Russian Academy of Sciences

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 84. Iss. 6

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

November–December

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:
В.Г. Байдулов – отв. секретарь
Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245
Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49
E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: http://pmm.ipmnet.ru

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706
ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:
V.G. Baydulov – executive secretary
E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Adress: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia
Phone: 8 (495) 434-21-49
E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL : http://pmm.ipmnet.ru

The subscription index in Rospechat catalogue 70706
ISSN 0021-8928

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 6, с. 677–686

УДК 531.36+517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ СИЛ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

В. В. Козлов[1,*]

[1] *Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия*
**e-mail: kozlov@pran.ru*

Поступила в редакцию 19.06.2020 г.
После доработки 20.09.2020 г.
Принята к публикации 01.10.2020 г.

Рассматривается задача о структуре спектра линеаризованных в окрестности положения равновесия уравнений движения механической системы в непотенциальном силовом поле. Особое внимание уделено случаю, когда поле сил циркуляционное и на систему еще действуют силы вязкого трения. Решение задачи об устойчивости основано на поиске инвариантных подпространств, которые однозначно проектируются на конфигурационное пространство системы.

Ключевые слова: циркуляционные силы, теорема о вириале, инвариантное подпространство, гамильтонова система

DOI: 10.31857/S0032823520060077

1. Введение. Речь идет о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Px = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

которые описывают движение механических систем в непотенциальном силовом поле. Здесь $M = M^T > 0$ – положительно определенная матрица, которая задает кинетическую энергию системы

$$T = (M\dot{x}, \dot{x})/2,$$

P – произвольная $n \times n$-матрица, которая однозначно представляется в виде суммы симметрической матрицы K и кососимметрической матрицы N. Матрица K определяет потенциальную энергию системы

$$V = (Kx, x)/2,$$

а кососимметрическая матрица N порождает так называемую *циркуляционную* силу $-Nx$. Симметричная матрица $D = D^T \geq 0$ задает диссипативную функцию Релея

$$(D\dot{x}, \dot{x})/2$$

Систематическое изложение теории таких систем можно найти в книгах [1–3].

Наличие циркуляционных сил в отсутствие диссипации может приводить к появлению комплексных четверок в спектре линейной системы (1.1) даже в том случае, когда потенциальная энергия имеет в положении равновесия строгий минимум [4]. Неустойчивость такого типа обычно называют *флаттером*. Может ли флаттер подавляться большими диссипативными силами? Большое число публикаций посвящено задаче о влиянии малых диссипативных сил на устойчивость равновесий циркуляционных систем (см. [1–3] и имеющиеся там ссылки). Был [5] детально исследован случай $n = 2$. Упомянем еще две недавние работы по условиям устойчивости циркуляционных систем без диссипации [6, 7].

Напомним, что степенью неустойчивости u линейной системы дифференциальных уравнений называется число собственных значений (считая кратности) из спектра этой системы, лежащих в правой комплексной полуплоскости. Степень неустойчивости по Пуанкаре p – это количество отрицательных элементов симметрической матрицы K после приведения ее к диагональному виду.

2. Теорема о неустойчивости.

Теорема 1. Если $p = n$, то независимо от циркуляционных и диссипативных сил степень неустойчивости линейной системы (1.1) также равна n.

Условие $p = n$ означает, что потенциальная энергия V имеет в положении равновесия $x = 0$ строгий максимум.

Доказательство теоремы 1 использует следующее, легко проверяемое равенство (обобщенная теорема о вириале)

$$\dot{f} = 2(T - V), \quad \text{где} \quad f = (M\dot{x}, x) + \frac{1}{2}(Dx, x)$$

Так как $p = n$, то $\dot{f}$ будет положительно определенной квадратичной формой в $2n$-мерном фазовом пространстве. Следовательно, по теореме Островского–Шнейдера [8], степень неустойчивости u равна отрицательному индексу инерции j^- квадратичной формы f. Эта форма нейтральная ($j^- = j^+ = n$). Действительно, полагая

$$\dot{x} = M^{-1}(v - Dx/2),$$

получаем $f = (v, x)$. Но это и доказывает нейтральность f.

3. Структура спектра в одном частном случае. Больший интерес представляет задача о стабилизации равновесия, когда потенциальная энергия имеет строгий минимум. Как хорошо известно, при отсутствии циркуляционных сил равновесие становится асимптотически устойчивым при добавлении сил вязкого трения с полной диссипацией (когда $D > 0$). Однако, если $D = 0$, то добавление циркуляционных сил может нарушить устойчивость даже в том случае, когда потенциальные силы центральные:

$$V = k(x, x)/2, \quad k = \text{const} > 0$$

Это – известный результат Д.Р. Меркина [4].

Чтобы лучше разобраться с этим кругом вопросов, рассмотрим частный случай, когда одновременно

$$M = I, \quad D = cI, \quad K = kI,$$

где I – единичная матрица, а c и k положительные постоянные. Как известно, любую симметрическую положительно определенную матрицу можно привести к единичной. Здесь же предполагается, что три матрицы M, D и K одновременно приведены к специальному диагональному виду. В новых переменных уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx + Nx = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

Спектр этого линейного дифференциального уравнения второго порядка состоит из корней характеристического многочлена

$$|(\lambda^2 + c\lambda + k)I + N| \tag{3.2}$$

Хорошо известно, что собственными значениями кососимметрической матрицы N могут быть пары чисто мнимых чисел $\pm i\omega$, либо нули. Таким образом, из (3.2) вытекает, что собственные значения λ удовлетворяют уравнению

$$\lambda^2 + c\lambda + k = \pm i\omega, \tag{3.3}$$

где ω – вещественное число, которое может быть и нулем. Следовательно, задача об устойчивости линейной системы (3.1) сводится к выяснению расположения на комплексной плоскости корней квадратного уравнения (3.3).

Возводя обе части (3.3) в квадрат, получаем многочлен четвертой степени

$$\lambda^4 + 2c\lambda^3 + (2k + c^2)\lambda^2 + 2ck\lambda + k^2 + \omega^2 = 0, \tag{3.4}$$

который в случае асимптотической устойчивости должен быть гурвицевым. Известные условия дают решение нашей задачи: все корни многочлена (3.4) лежат в левой комплексной полуплоскости тогда и только тогда, когда $kc^2 > \omega^2$. Следовательно, если

$$c > \frac{\max|\omega|}{\sqrt{k}}, \tag{3.5}$$

то положение равновесия $x = 0$ линейной системы (3.1) будет асимптотически устойчивым. Максимум в (3.5) берется по всем собственным числам кососимметрической циркуляционной матрицы N.

Наоборот, если $kc^2 < \omega^2$, то многочлен (3.4) имеет два корня в левой полуплоскости и два в правой. Этот факт выводится из метода Рауса–Гурвица (более тонкого по сравнению с общеизвестной теоремой Гурвица) [9]. Поэтому если хотя бы для одной частоты ω выполняется неравенство $kc^2 < \omega^2$, то линейная система (3.1) неустойчива. Причем эта неустойчивость типа флаттера, поскольку многочлен (3.4), очевидно, не имеет вещественных положительных корней.

Суммируя сказанное, можно сделать следующий вывод. Пусть матрица циркуляционных сил имеет собственные значения $\pm i\omega_j$ (среди ω_j могут быть равные, а также нули). Если имеется ровно p “частот”' ω_j, удовлетворяющих неравенству $kc^2 < \omega^2$, то степень неустойчивости u линейной системы (3.1) равна $2p$. Так как количество пар ненулевых собственных чисел кососимметрической матрицы N порядка n не превосходит $n/2$, то степень неустойчивости системы (3.1) не превосходит n. При увеличении коэффициента вязкого трения c степень неустойчивости не возрастает и становится нулем при достаточно больших значениях коэффициента c.

Отметим еще, что если потенциальные силы отсутствуют ($k = 0$), то при $N \neq 0$ в системе (3.1) будет наблюдаться флаттер для всех значений коэффициента трения c.

Как будет показано ниже, эти выводы (с некоторыми уточнениями) справедливы и в общем случае (для произвольных симметрических матриц $D > 0$ и $K \geq 0$).

4. Инвариантные подпространства. Всюду дальше будем считать, что матрица M приведена к единичной I. При этом структура и свойства остальных матриц D, K и N останутся прежними.

Для решения задачи об устойчивости используем прием, связанный с поиском инвариантных n-мерных подпространств фазового пространства, однозначно проектирующих на конфигурационное пространство. Такие подпространства следует искать в следующем виде:

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

Эта n-мерная плоскость будет инвариантной для линейной системы (1.1) тогда и только тогда, когда $n \times n$-матрица A удовлетворяет следующему квадратному уравнению

$$A^2 + DA + P = 0 \tag{4.2}$$

Пусть $\|\cdot\|$ – операторная норма матрицы. Напомним, что

$$\|X\| = \max_{\|x\|=1} \|Xx\|$$

В частности, $\|I\| = 1$ и $\|X^T\| = \|X\|$. Ясно, что операторная норма зависит от выбора нормы в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^n = \{x\}$. Например, для “стандартной” нормы

$$\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$

имеем

$$\|X\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2\right)^{1/2},$$

где x_{ij} – элементы матрицы X.

Далее мы предполагаем, что $|P| \neq 0$. Это эквивалентно условию единственности равновесия $x = 0$ линейной системы (1.1).

Теорема 2. Если

$$\|D^{-1}\| \cdot \|D^{-1}P\| < \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad \|D^{-1}\| \cdot \|PD^{-1}\| < \frac{1}{4}, \tag{4.3}$$

то фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n} = \{x, \dot{x}\}$ системы (1.1) есть прямая сумма инвариантных n-мерных плоскостей

$$\sum = \{\dot{x} = Ax\} \quad \text{и} \quad \sum{}' = \{\dot{x} = A'x\},$$

где A и A' – невырожденные вещественные $n \times n$-матрицы, причем

$$\|A\| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 4\|D^{-1}\| \cdot \|D^{-1}P\|}}{2\|D^{-1}\|} \tag{4.4}$$

$$A' = -D + B, \quad \|B\| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 4\|D^{-1}\| \cdot \|PD^{-1}\|}}{2\|D^{-1}\|} \tag{4.5}$$

Существование двух различных решений квадратного матричного уравнения (4.2) с указанными свойствами доказано [10] с помощью метода сжимающих отображений. Инвариантные плоскости $\sum$ и $\sum'$ пересекаются только в начале координат. Это свойство эквивалентно невырожденности матрицы $A - A'$, что также доказано [10] с использованием условий (4.3).

Из теоремы 2 вытекает, в частности, что спектр линейной системы (1.1) есть объединение спектров матриц A и A'.

Чтобы лучше понять теорему 2, рассмотрим частный случай, когда $D = cI$ (как в разд. 3). Тогда при больших значениях коэффициента вязкого трения c два условия (4.3) заведомо выполнены и нормы матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ допускают асимптотическую оценку

$$\|P\|/c + o(c^{-1})$$

Применим теорему 2 к оценке степени неустойчивости линейной системы (1.1), в которой $M = I$. Прежде напомним, что для любой симметрической положительно определенной матрицы X найдется только одна матрица $X^{1/2}$, тоже симметрическая и положительно определенная, такая, что $X = X^{1/2}X^{1/2}$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (4.3) и дополнительно

$$\left\|D^{-1/2}\right\|^2 \frac{1 - \sqrt{1 - 4\left\|D^{-1}\right\|\left\|PD^{-1}\right\|}}{2\left\|D^{-1}\right\|} < 1 \tag{4.6}$$

Тогда $u \le n$.

Напомним, что $u = n$, если $p = n$ (теорема 1). Положим снова $D = cI$. Тогда при $c \to \infty$ левая часть неравенства (4.6) будет

$$\|P\|/c^2 + o(c^{-2})$$

Для доказательства теоремы рассмотрим линейное дифференциальное уравнение (4.1) на инвариантном подпространстве $\sum'$ с матрицей $A' = -D + B$. Ясно, что

$$\frac{1}{2}(x, x)^{\bullet} = (x, A'x) = -(Dx, x) + (Bx, x) \tag{4.7}$$

Полагая $D^{1/2}x = z$, будем иметь равенство

$$(Dx, x) = (z, z) = \|z\|^2 \tag{4.8}$$

Далее,

$$(Bx, x) = (BD^{-1/2}z, D^{-1/2}z) = (D^{-1/2}BD^{-1/2}z, z)$$

Следовательно,

$$|(Bx, x)| \le \left\|D^{-1/2}BD^{-1/2}\right\|\|z\|^2$$

Так как $\left\|D^{-1/2}BD^{-1/2}\right\| \le \left\|D^{-1/2}\right\|^2\|B\|$, то согласно (4.5), эта норма не превосходит левой части неравенства (4.6), то есть не превосходит единицы. Но тогда (с учетом (4.8)) правая часть равенства (4.7) будет отрицательно определенной квадратичной формой. Следовательно, по теореме Ляпунова, все собственные числа матрицы A' лежат в левой комплексной полуплоскости. Отсюда сразу вытекает, что $u \le n$. Что и требовалось.

5. Случай, когда в положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий минимум.

Теорема 4. Пусть $K > 0$, выполнены условия (4.3), (4.6) и дополнительно

$$\left\|K^{-1/2}\right\| \frac{1 - \sqrt{1 - 4\left\|D^{-1}\right\|\left\|D^{-1}P\right\|}}{2\left\|D^{-1}\right\|} < 1 \tag{5.1}$$

Тогда равновесие $x = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво.

Чтобы лучше понять новое условие (5.1), положим $D = cI$ и $P = K = kI$. Тогда левая часть (5.1) будет равна

$$\frac{1 - \sqrt{1 - z^2}}{z}, \quad \text{где} \quad z = \frac{2\sqrt{k}}{c}$$

Легко проверить, что эта величина всегда меньше 1 при всех $0 < z < 1$. Отметим еще, что под радикалами в формулах (4.6) и (5.1) присутствуют нормы разных матриц PD^{-1} и $D^{-1}P$.

Обсудим влияние больших диссипативных сил на возможность стабилизации положения равновесия системы (1.1). С этой целью рассмотрим случай, когда элементы матрицы D^{-1} малы (то есть мала норма $\|D^{-1}\|$). Наоборот, тогда норма матрицы диссипативных сил D будет большой. Легко проверить, что тогда все условия теоремы 4 будут выполнены и поэтому добавление больших диссипативных сил оказывает стабилизирующее воздействие. Впрочем, этот общий результат был получен ранее в терминах условий на максимальные и минимальные по величине собственные значения матриц D, K и N (см. [11, 12]).

Для доказательства вычислим полную производную квадратичной формы $(Dx, x)/2$ в силу линейной системы (4.1), где матрица A удовлетворяет квадратному уравнению (4.2) и неравенству (4.4):

$$\frac{1}{2}(Dx, x)^{\bullet} = (Dx, x) = (DAx, x) = \frac{1}{2}((DA + A^T D)x, x)$$

Ясно, что

$$DA + A^T D = -2K - (A^2 + A^{T2})$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}(Dx, x)^{\bullet} = -(Kx, x) - \frac{1}{2}((A^2 + A^{T2})x, x) \tag{5.2}$$

Так как $K > 0$, то можно сделать подстановку $K^{1/2}x = z$. В новых переменных правая часть (5.2) примет следующий вид:

$$-(z, z) - \frac{1}{2}(K^{-1/2}(A^2 + A^{T2})K^{-1/2}z, z)$$

Оценим норму матрицы во втором слагаемом:

$$\frac{1}{2}\left\|K^{-1/2}(A^2 + A^{T2})K^{-1/2}\right\| \le \left\|K^{-1/2}\right\|^2 \|A\|^2$$

Если величина справа меньше 1, то производная в (5.2) отрицательно определена. Но тогда (по теореме Ляпунова) все собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости. С учетом (4.4) неравенство $\left\|K^{-1/2}\right\|^2 \|A\|^2 < 1$ эквивалентно (5.1).

6. Большие диссипативные силы. Решения матричного уравнения (4.2) можно представить в виде сходящихся степенных рядов. С этой целью заменим матрицу диссипативных сил D на cD, где c — большой параметр. Положим $A = cX$ и $\varepsilon = 1/c^2$. Тогда уравнение (4.2) примет следующий вид:

$$X^2 + DX + \varepsilon P = 0 \tag{6.1}$$

Будем искать его решения в виде ряда по степеням ε:

$$X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \ldots \tag{6.2}$$

Теорема 5. Квадратное матричное уравнение (6.1) имеет два различных решения в виде степенных рядов (6.2) с $X_0 = -D$ и $X_0 = 0$, сходящихся при

$$\varepsilon < \frac{1}{4}\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

$$\varepsilon_1 = \left\|D^{-1}\right\|^{-1}\left\|D^{-1}P\right\|^{-1}, \quad \varepsilon_2 = \left\|D^{-1}\right\|^{-1}\left\|PD^{-1}\right\|^{-1}$$

Для решения с матрицей $X_0 = 0$ остальные коэффициенты $X_1, X_2, \ldots$ находятся из следующих равенств:

$$DX_1 + P = 0, \quad DX_2 + X_1^2 = 0, \quad DX_3 + (X_1X_2 + X_2X_1) = 0, \quad \ldots \tag{6.3}$$

Отсюда

$$X_1 = -D^{-1}P, \quad X_2 = -D^{-1}(D^{-1}P)^2, \quad \ldots$$

Далее получаем последовательно

$$\|X_1\| = \left\|D^{-1}P\right\|, \quad \|X_2\| \le \left\|D^{-1}\right\|\left\|D^{-1}P\right\|^2$$

$$\|X_3\| \le 2\left\|D^{-1}\right\|^2\left\|D^{-1}P\right\|^3, \quad \ldots$$

Итак,

$$\|X_k\| \le \kappa_k \left\|D^{-1}\right\|^{k-1}\left\|D^{-1}P\right\|^k,$$

причем, согласно (6.3), коэффициенты κ_k удовлетворяют следующему рекуррентному правилу:

$$\kappa_{k+1} = \kappa_1\kappa_k + \kappa_2\kappa_{k-1} + \ldots + \kappa_k\kappa_1, \quad \kappa_1 = 1$$

Таким образом, $\{\kappa_k\}$ – это хорошо известные в комбинаторике *числа Каталана*. Их производящая функция $\sum_1^\infty \kappa_k z^k$ равна

$$(1 - \sqrt{1 - 4z})/2$$

Следовательно,

$$\|X\| \le \sum_{k=1}^{\infty}\kappa_k\|X_k\| \le \left\|D^{-1}\right\|^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\kappa_k\left(\left\|D^{-1}\right\|\left\|D^{-1}P\right\|\right)^k =$$

$$= \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon\left\|D^{-1}\right\|\left\|D^{-1}P\right\|}}{\left\|D^{-1}\right\|}$$

(ср. с формулой (4.4)). Но тогда степенной ряд (6.2) будет сходящимся при выполнении условия $\varepsilon < \varepsilon_1/4$. Аналогично решается вопрос о сходимости ряда (6.2), когда $X_0 = -D$. Теорема доказана.

При малых $\varepsilon > 0$ дифференциальные уравнения (4.1) имеют следующий явный вид:

$$\dot{x} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}Dx + \sqrt{\varepsilon}PD^{-1}x + O(\varepsilon^{3/2}) \tag{6.4}$$

$$\dot{x} = -\sqrt{\varepsilon}D^{-1}x - \varepsilon^{3/2}D^{-1}(D^{-1}P)^2x + O(\varepsilon^{5/2}) \tag{6.5}$$

Так как $D > 0$, то спектр линейной системы (6.4) целиком лежит в левой комплексной полуплоскости, если $\varepsilon > 0$ мало. Это частный случай теоремы 3.

Теорема 6. Пусть

$$\left\| D^{-1/2} N P^{-1} D^{1/2} \right\| < 1 \tag{6.6}$$

Тогда при малых ε (или, что то же самое, при больших c) степень неустойчивости линейной системы (1.1) равна степени неустойчивости Пуанкаре p.

Отметим, что условие (6.6) не меняется при замене D матрицей cD, $c > 0$.

Для доказательства теоремы рассмотрим “главную” часть системы (6.5):

$$D\dot{x} = -(K + N)x \tag{6.7}$$

Опущенный множитель $\sqrt{\varepsilon}$ не влияет на ее степень неустойчивости. Следствием (6.7) будет равенство

$$\frac{1}{2}(Kx, x)^{\bullet} = -(D\dot{x}, \dot{x}) - (Nx, \dot{x}) \tag{6.8}$$

Полагая $z = D^{1/2}\dot{x}$, правую часть представим в виде

$$-(z, z) - (D^{-1/2} N P^{-1} D^{1/2} z, z)$$

Ввиду условия (6.6) эта сумма представляет отрицательно определенную квадратичную форму. Этот вывод справедлив и для “полного” уравнения (6.5), если ε – достаточно малое положительное число. Но тогда (по теореме Островского–Шнейдера [8]) из равенства (6.8) вытекает, что степень неустойчивости линейной системы (6.5) при малых $\varepsilon > 0$ в точности равна p (индексу инерции потенциальной энергии системы). Что и требовалось.

Если $D = cI$, то условие (6.6) принимает более простой вид:

$$\left\| N(K + N)^{-1} \right\| < 1 \tag{6.9}$$

Оно показывает, что потенциальные силы в определенном смысле доминируют над циркуляционными. Если $K = 0$, то неравенство (6.9), конечно, не справедливо. Именно этот случай мы и рассмотрим в заключение. Поскольку выше предполагалось, что $|P| \neq 0$, то и $|N| \neq 0$. В частности, число степеней свободы n четно.

Теорема 7. Пусть $K = 0$ и $|N| \neq 0$. Тогда при малых ε (или, что то же самое, при больших c) степень неустойчивости линейной системы (1.1) равна n.

Из системы (6.5) вытекает равенство

$$\frac{1}{2}(D^{-1}Nx, Nx)^{\bullet} = \varepsilon^{3/2}(D^{-2}(ND^{-1}N)x, ND^{-1}Nx) + O(\varepsilon^{5/2})$$

Так как $|N| \neq 0$, то при малых $\varepsilon > 0$ квадратичная форма справа положительно определена. Поскольку слева стоит полная производная по времени от также положительной определенной квадратичной формы, то (по теореме Ляпунова) степень неустойчивости линейной системы (6.5) равна n при малых $\varepsilon > 0$. Но тогда (с учетом теоремы 3) степень неустойчивости “полной” линейной системы (1.1) также равна n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 330 с.
2. *Майлыбаев А.А., Сейранян А.П.* Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М.: Физматлит, 2009. 400 с.
3. *Kirillov O.N.* Nonconservative Stability Problems of Modern Physics. Walter. Berlin; Boston: de Gruyter, 2013. 429 p.
4. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
5. *Байков А.Е., Красильников П.С.* О эффекте Циглера в неконсервативной механической системе // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 1. С. 74–88.
6. *Bulatovic R.M.* A stability criterion for circulatory systems // Acta Mech. 2017. V. 228. P. 2713–2718.
7. *Awrejcewicz J., Losyeva N., Puzyrov V.* Stability and boundedness of the solutions of multi-parameter dynamical systems with circulatory forces // Symmetry. 2020. V. 12. № 8. art. 1210.
8. *Ostrowski A., Schneider H.* Some theorems on the inertia of general matrices // J. Math. Anal. & Appl. 1967. V. 4. P. 72–84.
9. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
10. *Козлов В.В.* Инвариантные плоскости, индексы инерции и степени устойчивости линейных уравнений динамики // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 2007. Т. 258. С. 154–161.
11. *Сейранян А.П.* О теоремах Метелицына // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 3. С. 39–43.
12. *Клим В., Сейранян А.П.* Неравенство Метелицына и критерии устойчивости механических систем // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 225–233.

On the Stability of Circulatory Systems under the Presence of Forces of Viscous Friction

V. V. Kozlov[a,#]

[a] *Steklov Mathematical Institute of the RAS, Moscow, Russia*
[#]*e-mail: kozlov@pran.ru*

We consider the problem of the structure of the spectrum of the equations of motion of a mechanical system linearized in a neighborhood of an equilibrium position in a non-potential force field. Particular attention is paid to the case when the force field is circulatory and there are also forces of viscous friction acting on the system. The solution of the stability problem is based on the search of invariant subspaces that are univalently projected onto the configuration space of the system.

Keywords: circulatory forces, virial theorem, invariant subspace, Hamiltonian system

REFERENCES

1. *Bolotin V.V.* Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 330 p. (in Russian)
2. *Mailybaev A.A., Seyranian A.P.* Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications. River Edge, NJ: World Scientific, 2003. 403 p.
3. *Kirillov O.N.* Nonconservative Stability Problems of Modern Physics; Berlin, Boston: Walter de Gruyter, 2013. 429 p.
4. *Merkin D.R.* Gyroscopic systems. Moscow: Nauka, 1974. 344 p. (in Russian)
5. *Baikov A.E., Krasil'nikov P.S.* The Ziegler effect in a non-conservative mechanical system // JAMM, 2010, vol. 74, no. 1, pp. 51–60.

6. *Bulatovic R.M.* A stability criterion for circulatory systems // Acta Mech., 2017, vol. 228, pp. 2713–2718.
7. *Awrejcewicz J., Losyeva N., Puzyrov V.* Stability and boundedness of the solutions of multi-parameter dynamical systems with circulatory forces // Symmetry, 2020, vol. 12, no. 8, art. 1210.
8. *Ostrowski A., Schneider H.* Some theorems on the inertia of general matrices // J. Math. Anal. & Appl., 1967, vol. 4, pp. 72–84.
9. *Gantmakher F.R.* The Theory of Matrices. Moscow: Nauka, 1967. 576 p. (in Russian)
10. *Kozlov V.V.* Invariant planes, indices of inertia, and degrees of stability of linear dynamic equations // Proc. Steklov Institute of Mathematics, 2007. vol. 258, pp. 154–161. (in Russian)
11. *Seyranian A.P.* On the theorems of Metelitsyn // Izv. RAN, Mekhanika Tverdogo Tela, 1994, vol. 3, pp. 39–43. (in Russian)
12. *Kliem W., Seyranian A.P.* Metelitsyn's inequality and stability criteria for mechanical systems // JAMM, 2004, vol. 68, no. 2, pp. 199–205.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 6, с. 687–693

УДК 531.383

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

С. В. Нестеров[1], В. Г. Байдулов[1,2,*]

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
[2] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*
**e-mail: bayd@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 15.06.2020 г.
После доработки 18.08.2020 г.
Принята к публикации 25.09.2020 г.

Рассмотрена модель, обобщающая известные уравнения нелинейной теории колебаний (Ван дер Поля и Рэлея), предельные циклы которой – кривые фазовой плоскости, определяемые полной энергией колебаний в случае отсутствия диссипации/притока энергии в систему. Изменяя параметры системы и вид силового воздействия можно задавать устойчивые к возмущениям характеристики колебаний. Рассмотрены фазовые портреты системы, включая случай многосвязных предельных циклов.

Ключевые слова: автоколебания, уравнение Ван дер Поля, уравнение Рэлея, волновой твердотельный гироскоп

DOI: 10.31857/S0032823520060089

1. В монографии [1] описан волновой твердотельный гироскоп, физической основой которого является твердотельный резонатор, изготовленный из высококачественного кварца. В резонаторе возбуждаются незатухающие стоячие волны, которые и позволяют превратить этот резонатор в гироскоп. Подробное изложение принципа действия приведено также и в ряде других публикаций [2–4]. Волновые гироскопы широко используются в технике [5, 6]. Анализ свойств таких колебательных систем, вопросы определения их устойчивости и управления параметрами активно исследуются в настоящее время [7–10]. Для того чтобы гироскоп мог функционировать достаточно продолжительное время, колебания резонатора должны поддерживаться все время эксплуатации с постоянной амплитудой и частотой. Ранее [11] подробно рассмотрен автоколебательный режим резонатора. Имеются два детально изученных дифференциальных уравнения, описывающих возникновение и существование установившихся колебаний постоянной амплитуды и периода.

Уравнение Ван дер Поля [12]

$$\ddot{u} - \varepsilon(1 - u^2)\dot{u} + u = 0 \tag{1.1}$$

Здесь u и $\dot{u}$ – смещение и скорость осциллятора, ε – создаваемый специальным устройством коэффициент обратной связи, обеспечивающий подачу энергии от внешнего постоянного источника.

Уравнение Рэлея [13]

$$\ddot{u} - \varepsilon(1 - \dot{u}^2)\dot{u} + u = 0, \tag{1.2}$$

где u, $\dot{u}$ и ε – имеют тот же смысл, как и в уравнении Ван дер Поля.

Основные математические результаты, относящиеся к уравнениям Ван дер Поля и Рэлея, состоят в том, что тривиальное решение $u = \dot{u} = 0$ неустойчиво, однако существует периодическое решение с постоянной амплитудой и периодом $T(\varepsilon)$. Это периодическое решение асимптотически устойчиво, однако оно не оказывается одночастотным. Для улучшения гироскопических свойств резонатора необходимо, чтобы колебания описывались устойчивыми одночастотными периодическими решениями. Академик В.Ф. Журавлев предложил объединить уравнения (1.1) и (1.2) следующим образом

$$\ddot{u} - \beta(1 - \dot{u}^2 - u^2)\dot{u} + u = 0 \tag{1.3}$$

Действительно, полагая $u = A\cos t$, при $A = 1$ получаем точное решение уравнения (1.3) с периодом $T = 2\pi$.

Для осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{u} = -f(u), \quad f(-u) = -f(u) \tag{1.4}$$

которое имеет интеграл энергии

$$E = \frac{\dot{u}^2}{2} + \Pi, \quad \Pi = \int_0^u f(u)\,du \tag{1.5}$$

для систем с обратной связью (диссипацией) уравнение (1.3) может быть в случае потенциальной энергии Π обобщено в виде

$$\ddot{u} + 2\varepsilon(E - E_0)\dot{u} + f(u) = 0, \tag{1.6}$$

где ε – коэффициент обратной связи, E_0 – постоянная, которая показывает, до каких пор может расти энергия E осциллятора, чтобы отрицательное сопротивление уменьшилось до нуля.

Дифференцируя энергию (1.5), найдем

$$\frac{dE}{dt} = \dot{u}(\ddot{u} + f(u)) = -2\varepsilon(E - E_0)\dot{u}^2 \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) показывает, что если в начальный момент времени

$$E = E_0, \tag{1.8}$$

то энергия осциллятора с течением времени не меняется. Уравнение (1.7) можно переписать в интегральной форме

$$E = E_0 + H\exp\left(-2\varepsilon\int_0^t v^2 dt\right) = E_0 + H\exp\left(-2\varepsilon\int v\,du\right), \tag{1.9}$$

где $v = \dot{u}$, H – постоянная интегрирования. Если в начальный момент времени условие (1.8) не выполняется, то из уравнения (1.9) следует, что при $E(0) > E_0$ $(H > 0)$ энергия будет невозрастающей функцией времени; а при $E(0) < E_0$ $(H < 0)$ и E – неубывающей. Если условие (1.8) рассматривать как функцию на фазовой плоскости (u, v),

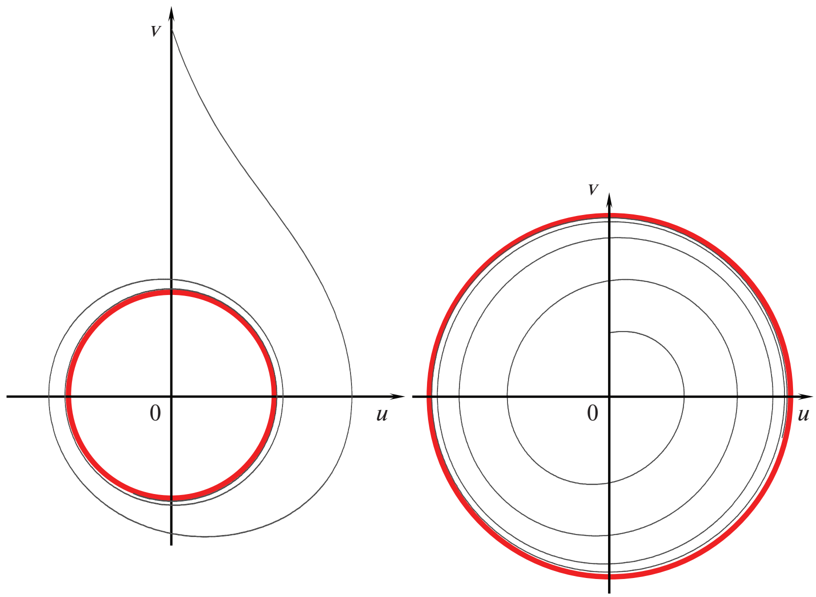


Рис. 1. Гармонический осциллятор.

график которой образует замкнутую кривую (набор замкнутых кривых – многосвязная область), то такая область будет предельным циклом уравнения (1.7). Запишем уравнение предельного цикла в явном виде

$$\frac{v^2}{2} + \Pi(u) = \frac{v^2}{2} + \int_0^u f(u)\,du = E_0$$

Если положить $v = 0$, то величина амплитуды определяется уравнением

$$\Pi = E_0 \tag{1.10}$$

Здесь по умолчанию предполагается, что при заданном значении E_0 существуют два конечных корня уравнения (1.10). Для определения периода колебаний воспользуемся уравнением (1.5), полагая $E = E_0$. Имеем

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{2(E_0 - \Pi(u))}} = \frac{T}{2} \tag{1.11}$$

Величина периода и другие свойства колебаний будут очевидно определяться значением энергетического параметра E_0 и видом функции $f(u)$, с точностью до знака совпадающей с силовой функцией

2. Примеры.

1. Фазовая картина автоколебательной системы гармонического осциллятора ($f(u) = -u$) приведена на рис. 1.

2. Пример автоколебательной системы с асимметричной силовой функцией вида

$$\ddot{u} + 2\varepsilon(E - E_0)\dot{u} + u\exp(bu) = 0; \quad E_0 = 1, \quad \varepsilon = 1/8, \quad b = 0.98$$

$$E = \frac{\dot{u}^2}{2} + \left(\frac{u}{b} - \frac{1}{b^2}\right)\exp(bu) + \frac{1}{b^2}$$

приведен на рис. 2.

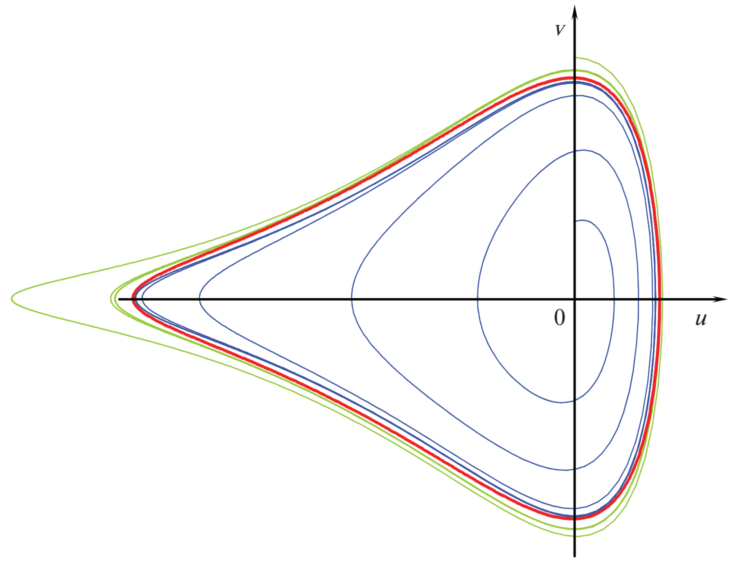


Рис. 2. Пример асимметричного предельного цикла.

3. В качестве примера многосвязного предельного цикла рассмотрим автоколебательную систему, состоящую из маятника и электромеханического устройства, обеспечивающего обратную связь между постоянным источником питания и маятником. Такая автоколебательная система при произвольных углах отклонения маятника от вертикального положения описывается уравнением (далее используются безразмерные переменные)

$$v' + 2\varepsilon(E - E_0)v + \sin u = 0 \tag{2.1}$$

Здесь $E = \frac{v^2}{2} + (1 - \cos u)$, $f = -\sin u$, далее принимается $E_0 = 1$ — коэффициент, ограничивающий рост отрицательного сопротивления.

Фазовые траектории задач с начальными данными $u(0) = u_0$, $v(0) = 0$ приведены в верхнем правом углу рис. 3. В этом случае фазовые траектории будут притягиваться к ближайшей к начальным данным замкнутой кривой многосвязного предельного цикла. В случае начальных данных вида $u(0) = 0$, $v(0) = v_0$ поведение траекторий более сложное. Если начальные данные таковы, что выполняется условие $E < E_0$, то траектории будут наматываться на центральный предельный цикл (рис. 3, кривая *1*). При больших значениях коэффициента обратной связи (диссипации) ε и выполнении условия $E > E_0$ (рис. 3, кривая *2*) траектории будут наматываться на ближайшую замкнутую область предельного цикла, причем их абсцисса не будет превышать некоторого предельного значения (для центральной области $|u| < \pi$). С уменьшением параметра ε траектории будут приближаться к вертикальной сепаратрисе между областями предельного цикла так, что вторая производная d^2v/du^2 будет обращаться в нуль. При достижении параметром ε критического значения траектория достигнет сепаратрисы (для центральной области в точке $(0, \pi)$), а в производной dv/du возникнет разрыв первого рода. При дальнейшем уменьшении ε областью притяжения станет следу-

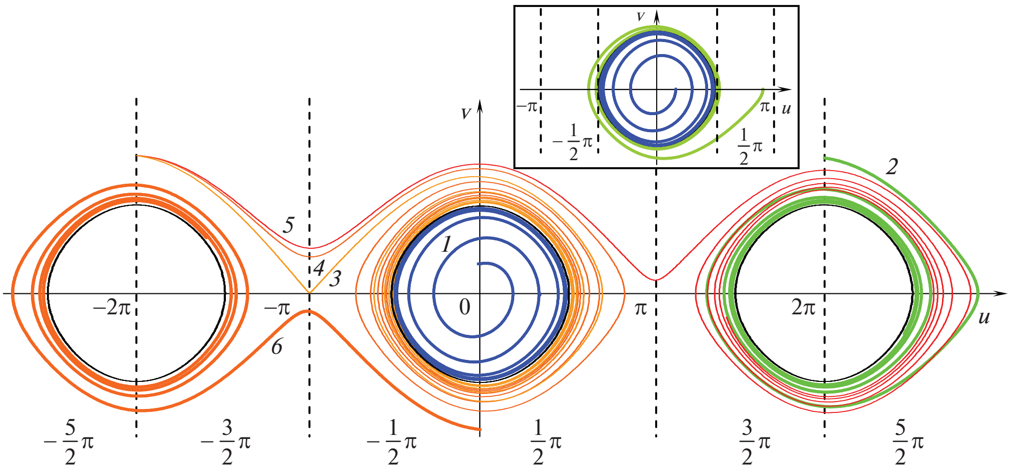


Рис. 3. Пример многосвязного предельного цикла.

ющая справа от начальной замкнутая область предельного цикла (рис. 3, кривые *3*, *4*). Такой сценарий будет повторяться и далее при уменьшении ε области притяжения траекторий будут сменяться на все более удаленные замкнутые области многосвязного предельного цикла (рис. 3, кривая *5*). Можно показать, что поведение фазовых кривых для отрицательных значений начальных данных $u(0) = 0$, $v(0) = -v_0$ будут описываться траекториями антисимметричными по отношению к рассмотренным (рис. 3, кривая *6*).

Заключение. Приведенные примеры показывают, что выделенный класс автоколебательных систем позволяет находить предельные циклы с помощью простых аналитических вычислений. При этом определяются амплитуды колебаний и их периоды. Если создать такие электромеханические устройства, которые обеспечивают обратную связь, описываемую нелинейным сопротивлением $2\varepsilon(E - E_0)\dot{u}$, то можно, например, сконструировать на основе примера 3 высокоточный маятниковый гравиметр.

Работа выполнена в рамках госзаданий АААА-А20-120011690138-6 и АААА-А20-120011690132-4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
2. *Климов Д.М., Журавлёв В.Ф., Жбанов Ю.К.* Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во Ким Л.А., 2017. 194 с.
3. *Журавлёв В.Ф.* Волновой твердотельный гироскоп: современное состояние, некоторые аспекты // Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент. 2011. № 2 (33). С. 118–123.
4. *Журавлёв В.Ф.* Двумерный осциллятор Ван дер Поля с внешним управлением // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. № 2. С. 211–222.
5. *Yi T., Wu X.Z., Xiao D.B., Xi X., Tan Y.Q.* A novel cupped solid-state wave gyroscope // Appl. Mech.&Mater. 2011. V. 110–116. P. 715–722. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.110-116.715

6. *Негри С., Лабарр Э., Линьон К., Брунштейн Э., Салаён Э.* Новое поколение инерциальных навигационных систем на основе ВТГ для аппаратов, обеспечивающих запуск спутников // Гироскопия и навигация. 2016. Т. 24. № 1 (92). С. 49–59.
7. *Трутнев Г.А.* Модель конструкционного демпфирования твердотельного волнового гироскопа // Вестн. удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2019. Т. 29. Вып. 1. С. 84–91.
8. *Yi G., Xie Y., Qi Z., Xi B.* Modeling of acceleration influence on hemispherical resonator gyro forsing system // Math. Probl. in Engng. 2015. V. 2015. Article ID 104041. https://doi.org/10.1155/2015/104041
9. *Серёгин С.В.* Влияние несовершенств формы на колебания кольцевого резонатора волнового твердотельного гироскопа // Нелин. дин. 2017. Т. 13. № 3. С. 423–431. https://doi.org/10.20537/nd1703009
10. *Мартыненко Ю.Г., Меркурьев И.В., Подалков В.В.* Управление нелинейными колебаниями вибрационного кольцевого микрогироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 77–89.
11. *Журавлёв В.Ф.* Пространственный осциллятор Ван-дер-Поля. Технические приложения // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 1. С. 158–164.
12. *Van der Pol B.* On relaxation-oscillations // The London, Edinburgh& Dublin Phil. Mag. & J. Sci. 1927. V. 2. № 7. P. 978–992.
13. *Стретт Дж.В.* (лорд Релей) Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 484 с.

On the One Class of Auto-Oscillating Systems

S. V. Nesterov[a,#] and V. G. Baydulov[a,b,#]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*
[b] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*
[#]*e-mail: bayd@ipmnet.ru*

It was proposed a model equation which generalizes the well-known equations of the theory of nonlinear oscillations (Van der Pol and Rayleigh). The limit cycles of proposed model are the curves on phase plane determined by the total energy of the oscillation in the adiabatic case. The stable due to perturbations characteristics of the oscillations can be set by varying of parameters of the system and the form of force action. The phase portraits of the system are considered, including the case of multiply connected limit cycles.

Keywords: self-oscillations, van der Pol equation, Rayleigh equation, wave solid-state gyroscope

REFERENCES

1. *Klimov D.M., Zhuravlev V.Ph.* Wave Solid-State Gyroscope. Moscow: Nauka, 1985. 125 p. (in Russian)
2. *Klimov D.M., Zhuravlev V.Ph., Zhbanov Yu.K.* Quartz Hemispherical Resonator (Wave Solid-State Gyroscope). Moscow: Kim L.A., 2017. 194 p. (in Russian)
3. *Zhuravlev V.Ph.* Wave Solid-State Gyroscope: Modern State, Some Aspects// Actual Probl. Aviation&Aerospace Syst.: Processes, Models, Experiment, 2011, no. 2 (33), pp. 118–123.
4. *Zhuravlev V.Ph.* Van der Pol's Controlled 2D Oscillator // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2016, vol. 12, no. 2, pp. 211–222.
5. *Yi T., Wu X.Z., Xiao D.B., Xi X., Tan Y.Q.* A novel cupped solid-state wave gyroscope // Appl. Mech.&Mater., 2011, vol. 110–116, pp. 715–722. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.110-116.715
6. *Negri C., Labarre E., Lignon C., Brunstein E., Salaün E.* A new generation of IRS with innovative architecture based on HRG for satellite launch vehicles // Gyrosc.&Navig., 2016, vol. 7, no. 3, pp. 223–230.

7. *Trutnev G.A.* Model of the hemispherical resonator gyroscope construction damping // Vestn. Udmurt. Univ. Matem. Mekh. Komp'yut. Nauki, 2019, vol. 29, iss. 1, pp. 84–91. (in Russian)
8. *Yi G., Xie Y., Qi Z., Xi B.* Modeling of acceleration influence on hemispherical resonator gyro forsing system // Math. Probl. in Engng., 2015, vol. 2015, Article ID 104041. https://doi.org/10.1155/2015/104041
9. *Seregin S.V.* The influence of shape imperfections on the vibrations of a ring resonator of a wave solid-state gyroscope // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2017, vol. 13, no. 3, pp. 423–431. https://doi.org/10.20537/nd1703009
10. *Martynenko Yu.G., Merkuryev I.V., Podalkov V.V.* Control of nonlinear vibrations of vibrating ring microgyroscope // Mech. Sol., 2008, vol. 43, pp. 379–398.
11. *Zhuravlev V.Ph.* Van der Pol oscillator. Technical applications // Mech. Sol., 2020, vol. 55, pp. 132–137.
12. *Van der Pol B.* On relaxation-oscillations // The London, Edinburgh & Dublin Phil. Mag. & J. Sci. 1927. V. 2. № 7. P. 978–992.
13. *Strutt J.W.* The Theory of Sound. Vol. 1. London: Macmillan and Co., 1894.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 6, с. 694–708

УДК 532.51

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

© 2020 г. Ю. Я. Трифонов[1,*]

[1] *Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия*

**e-mail: trifonov@itp.nsc.ru*

Поступила в редакцию 03.07.2020 г.
После доработки 30.09.2020 г.
Принята к публикации 01.10.2020 г.

Рассмотрена линейная и нелинейная устойчивость двухслойного течения Куэтта в горизонтальном канале. На первом этапе были линеаризованы уравнения Навье–Стокса в обеих фазах. Затем решалась спектральная задача и исследовалась динамика периодических возмущений в широком диапазоне изменений объемного содержания жидкостей и скорости верхней пластины. Рассчитаны нейтральные и наиболее быстро растущие возмущения неустойчивой моды. На втором этапе, для полных уравнений Навье–Стокса для обеих жидкостей рассчитывались нелинейные стационарно-бегущие волновые режимы для течения Куэтта в горизонтальном канале. Проведено сопоставление с имеющимися в литературе экспериментальными данными.

Ключевые слова: двухслойное течение Куэтта, нелинейные волны, устойчивость

DOI: 10.31857/S0032823520060107

1. Введение и постановка задачи. В рамках первоначальной постановки задачи анализа линейной устойчивости расслоенного течения Куэтта–Пуазейля в плоском горизонтальном канале [1] (рис. 1) задавались отношение объемных содержаний двух жидкостей h_1/h_2 и число Рейнольдса построенное по скорости межфазной поверхности. Использовались асимптотические методы и рассматривались только длинноволновые возмущения. Анализ был ограничен жидкостями одинаковой плотности. Было показано, что достаточно разницы вязкостей верхней и нижней жидкости ($\mu_1/\mu_2 \neq 1$) для возникновения неустойчивых возмущений при любых числах Рейнольдса. С использованием численных методов для решения задачи Орра–Зоммерфельда, авторами [2, 3] было исследовано поведение как длинных, так и коротких возмущений для течения Пуазейля. Задача многопараметрическая и для получения качественных выводов варьировался параметр h_1/h_2 при различных постоянных значениях других параметров. Например, рассматривались жидкости одинаковой плотности $\rho_1/\rho_2 = 1$ и нулевые значения поверхностного натяжения и силы тяжести. Для нескольких значений отношения вязкостей μ_1/μ_2, на плоскости параметров $(\alpha, h_1/h_2)$ строились нейтральные кривые, α – волновое число возмущения. Затем, например, “включались” сила тяжести или сила поверхностного натяжения. Продемонстрировано существование нескольких областей неустойчивых возмущений, и некоторые из них являются замкнутыми. При больших числах Рейнольдса показано одновременное существование двух мод неустойчивости – “поверхностной” и “сдвиговой” (мода Толмина–Шлихтинга, ведущая к переходу к турбулентности).

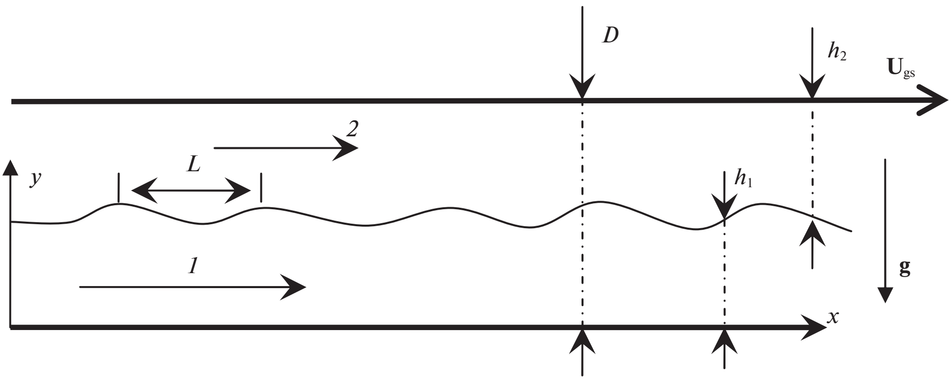


Рис. 1. Расслоенное течение двух жидкостей в горизонтальном канале. Жидкость *1* (нижняя) – вода или водно-глицериновый раствор; жидкость *2* (верхняя) – воздух или минеральное масло. Верхняя плоскость двигается и приводит в движение обе жидкости – течение Куэтта.

Задача Орра–Зоммерфельда для течения Куэтта решалась с использованием аналитических и численных методов. Для случая жидкостей с близкими плотностями, найдены неустойчивые длинноволновые (в сравнении с толщиной жидкого слоя) и коротковолновые возмущения поверхностной моды. Хорошо известно [7, 8], что плоское однослойное течение Куэтта устойчиво относительно линейных периодических возмущений при любых значениях числа Рейнольдса. В случае двухслойного течения Куэтта, сдвиговая мода Толмина–Шлихтинга, ведущая к переходу к турбулентности, также не найдена. Рассматривалось [9–13] поведение возмущений на нелинейной стадии развития. С использованием асимптотического разложения, авторы получили эволюционное уравнение Курамото–Сивашинского для описания динамики малых длинноволновых возмущений поверхности раздела с интегралом для учета воздействия верхней жидкости. Были рассчитаны волновые режимы в малой окрестности кривой нейтральной устойчивости. Исследованию нелинейной стадии развития неустойчивых возмущений в рамках полных уравнений Навье–Стокса посвящено большое число исследовний (см., например, обзоры [13, 14]). Сравнительно недавно [15–17], получен существенный прогресс в этом направлении и рассчитано двухслойное волновое течение в наклонном канале. В частности, рассматривались [15] две “модельные” системы жидкостей с низким и высоким значением отношения ρ_1/ρ_2. Исследовалось [16, 17] течение Пуазейля для воды и воздуха. Обобщение подходов [16, 17] на случай горизонтального двухслойного течения Куэтта является одной из целей настоящей работы. Уравнения [16, 17], и использованная в них система безразмерных величин, не пригодны для горизонтального случая. Расчеты на основе полных уравнений Навье–Стокса особенно актуальны для дальнейшего развития и аппробации упрощенных моделей к описанию волнового двухслойного течения в горизонтальных и наклонных каналах. Единственным экспериментальным исследованием по устойчивости двухслойного течения Куэтта остается в настоящее время [18]. Исследовалось течение в горизонтальном канале глубиной 20 мм и шириной 40 мм. Этот канал замкнут в круг со средним диаметром 400 мм. Верхней жидкостью, увлекаемой в движение вращающейся пластиной, являлось минеральное масло. Нижней жидкостью являлась смесь воды и глицерина в различных пропорциях (четыре варианта). Изучалась динамика границы раздела при различных значениях отношения h_1/h_2 и при изменениях скорости вращения верхней пластины. Расчет динамики линейных и нелинейных возмущений для двухслойного течения жидкостей [18] также одна из основных целей нашей работы. В экспериментах [18] течение Куэтта трехмерное, глубина канала сопоставима с его шириной и присутствовали центробежные силы. В данной статье рассматривается плоский случай. Количественного соответствия с экспериментом ожидать не следует, и сравнение будет носить качественный характер. Будут проанализированы нейтральные кривые и наиболее опасные линейные возмущения, затем рассчитываются стационарно-бегущие волны конечной амплитуды. Рассматривается также течение Куэтта для воды и воздуха, что актуально для задач охлаждения электронных плат и других многочисленных приложений двухслойных течений (см., например, обзоры [19, 20]).

Таким образом, в части задачи о линейной устойчивости, в отличие от предшествующих исследований [1–6], рассмотрены реальные жидкости, использованные в экспериментах [18, 20]. Использование полных уравнений Навье–Стокса для обеих жидкостей является принципиальным отличием от предшествующих исследований [9–13] по описанию нелинейной динамики периодических возмущений в горизонтальном канале. В отличие от [15–17], исследовано течение Куэтта в горизонтальном канале для реальных жидкостей с сопоставимыми значениями вязкости и плотности.

2. Основные уравнения. Совместное волновое течение двух несмешивающихся жидкостей в горизонтальном канале (течение Куэтта, рис. 1) описывается системой уравнений Навье–Стокса с соответствующими граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \tag{2.1}$$

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial \bar{P}}{\partial y}-\frac{3(1-\varepsilon_\rho)\varepsilon_2^3\,\mathrm{R}}{\mathrm{Re}^2}+\frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{2.3}$$

$$v=\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x},\quad y=H(x,t) \tag{2.4}$$

$$u=v=0,\quad y=0 \tag{2.5}$$

$$\left(\sigma_{ik}^{\mathrm{g}}-\sigma_{ik}\right)n_k\tau_i=0\Rightarrow\varepsilon_\mu n\left(\frac{\partial u^{\mathrm{g}}}{\partial y}+\varepsilon^2\frac{\partial v^{\mathrm{g}}}{\partial x}+4\varepsilon^2\frac{\partial v^{\mathrm{g}}}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{1}{1-\varepsilon^2\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2}\right)-$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}-\varepsilon^2\frac{\partial v}{\partial x}-4\varepsilon^2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{1}{1-\varepsilon^2\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2}=0, \tag{2.6}$$

$$y=H(x,t)$$

$$\left(\sigma_{ik}^{\mathrm{g}}-\sigma_{ik}\right)n_kn_i-\frac{\sigma}{\hat{R}}=0\Rightarrow-\varepsilon_\rho n^2\bar{P}^{\mathrm{g}}+\bar{P}-$$

$$-\frac{2\varepsilon}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\varepsilon_\mu n\frac{\partial v^{\mathrm{g}}}{\partial y}\right)\frac{1+\varepsilon^2\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2}{1-\varepsilon^2\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2}+\frac{\mathrm{We}\,\varepsilon_2\varepsilon^2\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}}{\mathrm{Re}^2\left[1+\varepsilon^2\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}=0, \tag{2.7}$$

$$y=H(x,t)$$

$$u=nu^{\mathrm{g}},\quad v=nv^{\mathrm{g}},\quad y=H(x,t) \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{n}\frac{\partial u^{g}}{\partial t}+u^{g}\frac{\partial u^{g}}{\partial x}+v^{g}\frac{\partial u^{g}}{\partial y}=-\frac{\partial \bar{P}^{g}}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_2\,\mathrm{Re}^{g}}\left(\frac{\partial^2 u^{g}}{\partial y^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u^{g}}{\partial x^2}\right) \tag{2.9}$$

$$\varepsilon^2\left(\frac{1}{n}\frac{\partial v^{g}}{\partial t}+u^{g}\frac{\partial v^{g}}{\partial x}+v^{g}\frac{\partial v^{g}}{\partial y}\right)=-\frac{\partial \bar{P}^{g}}{\partial y}+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2\,\mathrm{Re}^{g}}\left(\frac{\partial^2 v^{g}}{\partial y^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 v^{g}}{\partial x^2}\right) \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial u^{g}}{\partial x}+\frac{\partial v^{g}}{\partial y}=0 \tag{2.11}$$

$$u^{g}=U_{gs},\quad v^{g}=0,\quad y=\frac{1}{\varepsilon_2} \tag{2.12}$$

Здесь u, v – компоненты вектора скорости нижней жидкости (далее жидкость *1*) вдоль осей x и y соответственно; u^{g}, v^{g} – компоненты вектора скорости верхней жидкости (далее жидкость *2* или “газовая” фаза) вдоль осей x и y соответственно; P и P^{g} – давление в жидкости и газе; σ_{ik} и σ_{ik}^{g} – компоненты тензора напряжений в жидкой и газовой фазах; n_k и τ_i – компоненты нормального и касательного векторов к волновой границе раздела $H(x,t)$; $\hat{R}$ – радиус кривизны.

Уравнения (2.1)–(2.4) представляют собой законы сохранения импульса и массы для жидкости, а также кинематическое условие на границе раздела, уравнение (2.5) – условие прилипания на стенке, уравнения (2.6)–(2.7) – условия равенства касательных и нормальных сил на поверхности раздела, уравнение (2.8) – условие прилипания на поверхности раздела. Уравнения (2.9), (2.10) представляют собой закон сохранения импульса для газовой фазы, уравнение (2.11) – закон сохранения массы и уравнение (2.12) является условием прилипания на верхней стенке канала для газовой фазы в случае плоского течения Куэтта для двух несмешивающихся жидкостей.

Уравнения (2.1)–(2.12) записаны в безразмерном виде. Безразмерные величины связаны с соответствующими размерными величинами (символы со звездочками) следующим образом:

$$x=\frac{x^*}{L},\quad t=\frac{u_0t^*}{L},\quad y=\frac{y^*}{H_0},\quad u=\frac{u^*}{u_0},\quad v=\frac{v^*}{\varepsilon u_0},\quad \bar{P}=\frac{\bar{P}^*}{\rho {u_0}^2},\quad H=\frac{H^*}{H_0}$$

$$u^{g}=\frac{(u^{g})^*}{u_0^{g}},\quad v^{g}=\frac{(v^{g})^*}{\varepsilon u_0^{g}},\quad \bar{P}^{g}=\frac{(\bar{P}^{g})^*}{\rho_g(u_0^{g})^2},\quad \varepsilon=\frac{H_0}{L},\quad \varepsilon_2=\frac{H_0}{D},\quad \varepsilon_\mu=\frac{\mu_g}{\mu}$$

$$\varepsilon_\rho=\frac{\rho_g}{\rho},\quad \mathrm{Re}=\frac{u_0H_0}{\nu},\quad \mathrm{Re}^{g}=\frac{u_0^{g}D}{\nu_g},\quad \mathrm{n}=\frac{u_0^{g}}{u_0}=\frac{\varepsilon_2\varepsilon_\mu\,\mathrm{Re}^{g}}{\varepsilon_\rho\,\mathrm{Re}},\quad \mathrm{R}=\frac{gD^3}{3\nu^2},\quad \mathrm{We}=\frac{\sigma D}{\rho\nu^2}$$

Здесь ν, μ – кинематическая и динамическая вязкости жидкости; ρ – плотность жидкости; σ – поверхностное натяжение; D – высота канала; аналогично для газовой фазы ν_g, μ_g – кинематическая и динамическая вязкости; ρ_g – плотность; Re^{g} число Рейнольдса для газа. В качестве масштаба скорости u_0^{g} и u_0 будем использовать скорость верхней пластины U_{gs} (значение n в этом случае равно единице). В качестве масштаба вдоль оси x используется длина волны рассматриваемых возмущений L. В качестве масштаба H_0 вдоль оси y выбираем высоту нижнего слоя жидкости в канале, $H_0=h_1$. Отметим, что исходные давления в уравнениях (2.1)–(2.12) преобразованы и исключена гравитация в уравнениях для газовой фазы:

$$P^*=\bar{P}^*-\rho_g g y^*;\quad (P^{g})^*=(\bar{P}^{g})^*-\rho_g g y^*$$

Для дальнейших расчетов делается преобразование координат $\eta = y/H(x,t)$ для уравнений в жидкой фазе и $\tilde{\eta} = (1-\varepsilon_2 y)/(1-\varepsilon_2 H(x,t))$ для уравнений в газовой фазе. Область течения в новых переменных становится известной: $\eta \in [0,1]$, $\tilde{\eta} \in [0,1]$. В целях экономии места уравнения (2.1)–(2.12) в переменных $(\eta, \tilde{\eta})$ здесь не приводятся. Детали этого преобразования можно найти в [17].

В данной работе рассматриваются линейная и нелинейная устойчивость стационарных решений $[u_b(\eta),\ \overline{\mathrm{P}}_b(\eta),\ u_b^{\mathrm{g}}(\tilde{\eta}),\ \overline{\mathrm{P}}_b^{\mathrm{g}}(\tilde{\eta}),\ H_b]$ системы уравнений (2.1)–(2.12), соответствующих безволновому течению жидкости и газа (в этом случае значение $\varepsilon = 1$):

$$u_b(x,\eta) = \beta_1\eta, \quad v_b(x,\eta) = 0, \quad H_b = 1, \quad \overline{P}_b(\eta) = -\frac{3(1-\varepsilon_\rho)R\varepsilon_2^3(\eta-1)}{\mathrm{Re}^2}$$

$$\overline{P}_b^{\mathrm{g}}(\tilde{\eta}) = 0, \quad u_b^{\mathrm{g}}(x,\tilde{\eta}) = C_1\tilde{\eta} + 1, \quad v_b^{\mathrm{g}}(x,\tilde{\eta}) = 0 \tag{2.13}$$

$$\beta_1 = \varepsilon_\mu\varepsilon_2/(1-\varepsilon_2(1-\varepsilon_\mu)), \quad C_1 = \beta_1 - 1$$

После подстановки

$$H = H_b + \hat{H}\exp(-\lambda t)\exp(2\pi i x) + \text{к.с.}, \quad u = u_b(\eta) + \hat{u}(\eta)\exp(-\lambda t)\exp(2\pi i x) + \text{к.с.}$$

$$v = \hat{v}(\eta)\exp(-\lambda t)\exp(2\pi i x) + \text{к.с.}, \quad \overline{P} = \overline{P}_b(x,\eta) + \hat{P}(\eta)\exp(-\lambda t)\exp(2\pi i x) + \text{к.с.}$$

$$u^{\mathrm{g}} = u_b^{\mathrm{g}}(\tilde{\eta}) + \hat{u}^{\mathrm{g}}(\tilde{\eta})\exp(-\lambda t)\exp(2\pi i x) + \text{к.с.}, \quad v^{\mathrm{g}} = \hat{v}^{\mathrm{g}}(\tilde{\eta})\exp(-\lambda t)\exp(2\pi i x) + \text{к.с.}$$

$$\overline{P}^{\mathrm{g}} = \overline{P}_b^{\mathrm{g}}(x,\tilde{\eta}) + \hat{P}^{\mathrm{g}}(\tilde{\eta})\exp(-\lambda t)\exp(2\pi i x) + \text{к.с.}$$

(к.с. – комплексно-сопряженная величина) в уравнения (2.1)–(2.12), полученные уравнения линеаризуются в окрестности стационарного решения. В результате, для решения задачи линейной устойчивости стационарного режима, получаем систему уравнений для нахождения спектра собственных значений. В целях экономии места, эти уравнения не приводятся. Отметим, что они близки к соответствующим уравнениям [17]. Для аппроксимации полей скорости $[\hat{u}(\eta),\ \hat{v}(\eta)]$ и $[\hat{u}^{\mathrm{g}}(\tilde{\eta}),\ \hat{v}^{\mathrm{g}}(\tilde{\eta})]$ использовались полиномы Чебышёва $T_m(\eta_1)$, $\tilde{\eta}_1 = 2\tilde{\eta} - 1$, $\eta_1 = 2\eta - 1$ и $T_m(\tilde{\eta}_1)$, соответственно:

$$\hat{u}(\eta) = \frac{1}{2}\hat{U}_1 + \sum_{m=2}^{M}\hat{U}_m T_{m-1}(\eta_1), \quad \hat{v}(\eta) = \frac{1}{2}\hat{V}_1 + \sum_{m=2}^{M}\hat{V}_m T_{m-1}(\eta_1)$$

$$\hat{u}^{\mathrm{g}}(\tilde{\eta}) = \frac{1}{2}(\hat{U}^{\mathrm{g}})_1 + \sum_{m=2}^{M^{\mathrm{g}}}(\hat{U}^{\mathrm{g}})_m T_{m-1}(\tilde{\eta}_1), \quad \hat{v}^{\mathrm{g}}(\tilde{\eta}) = \frac{1}{2}(\hat{V}^{\mathrm{g}})_1 + \sum_{m=2}^{M^{\mathrm{g}}}(\hat{V}^{\mathrm{g}})_m T_{m-1}(\tilde{\eta}_1)$$

В результате задача сводится к обобщенной задаче на собственные значения для комплексных матриц общего вида:

$$A\hat{x} = \lambda B\hat{x}, \quad \hat{x} = \left(\hat{H}, \hat{P}^{\mathrm{g}}\Big|_{\tilde{\eta}=1}, \hat{U}_m, \hat{V}_m, (\hat{U}^{\mathrm{g}})_m, (\hat{V}^{\mathrm{g}})_m\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.14}$$

Матрицы A и B имеют размерность $2(M + M^{\mathrm{g}} + 1)$, их элементы определяются численно путем перебора единичных векторов возмущений [17].

Для получения ответа на вопрос об устойчивости стационарного решения $[u_b(\eta),\ \overline{P}_b(\eta),\ u_b^{\mathrm{g}}(\tilde{\eta}),\ \overline{P}_b^{\mathrm{g}}(\tilde{\eta}),\ H_b]$ необходимо проанализировать $2(M + M^{\mathrm{g}} + 1)$ собственных чисел задачи (2.14), варьируя волновое число возмущений $\alpha = 2\pi\varepsilon$. Решение устойчиво, если вещественные части всех собственных значений больше или равны нулю при всех положительных значениях волнового числа. Возмущение является нейтральным, если вещественная часть соответствующего ему собственного значения равна нулю – $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$. В этом случае фазовая скорость возмущения $c_{\mathrm{neut}} \equiv \mathrm{Im}(\lambda)/\alpha$.

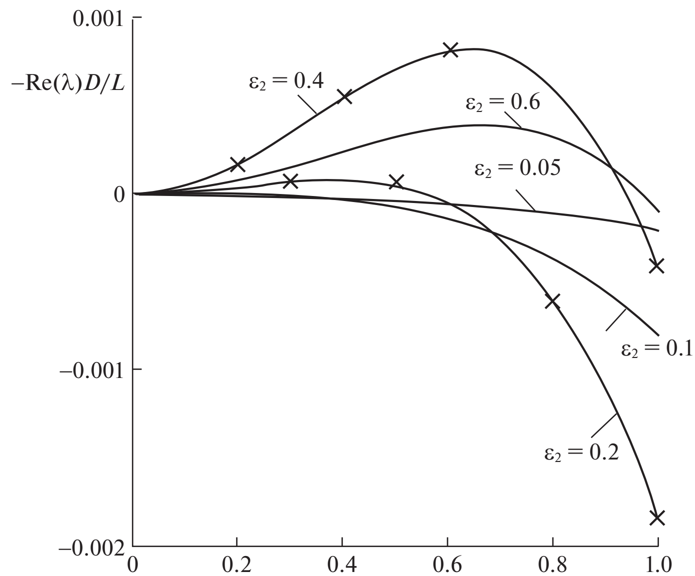


Рис. 2. Инкремент роста линейных возмущений (сплошные линии) в зависимости от длины волны при различных толщинах нижнего слоя $\varepsilon_2 = h_1/D = l_1$. Сопоставление с расчетам работы [4] (обозначены ×). Здесь $\varepsilon_\rho = 1/\rho$, $\varepsilon_\mu = 1/m$, $\mathrm{R} = (\mathrm{Re}_1)^2/(3\mathrm{F}^2)$, $\mathrm{We} = \mathrm{T}\,\mathrm{Re}_1/m$ и значения параметров l_1, $r = 0.95$, $m = 100$, $\mathrm{Re}_1 = 10$, $\mathrm{F}^2 = 0.1$, $\mathrm{T} = 0.1$ соответствуют [4].

В задаче (2.14) имеется семь независимых параметров. Четыре параметра ε, h_2/h_1, ε_μ, ε_ρ, R, We, Re^g, R, We, ε_μ, ε_ρ зависят только от физических свойств газа и жидкости и от размера канала. Отметим, что в случае $\sigma \neq 0$ и $g \neq 0$, вместо параметров R и We можно использовать число Капицы $\mathrm{Fi} \equiv (\sigma/\rho)^3/(g\nu^4)$ и отношение капиллярной постоянной к высоте канала, как это делалось ранее [17] – $\mathrm{R} \equiv (1/3)\,\mathrm{Fi}^{1/2}\left(D/\sqrt{\sigma\,/\,(\rho g)}\right)^3$, $\mathrm{We} \equiv \mathrm{Fi}^{1/2}\left(D/\sqrt{\sigma/(\rho g)}\right)$.

Для тестирования алгоритма решения задачи (2.14), были воспроизведены полученные ранее [4] зависимости инкремента роста линейных возмущений от волнового числа при различных толщинах нижнего слоя жидкости $\varepsilon_2 = h_1/D$, $h_2/h_1 = (1-\varepsilon_2)/\varepsilon_2$. Рис. 2 демонстрирует сравнение наших расчетов (сплошные линии) и результатов [4] (символы) для одних и тех же параметров, пересчет которых друг в друга показан в подписи к рисунку 2. Ранее [4] использовались параметры α, $l_1 = \varepsilon_2$, $r0$, m, $\mathrm{Re}_1 = U_{\mathrm{gs}}D/\nu_1$; $\mathrm{F}^2 = U_{\mathrm{gs}}^2/(gD)$ и $\mathrm{T} = \sigma/(\mu_2 U_{\mathrm{gs}})$.

Расчет нелинейных стационарно-бегущих режимов $[u(\xi,\eta)$, $\bar{P}(\xi,\eta)$, $u^{\mathrm{g}}(\xi,\tilde{\eta})$, $\bar{P}^{\mathrm{g}}(\xi,\tilde{\eta})$, $H(\xi)]$ уравнений (2.1)–(2.12) аналогичен алгоритму [17]. Здесь $\xi = x - ct$, c – фазовая скорость. Ограничимся изложением основных моментов этого расчета. Для аппроксимации периодических по координате ξ решений использовались полиномы Чебышёва и разложение в ряд Фурье:

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{2}U_1(\xi) + \sum_{m=2}^{M} U_m(\xi)T_{m-1}(\eta_1)$$

$$U_m(\xi) = U_m^0 + \sum_{\substack{k=-N/2+1\\k\neq 0}}^{N/2-1} U_m^k \exp(2\pi i k\xi), \quad (U_m^{-k})^* = U_m^k, \quad m = 1,\ldots, M$$

$$u^{\mathrm{g}}(\xi,\tilde{\eta}) = \frac{1}{2}(U^{\mathrm{g}})_1(\xi) + \sum_{m=2}^{M^{\mathrm{g}}} (U^{\mathrm{g}})_m(\xi) T_{m-1}(\tilde{\eta}_1)$$

$$(U^{\mathrm{g}})_m(\xi) = (U^{\mathrm{g}})_m^0 + \sum_{\substack{k=-N/2+1\\k\neq 0}}^{N/2-1} (U^{\mathrm{g}})_m^k \exp(2\pi i k\xi), \quad ((U^{\mathrm{g}})_m^{-k})^* = (U^{\mathrm{g}})_m^k$$

$$H(\xi) = H^0 + \sum_{\substack{k=-N/2+1\\k\neq 0}}^{N/2-1} H^k \exp(2\pi i k\xi), \quad (H^{-k})^* = H^k$$

$$\bar{P}^{\mathrm{g}}(\xi,\tilde{\eta})\Big|_{\tilde{\eta}=1} = \sum_{\substack{k=-N/2+1\\k\neq 0}}^{N/2-1} (\bar{P}^{\mathrm{g}})^k \exp(2\pi i k\xi), \quad ((\bar{P}^{\mathrm{g}})^{-k})^* = (\bar{P}^{\mathrm{g}})^k, \quad (\bar{P}^{\mathrm{g}})^0 \equiv 0$$

Здесь “звездочка” обозначает комплексное сопряжение. Численный алгоритм стартует с задания начального приближения для гармоник U_m^k, H^k, $(U^{\mathrm{g}})_m^k$, $(\bar{P}^{\mathrm{g}})^k$ и для величины **c**. В выборе начала отсчета координты x имеется произвол. Как следствие, фазу одной из гармоник можно считать заранее известной (например, $\mathrm{Re}(H^1) = 0$). Это дает уравнение для определения фазовой скорости **c**. При заданных $(M + M^{\mathrm{g}} + 2)(N - 1)$ значениях гармоник U_m^k, $(U^{\mathrm{g}})_m^k$, $(\bar{P}^{\mathrm{g}})^k$, c, H^k, поля скоростей $v(\xi,\eta)$, $v^{\mathrm{g}}(\xi,\tilde{\eta})$ и давлений $\bar{P}(\xi,\eta)$, $\bar{P}^{\mathrm{g}}(\xi,\tilde{\eta})$ однозначно определяются из уравнений (2.1–2.12). Далее рассчитывается невязка уравнений. Для улучшения начального приближения неизвестных (U_m^k, H^k, $(U^{\mathrm{g}})_m^k$, $(\bar{P}^{\mathrm{g}})^k$, c) далее используется итерационный метод Ньютона.

3. Результаты расчетов. Задача является многопараметрической, и расчеты проведены для жидкостей, физические свойства которых приведены в таблице 1. Рассмотрены два значения высоты канала $D = 20$ и 5 мм. В расчетах варьировались скорость верхней пластины, длина волны возмущений и значение отношения h_2/h_1. В качестве верхней жидкости выступало минеральное масло (жидкость *2* в таблице 1) или воздух (жидкость *2*а в таблице 1). Минеральное масло увлекало собой водоглицериновый раствор (жидкости *1*а–*1*г в таблице 1), а воздух – воду (жидкость *1*д в таблице 1). На первом этапе, при различных значениях скорости $0 < U_{\mathrm{gs}} < 10$ м/с и для значений $h_2/h_1 \in [0.1, 10]$, рассчитывается общее количество неустойчивых мод в задаче (2.14). Длина волны возмущений менялась с малым шагом в широком диапазоне $2\pi D/L \in [0.005, 100]$, и рассчитывался спектр собственных значений задачи (2.14). На втором этапе рассчитываются нейтральные кривые и анализировали наиболее опасные возмущения. Затем были рассчитаны нелинейные волны с длиной волны соответствующей длине волны наиболее опасных линейных возмущений. Результаты представлены на рисунках 3–7.

Для всех рассмотренных нами комбинаций жидкостей в исследованном диапазоне параметров найдена только одна неустойчивая мода – “поверхностная”. В спектре собственных значений задачи (2.14), для любого фиксированного набора параметров $(\varepsilon, U_{\mathrm{gs}}, h_2/h_1)$ из исследованного диапазона, присутствует только одно отрицательное собственное значение, либо ни одного. На рис. 3, для течения жидкостей (*2* и *1*в) из таблицы 1, представлены рассчитанные нейтральные кривые $\alpha(U_{\mathrm{gs}})$ при различных

Таблица 1. Физические свойства жидкостей, использованные в расчетах

Жидкость	Обзнч.	μ (Па с)	ν ($м^2$/с) $\times 10^5$	ρ (кг/$м^3$)	σ (Па м)	$\varepsilon_\mu = \mu_2/\mu_1$	$\varepsilon_\rho = \rho_2/\rho_1$
Минеральное масло	*2*	0.0297	3.51	846	–	–	–
Вода + Глицерин 15% + 85%	*1*а	0.111	9.2	1214	0.030	0.268	0.697
Вода + Глицерин 32% + 68%	*1*б	0.0191	1.63	1169	0.030	1.55	0.724
Вода + Глицерин 37% + 63%	*1*в	0.0121	1.05	1155	0.030	2.45	0.732
Вода + Глицерин 42% + 58%	*1*г	0.0108	0.95	1142	0.030	2.76	0.741
Воздух	*2*а	1.82×10^{-5}	1.52	1.2	–	–	–
Вода	*1*д	0.001	0.10	1000	0.075	0.0182	0.0012

значениях параметра h_2/h_1. Здесь $\alpha = 2\pi D/L$ – безразмерное волновое число. При малых значениях параметра h_2/h_1, существует только одна область неустойчивых возмущений (см., например, рис. 3 при $h_2/h_1 = 0.1$). Длинноволновые возмущения неустойчивы при таких значениях h_2/h_1, начиная с небольших скоростей верхней пластины. С увеличением параметра h_2/h_1, эта область неустойчивости уменьшается и смещается в сторону еще более длинных возмущений. Например, длина волны нейтрального воз-

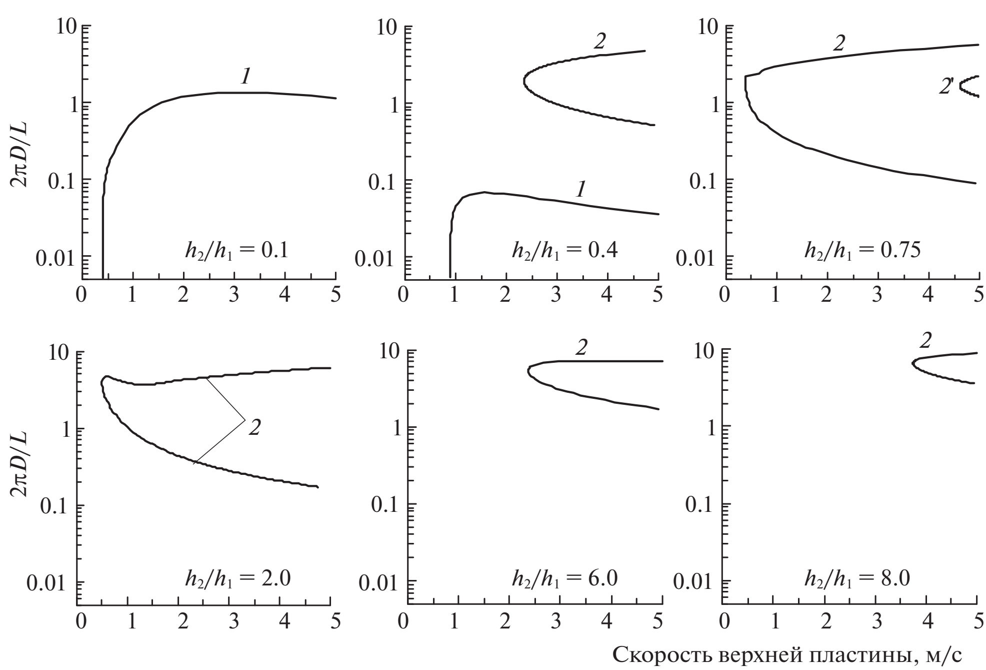


Рис. 3. Волновые числа нейтральных возмущений в зависимости от скорости верхней пластины. Совместное течение (*2*а–*1*в) минерального масла и водно-глицеринового раствора (37% и 63%) в канале $D = 20$ мм. Линии *1*, *2* и *2'* ограничивают области неустойчивых возмущений.

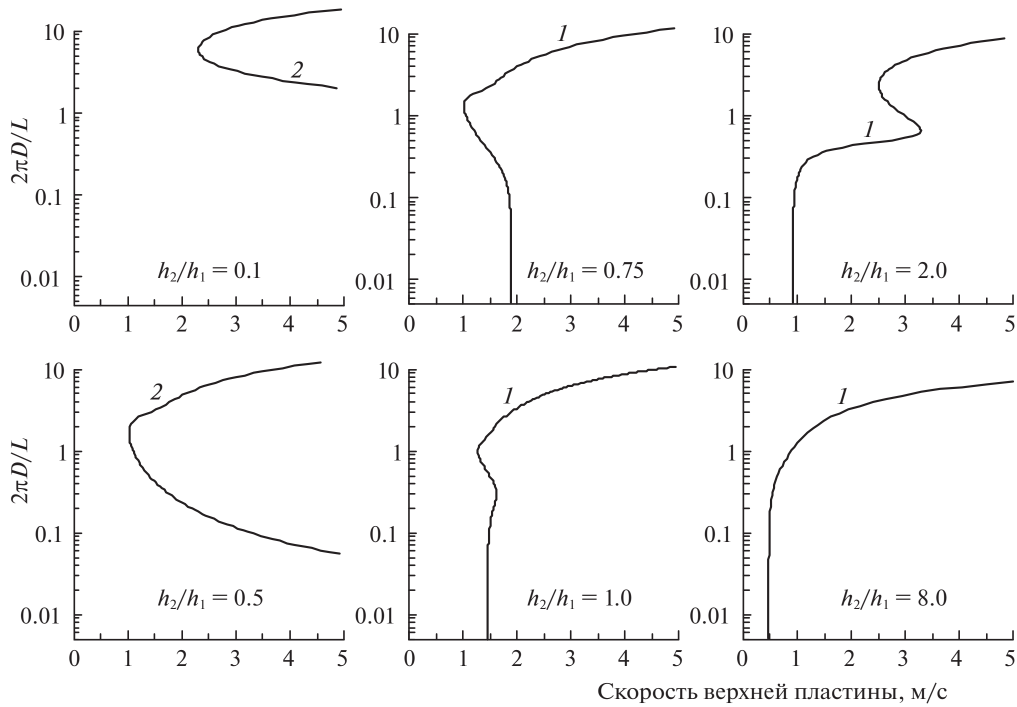


Рис. 4. Волновые числа нейтральных возмущений в зависимости от скорости верхней пластины. Совместное течение (*2*а–*1*а) минерального масла и водно-глицеринового раствора (15% и 85%) в канале $D = 20$ мм. Линии *1* и *2* ограничивают области неустойчивых возмущений.

мущения в этой зоне более чем в семьдесят раз превышает размер канала D при $h_2/h_1 = 0.4$ на рис. 3. При дальнейшем увеличении параметра h_2/h_1 область длинноволновых неустойчивых возмущений исчезает. Начиная с определенных значений параметра h_2/h_1, появляется вторая область неустойчивости, ограниченная линией *2* или линиями *2* и *2'* на рис. 3. На верхней границе второй области, длина волны нейтрального возмущения сопоставима с высотой канала и, условно, далее будем называть эту область неустойчивых возмущений коротковолновой. При дальнейшем увеличении параметра h_2/h_1, область коротковолновых неустойчивых возмущений расширяется в зоне больших значений скорости верхней пластины (см. рис. 3). "Носик" коротковолновой области неустойчивых возмущений смещается в сторону меньших значений скорости верхней пластины. Для значений $h_2/h_1 \geq 2$ область коротковолновых неустойчивых возмущений начинает уменьшаться и исчезает при $h_2/h_1 \approx 10$ для течения жидкостей (*2* и *1*в) из таблицы 1.

Были рассчитаны, также, нейтральные кривые для течения жидкостей (*2* и *1*б) и (*2* и *1*г) из таблицы 1. При значениях $0.1 \leq h_2/h_1 < (h_2/h_1)^*$ имеется область длинноволновых неустойчивых возмущений. При значениях $(h_2/h_1)_* \leq h_2/h_1 < (h_2/h_1)_{**} < 10$, имеется область "коротковолновых" неустойчивых возмущений. Качественно, эти зоны неустойчивых возмущений трансформируются аналогично рис. 3 и соответствующие фигуры здесь не представлены. Количественно, критические значения $(h_2/h_1)^*$, $(h_2/h_1)_*$, $(h_2/h_1)_{**}$ зависят от свойств жидкости. Можно отметить, что для рассмотрен-

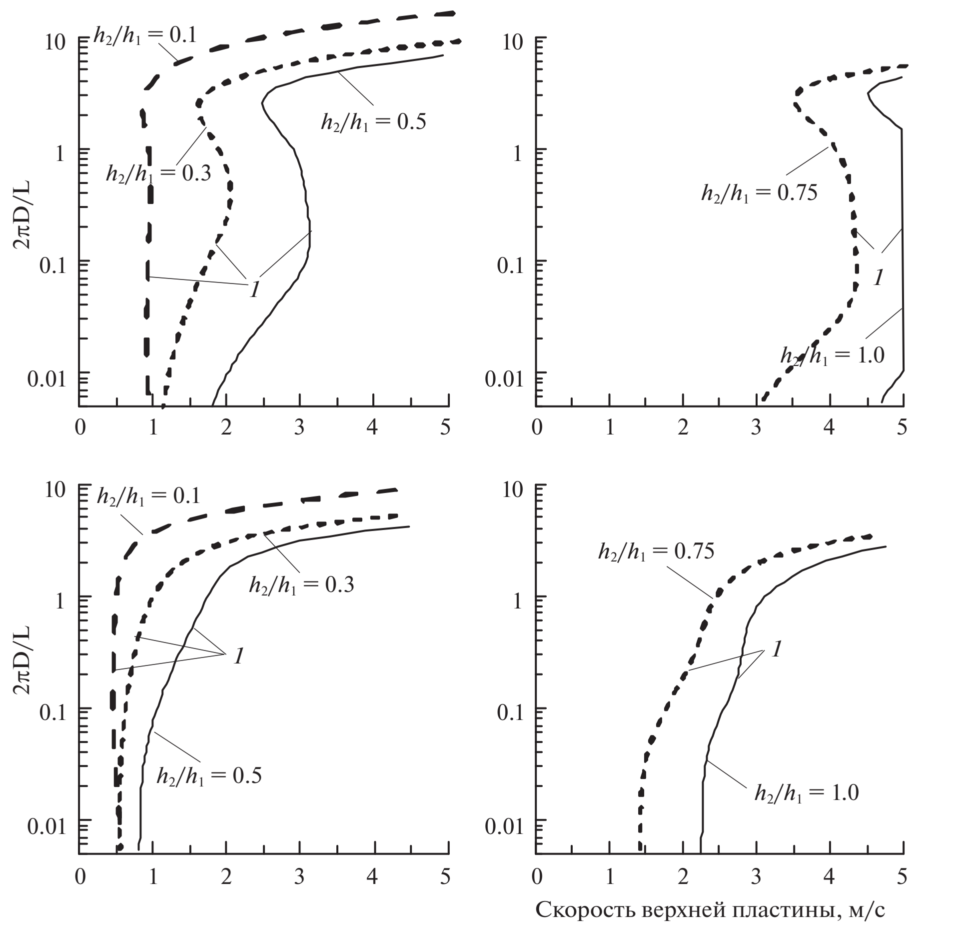


Рис. 5. Волновые числа нейтральных возмущений в зависимости от скорости верхней пластины. Совместное течение (*2*а–*1*д) воздуха и воды в канале D = 20 мм (верхние рисунки) и D = 5 мм (нижние рисунки). Линии *1* ограничивают области неустойчивых возмущений.

ных нами трех комбинаций жидкостей, эти критические значения подчинялись следующей последовательности: $(h_2/h_1)_* < (h_2/h_1)^* < (h_2/h_1)_{**}$.

Для течения жидкостей (*2* и *1*а) из таблицы 1, нейтральные кривые, рассчитанные при различных значениях параметра h_2/h_1, представлены на рис. 4. Видно ряд качественных отличий от результатов для течения жидкостей (*2*, *1*б), (*2*, *1*в) и (*2*, *1*г) (см. рис. 3). При малых значениях параметра h_2/h_1 неустойчивыми являются “коротковолновые возмущения”. С ростом параметра h_2/h_1, эта область трансформируется и при значениях $h_2/h_1 \geq 1$ (см. рис. 4) как коротковолновые, так и длинноволновые возмущения становятся неустойчивыми. Из таблицы 1 следует, что эта качественная особенность связана с величиной параметра ε_μ. В отличие от течения жидкостей (*2*, *1*б), (*2*, *1*в) и (*2*, *1*г), значение этого параметра меньше единицы для жидкостей (*2*, *1*а) и верхняя жидкость является менее вязкой. На рис. 5 представлены нейтральные кривые для течения жидкостей (*2*а, *1*д) – воздух и вода. Здесь величина параметра ε_μ мно-

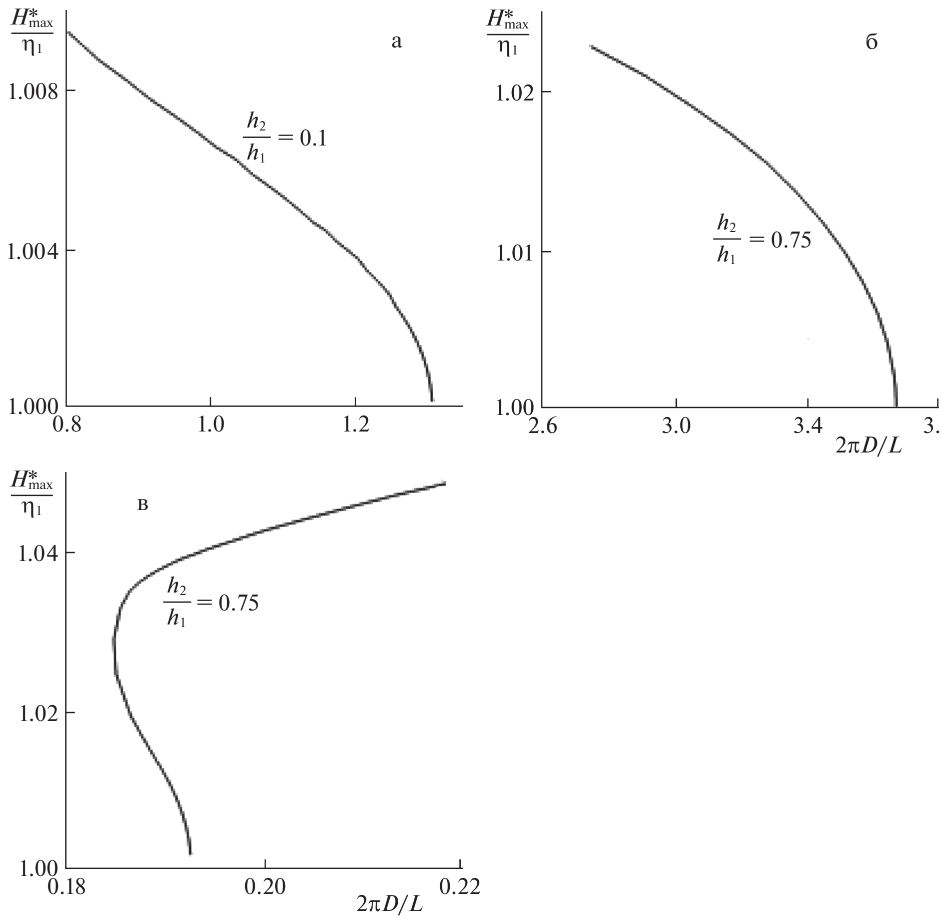


Рис. 6. Ветвление нелинейных режимов от различных линий нейтральной устойчивости при $U_{gs} = 2.0$ м/с (см. рис. 3). Совместное течение (*2*а–*1*в) минерального масла и водно-глицеринового раствора (37% и 63%) в канале $D = 20$ мм. Здесь H^*_{max} – размерная максимальная толщина волнового профиля границы раздела. Рисунок 6(а) соответствует ветвлению от границы области неустойчивых длинноволновых возмущений при $h_2/h_1 = 0.1$; рис. 6 б и в – от верхней и нижней границ области неустойчивых "коротковолновых" возмущений, соответственно, при $h_2/h_1 = 0.75$.

го меньше единицы и верхняя жидкость значительно менее вязкая, чем нижняя жидкость. Далее представлены расчеты для двух значений высоты канала $D = 20$ и 5 мм. Область неустойчивых возмущений существенно сужается с ростом параметра h_2/h_1 и смещается в область больших значений скорости верхней пластины U_{gs}. Отметим, что с уменьшением высоты канала, при одинаковых значениях параметра h_2/h_1, неустойчивость наступает при меньших значениях скорости верхней пластины.

В области неустойчивости, зависимость инкремента $\mathrm{Re}(-\lambda)$ от волнового числа демонстрирует экстремум. Существуют наиболее быстро растущие возмущения, и они являются наиболее "опасными".

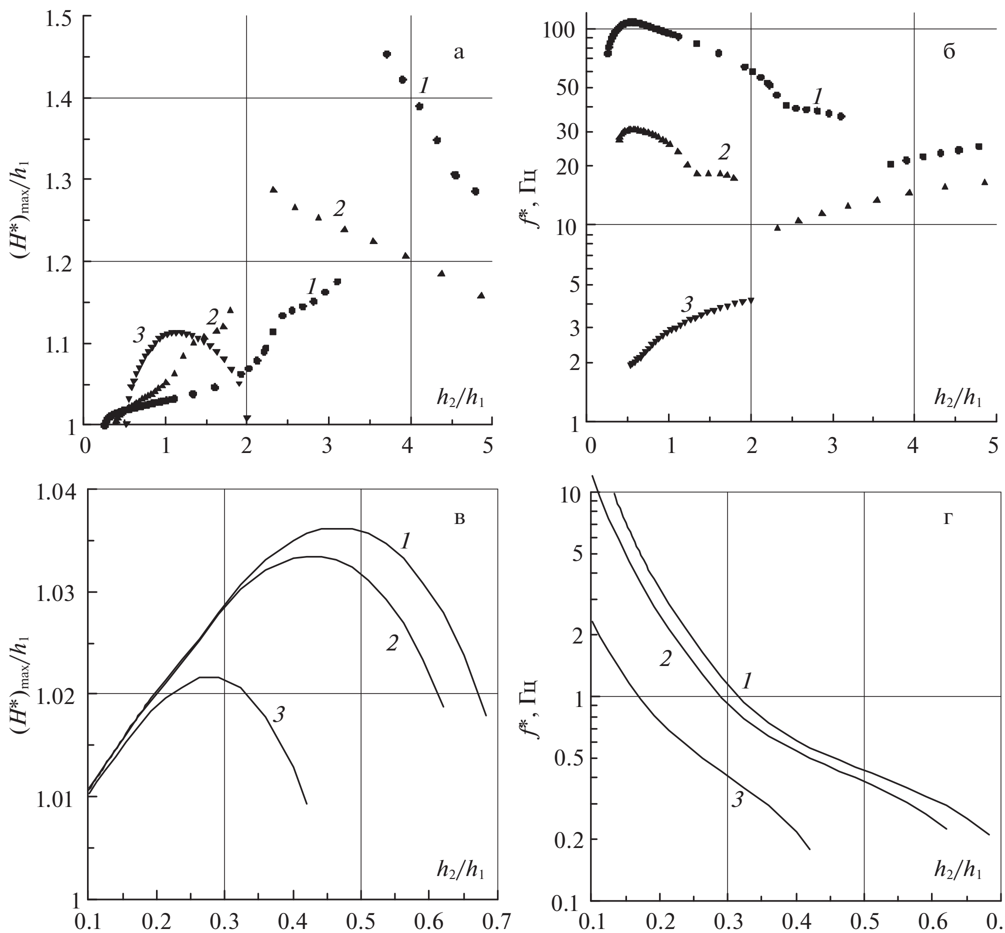


Рис. 7. Зависимость максимальной толщины и частоты для нелинейных волн в зависимости от отношения толщины верхнего и нижнего слоев h_2/h_1. Совместное течение (*2*а–*1*в) минерального масла и водно-глицеринового раствора (37% и 63%) в канале D = 20 мм. Длина волны нелинейных режимов соответствует длине волны линейных возмущений максимального роста. Рис. 7а, б –“коротковолновая” область. Рис. 7в, г – длинноволновая область. Линии *1–3* соответствуют различным значениям скорости верхней пластины: *1* – U_{gs} = 5.0; *2* – 2.5; *3* – 0.5 (рис. 7а, б) и 1.0 (рис. 7в, г), м/с.

Характер ветвления нелинейных режимов вдоль различных линий нейтральной устойчивости показан на рис. 6. Области неустойчивых линейных возмущений для этого течения показаны на рис. 3. Ветвление от нейтральной кривой длинноволновой (рис. 6а) и от верхней границы коротковолновой (рис. 6б) областей неустойчивости носит мягкий характер. Рис. 6в соответствует ветвлению от нижней границы области неустойчивых “коротковолновых” возмущений и имеет жесткий характер.

На рис. 7 приведены зависимости максимальной толщины и частоты нелинейных волн в зависимости от отношения h_2/h_1 для трех значений скорости верхней пластины. Длина волны нелинейных режимов соответствует длине волны линейных возмущений максимального роста. Как в коротковолновой, так и в длинноволновой области неустойчивых возмущений (см. рис. 3) существует своя линейная волна максимального роста. Рис. 7а, б соответствуют нелинейным волнам в "коротковолновой" области; рис. 7в, г – нелинейным волнам в длинноволновой области. Отметим, что в коротковолновой области обнаружен разрыв в зависимостях основных характеристик нелинейных волн (см. линии *2*, *3* рис. 7а, б), что свидетельствует о неединственности решений в этой области параметров.

Заключение. Исследована устойчивость двухслойного течения Куэтта в горизонтальном канале. Рассмотрено течение минерального масла и водно-глицеринового раствора (четыре комбинации), а также течение воздуха с водой. В исследованном диапазоне параметров найдена только одна неустойчивая мода – "поверхностная". Проанализированы нейтральные кривые и наиболее опасные линейные возмущения этой моды. Показано, что при малых скоростях верхней пластины U_{gs} течение устойчиво для всех рассмотренных жидкостей и значений параметра h_2/h_1. При увеличении скорости верхней пластины, появляются области неустойчивых возмущений. Трансформация этих областей с изменением U_{gs} определяется величиной отношения h_2/h_1, которая по данным расчетов качественно различна для течений с $\varepsilon_\mu > 1$ и $\varepsilon_\mu < 1$. В согласие с экспериментами [18], для жидкостей с $\varepsilon_\mu > 1$ первыми проявляют себя длинноволновые возмущения (см. рис. 3). Их длина волны в области возникновения намного превосходит размер канала. Амплитуда и частота этих волн, показанные на рис. 7в, г, неплохо согласуются с измеренными [18] характеристиками волн – низкая частота 0.1–0.3 Гц и амплитуда в несколько десятых миллиметра. В экспериментах [18] найден, также, второй тип волн – коротковолновые режимы. В области их возникновения (малые значения U_{gs}), длина волны примерно равна 40 мм и сопоставима с высотой канала. Измеренная частота равнялась 7 Гц. Эти режимы хорошо соответствуют расчетным решениям в окрестности носика коротковолновой области неустойчивости (см. рис. 3 и 7а, б). В расчетах (см. рис. 6), ветвление нелинейных режимов происходит как в мягком, так и в жестком режимах, что хорошо согласуется с экспериментами [18].

Для жидкостей с $\varepsilon_\mu < 1$, первыми проявляют себя "коротковолновые" возмущения (см. рис. 4). С увеличением параметра h_2/h_1, область неустойчивости существенно расширяется и захватывает длинноволновую часть спектра возмущений.

Для системы воздух–вода ($\varepsilon_\mu \ll 1$), начиная с самых малых значений параметра h_2/h_1, область неустойчивых возмущений простирается в широком диапазоне по длинам волн.

Работа выполнена при поддержки гранта РНФ_16-19-10449.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yih C.S.* Instability due to viscosity stratification // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. P. 337–352.
2. *Yiantsios S.G., Higgins B.G.* Numerical solution of eigenvalue problems using the compound matrix method // J. Comput.Phys. Phys. 1988. V. 74. P. 25–40.
3. *Yiantsios S.G., Higgins B.G.* Linear stability of plane Poiseuille flow of two superposed fluids // Phys. Fluids. 1988. V. 31. P. 3225–3238.
4. *Renardy Yu.* Instability at the interface between two shearing fluids in a channel // Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 12. P. 3441–3443.
5. *Renardy Y.Y.* The thin layer effect and interfacial stability in a two-layer Couette flow with similar liquids // Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 1627.
6. *Hooper A.P.* The stability of two superposed viscous fluids in a channel // Phys. Fluids. 1989. V. 28. P. 1613.
7. *Штерн В.Н.* Устойчивость плоского течения Куэтта // ПМТФ. 1969. № 5. С. 117–119.
8. *Романов В.А.* Устойчивость плоскопараллельного течения Куэтта // Функц. анализ и его прил. 1973. Т. 7. Вып. 2. С. 62–73.

9. *Shlang T., Sivashinski G.I., Babchin A.J., Frankel A.L.* Irregular wavy flow due to viscous stratification // J . Phys. Paris. 1985. V. 46. P. 863.
10. *Hooper A.P., Grimshaw R.* Nonlinear instability at the interface between two viscous fluids // Phys. Fluids. 1985. V. 28. P. 37.
11. *Papageorgiou D.T., Maldarelli C., Rumschitzki D.S.* Nonlinear interfacial stability of core-annular flows // Phys. Fluids A. 1990. V. 2. P. 340.
12. *Цвелодуб О.Ю., Архипов Д.Г.* Моделирование нелинейных волн на поверхности тонкой пленки жидкости, движущейся под действием турбулентного потока газа // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 4. С. 56–67.
13. *Хабахпашев Г.А.* Моделирование нелинейной динамики поверхностных и внутренних волн в однородных и двухслойных жидкостях // Дисс. на соискание уч. ст. доктора физ.-мат. наук, Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе, Новосибирск, 2006.
14. *Schmid P.J., Henningson D.S.* Stability and Transition in Shear Flows. Applied Mathematical Sciences. Vol. 142. New York: Springer, 2001.
15. *Schmidt P., O'Naraigh L., Lucquiaud M., Valluri P.* Linear and nonlinear instability in vertical counter-current laminar gas-liquid flows // Phys. Fluids. 2016. V. 28. P. 042102.
16. *Trifonov Y.Y.* Instabilities of a gas-liquid flow between two inclined plates analyzed using the Navier–Stokes equations // Int. J. Multiphase Flow. 2017. V. 95. P. 144–154.
17. *Trifonov Y.Y.* Linear and nonlinear instabilities of a co-current gas-liquid flow between two inclined plates analyzed using the Navier–Stokes equations // Int. J. Multiphase Flow. 2020. V. 122. P. 103159.
18. *Barthelet P., Charru F., Fabre J.* Experimental study of interfacial long waves in a two-layer shear flow// J. Fluid Mech. 1995. V. 303. P. 23–53.
19. *Weinstein S.J., Ruschak K. J.* Coating flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 2004. V. 36. P. 29–53.
20. *Чиннов Е.А., Кабов О.А.* Двухфазные течения в трубах и капиллярных каналах // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44. Вып. 5. С. 777–795.

Computation of the Linear and Nonlinear Stability of a Two-Layer Couette Flow

Yu. Ya. Trifonov[a,#]

[a] *Kutateladze Institute of Thermophysics, Novosibirsk, Russia*
[#]*e-mail: trifonov@itp.nsc.ru*

We consider both linear and nonlinear stability of a two-layer Couette flow in a horizontal channel. As a first step, we linearize the Navier–Stokes equations in both phases and solve the general spectral problem. Varying velocity of the channel upper plate and the ratio of the fluids volumes in a wide range, we define the periodical disturbances behavior in time. We find both the neutral and the fastest growing disturbances of the unstable interface mode. As a second step, we obtain the nonlinear wavy regimes of a two-layer Couette flow in a horizontal channel using the full Navier–Stokes equations in both phases. We carry out comparison with the available experimental data

Keywords: two-layer Couette flow, nonlinear waves, stability

REFERENCES

1. *Yih C.S.* Instability due to viscosity stratification // J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, pp. 337–352.
2. *Yiantsios S.G., Higgins B.G.* Numerical solution of eigenvalue problems using the compound matrix method // J. Comput. Phys. Phys., 1988, vol. 74, pp. 25–40.
3. *Yiantsios S.G., Higgins B.G.* Linear stability of plane Poiseuille flow of two superposed fluids // Phys. Fluids, 1988, vol. 31, pp. 3225–3238.
4. *Renardy Yu.* Instability at the interface between two shearing fluids in a channel // Phys. Fluids, 1985, vol. 28, no. 12, pp. 3441–3443.
5. *Renardy Y.Y.* The thin layer effect and interfacial stability in a two-layer Couette flow with similar liquids // Phys. Fluids, 1987, vol. 30, pp. 1627.

6. *Hooper A.P.* The stability of two superposed viscous fluids in a channel // Phys. Fluids, 1989, vol. 28, pp. 1613.
7. *Shtern V.N.* Stability of a plane Couette flow // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 1969, no. 5, pp. 117–119.
8. *Romanov V.A.* Stability of a plane parallel Couette flow // Func. Anal. Applic., 1973, vol. 7, no. 2, pp. 62–73.
9. *Shlang T., Sivashinski G.I., Babchin A.J., Frankel A.L.* Irregular wavy flow due to viscous stratification // J. Phys. Paris, 1985, vol. 46, pp. 863.
10. *Hooper A.P., Grimshaw R.* Nonlinear instability at the interface between two viscous fluids // Phys. Fluids, 1985, vol. 28, pp. 37.
11. *Papageorgiou D.T., Maldarelli C., Rumschitzki D.S.* Nonlinear interfacial stability of core-annular flows // Phys. Fluids A, 1990, vol. 2, pp. 340.
12. *Tsvelodub O.Y., Arkhipov D.G.* Simulation of nonlinear waves on the surface of a thin fluid film moving under the action of turbulent gas flow // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 2017, vol. 58, no. 4, pp. 619–628.
13. *Khabakhpashev G.A.* A nonlinear dynamics modeling of the surface and internal waves in homogeneous and two-layer fluids // Diss. for the degree of Doctor of Sci., Kutateladze Institute of Thermophysics, Novosibirsk, 2006.
14. *Schmid P.J., Henningson D.S.* Stability and Transition in Shear Flows. Applied Mathematical Sciences. Vol. 142. N.Y.: Springer, 2001.
15. *Schmidt P., O'Naraigh L., Lucquiaud M., Valluri P.* Linear and nonlinear instability in vertical counter-current laminar gas-liquid flows // Phys. Fluids, 2016, vol. 28, pp. 042102.
16. *Trifonov Y.Y.* Instabilities of a gas-liquid flow between two inclined plates analyzed using the Navier–Stokes equations // Int. J. Multiphase Flow, 2017, vol. 95, pp. 144–154.
17. *Trifonov Y.Y.* Linear and nonlinear instabilities of a co-current gas-liquid flow between two inclined plates analyzed using the Navier–Stokes equations // Int. J. Multiphase Flow, 2020, vol. 122, pp. 103159.
18. *Barthelet P., Charru F., Fabre J.* Experimental study of interfacial long waves in a two-layer shear flow// J. Fluid Mech., 1995, vol. 303, pp. 23–53.
19. *Weinstein S.J., Ruschak K. J.* Coating flows // Annu. Rev. Fluid Mech., 2004, vol. 36, pp. 29–53.
20. *Chinnov E.A., Kabov O.A.* Two-phase flow in tubes and capillary channels // High Temp., 2006, vol. 44, no. 5, pp. 777–795.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 6, с. 709–720

УДК 532.546

О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ФИЛЬТРАЦИИ ВОДЫ ПРИ ОКОЛОКРИТИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

© 2020 г. А. А. Афанасьев[1,*]

[1]Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
*e-mail: afanasyev@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 15.04.2020 г.
После доработки 21.09.2020 г.
Принята к публикации 25.09.2020 г.

Рассмотрена проблема численного моделирования неизотермических течений воды и пара в пористой среде при околокритических термодинамических условиях. Показано, что уравнения однофазной и двухфазной фильтрации вырождаются в критической точке воды. Обсуждаются недостатки методов расчета течений, позволяющих исключить вырождение с помощью выбора давления и энтальпии в качестве независимых переменных модели. Предложен новый метод расчета при околокритических термодинамических условиях в стандартных переменных давление–температура. В основе метода лежит приближенное описание фазовой диаграммы жидкости линейными сплайнами, которое позволяет исключить вырождение законов сохранения в критической точке и использовать уравнения состояния, задающие свойства жидкости в зависимости от давления и температуры.

Ключевые слова: пористая среда, фильтрация, критическая точка, неизотермическое течение, численное моделирование

DOI: 10.31857/S0032823520060028

1. Введение. Течения в геологических пористых средах часто сопровождаются усложненными термодинамическими равновесиями насыщающих жидкостей и газов [1, 2]. Например, при фильтрации воды (H_2O) в геотермальных системах могут достигаться критические давление ($P_c = 220.9$ бар) и температура ($T_c = 647$ K), при которых плотность, энтальпия и другие параметры жидкости и пара быстро изменяются в зависимости от P и T. Причем, в пределе $P \to P_c$, $T \to T_c$ выполняются условия [3]

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial P}\right|_T \to \infty, \quad \left.\frac{\partial h}{\partial T}\right|_P \to \infty, \tag{1.1}$$

где ρ и h – плотность и удельная энтальпия H_2O. Условиям (1.1) соответствуют плотное расположение изохор (т.е. линий $\rho = \text{const}$) на рис. 1а и горизонтальные касательные к кривым *2–4* на рис. 1б в критической точке C. Подобное поведение теплофизических параметров приводит к системе нелинейных уравнений, описывающих течения. Их решение, как правило, возможно только с привлечением методов численного моделирования, при создании которых приходится учитывать связанное с условиями (1.1) вырождение системы уравнений при критических параметрах. Для того чтобы исключить вырождение выполняется переход от широко использующихся независимых переменных давление–температура $\mathbf{X} = \{P, T\}$ к нестандартным переменным, например,

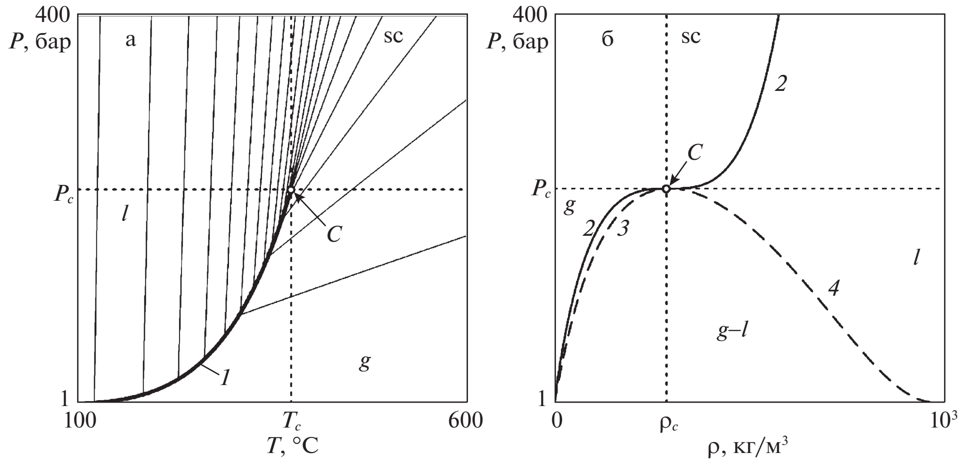


Рис. 1. Фазовая диаграмма H_2O. Кривая *1* – линия термодинамического равновесия пар–жидкость. Линии уровня – изохоры с шагом 50 кг/м^3 (а). Кривые *2–4* – плотность H_2O при $T = T_c$, а также плотности пара и воды в термодинамическом равновесии, соответственно (б). Символами g, l, sc и g–l обозначены области пара, воды, сверхкритической жидкости и двухфазных состояний пар–вода.

давление–энтальпия $\mathbf{Y} = \{P, \overline{h}\}$ [4]. С одной стороны, это позволяет решить отмеченные проблемы в точке C, а, с другой стороны, требует создания новых уравнений состояния, формулируемых в переменных $\mathbf{Y}$. Подобный подход применялся ранее в исследованиях фильтрации только однокомпонентных жидкостей и бинарных смесей [1, 2, 4], так как он не допускает простого обобщения на смеси трех и более компонент. Обобщение затруднено из-за необходимости создания и калибровки к экспериментальным данным уравнений состояния многокомпонентных смесей в нестандартных переменных $\mathbf{Y}$.

Учитывая накопленный в прикладных термодинамических расчетах опыт создания уравнений состояния в переменных $\mathbf{X}$ (например, уравнения состояния типа Ван-дер-Ваальса [3]), актуально развитие методов расчета фильтрации при околокритических параметрах именно в этих переменных. Для создания таких методов необходимо решить отмеченную проблему вырождения уравнений модели, что позволит использовать существующие отлаженные подходы для расчета теплофизических свойств смесей при заданных P и T и, следовательно, расширить область приложения моделей фильтрации.

В настоящей работе на примере однокомпонентных течений H_2O дан обзор проблем расчета фильтрации в переменных $\mathbf{X}$ и недостатки их решения с помощью переформулирования модели в переменных $\mathbf{Y}$. Кратко описывается с чем именно связано вырождение уравнений фильтрации при $\mathbf{X} \to \mathbf{X}_c$, где $\mathbf{X}_c = \{P_c, T_c\}$. Предложена идея нового метода расчета фильтрации в переменных $\mathbf{X}$, позволяющего обойти вырождение и, следовательно, использовать существующие уравнения состояния.

2. Основные уравнения. Неизотермическая фильтрация H_2O описывается следующей системой уравнений [4–6]:

$$\partial_t R_j + \nabla \cdot (\mathbf{Q}_j + \mathbf{\Psi}_j) = 0, \quad j = m, e \tag{2.1}$$

$$R_m = \phi \sum \rho_i s_i, \quad R_e = \phi \sum \rho_i e_i s_i + (1-\phi)\rho_r e_r$$
$$\mathbf{Q}_m = \sum \rho_i \mathbf{w}_i, \quad \mathbf{Q}_e = \sum \rho_i h_i \mathbf{w}_i \tag{2.2}$$

$$\mathbf{w}_i = -K \frac{K_{ri}}{\mu_i} (\nabla P - \rho_i \mathbf{g}), \quad i = 1, 2, \tag{2.3}$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$, сумма Σ берется по всем фазам $i = 1, \ldots, p$, $p \le 2$ — число фаз, на которые расслаивается H_2O, R_m и R_e — плотности жидкости и внутренней энергии в элементарном объеме сплошной среды, $\mathbf{Q}_m$ — поток массы, $\mathbf{Q}_e$ — конвективный поток энергии, $\mathbf{\Psi}$ — потоки, обусловленные теплопроводностью и другими диссипативными процессами, ϕ — пористость, ρ — плотность, s — насыщенность, т.е. объемная доля фазы, e — удельная внутренняя энергия, $\mathbf{w}$ — скорость фильтрации, h — удельная энтальпия, K — абсолютная проницаемость, K_{ri} — относительная фазовая проницаемость, μ — вязкость, P — давление, $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения, индексами $i = 1, 2$ обозначены параметры i-й фазы, а индексом r — скелета пористой среды, соответственно. Уравнения (2.1) — законы сохранения массы H_2O ($j = m$) и энергии ($j = e$), а (2.3) — закон Дарси. Конкретный вид диссипативных потоков $\mathbf{\Psi}$ несущественен для дальнейших рассуждений.

Насыщенности фаз удовлетворяют следующему соотношению

$$\sum s_i = 1 \tag{2.4}$$

Тогда, обозначив $s \equiv s_1$, имеем $s_2 = 1 - s$.

Число фаз p не превосходит 2. При $p = 1$ H_2O находится в однофазном состоянии пара, воды или сверхкритической жидкости (области g, l и sc на рис. 1а), а параметры фазы $i = 2$ (ρ_2, e_2, h_2, μ_2) не определены. Они сокращаются в уравнениях (2.1)–(2.3), так как $s_2 = 0$. При $p = 2$ H_2O находится в двухфазном термодинамическом равновесии пар–вода ($g - l$). В этом случае P и T связаны соотношением [5, 6]

$$T = T_f(P), \tag{2.5}$$

где T_f — температура кипения воды при давлении P. Для определенности предполагается, что в двухфазных равновесиях индекс $i = 1$ в уравнениях (2.1)–(2.4) соответствует пару, а $i = 2$ — воде.

На плоскости $\{P, T\}$ уравнение (2.5) задает кривую термодинамического равновесия между паром и водой (рис. 1а, кривая *1*). Правее этой кривой, при низких P и высоких T, H_2O находится в однофазном состоянии пара (g), а левее — при высоких P и низких T — в однофазном состоянии жидкости (l). Двухфазные состояния ($g - l$) возможны только при P и T, принадлежащих линии (2.5). При возрастании P и T кривая (2.5) обрывается в критической точке C при $P = P_c$, $T = T_c$ ($T_c = T_f(P_c)$). При $P > P_c$ и $T > T_c$ H_2O находится в однофазном состоянии сверхкритической жидкости (sc).

Теплофизические параметры H_2O задаются следующими тремя функциями давления и температуры:

$$\mathbf{\Phi}(P, T), \quad \mathbf{\Phi} = \{\rho, h, \mu\}, \tag{2.6}$$

для которых кривая (2.5) является линией разреза. На линии (2.5) при $P < P_c$ и $T < T_c$ функции (2.6) принимают два значения, первое из которых соответствует пару ($i = 1$), а второе — воде ($i = 2$). При $p = 2$ оба этих значения используются для замыкания уравнений переноса (2.1)–(2.3). При любых P и T, не принадлежащих кривой (2.5), единственное значение каждой из функций (2.6) используется для замыкания уравнений переноса (2.1)–(2.3) при $p = 1$. Значения функций (2.6) могут рассчитываться, например, с помощью кубического уравнения состояния [3] или многокоэффициентных корреляций [7]. Удельная внутренняя энергия при данных P и T определяется из (2.6) с помощью соотношения $e = h - P/\rho$.

Для определенности предполагается, что скелет пористой среды – несжимаемая среда, внутренняя энергия которой есть линейная функция температуры:

$$\rho_r = \text{const}, \quad e_r = c_r T, \tag{2.7}$$

где $c_r = \text{const}$ – теплоемкость скелета пористой среды.

Функции относительной фазовой проницаемости задаются в виде соотношений

$$K_{ri}(s_1, T), \tag{2.8}$$

удовлетворяющих следующему условию в точке C:

$$\mathbf{X} \to \mathbf{X}_c: \; K_{ri}(s_i, T) \to s_i \tag{2.9}$$

В соотношении (2.8) зависимость K_{ri} от T характеризует изменение поверхностного натяжения между водой и паром при увеличении T. Данная зависимость становится существенной при приближении к критической точке C, в которой, согласно условию (2.9), относительные фазовые проницаемости должны быть равны соответствующим насыщенностям s_i [4, 8].

Подставляя (2.2)–(2.8) в уравнения (2.1) получим замкнутую систему двух уравнений относительно переменных $\mathbf{X} = \{P, T\}$ при $p = 1$ и $\mathbf{X} = \{P, s\}$ при $p = 2$. Здесь $\mathbf{X}$ обозначает независимые переменные, т.е. минимальный набор параметров, распределение которых позволяет восстановить все другие параметры течения. При изменении числа фаз p независимые переменные "переключаются" между $\{P, T\}$ и $\{P, s\}$ [5, 6].

2. О конечно-разностной схеме. При численном моделировании фильтрации часто используются полностью неявные конечно-разностные схемы, построенные методом конечных объемов [9]. Для описания проблем, возникающих при моделировании течений при околокритических условиях, рассмотрим расчет на сетке, содержащей всего 2 связанные ячейки a и b. Считается, что параметры в ячейке b ($\mathbf{X}^b = \text{const}$) зафиксированы, а изменяются только параметры в ячейке a ($\mathbf{X}$) из-за перетоков между a и b. Подобную постановку расчета можно интерпретировать следующим образом: ячейка a принадлежит расчетной области Ω, граница которой $\partial\Omega$ совпадает с гранью между a и b, а ячейка b используется для задания условий Дирихле (фиксированных переменных $\mathbf{X}^b$) на $\partial\Omega$. Здесь и далее параметры в ячейке b обозначены верхним индексом b, а параметры в ячейке a не имеют верхнего индекса.

Конечно-разностные аналоги законов сохранения (2.1) для ячейки a записываются в виде

$$B_j = 0, \quad j = m, e, \tag{3.1}$$

где введено обозначение

$$B_j = \left(R_j - R_{j,0}\right)V + \left(Q_j^{ab} + \Psi_j^{ab}\right)S^{ab}\tau \tag{3.2}$$

Здесь V – объем ячейки, $Q_j^{ab}(\mathbf{X}, \mathbf{X}^b)$ и $\Psi_j^{ab}(\mathbf{X}, \mathbf{X}^b)$ – конечно-разностные аппроксимации потоков $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{\Psi}$ из a в b, вид которых несущественен для дальнейших рассуждений, S^{ab} – площадь грани между ячейками a и b, а τ – шаг по времени. Величины с нижним индексом 0 – параметры с явного ($t = t_0$), а без индекса – с неявного слоя по времени ($t = t_0 + \tau$).

По постановке расчета предполагается, что $\mathbf{X}_0$ и $\mathbf{X}^b$ заданы, а $\mathbf{X}$ – неизвестно. Для определения параметров $\mathbf{X}$ необходимо решить систему нелинейных уравнений (3.1). При численном моделировании фильтрации это решение часто ищется итерационным методом Ньютона (методом касательных), основывающемся на линеаризации (3.1) [10]. Учитывая (3.2), линеаризованные уравнения (3.1) запишутся в виде

$$\mathbf{A}\mathbf{X}^T + \mathbf{B} = 0, \tag{3.3}$$

где введен вектор $\mathbf{B} = \{B_m, B_e\}^T$, верхний индекс T обозначает операцию транспонирования, а коэффициенты матрицы $\mathbf{A}$, имеющей размерность 2×2, даются соотношениями

$$\begin{gathered}\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{A}_R V + \mathbf{A}_Q \tau, \quad \mathbf{A}_R = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}}, \quad \mathbf{A}_Q = \left(\frac{\partial \mathbf{Q}^{ab}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{\Psi}^{ab}}{\partial \mathbf{X}}\right) S^{ab} \\ \mathbf{R} = \{R_m, R_e\}^T, \quad \mathbf{Q}^{ab} = \left\{Q_m^{ab}, Q_e^{ab}\right\}^T, \quad \mathbf{\Psi}^{ab} = \left\{\Psi_m^{ab}, \Psi_e^{ab}\right\}^T\end{gathered} \tag{3.4}$$

Для решения уравнений (3.1) относительно $\mathbf{X}$, на каждой итерации метода Ньютона они линеаризуются и полученная система (3.3) используется для определения нового приближения $\mathbf{X}^T = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ [10]. Итерационный процесс повторяется пока не будет достигнута требуемая точность ε ($\|\mathbf{B}\| < \varepsilon$). В системе линейных уравнений (3.3) $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – постоянные, вычисленные при текущем приближении $\mathbf{X}$. Для надежной работы алгоритма необходимо, чтобы матрица $\mathbf{A}$ удовлетворяла следующим условиям при любых $\mathbf{X}$ (т.е. при любых параметрах фильтрационного течения), в том числе при $\mathbf{X}_c$:

$$A_{\max}\mathbf{X}\mathbf{X}^T \ge \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T \ge A_{\min}\mathbf{X}\mathbf{X}^T > 0 \tag{3.5}$$

Здесь $\mathbf{X}$ – произвольный вектор переменных, а $A_{\min}$ и $A_{\max}$ – некоторые положительные константы. Неравенства (3.5) означают, что матрица $\mathbf{A}$ положительно определена и ее коэффициенты ограничены [11].

Согласно соотношениям (3.4), $\mathbf{A}$ есть сумма двух матриц $\mathbf{A}_R V$ и $\mathbf{A}_Q \tau$, соответствующих членам с операторами ∂_t и ∇ в законах сохранения (2.1). При $\tau \to 0$ выполняется условие $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_R V$, а при $\tau \to \infty$ – условие $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_Q \tau$. Следовательно, в этих асимптотических случаях выполнение неравенств (3.5) зависит только от коэффициентов матрицы $\mathbf{A}_R$ или $\mathbf{A}_Q$, соответственно. При численном моделировании фильтрации конечно-разностные аппроксимации $\mathbf{Q}^{ab}$ и $\mathbf{\Psi}^{ab}$ часто не приводят к знакоопределенным матрицам $\mathbf{A}_Q$. В результате, условия (3.5) при $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_Q \tau$ нарушаются, а расчет с большим шагом по времени τ часто невозможен из-за отсутствия сходимости метода Ньютона. Для продолжения расчета приходится уменьшать шаг τ. Для гарантированной возможности расчета течения необходимо потребовать выполнение (3.5) при малых τ, когда $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_R V$. Тогда, даже если при больших τ сходимость отсутствует, то при уменьшении τ неравенства (3.5) выполняются, а расчет продолжается. Ниже проверяется выполнение условий (3.5) в асимптотическом случае $\tau \to 0$.

4. Вырождение в критической точке. Рассмотрим проблемы численного моделирования фильтрации, к которым приводят неограниченные производные (1.1) и совпадение параметров пара и воды ($\rho_1 \to \rho_2$, $h_1 \to h_2$) при $\mathbf{X} \to \mathbf{X}_c$. Как отмечено в разделе 2, при $p = 1$ уравнения (2.1) образуют замкнутую систему уравнений относительно переменных $\mathbf{X} = \{P, T\}$. В соответствии с (3.2) и (3.4), вычисляя для этого случая матрицу $\mathbf{A}_R$, получим:

$$p = 1: \quad \mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} \phi \left.\dfrac{\partial\rho}{\partial P}\right|_T & \phi \left.\dfrac{\partial\rho}{\partial T}\right|_P \\ \phi \left.\dfrac{\partial\rho e}{\partial P}\right|_T & \phi \left.\dfrac{\partial\rho e}{\partial T}\right|_P + (1-\phi)\rho_r c_r \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

$$\mathbf{X} \to \mathbf{X}_c: \quad \det \mathbf{A}_R \to \phi^2 \frac{\partial\rho}{\partial P}\left(\rho \frac{\partial h}{\partial T} - 1\right) \to \infty \tag{4.2}$$

При моделировании двухфазных течений ($p = 2$) в переменных $\mathbf{X} = \{P, s\}$ матрица $\mathbf{A}_R$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$p = 2: \quad \mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial R_m}{\partial P}\right|_s & \phi(\rho_1 - \rho_2) \\ \left.\dfrac{\partial R_e}{\partial P}\right|_s & \phi(\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2) \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

$$\mathbf{X} \to \mathbf{X}_c: \quad \det \mathbf{A}_R \to 0 \tag{4.4}$$

При $\mathbf{X} \not\to \mathbf{X}_c$ расчет параметров (2.6) в соответствии с непротиворечивой термодинамической моделью жидкости (например, основывающейся на уравнении состояния) гарантирует выполнение условий (3.5) для матриц (4.1) и (4.3) и, следовательно, сходимость алгоритмов расчета фильтрации. При $\mathbf{X} \to \mathbf{X}_c$, согласно соотношению (4.2), коэффициенты матрицы $\mathbf{A}_R$ неограниченны при $p = 1$ ($A_{\max} \to \infty$), а, согласно соотношению (4.4) и критерию Сильвестра [11], $\mathbf{A}_R$ не знакоопределена при $p = 2$ ($A_{\min} \to 0$). В результате, $\mathbf{A}_R$ нельзя обратить, а линеаризованная система (3.3) не имеет решения при $\tau \to 0$ или ее решение неединственно. Применение метода Ньютона в случаях (4.2) и (4.4) приводит к значительному в пределе $\mathbf{X} \to \mathbf{X}_c$ стремящемуся к бесконечности изменению $\mathbf{X}$ за одну итерацию, а численное решение не сходится при любом сколь угодно малом шаге по времени τ.

Общепринятый подход для исключения вырождения в точке C заключается в переходе от $\mathbf{X}$ к другим независимым переменным. Часто используются переменные $\mathbf{Y} = \{P, \bar{h}\}$ [4] или $\{\bar{\rho}, T\}$ [1], где $\bar{h}$ и $\bar{\rho}$ – полные, т.е. просуммированные по фазам, удельная энтальпия и плотность:

$$\bar{h} = \sum \rho_i h_i s_i / \bar{\rho}, \quad \bar{\rho} = \sum \rho_i s_i \tag{4.5}$$

Согласно определению (4.5), $\bar{h} = h_1$ и $\bar{\rho} = \rho_1$ при $p = 1$. Предполагается, что в случае переменных $\mathbf{Y}$, уравнения состояния H_2O задаются вместо уравнений (2.6) в виде

$$\rho(P, h), \quad T(P, h), \quad \mu(P, h), \tag{4.6}$$

а насыщенности фаз вычисляются по $\bar{h}$ из уравнений (4.5). Преимущество $\mathbf{Y}$ перед $\mathbf{X}$ заключается в том, что частные производные функций (4.6) остаются ограниченными при любых осуществимых термобарических параметрах, в том числе в критической точке C (при $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_c = \{P_c, \bar{h}_c\}$). В работе [4] показано, что это гарантирует выполнение (3.5) при любых параметрах однофазных и двухфазных течений.

5. Проблемы использования переменных $\mathbf{Y} = \{P, \bar{h}\}$. Применение нестандартных переменных, в частности $\mathbf{Y}$, требует определения и быстрого расчета функций (4.6). Это может представлять значительную вычислительную проблему, так как большинство

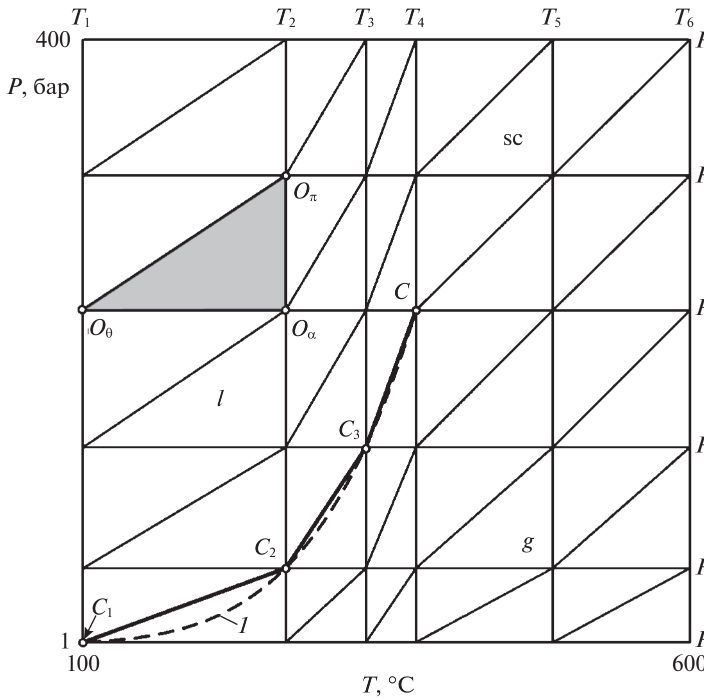


Рис. 2. Триангуляция пространства $\{P,T\}$. Разрывная кривая *1* – линия термодинамического равновесия.

уравнений состояния жидкостей и газов формулируются в переменных $\mathbf{X} = \{P,T\}$, как, например, уравнение состояния Ван-дер-Ваальса [3]. Для решения этой проблемы требуется либо создавать новые уравнения состояния в переменных $\mathbf{Y}$, либо в существующих уравнениях состояния переходить от $\mathbf{X}$ к $\mathbf{Y}$. Подобная замена переменных используется в [2, 4, 12] для одно- и двухкомпонентных жидкостей, в которых по уравнению состояния Ван-дер-Ваальса рассчитывается термодинамический потенциал жидкости в $\mathbf{Y}$. Потенциал сохраняется в виде коэффициентов полиномиального сплайна, а расчет термодинамического равновесия сводится к поиску экстремума потенциала. Такой подход сталкивается со значительными техническими проблемами, связанными с необходимостью хранения функций (4.6) в виде усложненных многокоэффициентных сплайнов и неустойчивой сходимостью алгоритмов поиска экстремальных значений потенциала. В этой связи актуально создание метода расчета фильтрации в переменных $\mathbf{X}$, который позволит с одной стороны использовать существующие уравнения состояния, а с другой стороны исключить вырождение (2.1) при критических термодинамических параметрах. В данной работе для демонстрации основной идеи метода рассмотрим его на примере однокомпонентной жидкости (H_2O).

6. Новый метод расчета фильтрации в переменных X. Разобьем пространство $\{P,T\}$ прямоугольной сеткой

$$P = P_k, \quad k = 1,\ldots,N_P; \quad T = T_n, \quad n = 1,\ldots,N_T \tag{6.1}$$

так, чтобы линия термодинамического равновесия (2.5) пересекала ребра ячеек сетки только в их вершинах C, C_1, C_2, C_3 и т.д. Проведем триангуляцию пространства $\{P,T\}$,

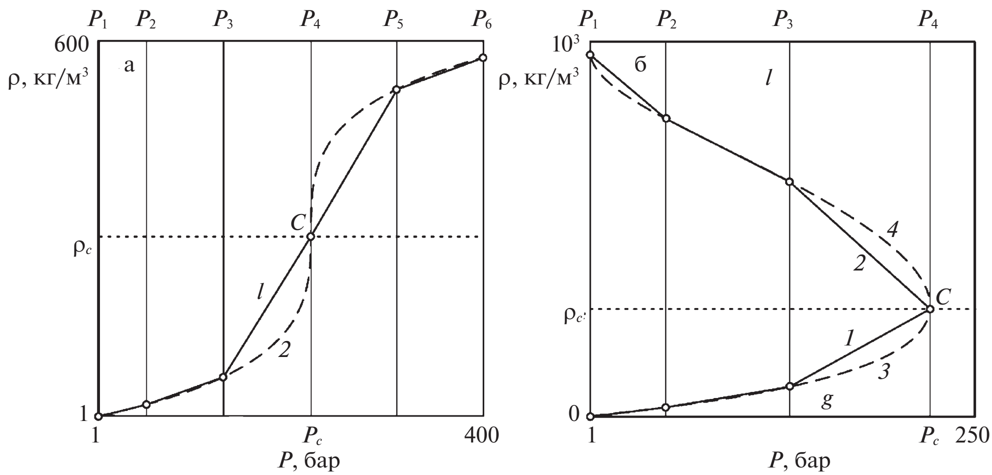


Рис. 3. Плотность H_2O в зависимости от P при $T = T_c$ (а) и на кривой термодинамического равновесия (б). Разрывными линиями показаны зависимости (2.6), а сплошными – их интерполяции сплайнами (6.2).

разбив каждую ячейку диагональю на два треугольника так, чтобы ломаная линия $C_1C_2\ldots C$ состояла из диагоналей – ребер симплексов (т.е. треугольников; рис. 3).

На построенной триангуляции элементы вектора $\mathbf{\Phi}$ аппроксимируются кусочно-линейными функциями. Для этого в каждом узле сетки (6.1) вычисляются значения (2.6) при соответствующих P_k и T_n. Причем, в вершинах C_1, C_2, C_3 и т.д. вычисляется два значения $\mathbf{\Phi}$, одно из которых соответствует воде $\{\rho_1, h_1, \mu_1\}$, а другое – пару $\{\rho_2, h_2, \mu_2\}$. Параметры H_2O (2.6) внутри каждого треугольника аппроксимируются линейными функциями от P и T:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{D}_{\alpha l} + \mathbf{D}_{\pi l}P + \mathbf{D}_{\theta l}T, \quad \mathbf{\Phi}, \mathbf{D} = \{\rho, h, \mu\}, \quad l = 1, \ldots, L \tag{6.2}$$

Здесь $L = 2(N_P - 1)(N_T - 1)$ – число симплексов, а $\mathbf{D}_{\alpha l}$, $\mathbf{D}_{\pi l}$ и $\mathbf{D}_{\theta l}$ – коэффициенты сплайна, однозначно определяющиеся значениями (2.6) в вершинах соответствующего симплекса. Например, рассмотрим произвольный треугольник $O_\alpha O_\pi O_\theta$ из построенного разбиения, параметры в вершинах которого обозначим индексами α, π и θ. Для определенности положим, что $P_\alpha = P_\theta < P_\pi$ и $T_\alpha = T_\pi > T_\theta$ (рис. 2). Тогда коэффициенты сплайна (6.2) выражаются в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{D}_{\alpha l} = \mathbf{\Phi}_\alpha - \mathbf{D}_{\pi l}\mathbf{\Phi}_\pi - \mathbf{D}_{\theta l}\mathbf{\Phi}_\theta \\ \mathbf{D}_{\pi l} = \frac{\mathbf{\Phi}_\pi - \mathbf{\Phi}_\alpha}{P_\pi - P_\alpha}, \quad \mathbf{D}_{\theta l} = \frac{\mathbf{\Phi}_\theta - \mathbf{\Phi}_\alpha}{T_\theta - T_\alpha}\end{gathered} \tag{6.3}$$

Здесь $\mathbf{\Phi}_\alpha$, $\mathbf{\Phi}_\pi$ и $\mathbf{\Phi}_\theta$ – значения функций (2.6) в O_α, O_π и O_θ, соответственно. Таким образом, на множестве треугольников строятся непрерывные сплайны для (2.6), а ломанная $C_1C_2\ldots C$, интерполирующая линию термодинамического равновесия (2.5) между водой и паром, является линией их разреза. Точность такого приближенного описания соотношений (2.5) и (2.6) сплайнами повышается при использовании более плотной сетки (6.1).

Построенные сплайны обладают двумя важными свойствами. Во-первых, они сохраняют монотонность функций (2.6) вдоль осей P и T и, если сетка (6.1) достаточно плотная, знак определенности матрицы $\mathbf{A}_R$. В частности, как интерполируемые функции (2.6), так и интерполирующие их сплайны удовлетворяют неравенствам

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial P}\right|_T > 0, \quad \left.\frac{\partial\rho}{\partial T}\right|_P < 0, \quad \left.\frac{\partial h}{\partial T}\right|_P > 0 \tag{6.4}$$

Условия (6.4) гарантируют положительный знак коэффициентов сжимаемости и теплового расширения и теплоемкости H_2O при постоянном давлении. Действительно, так как $\partial\rho/\partial P|_T > 0$, то $\rho_\pi > \rho_\alpha$ и соответствующий коэффициент сплайна $\rho_{\pi l} = (\rho_\pi - \rho_\alpha)/(P_\pi - P_\alpha) > 0$ положительный. Следовательно, неравенство $\partial\rho/\partial P|_T = \rho_{\pi l} > 0$ выполняется для сплайна (6.2). Аналогично проверяется выполнение остальных неравенств (6.4).

Известно, что для двухпараметрической среды достаточно задать только одну из функций $\rho(P,T)$ или $h(P,T)$, например, достаточно задать только термическое уравнение состояния $\rho(P,T)$. Используя термодинамические соотношения, другие параметры среды можно выразить через заданную функцию, например, $h(P,T)$ можно выразить из $\rho(P,T)$ [3, 12]. При этом гарантируется выполнение термодинамических неравенств (6.4). Применение сплайна (6.2) предполагает независимое задание $\rho(P,T)$ и $h(P,T)$. В этом смысле термодинамическая модель (6.2), (6.3) является несогласованной. Однако, как показано выше, термодинамические неравенства (6.4), обеспечивающие диссипативность модели фильтрации, для (6.2) выполняются. Этого свойства модели (6.2), (6.3) достаточно для проведения устойчивых расчетов фильтрации.

Если свойства H_2O задаются в форме (6.2) и (6.3), то, согласно (3.2) и (3.4), $\mathbf{A}_R$ имеет вид:

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} \dfrac{R_{m,\pi} - R_{m,\alpha}}{P_\pi - P_\alpha} & \dfrac{R_{m,\theta} - R_{m,\alpha}}{T_\theta - T_\alpha} \\ \dfrac{R_{e,\pi} - R_{e,\alpha}}{P_\pi - P_\alpha} & \dfrac{R_{e,\theta} - R_{e,\alpha}}{T_\theta - T_\alpha} \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

Если $\mathbf{X} \not\to \mathbf{X}_c$, то при измельчении сетки (6.1), т.е. при N_P, $N_T \to \infty$, матрица (6.5) стремится к знакоопределенной матрице (4.1) при $p = 1$ или (4.3) при $p = 2$. Следовательно, матрица (6.5) также знакоопределена при достаточно больших N_P и N_T. Таким образом, построенная триангуляция, использующая выравнивание ребер симплексов вдоль осей P и T, гарантирует выполнение неравенств (3.5) и (6.4) при $\mathbf{X} \not\to \mathbf{X}_c$. Линейная интерполяция на произвольной триангуляции пространства $\{P,T\}$, отличной от построенной выше, может не удовлетворять условиям (3.5) и (6.4).

Второе важное свойство сплайнов (6.2) заключается в том, что их коэффициенты $\mathbf{D}_{\alpha l}$, $\mathbf{D}_{\pi l}$ и $\mathbf{D}_{\theta l}$ – ограничены, а значит ограничены и производные (6.4) интерполирующих функций в том числе в критической точке C. Действительно, на рис. 3а построены графики $\rho(P,T_c)$ (кривые *1* и *2*, соответственно), а на рис. 3б плотности пара ρ_1 (кривые *1* и *2*) и воды ρ_2 (кривые *3* и *4*) для (2.6) и сплайна (6.2), соответственно. В отличие от зависимостей (2.6), производные от сплайнов конечные, что обеспечивает выполнение неравенств (3.5) при $p = 1$ и, следовательно, устойчивую сходимость расчета однофазных течений H_2O при околокритических условиях.

Так как при $\mathbf{X} \to \mathbf{X}_c$ плотности и энтальпии пара и воды, интерполируемые сплайнами (6.2), совпадают ($\rho_1 \to \rho_2$, $h_1 \to h_2$), то, согласно (4.4), расчет двухфазной фильтрации в переменных $\mathbf{X} = \{P, s\}$ при околокритических условиях невозможен. Это связано с тем, что матрица $\mathbf{A}_R$ дается соотношением (4.3), а неравенства (3.5) не выполняются ($A_{\min} \to 0$). Покажем, что вырождение можно исключить, выбрав в качестве независимых переменных $\mathbf{X} = \{P, \bar{\rho}\}$, где полная плотность $\bar{\rho}$ дается (4.5). В этом случае $\mathbf{A}_R$ дается соотношением

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial R_m}{\partial P}\right|_{\bar{\rho}} & \phi \\ \left.\dfrac{\partial R_e}{\partial P}\right|_{\bar{\rho}} & \phi \dfrac{\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2}{\rho_1 - \rho_2} \end{pmatrix} \qquad (6.6)$$

Коэффициенты в правом столбце (6.6) ограничены при любом $\mathbf{X}$, в том числе при $\mathbf{X}_c$, а условия (3.5) выполняются. Это обеспечивает устойчивую сходимость расчета двухфазных течений H_2O при околокритических условиях.

Таким образом, применение кусочно-линейных сплайнов позволяет исключить вырождение уравнений фильтрации при $\mathbf{X} \to \mathbf{X}_c$. При этом, однофазные течения необходимо рассчитывать в переменных $\mathbf{X} = \{P, T\}$, а двухфазные – в $\mathbf{X} = \{P, \bar{\rho}\}$. Вырождение удается исключить за счет приближенного описания теплофизических свойств линейными функциями, причем погрешность этого описания увеличивается при $\mathbf{X} \to \mathbf{X}_c$ (рис. 3). Сплайны (6.2) описывают (2.5) и (2.6) точнее на более подробных сетках (6.1). Однако, при N_P, $N_T \to \infty$ константа $A_{\min}$ в условии (3.5) уменьшается, имея предел $A_{\min} \to 0$. Следовательно, более точная аппроксимация (2.5) и (2.6) сплайнами, приводит к ухудшению сходимости алгоритма расчета фильтрации (методом Ньютона) при $\mathbf{X} \to \mathbf{X}_c$. Применение сплайнов (6.2) в численном моделировании требует соблюдения баланса между точностью расчета свойств H_2O и сходимостью алгоритмов. Важно, что область околокритических параметров, где необходимо приближенное описание, мала по сравнению с гораздо более широким диапазоном P и T, при которых происходят течения в геотермальных системах. Следовательно, задав неравномерную сетку (6.1), более грубую в окрестности C, можно обеспечить удовлетворительную точность расчета свойств при всех параметрах за исключением околокритических значений и, таким образом, обеспечить достаточную точность расчета течений.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10051).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Croucher A., O'Sullivan M.* Application of the computer code TOUGH2 to the simulation of supercritical condition in geothermal system // Geothermics, 2008. V. 37. № 6. P. 622–634.

2. *Afanasyev A., Costa A., Chiodini G.* Investigation of hydrothermal activity at Campi Flegrei caldera using 3D numerical simulations: extension to high temperature processes// J. Volcanol. Geothermal Res. 2015. V. 299. P. 68–77.

3. *Брусиловский А.И.* Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа. М.: Грааль, 2002. 575 с.

4. *Афанасьев А.А., Мельник О.Э.* О математическом моделировании многофазной фильтрации при околокритических условиях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2013. Т. 68. № 3. С. 68–72.

5. *Бармин А.А., Цыпкин Г.Г.* Математическая модель инжекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 6. С. 92–98.

6. *Афанасьев А.А., Бармин А.А.* Нестационарные одномерные фильтрационные течения воды и пара с учетом фазовых переходов // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 4. С. 134–143.

7. *Wagner W., Pruss A.* The IAPWS formulation 1995 for the thermodynamic properties of ordinary water substance for general and scientific use // J. Phys. Chem. Ref. Data 2002. V. 31. № 2. P. 387–535.

8. *Schechter D., Haynes J.* Relative permeabilities of a near critical binary fluid // Transport Porous Med. 1992. V. 9. № 3. P. 241–260.

9. *Aziz K., Settari A.* Petroleum reservoir simulation. London: Appl. Sci. Publ., 1979. 476 p.

10. *Бахвалов Н.С.* Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М.: Наука, 1975. 632 с.

11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц (2-е изд.). М.: Наука, 1966. 576 с.

12. *Афанасьев А.А.* Моделирование свойств бинарной смеси углекислый газ-вода при до- и закритических условиях // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50. № 3. С. 363–370.

On Numerical Modelling of Water Flows in Porous Media under Near-Critical Conditions

A. Afanasyev[a,#]

[a] *Institute of Mechanics, Moscow State University, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: afanasyev@imec.msu.ru*

The problem of numerical modeling of non-isothermal flows of water and steam under near-critical thermodynamic conditions is considered. It is shown that the equations of single-phase and two-phase flows become degenerate at the critical point of water. The disadvantages of the methods for modelling the flows are discussed, which are based on choosing pressure and enthalpy as independent variables of the model to exclude the degeneracy. A new method for modelling the flows under near-critical thermodynamic conditions in standard pressure-temperature variables is proposed. The method is based on an approximate description of the fluid phase diagram by linear splines. The method allows for elimination of the degeneracy of conservation laws at the critical point and application of the equations of state formulated in pressure and temperature variables.

Keywords: porous medium, flow in porous medium, critical point, non-isothermal flow, numerical modelling

REFERENCES

1. *Croucher A., O'Sullivan M.* Application of the computer code TOUGH2 to the simulation of supercritical condition in geothermal system // Geothermics, 2008, vol. 37, no. 6, pp. 622–634.

2. *Afanasyev A., Costa A., Chiodini G.* Investigation of hydrothermal activity at Campi Flegrei caldera using 3D numerical simulations: extension to high temperature processes // J. Volcanol. Geothermal Res., 2015, vol. 299, pp. 68–77.

3. *Brusilovskii A.I.* Phase Transformations in the Development of Oil and Gas Fields. Moscow: Graal'; 2002. 575 p. (in Russian).

4. *Afanas'ev A.A., Mel'nik O.E.* Mathematical modeling of multiphase seepage under near-critical conditions // Moscow Univ. Mech. Bull., 2013, vol. 68, no 3, pp. 76–79.

5. *Barmin A.A., Tsypkin G.G.* Mathematical model of water injection into a steam-saturated geothermal reservoir // Fluid Dyn., 1996, vol. 31, no. 6, pp. 874–879.

6. *Afanas'ev A.A., Barmin A.A.* Unsteady one-dimensional water and steam flows through a porous medium with allowance for phase transitions // Fluid Dyn., 2007, vol. 42, no. 4, pp. 627–636.

7. *Wagner W. Pruss A.* The IAPWS formulation 1995 for the thermodynamic properties of ordinary water substance for general and scientific use // J. Phys. Chem. Ref. Data, 2002, vol. 31, no. 2, pp. 387–535.
8. *Schechter D., Haynes J.* Relative permeabilities of a near critical binary fluid // Transport Porous Med., 1992, vol. 9, no. 3, pp. 241–260.
9. *Aziz K., Settari A.* Petroleum Reservoir Simulation. London: Appl. Sci. Publ., 1979. 476 p.
10. *Bakhvalov N.S.* Numerical Methods (Analysis, Algebra and Ordinary Differential Equations). Moscow: Nauka, 1975. 632 p. (in Russian)
11. *Gantmacher F.R.* Theory of Matrix. Moscow: Nauka, 1966. 576 p. (in Russian)
12. *Afanasyev A.A.* Simulation of the properties of a binary carbon dioxide-water mixture under sub- and supercritical conditions // High Temperature, 2012, vol. 50, no. 3, pp. 340–347.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 6, с. 721–732

УДК 532.516:534:1

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПОТОК ВЯЗКОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ВДУВА (ОТСОСА) СРЕДЫ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. А. Гурченков[1,2,*]

[1] *ФИЦ "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия*
[2] *Национальный исследовательский университет "МАИ", Москва, Россия*
**e-mail: challenge2005@mail.ru*

Поступила в редакцию 02.04.2020 г.
После доработки 30.08.2020 г.
Принята к публикации 01.10.2020 г.

Изучаются движения вязкой электропроводной несжимаемой жидкости, вращающейся вначале как твердое тело с постоянной угловой скоростью вместе с ограничивающими ее параллельными стенками, под действием внезапно начинающихся продольных колебаний одной из стенок. Стенки составляют произвольный угол с осью вращения. Неустановившийся поток индуцирован продольными колебаниями одной из стенок, вдувом (отсосом) среды, производимым перпендикулярно поверхности пористой пластины и внезапно включенным постоянным магнитным полем, направленным по нормали к стенкам.
Построены аналитические решения уравнений магнитной гидродинамики. Определены поле скоростей и векторы касательных напряжений вязкой электропроводной жидкости, действующие на стенки щели. Определено индуцированное магнитное поле в потоке электропроводной жидкости.
Рассматривается ряд частных случаев движения стенок. На основе полученных результатов исследуются отдельные структуры пограничных слоев у стенок щели.

Ключевые слова: уравнения магнитной гидродинамики, вязкая электропроводная жидкость, пограничные слои

DOI: 10.31857/S0032823520060065

Введение. Показано, что при отсутствии вращения магнитного поля и вдува (отсоса) среды и удалении неподвижной стенки на бесконечность, решение переходит в известное решение задачи о нестационарном движении жидкости, ограниченной перемещающейся плоской стенкой [1]. Кроме того, при отсутствии магнитного поля и удалении неподвижной стенки на бесконечность решение совпадает с результатами [2], а при отсутствии магнитного поля и вдува (отсоса) среды решение переходит в решение [3].

В настоящей работе представлено обобщение исследования [4], в котором рассматривается нестационарный поток вязкой электропроводной несжимаемой жидкости во вращающейся щели при наличии внешнего однородного магнитного поля. Неустановившийся поток индуцирован продольными колебаниями одной из стенок. Далее изучается динамика неустановившегося течения вязкой электропроводной жидкости между вращающимися параллельными стенками при наличии поперечного потока и внешнего магнитного поля. Задача в такой постановке, насколько известно автору,

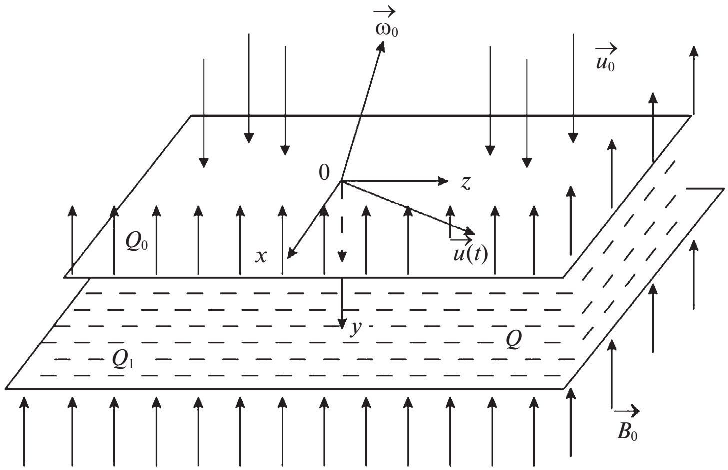


Рис. 1

поставлена впервые. В одном из последних исследований [5] рассматривалось течение электропроводной жидкости внутри вращающейся щели, но жидкость предполагалась идеальной и течение стационарным.

1. Аналитическое решение уравнений магнитной гидродинамики. Задача рассматривается в следующей постановке. Щель шириной l, образованная двумя бесконечными параллельно пористыми стенками Q_0 и Q_1 с изолирующими свойствами, заполнена вязкой электропроводной несжимаемой жидкостью. Жидкость находится в поле массовых сил с потенциалом U. Щель вместе с жидкостью вращается как одно целое с постоянной угловой скоростью $\vec{w}_0 = \mathrm{const}$, причем вектор $\vec{w}_0$ образует с этими плоскостями постоянный угол $\beta\left(0 < \beta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$. Частный случай в отсутствии магнитного поля и вдува (отсоса) среды $\left(\beta = \dfrac{\pi}{2}\right)$ был исследован ранее [6].

Свяжем с плоскостью Q_0 декартову систему координат Q_{xyz} с ортами $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ так, что плоскость Q_{xz} совпадает с плоскостью Q_0, а ось y направлена по нормали к ней вглубь жидкости. В этой системе координат стенки и жидкость покоятся. В момент $t \geq 0$ стенка Q_0 начинает двигаться в продольном направлении со скоростью $u(t)$ В тот же момент времени вносится внешнее однородное магнитное поле с индукцией $B_0 = \mathrm{const}$ направленной по нормали к стенкам, и через верхнюю пластину Q_0 осуществляется вдув (отсос) жидкости со скоростью $u(t)$ по нормали к поверхности пластины. Схематично геометрия задачи представлена на рис. 1.

Далее исследуется распространение возмущений в однородной проводящей среде под действием однородного магнитного поля, продольных колебаний стенки и вдува (отсоса) среды.

Движение жидкости в системе O_{xyz}, вращающейся с угловой скоростью $\vec{w}_0$, в магнитогидродинамическом приближении (бесконечно проводящая жидкость) описывается уравнением магнитной гидродинамики, а также граничными и начальными условиями, которые в обычных обозначениях имеют вид

$$\vec{w}_0 \times (\vec{w}_0 \times \vec{r}) + 2\vec{w}_0 \times \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nabla U + \nu\Delta\vec{V} + \frac{1}{\mu\rho}\operatorname{rot}\vec{B}\times\vec{B}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{V}\times\vec{B})$$

$$\operatorname{div}\vec{V} = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad \text{при} \quad \vec{r} \in Q$$

$$\begin{gathered} \vec{V}(\vec{r},t) = (\vec{u}(t), u_0(t)\vec{e}_y) \quad \text{при} \quad \vec{r} \in Q_0, \quad t > 0 \\ \vec{V}(\vec{r},t) = u_0(t)\vec{e}_y \quad \text{при} \quad \vec{r} \in Q_1, \quad t > 0 \end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\vec{B} = B_0\vec{e}_y \quad \text{при} \quad \vec{r} \in Q_0, \quad t > 0$$

$$\vec{B} = B_0\vec{e}_y \quad \text{при} \quad \vec{r} \in Q_1, \quad t > 0$$

$$\vec{V}(\vec{r},0) = 0, \quad \text{при} \quad t = 0$$

$$\vec{B}(\vec{r},0) = 0, \quad \text{при} \quad t = 0$$

Здесь $\vec{r}$ — радиус-вектор относительно полюса O, $\vec{V}$ — скорость жидкости, P — давление, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость, U — потенциал внешних массовых сил, $\vec{B}$ — магнитная индукция, μ — магнитная проницаемость, Q — объем жидкости.

Решение системы уравнений (1.1) ищется в виде

$$\begin{gathered} P = \frac{1}{2}\rho(w_0\times r)^2 + \rho U + 2\rho u_0(t)(xw_{0z} - zw_{0x}) - \rho y\frac{\partial u_0(t)}{\partial t} + \rho q(y,t) \\ \vec{V} = V_x(y,t)\vec{e}_x + u_0(t)\vec{e}_y + V_z(y,t)\vec{e}_z \\ \vec{B} = B_x(y,t)\vec{e}_x + B_0\vec{e}_y + B_z(y,t)\vec{e}_z, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $w_{0x} = \vec{w}_0 \cdot \vec{e}_x$; $w_{0z} = \vec{w}_0\vec{e}_z$, а $q(y,t)$ — неизвестная функция давления.

Для определения поля скоростей $\vec{V}$ и индукции $\vec{B}$ получаем следующую систему уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial V_x}{\partial t} + 2\omega_{0y}V_z = \nu\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} - u(t)\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{1}{\mu\rho}B_0\frac{\partial B_x}{\partial y} \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} - 2\omega_{0y}V_x = \nu\frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} - u_0(t)\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{1}{\mu\rho}B_0\frac{\partial B_z}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial y} = 2V(\vec{w}_0\times\vec{e}_y) - \frac{1}{\mu\rho}\left(B_x\frac{\partial B_x}{\partial y} + B_z\frac{\partial B_z}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial B_x}{\partial t} = B_0\frac{\partial V_x}{\partial y} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} = B_0\frac{\partial V_z}{\partial y} \end{gathered} \tag{1.3}$$

с граничными и начальными условиями вида

$$
\begin{gathered}
\vec{V}(y,t) = (\vec{u}(t), u_0(t)\vec{e}_y), \quad \text{при} \quad y = 0, \quad t > 0 \\
\vec{V}(y,t) = u_0(t)\vec{e}_y, \quad \text{при} \quad y = l, \quad t > 0 \\
\vec{B}(y,t) = B_0\vec{e}_y, \quad \text{при} \quad y = 0, \quad t > 0 \\
\vec{B}(y,z) = B_0\vec{e}_y, \quad \text{при} \quad y = l, \quad t > 0 \\
\vec{V}(y,0) = 0, \quad \text{при} \quad t = 0, \quad y > 0 \\
\vec{B}(y,0) = 0, \quad \text{при} \quad t = 0, \quad y > 0
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

Введем комплексную структуру

$$
\hat{V} = V_x(y,t) + iV_z(y,t) \quad \hat{u} = u_x + iu_z \quad \hat{B} = B_x(y,t) + iB_z(y,t)
$$

Тогда система уравнений (1.4), граничные и начальные условия примут вид

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} - i2\Omega\hat{V} = \nu\frac{\partial^2\hat{V}}{\partial y^2} - u_0(t)\frac{\partial^2\hat{V}}{\partial y} + \frac{B_0}{\mu\rho}\frac{\partial}{\partial y}\hat{B} \\
\frac{\partial \hat{B}}{\partial t} = B_0\frac{\partial \hat{V}}{\partial y}, \quad \text{где} \quad \Omega = \omega_{0y}
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

$$
\begin{gathered}
\hat{V}(0,t) = \hat{u}(t), \quad \text{при} \quad y = 0, \quad t > 0 \\
\hat{V}(l,t) = 0, \quad \text{при} \quad y = l, \quad t > 0 \\
\hat{B}(0,t) = 0, \quad \text{при} \quad y = 0, \quad t > 0 \\
\hat{B}(l,t) = 0, \quad \text{при} \quad y = 0, \quad t > 0 \\
\hat{V}(y,0) = 0, \quad \hat{B}(y,0) = 0, \quad \text{при} \quad t = 0, \quad y > 0
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

Исключая магнитную индукция из уравнений (1.5), получаем

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2\hat{V}}{\partial t^2} - \left(i2\Omega + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2} - u_0(t)\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\hat{V}}{\partial t} - \frac{B_0^2}{\mu\rho}\frac{\partial^2\hat{V}}{\partial y^2} = 0 \\
\hat{V}(0,t) = \hat{u}(t) \\
\hat{V}(l,t) = 0 \\
\hat{V}(y,0) = 0
\end{gathered}
\tag{1.7}
$$

С использованием интеграла Дюамеля представим решение уравнения (1.7) в виде

$$
\hat{V}(y,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \hat{u}(t-\tau)\hat{V}_1(y,\tau)d\tau, \tag{1.8}
$$

здесь $\hat{V}_1(y,t)$ – решение краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \hat{V}_1}{\partial t^2} - \left(i2\Omega + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2} - u_0(t)\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \hat{V}_1}{\partial y^2}\frac{B_0^2}{\mu\rho} = 0$$
$$\hat{V}_1(0,t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}, \quad \hat{V}_1(l,t) = 0 \tag{1.9}$$

Рассмотрим случай $u_0(t) = u_0 = \mathrm{const}$.

Введем образ Лапласа

$$\tilde{V}(y,p) = \int_0^\infty e^{-pt}\hat{V}(y,t)dt$$

В пространстве изображений задача (1.9) принимает вид

$$a(p)\frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial y^2} - u_0 p\frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial y} - (p^2 - i2\Omega p)\tilde{V}_1 = 0$$
$$\tilde{V}_1(0,p) = \frac{1}{p}, \quad \tilde{V}_1(l,p) = 0, \tag{1.10}$$

где $a(p) = \nu p + B_0^2/\mu\rho$.

Характеристическое уравнение (1.10) и его корни имеют вид

$$a\chi^2 - u_0 p\chi - (p^2 - i2\Omega p) = 0$$
$$\chi_{1,2} = \frac{u_0 p}{2a} \pm \sqrt{\frac{u_0^2 p^2}{4a^2} + \frac{p^2 - i2\Omega p}{a}} = \sigma \pm \omega, \tag{1.11}$$

где $\sigma = \dfrac{u_0 p}{2\nu a}$; $\omega^2 = \dfrac{u_0^2 p^2}{4a^2} + \dfrac{p^2 - i2\Omega p}{a}$.

Решение уравнения (1.10) записывается в форме

$$\tilde{V}_1(y,p) = C_1(p)e^{(\sigma+\omega)y} + C_2(p)e^{(\sigma-\omega)y}$$

Определяя постоянные интегрирования из граничных условий, получаем

$$\hat{V}_1(y,p) = \frac{1}{p}e^{\sigma y}\frac{\mathrm{sh}(l-y)\omega}{\mathrm{sh}\,\omega l} = F(y,p)G(y,p), \tag{1.12}$$

где $F(y,p) = \dfrac{1}{p}e^{\sigma y}$, $G(y,p) = \dfrac{\mathrm{sh}(l-y)\omega}{\mathrm{sh}\,\omega l}$.

Разложим функцию $G(y,p) = \dfrac{\mathrm{sh}(l-y)\omega}{\mathrm{sh}\,\omega l}$ на простые дроби [7]:

$$G(y,p) = 1 - \frac{y}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{\sin\lambda_n(y-l)}{n}\frac{u_0^2 p^2 + 4a(p^2 - i2\Omega p)}{u_0^2 p^2 + 4(p^2 - i2\Omega p)a + 4\lambda_n^2 a^2}, \tag{1.13}$$

где $\lambda_n = \pi n/l$.

Согласно известным формулам операционного исчисления [8] найдем оригиналы функций $F(y,p)$, $G(y,p)$

$$f(y,t) = \exp\left(\frac{u_0}{2\nu}y - \alpha t\right)J_0\left(2\sqrt{\frac{u_0}{2\nu}\alpha y t}\right), \tag{1.15}$$

где $\alpha = B_0^2/\mu\rho\nu$, $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

$$g(y,t) = \left(1 - \frac{y}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin\lambda_n(l-y)}{n}\right)\frac{\partial}{\partial t}(A_n e^{p_{1n}t} + B_n e^{p_{2n}t} + C_n e^{p_{3n}t}),$$

где

$$A_n = \frac{p_{1n}^2 + p_{1n}s + d}{(p_{1n} - p_{2n})(p_{1n} - p_{3n})}, \quad B_n = \frac{p_{2n}^2 + p_{2n}s + d}{(p_{2n} - p_{1n})(p_{2n} - p_{3n})}$$
$$C_n = \frac{p_{3n}^2 + p_{3n}s + d}{(p_{3n} - p_{1n})(p_{3n} - p_{2n})}, \tag{1.16}$$

$p_{1n..3n}$ – корни кубического уравнения

$$p^3 + \alpha_n p^2 + b_n p + c_n = 0,$$

и введены обозначения: $s = \alpha - i2\Omega + \frac{u_0^2}{4\nu}$, $a_n = 2 - i2\Omega + \frac{u_0^2}{4\nu} + \nu\lambda_n^2$, $b_n = 2\nu\alpha\lambda_n^2 - i2\alpha\Omega$, $c_n = \nu\alpha^2\lambda_n^2$, $d = -i2\Omega\alpha$.

Тогда выражение для $\hat{V}_1$ дается сверткой функций $f(y,t)$ и $g(y,t)$

$$\hat{V}_1(y,t) = \left(1 - \frac{y}{l} + \frac{2}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin\lambda_n(l-y)}{n}\right)\times$$
$$\times\int_0^t \frac{\partial}{dt}\left(A_n e^{p_{1n}(t-\tau)} + B_n e^{p_{2n}(t-\tau)} + C_n e^{p_{3n}(t-r)}\right)J_0\left(2\sqrt{\frac{u_0}{2y}\alpha yr}\right)d\tau$$

или, проведя дифференцирование

$$\hat{V}_1(y,t) = \left(1 - \frac{y}{l} + \frac{2}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin\lambda_n(l-y)}{n}\right)\int_0^t\Big(A_n p_{1n} e^{p_{1n}(t-\tau)} +$$
$$+ B_n p_{2n} e^{p_{2n}(t-\tau)} + C_n p_{3n} e^{p_{3n(t-r)}}\Big) J_0\left(2\sqrt{\frac{u_0}{2v}\alpha yr}\right)d\tau \tag{1.17}$$

Таким образом, решение задачи (1.7) определяется формулами (1.8) и (1.17)

$$\hat{V}(y,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \hat{u}(t-\tau)\hat{v}_1(y,t)d\tau \tag{1.18}$$

Векторы касательных направлений, действующие со стороны жидкости на верхнюю и нижнюю стенки щели, находятся по формулам

$$\hat{f}_0 = \rho v \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \hat{u}(\tau)\frac{\partial \hat{V}_1}{\partial y}(0, t-\tau)d\tau$$

и

$$\hat{f}_l = \rho v \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \hat{u}(\tau)\frac{\partial \hat{V}_1}{\partial y}(l, t-\tau)d\tau$$

Вектор магнитной индукции находится из соотношения

$$\frac{\partial \hat{B}}{\partial t} = B_0\frac{\partial \hat{V}}{\partial y}; \quad \hat{B}(y,t) = B_0\int_0^t \hat{u}(t-\tau)\frac{\partial V_1(y,\tau)}{dy}d\tau,$$

где $\hat{V}_1(y,r)$ определяется формулой (1.17).

2. Поле скоростей потока, индуцированное движением одной из стенок. Пусть одна из плоскостей Q_0, составляющих границы щели, движется в продольном направлении со скоростью $\vec{u}(t) = u(0)e^{\lambda t}$, $\lambda = -\alpha + i\omega$.

Рассмотрим "нормальные" колебания вязкой электропроводной жидкости во вращающейся щели, т.е. будем изучать класс движений, в которых все временные факторы зависят от времени, посредством множителя $e^{\lambda t}$. Тогда система уравнений (1.5), граничные и начальные условия принимают вид

$$\lambda\hat{v} - i2\Omega\hat{v} = \nu\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial y^2} - u_0\lambda\frac{\partial\hat{v}}{\partial y} + \frac{B_0}{\mu\rho}\frac{\partial\hat{B}}{\partial y}$$

$$\lambda\hat{B} = B_0\frac{\partial\hat{v}}{\partial y}$$

$$\hat{v}(0,t) = \hat{u} \quad \text{при} \quad y = 0, \tag{2.1}$$

$$\hat{v}(l,t) = 0 \quad \text{при} \quad y = l,$$

$$\hat{v}(y,0) = 0, \quad \hat{B}(y,0) = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad y > 0.$$

Исключая из системы (2.1) магнитную индукцию для функции $\hat{v}(y)$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(\nu + \beta)\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial y^2} - u_0\frac{\partial\hat{v}}{\partial y} - (\lambda - i2\Omega)\hat{v} = 0; \quad 0 < y < l \tag{2.2}$$

и граничные условия

$$\hat{v}(0) = \hat{u}(0), \quad \hat{v}(l) = 0, \tag{2.3}$$

где $\beta = B_0^2/\mu\rho\lambda$.

Корни характеристического уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{\lambda\hat{u}}{2\nu(\lambda + \alpha)} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2 u_0^2}{4\nu^2(\lambda + \alpha)^2} + \frac{\lambda(\lambda - i2\Omega)}{\nu(\lambda + \alpha)}} \tag{2.4}$$

Введем обозначения

$$\sigma = \frac{\lambda u_0}{2\nu(\lambda + \alpha)}; \quad q^2 = \sigma^2 + \frac{\lambda(\lambda - i2\Omega)}{\nu(\lambda + \alpha)}$$

Тогда $\chi_{1,2} = \sigma \pm q$. Общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$\hat{V}(y) = e^{\sigma y}(c_1 e^{qy} + c_2 e^{-qy}),$$

где c_1 и c_2 произвольные постоянные. Определяя постоянные интегрирования из граничных условий (2.3), получаем "нормальные" колебания вязкой электропроводной жидкости во вращающейся щели в постоянном магнитном поле при наличии поперечного потока

$$\hat{V}(y,t) = e^{\lambda t}\hat{u}(0)e^{\sigma y}\frac{\operatorname{sh} q(l - y)}{\operatorname{sh} ql} \tag{2.5}$$

С помощью решений (2.5) находим векторы касательных напряжений, действующие со стороны жидкости на верхнюю и нижнюю стенки щели

$$\hat{f}_0 = \rho\nu e^{\lambda t}\hat{u}(0)\frac{\sigma \operatorname{sh} ql - q \operatorname{ch} ql}{\operatorname{sh} ql} \tag{2.6}$$

$$\hat{f}_e = -\rho\nu e^{\lambda t}\hat{u}(0)\frac{q e^{\sigma l}}{\operatorname{sh} ql} \tag{2.7}$$

Из выражений (2.5)–(2.7) видно, что поле скоростей жидкости и силы трения существенно зависят от комплексного параметра q, связывающего параметры гармонических колебаний пластин и вращения щели.

3. Структура пограничных слоев. Исследуем подробнее выражение для поля скоростей (2.5). Выражение для комплексных декрементов затухания можно записать в виде

$$\sigma = \frac{u_0}{2}\frac{(m - in)}{m^2 + n^2} = \frac{u_0}{2}\frac{m}{m^2 + n^2} - \frac{u_0}{2}\frac{in}{m^2 + n^2} = \sigma_1 + i\sigma_2,$$

где

$$m = \nu - \frac{\alpha B_0^2}{\mu\rho(\alpha^2 + \omega^2)}; \quad n = -\frac{\omega B_0^2}{\mu\rho(\alpha^2 + \omega^2)}$$

Тогда, после некоторых преобразований поле скоростей жидкости можно представить в виде двух бегущих волн

$$\hat{v}(y,t) = \hat{A}_1 e^{i(\omega t - k_1 y)} + \hat{A}_2 e^{i(\omega t + k_2 y)}, \tag{3.1}$$

где

$$\hat{A}_1 = \exp\frac{\left(-\alpha t - \dfrac{y}{\delta_1}\right)\hat{u}(0)}{2\operatorname{sh} ql} e^{ql}, \quad \hat{A}_2 = \frac{\exp\left(-\alpha t + \dfrac{y}{\delta_2}\right)\hat{u}(0)}{2\operatorname{sh} ql} e^{-ql},$$

а показатель экспоненты определяется множителем

$$q = A + iB,$$

где $A = \left(\dfrac{\sqrt{C^2 + D^2} + C}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $B = \left(\dfrac{\sqrt{C^2 + D^2} - C}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$C = \frac{u_0^2}{4}\frac{(m^2 - n^2)}{(m^2 + n^2)^2} + \frac{-\alpha m + n(\omega - 2\Omega)}{m^2 + n^2}, \quad D = -\frac{u_0^2}{4}\frac{2mn}{(m^2 + n^2)^2} + \frac{\alpha n + m(\omega - 2\Omega)}{m^2 + n^2}.$$

При этом волновые числа имеют вид

$$\delta_1 = \frac{1}{A - \sigma_1}, \quad \delta_2 = \frac{1}{A + \sigma_1}, \quad k_1 = B - \sigma_2, \quad k_2 = B + \sigma_2$$

Эти волны распространяются по оси навстречу друг другу с разными фазовыми скоростями, т.к. волновые числа k_1, k_2 различны. Кроме того, скорости зависят от частоты. Это означает, что поток вязкой электропроводной жидкости представляет собой дисперсионную среду.

Групповые скорости этих волн $v_{\text{гр}} = \dfrac{d\omega}{dk}$ также различны. Они зависят от коэффициентов затухания и вращения системы, магнитной индукции и параметров жидкости. Амплитуды этих волн зависят от глубины щели, величины проекции угловой ско-

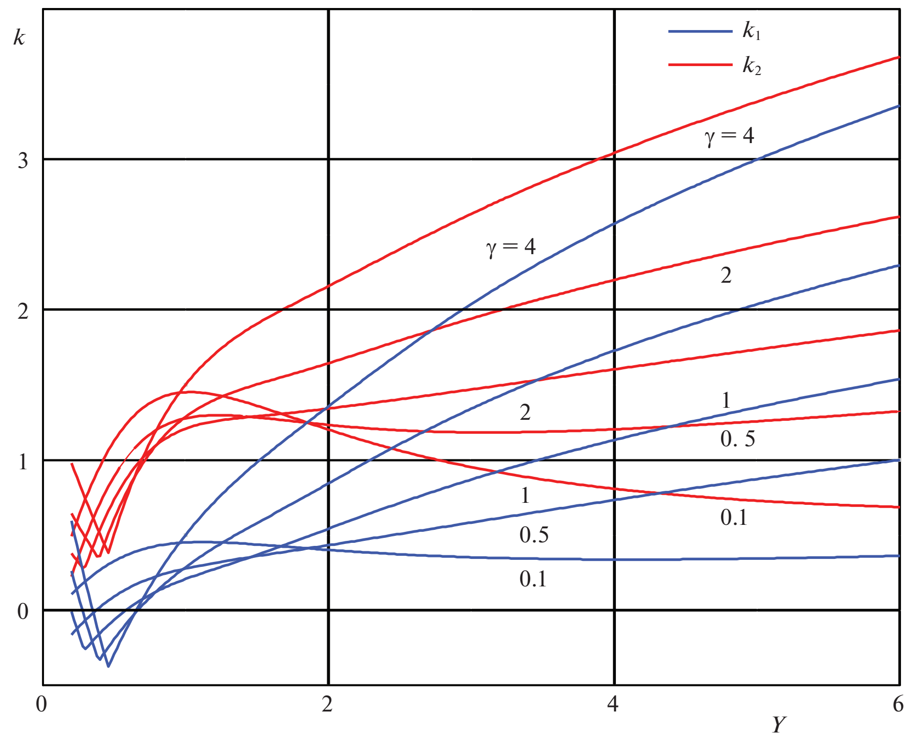


Рис. 2

рости на ось y, параметров движения стенки, магнитной индукции и параметров жидкости. Отметим, что каждая из этих волн затухает на глубине δ_1, δ_2 соответственно.

Выберем индукцию $B_0^2 = 2\nu\alpha\mu\rho$ и введем безразмерную переменную $Y = \omega/\alpha$. Тогда выражения для составляющих σ и определяющие величину комплексных амплитуд волн (3.1) функции C и D примут вид

$$\sigma_1 = \frac{u_0}{2\nu}\frac{\omega^2 - \alpha^2}{\omega^2 - \alpha^2} = \frac{u_0}{2\nu}\frac{Y^2 - 1}{Y^2 + 1}, \quad \sigma_2 = \frac{u_0}{2\nu}\cdot\frac{2\omega\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} = \frac{u_0}{2\nu}\frac{2Y}{Y^2 + 1}$$

$$C = \left(\frac{u_0}{2\nu}\right)^2\left(\frac{(Y^2 - 1)^2 - 4Y^2}{(Y^2 + 1)^2} + \gamma\frac{1 - Y^2 - 2Y(Y - s)}{Y^2 + 1}\right)$$

$$D = \left(\frac{u_0}{2\nu}\right)^2\left(\frac{4Y(Y^2 - 1)}{(Y^2 + 1)^2} + \gamma\frac{(Y - s)(Y^2 - 1) - 2Y}{Y^2 + 1}\right),$$

где $s = 2\Omega/\alpha$ и $\gamma = \dfrac{\alpha}{\nu}\Big/\left(\dfrac{u_0}{2\nu}\right)^2$.

На рис. 2 представлены графики зависимости волновых чисел $k_1 = B - \sigma_2$; $k_2 = B + \sigma_2$; от Y (частота ω) при фиксированном $s = 2$ и скорости вдува жидкости $u_0 = \sqrt{4\alpha\nu/\gamma}$ для различных значений γ.

В рассматриваемом случае $k(\omega)$ – волновое число, вообще говоря, комплексное. Его действительная часть характеризует зависимость фазовой скорости волны от частоты, а мнимая часть – зависимость коэффициента затухания амплитуды волны от частоты. Дисперсия, как правило, связана с внутренними свойствами материальной среды, обычно выделяются частотная (временная) дисперсия, когда поляризация в диспергирующей среде зависит от значений поля в предшествующие моменты времени (память), и пространственная дисперсия, когда поляризация в данной точке зависит от значений поля в некоторой области (нелокальность). Из графиков видно, что при малых скоростях вдува (большие значения параметра γ) волновые числа монотонно возрастают с увеличением частоты колебаний стенки. При больших скоростях вдува (γ мало) волновое число k_1, слабо меняясь, выходит на константу, в то время как волновое число k_2 имеет ярко выраженный максимум при $Y = 1$ и с увеличением частоты колебаний стенки остается постоянной.

Анализ зависимостей волновых чисел $\delta_1 = (A - \sigma_1)^{-1}$; $\delta_2 = (A + \sigma_1)^{-1}$ от Y (частоты ω) при фиксированных s ($s = 2$) и скорости вдува жидкости $u_0 = \sqrt{4\alpha\nu/\gamma}$ для различных значений γ показал, что существуют особые точки нестационарной задачи, в которых δ_1 обращается в бесконечность, а производная $d\delta_2/dY$ терпит разрыв первого рода, поэтому вопрос распространения волновых пакетов в данной среде нуждается в дополнительном исследовании. Для волны, излучаемой колеблющейся стенкой, особыми точками являются $Y = 1$, $Y = 4$ и ряд точек из промежутка $1 < Y < 2$ в окрестности которых волновое число δ_1 терпит разрыв. В то же время скорость волнового пакета V_{g1} терпит разрыв только в точке $Y = 1$.

Для неподвижной стенки особой точкой является $Y = 1$, в которой волновое число δ_2 имеет конечный скачок и с ростом частоты стремится к нулю, причем независимо от скорости вдува.

Анализ зависимости скоростей волновых пакетов от Y (частоты ω) при фиксированном s ($s = 2$) и скоростях вдува жидкости $u_0 = \sqrt{4\alpha\nu/\gamma}$ для различных значений γ показал, что групповая скорость V_{g1} терпит разрыв второго рода при $Y = 1$, а при дальнейшем росте частоты стремится к некоторой константе. Характер волнового пакета, излучаемого неподвижной стенкой, носит сложный характер. В особой точке $Y = 1$ кривая V_{g2} распадается на серии кривых, которые зависят от скорости вдува среды.

Полагая скорость пограничного потока $u_0 = 0$ получаем

$$\delta_1 = \delta_2 = \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}\left(1 + \frac{4\Omega^2}{\alpha^2}\right)}, \quad k_1 = k_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\nu}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{4\Omega^2}\right)^{-1},$$

что совпадает с ранее полученным результатом [4].

При $\alpha = 0$ волновые числа k_1 и δ_1 обращаются в нуль, при этом $k_2 = \nu/u_0$ и $\delta_2 = u_0/\nu$, т.е. волна, бегущая вдоль оси Oy от плоскости Q_0 к плоскости Q_1 отсутствует, а присутствует волна, бегущая от стенки Q_1 к стенке Q_0, которая затухает на расстоянии δ_2.

Заключение. Проведен анализ нестационарного течения вязкой электропроводной несжимаемой жидкости в плоско-параллельной конфигурации при наличии поперечного потока. Найдены аналитические решения трехмерных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики. При этом никаких ограничений на характер движения пластины не накладывается. Определены поле скоростей в потоке и векторы касательных напряжений, действующие из жидкости на стенки щели. Для случая "нормальных" колебаний одной из стенок рассмотрен случай резонанса, и исследована структура пограничных слоев, прилегающих к пластинам. Математическая процедура интегрирования системы дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи может быть использована при исследовании более сложных задач. Кроме того, полученные результаты могут быть использованы для учета силовых воздействий при движении жидкости в каналах различной формы, а также при моделировании различных физических явлений в движущейся жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955, 521 с.
2. *Гурченков А.А., Яламов Ю.И.* Нестационарный поток на пористой пластине при наличии вдува (отсоса) среды // ПМТФ. 1980. № 4. С. 66–69.
3. *Гурченков А.А.* Неустановившееся движение вязкой жидкости между вращающимися параллельными стенками // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 251–255.
4. *Гурченков А.А.* Неустановившееся движение вязкой электропроводной жидкости между вращающимися параллельными стенками при наличии магнитного поля // ПММ. 2019. Т. 83. № 5–6. С. 770–778.
5. *Холодова Е.С.* Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук, С.-Петербургский государственный университет, С.-Петербург, 2019. 451 с.
6. *Thornley Cl.* On Stokes and Rayleigh layers in a rotating system // Quart J. Mech. Appl. Math. 1968. V. 21. № 4. P. 455–462.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 632 с.
8. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
9. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.

Unsteady Flow of a Viscous Electrically Conductive Fluid between Rotating Parallel Walls in the Presence of Blowing (Suction) of the Medium and the Magnetic Field

A. A. Gurchenkov[a,b,#]

[a] *FRC “Informatics and Control” RAS, Moscow, Russia*

[b] *National Research University “MAI”, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: challenge2005@mail.ru*

We study the movements of a viscous electrically conductive incompressible fluid, which initially rotates as a solid with a constant angular velocity together with the parallel walls bounding it, under the action of suddenly beginning longitudinal vibrations of one of the walls. The walls make an arbitrary angle with the axis of rotation. An unsteady flow is induced by longitudinal vibrations of one of the walls, injection (suction) of the medium, produced perpendicular to the surface of the porous plate, and a suddenly switched on constant magnetic field directed normal to the walls.

Analytical solutions of the equations of magnetohydrodynamics are constructed. The velocity field and vectors of tangential stresses of a viscous conductive fluid acting on the walls of the slot are determined. The induced magnetic field in the flow of an electrically conductive fluid is determined.

A number of particular cases of wall motion are considered. On the basis of the results obtained, individual structures of the boundary layers at the walls of the gap are investigated.

Keywords: equations of magnetohydrodynamics, viscous conductive fluid, boundary layers

REFERENCES

1. *Slezkin N.A.* Dynamics of a Viscous Incompressible Fluid. Moscow: Gostekhizdat, 1955. 521 p. (in Russian)
2. *Gurchenkov A.A., Yalamov Yu.I.* Unsteady flow on a porous plate in the presence of injection (suction) of the medium // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 1980, no. 4, pp. 66–69. (in Russian)
3. *Gurchenkov A.A.* The unsteady motion of a viscous fluid between rotating parallel walls // JAMM, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 239–243.
4. *Gurchenkov A.A.* Unsteady motion of a viscous electrically conductive fluid between rotating parallel walls in the presence of a magnetic field // JAMM, 2019, vol. 83, no. 5–6, p. 770–778.
5. *Kholodova E.S.* Thesis for the degree of doctor Phys.-Math. Sci., St. Petersburg State University, St. Petersburg, 2019, 451 p. (in Russian)
6. *Thornley Cl.* On Stokes and Rayleigh layers in a rotating system // Quart J. Mech. Appl. Math., 1968, V. 21, no. 4, pp. 455–462.
7. *Prudnikov AP, Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integrals and Series. Moscow: Nauka, 1981. 632 p. (in Russian)
8. *Dech G.* Guide to the Practical Application of the Laplace Transform and z-transform. Moscow: Nauka, 1971.288 p. (in Russian)
9. *Korn G., Korn T.* Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers. Moscow: Nauka, 1978. 832 p. (in Russian)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 6, с. 733–756

УДК 539.4

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ ПЕРЕКРЕСТНО-АРМИРОВАННОЙ СРЕДЫ ИЗ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

© 2020 г. Т. П. Романова[1,*], А. П. Янковский[1,]**

[1] Институт теоретической и прикладной механики, им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

** e-mail: lab4nemir @gmail.com*

***e-mail: lab4nemir@rambler.ru*

Поступила в редакцию 26.01.2020 г.
После доработки 14.04.2020 г.
Принята к публикации 27.07.2020 г.

Разработана структурная модель гибридных композитов, перекрестно-армированных параллельно некоторой плоскости, для аналитического построения поверхностей и кривых текучести композиции при учете плоского напряженного состояния во всех составляющих. Материалы компонентов однородны и изотропны, могут по разному сопротивляться растяжению и сжатию. Их механическое поведение описывается ассоциированным законом течения для жесткопластического тела с кусочно-линейными условиями текучести типа Йогансена (Johansen), Треска (Tresca), Ху (Hu), Ишлинского–Ивлева. Рассмотрены варианты расположения волокон вдоль траекторий главных напряжений в композиции и случаи перекрестного углового армирования, симметричного относительно этих траекторий. Исследовано влияние структуры армирования (направлений и плотностей) на размеры и форму кривых текучести и предельных кривых композиций. Численно показано, что пластическое течение в композициях ассоциировано с расчетными кривыми (поверхностями) текучести армированных сред. В качестве примера построены кривые текучести для металлокомпозиций с высокопрочным и низкопрочным связующим и предельные кривые для стеклопластиковых армированных сред. Выполнено сравнение расчетных кривых текучести композиций с аналогичными кривыми, полученными в рамках структурной модели с одномерным напряженным состоянием в арматуре.

Ключевые слова: гибридный композит, структурная модель, плоско-перекрестное армирование, жесткопластический материал, разносопротивляющийся материал, плоское напряженное состояние, критерий текучести типа Йогансена, критерий текучести типа Треска, критерий текучести Ху, критерий текучести Ишлинского–Ивлева

DOI: 10.31857/S0032823520050082

Введение. Изделия из композиционных материалов (КМ) имеют широкое применение [1–7]. Сочетание относительной легкости и высокой прочности КМ наиболее ярко проявляется в тонкостенных элементах конструкций типа пластин и оболочек [4, 8, 9], в которых часто возникает обобщенное плоское напряженное состояние (ПНС) или близкое к нему. Современные тонкостенные композитные изделия могут подвергаться высокоинтенсивному воздействию [3–5, 9], при котором компоненты композиции деформируются неупруго. Моделирование пластического поведения волокнистых пластин и оболочек сейчас находится в стадии становления.

При теоретическом анализе проблемы исчерпания несущей способности композитной конструкции необходима информация о поверхности текучести для армированной среды. Определение поверхности текучести – самостоятельная задача структурной механики композитных сред. Для расчета прочностных свойств волокнистых композитов, с учетом объемного содержания армирующих элементов, первой использована нитяная модель [10], в которой не рассматривается наличие связующей матрицы. Принято во внимание [11] влияние связующего материала в однонаправленно армированном КМ; при этом в волокнах учтены только продольные напряжения – так называемая, модель с одномерным напряженным состоянием в волокнах (МОНСВ), которая была обобщена [12] на случай плоского армирования по произвольным перекрестным направлениям. Структурные соотношения [12] в сочетании с определяющими уравнениями жесткопластического тела для компонентов позволили моделировать предельные состояния тонкостенных конструкций слоисто-волокнистой структур и построить при ПНС предельные кривые и кривые текучести для слоев с разными типами армирования. Были предложены [13] упрощенные условия текучести слоистых элементов при ортогональных направлениях укладки волокон. Напряженное состояние в арматуре здесь также принято одномерным.

Рассмотрены разные аспекты проблемы гомогенизации дисперсно-упрочненных и волокнистых композитных материалов из упругопластически деформируемых компонентов [3, 14–20]. Несущая способность, вычисляемая на основе таких решений, соответствует определению несущей способности по первому предельному состоянию, когда пластическое течение впервые начинается в одном из компонентов. При проектировании композитных изделий, рассчитанных по первому предельному состоянию, несущая способность высокопрочной арматуры используется неэффективно: в ней наибольшее значение интенсивности напряжений намного меньше предела текучести. Используемая в настоящем исследовании жесткопластическая модель, в отличие от приведенных выше моделей, позволяет определить несущую способность без выполнения полного упругопластического пошагового анализа при пропорционально возрастающем нагружении, т.е. без учета истории нагружения, а найденная при этом предельная нагрузка соответствует определению несущей способности элементов по второму предельному состоянию.

Обсуждены [21] вопросы проявления разносопротивляемости материалов, возникновения ее в процессе технологической обработки [22–24] и актуальности проблемы математического моделирования пластического деформирования КМ из таких материалов. Учтена [12, 13] разносопротивляемость арматуры. На основе нитяной структурной модели и теории предельного равновесия получены [25] предельные нагрузки для железобетонных плит. Структурные модели [12] позже были обобщены на случаи, когда все компоненты по разному сопротивляются растяжению–сжатию, и до настоящего времени, наряду с моделью [14], используются для расчетов предельных состояний армированных тонкостенных элементов [26–30].

В рамках МОНСВ волокна не воспринимают нормальные и касательные напряжения в поперечном направлении. Такое допущение в практических расчетах возможно при сильно нарушенном сцеплении между связующим и арматурой, что часто наблюдается при перекрестном армировании [31, 32]. Современные технологии позволяют создавать волокнистые материалы с хорошей адгезией между составляющими композиции, которую при моделировании можно условно считать идеальной. Тогда для выполнения условий полного контакта арматуры со связующим необходимо учитывать сложное напряженное состояние во всех компонентах. Поэтому задача построения поверхностей текучести волокнистых сред при учете сложного напряженного состояния в арматуре является актуальной. Эта проблема исследована [33] в случае, когда

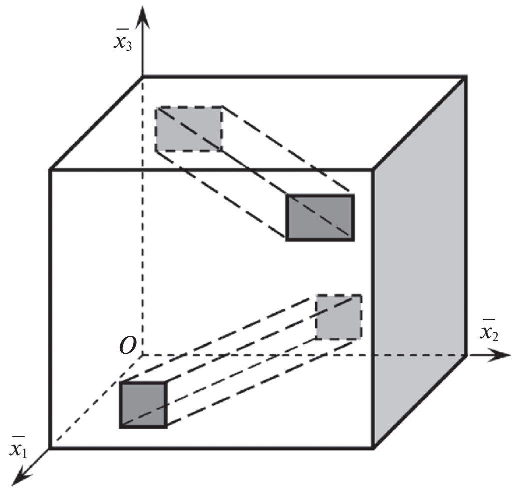


Рис. 1. Малый элемент армированной среды с двумя перекрестно направленными волокнами разных семейств.

жесткопластические материалы компонентов одинаково сопротивляются растяжению и сжатию и подчиняются критерию текучести Треска [23], а волокна расположены по направлениям главных напряжений в композитной среде при ПНС. Было продемонстрировано [33], что возможны такие композиции, для которых некоторые варианты МОНСВ занижают расчетные значения предела текучести в направлениях, ортогональных направлениям волокон, в результате чего недооценивается прочность армированных элементов конструкций.

В настоящей работе рассмотрено построение поверхностей и кривых текучести плоско-перекрестно армированных в произвольных направлениях гибридных композитов при ПНС и учете сложного напряженного состояния во всех компонентах композиции. Принято, что композиция состоит из жесткопластических материалов, имеющих разные свойства на растяжение и сжатие, а их кривые текучести в главных напряжениях при ПНС являются кусочно-линейными [34—36].

1. Формулировка задачи, основные предположения. В глобальной декартовой прямоугольной системе координат $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ рассмотрим композитную среду регулярной структуры, армированную K семействами непрерывных прямолинейных волокон по направлениям, параллельным отсчетной плоскости $O\bar{x}_1\bar{x}_2$ (рис. 1, где изображен малый элемент КМ в случае $K = 2$). Для определенности и простоты принимаем, что арматура имеет прямоугольные поперечные сечения, две стороны которых параллельны оси $O\bar{x}_3$, т.е. каждое волокно имеет две вертикальные и две горизонтальные боковые грани. Можно показать [33], что все полученные в настоящем исследовании результаты справедливы для арматуры с произвольной формой сечения (круглой, шестиугольной и др. [37]).

Относительное объемное содержание k-го компонента композиции обозначим ω_k, $0 \le k \le K$, где индекс $k = 0$ соответствует связующему, $k \ge 1$ — волокнам k-го семейства. Для ω_k выполняется условие

$$\sum_{k=0}^{K} \omega_k = 1 \qquad (1.1)$$

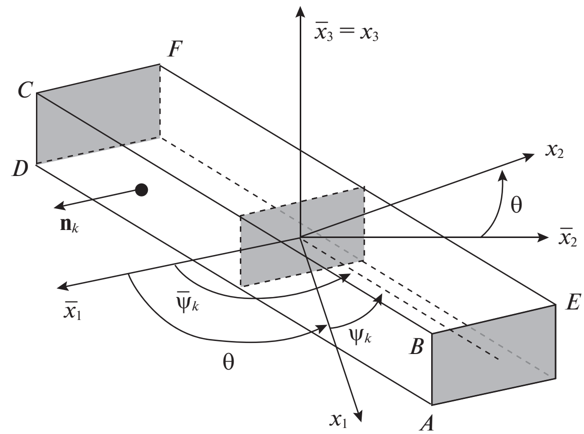


Рис. 2. Взаимная ориентация глобальной и локальной систем координат.

Величина ω_k при $k \geq 1$ является плотностью армирования k-м компонентом композиции.

Величины, относящиеся к глобальной системе $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, будем обозначать чертой сверху. Направление армирования волокнами k-го семейства определяется углом $\bar{\psi}_k$, отсчитываемым от положительного направления оси $O\bar{x}_1$ против часовой стрелки (рис. 2).

Определить действительное распределение напряжений в композитной среде, в которой связующий материал содержит многочисленные цилиндрические включения, сложно даже для однонаправленно армированной линейно-упругой среды [38–42]. Это затруднительно и в рассматриваемом случае жесткопластического деформирования материалов компонентов при произвольном перекрестном армировании. Для построения пригодных в инженерных расчетах кривых и поверхностей текучести рассматриваемой композиции примем гипотезы, схожие с использованными в [33, 39].

1. На макроуровне КМ представляет собой сплошное однородное анизотропное тело. При достаточно густом и равномерном наполнении связующей матрицы армирующими волокнами это допущение вполне приемлемо. К такому выводу приходят все исследователи, изучающие механические свойства дисперсно-армированных сред [38–42].

2. Между волокнами и связующей матрицей реализуется идеальный механический контакт (идеальная адгезия).

3. В пределах репрезентативной ячейки, выделенной из армированной среды на миниуровне, напряжения, деформации и скорости деформаций во всех компонентах и в композиции кусочно-постоянны. Эффекты высших порядков, связанные с изменением полей напряжений, деформаций и их скоростей на микроуровне в малых окрестностях границ контакта арматуры со связующим, не учитываем. Доводы допустимости такого предположения приведены в [33].

4. Усредненные напряжения, деформации и их скорости в композиции определяются усреднением по объему представительного элемента [38, 40]. Согласно предположению *3*, они пропорциональны объемному содержанию каждого компонента ω_k, $0 \leq k \leq K$.

5. В композитной среде реализуется ПНС: $\bar{\sigma}_{i3} = 0,\ i = \overline{1,3}$.

6. Материалы компонентов однородны и изотропны. Их механическое поведение подчиняется ассоциированному закону течения для жесткопластического тела с кусочно-линейными критериями текучести типа Треска (Treska), Йогансена (Johansen) [43], Ху (Hu) [34], Ишлинского–Ивлева [35] и др. [36].

2. Произвольное перекрестное армирование. Вывод соотношений на кривых текучести композиции. В силу предположений *3* и *4* усредненные напряжения $\bar{\sigma}_{ij}$ и скорости деформаций $\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}$ в композиции вычисляются через напряжения $\bar{\sigma}_{ij}^{(k)}$ и скорости деформаций $\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{(k)}$ в составляющих композиции по формулам:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sum_{k=0}^{K} \omega_k \bar{\sigma}_{ij}^{(k)}, \quad \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij} = \sum_{k=0}^{K} \omega_k \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{(k)}; \quad i, j = \overline{1,3}, \tag{2.1}$$

где точка означает частную производную по времени.

По предположению *2*, на поверхностях контакта волокна k-го семейства со связующим материалом для напряжений справедливо (рис. 2) [39]:

$$\begin{aligned} ABCD: &\quad \bar{\sigma}_{13}^{(k)}\bar{n}_1^{(k)} + \bar{\sigma}_{23}^{(k)}\bar{n}_2^{(k)} = \bar{\sigma}_{13}^{(0)}\bar{n}_1^{(k)} + \bar{\sigma}_{23}^{(0)}\bar{n}_2^{(k)} \\ BCFE: &\quad -\bar{\sigma}_{13}^{(k)}\bar{n}_2^{(k)} + \bar{\sigma}_{23}^{(k)}\bar{n}_1^{(k)} = -\bar{\sigma}_{13}^{(0)}\bar{n}_2^{(k)} + \bar{\sigma}_{23}^{(0)}\bar{n}_1^{(k)} \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$BCFE: \quad \bar{\sigma}_{33}^{(k)} = \bar{\sigma}_{33}^{(0)}; \quad 1 \le k \le K \tag{2.3}$$

$$\bar{n}_1^{(k)} = \cos(\bar{\psi}_k \pm \pi/2), \quad \bar{n}_2^{(k)} = \sin(\bar{\psi}_k \pm \pi/2) \tag{2.4}$$

Здесь $\bar{n}_1^{(k)}$, $\bar{n}_2^{(k)}$ – направляющие косинусы вектора единичной нормали $\mathbf{n}_k$ к поверхности $ABCD$. Равенства (2.2), (2.3) выполняются не только на боковых поверхностях $ABCD$ и $BCFE$ арматуры k-го семейства, но и на противоположных гранях (см. рис. 2), поэтому в равенстве (2.4) указаны два знака ($\pm$).

Из равенства (2.2) при учете соотношений (2.4) получим

$$\bar{\sigma}_{13}^{(k)} = \bar{\sigma}_{13}^{(0)}, \quad \bar{\sigma}_{23}^{(k)} = \bar{\sigma}_{23}^{(0)}; \quad 1 \le k \le K \tag{2.5}$$

Подставим равенства (2.3) и (2.5) в первое равенство (2.1) при $i = 1$–3 и $j = 3$. Тогда на основании предположения *5* при учете условия (1.1) имеем

$$\bar{\sigma}_{i3}^{(k)} = \bar{\sigma}_{i3} = 0; \quad 0 \le k \le K, \quad i = \overline{1,3} \tag{2.6}$$

Из равенств (2.6) вытекает, что в рамках используемых предположений во всех материалах композиции также имеет место ПНС.

В силу предположения *5* для построения поверхности текучести армированной среды в трехмерном пространстве усредненных напряжений $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$ и $\bar{\sigma}_{12}$ следует рассмотреть во всех составляющих композиции все возможные виды напряженного состояния $\bar{\sigma}_{11}^{(k)}$, $\bar{\sigma}_{22}^{(k)}$ и $\bar{\sigma}_{12}^{(k)}$ (см. (2.1) и (2.6)), удовлетворяющие критериям текучести соответствующего компонента композиции (см. предположение *6*). Произвольное ПНС может быть задано тремя напряжениями $\bar{\sigma}_{11}^{(k)}$, $\bar{\sigma}_{22}^{(k)}$ и $\bar{\sigma}_{12}^{(k)}$ или двумя главными напряжениями $\sigma_1^{(k)}$, $\sigma_2^{(k)}$ и углом θ_k между направлением главного напряжения $\bar{\sigma}_1^{(k)}$ $(0 \le k \le K)$ и осью $O\bar{x}_1$. Поэтому введем локальную декартову прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ $(Ox_3 = O\bar{x}_3)$, которая связана с направлениями главных напряжений в связующем ($k = 0$). Угол между направлением главного напряжения $\sigma_1^{(0)}$ и осью $O\bar{x}_1$ обозначим θ (см. рис. 2). В отличие от величин в глобальной системе координат $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ величины, относящиеся к локальной системе $Ox_1x_2x_3$, будем обозначать без черты сверху.

В локальной системе $Ox_1x_2x_3$ компоненты тензора напряжений в k-м материале композиции обозначим $\sigma_{11}^{(k)}$, $\sigma_{22}^{(k)}$ и $\sigma_{12}^{(k)}$ $(0 \le k \le K)$. Для них при $k = 0$ имеют место равенства:

$$\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_1^{(0)}, \quad \sigma_{22}^{(0)} = \sigma_2^{(0)}, \quad \sigma_{12}^{(0)} = 0 \tag{2.7}$$

В системе $Ox_1x_2x_3$ остаются справедливыми равенства (2.1) и (2.6), где нужно выполнить формальные замены

$$\bar{\sigma}_{ij} \to \sigma_{ij}, \quad \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij} \to \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad \bar{\sigma}_{ij}^{(k)} \to \sigma_{ij}^{(k)}, \quad \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{(k)} \to \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}; \quad 0 \le k \le K, \quad i, j = \overline{1,3} \tag{2.8}$$

при учете обозначений (2.7).

Согласно равенствам (2.6), (2.7) и предположению *6*, при ПНС кривая текучести для k-го компонента в главных напряжениях $\sigma_1^{(k)}$ и $\sigma_2^{(k)}$ является кусочно-линейной замкнутой линией, выпуклой (в силу выполнения постулата Друккера [34–36]) и симметричной относительно прямой $\sigma_1^{(k)} = \sigma_2^{(k)}$, $0 \le k \le K$ (рис. 3). Каждый прямолинейный участок этой линии соответствует определенному режиму пластического течения. В силу симметрии и для удобства изложения считаем, что кривая текучести состоит из четного числа $2N_k$ отрезков. Обозначим угловые точки на линии как $A_n^{(k)}$ $(0 \le n \le 2N_k,\ 0 \le k \le K)$, обходя ее против часовой стрелки, начиная от точки, лежащей на прямой $\sigma_1^{(k)} = \sigma_2^{(k)}$ в третьем квадранте плоскости $\sigma_1^{(k)}\sigma_2^{(k)}$ (см. рис. 3а). Точка $A_n^{(k)}$ имеет координаты $\left(s_{1,n}^{(k)}, s_{2,n}^{(k)}\right)$. Вершины $A_0^{(k)}$ и $A_{2N_k}^{(k)}$ совпадают. В общем случае отрезки $A_{N_k-1}^{(k)}A_{N_k+1}^{(k)}$ и $A_{2N_k-1}^{(k)}A_1^{(k)}$ могут лежать на одной прямой, например, в случае критерия Ишлинского–Ивлева [35]. Режим, соответствующий отрезку $A_{n-1}^{(k)}A_n^{(k)}$, назовем n-м режимом текучести в k-м компоненте. Для режимов $A_{n-1}^{(k)}A_n^{(k)}$ $(1 \le n \le N_k)$, лежащих ниже прямой $\sigma_1^{(k)} = \sigma_2^{(k)}$, выполняется

$$\sigma_1^{(k)} \ge \sigma_2^{(k)}; \quad 0 \le k \le K, \tag{2.9}$$

и для режимов $A_{n-1}^{(k)}A_n^{(k)}$ $(N_k + 1 \le n \le 2N_k)$, лежащих выше прямой $\sigma_1^{(k)} = \sigma_2^{(k)}$, будет $\sigma_1^{(k)} \le \sigma_2^{(k)}$, а равенство здесь и в (2.9) возможно только в точках $A_0^{(k)}$ и $A_{N_k}^{(k)}$. В силу симметрии кривой текучести рассмотрим только вариант (2.9).

На n-м режиме напряжения $\sigma_1^{(k)}$ и $\sigma_2^{(k)}$ связаны соотношениями

$$A_{n-1}^{(k)}A_n^{(k)}: \quad \Delta_{2,n}^{(k)}\sigma_1^{(k)} - \Delta_{1,n}^{(k)}\sigma_2^{(k)} = \Delta_n^{(k)} \quad (1 \le n \le 2N_k,\ 0 \le k \le K) \tag{2.10}$$

$$\Delta_n^{(k)} = \Delta_{2,n}^{(k)}s_{1,n-1}^{(k)} - \Delta_{1,n}^{(k)}s_{2,n}^{(k)} + \Delta_{1,n}^{(k)}\Delta_{2,n}^{(k)}, \quad \Delta_{i,n}^{(k)} = s_{i,n}^{(k)} - s_{i,n-1}^{(k)} \quad (i = 1, 2) \tag{2.11}$$

При ПНС главные напряжения $\sigma_i^{(k)}$ равны:

$$\sigma_i^{(k)} = \frac{1}{2}\left[\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} - (-1)^i \sqrt{(\sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)})^2 + 4(\sigma_{12}^{(k)})^2}\right]; \quad i = 1, 2, \quad 0 \le k \le K, \tag{2.12}$$

где знак перед радикалом выбран с учетом (2.9).

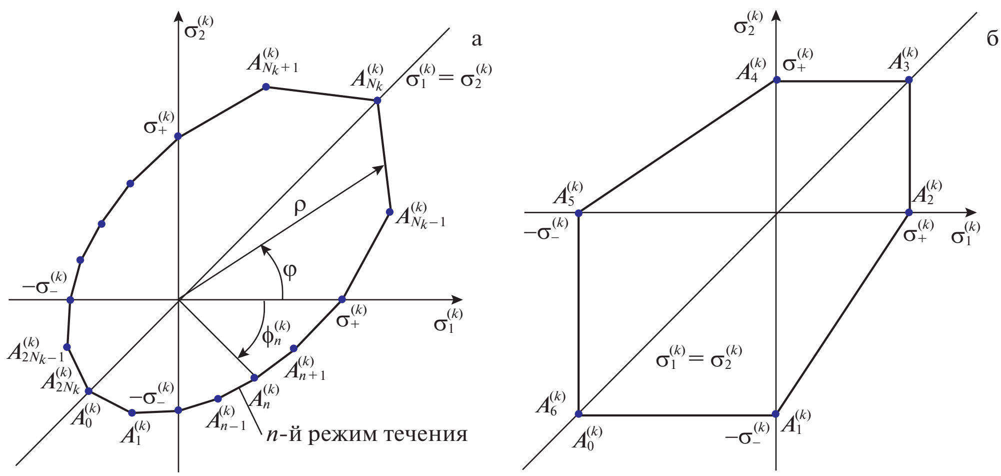


Рис. 3. Кусочно-линейные кривые текучести в главных напряжениях при ПНС: а – общий случай критерия пластичности; б – случай критерия пластичности Ху.

Из (2.10), (2.12) получим, что условие текучести (пластичности) k-го компонента композиции $f_n^{(k)}$ на n-м режиме имеет вид рациональной функции:

$$f_n^{(k)}\left(\sigma_{11}^{(k)},\sigma_{22}^{(k)},\sigma_{12}^{(k)}\right) \equiv a_n^{(k)}\left(\sigma_{11}^{(k)}\right)^2 - d_n^{(k)}\sigma_{11}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} + a_n^{(k)}\left(\sigma_{22}^{(k)}\right)^2 + e_n^{(k)}\left(\sigma_{12}^{(k)}\right)^2 - \\ - b_n^{(k)}\sigma_{11}^{(k)} - b_n^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} - c_n^{(k)} = 0; \quad 1 \le n \le N_k, \quad 0 \le k \le K \tag{2.13}$$

$$a_n^{(k)} = \Delta_{1,n}^{(k)}\Delta_{2,n}^{(k)}, \quad b_n^{(k)} = \Delta_n^{(k)}\left(\Delta_{1,n}^{(k)} - \Delta_{2,n}^{(k)}\right), \quad c_n^{(k)} = \left(\Delta_n^{(k)}\right)^2 \\ d_n^{(k)} = \left(\Delta_{1,n}^{(k)}\right)^2 + \left(\Delta_{2,n}^{(k)}\right)^2, \quad e_n^{(k)} = \left(\Delta_{1,n}^{(k)} + \Delta_{2,n}^{(k)}\right)^2 \tag{2.14}$$

Если n-й режим является горизонтальным или вертикальным (см. отрезки $A_0^{(k)}A_1^{(k)}$ и $A_3^{(k)}A_4^{(k)}$ или $A_2^{(k)}A_3^{(k)}$ и $A_5^{(k)}A_6^{(k)}$ на рис. 3 б), то $\Delta_{2,n}^{(k)} = 0$ или $\Delta_{1,n}^{(k)} = 0$ (см. (2.11)). Из выражений (2.14) следует $a_n^{(k)} = 0$ и $d_n^{(k)} = e_n^{(k)}$. Тогда функция (2.13) имеет вид

$$f_n^{(k)}\left(\sigma_{11}^{(k)},\sigma_{22}^{(k)},\sigma_{12}^{(k)}\right) \equiv -d_n^{(k)}\sigma_{11}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} + d_n^{(k)}\left(\sigma_{12}^{(k)}\right)^2 - b_n^{(k)}\sigma_{11}^{(k)} - b_n^{(k)}\sigma_{22}^{(k)} - c_n^{(k)} = 0 \\ 1 \le n \le N_k, \quad 0 \le k \le K \tag{2.15}$$

Рассмотрим главные напряжения в связующем материале $\sigma_1^{(0)}$ и $\sigma_2^{(0)}$ в полярных координатах (r,φ):

$$\sigma_1^{(0)}(r,\varphi) = r\cos\varphi, \quad \sigma_2^{(0)}(r,\varphi) = r\sin\varphi; \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

Тогда условие текучести для связующего материала примет вид $r = \rho(\varphi)$ (рис. 3а), а напряжения $\sigma_1^{(0)}$ и $\sigma_2^{(0)}$, удовлетворяющие этому условию, можно представить в параметрическом виде:

$$\sigma_1^{(0)}(\varphi) = \rho(\varphi)\cos\varphi, \quad \sigma_2^{(0)}(\varphi) = \rho(\varphi)\sin\varphi; \quad 0 \le \varphi < 2\pi \tag{2.16}$$

Для n-го режима кривой текучести из выражений (2.16) и (2.10) при $k = 0$ получим выражение для $\rho(\varphi)$:

$$\rho(\varphi) = \frac{\Delta_n^{(0)}}{\Delta_{2,n}^{(0)}\cos\varphi - \Delta_{1,n}^{(0)}\sin 2\varphi}; \quad \phi_{n-1}^{(0)} \le \varphi \le \phi_n^{(0)}, \quad 1 \le n \le 2N_0 \tag{2.17}$$

$$\phi_n^{(0)} = \operatorname{arctg}\left(s_{2,n}^{(0)}/s_{1,n}^{(0)}\right), \tag{2.18}$$

где $\Delta_{i,n}^{(0)}$ и $\Delta_n^{(0)}$ определены в (2.11), угол $\phi_n^{(0)}$ показан на рис. 3а при $k = 0$. Далее напряжения $\sigma_{ij}^{(k)}$ $(1 \le k \le K,\ i, j = 1,2)$ также выразим через параметр φ.

В силу предположения *2* из условия совпадения напряжений на боковой поверхности арматуры k-го семейства $ABCD$ и ей противоположной (см. рис. 2) при учете (2.7) кроме первого соотношения (2.2) имеем

$$\begin{gathered}\sigma_{11}^{(k)} n_1^{(k)}(\theta) + \sigma_{12}^{(k)} n_2^{(k)}(\theta) = \sigma_1^{(0)}(\varphi)\, n_1^{(k)}(\theta)\\ \sigma_{12}^{(k)} n_1^{(k)}(\theta) + \sigma_{22}^{(k)} n_2^{(k)}(\theta) = \sigma_2^{(0)}(\varphi)\, n_2^{(k)}(\theta); \quad 1 \le k \le K\end{gathered} \tag{2.19}$$

$$\begin{gathered}n_1^{(k)}(\theta) = -\sin\psi_k(\theta) = -\sin(\bar\psi_k - \theta)\\ n_2^{(k)}(\theta) = \cos\psi_k(\theta) = \cos(\bar\psi_k - \theta); \quad 1 \le k \le K\end{gathered} \tag{2.20}$$

Здесь $\psi_k(\theta) = \bar\psi_k - \theta$ – угол, задающий направление волокон k-го семейства в локальной системе $Ox_1x_2x_3$ и отсчитываемый от направления Ox_1; $n_1^{(k)}$, $n_2^{(k)}$ – направляющие косинусы вектора единичной нормали $\mathbf{n}_k$ к боковой поверхности $ABCD$ (и ей противоположной), определенные в системе $Ox_1x_2x_3$.

Из равенств (2.19) при $n_1^{(k)} \ne 0$ и $n_2^{(k)} \ne 0$ получим

$$\sigma_{ii}^{(k)} = \frac{1}{n_i^{(k)}(\theta)}\left[\sigma_i^{(0)}(\varphi)\, n_i^{(k)}(\theta) - \sigma_{12}^{(k)} n_j^{(k)}(\theta)\right] \quad (i, j = 1,2,\ i \ne j;\ 1 \le k \le K) \tag{2.21}$$

Подставим (2.21) в условие текучести (2.13) при $k \ge 1$ и получим для $\sigma_{12}^{(k)}$ квадратное уравнение (при $i, j = 1,2,\ i \ne j$):

$$\begin{gathered}A_n^{(k)}(\theta)\left(\sigma_{12}^{(k)}\right)^2 + B_n^{(k)}(\theta,\varphi)\,\sigma_{12}^{(k)} + C_n^{(k)}(\theta,\varphi) = 0; \quad 1 \le n \le N_k, \quad 1 \le k \le K\\ A_n^{(k)}(\theta) = a_n^{(k)}\left[\left(n_1^{(k)}(\theta)\right)^4 + \left(n_2^{(k)}(\theta)\right)^4\right] + \left(e_n^{(k)} - d_n^{(k)}\right)\left(n_1^{(k)}(\theta)\, n_2^{(k)}(\theta)\right)^2\\ B_n^{(k)}(\theta,\varphi) = \sum_{i=1}^{2} n_j^{(k)}(\theta)\left(n_i^{(k)}(\theta)\right)^3\left(d_n^{(k)}\sigma_i^{(0)}(\varphi) - 2a_n^{(k)}\sigma_j^{(0)}(\varphi) + b_n^{(k)}\right)\\ C_n^{(k)}(\theta,\varphi) = \left(n_1^{(k)}(\theta)\, n_2^{(k)}(\theta)\right)^2\left\{a_n^{(k)}\left[\left(\sigma_1^{(0)}(\varphi)\right)^2 + \left(\sigma_2^{(0)}(\varphi)\right)^2\right] -\right.\\ \left. - d_n^{(k)}\sigma_1^{(0)}(\varphi)\,\sigma_2^{(0)}(\varphi) - b_n^{(k)}\left(\sigma_1^{(0)}(\varphi) + \sigma_2^{(0)}(\varphi)\right) - c_n^{(k)}\right\}\end{gathered} \tag{2.22}$$

Решения уравнения (2.22) при $A_n^{(k)} \ne 0$ имеют вид

$$\begin{gathered}\sigma_{12,n}^{(k)}(\theta,\varphi) = \frac{-B_n^{(k)}(\theta,\varphi) \pm \sqrt{D_n^{(k)}(\theta,\varphi)}}{2A_n^{(k)}(\theta)}; \quad 1 \le n \le N_k, \quad 1 \le k \le K\\ D_n^{(k)}(\theta,\varphi) = \left(B_n^{(k)}(\theta,\varphi)\right)^2 - 4A_n^{(k)}(\theta)\, C_n^{(k)}(\theta,\varphi)\end{gathered} \tag{2.23}$$

Знак “±” в решении (2.23) выбирается из условия совпадения скоростей деформаций волокна k-го семейства и связующего материала в направлении армирования, которое рассмотрено в разделе *4*. При армировании волокнами k-го семейства вдоль направления первого главного напряжения в связующем ($\psi_k = \overline{\psi}_k - \theta = 0$) или вдоль направления второго главного напряжения ($\psi_k = \pi/2$) при любом выборе знака “±” для решения (2.23) выполняется $\sigma_{12,n}^{(k)} = 0$ $(1 \le n \le N_k, 1 \le k \le K)$.

Для горизонтального или вертикального n-го режима (отрезки $A_0^{(k)}A_1^{(k)}$, $A_3^{(k)}A_4^{(k)}$, $A_2^{(k)}A_3^{(k)}$, $A_5^{(k)}A_6^{(k)}$ на рис. 3б из выражений (2.15) и (2.21) имеем ($n_1^{(k)} \ne 0$ и $n_2^{(k)} \ne 0$):

$$\sigma_{12,n}^{(k)}(\theta,\varphi) = -C_n^{(k)}(\theta,\varphi)/B_n^{(k)}(\theta,\varphi); \quad 1 \le n \le N_k, \quad 1 \le k \le K \tag{2.24}$$

Если $n_i^{(k)} = 0$ и $n_j^{(k)} = \pm 1$ $(i, j = 1, 2,\ i \ne j)$, то из (2.19) следует

$$\sigma_{jj}^{(k)} = \sigma_j^{(0)}, \quad \sigma_{12}^{(k)} = 0, \tag{2.25}$$

а напряжение $\sigma_{ii}^{(k)}$ для не горизонтального и не вертикального n-го режима определяется из (2.13) при учете (2.25):

$$a_n^{(k)}\left(\sigma_{ii}^{(k)}\right)^2 + B_{i,n}^{(k)}(\varphi)\sigma_{ii}^{(k)} + C_{i,n}^{(k)}(\varphi) = 0, \tag{2.26}$$

где $1 \le n \le N_k, 1 \le k \le K,\ i, j = 1, 2, i \ne j$.

$$B_{i,n}^{(k)}(\varphi) = -d_n^{(k)}\sigma_j^{(0)}(\varphi) - b_n^{(k)}, \quad C_{i,n}^{(k)}(\varphi) = a_n^{(k)}\left(\sigma_j^{(0)}(\varphi)\right)^2 - b_n^{(k)}\sigma_j^{(0)}(\varphi) - c_n^{(k)}$$

Решения уравнения (2.26) имеют вид ($n_i^{(k)} = 0$, $n_j^{(k)} = \pm 1$, $(i, j = 1, 2,\ i \ne j)$):

$$\sigma_{ii,n}^{(k)}(\varphi) = \frac{-B_{i,n}^{(k)}(\varphi) \pm \sqrt{\left(B_{i,n}^{(k)}(\varphi)\right)^2 - 4a_n^{(k)}C_{i,n}^{(k)}(\varphi)}}{2a_n^{(k)}} \tag{2.27}$$

Знак “±” в (2.27) выбирается из тех же условий, что и (2.23), которые рассмотрены в разд. 4. Для горизонтального или вертикального n-го режима напряжение $\sigma_{ii}^{(k)}$ определяется из (2.15), (2.25) $(1 \le n \le N_k, 1 \le k \le K,\ i, j = 1, 2,\ i \ne j)$:

$$\sigma_{ii,n}^{(k)}(\varphi) = -\left(b_n^{(k)}\sigma_j^{(0)} + c_n^{(k)}\right)/\left(d_n^{(k)}\sigma_j^{(0)} + b_n^{(k)}\right) \tag{2.28}$$

Соотношения (2.23), (2.24) при $n_1^{(k)} \ne 0$ и $n_2^{(k)} \ne 0$ и равенства (2.25), (2.27), (2.28) при $n_i^{(k)} = 0$ и $n_j^{(k)} = \pm 1$ $(i, j = 1, 2,\ i \ne j)$ дают двухпараметрические зависимости для напряжений в арматуре

$$\begin{gathered}\sigma_{ij,n}^{(k)} = \sigma_{ij,n}^{(k)}(\theta,\varphi); \quad 0 \le \theta, \quad \varphi < 2\pi, \quad 1 \le n \le N_k \\ 1 \le k \le K, \quad i, j = 1, 2\end{gathered} \tag{2.29}$$

Усредним напряжения (2.29) (с учетом соотношений (2.7) и (2.16)) по объему представительного элемента композиции (см. (2.1), принимая во внимание (2.8)), тогда получим двухпараметрическую зависимость усредненных напряжений

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\theta,\varphi) = \sum_{k=0}^{K}\omega_k\sigma_{ij}^{(k)}(\theta,\varphi); \quad 0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad i, j = 1, 2, \tag{2.30}$$

где правые части известны. В зависимостях (2.30) у напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$ опущен нижний индекс n (см. (2.23), (2.27) и (2.29)), т.к. подразумевается, что при текущем значении φ

в равенствах (2.23) и (2.27) не только однозначно выбран знак “±”, но и однозначно определен номер *n* режима пластического течения для *k*-го компонента.

Соотношения (2.30) задают параметрическую от (θ,φ) зависимость поверхности текучести рассматриваемой среды в трехмерном пространстве напряжений σ_{11}, σ_{22} и σ_{12}, определенных в локальной системе $Ox_1x_2x_3$. В глобальной системе $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ усредненные напряжения $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$ и $\bar{\sigma}_{12}$ связаны с σ_{11}, σ_{22} и σ_{12} следующими равенствами, полученными при повороте системы координат на угол $-\theta$ вокруг оси $O\bar{x}_3 = Ox_3$ [39] $(0 \le \theta < 2\pi, 0 \le \varphi < 2\pi)$:

$$\begin{gathered}
\bar{\sigma}_{11}(\theta,\varphi) = \sigma_{11}(\theta,\varphi)\cos^2\theta + \sigma_{22}(\theta,\varphi)\sin^2\theta - \sigma_{12}(\theta,\varphi)\sin 2\theta \\
\bar{\sigma}_{22}(\theta,\varphi) = \sigma_{11}(\theta,\varphi)\sin^2\theta + \sigma_{22}(\theta,\varphi)\cos^2\theta + \sigma_{12}(\theta,\varphi)\sin 2\theta \\
\bar{\sigma}_{12}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}[\sigma_{11}(\theta,\varphi) - \sigma_{22}(\theta,\varphi)]\sin 2\theta + \sigma_{12}(\theta,\varphi)\cos 2\theta
\end{gathered} \tag{2.31}$$

Искомая поверхность текучести в трехмерном пространстве усредненных напряжений $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$ и $\bar{\sigma}_{12}$ определяется параметрически из зависимостей (2.30) и (2.31).

3. Случай симметричного армирования. Рассмотрим интересный и практически важный пример, когда в КМ число семейств арматуры четное ($K = 2N$) и для каждого семейства определено парное ему семейство. Волокна парных семейств выполнены из одного материала ($\sigma_{\pm}^{(2k-1)} = \sigma_{\pm}^{(2k)}$, где $\sigma_{+}^{(k)}$, $\sigma_{-}^{(k)}$ – пределы текучести *k*-го компонента композиции при растяжении и сжатии), имеют одинаковые плотности армирования ($\omega_{2k-1} = \omega_{2k}$) и расположены симметрично относительно оси $O\bar{x}_1$: $\bar{\psi}_{2k-1} = -\bar{\psi}_{2k}$, $1 \le k \le N$ (рис. 4). Считаем, что оси $O\bar{x}_i$ $(i = 1,2)$ совпадают с направлениями главных напряжений тензора усредненных напряжений в композиции, поэтому вместе с предположением *5* выполняется условие $\bar{\sigma}_{12} \equiv 0$. В силу предположения *1* и симметрии структуры армирования относительно $O\bar{x}_1$ и $O\bar{x}_2$ эти оси совпадают с направлениями главных напряжений в связующей матрице: $O\bar{x}_i = Ox_i$ $(i = 1–3)$, т.е. при $k = 0$ кроме (2.6) выполняется равенство $\bar{\sigma}_{12}^{(0)} \equiv 0$. При этом значение одного из параметров фиксировано: $\theta \equiv 0$ ($\bar{\psi}_k = \psi_k$; см. (2.20) и рис. 2), а два первых равенства (2.31) при учете соотношений (2.30) однопараметрически (по φ) определяют кривую текучести композитной среды в главных усредненных напряжениях в композиции:

$$\bar{\sigma}_{ii} = \bar{\sigma}_i(\varphi); \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad i = 1,2$$

На рис. 5 изображены кривые текучести, рассчитанные в качестве примера для двух металлокомпозиций, состоящих из высокопрочного титанового (сплав Бета-III: $\sigma_{\pm}^{(0)} = \sigma_{0,2}^{(0)} = 1.37$ ГПа [45]) или низкопрочного алюминиевого (сплав АДМ: $\sigma_{\pm}^{(0)} = \sigma_{0,2}^{(0)} = 30$ МПа [24]) связующего, армированного двумя ($K = 2$) семействами высокопрочной стальной проволоки марки У8А ($\sigma_{\pm}^{(k)} = \sigma_{0,2}^{(k)} = 4$ ГПа [24], $k = 1,2$, где $\sigma_{0,2}^{(k)}$ – условный предел текучести). Для всех компонентов этих композиций $\sigma_{+}^{(k)} = \sigma_{-}^{(k)}$ $(0 \le k \le K)$ и справедлив пластический критерий Треска (см. рис. 3б при $\sigma_{+}^{(k)} = \sigma_{-}^{(k)}$).

Рассмотрены два варианта симметричного армирования при условии одинакового количества арматуры (см. рис. 4 при $k = 1$):

а) угловое перекрестно-симметричное армирование: $\psi_2 = -\psi_1$, $\omega_1 = \omega_2 = 0.25$;

б) ортогональное армирование вдоль направлений главных напряжений в композиции: $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = \pi/2$, $\omega_1 + \omega_2 = 0.5$.

На рис. 5а для варианта армирования *а*) сплошные кривые *1* и *2* рассчитаны для Ti–У8А-композиции, а кривая *3* – для АДМ–У8А-композиции. Кривые *1* и *3* соответ-

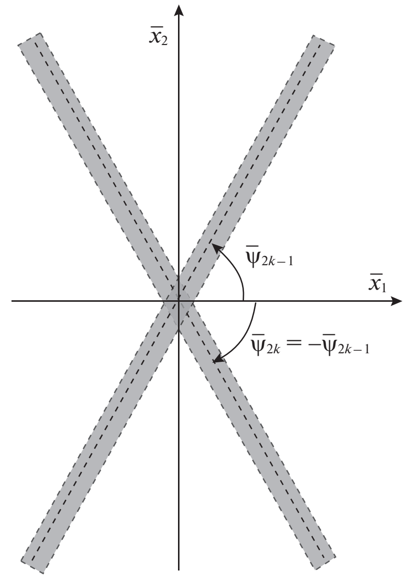


Рис. 4. Волокна двух семейств, симметрично уложенных относительно направлений главных напряжений в композиции.

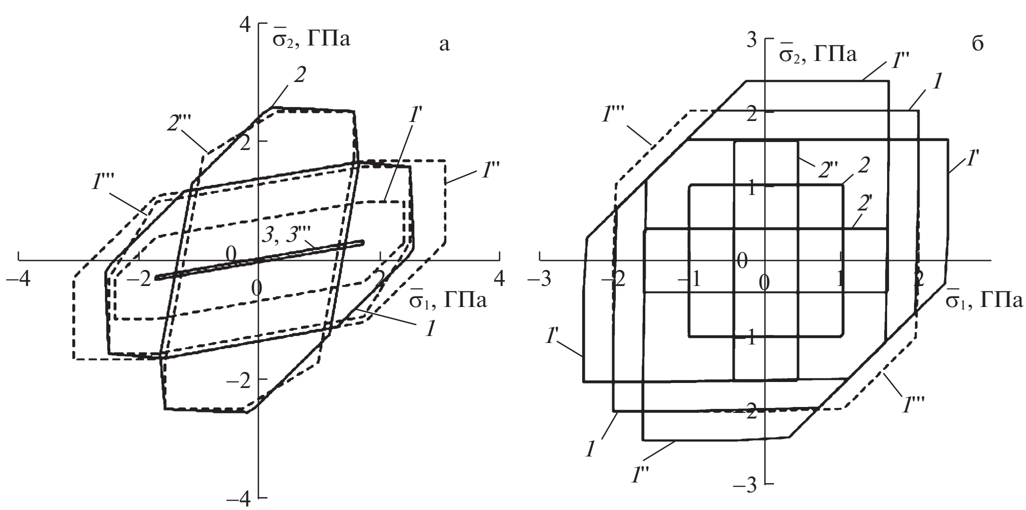


Рис. 5. Кривые текучести металлокомпозиций: а – перекрестно-симметричное угловое армирование; б – ортогональное армирование вдоль направлений главных напряжений в композиции.

ствуют углам армирования $\psi_1 = -\psi_2 = \pi/8$, а кривая *2* – углам $\psi_1 = -\psi_2 = 3\pi/8$. В случае АДМ–У8А-композиции при таких углах расположения волокон кривая текучести КМ получается зеркальным отражением кривой *3* относительно прямой $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$ и на рис. 5а не изображена, чтобы его не перегружать. Из сравнения кривых *1* и *2* на рис. 5а видно, что даже при использовании высокопрочного связующего материала (Ti) изме-

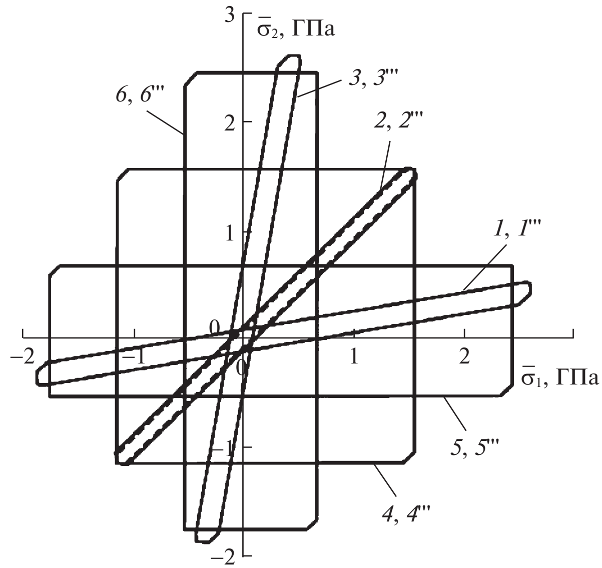


Рис. 6. Предельные кривые для стеклопластиковой композиции с разными структурами армирования.

нение углов армирования при сохранении общего количества волокон сильно меняет кривую текучести КМ. Зависимость размеров и формы кривой текучести от углов армирования еще ярче проявляется в случае низкопрочного связующего материала, например сплава АДМ (см. кривую *3* на рис. 5а).

На рис. 5б для варианта армирования *б*) сплошные кривые с номерами *1* рассчитаны для Ti–У8А-композиции, а кривые с номерами *2* – для АДМ–У8А-композиции. Кривые *1* и *2* получены при $\omega_1 = \omega_2 = 0.25$, кривые *1'* и *2'* – при $\omega_1 = 0.4$ и $\omega_2 = 0.1$, а кривые *1''* и *2''* – при $\omega_1 = 0.1$ и $\omega_2 = 0.4$. Видно, что в при низкопрочном связующем кривые текучести *2*, *2'* и *2''* по форме близки к прямоугольникам. Из сравнения кривых *1*, *1'*, *1''* и *2*, *2'*, *2''* видно, что при фиксированных углах армирования кривые текучести КМ зависят от изменения плотностей армирования ω_1 и ω_2, причем эта зависимость проявляется тем ярче, чем больше отношение пределов текучести волокон и связующего.

На рис. 6 изображены расчетные предельные кривые для КМ, компоненты которого являются разносопротивляющимися: $\sigma_+^{(0)} = 90$ МПа, $\sigma_-^{(0)} = 111$ МПа [22] и $\sigma_+^{(k)} = 6$ ГПа, $\sigma_-^{(k)} = 4.2$ ГПа [24] ($k = 1, 2$). Армирование выполнено двумя ($K = 2$) семействами высокопрочных волокон. Такие значения $\sigma_\pm^{(k)}$ ($0 \le k \le K$) условно соответствуют эпоксидной смоле и стекловолокнам, изготовленным из расплавленного кварца. Значение $\sigma_-^{(k)}$ ($k = 1, 2$) для арматуры условно соответствует потере устойчивости в результате сдвиговой деформации [24], поэтому волокна также можно считать разносопротивляющимися растяжению–сжатию. Принято, что предельное состояние составляющих КМ описывается критерием Ху (см. рис. 3б).

На рис. 6 сплошные кривые *1*–*3* рассчитаны при варианте армирования *а*), а кривые *4*–*6* – для варианта армирования *б*). Кривые *1*, *2* и *3* получены при $\psi_1 = -\psi_2 = \pi/8, \pi/4$ и $3\pi/8$ соответственно. Кривая *2* характеризует предельное состояние ортогонально армированной композиции, в которой направления армирования образуют углы $\pm\pi/4$ с направлениями главных напряжений в композиции. Из сравнения кривых *1—3* видно, что и в случае использования разносопротивляющихся составляющих КМ изменение углов армирования при сохранении общего количества волокон также существенно влияет на размеры и форму предельной кривой композиции.

Кривые *4—6* на рис. 6, как и кривая *2*, рассчитаны для ортогонально армированной композиции, когда траектории укладки волокон совпадают с направлениями главных напряжений в КМ ($\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = \pi/2$). Кривая *4* определена при $\omega_1 = \omega_2 = 0.25$, кривая *5* — при $\omega_1 = 0.4$ и $\omega_2 = 0.1$, а кривая *6* — при $\omega_1 = 0.1$ и $\omega_2 = 0.4$. Все кривые по форме близки к прямоугольникам. Из сравнения кривых *4—6* также следует, что при фиксированных углах армирования предельная кривая композиции значительно зависит от изменения плотностей армирования ω_1 и ω_2.

Кривые *2* и *4* на рис. 6 демонстрируют, как сильно изменяется предельная кривая ортогонально-армированного КМ при повороте структуры армирования на угол $\pi/4$ (вокруг оси $O\overline{x}_3$) относительно направлений главных напряжений.

Отметим, в случае $\psi_1 = -\psi_2 = 0$ или $\psi_1 = -\psi_2 = \pi/2$ (однонаправленное армирование, при котором направления армирования обоих семейств совпадают) предельные кривые, рассчитанные по рассматриваемому методу, совпадают с кривыми, рассчитанными по методике [21].

4. Определение усредненных скоростей деформаций композиции. Из предположения *6* и ассоциированного закона течения, для скоростей деформаций k-го компонента, определенных в системе $Ox_1x_2x_3$ (рис. 2), имеем:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} = \sum_{n=1}^{2N_k} c_n^{(k)}\dot{\lambda}_n^{(k)}\xi_{ij,n}^{(k)}, \quad \xi_{ij,n}^{(k)} \equiv \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial\sigma_{ij}^{(k)}}, \quad \dot{\lambda}_n^{(k)} > 0$$

$$i, j = \overline{1,3}, \quad 1 \le n \le 2N_k, \quad 0 \le k \le K \tag{4.1}$$

$$c_n^{(k)} = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad f_n^{(k)} = 0, \quad \dot{f}_n^{(k)} = \dfrac{\partial f_n^{(k)}}{\partial\sigma_{ij}^{(k)}}\dot{\sigma}_{ij}^{(k)} = 0 \quad (\text{нагружение}) \\ 0 \quad \text{при} \quad f_n^{(k)} = 0, \quad \dot{f}_n^{(k)} < 0 \quad (\text{разгрузка}) \quad \text{или} \quad f_n^{(k)} < 0 \end{cases}$$

$\dot{\lambda}_n^{(k)}$ — неопределенный параметр; $f_n^{(k)} = 0$ — уравнение поверхности текучести k-го компонента на n-м режиме [46] (см. режим $A_{n-1}^{(k)}A_n^{(k)}$ на рис. 3а).

Применяя для функции текучести $f_n^{(k)}$ при ПНС выражение (2.13) с учетом (2.7), по формулам (4.1) получим

$$\begin{gathered} \xi_{ii,n}^{(k)} = 2a_n^{(k)}\sigma_{ii,n}^{(k)} - d_n^{(k)}\sigma_{jj,n}^{(k)} - b_n^{(k)}; \quad j = 3 - j, \quad i = 1,2 \\ \xi_{12,n}^{(k)} = 2e_n^{(k)}\sigma_{12,n}^{(k)} \quad (\sigma_{12,n}^{(0)} = 0); \quad 1 \le n \le N_k, \quad 0 \le k \le K \end{gathered} \tag{4.2}$$

В силу определения системы $Ox_1x_2x_3$ из (2.7), (2.10), (4.1) и (4.2) следует

$$\xi_{ii,n}^{(0)} = -(-1)^i\,\Delta_{j,n}^{(0)} = \text{const}, \quad \xi_{12,n}^{(0)} = 0; \quad j = \overline{3,j}, \quad i = 1,2, \quad 1 \le n \le 2N_0 \tag{4.3}$$

Согласно гипотезам *2* и *3*, скорости деформаций волокна k-го семейства и связующего материала в направлении армирования должны совпадать, поэтому выполняются следующие кинематические соотношения [39]

$$\dot{\lambda}_l^{(k)}\xi_l^{(k)} = \dot{\lambda}_n^{(0)}\xi_{k,n}^{(0)}; \quad 1 \le n \le 2N_0, \quad 1 \le l \le N_k, \quad 1 \le k \le K, \tag{4.4}$$

где при учете соотношений (4.3)

$$\begin{gathered}\xi_l^{(k)} = \xi_{11,l}^{(k)}\cos^2\psi_k + \xi_{22,l}^{(k)}\sin^2\psi_k + \xi_{12,l}^{(k)}\sin 2\psi_k; \quad 1 \le l \le N_k \\ \xi_{k,n}^{(0)} = \xi_{11,n}^{(0)}\cos^2\psi_k + \xi_{22,n}^{(0)}\sin^2\psi_k, \quad 1 \le n \le 2N_0; \quad 1 \le k \le K\end{gathered} \tag{4.5}$$

Так как при активном нагружении k-го компонента композиции $\dot{\lambda}_n^{(k)} > 0$, $0 \le k \le K$ (см. (4.1)), из соотношений (4.4) следует

$$\operatorname{sign}\xi_l^{(k)} = \operatorname{sign}\xi_{k,n}^{(0)}; \quad 1 \le n \le 2N_0, \quad 1 \le l \le N_k, \quad 1 \le k \le K \tag{4.6}$$

При выборе знака "±" перед радикалами в выражениях (2.23) и (2.27) следует учитывать выполнение условий (4.6) при учете соотношений (4.2), (4.3) и (4.5).

После определения знаков из решений (2.23) и (2.27) при $1 \le n \le N_k$ необходимо однозначно выбрать номер n-го режима текучести в арматуре k-го семейства, который соответствует текущему напряженному состоянию в связующем материале (текущему значению полярного угла φ в выражениях (2.16) и (2.17)). Для этого решения (2.23) и (2.27) нужно подставить в выражения (2.12) и определить главные напряжения $\sigma_{i,n}^{(k)} \equiv \sigma_i^{(k)}\left(\sigma_{11,n}^{(k)}, \sigma_{22,n}^{(k)}, \sigma_{12,n}^{(k)}\right)$ $(1 \le n \le N_k)$ в волокнах k-го семейства $(1 \le k \le K)$. С учетом формул (2.10) и (2.11), режим (с номером n) пластического течения арматуры k-го семейства выбирается из условий

$$\phi_{n-1}^{(k)} \le \varphi_n^{(k)} < \phi_n^{(k)}, \tag{4.7}$$

где (см. (2.18) и рис. 3а)

$$\begin{gathered}\phi_l^{(k)} = \operatorname{arctg}\left(s_{2,l}^{(k)}/s_{1,l}^{(k)}\right) = \text{const}, \quad \varphi_n^{(k)} = \operatorname{arctg}\left(\sigma_{2,n}^{(k)}/\sigma_{1,n}^{(k)}\right) \ne \text{const} \\ -3\pi/4 \le \phi_l^{(k)} \le \pi/4, \quad -3\pi/4 \le \varphi_n^{(k)} \le \pi/4, \quad 0 \le l \le N_k, \quad 1 \le k \le K\end{gathered} \tag{4.8}$$

По условию (4.7) и соотношениям (4.8) можно однозначно определить номер n режима, который реализуется в арматуре k-го семейства при текущем значении параметра φ.

Из равенства (4.4) получим

$$\dot{\lambda}_l^{(k)} = \dot{\lambda}_n^{(0)}\xi_{k,n}^{(0)}/\xi_l^{(k)}; \quad 1 \le n \le 2N_0, \quad 1 \le l \le N_k, \quad 1 \le k \le K, \tag{4.9}$$

где индекс l выбран в соответствии с условиями (4.7) при учете соотношений (4.8). Согласно выражениям (4.2), (4.3), (4.5), (2.16), (2.17) и (2.29) при учете соотношения $\psi_k(\theta) = \bar{\psi}_k - \theta$ (см. (2.20) и рис. 2), в выражении (4.9) имеем двухпараметрические представления величин $\xi_l^{(k)} = \xi_l^{(k)}(\theta,\varphi)$ и $\xi_{k,n}^{(0)} = \xi_{k,n}^{(0)}(\theta,\varphi)$.

Используя вторую формулу (2.1) при учете переобозначений (2.8) и соотношений (4.2), (4.3), (4.5) и (4.9), определим усредненные скорости деформаций композитной среды в локальной системе координат $Ox_1x_2x_3$:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(\theta,\varphi) = \sum_{k=0}^{K}\omega_k\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} = \sum_{k=0}^{K}\omega_k\dot{\lambda}^{(k)}\xi_{ij}^{(k)} = \dot{\lambda}^{(0)}\sum_{k=0}^{K}\omega_k\xi_k^{(0)}\xi_{ij}^{(k)}/\xi^{(k)} = \dot{\lambda}^{(0)}\xi_{ij}(\theta,\varphi) \tag{4.10}$$

$$\xi_{ij}(\theta,\varphi) \equiv \sum_{k=0}^{K}\omega_k\xi_k^{(0)}(\theta,\varphi)\xi_{ij}^{(k)}(\theta,\varphi)/\xi^{(k)}(\theta,\varphi); \quad i,j = 1,2 \quad (\xi_0^{(0)}/\xi^{(0)} \equiv 1) \tag{4.11}$$

В соотношениях (4.10) и (4.11) опущены нижние индексы n и l (выполнены замены $\dot{\lambda}_l^{(k)} \to \dot{\lambda}^{(k)}, \dot{\lambda}_n^{(0)} \to \dot{\lambda}^{(0)}, \xi_{k,n}^{(0)} \to \xi_k^{(0)}, \xi_l^{(k)} \to \xi^{(k)}, \xi_{ij,l}^{(k)} \to \xi_{ij}^{(k)}, \xi_{ij,n}^{(0)} \to \xi_{ij}^{(0)}$), так как предполагается, что на основании формул (4.7) и (4.8) уже однозначно определен номер l-го режима в арматуре k-го семейства, соответствующий n-му текущему (по φ) номеру режима в связующей матрице.

Согласно соотношениям (4.2), (4.5) и (4.11), зависимости (4.10) параметрически $(\theta,\ \varphi)$ задают компоненты тензора усредненных скоростей деформаций рассматриваемого КМ, определенные в локальной системе $Ox_1x_2x_3$ (см. рис. 2). Для определения компонент усредненных скоростей деформаций композиции в глобальной системе $O\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ $(\dot{\overline{\varepsilon}}_{ij} = \dot{\lambda}^{(0)}\overline{\xi}_{ij},\ i, j = 1,2)$ нужно применять формулы пересчета, аналогичные (2.31) [39] $(0 \le \theta < 2\pi, 0 \le \varphi < 2\pi)$:

$$\begin{aligned}
\overline{\xi}_{11}(\theta,\varphi) &= \xi_{11}(\theta,\varphi)\cos^2\theta + \xi_{22}(\theta,\varphi)\sin^2\theta - \xi_{12}(\theta,\varphi)\sin 2\theta \\
\overline{\xi}_{22}(\theta,\varphi) &= \xi_{11}(\theta,\varphi)\sin^2\theta + \xi_{22}(\theta,\varphi)\cos^2\theta + \xi_{12}(\theta,\varphi)\sin 2\theta \\
\overline{\xi}_{12}(\theta,\varphi) &= \frac{1}{2}[\xi_{11}(\theta,\varphi) - \xi_{22}(\theta,\varphi)]\sin 2\theta + \xi_{12}(\theta,\varphi)\cos 2\theta
\end{aligned} \tag{4.12}$$

5. Обоснование выполнения ассоциированного закона течения для композиции. Чтобы показать выполнение ассоциированного закона течения, нужно доказать справедливость равенств (см. (4.10) и (4.12)) [21, 35]

$$\dot{\overline{\varepsilon}}_{ij} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\overline{\sigma}_{ij}} = \dot{\lambda}^{(0)}\overline{\xi}_{ij}, \quad \overline{\xi}_{ij} = \frac{\partial f}{\partial\overline{\sigma}_{ij}}, \quad \dot{\lambda} = \dot{\lambda}^{(0)}; \quad i, j = 1,2 \tag{5.1}$$

на гладких участках поверхности текучести композиции $f(\overline{\sigma}_{11}, \overline{\sigma}_{22}, \overline{\sigma}_{12}) = 0$, задаваемой параметрически соотношениями (2.31) при учете зависимостей (2.30). Величины $\overline{\xi}_{ij}$ в соотношениях (5.1) определяются равенствами (4.12) при учете (4.11). Доказать аналитически справедливость равенств (5.1) авторам пока не удалось.

При выполнении ассоциированного закона течения для композиции, согласно (5.1), вектор $\overline{\boldsymbol{\xi}} = \{\overline{\xi}_{11}, \overline{\xi}_{22}, \overline{\xi}_{12}\}$ должен быть ортогонален к гладкому участку поверхности текучести $f = 0$, поэтому обосновать выполнение ассоциированного закона течения для КМ можно путем проверки ортогональности вектора $\overline{\boldsymbol{\xi}}$, вычисленного по формулам (4.11) и (4.12), к гладкому участку поверхности текучести $f = 0$, задаваемой равенствами (2.30) и (2.31). Проверка такой ортогональности выполнена следующим образом.

Вектор $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ ортогонален к гладкому участку поверхности $f = 0$, если он на этом участке поверхности ортогонален к координатным линиям, задаваемым параметрами θ и φ, т.е. ортогонален к векторам, касательным к этим линиям. Используя формулы (2.31) при учете (2.30), определим частные производные от усредненных напряжений $\overline{\sigma}_{ij}$ по параметрам θ и φ:

$$\overline{\sigma}_{ij}^{\theta} = \frac{\partial\overline{\sigma}_{ij}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}, \quad \overline{\sigma}_{ij}^{\varphi} = \frac{\partial\overline{\sigma}_{ij}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}; \quad i, j = 1,2 \tag{5.2}$$

Векторы $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\theta} = \{\overline{\sigma}_{11}^{\theta},\ \overline{\sigma}_{22}^{\theta},\ \overline{\sigma}_{12}^{\theta}\}$ и $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\varphi} = \{\overline{\sigma}_{11}^{\varphi},\ \overline{\sigma}_{22}^{\varphi},\ \overline{\sigma}_{12}^{\varphi}\}$ являются касательными к координатным линиям θ и φ соответственно. Введем величины:

$$\overline{s}_{ij}^{\theta} = \frac{\overline{\sigma}_{ij}^{\theta}}{\sqrt{\left(\overline{\sigma}_{11}^{\theta}\right)^2 + \left(\overline{\sigma}_{22}^{\theta}\right)^2 + \left(\overline{\sigma}_{12}^{\theta}\right)^2}}, \quad \overline{s}_{ij}^{\varphi} = \frac{\overline{\sigma}_{ij}^{\varphi}}{\sqrt{\left(\overline{\sigma}_{11}^{\varphi}\right)^2 + \left(\overline{\sigma}_{22}^{\varphi}\right)^2 + \left(\overline{\sigma}_{12}^{\varphi}\right)^2}} \quad i, j = 1,2 \tag{5.3}$$

Векторы $\overline{\mathbf{s}}_{\theta} = \{\overline{s}_{11}^{\theta}, \overline{s}_{22}^{\theta}, \overline{s}_{12}^{\theta}\}$ и $\overline{\mathbf{s}}_{\varphi} = \{\overline{s}_{11}^{\varphi}, \overline{s}_{22}^{\varphi}, \overline{s}_{12}^{\varphi}\}$ имеют единичную длину (см. (5.2) и (5.3)) и являются касательными к координатным линиям θ и φ на гладких участках поверхности текучести композиции $(f = 0)$.

Так как параметр $\dot{\lambda}^{(0)}$ является неопределенным, вместо $\overline{\xi}_{ij}$ рассмотрим

$$\overline{\eta}_{ij}(\theta,\varphi) = \frac{\overline{\xi}_{ij}(\theta,\varphi)}{\sqrt{\overline{\xi}_{11}^2(\theta,\varphi) + \overline{\xi}_{22}^2(\theta,\varphi) + \overline{\xi}_{12}^2(\theta,\varphi)}} \quad (i, j = 1, 2) \tag{5.4}$$

Вектор $\overline{\boldsymbol{\eta}} = \{\overline{\eta}_{11}, \overline{\eta}_{22}, \overline{\eta}_{12}\}$ имеет единичную длину и при выполнении ассоциированного закона течения для композиции (5.1) ортогонален к гладкому участку поверхности текучести КМ $f = 0$, т.е. ортогонален к векторам $\overline{\mathbf{s}}_\theta$ и $\overline{\mathbf{s}}_\varphi$. Далее вычислим скалярные произведения

$$\Delta_\theta = \overline{\boldsymbol{\eta}} \cdot \overline{\mathbf{s}}_\theta = \overline{\eta}_{11}\overline{s}_{11}^\theta + \overline{\eta}_{22}\overline{s}_{22}^\theta + \overline{\eta}_{12}\overline{s}_{12}^\theta, \quad \Delta_\varphi = \overline{\boldsymbol{\eta}} \cdot \overline{\mathbf{s}}_\varphi = \overline{\eta}_{11}\overline{s}_{11}^\varphi + \overline{\eta}_{22}\overline{s}_{22}^\varphi + \overline{\eta}_{12}\overline{s}_{12}^\varphi \tag{5.5}$$

Если ассоциированный закон течения для композиции (5.1) действительно выполняется, то справедливо

$$\Delta_\theta = \Delta_\varphi = 0 \tag{5.6}$$

Аналитически доказать выполнение равенства (5.6) сложно, но его можно проверить численно. Для этого нужно численно определить производные в (5.2) и величины Δ_θ и Δ_φ при учете соотношений (5.3)–(5.5). При выполнении ассоциированного закона течения (5.1), точность выполнения соотношений (5.6) должна быть того же порядка, что и численное определение частных производных в (5.2), так как векторы $\overline{\boldsymbol{\eta}}$, $\overline{\mathbf{s}}_\theta$ и $\overline{\mathbf{s}}_\varphi$ в (5.5) являются единичными.

На рис. 7 приведены зависимости $\Delta_*(\varphi) = 10^4\Delta_\varphi(\varphi)$, соответствующие сплошным кривым текучести на рис. 5а. Номера кривых на этих рисунках совпадают. Принято $\theta \equiv 0$ и на интервале $\varphi \in [0, 2\pi]$ введена сетка с шагом $h_\varphi = 2\pi/200 = 3.14 \times 10^{-2}$. В формулах (5.2) производные $\overline{\sigma}_{ij}^\varphi$ вычислены конечно-разностными методами на трехточечных шаблонах, т.е. точность определения значений $\overline{\sigma}_{ij}^\varphi$ имеет порядок $h_\varphi^2 = 9.87 \times 10^{-4} \approx 10^{-3}$. В угловых точках кривых *1*–*3* на рис. 5а для вычисления производных $\overline{\sigma}_{ij}^\varphi$ использованы скошенные разности. Из рис. 7 видно, что максимальные по модулю значения Δ_φ имеют порядок h_φ^2 и пренебрежимо малы по сравнению с единицей.

Определим среднеквадратичные отклонения зависимостей $\Delta_\varphi(\varphi)$ от нуля

$$\delta_\varphi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta_\varphi^2(\varphi)\,d\varphi}$$

Для кривой *1* на рис. 7 получим $\delta_\varphi = 2.69 \times 10^{-5}$, для кривой *2* – $\delta_\varphi = 3.63 \times 10^{-5}$, а для кривой *3* – $\delta_\varphi = 4.24 \times 10^{-5}$. Интегралы в последней формуле вычислялись по формуле трапеций. Следовательно, во всех рассматриваемых случаях δ_φ равно нулю с рассматриваемой точностью.

Дополнительные расчеты, проведенные для других сплошных кривых текучести на рис. 5б и 6, показали, что функции $\Delta_\varphi(\varphi)$ для них качественно и количественно сходны с кривыми на рис. 7, а значения δ_φ имеют порядок 10^{-5}. Поэтому можно считать, что в рамках разработанной структурной модели армированной среды ассоциирован-

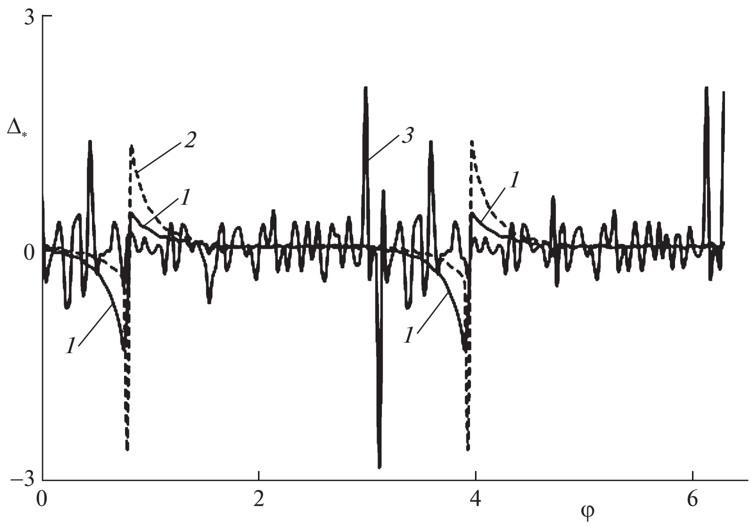


Рис. 7. Параметрическая зависимость отклонения вектора скоростей усредненных деформаций от нормали к кривой текучести композиции.

ный закон течения, вообще говоря, выполняется. Значит, для такой композитной среды и для каждого компонента композиции, выполняется постулат Друккера [35, 46], что подтверждает непротиворечивость введенных в данном исследовании исходных гипотез.

В случае симметричного армирования, рассмотренного в разд. 3, при $\psi_1 = -\psi_2 = 0$ или $\psi_1 = -\psi_2 = \pi/2$ (однонаправленное армирование) ассоциированный закон течения для композитной среды выполняется строго (см. [21]).

6. Модель с одномерным напряженным состоянием в волокнах. В системе $Ox_1x_2x_3$ соотношения МОНСВ при ПНС [12, 30] равны:

$$\sigma_{11} = \omega_1^{(0)}\sigma_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{K} \omega_k\sigma_k \cos^2\psi_k, \quad \sigma_{12} = \sum_{k=1}^{K} \omega_k\sigma_k \sin\psi_k \cos\psi_k$$
$$\sigma_{22} = \omega_2^{(0)}\sigma_2^{(0)} + \sum_{k=1}^{K} \omega_k\sigma_k \sin^2\psi_k \tag{6.1}$$

Здесь $\omega_1^{(0)}$ и $\omega_2^{(0)}$ – коэффициенты; σ_k – продольные напряжения в волокнах k-го семейства (в поперечном направлении нормальные и касательные напряжения в арматуре не учитываются); $\sigma_1^{(0)}$, $\sigma_2^{(0)}$ – главные напряжения в связующей матрице (см. (2.7)), которые удовлетворяют условию текучести (2.10) ($k = 0$) и параметрически выражаются по формулам (2.16)–(2.18).

В рамках МОНСВ остаются справедливыми соотношения (4.4) и (4.6) при $l = 1, 2$, где $\dot{\lambda}_l^{(k)}\xi_l^{(k)}$ – продольная скорость деформации волокна k-го семейства (режим $l = 1$ соответствует растяжению арматуры, режим $l = 2$ – сжатию), а $\xi_{k,n}^{(0)}$ вычисляется по (4.5) и (4.3). Пластическое течение арматуры возможно только при достижении предельных значений $\sigma_k = \pm\sigma_{\pm}^{(k)}$, тогда на основании (4.6) для напряжения в волокнах k-го семейства имеем:

$$\sigma_k = \begin{cases} \sigma_+^{(k)} & \text{при} \quad \xi_{k,n}^{(0)} > 0 \\ -\sigma_-^{(k)} & \text{при} \quad \xi_{k,n}^{(0)} < 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

$$-\sigma_-^{(k)} < \sigma_k < \sigma_+^{(k)} \quad \text{при} \quad \xi_{k,n}^{(0)} = 0, \quad 1 \le n \le 2N_0, \quad 1 \le k \le K$$

В соотношениях (6.1) коэффициенты $\omega_1^{(0)}$ и $\omega_2^{(0)}$ в разных вариантах МОНСВ задаются по-разному. В "мягком" варианте МОНСВ, принято [12]:

$$\omega_1^{(0)} = \omega_2^{(0)} = \omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^{K} \omega_k \tag{6.3}$$

При использовании "жесткого" варианта МОНСВ

$$\omega_1^{(0)} = \omega_2^{(0)} = 1 \tag{6.4}$$

В работе [30] использовались зависимости вида

$$\omega_1^{(0)} = 1 - \sum_{k=1}^{K} \omega_k \cos^2 \psi_k, \quad \omega_2^{(0)} = 1 - \sum_{k=1}^{K} \omega_k \sin^2 \psi_k \tag{6.5}$$

Для определения в глобальной системе координат $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ напряжения, соответствующие соотношениям (6.1), следует применить равенства (2.31).

В рамках МОНСВ структурные соотношения (6.1) при учете равенств (2.31) и (6.2)–(6.5) имеют простой и удобный вид. Определим, является ли значимой ошибка расчета поверхности текучести, которую вносят игнорирование поперечных напряжений в арматуре и выбор параметров $\omega_1^{(0)}$ и $\omega_2^{(0)}$ в виде (6.3)–(6.5).

На рис. 5 и 6 для сравнения изображены пунктирные кривые текучести, определенные для соответствующих КМ по формулам (6.1)–(6.5). Пунктирные кривые, номера которых помечены штрихами, рассчитаны при тех же условиях, что и сплошные кривые с теми же номерами, но без штрихов (см. раздел 2). Кривая *1'* на рис. 5а соответствует "мягкому" варианту МОНСВ (см. (6.1)–(6.3)); кривая *1''* – "жесткому" варианту МОНСВ (см. (6.1), (6.2) при учете (6.4)). Пунктирные кривые на рис. 5 и 6, номера которых помечены тремя штрихами, получены по формулам (6.1), (6.2) при учете зависимостей вида (6.5).

Сопоставление кривых *1* и *1'* на рис. 5а показывает, что "мягкий" вариант МОНСВ при высокопрочном связующем (Ti) приводит к значительному занижению расчетных значений пределов текучести КМ в направлениях, ортогональных (и близких им) к направлениям армирования (например, в направлении напряжения $\bar{\sigma}_2$ на рис. 5а). Сравнение кривых *1* и *1''* на рис. 5а демонстрирует, что в случае высокопрочного связующего расчет по "жесткому" варианту МОНСВ, наоборот, приводит к существенному завышению пределов текучести КМ в направлениях, близких к направлениям армирования (например, в направлении напряжения $\bar{\sigma}_1$ на рис. 5а).

Из сравнения кривых *1*, *1'''* и *2*, *2'''* на рис. 5а следует, что вариант МОНСВ [30], лучше всего согласуется со структурной моделью, разработанной в данном исследовании (см. разд. 1 и 2). Так, в самом неблагоприятном случае (при использовании высокопрочного связующего) значения $\max|\bar{\sigma}_1|$ и $\max|\bar{\sigma}_2|$, определенные по кривым *1*, *1'''* и *2*, *2'''* соответственно, отличаются не более чем на 2.4%. Для кривых *1* и *1'''* на рис. 5б разница значений $\max|\bar{\sigma}_1|$ и $\max|\bar{\sigma}_2|$ практически равна нулю.

При малых отношениях пределов текучести связующего и волокон (что часто бывает на практике [22, 24, 37, 44]) различие между расчетными кривыми текучести, определенных на базе МОНСВ и модели, разработанной в данном исследовании, становится малым. Так, кривая *3'''* на рис. 5а (АДМ–У8А-композиция) почти совпадает с кривой *3*; кривые *1'''*–*6'''* на рис. 6 (стеклопластик) также близки к кривым *1*–*6* соответственно (максимальное расхождение у кривых *2* и *2'''*). Кривые текучести, рассчитанные по формулам (6.1), (6.2) и (6.5) для ортогонально армированных Al–У8А-композиций, близки к кривым *2*, *2'* и *2''* на рис. 5б, поэтому они не изображены.

Анализ поведения пунктирных кривых на рис. 5 и 6 показывает, что предложенный в [30] вариант МОНСВ (см. (6.1), (6.2) и (6.5)) обоснованно можно применять вместо структурных соотношений данного исследования в инженерных расчетах композитных тонкостенных элементов конструкций.

Заключение. Разработана структурная модель, позволяющая рассчитывать поверхности и кривые текучести для жесткопластических гибридных композитных сред, перекрестно армированных в произвольных направлениях, параллельных некоторой плоскости. Материалы компонентов композиции могут по разному сопротивляться растяжению и сжатию. Пределы текучести материалов компонентов при растяжении могут быть как больше, так и меньше пределов текучести при сжатии. Учтено сложное напряженное состояние в арматуре. Принято, что в плоскости армирования реализуется ПНС в композиции. Показано, что, как следствие этого, в рамках принятых предположений ПНС возникает и во всех компонентах. Пластическое течение в компонентах композиции описывается кусочно-линейными критериями текучести (типа Йогансена, Треска, Ху и др.). Определены усредненные напряжения и скорости деформаций композиции. Перед процедурой усреднения напряжения в компонентах представлены в параметрическом виде. Сформулированы условия однозначного определения границ режима текучести в арматуре, который соответствует напряженному состоянию в связующем материале. Продемонстрировано, что для расчетных кривых (поверхностей) текучести КМ выполняется ассоциированный закон пластического течения. Это позволяет переносить все известные теоремы о предельном состоянии жесткопластических тел и разработанные методы решения соответствующих краевых задач на элементы конструкций, изготовленные из рассматриваемых композиций. Получено, что изменение характера армирования (направлений и плотностей армирования) существенно влияет на размер и форму кривых (поверхностей) текучести композиции. Сравнение кривых текучести КМ, рассчитанных на базе разработанной структурной модели и достаточно простой МОНСВ, показало, что использование варианта МОНСВ, предложенного в [30], позволяет с достаточной для инженерных приложений точностью определять кривые (поверхности) текучести композиции вместо относительно сложных формул, полученных в данной работе. Для композиций, содержащих низкопрочные связующие матрицы, что часто встречается на практике, кривые текучести композиции, рассчитанные по этим теориям, почти не различаются.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2017-2020 годы (проект № 23.4.1 – Механика деформирования и разрушения материалов, сред, при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vasiliev V.V., Morozov E.* Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. Amsterdam: Elsever, 2013. 412 p.

2. *Caliri M.F.Jr., Ferreira A.J.M., Tita V.* A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the Finite Element Method // Compos. Struct. 2016. V. 156. № 15. P. 63–77.
3. *Димитриенко Ю.И.* Механика композитных конструкций при высоких температурах. М.: Физматлит, 2019. 448 с.
4. *Moriniere F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R.* Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review // Int. J. Impact. Eng. 2014. V. 67. P. 27–38.
5. *Jones N.* Note on the impact behaviour of fibre-metal laminates // Int. J. Impact. Eng. 2017. V. 108. P. 147–152.
6. *Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.* Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // Front. Mech. Eng. 2013. V. 8. № 2. P. 187–200.
7. *L'vov G.I., Kostromitskaya O.A.* Numerical modeling of plastic deformation of unidirectionally reinforced composites // Mech. Compos. Mater. 2020. V. 56. № 1.
8. *Reddy J.N.* Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis. Boca Raton: CRC Press, 2004. 831 p.
9. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П. и др.* Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
10. *Zickel J.* Isotensoid pressure vessels // ARS J. 1962. V. 32. P. 950–951.
11. *Kelly A., Tyson W.R.* Tensile properties of fiber-reinforced metals: copper/tungsten and copper/molybdenum // J. Mech. Phys. Solids. 1965. V. 13. № 6. P. 329–350.
12. *Немировский Ю.В.* Об условии пластичности (прочности) для армированного слоя // ПМТФ. 1969. № 5. С. 81–88.
13. *Mróz Z., Shamiev F.G.* Simplified yield condition for fiber-reinforced plates and shells // Arch. Inż. Ląd. 1979. V. 2. № 3. P. 463–476.
14. *Tian W., Qi, L., Chao X. et al.* A new interpolative homogenization model for evaluation of the effective elasto-plastic responses of two-phase composites // Compos. Struct. 2019. V. 210. № 15. P. 810–821.
15. *Doghri I., Adam L., Bilger N.* Mean-field homogenization of elasto-viscoplastic composites based on a general incrementally affine linearization method // Int. J. Plast. 2010. V. 26. № 2. P. 219–238.
16. *Brassart L., Stainier L., Doghri I. et al.* Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // Int. J. Plast. 2012. V. 36. P. 86–112.
17. *Федотов А.Ф.* Гибридная модель гомогенизации упругопластических свойств изотропных матричных композитов // Мех. композ. матер. 2017. Т.53. № 3. С. 513–530.
18. *Янковский А.П.* Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель // Мех. композ. матер. 2010. Т. 46. № 5. С. 663–678.
19. *Ахундов В.М.* Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях // Мех. композ. матер. 2015. Т. 51. № 3. С. 539–558.
20. *Малаховски Е., Львов Г., Дарьязадех С.* Численное определение параметров критерия пластичности волокнистых композитов // Мех. композ. матер. 2017. Т. 53. № 5. С. 843–862.
21. *Романова Т.П., Янковский А.П.* Построение кривых текучести для армированных пластин из жесткопластических разносопротивляющихся материалов при учете двумерного напряженного состояния в волокнах. I. Однонаправленное армирование // Мех. композ. матер. 2019. Т. 55. № 6. С. 1019–1042.
22. Handbook of Composites / *Ed. by Lubin G.* New York: Van Nostrand Reinhold, 1982. 786 p.
23. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
24. Композиционные материалы. Справочник / *Под ред. Карпиноса Д.М.* Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
25. *Ржаницын А.Р.* Предельное равновесие пластинок и оболочек. М.: Наука, 1983. 288 с.
26. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Предельное равновесие железобетонных куполов вращения // Изв. вузов. Строительство. 2005. № 8. С. 4–11.

27. *Кубишев И.Н.* Предельная нагрузка для композитной кольцевой пластинки с разными условиями закрепления // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. Т. 15. № 1. С. 56–60.
28. *Романова Т.П.* Несущая способность и оптимизация трехслойных армированных круглых пластин из разносопротивляющихся материалов, опертых по внутреннему контуру // Пробл. прочн. пластичн. 2015. Т. 77. № 3. С. 286–300.
29. *Джахангиров А.А.* Несущая способность трехслойной волокнистой композитной кольцевой пластины, защемленной по кромкам // Мех. композ. матер., 2016. Т. 52. № 2. С. 385–398.
30. *Романова Т.П.* Моделирование динамического изгиба жесткопластических армированных слоистых круглых пластин с произвольным отверстием на вязком основании при взрывных нагрузках // Пробл. прочн. пластичн. 2017. Т. 79. № 3. С. 267–284.
31. *Работнов Ю.Н.* Введение в механику разрушения. М.: Наука. Физматгиз, 1987. 80 с.
32. *Жигун И.Г., Душин М.И., Поляков В.А. и др.* Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 2. Экспериментальное изучение // Мех. полимеров. 1973. № 6. С. 1011–1018.
33. *Романова Т.П., Янковский А.П.* Построение кривых текучести для жесткопластических армированных пластин при учете двумерного напряженного состояния в волокнах // Мех. композ. матер. 2018. Т.54. № 6. С. 1013–1044.
34. *Hu L.W.* Modified Tresks's yield condition and associated flow rules for anisotropic materials and applications // J. Franclin Inst. 1958. V. 265. № 3. P. 187–204.
35. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
36. *Mao-hong Yu.* Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century // Appl. Mech. Rev. 2002. V. 55. № 3. P. 169–200.
37. *Васильев В.В., Протасов В.Д. и др.* Композиционные материалы: Справочник. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
38. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
39. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
40. *Christensen R.M.* Mechanics of Composite Materials. New York: Wiley, 1979. 348 p.
41. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984. 352 с.
42. *Ванин Г.А.* Микромеханика композитных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 304 с.
43. *Hopkins H.G.* Some remarks concerning of the solution of plastic plate problems upon the yield criterion // Proc. 9th Inter. Cong. Appl. Mech. 1957. V. 6. P. 448–457.
44. *Ивлев Д.Д., Ершов Л.В.* Методы возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука. Физматгиз, 1978. 208 с.
45. Волоконные композиционные материалы / *Под ред. Уитона Дж., Скала Э.* М.: Металлургия, 1978. 240 с.
46. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.

Piecewise-Linear Yield Loci of Angle-Ply Reinforced Medium of Different-Resisting Rigid-Plastic Materials at 2d Stress State

T. P. Romanova[a,#] and A. P. Yankovskii[a,##]

[a] *Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia*
[#] *e-mail: lab4nemir@gmail.com*
[##] *e-mail: lab4nemir@rambler.ru*

The structural model of hybrid composites angle-ply reinforced parallel to some plane is constructed for analytical determined the yield loci of the composition taking into account the 2d stress state in all components. The materials of the components are homogeneous and isotropic, have different yield strengths in tension and compression, their mechanical behavior is described by the associated flow law for a rigid-plastic body with piecewise linear flow conditions the type of Johansen, Treska, Hu, Ishlinski-Ivlev. The cases of location of fibers along the trajectories of the principal stresses in the composition and the cases of angle-ply reinforcement symmetric with respect to these trajectories are considered. The influence of reinforcement structure (directions and densities) on the size and shape of the yield loci of compositions is investigated. It is numerically shown that the plastic flow in the compositions is associated with the calculated yield loci of reinforced media. As an example, yield loci for metal compositions with high-strength and low-strength binder and for fiberglass reinforced media are constructed. The calculated yield loci of the compositions are compared with similar ones determined on the basis of different variants of the structural model with one-dimensional stress state in fibers.

Keywords: hybrid composite, structural model, flat angle-ply reinforcement, rigid-plastic material, unequiresistant materials, 2D stress state, Johansen-type yield criterion, Tresca-type yield criterion, Hu yield criterion, Ishlinski–Ivlev yield criterion

REFERENCES

1. *Vasiliev V.V., Morozov E.* Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. Amsterdam: Elsever, 2013. 412 p.
2. *Caliri M.F.Jr., Ferreira A.J.M., Tita V.* A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the Finite Element Method // Compos. Struct., 2016, vol. 156, no. 15, pp. 63–77.
3. *Dimitrienko Yu.I.* Mechanics of Composite Structures at High Temperatures (Mekhanika kompozitnyh konstrukcij pri vysokih temperaturah). Moscow: Fizmatlit, 2019. 448 p. (in Russian)
4. *Moriniere F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R.* Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review // Int. J. Impact. Eng., 2014, vol. 67, pp. 27–38.
5. *Jones N.* Note on the impact behaviour of fibre-metal laminates // Int. J. Impact. Eng., 2017, vol. 108, pp. 147–152.
6. *Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.* Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // Front. Mech. Eng., 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187–200.
7. *L'vov G.I., Kostromitskaya O.A.* Numerical modeling of plastic deformation of unidirectionally reinforced composites // Mech. Compos. Mater., 2020, vol. 56, no. 1.
8. *Reddy J.N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. Boca Raton: CRC Press, 2004. 831 p.
9. *Solomonov Yu.S., Georgievsky V.P. et al.* Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells. (Prikladnye zadachi mehaniki kompozitnyh cilindricheskih obolochek) Moscow: Physmatlit, 2014. 408 p. (in Russian)
10. *Zickel J.* Isotensoid pressure vessels // ARS J, 1962, vol. 32, pp. 950–951.
11. *Kelly A., Tyson W.R.* Tensile properties of fiber-reinforced metals: copper/tungsten and copper/molybdenum // J. Mech. Phys. Solids, 1965, vol. 13, no. 6, pp. 329–350.
12. *Nemirovskii Yu.V.* On the condition of plasticity (strength) for a reinforced layer // J. Appl. Mech. Techn. Phys., 1969, vol. 10, no. 5, pp. 759–765.
13. *Mróz Z., Shamiev F.G.* Simplified yield condition for fiber-reinforced plates and shells // Arch. Inż. Ląd., 1979, vol. 2, no. 3, pp. 463–476.
14. *Tian W., Qi, L., Chao X. et al.* A new interpolative homogenization model for evaluation of the effective elasto-plastic responses of two-phase composites // Compos. Struct., 2019, vol. 210, no. 15, pp. 810–821.
15. *Doghri I., Adam L., Bilger N.* Mean-field homogenization of elasto-viscoplastic composites based on a general incrementally affine linearization method // Int. J. Plast., 2010, vol. 26, no. 2, pp. 219–238.

16. *Brassart L., Stainier L., Doghri I. et al.* Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // Int. J. Plast., 2012, vol. 36, pp. 86–112.
17. *Fedotov A.F.* Hybrid model for homogenization of elastoplastic properties of isotropic matrix composites // Mech. Compos. Mater., 2017, vol. 53, no. 3, pp. 361–372.
18. *Yankovskii A.P.* Determination of thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in case of general anisotropy of their components. 1. Structural model // Mech. Compos. Mater., 2010, vol. 46, no. 5, pp. 663–678.
19. *Akhundov V.M.* Incremental carcass theory of fibrous media under large elastic and plastic deformations // Mech. Compos. Mater., 2015, vol. 51, no. 3, pp 383–396.
20. *Małachowski E., L'vov G., Daryazadeh S.* Numerical prediction of parameters of yield criterion for fibrous composites // Mech. Compos. Mater., 2017, vol. 53, no. 5, pp. 589–600.
21. *Romanova T.P., Yankovskii A.P.* Yield loci of reinforced plates made from rigid-plastic unequiresistant materials considering the two-dimensional stress state in fibers. I. Unidirectional reinforcement // Mech. Compos. Mater., 2020, vol. 55, no. 6, pp. 699–714.
22. Handbook of Composites / *Ed. by Lubin G.* N.Y.: Van Nostrand Reinhold, 1982. 786 p.
23. *Hill R.* Mathematical Theory of Plasticity. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1950. 353 p.
24. Composite Materials. (Kompozicionnye materialy) Handbook / *Ed. by Karpinos D.M.* Kiev: Naukova dumka, 1985. 592 p. (in Russian)
25. *Rzhanitsyn A.R.* Limit Balance of Plates and Shells. (Predel'noe ravnovesie plastinok i obolochek) Moscow: Nauka, 1983. 288 p. (in Russian)
26. *Nemirovsky Yu.V., Yankovskii A.P.* Limit balance of reinforced concrete domes of rotation // New Higher Educ. Inst. Const., 2005, no. 8, pp. 4–11. (in Russian)
27. *Kubishev N.* Limit load for composite circular plate with various fixation conditions // Mekh. Mash. Mekhan. Mater., 2011, vol. 14, no. 1, pp. 56–60. (in Russian)
28. *Romanova T.P.* Carrying capacity and optimization of three-layer reinforced circular plate of differently resistant materials, supported on the internal contour // Prob. Strength Plast., 2015, vol. 77, no. 3, pp. 286–300. (in Russian)
29. *Jahangirov A.A.* Load-carrying capacity of fiber-reinforced annular tree-layer composite plate clamped on its external and internal contours // Mech. Compos. Mater., 2016, vol. 52, no. 2, pp. 271–280.
30. *Romanova T.P.* Modeling of rigid-plastic dynamic bending of reinforced layered circular plates with arbitrary hole on viscous foundation under explosive loads // Prob. Strength Plast. 2017, vol. 79, no. 3, pp. 267–284. (in Russian)
31. *Rabotnov Yu.N.* Introduction in Destruction Mechanics. (Vvedenie v mehaniku razrushenija) Moscow: Nauka, 1987. 80 p. (in Russian)
32. *Zhigun I.G, Dushin M.I., Polyakovet V.A. et al.* Composites reinforced with system of three straight mutually orthogonal fibers. 2. Experimental study // Polym. Mech., 1973, vol. 9, no. 6. pp. 895–900.
33. *Romanova T.P., Yankovskii A.P.* Constructing yield loci for rigid-plastic reinforced plates considering the 2D stress state in fibers // Mech. Compos. Mater., 2019, vol. 54, no. 6, pp. 697–718.
34. *Hu L.W.* Modified Tresks's yield condition and associated flow rules for anisotropic materials and applications // J. Franclin Inst., 1958, vol. 265, no. 3, pp. 187–204.
35. *Bykovtsev G.I., Ivlev D.D.* Theory of Plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 529 p. (in Russian)
36. *Mao-hong Yu.* Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century // Appl. Mech. Rev., 2002, vol. 55, no. 3, pp. 169–200.
37. *Vasiliev V.V., Protasov V.D. et al.* Composite Materials (Kompozicionnye materialy). Handbook. Moscow: Mashinostroenie, 1990. 512 p. (in Russian)
38. *Shermergor T.D.* Theory of Elasticity of Micro-Inhomogeneous Media. (Teorija uprugosti mikroneodnorodnyh sred) Moscow: Nauka, 1977. 400 p. (in Russian)
39. *Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A.* Resistances of Polymeric and Composite Materials. (Soprotivlenie polimernyh i kompozitnyh materialov) Riga: Zinatane, 1980. 572 p. (in Russian)
40. *Christensen R.M.* Mechanics of Composite Materials. N.Y.: Wiley, 1979. 348 p.

41. *Bakhvalov N.S., Panasenko G.P.* Averaging of Processes in Periodic Media. Mathematical Problems of Mechanics of Composite Materials. (Osrednenie processov v periodicheskih sredah. Matematicheskie zadachi mehaniki kompozicionnyh materialov) Moscow: Nauka, 1984. 352 p. (in Russian)
42. *Vanin G.A.* Micromechanics of Composite Materials. Kiev: Naukova Dumka, 1985. 304 p. (in Russian)
43. *Hopkins H.G.* Some remarks concerning of the solution of plastic plate problems upon the yield criterion // Proc. 9th Intern. Congr. Appl. Mech., 1957, vol. 6, pp. 448–457.
44. *Ivlev D.D., Ershov L.V.* Perturbation Methods in Theory of Elastic-Plastic Body. (Metody vozmushhenij v teorii uprugoplasticheskogo tela) Moscow: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian)
45. Composites: State of Art / *Ed. by Weeton L.W, Scala E.* N.Y.: AIME, 1974. 365p.
46. *Kolarov D., Baltov A., Boncheva N.* Mechanics of Plastic Media. (Mehanika plasticheskih sred) Moscow: Mir, 1979. 302 p. (in Russian)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 6, с. 757–789

УДК 539.31+539.62+539.61

РАЗВИТИЕ МЕХАНИКИ ДИСКРЕТНОГО КОНТАКТА С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФРИКЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

 И. Г. Горячева[1,*], И. Ю. Цуканов[1,]**

[1]*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: goryache@ipmnet.ru*

***e-mail: tsukanov@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 13.08.2020 г.
После доработки 10.09.2020 г.
Принята к публикации 21.09.2020 г.

В обзоре освещено современное состояние исследований в области механики дискретного контакта, включая основные подходы к постановке задач, методы аналитического и численного решения, конкретные результаты и области их практического использования. Статья ориентирована на специалистов по механике контактного взаимодействия и трибологии, а также может быть интересна исследователям, интересующимся управлением взаимодействия деформируемых тел за счет инженерии их поверхностей.

Ключевые слова: механика контактного взаимодействия, дискретный контакт, поверхностный микрорельеф, упругость, вязкоупругость, упругопластическое деформирование, трение, контактные характеристики, площадь фактического контакта, взаимное влияние пятен контакта

DOI: 10.31857/S0032823520060053

Введение. Большинство технических и натуральных поверхностей не являются идеально гладкими и имеют отклонения от правильной формы на различных масштабных уровнях, которые формируют их микрорельеф. Микрорельеф поверхностей весьма различен как по способу возникновения, так и по масштабу (волнистость, шероховатость) и может наноситься искусственно или получаться в результате различных видов поверхностной обработки. Современные методы исследования поверхностей позволяют дать количественную оценку параметров микрогеометрии поверхности на разных масштабных уровнях [1, 2].

При соприкосновении таких поверхностей их контакт локализован на отдельных дискретно расположенных пятнах (область фактического контакта). Поскольку область фактического контакта составляет десятые или сотые доли номинальной области контакта (односвязной области, включающей в себя все пятна фактического контакта), то максимальные фактические давления на пятнах контакта превосходят номинальные (осредненные по номинальной области контакта) в сотни раз.

Дискретность контакта играет важную роль в протекании физических процессов, происходящих при контактном и фрикционном взаимодействии (упругих и пластических деформаций, адгезии и когезии, фрикционного разогрева, фазовых переходов), а также оказывает влияние на электросопротивление, массоперенос, изнашивание и усталостное разрушение поверхностных слоев материалов, на поверхностное натяжение и смачивание поверхностей, на протекающие в зоне смазанного контакта гидродинамические явления и т.д.

Следует отметить, что задача дискретного контакта возникает также при исследовании контактного взаимодействия неоднородных тел, имеющих различного рода включения, композиционных материалов, тел сложной конфигурации, системы тел, близко расположенных друг к другу (системы резцов в инструменте, шарики в подшипнике) и т.д.

Первые постановки задач механики дискретного контакта относятся к началу 20 в. и неразрывно связаны с развитием теории трения и изнашивания деформируемых тел [3–5]. Ввиду сложности анализа контактных задач с неодносвязной областью контакта лишь некоторые из них могут быть решены точно. Упрощения, которые обычно делаются при решении задач о контактном взаимодействии деформируемых тел заданной макроформы с учетом их поверхностного микрорельефа, сводятся, как правило, к упрощенному описанию микрогеометрии поверхности (периодический рельеф, выступы заданной формы и т.д.) и к построению приближенных аналитических и асимптотических методов решения поставленных задач.

В связи с развитием вычислительной техники наблюдается тенденция к проведению расчетов контактных характеристик тел с шероховатыми поверхностями на основе прямого численного моделирования [6–8]. При этом отпадает необходимость модельного описания макро- и микрогеометрии поверхностей. Все данные о геометрии сопрягаемых поверхностей берутся на основе их профилометрирования. Однако несмотря на кажущуюся простоту и доступность компьютерного моделирования взаимодействия шероховатых поверхностей, актуальность и востребованность развития аналитических методов решения задач дискретного контакта не вызывает сомнений. Применение аналитических методов исследования дискретного контакта дает возможность не только оценить влияние микрогеометрии на характеристики контактного взаимодействия, силу трения, фрикционный разогрев и т.д., но и управлять этими процессами за счет выбора оптимальных параметров поверхностного рельефа.

Данная статья содержит обзор методов решения задач механики дискретного контакта, постановка которых связана с современными проблемами трибологии. Основное внимание в ней уделено анализу исследований периодических контактных задач для упругих тел в плоской и пространственной постановках, а также приближенным методам решения задач дискретного контакта с учетом, как формы отдельных выступов, так и плотности их расположения в пределах номинальной (конечной и бесконечной) области контакта. Будут приведены исследования задач дискретного контакта с усложненными граничными условиями, учитывающими адгезионное притяжение, наличие касательных напряжений в области контакта поверхностей, а также с учетом пластических деформаций взаимодействующих тел. Кроме того, будут изложены постановки и методы решения задач о фрикционном взаимодействии вязкоупругих тел в условиях дискретного контакта.

1. Общая постановка задачи дискретного контакта упругих тел при действии нормальной силы. В качестве примера постановки задачи дискретного контакта рассмотрим контакт упругого полупространства с жестким контртелом, контактирующая поверхность которого описывается функцией $z = -F(x, y)$ в системе координат, связанной с полупространством (плоскость Oxy совпадает с границей полупространства, а ось Oz направлена вглубь) (рис. 1).

Функция $F(x, y)$ такова, что при сближении тел на некоторую величину D под действием нормальной силы P область фактического контакта представляет собой конечное N или бесконечное число пятен контакта ω_i. Будем считать, что касательные напряжения в областях фактического контакта отсутствуют, а контактные давления

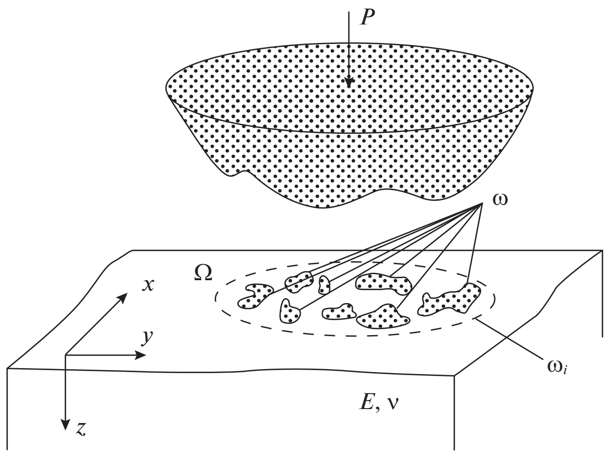


Рис. 1. Постановка задачи дискретного контакта.

$p_i(x, y)$ приводят к упругим перемещениям $u_z(x, y)$ в направлении оси Oz первоначально плоской границы упругого полупространства, определяемым соотношением [9]

$$u_z(x, y) = \frac{1-\nu^2}{\pi E}\sum_{i=1}^{N}\iint_{\omega_i}\frac{p_i(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}} \tag{1.1}$$

В каждой подобласти ω_i должно выполняться условие контакта

$$u_z(x, y) = D - F(x, y) \tag{1.2}$$

Если величина сближения D неизвестна, а задана суммарная нагрузка, действующая на систему выступов, то к уравнениям (1.1) и (1.2) следует добавить уравнение равновесия

$$\sum_{i=1}^{N}\iint_{\omega_i} p_i(x, y)dxdy = P \tag{1.3}$$

Аналогичным образом задача дискретного контакта формулируется для неоднородных тел, в том числе для тел с покрытиями [10]. При этом интегральный оператор в (1.1) заменяется на соответствующий оператор для двухслойного упругого полупространства.

2. Задачи дискретного контакта с ограниченной номинальной областью контакта. Задачи с ограниченной номинальной областью контакта встречаются при взаимодействии текстурированных поверхностей, например медицинских инструментов, рабочих органов роботов, манипуляторов и др.

При внедрении системы N жестких связанных между собой штампов в упругое основание область контакта состоит из N подобластей. Размеры областей контакта необходимо определять в соответствии с условием контакта, граничными условиями и условиями совместности. Имеющееся при этом неравномерное распределение нагрузок между отдельными пятнами контакта определяется высотными характеристиками контактирующих штампов, расстоянием между ними, а также местом расположения отдельного пятна контакта в пределах номинальной области взаимодействия.

2.1. Плоская постановка. Общее решение плоской задачи для множественного контакта без учета сил трения дано впервые Мусхелишвили [11] с использованием методов ТФКП и затем Штаерманом [12] с использованием функций действительного переменного.

Контактное давление в случае внедрения системы штампов в упругую полуплоскость дается выражением [11]:

$$p(x) = \frac{E}{2\pi(1-\nu^2)X(x)}\sum_{i=1}^{N}\int_{a_i}^{b_i}\frac{g'(\xi)X(\xi)d\xi}{\xi - x} + \frac{2jU_{N-1}(x)}{X(x)}, \tag{2.1}$$

где $g(x)$ – функция начального зазора; N – количество участков контакта, $i = 1...N$; a_i, b_i – координаты i-го участка контакта; $X(x) = \sqrt{(x-a_1)(x-b_1)...(x-a_N)(x-b_N)}$; $U_{N-1}(x) = G_0x^{N-1} + G_1x^{N-2} + ... + G_{N-1}$; коэффициенты $G_0...G_{N-1}$ определяются из системы уравнений, записанной на основании учета граничных условий на концах контактного сегмента; j – мнимая единица; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала полуплоскости соответственно.

Функция начального зазора определяется условием контакта:

$$g(x) = D - F(x), \tag{2.2}$$

где $F(x)$ – форма внедряемого тела.

Следует отметить, что возможны два типа задач. В задачах первого типа задана общая нагрузка, приложенная ко всем штампам. Как правило, функция $F(x)$ в этих задачах непрерывна и задана во всех интервалах $a_i \le x \le b_i$. Во втором типе задач заданы величины сил P_i или внедрений D_i для каждого штампа. В этом случае задана функция формы отдельного штампа $f_i(x)$ в каждом из интервалов $a_i \le x \le b_i$ с точностью до постоянных C_i, которые, вообще говоря, различны для рассматриваемых интервалов.

Решение плоской задачи дискретного контакта в замкнутой форме возможно только для простейших случаев. Для двух штампов с плоским основанием, расположенных на разных высотах, точное решение получено Штаерманом [12]. При условии, что штампы жёстко соединены, задана общая нагрузка P и $F(x) = C + \eta$ при $b < x < a$; $F(x) = C$ при $-b < x < -a$, выражение для определения контактного давления имеет вид:

$$p(x) = \frac{\pm\left(-\dfrac{Eb\eta}{4(1-\nu^2)\,\mathrm{K}(a/b)} - Px\right)}{\pi\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}, \quad a < |x| < b, \tag{2.3}$$

где η – разность высот штампов; $\mathrm{K}(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода аргумента k.

При условии, что штампы не связаны между собой, расположены на одной высоте, и заданы различные нагрузки, действующие на каждый штамп P_1 и P_2; $f(x) = C_1$ при $-b < x < -a$; $f(x) = C_2$ при $b < x < a$, распределение контактных давлений имеет следующий вид:

$$p(x) = \frac{\pm\dfrac{\pi b}{2\mathrm{K}(\sqrt{1-a^2/b^2})}(P_1 - P_2) - (P_1 + P_2)x}{\pi\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}, \quad a < |x| < b \tag{2.4}$$

В формулах (2.3) и (2.4) знак плюс берется при $x < 0$, знак минус – при $x > 0$.

Задача для двух параболических штампов ($N = 2$) радиуса R, расположенных на одной высоте и связанных между собой, рассмотрена Гладвеллом [13]. Для формы штампов, заданной непрерывной функцией

$$F(x) = \frac{x^4}{8Rl^2} - \frac{x^2}{4R} \tag{2.5}$$

с помощью методов ТФКП и многочленов Чебышева получено следующее выражение для определения контактного давления:

$$p(x) = \frac{E\sqrt{x^2(x^2 - b^2)(a^2 - x^2)}}{4(1 - \nu^2)Rl^2}, \quad a \le |x| \le b, \tag{2.6}$$

где $2l$ – расстояние между центрами штампов, причем должно выполняться соотношение $2l = \sqrt{2(b^2 + a^2)}$. Нагрузка на один штамп определяется формулой [13]

$$P = \frac{\pi E(b^2 - a^2)^2}{64(1 - \nu^2)Rl^2} \tag{2.7}$$

Так же, как и в задаче для двух плоских штампов, распределение давления под штампом имеет асимметричный вид с максимумом, смещенным к внутренней стороне штампа. Асимметрия давлений усиливается с ростом нагрузки. Распределения внутренних напряжений для данной задачи были получены на основе потенциала Мусхелишвили в работе [14], в которой также выполнено сравнение с результатами, полученными методом конечных элементов.

Рассмотрена [15] задача о внедрении двух клиновидных штампов в упругую полуплоскость в условиях нормального контакта и частичного проскальзывания. Решение задачи базируется на численном интегрировании уравнений Мусхелишвили [11]. Показано, что в отличии от задачи Гладвелла для двух параболических штампов [13], в случае клиновидных штампов решение в замкнутой форме получить не удается.

На основе численного решения уравнения (2.1) рассматривался [16, 17] контакт двух и трех одинаковых штампов, вершины которых описываются функцией $\cos x$. Исследован эффект взаимного влияния штампов, оказываемый на распределение контактных давлений и фактическую площадь контакта при различном количестве и расположении штампов.

Контакт цилиндрического штампа, имеющего синусоидальную волнистость, с упругой полуплоскостью рассмотрен в работе Новелла и Хиллса [18]. Задача решена итерационным методом в предположении, что распределения давления под выступами являются герцевскими, т.е. эффект взаимного влияния проявляется только в увеличении максимального давления и уменьшении фактической площади контакта. Показано, что сделанное допущение оправдано при низких плотностях контакта.

Изучены [19] задачи о внедрении в упругую полуплоскость без трения и в условиях частичного проскальзывания: гладкого штампа, описываемого многочленом восьмой степени; цилиндра и плоского штампа со скругленными углами, имеющих синусоидальную волнистость. Предложен численный метод для решения поставленных задач на основе сведения интегрального уравнения к бесконечной системе алгебраических уравнений, и использования итерационной схемы Ньютона–Рафсона. Показано усиление взаимного влияния пятен контакта с ростом амплитуды волнистости.

2.2. Пространственная постановка. Постановка и метод решения пространственной контактной задачи о внедрении при отсутствии сил трения N штампов заданной формы $f_i(r)$ (предполагается, что каждый штамп есть тело вращения, ось которого перпендикулярна недеформированной поверхности полупространства, r – расстояние от оси вращения до рассматриваемой точки на границе полупространства) в упругое полупространство при заданных расстояниях l_{ij} между осями симметрии i-го и j-го штампов и их высотным распределением h_i даны в [20, 21]. В частности, для распределения нагрузок P_i $(i = 1,2...N)$, действующих на штампы в зависимости от их пространственного расположения, получена следующая система уравнений:

$$P_i = \frac{2E}{1-\nu^2}\int_0^{a_i}(D_i - f(r))\frac{rdr}{\sqrt{a_i^2 - r^2}} - \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} P_j \arcsin\frac{a_i}{l_{ij}} \tag{2.8}$$

$$D_i = h_i - D_0, \tag{2.9}$$

где D_0 — внедрение системы штампов в полупространство под действием заданной нагрузки $P = \sum_{i=1}^{N} P_i$.

В случае контактного взаимодействия с упругим полупространством системы гладких осесимметричных штампов для определения радиуса a_i отдельного пятна контакта получено дополнительное соотношение [22]:

$$D_i = -a_i\int_0^{a_i}\frac{f'(r)dr}{\sqrt{a_i^2 - r^2}} + \frac{1-\nu^2}{\pi E}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{P_j}{\sqrt{l_{ij}^2 - a_i^2}} \tag{2.10}$$

Полученные уравнения были использованы [20] для расчета распределения нагрузок между штампами и анализа зависимости нагрузки от внедрения для системы N цилиндрических штампов с плоским основанием радиуса a при разном характере их пространственного расположения в системе. Численное исследование решения задачи показало существенное влияние параметра плотности контактов на распределение сил P_i между штампами и значение жесткости контакта P/D системы штампов. При этом жесткость контакта оставалась примерно одинаковой для моделей, отличающихся только формой областей, занимаемых штампами. Этот вывод аналогичен результату, полученному Галиным [23] при исследовании влияния формы штампа с плоским основанием на его внедрение в упругое полупространство при заданной нагрузке.

Выведена [20, 22] система уравнений для определения распределения усилий между N связанными между собой сферическими штампами при заданном их пространственном расположении в условиях внедрения такой системы в упругое полупространство под действием заданной суммарной силы P. На основании проведенного анализа решения задачи сделан вывод, что приближенные методы расчета [4, 24], не учитывающие взаимного влияния пятен контакта, дают завышенные значения контактной жесткости dP/dD и фактической площади контакта $A_r = \pi\sum_{i=1}^{N} a_i^2$; ошибка возрастает с увеличением числа пятен контакта и их плотности.

В работе Андрейкива и Панасюка [25] решение задачи о внедрении системы цилиндрических штампов с плоскими основаниями сведена к системе N двумерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для решения системы в случае удаленных штампов применен метод последовательных приближений.

Аргатовым и Назаровым [26] для исследования задачи о внедрении системы штампов с произвольной формой подошвы в упругое полупространство использован асимптотический метод сращиваемых разложений. С целью повышения точности расчета контактных характеристик метод был улучшен [27]; при этом задача построения асимптотики контактного давления сведена к одному (вместо нескольких последовательно решаемых) связанному интегральному уравнению.

В работе Аргатова, Ли и Попова [28] рассмотрены задачи о внедрении системы жестких и упругих цилиндрических штампов с плоским основанием в упругое полупространство с учетом адгезионных сил и при их отсутствии. Получены асимптотические решения поставленных задач. Точность разработанного метода оценена сравнением с решением Коллинса [29] для внедрения двух цилиндрических штампов.

Контактная жесткость при внедрении системы N равновысоких и разновысоких цилиндрических штампов, расположенных в узлах гексагональной решетки, исследовалась теоретически и экспериментально [30]. Задача дискретного контакта сведена к системе нелинейных уравнений и решена численно. Получены инженерные асимптотические выражения для оценки контактной жесткости системы, которые были сопоставлены с экспериментальными данными.

Контакт системы узких прямоугольных в плане штампов с упругим полупространством применительно к моделированию взаимодействия захватывающего инструмента с биологической тканью рассмотрен Яковенко [31]. Получены аналитические выражения для определения внедрения системы выступов и распределения нагрузок на них. Предложен алгоритм расчета высотного распределения выступов, обеспечивающего их равномерную нагруженность.

3. Периодические контактные задачи. В механике контактных взаимодействий периодические контактные задачи играют важную роль при изучении эффекта взаимного влияния пятен контакта на характеристики контактного взаимодействия (распределение контактных давлений, размер области контакта, зависимость сближения тел от действующих номинальных давлений). Анализ решения периодических контактных задач позволяет исследовать влияние параметров микрогеометрии поверхности (форма выступов, плотность их расположения и распределение по высоте) на податливость шероховатого слоя, электросопротивление и т.д.

3.1. Плоская периодическая задача при отсутствии касательных напряжений в области контакта. Для системы жестких штампов с плоским основанием, внедряющихся в упругую полуплоскость, решение периодической контактной задачи было впервые получено Садовским [32] с применением комплексной функции напряжений. Им было получено следующее выражение для определения контактного давления:

$$p(x) = \frac{P\left|\cos\frac{\pi x}{L}\right|}{L\sqrt{\sin^2\frac{\pi a}{L} - \sin^2\frac{\pi x}{L}}}, \tag{3.1}$$

где P – приложенная нормальная нагрузка; L – расстояние между штампами; a – полуширина штампа.

В случае, когда поверхности штампов наклонены на угол ε относительно границы упругой полуплоскости, и область контакта задана (полный контакт), решение для контактного давления было получено в виде [33]:

$$p(x) = \frac{\pi E\varepsilon\sqrt{2}\sin\frac{\pi x}{L}}{L(1-\nu^2)\sqrt{\cos\frac{2\pi x}{L} - \cos\frac{2\pi a}{L}}} + \frac{P\sqrt{2}\cos\frac{\pi x}{L}}{L\sqrt{\cos\frac{2\pi x}{L} - \cos\frac{2\pi a}{L}}} \tag{3.2}$$

При этом значение нормальной нагрузки, обеспечивающее полный контакт штампов и полуплоскости, удовлетворяет неравенству:

$$P \geq \frac{L\varepsilon E}{2(1-\nu^2)}\operatorname{tg}\frac{\pi a}{L} \tag{3.3}$$

С использованием комплексной функции напряжений задача о вдавливании синусоидального волнистого штампа в упругую полуплоскость впервые решена Вестергаардом [34]. Выражение для определения контактного давления в данной задаче имеет вид:

$$p(x) = \frac{\sqrt{2}\pi E^*\Delta}{\lambda}\cos\frac{\pi x}{\lambda}\sqrt{\cos\frac{2\pi x}{\lambda} - \cos\frac{2\pi a}{\lambda}}, \tag{3.4}$$

где Δ, λ – амплитуда и период волнистой поверхности; E^* – приведенный модуль упругости материалов полуплоскости и волнистой поверхности, определяемый как

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \tag{3.5}$$

Также им впервые получено выражение, связывающее номинальное давление и полуширину участка контакта:

$$\overline{p} = \frac{\pi E^*\Delta}{\lambda}\sin^2\frac{\pi a}{\lambda} \tag{3.6}$$

Схожее по своей структуре решение для определения контактного давления при внедрении волнистой поверхности, описываемой функцией $f(x) = \Delta\left(1 - \cos^2\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$, получено Штаерманом [12].

Позднее, с использованием метода парных сумматорных уравнений, была решена [35] задача о внедрении синусоидальной волнистой поверхности в упругую полуплоскость, где впервые выведено соотношение между максимальным значением давления и приложенным номинальным давлением:

$$p_{\max} = 2\sqrt{p^*\overline{p}}, \tag{3.7}$$

где $p^* = \dfrac{\pi E^*\Delta}{\lambda}$ – номинальное давление, необходимое для полного контакта взаимодействующих тел.

Определение дополнительных смещений $\overline{\delta}$, т.е. усредненных смещений границы полуплоскости от фактического распределения давлений за вычетом смещения от номинального давления, в задаче о внедрении синусоидальной волнистой поверхности было впервые выполнено Кузнецовым [36]. Им было получено следующее соотношение:

$$\overline{\delta} = \frac{\Delta\overline{p}}{p^*}\left(1 - \ln\frac{\overline{p}}{p^*}\right) \tag{3.8}$$

С использованием теории Герца [37] и решения задачи о нагружении плоской трещины нормальным давлением [38] Джонсоном были получены асимптотические выражения [39] для описания зависимости между средним давлением и полушириной участка контакта для случаев существенно низких и высоких нагрузок. Дальнейшее развитие подхода, основанного на механике разрушения, позволило [40] получить точное решение задач о контакте синусоидального штампа и полуплоскости в условиях отсутствия трения и частичного проскальзывания при одинаковых упругих постоянных материалов контактирующих тел.

Был предложен [33] общий метод решения плоских периодических задач теории упругости, использующий аппарат функций действительного перемененного, путем сведения интегрального уравнения периодической контактной задачи [12]

$$\frac{E^*}{2}g'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} p(\xi)\,\mathrm{ctg}\,\frac{x-\xi}{2}\,d\xi, \tag{3.9}$$

где $g'(x)$ – производная функции начального зазора, к уравнению, соответствующему задаче с единичной областью контакта:

$$E^* g'(v) = \frac{2}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{p(u)}{v-u}du, \tag{3.10}$$

где $u = \operatorname{tg}\frac{\xi}{2}$, $v = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\alpha = \operatorname{tg}\frac{a}{2}$. На основе указанного метода [41] была решена задача о внедрении в упругую полуплоскость волнистой поверхности с параметрически изменяемой формой выступов и впадин, описываемой следующей функцией:

$$F(x) = \Delta\left[1 - \frac{(m+1)\cos\frac{2\pi x}{\lambda}}{\left|m\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right| + 1}\right], \tag{3.11}$$

где m – параметр формы, $m < 1$. Полученное выражение для определения контактного давления является обобщением решения Вестергаарда для синусоидальной волнистой поверхности:

$$p(x) = G(x)\frac{\sqrt{2}\pi\Delta E^*}{\lambda}\left|\cos\frac{\pi x}{\lambda}\right|\sqrt{\cos\frac{2\pi x}{\lambda} - \cos\frac{2\pi a}{\lambda}}, \tag{3.12}$$

где

$$G(x) = (m+1)^2\left(\left|m\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right| + 1\right)^{-2}\left(m\cos\frac{2\pi a}{\lambda} + 1\right)^{-1} \tag{3.13}$$

Зависимость (3.13) позволяет проанализировать влияние формы волнистой поверхности на основные контактные характеристики.

С использованием разложения функции начального зазора по многочленам Чебышева и приведения периодической контактной задачи к задаче с единичной областью контакта были получены точное [42] и асимптотические [43] решения для двухуровневой волнистой поверхности, внедряющейся в упругое полупространство. В частности, показано, что наличие дополнительной к основной гармонике синусоидальной волнистости малой амплитуды и высокой частоты приводит к осциллирующему характеру не только контактного давления, но и интегральных контактных характеристик (в частности, зависимости размера области фактического контакта от номинального давления).

В более общем случае, когда производная функции зазора между контактирующими поверхностями описывается рядом Фурье

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\sin\frac{2\pi nx}{\lambda} + B_n\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \tag{3.14}$$

контактные давления будут определяться суммой номинального давления $\bar{p}$ и выражения, являющегося обратным преобразованием Гильберта функции (3.14):

$$p(x) = \bar{p} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{2\pi nx}{\lambda} + B_n\sin\frac{2\pi nx}{\lambda}\right) \tag{3.15}$$

При полном контакте между поверхностями контактные давления непосредственно определяются формой зазора между ними. Процедуру их нахождения удобно выполнить с использованием быстрого преобразования Фурье [44]:

$$p(x) = \pi E^* F^{-1}\left[nF[h](n)\right] \tag{3.16}$$

В случае неполного контакта коэффициенты ряда Фурье A_n и B_n в формуле (3.15) должны определяться исходя из граничных условий и условия неотрицательности давления внутри областей контакта. В работе [45] вместо наложения дополнительных граничных условий использован вариационный принцип [46], основанный на минимизации полной дополнительной энергии. Проведенные вычисления [45] для синусоидальной волнистости показали, что в сравнении с точным решением наилучшая сходимость метода достигается при высоких нагрузках; при малых нагрузках наблюдалось значительное расхождение результатов.

В работах Мэннерса [47, 48] развит другой подход, основанный на использовании комплексных потенциалов для определения сингулярной части решения и поиске коэффициентов ряда Фурье для определения границ областей контакта. При определении границ областей контакта использовалось условие, что в зонах отсутствия контакта есть хотя бы одна точка, в которой производная функции начального зазора равна нулю. Данный метод показал высокую точность для всего диапазона приложенных нагрузок при численном определении коэффициентов A_n и B_n на основе решения системы алгебраических уравнений.

3.2. Плоская периодическая задача при условии частичного проскальзывания. В условиях частичного проскальзывания к периодическому штампу (совокупности штампов) приложены нормальная и касательная нагрузки, при этом программа нагружения существенно влияет на поведение контактных характеристик. Как и в задачах с единичной областью контакта [23, 49], в периодических задачах с частичным проскальзыванием область контакта разделяется на подобласти сцепления и проскальзывания. В подобласти сцепления выполняется условие равенства тангенциальных перемещений точек взаимодействующих поверхностей, а в подобласти проскальзывания выполняется закон трения Кулона–Амонтона:

$$q(x) = -\mu p(x) \tag{3.17}$$

Здесь μ – коэффициент трения.

Общая постановка и метод решения различных контактных задач, в том числе периодических, с учетом сцепления и проскальзывания путем сведения к векторной задаче Римана предложены в работе Антипова и Арутюняна [50]. В этой и в других более ранних исследованиях показано, что математическая постановка задач с учетом сил трения в области контактного взаимодействия сводится к исследованию связанной системы интегральных уравнений для определения нормальных и касательных контактных напряжений, при этом в частном случае одинаковых упругих постоянных контактирующих материалов система становится несвязанной.

Чиаварелла [51, 52], применив теорию Каттанео и Миндлина [53, 54] и аналогию с задачей для единичной области контакта, получил зависимости касательных напряжений и ширины области проскальзывания от приложенных нормальных и касательных усилий для синусоидальной волнистости и поверхности, описываемой функцией квадрата косинуса, в случае взаимодействия материалов, имеющих одинаковые упругие постоянные.

Позднее Блоком и Киром [33] развит общий подход к решению задачи о частичном проскальзывании тел из одинаковых материалов, форма поверхности которых описывается периодическими функциями, и получено выражение для определения размеров областей сцепления и проскальзывания для периодической системы штампов, форма контактирующей поверхности которых описывается степенной функцией.

Распределение внутренних напряжений с учетом зон сцепления и проскальзывания при внедрении синусоидального штампа определено [55] с применением потенциала Колосова–Мусхелишвили.

Получено [56] аналитическое решение задачи о контакте с упругой полуплоскостью упругого тела с заданной периодической системой канавок при одинаковых упругих постоянных взаимодействующих тел. Задача сведена к сингулярному интегральному уравнению с ядром Гильберта. Получены выражения для определения распределения нормальных и касательных усилий в зонах сцепления и проскальзывания. Установлено, что частичное проскальзывание может происходить только внутри канавок, где с ростом приложенного давления происходит увеличение зоны контакта. Если зона сцепления достигает границы канавки, контактирующие тела переходят к скольжению.

Для материалов, имеющих различные упругие постоянные, система уравнений для определения контактных напряжений является связанной. Антиповым [57] при помощи метода Винера–Хопфа была решена задача о взаимодействии с упругой полуплоскостью периодической системы жестких штампов с плоским основанием при наличии зон сцепления и проскальзывания.

В работе Блока и Кира [33] с целью получения аналитического решения задачи о частичном проскальзывании контактирующих тел с различными упругими постоянными применена аппроксимация, предложенная Гудманом [58], предполагающая, что влияние касательных усилий на нормальные давления пренебрежимо мало. На основе этого предположения были рассмотрены задачи как с полным сцеплением по всей площадке контакта, так и с частичным проскальзыванием для периодической системы штампов с плоским основанием и с синусоидальной волнистой поверхностью.

3.3. Плоская периодическая контактная задача в условиях полного скольжения. Периодическая задача при полном скольжении поверхностей предполагает учет при определении распределения контактных давлений, действующих в области контактного взаимодействия касательных напряжений, удовлетворяющих соотношению (3.17).

Кузнецов [59] впервые получил точное решение плоской периодической задачи фрикционного скользящего контакта жесткого волнистого индентора и упругой полуплоскости, используя формулы Колосова–Мусхелишвили и теорию автоморфных функций. Для синусоидального индентора с поверхностным профилем:

$$f(x) = \frac{\lambda^2}{2R\pi^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}(x-\gamma)\right), \tag{3.18}$$

где R – радиус кривизны вершины профиля; γ – расстояние между центром площадки контакта и осью симметрии выступа, выражение для определения контактного давления имеет вид:

$$p(x) = \frac{4G\lambda\cos\pi\alpha}{\pi R(\chi+1)}\cos\left(\pi\left(x+2\alpha a-2\gamma\right)/\lambda\right)\sin^{\frac{1}{2}-\alpha}\left(\pi\left(a+x\right)/\lambda\right)\sin^{\frac{1}{2}+\alpha}\left(\pi\left(a-x\right)/\lambda\right), \tag{3.19}$$

где G – модуль сдвига; α – параметр, который зависит от упругих свойств материала полуплоскости и коэффициента трения: $\operatorname{tg}\pi\alpha = \mu\dfrac{\chi-1}{\chi+1}$, $0 \le \alpha < 0.5$, $\chi = 3-4\nu$.

Полуширина области контакта и ее смещение определяются из системы трансцендентных уравнений, которая получается из условия, что контактное давление падает до нуля на границах участков контакта. Совокупное влияние коэффициента трения μ и плотности контакта a/λ на распределение контактного давления, а также на размер и положение контактных областей было проанализировано Кузнецовым и Гороховским [60]. На основе приближенного решения этой задачи [61] и в предположении, что $\gamma = \alpha = 0$, напряженно-деформированное состояние поверхностных слоев, контактирующих тел исследовалось при различных значениях коэффициента трения и ширины области контакта [62].

Аналогичные задачи о скольжении по упругой полуплоскости синусоидального штампа и периодической системы штампов с плоским основанием рассмотрены Блоком и Киром [33]. Задачи были решены сведением основного уравнения к интегральному уравнению с ядром Коши второго рода. Для синусоидального штампа было получено следующее выражение для определения контактного давления при периоде волнистости $\lambda = 2\pi$:

$$p(x) = \frac{\Delta E^* \cos(a/2)\cos(x/2)}{\sin \pi m} \sin\left(l + \gamma - \frac{x}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{a}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^m \left(\operatorname{tg}\frac{a}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{1-m}, \tag{3.20}$$

где эксцентриситет зоны контакта γ определяется выражением:

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos l}{\sin l - \psi^2\sqrt{1 + \psi^2 m(1 - m)}}\right) \tag{3.21}$$

В формулах (3.20) и (3.21) $\operatorname{tg}\pi m = 1/\beta\mu$; $l = (\pi m - \phi(2m - 1))$; $\operatorname{tg}\phi = 1/\psi$.

Для периодической системы штампов с плоским основанием (a — полуширина подошвы штампа) зависимость для определения распределения контактного давления получена в виде [33]:

$$p(x) = \frac{P \sin \pi m \left(\operatorname{tg}\frac{a}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{m-1}\left(\operatorname{tg}\frac{a}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{-m}}{2\pi \cos\frac{a}{2}\sin\left(\pi m - \varphi(2m - 1)\right)} \tag{3.22}$$

Исследовано [63] скольжение волнистого штампа по упругой полуплоскости, при наличии анизотропии материалов контактирующих тел. Задача была сведена к интегральному уравнению с ядром Гильберта, а решение получено в виде рядов многочленов Якоби. Полученные результаты показали, что для ортотропных материалов размер зазора зависит от ориентации оси ортотропии. Для некоторых ориентаций этой оси зазоры увеличиваются с увеличением коэффициента трения μ. Данный результат отличается от поведения изотропных материалов, для которых увеличение коэффициента трения всегда приводит к уменьшению зазоров.

Носоновский и Эдамс [64] исследовали установившееся скольжение упругих тел, ограниченных волнистыми поверхностями, в рамках динамической контактной задачи. Решение основано на выводе интегрального уравнения с ядром Коши второго рода с помощью интегральных преобразований и рядов Фурье. Полученное уравнение решено численно с использованием многочленов Якоби. Для установившегося режима скольжения при заданных значениях коэффициента трения, свойств материалов контактирующих тел и скорости скольжения определена зависимость ширины области контакта от приложенных номинальных давлений и касательных усилий. Результаты указывают на уменьшение минимального усилия, необходимого для устранения зазора между контактирующими телами, с увеличением коэффициента трения и/или скорости скольжения. Резонанс возникает, когда скорость скольжения приближается к скорости распространения волны Рэлея в полуплоскости.

Скольжение системы параболических штампов с учетом трения и износа рассмотрено Солдатенковым [65]. Задача сведена к каноническому сингулярному интегральному уравнению на дуге окружности в комплексной плоскости. Получены асимптотические выражения для определения полуширины участка контакта и смещения ее центра в случае, когда размер области контакта мал по сравнению с расстоянием между штампами.

3.4. Пространственная задача. Пространственные периодические контактные задачи представляют значительный интерес вследствие того, что большинство шероховатых поверхностей, встречающихся в природе и технических приложениях, изотропны, т.е. высотные и шаговые параметры профилей шероховатости в продольном и поперечном направлениях сравнимы по величине. Кроме того, пространственные периодические контактные задачи возникают при наличии на контактирующих поверхностях особой текстуры, как правило, образованной физическими и химическими методами обработки, например лазером или обработкой давлением.

С точки зрения теории упругости пространственная периодическая контактная задача значительно сложнее плоской в силу отсутствия прямой резольвенты основного интегрального уравнения, в котором левая часть выражается бесконечной суммой (см. разд. 1, выражения (1.1) и (1.2)). На практике условие $N \to \infty$ в (1.1) заменяют конечной суммой и решение уравнений (1.1)–(1.3) выполняют с помощью итерационных процедур или метода граничных элементов.

При полном контакте между телами задача становится линейной и значительно упрощается. Пространственный аналог указанной ранее плоской задачи для поверхности, имеющей синусоидальную волнистость в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, рассматривался Джонсоном и др. [45]. На основе принципа суперпозиции показано, что для регулярного рельефа, описываемого функцией:

$$f(x, y) = \Delta\left(1 - \cos\left(2\pi x/\lambda\right)\cos\left(2\pi y/\lambda\right)\right), \tag{3.23}$$

контактное давление при полном контакте определяется выражением:

$$p(x, y) = \bar{p} + \frac{\sqrt{2}\pi E^*\Delta}{\lambda}\cos\left(2\pi x/\lambda\right)\cos\left(2\pi y/\lambda\right) \tag{3.24}$$

Для случая неполного контакта в данной работе получены два асимптотических решения, которые устанавливают соотношения для основных интегральных характеристик контакта – приложенного номинального давления, площади фактического контакта и среднего зазора между поверхностями, для случаев очень низких и очень высоких номинальных давлений. В первом случае асимптотическое решение получено на основе применения теории Герца и аппроксимации функции (3.23) параболой у вершины. Во втором случае малый зазор между поверхностями моделировался круговой трещиной, что позволило определить интегральные характеристики при почти полном контакте. В промежутке между указанными асимптотическими результатами решение строилось численно на основе поиска коэффициентов рядов Фурье при минимизации полной дополнительной энергии (аналогично случаю плоской задачи для синусоидальной волнистости).

Рассмотрен [66] случай полного контакта волнистой поверхности и полупространства при условии их сцепления. Из полученного решения следует, что с увеличением коэффициента Пуассона величина номинального давления, необходимого для достижения полного контакта, возрастает.

С использованием метода конечных элементов получены [67] соотношения для интегральных контактных характеристик, близкие к результатам Джонсона и др. [45]; кроме того, были предложены выражения, аппроксимирующие зависимости площади фактического контакта и среднего зазора между волнистой поверхностью и полупространством для всего диапазона приложенных номинальных давлений.

Результаты исследований [45], посвященных контактной задаче для волнистой поверхности (3.23), были уточнены [68] с использованием метода граничных элементов и быстрого преобразования Фурье. В частности, установлено наличие точек перегиба зависимости фактической площади контакта от номинального давления. Первая точка соответствует преобразованию контура области контакта от круга к фигуре, близкой к квадрату со скругленными углами. Вторая – слиянию соседних областей контакта.

На основе разложения функции (3.23) в двойной ряд Фурье в полярных координатах уточнены [69] асимптотические зависимости, полученные ранее [45]. Для случая низких значений нагрузок решена задача о внедрении единичного штампа, вершина которого описывается функцией (3.23), а для случая высоких значений – задача о круговой трещине под действием неосисимметричного давления. Полученные зависимо-

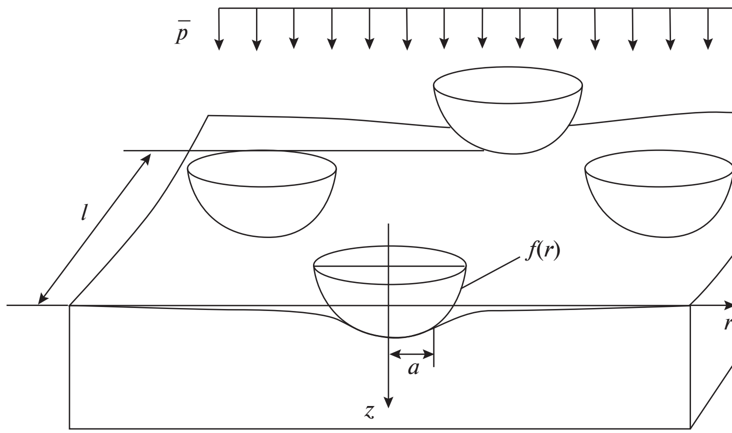


Рис. 2. Схема пространственной периодической контактной задачи для системы осесимметричных инденторов, внедряющихся в упругое полупространство.

сти фактической площади контакта и среднего зазора от номинального давления хорошо соотносятся с результатами численного моделирования [67, 68].

Периодическая контактная задача для системы осесимметричных гладких инденторов, форма контактирующей поверхности которых описывается функцией $f(r)$, взаимодействующей без сил трения с упругим полупространством, рассмотрена в [70] (рис. 2). Ее решение построено с использованием соотношений, полученных Галиным [23] для распределения давления под штампом при действии на границе полупространства вне штампа заданной распределенной пригрузки. В результате для определения контактного давления $p(r,\theta)$ под каждым штампом получено интегральное уравнение Фредгольма, ядро $K(r,\theta,r',\theta')$ которого представлено бесконечным сходящимся рядом:

$$p(r,\theta) - \int\int K(r,\theta,r',\theta')p(r',\theta')r'dr'd\theta' = G(r), \tag{3.25}$$

а функция $G(r)$ зависит от формы $f(r)$ контактирующей поверхности отдельного индентора и определяется соотношением:

$$G(r) = \frac{E^*}{4\pi^2}\int_0^a \Delta f(r')H_1(r,r')dr', \tag{3.26}$$

где

$$\begin{gathered} H_1(r,r') = \int_0^{2\pi} \frac{2r'}{R(r,r',\theta')}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-r^2}\sqrt{a^2-r'^2}}{aR(r,r',\theta')}d\theta' \\ R(r,r',\theta') = \sqrt{r^2-2rr'\cos\theta'+r'^2}, \end{gathered} \tag{3.27}$$

a — радиус единичного пятна контакта.

Предложен алгоритм приближенного решения этой задачи, основанный на замене ядра интегрального оператора в (3.25) конечной суммой (метод локализации).

3.5. Метод локализации. Показано [21], что решение интегрального уравнения (3.25) может быть с высокой степенью точности приближено решением следующего уравнения:

$$p(r,\theta) - \int\int\sum_{i=1}^{n} K_i(r,\theta,r',\theta')p(r',\theta')r'dr'd\theta' = G(r) + \bar{N}PQ(r,A_n), \tag{3.28}$$

где ядро есть конечная сумма первых членов ряда, которым представляется функция $K(r,\theta,r',\theta')$ в (3.25), а дополнительная функция, входящая в правую часть уравнения, получена путем интегрирования остаточного члена этого ряда. Эта функция представляет собой произведение следующих сомножителей: $\bar{N}$ — среднее количество пятен контакта на единице площади, P — нагрузка, действующая на каждое пятно контакта и функции $Q(r, A_n)$, определяемой соотношением:

$$Q(r, A_n) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{A_n^2 - a^2}} \tag{3.29}$$

В соотношении (3.29) A_n — радиус круга, в котором расположены все инденторы, влияние которых учтено ядром интегрального оператора в уравнении (3.28). Показано [21, 70], что за счет выбора этого радиуса решение уравнения (3.28) можно с любой степенью точности приблизить к решению исходного уравнения (3.25). Доказанное утверждение позволило предложить приближенный подход к решению периодических контактных задач с дискретной областью взаимодействия — метод локализации. Суть его состоит в том, что в контактных задачах с дискретной областью взаимодействия с определенной степенью точности влияние фактических давлений на удаленных от рассматриваемого пятнах контакта может быть учтено путем рассмотрения в этой области номинального давления $\bar{p} = P\bar{N}$.

Результаты расчетов [21] показывают, что даже при предельно плотном расположении сферических инденторов радиуса R ($a/l = 0.5$, где l — расстояние между вершинами инденторов, расположенных в узлах гексагональной решетки), погрешность в определении давления из уравнения (3.28) при $n = 0$ не превышает 20%, а распределения давления, рассчитанные при $n = 1$ и $n = 2$, различаются менее чем на 0.1%. При увеличении параметра a/l эта оценка улучшается. Следует отметить, что при $n = 0$ для определения давления под каждым штампом, контактирующая поверхность которого описывается функцией $f(r)$, имеем более простую формулу:

$$p(r) = \frac{E^*}{4\pi^2}\int_0^a \Delta f(r')H_1(r,r')dr' + \frac{2}{\pi}\bar{N}P\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{A_n^2 - a^2}}\right), \tag{3.30}$$

в которой ядро интегрального оператора определено выражением (3.27).

Подход, основанный на методе локализации, был использован [10] и [70] для расчета контактных давлений и внутренних напряжений при внедрении периодической системы равновысоких инденторов сферической формы в упругое однородное и двухслойное упругое полупространство, а также для расчета внедрения в упругое [70] и [71] (однородное и двухслойное) полупространство периодической системы разноуровневых инденторов (расположенных на двух и трех различных высотных уровнях). Расчеты показали существенное влияние высотного распределения инденторов и их плотности на контактные характеристики и величину номинального давления, необходимого для вступления в контакт инденторов следующего высотного уровня.

Исследование напряженного состояния внутри упругого полупространства при его взаимодействии с периодической системой одноуровневых сферических инденторов [21, 70] показало, что увеличение напряжений имеет место в приповерхностном слое на глубине, соизмеримой с половиной периода, причем характер этого распределения существенно зависит от параметра a/l, характеризующего плотность контакта. Возрастание плотности контакта приводит к возникновению на некоторой глубине под поверхностью полупространства (рис. 3) концентрации напряжений, которая может привести к развитию пластических деформаций и зарождению микротрещин. Полученные результаты качественно совпадают с выводами, сделанными ранее [72] при

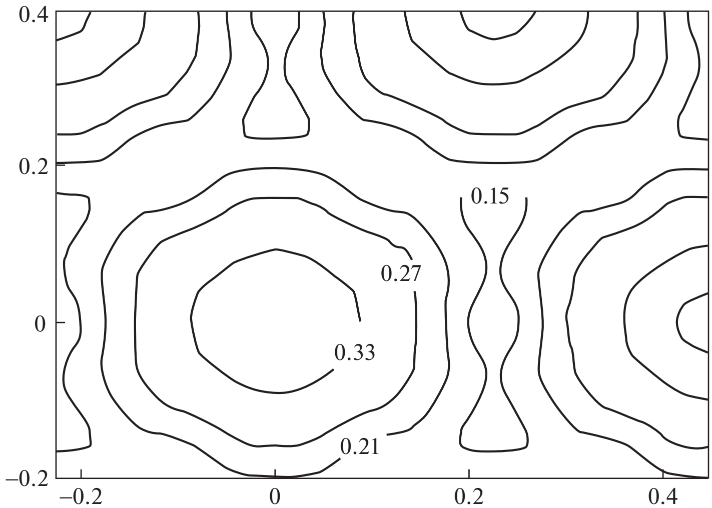


Рис. 3. Изолинии функции максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}/\bar{p}$ в плоскости $z/R = 0.08$ при $a/R = 0.2$ и $l/R = 0.44$.

исследовании контактного взаимодействия синусоидального штампа с упругой полуплоскостью.

Показано [73], что метод локализации применим также для решения плоской периодической контактной задачи. При внедрении периодической системы гладких штампов с формой контактирующей поверхности, заданной непрерывной функцией $F(x)$, выражение для контактного давления под отдельным штампом системы имеет вид:

$$p(x) = \frac{E^*}{2\pi}\sqrt{a^2 - x^2}\int_{-a}^{a}\frac{F'(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}(\xi - x)} + \frac{2P}{\pi l}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{l^2 - 4a^2}}\right), \tag{3.31}$$

где l – расстояние между штампами (период).

Выражение (3.31) по своей структуре совпадает с соотношением (3.30), полученным при рассмотрении периодической задачи в пространственной постановке.

Сравнение расчетов контактного давления [73] по приближенной формуле (3.31), полученной на основе метода локализации, с известными точными решениями периодических задач для синусоидального [34] и пилообразного [33] штампов, а также для периодической системы параболических штампов [74], показало, что контактные характеристики определяются с применением метода локализации с высокой степенью точности даже при достаточно высокой плотности контакта ($2a/l \approx 0.7$) (рис. 4). Установлено, что увеличение плотности контакта приводит к росту максимальных контактных давлений и уменьшению размера единичного пятна контакта. Сама эпюра давлений на единичном пятне контакта в большей степени определяется формой штампа (отдельной неровности).

Преимущество применения метода локализации при решении задач дискретного контакта связано с его относительной простотой и возможностью провести расчетные оценки влияния плотности контакта и формы штампа (отдельной неровности) на характеристики контактного взаимодействия (размер области контакта, распределение контактных давлений и т.д.) при разных параметрах микрогеометрии контактирующих поверхностей.

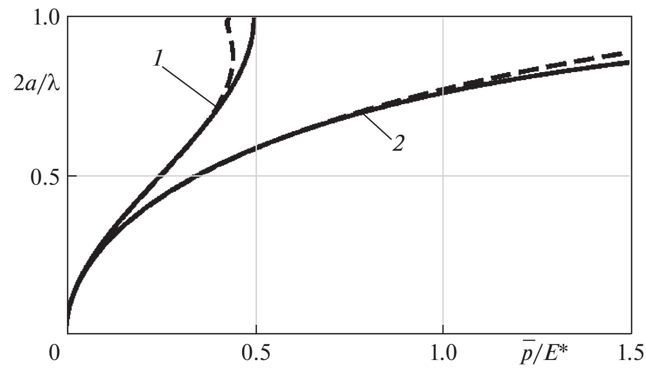


Рис. 4. Зависимость размера области контакта от номинального давления в плоской периодической контактной задаче: *1* – синусоидальная волнистая поверхность; *2* – периодическая система цилиндрических штампов; сплошная линия – точное решение; штриховая линия – решение по методу локализации.

4. Задачи дискретного контакта с учетом взаимодействия поверхностей в межконтактном зазоре.

4.1. Наличие промежуточной среды в зазоре между поверхностями. Наличие среды в зазоре между контактирующими поверхностями (жидкость, газ) существенно изменяет поведение контактных характеристик с ростом приложенного номинального давления. Исследование влияния сжимаемой жидкости, заполняющей объем между синусоидальной волнистой поверхностью и упругой полуплоскостью, на контактные характеристики проведено Кузнецовым с помощью комплексных потенциалов и аппарата автоморфных функций [75]. Было показано, что наличие жидкой среды в зазоре между волнистой поверхностью и полуплоскостью резко уменьшает размер области контакта, при этом чем ниже сжимаемость жидкости, тем меньше ширина участка контакта.

В дальнейшем направление, связанное с решением плоских периодических контактных задач при наличии в зазоре промежуточной среды (жидкости и/или газа), было развито в работах Мартыняка с соавторами. Для решения задач данного типа был развит метод межконтактных зазоров [76].

Исследована [77] задача контакта двух упругих изотропных полуплоскостей из различных материалов, граница одной из которых имеет периодическую систему канавок. Межконтактные зазоры заполнены газом, состояние которого описывается уравнением Ван-дер-Ваальса. Поставленная задача сведена к системе трех уравнений: сингулярного интегрального уравнения для высоты зазора и двух трансцендентных уравнений для ширины зазора и давления газа. Выявлены резкие изменения зависимостей ширины и объема зазоров, сближения и податливости контакта от внешней нагрузки в начале и в конце фазового перехода газ–жидкость.

Рассмотрена [78] задача контакта жесткого тела с волнистой поверхностью и упругой полуплоскости при наличии в зазоре между контактирующими телами газа и несжимаемой жидкости, не смачивающей поверхности тел. Падение давления в жидкости и в газе описывается уравнением Лапласа. С использованием метода комплексных потенциалов [11] контактная задача сведена к интегральному уравнению с ядром Гильберта для высоты зазоров и системе двух трансцендентных уравнений для расчета ширины зазоров и областей, заполненных жидкостью. Установлено, что сближение поверхностей уменьшается с увеличением поверхностного натяжения жидкости.

Уменьшение объема жидкости приводит к уменьшению ширины области, заполненной жидкостью.

В работе Шварца и Ястребова [79] рассмотрена связанная задача течения жидкости в зазоре между упругими телами с волнистыми поверхностями под давлением. Давление жидкости принималось сопоставимым с контактным давлением. Получено приближенное аналитическое и численное (методом конечных элементов) решение задачи. Показано, что внешнее давление, необходимое для герметизации стыка, не зависит от давления на выходе.

4.2. Учет адгезионного взаимодействия поверхностей. Наличие межмолекулярного (адгезионного) взаимодействия поверхностей изменяет характер напряженно-деформированного состояния контактирующих тел и влияет на их контактные характеристики – площадь фактического контакта, сближение поверхностей под нагрузкой и т.д. При дискретном характере взаимодействия поверхностей области действия межмолекулярных сил тоже дискретны. Наибольшее количество работ в данной области посвящены плоской периодической контактной задаче, при этом рассматривается адгезионное взаимодействие сухих поверхностей, описываемое упрощенными моделями: ДКР (Джонсон–Кендалл–Робертс) [80] или Можи–Дагдейла (МД) [81]. В модели ДКР предполагается, что межмолекулярные силы действуют внутри области контакта, вызывая постоянное отрицательное перемещение, а распределение давлений складывается из решения задачи для ограниченной области контакта (положительное давление, вызываемое сжатием) и сингулярного решения, обеспечивающего равномерное смещение по области контакта (отрицательное давление, вызванное растяжением).

В модели МД предполагается, что вне области контакта (в зазоре) действует постоянное отрицательное давление, являющееся аппроксимацией потенциала Леннарда–Джонса, описывающего действие межмолекулярных сил. Как правило, модель ДКР используют для материалов с малым модулем упругости, а модель МД подходит как для мягких материалов, так и для более жестких. Применимость модели оценивают с помощью параметра Тэйбора [82]:

$$\mu_T = \left(\frac{Rw^2}{E^{*2}\, z_0^3}\right)^{1/3}, \tag{4.1}$$

где R – приведенный радиус кривизн контактирующих тел в точке их первоначального контакта, w – работа межмолекулярных сил; z_0 – равновесное расстояние между поверхностями, при котором сила адгезии равна нулю, E^* – приведенный модуль упругости контактирующих материалов. При $\mu_T \ll 1$ модель МД переходит в модель ДМТ (Дерягин–Муллер–Топоров) [83], в которой учитываются растягивающие напряжения, вызванные адгезионными силами, вне области контакта, в предположении, что они не влияют на распределение напряжений внутри области контакта. При $\mu_T \gg 1$ модель МД переходит в модель ДКР.

Джонсоном [84] рассмотрена плоская периодическая контактная задача с учетом адгезионных сил, рассматриваемых в рамках модели ДКР. В соответствии с моделью ДКР, контактное давление складывалось из положительного сдагаемого $p_1(x)$, определяемого решением Вестергаарда (3.4), и отрицательного $p_2(x)$, вычисляемого согласно решению Койтера [85] для периодической системы трещин:

$$p_2(x) = -\bar{p}_2\left(1 - \left(\frac{\cos \pi a/\lambda}{\cos \pi x/\lambda}\right)^2\right)^{-1/2}, \tag{4.2}$$

где $\bar{p}_2$ – среднее значение отрицательной компоненты давления; λ – период. С использованием коэффициента интенсивности напряжений на границе области контакта была определена скорость высвобождения энергии упругой деформации и получено следующее соотношение между номинальным давлением $\overline{p}$ и полушириной области контакта a:

$$\overline{p} = \frac{\pi E^* \Delta}{\lambda}\sin^2\frac{\pi a}{\lambda} - \sqrt{\frac{2E^* w}{\lambda}\operatorname{tg}\frac{\pi a}{\lambda}} \tag{4.3}$$

Также в работе Джонсона [84] получено асимптотическое решение пространственной задачи при наличии адгезии и условия почти полного контакта для волнистой поверхности (3.23). Для случаев плоской и пространственной задачи рассмотрены условия отрыва поверхностей.

Зильберманом и Перссоном [86] получено уточненное решение задачи контакта синусоидальной волнистой поверхности и упругой полуплоскости с учетом адгезии в рамках ДКР модели, в котором учитывались зависимости упругой энергии и энергии адгезии от формы деформированной поверхности полуплоскости. Показано хорошее совпадение аналитических и численных результатов, полученных методом молекулярной динамики.

Исследован [87] упругий контакт волнистой поверхности и полуплоскости с учетом адгезии, описываемой МД моделью. Задача решена численно-аналитическим способом с применением квадратур для вычисления сингулярных интегралов с ядром Коши. Показано, что зависимость размера области контакта от номинального давления характеризуется разрывами и гистерезисом. Установлено, что при нулевой нагрузке существует такая область контакта заданного размера, при которой с повышением номинального давления может происходить скачок в режим полного контакта.

Приведено [88] сравнение результатов, полученных для плоской задачи об адгезионном контакте жесткого тела с синусоидальной волнистой поверхностью и упругой полуплоскости с использованием ДКР и МД моделей адгезии. В отличие от [87] в работе [88] при построении решения по МД модели применялось условие равенства коэффициентов интенсивности сжимающих и растягивающих напряжений на границе области контакта. Показано, что когда размер области контакта приближается к периоду волнистой поверхности, модель ДКР неприменима, и для количественной оценки поверхностных сил, действующих вне зоны контакта, следует использовать МД-модель.

Предложена [89] асимптотическая модель адгезионного контакта волнистой поверхности и полуплоскости, предполагающая, что растягивающие усилия в зоне адгезии можно представить в виде разности решений Вестергаарда (3.1.4) для зоны адгезии и зоны контакта. Получены аналитические выражения для определения контактных характеристик, которые показали хорошее соответствие с расчётами по МД модели адгезионного контакта [88].

Изучено [90] адгезионное взаимодействие периодической системы сферических штампов с упругим полупространством. Рассмотрены случаи как молекулярной, так и капиллярной адгезии. Задача решена с помощью метода локализации (см. п. 3.5). Проанализированы распределение контактного давления, деформированная форма упругого полупространства, размер областей контакта и другие характеристики в зависимости от формы штампов, расстояния между ними, величины поверхностной энергии (случай молекулярной адгезии) или толщины пленки жидкости, покрывающей полупространство (случай капиллярной адгезии). Показано, что форма штампов оказывает существенное влияние только на распределение контактных давлений; поведение других контактных характеристик существенно зависит от плотности пятен фактического контакта и свойств поверхности или покрывающих ее тонких пленок.

5. Моделирование влияния параметров микрогеометрии на характеристики контактного взаимодействия на макроуровне. При контактном взаимодействии деформируемых тел, обладающих поверхностным рельефом, существует два масштаба длины, один из которых связан с характерным размером L номинальной области контакта Ω, а второй – с характерным размером неровности и расстояния между ними l. Соотношение между этими характеристиками может меняться в процессе контактного взаимодействия. Так, при незначительных нагрузках возможна ситуация, когда величины L и l соизмеримы и в контакте находится конечное число выступов. Тогда для определения контактных характеристик может быть применен метод, изложенный в разд. 2 этой статьи.

В том случае, когда радиус номинальной области контакта значительно превосходит характерный размер единичного пятна контакта, расчет контактных характеристик производится на двух масштабных уровнях. С этой целью вводится понятие податливости шероховатого слоя [12] или функции $C[p(x,y)]$ дополнительного смещения [21], которая зависит от параметров микрогеометрии поверхности. Эта функция входит в интегральное уравнение для определения номинальных (осредненных) контактных давлений $p(x,y)$ и номинальной области контакта Ω на макроуровне, которое при заданной макроформе $F(x,y)$ штампа, внедряемого в упругое полупространство на величину δ, имеет вид:

$$C[p(x,y)] + \frac{1-\nu^2}{\pi E}\iint\limits_{\Omega}\frac{p(x,y)dx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} = \delta - F(x,y) \tag{5.1}$$

Штаерман [12] предложил определять функцию $C[p(x,y)]$ экспериментально, а для решения контактной задачи в плоской постановке использовал ее линейную аппроксимацию.

Для некоторых типов поверхностей с регулярным микрорельефом функция дополнительного смещения может быть определена аналитически или в виде аппроксимации численных результатов решения соответствующих контактных задач на микроуровне.

Подход к определению функции дополнительного смещения $C[p(x,y)]$ [21, 91, 92] основан на моделировании контактного взаимодействия с упругим полупространством шероховатого номинально плоского тела с заданным регулярным периодическим рельефом поверхности, при этом рассчитываемая функция дополнительного смещения зависит от формы и пространственного расположения неровностей и учитывает взаимное влияние пятен контакта. Для ее определения используются решения периодических контактных задач в плоской и пространственной постановках [93].

На основе анализа решений периодических контактных задач в плоской и пространственной постановках показано [93], что функция дополнительной податливости может быть приближена степенной функцией с достаточной степенью точности только при малых номинальных давлениях и не пригодна для описания перехода от дискретного к полному контакту на микроуровне.

После определения функции $C[p(x,y)]$ номинальные характеристики контактного взаимодействия на макроуровне определяются на основании решения интегрального уравнения (5.1). Разработаны [12, 94, 95] методы его решения при различных видах функции $C[p(x,y)]$ и для наиболее часто встречающихся в контактных задачах ядер $K(x,y,x',y')$ интегральных операторов.

На основании решения контактной задачи для цилиндрического и сферического штампов на макроуровне с учетом функции дополнительного смещения, рассчитанной из решения контактной задачи на микроуровне для системы штампов, моделирующей микрогеометрию поверхности, проведен анализ [21, 92, 96] влияния микрогеометрии как на номинальные (осредненные) характеристики взаимодействия тел (номинальную область контакта, внедрение при заданной величине нагрузки), так и на фактическую область контактного взаимодействия, значения максимальных фактических давлений, зазор между поверхностями и т.д.

На основе решения задачи о взаимодействии с учетом сил молекулярного притяжения двух номинально плоских полупространств, одно из которых является упругим, а поверхность другого обладает регулярным рельефом, проведен [97, 98] анализ функции дополнительного смещения от приложенного номинального давления и эффективной удельной работы адгезии при различных параметрах адгезионного взаимодействия и микрогеометрии поверхности.

6. Задачи механики дискретного контакта для неупругих тел.

6.1. Контакт при наличии упругих и пластических деформаций. При контакте тел из материалов, обладающих пластическими свойствами, например металлов, при увеличении приложенной нагрузки начинается пластическое течение в поверхностном слое. При этом дискретность области контактного взаимодействия оказывает существенное влияние на зарождение и развитие зон пластического течения.

Одно из первых исследований в данном направлении выполнено Чайлдсом [99], который рассмотрел пластический контакт жесткого плоского штампа и поверхности с пилообразным микрорельефом с использованием метода линий скольжения. Им показано, что как только поля линий скольжения отдельных выступов начинают перекрываться, дальнейшее деформирование выступов будет затруднено и тело будет деформироваться целиком. Угол наклона выступов существенно влияет на напряженно-деформированное состояние тел в контакте и значение нагрузки, при котором дальнейшее деформирование выступов шероховатости будет невозможно. Было также отмечено, что при сближении тел в направлении нормали к поверхности состояние полного контакта для идеально-пластических тел недостижимо.

Гао и др. [100] использовали метод конечных элементов для решения контактной задачи о сжатии упругопластической синусоидальной волнистой поверхности жестким штампом. Изменение напряженно-деформированного состояния волнистой поверхности описывалось безразмерным параметром

$$\Lambda = \frac{E^*\Delta}{\sigma_m\lambda}, \tag{6.1}$$

где Δ, λ – амплитуда и период волнистой поверхности соответственно; σ_m – предел текучести деформируемого материала. Выявлено, что для значений Λ порядка единицы первоначальное почти герцевское распределение давлений на каждом пятне контакта становится более равномерным со средним значением, близким к твердости материала. Однако при больших значениях Λ пластические деформации под соседними пятнами контакта могут привести к увеличению среднего давления, которое может достигать $5.8\sigma_m$ при высоких плотностях контакта. Было отмечено [101] схожее повышение давления при использовании теории дислокационной пластичности для описания пластической деформации волнистой поверхности. К аналогичным выводам пришли авторы статьи [102], в которой методом конечных элементов была решена задача упругопластического контакта трехмерной волнистой поверхности с полупространством. Также было показано, что не существует верхнего предела роста давления при увеличении амплитуды волнистой поверхности вследствие преобладания гидростатических напряжений при высоких плотностях контакта.

В работе Мэннерса [103] на основе теории линий скольжения проведен асимптотический анализ пластического контакта двумерной волнистой поверхности и полуплоскости. Показано, что в случае идеальной пластичности для полного сплющивания волнистой поверхности необходимо приложить бесконечное давление, что соответствует результатам Чайлдса [99] для пилообразного рельефа. В случае упругопластического материала полный контакт поверхностей достигается при высоких, но конечных значениях номинального давления, что соответствует численным результатам Гао и др. [100].

6.2. Фрикционный контакт вязкоупругих тел. Циклическое деформирование поверхностных слоев материала, происходящее вследствие дискретности контактного взаимодействия и обусловленное наличием микрорельефа, играет важную роль в формировании сил трения в условиях скольжения тел с шероховатыми поверхностями. Для описания механизма диссипации энергии в условиях циклического деформирования поверхностных слоев материала используются вязкоупругие модели.

В данном разделе дан обзор исследований, посвященных анализу совместного влияния параметров микрогеометрии поверхности и неупругих деформаций контактирующих тел на контактные характеристики и силу трения при скольжении тел, поверхность которых имеет регулярный рельеф. Ряд аспектов этой проблемы изучался путем решения контактных задач в квазистатической постановке при разном способе описания микрорельефа поверхности жесткого контртела, взаимодействующего с вязкоупругим материалом в условиях трения скольжения [21, 91, 104–114].

Рассмотрены контактные задачи в плоской постановке о движении периодической системы штампов по тонкому вязкоупругому слою, сцепленному с упругой полуплоскостью [104–106]. Деформации слоя описывались одномерными моделями Максвелла [104, 105] и Кельвина [106]. Проведен анализ зависимости деформационной составляющей коэффициента трения, возникающей при скольжении индентора, от параметров его рельефа, реологических характеристик поверхностного слоя и скорости скольжения. В частности, показано, что деформационная составляющая коэффициента трения μ_d является немонотонной функцией безразмерного параметра $\varsigma_0 = (a + b)/(2VT_\varepsilon)$, который зависит от времени запаздывания T_ε и скорости V скольжения индентора и представляет собой отношение времени, за которое элемент проходит расстояние, равное полуширине площадки контакта $(a + b)/2$ отдельной неровности, ко времени запаздывания вязкоупругого материала. Коэффициент трения стремится к нулю при $\varsigma_0 \to 0$ и $\varsigma_0 \to \infty$. Эти предельные случаи соответствуют решению задачи в упругой постановке. Аналогичные результаты получены при решении пространственной контактной задачи о скольжении системы сферических неровностей по вязкоупругому слою, описываемому одномерной моделью Кельвина [107, 108].

С целью изучения влияния на контактные характеристики и силу трения не только формы вершин неровностей, но и впадин шероховатой поверхности исследовались контактные задачи о скольжении двоякопериодической волнистой поверхности по вязкоупругому слою, описываемому одномерной моделью Кельвина, характеризуемой спектром времен релаксации [109–111]. Рассматривались случаи полного [109] и дискретного контакта [110, 111].

Разработаны также методы расчета деформационной составляющей силы трения при скольжении индентора с многоуровневой шероховатостью по вязкоупругому основанию [112]. Построено [113] аналитическое решение контактной задачи в плоской постановке о скольжении штампа с периодическим рельефом по границе вязкоупругой полуплоскости в условиях полного контакта в предположении отсутствия касательных контактных напряжений; определены условия осуществления полного контакта и дан анализ распределения контактных давлений и зависимости силы трения от скорости и параметров микрогеометрии поверхности для профилей, описываемых различными периодическими функциями.

Представлено [114] аналитическое решение задачи контакта жесткого синусоидального штампа по вязкоупругой полуплоскости. Решение задачи базируется на методе Хантера [115] для единичной области контакта. Результаты показывают, что в зависимости от номинального давления и скорости скольжения может произойти переход от полного контакта к частичному. Получены зависимости деформационной составляющей коэффициента трения, размера области контакта и дополнительного смещения от реологических и упругих свойств материала полуплоскости, геометрических параметров волнистой поверхности, номинального давления и скорости скольжения.

На основе решения задачи о скольжении жесткого трехмерного штампа периодической структуры по вязкоупругому основанию при наличии несжимаемой жидкости в зазоре между контактирующими поверхностями [116] дан анализ влияния жидкости на сопротивление движению штампа и на распределение давлений в области контакта. В частности, показано, что наличие жидкости в зазоре приводит к уменьшению размера единичного пятна контакта и деформационной составляющей силы трения.

Рассмотрены [117–119] контактные задачи в плоской и пространственной постановках о скольжении жесткого тела с регулярным рельефом по поверхности вязкоупругого основания с учетом сил молекулярного притяжения в зазоре между поверхностями. На основании проведенных исследований установлено, что при наличии адгезионного притяжения увеличивается фактическая область контакта и переход от дискретного к полному контакту происходит при меньших нагрузках; адгезионное притяжение приводит к возникновению области контакта даже при отрицательных нагрузках, при этом с увеличением силы адгезии сила трения возрастает.

Заключение. Проведенный обзор показывает значительный интерес ученых к исследованию контактных задач для неодносвязной области взаимодействия, который обусловлен большой практической значимостью результатов их решения как для развития направления инженерии технических поверхностей и элементов трибосопряжений, так и в области разработки новых материалов и конструкций.

Математические модели основаны на решении краевых задач со смешанными граничными условиями для упругих, вязкоупругих и упругопластических сред. Показано, что в современных исследованиях большое внимание уделяется учету дополнительных сил, действующих в зазоре между контактирующими поверхностями (адгезионное взаимодействие, теплообмен, наличие жидкости и т.д.).

Результаты решения задач дискретного контакта дают возможность оценить влияние параметров микрогеометрии поверхностей на распределение контактных давлений, фактическую площадь контакта, а также на силу трения в условиях фрикционного взаимодействия поверхностей. Следует отметить, что в условиях фрикционного взаимодействия параметры микрогеометрии контактирующих поверхностей влияют также и на характер разрушения поверхностных слоев материалов, поскольку возникающее циклическое поле напряжений вызывает накопление в них усталостных повреждений.

Результаты исследований задач с дискретной областью взаимодействия используются не только для оценки характеристик взаимодействия различных элементов конструкций, но и для разработки способов управления их функциональными характеристиками за счет выбора оптимального поверхностного рельефа.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-18-50346.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорьев А.Я.* Физика и микрогеометрия технических поверхностей. Минск: Беларуская навука, 2016. 248 с.
2. *Thomas T.R.* Rough Surfaces. London: Imperial College Press, 1999. 278 p.
3. *Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С.* Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
4. *Демкин Н.Б.* Контактирование шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 228 с.
5. *Рыжов Э.В., Суслов А.Г., Федоров В.П.* Технологическое обеспечение эксплуатационных свойств деталей машин. М.: Машиностроение, 1979. 176 с.
6. *Wriggers P.* Computational Contact Mechanics. Berlin: Springer, 2006. xii+518 p.
7. *Yastrebov V.A.* Numerical Methods in Contact Mechanics. London, Hoboken: Wiley-ISTE, 2013. xviii+392 p.

8. *Hills D., Andresen H., Barber J.R. et al.* Modeling and Simulation of Tribological Problems in Technology / Ed. by *Paggi M. and Hills D.* Cham: Springer, 2020. vii+330 p.
9. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: ГТТЛ, 1955. 491 с.
10. *Горячева И.Г., Торская Е.В.* Периодическая контактная задача для системы штампов и упругого слоя, сцепленного с упругим основанием // Трение и износ. 1995. Т. 16. № 4. С. 642–652.
11. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1933. 382 с.
12. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. 270 с.
13. *Gladwell G.M.L.* Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity. Dordrecht: Springer, 1980. 736 p.
14. *Dezyani M., Sharafbafi F., Irani S.* A new solution for the two-zonal contact problem // Arab. J. Sci. Eng. 2013. V. 38. № 6. P. 1509–1518.
15. *Ghanati P., Adibnazari S.* A study on the extent of the contact and stick zones in multiple contacts // Arch. Appl. Mech. 2019. V. 89. P. 1825–1836.
16. *Vergne P., Villechaise B., Berthe D.* Elastic behavior of multiple contacts: asperity interaction // J. Tribol-T ASME. 1985. V. 107. № 2. P. 224–228.
17. *Berthe D., Vergne P.* An elastic approach to rough contact with asperity interactions // Wear. 1987. V. 117. № 2. P. 211–222.
18. *Nowell D., Hills D.A.* Hertzian contact of ground surfaces // J. Tribol-T ASME. V. 111. № 1. P. 175–179.
19. *Sundaram N., Farris T.N.* Multiple contacts of similar elastic materials // J. Appl. Mech. T-ASME. 2009. V. 131. № 2. P. 1–12.
20. *Горячева И.Г., Добычин М.Н.* Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 253 с.
21. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
22. *Goryacheva I.G., Dobychin M.N.* Multiple contact model in the problems of tribomechanics // Tribol. Int. 1991. V. 24. № 1. P. 29–35.
23. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
24. *Greenwood J.A., Williamson G.P.B.* Contact of nominally flat surfaces // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1966. V. 295. № 1442. P. 300–319.
25. *Андрейкив А.Е., Панасюк В.В.* Смешанная задача теории упругости для полупространства с круговыми линиями раздела граничных условий // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 3. С. 26–32.
26. *Аргатов И.И., Назаров С.А.* Метод сращиваемых разложений для задач с малыми зонами контакта // В кн. Механика контактных взаимодействий / Под ред. *Воровича И.И.* и *Александрова В.М.* М.: Физматлит, 2001. С. 73–82.
27. *Аргатов И.И.* Об улучшении асимптотического решения, получаемого по методу сращиваемых разложений в контактной задаче теории упругости // ЖВММФ. 2000. Т. 40. № 4. С. 623–632.
28. *Argatov I., Li Q., Popov V.L.* Cluster of the Kendall-type adhesive microcontacts as a simple model for load sharing in bioinspired fibrillar adhesives // Arch. Appl. Mech. 2019. V. 89. P.1447–1472.
29. *Collins W.D.* Some coplanar punch and crack problems in three-dimensional elastostatics // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1963. V. 274. № 1359. P. 507–528.
30. *Li S., Yao Q., Li Q., Feng X.-Q., Gao H.* Contact stiffness of regularly patterned multi-asperity interfaces // J. Mech. Phys. Solids. 2018. V. 111. P. 277–289.
31. *Яковенко А.А.* Моделирование контактного взаимодействия захватывающего инструмента с биологической тканью // Российский ж. биомеханики. 2017. Т. 21. № 4. С. 418–428.
32. *Sadowsky M.* Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie // ZAMM. 1928. V. 8. № 2. P. 107–121.
33. *Block J.M., Keer L.M.* Periodic contact problems in plane elasticity // J. Mech. Mater. Struct. 2008. V. 3. P. 1207–1237.

34. *Westergaard H.M.* Bearing pressures and cracks // J. Appl. Mech. T-ASME. 1939. V. 6. P. 49–52.
35. *Dundurs J., Tsai K.C., Keer L.M.* Contact between elastic bodies with wavy surfaces // J. Elast. 1973. V. 3. P. 109–115.
36. *Кузнецов Е.А.* Периодическая контактная задача с учетом пригрузки, действующей вне штампа // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 1. С. 84–93.
37. *Hertz H.* Ueber die Berüehrung fester elastischer Köerper // J. für die reine und angewandte Mathematik. 1881. V. 92. P. 156–171.
38. *Sneddon I.N.* The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1946. V. 187. № 1009. P. 229–260.
39. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
40. *Xu Y., Jackson R.L.* Periodic contact problems in plane elasticity: The fracture mechanics approach // J. Tribol-T ASME. 2018. V. 140. № 1. P. 1–11.
41. *Tsukanov I.Y.* Effects of shape and scale in mechanics of elastic interaction of regular wavy surfaces // P.I. Mech. Eng. J.- J. Eng. 2017. V. 231. № 3. P. 332–340.
42. *Цуканов И.Ю.* Периодическая контактная задача для поверхности с двухуровневой волнистостью // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 3. С. 372–380.
43. *Tsukanov I.Y.* Partial contact of a rigid multisinusoidal wavy surface with an elastic half-plane // Adv. Tribol. 2018. V. 2018. P. 1–8.
44. *Ju Y., Farris T.N.* Spectral Analysis of Two-Dimensional Contact Problems // J. Tribol-T ASME. 1996. V. 118. № 2. P. 320–328.
45. *Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J.G.* The contact of elastic regular wavy surfaces // Int. J. Mech. Sci. 1985. V. 27. № 6. P. 383–396.
46. *Kalker J.J.* Variational principles of contact elastostatics // J. Inst. Math. Appl. 1977. V. 20. № 2. P. 199–219.
47. *Manners W.* Partial contact between elastic surfaces with periodic profiles // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1998. V. 454. № 1980. P. 3203–3221.
48. *Manners W.* Methods for analyzing partial contact between surfaces // Int. J. Mech. Sci. 2003. V. 45. № 6–7. P. 1181–1199.
49. *Галин Л.А.* Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 413–424.
50. *Антипов Ю.А., Арутюнян Н.Х.* Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1005–1017.
51. *Ciavarella M.* The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem, I: Theory // Int. J. Solids Struct. 1998. V. 35. № 18. P. 2349–2362.
52. *Ciavarella M.* The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem, II: Examples // Int. J. Solids Struct. 1998. V. 35. № 18. P. 2363–2378.
53. *Cattaneo C.* Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi // Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei. 1938. V. 27. P. 342–348.
54. *Mindlin R.D.* Compliance of elastic bodies in contact // J. Appl. Mech. T-ASME. 1949. V. 16. P. 259–268.
55. *Klimchuk T., Ostryk V.* Stress distributions in the Cattaneo–Mindlin problem on a contact with slip and adhesion of two cylindrical bodies // Front. Mech. Eng. 2020. V. 6. P. 1–11.
56. *Горячева И.Г., Маланчук Н.И., Мартыняк Р.М.* Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 695–709.
57. *Antipov Y.A.* Galin's problem for a periodic system of stamps with friction and adhesion // Int. J. Solids Struct. 2000. V. 37. № 15. P. 2093–2125.
58. *Goodman L.E.* Contact stress analysis of normally loaded rough spheres // J. Appl. Mech. T-ASME. 1962. V. 29. № 3. P. 515–522.
59. *Кузнецов Е.А.* Периодическая контактная задача для полуплоскости с учетом сил трения // Прикл. механика. 1976. Т. 12. № 10. С. 37–44.
60. *Кузнецов Е.А., Гороховский Г.А.* О фактическом контактном давлении // Проблемы трения и изнашивания.1977. Вып. 12. С. 10–13.

61. *Кузнецов Е.А., Гороховский Г.А.* Влияние шероховатости на напряженное состояние тел при фрикционном взаимодействии // Прикл. мех. 1978. Т. 14. № 9. С. 62–68.

62. *Kuznetsov Ye.A., Gorokhovsky G.A.* Effect of tangential load on the stressed state of rubbing rough bodies // Wear. 1981. V. 73. № 1. P. 41–58.

63. *Криштафович А.А., Мартыняк Р.М.* Фрикционный контакт двух упругих полуплоскостей с волнистыми поверхностями // Трение и износ. 2000. Т. 21. № 5. С. 1–8.

64. *Nosonovsky M., Adams G.G.* Steady-state frictional sliding of two elastic bodies with a wavy contact interface // J. Tribol-T ASME. 2000. V. 122. № 3. P. 490–495.

65. *Солдатенков И.А.* Периодическая контактная задача плоской теории упругости. Учет трения, износа и сцепления // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 2. С. 337–351.

66. *Wang X., Xu Y., Jackson R.L.* Elastic sinusoidal wavy surface contact under full stick conditions // Tribol. Lett. 2017. V. 65. № 4. P. 156–170.

67. *Rostami A., Jackson R.L.* Predictions of the average surface separation and stiffness between contacting elastic and elastic-plastic sinusoidal surfaces // P.I. Mech. Eng. J. – J. Eng. 2013. V. 227. № 12. P. 1376–1385.

68. *Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F.* The contact of elastic regular wavy surfaces revisited // Tribol. Lett. 2014. V. 56. № 1. P. 171–183.

69. *Tsukanov I.Y.* An extended asymptotic analysis for elastic contact of three-dimensional wavy surfaces // Tribol. Lett. 2019. V. 67. № 4. P. 107–113.

70. *Горячева И.Г.* Периодическая контактная задача для упругого полупространства // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1036–1044.

71. *Goryacheva I.G., Torskaya E.V.* Contact of multi-level periodic system of indenters with coated elastic half-space // FU Mech. Eng. 2019. V. 17. № 2. P. 149–159.

72. *Kuznetsov Y.A., Gorokhovsky G.A.* Stress distribution in a polymeric material subjected to the action of a rough-surface indenter // Wear. 1978. V. 51. № 2. P. 299–308.

73. *Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y.* Analysis of elastic normal contact of surfaces with regular microgeometry based on the localization principle // Front. Mech. Eng. 2020. V. 6. P. 1–10.

74. *Кузнецов Е.А.* О применении автоморфных функций в плоской теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 35 – 44.

75. *Kuznetsov Ye.A.* Effect of fluid lubricant on the contact characteristics of rough elastic bodies in compression // Wear. 1985. V. 102. № 3. P. 177–194.

76. *Martynyak R.M.* The method of functions of intercontact gaps in problems of local loss of contact between elastic half-spaces // Math. Meth. Phys.-Mech. Fields. 2000. V. 43. № 1. P. 102–108.

77. *Kozachok O.P., Slobodian B.S., Martynyak R.M.* Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas // J. Math. Sci. 2017. V. 222. № 2. P. 131–142.

78. *Kozachok O.P., Martynyak R.M.* Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // Math. Mech. Solids. 2018. V. 24. № 11. P. 3381–3393.

79. *Shvarts A.G., Yastrebov V.A.* Fluid flow across a wavy channel brought in contact // Tribol. Int. 2018. V. 126. P. 116–126.

80. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1971. V. 324. № 1558. P. 301–313.

81. *Maugis D.* Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // J. Colloid. Interf. Sci. 1991. V. 150. № 1. P. 243–269.

82. *Tabor D.* Surface forces and surface interactions // J. Colloid. Interf. Sci. 1977. V. 58. № 2. P. 2–13.

83. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles. // J. Colloid. Interf. Sci. 1975. V. 53. № 2. P. 314–326.

84. *Johnson K.L.* The adhesion of two elastic bodies with slightly wavy surfaces // Int. J. Solids Struct. 1995. V. 32. № 3–4. P. 423–430.

85. *Koiter W.* An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet // Ingng. Arch. 1959. V. 28. P. 168–172.

86. *Zilberman S., Persson B.N.J.* Nanoadhesion of elastic bodies: roughness and temperature effects // J. Chem. Phys. 2003. V. 118. № 14. P. 6473–6480.

87. *Adams G.G.* Adhesion at the wavy contact interface between two elastic bodies // J. Appl. Mech. T-ASME. V. 71. № 6. P. 851–856.

88. *Hui C.Y., Lin Y.Y., Baney J.M., Kramer E.J.* The mechanics of contact and adhesion of periodically rough surfaces // J. Polym. Sci. Pol. Phys. 2001. V. 39. № 11. P. 1195–1214.

89. *Jin F., Wan Q., Guo X.* A double-Westergaard model for adhesive contact of a wavy surface // Int. J. Solids Struct. 2016. V. 102–103. P. 66–76.

90. *Маховская Ю.Ю.* Дискретный контакт упругих тел при наличии адгезии // Изв. РАН. МТТ. 2003. Т. 38. Вып. 2. С. 39–48.

91. *Goryacheva I.* Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht: Springer. 1997. xiv+346 p.

92. *Goryacheva I.G.* Mechanics of discrete contact // Tribol. Int. 2006. V. 39. № 5. P. 381–386.

93. *Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y.* Modeling of normal contact of elastic bodies with surface relief taken into account // J. Phys. Conf. Ser. 2018. V. 991. № 1. P. 1–8.

94. *Горячева И.Г.* Плоские и осесимметричные контактные задачи для шероховатых упругих тел // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 1. С. 99–105.

95. *Галанов Б.А.* Пространственные контактные задачи для упругих шероховатых тел при упругопластических деформациях неровностей // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 1020–1029.

96. *Горячева И.Г.* Расчет контактных характеристик с учетом параметров макро- и микрогеометрии поверхностей // Трение и износ. 1999. Т. 20. № 3. С. 239–248.

97. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Упругий контакт номинально плоских поверхностей при наличии шероховатости и адгезии // Изв. РАН. МТТ. 2017. Т. 52. № 4. С. 101–111.

98. *Goryacheva I., Makhovskaya Y.* Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies // Friction. 2017. V. 5. № 3. P. 339–350.

99. *Childs T.H.C.* The persistence of asperities in indentation experiments // Wear. 1973. V. 25. № 1. P. 3–16.

100. *Gao Y.F., Bower A.F., Kim K.S. et al.* The behavior of an elastic-perfectly plastic sinusoidal surface under contact loading // Wear. 2006. V. 261. № 2. P. 145–154.

101. *Sun F., Van der Giessen E., Nicola L.* Interaction between neighboring asperities during flattening: a discrete dislocation plasticity analysis // Mech. Mater. 2015. V. 90. P. 157–165.

102. *Krithivasan V., Jackson R.L.* An analysis of three-dimensional elasto-plastic sinusoidal contact // Tribol. Lett. 2007. V. 27. № 1. P. 31–43.

103. *Manners W.* Plastic deformation of a sinusoidal surface // Wear. V. 264. № 1–2. P. 60–68.

104. *Goryacheva I.G., Sadeghi F.* Contact characteristics of rolling/sliding cylinder and a viscoelastic layer bonded to an elastic substrate // Wear. 1995. V. 184. № 2. P. 125–132.

105. *Goryacheva I.G., Sadeghi F., Nickel D.* Internal stresses in contact of rough body and a viscoelastic layered semi-infinite plane // J. Tribol-T ASME. 1996. V. 118. № 1. P. 131–136.

106. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Влияние несовершенной упругости поверхностного слоя на контактные характеристики при скольжении шероховатых упругих тел // Трение и износ. 1997. Т. 18. № 1. С. 5–12.

107. *Любичева А.Н.* Анализ взаимного влияния пятен контакта при скольжении периодической системы неровностей по вязкоупругому основанию винклеровского типа // Трение и износ. 2008. Т. 29. № 2. С. 125–133.

108. *Любичева А.Н.* Численное моделирование скольжения системы сферических инденторов по вязкоупругому телу // Вестн. Нижегор. унив. им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4–5. С. 2324–2325.

109. *Ноздрин М.А., Маховская Ю.Ю., Шептунов Б.В.* Расчет деформационной составляющей силы трения при скольжении тела по вязкоупругому основанию // Вестн. ИГЭУ. 2009. № 3. С. 48–50.

110. *Шептунов Б.В., Горячева И.Г., Ноздрин М.А.* Контактная задача о движении штампа с регулярным рельефом по вязкоупругому основанию // Трение и износ. 2013. Т. 34. № 2. С. 109–119.

111. *Ноздрин М.А., Шептунов Б.В.* Модель трения твердого тела с регулярным рельефом и вязкоупругого полупространства // Физика, химия и механика трибосистем. 2015. № 12. С. 24–29.

112. *Солдатенков И.А.* К расчету деформационной составляющей силы трения для стандартного вязкоупругого основания // Трение и износ. 2008. Т. 29. № 1. С. 12–21.

113. *Горячева И.Г., Горячев А.П.* Контактные задачи о скольжении штампа с периодическим рельефом по вязкоупругой полуплоскости // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 1. С. 103–116.

114. *Menga N., Putignano C., Carbone G., Demelio G.P.* The sliding contact of a rigid wavy surface with a viscoelastic half-space // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 2014. V. 470. № 2169. P. 1–14.

115. *Hunter S.C.* The rolling contact of a rigid cylinder with a viscoelastic half space // J. Appl. Mech. T-ASME. V. 28. № 4. P. 611–617.

116. *Горячева И.Г., Шпенёв А.Г.* Моделирование скольжения штампа с регулярным рельефом подошвы по вязкоупругому основанию при наличии жидкой смазки // ПММ. 2012. Т. 76. № 5. С. 754–763.

117. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Моделирование трения на разных масштабных уровнях // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 3. С. 100–110.

118. *Goryacheva I., Makhovskaya Y.* Adhesion effect in sliding of a periodic surface and an individual indenter upon a viscoelastic base // J. Strain Anal. Eng. 2015. V. 51. № 4. P. 286–293.

119. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю., Морозов А.В., Степанов Ф.И.* Трение эластомеров. Моделирование и эксперимент. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. 204 с.

Development of Discrete Contact Mechanics with Applications to Study the Frictional Interaction of Deformable Bodies

I. G. Goryacheva[a,#] and I. Yu. Tsukanov[a,##]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*
[#]*e-mail: goryache@ipmnet.ru*
[##]*e-mail: tsukanov@ipmnet.ru*

The review highlights the current state of research in the field of discrete contact mechanics, including the main approaches to the formulation of problems, methods of analytical and numerical solution, specific results and areas of their practical use. The article is aimed at specialists in the contact mechanics and tribology, and may also be of interest to researchers in the field of surface engineering, interested in deformable bodies interaction control.

Keywords: contact mechanics, discrete contact, surface microrelief, elasticity, viscoelasticity, elastoplastic deformation, friction, contact characteristics, real contact area, mutual influence of contact spots.
Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-18-50346

REFERENCES

1. *Grigoriev A.Ya.* Physics and Microgeometry of Technical Surfaces. (Fizika i mikrogeometriya tekhnicheskih poverhnostej) Minsk: Belaruskaya navuka, 2016. 248 p. (in Russian)
2. *Thomas T.R.* Rough Surfaces. London: Imperial College Press, 1999. 278 p.
3. *Kragelsky I.V., Dobychin M.N., Kombalov V.S.* Friction and Wear. Calculation Methods. Oxford: Pergamon Press, 1982. ix+464 p.
4. *Demkin N.B.* Contact of Rough Surfaces. (Kontaktirovanie sherohovatyh poverhnostej) Moscow: Nauka, 1970. 228 p. (in Russian)
5. *Ryzhov E.V., Suslov A.G., Fedorov V.P.* Technological Support of the Operational Properties of Machine Parts. (Tekhnologicheskoe obespechenie ekspluatacionnyh svojstv detalej mashin) Moscow: Mashinostroenie, 1979. 176 p. (in Russian)

6. *Wriggers P.* Computational Contact Mechanics. Berlin: Springer, 2006. xii+518 p.
7. *Yastrebov V.A.* Numerical Methods in Contact Mechanics. London, Hoboken: Wiley-ISTE, 2013. xviii+392 p.
8. *Hills D., Andresen H., Barber J.R. et al.* Modeling and Simulation of Tribological Problems in Technology / *Ed. by Paggi M. and Hills D.* Cham: Springer, 2020. vii+330 p.
9. *Lurie A.I.* Spatial Problems of the Theory of Elasticity (Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti). Moscow: State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1955.491 p. (in Russian)
10. *Goryacheva I.G., Torskaya E.V.* A periodical contact problem for a system of dies and elastic layer adhered to another base // Sov. J. Frict. Wear, 1995, vol. 16, no. 4, pp. 642–652.
11. *Muskhelishvili N.I.* Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Dordrecht: Springer Netherlands, 1977. xxxi+732 p.
12. *Shtayerman I.Ya.* Contact Problem of the Theory of Elasticity. Leningrad: Gostekhteoretizdat (in an English translation by Foreign Technology Div., FTD-MT-24-61-70), 1970. 314 p.
13. *Gladwell G.M.L.* Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity. Dordrecht: Springer, 1980. 736 p.
14. *Dezyani M., Sharafbafi F., Irani S.* A new solution for the two-zonal contact problem // Arab. J. Sci. Eng, 2013, vol. 38, no. 6, pp. 1509–1518.
15. *Ghanati P., Adibnazari S.* A study on the extent of the contact and stick zones in multiple contacts // Arch. Appl. Mech., 2019, vol. 89, pp. 1825–1836.
16. *Vergne P., Villechaise B., Berthe D.* Elastic behavior of multiple contacts: asperity interaction // J. Tribol-T ASME, 1985, vol. 107, no. 2, pp. 224–228.
17. *Berthe D., Vergne P.* An elastic approach to rough contact with asperity interactions // Wear, 1987, vol. 117, no. 2, pp. 211–222.
18. *Nowell D., Hills D.A.* Hertzian contact of ground surfaces // J. Tribol-T ASME, vol. 111, no. 1, pp. 175–179.
19. *Sundaram N., Farris T.N.* Multiple contacts of similar elastic materials // J. Appl. Mech. T-ASME, 2009, vol. 131, no. 2, pp. 1–12.
20. *Goryacheva I.G., Dobychin M.N.* Contact Problems in Tribology. (Kontaktnye zadachi v tribologii). Moscow: Mashinostroenie, 1988. 253 p. (in Russian)
21. *Goryacheva I.G.* Mechanics of Frictional Interaction. (Mekhanika frikcionnogo vzaimodejstviya) Moscow: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian)
22. *Goryacheva I.G., Dobychin M.N.* Multiple contact model in the problems of tribomechanics // Tribol. Int., 1991, vol. 24, no. 1, pp. 29–35.
23. *Galin L.A.* Contact Problems. Dordrecht: Springer, 2008. xiii+315 p.
24. *Greenwood J.A., Williamson G.P.B.* Contact of nominally flat surfaces // Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1966, vol. 295, no. 1442, pp. 300–319.
25. *Andrejkiv A.E., Panasyuk V.V.* A mixed elastic problem for a half-space with circular interfaces of boundary conditions // Mech. Solids, 1972, no. 3, pp. 26–32.
26. *Argatov I.I., Nazarov S.A.* Method of spliced expansions for problems with small contact zones // in: Mechanics of Contact Interactions (Mekhanika kontaktnyh vzaimodejstvij) / *Ed. by Vorovich I.I. and Aleksandrov V.M.* Moscow: Fizmatlit, 2001, pp. 73–82. (in Russian)
27. *Argatov I.I.* Refinement of the asymptotic solution obtained by the method of splicing expansions in the contact problem of elasticity // Comput. Math.&Math. Phys., 2000, vol. 40, no. 4, pp. 623–632.
28. *Argatov I., Li Q., Popov V.L.* Cluster of the Kendall-type adhesive microcontacts as a simple model for load sharing in bioinspired fibrillar adhesives // Arch. Appl. Mech., 2019, vol. 89, pp. 1447–1472.
29. *Collins W.D.* Some coplanar punch and crack problems in three-dimensional elastostatics // Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1963, vol. 274, no. 1359, pp. 507–528.
30. *Li S., Yao Q., Li Q., Feng X.-Q., Gao H.* Contact stiffness of regularly patterned multi-asperity interfaces // J. Mech. Phys. Solids, 2018, vol. 111, pp. 277–289.

31. *Yakovenko A.A.* Simulation of contact interaction of a gripping tool with a biological tissue // Russ. J. Biomech., 2017, vol. 21, no. 4, pp. 355–364.
32. *Sadowsky M.* Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie // ZAMM, 1928, vol. 8, no. 2, pp. 107–121.
33. *Block J.M., Keer L.M.* Periodic contact problems in plane elasticity // J. Mech. Mater. Struct., 2008, vol. 3, pp. 1207–1237.
34. *Westergaard H.M.* Bearing pressures and cracks // J. Appl. Mech. T-ASME, 1939, vol. 6, pp. 49–52.
35. *Dundurs J., Tsai K.C., Keer L.M.* Contact between elastic bodies with wavy surfaces // J. Elast., 1973, vol. 3, pp. 109–115.
36. *Kuznetsov Ye.A.* A periodic contact problem accounting for the additional load acting beyond the indenter// Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Mekh. Tverd. Tela, 1982, no. 1, pp. 84–93 (in Russian).
37. *Hertz H.* Ueber die Berüehrung fester elastischer Köerper // J. für die reine und angewandte Mathematik, 1881, vol. 92, pp. 156–171.
38. *Sneddon I.N.* The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid // Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1946, vol. 187, no. 1009, pp. 229–260.
39. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 1985. xii+452 p.
40. *Xu Y., Jackson R.L.* Periodic contact problems in plane elasticity: The fracture mechanics approach // J. Tribol-T ASME, 2018, vol. 140, no. 1, pp. 1–11.
41. *Tsukanov I.Y.* Effects of shape and scale in mechanics of elastic interaction of regular wavy surfaces // P.I. Mech. Eng. J. – J. Eng., 2017, vol. 231, no 3, pp. 332–340.
42. *Tsukanov I.Yu.* Periodic contact problem for a surface with two-scale waviness // Mech. Sol., 2018, vol. 53, suppl. 1, pp. 129–136.
43. *Tsukanov I.Y.* Partial contact of a rigid multisinusoidal wavy surface with an elastic half-plane // Adv. Tribol, 2018, vol. 2018, pp. 1–8.
44. *Ju Y., Farris T.N.* Spectral analysis of two-dimensional contact problems // J. Tribol-T ASME, 1996, vol. 118, no. 2, pp. 320–328.
45. *Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J.G.* The contact of elastic regular wavy surfaces // Int. J. Mech. Sci., 1985, vol. 27, no. 6, pp. 383–396.
46. *Kalker J.J.* Variational principles of contact elastostatics // J. Inst. Math. Appl., 1977, vol. 20, no. 2, pp. 199–219.
47. *Manners W.* Partial contact between elastic surfaces with periodic profiles // Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1998, vol. 454, no. 1980, pp. 3203–3221.
48. *Manners W.* Methods for analyzing partial contact between surfaces // Int. J. Mech. Sci., 2003, vol. 45, no. 6–7, pp. 1181–1199.
49. *Galin L.A.* Indentation of punch with friction and adhesion // Prikl. Mat. Mech., 1945, vol. 9, no. 5, pp. 413–424. (in Russian)
50. *Antipov Yu.A., Arutyunyan N.Kh.* Contact problems of the theory of elasticity with friction and adhesion // JAMM, 1991, vol. 55, no. 6, pp. 887–901.
51. *Ciavarella M.* The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem, I: Theory // Int. J. Solids Struct, 1998, vol. 35, no. 18, pp. 2349–2362.
52. *Ciavarella M.* The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem, II: Examples // Int. J. Solids Struct, 1998, vol. 35, no. 18, pp. 2363–2378.
53. *Cattaneo C.* Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi // Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, 1938, vol. 27, pp. 342–348.
54. *Mindlin R.D.* Compliance of elastic bodies in contact // J. Appl. Mech. T-ASME, 1949, vol. 16, pp. 259–268.
55. *Klimchuk T., Ostryk V.* Stress distributions in the Cattaneo–Mindlin problem on a contact with slip and adhesion of two cylindrical bodies // Front. Mech. Eng., 2020, vol. 6, pp. 1–11.
56. *Goryacheva I.G., Malanchuk N.I., Martynyak R.M.* Contact interaction of bodies with a periodic relief during partial slip // JAMM, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 621–630.
57. *Antipov Y.A.* Galin's problem for a periodic system of stamps with friction and adhesion // Int. J. Solids Struct., 2000, vol. 37, no. 15, pp. 2093–2125.

58. *Goodman L.E.* Contact stress analysis of normally loaded rough spheres // J. Appl. Mech. T-ASME, 1962, vol. 29, no. 3, pp. 515–522.
59. *Kuznetsov E.A.* Periodic contact problem for half-plane allowing for forces of friction // Sov. Appl. Mech., 1976, vol. 12, no. 10, pp. 1014–1019.
60. *Kuznetsov E.A., Gorokhovsky G.A.* On actual contact pressure // Probl. Treniya Iznashyvaniya, 1977, vol. 12, pp. 10–13. (in Russian)
61. *Kuznetsov E.A., Gorokhovsky G.A.* Effect of roughness on the stress state of bodies in frictional contact // Sov. Appl. Mech., 1978, vol. 14, no. 9, pp. 950–955.
62. *Kuznetsov Ye.A., Gorokhovsky G.A.* Effect of tangential load on the stressed state of rubbing rough bodies // Wear, 1981, vol. 73, no. 1, pp. 41–58.
63. *Kryshtafovych A.A., Martynyak R.M.* Frictional contact of two elastic half-planes with wavy surfaces // J. Frict. Wear, 2000, vol. 21, no. 5, pp. 1–8.
64. *Nosonovsky M., Adams G.G.* Steady-state frictional sliding of two elastic bodies with a wavy contact interface // J. Tribol-T ASME, 2000, vol. 122, no. 3, pp. 490–495.
65. *Soldatenkov I.A.* The periodic contact problem of the plane theory of elasticity. Taking friction, wear and adhesion into account // JAMM, 2013, vol. 77, no. 2, pp. 245–255.
66. *Wang X., Xu Y., Jackson R.L.* Elastic sinusoidal wavy surface contact under full stick conditions // Tribol. Lett., 2017, vol. 65, no. 4, pp. 156–170.
67. *Rostami A., Jackson R.L.* Predictions of the average surface separation and stiffness between contacting elastic and elastic-plastic sinusoidal surfaces // P.I. Mech. Eng. J. – J. Eng., 2013, vol. 227, no. 12, pp. 1376–1385.
68. *Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F.* The contact of elastic regular wavy surfaces revisited // Tribol. Lett., 2014, vol. 56, no. 1, pp. 171–183.
69. *Tsukanov I.Y.* An extended asymptotic analysis for elastic contact of three-dimensional wavy surfaces // Tribol. Lett., 2019, vol. 67, no. 4, pp. 107–113.
70. *Goryacheva I.G.* The periodic contact problem for an elastic half-space// JAMM, 1998, vol. 62, no. 6, pp. 959–966.
71. *Goryacheva I.G., Torskaya E.V.* Contact of multi-level periodic system of indenters with coated elastic half-space // FU Mech. Eng., 2019, vol. 17, no. 2, pp. 149–159.
72. *Kuznetsov Y.A., Gorokhovsky G.A.* Stress distribution in a polymeric material subjected to the action of a rough-surface indenter // Wear, 1978, vol. 51, no. 2, pp. 299–308.
73. *Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y.* Analysis of elastic normal contact of surfaces with regular microgeometry based on the localization principle // Front. Mech. Eng., 2020, vol. 6, pp. 1–10.
74. *Kuznetsov Ye.A.,* On the use of automorphic functions in plane elasticity theory // Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Mekh. Tverd. Tela, 1978, no. 6, pp. 35 – 44. (in Russian)
75. *Kuznetsov Ye.A.* Effect of fluid lubricant on the contact characteristics of rough elastic bodies in compression // Wear, 1985, vol. 102, no. 3, pp. 177–194.
76. *Martynyak R.M.* The method of functions of intercontact gaps in problems of local loss of contact between elastic half-spaces // Math. Meth. Phys.-Mech. Fields, 2000, vol. 43, no. 1, pp. 102–108.
77. *Kozachok O.P., Slobodian B.S., Martynyak R.M.* Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas // J. Math. Sci., 2017, vol. 222, no. 2, pp. 131–142.
78. *Kozachok O.P., Martynyak R.M.* Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // Math. Mech. Solids, 2018, vol. 24, no. 11, pp. 3381–3393.
79. *Shvarts A.G., Yastrebov V.A.* Fluid flow across a wavy channel brought in contact // Tribol. Int., 2018, vol. 126, pp. 116–126.
80. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1971, vol. 324, no. 1558, pp. 301–313.
81. *Maugis D.* Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // J. Colloid. Interf. Sci., 1991, vol. 150, no. 1, pp. 243–269.
82. *Tabor D.* Surface forces and surface interactions // J. Colloid. Interf. Sci., 1977, vol. 58, no. 2, pp. 2–13.

83. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles. // J. Colloid. Interf. Sci., 1975, vol. 53, no. 2, pp. 314–326.

84. *Johnson K.L.* The adhesion of two elastic bodies with slightly wavy surfaces // Int. J. Solids Struct., 1995, vol. 32, no. 3–4, pp. 423–430.

85. *Koiter W.* An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet // Ingng. Arch., 1959, vol. 28, pp. 168–172.

86. *Zilberman S., Persson B.N.J.* Nanoadhesion of elastic bodies: roughness and temperature effects // J. Chem. Phys., 2003, vol. 118, no. 14, pp. 6473–6480.

87. *Adams G.G.* Adhesion at the wavy contact interface between two elastic bodies // J. Appl. Mech. T-ASME, vol. 71, no. 6, pp. 851–856.

88. *Hui C.Y., Lin Y.Y., Baney J.M., Kramer E.J.* The mechanics of contact and adhesion of periodically rough surfaces // J. Polym. Sci. Pol. Phys., 2001, vol. 39, vol. 11, pp. 1195–1214.

89. *Jin F., Wan Q., Guo X.* A double-Westergaard model for adhesive contact of a wavy surface // Int. J. Solids Struct., 2016, vol. 102–103, pp. 66–76.

90. *Makhovskaya Yu.Yu.* Discrete contact of elastic bodies in the presence of adhesion // Mech. Solids, 2003, vol. 38, no. 2, pp. 39–48.

91. *Goryacheva I.* Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht: Springer, 1997. xiv+346 p.

92. *Goryacheva I.G.* Mechanics of discrete contact // Tribol. Int., 2006, vol. 39, no. 5, pp. 381–386.

93. *Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y.* Modeling of normal contact of elastic bodies with surface relief taken into account // J. Phys. Conf. Ser., 2018, vol. 991, no. 1, pp. 1–8.

94. *Goriacheva I.G.* Plane and axisymmetric contact problems for rough elastic bodies // JAMM, 1979, vol. 43, no. 1, pp. 99–105.

95. *Galanov B.A.* Spatial contact problems for rough elastic bodies under elastoplastic deformations of the unevenness // JAMM, 1984, vol. 48, no. 6, pp. 1020–1029.

96. *Goryacheva I.G.* Calculation of contact characteristics with consideration of surface macro- and microgeometric parameters// J. Frict. Wear, 1999, vol. 20, no. 3, pp. 239–248.

97. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu.* Elastic contact between nominally plane surfaces in the presence of roughness and adhesion// Mech. Solids, 2017, vol. 52, no. 4. pp. 435–443.

98. *Goryacheva I., Makhovskaya Y.* Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies // Friction, 2017, vol. 5, no. 3, pp. 339–350.

99. *Childs T.H.C.* The persistence of asperities in indentation experiments // Wear, 1973, vol. 25, no. 1, pp. 3–16.

100. *Gao Y.F., Bower A.F., Kim K.S. et al.* The behavior of an elastic-perfectly plastic sinusoidal surface under contact loading // Wear, 2006, vol. 261, no. 2, pp. 145–154.

101. *Sun F., Van der Giessen E., Nicola L.* Interaction between neighboring asperities during flattening: a discrete dislocation plasticity analysis // Mech. Mater., 2015, vol. 90, pp. 157–165.

102. *Krithivasan V., Jackson R.L.* An analysis of three-dimensional elasto-plastic sinusoidal contact // Tribol. Lett., 2007, vol. 27, no. 1, pp. 31–43.

103. *Manners W.* Plastic deformation of a sinusoidal surface // Wear, vol. 264, no. 1–2, pp. 60–68.

104. *Goryacheva I.G., Sadeghi F.* Contact characteristics of rolling/sliding cylinder and a viscoelastic layer bonded to an elastic substrate // Wear, 1995, vol. 184, no. 2, pp. 125–132.

105. *Goryacheva I.G., Sadeghi F., Nickel D.* Internal stresses in contact of rough body and a viscoelastic layered semi-infinite plane // J. Tribol-T ASME, 1996, vol. 118, no. 1, pp. 131–136.

106. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu.* Effect of surface imperfect elasticity on a sliding contact of rough elastic bodies // J. Frict. Wear, 1997, vol. 18, no. 1, pp. 1–8.

107. *Lyubicheva A.N.* Analysis of the mutual influence of contact spots in sliding of the periodic system of asperities on a viscoelastic base of the winkler type // J. Frict. Wear, 2008, vol. 29, no. 2, pp. 92–98.

108. *Lyubicheva A.N.* Numerical simulation of sliding of a system of spherical indenters over a viscoelastic body // Vestn. Lobachevsky Univ. Nizhni Novgorod, 2011, no. 4–5, pp. 2324–2325. (in Russian)

109. *Nozdrin M.A., Makhovskaya Yu.Yu., Sheptunov B.V.* Calculation of a deformation component of friction force during sliding of a body on a viscoelastic base // Vestn. IGEU, 2009, no. 3, pp. 48–50. (in Russian)

110. *Sheptunov B.V., Goryacheva I.G., Nozdrin M.A.* Contact problem of die regular relief motion over viscoelastic base // J. Frict. Wear, 2013, vol. 34, no. 2, pp. 83–91.

111. *Nozdrin M.A., Sheptunov B.V.* Friction model of a rigid body with a regular relief and a viscoelastic half-space // Physics, Chemistry and Mechanics of Tribosystems, 2015, no. 12, pp. 24–29. (in Russian)

112. *Soldatenkov I.A.* Calculation of the deformation component of the force of friction for a standard elastoviscous base // J. Frict. Wear, 2008, vol. 29, no. 1, pp. 7–14.

113. *Goryacheva I.G., Goryachev A.P.* Contact problems of the sliding of a punch with a periodic relief on a viscoelastic half-plane // JAMM, 2016, vol. 80, no. 1, pp. 73–83.

114. *Menga N., Putignano C., Carbone G., Demelio G.P.* The sliding contact of a rigid wavy surface with a viscoelastic half-space // Proc. R. Soc. London, Ser. A, 2014, vol. 470, no. 2169, pp. 1–14.

115. *Hunter S.C.* The rolling contact of a rigid cylinder with a viscoelastic half space // J. Appl. Mech. T-ASME, vol. 28, no. 4, pp. 611–617.

116. *Goryacheva I.G., Shpenev A.G.* Modelling of a punch with a regular base relief sliding along a viscoelastic foundation with a liquid lubricant // JAMM, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 754–763.

117. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu.* Modeling of friction at different scale levels // Mech. Solids, 2010, no. 3, pp. 390–398.

118. *Goryacheva I., Makhovskaya Y.* Adhesion effect in sliding of a periodic surface and an individual indenter upon a viscoelastic base // J. Strain Anal. Eng., 2015, vol. 51, no. 4, pp. 286–293.

119. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu., Morozov A.V., Stepanov F.I.* Friction of Elastomers. Modeling and Experiment (Trenie elastomerov. Modelirovanie i eksperiment.). Moscow–Izhevsk: Instit. Comput. Sci., 2017. 204 p. (in Russian)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 6, с. 790–802

УДК 531.3

СКОЛЬЖЕНИЕ УЗКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С АСИММЕТРИЧНЫМ ОРТОТРОПНЫМ ТРЕНИЕМ ПРИ РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ

© 2020 г. Н. Н. Дмитриев[1,*], Х. Хан[2,]**

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

[2] Tianjin University, Tianjin, China

**e-mail: dn7@rambler.ru*

***e-mail: hanxuesongphd@126.com*

Поступила в редакцию 03.03.2020 г.
После доработки 15.05.2020 г.
Принята к публикации 25.09.2020 г.

Изучено влияние асимметричного ортотропного трения на твердое тело, опирающееся на узкую прямоугольную область. В качестве примера рассмотрено движение однородного стержня по плоскости с асимметричным ортотропным трением. Полученные результаты могут найти широкое практическое применение в построении алгоритмов обработки материалов, при контакте с которыми возникает анизотропная сила трения.

Ключевые слова: анизотропное трение, ортотропное трение, асимметричное трение

DOI: 10.31857/S0032823520060041

1. Введение. Анизотропия трения наблюдается при относительном скольжении тел с текстурированной поверхностью или фрикционном взаимодействии материалов, обладающих анизотропией упругих свойств [1, 2]. Показано [3] существенное влияние угла армирования композитного материала на параметры контактирования при анизотропном трении прямоугольной пластины по двум недеформируемым поверхностям. В монографии [4] рассмотрено движение узкой прямоугольной пластины по плоскости с изотропным трением в предположении, что давление распределено равномерно по всей площади контакта. Проведено [5] исследование скольжения стержня со смещенным центром масс по плоскости с анизотропным трением. Отмечено [6, 7], что сила трения может обладать свойствами асимметрии. Данная характеристика трения влияет на качественные и количественные параметры движения тел [8].

Экспериментальные исследования [11, 12] посвящены обработке различного вида кристаллов и керамик. Это направление заслуживает внимания, так как связано с технологиями современной оптики и электронной индустрии. Кристаллические структуры обладают механическими анизотропными свойствами, что необходимо учитывать при их обработке. Полученные ниже результаты могут помочь в построении алгоритмов обработки материалов, при контакте с которыми возникает анизотропная сила трения.

Пусть с плоскостью скольжения связана прямоугольная декартовая система координат $Oxyz$ так, что оси Ox и Oy лежат в этой плоскости. Будем полагать, что сила трения описывается законом

$$\begin{gathered}\mathbf{T} = -NQ(\gamma)\frac{\mathbf{v}}{v}, \quad Q(\gamma) = \begin{pmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = v(\cos\gamma\mathbf{i} + \sin\gamma\mathbf{j}) \\ f_x = \begin{cases} f_{x+}, & v_x \geq 0 \\ f_{x-}, & v_x < 0 \end{cases}, \quad f_y = \begin{cases} f_{y+}, & v_y \geq 0 \\ f_{y-}, & v_y < 0 \end{cases}\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь N — нормальная реакция в точке контакта, $\mathbf{v}$, v — вектор и величина скорости точки контакта тела с плоскостью, γ — угол, определяющий направление скорости точки, который отсчитывается от оси Ox, $v_x = v\cos\gamma$, $v_y = v\sin\gamma$ — проекции скорости точки на оси координат, $Q(\gamma)$ — матрица коэффициентов трения, f_x и f_y — компоненты матрицы трения, принимающие различные значения в зависимости от проекции скорости на соответствующие оси.

Цель работы — определить качественные и количественные характеристики движения тела, опирающегося узкой прямоугольной площадкой на горизонтальную плоскость при учете асимметричного трения. При этом особое внимание требуется уделить исследованию финального движения стержня (т.е. в моменты, близкие к его остановке) в условиях рассматриваемого асимметричного ортотропного трения.

2. Уравнения движения твердого тела при симметричном ортотропном трении и равномерном распределении давления. Приведем сведения о движении указанной механической системы, которые потребуются при решении поставленной задачи. Под узкой прямоугольной областью понимается прямоугольник, одна из сторон которого стремится к нулю, длина второй стороны равна ℓ. Другими словами, область контакта, с точностью до малых второго порядка, можно считать отрезком длины ℓ. Пусть вес твердого тела равен P и давление распределено равномерно. Ранее [5, 10] были определены сила трения и момент трения, действующие на такую область, в предположении, что трение является симметричным ортотропным ($f_x = \text{const}$, $f_y = \text{const}$, $f_y \geq f_x$):

$$\begin{gathered}T_x = -\frac{P}{\ell}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{f_x(v\cos\vartheta - \omega\xi\sin\varphi)}{\sqrt{v^2 + \omega^2\xi^2 + 2\omega v\xi\sin(\vartheta - \varphi)}}d\xi \\ T_y = -\frac{P}{\ell}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{f_y(v\sin\vartheta + \omega\xi\cos\varphi)}{\sqrt{v^2 + \omega^2\xi^2 + 2\omega v\xi\sin(\vartheta - \varphi)}}d\xi \\ L_{Cz} = -\frac{P}{\ell}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{[f_y(v\sin\vartheta + \omega\xi\cos\varphi)\cos\varphi - f_x(v\cos\vartheta - \omega\xi\sin\varphi)\sin\varphi]\xi d\xi}{\sqrt{v^2 + \omega^2\xi^2 + 2\omega v\xi\sin(\vartheta - \varphi)}}\end{gathered} \tag{2.1}$$

Уравнения движения твердого тела по инерции записываются в виде

$$m\ddot{x} = T_x, \quad m\ddot{y} = T_y, \quad I_C\ddot{\varphi} = L_{Cz}, \tag{2.2}$$

где m — масса твердого тела, I_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости скольжения, v — величина скорости центра масс, ϑ — угол между осью Ox и вектором скорости центра масс, ω — угловая скорость твердого тела, вектор которой направлен вдоль оси Oz, φ — угол между

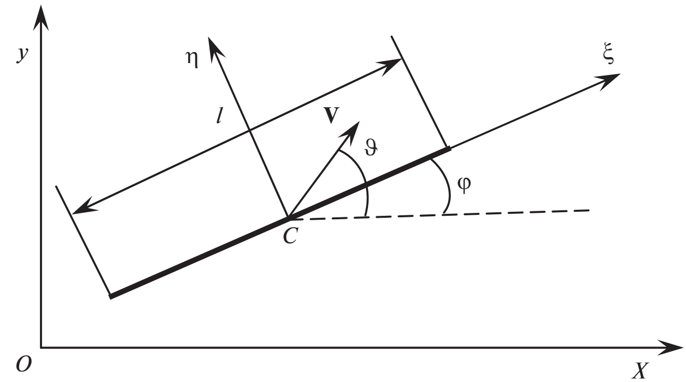


Рис. 1. Узкая прямоугольная область на плоскости Oxy.

осью Ox и осью $C\xi$, отвечающий за ориентацию площадки контакта на плоскости (см. рис. 1).

Первые два уравнения системы (2.2) перепишем в проекциях на оси естественного трехгранника

$$m\dot{v} = T_x \cos\vartheta + T_y \sin\vartheta, \quad mv\dot{\vartheta} = -T_x \sin\vartheta + T_y \cos\vartheta \tag{2.3}$$

и перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$\xi = \ell\xi^*, \quad v = v^*\sqrt{\ell g}, \quad \omega = \omega^*\sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad t = t^*\sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt^*}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$P = P^*mg, \quad I_C = I_C^* m\ell^2, \quad L_{Cz} = L_{Cz}^* mg\ell, \quad \beta = \beta^*\ell, \quad \beta^* = \frac{v^*}{\omega^*}$$

В итоге, уравнения движения тела по инерции в безразмерных переменных, в случае симметричного ортотропного трения имеют вид (звездочки ниже опущены)

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= -\beta P\left(f_x + \mu\sin^2\vartheta\right) I_0 - P\left[f_x \sin(\vartheta - \varphi) + \mu\cos\varphi\sin\vartheta\right] I_1 \\
v\dot{\vartheta} &= -\beta P\mu\sin\vartheta\cos\vartheta I_0 - P\left[f_x\cos(\vartheta - \varphi) + \mu\cos\varphi\cos\vartheta\right] I_1 \\
\dot{\omega} &= -\frac{P}{I_C}\left\{\beta\left[f_x\sin(\vartheta - \varphi) + \mu\cos\varphi\sin\vartheta\right] I_1 - (f_x + \mu\cos^2\varphi) I_2\right\},
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\mu = f_y - f_x$,

$$I_0(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{\beta^2 + z^2 + 2\beta z\sin(\vartheta - \varphi)}} =$$

$$= \ln\left|2\sqrt{z^2 + 2\beta z\sin(\vartheta - \varphi) + \beta^2} + 2z + 2\beta\sin(\vartheta - \varphi)\right|$$

$$I_0 = I_0(z)\Big|_{z_1}^{z_2}$$

$$I_1 = \int_{z_1}^{z_2} \frac{z\,dz}{\sqrt{\beta^2 + z^2 + 2\beta z\sin(\vartheta - \varphi)}} = \left[\sqrt{\beta^2 + z^2 + 2\beta z\sin(\vartheta - \varphi)} - \beta\sin(\vartheta - \varphi) I_0(z)\right]\Bigg|_{z_1}^{z_2} \tag{2.5}$$

$$I_2 = \int_{z_1}^{z_2} \frac{z^2 dz}{\sqrt{\beta^2 + z^2 + 2\beta z \sin(\vartheta - \varphi)}} =$$

$$= \left[\left(\frac{z}{2} - \frac{3\beta \sin(\vartheta - \varphi)}{2} \right) \sqrt{\beta^2 + z^2 + 2\beta z \sin(\vartheta - \varphi)} - \frac{3\beta \sin(\vartheta - \varphi) - 2\beta^2}{4} I_0(z) \right] \Bigg|_{z_1}^{z_2}$$

Отметим, что в случае симметричного ортотропного трения $z_1 = -1/2$, $z_2 = 1/2$ и f_x, f_y, μ не меняют своих значений.

3. Вывод уравнений движения при асимметричном ортотропном трении. Сила трения и момент трения в случае асимметричного трения существенно зависят от направления скоростей точек в области контакта, так как коэффициенты трения f_x и f_y, фигурирующие в выражениях (2.1), зависят от знаков проекций скоростей этих точек

$$v_x = v\cos\vartheta - \omega\xi \sin\varphi, \quad v_y = v\sin\vartheta + \omega\xi\cos\varphi \quad \text{при} \quad \xi \in (-0.5\ell, 0.5\ell)$$

в соответствии с законом трения (1.1). Чтобы реже проверять знак этих проекций в формулах (2.1), область интегрирования удобно разбить на участки, в которых коэффициенты трения остаются неизменными. Для этого в зависимости от местоположения мгновенного центра скоростей, узкая прямоугольная область может быть разбита на отрезки, скорости точек которых имеют направление только в один квадрант в данный момент времени. Отметим, что на выбор коэффициентов трения в соответствии с законом (1.1) влияет также ориентация тела на плоскости.

Координаты мгновенного центра скоростей определяются по формулам:

$$x_G = -\beta \sin\vartheta, \quad y_G = \beta\cos\vartheta \tag{3.1}$$

Дифференциальные уравнения (2.4) для случая асимметричного ортотропного трения переписываются в виде:

$$\dot{v} = -\sum_{i,j} A_{ij}, \quad v\dot{\vartheta} = -\sum_{i,j} B_{ij}, \quad \dot{\omega} = -\frac{P}{I_c}\sum_{i,j} C_{ij}, \tag{3.2}$$

где

$$A_{ij} = \beta P\left(f_x^{ij} + \mu^{ij}\sin^2\vartheta\right) I_0(z)\Big|_{z_i}^{z_j} + P\left[f_x^{ij}\sin(\vartheta - \varphi) + \mu^{ij}\cos\varphi\sin\vartheta\right] I_1(z)\Big|_{z_i}^{z_j}$$

$$B_{ij} = \beta P\mu^{ij}\sin\vartheta\cos\vartheta I_0(z)\Big|_{z_i}^{z_j} + P\left[f_x^{ij}\cos(\vartheta - \varphi) + \mu^{ij}\cos\varphi\cos\vartheta\right] I_1(z)\Big|_{z_i}^{z_j}$$

$$C_{ij} = \beta\left[f_x^{ij}\sin(\vartheta - \varphi) + \mu^{ij}\sin\vartheta\cos\varphi\right] I_1(z)\Big|_{z_i}^{z_j} + \left[f_x^{ij} + \mu^{ij}\cos^2\varphi\right] I_2(z)\Big|_{z_i}^{z_j}$$

f_x^{ij}, f_y^{ij}, $\mu^{ij} = f_y^{ij} - f_x^{ij}$ выбираются в соответствии с индексацией областей по местоположению мгновенного центра скоростей и ориентации области контакта (см. рис. 2). В правых частях уравнений (3.2) стоит суммирование по областям, точки в которых имеют скорости, направленные в разные квадранты. Если мгновенный центр скоростей находится в областях $\nu - 1$, $\nu = \overline{1,4}$, то скорости всех точек направлены в один квадрант, $\nu - 2$, $\nu = \overline{1,4}$ — в два квадранта, $\nu - 3 - k$, $\nu = \overline{1,4}$ — в три различные квадранта. Функции $I_0(z)$, $I_1(z)$, $I_2(z)$ определены формулами (2.5), значения z_i, z_j соответствуют границам отрезков, на которые разбивается область контакта в зависимости от направления скоростей точек этих отрезков (см. таблицу 1).

Замечание 1. Если шириной прямоугольной области контакта нельзя пренебрегать, то в зависимости от положения точки G распределение скоростей точек области контакта твердого тела с плоскостью может происходить в один, два, три или четыре квадранта одновременно. Ранее [9] этот случай рассмотрен для эллиптической области.

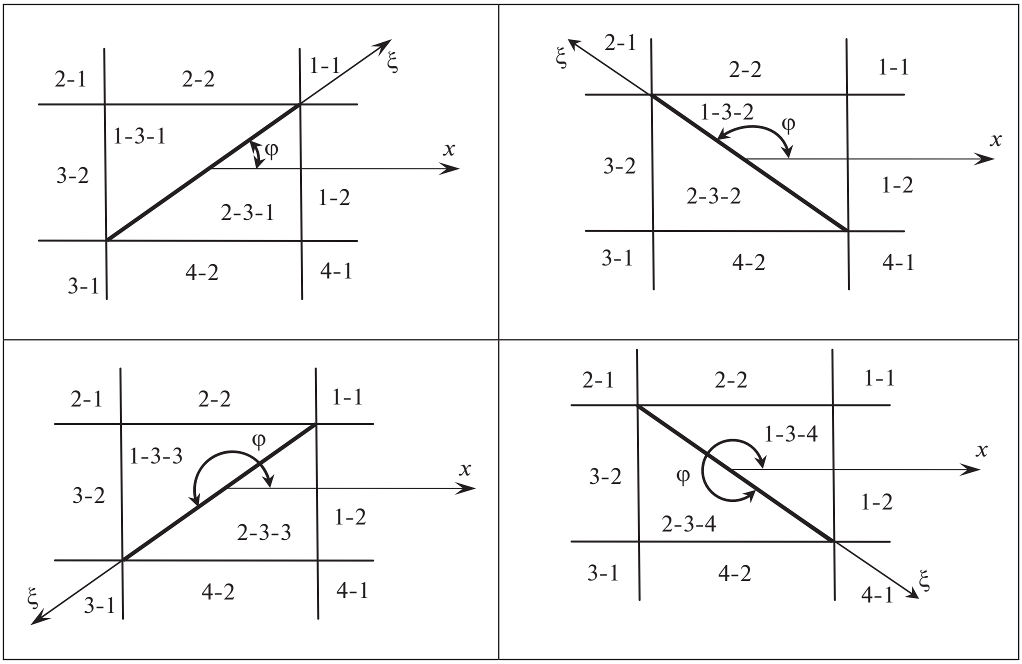


Рис. 2. Индексация областей по местоположению мгновенного центра скоростей и ориентации поверхности контакта.

При движении по инерции величина угла φ, который отвечает за ориентацию площадки на плоскости, зависит от начальных условий. Пусть в момент остановки он принимает значение φ_*. Тогда по аналогии с рассуждениями [5, 9] получаем систему уравнений для определения предельных значений β_* и ϑ_*, соответствующих положению φ_*:

$$\begin{gathered} T_n\left(\beta_*, \vartheta_*, \varphi_*\right) = 0 \\ \beta_* - \Phi\left(\beta_*, \vartheta_*, \varphi_*\right) = 0, \end{gathered} \tag{3.3}$$

где $\Phi\left(\beta_*, \vartheta_*, \varphi_*\right)$ – функция, получающаяся делением правых частей первого и третьего уравнений системы (3.2).

Определение β_*, ϑ_* при фиксированном φ_* позволяет оценить предельное местоположение мгновенного центра скоростей при заданной ориентации твердого тела на плоскости. Система (3.3) решается численно.

В качестве примера было рассмотрено движение однородного стержня по плоскости с асимметричным ортотропным трением: $I_C = \dfrac{1}{12}$, $z \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, $\mu_+ = f_{y+} - f_{x+}$, $f_{x-} = \nu_x f_{x+}$, $f_{y-} = \nu_y f_{y+}$. Некоторые результаты для симметричного ортотропного ($\nu = 1$) и асимметричного ортотропного ($\nu = \nu_x = \nu_y = 0.5$) трения представлены в таблице 2.

Замечание 2. Решение системы (3.3) для однородного стержня в случае симметричного ортотропного трения может быть сведено к численному решению одного уравне-

Таблица 1

Область	Характерные параметры
1-1	$x_G > \frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert,\ y_G > \frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert,\ z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$: f_{x+}, f_{y-}
2-1	$x_G < -\frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert,\ y_G > \frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert,\ z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$: f_{x+}, f_{y+}
3-1	$x_G < -\frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert,\ y_G < -\frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert,\ z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$: f_{x-}, f_{y+}
4-1	$x_G > \frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert,\ y_G < -\frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert,\ z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$: f_{x-}, f_{y-}
1-2	$x_G > \frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert,\ y_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert\right],$ $\varphi \in [0, \pi),\ z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{y_G}{\sin\varphi}\right)$: f_{x+}, f_{y-}; $z \in \left[\frac{y_G}{\sin\varphi}, \frac{1}{2}\right]$: f_{x-}, f_{y-} $\varphi \in [\pi, 2\pi],\ z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{y_G}{\sin\varphi}\right)$: f_{x-}, f_{y-}; $z \in \left[\frac{y_G}{\sin\varphi}, \frac{1}{2}\right]$: f_{x+}, f_{y-}
2-2	$x_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert\right],\ y_G > \frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert,\ \xi_G = \frac{x_G}{\cos\varphi}$ $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_G\right)$: f_{x+}, f_{y-}; $z \in \left[\xi_G, \frac{1}{2}\right]$: f_{x+}, f_{y+} $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_G\right)$: f_{x+}, f_{y+}; $z \in \left[\xi_G, \frac{1}{2}\right]$: f_{x+}, f_{y-}
3-2	$x_G < -\frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert,\ y_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert\right]$ $\varphi \in [0, \pi),\ z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{y_G}{\sin\varphi}\right)$: f_{x+}, f_{y+}; $z \in \left[\frac{y_G}{\sin\varphi}, \frac{1}{2}\right]$: f_{x-}, f_{y+} $\varphi \in [\pi, 2\pi],\ z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{y_G}{\sin\varphi}\right)$: f_{x-}, f_{y+}; $z \in \left[\frac{y_G}{\sin\varphi}, \frac{1}{2}\right]$: f_{x+}, f_{y+}
4-2	$x_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert\right],\ y_G < -\frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert,\ \xi_G = \frac{x_G}{\cos\varphi}$ $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_G\right)$: f_{x-}, f_{y-}; $z \in \left[\xi_G, \frac{1}{2}\right]$: f_{x-}, f_{y+} $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],\ z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_G\right)$: f_{x-}, f_{y+}; $z \in \left[\xi_G, \frac{1}{2}\right]$: f_{x-}, f_{y-}
1-3-1	$x_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert\right],\ y_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert\right],\ y_G \geq x_G \operatorname{tg}\varphi,$ $\xi_{G1} = \frac{x_G}{\cos\varphi},\ \xi_{G2} = \frac{y_G}{\sin\varphi},\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_{G1}\right)$: f_{x+}, f_{y-}; $z \in [\xi_{G1}, \xi_{G2})$: f_{x+}, f_{y+}; $z \in \left[\xi_{G2}, \frac{1}{2}\right]$: f_{x-}, f_{y+}

Таблица 1. Окончание

Область	Характерные параметры
2-3-1	$x_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert\right]$, $y_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert\right]$, $y_G < x_G \operatorname{tg}\varphi$, $\xi_{G1} = \frac{y_G}{\sin\varphi}$, $\xi_{G2} = \frac{x_G}{\cos\varphi}$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_{G1}\right)$: f_{x+}, f_{y-}; $z \in [\xi_{G1}, \xi_{G2})$: f_{x-}, f_{y-}; $z \in \left[\xi_{G2}, \frac{1}{2}\right]$: f_{x-}, f_{y+}
1-3-2	$x_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert\right]$, $y_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert\right]$, $y_G \geq x_G \operatorname{tg}\varphi$, $\xi_{G1} = \frac{x_G}{\cos\varphi}$, $\xi_{G2} = \frac{y_G}{\sin\varphi}$, $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ $z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_{G1}\right)$: f_{x+}, f_{y+}; $z \in [\xi_{G1}, \xi_{G2})$: f_{x+}, f_{y-}; $z \in \left[\xi_{G2}, \frac{1}{2}\right]$: f_{x-}, f_{y-}
2-3-2	$x_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert\right]$, $y_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert\right]$, $y_G < x_G \operatorname{tg}\varphi$, $\xi_{G1} = \frac{y_G}{\sin\varphi}$, $\xi_{G2} = \frac{x_G}{\cos\varphi}$, $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ $z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_{G1}\right)$: f_{x+}, f_{y+}; $z \in [\xi_{G1}, \xi_{G2})$: f_{x-}, f_{y+}; $z \in \left[\xi_{G2}, \frac{1}{2}\right]$: f_{x-}, f_{y-}
1-3-3	$x_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert\right]$, $y_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert\right]$, $y_G > x_G \operatorname{tg}\varphi$, $\xi_{G1} = \frac{y_G}{\sin\varphi}$, $\xi_{G2} = \frac{x_G}{\cos\varphi}$, $\varphi \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ $z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_{G1}\right)$: f_{x-}, f_{y+}; $z \in [\xi_{G1}, \xi_{G2})$: f_{x+}, f_{y+}; $z \in \left[\xi_{G2}, \frac{1}{2}\right]$: f_{x+}, f_{y-}
2-3-3	$x_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert\right]$, $y_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert\right]$, $y_G < x_G \operatorname{tg}\varphi$, $\xi_{G1} = \frac{x_G}{\cos\varphi}$, $\xi_{G2} = \frac{y_G}{\sin\varphi}$, $\varphi \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ $z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_{G1}\right)$: f_{x-}, f_{y+}; $z \in [\xi_{G1}, \xi_{G2})$: f_{x-}, f_{y-}; $z \in \left[\xi_{G2}, \frac{1}{2}\right]$: f_{x+}, f_{y-}
1-3-4	$x_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert\right]$, $y_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert\right]$, $y_G > x_G \operatorname{tg}\varphi$, $\xi_{G1} = \frac{y_G}{\sin\varphi}$, $\xi_{G2} = \frac{x_G}{\cos\varphi}$, $\varphi \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ $z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_{G1}\right)$: f_{x-}, f_{y-}; $z \in [\xi_{G1}, \xi_{G2})$: f_{x+}, f_{y-}; $z \in \left[\xi_{G2}, \frac{1}{2}\right]$: f_{x+}, f_{y+}
2-3-4	$x_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\cos\varphi\rvert\right]$, $y_G \in \left[-\frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert, \frac{1}{2}\lvert\sin\varphi\rvert\right]$, $y_G < x_G \operatorname{tg}\varphi$, $\xi_{G1} = \frac{x_G}{\cos\varphi}$, $\xi_{G2} = \frac{y_G}{\sin\varphi}$, $\varphi \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ $z \in \left[-\frac{1}{2}, \xi_{G1}\right)$: f_{x-}, f_{y-}; $z \in [\xi_{G1}, \xi_{G2})$: f_{x-}, f_{y+}; $z \in \left[\xi_{G2}, \frac{1}{2}\right]$: f_{x+}, f_{y+}

Таблица 2. Финальные параметры движения однородного стержня по инерции

	$\nu = 1$			$\nu = \nu_x = \nu_y = 0.5$		
μ_+ / φ_*	0.09	0.18	0.27	0.09	0.18	0.27
0	$\vartheta = 0$ $\beta = 0.3015$	$\vartheta = 0$ $\beta = 0.1644$	$\vartheta = 0$ $\beta = 0.1039$	$\vartheta = 3.6946$ $\beta = 0.6782$	$\vartheta = 3.9451$ $\beta = 0.4832$	$\vartheta = 4.1303$ $\beta = 0.4181$
$\pi/6$	$\vartheta = 2.1185$ $\beta = 0.2932$ $\vartheta = 5.2601$ $\beta = 0.2932$	$\vartheta = 2.1607$ $\beta = 0.3054$ $\vartheta = 5.3024$ $\beta = 0.3054$ $\vartheta = 3.0329$ $\beta = 1.1030$ $\vartheta = 6.1808$ $\beta = 1.1030$	$\vartheta = 2.2404$ $\beta = 0.3262$ $\vartheta = 5.3819$ $\beta = 0.3262$	$\vartheta = 3.9145$ $\beta = 0.3815$ $\vartheta = 5.0215$ $\beta = 0.3246$	$\vartheta = 4.1043$ $\beta = 0.3082$ $\vartheta = 5.0728$ $\beta = 0.3245$	$\vartheta = 4.2570$ $\beta = 0.2769$ $\vartheta = 5.1195$ $\beta = 0.3297$
$\pi/4$	$\vartheta = 2.3826$ $\beta = 0.2946$ $\vartheta = 5.5243$ $\beta = 0.2946$	$\vartheta = 2.4210$ $\beta = 0.3095$ $\vartheta = 5.5626$ $\beta = 0.3095$	$\vartheta = 2.4722$ $\beta = 0.3307$ $\vartheta = 5.6138$ $\beta = 0.3307$	$\vartheta = 3.1628$ $\beta = 0.6147$ $\vartheta = 4.4997$ $\beta = 0.2069$ $\vartheta = 5.0184$ $\beta = 0.2517$	$\vartheta = 5.1609$ $\beta = 0.2446$ $\vartheta = 3.1860$ $\beta = 1.7723$	$\vartheta = 4.7919$ $\beta = 0.1706$ $\vartheta = 5.2785$ $\beta = 0.2555$
$\pi/3$	$\vartheta = 2.6378$ $\beta = 2.9303$ $\vartheta = 5.7794$ $\beta = 2.9303$	$\vartheta = 2.6603$ $\beta = 0.3034$ $\vartheta = 5.8019$ $\beta = 0.3034$	$\vartheta = 2.6826$ $\beta = 0.3171$ $\vartheta = 5.8242$ $\beta = 0.3171$	$\vartheta = 2.9302$ $\beta = 0.3507$	$\vartheta = 2.9653$ $\beta = 0.3741$	$\vartheta = 2.9979$ $\beta = 0.4050$
$\pi/2$	$\vartheta = 0$ $\beta = 0$	$\vartheta = 0$ $\beta = 0$	$\vartheta = 0$ $\beta = 0$	$\vartheta = 3.1416$ $\beta = 0.38926$	$\vartheta = 3.1416$ $\beta = 0.38926$	$\vartheta = 3.1416$ $\beta = 0.38926$
$2\pi/3$	$\vartheta = 0.5038$ $\beta = 0.2931$ $\vartheta = 3.6454$ $\beta = 0.2931$	$\vartheta = 0.4812$ $\beta = 0.3034$ $\vartheta = 3.6229$ $\beta = 0.3034$	$\vartheta = 0.4589$ $\beta = 0.3171$ $\vartheta = 3.601$ $\beta = 0.3171$	$\vartheta = 3.6543$ $\beta = 0.3936$	$\vartheta = 3.6418$ $\beta = 0.3975$	$\vartheta = 3.6288$ $\beta = 0.4033$
$3\pi/4$	$\vartheta = 0.7589$ $\beta = 0.2946$ $\vartheta = 3.9005$ $\beta = 0.2946$	$\vartheta = 0.7205$ $\beta = 0.3095$ $\vartheta = 3.8621$ $\beta = 0.3095$	$\vartheta = 0.6693$ $\beta = 0.3307$ $\vartheta = 3.8109$ $\beta = 0.3307$	$\vartheta = 3.9119$ $\beta = 0.3941$	$\vartheta = 3.8896$ $\beta = 0.3995$	$\vartheta = 3.8586$ $\beta = 0.4081$
$5\pi/6$	$\vartheta = 1.0231$ $\beta = 0.2932$ $\vartheta = 4.1647$ $\beta = 0.2932$	$\vartheta = 0.9808$ $\beta = 0.3054$ $\vartheta = 4.1224$ $\beta = 0.3054$ $\vartheta = 1.0241$ $\beta = 1.1030$ $\vartheta = 3.2440$ $\beta = 1.1030$	$\vartheta = 0.9012$ $\beta = 0.3262$ $\vartheta = 4.0428$ $\beta = 0.3262$	$\vartheta = 4.1744$ $\beta = 0.3934$ $\vartheta = 3.2041$ $\beta = 3.5223$	$\vartheta = 3.4212$ $\beta = 0.8939$ $\vartheta = 4.1487$ $\beta = 0.3971$	$\vartheta = 3.6867$ $\beta = 0.5368$ $\vartheta = 4.0985$ $\beta = 0.4045$

ния. В этом случае система уравнений (3.3) получается из уравнений (2.4). При этом пределы интегрирования в функциях $I_s(z)$, $s = \overline{0,2}$, $z_1 = -\frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{1}{2}$ (см. формулы (2.5)). Тогда

$$I_0 = \ln u, \quad u = \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + \beta\sin(\vartheta - \varphi) + \beta^2} + \frac{1}{2} + \beta\sin(\vartheta - \varphi)}{\sqrt{\frac{1}{4} - \beta\sin(\vartheta - \varphi) + \beta^2} - \frac{1}{2} + \beta\sin(\vartheta - \varphi)} > 1 \tag{3.4}$$

и второе уравнение системы (2.4) переписывается в виде

$$\begin{gathered} v\dot{\vartheta} = -\beta P\mu\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\ln u - \\ -\beta P\sin(\vartheta - \varphi)\cdot\left[f_x\cos(\vartheta - \varphi) + \mu\cos\varphi\cos\vartheta\right]\left[\frac{2(u-1)}{u+1} - \ln u\right] = \\ = -\beta\cos^2\vartheta\cos^2\varphi\left\{\operatorname{tg}\vartheta\left[\left(f_y\operatorname{tg}^2\varphi - f_x\right)\ln u + \right.\right. \\ \left.\left. + \left(f_y - f_x\operatorname{tg}^2\varphi\right)\frac{2(u-1)}{u+1}\right] - \operatorname{tg}\varphi\left(f_x\operatorname{tg}^2\vartheta - f_y\right)\left[\ln u - \frac{2(u-1)}{u+1}\right]\right\} \end{gathered} \tag{3.5}$$

Следует отметить, что правая часть выражения (3.5) обращается в ноль при значении $\beta = 0$. При этом же значении величины β второе уравнение системы (3.3) будет выполнено при любых значениях ϑ_* и φ_*. Этот случай соответствует чистому вращению стержня. При этом будут выполнены соотношения $T_x = T_y = 0$, $L_{Cz} < 0$.

При $\mu = 0$ (изотропное трение) имеем

$$v\dot{\vartheta} = -\beta P f_x\cos(\varphi - \vartheta)\sin(\varphi - \vartheta)\left[\ln u - \frac{2(u-1)}{u+1}\right] \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) было получено ранее [4], где было подчеркнуто, что при изотропном трении при скольжении по инерции узкой прямоугольной пластины разность $\vartheta - \varphi$ стремится к $\frac{\pi}{2}$, и вектор скорости поворачивается в сторону противоположную повороту пластины, если в начальный момент разность $\vartheta - \varphi = 0$, скорость центра масс направлена вдоль платины и поворот осуществляется влево, если смотреть по ходу движения.

При стремлении скорости v к нулю правая часть уравнения (3.5) также стремится к нулю, следовательно, в момент остановки должно быть выполнено соотношение

$$\begin{gathered} \left[\left(f_y\operatorname{tg}^2\varphi - f_x\right)\ln u + \left(f_y - f_x\operatorname{tg}^2\varphi\right)\frac{2(u-1)}{u+1}\right]\operatorname{tg}\vartheta - \\ - f_x\operatorname{tg}\varphi\left[\ln u - \frac{2(u-1)}{u+1}\right]\operatorname{tg}^2\vartheta + f_y\operatorname{tg}\varphi\left[\ln u - \frac{2(u-1)}{u+1}\right] = 0 \end{gathered} \tag{3.7}$$

из которого находится зависимость угла ϑ как функции от переменной u:

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{\left[\left(f_y\operatorname{tg}^2\varphi - f_x\right)\ln u + \left(f_y - f_x\operatorname{tg}^2\varphi\right)\frac{2(u-1)}{u+1}\right] \mp \sqrt{D}}{2f_x\operatorname{tg}\varphi\left[\ln u - \frac{2(u-1)}{u+1}\right]} + \pi k, \quad k \in Z_0$$

$$\begin{gathered} D = \left[\left(f_y\operatorname{tg}^2\varphi - f_x\right)\ln u + \left(f_y - f_x\operatorname{tg}^2\varphi\right)\frac{2(u-1)}{u+1}\right]^2 + \\ + 4f_xf_y\operatorname{tg}^2\varphi\left[\ln u - \frac{2(u-1)}{u+1}\right] \geq 0 \end{gathered} \tag{3.8}$$

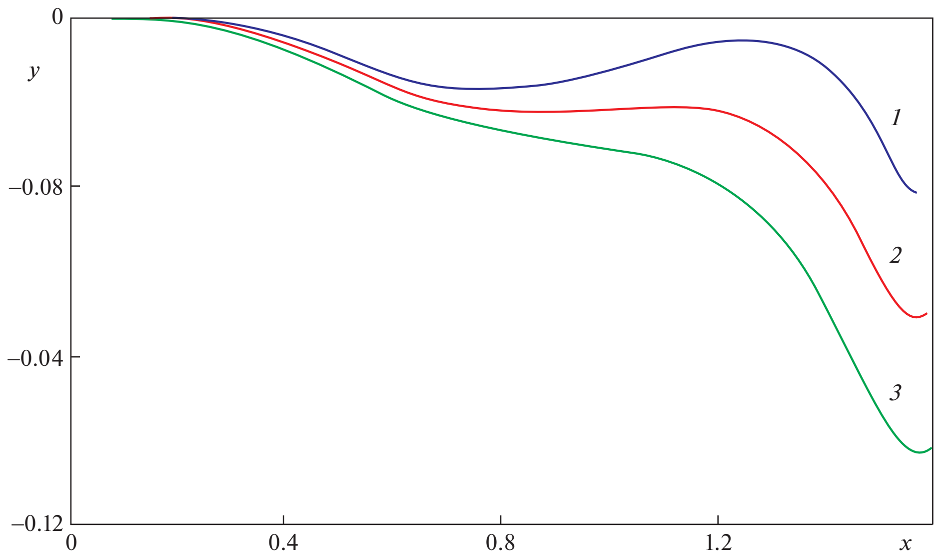


Рис. 3. Траектории центра масс однородного стержня при различных значениях параметра $\nu = \nu_x = \nu_y$. Линия *1* соответствует $\nu = 1$, *2* – $\nu = \dfrac{7}{8}$, *3* – $\nu = \dfrac{3}{4}$. Начальные условия $v_0 = 1$, $\vartheta_0 = 0$, $\omega_0 = 3$, $\varphi_0 = 0$.

Кроме того, величина β определяется из соотношения

$$\beta = \sqrt{\frac{u}{(u-1)^2\left(1-\left(\dfrac{u-1}{u+1}\right)^2\sin^2(\vartheta-\varphi)\right)}}, \tag{3.9}$$

в котором подкоренное выражение строго положительное при $u > 1$.

Таким образом, в случае симметричного ортотропного трения система уравнений (3.3) сводится к решению второго уравнения этой системы, в котором осуществляется переход к переменной u по формулам (3.8) и (3.9).

На рис. 3 изображены траектории центра масс однородного стержня, которые получены из численного решения системы уравнений (2.2). Начальные условия были выбраны следующие: $v_0 = 1$, $\vartheta_0 = 0$, $\omega_0 = 3$, $\varphi_0 = 0$, т.е. стержень в начальный момент расположен вдоль оси Ox, а начальная скорость направлена вдоль стержня, начальное вращение направлено против часовой стрелки, $f_{x+} = 0.42$, $f_{y+} = 0.6$, $\nu = \nu_x = \nu_y$.

4. Начальное движение тела при некоторых начальных условиях. Особый интерес представляет изучение начального движения при начальных условиях: $\mathbf{v}_C = 0$, $\omega_z > 0$ и $\mathbf{v}_C \neq 0$, $\omega_z = 0$. В первом случае из соотношений (2.1) при асимметричном ортотропном трении следует

$$T_x = -\frac{P}{2}\left(f_x\left(\varphi+\frac{3\pi}{2}\right) - f_x\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right)\sin\varphi,$$
$$T_y = -\frac{P}{2}\left(f_y\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) - f_y\left(\varphi+\frac{3\pi}{2}\right)\right)\cos\varphi$$

Откуда при условии, что начальное ускорение задается формулой $\mathbf{w}_0 = w_0(\cos\vartheta_0\mathbf{i} + \sin\vartheta_0\mathbf{j})$, получаем

$$
\begin{aligned}
mw_0\cos\vartheta_0 &= -\frac{P}{2}\Delta f_x\sin\varphi_0, \quad mw_0\sin\vartheta_0 = -\frac{P}{2}\Delta f_y\cos\varphi_0, \quad \text{при} \quad \varphi_0 \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\
mw_0\cos\vartheta_0 &= -\frac{P}{2}\Delta f_x\sin\varphi_0, \quad mw_0\sin\vartheta_0 = -\frac{P}{2}\Delta f_y\cos\varphi_0, \quad \text{при} \quad \varphi_0 \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

и, следовательно,

$$
\operatorname{tg}\vartheta_0 = \begin{cases} \dfrac{\Delta f_y}{\Delta f_x}\operatorname{ctg}\varphi_0, & \varphi_0 \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -\dfrac{\Delta f_y}{\Delta f_x}\operatorname{ctg}\varphi_0, & \varphi_0 \in \left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\end{cases}
$$

Подчеркнем, что правые части уравнений (4.1) принимают отрицательные значения, и поэтому, начальное ускорение центра масс направлено в третий квадрант. Случаи, когда угол $\varphi \in (\pi, 2\pi)$ сводятся к соотношениям (4.1). Отметим, что при неравномерном распределении давления следует учитывать ориентацию тела на плоскости в соответствии с рис. 2 и данными из таблицы 1.

При симметричном ортотропном трении $T_x = T_y = 0$, что означает отсутствие начального ускорения центра масс при рассматриваемых начальных условиях.

При начальных условиях $v_C \neq 0$, $\omega_z = 0$, соответствующих начальному поступательному движению, из выражений (2.1)–(2.3) получаем

$$
\dot{v} = -g\left(f_x + \mu\sin^2\vartheta\right), \quad v\dot{\vartheta} = -g\mu\sin\vartheta\cos\vartheta, \quad \dot{\omega} = 0,
$$

где f_x, f_y, $\mu = f_y - f_x$ соответствуют квадранту, в который направлена начальная скорость центра масс. Таким образом, при выбранных начальных условиях узкая прямоугольная пластина до остановки движется поступательно, и угол ϑ стремится к одному из значений $\frac{\pi k}{2}$, $k = \overline{0,3}$ в зависимости от знака величины μ.

Заключение. Отметим некоторые закономерности движения твердого тела, опирающегося узкой прямоугольной площадкой на горизонтальную плоскость:

1. В начале напомним, что финальное движение двухмассовой системы (скамьи Жуковского) характеризуется первоначальной остановкой одной из точек опоры, после чего происходит вращение вокруг нее. Другими словами, непосредственно перед остановкой скорость центра масс двухмассовой системы перпендикулярна отрезку, соединяющему массы [8].

2. При изотропном трении [4] предельное движение стержня характеризуется перпендикулярностью вектора v_* к стержню, что означает принадлежность предельного положения мгновенного центра скоростей отрезку контакта тела с плоскостью.

3. При симметричном ортотропном трении ($f_y > f_x$) непосредственно перед остановкой параметры β_* и ϑ_* определяются по формулам (3.8) и (3.9) при условии выполнения второго равенства системы (3.3).

4. При асимметричном ортотропном трении, в общем случае, предельный вектор v_* не перпендикулярен стержню и может быть направлен в конце движения в любой квадрант в зависимости от начальных условий и параметров ν_x и ν_y.

Если $f_{y-} = \nu_y f_{y+}$, $f_{x-} = \nu_x f_{x+}$, $\nu_x \ll 1$, $\nu_y \ll 1$, то скорость v_* направлена в третий квадрант.

5. Подчеркнем еще раз, что для рассматриваемого тела финальные параметры φ_*, β_* и ϑ_* зависят от начальных условий $(v_0, \vartheta_0, \varphi_0, \omega_0)$. Кроме того, величина β_* зависит

от соотношения между моментом инерции тела, коэффициентами f_x, f_y и углом φ_* [10]. Следует обратить внимание (см. таблицу 2) на многовариантность финальных параметров движения, реализация которых зависит от начальных условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
2. *Miki M., Morotsu Y.* The peculiar behavior of the Poisson's ratio of laminated fibrous composites // JSME Int. J. 1989. V. 32. P. 67–72.
3. *Шилько С.В., Петроковец Е.М., Плескачевский Ю.М.* Анализ контактного деформирования ауксетичных композитных материалов // Механика композ. матер. 2006. Т. 42. № 5. С. 681–692.
4. *Розенблат Г.М.* Динамические системы с трением. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2006. 204 с.
5. *Дмитриев Н.Н.* Движение стержня со смещенным центром масс по плоскости с анизотропным трением // Трение и износ. 2007. Т. 28. № 4. С. 368–374.
6. *Antoni N., Ligier J.-L., Saffre P., Pastor J.* Asymmetric friction: Modelling and experiments // Int. J. Engng. Sci. 2007. № 45. P. 587–600.
7. *Zmitrowicz A.* A constitutive modelling of centrosymmetric and non-centrosymmetric anisotropic friction // Int. J. Solids Struct. 1992. V. 29. № 23. P. 3025–3043.
8. *Дмитриев Н.Н.* Движение материальной точки и равновесие двухмассовой системы в условиях асимметричного ортотропного трения // Трение и износ. 2013. Т. 34. № 6. С. 565–574.
9. *Дмитриев Н.Н., Силантьева О.А.* Финальное движение тонкой эллиптической пластины по горизонтальной плоскости с ортотропным трением // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 1. 2016. Т. 3. № 61. Вып. 1. С. 164–172.
10. *Дмитриев Н.Н.* Движение твердого тела, опирающегося на узкую прямоугольную область, по горизонтальной плоскости с ортотропным трением. Часть I. Движение по инерции // Трение и износ. 2011. Т. 32. № 4. С. 362–374.
11. *Han X., Wu T.* Analysis of acoustic emission in precision and high-efficiency grinding technology // Int. J. Adv. Manuf. Technol. 2013. V. 67. P. 1997–2006.
12. *Han X.* Investigation on the complex interaction between particle and substrate in mechanical polishing of silica glass // Int. J. Adv. Manuf. Technol. 2016. V. 85. P. 2567–2575.

Sliding of a Narrow Rectangular Plate along a Horizontal Plane with Asymmetric Orthotropic Friction with Uniform Pressure Distribution

N. N. Dmitriev[a,#] and Xuesong Han[b,##]

[a] *Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russian Federation*

[b] *Tianjin University, Tianjin, China*

[#]*e-mail: dn7@rambler.ru*

[##] *e-mail: hanxuesongphd@126.com*

The effect of asymmetric orthotropic friction on a solid body resting on a narrow rectangular region and sliding along a plane is studied. As an example, the motion of a uniform rod along a plane with asymmetric orthotropic friction is considered. The results obtained can find wide practical applications in the construction of materials processing algorithms under contact with anisotropic friction.

Keywords: anisotropic friction, orthotropic friction, asymmetric friction

REFERENCES

1. *Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A.* Strength of Composites and Polymers. Riga: Zinatne, 1980. 572 p. (in Russian)
2. *Miki M., Morotsu Y.* The peculiar behavior of the Poisson's ratio of laminated fibrous composites // JSME Int. J., 1989, vol. 32, pp. 67–72.
3. *Shil'ko S.V., Petrokovets E.M., Pleskachevskii Yu.M.* An analysis of contact deformation of auxetic composites // Mech. Compos. Mater., 2006, vol. 42, iss. 5, pp. 477–484.
4. *Rozenblat G.M.* Dynamical Systems with Dry Friction. Moscow; Izhevsk: R&C Dynamics, 2006. 204 p. (in Russian)
5. *Dmitriev N.N.* Motion of rod with displaced center of mass on a plane with anisotropic friction // J. Friction Wear, 2007, vol. 28, no. 4, pp. 354–358.
6. *Antoni N., Ligier J.-L., Saffre P., Pastor J.* Asymmetric friction: Modelling and experiments // Int. J. Engng. Sci., 2007, no. 45, pp. 587–600.
7. *Zmitrowicz A.* A constitutive modelling of centrosymmetric and non-centrosymmetric anisotropic friction // Int. J. Solids Struct., 1992, vol. 29, no. 23, pp. 3025–3043.
8. *Dmitriev N.N.* Motion of material point and equilibrium of two-mass system under asymmetric orthotropic friction // J. Friction&Wear, 2013, vol. 34, iss. 6, pp. 429–437.
9. *Dmitriev N.N., Silantyeva O.A.* Terminal motion of a thin elliptical plate over a horizontal plane with orthotropic friction // Vestnik St. Petersburg Univ. Mathematics, 2016, vol. 49, iss. 1, pp. 92–98.
10. *Dmitriev N.N.* Motion of a solid body supported on a narrow rectangular area on a horizontal plane with orthotropic friction. Part 1. Inertia motion // J. Friction&Wear, 2011, vol. 32, iss. 4, pp. 276–285.
11. *Han X., Wu T.* Analysis of acoustic emission in precision and high-efficiency grinding technology // Int. J. Adv. Manuf. Techn., 2013, vol. 67, pp. 1997–2006.
12. *Han X.* Investigation on the complex interaction between particle and substrate in mechanical polishing of silica glass // Int. J. Adv. Manuf. Technol., 2016, vol. 85, pp. 2567–2575.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 6, с. 803–806

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

DOI: 10.31857/S0032823520060119

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. В журнале публикуются результаты в области механики, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях, по следующим направлениям:

• общая механика, или механика систем, включая проблемы управления механическими системами;
• механика жидкости и газа;
• механика деформируемого твердого тела;
• вычислительная механика.

По согласованию с редколлегией в журнале печатаются также обзорные статьи по указанным направлениям. Авторы обязаны предъявлять повышенные требования к изложению и языку рукописи. Рекомендуется безличная форма изложения.

2. Фамилии авторов статьи располагаются в алфавитном порядке, инициалы ставятся перед фамилией. Сведения об авторах с указанием имени, отчества, почтового домашнего адреса, места работы и телефонов (каждого из соавторов), а также адреса электронной почты, по которому будет выслана корректура, помещаются дополнительно на отдельной странице после текста статьи и фигур.

3. Статья должна быть представлена в электронном виде (Word – шрифт № 14 Times New Roman), формулы должны быть отделены от текста бóльшим интервалом и напечатаны более свободно, чем основной текст.

4. “Шапка” статьи и ее перевод в конце статьи должны быть оформлены по единому стандарту. Вся информация об авторах размещается в “шапке” статьи.

а) Ссылки на места работы латинскими буквами: [a], [b], [c] и т.д.;

б) Ссылки на электронные адреса: *, ** и т.д.

Образец оформления шапки приведен ниже:

УДК 531.36

О СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЯХ СПУТНИКА
ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ УПРУГИХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

© 2018 г. А. Б. Иванов[a,*], В. Г. Петров[b,]**

[a] Московский физико-технический институт

[b] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

** e-mail: ivanov@mail.ru*

***e-mail: petrov@rambler.ru*

Поступила в редакцию 14.07.2016 г.
После доработки 20.10.2016 г.
Принята к публикации 25.12.2016 г.

Для изучения влияния внутренних сил на вращательное движение спутника в центральном гравитационном поле используется модель М.А. Лаврентьева (спутник моделируется твердой оболочкой с шаровым демпфером) в предположении, что при относительных перемещениях демпфера возникают как диссипативные, так и упругие внутренние силы. В рамках этой модели для динамически симметричного спутника на круговой орбите определены все стационарные вращения и исследована их устойчивость в зависимости от значений коэффициентов демпфирования и жесткости.

Ключевые слова: стационарные вращения, спутник, центр масс, устойчивость

DOI:

5. Все материалы статьи – текст, подстрочные примечания, литература печатаются через два интервала. Там, где впервые в тексте встречается ссылка на рисунок, необходимо написать на полях рукописи ее номер (рис. 1, рис. 2 и т.д.). Нумерация рисунков последовательная цифровая, независимо от их количества в тексте. На поля рукописи выносятся также ссылки на таблицы. В заголовках таблиц следует пользоваться обозначениями. Таблицы и список цитируемой литературы следует печатать на отдельных от текста страницах. В левом верхнем углу первой страницы необходимо указать индекс УДК.

Для редакции отдельно от статьи прилагаются: фамилии авторов и название статьи на английском языке, список принятых обозначений.

При пересылке статьи в редакцию обычной почтой не использовать ценную почту и уведомления.

6. Необходимо соблюдать строгое различие в начертании строчных (малых) и прописных (больших) латинских букв: например, V и v, S и s, O и o, U и u, K и k, P и p и т.п., а также букв, похожих одна на другую: например, g и q, l и e, u и n и др. Латинскую букву I следует писать как римскую единицу I, в отличие от J – буква “жи”. Следует делать различие между O и o (буквами) и 0 (нулем). Индексы и степени должны быть написаны строго выше символов, к которым они относятся; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а в нижних индексах – единицу от запятой.

Для математических обозначений рекомендуется употреблять наиболее простые символы и индексы. Не следует применять индексы из заглавных букв и букв русского алфавита. Для критических значений рекомендуется в качестве индекса звездочка внизу (a_*), для индексов вверху – градус (a°) и т.п.

7. При нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой, первая цифра – раздел, вторая цифра после точки – номер формулы в этом разделе ((1.1), (1.2) и т.д.). Номер формулы ставить с правой стороны в конце формулы, а для группы формул – в средней части.

8. Литература приводится по порядку цитирования в конце статьи с указанием фамилии и инициалов автора, полного названия книги (статьи), издательства, названия журнала полностью (год, том, номер, номера страниц) в соответствии с новыми правилами ГОСТ; в тексте должны быть ссылки в квадратных скобках: [1], [2, 3] и т.д.

Ссылки на иностранные источники даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются, в случае перевода на русский язык, указанием на перевод.

Ссылки на препринты, депонированные рукописи, диссертации и авторефераты даются в подстрочных примечаниях.

9. В случае переработки статьи датой поступления считается дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией.

10. Автору следует переоформить принятую к печати статью после научного редактирования в кратчайший срок и вернуть первоначальный вариант вместе с переоформленным; к переоформленному варианту приложить диск или переслать электронный вариант статьи на почту редакции. Если статья находится на переоформлении более 30 дней, датой поступления считается дата получения редакцией переоформленного варианта.

11. Редколлегия не сообщает мотивов отказа в публикации работы и оставляет за собой право не возвращать автору один экземпляр.

Технические требования к изготовлению иллюстративных материалов.

1. Иллюстрационный материал прилагается *на отдельных страницах*. Графики должны быть пригодными для прямого воспроизведения; графики выполняются с обязательным нанесением квадратной сетки (не более трех-четырех квадратов по горизонтали и вертикали). Размер графиков по ширине рекомендуется не более 15–17 см. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках.

2. Иллюстрации должны иметь размеры, соответствующие их информативности, и иметь ширину, равную полосе набора, 2/3, 1/2, 1/3 полосы набора.

3. В случае изменения размера иллюстрации на процессе внесения редакционной правки, текст уменьшается пропорционально всему изображению.

4. Толщина рамки, шкал графиков и засечек – 0.5 pt; толщина сетки – 0.25 pt; длина засечек – 1.2 мм, промежуточные – 0.8 мм. Засечки по возможности должны быть направлены внутрь графиков.

5. Толщина основных линий графиков – 1 pt (в случае высокой информационной загруженности иллюстрации допускается уменьшение толщины основных линий до 0.5 pt).

6. Масштабные линейки (по возможности) наносятся в нижнем правом углу изображения справа, толщина линии масштабной линейки 0.5 pt.

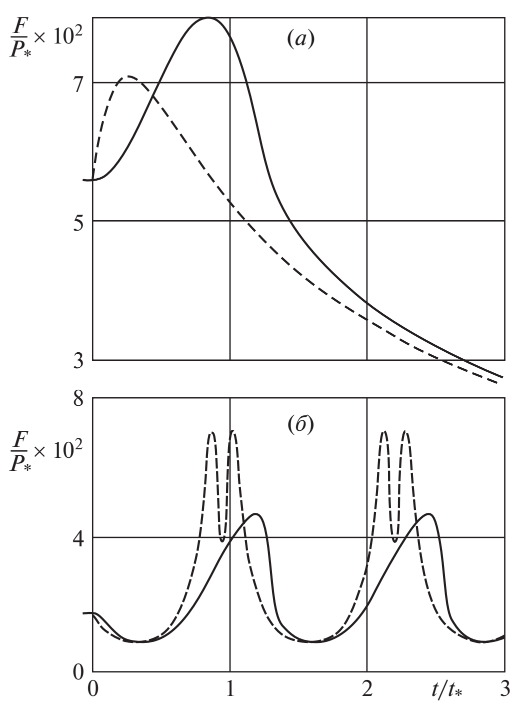
7. Если иллюстрация состоит из нескольких изображений (графиков), то каждое из этих изображений (графиков) обозначается буквами кириллического алфавита, заключенными в скобки – (а), (б), и т.д., шрифтом 10 pt, по центру каждого изображения (графика).

8. Символы греческого алфавита в иллюстрациях должны быть набраны прямым шрифтом Symbol.

9. Авторские рисунки, предоставленные в цвете, изготавливаются цветными (в цветовой модели RGB), если это имеет смысловое (цвет одиночного графика всегда черный).

10. Точка не ставится после размерностей (с – секунда, г – грамм, мин – минута, сут – сутки, град – градус) и некоторых числительных (млн – миллион, млрд – миллиард, трлн – триллион).

Пример оформления рисунка приведен ниже.



11. К статье должны прилагаться файлы с рисунками в одном из форматах: eps, tiff, jpg, bmp, ppt, png.

Правила оформления библиографических ссылок

I. Книга

Сагомонян А.Я. (1974) Проникание, Изд-во МГУ, Москва.

Whittaker E.T. (1927) Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, Cambridge Univ. Press, Cambridge = Уиттекер Е.Т. (1937) Аналитическая динамика, ОНТИ, Москва.

II. Журнал

Вильке В.Г. (2002) Условия качения колеса с армированной шиной без проскальзывания, Вестн. МГУ, Сер. 1, Математика, механика. Вып. 5, 38.

Stewartson K. (1968) On the flow near the trailing edge of a plate, Proc. R. Soc. London, Ser. A, 306 (1486), 275.

Rohde S.M. (1972) The optimum slider bearing in terms of friction, J. Lubr. Technol., 94(3), 275 = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки, 94 (3), 82.

III. Препринт

Чашечкин Ю.Д., Байдулов В.Г. (2017) Исследование тонкой структуры периодических течений в неоднородных жидкостях, Препринт № 1155, ИПМ им. А.Ю. Ишлинского, Москва.

IV. Диссертация, автореферат

Чиж Г.К. (1972) Диссертация на соискание ученой степени канд. хим. наук, Химико-технологический институт, Днепропетровск.

Примечания

1. Если авторов более четырех, необходимо давать первые три фамилии и др. (*Иванов Р.И.*, *Семенов Г.П.*, *Терехов П.И.* и др.).
2. Если составителей, редакторов, переводчиков три и более, то оставляют только первую фамилию и др. (Земля / Под ред. Иванова Р.И. и др).
3. Рус. перев.– эти слова заменяются знаком = (равно).