за счет поинтервального уточнения точек стационарности локальной минимали при среднем числе итераций $j = 4-6$ на каждой длине оптимизации.

Качественно близкие результаты моделирования получаются при использовании комбинированной стратегии управления (кривые 1). Однако стабилизация заданного движения $x_3 = -0.4$ при применении релейно-линейного закона происходит с постоянной статической ошибкой $\Delta x_1 = 0.1$, что не всегда приемлемо с точки зрения выдерживания точностных характеристик регулятора.

Организация скользящего режима работы квазиоптимального регулятора относительно поверхности переключения – вычисляемой функции Ляпунова $V(t, x_0)$ – обеспечивается релейным законом управления (рис. 5). Использование релейного закона позволяет точно стабилизировать заданную выходную координату системы (5.9). Однако при этом заметно ухудшаются показатели качества переходных процессов и увеличиваются затраты на управление.

Заключение. Таким образом, совместное использование процедур интервальной и локальной оптимизации позволяет существенно упростить алгоритмы управления. Вместо того, чтобы для обеспечения ожидаемой квадратичной сходимости одновременно использовать характеристики первого и второго порядков (уравнения сопряженной системы и матричное нелинейное уравнение типа Риккати), предлагается применять только характеристики первого порядка, точки стационарности которых уточняются путем квазилинеаризации на длинах Δt , а грубое начальное приближение локальной минимали определяется из процедуры по схеме дифференциального динамического программирования.

На основе условий теорем 3, 4 разработано алгоритмическое обеспечение интегрированной САУ, стратифицированное по уровням управления воздушным судном (например, [22–26]), которое проверено на модельных задачах динамики перспективных автоматизированных систем предупреждения столкновений и преодоления сдвига ветра при заходе на посадку самолета среднего класса.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Методика доказательства теоремы 3 сводится к следующему. Вводим расширенный вектор состояния $y = (x, \delta u)$ и преобразуем уравнения (2.15), (2.16) к виду

$$\dot{y} = f(t, y) + \Gamma_1 \vartheta, \quad (\text{П.1})$$

где $f(t, y) = (f(t, x_0, u_0) + \partial f / \partial u \cdot \delta u, 0)$ – векторная функция, получаемая при квазилинеаризации по схеме дифференциального ДП; $\Gamma_1 = [O \ E]^T$ – прямоугольная матрица при “новом” векторе управления ϑ ; E_1 – единичная матрица размерности $m \times m$ соответственно; $y(t_0) = (x(t_0), 0)$. Затем формируем ФОР для расширенного пространства состояний и управлений $X \times U \times T$ в виде (3.2) ($S_3(y(t_k)) = S_3(x(t_k))$).

Выписываем достаточные условия оптимальности:

$$\inf_{\vartheta \in R^m} \left(\frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y} (f(t, y) + \Gamma_1 \vartheta) + Q_p(t, y) + 0.5 \vartheta_0^T r^{-1} \vartheta_0 \right) = 0, \quad (\text{П.2})$$

из которых определяем оптимальные в локальном смысле “новые” управления ϑ :

$$\vartheta = \vartheta_0 = -r \Gamma_1 \frac{\partial \Phi^T(t, y)}{\partial y} = -r \frac{\partial \Phi^T(t, y)}{\partial \delta u}. \quad (\text{П.3})$$

Если в последних выражениях ввести обозначение $p_{\delta u} = \partial \Phi^T / \partial \delta u$, то оказывается выполненным условие (3.5) теоремы. Формула (4.3) может быть получена иначе через условие стационар-

ности: $\partial H / \partial \delta u = 0$, где $H(t, y, \varphi_y) = \partial \varphi(t, y) / \partial y (f(t, y) + \Gamma_1 \vartheta) + Q_p(t, y) + 0.5 \vartheta_0^T r^{-1} \vartheta_0$ – гамильтониан системы (4.1), $\partial \varphi(t, y) / \partial y$ – вектор-строка размерности $1 \times (n + m)$.

Выполняем постановку формулы (П.3) в выражение (П.2), в результате чего достаточные условия оптимальности запишутся в форме уравнения

$$\frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial y} f(t, y) + Q_p(t, y) = 0, \quad (\text{П.4})$$

где функция $\varphi(t, y)$ имеет смысл функции Ляпунова в теории устойчивости.

Формула (П.4) определяет “свободное” движение системы (4.1). Полная производная, вычисленная на “свободном” движении, вычисляется с помощью выражения

$$\dot{\varphi}(t, y) = \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial y} f(t, y). \quad (\text{П.5})$$

Уравнение (П.4) с учетом выражения (П.5) принимает вид

$$\dot{\varphi}(t, y) = -Q_p(t, y), \quad (\text{П.6})$$

из которого следует условие (3.6) теоремы 3.

С помощью метода характеристик определяем решение уравнения в частных производных (П.4) в виде канонически сопряженной системы [1]

$$\dot{y} = \frac{\partial H^T(t, y, p)}{\partial p} = f(t, y), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H^T(t, y, p)}{\partial y} = -\frac{\partial f^T(t, y)}{\partial y} p - \frac{\partial Q_p^T(t, y)}{\partial y}, \quad (\text{П.7})$$

где $H(t, y, p) = \partial \varphi(t, y) / \partial t + \partial \varphi(t, y) / \partial y \cdot f(t, y)$ – гамильтониан “свободного” движения системы (П.1), $p = \partial \varphi^T(t, y) / \partial y$ – вектор-столбец частных производных размерности $n \times m$.

Раскрывая векторы y, p через субвекторы $x, \delta u$ и $p_x, p_{\delta u}$ в результате декомпозиции соотношений (П.7) получим формулы, соответствующие условиям (2.15), (3.3)–(3.4) теоремы 3.

Через процедуру поиска слабой локальной минимали $u_{\text{он}}(t, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} u_{\text{он}}(t, t) = u_0(t)$ находим оптимальный в смысле достижения локального минимума функционала (1.4) процесс (1.3). Таким образом, оказываются выполненными все условия теоремы 3. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4 для схемы дифференциального ДП (теорема 3). Уравнения канонически сопряженной системы (1.3), (5.1) и формула (5.4) получаются из (2.15), (3.3), (3.6) при $u = u_0(t)$. Условия стационарности (5.2) и условие 3) теоремы 2 можно вывести, следуя схеме доказательства от противного (схема Бласса). Для этого рассмотрим вариации управления, определяемые градиентной процедурой (3.1), которая на малых длинах оптимизации Δt представлена соотношением $u(t) = u_0(t) + \vartheta \Delta t$.

Из последнего выражения видно, что слабая локальная минималь (x_0, u_0) формируется через выполнение в каждой точке стационарности условия $u = u_0(t)$: точно – за счет обеспечения равенства нулю предельных элементов минимизирующих последовательностей по u : $\vartheta = \vartheta_0 = 0$; приближенно – путем уменьшения длин оптимизации: $\Delta t \rightarrow 0$.

Предположим обратное – существует управление $\tilde{u}(t) = u_0(t) + \Delta u(t)$, при котором минимум локального критерия меньше минимума локального функционала: $\tilde{I}(t) < I(t)$. Тогда $d(\tilde{u}(t) - u_0(t)) / dt = d\Delta u(t) / dt$, что противоречит условиям локальной оптимальности управления в (5.10): $d\delta u / dt = 0$. Таким образом, $\Delta u(t) = 0$ и $\vartheta = \vartheta_0 = 0$.

Далее из формулы (3.5) теоремы 3 следует, что при отсутствии левых делителей нуля субвектор $p_{\delta u}$ расширенного вектора косостояния равен $p_{\delta u} = 0$.

Производная от этого субвектора также будет равна нулю: $\dot{p}_{\delta u} = 0$, откуда в силу выполнения соотношения $\dot{p}_{\delta u} = \partial H^T / \partial \delta u$ оказывается справедливым уравнение (5.2) условия 2) теоремы 4. Теорема доказана.

Доказательство справедливости оценки (5.5) сводится к следующему. Пусть u_0^1 – начальное приближение вектора локально-оптимального управления u_0 , а общее рекуррентное соотношение выписано из (3.1):

$$u_0^{j+1} = u_0^j + \vartheta(u_0^j)\Delta t, \quad (\text{П.8})$$

где $\vartheta(u_0^j) = rp_{\delta u}(u_0^j)$.

Чтобы убедиться в справедливости оценки в (П.8) для i компонент векторов u_0^{j+1} , u_0 , $\vartheta(u_0^j)$, запишем

$$u_{0i}^{j+1} - u_{0i} = u_{0i}^j + \vartheta_i(u_0^j)\Delta t - (u_{0i} + \vartheta_i(u_0)\Delta t) = \xi_i^1(u_0^j) - \xi_i^1(u_0), \quad (\text{П.9})$$

где $\xi_i^1(u) = u_i + \vartheta_i(u)\Delta t$, $\vartheta_i(u_0) = -r_i p_{\delta u}^i(u_0) = 0$, (см. теорему 4).

Выражение (П.9) представим рядом Тейлора, в котором учтем первые три члена, включая остаточный $u_{0i}^{j+1} - u_{0i} = (u_{0i}^j - u_{0i})\xi_i^1(u_0) + 0.5(u_{0i}^j - u_{0i})^2\xi_i^1(\theta)$. Здесь по теореме о среднем (теореме Лагранжа [4]) остаточный член равен

$$\int_{u_{0i}}^{u_{0i}^j} (u_{0i}^j - \zeta)\xi_i^1(\zeta)d\zeta = \frac{(u_{0i}^j - u_{0i})^2}{2}\xi_i^1(\theta),$$

где θ – некоторое значение независимой переменной, промежуточное между u_{0i}^{j+1} , u_{0i} ; $u_{0i} \leq \theta \leq u_{0i}^j$.

Поскольку $\xi_i^1(u) = u_i + \vartheta_i(u)\Delta t$, то в точках стационарности $u_i = u_{0i}$: $\xi_i^1(u) = 0$, так как u_{0i} – не варьируемый на длинах оптимизации параметр, а условие $p_{\delta u}^i(u_0) = 0$ следует из теоремы 4. Следовательно, справедлива оценка

$$|u_{0i}^{j+1} - u_{0i}| \leq k_{1i}|u_{0i}^j - u_{0i}|^2, \quad (\text{П.10})$$

где $k_{1i} = \max_{u_0 \leq \theta \leq u_0^j} (\xi_i^1(\theta)/2)$.

Формула (П.10), записанная в векторном виде, является первой искомой оценкой в (5.5). Утверждение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987.
2. Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принципы оптимального управления // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48. С. 15–18.
4. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968.
5. Атанс М.М., Фалб П. Оптимальное управление / Под ред. Ю.И. Топчиева. М.: Машиностроение, 1968.
6. Хрусталева М.М. О достаточных условиях абсолютного минимума // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 5. С. 1026–1029.
7. Москаленко А.И. Оптимальное управление моделями экономической динамики. Новосибирск: Наука. СО, 1999.
8. Jacobson D.H. Differential Dynamic Programming Methods for Solving Bang-bang Control Problems // IEEE Trans. On Autom. Control. 1968. V. AC-13. № 6. P. 661–675.
9. Батуринов В.А., Урбанович Д.Е. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. Новосибирск: Наука. СО, 1997.
10. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
11. Сизых В.Н., Данеев А.В. Квазилинеаризация и достаточные условия оптимальности в задаче улучшения и локализации // Изв. Самарского научного центра РАН. 2016. Т. 18. № 4 (6). С. 1250–1260.
12. Sizykh V.N., Daneev A.V., Dambaev J.G. Methodology of Approximately Optimal Synthesis of Fuzzy Controllers for Circuit of Improvement and Localization // Far East J. of Mathematical Sciences. 2017. V. 101. № 3. P. 487–506.
13. Сизых В.Н. Итерационно-релаксационный метод приближенно-оптимального синтеза регуляторов // Докл. РАН. 2000. Т. 371. № 5. С. 571–574.

14. *Болтянский В.Г.* Отделимость выпуклых конусов – общий метод решения экстремальных задач // Оптимальное управление. М.: Знание, 1978.
15. *Диль В.Ф., Сизых В.Н.* Методика синтеза законов управления летательным аппаратом на основе траекторного прогнозирования и метода обратных задач динамики // Современные технологии, системный анализ, моделирование. 2015. № 4 (48). С. 134–138.
16. *Константинов Г.Н.* Нормирование воздействий на динамические системы. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1983.
17. *Черноусько Ф.Л., Баничук В.П.* Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973.
18. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1974.
19. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.–Л.: Физматгиз, 1962.
20. *Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К.* Геометрические методы в вариационных задачах. М.: Изд-во Магистр, 1998.
21. *Буков В.Н., Сизых В.Н.* Приближенный синтез оптимального управления в вырожденной задаче аналитического конструирования // АиТ. 1999. № 12. С. 16–32.
22. *Диль В.Ф., Сизых В.Н.* Синтез оптимального управления воздушным судном на основе уравнений нелинейной динамики // Научный вестник МГТУ ГА. 2017. Т. 20. № 3. С. 139–148.
23. *Данеев А.В., Диль В.Ф., Сизых В.Н.* Оптимизация процессов управления пространственным движением воздушного судна на основе уравнений нелинейной динамики // Изв. Самарского научного центра РАН. 2017. Т. 19. № 1. С. 195–200.
24. *Буков В.Н., Сизых В.Н.* Метод и алгоритмы решения сингулярно-вырожденных задач аналитического конструирования // Изв. РАН. ТиСУ. 2001. № 5. С. 43–51.
25. *Сизых В.Н.* Итерационно-релаксационный метод нелинейного синтеза регуляторов // АиТ. 2005. № 6. С. 108–119.
26. *Данеев А.В., Сизых В.Н.* Методология проектирования алгоритмического обеспечения интегрированных систем управления авиационными транспортными средствами на основе уравнений нелинейной динамики. М.: Наука, 2021. 295 с.

ДИАГРАММЫ ФУНКЦИЙ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ НАИБЫСТРЕЙШЕГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПЛАТФОРМЫ С ДВУМЯ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

© 2022 г. О. Р. Каюмов

Филиал ОмГПУ, г. Тара, Россия

e-mail: Oleg_Kayumov@mail.ru

Поступила в редакцию 22.02.2022 г.

После доработки 11.05.2022 г.

Принята к публикации 30.05.2022 г.

Рассматривается задача оптимального по быстродействию перемещения системы с тремя степенями свободы в виде твердого тела, движущегося поступательно вдоль горизонтальной прямой и несущего два линейных осциллятора. Единственная управляющая сила приложена к несущему телу и ограничена по модулю, трение отсутствует. Система переводится из состояния покоя на заданное расстояние с гашением колебаний. Исследуется эволюция функций оптимального управления в зависимости от дальности перемещения. Предлагается наглядное представление этой зависимости в виде диаграммы, для построения которой дается алгоритм.

DOI: 10.31857/S0002338822050092

Введение. Рассматривается система, состоящая из несущего твердого тела и прикрепленных к нему линейными пружинами двух материальных точек (рис. 1). Пружины параллельны горизонтальной оси, вдоль которой несущее тело движется поступательно. Единственная управляющая сила \bar{F} приложена к этой платформе и ограничена по модулю наперед заданной величиной. Подобная модель может приближенно описывать малые перемещения платформы с упругими звеньями или сосуда, частично заполненного жидкостью. Постановки задач управления такими объектами известны давно [1], но многие из них до сих пор актуальны. Проблема — в дефиците управляющих воздействий, когда одной силой требуется погасить колебания нескольких взаимосвязанных тел. Известно, что платформа с n осцилляторами при действии горизонтальной силы управляема, если частоты собственных колебаний осцилляторов попарно различны [1, 2]. Практическая невозможность аналитического решения задачи наибоыстрейшего перемещения такой системы стимулировала поиски методов квазиоптимального управления. В [3] предложен поэтапный алгоритм синтеза ограниченного управления, где сочетаются метод [4] аппроксимации множества достижимости (для больших энергий системы) и применение общей функции Ляпунова [5, 6] (для построения обратной связи в окрестности требуемого положения равновесия). Подход развивался в работе [7], где исследовались проблемы существования и единственности движения под действием предлагаемого управления, а также в [8], где подробно рассмотрен случай платформы с двумя осцилляторами. Для этой же системы были построены алгоритмы, достигающие цели при действии неизвестных возмущений и при неизмеряемых состояниях осцилляторов [9, 10]. В работе [11] указан закон управления, переводящего платформу с n осцилляторами за конечное время в требуемое состояние покоя при неполной информации о состоянии и возмущениях, причем для некоторого типа начальных состояний найдена асимптотика времени движения в зависимости от числа n .

Далее речь пойдет о задаче оптимального быстродействия, когда трение отсутствует, а фазовое состояние системы в каждый момент измеримо. Ранее с помощью принципа максимума Понтрягина [12] была решена задача наибоыстрейшего перемещения платформы с одним осциллятором, где оптимальное управление оказалось кусочно-постоянным с тремя переключениями [1, 13].

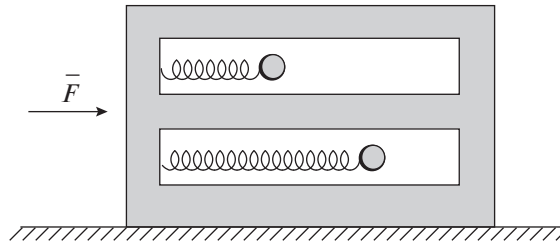


Рис. 1. Модель платформы с двумя осцилляторами

В [14] на основе учета симметрий задачи предложена структура управления, удовлетворяющего необходимым условиям оптимального быстрогодействия для перемещения платформы с n осцилляторами. В его записи участвуют значения первых n моментов переключения, что требует предварительного решения системы нелинейных уравнений. Показано, что искомое управление является кусочно-постоянным с нечетным числом переключений. Для случая $n = 2$ численные решения иллюстрировались на фазовой плоскости одного из осцилляторов, и, в частности, доказано, что для малых значений дальности перемещения количество переключений равно пяти.

1. Постановка задачи. Повторяя использованные в [14] преобразования координат и времени, приведем уравнения движения платформы с двумя осцилляторами (рис. 1) к форме с безразмерными переменными и временем:

$$\ddot{x}_0 = u, \quad \ddot{x}_1 + x_1 = u, \quad \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = u, \quad |u| \leq 1, \quad (1.1)$$

где u — управляющая сила, параметр $\omega > 1$ растет с увеличением отношения собственных частот осцилляторов. Переменные x_0, x_1, x_2 являются линейными комбинациями горизонтальных координат платформы и осцилляторов. Одновременное обращение в нуль значений x_1 и x_2 соответствует ненапряженным состояниям пружин. Полагая, что при требуемом перемещении платформы переменная x_0 меняется на величину $2b$, назовем в середине этого отрезка начало отсчета координаты x_0 . Аналогичную “удвоенную” запись введем и для искомого общего времени $2T$ движения системы, что придаст краевым условиям симметричный вид.

Задача оптимального по быстродействию перемещения платформы с двумя осцилляторами формулируется следующим образом: требуется определить управление $u(t), t \in [0, 2T]$, переводящее систему (1.1) из состояния

$$x_0(0) = -b, \quad x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.2)$$

за наименьшее время $2T$ (заранее неизвестное) в состояние

$$x_0(2T) = b, \quad x_i(2T) = \dot{x}_i(2T) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.3)$$

Как и в работе [14], поставленную задачу быстрогодействия будем рассматривать для взаимной вариационной задачи на максимум дальности $2b$ при заданном времени $2T$. При этом исследуем эволюцию функций оптимального управления $u(t), t \in [0, 2T]$ с изменением параметра T . Для наглядного представления этой эволюции введем изображение, которое назовем *диаграммой функций оптимального управления*. Поскольку каждая такая функция однозначно задается чередованием участков с постоянными значениями “+1” и “-1”, то поставим ей в соответствие отрезок длиной $2T$, составленный из серых и белых фрагментов, повторяющих длительности положительных и отрицательных участков на графике. Таким способом за счет двух цветов графический образ функции $u(t), t \in [0, 2T]$ станет одномерным. Далее из составных отрезков (как из горизонтальных слоев) на плоскости с вертикальной координатой T соберем двумерную диаграмму, отражающую эволюцию функции управления с изменением T . Если при этом использовать смещенное время $\tilde{t} = t - T, \tilde{t} \in [-T, T]$, то диаграмма для функций $u(\tilde{t})$ окажется симметричной относительно вертикальной оси.

На рис. 2 построена такая диаграмма для решенной в [1, 13] задачи наибо­ль­шего перемещения платформы с одним осциллятором. Каждое горизонтальное сечение диаграммы символизирует одну функцию $u(\tilde{t}), \tilde{t} \in [-T, T]$, с тремя моментами переключения.

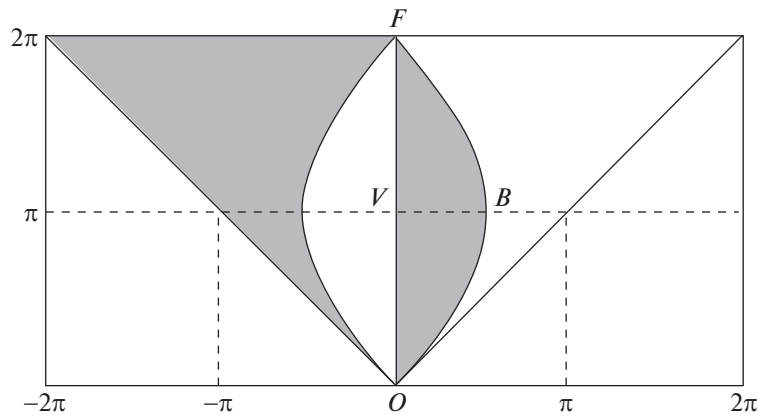


Рис. 2. Диаграмма в случае платформы с одним осциллятором

Поставим задачу исследования закономерностей, позволяющих строить диаграммы функций управления в задаче оптимального по быстродействию перемещения платформы с двумя осцилляторами.

2. Свойства движений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности. На основе принципа максимума Понтрягина было показано [14], что в задаче оптимального быстродействия (1.1)–(1.3) в смещенном времени $\tilde{t} = t - T$, $\tilde{t} \in [-T, T]$, оптимальное управление $u(\tilde{t})$, а также решения $x_i(\tilde{t})$, $i = \overline{0, 2}$, будут нечетными функциями, а $\dot{x}_i(\tilde{t})$, $i = \overline{0, 2}$, – четными функциями. В конце оптимальной полутраектории выполняются соотношения

$$u(T) = x_i(T) = 0, \quad i = \overline{0, 2}. \quad (2.1)$$

Оптимальное управление будет кусочно-постоянным с конечным числом переключений, число которых нечетно. Особые управления здесь невозможны в силу линейной независимости известных решений сопряженной системы принципа максимума.

Моменты времени переключения управления будем обозначать через τ_k , увеличивая индексы k с ростом значений времени. Их общее количество заранее не известно, но всегда в середине списка – момент времени T . Если его номер равен j (т.е. ему предшествуют моменты переключения $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}$), то в конце оптимальной полутраектории выполняется [14] система двух уравнений:

$$\begin{aligned} (-1)^{j+1} - \cos T + 2 \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k+1} \cos(T - \tau_k) &= 0, \\ (-1)^{j+1} - \cos \omega T + 2 \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k+1} \cos \omega(T - \tau_k) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Использование моментов переключения управления как корней системы (2.2) (при заданном значении T) лежит в основе дальнейших рассуждений. Для достаточно малых T имеет место [14] следующее утверждение.

З а м е ч а н и е 1. При каждом значении $T \in (0, T_s]$, где $T_s = 2\pi/\omega$, в задаче оптимального быстродействия (1.1)–(1.3) существует режим движения с пятью переключениями управления в моменты времени $\tau_1, \tau_2, T, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$.

Можно показать [14], что если число ω – рациональное, представимое несократимой дробью

$$\omega = \frac{l}{m}, \quad (l \in N, m \in N), \quad (2.3)$$

то в задаче оптимального быстродействия (1.1)–(1.3) выполняются следующие свойства.

С в о й с т в о 1. Существует оптимальное движение с одним переключением управления при $T = T_*$, где $T_* = 2m\pi$.

С в о й с т в о 2. Если управление с моментами переключения $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}, T$ удовлетворяет краевым условиям (2.2), то управление с моментами переключения $\tau_1 + T_*, \tau_2 + T_*, \dots, \tau_{j-1} + T_*, T + T_*$ тоже им удовлетворит.

С в о й с т в о 3. Если управление с моментами переключения $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}, T$ при $T < T_*/2$ удовлетворяет краевым условиям (2.2), то управление с моментами переключения $\tau_1 + \Delta, \tau_2 + \Delta, \dots, \tau_{j-1} + \Delta, T + \Delta$ (где $\Delta = T_* - 2T$) тоже им удовлетворит.

Заметим, что в случае иррационального значения ω свойства 1–3 уже не выполняются, так как в системе (2.2) не будет общего периода T_* всех функций. В этом случае зависимость дальности перемещения системы от времени не сможет быть предъявлена в каком-либо завершенном виде ввиду бесконечного чередования все новых типов движений с ростом времени $2T$.

Далее ограничимся случаями, когда число ω имеет вид (2.3).

Из [14] следуют замечания 2–4.

З а м е ч а н и е 2. Если в задаче (1.1)–(1.3) траектория оптимальна по быстродействию и реализуется кусочно-постоянным управлением с пятью переключениями управления (в моменты времени $\tau_1, \tau_2, T, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$), то управляющая функция имеет вид

$$u = \text{sign}(\xi \det Q_3(t)), \quad Q_3(t) = \begin{bmatrix} T-t & T-\tau_1 & T-\tau_2 \\ \sin(T-t) & \sin(T-\tau_1) & \sin(T-\tau_2) \\ \sin\omega(T-t) & \sin\omega(T-\tau_1) & \sin\omega(T-\tau_2) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

где знак константы ξ определяется известным (по условию) значением управления $u(t)$ при $t \in [0, \tau_1)$.

Для сценария, описанного в замечании 2, значения τ_1, τ_2 (при заранее заданной длительности полутраектории T) находятся из системы (2.2), принимающей при $j = 3$ вид

$$\begin{aligned} 1 - \cos T + 2\cos(T - \tau_1) - 2\cos(T - \tau_2) &= 0, \\ 1 - \cos\omega T + 2\cos\omega(T - \tau_1) - 2\cos\omega(T - \tau_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

З а м е ч а н и е 3. Если в задаче (1.1)–(1.3) траектория оптимальна по быстродействию и реализуется кусочно-постоянным управлением с количеством переключений большим, чем пять, то вид управляющей функции будет тот же (2.4).

Это замечание относится к ситуации, когда неизвестных значений $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ больше, чем уравнений (2.2). Здесь проверить оптимальность конкретного набора моментов переключений можно путем интегрирования уравнений движения (1.1)–(1.2): расписание должно подтвердиться автоматически при действии управления (2.4), иначе оно не оптимально.

З а м е ч а н и е 4. Если в задаче (1.1)–(1.3) траектория оптимальна по быстродействию и реализуется кусочно-постоянным управлением с тремя переключениями (в моменты времени $\tau_1, T, 2T - \tau_1$), то управляющая функция имеет вид

$$u = \text{sign}(\xi \det Q_2(t)), \quad Q_2(t) = \begin{bmatrix} T-t & T-\tau_1 \\ \sin(T-t) & \sin(T-\tau_1) \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

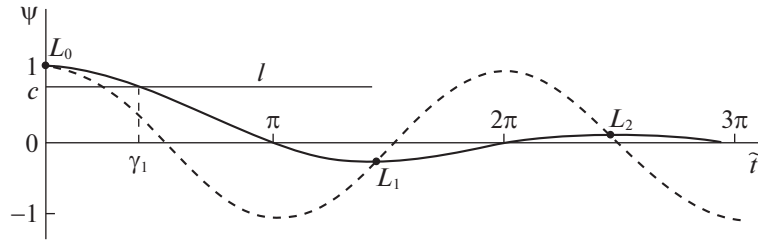
Для сокращения записей каждому значению τ_k момента времени переключения управления будем ставить в соответствие разность

$$\gamma_k = T - \tau_k, \quad k \in N. \quad (2.7)$$

3. Режимы с тремя переключениями управления. Далее будет показано, что при построении диаграмм функций оптимального управления важную роль играют режимы с тремя переключениями. Их моменты времени $\tau_1, T, 2T - \tau_1$ соответствуют корням системы (2.2), принимающей при $j = 2$ вид

$$\begin{aligned} -1 - \cos T + 2\cos(T - \tau_1) &= 0, \\ -1 - \cos\omega T + 2\cos\omega(T - \tau_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Необходимое условие оптимальности режима, описанного в замечании 4, выражается в том, что действующая по закону (2.6) функция управления не должна обратиться в нуль при других

Рис. 3. График функции $\psi(\tilde{\tau})$

значениях времени, кроме $\tau_1, T, 2T - \tau_1$. Для исследования этого условия используем смещенное время $\tilde{\tau} = t - T, \tilde{\tau} \in [-T, T]$, обозначения (2.7) и преобразуем определитель (2.6) к виду

$$\det Q_2(\tilde{\tau}) = -\gamma_1 \tilde{\tau} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \psi(\tilde{\tau}) & \psi(\gamma_1) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Здесь введено обозначение функции

$$\psi(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}. \quad (3.3)$$

которую доопределим значением $\psi(0) = 1$.

Функция $\psi(\tilde{\tau})$ — четная. При $\tilde{\tau} > 0$ условие ее экстремумов

$$\frac{d}{d\tilde{\tau}} \left(\frac{\sin \tilde{\tau}}{\tilde{\tau}} \right) = \frac{1}{\tilde{\tau}} \left(\cos \tilde{\tau} - \frac{\sin \tilde{\tau}}{\tilde{\tau}} \right) = 0$$

соответствует точкам пересечения графиков функции $\psi(\tilde{\tau})$ (на рис. 3 — сплошная линия) и функции $\cos(\tilde{\tau})$ (пунктирная линия). Такими точками являются, например, L_1 ($\tilde{\tau} \approx 1.4303\pi$, $\psi \approx -0.21723$), L_2 ($\tilde{\tau} \approx 2.4590\pi$, $\psi \approx 0.12837$) и т.д. С увеличением номера i аргумент i -го экстремума монотонно приближается к значению $(2i + 1)\pi/2$.

Чтобы удовлетворить необходимому условию оптимальности, управление (2.6) должно обращаться в нуль только при $\tilde{\tau} = 0$ и $\tilde{\tau} = \pm\gamma_1$. Геометрически это равносильно следующему требованию.

Условие 1. Горизонталь l , проведенная на уровне $c = \psi(\gamma_1)$, должна иметь ровно одну общую точку с графиком функции $\psi(\tilde{\tau})$ при $\tilde{\tau} > 0$.

Тогда на рис. 3 она должна пройти либо через точку L_1 , либо между точками L_0 и L_2 .

Утверждение 1. Для любого $\omega \neq 2$ в задаче оптимального быстрогодействия (1.1)–(1.3) существует такое значение дальности перемещения $2b$, при котором управление будет иметь ровно три момента переключения: $\tau_1, T, 2T - \tau_1$. Эти значения удовлетворяют не только системе (3.1), но и неравенству

$$0 < T - \tau_1 < \frac{\pi}{2}. \quad (3.4)$$

Доказательство. В силу монотонной зависимости $T(b)$ поиск значения b заменим варьированием T . Первое уравнение системы (3.1) представим в виде

$$\cos \gamma_1 = (1 + \cos T)/2. \quad (3.5)$$

Множество его корней изображается (рис. 4) на координатной плоскости (T, γ_1) бесконечной фигурой из горизонтальных цепочек $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$, составленных из одинаковых дуг. Левая нижняя дуга $OB\Gamma$ служит графиком функции

$$\gamma_1 = \arccos \left(\cos^2 \frac{T}{2} \right), \quad T \in [0, 2\pi], \quad \gamma_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

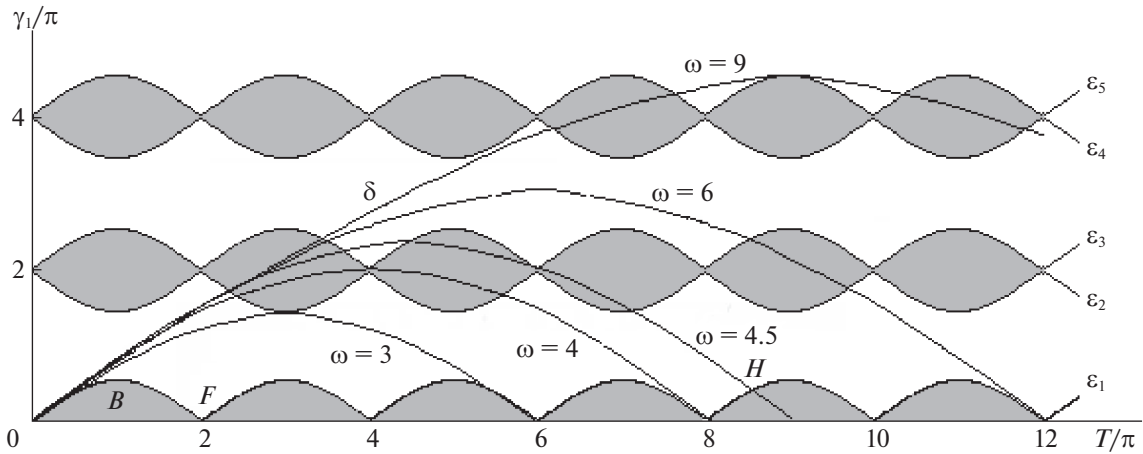


Рис. 4. Графическое решение системы уравнений (3.1)

Ранее эта же дуга встречалась на рис. 2. Она является симметричной относительно оси VB ($T = \pi$) и выпуклой вверх, так как $d^2\gamma_1/dT^2 < 0$. Производная $d\gamma_1/dT$ в точках $T = 0, T = \pi, T = 2\pi$ имеет значения соответственно $\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2$.

Из всего множества решений уравнения (3.5) условию 1 удовлетворяют только те, которые на рис. 4 изображены несвязным множеством Ω , полученным из цепочки ε_1 путем удаления из нее точек оси $\gamma_1 = 0$. Эти корни удовлетворяют неравенству $0 < \gamma_1 < \pi/2$, равносильному (3.4).

Для решения системы (3.1) при условии (3.4) достаточно найти такие корни T, γ_1 уравнения (3.5), которые удовлетворят ему и при замене на $\omega T, \omega\gamma_1$. Графически это соответствует точкам пересечения всей совокупности цепочек $\varepsilon_i, i \in N$, и несвязной линии δ , полученной из множества Ω при растяжении в ω раз (т.е. при гомотетии плоскости с коэффициентом ω и центром $O(0, 0)$).

Если число ω — целое, то линия δ (в силу отсутствия у нее точек на оси $\gamma_1 = 0$) не имеет общих точек с множеством ε_1 . При этом линия δ пересечет ближайшую цепочку ε_2 только при $\omega \geq 3$ (рис. 4). Отсюда следует, что при $\omega = 2$ система (3.1) не имеет решений. Если же число ω — не целое, то у множеств δ и Ω всегда имеются пересечения. Тем самым доказано не только утверждение 1, но и его следствие.

С л е д с т в и е. Если при некотором T нашлось значение τ_1 , удовлетворяющее системе (3.1) и неравенству (3.4), то управление с тремя переключениями в моменты $\tau_1, T, 2T - \tau_1$ будет удовлетворять необходимым условиям оптимальности.

4. Контрольная кривая и ее свойства. Рассматривая функцию оптимального управления (2.4) в смещенном времени $\tilde{t} = t - T, \tilde{t} \in [-T, T]$, преобразуем определитель из (2.4) к виду

$$\det Q_3(\tilde{t}) = -\omega\gamma_1\gamma_2\tilde{t} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi(\tilde{t}) & \psi(\gamma_1) & \psi(\gamma_2) \\ \psi(\omega\tilde{t}) & \psi(\omega\gamma_1) & \psi(\omega\gamma_2) \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

где используется ранее введенная функция (3.3).

Определитель (4.1) составлен из трех векторов-столбцов $\mathbf{p}(\tilde{t}), \mathbf{p}(\gamma_1), \mathbf{p}(\gamma_2)$ с однотипной структурой $\mathbf{p}(\theta) = (1, \psi(\theta), \psi(\omega\theta))^T$. Условие $\det Q_3(\tilde{t}) = 0$ переключения оптимального управления выполняется либо при $\tilde{t} = 0$, либо при компланарности трех векторов, что имеет место, в частности, при $\tilde{t} = \gamma_1$ или $\tilde{t} = \gamma_2$. Постоянные векторы $\mathbf{p}(\gamma_1)$ и $\mathbf{p}(\gamma_2)$ не коллинеарны, поэтому при откладывании от начала координат в пространстве (x, y, z) порождают конкретную плоскость. Она пересечет плоскость $x = 1$ по некоторой прямой, чью проекцию на плоскость yOz обозначим g . На эту же плоскость конец переменного вектора $\mathbf{p}(\tilde{t})$ проецируется в точку M с координатами

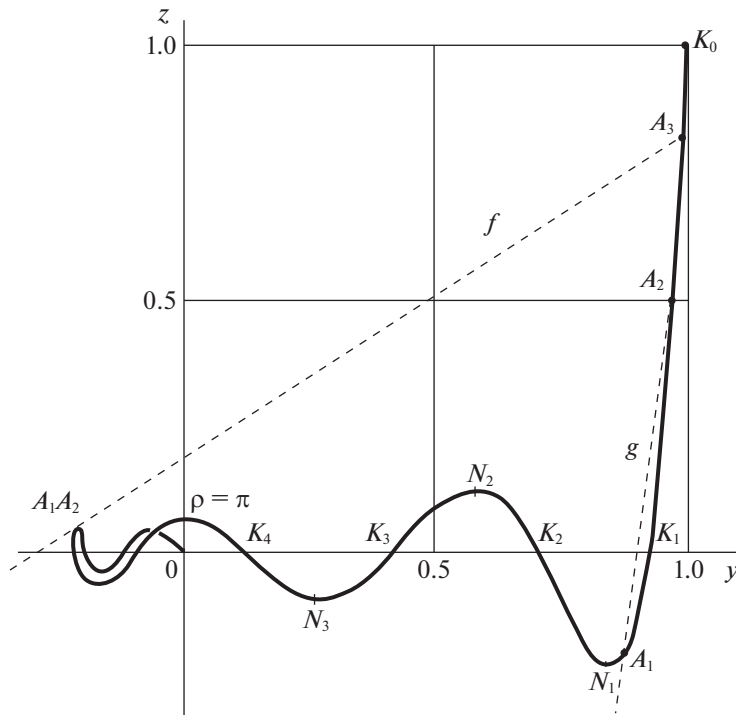


Рис. 5. Контрольная кривая для случая $\omega = 9/2$

$y = \psi(\tilde{t}), z = \psi(\omega\tilde{t})$. Линию на плоскости yOz , по которой точка M движется с изменением параметра $\tilde{t} \in [-T, T]$, назовем *контрольной кривой*. Для рассматриваемого случая (2.3) ввиду свойств 2 и 3 ограничимся рассмотрением диапазона $T \in (0, T_*/2]$. Таким образом, контрольную кривую зададим параметрическим уравнением

$$y = \psi(\rho), \quad z = \psi(\omega\rho), \quad \rho \in [0, T_*/2]. \tag{4.2}$$

Форма этой кривой зависит от значения константы ω , но всегда кривая начинается в точке $K_0(1,1)$ (при $\rho = 0$), пересекает ось Oz при $\rho = k\pi, k \in N$ и приходит в точку $O(0,0)$ при $\rho = T_*/2$. На рис. 5 показана контрольная кривая для $\omega = 9/2$ (при $\rho \in [0, 2\pi]$); на рис. 6 – для $\omega = 5/4$ (при $\rho \in [0, 4\pi]$).

Наряду с параметром ρ введем пропорциональный ему параметр

$$\sigma = \frac{\omega\rho}{\pi}. \tag{4.3}$$

Его натуральным значениям соответствуют точки пересечения контрольной кривой с горизонтальной осью Oy , которые последовательно обозначим через K_i . В частности, если ω – целое, то при $i = \omega$ точка K_i совпадает с $O(0,0)$.

Экстремумы функций $z(y)$ и $\psi(\tilde{t})$ численно равны, а параметры $\sigma_i = i + 0.5$ точек $N_i, i = 1, 2, \dots$, на рис. 5 мало отличаются от соответствующих значений \tilde{t}/π , вычисленных для экстремальных точек L_i на рис. 3. Можно показать, что внутри каждой дуги $K_iK_{i+1}, i = 1, 2, \dots$, контрольной кривой есть единственная точка перегиба P_i , расположенная ближе к точке K_{i+1} .

С помощью контрольной кривой можно геометрически интерпретировать необходимые условия оптимальности, выраженные формулами (2.4) и (4.1). Например, сочетание корней τ_1, τ_2, T системы (2.5) будет соответствовать оптимальному управлению с пятью переключениями, согласно замечанию 2, лишь при условии, что определитель (2.4) не обратится в нуль при других значениях времени t , кроме $\tau_1, \tau_2, T, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$. Это условие соответствует тому, что прямая g , проведенная через точки A_1 и A_2 (с параметрами $\rho = \gamma_1$ и $\rho = \gamma_2$), не имеет других общих точек

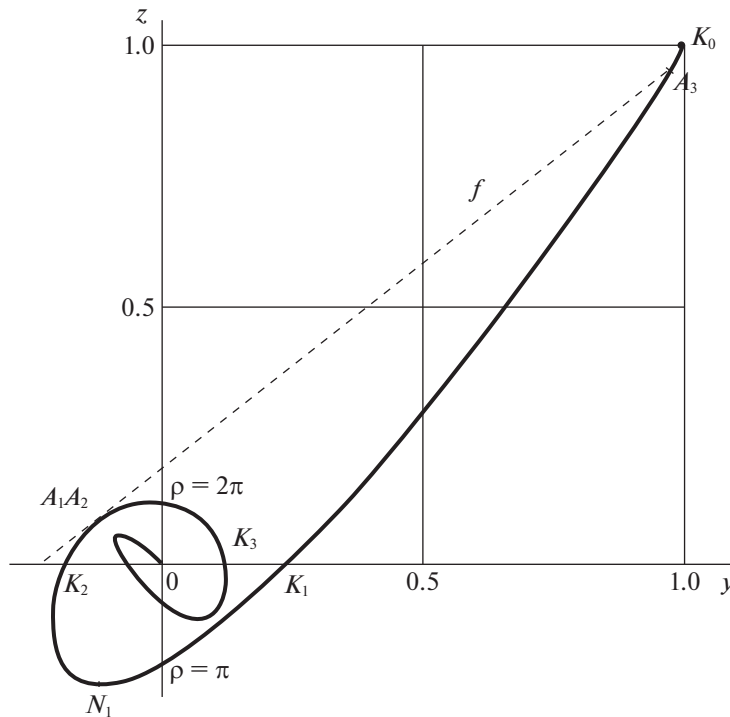


Рис. 6. Контрольная кривая для случая $\omega = 5/4$

с контрольной кривой (рис. 5). Действительно, если параметру $\rho = T$ соответствует точка W , то в смещенном времени $\tilde{t} \in [-T, T]$ изображающая точка M с координатами $(\psi(\tilde{t}), \psi(\omega\tilde{t}))$, двигаясь по контрольной кривой из W в K_0 и обратно, дважды пройдет дугу WK_0 . При этом знак управления $u(\tilde{t})$, согласно формулам (2.4) и (4.1), меняется последовательно в точках A_1, A_2, K_0, A_2 и A_1 .

На контрольной кривой выявляется оптимальность режимов, упомянутых в замечании 1, так как при $T \in (0, T_s]$ положения точек W (с параметрами $\sigma \in (0, 2]$) не выходят за пределы дуги K_0K_2 . В силу неравенств

$$T > \gamma_1 > \gamma_2 > 0 \tag{4.4}$$

точки A_1 и A_2 окажутся внутри вогнутой части этой дуги, поэтому прямая $g = A_1A_2$ не имеет других пересечений с контрольной кривой.

5. Эволюция функций оптимального управления в задаче (1.1)–(1.3). Исследуем изменение функций оптимального управления $u(t), t \in [0, 2T]$ в задаче (1.1)–(1.3) при непрерывном возрастании дальности перемещения платформы, что равносильно непрерывному увеличению параметра T . Для определенности ограничимся случаем $\omega \geq 3$, когда качественный вид контрольной кривой соответствует рис. 5. К случаю $1 < \omega < 3$ вернемся позже.

Итак, в диапазоне $T \in (0, T_s]$ оптимальное управление имеет ровно пять переключений в моменты $\tau_1, \tau_2, T, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$, удовлетворяющие системе (2.5). В обозначениях (2.7) эта система примет вид

$$\begin{aligned} \cos(\gamma_1) - \cos(\gamma_2) &= (\cos T - 1)/2, \\ \cos(\omega\gamma_1) - \cos(\omega\gamma_2) &= (\cos\omega T - 1)/2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Дифференцируя соотношения (5.1) по T , разрешим полученную систему уравнений относительно производных

$$\frac{d\gamma_1}{dT} = \frac{D_1}{D}, \quad \frac{d\gamma_2}{dT} = \frac{D_2}{D}. \tag{5.2}$$

Здесь

$$D = \det \begin{bmatrix} \sin \gamma_2 & \sin \gamma_1 \\ \sin \omega \gamma_2 & \sin \omega \gamma_1 \end{bmatrix} = \omega \gamma_1 \gamma_2 \det \begin{bmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{bmatrix} = \omega \gamma_1 \gamma_2 S_{21},$$

где использованы координаты $y_i = \psi(\gamma_i)$, $z_i = \psi(\omega \gamma_i)$, $i = 1, 2$, точек A_1 и A_2 на контрольной кривой. Аналогично вычисляются определители

$$D_1 = \frac{1}{2} \omega \gamma_2 T S_{20}, \quad D_2 = \frac{1}{2} \omega \gamma_1 T S_{10}$$

с помощью координат точки W в виде $y_0 = \psi(T)$, $z_0 = \psi(\omega T)$ и ориентированных площадей параллелограммов

$$S_{ij} = \det \begin{bmatrix} y_i & z_i \\ y_j & z_j \end{bmatrix}, \quad i, j = \overline{0, 2}, \quad i \neq j, \quad (5.3)$$

построенных на векторах $\overline{OA_1} = (y_1, z_1)$, $\overline{OA_2} = (y_2, z_2)$, $\overline{OW} = (y_0, z_0)$.

Эволюции режимов с пятью переключениями управления (при увеличении параметра $T \in (0, T_s]$) соответствует перемещение точек W , A_1 и A_2 по контрольной кривой (рис. 5) с соблюдением порядка следования (4.4). При всех положениях точки W на дуге $K_0 N_1$ повороты векторов $\overline{OA_1} \rightarrow \overline{OW}$, $\overline{OA_2} \rightarrow \overline{OW}$, $\overline{OA_2} \rightarrow \overline{OA_1}$ осуществляются по часовой стрелке, поэтому $S_{10} < 0$, $S_{20} < 0$, $S_{21} < 0$. В силу (5.2) имеем $\dot{\gamma}_1 > 0$, $\dot{\gamma}_2 > 0$, т.е. монотонный рост $\gamma_1(T)$, $\gamma_2(T)$. При дальнейшем продвижении (до состояния K_2) точка W пройдет через некоторое положение, при котором $\overline{OW} \parallel \overline{OA_1}$. Это следует из того, что в состоянии K_2 (при $T = T_s$) точка W окажется выше точки A_1 , для которой $\gamma_1 > T_s/2$ [14], т.е. $\sigma > 1$. В состоянии, когда $\overline{OW} \parallel \overline{OA_1}$, определитель S_{10} (а значит, и D_2) меняет знак, т.е. функция $\gamma_2(T)$ достигает максимума. Далее с ростом T получим $S_{10} > 0$, $S_{20} < 0$, $S_{21} < 0$, т.е. $\dot{\gamma}_1 > 0$, $\dot{\gamma}_2 < 0$, что на контрольной кривой соответствует росту параметра $\gamma_1(T)$ точки A_1 и убыванию $\gamma_2(T)$, т.е. движению “вспять” точки A_2 . Эти неравенства, порожденные направлениями вращения векторов \overline{OW} , $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$, сохранят свой смысл вплоть до достижения точкой A_2 положения K_0 (рис. 5) при $\gamma_2 = 0$, когда $u(t)$ вырождается в функцию с тремя моментами переключения τ_1 , T , $2T - \tau_1$. Ее параметры $T = T_1$, $\tau_1 = T - \lambda_1$ соответствуют (рис. 4) координатам $(\omega T_1, \omega \lambda_1)$ точки, в которой линия δ пересекла цепочку ε_2 , входя в закрашенную область. Обозначим через $(\omega T_2, \omega \lambda_2)$ координаты на выходе (где δ пересекает ε_3).

З а м е ч а н и е 5. При всех значениях $T \in (0, T_1)$ прямая g не имеет других общих точек с контрольной кривой, кроме A_1 и A_2 , поскольку они расположены на вогнутой части дуги $K_0 K_2$ (рис. 5). Следовательно, при $T \in (0, T_1)$ функция оптимального управления будет иметь ровно пять моментов переключения.

Можно показать, что на контрольной кривой при $T = T_1$ у точки A_1 параметр $\gamma_1 = \lambda_1$ будет меньше, чем у точки P_1 перегиба, т.е. A_1 останется на вогнутой части дуги $K_1 K_2$. При $T = T_1 + \Delta T$ (где ΔT – мало) продолжение режимов с пятью переключениями неосуществимо в силу $\gamma_2 = 0$, $\dot{\gamma}_2 < 0$. Далее непрерывная эволюция оптимальной функции $u(t)$ возможна лишь путем добавления двух новых сколь угодно близких моментов переключения, что на графике соответствует “игольчатой вариации” (рис. 7). В этом состоянии на контрольной кривой прямая g должна пройти через точку A_1 , но не должна быть секущей к этой кривой, иначе в графике $u(t)$ возникли бы скачкообразные изменения. Поэтому через точку с параметром λ_1 прямая g пройдет как касательная l к дуге $P_1 N_2$ (на рис. 8, a показан такой случай для $\omega = 4$). Точка касания получит статус “сдвоенной” $A_1 = A_2$ (с параметрами $\gamma_1 = \gamma_2$), а прежняя точка A_1 переименуется в A_3 (с параметром $\gamma_3 = \lambda_1$). На рис. 7 эта же ситуация показана на графике функции $u(t)$ при $\omega = 4$, где $T = T_1 \approx 2.01371$, $\tau_1 \approx \tau_2 \approx 0.45324$, $\tau_3 \approx 0.73266$, т.е. $\gamma_1 \approx \gamma_2 \approx 1.56047$, $\gamma_3 = \lambda_1 \approx 1.28104$.

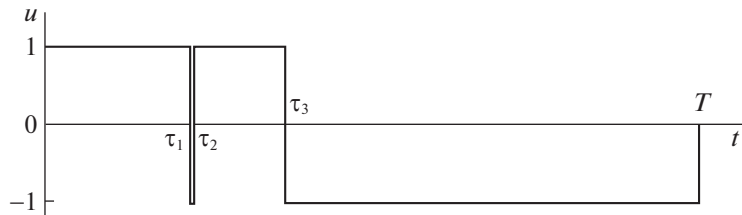


Рис. 7. Эволюция функции управления при $T = T_1$

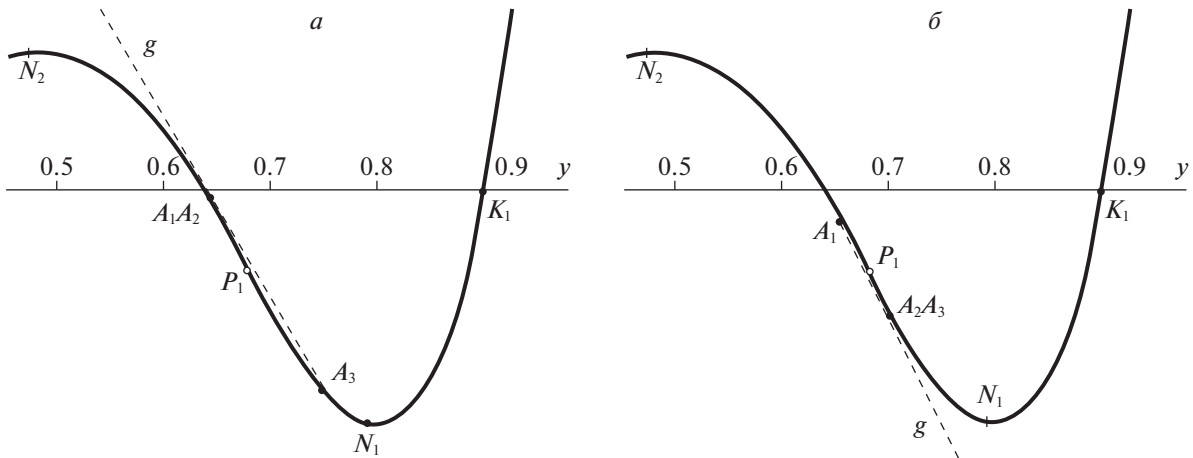


Рис. 8. Начало (а) и конец (б) режима с семью переключениями при $\omega = 4$

Значения $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ будут корнями системы (2.2) при $j = 4$:

$$\begin{aligned} -1 - \cos T + 2\cos(\gamma_1) - 2\cos(\gamma_2) + 2\cos(\gamma_3) &= 0, \\ -1 - \cos\omega T + 2\cos(\omega\gamma_1) - 2\cos(\omega\gamma_2) + 2\cos(\omega\gamma_3) &= 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

и будут меняться с увеличением параметра T . Скорости $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ можно выразить, дифференцируя по T как соотношения (5.4), так и равенство

$$H = \det \begin{bmatrix} \gamma_3 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \sin\gamma_3 & \sin\gamma_1 & \sin\gamma_2 \\ \sin\omega\gamma_3 & \sin\omega\gamma_1 & \sin\omega\gamma_2 \end{bmatrix} = 0, \tag{5.5}$$

вытекающее из необходимого условия оптимальности (2.4). Разрешив полученную систему трех уравнений относительно производных, получим

$$\frac{d\gamma_i}{dT} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,3}. \tag{5.6}$$

Использованные здесь определители приводятся к виду

$$\begin{aligned} \Delta &= \omega(\gamma_3\gamma_2 S_{32}H_1 + \gamma_3\gamma_1 S_{31}H_2 + \gamma_2\gamma_1 S_{21}H_3), \\ \Delta_1 &= \eta_3 H_2 + \eta_2 H_3, \quad \Delta_2 = -\eta_3 H_1 + \eta_1 H_3, \quad \Delta_3 = -\eta_2 H_1 - \eta_1 H_2, \\ H_i &= \frac{\partial H}{\partial \gamma_i}, \quad \eta_i = \frac{1}{2}\omega T \gamma_i S_{i0}, \quad i = \overline{1,3}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

где обозначения S_{ij} , $i, j = \overline{0,3}$, $i \neq j$, имеют прежний смысл (5.3), а частные производные H_2 , H_3 получаются из записи

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial \gamma_1} = \omega \gamma_2 \gamma_3 [S_{23} + (z_2 - z_3) \cos \gamma_1 - (y_2 - y_3) \cos \omega \gamma_1] \quad (5.8)$$

круговой перестановкой индексов.

Можно показать, что совпадавшие при $T = T_1$ значения γ_1 , γ_2 в силу (5.6) “расходятся”, т.е. далее начинается эволюция режимов с семью переключениями управления в моменты τ_1 , τ_2 , τ_3 , T , $2T - \tau_3$, $2T - \tau_2$, $2T - \tau_1$.

З а м е ч а н и е 6. При всех значениях $T \in (T_1, T_2)$ прямая g , проходящая через A_1 , A_2 , A_3 , не может иметь еще одну общую точку с контрольной кривой.

Для доказательства покажем, что точки A_1 , A_2 , A_3 при всех $T \in (T_1, T_2)$ не могут выйти за пределы дуги $N_1 N_2$. Если бы точка A_1 совместились с N_2 , то получили бы $\cos(\omega \gamma_1) = 0$ и отрицательность левой части уравнения (5.4) в силу $\cos(\omega \gamma_3) < \cos(\omega \gamma_2)$. Это неравенство выполнялось бы при расположении точки A_2 как на дуге $K_2 N_1$ (ввиду $\pi < \omega \gamma_3 < \omega \gamma_2 < 2\pi$), так и на дуге $K_2 N_2$, где $\cos(\omega \gamma_2) > 0$. В последнем случае $\cos(\omega \gamma_3) < 0$, поскольку точка A_3 лежала бы на дуге $K_1 N_1$ выше, чем точка пересечения прямой $K_2 N_2$ и контрольной кривой. Расчеты показывают, что параметр σ этой точки пересечения монотонно убывает при $\omega \in (3, \infty)$ от $\sigma \approx 1.25884$ до $\sigma \approx 1.18418$. Аналогично доказывается невозможность совмещения точек A_3 и N_1 , так как из условия $\cos(\omega \gamma_3) = 0$ следует отрицательность левой части уравнения (5.4) в силу $\cos(\omega \gamma_1) < \cos(\omega \gamma_2)$. Это неравенство выполнится как в случае $A_2 \in K_2 N_2$ (когда $2\pi < \omega \gamma_2 < \omega \gamma_1 < 3\pi$), так и в случае $A_2 \in K_2 N_1$ (где $\cos(\omega \gamma_2) > 0$, причем $\cos(\omega \gamma_3) < 0$ ввиду $A_1 \in K_3 N_2$).

Эволюция режимов с семью переключениями управления завершится при $T = T_2$, когда из трех общих точек A_1 , A_2 , A_3 прямой g и контрольной кривой две совместятся в виде точки касания (и “исчезнут”). В зависимости от значения ω совместятся

- 1) либо точки A_1 , A_2 , если $3 < \omega < \omega_*$,
- 2) либо точки A_2 , A_3 , если $\omega > \omega_*$.

Критическим является значение $\omega_* \approx 3.73$, при котором параметр λ_2 соответствует точке P_1 перегиба на дуге $N_1 N_2$ контрольной кривой. В случае 1) оставшаяся третья точка A_3 , лежащая ниже P_1 , переименуется в точку A_1 с параметром $\gamma_1 = \lambda_2$. В случае 2) останется точка A_1 , лежащая выше P_1 (рис. 8, б). Итак, при $T = T_2$ совпадут моменты переключения τ_1 и τ_2 (случай 1) либо τ_2 и τ_3 (случай 2) на графике функции $u(t)$, так что она вновь станет функцией с тремя моментами переключения.

Из следствия и замечаний 5, 6 следует утверждение.

У т в е р ж д е н и е 2. Для любого $\omega \geq 3$ в задаче оптимального быстродействия (1.1)–(1.3) функция $u(t)$, $t \in [0, 2T]$ имеет:

- а) пять переключений при $T \in (0, T_1)$;
- б) три переключения при $T = T_1$;
- в) семь переключений при $T \in (T_1, T_2)$;
- г) три переключения при $T = T_2$.

Заметим, что перечисленный список сценариев а)–г) окажется завершающим в диапазоне $T \in (0, T_*/2]$ для случая $\omega = 4$, так как для него $T_2 = \pi$. На рис. 9 для $\omega = 4$ показана лишь правая часть диаграммы функций оптимального управления (ее левая часть – зеркальная, но с переменной местами белого и серого цветов). В каждом слое диаграммы цифрой указано соответствующее количество переключений.

На рис. 10, а–в сравниваются фрагменты из горизонтального слоя диаграммы при $T \in (T_1, T_2)$ для значений $\omega = 4$, $\omega = \omega_*$ и $\omega = 3.5$.

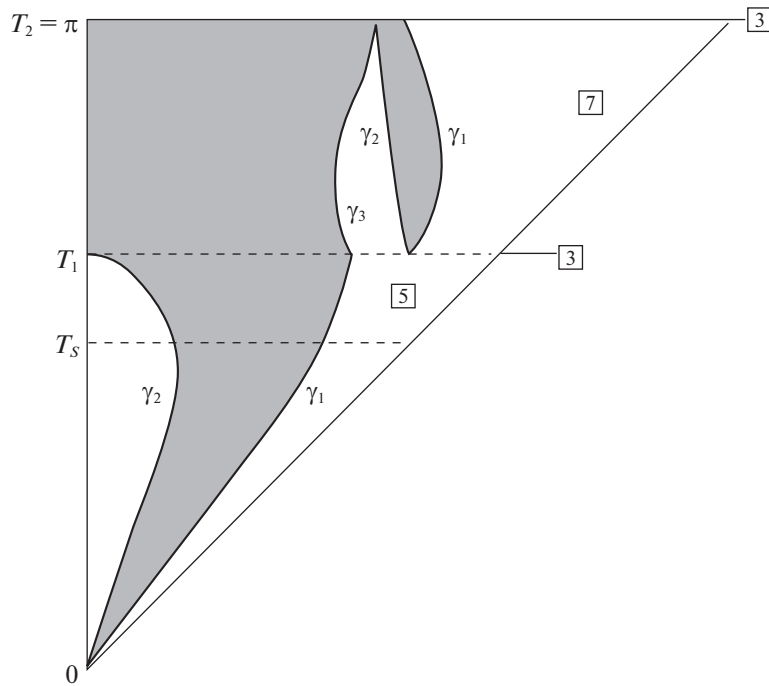


Рис. 9. Правая (“зеркальная”) часть диаграммы при $\omega = 4$

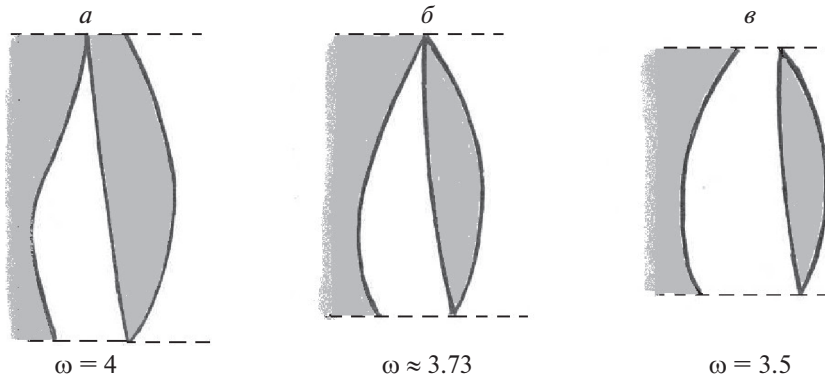


Рис. 10. Фрагмент диаграммы при $T \in (T_1, T_2)$ для разных значений ω

З а м е ч а н и е 7. Для всех случаев $\omega \geq 3, \omega \neq 4$ найдется ΔT , такое, что при каждом значении $T \in (T_2, T_2 + \Delta T]$ в задаче (1.1)–(1.3) оптимальное управление будет кусочно-постоянным с пятью моментами переключения.

Такой режим последует непосредственно за сценариями в), г). После “исчезновения” двух совместившихся при $T = T_2$ точек на контрольной кривой, прямая g может быть проведена лишь через оставшуюся точку, наделяемую ролью A_1 , и новую A_2 , начинающую движение из состояния K_0 при $T > T_2$. В начальном (при $T = T_2$) положении K_0A_1 прямая g не имеет других общих точек с дугой K_3K_4 контрольной кривой, поскольку этой дуги не задевает даже проходящая выше прямая K_0N_2 . Можно показать, что при $\omega \geq 3$ ее угловой коэффициент превосходит угловой коэффициент касательной, проведенной из N_2 к дуге K_3K_4 (в пределе при $\omega \rightarrow \infty$ отношение этих угловых коэффициентов монотонно убывает и стремится к значению ≈ 1.943215).

Упомянутому в замечании 7 диапазону параметров T соответствует такое расположение векторов, что повороты $\overline{OA_1} \rightarrow \overline{OW}, \overline{OA_2} \rightarrow \overline{OW}, \overline{OA_2} \rightarrow \overline{OA_1}$ осуществляются по часовой стрелке,

поэтому $S_{10} < 0$, $S_{20} < 0$, $S_{21} < 0$, т.е. $\dot{\gamma}_1 > 0$, $\dot{\gamma}_2 > 0$. С ростом параметра $\gamma_1(T)$ точка A_1 , пройдя положение N_2 , попадет в зону, где прямая A_1A_2 может коснуться дуги K_3N_3 . Из точки касания выйдут “новые” A_1 и A_2 , а прежние точки A_1 и A_2 переименуются в A_3 и A_4 . Тогда начнется режим с девятью переключениями в моменты $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, T, 2T - \tau_4, 2T - \tau_3, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$. В обозначениях (2.7) параметры $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ будут корнями системы (2.2) при $j = 5$:

$$\begin{aligned} 1 + 2\cos(\gamma_1) - 2\cos(\gamma_2) + 2\cos(\gamma_3) - 2\cos(\gamma_4) &= \cos T, \\ 1 + 2\cos(\omega\gamma_1) - 2\cos(\omega\gamma_2) + 2\cos(\omega\gamma_3) - 2\cos(\omega\gamma_4) &= \cos\omega T. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Кроме необходимого условия оптимальности (5.5), они также должны удовлетворить аналогичному уравнению:

$$R = \det \begin{bmatrix} \gamma_4 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \sin\gamma_4 & \sin\gamma_1 & \sin\gamma_2 \\ \sin\omega\gamma_4 & \sin\omega\gamma_1 & \sin\omega\gamma_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (5.10)$$

Дифференцируя по T соотношения (5.5), (5.9), (5.10), разрешим полученную систему уравнений относительно производных:

$$\frac{d\gamma_i}{dT} = \frac{\tilde{\Delta}_i}{\tilde{\Delta}}, \quad i = \overline{1,4}. \quad (5.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} &= -R_1(V_{43}H_2 + V_{42}H_3) + R_2(V_{43}H_1 - V_{41}H_3) + R_4(V_{32}H_1 + V_{31}H_2 + V_{21}H_3), \\ \tilde{\Delta}_1 &= \eta_2 R_4 H_3 + \eta_3 R_4 H_2 - \eta_4 R_2 H_3, \quad \tilde{\Delta}_2 = \eta_1 R_4 H_3 - \eta_3 R_4 H_1 + \eta_4 R_1 H_3, \\ \tilde{\Delta}_3 &= \eta_4 R_2 H_1 - \eta_4 R_1 H_2 - \eta_2 R_4 H_1 - \eta_1 R_4 H_2, \\ \tilde{\Delta}_4 &= \eta_3 R_2 H_1 - \eta_3 R_1 H_2 - \eta_2 R_1 H_3 - \eta_1 R_2 H_3, \end{aligned}$$

где $V_{ij} = \omega\gamma_i\gamma_j S_{ij}$, обозначения S_{ij} , $i, j = \overline{0,4}$, $i \neq j$, имеют прежний смысл (5.3), выражения η_i , $i = \overline{1,4}$, вычисляются по формулам (5.7), а частные производные $R_i = \partial R / \partial \gamma_i$, $i = 1, 2, 4$, получаются из H_i , $i = \overline{1,3}$, (5.8) формальной заменой индексов 3 на 4.

Уравнения (5.11) описывают эволюцию корней $\gamma_i(T)$ системы (5.9), определяющих при каждом значении T моменты τ_i , $i = \overline{1,4}$, переключения управления. На контрольной кривой этой эволюции соответствует перемещение коллинеарных точек A_1, A_2, A_3, A_4 .

З а м е ч а н и е 8. В режиме с девятью переключениями управления, начатом при расположении точек A_1, A_2, A_3 внутри дуги N_2N_3 (и точки A_4 внутри K_0K_1), прямая g не может иметь еще одну общую точку с контрольной кривой.

Для доказательства покажем, что в этом режиме точки A_1, A_2, A_3 останутся внутри дуги N_2N_3 . Если бы точка A_1 совпала с N_3 , то получили бы $\cos(\omega\gamma_1) = 0$ и противоречие во втором уравнении (5.9), где выражение в левой части превзошло бы значение 1, а в правой – нет. Во-первых, потому, что $\cos(\omega\gamma_2) < \cos(\omega\gamma_3)$ как в случае $A_2 \in K_3N_2$ (где $2\pi < \omega\gamma_3 < \omega\gamma_2 < 3\pi$), так и в случае $A_2 \in K_3N_3$ (где $\cos(\omega\gamma_2) < 0$, причем $\cos(\omega\gamma_3) > 0$, ибо $A_3 \in K_2N_2$, поскольку точка N_2 лежит выше прямой K_3N_3). Во-вторых, потому, что $\cos(\omega\gamma_4) < 0$, так как точка A_4 на дуге K_0K_1 была бы ниже, чем точка E пересечения дуги K_0K_1 с касательной, проведенной из N_3 к дуге K_3N_2 (расчеты показывают, что параметр σ этой точки E на промежутке $\omega \in (4, \infty)$ монотонно растет от $\sigma \approx 0.60873$ до $\sigma \approx 0.71015$). Аналогичное противоречие возникло бы при совмещении точек A_3 и N_2 , когда $\cos(\omega\gamma_3) = 0$ и $\cos(\omega\gamma_2) < \cos(\omega\gamma_1)$, поскольку обе точки A_1 и A_2 оказались бы на дуге K_3N_3 (где $3\pi < \omega\gamma_2 < \omega\gamma_1 < 3.5\pi$). При этом $\cos(\omega\gamma_4) < 0$, так как точка A_4 на дуге K_0K_1 была бы ниже, чем точка G пересечения дуги K_0K_1 с касательной, проведенной из N_2 к дуге K_3N_3 (параметр точки G на промежутке $\omega \in (4, \infty)$ монотонно растет от $\sigma \approx 0.59170$ до $\sigma \approx 0.67535$).

В силу замечания 8 упомянутый в нем режим с девятью переключениями управления удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. При совпадении на контрольной кривой точек

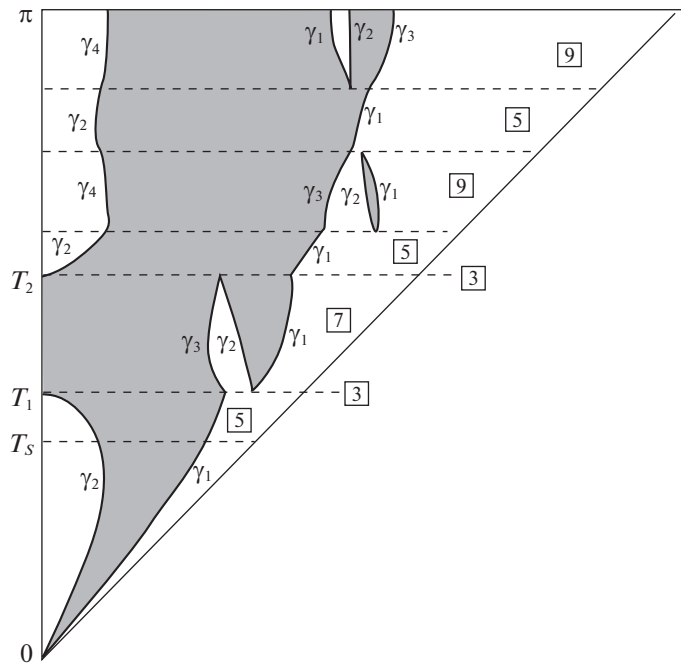


Рис. 11. Правая (“зеркальная”) часть диаграммы при $\omega = 6$

A_1 и A_2 (либо A_2 и A_3) этот режим может трансформироваться в режим с пятью переключениями управления, вновь описываемый соотношениями (5.2).

6. Построение диаграммы функций оптимального управления в задаче (1.1)–(1.3). На рис. 11 для случая $\omega = 6$ показана правая (зеркальная) часть диаграммы функций оптимального управления в диапазоне $T \in (0, \pi]$. Перечисленным в утверждении 2 сценариям б) и г) здесь соответствуют значения $T_1 \approx 1.29464$, $T_2 \approx 1.86017$. При $T \in (0, T_1)$ (сценарий а) функции $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1, 2}$, являются решениями системы (5.2), а при $T \in (T_1, T_2)$ (сценарий в) функции $\gamma_i(T)$, $i = \overline{1, 3}$, – решения системы (5.6). На горизонтали $T = T_1$ (рис. 11) точкам A_3 ($\gamma_3 = \lambda_1 \approx 0.88107$) и A_1 , A_2 ($\gamma_1 = \gamma_2 \approx 1.01064$) соответствует случай (рис. 8, а) касательной из точки A_3 к дуге P_1N_2 контрольной кривой, после чего начинается режим с семью переключениями. Он завершается на горизонтали $T = T_2$ (рис. 11) в момент совмещения точек A_3 и A_2 – случай касательной из точки A_1 ($\gamma_1 = \lambda_2 \approx 1.20540$) к дуге P_1N_1 . При $T > T_2$, согласно замечанию 7, начинаются режимы с пятью переключениями, сменяемые режимами с девятью переключениями при $T \in (2.070, 2.452)$ и при $T \in (2.753, \pi]$ (в соответствии с поведением прямой g на контрольной кривой).

На диаграмме (рис. 11) можно выделить три слоя, отделяемые горизонталями $T = T_1$ и $T = T_2$. В общем случае таких слоев может быть больше. Их количество (внутри диапазона $T \in (0, T_*/2]$, $T_* = 2m\pi$, отвечающего несократимой дроби $\omega = l/m$) определяется числом пересечений первых m фрагментов линии δ (рис. 4) с семейством цепочек ε_j , $j \in N$. С ростом значений ω и m количество слоев растет.

На рис. 4 пронумеруем координаты $(\omega T_i, \omega \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots$, упомянутых точек пересечения в порядке возрастания T_i , так что нечетным значениям i будут соответствовать точки “входа” линии δ в закрашенные области (рис. 4), а четным значениям i – точки “выхода”. В случае прохождения линии δ через “узловую точку” цепочки (или касания с ней) положим $T_i = T_{i+1}$.

Из вышеизложенного следует, что при $T \in (T_i, T_{i+1})$ (i – нечетные) реализуются режимы с семью переключениями оптимального управления. В начале и в конце диапазонов $T \in (T_i, T_{i+1})$ (i – четные) – режимы с пятью переключениями, между которыми возможны (если прямая g заденет еще одну дугу контрольной кривой) режимы с девятью переключениями. В результате диаграмма

функций оптимального управления вдоль вертикальной оси $T \in (0, T_*/2]$ составится из чередующихся слоев, отделяемых горизонталями $T = T_i$, символизирующими режимы с тремя переключениями управления. При этом для каждого слоя справедливы следующие обобщения замечаний 6 либо 8.

З а м е ч а н и е 9. Прямая g , пересекающая контрольную кривую в правой полуплоскости ($y > 0$) в точках A_1, A_2, A_3 при $T \in (T_i, T_{i+1})$ (i – нечетное), не может иметь еще одну общую точку с контрольной кривой.

Доказательство аналогично обоснованию замечания 6: точки A_1, A_2, A_3 на контрольной кривой не могут выйти за пределы дуги $N_i N_{i+1}$ (i – нечетное), внутри которой они появились в начале диапазона $T \in (T_i, T_{i+1})$. Можно показать, что в таких положениях прямая g не задевает ближайшей дуги $K_{i-1} N_{i-2}$.

З а м е ч а н и е 10. В режиме с девятью переключениями управления, начатом при $A_4 \in K_0 K_1$ с точками A_1, A_2, A_3 внутри дуги $N_i N_{i+1}$ (i – четное, $i < \omega/2$), прямая g не может иметь еще одну общую точку с контрольной кривой.

Доказательство аналогично обоснованию замечания 8: точки A_1, A_2, A_3 на контрольной кривой не могут выйти за пределы этой дуги $N_i N_{i+1}$.

Отметим, в частности, что при $3 < \omega < 4$ линия δ (рис. 4) целиком лежит в диапазоне значений $\sigma < 2$, что соответствует таким завершениям режимов с семью переключениями, когда точка A_1 на контрольной кривой находится внутри дуги $K_1 K_2$. По этой причине при $3 < \omega < 4$ режимы с девятью переключениями оптимального управления невозможны.

Алгоритм построения диаграммы функций оптимального управления начинается с определения корней системы (3.1) и изображения горизонталей $T = T_i, i = 1, 2, \dots$, отделяющих слои. Затем внутри каждого слоя строятся графики функций $\gamma_k(T), k = 1, 2, \dots$, путем интегрирования соответствующих уравнений. Система (5.6) – для режимов с семью переключениями при $T \in (T_i, T_{i+1})$ (i – нечетное). Система (5.2) – для режимов с пятью переключениями в начале и в конце диапазонов при $T \in (T_i, T_{i+1})$ (i – четное). На каждом шаге интегрирования системы (5.2) проверяется, нет ли касания прямой $A_1 A_2$ с контрольной кривой, чтобы в таком случае перейти к уравнениям (5.11) – с девятью переключениями.

В начале и в конце промежутков интегрирования в формулах (5.2), (5.6) возникает неопределенность вида “0/0”, но она преодолевается вычислением соответствующих пределов (подробности опускаем).

На рис. 12 показана правая (зеркальная) часть диаграммы функций оптимального управления для случая $\omega = 9$ при $T \in (0, T_*/2]$. Здесь корни системы (3.1) $T_1 \approx 0.852783, T_2 \approx 1.204395, T_3 \approx 2.163081, T_4 \approx 2.628611$. Последний корень $T_5 = \pi$ совпадает (ввиду целочисленности ω) с $T_*/2$ и задает граничную горизонталь.

Оба замечания 9 и 10 относились к случаям, когда упоминаемые в них дуги $N_i N_{i+1}$ контрольной кривой при $\omega \geq 3$ располагались в правой полуплоскости $y > 0$, отвечающей диапазону параметров $0 < T < \pi$. В частности, для целых значений $\omega > 1$ имеем $T_*/2 = \pi$. Поскольку при $\omega = 2$ оптимальное управление имеет [14] либо одно переключение (если T кратно 2π), либо пять (в остальных случаях), то справедливо следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 3. Для любого целого значения $\omega > 1$ в задаче оптимального быстрогодействия (1.1)–(1.3) функция $u(t), t \in [0, 2T]$ не может иметь другого количества переключений, кроме 1, 3, 5, 7, 9.

При этом свойства контрольной кривой гарантируют также следующие симметрии, порождаемые свойствами 2 и 3.

У т в е р ж д е н и е 4. Для любого целого значения $\omega > 1$ в задаче оптимального быстрогодействия (1.1)–(1.3) если функция управления с моментами переключения $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}, T$ при $T < T_*/2$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности, то им также удовлетворят функции управления:

- 1) с моментами переключения $\tau_1 + \Delta, \tau_2 + \Delta, \dots, \tau_{j-1} + \Delta, T + \Delta$ (где $\Delta = T_* - 2T$);
- 2) с моментами переключения $\tau_1 + T_*, \tau_2 + T_*, \dots, \tau_{j-1} + T_*, T + T_*$.

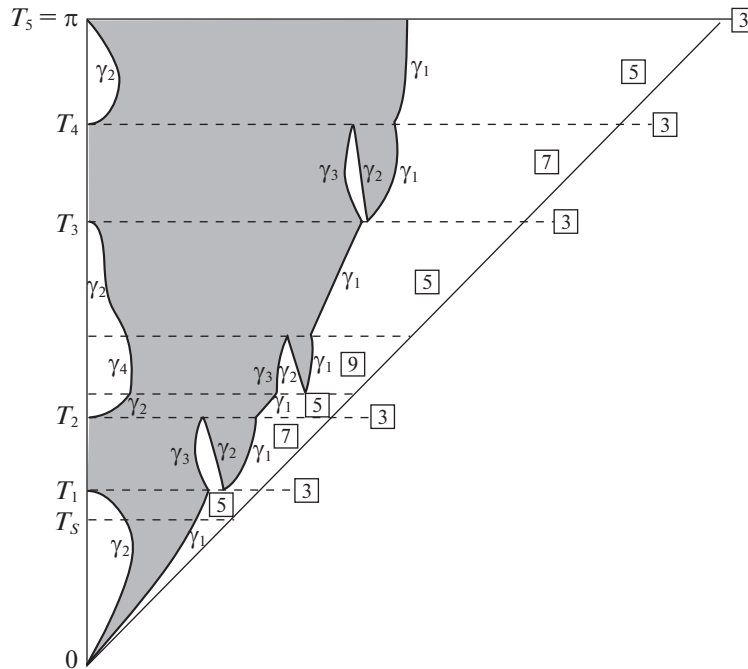


Рис. 12. Правая (“зеркальная”) часть диаграммы при $\omega = 9$

Доказательство следует из того, что при одинаковом увеличении всех значений T и τ_k , $k = 1, j - 1$, останутся неизменными все параметры γ_k (2.7) и положения соответствующих точек A_k , $k = 1, j - 1$, на контрольной кривой. Она содержит точку $O(0, 0)$ с параметром $\rho = \pi$, т.е. расположена в правой полуплоскости $y > 0$ для всех значений $0 < T < \pi$. Относя, как и прежде, точку W параметр T , обозначим через W_2 и W_1 точки с параметрами $(T + T_*)$ и $(T + \Delta)$ (где $\Delta = T_* - 2T$). Ввиду соотношений $\overline{OW_1} = \mu_1 \overline{OW}$, $\mu_1 = T / (T - 2\pi)$ и $\overline{OW_2} = \mu_2 \overline{OW}$, $\mu_2 = T / (T + 2\pi)$ имеем коллинеарность векторов. Поэтому приведенные выше обоснования замечаний 5–10, гарантировавших отсутствие дополнительных общих точек прямой g и контрольной кривой, сохранят свой смысл, если вместо точки W взять W_1 либо W_2 .

Из п. 1) и 2) утверждения 4 вытекают свойства симметрии диаграмм функций оптимального управления при целых значениях $\omega > 1$. На рис. 9, 11, 12 изображенная правая (зеркальная) часть диаграммы дополнялась неизображенной левой (с заменой знаков управления на противоположные). Согласно п. 1), внутренность объединенного треугольника продолжится симметрично, отразившись относительно горизонтали $T = \pi$. Сдвоенная таким образом фигура (внутренность квадрата) затем будет периодически повторяться, согласно п. 2), с увеличением вертикальной координаты T до бесконечности.

В отличие от целочисленных ω , для случая несократимой дроби $\omega = l/m$ возникает дополнительный сценарий, отвечающий пересечению линии δ с цепочкой ϵ_1 при $(l - 1)\pi < \omega T < (l + 1)\pi$. На рис. 4 для $\omega = 9/2$ эта точка пересечения обозначена H . Ей соответствует начало такого режима с семью переключениями управления, когда из точки, расположенной в верхней части дуги $K_0 K_1$, строится касательная f к крайней слева дуге контрольной кривой (рис. 5). Возможность (или невозможность) пересечения прямой f еще одной дуги контрольной кривой (в левой полуплоскости) требует дополнительного исследования. По крайней мере, диапазон значений T для точек, предшествующих точке H вдоль линии δ (рис. 4), включает промежуток

$$0 < T < 2\pi - \frac{\pi}{\omega\sqrt{2}}. \tag{6.1}$$

В этом промежутке функция оптимального управления не может иметь более девяти переключений.

Для случаев $1 < \omega < 2$ свойства контрольной кривой отличаются тем, что точки K_2 и K_1 лежат по разные стороны от оси Oz , которую контрольная кривая пересекает последовательно в точках с параметрами $\rho = k\pi$, $k = \overline{1, m}$. На рис. 6 для $\omega = 5/4$ показан сценарий касания прямой f к крайней слева дуге контрольной кривой при $T_1 \approx 5.65644$, $\gamma_3 = \lambda_1 \approx 0.43949$. Этому сценарию предшествовали, согласно свойству 4, режимы с пятью переключениями управления, когда функции $\gamma_i(T)$, $i = 1, 2$, были решениями системы (5.2) при $T \in (0, T_s]$. Значению $T_s = 2\pi/\omega$ (т.е. $\sigma = 2$) соответствует совмещение точки W с точкой K_2 . При движении точки W по контрольной кривой (рис. 6) в диапазоне $\pi < T < T_s$ последовательно осуществляется коллинеарность сначала векторов \overline{OW} и $\overline{OA_2}$ (меняющая знаки S_{20} и $\dot{\gamma}_1$), затем векторов \overline{OW} и $\overline{OA_1}$ (со сменой знаков S_{10} и $\dot{\gamma}_2$). После этого обе точки A_1 и A_2 будут двигаться вверх по дуге K_0K_1 вплоть до совмещения A_2 и K_0 , причем у прямой A_1A_2 и контрольной кривой не появится новых общих точек. Прямая f коснется дуги K_2K_3 (рис. 6) раньше, чем точка W достигнет положения с параметром $T = 2\pi$. Поэтому в диапазоне $T \in (0, 2\pi]$ для случаев $1 < \omega < 2$ возможны лишь режимы с пятью или семью переключениями управления.

Для случаев $2 < \omega < 3$ дуга K_2K_3 контрольной кривой лежит выше оси Oy , но пересекается осью Oz . Здесь для режимов с пятью переключениями, начатых при $T \in (0, T_s]$, точки W , A_1 , A_2 будут смещаться по кривой так, что (в отличие от случаев $1 < \omega < 2$) сначала осуществится коллинеарность векторов \overline{OW} и $\overline{OA_1}$ (меняющая знак $\dot{\gamma}_2$), затем векторов \overline{OW} и $\overline{OA_2}$ (со сменой знака $\dot{\gamma}_1$), после чего точка A_1 будет двигаться “вспять” (в отличие от сценария а) случаев $\omega \geq 3$). Поэтому в момент совмещения A_2 и K_0 точка A_1 окажется выше оси Oy , касательная из нее к контрольной кривой может строиться лишь к “крайней слева” дуге (аналогично прямой f на рис. 6). В этот момент параметры T_1 и λ_1 точек W и A_1 будут соответствовать на рис. 4 пересечению линии δ с цепочкой ε_1 . Таким образом, для случаев $2 < \omega < 3$ режиму (при $T = T_1$) с тремя переключениями предшествуют только режимы с пятью переключениями, в том числе в диапазоне (6.1).

Вышеизложенное можно обобщить для любых ω в следующем виде.

Утверждение 5. В задаче оптимального быстродействия (1.1)–(1.3) функция $u(t)$, $t \in [0, 2T]$ в диапазоне (6.1) не может иметь другого количества переключений, кроме 3, 5, 7, 9.

Заключение. Рассмотрена задача оптимального по быстродействию перемещения (на заданное расстояние) платформы с двумя осцилляторами из одного состояния покоя в другое. На основе свойств [14] функций оптимального управления введено графическое представление (в виде контрольной кривой), позволившее исследовать эволюцию таких функций в зависимости от дальности перемещения. Предложен наглядный образ этой зависимости в виде диаграммы, для построения которой указан алгоритм.

Наиболее простыми для исследования оказались случаи, когда значения ω – целые. Им соответствуют не только простейшая форма (всего из одной арки) линии δ на рис. 4, но и актуальность лишь части контрольной кривой, лежащей в правой полуплоскости, а также наименьший период для функций $\gamma_k(T)$, $k = 1, 2, \dots$, чьи графики порождают контуры диаграммы. В частности, показано, что при целочисленных ω в задаче быстродействия (1.1)–(1.3) оптимальное управление не может иметь другого количества переключений, кроме 1, 3, 5, 7 или 9.

Заметим, что с увеличением значения ω растет количество корней системы (3.1), демонстрируемых точками пересечения линий на рис. 4 и отвечающих режимам с тремя переключениями управления. При этом на диаграмме функций оптимального управления становится все больше горизонтальных слоев и уменьшаются их толщины. Поскольку эти же корни являются координатами точек и на дуге OBf (рис. 2), то в среднем фигура на диаграмме для платформы с двумя осцилляторами приближается к виду диаграммы для платформы с одним осциллятором, отличаясь от нее все меньшими амплитудами флуктуаций. Это соответствует асимптотическому поведению системы (1.1), в которой при $\omega \rightarrow \infty$ третье уравнение вырождается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л., Акулenco Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. Каюмов О.Р. О глобальной управляемости некоторых лагранжевых систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 16–23.

3. *Овсеевич А.И., Федоров А.К.* Асимптотически оптимальное управление в форме синтеза для системы линейных осцилляторов // ДАН. 2013. Т. 452. № 3. С. 266–270.
4. *Гончарова Е.В., Овсеевич А.И.* Асимптотика множеств достижимости линейных динамических систем с импульсным управлением // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 1. С. 51–59.
5. *Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И.* Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // ДАН. 2010. Т. 434. № 3. С. 319–323.
6. *Ovseevich A.A.* Local Feedback Control Bringing a Linear System to Equilibrium // JOTA. 2015. V. 165. № 2. P. 532–544.
7. *Овсеевич А.И., Федоров А.К.* Движение системы осцилляторов под действием управления в виде обобщенного сухого трения // А и Т. 2015. № 5. С. 121–129.
8. *Овсеевич А.И., Федоров А.К.* Управление в форме синтеза для успокоения системы осцилляторов // А и Т. 2015. № 11. С. 3–17.
9. *Ананьевский И.М., Ишиханян Т.А.* Управление твердым телом, несущим диссипативные осцилляторы, в присутствии возмущений // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 42–51.
10. *Ананьевский И.М.* Управляемое перемещение платформы, несущей упругое звено с неизвестным фазовым состоянием // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 35–42.
11. *Ананьевский И.М., Овсеевич А.И.* Управляемое перемещение линейной цепочки осцилляторов // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 5. С. 18–26.
12. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
13. *Мамалыга В.М.* Об оптимальном управлении одной колебательной системой // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 8–17.
14. *Каюмов О.Р.* Оптимальное по быстродействию перемещение платформы с осцилляторами // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 699–718.

УДК 65.012.122

ОПТИМИЗАЦИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ОБМЕНОВ В СЕТИ АВТОНОМНЫХ АБОНЕНТОВ¹

© 2022 г. А. М. Грузликов^{а,*}, Н. В. Колесов^{а,**},
Е. Г. Литуненко^{а,***}, Ю. М. Скородумов^{а,****}

^а ГНЦ РФ АО “Концерн “ЦНИИ “Электронприбор”, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: agruzlikov@yandex.ru

**e-mail: kolesovnv@mail.ru

***e-mail: lisa.litunenko@gmail.com

****e-mail: skorum@mail.ru

Поступила в редакцию 24.03.2022 г.

После доработки 06.06.2022 г.

Принята к публикации 01.08.2022 г.

Предложены субоптимальные алгоритмы планирования последовательности информационных сообщений в сети связи подвижных автономных абонентов. В алгоритмах в качестве критериев оптимальности используются верхние границы либо суммарного времени доставки всех сообщений из передаваемой последовательности, либо среднего по сообщениям времени доставки. Рассмотрено несколько постановок задачи, различающихся наличием или отсутствием предварительной упорядоченности на множестве сообщений.

DOI: 10.31857/S0002338822060105

Введение. В настоящее время автономные системы используются в различных областях науки и техники. Обсуждение этих вопросов занимает важное место и в современной научно-технической литературе [1–5]. Нередко применение подобных систем связано с работой в опасных или вредных для человека условиях, вплоть до боевого применения. Они работают не только на земле, но и в космосе, воздухе и под водой. Функциональное разнообразие автономных систем весьма велико. Среди них системы обработки информации, управления, робототехнические системы. Понятно, что в случае применения сети из автономных систем (абонентов) круг решаемых задач существенно шире, нежели в случае использования одиночной системы. В связи с этим разработке таких систем специалисты уделяют наибольшее внимание, фокусируясь обычно на исследовании подвижных систем, которые, как правило, основываются на некоторой мультиагентной концепции. Ясно, что работа мультиагентной системы предполагает необходимость обмена информацией между агентами для координации совместных действий. В этом случае встает вопрос об использовании сети из автономных абонентов (АА). Информационное взаимодействие между АА может осуществляться в разных условиях. Прежде всего, может быть различной среда распространения, например, воздушная или водная [6–10]. Для каждой среды справедлива своя скорость распространения информации, своя помехосигнальная обстановка, скорость затухания информационного сигнала и т.п. Так, например, скорость обмена информацией в водной среде через гидроакустический канал существенно ниже скорости обмена в воздушной среде через радиоканал. Понятно, что в общем случае сообщение будет достигать по сети узла-адресата не напрямую, а через цепочку узлов-ретрансляторов, но ограничение на радиус обмена в каждом случае будет свое. Кроме того, при движении АА маршрут доставки сообщения может меняться из-за изменения топологии сети. В этих условиях существенно возрастают требования к организации информационных обменов, что делает необходимым оптимизацию для передаваемых сообщений не только используемых маршрутов, но и последовательности этих сообщений.

Обсуждаемый в настоящей статье материал посвящен исследованию вопросов организации информационных обменов в сети АА. Основной ее вклад связан с предложениями по субопти-

¹ Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ № 22-29-00339.

мизации последовательности передачи сообщений, т.е. по планированию информационных обменов.

1. Постановка задачи. Далее предполагается, что рассматриваемая сеть имеет вид неориентированного графа и состоит из одинаковых узлов, функционирующих по одному и тому же алгоритму. Сеть стационарна, что гарантирует постоянство средних значений интенсивностей потоков обменов (заявок), обслуживаний и очередей [11]. В результате взаимного обмена сообщениями каждому узлу известны координаты всех остальных узлов, что позволяет ему строить минимальные по расстоянию маршруты (пути в неориентированном графе) доставки сообщений. Доставка сообщений происходит с помощью некоторого известного алгоритма маршрутизации, опирающегося на таблицы маршрутизации [12]. Для любого сообщения маршрут всегда существует, т.е. аппараты не расходятся слишком далеко друг от друга. В простейшем случае, когда узел-адресат находится на допустимом расстоянии, маршрут доставки одношаговый (не использующий ретранслирующих узлов). Каждый узел периодически излучает сформированную в нем последовательность сообщений, которая состоит из собственных сгенерированных в узле сообщений, а также из сообщений, поступивших в данный узел извне для ретрансляции к другому адресату. Понятно, что в общем случае различным упорядоченностям сообщений, передаваемых узлом, будет соответствовать различная оперативность доставки сообщений. Далее в качестве критерия оперативности используем либо суммарное время $\Delta_{[k]}$ доставки всех сообщений из передаваемой последовательности, либо среднее по сообщениям время $\bar{\Delta}$ доставки. Для удобства изложения будем сопровождать параметры сообщения, расположенного на k -й позиции в очереди рассматриваемого узла, нижним индексом $[k]$. В результате для такого сообщения время ожидания в очереди и время переноса имеют обозначения $e_{[k]}^w$ и $e_{[k]}^t$ соответственно. При этом под временем переноса будем понимать время от момента начала передачи сообщения до момента конца его приема, а под временем доставки $\Delta_{[k]}$ сообщения между передающим узлом и узлом-адресатом – сумму

$$\Delta_{[k]} = e_{[k]}^w + e_{[k]}^t. \quad (1.1)$$

Для одношагового маршрута получаем

$$e_{[k]}^t = e_{[k]} + \frac{d_{[k]}}{v} = e_{[k]} + e_{[k]}^d. \quad (1.2)$$

Здесь $e_{[k]}$ – длительность сообщения на k -й позиции в очереди, $e_{[k]}^d = d_{[k]}/v$ – время прохождения сигнала между передающим узлом и узлом-адресатом, $d_{[k]}$ – расстояние между передающим узлом и узлом-адресатом для сообщения на k -й позиции в очереди, v – скорость распространения звука в заданной акватории.

В случае многошагового маршрута выражение для времени доставки сообщения принимает вид

$$\Delta_{[k]} = \sum_{i=1}^{r_{[k]}} (e_{[k],i}^w + e_{[k],i}^t), \quad (1.3)$$

где $r_{[k]}$ – общее число шагов маршрута, по которому передается сообщение, находящееся на k -й позиции в очереди, i – порядковый номер шага маршрута.

Преобразуем это выражение, выделив из общей суммы слагаемое, характеризующее первый шаг:

$$\Delta_{[k]} = e_{[k]}^w + e_{[k]}^t + \sum_{i=2}^{r_{[k]}} (e_{[k],i}^w + e_{[k],i}^t). \quad (1.4)$$

Ясно, что в случае многошагового маршрута предсказать размер и содержание очередей сообщений в узлах-ретрансляторах на маршруте следования передаваемого сообщения невозможно. В связи с этим при дальнейшем анализе воспользуемся не точным значением для $\Delta_{[k]}$, а его оценкой $\hat{\Delta}_{[k]}$, где время ожидания на каждом последующем шаге, кроме первого, заменим на его верхнюю границу. Для этого обозначим через \bar{n} верхнюю границу для длины очередей, а через E –

верхнюю границу длительности сообщений. В результате их произведение составит верхнюю границу времени ожидания на любом шаге для рассматриваемого сообщения. Тогда получаем

$$\hat{\Delta}_{[k]} = e_{[k]}^w + e_{[k]}^t + (r_{[k]} - 1)\bar{n}E + \sum_{i=2}^{r_{[k]}} e_{[k],i}^t. \quad (1.5)$$

Понятно, что это выражение представляет собой верхнюю границу для времени доставки сообщения, находящегося на k -й позиции в очереди рассматриваемого узла.

Итак, задача состоит в разработке алгоритмов субоптимального упорядочения (планирования) выходной очереди сообщений, построенных с помощью прогнозных оценок для времен доставки сообщений. При передаче сообщения по многошаговому маршруту алгоритм упорядочения применяется на каждом его шаге во всех ретранслирующих узлах сети с формированием новых прогнозов. Для этого далее предлагается идти по пути использования известных [13–17] и разработки новых алгоритмов планирования.

2. Планирование неупорядоченных сообщений. Рассмотрим сначала случай, когда на множестве передаваемых сообщений отсутствует какая-либо предварительная упорядоченность. В качестве критерия будем применять оценку (верхнюю границу) $\hat{\Delta}_s$ для суммарного времени доставки всех сообщений, выражение для которой можно получить из (1.5):

$$\hat{\Delta}_s = \sum_{k=1}^n \hat{\Delta}_{[k]} = \sum_{k=1}^n [e_{[k]}^w + e_{[k]}^t + (r_{[k]} - 1)\bar{n}E + \sum_{i=2}^{r_{[k]}} e_{[k],i}^t]. \quad (2.1)$$

Тогда справедливо утверждение.

Утверждение 1. Верхняя граница $\hat{\Delta}_s$ для суммарного времени доставки в системе связи n неупорядоченных сообщений минимальна, если сообщения упорядочены по неубыванию длительностей:

$$e_{[1]} \leq e_{[2]} \leq \dots \leq e_{[n]}. \quad (2.2)$$

Доказательства этого и последующих утверждений приведены в Приложении.

Теперь предположим, что на множестве сообщений нужно задавать некоторые приоритеты. Тогда можно использовать в качестве критерия верхнюю границу $\hat{\Delta}_s^w$ для суммарного взвешенного времени доставки сообщений:

$$\hat{\Delta}_s^w = \sum_{k=1}^n w_{[k]} \hat{\Delta}_{[k]}, \quad (2.3)$$

где $w_{[k]}$ – вес сообщения, расположенного на k -й позиции в очереди.

Утверждение 2. Верхняя граница $\hat{\Delta}_s^w$ для суммарного взвешенного времени доставки неупорядоченных сообщений в системе связи минимальна, если выполняется

$$\frac{e_{[1]}}{w_1} \leq \frac{e_{[2]}}{w_2} \leq \dots \leq \frac{e_{[n]}}{w_n}. \quad (2.4)$$

3. Планирование частично упорядоченных сообщений. Пусть планируемые для передачи сообщения частично упорядочены путем разбиения на p непересекающихся групп со строгим упорядочением сообщений внутри них и размером n_i , $i = \overline{1, p}$. Подобное упорядочение может потребоваться в силу разных дополнительных соображений, связанных с управлением передачей информации через сеть. Предполагается, что при составлении общего плана должен сохраняться зафиксированный в группе порядок передачи сообщений, а прерывания групп сообщений запрещены. Обозначим через e_i^j суммарную длительность i -й группы сообщений:

$$e_i^j = \sum_{j=1}^{n_i} e_{i,j}, \quad j = \overline{1, n_i}.$$

Утверждение 3. Верхняя граница $\hat{\Delta}_s^w$ для суммарного времени доставки сообщений в системе связи с p строго упорядоченными группами при запрете прерываний групп минимальна, если группы в плане упорядочены по неубыванию длительностей:

$$e'_{[1]} \leq e'_{[2]} \leq \dots \leq e'_{[p]}. \quad (3.1)$$

Пусть необходимо задать приоритеты на множестве групп сообщений. Тогда если $\hat{\Delta}_{g[k]}$ — верхняя граница времени доставки для группы, находящейся на k -й позиции в очереди, то следует минимизировать критерий

$$\hat{\Delta}_g^w = \sum_{k=1}^p w_{[k]} \hat{\Delta}_{g[k]}, \quad (3.2)$$

а группы сообщений с учетом утверждения 2 должны быть упорядочены по правилу

$$\frac{e'_{[1]}}{w_1} \leq \frac{e'_{[2]}}{w_2} \leq \dots \leq \frac{e'_{[p]}}{w_p}. \quad (3.3)$$

Очевидно, что все описанные выше результаты остаются справедливыми, если в качестве критерия оптимальности использовать не верхнюю границу суммарного времени доставки, а среднюю по сообщениям верхнюю границу $\bar{\Delta}$ (утверждения 1 и 2) или среднюю по группам сообщений верхнюю границу $\bar{\Delta}_g$ (утверждение 3, а также (3.2)).

Ситуация усложняется, когда в условиях утверждения 3 требуется минимизировать среднюю по сообщениям верхнюю границу $\bar{\Delta}$ времени доставки. Тогда если $n_{[k]}$ — размер группы, находящейся на k -й позиции в очереди, то справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. Верхняя граница $\bar{\Delta}$ среднего времени доставки сообщений в системе связи с p строго упорядоченными группами при запрете прерываний групп минимальна, если группы в плане упорядочены по неубыванию длительностей:

$$\frac{e'_{[1]}}{n_{[1]}} \leq \frac{e'_{[2]}}{n_{[2]}} \leq \dots \leq \frac{e'_{[p]}}{n_{[p]}}. \quad (3.4)$$

Наконец, рассмотрим наиболее сложную ситуацию, когда прерывание процесса передачи группы разрешено.

Утверждение 5. Верхняя граница $\bar{\Delta}$ среднего времени доставки сообщений в системе связи с p строго упорядоченными группами при разрешении прерываний групп минимальна, если группы в плане упорядочены по правилам.

1. Для каждого сообщения j в i -й группе вычисляется условная верхняя граница среднего времени доставки (верхняя граница среднего времени доставки при условии размещения подгруппы сообщений, предшествующей $(j + 1)$ -му сообщению в i -й группе, в начале формируемой очереди):

$$\bar{\Delta}_{i,j} = \frac{\sum_{h=1}^j \hat{\Delta}_{i,h}}{j}.$$

2. Для каждой i -й группы вычисляется

$$\bar{\Delta}_{i,h_i} = \min(\bar{\Delta}_{i,1}, \bar{\Delta}_{i,2}, \dots, \bar{\Delta}_{i,n_i}).$$

3. Выбирается такая группа i^* , что

$$i^* = \arg \min_i \bar{\Delta}_{i,h_i},$$

и первые h_{i^*} сообщений составляют начало очереди.

4. Снова вычисляются величины $\bar{\Delta}_{i,h_i}$, но без учета сообщений, размещенных в очереди.

Таблица 1. Верхние границы времен доставки сообщений

Группа сообщений	$\hat{\Delta}_{i1}$	$\hat{\Delta}_{i2}$	$\hat{\Delta}_{i3}$	$\hat{\Delta}_{i4}$
M_1	5	15	4	—
M_2	3	14	—	—
M_3	10	2	5	7

Таблица 2. Условные средние времена доставки

Группа сообщений	$\bar{\Delta}^1$				$\bar{\Delta}^2$				$\bar{\Delta}^3$				$\bar{\Delta}^4$		$\bar{\Delta}^5$		$\bar{\Delta}^6$		$\bar{\Delta}^7$	$\bar{\Delta}^8$
M_1	5	10	8	—	5	10	8	—	15	9.5	—	—	15	9.5	15	9.5	15	9.5	4	—
M_2	3	8.5	—	—	14	—	—	—	14	—	—	—	14	—	14	—	14	—	14	14
M_3	10	6	5.6	6	10	6	5.6	6	10	6	5.6	6	5	6	7	—	—	—	—	—

5. Третий и четвертый шаги повторяются до упорядочения всех сообщений.

Еще раз заметим, что все сформулированные в выше приведенных утверждениях правила упорядочивания сообщений нацелены на минимизацию верхних границ суммарного или среднего времени доставки сообщений. Нетрудно видеть, что эти правила не изменятся, если в качестве цели упорядочивания выбрать не верхние, а нижние границы этих величин, основанные на выражении для нижней границы времени доставки:

$$\hat{\Delta}_{[k]} = e_{[k]}^w + e_{[k]}^t + \sum_{i=2}^{r_{[k]}} e_{[k],i}^t. \quad (3.5)$$

При формировании этого выражения для сообщений не учтены времена ожидания в очередях ретранслирующих узлов.

Пример. Сформируем очереди, используя алгоритмы из утверждений 4 и 5, для трех упорядоченных групп сообщений: $M_1 = \{m_{11}, m_{12}, m_{13}\}$, $M_2 = \{m_{21}, m_{22}\}$, $M_3 = \{m_{31}, m_{32}, m_{33}, m_{34}\}$. Верхние границы для времен доставки сообщений приведены в табл. 1.

Прерывания запрещены. Средние времена доставки сообщений для групп: $\bar{\Delta}_1 = 8$, $\bar{\Delta}_2 = 8.5$, $\bar{\Delta}_3 = 6$.

Результирующая очередь: $Q_1 = M_3 M_1 M_2 = m_{31}, m_{32}, m_{33}, m_{34}, m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{21}, m_{22}$.

Прерывания разрешены. Действуя в соответствии с алгоритмом из утверждения 5, последовательно за 8 шагов размещаем в очереди фрагменты групп. Условные средние времена доставки фрагментов групп для всех шагов приведены в табл. 2.

Результирующая очередь: $Q_2 = m_{21}, m_{11}, m_{31}, m_{32}, m_{33}, m_{34}, m_{12}, m_{13}, m_{22}$.

Заключение. Исследованы вопросы планирования информационных обменов в сети автономных абонентов. Предложены субоптимальные для текущей топологии сети алгоритмы планирования обменов, удовлетворяющие критериям минимума верхних границ либо суммарного, либо среднего времени доставки.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Преобразуем выражение (2.1):

$$\hat{\Delta}_s = \sum_{k=1}^n e_{[k]}^w + \sum_{k=1}^n e_{[k]}^t + \sum_{k=1}^n (r_{[k]} - 1) \bar{n} E + \sum_{k=1}^n \sum_{i=2}^{r_{[k]}} e_{[k],i}^t.$$

Нетрудно видеть, что в этом выражении только первая сумма зависит от упорядоченности сообщений, а значит, только она и подлежит минимизации:

$$\tilde{\Delta} = \sum_{k=1}^n e_{[k]}^w.$$

Раскроем это выражение

$$\tilde{\Delta} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} e_{[j]} = (e_{[1]} + e_{[1]} + e_{[2]} + e_{[1]} + e_{[2]} + e_{[3]} + \dots + e_{[1]} + \dots + e_{[n-1]}) = \sum_{k=1}^n (n-k)e_{[k]}.$$

Известно, что сумма попарных произведений членов двух числовых последовательностей имеет минимальное значение, если одна из этих последовательностей возрастает, а другая убывает [18]. Так как коэффициенты $(n - k)$ уменьшаются с увеличением k , то минимум среднего времени доставки достигается только в том случае, когда $e_{[k]}$ возрастают с увеличением k или, по крайней мере, не убывают.

Доказательство утверждения 2. Предположим противное, а именно что упорядоченность очереди π минимизирует верхнюю границу $\hat{\Delta}_s^w$, но условие утверждения для нее не выполняется, т.е. существует такая позиция l , что

$$\frac{e_{[l]}}{w_l} > \frac{e_{[l+1]}}{w_{l+1}}. \tag{П.1}$$

Пусть L и L' – номера сообщений, находящихся в очереди π на позициях l и $l + 1$. Сформируем очередь π' , поменяв местами в очереди π сообщения L и L' . Доставка первых $l - 1$ и последних $n_i - l - 1$ сообщений завершается в обеих очередях одновременно. В результате эти сообщения делают одинаковый вклад во взвешенную сумму в (2.3). Таким образом, различие в значении критерия (2.3) для двух вариантов очередей π и π' определяется слагаемыми для сообщений L и L' . Пусть

$$t = \sum_{j=1}^{l-1} e_{[j]}.$$

Тогда для π

$$w_L \Delta_L = w_{[l]} \Delta_{[l]} = w_L (t + e_L),$$

$$w_{L'} \Delta_{L'} = w_{[l+1]} \Delta_{[l+1]} = w_{L'} (t + e_L + e_{L'}),$$

$$w_L \Delta_L + w_{L'} \Delta_{L'} = w_L t + w_L e_L + w_{L'} t + w_{L'} e_L + w_{L'} e_{L'}.$$

Для π'

$$w_L \Delta_L = w_{[l+1]} \Delta_{[l+1]} = w_L (t + e_{L'} + e_L),$$

$$w_{L'} \Delta_{L'} = w_{[l]} \Delta_{[l]} = w_{L'} (t + e_{L'}),$$

$$w_L \Delta_L + w_{L'} \Delta_{L'} = w_L t + w_L e_{L'} + w_{L'} e_L + w_{L'} t + w_{L'} e_{L'}.$$

Сопоставим для очередей π и π' значения суммарных вкладов критериев исследуемых сообщений L и L' . Нетрудно видеть, что для π вклад содержит $w_L e_L$, но не содержит $w_{L'} e_{L'}$ и наоборот. Однако из (П.1) следует, что $w_{L'} e_L \geq w_L e_{L'}$. Отсюда вытекает, что значение критерия (2.3) для π больше, чем для π' и что предположение о том, что эта упорядоченность минимизирует верхнюю границу $\hat{\Delta}_s^w$, неверно. Таким образом, доказываемое утверждение справедливо.

Доказательство утверждения 3. Обозначим через $\hat{\Delta}_{g[k]}$ верхнюю границу времени доставки группы сообщений, находящейся среди групп на k -й позиции. Тогда верхняя граница суммарного времени доставки всех групп определяется выражением

$$\hat{\Delta}_g = \sum_{k=1}^p \hat{\Delta}_{g[k]}. \quad (\text{П.2})$$

Перепишем его по аналогии с (2.1)

$$\hat{\Delta}_g = \sum_{k=1}^p \hat{\Delta}_{g[k]} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=1}^{k-1} e'_{[i]} + e'_{[k]} + \bar{\delta}_{g[k]} \right) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{k-1} e'_{[i]} + \sum_{k=1}^p e'_{[k]} + \sum_{k=1}^p \bar{\delta}_{g[k]},$$

где $\bar{\delta}_{g[k]}$ – верхняя граница для интервала времени от момента завершения излучения до момента завершения доставки всех сообщений из группы, находящейся на k -й позиции. В этом выражении вторая и третья суммы, представляющие суммарную длительность группы и интервал $\bar{\delta}_{g[k]}$, постоянны. При этом первая (двойная) сумма зависит от порядка групп. Применяв анализ, аналогичный использованному при доказательстве утверждения 1, приходим к выводу, что группы в плане должны быть упорядочены в соответствии с (2.4).

Доказательство утверждения 4. Запишем выражение для верхней границы времени доставки j -го сообщения группы, находящейся на k -й позиции:

$$\hat{\Delta}_{[k],j} = \hat{\Delta}_{[k]} - \bar{\delta}_{[k],j}, \quad (\text{П.3})$$

где $\bar{\delta}_{[k],j}$ – верхняя граница интервала времени от момента завершения излучения j -го сообщения группы, находящейся на k -й позиции, до момента завершения процесса доставки всех сообщений этой группы.

Проанализируем выражение для верхней границы среднего по всей очереди времени доставки сообщения:

$$\bar{\Delta}_m = \frac{\sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^{n_{k1}} \hat{\Delta}_{[k],j}}{n}.$$

Преобразуем это выражение, воспользовавшись соотношением (П.3):

$$\bar{\Delta}_m = \frac{\sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^{n_{k1}} (\hat{\Delta}_{[k]} - \bar{\delta}_{[k],j})}{n} = \frac{\sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^{n_{k1}} \hat{\Delta}_{[k]}}{n} - \frac{\sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^{n_{k1}} \bar{\delta}_{[k],j}}{n}.$$

В этом выражении второе слагаемое – постоянная величина, не зависящая от порядка групп. Первое слагаемое не зависит от j и поэтому преобразуется к виду

$$\bar{\Delta}_m = \frac{\sum_{k=1}^p n_{k1} \hat{\Delta}_{[k]}}{n}.$$

Из сопоставления этого выражения, например, с выражением (2.3) следует справедливость данного утверждения.

Доказательство утверждения 5. Идея доказательства основывается на том, что выделяемые подгруппы можно рассматривать как группы из предыдущего утверждения, т.е. их хотя и можно прерывать, но, как доказывается, это прерывание не приводит к улучшению плана.

Рассмотрим подгруппу b некоторой группы, сформированную в соответствии с алгоритмом утверждения и содержащую n_b сообщений. Пусть

$$\bar{\Delta}_b = \frac{\sum_{j=1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j}}{n_b}.$$

Если обозначить сообщение в подгруппе b парой (b, j) , где j – порядковый номер сообщения в подгруппе, то подгруппа задается последовательностью $(b, 1), \dots, (b, n_b)$. Прерывание подгруппы означает ее разбиение на две части b' и b'' :

$$b' = (b, 1), (b, 2), \dots, (b, i),$$

$$b'' = (b, i + 1), (b, i + 2), \dots, (b, n_b).$$

Каждая из этих новых частей подгруппы имеет свою условную верхнюю границу времени доставки

$$\bar{\Delta}_{b'} = \frac{\sum_{j=1}^i \hat{\Delta}_{b,j}}{i}, \quad \bar{\Delta}_{b''} = \frac{\sum_{j=i+1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j}}{n_b - i},$$

которые в соответствии с утверждением 4 определили бы место частей подгруппы в плане.

Нужно доказать, что подобное разбиение подгруппы b нецелесообразно, поскольку часть b' должна будет непосредственно предшествовать b'' , и структура останется неизменной.

Покажем, что

$$\bar{\Delta}_{b'} > \bar{\Delta}_b > \bar{\Delta}_{b''}.$$

Неравенство $\bar{\Delta}_{b'} > \bar{\Delta}_b$ следует из построения в соответствии с алгоритмом утверждения:

$$\bar{\Delta}_{b'} = \frac{\sum_{j=1}^i \hat{\Delta}_{b,j}}{i} > \bar{\Delta}_b = \frac{\sum_{j=1}^i \hat{\Delta}_{b,j} + \sum_{j=i+1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j}}{i + (n_b - i)}.$$

Умножая обе части неравенства на $i(i + (n_b - i))$, получаем

$$(i + (n_b - i)) \sum_{j=1}^i \hat{\Delta}_{b,j} > i \left(\sum_{j=1}^i \hat{\Delta}_{b,j} + \sum_{j=i+1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j} \right).$$

Прибавляя к обеим частям последнего неравенства величину

$$(n_b - i) \sum_{j=i+1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j} - i \sum_{j=1}^i \hat{\Delta}_{b,j},$$

находим

$$(n_b - i) \sum_{j=1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j} > n_b \sum_{j=i+1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j}$$

$$\bar{\Delta}_b = \frac{\sum_{j=1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j}}{n_b} > \frac{\sum_{j=i+1}^{n_b} \hat{\Delta}_{b,j}}{n_b - i} = \bar{\Delta}_{b''}.$$

Отсюда следует, что разбиение любой группы, сформированной алгоритмом утверждения, на две подгруппы приводит к тому, что полученные подгруппы не удовлетворяют отношению порядка по минимуму $\bar{\Delta}$, но поменять их местами нельзя из-за отношения предшествования в группе.

Покажем теперь, что перемещение b' вперед или b'' назад нецелесообразно. Пусть в исходном описании a - и c -подгруппы, первая из которых предшествует b , а вторая следует за b , т.е.

$$\bar{\Delta}_a \leq \bar{\Delta}_b \leq \bar{\Delta}_c.$$

Подгруппа b' не может быть размещена перед a , так как

$$\bar{\Delta}_a \leq \bar{\Delta}_b \leq \bar{\Delta}_{b'}.$$

Она не может быть продвинута и дальше вперед, поскольку для любой подгруппы, предшествующей a , значение $\bar{\Delta}$ не превосходит $\bar{\Delta}_a$. Подгруппу b' нельзя разместить и внутри a , разделив a на две части a' и a'' , так как

$$\bar{\Delta}_{a''} < \bar{\Delta}_a \leq \bar{\Delta}_b < \bar{\Delta}_{b'},$$

и b' нельзя расположить впереди a'' . Аналогично доказывается, что b'' нельзя разместить внутри или после c .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г.* Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. М.: Физматлит, 2009. 280 с.
2. *Amato C., Konidaris G.D., Cruz G., Maynor C.A., How J.P., Kaelbling L.P.* Planning for Decentralized Control of Multiple Robots under Uncertainty // Proc. of IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation. Washington, 2015. P. 1214–1248.
3. *Амелин К.С., Амелина Н.О., Граничин О.Н.* Адаптивная мультиагентная операционная система реального времени для комплексов БПЛА // Актуальные проблемы Российской космонавтики. Труды XXXVIII академических чтений по космонавтике. М.: Комиссия РАН, 2014. С. 654.
4. *Инзарцев А.В., Киселев Л.В., Костенко В.В. и др.* Подводные робототехнические комплексы: системы, технологии, применение. Владивосток: Дальнаука, 2018. 368 с.
5. *Giger G., Kandemir M., Dzielski J.* Graphical Mission Specification and Partitioning for Unmanned Underwater Vehicles // J. of Software (JSW). 2008. V. 3. №7. P. 42–54.
6. *Федосов В.П., Тарасов С.П., Пивнев П.П. и др.* Сети связи для подводных автономных роботизированных комплексов. Таганрог: ЮФУ, 2018. 178 с.
7. *Панкратов Ф.С., Малахов И.М.* Актуальные и перспективные способы построения беспроводных гидроакустических сетей доступа // Управление большими системами. 2021. Вып. 91. С. 120–143.
8. *Hamilton A., Holdcroft S., Fenucci D., Mitchell P., Morozs N., Munafò A., Sitbon J.* Adaptable Underwater Networks: The Relation between Autonomy and Communications // Remote Sensing. 2020. V. 12.
9. *Туфанов И.Е., Шербатюк А.Ф.* Некоторые результаты морских испытаний централизованной системы управления группой морских роботов // Управление большими системами. 2016. № 59. С. 233–246.
10. *Кебкал К.Г., Машошин А.И., Мороз Н.В.* Пути решения проблем создания сетевой подводной связи и позиционирования // Гироскопия и навигация. 2019. Т. 27. № 2 (105). С. 106–135.
11. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
12. *Тель Ж.* Введение в распределенные алгоритмы. М.: МЦНМО, 2009. 616 с.
13. *Конвей Р.В., Максвелл В.Л., Миллер Л.В.* Теория расписаний. М.: Наука, 1975. 282 с.
14. *Малашенко Ю.Е., Назарова И.А., Новикова Н.М.* Анализ двухуровневых потоковых сетей ресурсобеспечения // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 3. С. 81–94.
15. *Лазарев А.А., Гафаров Е.Р.* Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. М.: МГУ, 2011. 222 с.
16. *Liu J.W.S.* Real-Time Systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs. NJ, 2000. 600 p.
17. *Cottet F., Kaiser J., Mammeri Z.* Scheduling in Real-Time Systems. John Wiley & Sons Ltd, 2002.
18. *Харди Г.Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.

**КОМПЬЮТЕРНЫЕ
МЕТОДЫ**

УДК 336.6

**НЕКОТОРЫЕ МОДИФИКАЦИИ
ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ
С УЧЕТОМ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА**© 2022 г. М. А. Горский^{b,*}, А. В. Мищенко^{a,**}, Л. Г. Нестерович^{c,***}, М. А. Халиков^{b,****}^a Национальный исследовательский ун-т “Высшая школа экономики”, Москва, Россия^b Российский экономический ун-т им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия^c МГТУ им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

*e-mail: gadjiagaev@mail.ru

**e-mail: alnex4957@rambler.ru

***e-mail: nesterovichl@yandex.ru

****e-mail: Khalikov.MA@rea.ru

Поступила в редакцию 18.04.2022 г.

После доработки 30.05.2022 г.

Принята к публикации 30.05.2022 г.

Представлены различные подходы к формализации определенного класса задач управления ограниченными ресурсами и построению численных алгоритмов выбора оптимального целочисленного решения, а также оценке его эффективности применительно к фондовому рынку. Предложены целочисленные модели и методы оценки этих моделей в ситуации, когда будущая цена активов задана детерминировано или интервально, а также представлены методы анализа устойчивости оптимального решения.

Сравнительный анализ решений, связанных с оптимальным выбором основанных на классической теории портфеля и авторской концепции, позволил сделать вывод о корректности предложенного в работе подхода и численного метода и их высокой, в сравнении с традиционными методами и алгоритмами, эффективности в приложении к этим оптимизационным задачам.

DOI: 10.31857/S0002338822050079

Введение. Рассмотрены целочисленные однокритериальные и двухкритериальные оптимизационные задачи управления ограниченными финансовыми ресурсами в условиях неопределенности и риска и методы их решения. Учитывая, что данные задачи имеют существенно переборный характер, для их решения предложены методы ветвей и границ, основанные на разработанных авторами алгоритмах вычисления верхних, нижних и текущих верхних оценок. Авторами также предложены методы оценки устойчивости полученных оптимальных решений в ситуации изменения исходных данных задачи. Разработанный в статье математический инструментарий оптимального выбора на фондовом рынке является развитием классической теории Марковица–Шарпа, изложенной, например, в [1]. Непосредственное практическое применение этих моделей связано с выбором оптимальной производственной программы предприятия, определением структуры закупок материальных ресурсов промышленного предприятия, расчетом оптимального портфеля финансовых активов при условии, что активы, входящие в портфель, не допускают дробления. Классическая задача оптимизации на фондовом рынке заключается в выборе активов, общей стоимостью не выше бюджета инвестора, обеспечивающих максимальную доходность при ограничении на риск или, напротив, минимальный риск при ограничении на планируемую доходность. Под доходностью финансового актива понимается средняя доходность за наблюдаемый временной интервал, а под риском – среднеквадратичное отклонение (СКО) планируемой доходности от среднего значения. Эта мера риска основывается на законе больших чисел и неравенстве Чебышева, согласно которому чем меньше СКО доходности финансового актива, тем меньше вероятность ее отклонения от среднего значения.

Первоначально теория оптимального выбора, изложенная, например, в [1–5], разрабатывалась для портфелей финансовых активов, но впоследствии она все чаще стала применяться при

анализе и оценке эффективности портфелей проектов в реальном секторе экономики, организации оптовых закупок разнородных товаров для торговых сетей, закупке материальных ресурсов производства и т.д. Эти подходы, в частности, изложены в публикациях [1, 6–8].

Стохастические методы и статистические данные позволяют дать оценку таких характеристик портфеля, как доходность и риск. В классических моделях портфельного выбора (модель Марковица, модель САРМ) предполагается, что финансовые активы, включаемые в портфель, бесконечно делимы, поэтому, получив доли покупки активов в оптимальном решении, задача формирования портфеля считалась решенной.

Такой подход приемлем в том случае, если цена акции (или лота однородных ценных бумаг) сравнительно мала по отношению к объему инвестиционного бюджета. Если это не так, то полученное решение может оказаться не только неоптимальным, но и недопустимым. Попытки аналитиков получить оптимальное решение путем округления компонент решения далеко не всегда приводят к желаемому результату. Последнее обстоятельство заставляет при анализе эффективности портфеля рассматривать не только непрерывные, классические модели, но и их целочисленные аналоги [9, 10].

Эта проблематика также рассматривалась рядом исследователей. Можно отметить публикации [7, 9, 11], а также работу [4], в которой показано, что дискретный вариант задачи оптимального инвестиционного портфеля сводится к так называемой *NP*-полной по Тьюрингу задаче. Исследования в рамках этой задачи были весьма актуальными в начале второй половины прошлого века в эпоху невысокой производительности используемой электронно-вычислительной техники и сопровождались высоким интересом исследователей к поиску конструктивных алгоритмов решения *NP*-полных задач. В наше время актуальность связана с необходимостью решения задач этого класса в условиях реального времени и внесения оперативных корректировок не только в информационную базу данных, но иногда и в применяемые алгоритмы и постановки задач.

Отметим, что в реальной практике оптимального выбора достаточно часто *NP*-полные проблемы, например нелинейная дискретная задача большой размерности, могут быть эффективно решены с учетом особенностей их постановок, критериев и ограничений, что отмечено, например, в [12, 13]. Проблематике определения точных и приближенных решений *NP*-трудных задач посвящены работы [14–16]. В статье продолжены исследования в этом направлении. Задачей предлагаемого исследования является разработка и верификация целочисленных вариантов моделей оптимального выбора, а также разработка инструментария для определения области устойчивости оптимальных решений целочисленных задач.

1. Математическая оптимизационная модель без учета риска. Вербальная постановка рассматриваемой ниже задачи состоит в следующем. Пусть инвестор обладает денежными средствами в объеме F на интервале времени $[0; T]$, которые он может потратить на приобретение n видов ценных бумаг. Ценные бумаги можно приобретать лотами. В каждый лот входят ценные бумаги (акции) одного вида. Количество ценных бумаг в i -м, $i = \overline{1, n}$, лоте равно V_i . Исходная стоимость (в момент времени $t = 0$) одной ценной бумаги вида i составляет α_i , а будущая стоимость этой ценной бумаги (в момент времени $t = T$) задана стохастически следующим образом: с вероятностью P_j , $j = \overline{1, k}$, ее стоимость составит γ_i^j . Необходимо купить такие лоты ценных бумаг, которые максимизируют прибыль, полученную после продажи приобретенных ценных бумаг в момент времени T . Формализация этой задачи может быть задана следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n V_i x_i \bar{\gamma}_i + \left(F - \sum_{i=1}^n V_i x_i \alpha_i \right) \rightarrow \max, \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^n V_i x_i \alpha_i \leq F, \quad (1.2)$$

$$\bar{\gamma}_i = \sum_{j=1}^k \gamma_i^j P_j, \quad (1.3)$$

$$\sum_{j=1}^k P_j = 1,$$

$$P_j \geq 0, \tag{1.4}$$

$$x_i \in \{0;1\}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{1.5}$$

Если лот i приобретается, то $x_i = 1$, в противном случае $x_i = 0$. Задача (1.1)–(1.5) является обобщением известной задачи о рюкзаке [8].

Целевая функция рассматриваемой задачи состоит из двух слагаемых. Первое – выручка от реализации ценных бумаг по цене γ_i , а второе – остаток денежных средств после формирования портфеля ценных бумаг. Учтявая, что F не оказывает влияние на оптимальное решение, получаем следующую целевую функцию:

$$\sum_{i=1}^n V_i x_i (\bar{\gamma}_i - \alpha_i) \rightarrow \max. \tag{1.6}$$

Предлагаемая оптимизационная задача (1.1)–(1.5) принадлежит классу задач дискретной оптимизации с булевыми переменными и является NP -трудной [8]. Для решения данной задачи может быть использована следующая схема метода ветвей и границ с разработанным авторами алгоритмом вычисления верхних, нижних и текущих верхних оценок:

1. Вычисление верхней оценки. Для всех лотов акций рассчитывается величина $\bar{\gamma}_i/a_i$. Перенумеруем все пакеты следующим образом: $\bar{\gamma}_1/a_1 \geq \bar{\gamma}_2/a_2 \geq \dots \geq \bar{\gamma}_n/a_n$. В дальнейшем финансовые ресурсы выделяются для приобретения ценных бумаг первого вида, потом второго и так до того момента, пока остатка финансовых средств станет недостаточно для приобретения полностью лота ценных бумаг вида l в объеме V_l . В этом случае не учитываются целочисленные ограничения на приобретение акций вида l и покупается максимально возможное количество ценных бумаг данного вида. Это количество (V_l') рассчитывается по следующей формуле:

$$V_l' = \frac{F_{l-1}}{\alpha_l}, \tag{1.7}$$

где F_{l-1} – остаток денежных средств после приобретения первых $l - 1$ пакетов ценных бумаг ($l = \overline{1, n}$).

В итоге верхняя оценка рассчитывается как

$$Z^{\text{верх}} = \sum_{i=1}^{l-1} V_i \bar{\gamma}_i - \sum_{i=1}^{l-1} V_i \alpha_i + V_l' (\bar{\gamma}_l - \alpha_l), \tag{1.8}$$

где $Z^{\text{верх}}$ – верхняя оценка.

2. Вычисление нижней оценки. Расчет нижней оценки осуществляется по формуле

$$Z^{\text{ниж}} = \sum_{i=1}^{l-1} V_i \bar{\gamma}_i - \sum_{i=1}^{l-1} V_i \alpha_i + F_{l-1}, \tag{1.9}$$

где $Z^{\text{ниж}}$ – нижняя оценка.

После того как вычислены верхняя и нижняя оценки доходности оптимального портфеля, исследуются все возможные варианты формирования портфеля ценных бумаг, определяя при этом текущие верхние оценки при формировании очередного допустимого портфеля. Эти оценки позволяют отбраковать заведомо неоптимальные решения.

3. Вычисление текущих верхних оценок. Расчет текущей верхней оценки при анализе очередного варианта портфеля ценных бумаг производится каждый раз после выделения финансовых средств на приобретение очередного лота. Эта оценка складывается из прибыли от приобретения ценных бумаг, на которые уже выделены деньги, и прибыли от оставшихся ценных бумаг, полученной по правилу $Z^{\text{верх}}$. При этом если окажется, что $Z_{\text{тек}}^{\text{верх}} \leq Z^{\text{ниж}}$, то данный вариант формирования портфеля не рассматривается. В противном случае в портфель включается очередной лот акций и снова вычисляется $Z_{\text{тек}}^{\text{верх}}$. Здесь $Z_{\text{тек}}^{\text{верх}}$ – текущая верхняя оценка. В результате либо анализируемый вариант портфеля будет отвергнут, либо будет сформирован портфель, доходность которого больше $Z^{\text{ниж}}$. В этом случае в качестве нижней оценки принимаем значение це-

левой функции на последнем портфеле ценных бумаг и переходим к анализу нового варианта формирования портфеля. Работа алгоритма заканчивается или после перебора всех вариантов формирования портфеля, и тогда оптимальным будет тот вариант, которому соответствует последнее значение $Z^{\text{ниж}}$, или в случае, когда получен портфель, целевая функция на котором равна $Z^{\text{верх}}$.

Одной из проблем, возникающих при практическом использовании решения предложенной задачи, является достоверность прогноза стоимости ценных бумаг γ_i . Если известна функция распределения случайных величин, задающих возможную прибыль по каждому виду ценных бумаг, то выбирается портфель, максимизирующий математическое ожидание выигрыша либо минимизирующий риск финансовых потерь (СКО).

Еще одним подходом решения этой задачи в условиях неточного прогноза будущих цен активов является анализ устойчивости решения к изменению величин γ_i . Под устойчивостью задачи будем понимать оценку влияния изменения будущей стоимости ценных бумаг на решение и на значение целевой функции задачи (1.1)–(1.5). При этом возможны три подхода:

В первом случае считается, что известны минимальные значения γ_i и необходимо вычислить, насколько могут быть увеличены эти значения, чтобы оптимальное решение задачи сохранилось. Другими словами, необходимо определить такое ε^m , чтобы при увеличении всех γ_i на любое $\varepsilon \in (0; \varepsilon^m)$ решение задачи сохранилось. Здесь ε^m – правая граница изменения ε .

Будем считать множество X^j , $j = \overline{1, N}$, где N – число допустимых портфелей, множеством всех возможных решений задачи, и пусть эти значения упорядочены по возрастанию величины W_q :

$$W_q = \sum_{i=1}^n x_i^q V_i, \quad q = \overline{1, n}. \quad (1.10)$$

Допустим, что вектор x_j является оптимальным при отсутствии возмущения. Тогда при увеличении γ_i на величину возмущения ε возможно изменение оптимального решения. В этом случае в качестве новых решений могут быть только решения, у которых номер больше l . Вычисление границы изменения ε для оптимального решения x^l производится из следующего соотношения:

$$\varepsilon^l = \min_{k=l+1, n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^l V_i (\gamma_i + \varepsilon) = \sum_{i=1}^n x_i^k V_i (\gamma_i + \varepsilon) \right\}. \quad (1.11)$$

Раскроем скобки и выразим ε через параметры V_i , γ_i , x_i^l , x_i^k , т.е. решим уравнение (1.9). Отсюда получаем

$$E^l = \max_{k=l+1, n} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k V_i \gamma_i - \sum_{i=1}^n x_i^l V_i \gamma_i}{\sum_{i=1}^n x_i^k V_i - \sum_{i=1}^n x_i^l V_i}. \quad (1.12)$$

Пусть этот минимум достигается на каком-либо $l_1 > l$, тогда процедура приращения ε^{l_1} для решения x^{l_1} повторяется. Это происходит до тех пор, пока через конечное число шагов оптимальным не станет решение из множества X с максимальным верхним индексом. Тогда дальнейшее увеличение всех значений γ_i не приведет к новому решению.

Во втором случае будем полагать, что γ_i с учетом возмущений меняются по правилу $\gamma_i + m_i \varepsilon$. В данной ситуации схема рассуждений сохраняется, только упорядочение решений происходит по возрастанию величины W_q :

$$W_q = \sum_{i=1}^n x_i V_i m_i.$$

Соответственно формула для вычисления приращения ε^l , для которого остается оптимальным решение x^l , будет иметь следующий вид:

$$\varepsilon^l = \min_{k=l+1, n} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k V_i \gamma_i - \sum_{i=1}^n x_i^l V_i \gamma_i}{\sum_{i=1}^n x_i^k V_i m_i - \sum_{i=1}^n x_i^l V_i m_i}. \quad (1.13)$$

В третьем случае полагаем, что γ_i может принимать все значения из интервала $[\gamma_i^1; \gamma_i^2]$. В этой ситуации может быть предложена процедура разбиения множества, на котором изменяются значения $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, на подмножества S_1, \dots, S_k . При этом при изменении γ на любом из подмножеств $S_j, j = \overline{1, k}$, оптимальным на этом подмножестве остается решение $x^j \in X$. Рассмотрим для задачи, предложенной выше, ситуацию, когда $\gamma_i \in [\gamma_i^1; \gamma_i^2]$, т.е. будущая ожидаемая стоимость i -го актива может принимать любые значения из интервала $[\gamma_i^1; \gamma_i^2]$. В этом случае, вообще говоря, невозможно однозначно упорядочить все активы по степени убывания доходности. Поэтому можно сформировать все допустимые портфели и далее для каждого портфеля можно вычислить соответственно $F_j^1, F_j^2, j = \overline{1, N}$. Здесь N – число допустимых портфелей, F_j^1 – значение целевой функции (1.6) при минимальном будущем значении стоимости i -го актива, F_j^2 – значение целевой функции (1.6) при максимально возможном значении будущей стоимости актива i . Далее расположим соответствующие значения целевой функции на оси доходности для различных инвестиционных портфелей.

Выберем портфели, которые могут при определенных значениях будущих стоимостей активов, входящих в них, быть оптимальными. Для этого из множества всех допустимых портфелей N выделим те, которые удовлетворяют следующим условиям: 1) $\max F_j^2 = F_l^2, j \in N$; 2) $\max F_j^1 = F_k^1, j \in N$; 3) исключим из множества N все портфели, для которых $F_l^2 \leq F_k^1$.

Оставшееся множество портфелей обозначим через N_1 . Очевидно, что только портфели множества N_1 могут быть оптимальными при изменении будущей стоимости активов в интервалах $\gamma_i \in [\gamma_i^1; \gamma_i^2], i = \overline{1, n}$. Значение целевой функции для каждого допустимого портфеля j может быть представлено следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i^j V_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^j V_i + F, \quad (1.14)$$

где вектор с булевыми переменными $x^j = (x_1^j, \dots, x_n^j)$ задает те лоты, которые вошли в портфель j .

Если необходимо определить множество будущих стоимостей активов, при которых будет оптимальным j -й портфель, то очевидно, что оно может быть представлено следующей системой линейных неравенств:

$$\begin{aligned} \gamma_i^1 &\leq \gamma_i \leq \gamma_i^2, \quad i = \overline{1, n}, \\ \sum_{i=1}^n (\gamma_i - \alpha_i) x_i^j &\geq \sum_{i=1}^n (\gamma_i - \alpha_i) x_i^l, \quad l \in N_1, \quad l \neq j. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Далее рассмотрим целочисленные модификации моделей портфельных инвестиций с учетом риска.

Следует отметить, что предлагаемые подходы для оценки устойчивости оптимизационных моделей, связанных с формированием инвестиционных портфелей, являются оригинальными и могут быть использованы как для дальнейших теоретических исследований, так и для практического применения. Во втором случае оценка области устойчивости позволит не осуществлять повторные расчеты по оптимизационной модели при локальном изменении параметров модели. Учитывая, что предлагаемая оптимизационная модель является NP -трудной, это сократит время реакции лица, принимающего решения на изменения внешней среды.

2. Оптимизационная целочисленная модель выбора с учетом риска. Далее будет рассмотрена целочисленная модель САРМ, непрерывная модификация которой изложена в [1]. Для определения оптимального целочисленного портфеля этой модели будет предложена схема метода ветвей и границ. Необходимость разработки такого метода связана с тем, что при переходе от непрерывного решения к целочисленному путем округления возможна существенная потеря точности.

Полагаем, что известен перечень лотов, в которые входят ценные бумаги одного вида. Объем ценных бумаг (количество акций каждого вида) задан числами V_1, V_2, \dots, V_n . Известна начальная стоимость каждой акции α_i в момент времени $t = 0$ и вероятностное распределение будущей стоимости акций каждого вида в момент времени $t = T$.

Будем считать, что β – коэффициенты по каждому виду финансовых активов, которые обозначим через β_i , $i = \overline{1, n}$. Эти коэффициенты задают количественную оценку риска по каждому виду ценных бумаг. В этих условиях аналитик, обладая ограниченным объемом инвестиционных ресурсов F , хотел бы приобрести те лоты, продав которые в момент времени $t = T$, он получит максимальный ожидаемый прирост финансовых ресурсов ΔF с учетом ограничений на риск портфеля.

Сформируем оптимизационную задачу определения инвестиционного портфеля с учетом вышеприведенных предположений. Ниже будем считать, что будущая стоимость i -го актива задается распределением $\gamma_i^1, \dots, \gamma_i^m$ с вероятностями p_i^1, \dots, p_i^m . Тогда математическое ожидание будущей стоимости i -го актива есть величина $\bar{\gamma}_i$:

$$\bar{\gamma}_i = \sum_{j=1}^m \gamma_i^j p_i^j.$$

В этих обозначениях соответствующая оптимизационная задача выбора инвестиционного портфеля может быть представлена следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n V_i x_i (\bar{\gamma}_i - \alpha_i) \rightarrow \max, \quad (2.1)$$

$$\sum_{i=1}^n V_i x_i \alpha_i \leq F, \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^n V_i x_i \alpha_i \frac{\beta_i}{F} \leq \beta_{гр}, \quad (2.3)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.4)$$

Здесь $\beta_{гр}$ – граничное значение, определяющее максимально допустимое значение риска формируемого портфеля.

В задаче (2.1)–(2.4) $x_i = 0$, если лот V_i не вошел в инвестиционный портфель, и $x_i = 1$, если лот V_i входит в инвестиционный портфель. Для получения оптимального решения задачи (2.1)–(2.4) необходимо выбрать такие лоты из множества V_1, \dots, V_n , чтобы, не нарушая ограничений (2.2)–(2.4), максимизировать целевую функцию (2.1).

Для решения этой задачи авторами разработана следующая схема метода ветвей и границ.

Шаг 1. Вычисление верхней оценки F_b задачи (2.1)–(2.4). Для расчета верхней оценки заметим в задаче (2.1)–(2.4) ограничение (2.4) на ограничение вида

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.5)$$

Тогда задача (2.1)–(2.3), (2.5) является задачей непрерывного линейного программирования, и ее оптимальное решение может быть получено с использованием, например, симплекс-метода.

Обозначим решение задачи (2.1)–(2.5) через $x^{\text{опт}}$, вычислим значение целевой функции (2.1) на решение $x^{\text{опт}}$ и запишем его через F_b . Здесь $x^{\text{опт}}$ – оптимальное решение задачи. Отметим, что $x^{\text{опт}}$, вообще говоря, не является допустимым решением исходной задачи (2.1)–(2.4) в силу того,

что оно может быть нецелочисленным. Понятно, что значение целевой функции (2.1) задачи (2.1)–(2.4) на оптимальном решении не может превышать величину F_B .

Шаг 2. Вычисление нижней оценки задачи (2.1)–(2.4) F_H осуществляется путем выбора некоторого допустимого решения задачи (2.1)–(2.4) и вычисления на этом решении значения целевой функции (2.1), которое и принимается за F_H . Необходимо отметить, что чем ближе значение F_H будет к значению F_B , тем более эффективно будет работать в дальнейшем схема алгоритма, и если $F_H = F_B$, то выбранное выше решение и будет оптимальным. Если получено, что $F_H < F_B$, то переходим к следующему шагу метода.

Шаг 3. Анализ текущих верхних оценок формируемого портфеля.

Если выполняется соотношение $F_H < F_B$, то переходим к формированию очередного портфеля. В процессе формирования очередного портфеля происходит вычисление текущих верхних оценок:

$$F_B^{\text{тек}}(K) = \sum_{i \in K} V_i \bar{\gamma}_i + F_B. \quad (2.6)$$

Здесь K – множество лотов, которые уже вошли в портфель; N – множество всех лотов; $N \setminus K$ – множество неприобретенных лотов; F_B – верхняя оценка задачи (2.1)–(2.4) на множестве лотов $N \setminus K$ и объеме финансовых ресурсов:

$$F_K = F - \sum_{i \in K} \alpha_i V_i.$$

Дальнейшее формирование очередного портфеля происходит только в случае выполнения следующих условий:

$$F_B^{\text{тек}}(K) > F_H, \quad (2.7)$$

$$\sum_{i \in K} (V_i \alpha_i \beta_i) / F \leq \beta_{\text{гр}}. \quad (2.8)$$

В случае, если хотя бы одно из ограничений (2.7)–(2.8) не выполняется, переходим на формирование другого портфеля. Если (2.7) и (2.8) выполнены, то выбираем очередной лот для включения его в портфель и получаем множество приобретенных лотов K_l . Очевидно, что $K \in K_l$.

На множестве K_l вычисляем $F_B^{\text{тек}}(K_l)$ по формуле (2.6) и проверяем выполнение условий (2.6)–(2.7). Продолжая эту процедуру, в итоге получим, что либо формируемый портфель будет отбракован, либо остаток финансовых средств будет таков, что дополнительно ни один лот приобрести нельзя. В этом случае рассчитываем на полученном допустимом решении значение целевой функции (2.1). Обозначаем эту величину как F^* . Если $F^* > F_H$, то в дальнейшем полагаем $F_H = F^*$ и перейдем к формированию очередного инвестиционного портфеля. Вычисления заканчиваются, если при очередной корректировке F_H получим $F_H = F_B$, либо, если все варианты формирования портфелей рассмотрены. Тогда в качестве оптимального выбирается тот, который соответствует последнему (максимальному) значению F_H .

3. Оптимизационная целочисленная модель Марковица с критерием на минимум риска портфеля. В отличие от классической модели Марковица [1] будем предполагать, что активы можно приобретать только лотами, и определим значение

$$d_i = \frac{V_i \alpha_i}{F},$$

которое задает долю инвестиций для данного вида активов.

В этом случае задача Марковица на минимум риска, учитывая введенные ранее обозначения, может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 d_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n y_i y_j d_i d_j R_{ij} \rightarrow \min, \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i V_i \alpha_i \leq F, \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i V_i \bar{\gamma}_i + \left(F - \sum_{i=1}^n y_i V_i \alpha_i \right) \geq F + \Delta F, \quad (3.3)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.4)$$

где σ_i – СКО, σ_i^2 – дисперсия, d_i – доля инвестиций для данного вида актива, $R_{ij} = \text{cov}(i, j)$ – взаимная ковариация доходности актива i и актива j .

В задаче (3.1)–(3.4) $y_i = 1$, если i -й лот включен в портфель, и $y_i = 0$, если этот лот в портфель не включен. Величина ΔF задает минимально возможный прирост инвестиционных ресурсов при продаже активов портфеля в момент времени $t = T$.

Дадим описание метода направленного перебора, реализующего схему метода ветвей и границ с разработанными авторами алгоритмами вычисления верхней, нижней и текущих нижних оценок для этой задачи.

Шаг 1. Вычисление верхней границы оптимального значения целевой функции (3.1). Для расчета этой оценки решается вспомогательная задача следующего вида:

$$\sum_{i=1}^n y_i V_i \bar{\gamma}_i + \left(F - \sum_{i=1}^n y_i V_i \alpha_i \right) \rightarrow \max, \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i V_i \alpha_i \leq F, \quad (3.6)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.7)$$

Задача (3.5)–(3.7) является задачей линейного программирования с бинарными переменными, и значение целевой функции этой задачи на оптимальном решении и будет верхней оценкой F_b задачи (3.1)–(3.7).

Обозначим значение целевой функции задачи (3.5)–(3.7) на оптимальном решении через $y^{\text{опт}}$ и сравниваем это значение с правой частью неравенства (3.3). Если оно меньше, чем $F + \Delta F$, то задача (3.1)–(3.4) решения не имеет. Если значение целевой функции (3.5) на оптимальном решении $y^{\text{опт}} > F + \Delta F$, то вычисляем на этом решении значение целевой функции (3.1) и его принимаем за величину верхней оценки R_b задачи (3.1)–(3.4).

Шаг 2. В качестве нижней оценки выберем ноль, т.е. $R_n = 0$. Если $R_n < R_b$, то переходим к шагу 3. Если $R_n = R_b$, то оптимальное решение исходной задачи найдено.

Шаг 3. Вычисление текущих нижних оценок при анализе вариантов формирования портфелей. Расчет текущей нижней оценки формируемого портфеля производится по следующей схеме при условии, что в портфель уже вошли лоты множества K и выполняется соотношение

$$\sum_{i \in K} y_i V_i \alpha_i \leq F.$$

Упорядочиваем все лоты множества $N \setminus K$ по показателю доходности активов:

$$\bar{\gamma}_1/a_1 \geq \bar{\gamma}_2/a_2 \geq \dots \geq \bar{\gamma}_n/a_n. \quad (3.8)$$

Далее проверяем выполнение условия:

$$\sum_{i \in K} y_i V_i \gamma_i + F_b(N \setminus K) \geq F + \Delta F. \quad (3.9)$$

Если неравенство (3.9) верно, то выбираем очередной лот из множества $N \setminus K$. Включаем его в формируемый портфель и образуем множество лотов K_l ($K \in K_l$) и вычисляем текущую нижнюю оценку для лотов множества K_l .

Процесс формирования портфеля заканчивается, если при очередном включении нового лота в портфель не выполняется условие (3.9), либо остаток средств недостаточен для того, чтобы приобрести хотя бы один из оставшихся лотов, не включенных в портфель. В последнем случае проверяем значение целевой функции (3.1) на сформированном портфеле. Если оно меньше, чем R_b , то полагаем в дальнейшем, что R_b равно полученному значению целевой функции (3.1).

Метод ветвей и границ прекращает работу в том случае, если при очередной корректировке R_b получим $R_b = R_n$ или если после того, как просмотрены все дерево вариантов формирования портфелей. Тогда в качестве оптимального портфеля выбирается тот, которому соответствует последнее (минимальное) значение R_b .

4. Целочисленная модель с критерием на максимум доходности и ограничением на риск. Рассмотрим целочисленную модель Марковица на максимум ожидаемой доходности при ограничении на величину риска портфеля активов. С учетом введенных ранее обозначений она может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n y_i V_i (\bar{\gamma}_i - \alpha_i) + F \rightarrow \max, \tag{4.1}$$

$$\sum_{i=1}^n y_i \sigma_i^2 d_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n y_i y_j d_i d_j R_{ij} \leq R, \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^n y_i V_i \alpha_i \leq F, \tag{4.3}$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.4}$$

Далее будем применять для решения целочисленной задачи (4.1)–(4.4) рассмотренную ранее схему метода ветвей и границ.

Шаг 1. Вычисление верхней оценки оптимального значения целевой функции задачи (4.1)–(4.4). Эта оценка может быть получена путем исключения ограничения (4.2) и замены ограничения (4.4) на ограничение

$$0 \leq y_i \leq 1, \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.5}$$

В этом случае максимум доходности портфеля задачи (4.1)–(4.3), (4.5) может быть определен, как указывалось ранее, путем упорядочения лотов по величине соотношения $\bar{\gamma}_i/a_i, i = \overline{1, n}$.

Перенумеруем лоты в порядке убывания величины $\bar{\gamma}_i/a_i$ и найдем $\bar{\gamma}_1/a_1 \geq \bar{\gamma}_2/a_2 \geq \dots \geq \bar{\gamma}_n/a_n$. Далее будем покупать лоты по убыванию величины $\bar{\gamma}_i/a_i$ до тех пор, пока не будут израсходованы все деньги в объеме F . Этот портфель, как легко видеть, будет оптимальным решением задачи (4.1)–(4.3), (4.5).

Если полученный портфель еще и удовлетворяет ограничениям (4.2) и (4.4), то он также будет и решением исходной задачи (4.1)–(4.4). Если последнее условие не выполняется, то переходим к шагу 2.

Шаг 2. Вычисление нижней оценки оптимального значения целевой функции задачи. В качестве нижней оценки F_n задачи (4.1)–(4.4) можно принять значение целевой функции этой задачи на некотором допустимом ее решении.

Шаг 3. Вычисление текущих верхних оценок оптимального значения целевой функции при формировании инвестиционного портфеля. Расчет текущей верхней оценки для частично сформированного портфеля при условии, что в портфель вошли уже лоты множества K , происходит по следующей формуле:

$$F_b^{\text{тек}}(K) = \sum_{i \in K} \bar{y}_i V_i + F_b. \tag{4.6}$$

Здесь F_b – верхняя оценка задачи (4.1)–(4.4) на множестве лотов $N \setminus K$.

После того, как вычислены значения $F_b^{\text{тек}}(K)$, проверяется выполнение следующего неравенства:

$$F_b^{\text{тек}}(K) > F_n. \tag{4.7}$$

В том случае если условие (4.7) верно, происходит выбор очередного приобретаемого лота и формируется инвестиционный портфель, в который входит множество лотов $K (K \in K_l)$. Если на множестве K_l выполняется соотношения (4.7), то процесс формирования портфеля продол-

жается. В противном случае данный портфель отбраковывается и происходит переход к формированию нового инвестиционного портфеля.

В ситуации если удалось сформировать с учетом описанной выше процедуры портфель, на котором выполняются все ограничения (4.2)–(4.4) и значение целевой функции F^* на этом портфеле больше, чем F_n , то полагаем $F_n = F^*$ и переходим к формированию нового инвестиционного портфеля.

Завершающим шагом является тот, когда после очередной корректировки F_n получено, что F_n совпадает с F_b , либо когда все варианты формирования портфеля рассмотрены. В этом случае в качестве оптимального портфеля выбирается тот портфель, который соответствует последнему (наибольшему) значению F_n .

Рассмотренные в разд. 2–4 двукритериальные целочисленные модели оптимального выбора, а также предлагаемые авторами методы их решения являются оригинальными и позволяют оптимизировать портфели ценных бумаг в условиях неделимости входящих в портфель активов.

5. Альтернативные постановка и метод решения целочисленной задачи оптимального выбора с критериями доходности и риска. Рассмотрим целочисленный вариант модели Марковица, в котором неизвестными выступают не конкретные лоты включаемых в инвестиционный портфель однородных рискованных финансовых активов (такая постановка задачи представлена, например, в [17]), а непосредственно количество лотов ценных бумаг того или другого эмитента, включаемых в портфели, которые отличаются показателями доходности, риска и величиной инвестиционного бюджета.

Такая коррекция постановки задачи оптимального портфельного инвестирования потребовала и соответствующей коррекции используемых переменных и параметров. В дискретном варианте модели Марковица в качестве искомой величины выступают x_i — количество лотов акций i -го эмитента в портфеле. Инвестиционные вложения S_i в i -ю акцию определяются выражением

$$S_i = x_i c_i. \quad (5.1)$$

Здесь c_i — цена покупки i -й акции.

Так как активы можно приобретать только лотами, то доли активов ценных бумаг, вложенных в портфель, задаются как

$$W_i = \frac{x_i c_i}{S_0}, \quad (5.2)$$

где S_0 — бюджет инвестора.

Проведем замену $x_i c_i = \gamma_i$ (величина бюджета, которую инвестор планирует разместить на приобретение лотов акций i -го вида):

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i d_i \rightarrow \max. \quad (5.3)$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \gamma_i \gamma_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j}{\sum_{i=1}^n \gamma_i^2}} < \sigma, \quad (5.4)$$

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i \leq S_0, \quad (5.5)$$

$$\gamma_i \geq 0, \quad (5.6)$$

где d_i — средняя доходность i -го актива; σ_i — СКО доходностей i -го актива; r_{ij} — коэффициент корреляций доходностей i -го и j -го активов; σ — пороговое значение риска портфеля.

Формальная постановка модели (5.3)–(5.6) позволяет сократить объем расчетов и вместо долей W_i акций эмитентов находить суммы γ_i , направляемые на покупку ценных бумаг. Однако в ней не учитывается фактор дискретности приобретаемых лотов. Введем ограничение на цело-

численность переменных x_i (количество приобретаемых лотов акций i -го эмитента) и получим вариант модели с учетом дискретности покупаемых лотов:

$$\sum_{i=1}^n x_i c_i d_i \rightarrow \max, \tag{5.7}$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 c_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i c_i x_j c_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j}{\sum_{i=1}^n x_i^2 c_i^2}} < \sigma, \tag{5.8}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i c_i \leq S_0, \tag{5.9}$$

$$x_i c_i \geq 0, \tag{5.10}$$

$$x_i \in Z_+. \tag{5.11}$$

Задача (5.7)–(5.11) представляет собой задачу целочисленного нелинейного программирования, относящуюся к классу *NP*-полных по Тьюрингу проблем, для которых решение, как указано выше, не может быть найдено с помощью известных численных методов нелинейной непрерывной оптимизации. Более подробно этот аспект отражен, например, в [18].

Однако в нашем случае ограничение на риск (5.8) является выпуклым (представлено квадратичной формой), а критерий (5.7) – линейным. В связи с этим для поиска оптимального решения задачи в рассматриваемом варианте нами предложено использовать основную идею метода ветвей и границ. Эта идея связана с представлением области допустимых значений в виде прямой суммы непересекающихся выпуклых областей, для каждой из которых оптимальное решение целочисленной задачи может быть получено с применением известных методов оптимизации (например, сведением к линейной задаче).

Особенностью предлагаемого метода, названного методом локальной оптимизации решения соответствующей непрерывной задачи, является поиск не оптимального, а квазиоптимального решения дискретной задачи с критерием на максимум доходности портфеля.

Численный алгоритм включает следующие шаги [19].

Шаг 1. Решаем задачу в непрерывной постановке (с условием бесконечной делимости активов). Активы в полученном решении располагаем по убыванию доходности.

Шаг 2. Случайным образом округляем значения x_i в большую или меньшую сторону, проверяя допустимость решения (ограничения на инвестиционный бюджет и пороговый риск). Если решение оказалось недопустимым, то повторяем случайный эксперимент. Если получаем допустимый целочисленный портфель – переходим к шагу 3.

Шаг 3. Вокруг допустимого плана строим сферу единичного радиуса, рассматриваем возможные портфели, отличающиеся от “базового” (шаг 1) на единицу по каждому включенному в него активу, и ранжируем их в порядке убывания доходности до момента, когда получаемый набор активов теряет свойства недопустимости. “Лучший” из допустимых портфелей (так называемый квазиоптимальный) вновь подвергаем такой же процедуре.

Итерационный алгоритм завершается в случае, если вновь полученный портфель не отличается от предыдущего либо отличается не более чем на τ процентов, где τ – заранее выбираемый порог точности.

Этот порог, как показано в [19], растет с числом финансовых активов в портфеле. Чем больше число ценных бумаг, тем выше точность (в цитируемой работе рассматривается портфель возможных производственных программ предприятия, включающий изделия ассортимента ряда, цены, и себестоимость которых определяются рынком и изначально могут быть заданы только интервальными значениями. Автором показано, что в случае программы выпуска с числом изделий (активов) более 100 погрешность квазиоптимального решения по сравнению с оптимальным решением целочисленной задачи, полученным простым переборным алгоритмом, составляет не более 5–7% и снижается с ростом объема портфеля заказов).

Целочисленные модификации модели Марковица сохраняют основные особенности классической постановки, за исключением, конечно, бесконечной делимости активов. Целочисленные модели позволяют рассмотреть влияние факторов дискретности, размера начального бюджета и ликвидности на оптимальную структуру портфеля инвестора, полученную по классической модели. В практических расчетах оценку влияния этих факторов на структуру портфеля авторы провели на основании данных Мосбиржи за период 01.03.2021 г.—20.11.2021 г. [20].

Заключение. Предлагаемые в работе методы оценки целочисленных моделей управления ограниченными ресурсами могут быть использованы в ситуации, когда активы, входящие в портфель, нельзя делить. Поэтому классические подходы, основанные на возможности дробления активов, неприемлемы. Применение предлагаемых методик целесообразно, в частности, при выборе совокупности неделимых проектов, оптовой закупке материальных ресурсов производства или формировании портфелей финансовых и материальных активов в ситуации, когда эти активы неделимы. Показано, что в этом случае для формирования оптимального портфеля по критериям “риск—доходность” могут быть использованы методы целочисленной оптимизации, в частности, разработанный авторами метод ветвей и границ. В ситуации, когда будущая стоимость активов задана интервально, предложен метод анализа устойчивости оптимального портфеля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бэйли Дж.В. Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 2010.
2. Тренин Н.Н. Управление финансами. М.: Финансы и статистика, 1999.
3. Шапкин А.С. Экономические и финансовые риски. М.: Юнити, 2003.
4. Анतिकоль А.М. Иерархическая оптимизация портфельных инвестиций с учетом фактора дискретности // Уч. зап. РАП. Роль и место цивилизованного предпринимательства в экономике России: Сб. науч. тр. 2010. Вып. XXIII. С. 6—16.
5. Халиков М.А., Максимов Д.А. Многошаговая оптимизация портфеля финансовых активов неинституционального инвестора // Путеводитель предпринимателя. 2017. № 33. С. 211—219.
6. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. М.: МПСИ, 2005.
7. Мищенко А.В. Методы и модели управления инвестициями в логистических системах. М.: ИНФРА-М, 2016.
8. Математические основы управления проектами / Под ред. В.Н. Буркова. М.: Высш. шк., 2005.
9. Мищенко А.В., Халиков М.А. Распределение ограниченных ресурсов в задаче оптимизации производственной деятельности предприятия // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 6.
10. Мищенко А.В., Михеева Е.В. Методы оценки эффективности управления производственно-финансовой деятельностью предприятия. М.: ИНФРА-М, 2019.
11. Горский М.А. Теоретический подход и численный метод поиска квазиоптимального решения нелинейной дискретной задачи большой размерности // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2019. Т. 23. № 3. С. 465—482.
12. Ageev A.A. A Polynomial-time Algorithm for the Facility Location Problem with Uniform Hard Capacities on Path Graph // Discrete Optimization Methods in Production and Logistics. Proc. 2-nd Intern. Workshop. Omsk, 2004. P. 28—32.
13. Верецагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 3. Вычислимые функции. М.: МЦНМО, 2008.
14. Фуругян М.Г. Планирование вычислений в многопроцессорных АСУ реального времени с дополнительным ресурсом // АиТ. 2015. № 3.
15. Косоруков Е.О., Фуругян М.Г. Алгоритмы распределения ресурсов в многопроцессорных системах с нефиксированными параметрами // Некоторые алгоритмы планирования вычислений и организации контроля в системах реального времени. М.: ВЦ РАН, 2011. С. 40—51.
16. Косоруков Е.О., Фуругян М.Г. Некоторые алгоритмы распределения ресурсов в многопроцессорных системах // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2009. № 4. С. 34—37.
17. Ygodchikova I.Y., Firsova A.A., Vavilina A.V., Gorlova O.S., Kirillova O.Y. Estimation of Bond Risks using Minimax // J. Advanced Research in Law and Economics. 2016. V. 7. № 7. P. 1899—1907. [https://doi.org/10.14505/jarle.v7.7\(21\).38](https://doi.org/10.14505/jarle.v7.7(21).38)
18. “Умные контракты”: Полнота по Тьюрингу и реальность [электронный ресурс]. URL: <https://ethclassic.ru/2016/10/21/turing-completeness-reality/> (дата обращения: 13.03.2018).
19. Халиков М.А. Дискретная оптимизация планов повышения надежности функционирования экономических систем // Финансовая математика. М.: Изд-во МГУ, 2001. С. 281—295.
20. Официальный сайт информационного портала об инвестициях, разд. “Биржи и биржевая торговля” [электронный ресурс]. URL: <http://investud.ru/birzhevaya-komissiya.html>. (дата обращения 20.11.2021).

**КОМПЬЮТЕРНЫЕ
МЕТОДЫ**

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ
ДИСКРЕТНОГО ГАЗЛИФТНОГО ПРОЦЕССА**

© 2022 г. Ф. А. Алиев^{a,b,*}, Н. С. Гаджиева^{a,**}, Г. Г. Маммадова^a,
А. А. Намазов^a, М. С. Халилов^c

^a Институт прикладной математики, Бакинский государственный ун-т, Баку, Азербайджан

^b Институт информационных технологий НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан

^c Бакинский государственный ун-т, Баку, Азербайджан

*e-mail: f_aliev@yahoo.com

**e-mail: nazile.m@mail.ru

Поступила в редакцию 17.03.2022 г.

После доработки 12.04.2022 г.

Принята к публикации 30.05.2022 г.

Рассматривается усредненная по времени математическая модель дискретного газлифтного процесса. При первой итерации строится аналитическое выражение для газожидкостной смеси на конце подъемника с использованием малого параметра (малый параметр принимается как величина, обратная глубине скважины) и предполагается, что коэффициент гидравлического сопротивления имеет разные значения в двух разных частях подъемника. Для нахождения указанного коэффициента используется метод наименьших квадратов. Вводятся экспериментальные данные и минимизируется целевая функция, которая характеризует близость физических переменных, полученных из модели и из этих данных. Окончательный результат представлен в приводимом примере, и он совпадает с соответствующими величинами, найденными другими методами.

DOI: 10.31857/S000233882205002X

0. Введение. В системах управления широко применяется метод наименьших квадратов, когда ищутся параметры модели, и для этой цели используются экспериментальные данные [1, 2].

Как известно, в [3–10] разработаны разные алгоритмы, определены параметры образования газожидкостной смеси (ГЖС) на башмаке скважины и среднее значение коэффициента гидравлического сопротивления (КГС) [11] на подъемнике. Если считать значение КГС по всей длине скважины постоянным, то это ослабляет решение полученных результатов и требуется усилить постановку этих задач. Поэтому в [12, 13] приведены общие алгоритмы определения КГС на разных участках скважины, применяя методы наименьших квадратов [14–17] с использованием статистических данных из истории скважины [18, 19]. Однако реализация этого алгоритма [20, 21] затруднена из-за вычисления градиента соответствующей целевой функции для нахождения КГС на каждом участке. Как известно [22–25], расчет среднего значения КГС по всей длине скважины с помощью асимптотических методов позволяет получить аналитическое выражение для его вычислений в первом приближении по малому параметру μ .

В работе приводится метод определения КГС в двух частях скважины с дискретным временем. Применяется метод наименьших квадратов, который сводится к минимизации квадратичной целевой функции, и окончательно получается аналитическое выражение для КГС.

Известно, что движение газа в кольцевом пространстве и ГЖС в подъемнике газлифтной скважины описываются следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений, правая часть которой включает в себя малый параметр [26, 27]:

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{2a_i \rho_i F_i Q_i^2}{c_i^2 \rho_i^2 F_i^2 \mu - Q_i^2}, & Q(0) = u, \\ \dot{P}_i = \frac{2a_i c_i^2 \rho_i^2 F_i^2 Q_i^2}{c_i^2 \rho_i^2 F_i^2 \mu - Q_i^2}, & P(0) = P_0, \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad (0.1)$$

где параметр a_i находится из выражения $2a_i = g_i/\omega_i + \lambda_i\omega_i/2D_i$, $i = 1, 2$. Здесь g_1, g_2 – ускорение выпуска, ω_1, ω_2 – скорость движения смеси, λ_1, λ_2 – коэффициенты гидравлического сопротивления, D_1, D_2 – эффективные диаметры, ρ_1, ρ_2 – плотности газа, F_1, F_2 представляют собой площади сечения M в кольцевом пространстве и в подъемнике соответственно, Q_i , $i = 1, 2$, – массовый расход закачиваемого газа в кольцевом пространстве и ГЖС в подъемнике, c_1, c_2 – скорость звука в кольцевом пространстве и в подъемнике соответственно, μ – малый параметр (малый параметр принимается как величина, обратная глубине скважины – $1/l$, l – высота скважины), u – заданная величина, $P_i, i = 1, 2$, – давление газа и ГЖС, P_0 – заданная величина.

Отметим, что если первое уравнение системы (0.1) не зависит от решения второго, то ее можно решать отдельно методом разделения переменных. С помощью первого метода Эйлера первое уравнение системы (0.1) представляет собой цепочку из двух нелинейных рекуррентных формул:

$$Q(k+1) = Q(k) + h \frac{2a_1\rho_1 F_1 Q^2(k)}{c_1^2 \rho_1^2 F_1^2 \mu - Q^2(k)}, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad Q(0) = u, \quad (0.2)$$

$$Q(k+1) = Q(k) + h \frac{2a_2\rho_2 F_2 Q^2(k)}{c_2^2 \rho_2^2 F_2^2 \mu - Q^2(k)}, \quad N \leq k \leq 2N-1, \quad (0.3)$$

где $Q(k) = \rho_1\omega_1 F_1$, $k = \overline{0, N}$, и $Q(k) = \rho_2\omega_2 F_2$, $k = \overline{N+1, 2N}$, – объемы газа и ГЖС соответственно, h – шаг интегрирования.

1. Постановка задачи. Теперь разделим длину скважины газлифтного колодца l на две разные части (l_0, l_1) и (l_1, l_2) . В этом случае уравнение движение ГЖС (0.2) в каждом интервале (l_0, l_1) и (l_1, l_2) описывается следующими нелинейными разностными уравнениями:

$$Q(k+1) = Q(k) + h \frac{2a_{2,i}\rho_2 F_2 Q^2(k)}{c_2^2 \rho_2^2 F_2^2 \mu - Q^2(k)}, \quad N \leq k \leq 2N-1. \quad (1.1)$$

Здесь

$$2a_{2,i} = \frac{g_2}{\omega_2} + \frac{\lambda_{2,i}\omega_2}{2D_2}, \quad i = 1, 2, \quad (1.2)$$

$\lambda_{2,i}$ – КГС в каждом интервале (l_0, l_1) и (l_1, l_2) .

Пусть имеются n значений экспериментальных данных (т.е. измеряемые при наблюдении над объектом параметры модели):

$$Q^j(l_0) = \tilde{Q}_N^j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.3)$$

где n – число наблюдений. Требуется найти такие значения КГС $\lambda_{2,1}$ и $\lambda_{2,2}$ в каждом из интервалов (l_0, l_1) и (l_1, l_2) , при которых в конце подъемника разность между решением $Q(l_2) = Q_{2N}$ уравнения (2.1) и значениями

$$Q^j(l_2) = \tilde{Q}_{2N}^j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.4)$$

вычисленными с использованием начальных данных (1.3), будет минимальной.

Для решения задачи идентификации вводится следующая целевая функция:

$$I(a_{2,1}, a_{2,2}) = \sum_{j=1}^n [Q_{a_{2,1}, a_{2,2}}^j(l_2) - \tilde{Q}_{2N}^j]^2 + \beta a_{2,1}^2 + \beta a_{2,2}^2 \rightarrow \min, \quad (1.5)$$

где два последних нетрадиционных для метода наименьших квадратов слагаемых есть штраф с коэффициентом $\beta > 0$ (параметр регуляризации Тихонова) за большие значения искомых параметров. Он обеспечивает невырожденность матрицы коэффициентов линейной системы уравнений – условием минимума функции (1.5).

2. Метод решения. Находим решение уравнения (1.1) в первом приближении в каждом интервале (l_0, l_1) и (l_1, l_2) . Действительно, легко предположить, что в окрестности малого параметра $\mu = 0$ решение уравнения (2.1) порядка $O(\mu)$ линеаризуется по формуле Тейлора следующим образом:

$$Q(k+1) \approx \left(Q(k) + h \frac{2a_{2,i} \rho_2 F_2 Q^2(k)}{c_2^2 \rho_2^2 F_2^2 \mu - Q^2(k)} \right) \Big|_{\mu=0} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(Q(k) + h \frac{2a_{2,i} \rho_2 F_2 Q^2(k)}{c_2^2 \rho_2^2 F_2^2 \mu - Q^2(k)} \right) \Big|_{\mu=0} \mu =$$

$$= Q(k) - 2ha_{2,i} \rho_2 F_2 - h \frac{2a_{2,i} c_2^2 \rho_2^3 F_2^3}{Q^2(k)} \mu, \quad i = 1, 2. \quad (2.1)$$

В первом приближении необходимо из решения (2.1) вычислить $Q^j(l_2)$ и, учитывая это значение в целевой функции (1.4), можно рассчитать градиент этой целевой функции. Далее, приравняв к нулю этот градиент, вычисляем параметры $a_{2,1}, a_{2,2}$ в интервалах (l_0, l_1) и (l_1, l_2) . Для этого сначала в точке l_1 находим $Q(l_1)$ из (2.1):

$$Q(l_1) = Q(l_0) - 2l_1 a_{2,1} \rho_2 F_2 - l_1 \frac{2a_{2,1} c_2^2 \rho_2^3 F_2^3}{Q^2(l_0)} \mu, \quad l_1 = 10h. \quad (2.2)$$

В точке l_2 из (2.1) определяем $Q(l_2)$ и в окрестности параметра $\mu = 0$ линеаризуем его с порядком $O(\mu)$:

$$Q(l_2) = Q(l_1) - 2l_2 a_{2,2} \rho_2 F_2 - l_2 \frac{2a_{2,2} c_2^2 \rho_2^3 F_2^3}{Q^2(l_1)} \mu \approx Q(l_0) - 2l_1 a_{2,1} \rho_2 F_2 -$$

$$- l_1 \frac{2a_{2,1} c_2^2 \rho_2^3 F_2^3}{Q^2(l_0)} \mu - 2l_2 a_{2,2} \rho_2 F_2 - l_2 \frac{2a_{2,2} c_2^2 \rho_2^3 F_2^3}{\left[Q(l_0) - 2l_1 a_{2,1} \rho_2 F_2 - l_1 \frac{2a_{2,1} c_2^2 \rho_2^3 F_2^3}{Q^2(l_0)} \mu \right]^2} \mu =$$

$$= Q(l_0) - 2l_1 a_{2,1} \rho_2 F_2 - l_1 \frac{2a_{2,1} c_2^2 \rho_2^3 F_2^3}{Q^2(l_0)} \mu - 2l_2 a_{2,2} \rho_2 F_2 - \frac{2a_{2,2} c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q(l_0) - 2l_1 a_{2,1} \rho_2 F_2]^2} \mu, \quad l_2 = 20h. \quad (2.3)$$

Если для $Q(l_2)$ учесть асимптотическое разложение (2.3) в целевой функции (1.4) и раскрыть квадратичное выражение, отбросив члены, содержащие множитель μ^2 , то в первом приближении для целевой функции I получим асимптотическое выражение относительно малого параметра μ :

$$I(a_{2,1}, a_{2,2}) = \sum_{j=1}^n \left\{ [Q^j(l_0) - 2l_1 a_{2,1} \rho_2 F_2 - 2l_2 a_{2,2} \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j]^2 - \right.$$

$$\left. - 2[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{2,1} \rho_2 F_2 - 2l_2 a_{2,2} \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j] \left[l_1 \frac{2a_{2,1} c_2^2 \rho_2^3 F_2^3}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{2a_{2,2} c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{2,1} \rho_2 F_2]^2} \right] \mu \right\} + \beta a_{2,1}^2 + \beta a_{2,2}^2. \quad (2.4)$$

Теперь можно вычислить градиент целевой функции (2.4):

$$\frac{\partial I(a_{2,1}, a_{2,2})}{\partial a_{2,1}} = A_1(a_{2,1}, a_{2,2}) + \mu B_1(a_{2,1}, a_{2,2}), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial I(a_{2,1}, a_{2,2})}{\partial a_{2,2}} = A_2(a_{2,1}, a_{2,2}) + \mu B_2(a_{2,1}, a_{2,2}), \quad (2.6)$$

где

$$A_1(a_{2,1}, a_{2,2}) = \sum_{j=1}^n \{ 2[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{2,1} \rho_2 F_2 - 2l_2 a_{2,2} \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j](-2l_1 \rho_2 F_2) \} + 2\beta a_{2,1},$$

$$\begin{aligned}
B_1(a_{2,1}, a_{2,2}) &= \sum_{j=1}^n \left\{ 4l_1 \rho_2 F_2 \left[\frac{2a_{2,1} c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_1}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{2a_{2,2} c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{2,1} \rho_2 F_2]^2} \right] - \right. \\
&- 2[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{2,1} \rho_2 F_2 - 2l_2 a_{2,2} \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j] \left. \left[\frac{2c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_1}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{4a_{2,2} c_2^2 \rho_2^4 F_2^4 l_2 l_1}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{2,1} \rho_2 F_2]^3} \right] \right\}, \\
A_2(a_{2,1}, a_{2,2}) &= \sum_{j=1}^n \{ 2[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{2,1} \rho_2 F_2 - 2l_2 a_{2,2} \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j] (-2l_2 \rho_2 F_2) \} + 2\beta a_{2,2}, \\
B_2(a_{2,1}, a_{2,2}) &= \sum_{j=1}^n \left\{ 4l_2 \rho_2 F_2 \left[\frac{2a_{2,1} c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_1}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{2a_{2,2} c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{2,1} \rho_2 F_2]^2} \right] - \right. \\
&- 2[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{2,1} \rho_2 F_2 - 2l_2 a_{2,2} \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j] \left. \frac{2c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{2,1} \rho_2 F_2]^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Чтобы найти параметры $a_{2,1}, a_{2,2}$, приравняем выражения (2.5) и (2.6) к нулю и получим следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial I(a_{2,1}, a_{2,2})}{\partial a_{2,1}} = A_1(a_{2,1}, a_{2,2}) + \mu B_1(a_{2,1}, a_{2,2}) = 0 \\ \frac{\partial I(a_{2,1}, a_{2,2})}{\partial a_{2,2}} = A_2(a_{2,1}, a_{2,2}) + \mu B_2(a_{2,1}, a_{2,2}) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Введем разложение параметров $a_{2,1}, a_{2,2}$ по степеням малого параметра следующим образом [28]:

$$a_{2,1} = a_{2,1}^0 + \mu a_{2,1}^1 + \dots, \quad a_{2,2} = a_{2,2}^0 + \mu a_{2,2}^1 + \dots \quad (2.8)$$

Теперь примем во внимание разложение (2.8) в выражениях $A_1(a_{2,1}, a_{2,2}), A_2(a_{2,1}, a_{2,2})$:

$$A_1(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0, a_{2,1}^1, a_{2,2}^1) = A_1^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) + \mu A_1^1(a_{2,1}^1, a_{2,2}^1), \quad (2.9)$$

$$A_2(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0, a_{2,1}^1, a_{2,2}^1) = A_2^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) + \mu A_2^1(a_{2,1}^1, a_{2,2}^1), \quad (2.10)$$

где

$$A_1^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) = \sum_{j=1}^n \{ [Q^j(l_0) - 2l_1 a_{2,1}^0 \rho_2 F_2 - 2l_2 a_{2,2}^0 \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j] (-4l_1 \rho_2 F_2) \} + 2\beta a_{2,1}^0,$$

$$A_1^1(a_{2,1}^1, a_{2,2}^1) = 8nl_1^2 \rho_2^2 F_2^2 a_{2,1}^1 + 8nl_1 l_2 \rho_2^2 F_2^2 a_{2,2}^1 + 2\beta a_{2,1}^1,$$

$$A_2^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) = \sum_{j=1}^n \{ [Q^j(l_0) - 2l_1 a_{2,1}^0 \rho_2 F_2 - 2l_2 a_{2,2}^0 \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j] (-4l_2 \rho_2 F_2) \} + 2\beta a_{2,2}^0,$$

$$A_2^1(a_{2,1}^1, a_{2,2}^1) = 8nl_1 l_2 \rho_2^2 F_2^2 a_{2,1}^1 + 8nl_2^2 \rho_2^2 F_2^2 a_{2,2}^1 + 2\beta a_{2,2}^1.$$

Далее, учитывая разложение (2.8) в выражении $B_1(a_{2,1}, a_{2,2})$, запишем

$$\begin{aligned}
B_1(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0, a_{2,1}^1, a_{2,2}^1) &= \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{8l_1^2 a_{2,1}^0 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{8l_1^2 a_{2,1}^1 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4}{(Q^j(l_0))^2} \mu + \frac{2a_{2,2}^0 c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1(a_{2,1}^0 + \mu a_{2,1}^1) \rho_2 F_2]^2} + \right. \\
&+ \frac{2a_{2,2}^1 c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1(a_{2,1}^0 + \mu a_{2,1}^1) \rho_2 F_2]^2} \mu - 2[Q^j(l_0) - 2l_1(a_{2,1}^0 + \mu a_{2,1}^1) \rho_2 F_2 - 2l_2(a_{2,2}^0 + \mu a_{2,2}^1) \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j] \times \\
&\times \left. \left[\frac{2c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_1}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{4a_{2,2}^0 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4 l_2 l_1}{[Q^j(l_0) - 2l_1(a_{2,1}^0 + \mu a_{2,1}^1) \rho_2 F_2]^3} + \frac{4a_{2,2}^1 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4 l_2 l_1}{[Q^j(l_0) - 2l_1(a_{2,1}^0 + \mu a_{2,1}^1) \rho_2 F_2]^3} \mu \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Если третий, четвертый и пятый члены последнего выражения в окрестности параметра $\mu = 0$ линеаризовать и отбросить все члены, содержащие множитель μ^2 , получим

$$B_1(a_{21}^0, a_{22}^0, a_{21}^1, a_{22}^1) = B_1^0(a_{21}^0, a_{22}^0) + \mu B_1^1(a_{21}^0, a_{22}^0, a_{21}^1, a_{22}^1). \quad (2.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_1^0(a_{21}^0, a_{22}^0) &= \sum_{j=1}^n \frac{8l_1^2 a_{21}^0 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{2a_{22}^0 c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^2} - \\ &- 2[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2 - 2l_2 a_{22}^0 \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j] \left[\frac{2c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_1}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{4a_{22}^0 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4 l_2 l_1}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^3} \right], \\ B_1^1(a_{21}^0, a_{22}^0, a_{21}^1, a_{22}^1) &= \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{8l_1^2 a_{21}^1 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{8a_{22}^0 a_{21}^1 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4 l_1 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^3} + \right. \\ &+ \frac{2a_{22}^1 c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^2} - 2[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2 - 2l_2 a_{22}^0 \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j] \times \\ &\times \left[\frac{24a_{22}^0 a_{21}^1 c_2^2 \rho_2^5 F_2^5 l_2 l_1^2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^4} + \frac{4a_{21}^1 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4 l_2 l_1}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^3} \right] + \\ &\left. + 4[l_1 a_{21}^1 \rho_2 F_2 \mu + l_2 a_{22}^1 \rho_2 F_2] \left[\frac{2c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_1}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{4a_{22}^0 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4 l_2 l_1}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^3} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Теперь примем во внимание разложение (2.8) в выражении $B_2(a_{21}, a_{22})$:

$$\begin{aligned} B_2(a_{21}^0, a_{22}^0, a_{21}^1, a_{22}^1) &= \sum_{j=1}^n \left\{ 4l_2 \rho_2 F_2 \left[\frac{2(a_{21}^0 + \mu a_{21}^1) c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_1}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{2(a_{22}^0 + \mu a_{22}^1) c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1(a_{21}^0 + \mu a_{21}^1) \rho_2 F_2]^2} \right] - \right. \\ &\left. - 2[Q^j(l_0) - 2l_1(a_{21}^0 + \mu a_{21}^1) \rho_2 F_2 - 2l_2(a_{22}^0 + \mu a_{22}^1) \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j] \frac{2c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1(a_{21}^0 + \mu a_{21}^1) \rho_2 F_2]^2} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь также второй множитель последнего выражения линеаризуем в окрестности параметра $\mu = 0$ и отбрасываем все члены, содержащие множитель μ^2 :

$$B_2(a_{21}^0, a_{22}^0, a_{21}^1, a_{22}^1) = B_2^0(a_{21}^0, a_{22}^0) + \mu B_2^1(a_{21}^0, a_{22}^0, a_{21}^1, a_{22}^1), \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} B_2^0(a_{21}^0, a_{22}^0) &= \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{8l_1 l_2 a_{21}^0 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{2a_{22}^0 c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^2} - \right. \\ &- 2[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2 - 2l_2 a_{22}^0 \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j] \frac{2c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^2} \left. \right\}, \\ B_2^1(a_{21}^0, a_{22}^0, a_{21}^1, a_{22}^1) &= \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{8l_1 l_2 a_{21}^1 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4}{(Q^j(l_0))^2} + \frac{8a_{22}^0 a_{21}^1 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4 l_1 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^3} + \frac{2a_{22}^1 c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^2} - \right. \\ &- 2[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2 - 2l_2 a_{22}^0 \rho_2 F_2 - \tilde{Q}_2^j] \frac{8a_{21}^1 c_2^2 \rho_2^4 F_2^4 l_2 l_1}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^3} + \\ &\left. + 4[l_1 a_{21}^1 \rho_2 F_2 + l_2 a_{22}^1 \rho_2 F_2 \mu] \frac{2c_2^2 \rho_2^3 F_2^3 l_2}{[Q^j(l_0) - 2l_1 a_{21}^0 \rho_2 F_2]^2} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, если учитывать соотношения (2.9)–(2.12) в системе нелинейных алгебраических уравнений (2.7) и отбросить все члены, содержащие множитель μ^2 , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров $a_{21}^0, a_{21}^1, a_{22}^0, a_{22}^1$:

$$\begin{cases} A_1^0(a_{21}^0, a_{22}^0) + \mu(A_1^1(a_{21}^1, a_{22}^1) + B_1^0(a_{21}^0, a_{22}^0)) = 0, \\ A_2^0(a_{21}^0, a_{22}^0) + \mu(A_2^1(a_{21}^1, a_{22}^1) + B_2^0(a_{21}^0, a_{22}^0)) = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Отсюда если уравнение (2.7) для любого μ верно, то из (2.13) следует

$$\begin{cases} A_1^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) = 0, \\ A_1^1(a_{2,1}^1, a_{2,2}^1) + B_1^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) = 0, \\ A_2^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) = 0, \\ A_2^1(a_{2,1}^1, a_{2,2}^1) + B_2^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Для нахождения параметров $a_{2,1}^0, a_{2,2}^0$ из первого и третьего уравнений системы (2.14) получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} \left(4l_1\rho_2F_2 + \frac{\beta}{nl_1\rho_2F_2}\right) & 4l_2\rho_2F_2 \\ 4l_1\rho_2F_2 & \left(4l_2\rho_2F_2 + \frac{\beta}{nl_2\rho_2F_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2,1}^0 \\ a_{2,2}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n [Q^j(l_0) - \tilde{Q}_2^j] \\ \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n [Q^j(l_0) - \tilde{Q}_2^j] \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Для определения параметров $a_{2,1}^1, a_{2,2}^1$ из второго и четвертого уравнений системы (2.14) запишем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} -(8nl_1^2\rho_2^2F_2^2 + 2\beta) & -8nl_1l_2\rho_2^2F_2^2 \\ -8nl_1l_2\rho_2^2F_2^2 & -(8nl_2^2\rho_2^2F_2^2 + 2\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2,1}^1 \\ a_{2,2}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) \\ B_2^0(a_{2,1}^0, a_{2,2}^0) \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Таким образом, параметры $a_{2,1}^0, a_{2,2}^0$ находятся путем решения уравнения (2.15), параметры $a_{2,1}^1, a_{2,2}^1$ — путем подстановки этих значений в правую часть уравнения (2.16), параметры $a_{2,1}, a_{2,2}$ — с помощью (2.8) находятся в первом приближении по малому параметру μ . Отсюда из соотношения (1.2) можно легко определить коэффициенты гидравлического сопротивления $\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}$.

3. Пример. Остановимся на реализации предложенного метода на примере из [18, 22]. Пусть параметры выражений (0.2)–(0.3) и целевой функции (1.5) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} c_1 &= 331 \text{ m/s}, & \rho_1 &= 0.717 \text{ kg/m}^3 & D_1 &= \sqrt{114^2 - 73^2} \times 10^{-3} \text{ m}, \\ c_2 &= 850 \text{ m/s}, & \rho_2 &= 700 \text{ kg/m}^3, & D_2 &= 0.073 \text{ m}, \\ N &= 11, & h &= 0.1, & u &= 0.21, & n &= 5, & \beta &= 0.1. \end{aligned}$$

Тогда уравнение движения газа и ГЖС внутри подъемника в газлифтном процессе описывается как

$$\begin{aligned} Q(k+1) &= Q(k) + h \frac{(8.7080e-004)Q^2(k)}{(2.0423e-010) - Q^2(k)}, & 0 \leq k \leq N-1, \\ Q(k+1) &= Q(k) + h \frac{0.2993Q^2(k)}{(1.2656e-017) - Q^2(k)}, & N \leq k \leq 2N-1. \end{aligned}$$

Применяя статистические данные в виде

$$\tilde{Q}_{2N}^1 = 1.8873, \quad \tilde{Q}_{2N}^2 = 1.9626, \quad \tilde{Q}_{2N}^3 = 2.3764, \quad \tilde{Q}_{2N}^4 = 2.4298, \quad \tilde{Q}_{2N}^5 = 2.7317,$$

составим целевую функцию (1.5) и после этого из (2.15), (2.16) получим, что

$$\begin{aligned} a_{2,1}^0 &= 8.2229 \times 10^5, & a_{2,1}^1 &= -6.7272 \times 10^{-4}, & a_{2,1} &= 8.2229 \times 10^5, \\ a_{2,2}^0 &= 0, & a_{2,2}^1 &= 6.6580 \times 10^{-10}, & a_{2,2} &= 6.6580 \times 10^{-10}. \end{aligned}$$

КГС в каждом из интервалов (l_0, l_1) и (l_1, l_2) имеет вид

$$\lambda_{2,1} = \frac{D_2}{\omega_2} \left(2a_{2,1} + \frac{g}{\omega_2} \right) = 0.2646, \quad \lambda_{2,2} = \frac{D_2}{\omega_2} \left(2a_{2,2} + \frac{g}{\omega_2} \right) = 3.4752 \times 10^{-12}.$$

Заключение. Таким образом, для глубокой скважины вводится малый параметр, являющийся обратным значением высоты, представляется асимптотический метод определения КГС в первом приближении. Для определения однозначности КГС вводится параметр регуляризации Тихонова, при котором результаты на примере близки к точному решению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дейч А.М. Методы идентификации динамических объектов. М.: Энергия, 1979.
2. Эйксофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1979.
3. Aliev F.A., Ismailov N.A., Mukhtarova N.A. Algorithm to Determine the Optimal Solution of a Boundary Control Problem // Automation and Remote Control. 2015. V. 76. № 4. P. 627–633.
4. Aliev F.A., Ismailov N.A. Inverse Problem to Determine the Hydraulic Resistance Coefficient in the Gaslift Process // Appl. Comput. Math. 2013. V. 12. № 3. P. 306–313.
5. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Askerov I.M., Ragimov I.S. Asymptotic Method of Solution of Optimal Gas-Lift Process Modes // Mathematical Problems in Engineering. 2010. V. 2010. 10 p. ID 191053.
6. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A. Asymptotic Method for Finding the Coefficient of Hydraulic Resistance in Lifting of Fluid on Tubing // J. Inverse and ILL-Posed Problems. 2015. V. 5. P. 511–518.
7. Исмаилов Н.А., Мухтарова Н.С. Метод решения дискретной задачи оптимизации с граничным управлением // Proc. of the Institute of Applied Mathematics. 2013. V. 2. № 1. P. 20–27.
8. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А., Мамедова Е.В., Мухтарова Н.С. Вычислительный алгоритм решения задачи оптимального граничного управления с неразделенными краевыми условиями // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 5. С. 22–33.
9. Sevdimaliyev Y.M., Akbarov S.D., Guliyev H.H., Yahnioglu N. On the Natural Oscillation of an Inhomogeneously Pre-Stressed Multilayered Hollow Sphere Filled With a Compressible Fluid // Applied and Computational Mathematics. 2020. V. 19. № 1. P. 132–146.
10. Gao X.-Y., Guo Y.-J., Shan W.-R. Similarity Reductions for a (3 + 1)-Dimensional Generalized Kadomtsev-Petviashvili Equation in Nonlinear Optics, Fluid Mechanics and Plasma Physics // Applied and Computational Mathematics. 2021. V. 20. № 3. P. 421–429.
11. Альтшуль А.Д. Гидравлические сопротивления. М.: Недра, 1982. 224 с.
12. Aliev F.A., Ismailov N.A., Hasiyev H., Guliev M.F. A Method of Determine the Coefficient of Hydraulic Resistance in Different Areas of Pump Compressor Pipes // TWMS J. Pure and Appl. Math. 2016. V. 7. № 2. P. 211–217.
13. Исмаилов Н.А. Метод определения коэффициента гидравлического сопротивления на разных участках насосно-компрессорных труб // Proc. of the Institute of Applied Mathematics. 2016. V. 5. № 1. P. 133–141.
14. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Об одной задаче идентификации в линейном стационарном случае // Докл. НАН Азербайджана. 2010. Т. 46. № 6. С. 6–14.
15. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Об одном методе линеаризации для нелинейных систем // Мехатроника автоматизация, управление. 2012. Т. 135. № 6. С. 2–6.
16. Rasheed Al-Salih, Martin Bohner. Quadratic Programming Problems on Time Scales // Applied and Computational Mathematics. 2020. V. 19. № 2. P. 205–219.
17. Aliev Fikret A., Aliev N.A., Mutallimov M.M., Namazov A.A. Algorithm for Solving the Identification Problem for Determining the Fractional-Order Derivative of an Oscillatory System // Applied and Computational Mathematics. 2020. V. 19. № 3. P. 415–422.
18. Davis J.C., Sampson R.J. Statistics and Data Analysis in Geology. N.Y., 2002. 656 p.
19. Safarova N.A., Mukhtarova N.S., Ismailov N.A. Algorithm Defining the Hydraulic Resistance Coefficient by Lines Method in Gas-Lift Process // Miskolc Mathematical Notes. 2017. V. 18. № 2. P. 771–777.
20. Nachaoui M., Chakib A., Nachaoui A. An Efficient Evolutionary Algorithm for a Shape Optimization Problem Volume // Applied and Computational Mathematics. 2020. V. 19. № 2. P. 220–244.
21. Qalandarov A.A., Khalidjigitov A.A. Mathematical and Numerical Modeling of the Coupled Dynamic Thermoelastic Problems for Isotropic Bodies // TWMS J. Pure Appl. Math. 2020. V. 11. № 1. P. 119–126.
22. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А., Намазов А.А., Раджабов М.Ф. Асимптотический метод решения задачи идентификации для нелинейных динамических систем // Proc. of the Institute of Applied Mathematics. 2016. V. 5. № 1. P. 84–97.
23. Гаджиева Н.С., Намазов А.А., Аскеров И.М., Магаррамов И.А. Алгоритм решения задачи идентификации для определения параметров дискретных динамических систем // Proc. of the Institute of Applied Mathematics. 2016. V. 5. № 2. P. 235–244.

24. *Hajiyeva N.S.* An Asymptotical Method for Determining the Coefficient of Hydraulic Resistance in Gas-Lift Process by the Lines Method // Proc. of the Institute of Applied Mathematics. 2019. V. 8. № 2. P. 187–195.
25. *Iskenderov N.Sh., Allahverdiyeva S.I.* An Inverse Boundary Value Problem for the Boussinesq-Love Equation with Nonlocal Integral Condition // TWMS J. Pure Appl. Math. 2020. V. 11. № 2. P. 226–237.
26. *Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А.* Моделирование работы газлифтной скважины // Докл. НАНА. 2008. № 4. С. 107–116.
27. *Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б.* Задачи моделирования и оптимальной стабилизации газлифтного процесса // Прикл. механика. 2010. Т. 46. № 6. С. 113–122.
28. *Mitropolskiy Y.A., Samoilenko V.Hr., Matarazzo G.* On Asymptotic Solutions to Delay Differential Equation with Slowly Varying Coefficients // Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications. 2003. V. 52. № 3. P. 971–988.

УДК 531.53

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСКАЧИВАНИИ КАЧЕЛЕЙ СТОЯЩИМ НА НИХ ЧЕЛОВЕКОМ

© 2022 г. Л. А. Климина^{a,*}, А. М. Формальский^{a,**}^a НИИ механики МГУ, Москва, Россия

*e-mail: klimina@imec.msu.ru

**e-mail: formal@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 01.04.2022 г.

После доработки 16.06.2022 г.

Принята к публикации 01.08.2022 г.

В качестве модели качелей рассматривается однозвенный маятник. Расстояние между точкой подвеса качелей и центром масс стоящего на них человека выступает в роли ограниченного управляющего воздействия, а качели с человеком на них представляют собой систему с одной степенью свободы. В виде обратной связи построено оптимальное управление, при котором происходит максимально быстрый рост амплитуды колебаний. Если коэффициент вязкого трения в точке подвеса качелей достаточно велик, то при этом управлении качели асимптотически выходят на стационарный режим колебаний с постоянной амплитудой. Если же коэффициент трения достаточно мал, то колебания качелей переходят во вращение вокруг точки подвеса. Рассматривается и более реалистичная модель качелей – с двумя степенями свободы. В этой модели управлением является сила, которая перемещает центр масс человека вдоль качелей.

DOI: 10.31857/S0002338822060117

Введение. Качели – это механический объект, которым управляет человек. Проблемы управления подобными объектами можно отнести как к теории управления колебаниями, так и к биомеханике. Таким образом, задача синтеза управления качелями представляет интерес с различных точек зрения.

При рассмотрении задачи о синтезе управления раскачиванием качелей следует различать случаи, когда человек раскачивается, *стоя* на них или *сидя*. В каждом из этих случаев приходится исследовать *свою* модель. В статье анализируется задача раскачивания качелей *стоящим* на них человеком. На самом деле, человек, стоящий на качелях, в определенные моменты времени *приседает*, а в другие моменты *встает* и выпрямляется. При этом его центр масс то опускается, то поднимается. Поэтому во многих работах, например [1–8], при рассмотрении задачи о раскачивании качелей человеком, стоящим на них, изучается модель качелей в виде маятника переменной длины. В этом случае в большинстве публикаций при синтезе управления используется подход, при котором длина качелей выбирается в виде периодической функции времени и задача синтеза управления рассматривается как задача *параметрического* возбуждения колебаний. Менее распространен подход, при котором управление строится в виде обратной связи, хотя, как представляется авторам статьи, именно этот подход является естественным для задачи синтеза управления качелями. В виде обратной связи строится управление качелями в [8, 9].

В работе продолжают начатые в [10–12] исследования, посвященные задаче оптимального раскачивания качелей *стоящим* на них человеком. Задача о раскачивании качелей человеком, *сидящим* на них, обсуждается в [13, 14]. В настоящей статье управление строится в виде обратной связи, подобно тому, как это делается в [14] для человека, сидящего на качелях.

Вначале здесь рассматривается нелинейная математическая модель качелей с *одной* степенью свободы. В этой модели управляющим параметром считается *расстояние* материальной точки, расположенной в центре масс человека, от точки подвеса качелей. Раскачивание качелей со стоящим на них человеком происходит именно путем перемещения его центра масс вдоль качелей при приседании и вставании. Для этой модели построено в виде обратной связи оптимальное управление, при котором по окончании каждого полупериода отклонения качелей от

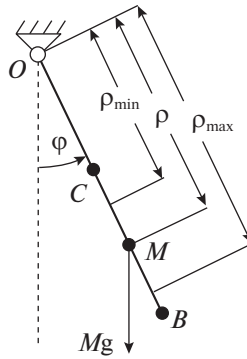


Рис. 1. Модель качелей со стоящим на них человеком

вертикали достигает максимума, а свободный конец качелей в этот момент поднимается на максимально возможную высоту. При таком управлении амплитуда колебаний качелей возрастает максимально быстро. Оптимальное перемещение материальной точки происходит скачкообразно и описывается кусочно-постоянной функцией фазовых переменных.

После модели качелей с одной степенью свободы рассматривается более реалистичная модель качелей – с двумя степенями свободы. В этой модели управляющим параметром является сила, которая прикладывается к центру масс человека. Эта сила призвана отслеживать при помощи сервосистемы оптимальный закон перемещения центра масс, построенный для модели с одной степенью свободы.

В модели качелей с двумя степенями свободы есть только одно управляющее воздействие – сила, приложенная к материальной точке. Шарнир в точке подвеса качелей является пассивным, в нем прикладывается только момент сил вязкого трения. Поэтому в изучаемой здесь системе с двумя степенями свободы количество управляющих воздействий на единицу меньше количества степеней свободы, т.е. имеет место дефицит управляющих воздействий. Для подобных систем с произвольным количеством степеней свободы в [15–17] предложен общий метод поиска оптимального управления амплитудой колебаний по пассивной степени свободы.

1. Математическая модель качелей с человеком на них. На рис. 1 показана схема качелей, представляющих собой маятник OB , в котором O – неподвижная точка подвеса, B – свободный конец. Через φ обозначен угол отклонения маятника от вертикали, C – центр масс маятника, m – его масса, g – ускорение силы тяжести, M – материальная точка, масса которой равна массе человека, эта точка расположена в центре масс человека. Буквой M будем обозначать одновременно и материальную точку, и ее массу, $\rho = OM$ – расстояние от точки подвеса качелей O до точки M , постоянные величины $\rho_{\min} > 0$ и $\rho_{\max} > 0$ – соответственно минимально и максимально возможные расстояния центра масс M от точки подвеса O , т.е.:

$$\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}. \quad (1.1)$$

Будем рассматривать качели как механическую систему с одной степенью свободы, в которой обобщенной координатой является угол φ . Этот угол равен нулю, когда качели висят вертикально вниз, и положителен, когда они отклоняются от этого положения, поворачиваясь против хода часовой стрелки. Расстояние $\rho = OM$ считаем *управляющим* параметром, который ограничен условиями (1.1). Кусочно-непрерывную функцию $\rho(\varphi, \dot{\varphi})$, удовлетворяющую неравенствам (1.1), будем называть допустимым управлением. Множество допустимых управлений обозначим через Ω .

Уравнение движения качелей запишем в виде

$$\frac{d}{dt}[(I + M\rho^2)\dot{\varphi}] = -(M\rho + mb)g\sin\varphi - \chi\dot{\varphi}. \quad (1.2)$$

Здесь I – момент инерции маятника относительно точки подвеса O , $b = OC = \text{const}$, $\chi > 0$ – коэффициент вязкого трения в шарнире O . Обозначим момент количества движения качелей относительно точки O буквой K :

$$K = (I + M\rho^2)\dot{\varphi}. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.2) описывает изменение кинетического момента K , происходящее под влиянием моментов сил тяжести и вязкого трения относительно точки O . Из соотношения (1.3) следует, что $K = 0$ тогда и только тогда, когда $\dot{\varphi} = 0$, и, кроме того, $\text{sign}K = \text{sign}\dot{\varphi}$, поскольку $I + M\rho^2 > 0$ при любом значении ρ .

Уравнения (1.2), (1.3) можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка с неизвестными переменными φ и K :

$$\dot{\varphi} = \frac{K}{I + M\rho^2}, \quad \dot{K} = -(M\rho + mb)g\sin\varphi - \frac{\chi K}{I + M\rho^2}. \quad (1.4)$$

При условии $K \neq 0$, наряду с системой уравнений (1.4), можно рассматривать уравнение

$$\frac{dK}{d\varphi} = -\frac{(M\rho + mb)(I + M\rho^2)g\sin\varphi}{K} - \chi, \quad (1.5)$$

которое описывает движение качелей на фазовой плоскости (φ, K) (или на фазовом цилиндре).

2. Оптимальное управление раскачиванием качелей. Зададим начальное, в момент $t = 0$, состояние системы (1.4) в виде

$$-\pi < \varphi(0) < 0, \quad K(0) = 0 \quad (\dot{\varphi}(0) = 0). \quad (2.1)$$

При начальных условиях (2.1) и допустимом управлении $\rho = \text{const}$ качели, как обычный маятник (с вязким трением в точке подвеса O), вращаются и в некоторый момент времени $\theta > 0$ оказываются в состоянии

$$0 < \varphi(\theta) < \pi, \quad K(\theta) = 0 \quad (\dot{\varphi}(\theta) = 0). \quad (2.2)$$

При этом момент количества движения, а значит, и угловая скорость не обращаются в нуль: $K(t) \neq 0$, $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ ни при каком значении $0 < t < \theta$.

Описанное выше движение качелей представляет собой пример полуколебания, во время которого они поворачиваются из одного состояния, когда кинетический момент $K(0) = 0$ ($\dot{\varphi}(0) = 0$), в другое, когда кинетический момент, а значит, и угловая скорость в *следующий* раз снова обращаются в нуль. В действительности, каждое полуколебание качелей, его размах, длительность зависят от управления $\rho(t)$.

Целью управления качелями является их раскачивание. Это означает, что требуется построить допустимое управление как функцию времени $\rho = \rho(t)$ или как функцию фазовых координат $\rho = \rho(\varphi, \dot{\varphi})$, при котором амплитуда колебаний качелей возрастает.

Допустим, что начальные условия (2.1), параметры системы (1.4), в том числе коэффициент вязкого трения χ , ограничения ρ_{\min} , ρ_{\max} , наложенные на управление ρ (см. неравенства (1.1)), таковы, что ни при каком управлении $\rho(t) \in \Omega$ соответствующая фазовая траектория не попадает в область

$$\pi < \varphi < 2\pi, \quad K > 0 \quad (\dot{\varphi} > 0). \quad (2.3)$$

Другими словами, качели не могут пройти через верхнее положение $\varphi = \pi$ и тем самым совершить ротацию (переворот). В этом случае при всяком управлении $\rho(t) \in \Omega$ траектория движения качелей, начинающаяся из состояния (2.1), попадает в область

$$0 < \varphi < \pi, \quad K > 0 \quad (\dot{\varphi} > 0), \quad (2.4)$$

и в течение какого-то времени остается в области (2.4). При этом свободный конец B качелей в течение некоторого времени поднимается вверх, т.е. $\dot{\varphi}(t) > 0$. В какой-то момент времени $t = \theta$ качели “на мгновение замирают”, т.е. при $t = \theta$ угловая скорость $\dot{\varphi}(t)$ обращается в нуль — $\dot{\varphi}(\theta) = 0$, поскольку траектория движения, по предположению, не может попасть в область (2.3). Затем при $t \geq \theta$ качели начинают и в течение некоторого времени продолжают вращаться в другую сторону — по ходу часовой стрелки.

Таким образом, при $t = \theta$ угол φ достигает локального максимума. Высота подъема конца B качелей в этот момент $t = \theta$ также достигает своего локального максимума. Движение качелей в течение времени $0 \leq t \leq \theta$ является *полуколебанием*.

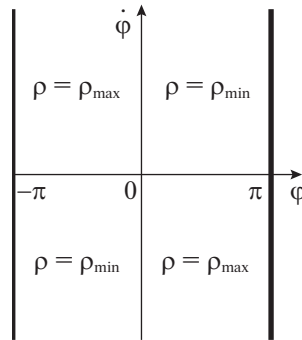


Рис. 2. Картина синтеза оптимального управления $\rho = \rho(\varphi, \dot{\varphi})$ на развертке фазового цилиндра

Поставим теперь задачу синтеза *оптимального* управления $\rho = \rho(\varphi, \dot{\varphi})$ раскачиванием качелей следующим образом. Пусть задано начальное при $t = 0$ состояние (2.1) системы. Требуется найти управление $\rho(\varphi, \dot{\varphi}) \in \Omega$, при котором достигается максимум угла $\varphi(t)$, в момент времени $t = \theta > 0$, когда кинетический момент $K(t)$, а следовательно, и скорость $\dot{\varphi}(t)$ обращаются в нуль. Причем момент $t = \theta$ является *первым* после момента $t = 0$, когда эти величины обращаются в нуль. Сформулированную задачу запишем символически таким образом:

$$\text{Найти: } \arg \max_{\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}} [\varphi(\theta) | K(\theta) = 0, \theta > 0]. \quad (2.5)$$

Другими словами, задача (2.5) состоит в отыскании *оптимального* управления, при котором по окончании полуколебания, начинающегося из состояния (2.1), свободный конец B качелей поднимается на *максимально* возможную высоту.

Рассматривая уравнение (1.5), нетрудно убедиться в том, что управление, решающее задачу (2.5), должно максимизировать производную при каждом текущем значении угла [11, 12, 14]. Пользуясь формулой (1.5) для производной, находим оптимальное управление

$$\begin{aligned} \rho = \rho(\varphi, \dot{\varphi}) &= \arg \max_{\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}} \frac{dK}{d\varphi} = \arg \max_{\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}} \left[-\frac{(M\rho + mb)(I + M\rho^2)g\sin\varphi}{K} - \chi \right] = \\ &= \begin{cases} \rho_{\max} & \text{при } \sin\varphi/K < 0 \\ \rho_{\min} & \text{при } \sin\varphi/K \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \rho_{\max} & \text{при } \dot{\varphi}\sin\varphi < 0, \\ \rho_{\min} & \text{при } \dot{\varphi}\sin\varphi \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6)$$

При выводе формулы (2.6) используется следующее равенство, вытекающее из соотношения (1.3):

$$\text{sign}\left(\frac{\sin\varphi}{K}\right) = \text{sign}\left[\frac{\sin\varphi}{(I + M\rho^2)\dot{\varphi}}\right] = \text{sign}(\dot{\varphi}\sin\varphi).$$

Картина синтеза управления (2.6) показана на рис. 2.

Заметим, что задача максимизации позиционной координаты в момент, когда ее производная обращается в нуль, рассматривается для систем второго порядка в [18]. В монографии [1] исследуется задача раскачивания качелей стоящим на них человеком. При этом считается *известным* из наблюдений, что человек встает на качелях, когда их свободный конец B проходит через низшую точку, и приседает, когда этот конец B оказывается на максимально возможной высоте. Однако в [1] не решается описанная выше или какая-нибудь другая задача оптимальности и не объясняется, почему человек ведет себя на качелях указанным образом.

Выражение (2.6) для оптимального управления $\rho(\varphi, \dot{\varphi})$ означает, что при условии

$$\dot{\varphi}\sin\varphi < 0 \quad (2.7)$$

центр масс человека M должен находиться на максимально возможном расстоянии ρ_{\max} от точки подвеса O , т.е. человек должен присесть на качелях. В этом случае момент силы тяжести, прило-

женный к качелям, будет максимальным и они, начав свое движение из состояния (2.1), достигнут в некоторый момент времени своего нижнего положения

$$\varphi = 0. \quad (2.8)$$

Когда траектория системы (1.4) пересекает прямую (2.8), неравенство (2.7) меняется на противоположное:

$$\dot{\varphi} \sin \varphi > 0. \quad (2.9)$$

В соответствии с формулой (2.6) расстояние ρ при условии (2.9) должно стать минимальным — $\rho = \rho_{\min}$, т.е. человек должен встать на качелях в полный рост. При мгновенном уменьшении расстояния ρ кинетический момент K , как следует из уравнений (1.2), (1.3), остается без изменения. Что касается момента инерции $I + M\rho^2$, то он мгновенно уменьшается с максимально возможного значения $I + M\rho_{\max}^2$ до минимально возможного $I + M\rho_{\min}^2$. Из соотношения (1.3) вытекает, что в это мгновение угловая скорость $\dot{\varphi}$ скачкообразно увеличивается и приобретает значение

$$\dot{\varphi} = \frac{K}{I + M\rho_{\min}^2}. \quad (2.10)$$

Заметим также, что после этого мгновения во время подъема качелей уменьшается (по абсолютной величине) до минимально возможного значения и направленный по ходу часовой стрелки момент силы тяжести — момент, который препятствует дальнейшему повороту качелей против хода часовой стрелки и тем самым достижению их свободным концом B максимально возможной высоты по окончании этого полуколебания.

Нетрудно проверить, что при вращении качелей в противоположном направлении, т.е. по ходу часовой стрелки, расстояние ρ будет меняться в той же последовательности, как и при вращении против хода часовой стрелки. В соответствии с законом управления (2.6) в тот момент времени, когда угловая скорость качелей $\dot{\varphi}$ обращается в нуль, центр тяжести человека M должен мгновенно переместиться от точки подвеса качелей O на максимальное расстояние, т.е. человек должен присесть, увеличив (по абсолютной величине) приложенный к качелям момент силы тяжести до максимального. Иначе говоря, в начале движения по ходу часовой стрелки будет иметь место равенство $\rho = \rho_{\max}$, затем после прохождения качелями низшего положения — равенство $\rho = \rho_{\min}$. При таком управлении по окончании второго полуколебания конец B качелей также поднимется на максимально возможную в этом полуколебании высоту.

Легко убедиться в том, что при управлении (2.6) свободный конец B качелей достигает максимально возможной высоты не только по окончании каждого полуколебания, но также и по окончании каждого *полного колебания*. Более того, при этом управлении максимально возможная высота достигается после каждых n колебаний, где n — произвольное целое число. Тем самым если начальные условия таковы, что при управлении (2.6) амплитуда колебаний возрастает, то можно утверждать, что при этом происходит *максимально быстрый рост* амплитуды. Если же амплитуда колебаний убывает, то это происходит наиболее медленно.

Управление, при котором свободный конец B качелей по окончании каждого полуколебания оказывается на *минимально* возможной высоте, получается путем замены знаков неравенств в формуле (2.6) на противоположные. При таком управлении происходит максимально быстрое *гашение* колебаний качелей.

3. Численные исследования системы с одной степенью свободы. Предположим, что маятник представляет собой однородный стержень и рассмотрим следующие значения параметров системы (1.4):

$$M = 40 \text{ кг}, \quad m = 4 \text{ кг}, \quad b = 1 \text{ м}, \quad I = 4/3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad \rho_{\min} = 1.2 \text{ м}, \quad \rho_{\max} = 1.45 \text{ м}. \quad (3.1)$$

На рис. 3,а показано решение $\varphi(t)$ системы (1.4) при управлении (2.6), значениях параметров (3.1), коэффициенте $\chi = 30 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ вязкого трения в точке подвеса O и начальных условиях $\varphi(0) = 0.5$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. Из рассмотрения рис. 3,а следует, что амплитуда колебаний качелей монотонно возрастает и при $t \rightarrow \infty$ стремится к постоянной величине, т.е. движение качелей выходит на стационарный режим. Соответствующая фазовая траектория стремится к предельному циклу, изображенному на рис. 3,б.

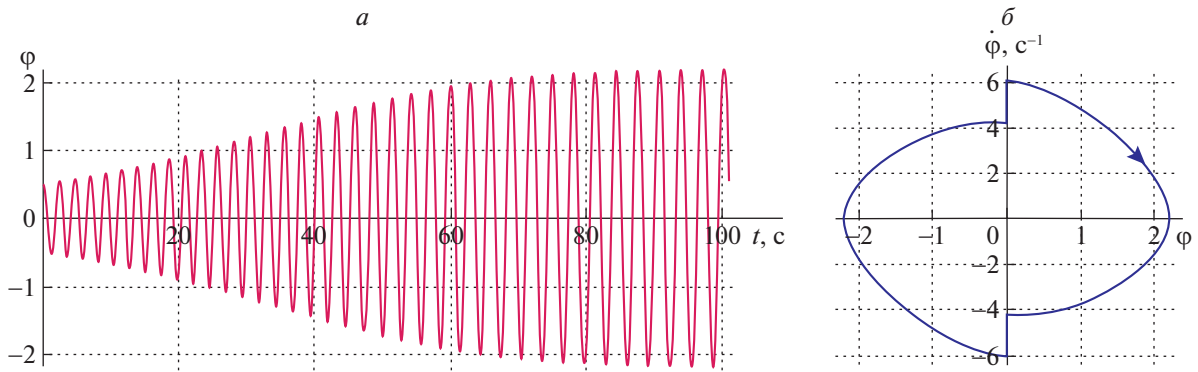


Рис. 3. Пример переходного процесса и установившихся колебаний в случае относительно большого коэффициента вязкого трения в оси подвеса качелей

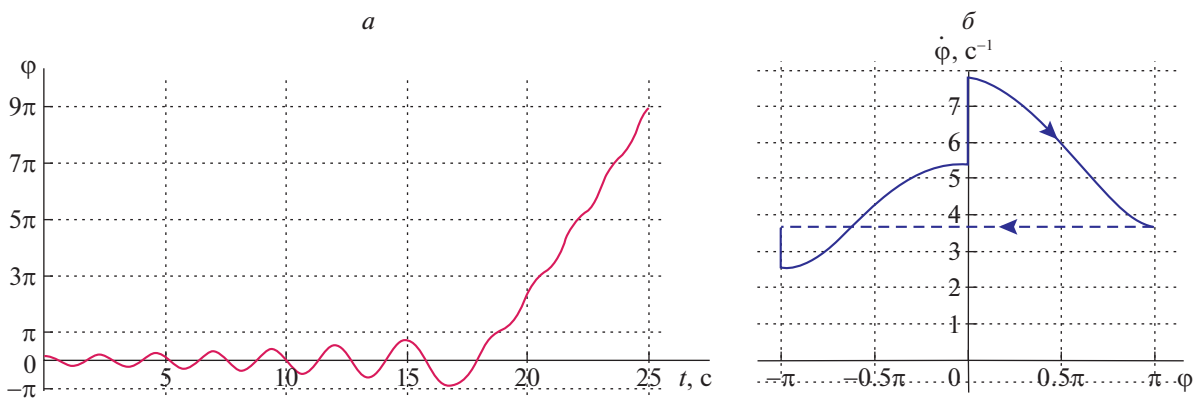


Рис. 4. Пример переходного процесса и установившихся ротаций в случае относительно небольшого коэффициента вязкого трения в оси подвеса качелей

На рис. 4,*a* показано решение $\varphi(t)$ при тех же значениях параметров и начальных условиях, что и на рис. 3,*a*, за исключением величины коэффициента вязкого трения χ , который в отличие от предыдущего случая принимает значение $\chi = 20 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. Соответствующая фазовая траектория стремится к изображенному на рис. 4,*б* предельному циклу, охватывающему цилиндр. Пунктир на развертке фазового цилиндра соответствует формальному уменьшению угла φ на 2π при переходе маятника через верхнее положение. В этом примере вращение качелей происходит против хода часовой стрелки.

Таким образом, численные исследования показывают, что если коэффициент вязкого трения χ достаточно велик, то качели при построенном управлении (2.6) колеблются. При $t \rightarrow \infty$ траектория, отвечающая этим колебаниям, стремится к орбитально асимптотически устойчивому циклу. Если же коэффициент вязкого трения не слишком велик, то качели при управлении (2.6) выходят на ротационное движение. При $t \rightarrow \infty$ это движение стремится к орбитально асимптотически устойчивому вращению с постоянным периодом.

Заметим, что в [1] не рассматривается режим ротации качелей вокруг их точки подвеса.

4. Математическая модель качелей с двумя степенями свободы. При составлении математической модели (1.4) предполагается, что расстояние ρ от точки подвеса качелей O до материальной точки M (центра масс человека) является управляющим параметром. Допустимым считается, что управляющая функция может претерпевать разрывы. Найденное оптимальное управление (2.6) действительно изменяется скачкообразно. Однако человек, стоящий на качелях, приседая и вставая, развивает ограниченные по величине усилия, при которых перемещение его центра масс (материальной точки M) происходит непрерывно. Поэтому в настоящем параграфе, в отличие от предыдущих, поведение качелей моделируется системой с двумя степенями свободы. При

этом одной из обобщенных координат остается, как и в уравнениях (1.4), угол φ , а другой координатой становится расстояние ρ . Используя уравнение (1.2), можно получить следующую математическую модель системы с двумя степенями свободы:

$$(J + M\rho^2)\ddot{\varphi} = -2M\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} - (M\rho + mb)g \sin \varphi - \chi\dot{\varphi}, \quad (4.1)$$

$$M\ddot{\rho} = M(\rho\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi) + F_c + F_\rho + \Delta F_\rho. \quad (4.2)$$

Будем строить управляющие силы F_c , F_ρ и ΔF_ρ так, чтобы функция $\rho(t)$, полученная при решении уравнений (4.1), (4.2), была, по возможности, близкой к кусочно-непрерывной функции времени, полученной при помощи управления (2.6).

Пусть сила F_c компенсирует центробежную силу $M\rho\dot{\varphi}^2$ и проекцию $Mg \cos \varphi$ силы тяжести, приложенные к центру масс человека:

$$F_c = -M(\rho\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi). \quad (4.3)$$

Управляющую силу F_ρ выберем в виде линейной обратной связи по разности $\rho - \rho_{\text{prog}}$ и ее производной $\dot{\rho}$ с постоянными коэффициентами $c_1, c_2 = \text{const}$ и ограничением $F_{\rho 0} = \text{const}$:

$$F_\rho = \begin{cases} -F_{\rho 0} & \text{при } -c_1(\rho - \rho_{\text{prog}}) - c_2\dot{\rho} < -F_{\rho 0}, \\ -c_1(\rho - \rho_{\text{prog}}) - c_2\dot{\rho} & \text{при } |-c_1(\rho - \rho_{\text{prog}}) - c_2\dot{\rho}| \leq F_{\rho 0}, \\ F_{\rho 0} & \text{при } -c_1(\rho - \rho_{\text{prog}}) - c_2\dot{\rho} > F_{\rho 0}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Программное значение ρ_{prog} определим в соответствии с выражением (2.6):

$$\rho_{\text{prog}} = \begin{cases} \rho_{\text{max}} & \text{при } \dot{\varphi} \sin \varphi < 0, \\ \rho_{\text{min}} & \text{при } \dot{\varphi} \sin \varphi \geq 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Обратная связь, описываемая выражением (4.4), призвана отслеживать изменение во времени программной величины ρ_{prog} , вычисляемой по формуле (4.5).

Силу ΔF_ρ выберем в виде

$$\Delta F_\rho = \begin{cases} k_S(\rho_{\text{max}} - \rho) & \text{при } \rho > \rho_{\text{max}}, \\ 0 & \text{при } \rho_{\text{min}} \leq \rho \leq \rho_{\text{max}}, \\ k_S(\rho_{\text{min}} - \rho) & \text{при } \rho < \rho_{\text{min}}, \end{cases} \quad (4.6)$$

для того чтобы вместе с силой F_ρ , по возможности, минимизировать время, в течение которого происходит нарушение неравенств (1.1). С этой целью коэффициент k_S выберем “большим”. При этом выражения $k_S(\rho_{\text{max}} - \rho)$ и $k_S(\rho_{\text{min}} - \rho)$ описывают силы, развиваемые как бы односторонними “жесткими” пружинами. Когда неравенства (1.1) нарушаются, эти силы стремятся вернуть величину ρ в диапазон (1.1). Перемещения центра масс человека вдоль качелей происходят благодаря усилиям, развиваемым в его коленных и тазобедренных суставах. В силу анатомических свойств человека углы в его суставах могут изменяться лишь в ограниченных пределах. Эти ограничения реализуются, в частности, связками, сухожилиями, которые могут развивать большие усилия. Равенство (4.6) можно трактовать как модель сил, развиваемых в суставах человека. Модель такого вида рассматривается в работах [14, 19].

Таким образом, математическая модель системы с двумя степенями свободы состоит из уравнений (4.1)–(4.6).

Предположим, что имеют место неравенства (1.1), тогда в соответствии с равенством (4.6) сила $\Delta F_\rho = 0$. Подставив в уравнение (4.2) выражение (4.3), а также среднюю строчку из формулы (4.4), получим дифференциальное уравнение

$$M\ddot{\rho} + c_2\dot{\rho} + c_1(\rho - \rho_{\text{prog}}) = 0. \quad (4.7)$$

В соответствии с выражением (4.5) величина ρ_{prog} принимает постоянное значение ρ_{max} или ρ_{min} . Если $\rho_{\text{prog}} = \text{const}$, то линейное дифференциальное уравнение (4.7) имеет стационарное решение:

$$\rho = \rho_{\text{prog}} = \text{const}. \quad (4.8)$$

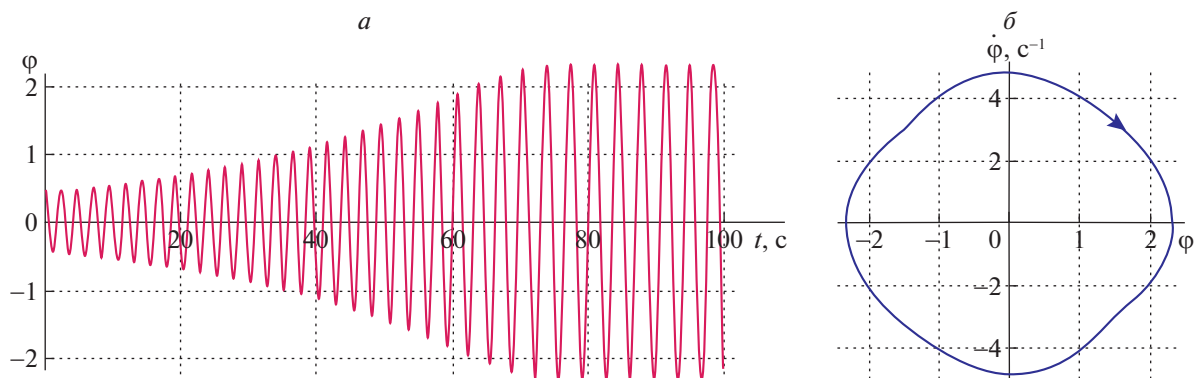


Рис. 5. Пример переходного процесса и установившихся колебаний в системе (4.1), (4.2) в случае относительно большого коэффициента вязкого трения в оси подвеса качелей

Для того, чтобы решение (4.8) было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты c_1 и c_2 характеристического уравнения

$$M\lambda^2 + c_2\lambda + c_1 = 0 \quad (4.9)$$

были положительными. При изменении величины ρ_{prog} со значения ρ_{max} на значение ρ_{min} и наоборот в решениях уравнения (4.7) возникают переходные процессы. Желательно, чтобы эти переходные процессы были аperiодическими и, по возможности, короткими. Процессы будут аperiодическими, если корни характеристического уравнения (4.9) действительные, т.е. при условии

$$c_2^2 \geq 4Mc_1. \quad (4.10)$$

5. Численные исследования системы с двумя степенями свободы. Пусть в системе (4.1), (4.2) с параметрами (3.1) действует управление вида (4.3)–(4.6) с коэффициентами

$$c_1 = 15000 \text{ кг/с}^2, \quad c_2 = 2000 \text{ кг/с}, \quad F_{\rho 0} = 50 \text{ Н}, \quad k_S = 10^5 \text{ кг/с}^2. \quad (5.1)$$

Отметим, что при значениях параметров (3.1), (5.1) неравенство (4.10) выполняется.

На рис. 5,а иллюстрируется процесс раскачивания качелей с начальными условиями $\varphi(0) = 0.5$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ (как и в разд. 3), $\rho(0) = 1.2 \text{ м}$, $\dot{\rho}(0) = 0$ при значении $\chi = 8 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ коэффициента вязкого трения. Амплитуда колебаний монотонно возрастает и стремится к постоянной величине, т.е. система выходит на стационарный режим. В фазовом пространстве этому режиму соответствует орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл, проекция которого на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$ представлена на рис. 5,б.

Отметим, что амплитуда установившихся колебаний близка к амплитуде колебаний, показанных на рис. 3,а. Такая близость амплитуд достигается путем подбора значения коэффициента вязкости χ . Причем этот коэффициент оказывается в несколько раз меньше, чем в случае, рассмотренном в разд. 3. Дело в том, что в системе (4.1), (4.2) с управлением (4.3)–(4.6) учитывается динамика перемещения центра масс M , наложены дополнительные ограничения на управление и в результате описываемое формулой (4.5) программное положение ρ_{prog} точки M не точно отслеживается сервосистемой.

На рис. 6 для одного полного колебания в установившемся режиме иллюстрируется изменение положения центра масс M человека и для сравнения пунктиром показана функция ρ_{prog} , а также построено суммарное управляющее воздействие $F = F_c + F_\rho + \Delta F_\rho$.

На рис. 7,а иллюстрируется процесс раскачивания с начальными условиями $\varphi(0) = 0.5$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ (как и в предыдущих примерах) при значении $\chi = 4 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. В этом случае качели выходят на установившийся ротационный режим, которому соответствует орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл. Этот цикл спроектирован на полосу $-\pi \leq \varphi < \pi$ фазовой плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ и показан на рис. 7,б. В этом примере вращение качелей происходит по ходу часовой стрелки.

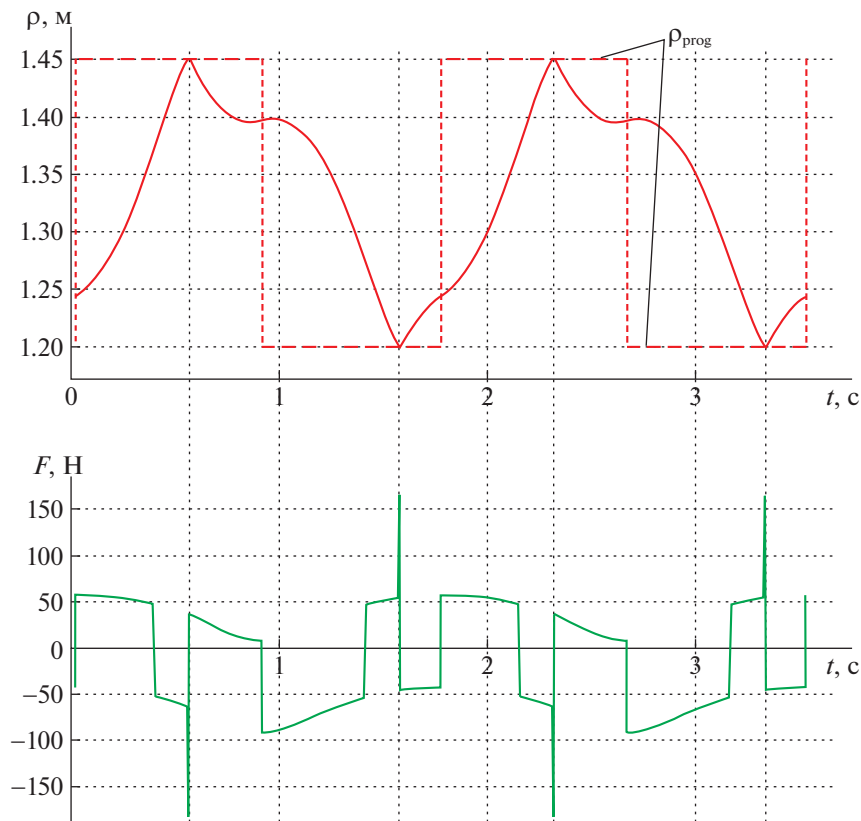


Рис. 6. Отслеживание программного положения ρ_{prog} точки M и приложенное для этого суммарное управляющее воздействие F

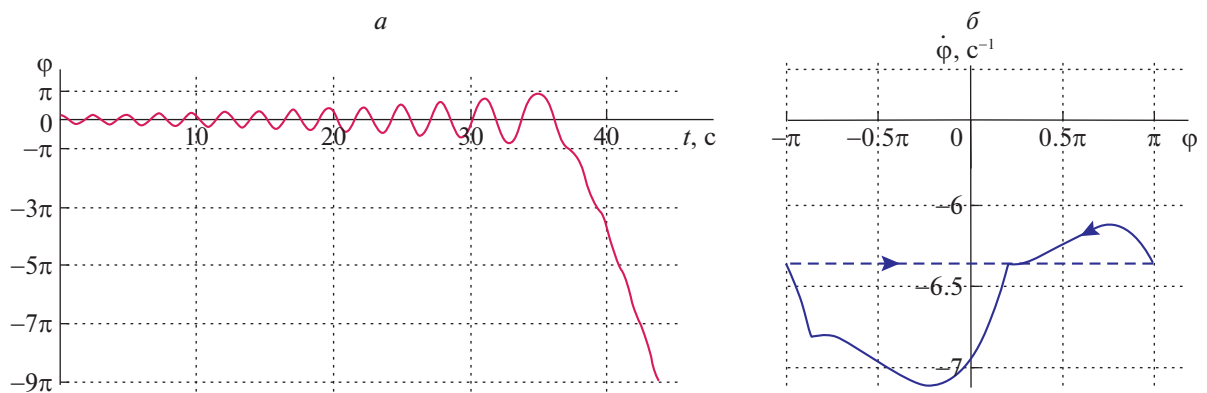


Рис. 7. Пример переходного процесса и установившихся ротаций в системе (4.1), (4.2) в случае относительно небольшого коэффициента вязкого трения в оси подвеса качелей

Итак, построенное управление (4.3)–(4.6) решает задачу раскачивания качелей. При относительно небольшом коэффициенте трения (а также при нулевом) качели выходят на установившийся ротационный режим. При относительно большом трении качели выходят на режим установившихся колебаний. Если же трение слишком велико, то качели совершают затухающие колебания, несмотря на приложенное управляющее воздействие. Интересно отметить, что в некотором диапазоне параметров существуют и колебательный, и ротационный установившиеся режимы: система выходит на один из них в зависимости от начальных условий.

Заключение. Исследуется модель качелей, которые раскачивает стоящий на них человек. Учитываются силы вязкого трения, действующие в точке подвеса качелей. Механическая модель си-

стемы имеет одну степень свободы. Математическая модель системы содержит два нелинейных дифференциальных уравнения первого порядка. В качестве управляющего воздействия рассматривается расстояние между точкой подвеса качелей и центром масс человека. Это расстояние может меняться в некоторых пределах, которые определяются положениями центра масс, когда человек стоит на качелях в полный рост и когда он приседает на них. Построен оптимальный закон управления, при котором свободный конец качелей поднимается на максимально возможную высоту по окончании каждого полуколебания и каждого *полного* колебания. Численные исследования показывают, что в случае достаточно большого трения в точке подвеса движение качелей при построенном управлении стремится к орбитально асимптотически устойчивому режиму колебаний с постоянной амплитудой. Амплитуда колебаний, как следует из теоретических результатов, возрастает с максимально возможной скоростью. В случае достаточно малого трения движение качелей стремится к орбитально асимптотически устойчивому режиму ротаций с постоянным периодом. Построен также закон управления, обеспечивающий максимально быстрое гашение колебаний качелей.

Наряду с моделью, которая имеет одну степень свободы, исследуется и более реалистичная модель – с двумя степенями свободы. В ней, кроме угла отклонения качелей от вертикали, в качестве обобщенной координаты выступает также расстояние между точкой подвеса и центром масс человека (в модели с одной степенью свободы это расстояние – управляющий параметр). Управлением является сила, приложенная к центру масс человека и направленная вдоль качелей. В этой модели при помощи сервосистемы отслеживается оптимальное изменение расстояния между точкой подвеса и центром масс человека, найденное теоретически для модели с одной степенью свободы. При численных исследованиях так же, как и в модели с одной степенью свободы, построены режимы колебаний и ротаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Магнус К. Колебания. Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир, 1982. 304 с.
2. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
3. Чечурин С.Л. Параметрические колебания и устойчивость периодического движения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 219 с.
4. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 366 с.
5. Curry S.M. How Children Swing // American J. Physics. 1976. V. 44. № 10. P. 924–926.
6. Case W.B. The Pumping of a Swing from the Standing Position // American J. Physics. 1996. V. 64. № 3. P. 215–220.
7. Сейранян А.П. Качели. Параметрический резонанс // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 5. С. 847–856.
8. Зевин А.А., Филоненко Л.А. Качественное исследование колебаний маятника с периодически меняющейся длиной и математическая модель качелей // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 6. С. 989–1003.
9. Wirkus S., Rand R., Ruina A. How to Pump a Swing // The College Mathematics J. 1998. V. 29. № 4. P. 266–275.
10. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Оптимальное управление раскачиванием и торможением качелей // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 92–101.
11. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. М.: Наука, 2012. 230 с.
12. Formalskii A.M. Stabilisation and Motion Control of Unstable Objects. Berlin, Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2015. 250 p.
13. Case W.B., Swanson M.F. The Pumping of a Swing from the Seated Position // American J. Physics. 1990. V. 58. № 5. P. 463–467.
14. Климина Л.А., Формальский А.М. Трехзвенный механизм как модель человека на качелях // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 5. С. 89–105.
15. Голубев Ю.Ф. Метод оптимального управления колебаниями механических систем // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 33. С. 1–37.
16. Golubev Yu.F. Optimal Control for Nonlinear Oscillations of Natural Mechanical Systems // Lobachevskii Journ. of Mathematics. 2021. V. 42. № 11. P. 2596–2607.
17. Голубев Ю.Ф. Оптимизация колебаний механических систем // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 502. С. 52–57.
18. Александров В.В., Жермоленко В.Н. Об абсолютной устойчивости систем второго порядка // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1972. № 5. С. 102–108.
19. Wismans J.A.C., Veldpaus F., Janssen J., Huson A., Struben P. A Three-Dimensional Mathematical Model of the Knee-Joint // J. Biomechanics. 1980. V. 13. № 8. P. 677–685.

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

УДК 519.852

**МАТРИЦА НЕЧЕТКИХ КОРРЕСПОНДЕНЦИЙ МОДЕЛИ
АВИАЦИОННЫХ ПЕРЕВОЗОК¹****© 2022 г. В. А. Нестеров^{a,*}, В. А. Судаков^{a,b,c,**},
К. И. Сыпало^{d,***}, Ю. П. Титов^{c,****}**^a МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия^b ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия^c ФГБОУ ВО РЭУ им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия^d Центральный аэрогидродинамический ин-т им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия

*e-mail: nesterov46@inbox.ru

**e-mail: sudakov@ws-dss.com

***e-mail: ksypalo@tsagi.ru

****e-mail: kalengul@mail.ru

Поступила в редакцию 25.04.2022 г.

После доработки 15.05.2022 г.

Принята к публикации 30.05.2022 г.

Предложен новый метод поддержки принятия решений при планировании авиaperезовок с использованием неопределенностей в форме нечетких чисел. Он позволяет определить такие изменения транспортного графа, чтобы они в большей мере соответствовали текущим потребностям населения и доступному парку воздушных судов. Это особенно актуально в условиях существенной трансформации транспортных потоков и доступных типов летательных аппаратов в современных реалиях. Задача решается путем восстановления нечеткой матрицы корреспонденций по данным об авиaperезовках за предыдущие периоды. Часто неизвестно, какая часть пассажиров перемещается между заданными пунктами вынуждено, используя в качестве промежуточных крупные транспортные хабы. Для определения истинной матрицы корреспонденций строится ряд оптимизационных моделей определения функции принадлежности нечеткого числа перевезенных пассажиров. Создано алгоритмическое и программное обеспечение поиска нечетких корреспонденций и нечеткого ранжирования потенциально перспективных маршрутов. Возможности метода показаны на примере задачи выбора новых маршрутов между аэропортами.

DOI: 10.31857/S0002338822060154

Введение. Эффективность современных авиатранспортных систем во многом обеспечивается не только возможностями конкретных моделей воздушных судов, но и рациональным подходом к планированию и управлению комплексами авиационного транспорта. Создание интеллектуальных решений по стратегическому планированию транспортных потоков и систем поддержки принятия оперативных решений в логистике обеспечивает достижение целей по занятию лидерских позиций в освоении и использовании воздушного пространства, Мирового океана, Арктики и Антарктики. Для повышения связанности территории Российской Федерации, в силу больших расстояний и большого количества малых населенных пунктов с плохой дорожной инфраструктурой, необходимо решать высокоразмерные задачи планирования авиатранспортных потоков.

Моделирование транспортных потоков и оценка результатов моделирования затрудняется существенной долей неопределенных факторов. Это и пандемии, и фундаментальные изменения в экономике, и непрогнозируемые политические и военные изменения. Вероятностные оценки этих неопределенностей не всегда возможны в силу уникальностей ситуаций, отсутствия необходимых статистических данных.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г.В. Плеханова».

Первоочередной задачей, с которой приходится сталкиваться при создании транспортных моделей, выступает формирование матрицы корреспонденций (origin–destination matrix). Данная задача обычно решается классическими способами, предложенными исследователями для автомобильного транспорта, – это методы на базе гравитационной и энтропийной моделей [1]. В гравитационной модели ищется аналогия между классическими физическими силами притяжения масс и притяжением людей к определенным районам проживания или работы [2]. Однако применение такого подхода к авиационным перевозкам вызывает сомнения. Для перемещения в городе естественно считать, что притяжение к легкодоступным районам больше, но на больших расстояниях работают другие критерии. Нет оснований считать, что популярность курортного города имеет обратную квадратичную зависимость от затрат на его посещение. Другим критерием определения корреспонденций является использование подхода на базе максимизации энтропии, что соответствует попытке найти аналогию с термодинамикой, когда система пытается прийти в равновесное состояние с максимальной энтропией [3]. Для “условно хаотического” движения машин, возможно, такие соображения и справедливы, но в авиационных перевозках мы сталкиваемся с большей “регулярностью”, которая обусловлена системой ценностей авиакомпаний и регулирующих органов. Часто матрицу корреспонденций находят путем проведения маркетинговых опросов, но подобные опросы затрагивают ограниченный круг лиц.

В авиации есть подробная статистика по авиационным перевозкам между отдельными аэропортами. В России в форме “Сведения об объемах перевозок между пунктами полета” (код формы N 14-ГА утвержден Росстатом), в США (в T-100 базе данных) эти данные собираются ежемесячно авиационными властями. Однако по ним нельзя определить, сколько пассажиров вынуждены лететь транзитом. Для определенного процента пассажиров можно использовать данные посадочных купонов, но обычно это закрытая и/или сильно зашумленная информация, кроме того, подобная выборка не является полной [4]. Классические методы для решения данной задачи хоть и дают ответ, но не позволяют оценить степень неопределенности этого ответа.

В работе предлагается новый метод получения нечетких оценок корреспонденций путем формализации и решения ряда оптимизационных задач линейного программирования. Этот метод позволяет осуществлять поддержку принятия решений по совершенствованию транспортной инфраструктуры с учетом возможной степени неопределенности ситуации и хорошо масштабируется при программной реализации на современных вычислительных комплексах.

1. Постановка задачи. Пусть дан связный ориентированный граф. Для каждой дуги известен поток в заданную единицу времени: для текущей прикладной задачи авиационного транспорта – это число пассажиров в месяц между заданными аэропортами, вершины графа – это аэропорты. Требуется найти матрицу корреспонденций между вершинами графа: сколько человек переместились между заданными вершинами.

Введем обозначения: $D = \{d\}$ – множество дуг графа, x_{ij} – число пассажиров в месяц, переместившихся из аэропорта i в аэропорт j ($x_{ij} \geq 0$). Между пунктами i и j может не быть прямого маршрута, поэтому x_{ij} – это суммарный поток из i в j по всем маршрутам за месяц. Если $i = j$, то $x_{ij} = 0$ и V_d – известный нам поток по дуге d .

Решение задачи должно удовлетворять системе уравнений

$$\sum_i \sum_j p_{ij}^d x_{ij} = V_d, \quad \forall d \in D, \quad (1.1)$$

где p_{ij}^d – доля потока из вершины i в вершину j , которая использует дугу d . Величины p_{ij}^d известны, они определяются экономической целесообразностью и комфортностью использования дуги d в маршруте из вершины i в вершину j . Применительно к авиаперевозкам целесообразность – это стоимость авиабилетов и временная продолжительность маршрута. Стоимость авиабилетов – первый критерий, а временная продолжительность маршрута – второй критерий. Простейший вариант определения долей состоит в следующем: необходимо взять оптимальные по Парето маршруты и разделить доли между ними. Возможны и другие критерии – надежность авиакомпании на данном маршруте, риски при перелете и т.д. Выбор и детальный анализ этих критериев не является темой данной статьи. Более точное решение для определения долей p_{ij}^d в случае большого количества недоминируемых альтернатив – это использование методов многокритериального анализа, в том числе метода нечетких областей предпочтений, предложенного авторами [5].

2. Метод решения. Вышеуказанная система из $|D|$ уравнений давала бы однозначное решение, если бы число уравнений было бы равно числу неизвестных, но на практике обычно переменных больше, чем уравнений. Поэтому однозначное решение отсутствует.

Пусть X_{ij} определяет поток из вершины i в вершину j в виде нечеткого числа. Мы не знаем этих значений, но хотим их найти. Поскольку известно точное значение потока V_d на каждой дуге d текущей транспортной сети, возможно, что реальная величина потребности в перевозках из вершины i в вершину j принадлежит некоторому интервалу $[x_{ij}^{\min}, x_{ij}^{\max}]$, где x_{ij}^{\min} – минимально возможный поток из вершины i в вершину j , x_{ij}^{\max} – максимально возможный поток из вершины i в вершину j .

Для поиска решений предлагается определить нечеткую корреспонденцию в форме треугольной функции принадлежности:

$$X_{ij} = \langle x_{ij}^{\min}, \bar{x}_{ij}, x_{ij}^{\max} \rangle. \quad (2.1)$$

Левые границы находятся путем решения линейных оптимизационных задач (2.2) с ограничениями (1.1) для каждой комбинации значений i и j :

$$\begin{aligned} x_{ij}^{\min} &= \min_{i,j=1,n,i \neq j} x_{ij}, \\ \sum_i \sum_j p_{ij}^d x_{ij} &= V_d \quad \forall d \in D, \end{aligned} \quad (2.2)$$

а правые границы находятся путем решения линейных оптимизационных задач (2.3) с теми же ограничениями (1.1):

$$\begin{aligned} x_{ij}^{\max} &= \max_{i,j=1,n,i \neq j} x_{ij}, \\ \sum_i \sum_j p_{ij}^d x_{ij} &= V_d \quad \forall d \in D. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для графа, если число вершин равно n , необходимо решить $n(n-1)$ оптимизационных задач. Для некоторых корреспонденций может получиться, что

$$x_{ij}^{\min} = x_{ij}^{\max}. \quad (2.4)$$

В этом случае

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij}^{\min} = x_{ij}^{\max}, \quad (2.5)$$

так как

$$x_{ij}^{\min} \leq \bar{x}_{ij} \leq x_{ij}^{\max}. \quad (2.6)$$

Если $x_{ij}^{\min} < x_{ij}^{\max}$, то необходимо выбрать некое наиболее возможное значение \bar{x}_{ij} из диапазона $[x_{ij}^{\min}, x_{ij}^{\max}]$, такое, что $\mu(\bar{x}_{ij}) = 1$, где μ обозначает функцию принадлежности треугольного числа X_{ij} . Этот выбор обусловлен априорной информацией о миграции населения. Информация может быть представлена в экспертном виде, причем допустимо применить подходы к согласованию экспертных оценок, в качестве “экспертов” могут выступать и стратегические соображения, которыми оперирует лицо, принимающее решения. Предположим “обобщенный сценарий”, такой, что

$$\bar{x}_{ij} \cong \alpha_{ij} x_{ij}^{\max} + \beta_{ij} x_{ij}^{\min}. \quad (2.7)$$

Знак \cong означает примерное равенство, так как выбранные \bar{x}_{ij} могут быть несовместны с точки зрения основного ограничения (1.1). При этом предполагаем, что \bar{x}_{ij} должны быть наиболее возможны. Из условия (2.6) следует, что $\alpha_{ij} + \beta_{ij} = 1$. Задача на повышение связности регионов допускает рассмотрение сценария $\alpha_{ij} \rightarrow 0$, когда $\bar{x}_{ij} \cong x_{ij}^{\min}$ для j , соответствующего крупному транспортному хабу, нагрузку на который мы хотим снизить, и $\alpha_{ij} \rightarrow 1$ $\bar{x}_{ij} \cong x_{ij}^{\max}$, для i вершины

графа, связность которых хотим увеличить. Если какие-либо соображения отсутствуют, то можно выбрать $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = 1/2$.

Обозначим наиболее возможную оценку:

$$\tilde{x}_{ij} = \alpha_{ij}x_{ij}^{\max} + \beta_{ij}x_{ij}^{\min}. \quad (2.8)$$

Окончательные оценки \bar{x}_{ij} вычисляются путем решения оптимизационной задачи:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{x}_{ij}} \sum_i \sum_j |\bar{x}_{ij} - \tilde{x}_{ij}|, \\ \sum_i \sum_j p_{ij}^d \bar{x}_{ij} = V_d \quad \forall d \in D. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Целевая функция (2.9) не линейна, однако задачу можно привести к линейному виду, для этого введем два класса технических дополнительных переменных:

$$y_{ij}^+ \geq 0, \quad y_{ij}^- \geq 0. \quad (2.10)$$

Добавим ограничение

$$\bar{x}_{ij} - \tilde{x}_{ij} = y_{ij}^+ - y_{ij}^-. \quad (2.11)$$

А целевую функцию (2.9) перепишем в виде

$$\min_{y_{ij}^+, y_{ij}^-} \sum_i \sum_j (y_{ij}^+ + y_{ij}^-). \quad (2.12)$$

Полученная задача эквивалентна исходной, алгоритм оптимизации будет всегда получать либо y_{ij}^+ , либо y_{ij}^- равным нулю и минимизировать оставшуюся ненулевую переменную.

Альтернативная постановка ориентирована на минимизацию не суммарного, а наибольшего отклонения от “идеального” решения:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{x}_{ij}} \max_{i,j} |\bar{x}_{ij} - \tilde{x}_{ij}|, \\ \sum_i \sum_j p_{ij}^d \bar{x}_{ij} = V_d \quad \forall d \in D. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Она тоже может быть сведена к линейному виду путем добавления бинарных переменных, таким образом можно получить смешанно-целочисленную линейную задачу. Выбор вида целевой функции (2.9) или (2.13) обусловлен требованиями лица, принимающего решения, к дальнейшему применению результатов расчетов.

3. Алгоритмическая и программная реализация. Программная реализация данной математической модели расчета нечетких корреспонденций была разработана на языке Python 3. В качестве пакета оптимизации использовался SCIP Optimization Suite [6]. Данный пакет предоставляет возможности решать задачи линейного смешанно-целочисленного программирования. Он бесплатен для некоммерческого использования и поставляется с открытыми исходными текстами. Модуль интеграции PySCIPорт с открытыми исходными текстами позволил объединить подготовку исходных данных с применением быстродействующих генераторных выражений Python и запуск решения оптимизационных задач в единой программе.

Программная реализация была размещена на портале веб-методов поддержки принятия решений WS-DSS [7]. Данный портал разработан одним из авторов статьи и позволяет запускать программную реализацию математических моделей, строя последовательные и параллельные цепочки запуска модулей с передачей параметров между ними. Портал написан на языке Ruby, для организации вызова расчетных модулей используется менеджер задач Sidekiq на базе NoSQL базы данных Redis, что обеспечивает высокую производительность. Помимо модулей на Python реализован запуск модулей на Ruby, R, C++. С помощью открытого каркаса Ruby on Rails реализована возможность асинхронного запуска моделей через RESTful API. Входные и выходные параметры передаются в форматах JSON и CSV. Результаты сохраняются в базе данных PostgreSQL. Такая реализация обеспечивает независимость от зарубежных поставщиков системного программного обеспечения в условиях санкционного давления.

Общий алгоритм работы программного обеспечения, состоит из следующих шагов.

Шаг 1. На веб-сервер WS-DSS поступает HTTP запрос POST с исходными данными для решаемой задачи. В ответ клиенту возвращается уникальный ID созданной задачи.

Шаг 2. WS-DSS формирует задачу для расчета в Sidekiq.

Шаг 3. Рабочий процесс Sidekiq запускает расчетный модуль на Python.

Шаг 4. Формируется массив объемов перевозок V_d по всем дугам d .

Шаг 5. С помощью пакета NetworkX, используя алгоритм Дейкстры, рассчитываются все кратчайшие пути между всеми вершинами.

Шаг 6. Заполнение параметров p_{ij}^d . Для всех d проверяется, входит ли она в кратчайший путь из вершины i в вершину j . Если ответ да, то $p_{ij}^d = 1/k$, где k – общее число кратчайших путей из i в j .

Шаг 7. Формирование ограничений (1.1).

Шаг 8. Расчет x_{ij}^{\min} . Формирование целевой функции (2.2), решение полученной оптимизационной задачи для всех комбинаций значений i и j .

Шаг 9. Расчет x_{ij}^{\min} . Формирование целевой функции (2.3), решение полученной оптимизационной задачи для всех комбинаций значений i и j .

Шаг 10. Расчет параметров \tilde{x}_{ij} по формуле (2.8).

Шаг 11. Формирование ограничений (2.11).

Шаг 12. Поиск \bar{x}_{ij} путем решения оптимизационной задачи (2.12) при ограничениях (2.11) и (1.1).

Шаг 13. Сохранение полученных x_{ij}^{\min} , \bar{x}_{ij} , x_{ij}^{\max} в базе данных PostgreSQL.

Шаг 14. Возврат полученного решения по HTTP (hypertext transfer protocol) запросу GET клиента с ID задачей. Если решение в момент запроса еще не получено, то будет возвращен специальный статус ожидания результата.

Шаг 15. В случае необходимости клиент может обратиться с HTTP-запросом PUT с измененными данными для повторного расчета.

4. Применение предложенного подхода. Апробирование системы проводилось по данным с авиаперевозками по России между семью городами:

- 1) Екатеринбург,
- 2) Минеральные Воды,
- 3) Москва,
- 4) Омск,
- 5) Самара,
- 6) Сыктывкар,
- 7) Махачкала.

В качестве периода был выбран июль 2019 г., так как июль – достаточно насыщенный месяц для проведения репрезентативного анализа. На рис. 1 представлен граф существующих маршрутов между городами. Номера вершин графа i соответствуют порядковым номерам городов в списке.

Как видно из рис. 1, на текущий момент не все города из этого списка соединены прямыми рейсами. При этом известно, что в 80-е годы прошлого века существовали дополнительные прямые рейсы, которые в настоящее время отсутствуют. Информация из матрицы корреспонденций позволит оценить как необходимость возрождения данных рейсов, так и определить, какие типы воздушных судов целесообразней развивать. Полученная в результате решения оптимизационных задач корреспонденция между заданными городами показана в таблице 1.

Рассмотрим в качестве примера анализа нечетких корреспонденций два новых маршрута из города 2 – (2, 7) и (2, 5). Из таблицы видно, что для маршрутов (2, 7) и (2, 5) наиболее возможный пассажиропоток составляет 8968 и 846 человек в месяц соответственно. Значит маршрут (2, 7), скорей всего, более приоритетен с точки зрения открытия. Но степень неопределенности достаточно велика и должна быть учтена при планировании управленческих решений на основе полученных результатов. В данном случае маршрут (2, 5) может содержать пассажиропоток от 0 до 1693 человек, а (2, 7) может содержать пассажиропоток от 0 до 53810 человек, и сохраняется

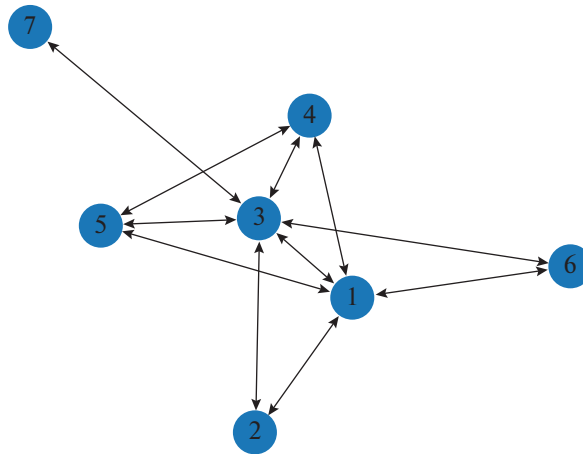


Рис. 1. Граф авиационных маршрутов между городами

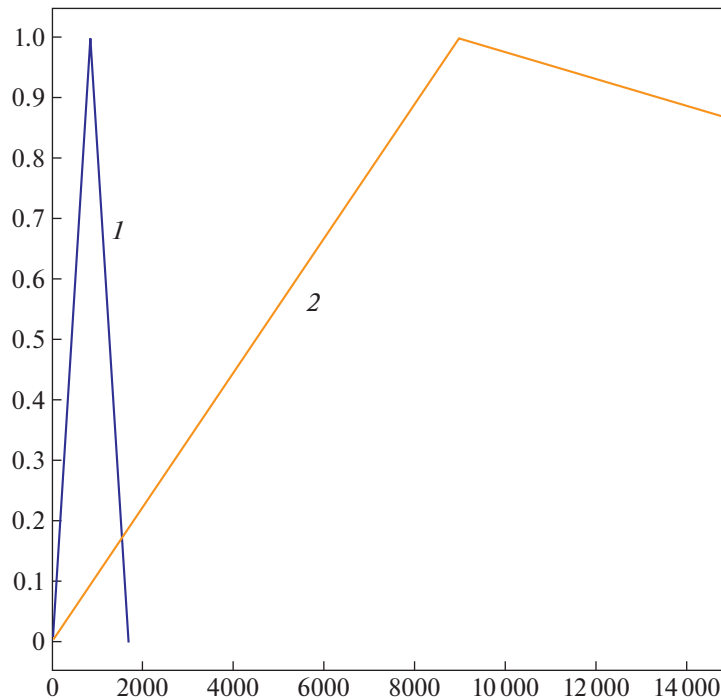


Рис. 2. Функции принадлежности для нечеткого значения пассажиропотока: 1 – города 2–5, 2 – города 2–7

небольшая возможность большего пассажиропотока для маршрута (2, 5). Уровень уверенности в этом составляет 0.17 и соответствует точке пересечения треугольных функций принадлежности, показанных на рис. 2.

Основное преимущество метода по сравнению с аналогами заключается в том, что он позволяет находить нечеткую матрицу корреспонденций даже при отсутствии экспертных оценок. Еще одним преимуществом является использование модели в виде линейных целевых функций и ограничений, которые достаточно легко вычислить. Изначально решается ряд самостоятельных задач математического программирования, поэтому часть трудоемкого вычислительного процесса легко организовать в параллельные потоки. Программная реализация для поиска по нечеткой матрице корреспонденций и нечеткого ранжирования размещена на портале веб-сервисов поддержки принятия решений WS-DSS. Она доступна для использования широким кругом разработчиков приложений транспортных и логистических систем.

Таблица 1. Результаты решения

i	j	x_{ij}^{\min}	\bar{x}_{ij}	x_{ij}^{\max}
1	2	1025	2479	3933
4	2	0	179	359
5	2	0	1052	2105
6	2	0	222	444
1	3	42897	83211	96707
1	7	0	13495	53810
1	4	0	97	293
2	4	0	146	293
6	4	0	48	293
1	5	0	772	1693
2	5	0	846	1693
6	5	0	74	444
1	6	0	86	439
2	6	0	219	439
4	6	0	59	359
5	6	0	73	439
7	3	0	8531	51188
7	1	0	12724	51188
7	2	0	8531	51188
7	4	0	6808	40848
7	5	0	8531	51188
7	6	0	6061	12123
2	1	1648	2860	4073
2	3	17810	62651	71620
2	7	0	8968	53810
3	1	42571	81034	93759
3	7	0	8968	53810
4	7	0	6857	41144
5	7	0	8968	53810
6	7	0	6552	13104
3	2	25462	68118	76650
3	4	0	34040	40848
3	5	10776	53432	61964
3	6	0	6061	12123
4	1	0	119	359
4	3	0	34286	41144
4	5	212	212	212
5	1	0	979	2105
5	3	8747	53588	62557
5	4	149	149	149
6	1	0	99	444
6	3	0	6552	13104

Заключение. Полученная в настоящей работе нечеткая матрица корреспонденций позволяет решать следующие задачи:

- 1) составление оптимальных маршрутов,
- 2) составление рационального расписания,
- 3) оценка перспектив импортозамещения авиационной техники,
- 4) анализ возможностей по замене устаревшей авиационной техники,
- 5) поддержка принятия решений по модернизации существующей транспортной инфраструктуры.

Решив задачи поиска корреспонденций в разных временных периодах, можно строить прогнозы на основе нечетких регрессионных моделей, проводить нечеткое сглаживание колебаний корреспонденций для поиска рациональных моделей развития транспортно-логистических систем. Результат полезен для разработчиков моделей исследования транспортных операций. Полученные нечеткие оценки можно рассматривать как параметры моделей оптимального расписания, а также использовать при решении задачи распределения воздушных судов.

Метод подходит для случаев, когда мы не можем установить реальные пункты отправления и назначения конкретных пассажиров, но знаем количество пассажиров, перевезенных по конкретным дугам транспортного графа. Это обычная ситуация, когда задачи стратегического планирования приходится решать не на уровне отдельных авиакомпаний, а на уровне государства.

В условиях появления большого количества неопределенных факторов, влияющих на авиаперевозки, проектировщики транспортно-логистических систем могут решать задачи планирования маршрутов перевозок, выбора самолетов и проектирования новых аэропортов, используя эту модель как источник информации о возможном транспорте. Ученые в области исследования транспортных операций могут верифицировать экспертные суждения и правила, чтобы проверить их близость к возможным значениям элементов матрицы корреспонденций.

Предложенный алгоритм поиска нечеткой матрицы корреспонденций позволяет осуществлять планирование стратегического развития транспортной инфраструктуры. Используя методы поддержки принятия решений в нечеткой информационной среде, можно определить как предпочтения в развитии новых маршрутов авиаперевозок, так и степень уверенности в данном решении.

Апробация метода показала, что он может быть успешно применен для определения корреспонденций между заданным набором городов с учетом высокой степени неопределенности. В дальнейшем экспертные оценки могут использоваться в сочетании с этим методом для точного предсказания нечетких корреспонденций в графе. Предложенный алгоритм актуален как для авиационного, так и для автомобильного транспорта. Рассмотренный пример добавления новых транспортных маршрутов в виде новых дуг к существующему графу позволяет предложить рациональные варианты улучшения транспортной ситуации в случае отсутствия необходимого количества зарубежных магистральных самолетов и планировать перевозки на модифицированном нечетком графе с помощью отечественных воздушных судов ИЛ-114, SSJ-100, ТУ-214, Ил-96-400М, МС-21.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Profillidis V.A., Botzoris G.N.* Modeling of Transport Demand – Analyzing, Calculating and Forecasting Transport. Amsterdam, Netherlands: Elsevier Eds., 2018.
2. *Ekowicaksono I., Bukhari F., Aman A.* Estimating Origin-Destination Matrix of Bogor City Using Gravity Model // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. V. 31. Workshop and International Seminar on Science of Complex Natural Systems. Bogor, Indonesia, 2016.
3. *Wilson A.G.* A Statistical Theory of Spatial Distribution Models // Transportation Research. 1967. V. 1. P. 253–270.
4. *Park Y., O’Kelly M.E.* Origin–Destination Synthesis for Aviation Network Data: Examining Hub Operations in the Domestic and International US Markets // J. Adv. Transp. 2016. V. 50. P. 2288–2305.
5. *Dutov A.V., Nesterov V.A., Sudakov V.A., Syalo K.I.* Fuzzy Preference Domains and Their Use for Selecting an Electronic Flight Bag for Flight Crews // J. of Computer and Systems Sciences International. 2018. V. 57. № 2. P. 230–238.
6. *Vigerske S., Gleixner A.* SCIP: Global Optimization of Mixed-Integer Nonlinear Programs in a Branch-and-Cut Framework // Optimization Methods and Software. 2018. V. 33. № 3. P. 563–593.
7. *Sudakov V., Nesterov V., Kurennykh A.* Integration of Decision Support Systems “Kosmos” and WS-DSS with Computer Models // Tenth Intern. Conf. Management of Large-Scale System Development (MLSD). М., 2017. P. 1–4.

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

УДК 519.854.33

**ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
ТРЕХИНДЕКСНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ СТРЕЛЬБЕ¹**© 2022 г. Н. В. Антипова^a, Л. Ванг^{b,c}, А. П. Тизик^d, В. И. Цурков^{a,*}^a Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия^b Математический факультет, Нанкинский ун-т авионавтики и космонавтики, Нанкин, КНР^c Лаборатория математического моделирования и высокопроизводительных расчетов авиатранспортных средств, Нанкин, КНР^d Центральный научно-исследовательский ин-т связи, Москва, Россия

*e-mail: tsur@ccas.ru

Поступила в редакцию 15.06.2022 г.

После доработки 06.07.2022 г.

Принята к публикации 01.08.2022 г.

Метод последовательной модификации коэффициентов целевой функции распространяется на трехиндексные задачи об эффективной стрельбе. На каждом шаге итеративного процесса решаются задачи с тремя ограничениями и одной связывающей переменной. Рассматривается вырождение из-за неединственности решения упомянутых промежуточных задач. Дается процедура снятия вырождения. Окончательный алгоритм строит точное решение исходной задачи булевого программирования.

DOI: 10.31857/S0002338822060026

Введение. В [1] упоминается о постановках задач об эффективной стрельбе и их связи с классическими задачами транспортного типа. Другие транспортные постановки, близкие к ним, представлены в [2–4]. В [5] предлагается метод последовательной модификации коэффициентов целевых функций для линейных задач транспортного типа. Он является альтернативным для известного симплекс-метода и его модификаций. Для двухиндексной задачи в отличие от последовательного изменения допустимых решений или двойственных переменных здесь итеративно пересчитываются коэффициенты целевой функции. Строится монотонный по целевой функции процесс, который окончательно приводит к оптимуму, хотя последовательные решения (так называемые псевдорешения) не допустимы к исходным ограничениям. Особым местом является так называемое вырождение, когда из промежуточных задач невозможно сформировать исходный оптимум. Это преодолевается для каждого конкретного случая по-разному, иногда довольно сложными процедурами.

В работе рассматриваемый подход применяется для трехиндексной задачи об эффективной стрельбе. Имеется некоторое количество батарей, целей и различного вида снарядов. Каждая батарея делает несколько выстрелов разными снарядами и по разным целям. Общее количество выстрелов всех батарей равно количеству целей, умноженному на количество различных снарядов. Для выстрела по каждой цели каждым видом снарядов у каждой батареи имеется коэффициент эффективности стрельбы. Задача состоит в том, чтобы определить такой план стрельбы, при котором достигается максимум суммы эффективностей.

1. Постановка задачи. Имеется m батарей, n целей, l видов снарядов. Задана трехмерная матрица d_{jik} размера $m \times n \times l$. Ее элементы – коэффициенты эффективности выстрела из i -й батареи по j -й цели k -м видом снарядов являются неотрицательными числами:

$$d_{jik} \geq 0.$$

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 21-51-53019) и Государственного фонда естественных наук Китая (гранты № 11971231; 1211153001).

Будем искать трехмерную матрицу плана стрельбы, элементы которой x_{ijk} принимают значения единица, если производится выстрел из i -й батареи по j -й цели k -м видом снарядов, и 0, если такого выстрела не производится:

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}.$$

Ограничения задачи об эффективной стрельбе записываются так:

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} = a_{ik}, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}, \quad (1.1)$$

где a_{ij} – количество k -го вида снарядов, выпускаемых i -й батареей по всем n целям. Далее имеем

$$\sum_{i=1}^m x_{ijk} = b_{jk}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, l}, \quad (1.2)$$

где b_{jk} – количество k -го вида снарядов, выпускаемых по j -й цели всеми m батареями. Наконец,

$$\sum_{k=1}^l x_{ijk} = c_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.3)$$

где c_{ij} – общее количество выстрелов i -й батареи по j -й цели всеми видами снарядов.

В каждую из n целей должно быть выпущено по одному снаряду каждого из l видов снарядов. Таким образом, условия баланса имеют вид

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l a_{ik} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l b_{jk} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} = nl. \quad (1.4)$$

Необходимо максимизировать суммарную эффективность всех nl выстрелов:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l d_{ijk} x_{ijk} \rightarrow \max \quad (1.5)$$

при ограничениях (1.1)–(1.4).

Задача (1.1)–(1.5) является линейной оптимизационной задачей с булевыми переменными и относится к трехиндексным планарным задачам. Она считается NP-трудной.

2. Метод решения задачи. Для начала решим $ml + nl + mn$ задач с одним ограничением каждая. Первые ml задач

$$\sum_{j=1}^n d_{ijk} x_{ijk} \rightarrow \max \quad (2.1)$$

при ограничениях (1.1). Вторые nl задач

$$\sum_{i=1}^m d_{ijk} x_{ijk} \rightarrow \max \quad (2.2)$$

при ограничениях (1.2). Третьи mn задач

$$\sum_{k=1}^l d_{ijk} x_{ijk} \rightarrow \max \quad (2.3)$$

при ограничениях (1.3). Здесь и далее предполагаем, что условия баланса (1.4) соблюдены при составлении задачи. Все $ml + nl + mn$ задач легко решаются простым нахождением наибольших d_{ijk} в количестве, равном правым частям ограничений (2.1)–(2.3).

Если в результате решения вышеупомянутых $ml + nl + mn$ задач значения переменных удовлетворяют ограничениям (1.1)–(1.3), то тем самым решена исходная задача (1.3)–(1.5). Сумма значений целевых функций в оптимальных решениях задач (2.1)–(2.3), деленная на три, будет значением целевой функции в оптимальном решении задачи (1.1)–(1.5). В противном случае будем говорить, что получено первое псевдорешение этой задачи. Заметим, что значение целевой функции первого псевдорешения не меньше значения целевой функции искомого оптимально-

го решения исходной задачи. Построим последовательность псевдорешений с монотонно убывающими значениями целевых функций.

Для получения второго псевдорешения решим следующую задачу с тремя ограничениями:

$$\sum_{j=1}^n x_{1j1} = a_{11}, \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i11} = b_{11}, \quad (2.5)$$

$$\sum_{k=1}^l x_{11k} = c_{11}, \quad (2.6)$$

$$d_{111}x_{111} + \sum_{j=2}^n \frac{1}{3}d_{1j1}x_{1j1} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{3}d_{i11}x_{i11} + \sum_{k=2}^l \frac{1}{3}d_{11k}x_{11k} \rightarrow \max. \quad (2.7)$$

В этой задаче x_{111} – единственная общая переменная в ограничениях (2.4)–(2.6). Очевидно, что в оптимальное решение задачи (2.4)–(2.7) со значением единица войдут $a_{11} - 1$ переменных из (2.4) с наибольшими коэффициентами в целевой функции (2.7), соответственно $b_{11} - 1$ переменных из ограничения (2.5) и $c_{11} - 1$ переменных из (2.6). Выберем в целевой функции (2.7) все переменные, входящие в ограничение (2.4), кроме общей переменной, отсортируем по убыванию коэффициенты целевой функции при этих переменных и возьмем коэффициент с номером, равным a_{11} . Этот коэффициент обозначим M_1 . Аналогично через M_2 обозначим b_{11} -й коэффициент целевой функции среди переменных, входящих в ограничение (2.5) без общей переменной, а через M_3 – c_{11} -й коэффициент в целевой функции среди переменных, входящих в (2.6) без общей переменной. Могут иметь место три случая:

$$d_{111} < M_1 + M_2 + M_3, \quad (2.8)$$

$$d_{111} = M_1 + M_2 + M_3, \quad (2.9)$$

$$d_{111} > M_1 + M_2 + M_3. \quad (2.10)$$

В первом случае (2.8), в оптимальное решение задачи (2.4)–(2.7) войдут дополнительно переменная из (2.4) с коэффициентом M_1 в целевой функции, переменная из (2.5) с коэффициентом M_2 в целевой функции и переменная из (2.6) с коэффициентом M_3 в целевой функции.

Во втором случае (2.9) у задачи (2.4)–(2.7), очевидно, более чем одно оптимальное решение, а значит, имеет место вырождение.

В третьем случае (2.10) к безусловно вошедшим в решение переменным добавляется переменная x_{111} .

Решив задачу (2.4)–(2.7), преобразуем ее, сохраняя оптимальное решение, в три независимые задачи, каждая из которых имеет одно из ограничений (2.4)–(2.6). Для этого в первом случае, переписав условие (2.8) как равенство

$$d_{111} = M_1 + M_2 + M_3 - \delta, \quad \delta > 0,$$

представим целевые функции трех задач с одним из ограничений (2.4)–(2.6) соответственно как

$$\left(M_1 - \frac{\delta}{3}\right)x_{111} + \sum_{j=2}^n \frac{1}{3}d_{1j1}x_{1j1} \rightarrow \max, \quad (2.11)$$

$$\left(M_2 - \frac{\delta}{3}\right)x_{111} + \sum_{i=2}^m \frac{1}{3}d_{i11}x_{i11} \rightarrow \max, \quad (2.12)$$

$$\left(M_3 - \frac{\delta}{3}\right)x_{111} + \sum_{k=2}^l \frac{1}{3}d_{11k}x_{11k} \rightarrow \max. \quad (2.13)$$

Во втором случае условие (2.9) уже является равенством и коэффициенты целевых функций (2.11)–(2.13) при x_{111} равны M_1 , M_2 , M_3 .

Таблица 1. Коэффициенты эффективности стрельбы первой батареи двумя видами снарядов по трем целям

Вид снаряда	Номер цели		
	1	2	3
1	3	6	11
2	4	9	12

В третьем случае, преобразовав условие (2.10) в равенство

$$d_{111} = M_1 + M_2 + M_3 + \gamma, \quad \gamma > 0,$$

коэффициенты в целевых функциях (2.11)–(2.13) при x_{111} запишем как $M_1 + \gamma/3$, $M_2 + \gamma/3$ и $M_3 + \gamma/3$.

В итоге получаем второе псевдорешение с уменьшенным значением целевой функции. Заметим, что значение целевой функции каждого псевдорешения не меньше, чем значение целевой функции в искомом оптимальном решении исходной задачи (1.1)–(1.5). Решая циклически все tnl задач с тремя ограничениями, строим последовательность псевдорешений с монотонно убывающей целевой функцией, ограниченной снизу значением целевой функции в оптимальном решении исходной задачи (1.1)–(1.5).

3. Вырождение. Заметим, что если в предельном состоянии итерационного процесса при решении произвольной задачи с тремя ограничениями некоторая не общая переменная участвует в вырождении, то она участвует в вырождении и в той задаче, где эта переменная является общей. И наоборот, участие в вырождении какой-то общей переменной влечет за собой ее участие в вырождении в качестве не общей переменной. Другими словами, в предельном состоянии множество переменных, участвующих в вырождении в каждом ограничении, определено однозначно. Отсюда следует, что после того, как заданы переменные, безусловно входящие в решение, для получения допустимого, а следовательно, оптимального решения, достаточно последовательно дополнить решение из числа переменных, входящих в вырождение.

4. Пример. Имеются две батареи, три цели и два вида снарядов. Коэффициенты эффективности стрельбы первой и второй батареей даны в табл. 1 и 2 соответственно. Ограничения этой задачи запишем следующим образом:

$$x_{111} + x_{121} + x_{131} = 2,$$

$$x_{112} + x_{122} + x_{132} = 1,$$

$$x_{211} + x_{221} + x_{231} = 1,$$

$$x_{212} + x_{222} + x_{232} = 2,$$

$$x_{111} + x_{211} = 1,$$

$$x_{121} + x_{221} = 1,$$

$$x_{131} + x_{231} = 1,$$

$$x_{112} + x_{212} = 1,$$

$$x_{122} + x_{222} = 1,$$

$$x_{132} + x_{232} = 1,$$

$$x_{132} + x_{232} = 1,$$

$$x_{121} + x_{122} = 1,$$

$$x_{131} + x_{132} = 1,$$

$$x_{211} + x_{212} = 1,$$

$$x_{221} + x_{222} = 1,$$

$$x_{231} + x_{232} = 1.$$

Таблица 2. Коэффициенты эффективности стрельбы второй батареи двумя видами снарядов по трем целям

Вид снаряда	Номер цели		
	1	2	3
1	10	13	29
2	11	14	19

Целевая функция:

$$3x_{111} + 6x_{121} + 11x_{131} + 4x_{112} + 9x_{122} + 12x_{132} + 10x_{211} + 13x_{221} + 29x_{231} + 11x_{212} + 14x_{222} + 19x_{232} \rightarrow \max.$$

Первый цикл. Первая задача:

$$\begin{aligned} x_{111} + x_{121} + x_{131} &= 2, \\ x_{111} + x_{211} &= 1, \\ x_{111} + x_{112} &= 1, \\ 3x_{111} + 2x_{121} + 11/3x_{131} + 4/3x_{112} + 10/3x_{211} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

В этой задаче в первое ограничение кроме общей переменной входят x_{121} и x_{131} . Коэффициенты при них в целевой функции равны 2 и 11/3. Правая часть первого ограничения равна 2, второй по величине коэффициент равен 2, т.е. $M_1 = 2$. Во второе ограничение кроме общей переменной входит только x_{211} с коэффициентом 10/3. Правая часть второго ограничения равна 1, таким образом $M_2 = 10/3$. Аналогично $M_3 = 4/3$. Имеет место соотношение (2.8), откуда решение первой задачи $x_{111} = 0$, $x_{121} = x_{131} = x_{112} = x_{211} = 1$. Целевые функции (2.11)–(2.13) задач с одним ограничением запишутся так:

$$\begin{aligned} x_{111} + 2x_{121} + 11/3x_{131} &\rightarrow \max, \\ x_{111} + 10/3x_{211} &\rightarrow \max, \\ x_{111} + 4/3x_{112} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Коэффициенты здесь и далее округлены.

Вторая задача:

$$\begin{aligned} x_{111} + x_{121} + x_{131} &= 2, \\ x_{121} + x_{221} &= 1, \\ x_{121} + x_{122} &= 1, \\ x_{111} + 6x_{121} + 11/3x_{131} + 3x_{122} + 13/3x_{221} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Ее решение: $x_{121} = 0$, $x_{111} = x_{131} = x_{122} = x_{221} = 1$. Целевые функции задач с одним ограничением следующие:

$$\begin{aligned} x_{111} + 1/2x_{121} + 11/3x_{131} &\rightarrow \max, \\ 7/2x_{121} + 13/3x_{221} &\rightarrow \max, \\ 2x_{121} + 3x_{122} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Третья задача:

$$\begin{aligned} x_{111} + x_{121} + x_{131} &= 2, \\ x_{131} + x_{132} &= 1, \\ x_{131} + x_{231} &= 1, \\ x_{111} + 1/2x_{121} + 11x_{131} + 4x_{132} + 29/3x_{231} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Ее решение: $x_{131} = 0$, $x_{111} = x_{121} = x_{132} = x_{231} = 1$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$\begin{aligned}x_{111} + 0.5x_{121} + 0.25x_{131} &\rightarrow \max, \\3.25x_{131} + 4x_{132} &\rightarrow \max, \\7.5x_{131} + 29/3x_{231} &\rightarrow \max.\end{aligned}$$

Четвертая задача:

$$\begin{aligned}x_{112} + x_{122} + x_{132} &= 1, \\x_{111} + x_{112} &= 1, \\x_{112} + x_{212} &= 1, \\x_{111} + 4x_{112} + 3x_{122} + 4x_{132} + 11/3x_{212} &\rightarrow \max.\end{aligned}$$

Ее решение: $x_{112} = x_{122} = 0$, $x_{111} = x_{132} = x_{212} = 1$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$\begin{aligned}2.25x_{112} + 3x_{122} + 4x_{132} &\rightarrow \max, \\x_{111} + 0.25x_{112} &\rightarrow \max, \\1.5x_{112} + 11/3x_{212} &\rightarrow \max.\end{aligned}$$

Пятая задача:

$$\begin{aligned}x_{112} + x_{122} + x_{132} &= 1, \\x_{121} + x_{122} &= 1, \\x_{122} + x_{222} &= 1, \\2.25x_{112} + 9x_{122} + 4x_{132} + 2x_{121} + 14/3x_{222} &\rightarrow \max.\end{aligned}$$

Ее решение: $x_{112} = x_{122} = 0$, $x_{132} = x_{121} = x_{222} = 1$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$\begin{aligned}2.25x_{112} + 3x_{122} + 4x_{132} &\rightarrow \max, \\2x_{121} + 1.5x_{122} &\rightarrow \max, \\4.5x_{122} + 14/3x_{222} &\rightarrow \max.\end{aligned}$$

Шестая задача:

$$\begin{aligned}x_{112} + x_{122} + x_{132} &= 1, \\x_{131} + x_{132} &= 1, \\x_{132} + x_{232} &= 1, \\2.25x_{112} + 3x_{122} + 12x_{132} + 3.25x_{131} + 19/3x_{232} &\rightarrow \max.\end{aligned}$$

Ее решение: $x_{112} = x_{132} = 0$, $x_{122} = x_{131} = x_{232} = 1$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$\begin{aligned}2.25x_{112} + 3x_{122} + 2.85x_{132} &\rightarrow \max, \\3.25x_{131} + 3x_{132} &\rightarrow \max, \\6.15x_{132} + 19/3x_{232} &\rightarrow \max.\end{aligned}$$

Седьмая задача:

$$\begin{aligned}x_{211} + x_{221} + x_{231} &= 1, \\x_{111} + x_{211} &= 1, \\x_{211} + x_{212} &= 1, \\10x_{211} + 13/3x_{221} + 29/3x_{231} + x_{111} + 11/3x_{212} &\rightarrow \max.\end{aligned}$$

Ее решение: $x_{211} = x_{221} = 0$, $x_{111} = x_{212} = x_{231} = 1$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$\begin{aligned} 6.5x_{211} + 13/3x_{221} + 29/3x_{231} &\rightarrow \max, \\ x_{111} + 0.5x_{211} &\rightarrow \max, \\ 3x_{211} + 11/3x_{212} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Восьмая задача:

$$\begin{aligned} x_{211} + x_{221} + x_{231} &= 1, \\ x_{121} + x_{221} &= 1, \\ x_{221} + x_{222} &= 1, \\ 6.5x_{211} + 13x_{221} + 29/3x_{231} + 3.5x_{121} + 14/3x_{222} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Ее решение: $x_{211} = x_{221} = 0$, $x_{121} = x_{231} = x_{222} = 1$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$\begin{aligned} 6.5x_{211} + 9x_{221} + 29/3x_{231} &\rightarrow \max, \\ 3.5x_{121} + 2x_{221} &\rightarrow \max, \\ 2x_{221} + 14/3x_{222} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Девятая задача:

$$\begin{aligned} x_{211} + x_{221} + x_{231} &= 1, \\ x_{131} + x_{231} &= 1, \\ x_{231} + x_{232} &= 1, \\ 6.5x_{211} + 9x_{221} + 29x_{231} + 7.5x_{131} + 19/3x_{232} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Ее решение: $x_{231} = 1$, $x_{131} = x_{211} = x_{221} = x_{232} = 0$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$\begin{aligned} 6.5x_{211} + 9x_{221} + 11x_{231} &\rightarrow \max, \\ 7.5x_{131} + 9x_{231} &\rightarrow \max, \\ 9x_{231} + 19/3x_{232} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Десятая задача:

$$\begin{aligned} x_{212} + x_{222} + x_{232} &= 2, \\ x_{112} + x_{212} &= 1, \\ x_{211} + x_{212} &= 1, \\ 11x_{212} + 14/3x_{222} + 19/3x_{232} + 1.5x_{112} + 3x_{211} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Ее решение: $x_{212} = x_{232} = 1$, $x_{112} = x_{211} = x_{222} = 0$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$\begin{aligned} 5x_{212} + 14/3x_{222} + 19/3x_{232} &\rightarrow \max, \\ 1.5x_{112} + 2x_{212} &\rightarrow \max, \\ 3x_{211} + 4x_{212} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Одиннадцатая задача:

$$\begin{aligned} x_{212} + x_{222} + x_{232} &= 2, \\ x_{122} + x_{222} &= 1, \\ x_{221} + x_{222} &= 1, \\ 5x_{212} + 14x_{222} + 19/3x_{232} + 4.5x_{122} + 2x_{221} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Ее решение: $x_{222} = x_{232} = 1$, $x_{212} = x_{122} = x_{221} = 0$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$\begin{aligned} 5x_{212} + 6.5x_{222} + 19/3x_{232} &\rightarrow \max, \\ 4.5x_{122} + 4.75x_{222} &\rightarrow \max, \\ 2x_{221} + 2.75x_{222} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Двенадцатая задача:

$$\begin{aligned} x_{212} + x_{222} + x_{232} &= 2, \\ x_{132} + x_{232} &= 1, \\ x_{231} + x_{232} &= 1, \\ 5x_{212} + 6.5x_{222} + 19x_{232} + 6.15x_{132} + 9x_{231} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Ее решение: $x_{212} = x_{222} = x_{132} = x_{231} = 1$, $x_{232} = 0$. Целевые функции задач с одним ограничением:

$$\begin{aligned} 5x_{212} + 6.5x_{222} + 4.5x_{232} &\rightarrow \max, \\ 6.15x_{132} + 6.0x_{232} &\rightarrow \max, \\ 9x_{231} + 8.5x_{232} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Первый цикл на этом окончен. Допустимое решение при этом еще не получено, так как, например, в шестой задаче $x_{132} = 0$, а в двенадцатой $x_{132} = 1$.

Второй цикл. Выпишем только целевые функции (2.11)–(2.13) для задач с одним ограничением после решения всех 12 задач с тремя ограничениями. После первой задачи имеем

$$\begin{aligned} x_{111} + 0.5x_{121} + 0.25x_{131} &\rightarrow \max, \\ x_{111} + 0.5x_{211} &\rightarrow \max, \\ x_{111} + 0.25x_{112} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

После второй задачи

$$\begin{aligned} x_{111} + x_{121} + 0.25x_{131} &\rightarrow \max, \\ 3x_{121} + 2x_{221} &\rightarrow \max, \\ 2x_{121} + 1.5x_{122} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

После третьей задачи

$$\begin{aligned} x_{111} + x_{121} + 0.5x_{131} &\rightarrow \max, \\ 2.5x_{131} + 3x_{132} &\rightarrow \max, \\ 8x_{131} + 9x_{231} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

После четвертой задачи

$$\begin{aligned} 2.5x_{112} + 3x_{122} + 2.85x_{132} &\rightarrow \max, \\ x_{111} + 0.5x_{112} &\rightarrow \max, \\ x_{112} + 2x_{212} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

После пятой задачи

$$\begin{aligned} 2.5x_{112} + 2.6x_{122} + 2.85x_{132} &\rightarrow \max, \\ 2x_{121} + 1.8x_{122} &\rightarrow \max, \\ 4.6x_{122} + 4.75x_{222} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

После шестой задачи

$$\begin{aligned} 2.5x_{112} + 2.6x_{122} + 2.8x_{132} &\rightarrow \max, \\ 2.5x_{131} + 2.7x_{132} &\rightarrow \max, \\ 6.5x_{132} + 6.0x_{232} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

После седьмой задачи

$$\begin{aligned}7x_{211} + 9x_{221} + 11x_{231} &\rightarrow \max, \\x_{111} + 0.5x_{211} &\rightarrow \max, \\2.5x_{211} + 4x_{212} &\rightarrow \max.\end{aligned}$$

После восьмой задачи

$$\begin{aligned}7x_{211} + 7.85x_{221} + 11x_{231} &\rightarrow \max, \\3x_{121} + 2.95x_{221} &\rightarrow \max, \\2.2x_{221} + 2.75x_{222} &\rightarrow \max.\end{aligned}$$

После девятой задачи

$$\begin{aligned}7x_{211} + 7.85x_{221} + 9x_{231} &\rightarrow \max, \\8x_{131} + 8.5x_{231} &\rightarrow \max, \\11.5x_{231} + 8.5x_{232} &\rightarrow \max.\end{aligned}$$

После десятой задачи

$$\begin{aligned}5x_{212} + 6.5x_{222} + 4.5x_{232} &\rightarrow \max, \\x_{112} + 2x_{212} &\rightarrow \max, \\2.5x_{211} + 4x_{212} &\rightarrow \max.\end{aligned}$$

После одиннадцатой задачи

$$\begin{aligned}5x_{212} + 6x_{222} + 4.5x_{232} &\rightarrow \max, \\4.6x_{122} + 5x_{222} &\rightarrow \max, \\2.2x_{221} + 3x_{222} &\rightarrow \max.\end{aligned}$$

После двенадцатой задачи

$$\begin{aligned}5x_{212} + 6x_{222} + 4.5x_{232} &\rightarrow \max, \\6.1x_{132} + 4.5x_{232} &\rightarrow \max, \\11.5x_{231} + 10x_{232} &\rightarrow \max.\end{aligned}$$

И хотя предел еще не достигнут, уже получено допустимое, а следовательно, оптимальное решение:

$$x_{111} = x_{121} = x_{132} = x_{231} = x_{212} = x_{222} = 1.$$

Остальные переменные равны нулю. Значение целевой функции: $3 + 6 + 12 + 29 + 11 + 14 = 75$.

Заключение. Итак, представлено применение метода последовательной модификации *целевой функции* для трехиндексной задачи об эффективной стрельбе. Однако видно, что он дословно распространяется на случай четырех, пяти и так далее индексов. На каждом шаге решаются соответственно задачи с четырьмя, пятью и так далее ограничениями. Важно заметить, что вырождение снимается весьма просто, в отличие от классической транспортной задачи, где приходится дополнительно ставить оптимизационные задачи на сети [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969.
2. Триус Е.Б. Задачи математического программирования транспортного типа. М.: Сов. радио, 1967.
3. Михалевич В.С., Сергиенко И.В., Шор Н.З. Исследование методов решения оптимизационных задач и их приложения // Кибернетика. 1981. № 4. С. 89–113.
4. Раскин Л.Г., Кириченко И.О. Многоиндексные задачи линейного программирования. М.: Радио и связь, 1982.
5. Тизик А.П., Цурков В.И. Метод последовательной модификации функционала для решения транспортной задачи // АиТ. 2012. № 1. С. 148–158.

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

УДК 519.85

**АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАГРУЗКИ И МЕЖУЗЛОВЫХ
ПОТОКОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СТРАТЕГИЯХ МАРШРУТИЗАЦИИ
В МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ СЕТИ**© 2022 г. Ю. Е. Малашенко^а, И. А. Назарова^{а,*}^а ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: irina-nazar@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.03.2021 г.

После доработки 02.06.2022 г.

Принята к публикации 01.08.2022 г.

В рамках вычислительных экспериментов на многопродуктовой сетевой модели изучаются функциональные возможности телекоммуникационной системы по обеспечении связи для заданных пар узлов-корреспондентов. Анализируются две стратегии распределения пропускной способности и различные правила маршрутизации. При реализации первой стратегии осуществляется поиск распределения ресурсов, при котором междуузловые потоки равны друг другу. Вторая стратегия предполагает получение недискриминирующего распределения ресурсов сети между всеми корреспондентами. При использовании каждой стратегии сравниваются различные правила маршрутизации. Оценка минимальных удельных затрат производится при передаче каждого вида потока по кратчайшим маршрутам с минимальным числом ребер. При поиске различных путей соединения предварительно определяется максимальный однопродуктовый поток для данной пары и маршруты прокладываются по всем ребрам соответствующего минимального разреза. Вычислительные эксперименты проводились для различных сетей с одинаковым набором узлов-корреспондентов.

DOI: 10.31857/S0002338822060130

Введение. В рамках многопродуктовой сетевой модели рассматриваются различные стратегии распределения ресурсов и правила построения маршрутов передачи. Оценки функциональных возможностей сети опираются на вектор совместно допустимых междуузловых потоков. Под ресурсом для некоторой пары узлов-корреспондентов понимается суммарная величина пропускных способностей, необходимых для обеспечения связи данного вида. Сумма соответствующих реберных потоков трактуется как нагрузка, возникающая при передаче заданного междуузлового потока. Изучаются две стратегии распределения пропускной способности. При реализации первой осуществляется поиск распределения, при котором междуузловые потоки равны друг другу. Вторая предполагает поиск недискриминирующего распределения ресурсов сети между всеми корреспондентами при равных нагрузках. В ходе выполнения вычислительных экспериментов на каждой текущей итерации часть имеющегося ресурса распределяется строго поровну между всеми парами источник-сток при условии, что для них существует путь соединения. Для оценки минимальных удельных затрат для передачи каждого вида потока выбираются кратчайшие маршруты с минимальным числом ребер. Для определения затрат ресурсов при соединении корреспондентов по различным путям для каждой пары узлов вычисляется максимальный однопродуктовый поток. Маршруты передачи потоков каждого вида прокладываются по ребрам соответствующих минимальных разрезов и подсчитываются допустимые нагрузки. Эксперименты проводились для дальнейшего изучения функциональных характеристик, допустимых распределений ресурсов и междуузловых потоков в многопользовательских сетях связи [1, 2].

В настоящее время для создания, развития и эксплуатации систем связи используются потоковые модели и специальные методы решения [3]. Математические модели передачи многопродуктового потока применяются для поиска недискриминирующих правил распределения ресурсов в многопользовательских системах связи [4]. На основе формализма многокритериальной оптимизации создаются методы анализа сетевых систем с учетом вектора требований всех равноправных и невзаимозаменяемых пользователей [5]. В рамках методологии исследования операций и теории игр рассматриваются *справедливые правила* распределения потоков и ресурсов:

решается задача на максимум и/или находятся гарантированные оценки [6–9]. В русле указанных работ лежат алгоритмические схемы получения уравнивающих распределений междуузловых потоков и выравнивания нагрузок, которые приведены в разд. 3 и 4. В разд. 5 обсуждаются результаты экспериментов и сравниваются достижимые междуузловые потоки при маршрутизации по кратчайшим путям и результирующие распределения при *расщепленной* SPLIT-маршрутизации [10–15]. Для решения оптимизационных многопродуктовых сетевых задач предлагаются специально разработанные алгоритмы [16–18]. В работе используется метод возможных направлений с полиномиальной оценкой вычислительных затрат [19–21].

1. Математическая модель. Для описания многопользовательской сетевой системы связи воспользуемся следующей математической записью модели передачи многопродуктового потока. Сеть G задается множествами $\langle V, R, U, P \rangle$: узлов (вершин) сети $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_N\}$; неориентированных ребер $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_E\}$; ориентированных дуг $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_{2E}\}$; пар узлов-корреспондентов $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$. Предполагается, что в сети отсутствуют петли и сдвоенные ребра.

Ребро $r_k \in R$ соединяет концевые вершины v_{n_k}, v_{j_k} . Каждому ребру r_k ставятся в соответствие две ориентированные дуги u_k, u_{k+E} из множества U . Дуги $\{u_k, u_{k+E}\}$ определяют прямое и обратное направления передачи потока по ребру r_k между концевыми вершинами v_{n_k}, v_{j_k} . Каждой паре узлов-корреспондентов p_m из множества P ставится в соответствие: вершина-источник с номером s_m , из s_m входной поток m -го вида поступает в сеть; вершина-приемник с номером t_m , из t_m поток m -го вида покидает сеть. Множество пар-корреспондентов P разбивается на два непересекающихся подмножества: смежных узлов-корреспондентов $P(R_+)$, расположенных в концевых вершинах ребра $r_k, k = \overline{1, E}$, и $P(R_-)$ – несмежных пар, для которых кратчайший маршрут соединения содержит более одного ребра:

$$P = P(R_+) \cup P(R_-), \quad P(R_+) \cap P(R_-) = \emptyset.$$

Далее изучается распределение ресурсов для пар-корреспондентов из множества $P(R_-)$.

В многопользовательской сети G рассматривается $M = N(N - 1)$ независимых, невзаимозаменяемых и равноправных междуузловых потоков различных видов. Обозначим через z_m величину *междузлого* потока m -го вида, поступающего в сеть из узла с номером s_m и покидающего сеть из узла с номером t_m ; $x_{mk}, x_{m(k+E)}$ – поток m -го вида по дугам u_k и u_{k+E} , согласно направлению передачи, $x_{mk} \geq 0, x_{m(k+E)} \geq 0, m = \overline{1, M}, k = \overline{1, E}$; $S(v_n)$ – множество номеров исходящих дуг, по ним поток покидает узел v_n ; $T(v_n)$ – множество номеров входящих дуг, по ним поток поступает в узел v_n . Состав множеств $S(v_n), T(v_n)$ однозначно формируется в ходе выполнения следующей процедуры. Пусть некоторое ребро $r_k \in R$ соединяет вершины с номерами n и j , такими, что $n < j$. Тогда ориентированная дуга $u_k = (v_n, v_j)$, направленная из вершины v_n в v_j , считается *исходящей* из вершины v_n и ее номер k заносится в множество $S(v_n)$, а дуга u_{k+E} , направленная из v_j в v_n , – *входящей* для v_n и ее номер $k + E$ помещается в список $T(v_n)$. Дуга u_k является *входящей* для v_j и ее номер k попадает в $T(v_j)$, а дуга u_{k+E} – *исходящей* и номер $k + E$ вносится в список исходящих дуг $S(v_j)$.

Во всех узлах сети $v_n \in V, n = \overline{1, N}$, для каждого вида потока должны выполняться условия сохранения потоков:

$$\sum_{i \in S(v_n)} x_{mi} - \sum_{i \in T(v_n)} x_{mi} = \begin{cases} z_m, & \text{если } v_n = v_{s_m}, \\ -z_m, & \text{если } v_n = v_{t_m}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}, \quad x_{mi} \geq 0, \quad z_m \geq 0.$$

Величина z_m равна входному междузловому потоку m -го вида, проходящему от источника к приемнику пары p_m при распределении потоков x_{mi} по дугам сети.

Каждому ребру $r_k \in R$ приписывается неотрицательное число d_k , определяющее суммарный предельно допустимый поток, который можно передать по ребру r_k в обоих направлениях. В ис-

ходной сети компоненты вектора пропускных способностей $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_E)$ – наперед заданные положительные числа $d_k > 0$. Вектор \mathbf{d} задает следующие ограничения на сумму потоков всех видов, передаваемые по ребру r_k одновременно:

$$\sum_{m=1}^M (x_{mk} + x_{m(k+E)}) \leq d_k, \quad x_{mk} \geq 0, \quad x_{m(k+E)} \geq 0, \quad k = \overline{1, E}. \quad (1.2)$$

В рамках данной модели пропускная способность ребер сети измеряется в условных единицах потока и трактуется как *ресурсное* ограничение. Сумма дуговых потоков (1.2) рассматривается как требование на предоставление ресурсов сети – пропускной способности ребер, необходимой при передаче межузловых потоков по данному ребру.

Для z_m, x_{mi} , удовлетворяющих условиям (1.1), (1.2), вычисляются суммарные потоки по ребрам сети:

$$y_m = \sum_{i=1}^{2E} x_{mi}, \quad m = \overline{1, M}. \quad (1.3)$$

Суммарный реберный поток y_m характеризует *нагрузку* на сеть при передаче межузлового потока величины z_m из узла-источника s_m в узел-приемник t_m . Величина y_m показывает, какая суммарная пропускная способность сети потребуется для передачи межузлового потока z_m . В рамках модели отношение реберных и межузловых потоков

$$w_m = \frac{y_m}{z_m}, \quad m = \overline{1, M},$$

можно трактовать как удельные затраты ресурсов сети при передаче единичного потока m -го вида между узлами s_m и t_m при соответствующих дуговых потоках x_{mi} .

Ограничения (1.1), (1.2) задают множество допустимых значений компонент вектора межузловых потоков $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m, \dots, z_M)$:

$$\mathcal{Z}(\mathbf{d}) = \{\mathbf{z} \geq 0 \mid \exists \mathbf{x} \geq 0 : (\mathbf{z}, \mathbf{x}) \text{ удовлетворяют (1.1), (1.2)}\}. \quad (1.4)$$

Допустимые распределения реберных потоков принадлежат подмножеству

$$Y(\mathbf{d}) = \{\mathbf{y} \geq 0 \mid (\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ удовлетворяют (1.1)–(1.3)}\}. \quad (1.5)$$

2. Маршрутизация межузловых потоков по кратчайшему путем. В рамках первой группы экспериментов проводится оценка минимальных удельных затрат. Для получения допустимых распределений межузловых потоков, передаваемых одновременно по кратчайшим маршрутам, используется следующая процедура. Выполнение каждой итерации разбивается на несколько этапов. На предварительном этапе шага t при заданных текущих значениях пропускной способности $d_k(t)$ для каждой пары несмежных узлов-корреспондентов $p_m \in P(R_-)$ определяется максимально допустимый однопродуктовый поток $z_m^0(t)$, который можно передать по кратчайшему маршруту $H_m^0(t)$, состоящему из минимального числа ребер $h_m^0(t)$ [22]. Маршрут $H_m^0(t)$ задается списком номеров ребер: $H_m^0(t) = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$.

При поиске максимально допустимого потока $z_m^0(t)$ на ребрах минимального маршрута $H_m^0(t)$ определяются дуговые потоки: $(x_{mk}^0(t), x_{m(k+E)}^0(t))$, $p_m \in P(R_-)$, $m = \overline{1, M}$, $k \in H_m^0(t)$, и результирующая реберная нагрузка:

$$y_m^0(t) = \sum_{k \in H_m^0(t)} [x_{mk}^0(t) + x_{m(k+E)}^0(t)] = h_m^0(t) z_m^0(t), \quad m = \overline{1, M}.$$

Вычисляются коэффициенты нормировки:

$$\theta_m^0(t) = \frac{1}{y_m^0(t)}, \quad \text{для всех } p_m \in P(R_-) \text{ таких, что } y_m^0(t) > 0.$$

Коэффициенты $\theta_m^0(t)$ используются для поиска равных *нагрузок* при передаче совместно допустимых дуговых потоков одновременно между всеми парами $p_m \in P(R_-)$.

Задача 1. Найти $\beta^*(t) = \max_{\beta}$

$$\text{при условиях } \beta \sum_{m \in R_{_}} \theta_m^0(t)(x_{mk}^0(t) + x_{m(k+E)}^0(t)) \leq d_k(t), k = \overline{1, E}.$$

На основании $\beta^*(t)$ (решения задачи 1) для несмежных пар определяются совместно допустимые дуговые потоки:

$$x_{mk}^*(t) = \beta^*(t)\theta_m^0(t)x_{mk}^0(t), \quad x_{m(k+E)}^*(t) = \beta^*(t)\theta_m^0(t)x_{m(k+E)}^0(t), \quad m \in R_{_}, \quad k = \overline{1, E}.$$

Полученные значения запоминаются и используются в дальнейшем при вычислении текущих и финальных распределений. Подсчитываются текущие реберные нагрузки:

$$y_m^*(t) = \beta^*(t) \sum_{k=1}^E \theta_m^0(t)(x_{mk}^0(t) + x_{m(k+E)}^0(t)) = \beta^*(t), \quad p_m \in P(R_{_}),$$

поскольку по определению

$$\frac{1}{\theta_m^0(t)} = y_m^0(t) = \sum_{k=1}^{2E} x_{mk}^0(t), \quad p_m \in P(R_{_}).$$

Таким образом определенная часть ресурса (пропускной способности сети) делится строго поровну между всеми корреспондентами, для которых существует маршрут передачи в сети $G(t)$ при текущих значениях $d_k(t)$, $k = \overline{1, E}$. Вычисляется *остаточная* пропускная способность ребер:

$$d_k(t+1) = d_k(t) - \sum_{m \in R_{_}} (x_{mk}^*(t) + x_{m(k+E)}^*(t)), \quad k = \overline{1, E},$$

и формируется сеть $G(t+1)$.

Если в сети $G(t+1)$ при поиске максимальных потоков окажется, что $z_m^0(t+1) = 0$ для всех $p_m \in P(R_{_})$, то происходит останов. Формируются массивы финальных данных $Y_y^*(T)$, $Z_y^*(T)$, где нижний индекс y указывает на распределение финальных нагрузок $y_m^*(T)$. Элементы множества $Y_y^*(T)$

$$y_m^*(T) = \sum_{\tau=1}^t y_m^*(\tau), \quad m \in R_{_},$$

численно равны ресурсам сети (пропускной способности) для передачи межузловых потоков:

$$z_m^*(T) = \sum_{\tau=1}^t \beta^*(\tau)\theta_m^0(\tau)z_m^0(\tau), \quad m \in R_{_},$$

из массива $Z_y^*(T)$. Значения остаточной пропускной способности $d_k^*(T) = d_k(t+1)$ для всех $k = \overline{1, E}$ заносятся в массив $D_y^*(T)$.

Описанная стратегия названа SRMF-процедурой от английского short – route – max – flow (получение *максимально возможного потока* $z_m^0(t)$, передаваемого по *кратчайшему пути*).

Для анализа функциональных возможностей сети в ходе выполнения второй серии экспериментов изучается *уравнительное* распределение межузловых потоков при передаче по кратчайшим маршрутам. При проведении экспериментов с помощью SRMF-процедуры на предварительном этапе каждой итерации t при заданных значениях пропускных способностей $d_k(t)$ определяется максимальный поток $z_m^0(t)$, который можно передать по кратчайшему маршруту $H_m^0(t)$.

Для каждой пары $p_m \in P(R_{_})$ вычисляются нормирующие коэффициенты:

$$\xi_m^0(t) = \frac{1}{z_m^0(t)} \quad \text{для всех } p_m \in P(R_{_}), \quad \text{таких, что } z_m^0(t) > 0, y_m^0(t) > 0.$$

Коэффициенты $\xi_m^0(t)$ используются далее для поиска текущих совместно допустимых квот на передачу межузловых потоков одновременно между всеми парами $p_m \in P(R_{_})$.

Задача 2. Найти $\alpha^*(t) = \max_{\alpha}$

при условиях $\alpha \sum_{m \in R_-} \xi_m^0(t)(x_{mk}^0(t) + x_{m(k+E)}^0(t)) \leq d_k(t)$, $k = \overline{1, E}$.

На основании $\alpha^*(t)$ (решения задачи 2) для каждого $m = \overline{1, M}$ находятся совместно допустимые дуговые потоки:

$$x_{mk}^*(t) = \alpha^*(t)\xi_m^0(t)x_{mk}^0(t), \quad x_{m(k+E)}^*(t) = \alpha^*(t)\xi_m^0(t)x_{m(k+E)}^0(t), \quad k = \overline{1, E}.$$

Полученные значения фиксируются и подсчитывается остаточная пропускная способность ребер в сети $G(t+1)$:

$$d_k(t+1) = d_k(t) - \sum_{m \in R_-} (x_{mk}^*(t) + x_{m(k+E)}^*(t)), \quad k = \overline{1, E}.$$

Если на шаге $(t+1)$ при поиске максимального потока на предварительном этапе в сети $G(t+1)$ все $z_m^0(t+1) = 0$ для всех $p_m \in P(R_-)$, то происходит останов и формируются массивы финальных значений $Y_z^*(T)$, $Z_z^*(T)$, $D_z^*(T)$, где индекс z указывает на распределение межзловых потоков $z_m^*(T)$. Элементы массива $D_z^*(T)$ – значения остаточной пропускной способности $d_k^*(T) = d_k(t+1)$ для всех $k = \overline{1, E}$; элементы $Z_z^*(T)$ – межзловые потоки

$$z_m^*(T) = \sum_{\tau=1}^t \alpha^*(\tau)\xi_m^0(\tau)z_m^0(\tau), \quad m \in R_-;$$

элементы $Y_z^*(T)$ – реберные нагрузки

$$y_m^*(T) = \sum_{\tau=1}^t \sum_{i=1}^E [x_{mi}^*(\tau) + x_{m(i+E)}^*(\tau)], \quad p_m \in P(R_-).$$

3. Маршрутизация межзловых потоков через минимальные разрезы. Третья серия экспериментов проводилась для оценки затрат ресурсов при передаче каждого межзлового потока одновременно по нескольким маршрутам. Для формирования различных маршрутов передачи использовались решения стандартной задачи поиска максимального однопродуктового потока и минимального разреза [19] для каждой пары узлов-корреспондентов. При реализации процедуры выполнение каждого шага разбивается на несколько этапов. На предварительном этапе шага t в сети $G(t)$ при заданных значениях пропускной способности ребер $d_k(t)$ для каждой пары узлов-корреспондентов $p_m \in P(R_-)$ определяется максимально допустимый однопродуктовый поток $z_m^0(t)$, соответствующие дуговые потоки $(x_{mk}^0(t), x_{m(k+E)}^0(t))$, $p_m \in P(R_-)$, и суммарная реберная нагрузка

$$y_m^0(t) = \sum_{k=1}^E (x_{mk}^0(t) + x_{m(k+E)}^0(t)), \quad p_m \in P(R_-).$$

Для каждой пары $p_m \in P(R_-)$ вычисляются коэффициенты нормировки:

$$\theta_m^0(t) = \frac{1}{y_m^0(t)} \quad \text{для всех } p_m \in P(R_-), \quad \text{таких, что } z_m^0(t) > 0, y_m^0(t) > 0.$$

Коэффициенты $\theta_m^0(t)$ используются далее для поиска совместно допустимых дуговых потоков для всех $p_m \in P(R_-)$.

Задача 3. Найти $\beta^{**}(t) = \max_{\beta}$

при условиях $\beta \sum_{m \in R_-} \theta_m^0(t)(x_{mk}^0(t) + x_{m(k+E)}^0(t)) \leq d_k(t)$, $k = \overline{1, E}$.

С помощью $\beta^{**}(t)$ (решения задачи 3) для каждого $m = \overline{1, M}$ находятся текущие допустимые значения дуговых потоков:

$$x_{mk}^{**}(t) = \beta^{**}(t)\theta_m^0(t)x_{mk}^0(t), \quad x_{m(k+E)}^{**}(t) = \beta^{**}(t)\theta_m^0(t)x_{m(k+E)}^0(t), \quad k = \overline{1, E},$$

и реберных нагрузок при одновременной передаче межузловых потоков:

$$y_m^{**}(t) = \sum_{i=1}^E [x_{mi}^{**}(t) + x_{m(i+E)}^{**}(t)] = \frac{\beta^{**}(t)}{y_m^0(t)} \sum_{i=1}^E [x_{mi}^0(t) + x_{m(i+E)}^0(t)] = \beta^{**}(t), \quad m \in R_.$$

Таким образом на каждом шаге определенная часть имеющегося ресурса (пропускной способности) делится строго поровну между всеми корреспондентами, для которых существует путь передачи в $G(t)$.

Вычисляется остаточная пропускная способность ребер в сети $G(t+1)$:

$$d_k(t+1) = d_k(t) - \sum_{m \in R_-} (x_{mk}^{**}(t) + x_{m(k+E)}^{**}(t)), \quad k = \overline{1, E}.$$

Если на предварительном этапе шага $(t+1)$ окажется, что все $z_m^0(t+1) = 0$ для всех $p_m \in P(R_-)$, то по аналогии с разд. 2 формируются массивы: $D_y^{**}(T)$ финальных значений остаточной пропускной способности

$$d_k^{**}(T) = d_k(t+1), \quad k = \overline{1, E};$$

$Y_y^{**}(T)$ финальных значений реберной нагрузки

$$y_m^{**}(T) = \sum_{\tau=1}^t y_m^{**}(\tau), \quad m = \overline{1, M},$$

численно равные ресурсам сети, необходимым для передачи межузловых потоков:

$$z_m^{**}(T) = \sum_{\tau=1}^t \beta^{**}(\tau)\theta_m^0(\tau)z_m^0(\tau), \quad m \in R_.$$

Финальные значения $z_m^{**}(T)$ образуют массив $Z_y^{**}(T)$.

Описанная стратегия названа MFMC-процедурой от английского max – flow – min – cut (получение *максимально возможного потока* $z_m^0(t)$, передаваемого по всем возможным путям, проходящим через *минимальный разрез*).

Четвертая серия экспериментов проводилась с помощью MFMC-стратегии для оценки функциональных возможностей системы при передаче межузловых потоков по нескольким маршрутам. На предварительном этапе шага t в сети $G(t)$ при заданных значениях пропускной способности ребер $d_k(t)$ для каждой пары узлов-корреспондентов $p_m \in P(R_-)$ определяется максимально допустимый однопродуктовый поток $z_m^0(t)$, соответствующие дуговые потоки $(x_{mk}^0(t), x_{m(k+E)}^0(t))$, $p_m \in P(R_-)$, и коэффициенты нормировки

$$\xi_m^0(t) = \frac{1}{z_m^0(t)} \quad \text{для всех } p_m \in P(R_-), \quad \text{таких, что } z_m^0(t) > 0, y_m^0(t) > 0.$$

Коэффициенты $\xi_m^0(t)$ используются для поиска текущих совместно допустимых квот на передачу потоков одновременно между всеми парами $p_m \in P(R_-)$.

Задача 4. Найти $\alpha^{**}(t) = \max_{\alpha}$

при условиях $\alpha \sum_{m \in R_-} \xi_m^0(t) (x_{mk}^0(t) + x_{m(k+E)}^0(t)) \leq d_k(t), \quad k = \overline{1, E}.$

На основании $\alpha^*(t)$ (решения задачи 4) вычисляются совместно допустимые дуговые потоки:

$$x_{mk}^{**}(t) = \alpha^*(t)\xi_m^0(t)x_{mk}^0(t), \quad x_{m(k+E)}^{**}(t) = \alpha^*(t)\xi_m^0(t)x_{m(k+E)}^0(t), \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, E},$$

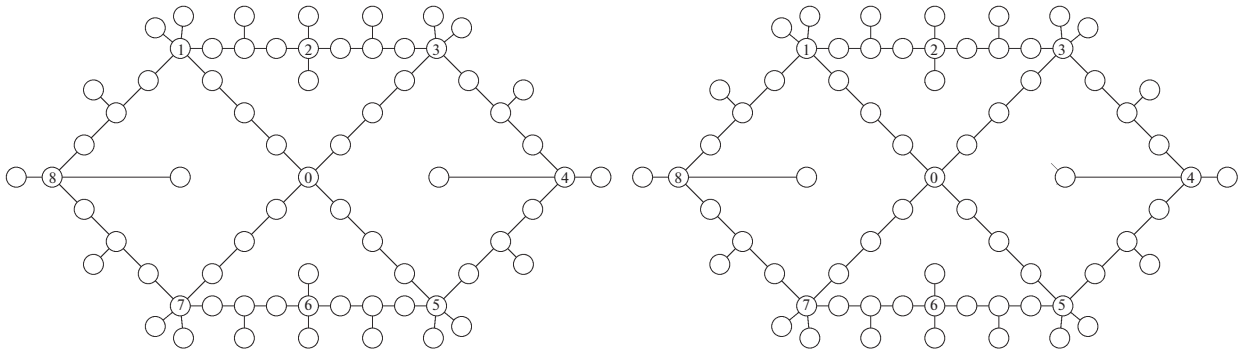


Рис. 1. Базовая и кольцевая сети

и остаточная пропускная способность ребер в сети $G(t + 1)$:

$$d_k(t + 1) = d_k(t) - \sum_{m \in R_-} (x_{mk}^{**}(t) + x_{m(k+E)}^{**}(t)), \quad k = \overline{1, E}.$$

Если на предварительном этапе шага $(t + 1)$ окажется, что $z_m^0(t + 1) = 0$ для всех $p_m \in P(R_-)$, то происходит останов и формируются массивы финальных данных. По аналогии с разд. 2 значения остаточных пропускных способностей $d_k^{**}(T) = d_k(t + 1)$ для всех $k = \overline{1, E}$ помещаются в массив $D_z^{**}(T)$. Найденные значения межузловых потоков

$$z_m^{**}(T) = \sum_{\tau=1}^t \alpha^{**}(\tau) \xi_m^0(\tau) z_m^0(\tau), \quad m \in R_-,$$

заносятся в массив $Z_z^{**}(T)$ и подсчитываются

$$y_m^{**}(T) = \sum_{\tau=1}^t \sum_{k=1}^E [x_{mk}^{**}(\tau) + x_{m(k+E)}^{**}(\tau)], \quad m \in R_-,$$

– ресурсы сети (пропускные способности ребер), необходимые для передачи межузловых потоков $z_m^{**}(T)$. Значения $y_m^{**}(T)$ формируют массив $Y_z^{**}(T)$.

4. Вычислительный эксперимент. Вычислительные эксперименты проводились на моделях сетевых систем, представленных на рис. 1 (слева – базовая сеть, справа – кольцевая). В каждой сети имеется 69 узлов. Пропускные способности ребер d_k выбираются случайным образом из отрезка $[900, 999]$ и совпадают для ребер, присутствующих в обеих сетях. В кольцевой сети пропускная способность каждого из добавленных ребер равна 900.

Далее на диаграммах и в табл. 1 для обозначения элементов массивов $Y_y^*(T)$ введена запись y^* ; $Z_y^*(T) - z(y^*)$ (поскольку значения межузловых потоков подсчитывается с учетом распределения $y_m^*(T)$); $Y_z^*(T) - y(z^*)$; $Z_z^*(T) - z^*$; $Y^{**}(T) - y^{**}$; $Z_y^{**}(T) - z(y^{**})$; $Y_z^{**}(T) - y(z^{**})$; $Z_z^{**}(T) - z^{**}$.

Таблица 1

Сеть	Базовая				Кольцевая			
	SRMF-стратегия		MFMC-стратегия		SRMF-стратегия		MFMC-стратегия	
Медиан потоков	z^*	$z(y^*)$	z^{**}	$z(y^{**})$	z^*	$z(y^*)$	z^{**}	$z(y^{**})$
Медиан нагрузок	1.2	1.2	1	1.1	1.8	1.7	1.4	1.4
Удельные значения	$y(z^*)$	y^*	$y(z^{**})$	y^{**}	$y(z^*)$	y^*	$y(z^{**})$	y^{**}
	11.2	9.9	11.1	10.8	12.9	13.2	12.5	12.6
	$y(z^*)/z^*$	$y^*/z(y^*)$	$y(z^{**})/z^{**}$	$y^{**}/z(y^{**})$	$y(z^*)/z$	$y^*/z(y^*)$	$y(z^{**})/z^{**}$	$y^{**}/z(y^{**})$
	9.3	8.3	10.8	9.8	7.2	7.8	8.9	9.0

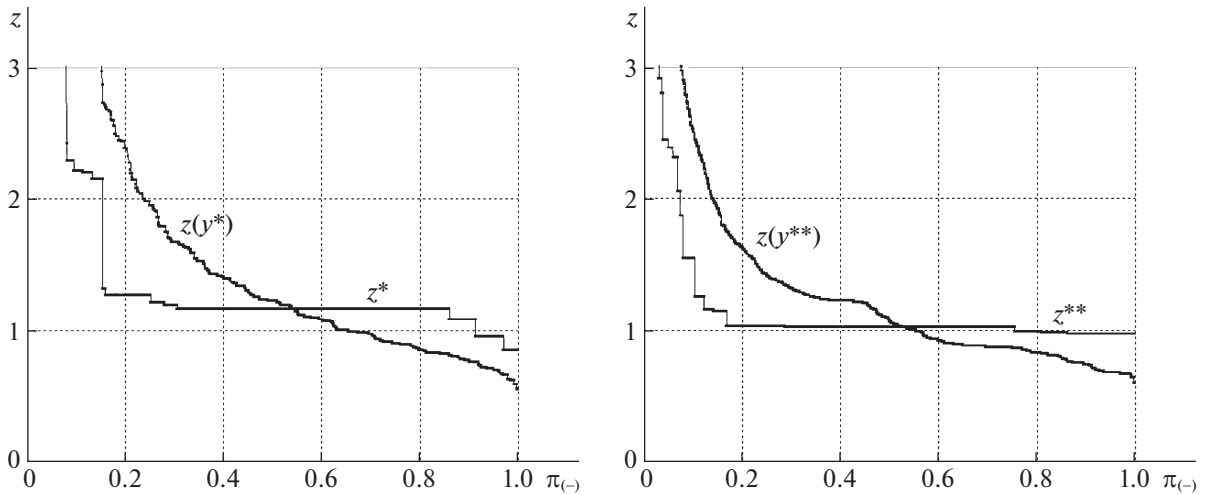


Рис. 2. Маршрутизация межузловых потоков в базовой сети по кратчайшим путям и через минимальные разрезы

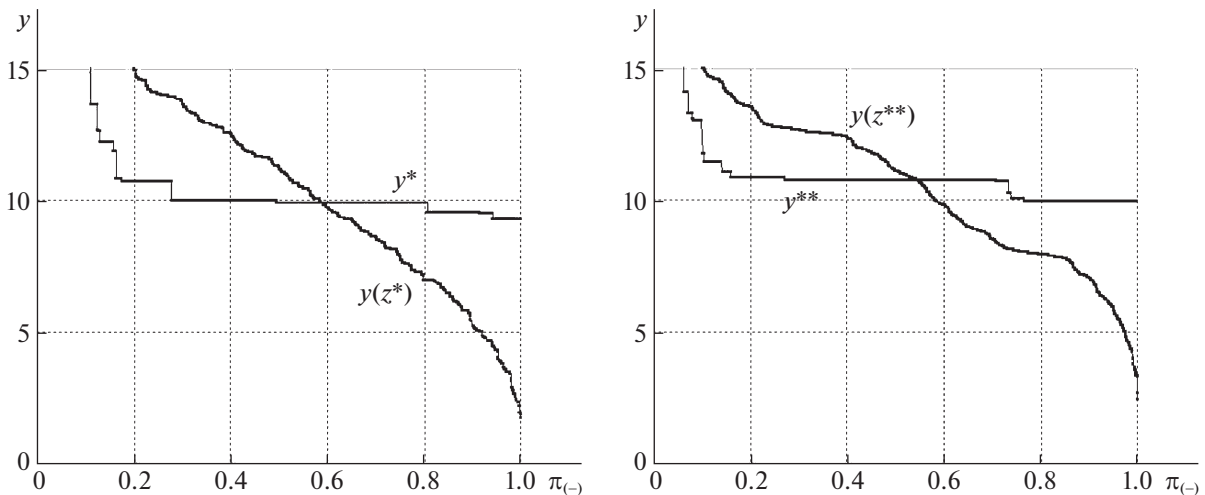


Рис. 3. Межузловые нагрузки при маршрутизации межузловых потоков в базовой сети по кратчайшим путям и через минимальные разрезы

На рис. 2, 3 представлены финальные значения межузловых потоков и соответствующих нагрузок, полученных в результате выполнения SRMF- и MFMC-процедур, для базовой сети. Значения финальных потоков и нагрузок упорядочиваются от большего к меньшему (по невозрастанию). По горизонтальной оси указываются относительные порядковые номера корреспондентов в упорядоченных последовательностях:

$$\pi_-(m) = \frac{m}{M_-} \quad \text{для всех } p_m \in P(R_-),$$

где $M_- = |P(R_-)|$ – число элементов в подмножестве $P(R_-)$.

Диаграммы на рис. 3 свидетельствуют, что нагрузку для 80% несмежных пар корреспондентов удастся распределить почти равномерно при использовании как SRMF-, так и MFMC-стратегии. Аналогичная зависимость наблюдается и на рис. 2 для потоков.

На всех диаграммах слева для 20% пар корреспондентов наблюдаются нарушения равномерного распределения. Дело в том, что при выполнении как SRMF-, так и MFMC-процедуры после 30-й итерации пропускная способность многих ребер становится равной нулю, текущая

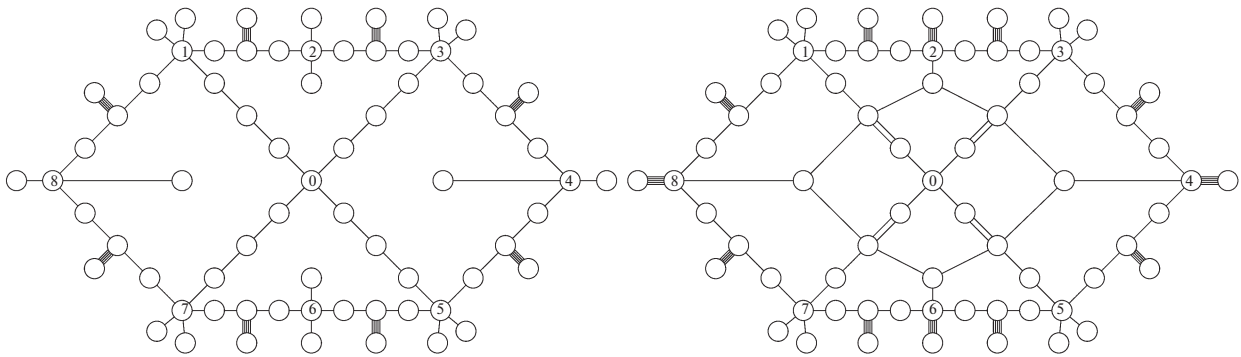


Рис. 4. Загрузка базовой и кольцевой сетей

сеть $G(t)$ распадается на несколько связных компонент. Вследствие этого для многих пар максимальный поток оказывается равным нулю, а остаточная пропускная способность распределяется между оставшимися корреспондентами. При уравнительном распределении остаточной пропускной способности среди небольшого числа пар результирующие финальные значения потоков и нагрузок резко возрастают.

Из сравнения диаграмм на рис. 2 для межузловых потоков следует, что медианные значения для SRMF-процедуры практически совпадают, как и для MFMC-стратегии. При этом медианные значения потоков для SRMF-процедуры превосходят медианные значения для MFMC-стратегии. Таким образом распределение по кратчайшим путям позволяет достичь больших значений межузловых потоков для большего числа пар. MFMC-стратегия при передаче каждого межузлового потока использует большее число путей и требует больших удельных затрат пропускной способности.

Последнее иллюстрируют диаграммы распределения нагрузок (рис. 3). В рамках модели величины нагрузок численно равны суммарным значениям пропускных способностей на всех маршрутах передачи каждого межузлового потока. Результирующие затраты ресурсов больше для MFMC-стратегии и распределении межузловых потоков по всем ребрам минимальных разрезов.

В таблице собраны значения медиан нагрузок и межузловых потоков при различных стратегиях маршрутизации. Для базовой сети и SRMF-стратегии достигнутые значения потоков оказываются чуть выше, чем для MFMC-стратегии, а удельные затраты — меньше для кратчайших маршрутов передачи. Удельные затраты выше при передаче межузловых потоков по большему числу путей. Для кольцевой сети из таблицы следует, что увеличение пропускной способности и структурной связности в центральной части сети позволяет увеличить медианные значения межузловых потоков и снизить удельные затраты ресурсов при передаче. Предлагаемые методы позволяют оценить соответствующие изменения функциональных характеристик при смене маршрутизации.

На рис. 4 указана загрузка ребер сети $G(t)$ после выполнения 41 итерации как SRMF-, так и MFMC-процедуры. Тонкими линиями изображены ребра, остаточная пропускная способность которых не превышает 3% от исходной: $d_k(41) \leq 0.03d_k(1)$. Жирными линиями изображены ребра с остаточной пропускной способностью более 70% от исходной: $0.7d_k(1) \leq d_k(41)$. Таким образом узким местом сети при одновременной передаче всех потоков для всех пар $p_m \in P(R)$ являются все ребра центральной части сети.

На рис. 5, 6 представлены результаты расчетов для кольцевой сети. Из диаграмм рис. 5, 6 следует, что использование SRMF-стратегии не позволяет получить распределения межузловых потоков и нагрузок, соответствующих *уравнительному* правилу. Ступенчатые диаграммы с большим шагом показывают, что уже на начальных итерациях происходит разрыв сети на отдельные компоненты и для значительного числа пар в сетях $G(t)$ не существует путей передачи потока.

Заключение. Изучались распределения межузловых потоков разных видов. Предполагалось, что все пары корреспондентов равноправны, соответствующие потоки невзаимозаменяемы, а требования пользователей неизвестны. В условиях указанной неопределенности проводилась оценка *характеристической* величины допустимого потока, одинакового для всех пар корреспондентов. В ходе экспериментов для определения оценок *характеристических* величин

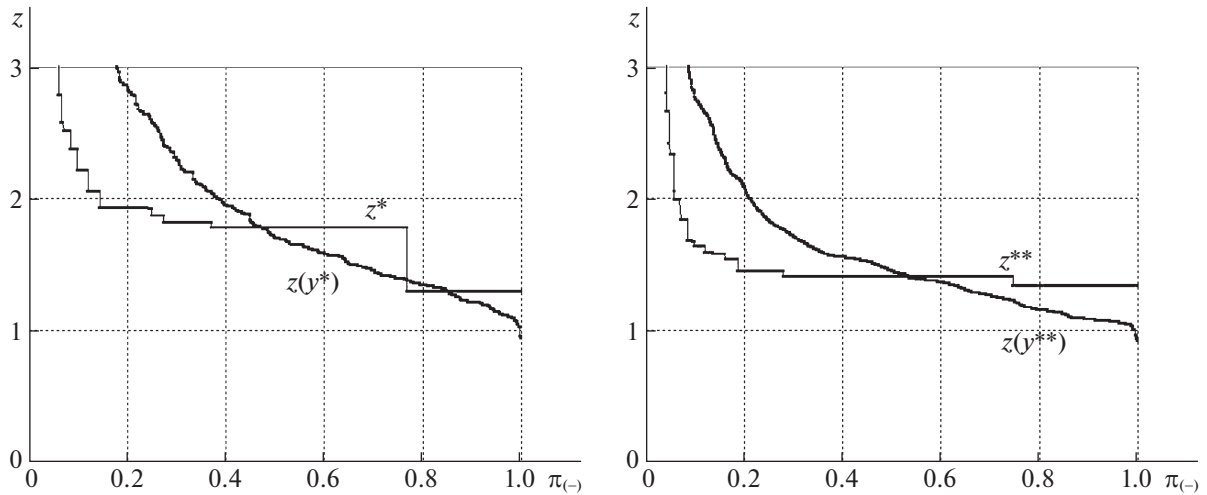


Рис. 5. Маршрутизация межузловых потоков в кольцевой сети по кратчайшим путям и через минимальные разрезы

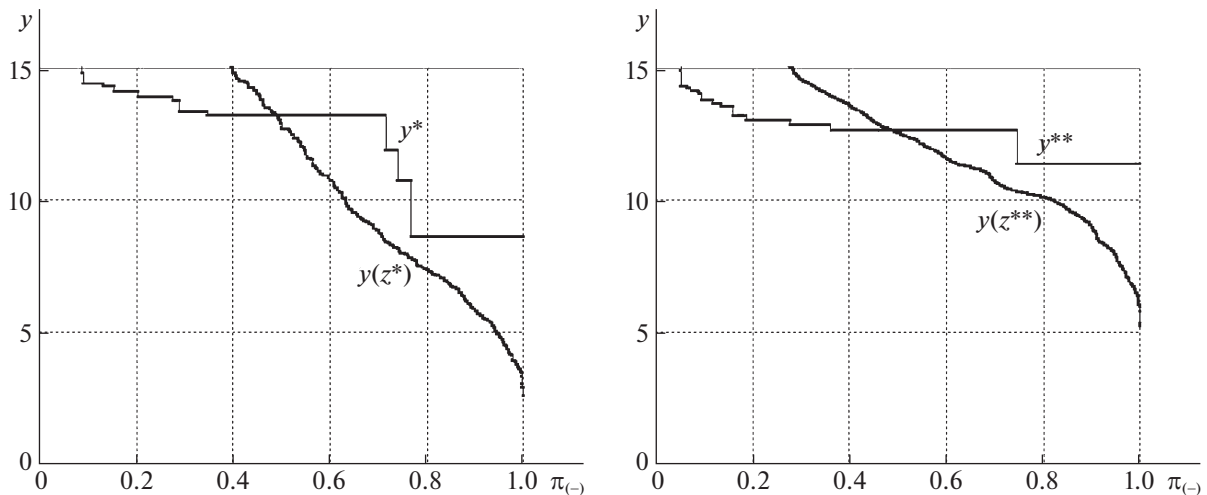


Рис. 6. Межузловые нагрузки при маршрутизации межузловых потоков в кольцевой сети по кратчайшим путям и через минимальные разрезы

анализировались финальные значения потоков при последовательном уравнительном предельном распределении ресурсов. На каждом шаге при выполнении вычислительной процедуры остаточный ресурс распределялся строго поровну между парами-корреспондентами. В рамках модели пропускные способности ребер рассматривались как вектор ресурсов различных типов, которые распределяются между корреспондентами при передаче потоков различных видов. Полученные значения медиан распределений как потоков, так и пропускных способностей можно интерпретировать как представительные оценки функциональных возможностей сети в условиях неопределенности и однородности корреспондентов. Все межузловые потоки, не превышающие медианных значений, можно передать в сети одновременно. Для последних наблюдается небольшой разброс при разных правилах маршрутизации. Финальные потоки при предельных распределениях для 80% пар практически равны медианным, хотя средние показатели сильно отличаются. Для 20% пар финальные значения при предельных распределениях на порядок, а для 2% пар – на два порядка превышают медианные значения. Выделенная группа *привилегированных пользователей* и большая остаточная пропускная способность на ребрах, ведущих к висячим вершинам, указывают на возможное несоответствие структуры сети эффективному использованию ресурсов при передаче однородных межузловых потоков в стационарном режиме.

Полученные медианы являются представительной оценкой распределений с равными значениями потоков в условиях неопределенности. В рамках модели указанные медианы можно трактовать как нормативные характеристики при работе сети в стационарном режиме при однородных нагрузках в заданном диапазоне. Анализ всех промежуточных результатов экспериментов позволяет априори предложить рекомендации по рандомизации маршрутов передачи для всех корреспондентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малашенко Ю.Е., Назарова И.А. Оценки распределения потоков при предельной нагрузке многопользовательской сети // Системы и средства информатики. 2020. Т. 30. № 3. С. 4–14.
2. Малашенко Ю.Е., Назарова И.А. Анализ распределения предельных нагрузок в многопользовательской сети // Информатика и ее применения. 2021. Т. 15. Вып. 4. С. 20–26.
3. Salimifard K., Bigharaz S. The Multicommodity Network Flow Problem: State of the Art Classification, Applications, and Solution Methods // J. Oper. Res. Int. 2020. V. 22. Iss. 2. P. 1–47.
4. Luss H. Equitable Resource Allocation: Models, Algorithms, and Applications. Hoboken: John Wiley & Sons, 2012.
5. Balakrishnan A., Li G., Mirchandani P. Optimal Network Design with End-to-End Service Requirements // Oper. Res. 2017. V. 65. Iss. 3. P. 729–750.
6. Hahne E.L. Round-Robin Scheduling for Max-Min Fairness in Data Networks // IEEE J. on Selected Areas in Communications. 1991. V. 9. Iss. 7. P. 1024–1039.
7. Radunovic B., Le Boudec J.-Y. A Unified Framework for Max-Min and Min-Max Fairness With Applications // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2007. V. 15. Iss. 5. P. 1073–1083.
8. Nace D., Doan L.N., Klopfenstein O. et al. Max-min Fairness in Multicommodity Flows // Comput. Oper. Res. 2008. V. 35. Iss. 2. P. 557–573.
9. Ros-Giralt J., Tsai W.K. A Lexicographic Optimization Framework to the Flow Control Problem // IEEE Transactions on Information Theory. 2010. V. 56. Iss. 6. P. 2875–2886.
10. Ramaswamy R., Orlin J.B., Chakravarti N. Sensitivity Analysis for Shortest Path Problems and Maximum Capacity Path Problems in Undirected Graphs // Math. Prog. 2005. V. 102. Iss. 2. P. 355–369.
11. Masri H., Krichen S., Guitouni A. A Multi-start Variable Neighborhood Search for Solving the Single Path Multicommodity Flow Problem // Appl. Math. Comput. 2015. V. 251. P. 132–142.
12. Masri H., Krichen S., Guitouni A. Metaheuristics for Solving the Bi-objective Single-Path Multicommodity Communication Flow Problem // Int. Trans. Oper. Res. 2019. V. 26. Iss. 2. P. 589–614.
13. Baier G., Kohler E., Skutella M. The k-Splittable Flow Problem // Algorithmica. 2005. V. 42. Iss. 3–4. P. 231–248.
14. Kabadurmus O., Smith A.E. Multicommodity k-Splittable Survivable Network Design Problems with Relays // Telecommun. Syst. 2016. V. 62. Iss. 1. P. 123–133.
15. Bialon P. A Randomized Rounding Approach to a k-Splittable Multicommodity Flow Problem with Lower Path Flow Bounds Affording Solution Quality Guarantees // Telecommun. Syst. 2017. V. 64. Iss. 3. P. 525–542.
16. Ogryczak W., Luss H., Pioro M. et al. Fair Optimization and Networks: A Survey // J. Appl. Math. 2014. V. 3. P. 1–25.
17. Hajjem M., Bouziri H., Talbi E.-G. A Metaheuristic Framework for Dynamic Network Flow Problems // Recent Developments in Metaheuristics. Operations Research/Computer Science Interfaces Series. V. 62. Cham: Springer, 2018. P. 285–304.
18. Leighton T., Makedon F., Plotkin S. et al. Fast Approximation Algorithms for Multicommodity Flow Problems // J. Comput. Syst. Sci. 1995. V. 50. Iss. 2. P. 228–243.
19. Йенсен П., Барнес Д. Потокное программирование. М.: Радио и связь, 1984.
20. Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л. и др. Алгоритмы: построение и анализ. М.: Вильямс, 2005.
21. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
22. Бергс К. Теория графов и ее применения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

УДК 519.81

**СОГЛАСОВАНИЕ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ РАНЖИРОВОК
МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ**© 2022 г. В. Н. Нефедов^{а,*}, В. А. Осипова^{а,**}^а МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

*e-mail: nefedovvn54@yandex.ru

**e-mail: victoria.a.osipova@gmail.com

Поступила в редакцию 02.03.2022 г.

После доработки 03.04.2022 г.

Принята к публикации 30.05.2022 г.

В задаче коллективного выбора предлагается алгоритм построения оптимальной агрегированной ранжировки, наиболее близкой ко всем индивидуальным строгим ранжировкам в смысле медианы Кемени. Применение метода ветвей и границ позволяет решать задачи большой размерности, а также может использоваться в случае, когда индивидуальные предпочтения являются произвольными бинарными отношениями.

DOI: 10.31857/S0002338822060142

Введение. Рассматривается реляционная модель коллективного выбора, состоящая в отыскании результирующей ранжировки, в максимальной степени учитывающей индивидуальные предпочтения, которые могут быть описаны индивидуальными ранжировками.

Различные подходы к агрегированию индивидуальных предпочтений в рамках реляционной модели группового выбора описаны в многочисленных работах, начиная с основанных на классических идеях Ш. Борда и Н. Кондорсе, затем на концепции рационального коллективного выбора, реализованной в аксиоматическом подходе К. Эрроу, а также методах, использующих понятие близости бинарных отношений [1–5].

В работе для нахождения оптимальной агрегированной ранжировки предлагается применить метод ветвей и границ для построения медианы Кемени, являющейся наиболее близкой ко всем индивидуальным ранжировкам и тем самым отражающей консенсус между индивидуальными предпочтениями. Для нахождения медианы Кемени известны эвристические методы и точные методы дискретной оптимизации, разработанные, в частности, в [4, 6–8]. При этом точные переборные методы хорошо применимы в ограниченной постановке, а эвристические методы (например, алгоритм Кука–Сейфорда, медиана Литвака в пространстве векторов предпочтений) используют различные эвристики и способы определения ранга вариантов. Окончательное ранжирование может дать разные результаты в зависимости от выбора эвристического метода и, в частности, отличаться от результата точного метода.

Предлагаемый алгоритм значительно уменьшает перебор в этой экспоненциальной задаче, позволяет решать задачи большой размерности, что иллюстрируется приведенными результатами. Некоторые другие идеи метода, на котором основан этот алгоритм, можно найти в [9].

Для работы алгоритма не требуется специальных ограничений на исходные бинарные отношения, задающие индивидуальные предпочтения. Это могут быть не только линейные порядки или квазипорядки, но и произвольные бинарные отношения, заданные как совокупности упорядоченных пар. В данной работе авторы не рассматривают вопросы, связанные с интерпретацией и возможным практическом приложении подобных обобщений.

1. Рациональный коллективный выбор в реляционной модели агрегирования индивидуальных предпочтений. Проблема рационального коллективного выбора в рамках реляционной модели агрегирования индивидуальных предпочтений формулируется следующим образом, например в [4]. Группа из m лиц рассматривает несколько возможных вариантов (альтернатив) $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

решения некоторой проблемы. Индивидуальные предпочтения членов группы выражаются ранжированиями, строгими или нестрогими, и задают профиль $\langle \rho_1, \dots, \rho_m \rangle$ бинарных отношений на A .

Обозначим через $LO[n]$ совокупность всех линейных порядков на A , т.е. бинарных отношений на A , являющихся одновременно рефлексивными, антисимметричными, транзитивными и линейными. Под строгим ранжированием понимается любое отношение из $LO[n]$, для нестрогого ранжирования необязательно условие антисимметричности. Расстояние между бинарными отношениями $\rho, \rho' \subseteq A \times A$ с матрицами $R(\rho) = \|r_{ij}\|_{n \times n}$, $R(\rho') = \|r'_{ij}\|_{n \times n}$, где $r_{ij}, r'_{ij} \in \{0, 1\}$, будем задавать метрикой Хемминга:

$$d(\rho, \rho') = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |r_{ij} - r'_{ij}|.$$

В качестве реляционного правила агрегирования предлагается выбрать медиану Кемени, т.е. результирующую строгую ранжировку, "наиболее близкую" в смысле метрики Хемминга к индивидуальным ранжировкам. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к нахождению линейной ранжировки $\hat{\rho} \in LO[n]$, минимизирующей функцию

$$D(\rho) = \sum_{t=1}^m d(\rho, \rho_t),$$

т.е.

$$\hat{\rho} \in \text{Arg min}_{\rho \in LO[n]} D(\rho). \quad (1.1)$$

В общем случае такая ранжировка может оказаться неединственной и потребуются нахождение всего множества

$$\text{Arg min}_{\rho \in LO[n]} D(\rho). \quad (1.2)$$

2. Применение метода ветвей и границ для получения результирующей ранжировки. Опишем метод ветвей и границ и предложенный алгоритм для нахождения результирующей ранжировки (1.1). Целевой функцией является $D(\rho)$, и мы ищем либо любое $\hat{\rho}$, удовлетворяющее (1.1), либо все множество (1.2). При этом, как показано в [9], в случае $|\text{Arg min}_{\rho \in LO[n]} D(\rho)| > 1$ при наличии дополнительной информации можно выделить единственную ранжировку либо множественность решений указывает на эквивалентность некоторых групп вариантов.

Для дальнейшего понадобятся некоторые обозначения и утверждения. Пусть $R^t(\rho) = \|r^t_{ij}\|_{n \times n}$ — матрица бинарного отношения ρ_t , $t = \overline{1, m}$,

$$P = \sum_{t=1}^m R^t = \|p_{ij}\|_{n \times n}, \quad P^{(1)} = \|p^{(1)}_{ij}\|_{n \times n} = \|m - p_{ij}\|_{n \times n}, \quad P^* = \|p^*_{ij}\|_{n \times n} = \|\min(p_{ij}, p^{(1)}_{ij})\|_{n \times n},$$

т.е. $p^{(1)}_{ij} = m - p_{ij}$, $p^*_{ij} = \min(p_{ij}, p^{(1)}_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$. Тогда, очевидно, что

$$\sum_{t=1}^m |0 - r^t_{ij}| = \sum_{t=1}^m r^t_{ij} = p_{ij}, \quad \sum_{t=1}^m |1 - r^t_{ij}| = \sum_{t=1}^m (1 - r^t_{ij}) = m - \sum_{t=1}^m r^t_{ij} = m - p_{ij} = p^{(1)}_{ij}. \quad (2.1)$$

Рассмотрим бинарное отношение $\tilde{\rho}$ с матрицей $R(\tilde{\rho}) = \|\tilde{r}_{ij}\|_{n \times n}$, построенное из $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ по следующему правилу: $\tilde{r}_{ij} = 1 \Leftrightarrow p_{ij} \geq m/2$, $i, j = \overline{1, n}$. Тогда в силу (2.1)

$$\sum_{t=1}^m |\tilde{r}_{ij} - r^t_{ij}| = \min_{r \in \{0, 1\}} \sum_{t=1}^m |r - r^t_{ij}| = p^*_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (2.2)$$

Для доказательства (2.2) достаточно рассмотреть случаи:

а) $\tilde{r}_{ij} = 1$. Тогда $p_{ij} \geq m/2 \Rightarrow 2p_{ij} \geq m \Rightarrow p_{ij} \geq m - p_{ij} = p_{ij}^{(1)}$, откуда, используя (2.1), получаем

$$\sum_{t=1}^m |\tilde{r}_{ij} - r_{ij}^t| = p_{ij}^{(1)} = \min(p_{ij}, p_{ij}^{(1)}) = p_{ij}^*.$$

б) $\tilde{r}_{ij} = 0$. Тогда $p_{ij} \leq m/2 \Rightarrow 2p_{ij} \leq m \Rightarrow p_{ij} \leq m - p_{ij} = p_{ij}^{(1)}$, откуда, используя (2.1), получаем

$$\sum_{t=1}^m |\tilde{r}_{ij} - r_{ij}^t| = p_{ij} = \min(p_{ij}, p_{ij}^{(1)}) = p_{ij}^*.$$

Определим на множестве произвольных бинарных отношений ρ на множестве A с $R(\rho) = \|r_{ij}\|_{n \times n}$ (т.е. при любом выборе $r_{ij} \in \{0, 1\}$, $i, j = \overline{1, n}$) минимально возможное значение величины

$$D_i(\rho) = \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^n |r_{ij} - r_{ij}^t| = \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^m |r_{ij} - r_{ij}^t|.$$

В силу (2.2), это значение достигается при $r_{ij} = \tilde{r}_{ij}$, $j = \overline{1, n}$. Обозначив минимально возможное значение величины $D_i(\rho)$ через α_i , получаем, что

$$\alpha_i = \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^n |\tilde{r}_{ij} - r_{ij}^t| = D_i(\tilde{\rho}), \quad i = \overline{1, n}, \quad D(\tilde{\rho}) = \sum_{i=1}^n D_i(\tilde{\rho}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

При этом $D(\tilde{\rho})$ – минимально возможное значение величины $D(\rho)$ для всех бинарных отношений ρ на множестве A . Используя (2.2), имеем

$$\alpha_i = \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^n |\tilde{r}_{ij} - r_{ij}^t| = \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^m |\tilde{r}_{ij} - r_{ij}^t| = \sum_{j=1}^n p_{ij}^*, \quad i = \overline{1, n}.$$

Допустимыми решениями (последовательностями) являются последовательности альтернатив $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \rangle$, где $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\} = A$, т.е. перестановки множества A , каждая из которых соответствует некоторой ранжировке, т.е. линейному порядку вида $a_{i_1} \succ a_{i_2} \succ \dots \succ a_{i_{n-1}} \succ a_{i_n}$ (или, что то же самое, вида $a_{i_n} \prec a_{i_{n-1}} \prec \dots \prec a_{i_2} \prec a_{i_1}$) на A , где a_{i_1} (соответственно a_{i_n}) – наибольший (наименьший) элемент в этом линейном порядке. Множество возможных решений описывается n деревьями, каждое из которых имеет начальную вершину (1-го уровня), соответствующую некоторой альтернативе a_{i_1} , $i_1 = 1, 2, \dots, n$. Каждая вершина a_{i_1} 1-го уровня соединяется ребрами со всеми вершинами $a_{i_2} \in A \setminus \{a_{i_1}\}$ 2-го уровня. Каждая вершина $a_{i_2} \in A \setminus \{a_{i_1}\}$ 2-го уровня соединяется ребрами со всеми вершинами из множества $A \setminus \{a_{i_1}, a_{i_2}\}$ 3-го уровня и т.д., пока не дойдем до вершин последнего n -го уровня. Объединение этих деревьев дает лес \mathcal{L} допустимых решений. Единственная цепь, соединяющая в \mathcal{L} любую вершину a_{i_n} n -го уровня с одной из вершин 1-го уровня, дает нам одно из допустимых решений $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \rangle$, где a_{i_1} – вершина 1-го уровня, а a_{i_n} – вершина n -го уровня. Кроме того, каждой промежуточной вершине a_{i_k} k -го уровня, где $k = 2, n-1$, аналогичным образом ставим в соответствие последовательность $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \rangle$, однозначно определяемую единственной цепью, соединяющей a_{i_k} с некоторой (единственной) вершиной a_{i_1} 1-го уровня. Такие последовательности также будем называть допустимыми. Тем самым каждая вершина a_{i_k} k -го уровня, где $k = \overline{1, n-1}$, определяет множество допустимых решений, а именно последовательностей вида

$$\left\langle \underbrace{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}}_{1\text{-я часть}}, \underbrace{a_{i_{k+1}}, \dots, a_{i_n}}_{2\text{-я часть}} \right\rangle,$$

продолжающих (т.е. с одинаковой первой частью последовательности длины k) допустимую последовательность $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \rangle$. Воспользуемся величинами α_i для получения нижних оценок для $D(\rho)$ на множествах допустимых решений, соответствующих каждой промежуточной вершине в L . Очевидно, что величина

$$D(\tilde{\rho}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i$$

является нижней оценкой для множества всех допустимых решений. Приведем теперь нижние оценки величины $D(\rho)$ для вершин 1-го уровня. Нижние оценки будут уточняться по мере увеличения номера уровня вершин. Каждая вершина a_i 1-го уровня соответствует выбору альтернативы a_i в качестве наибольшего элемента. Это полностью определяет величину

$$D_i(\rho) = \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^n |r_{ij} - r_{ij}^t|$$

для всех линейных порядков ρ на A с наибольшим элементом a_i , которую обозначим через β_i , поскольку в силу такого выбора для $R(\rho) = \|r_{ij}\|_{m \times n}$ выполняется $r_{ii} = 1$, $r_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Следовательно, используя (2.1), получаем

$$\begin{aligned} \beta_i = D_i(\rho) &= \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^n |r_{ij} - r_{ij}^t| = \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^m |r_{ij} - r_{ij}^t| = \\ &= \sum_{t=1}^m |1 - r_{ii}^t| + \sum_{j \neq i} \sum_{t=1}^m |0 - r_{ij}^t| = p_{ii}^{(1)} + \sum_{j \neq i} p_{ij}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Но тогда можно уточнить нижние оценки величины $D(\rho)$ для допустимых решений, соответствующих выбору a_i в качестве вершины 1-го уровня, т.е. решений, соответствующих дереву с начальной вершиной a_i . Это будет величина

$$\beta_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j, \quad i = \overline{1, n}$$

(т.е. в качестве нижней оценки для

$$D(\rho) = D_i(\rho) + \sum_{j=1, j \neq i}^n D_j(\rho)$$

взяли сумму точного значения величины $\beta_i = D_i(\rho)$ для всех решений, соответствующих этому дереву, и сумму нижних оценок α_j для остальных $D_j(\rho)$).

Заметим далее, что выбор некоторой альтернативы a_i в качестве вершины последнего n -го уровня соответствует выбору альтернативы a_i в качестве наименьшего элемента, а это полностью определяет величину

$$D_i(\rho) = \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^n |r_{ij} - r_{ij}^t|$$

для всех линейных порядков ρ на A с наименьшим элементом a_i , которую обозначим через γ_i , поскольку в силу такого выбора для $R(\rho) = \|r_{ij}\|_{m \times n}$ выполняется $r_{ij} = 1$, $j = \overline{1, n}$. Тогда, используя (2.1), получаем

$$\gamma_i = D_i(\rho) = \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^n |r_{ij} - r_{ij}^t| = \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^m |r_{ij} - r_{ij}^t| = \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^m |1 - r_{ij}^t| = \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(1)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Обозначим $\eta_i = \gamma_i - \alpha_i$, $i = \overline{1, n}$. Учитывая то, что в любом из допустимых решений какая-нибудь из альтернатив a_j является наименьшим элементом, а следовательно, даст вклад в $D(\rho)$, равный $D_j(\rho) = \gamma_j - \alpha_j + \eta_j$, получаем еще одно уточнение для нижней оценки величины $D(\rho)$ для допустимых решений, соответствующих выбору a_i в качестве вершины 1-го уровня, т.е. решений, соответствующих дереву с начальной вершиной a_i . Это будет величина, которую обозначаем через v_i и определяем по формуле

$$v_i = \beta_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j + \min_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} \eta_j. \quad (2.3)$$

Аналогично находятся нижние оценки и для каждой промежуточной вершины a_{i_k} k -го уровня, где $k = \overline{2, n-1}$, которая, как отмечалось выше, задает некоторое множество допустимых решений. Ранее этой вершине была поставлена в соответствие допустимая последовательность $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \rangle$, однозначно определяемая единственной цепью, соединяющей a_{i_k} с некоторой (единственной) вершиной a_{i_1} 1-го уровня. Поставим теперь этой последовательности в соответствие длину $\beta_{i_{i_2 \dots i_k}}$, равную ее вкладу в $D(\rho)$ для всех допустимых решений ρ , продолжающих ее, т.е.

$$\beta_{i_{i_2 \dots i_k}} = D_{i_1}(\rho) + \dots + D_{i_k}(\rho), \quad (2.4)$$

которую удобно определять по мере увеличения уровня k , согласно рекуррентному соотношению

$$\beta_{i_{i_2 \dots i_k}} = \beta_{i_{i_2 \dots i_{k-1}}} + D_{i_k}(\rho) = \beta_{i_{i_2 \dots i_{k-1}}} + \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^n |r_{i_k, j} - r_{i_k, j}^t|,$$

где начальная величина β_{i_1} была определена ранее. Для организации вычислительного процесса последовательного определения этих величин остается уточнить порядок вычисления величины

$$D_{i_k}(\rho) = \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^n |r_{i_k, j} - r_{i_k, j}^t|.$$

Любое допустимое решение ρ , продолжающее допустимую последовательность $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \rangle$, имеет вид $\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_k}, a_{i_{k+1}}, \dots, a_{i_n} \rangle$, где $a_{i_n} < \dots < a_{i_{k+1}} < a_{i_k} < \dots < a_{i_1}$. Следовательно, для $R(\rho) = \|r_{ij}\|_{m \times n}$ справедливы равенства

$$r_{i_k, j} = 0, \quad j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}; \quad r_{i_k, j} = 1, \quad j \in \{i_1, \dots, i_k\}, \quad (2.5)$$

дающие возможность однозначно определить значение $D_{i_k}(\rho)$ для указанных допустимых решений ρ . Такая однозначность позволяет обозначить величину $D_{i_k}(\rho)$ для любого допустимого решения ρ , продолжающего допустимую последовательность $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \rangle$, иначе (без указания бинарного отношения ρ , используемого в ней) $D_{i_k}(\rho) = D_{i_{i_2 \dots i_k}}$. Тогда равенство (2.4) можно переписать в виде (исключаем вхождение неопределенного параметра ρ)

$$\beta_{i_{i_2 \dots i_k}} = D_{i_1} + D_{i_{i_2}} + \dots + D_{i_{i_2 \dots i_k}}.$$

По аналогии с формулой (2.3), приведенной ранее для величины v_i , соответствующей вершине a_i 1-го уровня, приведем теперь формулу для величины $v_{i_{i_2 \dots i_k}}$, соответствующей промежуточной вершине a_{i_k} , принадлежащей k -му уровню, где $k = \overline{2, n-1}$. Эта формула является нижней

оценкой для $D(\rho)$ на множестве всех допустимых решений ρ , продолжающих допустимую последовательность $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \rangle$, однозначно определяемую вершиной a_{i_k} :

$$v_{i_{i_2} \dots i_k} = \beta_{i_{i_2} \dots i_k} + \sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}} \alpha_j + \min_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}} \eta_j.$$

Приведем, кроме того, некоторые формулы для вычисления величины $D_{i_{i_2} \dots i_k}$, основанные на равенствах (2.5). Например, из (2.5) следует, что число $D_{i_{i_2} \dots i_k}$ равно сумме расстояний от i_k -х строк матриц $R^t = R(\rho_t) = \|r_{ij}^t\|_{n \times n}$, $t = \overline{1, m}$, до вектор-строки (r_1, \dots, r_n) , где

$$r_j = \begin{cases} 0, & j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}, \\ 1, & j \in \{i_1, \dots, i_k\}. \end{cases}$$

Кроме того, для большей простоты вычислений можно также воспользоваться матрицами $P, P^{(1)}$, а также равенствами (2.1):

$$D_{i_{i_2} \dots i_k} = \sum_{j \in \{i_1, \dots, i_k\}} P_{i_k, j}^{(1)} + \sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}} P_{i_k, j}, \tag{2.6}$$

поскольку в силу (2.5)

$$D_{i_{i_2} \dots i_k} = \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^n |r_{i_k, j}^t - r_{i_k, j}^t| = \sum_{j \in \{i_1, \dots, i_k\}} \sum_{t=1}^m |1 - r_{i_k, j}^t| + \sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}} \sum_{t=1}^m |0 - r_{i_k, j}^t|.$$

Отметим при этом, что

$$D_{i_{i_2} \dots i_n} = \gamma_{i_n}, \quad \beta_{i_{i_2} \dots i_n} = D(\rho), \tag{2.7}$$

где ρ – линейный порядок, соответствующий допустимой последовательности $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \rangle$.

Замечание 1. Из формулы (2.6) следует, что при $k = 3, n$ в случае $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{k-1}}\} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{k-1}}\}$ (т.е. при $\{i_1, \dots, i_{k-1}\} = \{i'_1, \dots, i'_{k-1}\}$) выполняется $D_{i_{i_2} \dots i_k} = D_{i_{i_2} \dots i_{k-1} i_k}$, что дает экономию в общем объеме вычислений. Например, $D_{2,1,3} = D_{1,2,3}$, $D_{2,1,4} = D_{1,2,4}$, $D_{3,1,4} = D_{1,3,4}$, $D_{3,2,4} = D_{2,3,4}$. Учитывая этот факт, можно сократить количество вычисляемых величин $D_{i_{i_2} \dots i_k}$ в $(k - 1)!$ раз.

Описанный лес допустимых решений L дает схему ветвления для поставленной задачи. Заметим, что при достаточно большом n количество вершин в L может оказаться чрезмерно большим (например, в L имеется $n!$ вершин одного только n -го уровня). В связи с этим будем при обходе вершин из L использовать так называемое правило отсечения, позволяющее отсекалть в L вершины вместе с цепями, соединяющими эти вершины с вершинами n -го уровня. Чтобы сформулировать это правило, понадобится величина \tilde{D} , которую будем называть рекордом. Текущее значение этой величины определяется при первом достижении любой вершины n -го уровня и уточняется при каждом прохождении любой другой вершины n -го уровня. В процессе обхода вершин из L будем для каждой текущей вершины a_{i_k} , принадлежащей k -му уровню, $1 \leq k \leq n$, где $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \rangle$ – допустимая последовательность, находить величины $\beta_{i_{i_2} \dots i_k}, v_{i_{i_2} \dots i_k}$. Тогда при $k = n$ величина $\beta_{i_{i_2} \dots i_k} = \beta_{i_{i_2} \dots i_n}$ дает точное значение величины $D(\rho)$ для линейного порядка ρ , определяемого последовательностью $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \rangle$. При каждом прохождении вершины n -го уровня уточним значение \tilde{D} так, чтобы оно равнялось минимальному значению среди всех вычисленных на данном этапе величин вида $\beta_{i_{i_2} \dots i_n}$. В этом случае для любой вершины a_{i_k} , принадлежащей k -му уровню, где $1 \leq k \leq n - 2$, в случае выполнения неравенства

$$v_{i_{i_2} \dots i_k} > \tilde{D} \tag{2.8}$$

вершина a_{i_k} может быть исключена из L вместе с цепями, соединяющими эту вершину с вершинами n -го уровня. При выполнении этого условия все линейные порядки ρ , которые соответствуют допустимым решениям, продолжающим последовательность $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \rangle$, имеют значение $D(\rho)$, превышающее \tilde{D} , а следовательно, не могут принадлежать $\text{Arg} \min_{\rho \in LO(n)} D(\rho)$. В случае, ес-

ли ищем хотя бы одно решение из $\text{Arg} \min_{\rho \in LO[n]} D(\rho)$, условие отсечения (2.8) можно заменить на более слабое $v_{i_1 \dots i_k} \geq \tilde{D}$. При выполнении этого условия все линейные порядки, которые соответствуют допустимым последовательностям, продолжающим $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \rangle$, не дадут улучшения рекорда \tilde{D} .

Замечание 2. В силу (2.7) для любой вершины $(n-1)$ -го уровня, соответствующей допустимой последовательности $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}} \rangle$, выполняется равенство $v_{i_1 \dots i_{n-1}} = \beta_{i_1 \dots i_{n-1}} + \alpha_{i_n} + \eta_{i_n} = \beta_{i_1 \dots i_{n-1}} + \gamma_{i_n} = \beta_{i_1 \dots i_{n-1}} + D_{i_1 \dots i_n} = \beta_{i_1 \dots i_n}$, где $\{i_n\} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-1}\}$. Другими словами, $v_{i_1 \dots i_{n-1}} = \beta_{i_1 \dots i_n} = D(\rho)$, где ρ – линейный порядок, соответствующий допустимой последовательности $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \rangle$. Отсюда следует, что уточнение рекорда можно производить уже при достижении любой вершины $(n-1)$ -го уровня. Допустимая последовательность $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}} \rangle$, соответствующая этой вершине, однозначно определяет допустимую последовательность $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \rangle$, и при этом $v_{i_1 \dots i_{n-1}} = \beta_{i_1 \dots i_n}$. Таким образом, переход от вершин $(n-1)$ -го уровня к вершинам n -го уровня является излишним.

Опишем теперь порядок прохождения вершин в \mathcal{L} . В [10] описаны три возможных способа продолжения ветвления. Применим к решению нашей задачи следующий способ. При выборе вершины для очередного ветвления (т.е. для прохождения продолжающих эту вершину цепей леса \mathcal{L}) берется не исключенная вершина a_{i_k} максимального уровня k , где $1 \leq k \leq n-2$, из множества всех достигнутых к этому моменту вершин леса \mathcal{L} и имеющая минимальное значение $v_{i_1 \dots i_k}$ среди всех вершин этого уровня. Выбор вершины a_{i_k} k -го уровня однозначно определяет множество вершин $A \setminus \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$ $(k+1)$ -го уровня. Если таких вершин несколько, то выбираем среди них вершину с минимальным значением $\beta_{i_1 \dots i_k}$, а если их несколько, то – с наименьшим номером i_k .

3. Ускорение метода. Построим по матрице $P = R^1 + \dots + R^m = \|p_{ij}\|_{n \times n}$ матрицу $\tilde{R} = \|\tilde{r}_{ij}\|_{n \times n}$, где $\tilde{r}_{ii} = 1$, $i = \overline{1, n}$, а в случае $i \neq j$ выполняется: $\tilde{r}_{ij} = 1$, если $p_{ij} > p_{ji}$, $\tilde{r}_{ij} = 0$, если $p_{ij} < p_{ji}$, и $\tilde{r}_{ij} = 1/2$, если $p_{ij} = p_{ji}$. Рассмотрим для каждой альтернативы $a_i \in A$ величину

$$\kappa_i = \kappa_i(a_i) = \sum_{j=1}^n \tilde{r}_{ij}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Нетрудно показать (см., например, [1]), что если числа κ_i , $i = \overline{1, n}$, можно линейно упорядочить таким образом, что $\kappa_{i_1} = 1, \kappa_{i_2} = 2, \dots, \kappa_{i_n} = n$, то $\text{Arg} \min_{\rho \in A \times A} D(\rho)$ (здесь минимум берется на множестве всех бинарных отношений на A) состоит из единственного бинарного отношения, являющегося линейным порядком, и в этом случае $\text{Arg} \min_{\rho \in A \times A} D(\rho) = \text{Arg} \min_{\rho \in LO[n]} D(\rho)$. Понятно, что такой случай является очень редким, но всегда по числам $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ может быть построен квазипорядок $\check{\rho}$ на A : $\langle a_i, a_j \rangle \in \check{\rho} \Leftrightarrow \kappa_i \leq \kappa_j$. Указанный квазипорядок определяет множество всех линейных порядков $\lambda \in LO[n]$, согласованных с $\check{\rho}$, т.е. удовлетворяющих условию $\langle a_i, a_j \rangle \in \lambda \Rightarrow \langle a_i, a_j \rangle \in \check{\rho}$. Выделив все согласованные $\lambda \in LO[n]$, можно перед началом работы метода ветвей и границ предварительно посчитать значение $D(\lambda)$ для выделенных таким образом $\lambda \in LO[n]$ и получить некоторое предварительное используемое в алгоритме значение рекорда \tilde{D} . Тогда применение этого значения в самом начале работы алгоритма (в случае его близости к $D_{\min}^{LO} = \min\{D(\rho) | \rho \in LO[n]\}$) может увеличить число отсечений и тем самым сократить время работы алгоритма. В тех случаях, когда найдутся $\lambda \in \text{Arg} \min_{\rho \in LO[n]} D(\rho)$, согласованные с $\check{\rho}$, в результате совершения описанных предварительных вычислений будет уже в самом начале работы алгоритма выполняться $\tilde{D} = D_{\min}^{LO}$, что может привести к значительному уменьшению времени работы алгоритма.

Таблица 1. Данные для первых семи лидирующих альтернатив

i	12	13	14	15	1	2	3
a_i	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_1	a_2	a_3
D_{\min}^i	1124	1134	1140	1142	1156	1170	1184
$D_{\min}^i - D_{\min}$	50	60	66	68	82	96	110
RT_i	1	0.83	0.76	0.735	0.61	0.52	0.45

4. Случай, когда каждой индивидуальной ранжировке приписывается некоторый вес. Описанный метод построения агрегированной ранжировки легко переносится на случай, когда каждой индивидуальной ранжировке приписывается некоторый вес, отражающий ее относительную важность. Тогда вместо целевой функции $D(\rho)$ используется функция более общего вида:

$$\tilde{D}(\rho) = \sum_{t=1}^m c_t d(\rho, \rho_t), \quad \text{где } c_t > 0, \quad t = 1, \dots, m, \quad \sum_{t=1}^m c_t = m,$$

т.е. учитывается относительная важность бинарных отношений $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$. При этом вместо матриц $P, P^{(1)}, P^*$ соответственно используем матрицы

$$\tilde{P} = \sum_{t=1}^m c_t R^t = \|\tilde{p}_{ij}\|_{m \times n},$$

$\tilde{P}^{(1)} = \|\tilde{p}_{ij}^{(1)}\|_{m \times n} = \|m - \tilde{p}_{ij}\|_{m \times n}, \tilde{P}^* = \|\tilde{p}_{ij}^*\|_{m \times n} = \|\min\{\tilde{p}_{ij}, \tilde{p}_{ij}^{(1)}\}\|_{m \times n}$. После такой замены описанный выше метод ветвей и границ переносится на этот случай практически без изменений. Бинарное отношение $\tilde{\rho}$, с матрицей $R(\tilde{\rho}) = \|\tilde{r}_{ij}\|_{m \times n}, \tilde{r}_{ij} \in \{0, 1\}$, строится, исходя из $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$, по правилу: $\tilde{r}_{ij} = 1 \Leftrightarrow \tilde{p}_{ij} \geq m/2, i, j = \overline{1, n}$. Аналогично (2.2) выполняются равенства

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \sum_{t=1}^m c_t |\tilde{r}_{ij} - r_{ij}^t| = \min \left\{ \sum_{t=1}^m c_t |r - r_{ij}^t| \mid r \in \{0, 1\} \right\} = \tilde{p}_{ij}^*,$$

а все последующие рассуждения основываются только на этих равенствах.

5. Пример. Приведем примеры работы описанного алгоритма.

Группа из $m = 9$ лиц строго ранжирует варианты из $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, где $n = 20$. Для простоты заменим обозначение варианта a_i числом i , т.е. $A = \{1, 2, \dots, 20\}$. Пусть индивидуальные ранжировки имеют следующий вид:

- $\rho_1 : 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < 11 < 12 < 13 < 14 < 15 < 16 < 17 < 18 < 19 < 20,$
- $\rho_2 : 16 < 15 < 20 < 19 < 18 < 17 < 14 < 13 < 12 < 11 < 10 < 9 < 8 < 7 < 6 < 5 < 4 < 3 < 2 < 1,$
- $\rho_3 : 19 < 14 < 20 < 13 < 12 < 11 < 16 < 17 < 10 < 9 < 8 < 7 < 6 < 5 < 4 < 3 < 2 < 1 < 15 < 18,$
- $\rho_4 : 18 < 13 < 12 < 11 < 16 < 10 < 9 < 8 < 7 < 6 < 20 < 17 < 5 < 4 < 3 < 2 < 1 < 15 < 14 < 19,$
- $\rho_5 : 12 < 20 < 17 < 19 < 11 < 10 < 9 < 8 < 7 < 6 < 5 < 4 < 3 < 2 < 1 < 15 < 16 < 14 < 13 < 18,$
- $\rho_6 : 20 < 11 < 16 < 10 < 18 < 17 < 9 < 8 < 7 < 6 < 5 < 4 < 3 < 2 < 1 < 15 < 14 < 13 < 12 < 19,$
- $\rho_7 : 19 < 18 < 17 < 10 < 9 < 8 < 7 < 6 < 5 < 4 < 3 < 2 < 1 < 15 < 14 < 16 < 13 < 12 < 11 < 20,$
- $\rho_8 : 18 < 19 < 9 < 20 < 17 < 8 < 7 < 6 < 5 < 4 < 3 < 2 < 1 < 16 < 15 < 14 < 13 < 12 < 11 < 10,$
- $\rho_9 : 8 < 7 < 6 < 19 < 5 < 4 < 3 < 2 < 20 < 1 < 15 < 14 < 16 < 13 < 12 < 18 < 17 < 11 < 10 < 9.$

В результате произведенных вычислений было выделено множество $\text{Arg} \min_{\rho \in LO(n)} D(\rho)$, состоящее из единственной ранжировки

$$\lambda : 19 < 20 < 16 < 18 < 17 < 11 < 10 < 9 < 8 < 7 < 6 < 5 < 4 < 3 < 2 < 1 < 15 < 14 < 13 < 12.$$

Таблица 2. Зависимость времени расчетов от количества вершин n

n	20	21	22	23	24	25	26
$t(n)$	48.45 с	131.28 с	≅ 4 мин	≅ 6.9 мин	≅ 13.7 мин	≅ 65.2 мин	≅ 5 ч 17 мин
$K(n)$	88 208	200 881	303 046	461 831	777 970	3 298 727	14 404 423
$K(n)/n!$	≅ 3.63×10^{-14}	≅ 3.93×10^{-15}	≅ 2.7×10^{-16}	≅ 1.79×10^{-17}	≅ 1.25×10^{-18}	≅ 2.13×10^{-19}	≅ 3.57×10^{-20}

В случае простого перебора пришлось бы перебрать $20! = 1.28047... \times 10^{17}$ вариантов, т.е. крайне большое число. В результате применения описанного метода вычисления на компьютере Asus N73S (4-ядерный процессор Intel Core i7-2630QM, 2 ГГц) заняли 49 с. Программа написана на языке Python 3.8.3.

Были также подсчитаны значения $D_{\min} = D(\bar{\rho}) = \min\{D(\rho) \mid \rho \subseteq A \times A\} = 1074$, $D_{\min}^{LO} = \min\{D(\rho) \mid \rho \in LO[n]\} = 1124 = D_{\min} + 50$, т.е. D_{\min}^{LO} превышает D_{\min} всего на 4.88%. Кроме того, были просчитаны минимальные значения $D(\rho)$ на множестве $LO[n]$ при фиксированном наибольшем элементе a_i , $i = \overline{1, 20}$. Полученные в результате значения, которые обозначены через D_{\min}^i , можно использовать для формирования весов альтернатив, определяемых, например, по формуле $RT_i = (D_{\min}^i - D_{\min}) / (D_{\min}^{LO} - D_{\min})$, $i = \overline{1, 20}$. В табл. 1 приведены данные для первых лидирующих (относительно линейного порядка λ) семи альтернатив.

Вычисления производились и для случаев с $n > 20$. Последовательно добавлялись новые альтернативы (включались в каждый из девяти линейных порядков случайным образом). Приведем численные результаты для примера с $n = 25$, $m = 9$. Запишем элементы исходных линейных порядков по возрастанию их предпочтительности:

1, 25, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 21, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24;
 24, 22, 16, 25, 23, 15, 20, 19, 21, 18, 17, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1;
 19, 14, 20, 24, 13, 12, 22, 23, 11, 25, 16, 17, 10, 9, 8, 7, 6, 21, 5, 4, 3, 2, 1, 15, 18;
 18, 24, 13, 25, 21, 12, 23, 11, 16, 10, 9, 8, 7, 6, 20, 17, 22, 5, 4, 3, 2, 1, 15, 14, 19;
 12, 20, 23, 17, 24, 22, 19, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 25, 2, 1, 15, 16, 21, 14, 13, 18;
 20, 11, 22, 16, 23, 21, 10, 24, 18, 17, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 15, 14, 25, 13, 12, 19;
 22, 19, 24, 23, 18, 17, 25, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 15, 21, 14, 16, 13, 12, 11, 20;
 21, 18, 25, 19, 9, 20, 17, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 22, 16, 15, 14, 23, 13, 12, 11, 24, 10;
 8, 7, 6, 19, 5, 4, 3, 2, 20, 1, 15, 14, 24, 16, 13, 12, 22, 18, 17, 11, 10, 23, 9, 21, 25.

Количество пройденных вершин составляет 3 298 727.

В результате произведенных вычислений было выделено множество $\text{Arg} \min_{\rho \in LO[n]} D(\rho)$, состоящее из трех ранжировок:

19, 20, 24, 22, 23, 25, 16, **18, 17, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 21, 5, 4, 3, 2, 1, 15, 14, 13, 12**;
 19, 20, 24, 22, 25, 16, 23, **18, 17, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 21, 5, 4, 3, 2, 1, 15, 14, 13, 12**;
 20, 24, 22, 25, 19, 16, 23, **18, 17, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 21, 5, 4, 3, 2, 1, 15, 14, 13, 12**.

Во всех трех найденных линейных порядках прослеживается одинаковый строгий порядок относительно 18 лидирующих альтернатив.

Результаты с временем расчетов $t(n)$, где $n = 20, \dots, 26$, представлены в табл. 2. В процессе вычислений определялось также $K(n)$ — количество пройденных вершин, приведенное в третьей строке. В последней строке приводится отношение $K(n)/n!$, где $n!$ — количество вычислений целевой функции $D(\rho)$, которое бы потребовалось в случае использования полного перебора.

В связи с этим отметим, что для $n = 26$ при простом переборе пришлось бы рассмотреть $26! = 403\,291\,461\,126\,605\,635\,584\,000\,000 = 4.03 \times 10^{26}$ вариантов, что невозможно для любого компьютера за любой мыслимый промежуток времени.

Работу приведенного алгоритма можно условно разбить на два этапа: вычисление матрицы P и дальнейшее применение метода ветвей и границ, базирующееся только на элементах этой матрицы. При этом на первом этапе применяется простая процедура, имеющая сложность порядка

$O(mn^3)$ (т.е. вклад числа экспертов имеет здесь линейный тип зависимости). Таким образом зависимость алгоритма от количества экспертов m незначительна. Увеличение m даже в несколько раз дает изменения общего времени счета на доли секунды.

Заключение. Применение метода ветвей и границ позволяет найти точное решение поставленной задачи, а в случае его не единственности — все множество решений. Предложенный алгоритм может использоваться и при предположении, что индивидуальные ранжировки учитываются с некоторыми коэффициентами относительной важности. Применение алгоритма при наложении на множество ранжировок некоторых дополнительных условий (например, при рассмотрении задачи с закрепленными концами) позволяет устанавливать относительные веса альтернатив или производить попарное сравнение любых двух альтернатив.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974. 256 с.
2. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. М.: Мир, 1991. 464 с.
3. Young H.P. Condorcet's Theory of Voting // American Political Science Review. 1988. № 82. P. 1231–1244.
4. Петровский А.Б. Теория принятия решений. М.: ИЦ “Академия”, 2009. 391 с.
5. Нефедов В.Н., Осипова В.А., Смерчинская С.О., Яшина Н.П. Непротиворечивое агрегирование отношений строгого порядка // Изв. вузов. Математика. 2018. № 5. С. 71–85.
6. Литвак Б.Г. Экспертная информация: методы получения и анализа. М.: Радио и связь, 1982.
7. Корнеев В.П. Методы многокритериального оценивания объектов с многоуровневой структурой показателей эффективности. М.: МАКС Пресс, 2018. 296 с.
8. Cook W.D. Distance-based and Adhoc Consensus Models in Ordinal Preference Ranking // Europ. J. of Operational Research. 2006. № 172. P. 369–385.
9. Нефедов В.Н. Некоторые свойства линейно упорядоченной медианы для нечетного числа линейных асимметричных отношений. М.: МАИ, 2021. 50 с. — Деп. в ВИНТИ 08.11.2021, № 62 – В2021.
10. Нефедов В.Н. Задачи дискретной оптимизации. М.: Изд-во МАИ, 1993. 60 с.

УДК 623.74

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ ПОДДЕРЖКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПЕРАТИВНОГО ЦЕЛЕПОЛАГАНИЯ ЭКИПАЖЕМ САМОЛЕТА НА ЭТАПЕ “ПОСАДКА”: КОЛЛИЗИЯ «ПРОБЕГ ПО ВЗЛЕТНО-ПОСАДОЧНОЙ ПОЛОСЕ – УГРОЗА “СЛАБОЕ ТОРМОЖЕНИЕ”»¹

© 2022 г. А. М. Аспидова^{a,*}, А. И. Еремин^{b,**}, Б. Е. Федун^{a,b,***}^a МАИ (национальный исследовательский университет), Москва, Россия^b ФАУ “ГосНИИАС”, Москва, Россия*e-mail: aspidova1999@mail.ru**e-mail: aieremin@2100.gosniias.ru***e-mail: boris_fed@gosniias.ru

Поступила в редакцию 14.03.2022 г.

После доработки 19.07.2022 г.

Принята к публикации 01.08.2022 г.

Задача “Оперативное целеполагание” возникает у экипажа, когда на текущем этапе полета самолета появляется коллизия “Выполняемый этап полета – непосредственная угроза выполнению этого этапа”. Рекомендуемое экипажу конструктивное решение этой задачи совместно вырабатывают две бортовые интеллектуальные системы тактического уровня: интеллектуальная информационная система “Ситуационная осведомленность экипажа” и бортовая оперативно советуемая экспертная система “Оперативное целеполагание”. Обнаружить и предъявить экипажу возникшую коллизия – задача интеллектуальной информационной системы “Ситуационная осведомленность экипажа”. База знаний этой системы содержит математическую модель развития появившейся угрозы и процедуру расчета “точки невозврата” этой угрозы для каждого способа разрешения коллизии, который включен в базу знаний бортовой оперативно советуемой экспертной системы “Оперативное целеполагание”. При приближении угрозы к “точке невозврата” данная экспертная система рекомендует облик способа решения возникшей коллизии: этап полета (текущая цель полета + ближайший этап ее достижения). Метод решения задачи оперативного целеполагания – решение по прецеденту. Представлен облик базы знаний бортовой оперативно советуемой экспертной системы “Оперативное целеполагание”.

DOI: 10.31857/S0002338822060038

Введение. Задача “Оперативное целеполагание” возникает у экипажа, когда на текущем этапе полета самолета появляется коллизия “Выполняемый этап полета – непосредственная угроза выполнению этого этапа”. Рекомендуемое экипажу конструктивное решение этой задачи совместно вырабатывают две бортовые интеллектуальные системы тактического уровня: интеллектуальная информационная система “Ситуационная осведомленность экипажа” (ИИС СОЭ) [1, 2] и бортовая оперативно советуемая экспертная система “Оперативное целеполагание” (БОСЭС-целеполагание) [1].

Создание баз знаний ИИС СОЭ и БОСЭС-целеполагание находится на первом этапе их разработки – этапе “Создание научно-технического задела” [3]. Этот этап состоит из нескольких фаз.

Первая фаза “Формализация предметной области”. Она включает в себя:

для ИИС СОЭ:

а) выявление (по материалам реальных посадок самолета выбранного типа) характерных для этапа полета коллизий “Рассматриваемый этап полета – непосредственная угроза его выполнению”,

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-08-00652).

Таблица 1. Возможные коллизии на этапе полета пассажирского самолета типа МС-21

Возможные коллизии на этапе полета “Посадка”	Фазы этапа “Посадка”
Высокое/низкое выравнивание	2
“Козление”	3
Препятствие на ВПП	2, 3
Оставшаяся часть полосы не обеспечивает безопасную посадку (посадка с перелетом)	2, 3
Особые случаи полета (пожар, отказ двигателя и др.)	1, 2, 3
Скопления птиц, представляющие угрозу для выполнения посадки	1, 2
Опасное метеоявление при заходе на посадку и посадке (сдвиг ветра, гроза, ливневые осадки и др.)	1, 2
Метеорологическая видимость составляет менее 1000 м	1
Пространственное положение ЛА не обеспечивает безопасный заход и посадку	1, 2
До пролета высоты принятия решения (ВПР) не установлен визуальный контакт с полосой или наземными ориентирами	1
Непотребный режим работы двигателя (РРД)	1, 2
Слабое торможение	2
До установления надежного визуального контакта с огнями приближения или другими ориентирами по курсу посадки сработала сигнализация ВПР и (или) опасного сближения с землей	1
Потерян визуальный контакт с огнями приближения (огнями ВПП) или наземными ориентирами при снижении с ВПР до минимально допустимой высоты ухода, согласно руководству по летной эксплуатации	1
Ошибочная посадка не на аэродроме назначения	1, 2, 3
Посадка на закрытую полосу	1, 2, 3

б) определение (по материалам реальных посадок самолета выбранного типа) для каждой коллизии реализованных на практике способов ее разрешения (прецеденты разрешения коллизии),

в) конструирование облика базы знаний ИИС СОЭ: разработка процедур определения “точек невозврата” для каждой пары “Коллизия – способ ее разрешения”;

для БОСЭС-целеполагание:

а) накопление материала по реальным посадкам самолета для каждой коллизии и способов ее разрешения (прецедентов) и по составу координат ситуационного вектора SU (коллизия – прецеденты);

б) обработка совместно с летным составом накопленного материала и представление его в форме экспериментальной матрицы знаний и ансамблей функций принадлежности прикрепленных к ней нечетких множеств;

в) конструирование облика базы знаний БОСЭС-целеполагание: разработка процедурной матрицы знаний БОСЭС-целеполагание на базе полученной экспериментальной матрицы знаний.

Вторая фаза “Демонстрационные образцы ИИС СОЭ и БОСЭС-целеполагание для выбранной коллизии этапа полета”. Разработка для коллизии: 1) математических моделей развития угрозы (для ИИС СОЭ), 2) процедурной матрицы знаний (для БОСЭС-целеполагание) и 3) алгоритмов определения для БОСЭС-целеполагание численного значения координат ее ситуационного вектора SU (коллизия – прецеденты).

Третья фаза “Математическое моделирование работы фрагментов базы знаний ИИС СОЭ и БОСЭС-целеполагание” и создание их демонстрационных образцов для нескольких коллизий.

После прохождения всех фаз этапа “Создание научно-технического задела” демонстрационные образцы ИИС СОЭ и БОСЭС-целеполагание предъявляются Заказчику описание их баз знаний и результатов математического моделирования работы фрагментов баз знаний.

В статье рассматривается этап полета “Посадка” пассажирских самолетов типа МС-21 и возникающая при этом коллизия «Посадка: фаза “Пробег по взлетно-посадочной полосе (ВПП)” –



Рис. 1. Стенд КБО МС-21 ГосНИИАС

«Слабое торможение»». Представляются результаты первых двух фаз этапа разработки ИИС СОЭ и БОСЭС-целеполагание «Создание научно-технического задела».

1. Интеллектуальная информационная система «Ситуационная осведомленность экипажа». Опишем этапы создания этой системы.

1.1. Накопление и упорядочение материалов по реальным посадкам пассажирских самолетов типа МС-21: коллизии этапа полета «Посадка». Для выявления коллизий удобно этап полета «Посадка» представить через последовательность его фаз: 1) полет по глиссаде: снижение с 610 м, 2) выравнивание с высоты 20 м с приземлением, 3) пробег по ВПП.

Рассмотрение общедоступных источников информации позволило определить часть коллизии по фазам посадки, которые представлены в табл. 1.

Представим подробнее коллизию «Посадка: фаза «Пробег по ВПП» – угроза «Слабое торможение»».

1.2. ИИС СОЭ. Определение «точки невозврата» для коллизии «Посадка»: фаза «Пробег по ВПП» – угроза «Слабое торможение». Точка невозврата (ТН) для любой непосредственной угрозы определяется в математической модели ее развития. В модель включена процедура вычисления/выделения момента времени (ТН), когда имеющимися на борту самолета средствами уже невозможно противодействовать возникшей угрозе [2].

Для разработки математической модели угрозы «Слабое торможение» с определением ее ТН проведены эксперименты на стенде КБО МС-21 ФАУ «ГосНИИАС» (рис. 1). Описание стенда «КБО: Конфигурация объекта испытаний в составе стенда КБО на момент испытаний» описана в документе ЮСИЯ.9754-00-046 «Конфигурация стенда КБО самолета МС-21». Индекс конфигурации – № 038.034.

Для определения моментов наступления фаз посадки и их характеристик, необходимых для разработки базы знаний ИИС СОЭ, проведено моделирование на стенде МС-21 штатных посадок самолета профессиональным летчиком. Некоторые результаты моделирования показаны на рис. 2.

Отметим важные моменты рассматриваемого этапа полета «Посадка» летательного аппарата (ЛА).

1. Сход с глиссады (начало фазы «Выравнивание», графики «Скорость», «Изменение высоты»): момент времени $t_{\text{сход1}}$, высота ($t_{\text{сход1}}$), скорость ($t_{\text{сход1}}$), $t_{\text{сход1}} = 38.9$ с; $H_{\text{сход1}} = 60.3$ м; $V_{\text{сход1}} = 147.1$ kt.

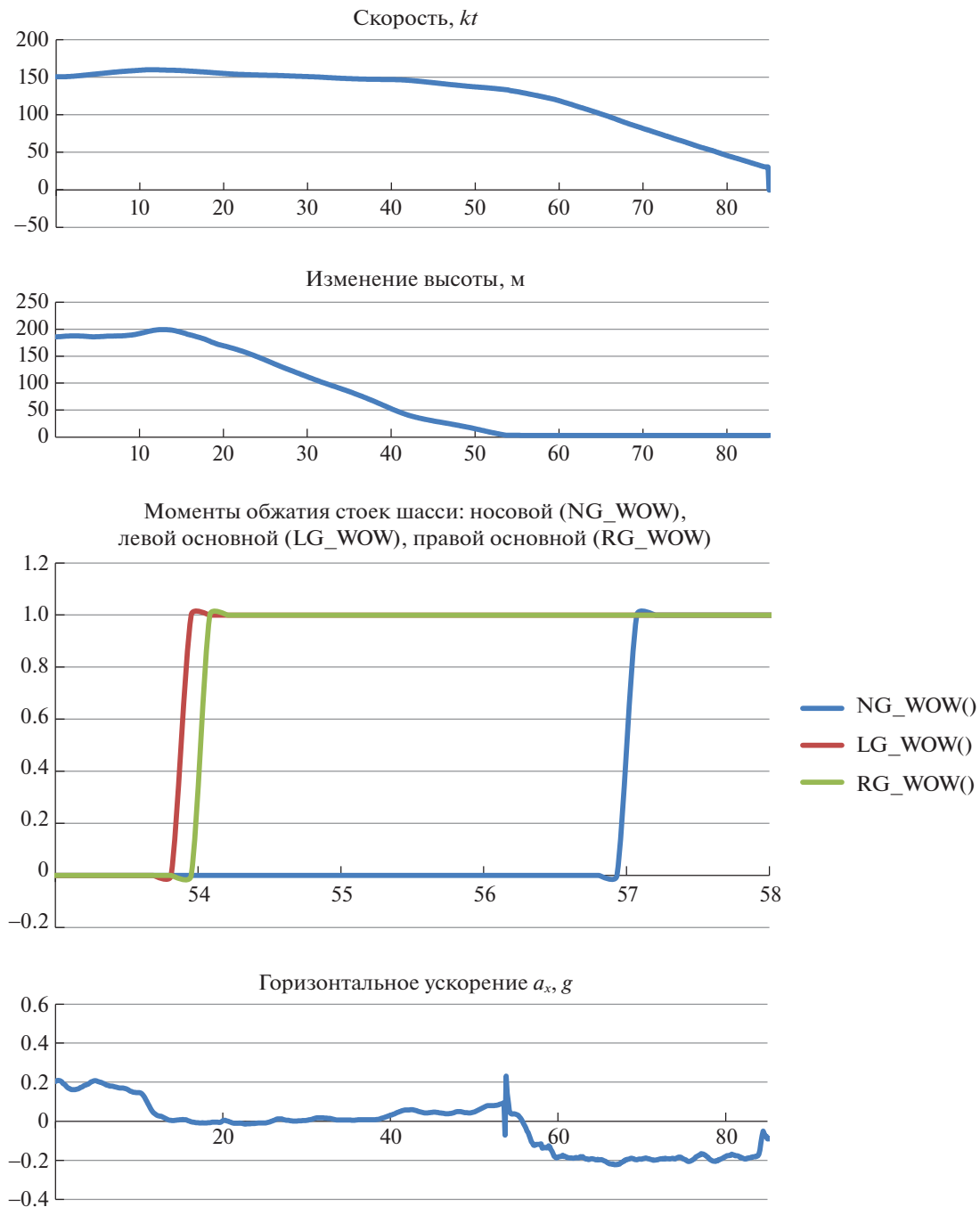


Рис. 2. Результаты моделирования штатной посадки самолета MC-21, выполненной профессиональным летчиком

2. Приземление: касание ВПП, обжатие стоек шасси (график “Моменты обжатия стоек шасси”). Скорость ЛА в момент касания ВПП составляет примерно $V = 133.5$ kt. Момент обжатия обеих основных стоек шасси $t = 54.1$ с, момент обжатия носовой стойки $t = 57.1$ с. Скорость ЛА в момент обжатия основных стоек шасси $V(57.1) = 132.5$ kt. Скорость ЛА в момент обжатия всех стоек шасси $V(57.1) = 126.2$ kt.

3. Момент начала торможения с постоянным ускорением (графики “Моменты обжатия стоек шасси”, “Горизонтальное ускорение”). Торможение началось с начала выпуска интерцепторов в момент 54.1 с. С $t = 59.4$ с ускорение торможения колеблется с небольшой амплитудой вблизи значения $a_x = -0.2$ g.

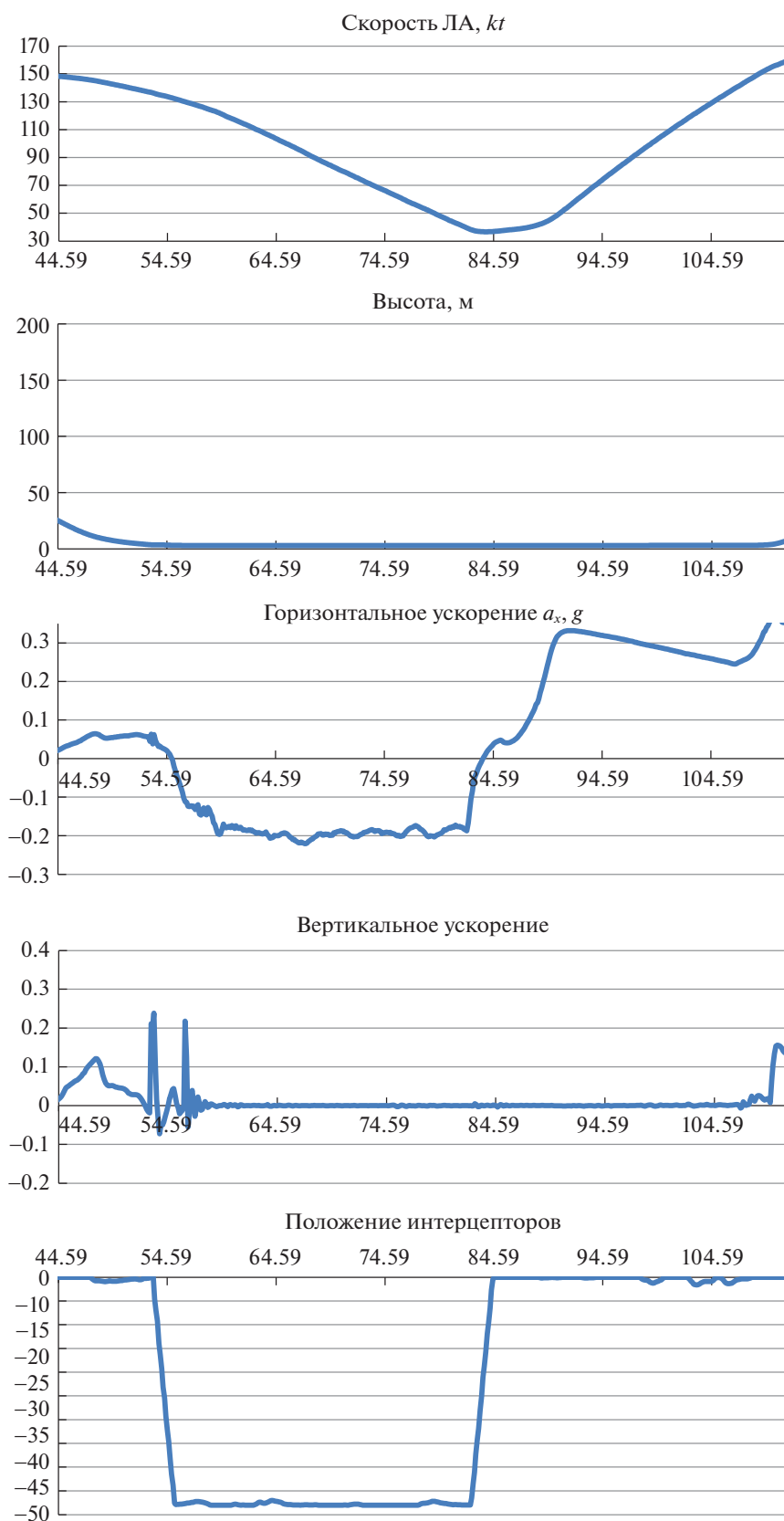


Рис. 3. Результаты моделирования посадки самолета МС-21 “Пробег по ВПП с торможением до скорости $V = 50$ kt – взлет со скорости пробега $V = 50$ kt до достижения скорости отрыва $V_{\text{отрыв}}$ ”, выполненной профессиональным летчиком

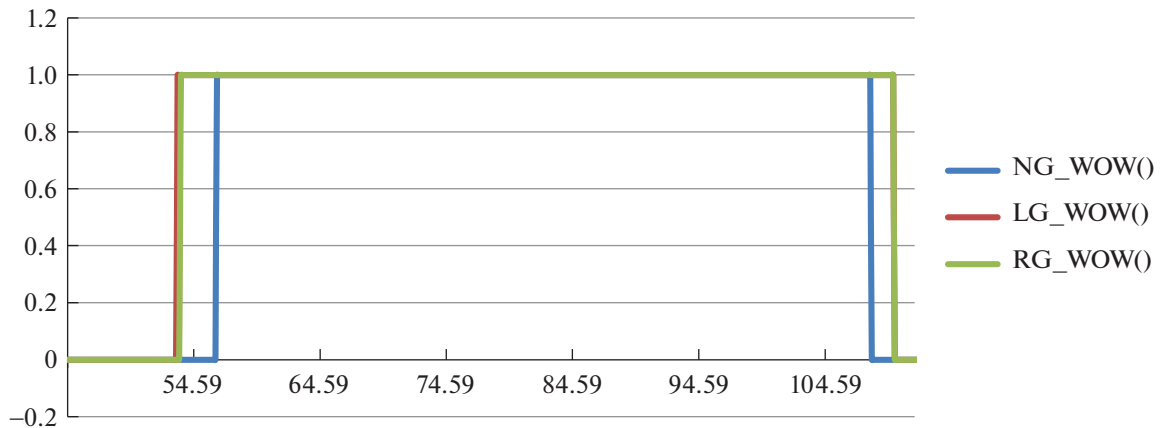


Рис. 3. Окончание

4. Момент t достижения скорости $V(t_k) = V_{\text{сход2}}$ схода с ВПП (скорость руления ЛА): $t_k = 85.0$ с, $V(t_k) = 30$ kt, где t_k – конечный момент времени.

Для разработки математической модели определения ТН для разрешения коллизии «Этап полет “Посадка”: фаза “Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение”» по прецеденту “Пробег с торможением по ВПП, решение “Взлетать: разбег с ускорением до скорости отрыва ЛА” проведено моделирование на стенде МС-21 для различных скоростей принятия решений на взлет.

В рамках этого эксперимента моделировалась посадка самолета МС-21 на ВПП: полет по глиссаде, выравнивание с парашютированием, пробег ЛА по полосе с торможением ЛА до заданной скорости принятия решения $V(t)$, затем разгон самолета от этой скорости до скорости отрыва $V_{\text{отрыва}}$ и взлет самолета. Фиксировалась длина отрезка ВПП, которая необходима самолету для такого разгона. Пример выполнения посадки с пробегом по ВВП до скорости $V(t) = 50$ kt, на которой летчик принял решение “Прекратить посадку. Взлет”, показан на рис. 3.

Информация по фазам посадки (пробег по ВПП с торможением до скорости $V = 50$ kt – взлет со скорости пробега $V = 50$ kt до достижения скорости отрыва $V_{\text{отрыва}}$).

1. Сход с глиссады: начало фазы “Выравнивание”:

момент времени схода с глиссады $t_{\text{сход1}} = 47$ с,

высота схода $H(t_{\text{сход1}}) = 13.8$ м,

скорость схода $V(t_{\text{сход1}}) = 164.2$ kt.

2. Приземление:

время полного обжатия основных стоек $t_{\text{осн}} = 53.1$ с, $V(53.1) = 136.8$ kt,

время полного обжатия носовой стойки $t_{\text{нос}} = 56.4$ с, $V(56.4) = 129.52$ kt.

Длина горизонтальной проекции траектории самолета (отрезок ВПП) между этими точками $t_{\text{осн}} = 53.1$ с и $t_{\text{нос}} = 56.4$ с равна 226.3 м. Длина отрезка ВПП между точками $t_{\text{гис}} = 47$ с и $t_{\text{нос}} = 56.4$ с равна 670.6 м.

3. Момент начала торможения с постоянным ускорением $a = \text{const}$:

$t_{a = \text{const}} = 59.3$ с,

ускорение $a_x(t = 59.3) = -0.2$ (1.96 м/с²) в момент $t = 59.3$ с.

Длина отрезка ВПП между точками $t_{\text{осн}} = 53.1$ с и $t_{a = \text{const}} = 59.3$ с равна 414.5 м.

4. Момент принятия решения на взлет:

$t_{\text{решен}} = 82.4$ с,

скорость, на которой принято решение, $V = 50$ kt,

поднятие носовой стойки при $t = 108.2$ с,

отрыв главных стоек при $t = 110.0$ с.

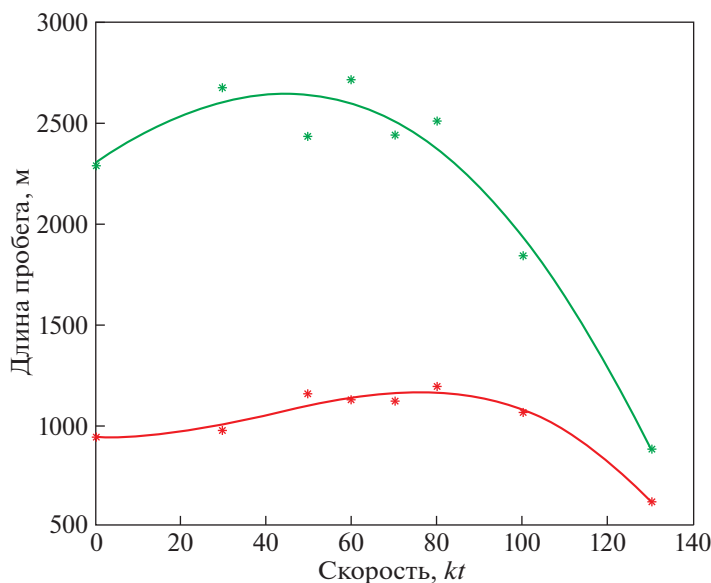


Рис. 4. Отрезок ВПП, необходимый для разгона самолета от текущей скорости $V_{\text{решен}}(t)$ до скорости отрыва $V_{\text{отрыв}}$ (нижняя кривая) для $a_{\text{ВПП}} = -0.2 g$ и $V_{\text{отрыв}} = 154.2$ kt. Верхняя кривая – отрезок ВПП, пройденный ЛА до момента принятия решения на взлет

Длина отрезка ВПП между точками $t = 108.2$ с и $t = 110.0$ с равна 139.2 м. Длина отрезка ВПП между точками обжатия основных стоек шасси при приземлении $t_{\text{осн}} = 53.1$ с и моментом принятия решения на взлет $t_{\text{решен}} = 82.4$ с составляет $L_{\text{пробега}} = 1367.8$ м.

5. Момент достижения скорости отрыва. Отрыв носовой стойки шасси:

$t = 108.2$ с,

скорость отрыва $V = 146.2$ kt.

Отрыв основных стоек шасси:

$t = 110.0$ с,

скорость отрыва $V = 154.2$ kt.

Длина отрезка ВПП между точками принятия решения на взлет $t_{\text{решен}} = 82.4$ с и моментом отрыва главных стоек шасси при взлете $t = 110.0$ с $V = 50$ kt равна $L(V = 50 \text{ kt}) = 1222.7$ м.

Моделирование на стенде МС-21 посадок “Пробег по ВПП с торможением до заданной скорости принятия решения на взлет $V_{\text{решен}}$, разбег по ВПП со скорости пробега $V_{\text{решен}}$ до достижения скорости отрыва $V_{\text{отрыва}}$ ” выполнялось профессиональным летчиком. Итоговые результаты моделирования для различных $V_{\text{решен}}$ показаны на рис. 4.

1.3. База знаний ИИС СОЭ для коллизии «Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение”». На основании данных экспериментов определяются моменты наступления точек невозврата. Для этого необходимо знать текущие координаты ЛА на ВПП и координаты конца ВПП. Их будем определять относительно точки пересечения линии глиссады с горизонтальной плоскостью (точка глиссады).

Привязку ЛА к концу ВПП проведем, используя априорные знания по расположению положения точки глиссады и точки конца ВПП (рис. 5).

При снижении ЛА по глиссаде в момент схода с глиссады $t_{\text{сход1}}$ летчик переходит на фазу посадки “Выравнивание – парашютирование”. Момент $t_{\text{сход1}}$ фиксируется в базе знаний ИИС СОЭ процедурой “Начало выравнивания” и одновременно запускается процедура “Расчет ΔL_0 ” (рис. 5). Введем обозначения: ΔL_0 – длина отрезка от проекции на ВПП точки схода с глиссады (момент времени $t_{\text{сход1}}$) до точки глиссады, $L_{\text{ВПП}}$ – длина отрезка на ВПП от точки глиссады до конца ВПП, $L(t)_{\text{исп}}$ – длина использованного ЛА на текущий момент t пробега отрезка $L_{\text{ВПП}}$, отсчитываемая от точки глиссады.

База знаний ИИС СОЭ имеет два иерархических уровня. На верхнем (первом) иерархическом уровне определяется/опознается выполняемая в текущий момент фаза посадки. На втором

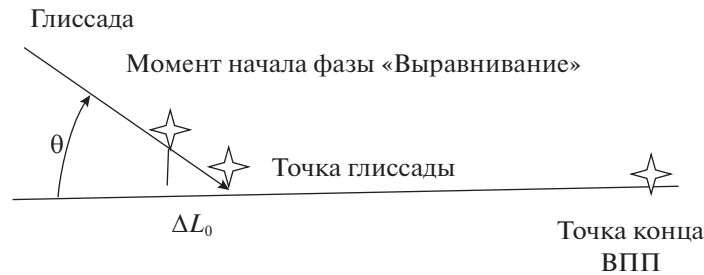


Рис. 5. К определению положения самолета в момент касания ВПП относительно точки глиссады

иерархическом уровне выполняются процедуры, подключаемые к работе сигналами из первого иерархического уровня.

Процедуры базы знаний ИИС СОЭ. На фазе от момента схода с глиссады $t_{\text{сход1}}$ до начала пробега по ВПП с постоянным ускорением торможения в базе знаний ИИС СОЭ работают две следующие процедуры.

Процедура 1. Определение длины использованного отрезка ВПП в каждый текущий момент времени $L(t)_{\text{исп}}$:

$$L_{\text{исп}}(t) = \int_{t_{\text{сход1}}}^t V_x(\tau) d\tau - \Delta L_0,$$

где

$$\Delta L_0 = \frac{H(t_{\text{сход1}})}{\tan \theta}.$$

Здесь $t_{\text{сход1}}$ – момент схода с глиссады, $V_x(t)$ – проекция текущей скорости ЛА ось ВПП, θ – угол наклона глиссады к оси ВПП.

На многофункциональный индикатор (МФИ) в кабине экипажа постоянно подается $L(t)_{\text{исп}}$ с того момента, когда она становится неотрицательной.

Процедура 2 (включается после поступления сигнала “Обжатие всех стоек шасси”). В процедуре производится сглаживание на скользящем временном отрезке измеренных величин ускорений торможения a_x с получением в каждый текущий момент времени ее осредненной величины $a_x^* = a^*(t)$ с фиксацией момента, когда $a(t)^*$ становится постоянной $a^*(t) = \text{const}$.

Постоянно измеряемая величина $a^*(t)$ передается в процедуру оценки прогнозной текущей длины $L(t, V_x(t), V_{\text{сход2}})$, необходимой для достижения на пробеге скорости схода $V_{\text{сход2}}$ с ВПП. С момента, когда $a^*(t)$ становится постоянной $a^*(t) = \text{const}$, в базе знаний ИИС СОЭ включаются в работу две следующие прогнозные процедуры.

Процедура 3 (прогноз потребного участка ВПП, необходимого для успешного завершения пробега). Пробег завершается успешно, если самолет достигает скорости $V_{\text{сход2}}$ схода с ВПП, не достигая конца ВПП.

Прогнозная текущая длина $L(t, V_x(t), V_{\text{сход2}})$ отрезка ВПП, необходимая для достижения на пробеге (с текущего момента пробега t) скорости схода $V_{\text{сход2}}$ с ВПП, равна:

$$L(t, V_x(t), V_{\text{сход2}}) = \int_t^{t_{\text{сход2}}} (V_x(t) + a^*(t)\tau) d\tau,$$

где

$$t_{\text{сход2}} = (V_x(t) - V_{\text{сход2}}) / a^*(t).$$

Замечание 1. Использование в вычислении прогнозируемой потребной длины отрезка ВПП $L(t, V_x(t), V_{\text{сход2}})$ текущей оценки $a(t)^*$ горизонтального ускорения, поступающей из процедуры, позволяет учитывать возможное фактическое изменение этой переменной по длине ВПП.

Текущий прогноз полной величины отрезка ВПП, который будет использован ЛА в момент достижения им в конце пробега скорости схода $V_{\text{сход2}}$ с ВПП равен сумме длины отрезка ВПП, уже использованного к текущему моменту $L(t)_{\text{исп}}$, и длины прогнозного отрезка $L(t, V_x(t), V_{\text{сход2}})$:

$$L(t, V_{\text{сход2}}) = L(t)_{\text{исп}} + L(t, V_x(t), V_{\text{сход2}}).$$

Текущая оценка $\Delta L(t, V_{\text{сход2}})$ запаса ВПП для успешного завершения пробега (достижения скорости $V_{\text{сход2}}$ до конца ВПП) равна $\Delta L(t, V_{\text{сход2}}) = L_{\text{ВПП}} - L(t, V_{\text{сход2}})$.

Текущие значения $L(t, V_{\text{сход2}})$ и $\Delta L(t, V_{\text{сход2}})$ передаются на МФИ. Текущее значение $\Delta L(t, V_{\text{сход2}})$ также передается в базу знаний БОСЭС-целеполагание.

Процедура 4. Информация для прогноза необходимого участка ВПП $L(V_{\text{решен}}, V_{\text{отрыв}}, a_{\text{ВПП}}$ для взлета ЛА (достижения ЛА скорости отрыва $V_{\text{отрыв}}$ от ВПП), если на скорости разбега $V_{\text{решен}}$ экипаж принял решение “Прекратить посадку. Взлет”.

Разработка математических зависимостей этой процедуры требует представления в зависимостях модели отключения реверса тяги, модели перевода РРД на взлетный режим, учета на разбеге сцепления $a_{\text{ВПП}}$ шасси самолета с ВПП. Математические зависимости этой процедуры определяются в процессе ее разработки после накопления необходимой экспериментальной информации. Кратко остановимся на этом.

Математические зависимости процедуры определения $L(V_{\text{решен}}, V_{\text{отрыв}}, a_{\text{ВПП}})$ по экспериментальным данным, полученным в летном и/или стендовом эксперименте посадок на ВПП с различными установившимися ускорениями $a_{\text{ВПП}}$ (из заданного диапазона), с последующим вычислением $L(V_{\text{решен}}, V_{\text{отрыв}}, a_{\text{ВПП}}^*)$, для оперативно поступившей конкретной $a_{\text{ВПП}}^*$, происходит следующим образом.

Замечание 2. Для каждого аэродрома величина $a_{\text{ВПП}}^*$ обычно периодически определяется аэродромными службами и передается на борт самолета, готовящегося к посадке на этот аэродром.

Для данного типа самолета проведены эксперименты посадок на аэродромы с различной $a_{\text{ВПП}}^*$. Пример серии экспериментов на стенде МС-21, когда при пробеге самолета экипаж принял решение “Прекратить посадку. Взлет” по взлету при различных скоростях принятия решений на взлет (экспериментальные точки на графике) и их аппроксимация полиномом третьего порядка (сплошная кривая), показаны в нижней части рис. 4.

Нижняя зависимость на рис. 4, полученная для конкретной величины $a_{\text{ВПП}}^{\text{экс}}$, которая использовалась в эксперименте, хорошо аппроксимируется полиномом третьего порядка:

$$b(a_{\text{ВПП}}^{\text{экс}})_1 V_{\text{прин}}^3 + b(a_{\text{ВПП}}^{\text{экс}})_2 V_{\text{прин}}^2 + b(a_{\text{ВПП}}^{\text{экс}})_3 V_{\text{прин}} + b(a_{\text{ВПП}}^{\text{экс}})_4 = L(t, V_{\text{отрыв}}). \quad (1.1)$$

Чтобы получить такую же зависимость типа (1.1) для произвольного $a_{\text{ВПП}}$, проведем эксперименты для нескольких $(a_{\text{ВПП}}^{\text{экс}})_j, j = 1 \dots n$.

Построим зависимость каждого коэффициента $b(a_{\text{ВПП}}^{\text{экс}})_1, \dots, b(a_{\text{ВПП}}^{\text{экс}})_4$ от $a_{\text{ВПП}}^{\text{экс}} = a_{\text{ВПП}}$ и аппроксимируем каждую из них своим полиномом второго порядка. Получим расчетные зависимости коэффициентов полинома третьей степени:

$$\begin{aligned} c(b_1)_1 a_{\text{ВПП}}^2 + c(b_1)_2 a_{\text{ВПП}} + c(b_1)_3 &= b(a_{\text{ВПП}})_1, \\ c(b_2)_1 a_{\text{ВПП}}^2 + c(b_2)_2 a_{\text{ВПП}} + c(b_2)_3 &= b(a_{\text{ВПП}})_2, \\ c(b_3)_1 a_{\text{ВПП}}^2 + c(b_3)_2 a_{\text{ВПП}} + c(b_3)_3 &= b(a_{\text{ВПП}})_3, \\ c(b_4)_1 a_{\text{ВПП}}^2 + c(b_4)_2 a_{\text{ВПП}} + c(b_4)_3 &= b(a_{\text{ВПП}})_4. \end{aligned} \quad (1.2)$$

По этим зависимостям в процедуре 4 рассчитываем значения коэффициентов выражения (1.1) как функции от $a_{\text{ВПП}}$. С этими коэффициентами получаем зависимость для вычисления $L(t, V_{\text{отрыва}})$ для произвольного коэффициента торможения $a_{\text{ВПП}}$:

$$\begin{aligned} b(a_{\text{ВПП}})_1 V_{\text{решен}}^3 + b(a_{\text{ВПП}})_2 V_{\text{решен}}^2 + b(a_{\text{ВПП}})_3 V_{\text{решен}} + b(a_{\text{ВПП}})_4 &= \\ = L(t, V_{\text{решен}}, V_{\text{отрыв}}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Таблица 2. Возможная форма представления информации экипажу, по которой он может обосновано выбрать прецедент разрешения возникшей коллизии «Посадка: фаза “Пробег ВПП” – угроза “Слабое торможение”»

$L(t)_{\text{исп}}$	$L(t, V_x(t), V_{\text{отрыв}})$	$\Delta L(t, V_{\text{отрыв}})$
$L(t)_{\text{исп}}$	$L(t, V_x(t), V_{\text{сход2}})$	$\Delta L(t, V_{\text{сход2}})$
	Длина ВПП	

В процедуру 4 входят зависимости (1.2), (1.3), по которым для $a_{\text{ВПП}} = a_{\text{ВПП}}^*$, оперативно полученного для выбранного аэродрома посадки, и конкретных $V_{\text{решен}}$ и $V_{\text{отрыв}}$ рассчитывается текущее значение $L(t, V_{\text{решен}}, V_{\text{отрыв}})$, которое передается в процедуру.

Процедура 5. Прогноз потребного участка ВПП, который необходим для взлета самолета с текущей скорости пробега $V(t)_x = V_{\text{решен}}$ до скорости отрыва $V_{\text{отрыва}}$ от ВПП.

Текущая оценка потребной длины отрезка ВПП $L(t, V_{\text{отрыв}})$ провести безопасный взлет с текущей скорости пробега $V_{\text{решен}} = V(t)_x$ определяется зависимостью

$$L(t, V_{\text{отрыв}}) = L(t)_{\text{исп}} + L(t, V_{\text{решен}}, V_{\text{отрыв}}),$$

где $L(t, V_{\text{решен}}, V_{\text{отрыв}})$ поступает из процедуры 4.

Текущая оценка $\Delta L(t, V_{\text{отрыв}})$ возможности осуществить с текущей скорости $V_{\text{решен}} = V_x(t)$ пробега безопасный взлет (достичь после разбега скорости отрыва $V_{\text{отрыва}}$ ЛА от ВПП) определяется как

$$\Delta L(t, V_{\text{отрыв}}) = L_{\text{ВПП}} - L(t, V_{\text{отрыв}}).$$

Текущие значения $L(t, V_{\text{отрыва}})$ и $\Delta L(t, V_{\text{отрыва}})$ передаются на МФИ. Значение $\Delta L(t, V_{\text{отрыва}})$ также передается в базу знаний БОСЭС-целеполагание. На МФИ эта информация может представляться в виде табл. 2.

Непосредственно на МФИ верхнюю и среднюю полосы табл. 2 целесообразно представлять в виде, который для верхней полосы приведен на рис. 6.

На рис. 6 видно изменение этой информации по трем последовательным моментам времени разбега самолета. Правая крайняя полоска соответствует положению самолета относительно конца ВПП, когда самолет достиг скорости отрыва.

2. База знаний БОСЭС-целеполагание для коллизии “Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение”. БОСЭС-целеполагание для этапа полета “Посадка” находится на первой фазе первого этапа ее разработки – “Создание научно-технического задела” [3]. Для коллизии «Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – “Слабое торможение”» ниже представлен облик ее базы знаний.

2.1. Накопление и упорядочение материалов по реальным посадкам пассажирских самолетов типа МС-21: прецеденты разрешения коллизии. Рассмотрение посадок в Твери [4], в Самаре [5], в Москве (аэропорт Шереметьево) [6], в Анталии [7], в Усинске [8] позволило выделить следующие прецеденты (Прц) решения экипажами рассматриваемой коллизии:

Прц-1: продолжить текущую фазу посадки,

Прц-2: прекратить этап полета “Посадка”, уйти на запасной аэродром.

Прц-3: прекратить этап полета “Посадка”, уйти на второй круг.

В каждом прецеденте Прц-2 и Прц-3 обязательно присутствует фаза пробега по ВПП с торможением, в конце которой экипажи могут принимать решение “Прекратить посадку. Взлет”. В этом случае только после отрыва от ВПП экипажи интересуются рекомендацией БОСЭС-целеполагание “Второй круг” или “Запасной аэродром”.

Для использования этих прецедентов в процедурах базы знаний БОСЭС-целеполагание нужно предварительно накопить достаточно большое число реально проведенных посадок, в которых возникала эта коллизия, и были реализованы найденные прецеденты.

Знания по условиям, в которых были успешно реализованы в прошлом эти прецеденты, представляются в форме ситуационного вектора SV (Коллизия «Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение”» – прецеденты). Координатами этого ситуационного вектора являются лингвистические переменные (ЛП), термами которых описываются конкретные условия,

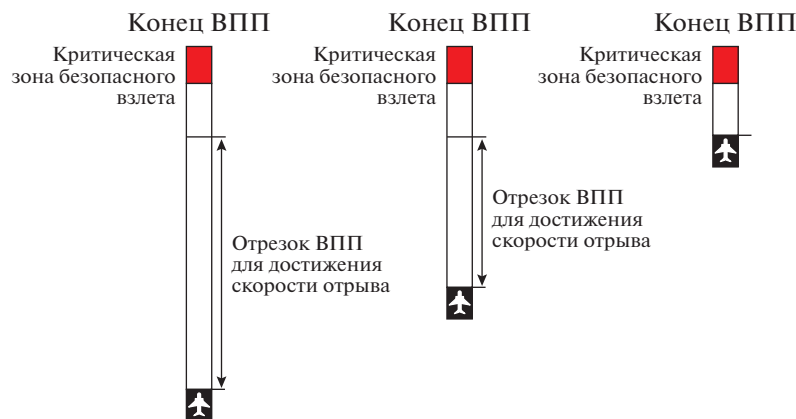


Рис. 6. ИИС СОЭ: предъявление экипажу точки невозврата коллизии «Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение”» (показан процесс приближение самолета к точке невозврата)

в которых был реализован каждый прецедент [1]. ЛП ставится в соответствие набор нечетких множеств, число которых соответствует числу термов этой ЛП. Все эти нечеткие множества для этой ЛП определены на одном и том же универсальном множестве, а соответствующий им ансамбль функций принадлежности создается совместно с экипажами, которые использовали этот прецедент.

Вся необходимая для разработки базы знаний БОСЭС-целеполагания информация по выявленным прецедентам “упаковывается” в экспериментальную матрицу знаний (табл. 3). В ней каждому включенному в матрицу прецеденту ставится в соответствие блок строк матрицы. Строка блока описывает термами соответствующих ЛП условия, в которых был использован в прошлом этот прецедент.

По доступной информации [4–8] удалось определить только часть координат упомянутого ситуационного вектора:

X_1 = ЛП “Текущее количество топлива”; ее термы {критическое (крт), малое (мл), среднее (ср)}. На вертикальной оси рис. 7 эта ЛП обозначена как ЛП-1.

X_2 = ЛП “Амбиции экипажа”; ее термы {большие (бл), средние (ср), малые (мл)}. На вертикальной оси рис. 8 эта ЛП обозначена как ЛП-2.

X_3 = ЛП “Отношение погодных условий к минимуму экипажа”; ее термы {больше (бл), меньше (мн), существенно меньше (см)}. На вертикальной оси рис. 9 эта ЛП обозначена как ЛП-3.

Экспериментальная матрица знаний для коллизии «Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение”» представлена в табл. 3 и на рис. 7–9.

Представление термов ЛП, которые являются координатами ситуационного вектора и используются в матрице знаний, осуществляется через ансамбли функций принадлежности нечетких множеств, показанных на рис. 7–9.

2.2. База знаний БОСЭС – целеполагание: процедурная матрица. В базу знаний БОСЭС-целеполагания включается процедурная матрица знаний, которая от экспериментальной матрицы знаний отличается двумя моментами [1]:

над нечеткими множествами экспериментальной матрицы знаний определены операции нечеткого отношения и нечеткого объединения,

в ней прикреплен процедура численного определения координат ситуационного вектора SV (Коллизия «Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение”»).

Заметим, что часто такую процедурную матрицу знаний называют процедурной матрицей нечетких множеств. Процедурная матрица знаний для коллизии «Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение”» представлена в табл. 4.

Так как в ИИС СОЭ есть конструктивные математические модели развития рассматриваемой угрозы при противодействии ей каждый прецедентом, то процедурная матрица должна выглядеть по-другому. На фазе посадки “Пробег по ВПП” в базу знаний БОСЭС-целеполагание из ИИС СОЭ поступает количественная оценка оставшегося отрезка ВПП при реализации прецедента Прц-1 $\Delta L(t, V_{\text{схода}})$ и количественная оценка $\Delta L(t, V_{\text{отрыва}})$ первого этапа реализации двух

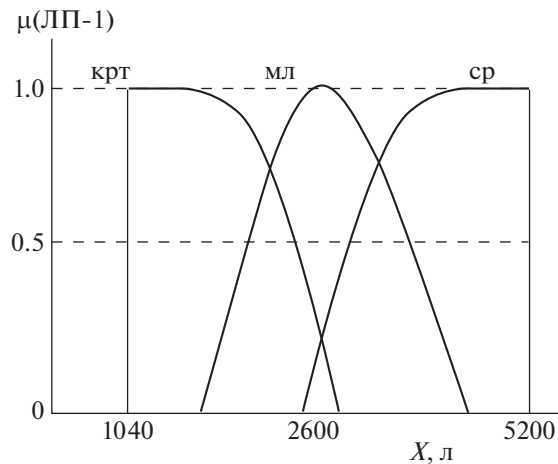


Рис. 7. Представление термов ЛП “Текущее количество топлива” через нечеткие множества, определенные на универсальном множестве [1040, 5200 л]

других прецедентов Прц-2 и Прц-3. Отметим, что у прецедентов Прц-2 и Прц-3 первый этап реализации “Пробег по ВПП” одинаков. Это позволяет в базе знаний БОСЭС-целеполагание на этапе пробега ЛА по ВПП с торможением для разрешения названной выше коллизии использовать Прц-1 и обобщенный прецедент “Прекратить посадку. Взлетать”. При этом Прц-1 будет представлять на пробеге по ВПП два других прецедента Прц-2 и Прц-3. Рекомендуемый экипажу на этапе пробега ЛА прецедент выбирается между Прц-1 и обобщенным прецедентом базы знаний БОСЭС-целеполагание методом продукционных правил (табл. 5).

С первым прецедентом все понятно, просто продолжаем посадку. Рассмотрим подробнее второй прецедент. Когда экипаж принимает рекомендацию прекратить посадку, в базе знаний БОСЭС должна активизироваться процедурная матрица, в которую входят только для

Таблица 3. Экспериментальная матрица знаний для коллизии «Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение”»

Номер по порядку реализации прецедента	Координаты ситуационного вектора SV (“Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение” – Прецеденты)			Прецеденты
	$X1$: ЛП “Текущее количество топлива”	$X2$: ЛП “Амбиция экипажа”	$X3$: ЛП “Отношение погодных условий к минимуму погоды экипажа”	
	Критическое (крт)	Большая (бл)	Больше (бл)	
	Малое (мл)	Средняя (ср)	Меньше (мн)	
	Средняя (ср)	Малая (мл)	Существенно меньше (см)	
1.1	крт	бл	мн	Пробег по ВПП
1.2	мл	бл	см	
2.1	крт	бл	бл	
2.2	ср	мл	мн	
2.3	мл	ср	см	
3.1	мл	мл	мн	Уход на запасной аэродром
3.2	ср	ср	бл	

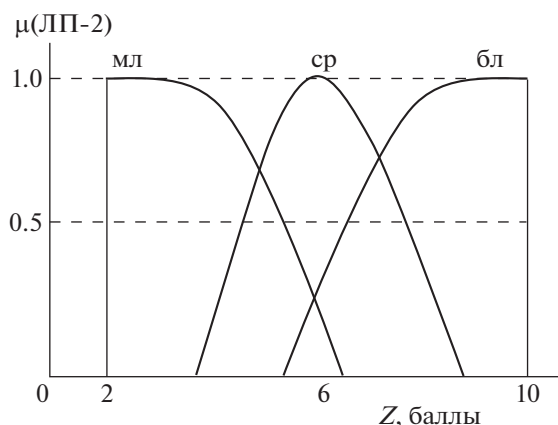


Рис. 8. Представление термов ЛП “Амбиции экипажа” через нечеткие множества, определенные на универсальном множестве [2, 10]

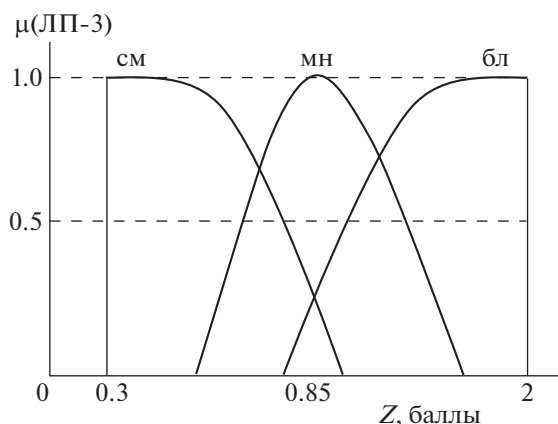


Рис. 9. Представление термов “Отношение погодных условий к минимуму экипажа” через нечеткие множества, определенные на универсальном множестве [0.3, 2]

прецедента Прц-2 и Прц-3, ранее включенные в обобщенный прецедент (табл. 6). В эту матрицу подаются данные из процедуры расчета значений координат ситуационного вектора SU (Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение” – прецеденты), чтобы найти приоритеты прецедентов Прц-2 и Прц-3. Прецедент с наибольшим приоритетом будет предъявлен экипажу на МФИ сразу после завершения взлета (отрыва ЛА от ВПП).

Представим облик процедуры расчета значений определившихся координат ситуационного вектора SU (Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение” – прецеденты).

Координата $X1$ ситуационного вектора, которая представлена ЛП “Текущее количество топлива”. Информация о текущем количестве топлива на борту ЛА оперативно поступает в базу знаний БОСЭС-целеполагание.

Координата $X2$ ситуационного вектора, которая представлена ЛП “Амбиции экипажа”. Под амбицией экипажа будем понимать поведение экипажа при решении о принятии или отклонении рекомендации, которую передает ему БОСЭС-целеполагание. Измерять будем ее в баллах, где 2 балла – безусловное принятие рекомендации, 10 – категоричное непринятие рекомендации. Чем ближе конец отрезка пробега к нижней границе критической зоны безопасного взлета, тем выше амбиции экипажа.

Процедуру расчета значения этой координаты следует разработать совместно со специалистами космической медицины.

Координата $X3$ ситуационного вектора представлена ЛП “Отношение погодных условий к минимуму экипажа”.

Таблица 4. Процедурная матрица в базе знаний БОСЭС-целеполагание для коллизии «Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение”» (общий вид)

Номер по порядку реализации прецедента	Координаты ситуационного вектора SV (“Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение” – прецеденты)			Операция нечеткого отношения строчных нечетких множеств (min)	Операция нечеткого объединения (max)	Прецеденты
	X1: ЛП “Текущее количество топлива”	X2: ЛП “Амбиции экипажа”	X3: ЛП “Отношение погодных условий к минимуму экипажа”			
	Критическое (крт)	Большая (бл)	Больше (бл)			
	Малое (мл)	Средняя (ср)	Меньше (мн)			
	Среднее (ср)	Малая (мл)	Существенно меньше (см)			
1.1	крт	бл	мн	min	max (по min)	Пробег по ВПП
1.2	мл	бл	см	min		
2.1	крт	бл	бл	min	max (по min)	Уход на второй круг
2.2	ср	мл	мн	min		
2.3	мл	ср	см	min		
3.1	мл	мл	мн	min	max (по min)	Уход на запасной аэродром
3.2	ср	ср	бл	min		

Таблица 5. Выбор рекомендуемого экипажу прецедента на фазе посадки “Пробег по ВПП”

SV (Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – прецеденты)	Наличие потребного отрезка от прогнозной точки касания до конца ВВП
Продолжить посадку	Да
Прекратить посадку. Взлет	Нет

Минимум погоды – состояние атмосферы на конкретной территории в данный временной промежуток. Установленные минимумы определяются фактической подготовкой командира воздушного судна (КВС), особенностью данного аэропорта и подходов к нему, оборудованием самолета, его аэродинамикой и наличием на аэродроме посадочных систем. В зависимости от этих определений различают несколько понятий об установленном посадочном минимуме погоды.

Погодный минимум командира – это градации высоты облаков и видимости, при которых КВС имеет право выполнять взлет и посадку.

Минимум аэропорта – это условия, которые установлены для данного конкретного аэропорта в соответствии с категорией ICAO (*international civil aviation organization*), т.е. к какой категории подходят радиотехнические системы посадки аэродрома, в таких погодных условиях осуществляется прием и выпуск бортов.

Минимум самолета – это такие значения облаков и видимости по горизонту, при которых конкретный самолет может садиться и взлетать (все зависит от оснащения самолета, прошедшего

Таблица 6. Процедурная матрица нечетких множеств в базе знаний БОСЭС-целеполагание для коллизии «Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение”» (используемый вид)

Номер по порядку реализации прецедента	Координаты ситуационного вектора SV (Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение” – прецеденты)			Операция нечеткого отношения строчных нечетких множеств (min)	Операция нечеткого объединения max (по min)	Прецеденты
	$X1$: ЛП “Текущее количество топлива”	$X2$: ЛП “Амбиции экипажа”	$X3$: ЛП “Отношение погодных условий к минимуму экипажа”			
	Критическое (крт)	Большая (бл)	Больше (бл)			
	Малое (мл)	Средняя (ср)	Меньше (мн)			
	Среднее (ср)	Малая (мл)	Существенно меньше (см)			
1.1	крт	бл	бл	min	max (по min)	Уход на второй круг
1.2	ср	мл	мн	min		
1.3	мл	ср	см	min		
2.1	мл	мл	мн	min	max (по min)	Уход на запасной аэродром
2.2	ср	ср	бл	min		

Таблица 7. Результаты количественных оценок координат ситуационного вектора SV (коллизия – прецеденты) = ($X1^* = 3140$ л, $X2^* = 7$ баллов, $X3^* = 0.85$)

Координата SV (коллизия – прецеденты)	Численное значение координаты SV (коллизия – прецеденты)	Нахождение ансамбля функций принадлежности координаты	Значения термов координаты, соответствующих ее численному значению
$X1^*$	3140 л	Рис. 10	крт = 0, мл = 0.6, ср = 0.6
$X2^*$	7 баллов	Рис. 11	бл = 0.75, см = 0.75, мн = 0
$X3^*$	0.85	Рис. 12	бл = 0.25, мн = 1.0, см = 0.25

соответствующую сертификацию). Полеты производятся по наибольшему из этих значений минимумов.

Таким образом, до начала полета этот минимум известен. Информацию о текущих погодных условиях получаем с датчиков или от метеослужбы аэропорта.

Минимумы погоды и текущие погодные условия измеряются двумя компонентами: значениями облаков и видимости по горизонту. Расчет рассматриваемой компоненты ситуационного вектора будет происходить следующим образом. Вычисляем отношения минимума погоды и текущих погодных условий покомпонентно. Наименьшее получившееся значение является искомой координатой ситуационного вектора.

Пример. Пусть по текущей информации в процедуре расчета координат ситуационного значения определились $X1^*$, $X2^*$, $X3^*$. Соответствующие им значения термов ЛП, входящих в матрицу знаний, определяются по ансамблям функций принадлежности нечетких множеств, поставленных в соответствие этим координатам. Результаты представлены в табл. 7.

Используя эти значения, преобразуем процедурную матрицу нечетких множеств (табл. 6) в процедурную матрицу расчета приоритетов прецедентов для количественного SV (коллизия – прецеденты), приведенную в табл. 8.

В результате вычислений получены значения приоритетов прецедентов. Покажем возможный вариант сообщения экипажу рекомендаций БОСЭС-целеполагание. На рис. 10 рассмотрен

Таблица 8. Процедурная матрица знаний для SU (коллизия – прецеденты) = ($X1^* = 3140$ л, $X2^* = 7$ баллов, $X3^* = 0.85$)

Номер по порядку реализации прецедента	Координаты ситуационного вектора SU (“Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение” – прецеденты)			Операция нечеткого отношения строчных нечетких множеств (min)	Операция нечеткого объединения строчных нечетких множеств (max (по min))	Прецеденты (приоритет)
	$X1$: ЛП “Текущее количество топлива”	$X2$: ЛП “Амбиции экипажа”	$X3$: ЛП “Отношение погодных условий к минимуму погоды экипажа”			
	Критическое (крт)	Большая (бл)	Больше (бл)			
	Малое (мл)	Средняя (ср)	Меньше (мн)			
	Среднее (ср)	Малая (мл)	Существенно меньше (см)			
1.1	0	0.75	0.3	0		
1.2	0.6	0	1.0	0	0.25	Уход на второй круг (0.25)
1.3	0.6	0.75	0.25	0.25		
2.1	0.6	0	1.0	0		
2.2	0.6	0.7	0.25	0.25	0.25	Уход на запасной аэродром (0.25)

кадр МФИ МС-21 с предполагаемым местом размещения рекомендации экипажу для решения коллизии «Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение”». Разработанный нами сигнал должен появляться на *PFD (pilot flight display)* самолета МС-21, когда экипаж подтверждает наличие коллизии, которую ему предъявила ИИС СОЭ. Подтверждается коллизия летчиком либо с помощью ручного ввода, либо его речевым сообщением.

На фазе посадки “Пробег по ВПП” ИИС СОЭ подает сигнал (рис. 10), наглядно показывающий экипажу в каждый момент времени прогнозные потребные отрезки ВПП и расстояния до ТН при реализации экипажем одного из двух возможных решений:

“Продолжить посадку” (правая полоска на МФИ),

“Прекратить посадку. Взлет” (левая полоска на МФИ).

БОСЭС-целеполагание подсвечивает ту полоску, которая соответствует в данный момент рекомендуемому экипажу решению.

Заключение. Для коллизии «Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – угроза “Слабое торможение”» разработана база знаний ИИС СОЭ и определен облик базы знаний БОСЭС-целеполагание. Базы знаний разрабатывались с использованием результатов полунатурного моделирования процесса посадки самолета МС-21 на стенде “Комплекс бортового оборудования самолета МС-21”, созданного в ГосНИИАС, и материалов открытых источников по коллизиям, возникающих на этапе посадки самолетов типа МС-21.

Для базы знаний ИИС СОЭ определены встречающиеся на посадке коллизии и для одной из них созданы математические модели определения ТН для прецедентов “Завершить пробег до скорости схода самолета с ВПП” и “Прекратить пробег. Взлет”, входящих в базу знаний БОСЭС-целеполагание”.

Для базы знаний БОСЭС-целеполагание найдены:

облик экспериментальной матрицы знаний, как формы сохранения информации о реальных посадках самолетов типа МС-21, в которых возникала упомянутая коллизия,

облик процедурной матрицы знаний, входящей в базу знаний БОСЭС-целеполагание.

Опыт этой конкретной разработки показал, что для процедур решения задачи оперативного целеполагания в ряде случаев можно использовать следующее:



Рис. 10. Предполагаемое расположение разработанного сигнала (слева две светлые полосы) на PFD самолета MC-21

если в базе знаний ИИС СОЭ есть конструктивные математические модели расчета ТН для каждого прецедента, входящего в базу знаний БОСЭС-целесолагание, то процедуру выбора предпочтительного прецедента можно строить не по прецеденту, а реализовать на производственных правилах;

если для нескольких прецедентов, входящего в базу знаний БОСЭС-целесолагание, первый этап в реализации этих прецедентов одинаков, то можно эти прецеденты объединить в один обобщенный прецедент, сконструировав при этом новую процедурную матрицу знаний и “урезанную” процедурную матрицу знаний для прецедентов, входящих в обобщенный прецедент. Последняя матрица знаний будет включаться в работу, если в первой матрице знаний будет выбран обобщенный прецедент.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федун Б.Е. Бортовые интеллектуальные системы тактического уровня для антропоцентрических объектов (примеры для пилотируемых летательных аппаратов. М.: Де Либри, 2018. 245 с.
2. Федун Б.Е. Электронный летчик: “Точка невозврата” пройдена не будет. Бортовые оперативно советующие экспертные системы тактического уровня для пилотируемых летательных аппаратов // Авиапанорама. 2016. № 1. С. 9–20.
3. ГОСТ Р 58048 2017. “Трансфер технологий. Методические указания по оценке уровня зрелости технологий”.
4. Окончательный отчет ЕЭВС, самолет “Sky cruiser” RA-1451G. Тверь, 2014.
5. Окончательный отчет, самолет B300RA-02778. Самара, 2014.
6. Окончательный отчет ЕЭВС, самолет Gulfstream G200 4K-AZ88. М. (аэропорт Шереметьево), 2019.
7. Промежуточный отчет ЕЭВС, самолет A-321-231 VQ-BRS. Анталия, 2020.
8. Окончательный отчет ЕЭВС самолет Boeing 737-500 VQ-BPS. Усинск, 2020.

УДК 004.852,004.932

ФРЕЙМОВАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СВЕРТОЧНОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ В ЗАДАЧАХ КЛАССИФИКАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ¹

© 2022 г. А. Н. Гнеушев^{a,b,*}, А. Д. Григорьев^{a,**}, И. А. Матвеев^{b,***}^a МФТИ, Долгопрудный, МО, Россия^b ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: gneushev@ccas.ru

**e-mail: grigorev.ad@phystech.edu

***e-mail: matveev@ccas.ru

Поступила в редакцию 06.07.2022 г.

После доработки 09.07.2022 г.

Принята к публикации 01.08.2022 г.

Рассматривается задача регуляризации параметров нейронной сети для увеличения эффективности использования их избыточности и повышения устойчивости к реализациям входных данных, не содержащихся в обучающей выборке. Предлагается представление системы весовых векторов нейросетевого слоя в виде фрейма в пространстве весов, вводится регуляризация в виде штрафа за несоблюдение достаточного условия фрейма. Предложенный метод накладывает меньшие ограничения на веса модели, чем существующие способы увеличения эффективности, основанные на ортогонализации. Метод обобщается на сверточные слои в блочно-теплицевом представлении и применим к сверточным нейронным сетям. Вычислительный эксперимент на выборках CIFAR-10, CIFAR-100 и SVHN показал превосходство предложенного метода регуляризации по точности классификации, обобщающей способности и устойчивости к состязательным атакам по сравнению с базовыми подходами.

DOI: 10.31857/S0002338822060087

0. Введение. Информационные интеллектуальные системы, использующие искусственные нейронные сети для анализа данных, являются неотъемлемой частью современных решений широкого круга задач. В частности, важным направлением является автоматизация анализа изображений и построение интеллектуальных видеосистем для промышленных и бытовых нужд. Глубокие нейронные сети с большим количеством параметров способны с высокой точностью описывать сложные нелинейные зависимости. Высокая размерность пространства параметров делает задачу их подбора и оптимизации весьма сложной. В частности, избыточное число параметров приводит к корреляции нейронов сети, что снижает обобщающую способность и приводит к неэффективному использованию вычислительных ресурсов. Проблему избыточности параметров модели можно переформулировать в задачу увеличения эффективности параметризации. Решается она изменением структуры нейронной сети или повышением (оптимизацией) разнообразия нейронов в каждом из слоев. В структурных подходах можно уменьшать число параметров во время обучения [1, 2] или прореживать их после обучения [3, 4]. Оптимизационные подходы работают непосредственно при обучении.

Особый интерес представляет регуляризация параметров. Она нацелена прежде всего на предотвращение переобучения, т.е. повышение обобщающей способности модели [5–7]. Классический метод регуляризации на основе введения штрафа на норму весов ограничивает их абсолютные значения и тем самым предотвращает возможный рост нормы градиентов параметров, что существенно облегчает обучение нейросетевых моделей стандартными градиентными методами [5].

Предложено множество способов регуляризации параметров, ориентированных на повышение их разнообразия. Один из успешных подходов основан на обеспечении углового разнообразия векторов нейронов [8]. Угловое разнообразие векторов можно характеризовать как сумму

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 21-51-53019).

попарных угловых расстояний (энергию). Такая регуляризация подразумевает минимизацию энергии при достижении более равномерно распределенной в пространстве и, следовательно, разнообразной конфигурации векторов. Альтернативный подход к повышению разнообразия векторов связан с их ортогонализацией [9–11]. В [12] предлагается метод ортогональной инициализации, ускоряющий сходимость на ранних этапах обучения, однако далее в процессе обучения ортогональность не сохраняется. Для поддержания ортогональности вводится регуляризация (система штрафов). Ортогональность весов в слое позволяет сохранить энергию входного сигнала, что минимизирует потерю информации о сигнале [9, 12]. В работах [9, 10] предлагаются разные подходы к ортогонализации параметров нейросетевого слоя. В [9] регуляризатор является фробениусовой нормой разности матрицы Грама векторов весов и единичной матрицы:

$$R(\mathbf{W}) = \begin{cases} \|\mathbf{W}^T \mathbf{W} - \mathbb{I}\|, & m \geq n, \\ \|\mathbf{W} \mathbf{W}^T - \mathbb{I}\|, & m < n, \end{cases} \quad (0.1)$$

где $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – матрица линейного оператора, задающего нейросетевой слой, \mathbb{I} – единичная матрица. При $m \geq n$ ортогонализуются столбцы матрицы \mathbf{W} , а при $m < n$ – строки.

В [10] ортогональная регуляризация основана на свойстве спектральной ограниченной изометрии и заключается в минимизации спектральной нормы матрицы, определенной как разность матрицы Грама системы весов и единичной матрицы:

$$R(\mathbf{W}) = \sigma(\mathbf{W}^T \mathbf{W} - \mathbb{I}). \quad (0.2)$$

Здесь $\sigma(\mathbf{A})$ – спектральная норма матрицы, для симметричных положительно определенных вещественнозначных матриц численно равная квадратному корню наибольшего собственного числа: $\sigma(\mathbf{A}) = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A})}$. Ортогональность достигается за счет наложения штрафа в случае отличия сингулярных чисел матрицы весов от единицы.

Несмотря на то, что описанные подходы показывают многообещающие результаты в задаче классификации на эталонных выборках, условие ортогональности вводит довольно жесткие ограничения на параметры нейронного слоя. В случае избыточности параметров, когда число нейронов больше размерности входного сигнала, снижается фактическая емкость нейросетевой модели [13].

В работе обобщается подход ортогональной регуляризации для увеличения эффективности избыточного множества параметров нейронной сети и повышения устойчивости нейросетевой модели в задачах классификации. Параметры слоя нейронной сети предлагается рассматривать как семейство векторов в евклидовом пространстве, такое, что проекция входных данных на эту систему является устойчивой и полной. В этом случае гарантируется сохранение энергии входного сигнала и его информации в условиях переопределенной системы параметров, характерной для нейронной сети. В отличие от методов ортогонализации параметров предлагается более общий подход, а именно построение фрейма в евклидовом векторном пространстве параметров каждого слоя. Полнота и устойчивость фреймового представления аналогичны базису. Исходя из этого, в данной работе предлагается новая функция потерь, которая накладывает слабые ограничения на параметры модели, но обеспечивает базисные свойства для нейросетевого слоя, достаточные для восстановления входного сигнала на входе слоя по его выходу. Фреймовое представление позволяет рассматривать каждый слой нейронной сети как суперпозицию набора линейных преобразований, осуществляющих выделение признаков без потерь информации, и нелинейных функций активации, выбирающих значимые для решения задачи признаки. Многослойная нейросеть, соответственно, является суперпозицией таких чередующихся преобразований.

1. Постановка задачи. Дана выборка $\mathcal{D} = \{\bar{x}_i, y_i\}_{i=1}^N$, где $\bar{x}_i \in \mathbb{R}^n$ – объект, $y_i \in \{1, \dots, C\}$ – метка класса данного объекта, C – число классов в выборке, N – размер выборки.

Задана параметрическая модель $\varphi(\bar{x}|\Theta)$ из семейства Φ_L глубоких нейронных сетей следующего вида:

$$\varphi(\bar{x}|\Theta) = (\mathcal{H}_L \circ \mathcal{F}_L \circ \dots \circ \mathcal{H}_j \circ \mathcal{F}_j \circ \dots \circ \mathcal{H}_1 \circ \mathcal{F}_1)(\bar{x}|\Theta), \quad (1.1)$$

где L – количество слоев модели. Каждый слой представим в виде суперпозиции линейного оператора $\mathcal{F}_j : \mathbb{R}^{n_j} \rightarrow \mathbb{R}^{m_j}$ и нелинейной функции активации $\mathcal{H}_j : \mathbb{R}^{m_j} \rightarrow \mathbb{R}^{m_j}$:

$$(\mathcal{H}_j \circ \mathcal{F}_j)(\vec{z}) = \mathcal{H}_j(\mathcal{F}_j(\vec{z})) = \mathcal{H}_j(\mathbf{W}_j \vec{z}), \quad \forall \vec{z} \in \mathbb{R}^{n_j}, \quad j = \overline{1, L}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{W}_j \in \mathbb{R}^{m_j \times n_j}$ – матрица линейного оператора \mathcal{F}_j , составленная из параметров данного слоя. Символом Θ обозначается набор оптимизируемых параметров нейронной сети, состоящий из коэффициентов матриц \mathbf{W}_j . Размерности входа и выхода слоя j обозначаются n_j и m_j , при этом размерность выхода больше: $n_j \leq m_j$, выход со слоя j является входом следующего слоя $j + 1$: $n_{j+1} = m_j$. Таким образом, нейросетевые слои моделей из указанного семейства Φ_L не понижают размерность входных данных.

Ставится задача мультиклассовой классификации, решение которой ищется методом минимизации эмпирического риска по заданной выборке \mathfrak{D} :

$$\hat{\Theta} = \arg \min_{\Theta} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ell(\varphi(\vec{x}_i | \Theta), y_i) + \gamma \tilde{R}(\Theta), \quad (1.3)$$

где ℓ – кроссэнтропийная функция потерь, γ – коэффициент регуляризации. Регуляризатор параметров нейросетевой модели, накладывающий ограничения на параметры каждого слоя в отдельности, записывается как

$$\tilde{R}(\Theta) = \sum_{j=1}^L R(\mathbf{W}_j). \quad (1.4)$$

Регуляризация матрицы $\mathbf{W}_j^T = (\bar{w}_1^j \dots \bar{w}_{m_j}^j)$ каждого из слоев $j = \overline{1, L}$ направлена на минимизацию потерь информации на линейной части нейросетевого слоя $\mathcal{F}_j(\vec{z}) = \mathbf{W}_j \vec{z}$ путем построения системы векторов $\{\bar{w}_k^j\}_{k=1}^{m_j}$, линейно восстанавливающих вход \vec{z} по выходу $\mathcal{F}_j(\vec{z})$:

$$\forall \vec{z} \in \mathbb{R}^{n_j} \quad \exists \vec{c} = \vec{c}(\mathcal{F}_j(\vec{z}) | \mathbf{W}_j) : \vec{z} = \sum_{k=1}^{m_j} c_k \bar{w}_k^j. \quad (1.5)$$

Существует неединственная матрица \mathbf{W}_j , удовлетворяющая условию (1.5) обратимости оператора \mathcal{F}_j при избыточном множестве векторов $\{\bar{w}_1^j, \dots, \bar{w}_{m_j}^j\}$.

2. Модель фрейма для сверточного слоя. Рассмотрим задачу регуляризации векторов весов нейронов некоторого слоя с точки зрения увеличения их разнообразия, тем самым минимизируя потери информации на этом слое даже тех данных, которые слабо представлены в обучающей выборке.

В случае представления слоя в виде линейного оператора (1.2) с квадратной матрицей весов условие ортогональности данной матрицы ведет к существованию обратного оператора для данного слоя. В частности, веса слоя образуют базис и любой вход $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ раскладывается по базисной системе векторов с уникальными коэффициентами. Тогда линейный оператор \mathcal{F} будет обладать максимальной обобщающей способностью, поскольку может преобразовывать и представлять в \mathbb{R}^n без потерь любой пример \vec{z} вне обучающей выборки.

Предложим модель $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ нейросетевого слоя с сохранением свойства обратимости, но при этом содержащую избыточное число параметров ($m > n$), что характерно для сверточных слоев нейронной сети. Условие обратимости гарантирует, что в избыточном множестве весов модели найдется базис и, таким образом, сохраняется обобщающая способность представлять любой вход $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ без потерь в \mathbb{R}^m . Избыточность весов снижает степень ограничений при обучении модели и может способствовать устойчивости модели.

Линейный оператор \mathcal{F} с матрицей \mathbf{W} непрерывен и, следовательно, ограничен:

$$\exists 0 < B < \infty : \|\mathbf{W}\vec{z}\|^2 \leq B\|\vec{z}\|^2 \quad \text{для} \quad \forall \vec{z} \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

с ограниченной нормой матрицы

$$\|\mathbf{W}\|^2 = \sup_{\vec{z} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{z}\| \neq 0} \|\mathbf{W}\vec{z}\|^2 / \|\vec{z}\|^2 \leq B.$$

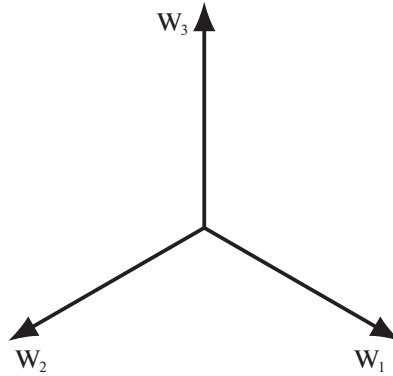


Рис. 1. Пример жесткого фрейма с границей $A = \frac{3}{2}$ в \mathbb{R}^2

Требование устойчивого восстановления \vec{z} по образу $\mathbf{W}\vec{z}$ означает, что если $\|\mathbf{W}\vec{z}\|^2$ мало, то и $\|\vec{z}\|^2$ также должна быть малой, т.е. $\exists \alpha < \infty : \|\mathbf{W}\vec{z}\|^2 \leq 1 \Rightarrow \|\vec{z}\|^2 \leq \alpha$. Следуя рассуждениям [14], пусть $\tilde{\vec{z}} = \vec{z}/\|\mathbf{W}\vec{z}\|$ для $\forall \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, тогда из условия $\|\mathbf{W}\tilde{\vec{z}}\|^2 \leq 1$ вытекает $\|\tilde{\vec{z}}\|^2 \leq \alpha$, откуда получаем выражение $\|\vec{z}\|^2 / \|\mathbf{W}\vec{z}\|^2 \leq \alpha$ или при $A = \alpha^{-1} > 0$:

$$A\|\vec{z}\|^2 \leq \|\mathbf{W}\vec{z}\|^2 \quad \text{для} \quad \forall \vec{z} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

Если выражение (2.2) выполняется, то для $\forall \vec{z}_1, \vec{z}_2 \in \mathbb{R}^n$ расстояние $\|\vec{z}_1 - \vec{z}_2\|$ не может быть сколько угодно большим, если величина $\|\mathbf{W}\vec{z}_1 - \mathbf{W}\vec{z}_2\|^2$ мала. Таким образом, выражение (2.2) является условием устойчивости.

2.1. Фреймовое представление нейросетевого слоя. Условия (2.1) и (2.2) определяют фрейм в пространстве \mathbb{R}^m . Фреймы были введены в работах, связанных с разложениями функций из $\mathbb{L}^2([0, 1])$ по комплексным экспонентам, и рассматриваются как базовая структура для построения избыточных систем вейвлетов в Гильбертовом пространстве [14]. Отсчеты ядер сверточных слоев нейронной сети можно рассматривать как реализации семейства функций с компактным носителем. Визуализация сверточных ядер нейронной сети [15], обученной на большой выборке изображений, подтверждает аналогию с вейвлетами. Соответствующие профили напоминают типичные решетчатые фильтры, характерные для функций Габора и гауссовских вейвлетов. Такая аналогия приводит к представлению, что обученная нейронная сеть должна содержать как веса полносвязного слоя, так и сверточные ядра, которые определяют подпространства, обладающие определенной структурой для представления промежуточных разложений входных данных. Таким образом, устойчивость этих разложений и полнота подпространств определяется свойствами системы весов линейных слоев нейросети. Используя идеи из [14], будем рассматривать линейные слои обученной нейронной сети как фреймовую структуру.

Определение [16]. Набор векторов $\{\vec{w}_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}^n$ называется *фреймом* в \mathbb{R}^n , если $\exists A, B : 0 < A \leq B < \infty : \forall \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ выполнено *неравенство фрейма*:

$$A\|\vec{z}\|^2 \leq \sum_{i=1}^m |\langle \vec{z}, \vec{w}_i \rangle|^2 \leq B\|\vec{z}\|^2, \quad (2.3)$$

где A, B — границы фрейма. Если $A = B$, то фрейм называется *жестким* (рис. 1).

Фрейм обладает рядом свойств, которые делают его использование для описания нейросетевого слоя. Полнота фрейма $\{\vec{w}_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}^n$ в \mathbb{R}^n и его избыточность при $m > n$ во многом характерны для слоя нейросети и позволяют точнее его описывать. Фреймовая система гарантированно содержит подсистему, образующую базис в \mathbb{R}^n . В частности, если векторы фрейма линейно независимы, то сам фрейм является базисом.

Полная ортогональная система – частный случай фрейма. В связи с этим ортогональная регуляризация (0.1) параметров нейросетевого слоя вида (1.2) соответствует частному случаю построения жесткого фрейма с границами $A = B = 1$ (фрейм Парсеваля–Стеклова). В действительности равенство $\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbb{I}$ необходимо и достаточно для того, чтобы строки матрицы \mathbf{W} образовывали фрейм Парсеваля–Стеклова [16]. Более того, фрейм является естественным обобщением полных ортогональных систем с точки зрения сингулярных чисел матрицы \mathbf{W} , спектра матрицы $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$. Для ортогональной системы $\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbb{I}$, все собственные значения равны 1. Если строки $\{\bar{w}_k\}_{k=1}^m$ матрицы \mathbf{W} образуют фрейм, то собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$ ограничены границами фрейма:

$$A \leq \lambda_i \leq B, \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (2.4)$$

Для жесткого фрейма $A = B$ все сингулярные числа матрицы \mathbf{W} одинаковы. В данном случае множество векторов пространства наиболее равномерно представляется векторами фреймовой системы, т.е. элементы фрейма максимально разнообразны.

Ограниченность спектра для фреймового представления линейного оператора с матрицей \mathbf{W} позволяет оценить константу Липшица \mathcal{L} данного оператора, равную спектральной норме матрицы \mathbf{W} :

$$\mathcal{L} = \|\mathbf{W}\|_2 = \sigma(\mathbf{W}) \leq \sqrt{B}. \quad (2.5)$$

Одним из важнейших свойств фрейма $\{\bar{w}_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}^n$ является возможность разложения произвольного элемента пространства по дуальному фрейму $\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^m$, элементы которого определяются как $\tilde{w}_i = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \bar{w}_i$, $\mathbf{W}^T = [\bar{w}_1 \dots \bar{w}_m]$, $i = \overline{1, m}$:

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^m \langle \bar{z}, \bar{w}_i \rangle \tilde{w}_i, \quad \forall \bar{z} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.6)$$

Разложение по дуальному фрейму задает решение переопределенной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $\bar{u} = \mathbf{W} \bar{z}$, где $\mathbf{W}^T = [\bar{w}_1 \dots \bar{w}_m]$, строки $\{\bar{w}_k\}_{k=1}^m$ матрицы \mathbf{W} образуют фрейм. Причем фрейм дает устойчивое решение задачи восстановления входа: $\bar{z} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \bar{u}$. Обусловленность задачи ограничена отношением границ фрейма:

$$\kappa(\mathbf{W}) = \|\mathbf{W}^T \mathbf{W}\| \|(\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1}\| = \frac{|\lambda_{\max}(\mathbf{W}^T \mathbf{W})|}{|\lambda_{\min}(\mathbf{W}^T \mathbf{W})|} \leq \frac{B}{A}. \quad (2.7)$$

В случае жесткого фрейма обусловленность задачи оптимальна: $\kappa(\mathbf{W}) = 1$.

Приведенные свойства делают до некоторой степени естественным использование фрейма в качестве модели слоя нейросети. Пусть нейросетевой слой, подобно (1.2), задан линейным оператором $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ с матрицей $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{m \times n} : m \geq n$, $\mathcal{F}(\bar{z}) = \mathbf{W} \bar{z}$, $\forall \bar{z} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{W}^T = [\bar{w}_1 \dots \bar{w}_m]$. Предлагается рассматривать строки $\{\bar{w}_k\}_{k=1}^m$ матрицы \mathbf{W} в качестве фреймовой системы векторов. Наличие разложения по дуальному фрейму (2.6) позволяет сформулировать следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е. Для обратимости линейной части нейросетевого слоя $\mathcal{F}(\bar{z}) = \mathbf{W} \bar{z}$ необходимо и достаточно, чтобы строки $\{\bar{w}_k\}_{k=1}^m$ матрицы \mathbf{W} образовывали фрейм в \mathbb{R}^n .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть линейная часть слоя $\mathcal{F}(\bar{z}) = \mathbf{W} \bar{z}$ обратима. Покажем, что строки $\{\bar{w}_k\}_{k=1}^m$ матрицы \mathbf{W} образуют фрейм в \mathbb{R}^n .

Обратимость соответствует линейной восстановимости (1.5) произвольного входа $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ по системе $\{\bar{w}_k\}_{k=1}^m$, т.е. система полна в \mathbb{R}^n . Полная система в \mathbb{R}^n является фреймом в данном пространстве [16].

Достаточность. Пусть строки $\{\tilde{w}_k\}_{k=1}^m$ матрицы \mathbf{W} – фрейм в \mathbb{R}^n . Покажем, что линейный оператор $\mathcal{F}(\bar{z}) = \mathbf{W}\bar{z}$ обратим.

Воспользуемся свойством (2.6) разложения входа по дуальному фрейму:

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^m \langle \bar{z}, \tilde{w}_i \rangle \tilde{w}_i = \sum_{i=1}^m (\mathbf{W}\bar{z})_i \tilde{w}_i = \sum_{i=1}^m (\mathcal{F}(\bar{z}))_i \tilde{w}_i, \quad \forall \bar{z} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.8)$$

где $\{\tilde{w}_i\}_{i=1}^m$ – канонический дуальный фрейм. Поскольку элементы дуального фрейма определяются как $\tilde{w}_i = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \tilde{w}_i$, $i = \overline{1, m}$, выражение (2.8) переписывается в виде

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^m \underbrace{(\mathcal{F}(\bar{z}))_i (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1}}_{\tilde{c}_i(\mathcal{F}(\bar{z}), \mathbf{W})} \tilde{w}_i = \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i \tilde{w}_i, \quad \forall \bar{z} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.9)$$

т.е. имеет место линейное восстановление входа \bar{z} по выходу $\mathcal{F}(\bar{z})$ подобно (1.5). Таким образом, линейная часть слоя $\mathcal{F}(\bar{z}) = \mathbf{W}\bar{z}$ обратима. Утверждение доказано.

2.2. Фреймовая регуляризация. Ввиду того что явная параметризация нейросетевого слоя в качестве фрейма не представляется возможной, предлагается построение регуляризатора, накладывающего штраф за несоблюдение достаточного условия фрейма.

Фреймовое неравенство (2.3) для нейросетевого слоя вида (1.2) записывается как

$$A\|\bar{z}\|^2 \leq \|\mathbf{W}\bar{z}\|^2 \leq B\|\bar{z}\|^2, \quad \forall \bar{z} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.10)$$

фрейм в данном случае образуют строки матрицы \mathbf{W} . Фреймовое неравенство (2.10) может быть переписано в следующем виде:

$$\begin{cases} \bar{z}^T (\mathbf{W}^T \mathbf{W} - A\mathbb{I}) \bar{z} \geq 0, & \forall \bar{z} \in \mathbb{R}^n, \\ \bar{z}^T (-\mathbf{W}^T \mathbf{W} + B\mathbb{I}) \bar{z} \geq 0, & \forall \bar{z} \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.11)$$

Неравенства данной системы соответствуют положительной полуопределенности матрицы $(\mathbf{W}^T \mathbf{W} - A\mathbb{I})$ и $(-\mathbf{W}^T \mathbf{W} + B\mathbb{I})$ соответственно. Регуляризатор для произвольной матрицы \mathbf{W} весов слоя определяется путем введения штрафа за нарушение этих неравенств, пользуясь следующим достаточным условием положительной полуопределенности матрицы, являющимся следствием теоремы Гершгорина [17].

Матрица $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ положительно полуопределена, если она обладает свойством диагонально-го преобладания:

$$|v_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |v_{ij}| \quad \forall i = \overline{1, m},$$

и ее диагональные элементы неотрицательны: $v_{ii} \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, m}$.

Пусть $\mathbf{V} = \mathbf{W}^T \mathbf{W}$, $M(v) = \min\{v, 0\}$. Введем фреймовый регуляризатор для отдельного нейросетевого слоя с матрицей весов \mathbf{W} :

$$R(\mathbf{W}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{M \left(v_{ii} - A - \sum_{j=1, j \neq i}^n |v_{ij}| \right)}_{\text{штраф } i\text{-й строки } (\mathbf{W}^T \mathbf{W} - A\mathbb{I})} + \underbrace{M \left(-v_{ii} + B - \sum_{j=1, j \neq i}^n |v_{ij}| \right)}_{\text{штраф } i\text{-й строки } (-\mathbf{W}^T \mathbf{W} + B\mathbb{I})}, \quad (2.12)$$

где $v_{ij} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})_{ij}$.

Отметим, что обычно применяемый штраф на L_2 норму весов (weight decay [5]) конкурирует с предложенной фреймовой регуляризацией, поскольку независимо уменьшает диагональное доминирование матрицы $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$ путем минимизации диагональных элементов – квадратов весов слоя. Более того, условие с верхней границей B при фреймовой регуляризации обобщает подход ограничения нормы весов [5] и не нуждается в использовании данного штрафа.

2.3. Фреймовая регуляризация сверточных слоев. Особый интерес представляет класс нейросетевых моделей, состоящий из сверточных нейронных сетей, в силу успешности их применения во многих задачах обработки изображений и компьютерного зрения. Сверточный

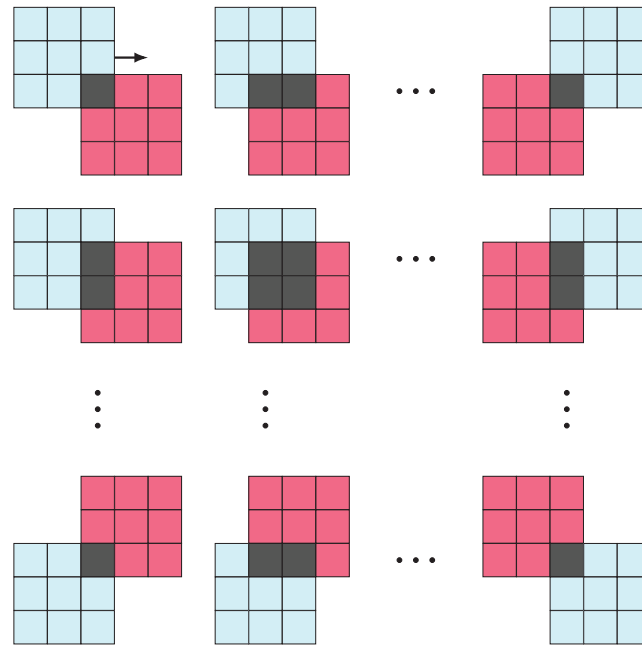


Рис. 2. Возможные пространственные пересечения пары ядер 3×3

слой удовлетворяет линейному представлению (1.2) в случае, если размерность входа не снижается. В качестве матрицы \mathbf{W} весов линейного представления сверточного слоя выступает блочно-теплицева матрица, составленная из параметров свертки.

На практике размерность матрицы \mathbf{W} оказывается слишком высокой для эффективного вычисления матрицы $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$, что накладывает ограничения на применимость предложенного метода в исходном виде. Ввиду разреженности блочно-теплицевой матрицы \mathbf{W} предлагается использовать алгоритм вычисления ненулевых элементов каждой из строк матрицы $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$ на основе свертки ядер с самими собой, предложенный в работе [11]. Эффективность алгоритма обусловлена конечным набором возможных пространственных пересечений двух сверточных ядер (рис. 2).

Отличительной особенностью предложенного регуляризатора (2.12) является инвариантность его значений к позициям внедиагональных элементов каждой из строк матрицы $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$. Данное свойство фреймового регуляризатора позволяет успешно вычислять его значения на основе приведенного выше алгоритма вычисления ненулевых элементов матрицы $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$.

3. Численные эксперименты. В данной работе вычислительные эксперименты разделяются на три набора по направлению исследований. В рамках первой группы экспериментов проводится сравнение предложенного метода регуляризации с существующими в рамках задачи мультиклассовой классификации. Вторая группа экспериментов посвящена исследованию обобщающей способности моделей, обученных с разными видами регуляризаций, при смене домена. Третье направление экспериментов связано с изучением устойчивости моделей к состязательным атакам.

3.1. Классификация изображений. В табл. 1 приведены характеристики трех баз данных, CIFAR-10, CIFAR-100 [18] и SVHN [19], использованных в вычислительных экспериментах по мультиклассовой классификации. В качестве моделей взяты сверточные нейронные сети архитектур ResNet-34 и ResNet-50 [20]. Функция потерь задана в виде (1.3), (1.4) с фреймовым регуляризатором (2.12). Границы фрейма брались из множеств $A \in \{0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 1.0\}$ и $B \in \{0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 1.0, 2.0, 4.0\}$ с условием $A \leq B$. Найденная по серии обучений модели наилучшая пара границ A, B использовалась для сравнения с другими методами регуляризации. Модели обучались на 200 эпохах с размером батча 128, оптимизатором выступал Adam с начальным шагом 0.01 и мультипликативным уменьшением шага с коэффициентом 0.1 на 100, 150 и 180 эпохах [21].

Таблица 1. Описание выборок

Выборка	Число изображений	Число классов
CIFAR-10	60000	10
CIFAR-100	60000	100
SVHN	~100000	10

Таблица 2. Точность (в %) модели ResNet-34 с фреймовой регуляризацией для выборки CIFAR-100 при различных значениях границ фрейма

A	B						
	0.05	0.1	0.25	0.5	1.0	2.0	4.0
0.05	76.81	76.88	77.02	77.06	76.95	76.91	76.90
0.1	–	77.19	77.36	77.41	77.33	77.21	77.01
0.25	–	–	77.53	77.61	77.57	77.39	77.21
0.5	–	–	–	77.26	77.20	77.13	77.10
1.0	–	–	–	–	76.79	76.74	76.75

Проведено сравнение предложенного метода фреймовой регуляризации с существующими подходами: минимизацией гиперсферической потенциальной энергии (minimum hyperspherical energy) [8], спектральной ограниченной изометрии (spectral restricted isometry property) [10] и подходами к ортогонализации (weights orthogonalization, orthogonal convolutions) [9, 11]. Ортогонализация применялась к сверточным слоям в представлении `im2col`, для последних двух из указанных методов использовалось блочно-теплицево представление [22]. Показателем качества решения взята стандартная в задачах классификации мера – точность (accuracy). В силу сбалансированности классов во всех используемых выборках применение этой меры оправдано.

В табл. 2 представлена зависимость точности классификации модели ResNet-34, обученной на выборке CIFAR-100 с фреймовой регуляризацией, от различных значений границ фрейма. Наилучшая точность достигалась для значений границ $A = 0.25$, $B = 0.5$. Эти значения взяты для фреймовой регуляризации (2.12) во всех дальнейших экспериментах. Следует отметить, что (2.12) является обобщением регуляризации по L_2 норме. Эксперименты показали, что при фреймовой регуляризации штраф на L_2 норму весов [5] ухудшает результаты, так как конкурирует за влияние на диагональные элементы матрицы $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$. Поэтому данный штраф не включен в целевую функцию предлагаемого метода. Этим метод отличается от ранее известных, где наряду с иными различными регуляризаторами присутствует и регуляризатор по L_2 норме. Сравнение методов регуляризации представлено в табл. 3 и 4.

Полученные результаты показывают, что предложенный метод значительно превосходит базовые подходы с точки зрения качества классификации на выборках CIFAR-100 и SVHN для обеих нейросетевых моделей. На выборке CIFAR-10 метод сравним по качеству с лучшим из имеющихся базовых.

3.2. Устойчивость к смене домена. Произведено сравнение предложенного метода регуляризации на основе фрейма с базовыми методами с точки зрения устойчивости к смене домена. Модели архитектуры ResNet-34, обучались на выборке CIFAR-10 с разными видами регуляризации. Далее рассчитывалась их точность на исходном домене CIFAR-10 и на новых доменах, которые задавались выборками CIFAR-10-C и CINIC-10 [23, 24]. CIFAR-10-C [24] является аугментированной версией выборки CIFAR-10 с 19 разными типами возмущений, среди которых присутствуют нормальный шум, размытие, изменение контрастности и пр. CINIC-10 [23] – подвыборка ImageNet [25], включающая классы из CIFAR-10. Результаты работы методов при смене домена приведены в табл. 5.

Модель, обученная с предложенным методом регуляризации на основе фреймового представления слоя, обладает существенно более высокой обобщающей способностью по сравнению с моделью, обученной без регуляризации, направленной на повышение разнообразия параметров.

Таблица 3. Точность (в %) методов регуляризации (ResNet-34)

Метод регуляризации	CIFAR-10	CIFAR-100	SVHN
Без регуляризации	94.53 ± 0.03	75.58 ± 0.08	96.50 ± 0.03
Minimum hyperspherical energy	94.58 ± 0.04	75.78 ± 0.08	96.59 ± 0.03
Weights orthogonalization	94.59 ± 0.04	75.98 ± 0.08	96.51 ± 0.02
Spectral restricted isometry property	94.72 ± 0.03	76.24 ± 0.09	96.57 ± 0.03
Orthogonal convolutions	95.03 ± 0.04	76.57 ± 0.06	96.66 ± 0.02
Фреймовая регуляризация	95.17 ± 0.05	77.61 ± 0.07	96.85 ± 0.02

Таблица 4. Точность (в %) методов регуляризации (ResNet-50)

Метод регуляризации	CIFAR-10	CIFAR-100	SVHN
Без регуляризации	94.83 ± 0.04	77.20 ± 0.07	96.92 ± 0.03
Minimum hyperspherical energy	94.88 ± 0.03	77.34 ± 0.06	96.94 ± 0.02
Weights orthogonalization	94.92 ± 0.04	77.38 ± 0.06	96.91 ± 0.03
Spectral restricted isometry property	95.01 ± 0.03	77.40 ± 0.07	96.95 ± 0.03
Orthogonal convolutions	95.29 ± 0.03	77.77 ± 0.07	97.01 ± 0.02
Фреймовая регуляризация	95.25 ± 0.04	78.35 ± 0.06	97.10 ± 0.02

Таблица 5. Точность (в %) методов регуляризации на разных доменах

Метод регуляризации	CIFAR-10	CIFAR-10-C	CINIC-100
Без регуляризации	94.53 ± 0.03	74.77 ± 0.25	67.91 ± 0.35
Orthogonal Convolutions	94.52 ± 0.01	76.27 ± 0.19	69.87 ± 0.29
Фреймовая регуляризация	94.53 ± 0.01	76.65 ± 0.15	71.20 ± 0.32

Таблица 6. Зависимость доли успешных атак (в %) от числа итераций

Метод регуляризации	Число итераций				
	1	10	50	100	1000
Без регуляризации	52.08	59.37	84.38	92.71	93.75
Orthogonal convolutions	41.30	57.61	83.69	91.30	92.06
Фреймовая регуляризация	39.56	49.45	80.20	84.61	86.81

Фреймовая регуляризация обладает несколько более высокой устойчивостью к смене домена по сравнению с ортогональной регуляризацией.

3.3. Устойчивость к состязательным атакам. Исследована устойчивость моделей, обученных с разными видами регуляризации, к состязательным атакам. В качестве метода состязательной атаки использовался подход SimBA, представляющий из себя итеративную атаку типа “черный ящик” [26]. Итерация атаки производится путем добавления к входу модели случайного вектора из ортонормированного базиса во входном пространстве с малым весом, знак которого определяется исходя из значений выхода модели для данного видоизмененного входа. Векторы ортонормированного базиса в конечномерном пространстве входов однозначно отвечают элементам входного тензора: содержат единственную единицу на заданной позиции, остальные компоненты — нули. Таким образом, итерация атаки является возмущением строго одного элемента входного тензора.

Эффективность атаки оценивается по доле успешных атак (attack success rate – ASR) при заданном числе итераций. Успешность атаки в задаче классификации соответствует изменению предсказания модели для видоизмененного атаккой входа, атака производится только для верно классифицированных объектов.

Результаты успешности атак на модели, обученные с разными регуляризациями, отображены в табл. 6. На рис. 3 представлена зависимость доли успешных атак от числа итераций метода SimBA.

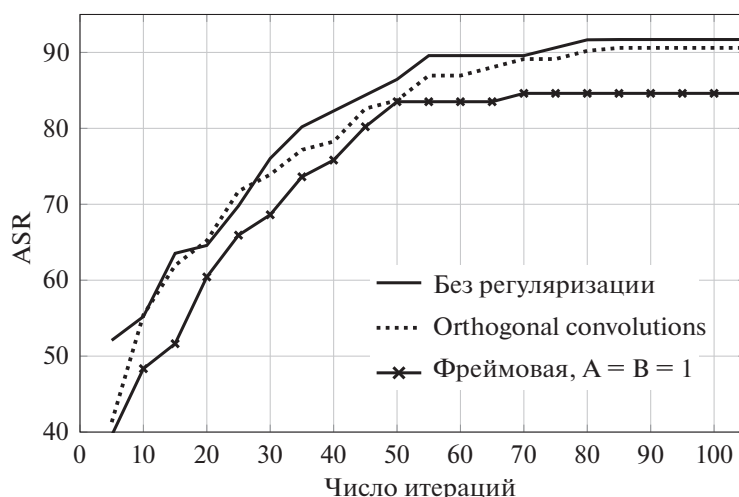


Рис. 3. График зависимости доли успешных атак (в %) от числа итераций

Исходя из полученных результатов, заключается, что модель, обученная с предложенным методом регуляризации, существенно более устойчива к исследованной состязательной атаке по сравнению с моделью, обученной без регуляризации. Фреймовое представление нейросетевых слоев позволяет ограничить сверху константу Липшица (2.5), что делает модель более устойчивой по отношению к малому возмущению входа. Для модели, обученной с фреймовой регуляризацией, требуется до ~ 1.4 раза большего числа итераций для достижения доли успешных атак $ASR = 70\%$ в сравнении с ортогональной регуляризацией, что может объясняться тем, что фреймовая регуляризация позволяет достигать более ограниченного спектра весов слоя.

Заключение. Поставлена задача регуляризации нейронной сети, направленная на увеличение эффективности избыточного множества параметров и повышения устойчивости модели. Изучены существующие подходы и выявлены их недостатки. В частности, ортогонализация параметров нейросетевого слоя является избыточно жестким ограничением и, фактически, ортогональность весов не достигается. Для увеличения разнообразия параметров нейронной сети обобщен метод ортогонализации и предложена модель нейросетевого слоя, представляющая параметры в виде фрейма. Такое представление делает разложение входного сигнала по весам слоя полным и устойчивым, исключает потерю информации на данном слое. На основе предложенной модели разработан фреймовый регуляризатор, накладывающий штраф на параметры за несоблюдение достаточного условия фрейма. Проведен вычислительный эксперимент по оценке качества разработанного метода в сравнении с альтернативными подходами в задачах классификации изображений, увеличения обобщающей способности и устойчивости к состязательным атакам. Показано превосходство моделей, обученных с помощью фреймовой регуляризации, с точки зрения точности классификации и устойчивости модели по сравнению с базовыми методами регуляризации параметров.

Для дальнейшего развития работы планируется исследовать зависимость точности модели от количества ее параметров при использовании фреймовой регуляризации, сравнение предложенного подхода с другими методами увеличения эффективности и обобщающей способности на больших обучающих и тестовых данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liu C., Zoph B., Neumann M. et al. Progressive Neural Architecture Search // Proc. European Conf. Computer Vision (ECCV). Munich, Germany, 2018. P. 19–34.
2. Tan M., Le Q. Efficientnet: Rethinking Model Scaling for Convolutional Neural Networks // Proc. 36th Intern. Conf. Machine Learning. Long Beach, CA, USA, 2019. P. 6105–6114.
3. Molchanov P., Tyree S., Karras T. et al. Pruning Convolutional Neural Networks for Resource Efficient Inference // Proc. Intern. Conf. Learning Representations. Toulon, France, 2017. P. 1–17.
4. Molchanov P., Mallya A., Tyree S. et al. Importance Estimation for Neural Network Pruning // Proc. IEEE/CVF Conf. Computer Vision and Pattern Recognition. Long Beach, CA, USA, 2019. P. 11264–11272.

5. *Krogh A., Hertz J.* A Simple Weight Decay Can Improve Generalization // *Advances in Neural Information Processing Systems*. 1992. № 4. P. 950–957.
6. *Srivastava N., Hinton G., Krizhevsky A. et al.* Dropout: A Simple Way to Prevent Neural Networks from Overfitting // *The Journal of Machine Learning Research*. 2014. V. 15. № 1. P. 1929–1958.
7. *Ioffe S., Szegedy C.* Batch Normalization: Accelerating Deep Network Training by Reducing Internal Covariate Shift // *Proc. Intern. Conf. Machine Learning*. Lille, France, 2015. P. 448–456.
8. *Liu W., Lin R., Liu Z. et al.* Learning towards Minimum Hyperspherical Energy // *Proc. 32nd Conf. Neural Information Processing Systems*. Montreal, Canada, 2018. V. 31.
9. *Xie D., Xiong J., Pu S.* All You Need Is Beyond a Good Init: Exploring Better Solution for Training Extremely Deep Convolutional Neural Networks with Orthonormality and Modulation // *Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition*. Honolulu, HI, USA, 2017. P. 6176–6185.
10. *Bansal N., Chen X., Wang Z.* Can We Gain More from Orthogonality Regularizations in Training Deep Networks? // *Proc. 32nd Conf. Neural Information Processing Systems*. Montreal, Canada, 2018. V. 31.
11. *Wang J., Chen Y., Chakraborty R., Yu S. X.* Orthogonal Convolutional Neural Networks // *Proc. IEEE/CVF Conf. Computer Vision and Pattern Recognition*. Seattle, WA, USA, 2020. P. 11505–11515.
12. *Saxe A., McClelland J., Ganguli S.* Exact Solutions to the Nonlinear Dynamics of Learning in Deep Linear Neural Networks // *Proc. 2nd Intern. Conf. Learning Representations*. Banff, AB, Canada, 2014. P. 1–22.
13. *Григорьев А.Д., Гнеушев А.Н.* Регуляризация параметров нейронной сети на основе неравенства Рисса // *Математические методы распознавания образов: Тез. докл. 20-й Всероссийской конф. с международным участием*. М.: Российская академия наук, 2021. С. 121–122.
14. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Москва, Ижевск: РХД. 2001. 463 с.
15. *Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G.E.* ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks // *Comm. ACM*. 2012. V. 60. P. 84–90.
16. *Casazza P.G., Kutyniok G.* Finite Frames: Theory and Applications. Springer Science & Business Media, 2012.
17. *Bell H.E.* Gershgorin’s Theorem and the Zeros of Polynomials // *The American Mathematical Monthly*. 1965. V.72. № 3. P. 292–295.
18. *Krizhevsky A.* Learning Multiple Layers of Features from Tiny Images [Электронный ресурс] // *cs.toronto.edu*. 2009. Дата обновления: 08.04.2009. URL: <https://www.cs.toronto.edu/~kriz/learning-features-2009-TR.pdf> (дата обращения: 01.06.2022).
19. *Netzer Y., Wang T., Coates A. et al.* Reading Digits in Natural Images with Unsupervised Feature Learning // *Neural Information Processing Systems Workshop on Deep Learning and Unsupervised Feature Learning*. Granada, Spain, 2011.
20. *He K., Zhang X., Ren S., Sun J.* Deep Residual Learning for Image Recognition // *Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition*. Las Vegas, NV, USA, 2016. P. 770–778.
21. *Kingma D.P., Ba J.* Adam: A Method for Stochastic Optimization // *Proc. Intern. Conf. Learning Representations*. San Diego, CA, USA, 2015. P. 1–13.
22. *Chellapilla K., Puri S., Simard P.* High Performance Convolutional Neural Networks for Document Processing // *Proc. Tenth Intern. Workshop Frontiers in Handwriting Recognition*. La Baule, France. 2006. P. 1–7.
23. *Darlow L., Crowley E., Antoniou A., Storkey A.* Cinc-10 is not Imagenet or Cifar-10 [Электронный ресурс] // *arXiv.org*. 2018. Дата обновления: 02. <https://doi.org/10.2018>. URL: <https://arxiv.org/abs/1810.03505> (дата обращения: 01.06.2022).
24. *Hendrycks D., Dietterich T.* Benchmarking Neural Network Robustness to Common Corruptions and Perturbations // *Proc. 7th Intern. Conf. Learning Representations*. New Orleans, LA, USA, 2019. P. 1–16.
25. *Deng J., Dong W., Socher R. et al.* ImageNet: A Large-scale Hierarchical Image Database // *Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition*. Miami, FL, USA, 2009. P. 248–255.
26. *Guo C., Gardner J., You Y. et al.* Simple Black-box Adversarial Attacks // *Proc. Intern. Conf. Machine Learning*. Long Beach, CA, USA, 2019. P. 2484–2493.

УДК 621.865.6+629.7

ПРИМЕНЕНИЕ КАРКАСНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ПРИЧАЛИВАНИЕМ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

© 2022 г. Ю. Ф. Голубев^{a,*}, В. М. Мирхайдаров^b, А. В. Яскевич^{b,**}^a ИППМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия^b РКК “Энергия”, Королев, Россия

*e-mail: golubev@keldysh.ru

**e-mail: Andrey.Yaskevich@rsce.ru

Поступила в редакцию 30.06.2022 г.

После доработки 14.07.2022 г.

Принята к публикации 01.08.2022 г.

Описываются результаты оценки с помощью компьютерного моделирования в реальном времени динамики соединения космическим манипулятором объектов с использованием стыковочных устройств малого размера. Из-за ограниченной видимости этих устройств с помощью телекамер дополнительно применяются геометрические каркасные модели, отображающие их относительное положение и контактное взаимодействие. Они облегчают оператору манипулятора процедуру управления.

DOI: 10.31857/S0002338822060099

Введение. Первые стыковки космических аппаратов (КА) к международной космической станции с помощью манипулятора были выполнены в сентябре 2009 г. (японский грузовой корабль HTV [1]) и в мае 2010 г. (российский модуль МИМ-1 [2]). В последующем таким способом неоднократно были присоединены грузовые корабли Dragon [3]. В англоязычной специальной литературе операции такого типа получили название “причаливание” (berthing). Далее для краткости используется этот термин. Для причаливания характерно включение в контур управления манипулятором человека-оператора, который выполняет наведение, т.е. выдает команды на выравнивание стыковочных агрегатов (СтА) и их сближение вплоть до первичного соединения (сцепки). Для этого он использует изображения мишени с прицельной телекамеры и стыкуемых объектов с обзорных телекамер. Окончательное жесткое соединение КА после сцепки осуществляется стыковочными агрегатами [4, 5]. Они создают переходный тоннель, имеют достаточно большие диаметры и соответствующие размеры направляющих элементов для компенсации промахов. Прицельная телекамера и мишень могут быть установлены на поверхности стыкуемых КА недалеко от оси их сближения. Все это облегчает оператору манипулятора задачу наведения. Обзорные телекамеры размещаются на орбитальной станции (ОС), к которой выполняется причаливание, на некотором расстоянии от места соединения.

В процессе обслуживания ОС может потребоваться установка на ее поверхности оборудования, доставленного на ранее состыкованном КА. Стыковочные устройства для соединения такого доставляемого оборудования могут иметь малые размеры, простую кинематическую схему и могут практически не обладать податливостью. Присоединяемые к ОС объекты не всегда образуют с ней переходный тоннель. В этом случае места их установки могут не позволить применять прицельную телекамеру и мишень и даже затруднить доступ к устройствам соединения для операторов, работающих на поверхности станции.

Для возможности безошибочного выполнения операций причаливания с помощью манипулятора необходимо обеспечить отработку способов управления и тренировку операторов. Если устройства соединения обладают податливостью, то для оценки возможности достижения их надежной сцепки может быть использован метод гибридного моделирования, описанный, например, в [6, 7]. Однако для регулярной тренировки операторов его применение слишком расточительно из-за ограниченного ресурса и сравнительно больших затрат на эксплуатацию технически сложного гибридного стенда. В том случае, когда устройства соединения КА имеют простую кинематику, выполняется математическое моделирование причаливания в реальном времени на

компьютерных стендах [8–10], которое обеспечивает и отработку процедуры управления, и надлежащую тренировку операторов.

В статье описывается метод компьютерного моделирования в реальном времени причаливания, которое выполняется с помощью стыковочных устройств малого размера. Его отличительной чертой является применение каркасных геометрических моделей для отображения относительного положения, контактного взаимодействия таких устройств с целью облегчения оператору манипулятора управления наведением при их соединении. Отработка процедуры управления и тренировка операторов в наземных условиях осуществляется на компьютерном стенде. Для поддержания навыков управления в ходе полета разработаны программы, которые на двух бортовых ноутбуках обеспечивают моделирование причаливания и отображение каркасных моделей.

Применение каркасных геометрических моделей элементов сцены помимо существенной экономии вычислений при определении событий контактного взаимодействия оставляет объекты прозрачными. Это дает оператору возможность учета подробностей процесса причаливания без помех, создаваемых затенением реальных объектов. В статье предполагается, что причаливаемый объект уже находится в схвате манипулятора. Вопрос о взятии манипулятором требуемого объекта представляет собой отдельную задачу и в данной работе не рассматривается.

1. Применение каркасных геометрических моделей стыковочных устройств при моделировании причаливания. Контактное взаимодействие стыковочных устройств почти всегда недоступно для непосредственного наблюдения из-за их относительно малых размеров, ограниченной видимости, невозможности установить телевизионную камеру непосредственно в зоне контактов. Взаимное положение контактирующих элементов оценивается косвенно, например, с помощью мишени и прицельной телекамеры.

При математическом моделировании контактирующие поверхности описываются наборами геометрических примитивов, для каждой взаимодействующей пары которых имеется вычислительно эффективное аналитическое решение. Сложные поверхности аппроксимируются множествами примитивов, которые позволяют быстро определить потенциальную точку контакта методом дихотомии [11].

Например, для установки на поверхность ОС доставляемого оборудования могут быть использованы активные и пассивные стыковочные устройства без заметной податливости, например, показанные на рис. 1. Устройством соединения пассивное (УСП). Оно установлено на поверхности ОС, содержит две направляющих поверхности в виде фрагментов конуса 1 с приемными гнездами 2 и приемное гнездо фиксации 3 в форме цилиндра с входной частью в виде усеченного конуса (рис. 1,а и 1,б). Внутри цилиндра находится подпружиненный шариковый замок. Устройство соединения активное (УСА), на стыкуемом объекте имеет два направляющих штыря 4 с торцами сферической формы, которые должны контактировать с коническими выравнивающими поверхностями 1 и гнездами 2 УСП, и замок фиксации 5 с торцевой поверхностью в виде фрагмента тора (рис. 1,в), который должен входить в гнездо фиксации 3 УСП.

Тороидальная поверхность 1 замка фиксации (рис. 2) в модели контактного взаимодействия разбивается на секторы 2 и 3 , аппроксимированные наборами сфер 4 . Оба сектора имеют выпуклую форму, и это делает возможным применение метода дихотомии, с помощью которого за N итераций определяется образующая сфера с максимальным расстоянием от ее центра до оси гнезда фиксации, если индексы сфер 4 в секторах 2 и 3 изменяются соответственно в пределах $1, 2^{N-1} + 1$ и $2^{N-1} + 1, 2^N + 1$. Далее проверяется возможность контакта выделенной таким образом сферы и гнезда фиксации с использованием пар геометрических примитивов “сфера–усеченный конус”, “сфера–окружность”, “сфера–цилиндр”. Для этих пар вычисляется величина взаимного внедрения. Если она положительна, то определяются параметры точки контакта.

Сферическая торцевая поверхность каждого направляющего штыря 4 может контактировать с соответствующей направляющим конусом 1 , с граничной окружностью приемного гнезда и цилиндром гнезда 2 (рис. 3,а). Контакт цилиндрической поверхности штыря 4 с цилиндром гнезда 2 не рассматривается, так как он имеет место только после того, как замок фиксации 5 войдет в цилиндрическую часть гнезда фиксации 3 (рис. 3,б).

Начало системы координат (СК) $X_{USP}Y_{USP}Z_{USP}$ расположено в центре приемного гнезда на стыковочной плоскости УСП, а СК $X_{PMU}Y_{PMU}Z_{PMU}$ – в основании замка захвата на стыковочной плоскости УСА. Направления перемещений в отдельных командах управления манипулятором задаются в СК $X_{PMU}Y_{PMU}Z_{PMU}$.

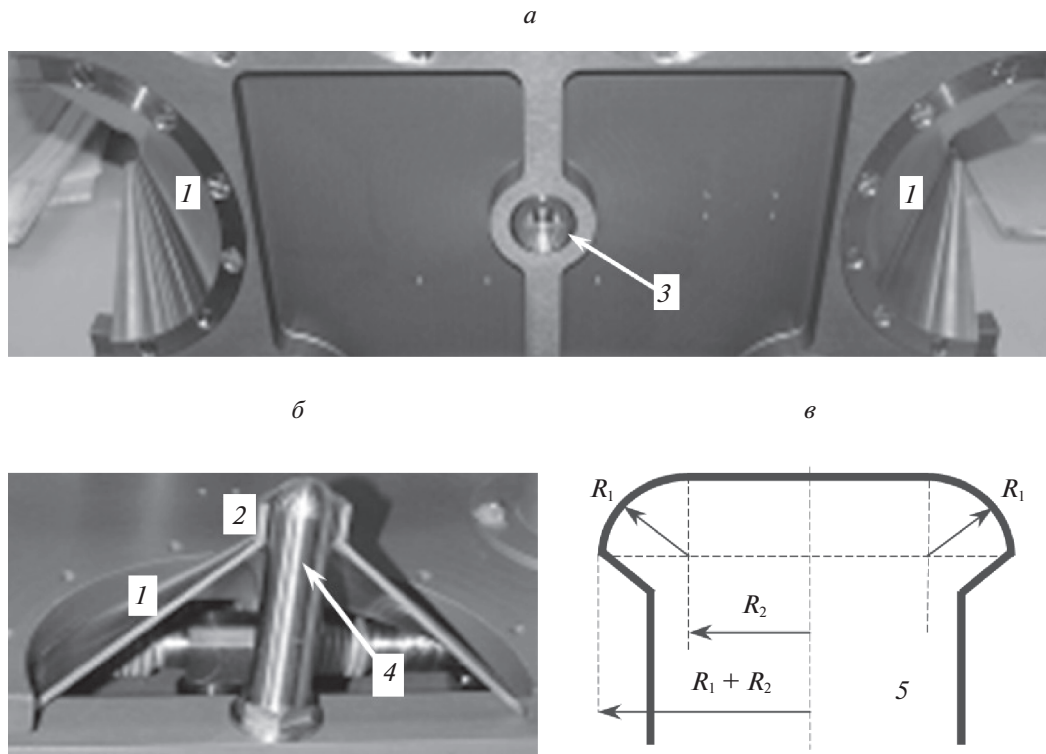


Рис. 1. Направляющие элементы стыковочных устройств без податливости: а – гнездо фиксации; б – направляющие штырь и конус; в – геометрия замка фиксации

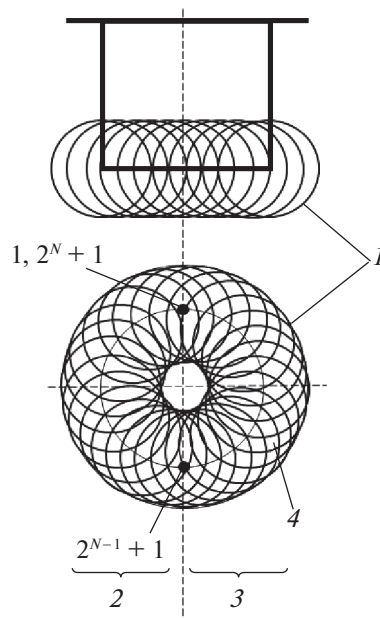


Рис. 2. Аппроксимация тора набором сфер

Сцепка достигается, когда этот замок войдет в гнездо на глубину, достаточную для выхода подпружиненного ролика б за его торцевую поверхность. Так как замок в гнезде может двигаться только вдоль оси цилиндра, то сопротивление ролика моделируется наличием односторонней контактной силы, действующей вдоль оси X_{USP} . Жесткое соединение УСА и УСР после их

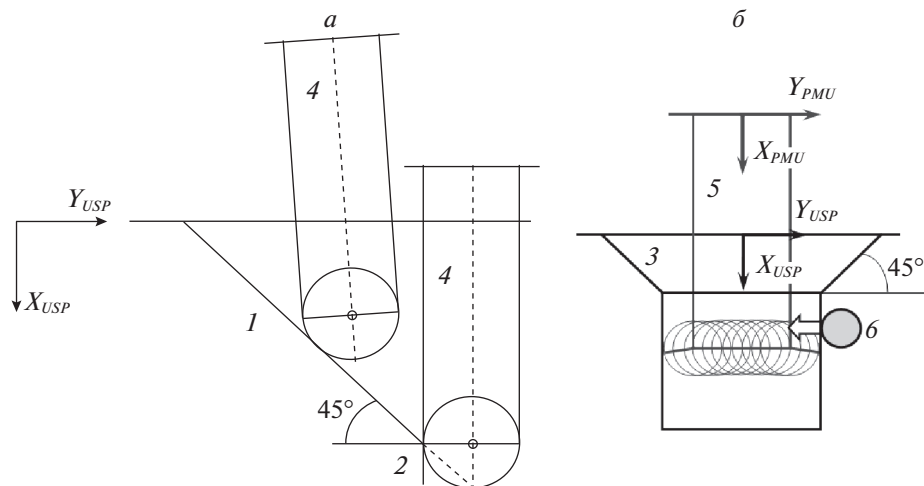


Рис. 3. Контакты направляющего штыря с приемным конусом (а); замка фиксации и цилиндра гнезда фиксации (б)

сцепки обеспечивается дополнительными замками, которые приводятся в действие вручную внешними операторами. Управляемое движение манипулятора при этом отсутствует, поэтому такой этап причаливания не моделируется.

В ряде случаев присоединяемое к ОС оборудование должно образовывать с ней переходный тоннель, необходимый для выполнения различных технологических операций. Он формируется при жестком соединении активного и пассивного специализированных стыковочных СтА, пример конструкции которых приведен на рис. 4. Для сцепки в активном агрегате 1 используется очень простой, без устройств демпфирования стыковочный механизм (СтМ) типа “штырь” с головкой захвата, а в пассивном агрегате 3 – приемный конус 4 с гнездом и упором 5. Штырь 2 связан с основанием механизма универсальным шарниром, его малые угловые перемещения ограничены жесткими тарельчатыми пружинами. Головка захвата на его конце имеет четыре защелки 6, которые при попадании в гнездо приемного конуса проходят за упор 5, образуя первичное соединение – сцепку. После сцепки привод СтМ втягивает штырь, в результате этого совмещаются плоскости агрегатов. При этом устранение углового рассогласования относительно продольной оси осуществляется за счет контактов направляющих лепестков 7. После совмещения плоскостей жесткое соединение СтА обеспечивается их механизмами герметизации. Агрегаты имеют диаметр значительно больше, чем размеры стыковочных устройств, которые используются для причаливания, и внутри них имеется место для установки прицельной телекамеры и мишени. При наведении через иллюминатор 8 активного агрегата с помощью прицельной телекамеры можно наблюдать мишень 9 на пассивном агрегате.

Моделирование причаливания завершается после образования сцепки. Тогда исполнительный механизм манипулятора приводится в расслабленное состояние. Следовательно, головка захвата СтМ и приемный конус с гнездом пассивного агрегата являются основными направляющими элементами при расчете контактного взаимодействия.

При моделировании приемный конус с гнездом (рис. 5) описывается набором характерных точек и геометрическими примитивами: усеченным конусом, цилиндром, окружностями и плоскостью. Точка $P_{P,1}$ – вершина приемного конуса, точки $P_{P,2} - P_{P,4}$ задают плоскость, которая ограничивает движение головки захвата при боковых промахах за пределами конуса; $P_{P,5}$ – центр входной плоскости приемного гнезда. Постоянными параметрами являются: R_{CONE} – радиус входной грани приемного конуса, R_{STOP} – радиус механического упора на входе гнезда, H_{CS} – расстояние от вершины конуса до плоскости упора, H_{CONE} – высота приемного конуса, $R_{PlaneMax}$ – радиус окружности плоскости за пределами входной грани приемного конуса.

Форма головки захвата штыря описывается двумя сферами 1 и двумя наборами отрезков 2 прямых линий, аппроксимирующих поверхности двух усеченных конусов. Для итерационного поиска точек контакта методом дихотомии поверхность каждого конуса разбивается на два сектора, у которых крайние образующие совпадают. Общее число аппроксимирующих

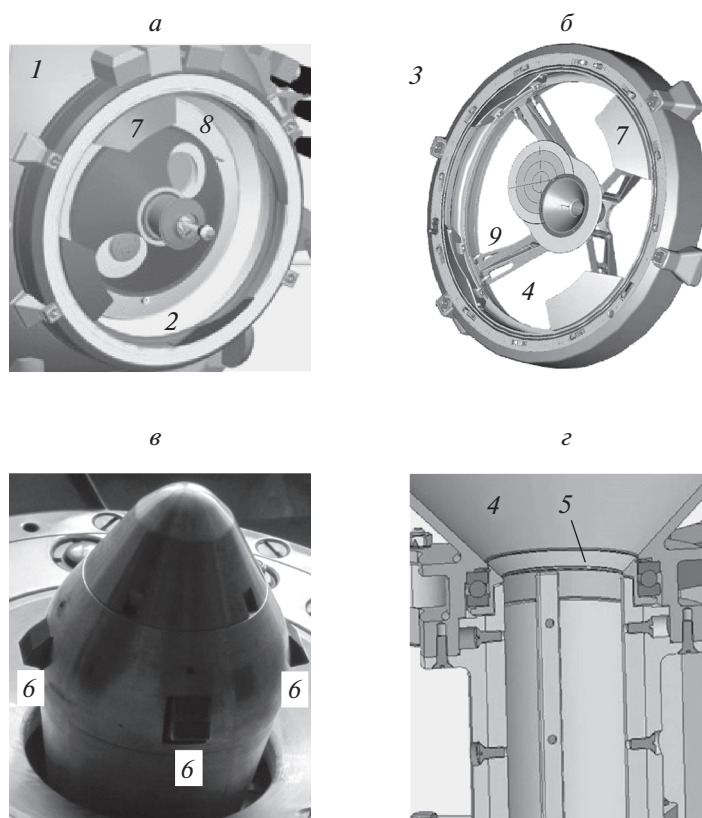


Рис. 4. Активный и пассивный агрегаты для выполнения причаливания: *а* – активный СТА; *б* – пассивный СТА; *в* – головка захвата СтМ; *г* – гнездо приемного конуса

образующих – отрезков прямых равно $2^N + 1$. За N итераций определяется отрезок, точка пересечения которого с плоскостью окружности (геометрического примитива пассивного агрегата) наиболее удалена от центра этой окружности. Разбиение конусов на секторы обеспечивает выпуклость их поверхностей и соответственно однозначность такого определения. Форма каждой защелки описывается плоской фигурой – набором из трех отрезков, соединяющих ее характерные точки (ХТ).

Описание контактирующих поверхностей с помощью геометрических примитивов является основой для разработки компьютерных каркасных моделей устройств соединения. Их прозрачность, в отличие от обычных объемных моделей компьютерной графики, позволяет отображать и наблюдать все детали взаимодействия и точки контакта. Элементы таких моделей – геометрические примитивы контактирующих поверхностей, а также дополнительные точки и линии, обозначающие характерные детали формы устройств соединения. Компьютерные каркасные геометрические модели для визуализации контактного взаимодействия описанных выше стыковочных устройств показаны на рис. 6. Изображение в трех проекциях и аксонометрии облегчают анализ контактного взаимодействия. Их размеры в пределах окна могут быть оперативно изменены с помощью “мыши” или управляющих клавиш компьютера.

2. Моделирование причаливания и управление манипулятором с использованием каркасных геометрических моделей. Компьютерный стенд для наземной отработки процедуры управления манипулятором при причаливании был создан в Ракетно-космической корпорации “Энергия” совместно с МГТУ им. Н.Э. Баумана [12]. Его упрощенная схема приведена на рис. 7.

Манипулятор, применяемый для причаливания, работает в супервизорном режиме управления, при котором оператор с помощью пульта задает команды на линейные или угловые перемещения активного стыковочного устройства относительно одной из осей системы координат, связанной с пассивным устройством. Команды на перемещения преобразуются в управляющие сигналы на приводы. Модель 1 пульта управления в составе стенда, как и ее оригинал, представляет собой лэптоп, позволяющий оператору задавать команды в диалоговом режиме. Уравнения

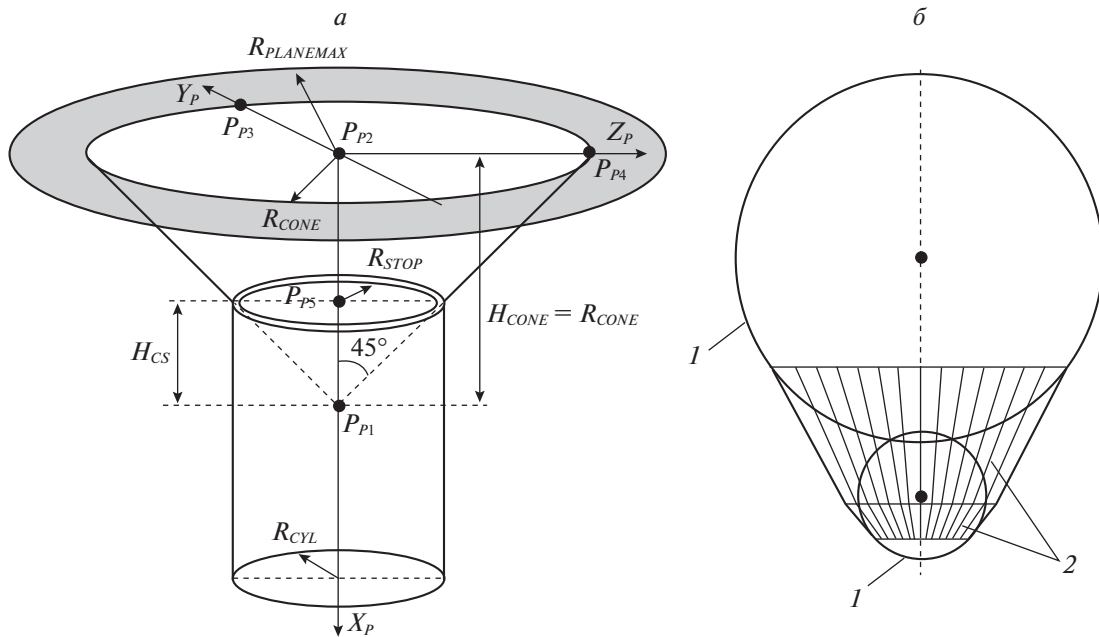


Рис. 5. Геометрические примитивы для представления: а – приемного конуса пассивного СтА; б – головки захвата СтМ

движения манипулятора и перемещаемого им объекта с учетом динамики приводов и контактного взаимодействия стыковочных устройств интегрируется на компьютере 2, который также выполняет расчет относительного положения элементов каркасной геометрической модели 3 и координат активного стыкуемого космического объекта относительно пассивного. Компьютер 4 на основе этих координат и трехмерных геометрических моделей объектов средствами компьютерной графики генерирует изображения 5 обзорных и прицельной телекамер. Все компьютеры объединены сетью *Ethernet* с помощью коммутатора 6 портов и обмениваются данными по технологии “клиент-сервер”. Роль сервера выполняет компьютер 2.

При причаливании в супервизорном режиме управления сначала выполняется выравнивание, т.е. с помощью команд *Step* задаются боковые и угловые перемещения для уменьшения соответствующих рассогласований. После этого командой *Insert* инициируется осевое перемещение (сближение) стыковочных устройств, которое должно завершиться их сцепкой. Жесткое соединение объектов после сцепки не моделируется, оно выполняется либо внешними операторами, либо приводами специализированных стыковочных агрегатов. Величины и скорости перемещений являются фиксированными параметрами команд управления. Скорости определяются разработчиком манипулятора в зависимости от инерционных характеристик перемещаемого объекта. Величины перемещений выбираются на этапе отработки процедуры управления на моделирующем стенде, в том числе с учетом пожеланий оператора манипулятора. Размер шага перемещения является результатом компромисса, так как его уменьшение улучшает качество прицеливания, но увеличивает время достижения сцепки, которое ограничено из-за того, что процесс причаливания могут сопровождать операторы на внешней поверхности станции. Из-за фиксированной величины перемещений при выравнивании боковые и угловые рассогласования стыковочных устройств в общем случае не могут быть полностью скомпенсированы. К моменту первого контакта они могут незначительно возрасти из-за погрешностей манипулятора.

При управлении манипулятором с помощью рукояток, задающих линейные и угловые скорости перемещений стыкуемого объекта, сцепка может быть достигнута быстрее, но при более высоком уровне тренированности оператора. В данном исследовании моделировался предварительно выбранный манипулятор, управляемый в супервизорном режиме.

Первоначально каркасные модели стыковочных устройств были разработаны и использовались только при наземной отработке причаливания на стенде моделирования в реальном времени. В дальнейшем при проведении тренировок операторов выявилась необходимость их

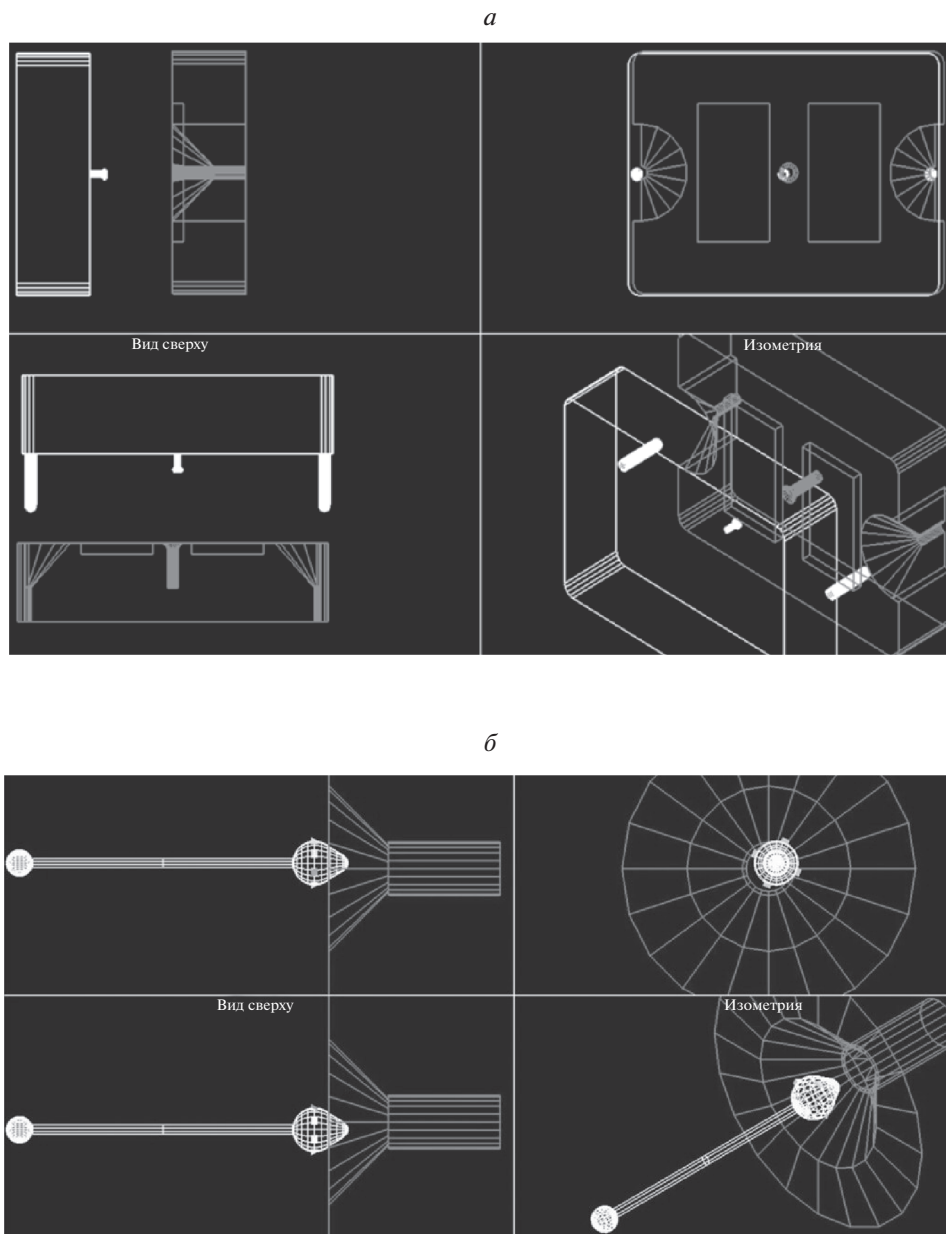


Рис. 6. Каркасные геометрические модели для визуализации контактного взаимодействия стыковочных устройств: *a* – без податливости; *б* – с податливым штырем

применения для дополнительной (к внешним телекамерам) визуализации при выполнении реальных операций. С этой целью было разработано программное обеспечение (ПО) для расчета относительного положения стыковочных устройств и отображения каркасных моделей на основе решения прямой кинематической задачи для манипулятора. Значения углов в шарнирах берутся из шины обмена данными между компьютером, управляющим манипулятором и компьютером оператора (пультом управления). В ПО дополнительной визуализации моделирование динамики движения манипулятора и стыкуемого объекта не выполняется.

Полученные из конструкторской документации (КД) и используемые в модели движения координаты положения стыковочных устройств на ОС и стыкуемых объектах, а также размеры звеньев манипулятора могут отличаться от реальных. В ПО дополнительной визуализации для конкретных операций причаливания введены координаты стыковочных устройств на поверхности ОС, определенные в результате измерений. Но отклонения от реальных значений других

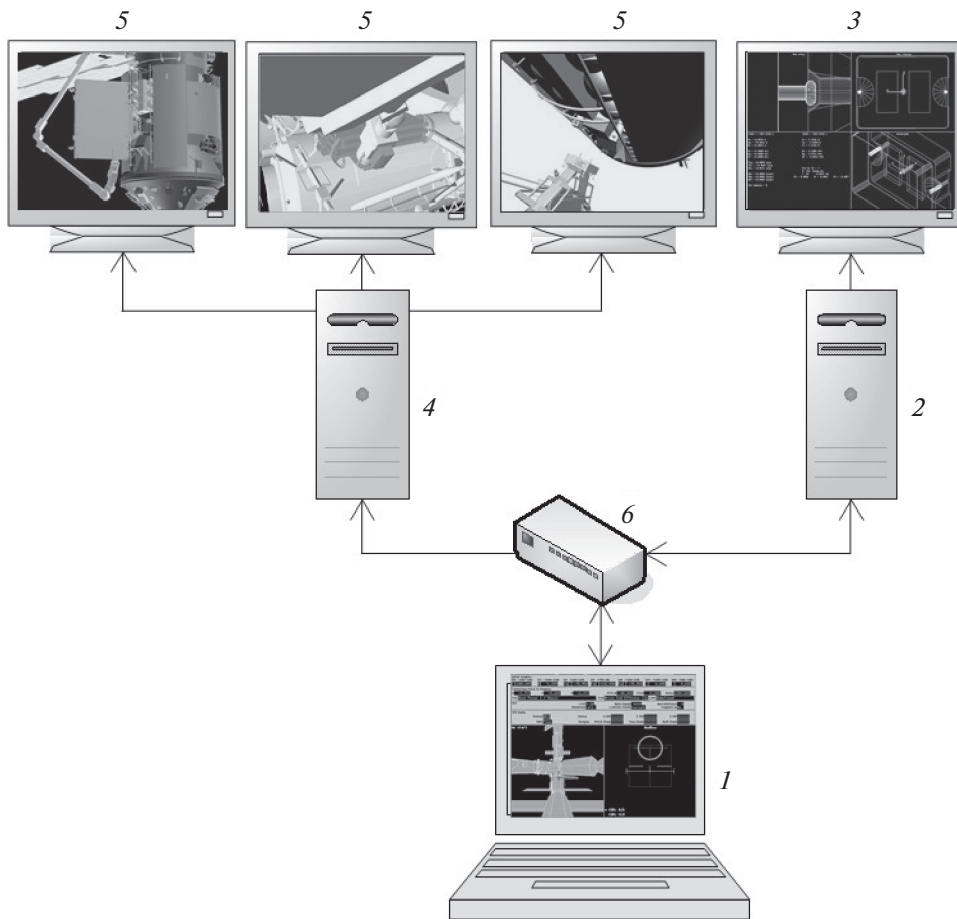


Рис. 7. Упрощенная схема компьютерного стенда моделирования в реальном времени причаливания космических объектов

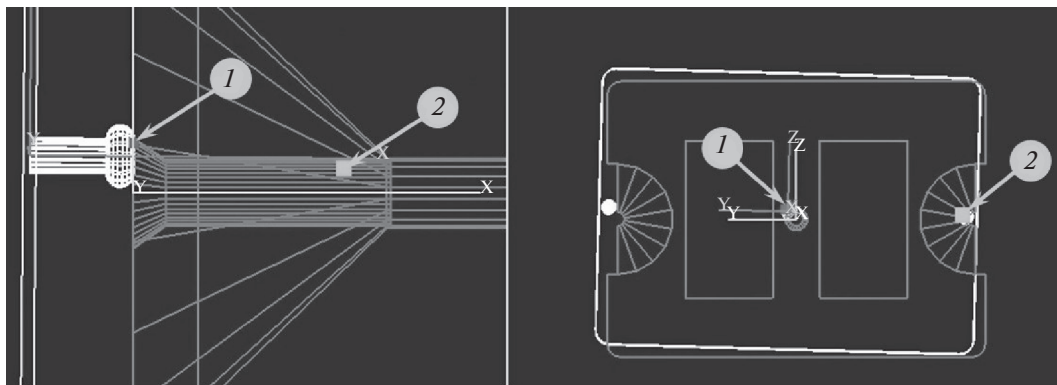


Рис. 8. Фрагмент каркасной компьютерной модели, отображающий промах при сближении УСА и УСП вследствие выравнивания в условиях ограниченной видимости

используемых в расчетах размеров, например координат ответных устройств на стыкуемых объектах и длин звеньев манипулятора, могут оставаться неизвестными. Оценка их влияния на возможность достижения сцепки стыковочных устройств малого размера была выполнена на описанном выше стенде моделирования. Для этого все неизвестные на основе измерений отклонения размеров от реальных значений были определены максимальные смещения стыковочных устройств, установленных на поверхности ОС, и введены в модель движения манипулятора и

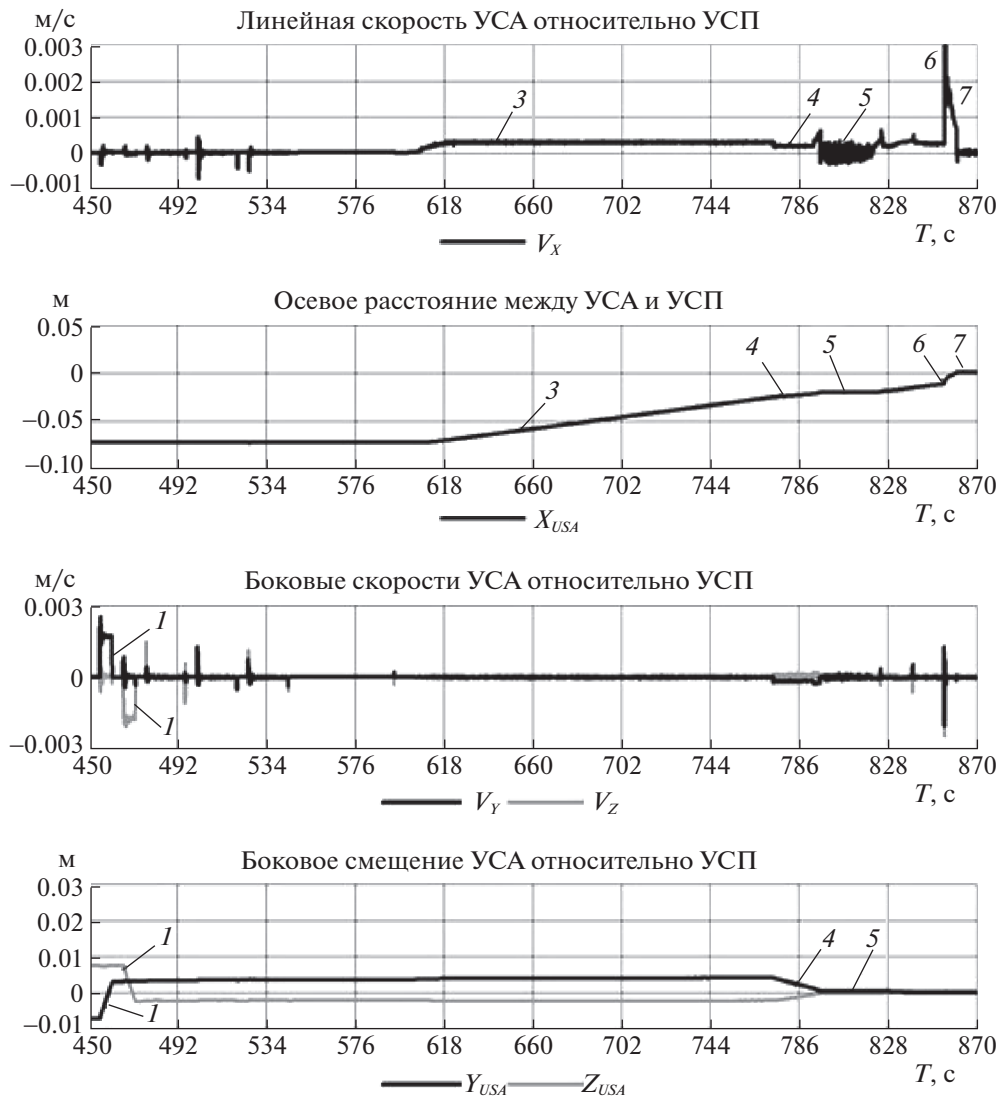


Рис. 9. Осевые и боковые скорости и перемещения УСА относительно УСП при выравнивании с помощью каркасной геометрической модели

стыкуемого объекта. Однако эти смещения не учитывались в программах станда для расчета относительного положения используемых для наведения каркасных моделей стыковочных устройств. Таким образом, выравнивание при моделировании причаливания осуществлялось с систематической ошибкой. Полученные результаты представлены ниже.

3. Моделирование причаливания оборудования со стыковочными устройствами без податливости.

Если при причаливании сцепка обеспечивается стыковочными устройствами малого размера без податливости, то, как правило, в зоне соединения оборудования с ОС невозможно установить мишень и прицельную телекамеру. На компьютерном станде в реальном времени было промоделировано причаливание, когда выравнивание выполняется оператором манипулятора по голосовым командам внешнего наблюдателя, у которого ограничена видимость соединяемых устройств. Выполняемая после такого выравнивания команда *Insert* на осевое сближение УСА и УСП закончилась контактом 1 торцевой поверхности замка фиксации УСА со стыковочной плоскостью УСП и контактом 2 одного из направляющих штырей в ответный приемный конус (рис. 8). Команда *Insert* не предусматривает выполнение боковых перемещений, необходимых для попадания головки захвата в приемный конус гнезда захвата. Поэтому в этом случае сцепка невозможна, необходимо отводить УСА от УСП и повторять причаливание заново.

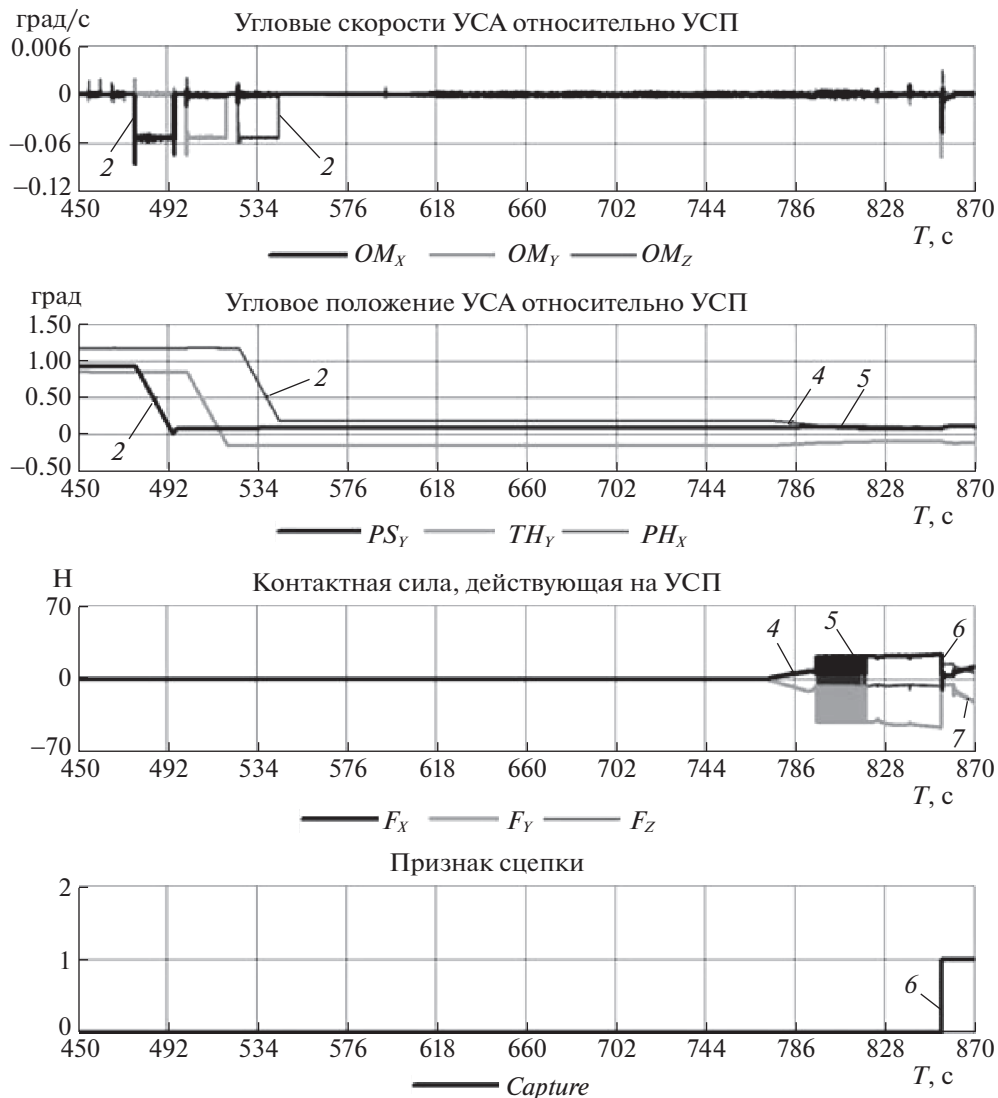


Рис. 10. Угловые скорости и перемещения УСА относительно УСП при выравнивании с помощью каркасной геометрической модели

В условиях ограниченной видимости наведение с использованием каркасной модели обеспечивает более высокое качество прицеливания. Это демонстрируют графики изменения кинематических параметров и контактных сил с момента окончательного выравнивания УСА и УСП (на 8-й мин от начала причаливания) до их сцепки (рис. 9, 10). Сначала командами *Step* задавались фиксированные по величине боковые 1, а затем угловые 2 перемещения. После завершения выравнивания была выдана команда *Insert* на осевое сближение 3. Фиксированные скорости линейных и угловых перемещений были заданы заранее с учетом инерции стыкуемого объекта и конструктивных особенностей стыковочных устройств. С момента контакта 4 головки захвата с приемным конусом гнезда захвата началась деформация исполнительного механизма манипулятора, в основном за счет податливости приводов в шарнирах. Ее рост сопровождался падением скорости осевого сближения и высокочастотными колебаниями контактной силы 5 из-за “подстройки” модели контактной жесткости. Сила деформации, достигнув величины, достаточной для преодоления сопротивления, обеспечила входение головки захвата УСА в цилиндр гнезда захвата УСП.

После входа замка в гнездо фиксации контактные реакции определялись деформацией исполнительного механизма манипулятора и силой сопротивления пружины шарика, фиксирующего сцепку. После сцепки 6 это сопротивление уменьшилось и скорость сближения

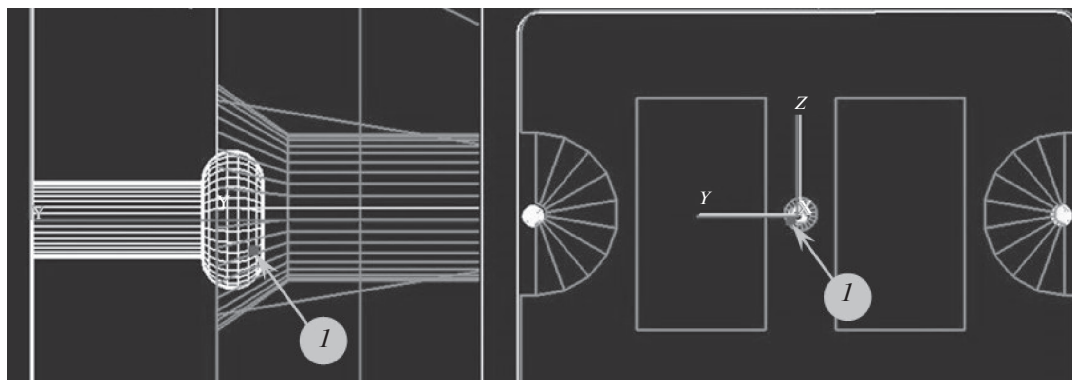


Рис. 11. Отображение контакта головки захвата и приемного конуса гнезда захвата на каркасной геометрической модели (фрагмент)

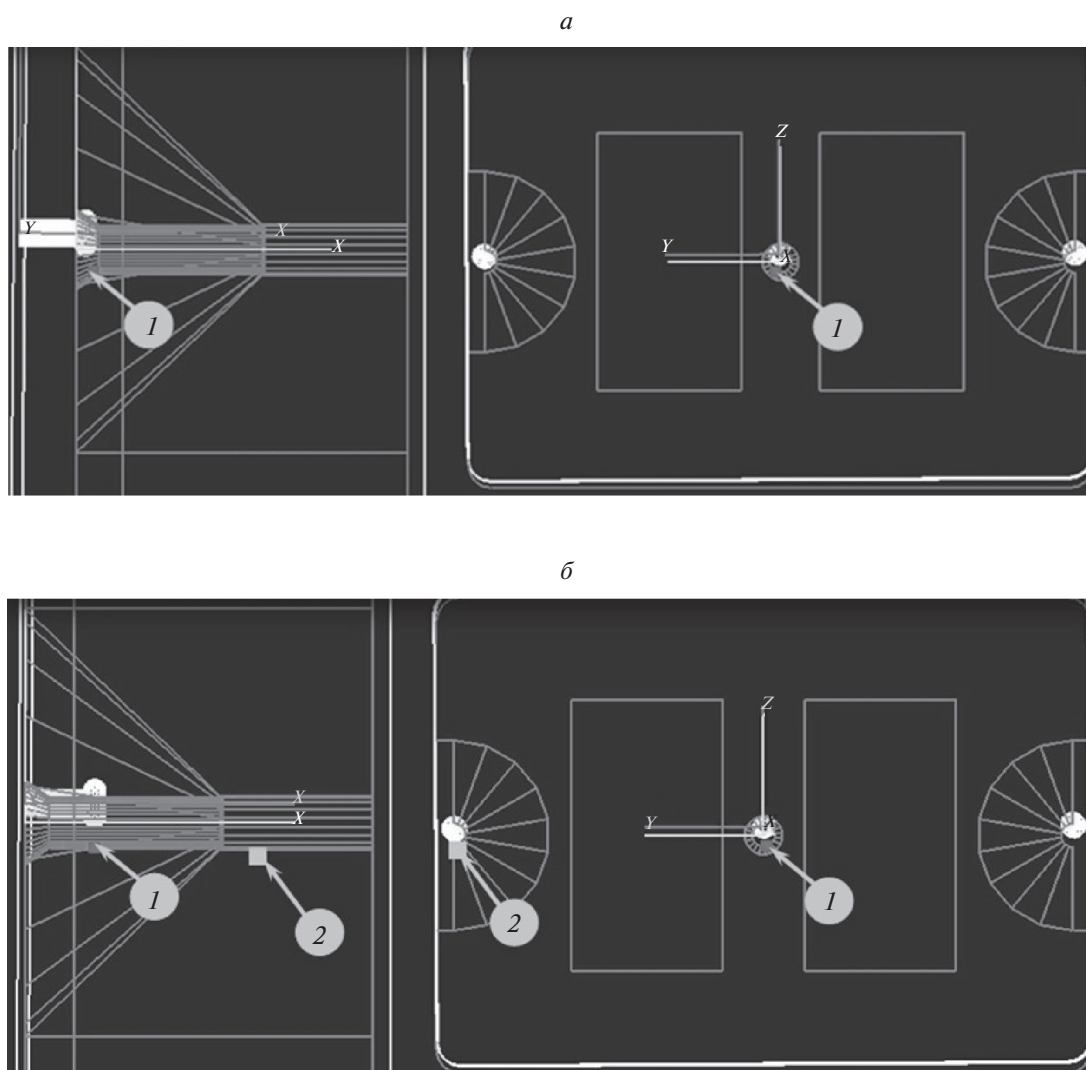


Рис. 12. Положение точек контакта головки УСА и гнезда УСА при учете отклонений размеров в модели от реальных значений: *a* – начало взаимодействия; *б* – после сцепки

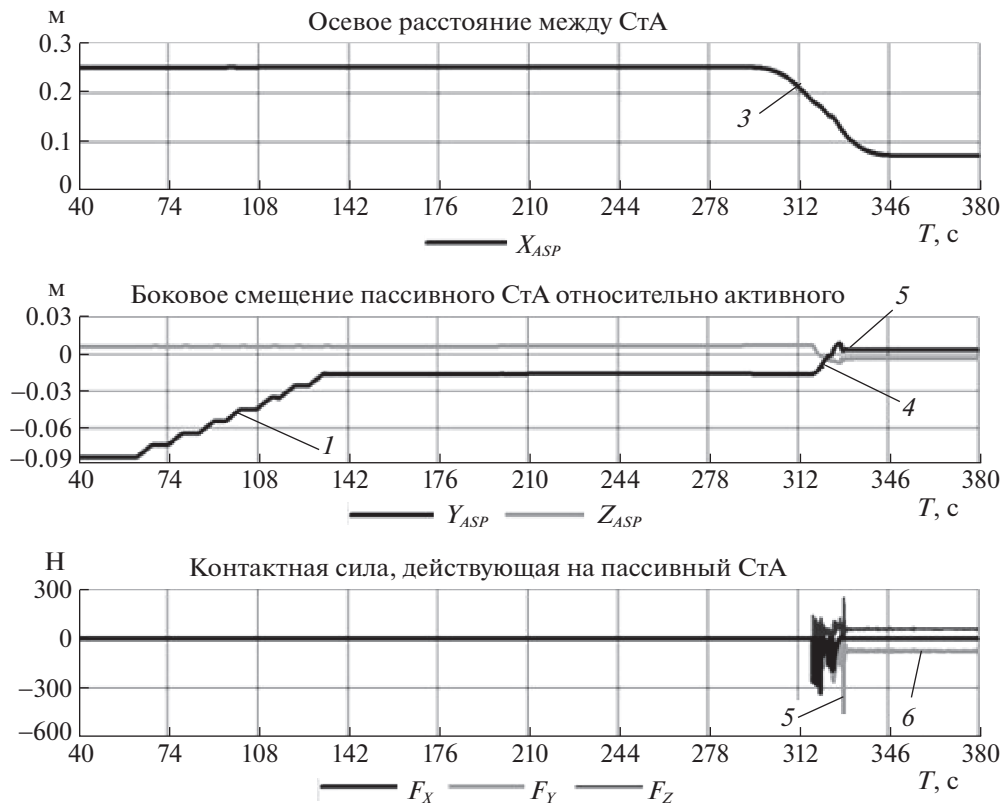


Рис. 13. Удаление, боковые промахи пассивного агрегата и контактные реакции при причаливании с выравниванием по изображению мишени

увеличилась из-за освобождения энергии деформации манипулятора. Через малое время произошёл контакт 7 стыковочных плоскостей УСА и УСП, скорость сближения упала до нуля, начали расти контактные силы и моменты, обусловленные возрастанием деформации манипулятора. При завершении выполнения команды *Insert* они не превысили максимальных допустимых значений. Сила деформации исполнительного механизма манипулятора, необходимая для проталкивания головки захвата в гнездо, нарастала в течение примерно 1 мин. Все это время стыковочные устройства оставались практически неподвижными относительно друг друга.

Положение точки контакта *I* головки захвата и приемного конуса гнезда захвата на фрагменте каркасной геометрической модели (рис. 11) вычислено по модели движения с размерами, соответствующими КД. Изображение контактного взаимодействия при отличии этих размеров от реальных может иметь вид, показанный на рис. 12. Координаты точки контакта *I* головки захвата с приемным конусом и точки контакта *2* одного из направляющих штырей с ответным приемным цилиндром вычисляются в СК УСП и поэтому находятся на его контактирующих поверхностях. Контактующие поверхности УСА отображаются не согласованно с ними из-за того, что размеры, используемые для расчета каркасной модели, не соответствуют КД.

В ПО для дополнительной визуализации причаливания точки контакта не вычисляются и на каркасной модели не отображаются, так как не моделируется динамика движения. Оператор манипулятора может наблюдать только рассогласование контактирующих поверхностей. При этом сцепка может считаться достигнутой, если на каркасной модели тороидальная поверхность головки захвата УСА пересекла плоскость входной грани цилиндра гнезда захвата УСП.

Если размеры в модели движения отличаются от реальных, но величины отклонений не превышают внешнего радиуса приемного конуса гнезда захвата, то в результате контактного взаимодействия УСА и УСП сцепка возможна. При этом время, в течение которого сила деформации исполнительного механизма манипулятора достигает величины, необходимой для проталкивания головки в цилиндр приемного гнезда, увеличивается примерно до 2 мин.

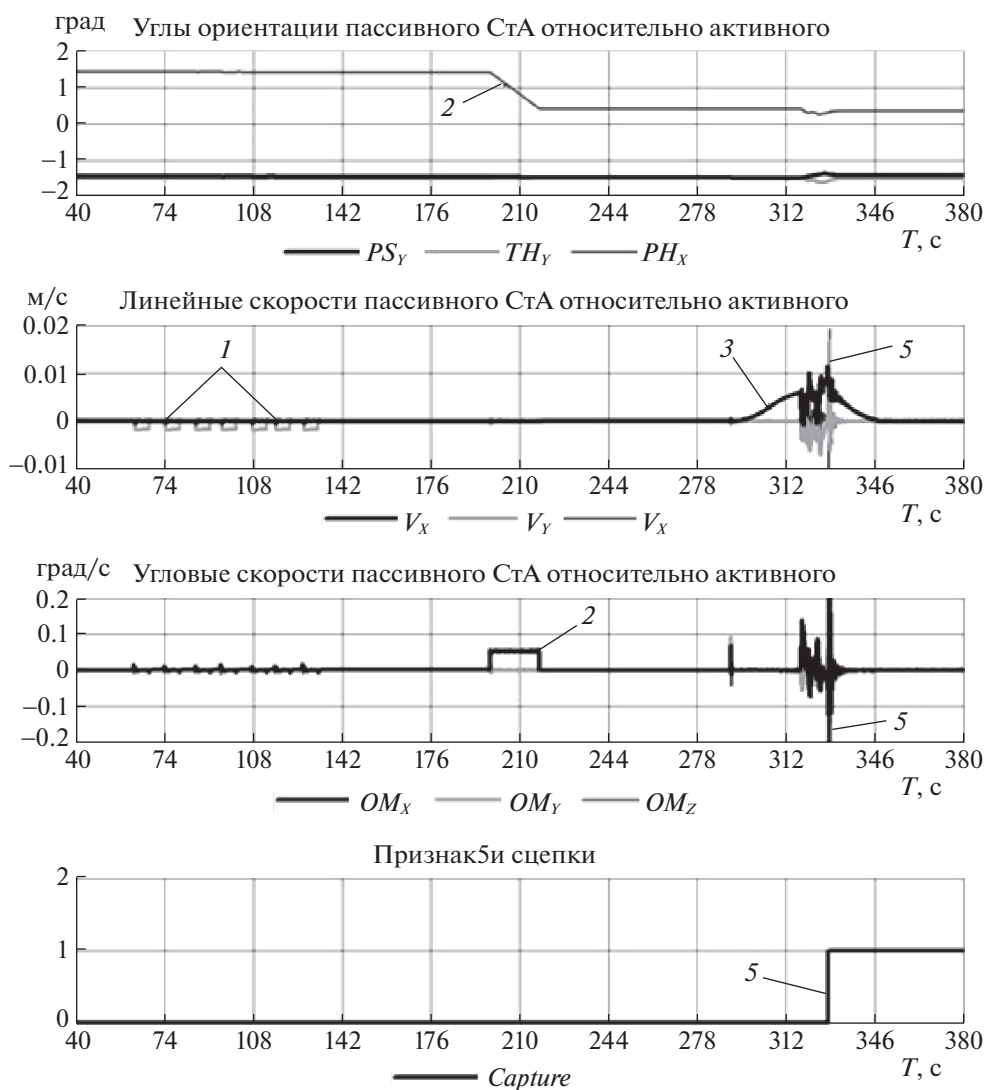


Рис. 14. Углы и скорости перемещаемого пассивного агрегата при причаливании с выравниванием по изображению мишени

Достаточно высокий уровень тренированности оператора манипулятора при причаливании с использованием стыковочных устройств без податливости необходим для того, чтобы время достижения сцепки было приемлемым с учетом ограничения длительности работы внешних операторов, осуществляющих окончательное жесткое соединение УСА и УСП. Высокий уровень тренированности оператор может поддерживать в ходе полета с помощью разработанного ПО.

4. Особенности динамики причаливания устройств с податливостью. Ограниченные пружинами угловые движения штыря СтМ обеспечивают его податливость при контактном взаимодействии с приемным конусом. Это позволило подтвердить принципиальную возможность выполнения причаливания с использованием специализированных СтА методом гибридного моделирования аналогично [7]. Вместе с тем для детального исследования динамики выполнения операции, выбора параметров команд управления манипулятором, а также для тренировки операторов моделирование выполнялось на описанном выше компьютерном стенде с применением компьютерной модели изображения мишени, получаемой с прицельной телекамеры. Изображение плоской мишени малочувствительно к угловым отклонениям агрегатов от оси их сближения (кроме крена). Это приводит к увеличению ошибки наведения с учетом удаленности осей телекамеры и мишени от точки, в которой должна произойти сцепка. Данную особенность иллюстрируют приведенные на рис. 13 и 14 графики изменения кинематических и силовых параметров,

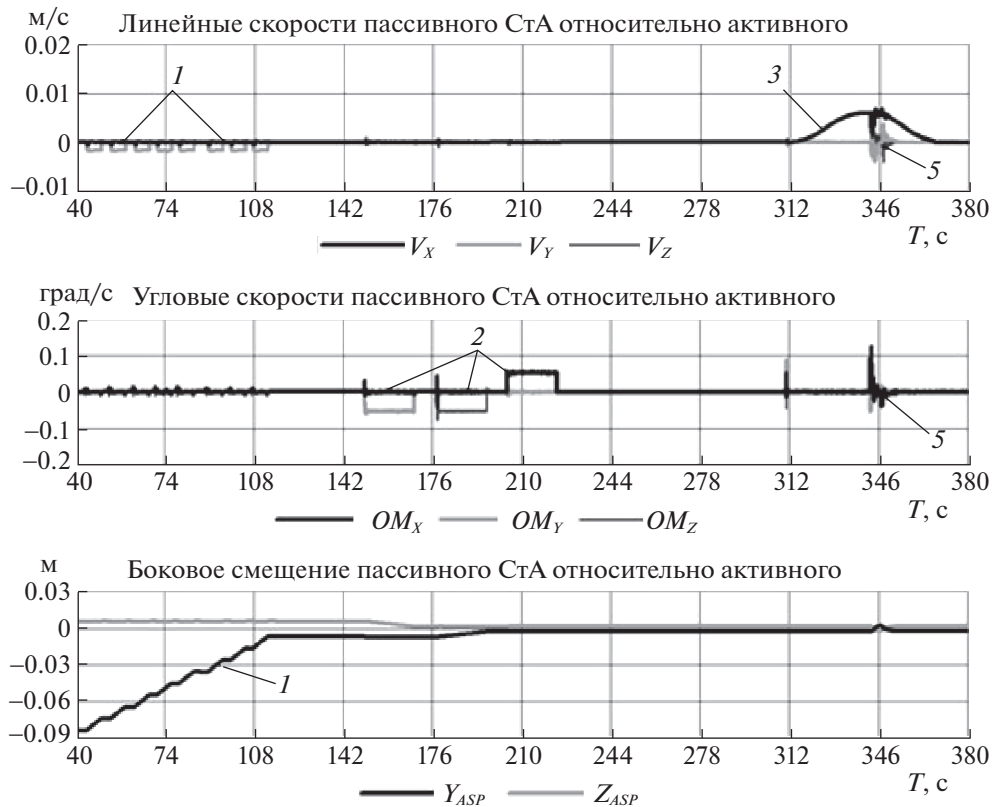


Рис. 15. Скорости и боковые промахи УСА относительно УСП (выравнивание с использованием каркасной геометрической модели)

полученные при моделировании одного из вариантов причаливания с использованием прицельной телекамеры и мишени.

Сначала оператор задает серию *1* из семи команд *Step* на устранение бокового промаха по оси *Z*, затем одну команду *2 Step* на коррекцию углового разворота относительно продольной оси *X*. Другие углы не корректируются из-за слабой чувствительности к ним изображения мишени. При осевом сближении *3* соединяемых устройств компенсация *4* бокового рассогласования головки относительно приемного конуса происходит частично за счет ее разворота, а также вследствие деформации исполнительного механизма манипулятора. Из-за этой деформации после сцепки *5* головка, находящаяся в цилиндре гнезда приемного конуса, продолжает действовать на его боковую стенку с силой *6*.

Наведение с использованием компьютерной каркасной модели дает возможность более точной оценки взаимного положения головки штыря и приемного конуса. Благодаря этому при тех же начальных условиях наведения, что и в рассмотренном выше варианте, при выравнивании было выдано большее число команд *1* на боковое перемещение (восемь вместо семи). В результате боковой промах уменьшился практически до нуля (рис. 15). Вследствие большей чувствительности компьютерной каркасной модели к относительно угловому положению соединяемых устройств было выдано три команды *2* на угловое выравнивание (вместо одной), что привело к уменьшению углового рассогласования примерно в 2 раза (рис. 16). Время достижения сцепки *5* увеличилось незначительно, на 17 с. Но вследствие более качественного выравнивания при входе головки в гнездо приемного конуса уменьшилась амплитуда контактных сил, после сцепки манипулятор находился в недеформированном состоянии.

Влияние на достижение сцепки отклонений размеров в модели движения стенда от реальных значений оценивалось для причаливания с использованием специализированных СтА таким же образом, как и при стыковке УСА и УСП. Дополнительно учитывались погрешности при ручной установке прицельной камеры с помощью кронштейна. Радиус приемного конуса и цилиндра гнезда пассивного агрегата соответственно в 7 и 4 раза больше аналогичных радиусов гнезда

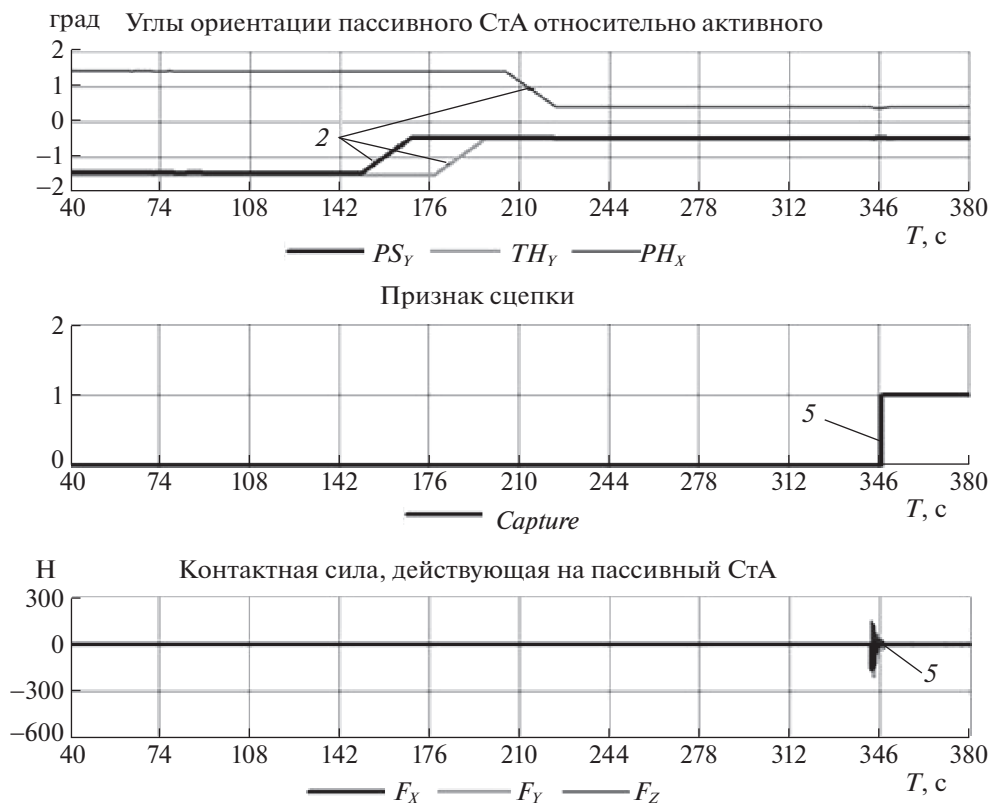


Рис. 16. Угловые рассогласования агрегатов и контактные силы при сцепке (выравнивание с использованием каркасной геометрической модели)

захвата УСП. Поэтому относительная величина отклонений вычисляемых и отображаемых на каркасной модели контактирующих поверхностей головки СтМ и гнезда пассивного агрегата значительно меньше, чем на каркасной модели, показанной на рис. 12. В программе дополнительной визуализации углы поворота головки в шарнире СтМ не учитываются, поэтому расхождения между изображениями головки СтМ и гнезда пассивного агрегата могут быть больше. При использовании для наведения каркасной модели, рассчитанной с учетом контактного взаимодействия стыковочных устройств, и каркасной модели, рассчитанной только по углам в шарнирах манипулятора, сцепка с учетом описанных выше погрешностей уверенно достигалась при меньшем уровне тренированности оператора.

Заключение. Разработаны каркасные геометрические модели стыковочных устройств малого размера, отображающие их взаимное положение и контактное взаимодействие при причаливании космических объектов с помощью манипулятора. Созданы компьютерные стенды моделирования динамики таких операций в реальном времени как для выбора параметров команд управления, предварительной наземной тренировки операторов, так и для поддержания навыков управления в реальном полете. Представлены результаты оценки на таких стендах динамики причаливания космических объектов с помощью стыковочных устройств малого размера. Показано, что каркасные геометрические модели этих устройств облегчают оператору манипулятора наведение и достижение сцепки. Они могут быть использованы для управления, заменяя прицельную телекамеру и мишень, если направляющие элементы стыковочных устройств имеют размеры больше, чем погрешности наведения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черный И. Сентябрьская космическая демонстрация НТВ // Новости космонавтики. 2009. № 11. С. 17–19.
2. MRM1 “Rassvet” Module is Berthed to the ISS. 18 May. 2010. URL: http://astrophilatelists.com/news/mrm1_rassvet_module_is_berthed_to_the_iss/2010-05-18-161.

3. *Bergin C.* SpaceX's Dragon Berthed on the ISS to Complete Historic Arrival. May 25, 2012. URL: <http://www.nasaspaceflight.com/2012/05/spacexs-dragon-historic-attempt-berth-with-iss>.
4. *Сыромятников В.С.* Стыковочные устройства космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1984. 216 с.
5. *McLaughlin R.J., Warr W.H.* The Common Berthing Mechanism (CBM) for International Space Station. URL: https://spacecraft.ssl.umd.edu/design_lib/ICES01-2435.ISS_CBМ.pdf.
6. *Яскевич А.В.* Математическая модель космического манипулятора для полунатурной отработки операций причаливания полезного груза // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 4. С. 157–176.
7. *Голубев Ю.Ф., Яскевич А.В.* Гибридное моделирование причаливания космических аппаратов // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 4. С. 136–150.
8. *Jaar G., Bélanger F., Harvie D., Lord.K.* Advanced Robotics Simulation in the MOTS // Proc. 31st Intern. Sympos. on Robotics (ISR 2000). Montreal, Canada, 2000. P. 504–509.
9. *Ma O., Buhariwala K., Roger N., MacLean J., Carr R.* MDSF – A Generic Development and Simulation Facility for Flexible, Complex Robotic Systems // Robotica. 1997. V. 15. P. 49–62.
10. Systems Engineering Simulator. URL: http://www.nasa.gov/centers/johnson/engineering/robotics_simulation/systems_engineering_simulator/index.html.
11. *Yaskevich A.* Real Time Simulation of Contact Interaction During Spacecraft Docking and Berthing // J. Mechanics Engineering and Automation. 2014. V. 4. № 1. P. 1–15.
12. *Лесков А.Г., Яскевич А.В., Илларионов В.В., Морошкин С.Д., Чернышев И.Е.* Математический стенд для отработки управления манипулятором ERA на контактной фазе причаливания // Электронный инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 9 (21). С. 57 (13 с.).