

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 499, 2021

---

---

## МАТЕМАТИКА

Критические значения конечных произведений Бляшке

*В. Н. Дубинин* 5

Новый класс функций Ляпунова для исследования на устойчивость вырожденных динамических систем. Элементы теории  $p$ -регулярности

*Ю. Г. Евтушенко, А. А. Третьяков* 8

Точные оценки размерности аттракторов трехмерной регуляризированной системы Эйлера с диссипацией

*С. В. Зелик, А. А. Ильин, А. Г. Костялко* 13

Асимптотика числа независимости случайного подграфа графа  $G(n, r, < s)$

*В. С. Карась, П. А. Огарок, А. М. Райгородский* 17

Симплектическая геометрия оператора Купмана

*В. В. Козлов* 20

Об одном усилении теоремы о неизоморфизме алгебр доказуемости

*Е. А. Колмаков* 26

О корректной разрешимости граничной задачи Дирихле для обобщенного уравнения Гельмгольца в полосе

*В. А. Костин, Д. В. Костин, А. В. Костин* 31

Применение специальных функциональных пространств к исследованию нелинейных интегральных уравнений, возникающих в равновесной пространственной логистической динамике

*М. В. Николаев, У. Дикман, А. А. Никитин* 35

Оценка числа ребер в подграфах графа Джонсона

*Ф. А. Пушняков, А. М. Райгородский* 40

О покрытии плоских множеств

*А. Д. Толмачев, Д. С. Протасов* 44

Множества достижимости и интегральные воронки зависящих от параметра дифференциальных включений

*В. Н. Ушаков, А. А. Ершов* 49

Операторные оценки для задачи Стеклова в неограниченной области с быстро меняющимися условиями на границе

*А. Г. Чечкина*

54

---

## **ИНФОРМАТИКА**

Об одном подходе к численному решению обратной коэффициентной задачи

*А. Ф. Албу, Ю. Г. Евтушенко, В. И. Зубов*

58

Двухуровневый метод регрессионного анализа, использующий ансамбли деревьев с оптимальной дивергенцией

*Ю. И. Журавлев, О. В. Сенько, А. А. Докукин, Н. Н. Киселева, И. А. Саенко*

63

Подавление мультипликативных шумов в изображениях на основе группирования схожих объектов

*В. Ф. Кравченко, В. И. Пономарев, В. И. Пустовойт, Г. Аранда-Бохоргес*

67

---

## **ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ**

Оптимальная траектория наблюдателя, отслеживающего движение объекта с поражающим устройством

*В. И. Бердышев*

73

---

Правила для авторов

78

---

---

# CONTENTS

---

---

Volume 499, 2021

---

---

## MATHEMATICS

Critical Values of the Finite Blaschke Products

*V. N. Dubinin* 5

New Class of Lyapunov's Functions for Singular Dynamic Systems Stability Analysis.  
Elements of  $p$ -Regularity Theory

*Yu. G. Evtushenko, A. A. Tretyakov* 8

Sharp Dimension Estimates for the Attractor of the Regularized Damped Euler System

*S. V. Zelik, A. A. Ilyin, A. G. Kostianko* 13

Asymptotic of the Independence Number of a Random Subgraph of the Graph  $G(n, r, < s)$

*V. S. Karas, P. A. Ogarok, A. M. Raigorodskii* 17

The Symplectic Geometry of the Koopman Operator

*V. V. Kozlov* 20

On a Strengthening of the Non-Isomorphism Theorem for Provability Algebras

*E. A. Kolmakov* 26

On the Correct Solvability of the Dirichlet Boundary Value Problem  
for the Generalized Helmholtz Equation in a Strip

*V. A. Kostin, D. V. Kostin, A. V. Kostin* 31

Application of Special Function Spaces to the Study of Nonlinear Integral Equations Arising  
in Equilibrium Spatial Logistic Dynamics

*M. V. Nikolaev, U. Dieckmann, A. A. Nikitin* 35

Estimate of the Number of Edges in Subgraphs of Johnson's Graph

*Ph. A. Pushnyakov, A. M. Raigorodskii* 40

Covering Planar Sets

*A. D. Tolmachev, D. S. Protasov* 44

Reachable Sets and Integral Funnel of Differential Inclusions Depending on the Parameter

*V. N. Ushakov, A. A. Ershov* 49

Operator Estimates for the Steklov Problem in Unbounded Domain  
with Rapidly Changing Conditions on the Boundary

*A. G. Chechkina* 54

---

## COMPUTER SCIENCE

On One Approach to the Numerical Solution of the Inverse Coefficient Problem

*A. F. Albu, Yu. G. Evtushenko, V. I. Zubov*

58

Two-level Regression Method Using Ensembles of Trees with Optimal Divergence

*Yu. I. Zhuravlev, O. V. Senko, A. A. Dokukin, N. N. Kiselyova, I. A. Saenko*

63

Suppression of Multiplicative Noise in Images Via Similar Objects Grouping

*V. F. Kravchenko, V. I. Ponomaryov, V. I. Pustovoi, G. Aranda Bojorges*

67

---

## CONTROL THEORY

Optimal Trajectory of an Observer Tracking the Movement of an Object  
with a Striking Device

*V. I. Berdyshev*

73

---

For Authors

78

---

---

УДК 517.535

### КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ

© 2021 г. Член-корреспондент РАН В. Н. Дубинин<sup>1,2,\*</sup>

Поступило 01.04.2021 г.

После доработки 15.04.2021 г.

Принято к публикации 17.06.2021 г.

Для конечных произведений Бляшке  $V$  степени  $n \geq 2$ ,  $V(0) = 0$ ,  $V'(0) \neq 0$ , установлены точная верхняя граница минимальных модулей критических значений и точная нижняя граница максимальных модулей критических значений этих произведений. Указанные оценки зависят только от  $n$  и  $|V'(0)|$ .

*Ключевые слова:* рациональные функции, произведения Бляшке, критические значения, римановы поверхности, симметризация, диссимметризация

DOI: 10.31857/S2686954321040056

Полиномы и рациональные функции играют важную роль в различных областях математики. Тем удивительнее наличие нерешенных задач для этих классов функций, формулируемых простым и естественным образом. К такого рода задачам относятся, например, знаменитые гипотезы Сендова о расположении нулей и критических точек комплексного полинома и Смейла об отношении критического значения полинома к соответствующей его критической точке (гипотеза о среднем значении) (см. [1]). Класс рациональных функций, наиболее близких по своей структуре к полиномам степени  $n$ , составляют конечные произведения Бляшке той же степени:

$$V(z) = \alpha \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z}, \quad z \in U := \{z: |z| < 1\},$$

где  $|\alpha| = 1$  и комплексные числа  $z_1, \dots, z_n$  лежат в единичном круге  $U$ . Такие произведения и их приложения изучались многими авторами (см., например, работы [2–5] и библиографию в них). В то же время задачи, связанные с критическими значениями произведений Бляшке, мало изучены [1, 4]. Справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть  $V$  – конечное произведение Бляшке степени  $n \geq 2$ ,  $V(0) = 0$ ,  $|V'(0)| = c$ ,  $0 < c < 1$ . Тогда

$$\min\{|B(\zeta)|: B'(\zeta) = 0\} \leq \min\{|B_1(\zeta)|: B'_1(\zeta) = 0\}, \quad (1)$$

где

$$B_1(z) = z \frac{z^{n-1} - c}{1 - cz^{n-1}}. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что функция  $B_1$  является произведением Бляшке. Критические точки  $B_1$  заданы уравнением

$$\zeta^{2n-2} + ((n-2)c - n/c)\zeta^{n-1} + 1 = 0,$$

а критические значения  $B_1(\zeta)$ , реализующие минимум в правой части (1), расположены на одинаковом расстоянии от начала координат симметричным образом. Из теоремы 1 легко вытекает соответствующее утверждение о критических значениях комплексных полиномов вида  $P(z) = z^n + \dots + cz$  [6]:

$$\min\{|P(\zeta)|: P'(\zeta) = 0\} \leq \min\{|P^*(\zeta)|: P^{*'}(\zeta) = 0\} = (n-1) \left(\frac{c}{n}\right)^{n/(n-1)},$$

где  $P^*(z) = z^n - cz$ . Последнее неравенство дает ответ на один из вопросов Смейла (см. [7, с. 3; 6]). Заметим, что полином  $P^*$  является также экстремальным и в знаменитой гипотезе Смейла о среднем значении, согласно которой предполагается существование критической точки  $\zeta$ , удовлетворяющей неравенству

$$\left| \frac{P(\zeta)}{c\zeta} \right| \leq \frac{n-1}{n} \quad (3)$$

[7, с. 33]. Шейл–Смолл поднял вопрос о получении аналогичной (3) оценки, где полином  $P$  заменяется на конечное произведение Бляшке  $V$ ,

<sup>1</sup> Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия

<sup>2</sup> Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток, Россия

\*E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

$B(0) = 0$ ,  $B'(0) = c$  [1, с. 366]. Некоторый прогресс в этом направлении достигнут в работе Нг и Жанга [4]. Учитывая вышесказанное, естественно предположить, что экстремальным произведением Бляшке в гипотезе, аналогичной (3), будет функция  $B_1$  из теоремы 1.

При доказательстве теоремы 1 существенно используется симметрия римановой поверхности  $R_1$  функции, обратной произведению  $B_1$ . Эту поверхность можно представить следующим образом. Пусть  $\sigma$  – модуль наименьшего критического значения функции  $B_1$  и пусть  $\lambda_k = [\operatorname{sech}(2\pi i(k-1)/(n-1)), \exp(2\pi i(k-1)/(n-1))]$ ,  $k = 1, \dots, n-1$

$U_0 = \left\{ w: |w| < 1, w \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} \lambda_k \right\}$ . Поверхность  $R_1$  получается приклеиванием “крест-накрест” к области  $U_0$  листов  $U_k = \{w: |w| < 1, w \notin \lambda_k\}$  по берегам совпадающих разрезов единичного круга,  $k = 1, \dots, n-1$ . Следуя методике [6], мы рассматриваем симметричный конденсатор, заданный на поверхности  $R_1$  [8], который затем преобразуется в конденсатор меньшей емкости, расположенный на поверхности функции, обратной исходному произведению  $B$  из теоремы 1. Ключевую роль в этом преобразовании играет диссимметризация вещественнозначных функций [8].

В решении ряда задач экстремальной функцией является так называемое произведение Чебышева–Бляшке [3]. Нас интересует функция  $B_2$ , которая с точностью до дробно-линейной замены аргумента совпадает с таким произведением. Для фиксированного целого  $n \geq 2$  и вещественного  $\kappa$ ,  $0 < \kappa < 1$ , рассмотрим рациональную функцию  $Z \equiv Z_n(\zeta; \kappa)$ , заданную параметрически:

$$Z_n(\operatorname{sn}(u; k); \kappa) := \operatorname{sn}\left(u \frac{\mathbf{K}(\kappa)}{\mathbf{K}(k)}; \kappa\right), \quad u \in \mathbb{C},$$

где модуль  $k$  определяется равенством

$$\mathbf{K}'(k)\mathbf{K}(\kappa) = n\mathbf{K}'(\kappa)\mathbf{K}(k), \quad 0 < k < 1,$$

$\mathbf{K}(\cdot)$  и  $\mathbf{K}'(\cdot)$  – полные эллиптические интегралы первого рода [9]. Функцию  $Z$ , а также суперпозиции этой функции с дробно-линейными отображениями как в области определения, так и в области значений, принято называть дробями Золотарева [10]. Хорошо известна роль дробей Золотарева в теории рациональной аппроксимации и некоторых вопросах электротехнических расчетов [9]. Конечное произведение Бляшке  $B_2$  определяется следующим образом:

$$B_2(z) = \Phi\left(Z\left(\frac{\beta(1-z)}{1+z}; \kappa\right)\right), \quad z \in U, \quad 1 < \tau < \infty,$$

где

$$\Phi(v) = \frac{v(\sqrt{\tau}-1) + \sqrt{\tau} + 1}{\sqrt{\tau} + 1 - v(\sqrt{\tau}-1)}, \quad \sqrt{\kappa} = \frac{\sqrt{\tau}-1}{\sqrt{\tau}+1},$$

$\beta$  – наибольший корень уравнения  $Z(\zeta) = \frac{\sqrt{\tau}+1}{1-\sqrt{\tau}}$ .

Функция  $B_2$  отображает единичный круг  $|z| < 1$  на риманову поверхность  $R_2$ , расположенную над кругом  $|w| < 1$  и допускающую следующее геометрическое представление. Пусть  $H_1$  есть круг  $|w| < 1$  с разрезом вдоль отрезка  $h^- := [-1, -1/\sqrt{\tau}]$ , и пусть  $H_2, \dots, H_n$  – копии круга  $|w| < 1$  с разрезами вдоль отрезков  $h^-$  и  $h^+ := [1/\sqrt{\tau}, 1]$ . Наконец, обозначим через  $H_n$  круг  $|w| < 1$  с разрезом  $h^-$ , если  $n$  четное и  $h^+$  в противном случае. Поверхность  $R_2$  получается склеиванием областей  $H_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Область  $H_1$  приклеена к области  $H_2$  “крест-накрест” по берегам  $h^-$ -разрезов. Область  $H_2$  приклеена к  $H_3$  по берегам  $h^+$ -разрезов и т.д. Область  $H_{n-1}$  приклеена к области  $H_n$  по берегам  $h^-$ -разрезов, если  $n$  четное, и по берегам  $h^+$ -разрезов, если  $n$  нечетное.

**Теорема 2.** В условиях теоремы 1 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \max\{|B(\zeta)|: B'(\zeta) = 0\} &\geq \\ &\geq \max\{|B_2(\zeta)|: B_2'(\zeta) = 0\} = 1/\sqrt{\tau}, \end{aligned}$$

где  $\tau$  – единственный корень уравнения  $|B_2'(0)| = c$  на промежутке  $1 < \tau < \infty$ .

Как следствие из теоремы 2, заключаем, что при всех  $t$ ,  $0 < t < 1/\sqrt{\tau}$ , лемниската  $\{z: |B(z)| = t\}$  не является связным множеством.

Доказательство теоремы 2 опирается на метод симметризации [11], при котором результат симметризации расположен на римановой поверхности функции, обратной полиному Чебышева первого рода.

## ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-01-00018) и Минобрнауки России (дополнительное соглашение от 21.04.2020 № 075-02-2020-1482-1).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sheil-Small T. Complex polynomials. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.
2. Mashreghi J., Fracain E. (eds.) Blaschke products and their applications. Fields Institute Communications 65. N.Y.: Springer, 2013.

3. *Ng T.W., Tsang C.Y.* Chebyshev-Blaschke products // *J. Comp. and Appl. Math.* 2015. V. 277. P. 106–114.
4. *Ng T.W., Zhang Y.* Smale's mean value conjecture for finite Blaschke products // *J. Anal.* 2016. V. 24. P. 331–345.
5. *Garcia S.R., Mashreghi J., Ross W.T.* Finite Blaschke products and their connections. Cham: Springer, 2018.
6. *Дубинин В.Н.* Неравенства для критических значений полиномов // *Матем. сб.* 2006. Т. 197. № 8. С. 63–72.
7. *Smale S.* The fundamental theorem of algebra and complexity theory // *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*. 1981. V. 4. № 1. P. 1–36.
8. *Dubinin V.N.* Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. Basel: Birkhauser/Springer, 2014.
9. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
10. *Bogatyrev A.B.* How many Zolotarev fractions are there? // *Constructive approximation.* 2017. V. 46. № 1. P. 37–45.
11. *Дубинин В.Н.* Круговая симметризация конденсаторов на римановых поверхностях // *Матем. сб.* 2015. Т. 206. № 1. С. 69–96.

## CRITICAL VALUES OF THE FINITE BLASCHKE PRODUCTS

Corresponding Member of the RAS **V. N. Dubinin**<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> *Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Institute for Applied Mathematics, Far East Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russian Federation*

For finite Blaschke products  $B$  of degree  $n \geq 2$ ,  $B(0) = 0$ ,  $B'(0) \neq 0$ , a sharp upper bound for the least critical values and a sharp lower bound for the greatest critical values of these products are established. These estimates depend only on  $n$  and  $|B'(0)|$ .

*Keywords:* rational functions, Blaschke products, critical values, Riemann surfaces, symmetrization, dis-symmetrization

УДК 519.615

## НОВЫЙ КЛАСС ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ $p$ -РЕГУЛЯРНОСТИ

© 2021 г. Академик РАН Ю. Г. Евтушенко<sup>1,2,\*</sup>, А. А. Третьяков<sup>1,3,4,\*\*</sup>

Поступило 22.04.2021 г.  
После доработки 22.04.2021 г.  
Принято к публикации 08.06.2021 г.

Предлагается новый подход для исследования на устойчивость динамических систем в случае, когда традиционные функции Ляпунова не эффективны или вообще не применимы для исследования. Основное аппаратное средство, которое используется для анализа вырожденных систем, это так называемая  $p$ -фактор функция Ляпунова, позволяющая сводить исходную задачу к новой на основе конструкций теории  $p$ -регулярности. Приводится пример содержательного применения рассматриваемого в статье метода.

*Ключевые слова:* динамические системы, устойчивость, вырожденность, особенность,  $p$ -фактор функция Ляпунова

**DOI:** 10.31857/S2686954321040068

Рассматривается автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = f(x), \quad (1)$$

где вектор-функция  $f \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ . При этом начальное условие  $x(t_0) = x_0$  определяет единственное решение системы (1). Предполагаем, что  $f(0) = 0$ , т.е. точка решения  $x^*(t) \equiv 0$  является положением равновесия системы (1), и будем изучать вопрос асимптотической устойчивости этого решения, а также возможность модификации системы (1) в случае неустойчивости таким образом, чтобы получить новую систему с тем же положением равновесия, но уже устойчивого.

<sup>1</sup> Вычислительный центр им. А.А. Дородницына  
Федерального исследовательского центра  
“Информатика и управление”

Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup> Московский физико-технический институт  
(государственный университет), Долгопрудный,  
Московская область, Россия

<sup>3</sup> System Research Institute, Polish Academy of Sciences,  
Warsaw, Poland

<sup>4</sup> Siedlce University, Faculty of Sciences, Siedlce, Poland

\*E-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru

\*\*E-mail: prof.tretyakov@gmail.com

**Определение 1.** Будем говорить, что решение  $x^*(t) \equiv 0$  системы (1) устойчиво, или устойчиво по Ляпунову, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$  такое, что  $\|x(x_0(t))\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$  при  $\|x_0\| \leq \delta$ .

**Определение 2.** Будем говорить, что решение  $x^*(t) = 0$  системы (1) является асимптотически устойчивым в окрестности  $U(x^*)$ , если оно устойчиво по Ляпунову и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(x_0(t)) = 0. \quad (2)$$

Для изучения вопроса устойчивости является весьма эффективным аппарат функций Ляпунова (см., например, [1–11, 13]). Далее для простоты считаем  $t_0 = 0$ .

**Определение 3.** Непрерывно дифференцируемая функция  $v(x)$  называется функцией Ляпунова, если  $v(x) > 0$  и  $\frac{dv(x)}{dt} < 0 \quad \forall x \in U(x^*) \setminus \{x^*\}, v(x^*) = 0$ .

Для анализа устойчивости системы (1) применима классическая теорема Ляпунова [13], которую мы сформулируем в следующем виде.

**Теорема 1 (Ляпунова).** Если для системы (1) существует функция Ляпунова, то тривиальное решение  $x^*(t) = 0$  асимптотически устойчиво.

Традиционно используются следующие функции Ляпунова:

$$v(x) = \|f(x)\|^2, \quad v(x) = \|x - x^*\|^2. \quad (3)$$

Если матрица  $f'(x^*)$  отрицательно определена, то очевидно  $\frac{dv(x)}{dt} < 0, x \in U(x^*) \setminus \{x^*\}$ .

Существует обширный класс систем вида (1), в которых отображение  $f(x)$  вырождено в точке  $x^* = 0$ , т.е.  $f'(x^*)$  вырождено, и строить функцию Ляпунова затруднительно. Например, для систем вида  $\dot{x} = x^{2p}, p \geq 1, p \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$  или  $\dot{x}_1 = x_1 + x_1 x_2, \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^3, x \in \mathbb{R}^2$  и т.д. В этом случае матрица  $f'(x^*)$  вырождена в точке  $x^* = 0$  и применить классическую функцию Ляпунова типа (3) невозможно. Оказывается, для вырожденных систем (1) эффективным методом исследования устойчивости является аппарат теории  $p$ -регулярности, описание и основные конструкции которого можно найти, например, в [12].

### 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ $p$ -РЕГУЛЯРНОСТИ

Пусть отображение  $f(\cdot): X \rightarrow Y$  достаточно гладкое (по крайней мере до порядка  $p + 1$ ),  $X, Y$  – банаховы пространства. Считаем при этом в точке  $x^* \in X, f(x^*) = 0$ . Для нас интересен случай вырождения  $f(\cdot)$  в точке  $x^*$ , т.е.  $\text{Im } f'(x^*) \neq Y$ . Пусть пространство  $Y$  разложимо в прямую сумму подпространств

$$Y = Y_1 \oplus \dots \oplus Y_p, \quad (4)$$

где  $Y_1 = \overline{\text{Im } f'(x^*)}, Z_1 = Y$  и пусть  $Z_2$  – замкнутое дополнение пространства  $Y_1$  до  $Y$  (мы предполагаем, что такое существует). Обозначим через  $P_{Z_2}: Y \rightarrow Z_2$  оператор проектирования на  $Z_2$  параллельно  $Y_1$ . Тогда через  $Y_2$  обозначим замыкание линейной оболочки образа квадратичной формы  $P_{Z_2} f^{(2)}(x^*)[\cdot]^2$ . Далее определим индуктивно

$$Y_i = \overline{\text{span Im } P_{Z_i} f^{(i)}(x^*)[\cdot]^i} \subseteq Z_i,$$

где  $Z_i$  – замкнутое дополнение к  $(Y_1 \oplus \dots \oplus Y_{i-1})$ . Окончательно,  $Y_p = Z_p$ . При этом число  $p \in \mathbb{N}$  выбирается как минимальный номер, для которого (4) имеет место. Определим отображения

$$f_i(x) = P_{Y_i} f(x): X \rightarrow Y_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad (5)$$

где  $P_{Y_i}: Y \rightarrow Y_i$  – оператор проектирования на  $Y_i$  параллельно  $(Y_1 \oplus \dots \oplus Y_{i-1} \oplus Y_{i+1} \oplus \dots \oplus Y_p)$ , и обозначим  $P_i = P_{Y_i}, i = 1, \dots, p$ .

**Определение 4.** Линейный оператор  $\Psi_p(x, h) \in L(X, Y_1 \oplus \dots \oplus Y_p), h \in X, \|h\| \neq 0$ ,

$$\Psi_p(x, h) = f_1'(x) + f_2''(x)h + \dots + f_p^{(p)}(x)[h]^{p-1} \quad (6)$$

называется  $p$ -фактор оператором отображения  $f(\cdot)$  в точке  $x$ , а  $\Psi_p(x, h) = f_1'(x) + f_2''(x)h + \dots + f_p^{(p-1)}(x)[h]^{p-1}$  –  $p$ -фактор функция.

**Определение 5.** Будем говорить, что отображение  $f(\cdot)$   $p$ -регулярно в точке  $x^*$  на элементе  $h$ , если матрица  $\Psi_p(x^*, h)$  невырождена, т.е.  $\text{Im } \Psi_p(x^*, h) = Y$ .

Пусть  $\text{Ker } f_k^{(k)}(x^*)$  есть  $k$ -ядро  $k$ -формы  $f_k^{(k)}(x^*)$ , т.е.

$$\text{Ker } f_k^{(k)}(x^*) = \{\xi \in X \mid f_k^{(k)}(x^*)[\xi]^k = 0\}.$$

Через  $H_p(x^*)$  обозначим

$$H_p(x^*) = \bigcap_{k=1}^p \text{Ker } f_k^{(k)}(x^*).$$

Одним из основных результатов теории  $p$ -регулярности является теорема о неявной функции в вырожденном случае, которую мы представим в следующем виде [14].

**Теорема 2.** Пусть  $g(u, x) \in C^{p+1}(U, X), g: U \times X \rightarrow Z, U, X$  и  $Z$  – банаховы пространства и отображения  $g_i(u, x), i = 1, \dots, p$ , определены в соответствии с (5). Предположим, что  $g(u^*, x^*) = 0$  и  $g$  –  $p$ -регулярна по переменной  $x$  на элементе

$$h \in \bigcap_{k=1}^p \text{Ker } g_k^{(k)}(u^*, x^*), h = (\bar{u}, 0), \bar{u} \neq 0, \text{ т.е.}$$

$$\{g_1'(u^*, x^*) + g_2''(u^*, x^*)[h] + \dots + g_p^{(p)}(u^*, x^*)[h]^{p-1}\} \cdot (\{0\} \times X) = Z.$$

Тогда существует независимая константа  $c > 0$ , достаточно малое  $\varepsilon > 0$  и отображение  $\varphi(u) = x^* + \alpha(u)$  такие, что для  $\alpha \in [0, \varepsilon]$  и  $u = u^* + \alpha \bar{u}$  имеем  $g(u, \varphi(u)) = 0, \|\alpha(u)\| = o(\alpha)$  и

$$\|\varphi(u) - x^*\| \leq c \sum_{k=1}^p \|g_k(u, x^*)\|^{1/k}.$$

### 2. $p$ -ФАКТОР ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА И УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему (1), в которой отображение  $f(x)$  вырождено в точке равновесия  $x^* = 0$ , т.е.  $\det f'(x^*) = 0$ .

Система (1) в этом случае может и не быть устойчива, и построение на основе системы (1) новой системы, но уже устойчивой и с тем же положением равновесия  $x^*$ , является весьма важной проблемой. В свою очередь, ответ на вопрос об устойчивости решения  $x^*$  системы (1) с использованием обычной функций Ляпунова вида (3) не всегда возможен, см., например, случай, когда  $f(x) = x^2$ , и др.

Покажем, как можно с использованием результатов теории  $p$ -регулярности построить на основе системы (1) новую систему, но уже асимптотически устойчивую по отношению к тому же решению  $x^* = 0$ . Введем так называемую  $p$ -фактор функцию Ляпунова.

**О п р е д е л е н и е 6.** Функцию  $v_p(x, h) = \|\Phi_p(x, h)\|^2$ , где

$$\begin{aligned} \Phi_p(x, h) &= P_1 f(x) + \\ &+ P_2 f(x)[h] + \dots + P_p f^{(p-1)}(x)[h]^{p-1} = \\ &= f_1(x) + f_2(x)[h] + \dots + f_p^{(p-1)}(x)[h]^{p-1}, \end{aligned}$$

будем называть  $p$ -ф а к т о р ф у н к ц и е й Л я п у н о в а для системы (1).

**Т е о р е м а 3.** Пусть  $f \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  и существует такой элемент  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $h \neq 0$ , что матрица  $\Psi_p(x^*, h) < 0$  отрицательно определена.

Тогда система

$$\dot{x}(t) = \Phi_p(x^*, h), \quad x(0) = x_0 \quad (7)$$

будет асимптотически устойчива в окрестности  $U(x^*)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 1 с использованием  $p$ -фактор функции Ляпунова  $v_p(x, h)$  и с учетом того, что

$$\begin{aligned} \frac{dv_p(x, h)}{dt} &= 2 \langle \Psi_p(x, h) \Phi_p(x, h), \Phi_p(x, h) \rangle < 0 \\ &\forall x \in U(x^*) \setminus \{x^*\}. \end{aligned}$$

При этом  $\Phi_p(x, h) \neq 0 \forall x \in U(x^*) \setminus \{x^*\}$ . Поэтому выполняются условия теоремы 1, из которой следует нужный результат.

**П р и м е р 1.** Рассмотрим пример, когда  $p = 2$

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \quad x(0) = x_0, \quad x^* = 0. \quad (8)$$

Очевидно, что условия теоремы 1 для классической функции Ляпунова  $v(x) = \|f(x)\|^2 = x^4$  не выполнены.

Однако из теоремы 3 следует, что модифицированная система

$$\frac{dx}{dt} = P_1 f(x) + P_2 f'(x)h = 2xh$$

с 2-фактор функцией Ляпунова  $v_2(x, h) = (2xh)^2$  будет асимптотически устойчива при  $h = -1$ . Здесь  $P_1 = 0, P_2 = 1$ .

Что касается асимптотической устойчивости исходной системы (1), то в случае вырождения  $f'(x^*)$  ситуация может быть различная. Однако при предположении так называемой сильной  $p$ -регулярности отображения  $f(\cdot)$  в точке  $x^*$  будет верен результат, приводимый ниже в теореме 4.

**З а м е ч а н и е 1.** В силу того, что  $P_1 f'(x^*) = f'(x^*)$ , мы также будем использовать модификацию  $p$ -фактор функции Ляпунова при

$$\bar{\Phi}_p(x, h) = f(x) + P_2 f'(x)[h] + \dots + P_p f^{(p-1)}(x)[h]^{p-1}$$

и соответственно модификацию  $p$ -фактор оператора

$$\bar{\Psi}_p(x, h) = f(x) + P_2 f''(x)[h] + \dots + P_p f^{(p)}(x)[h]^{p-1}.$$

и модификацию  $p$ -фактор функции  $\Psi_p(x^*, h)$ .

**О п р е д е л е н и е 7.** Будем говорить, что отображение  $f \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  удовлетворяет условию сильной  $p$ -регулярности в точке  $x^*$ , если  $\forall x \in U_\delta(x^*) \setminus \{x^*\} \exists h \in \mathbb{R}^n, \|h\| \leq 1$  такие, что выполнено неравенство

$$\langle \bar{\Psi}_p(x, h) \bar{\Phi}_p(x, h), f(x) \rangle < 0, \quad (9)$$

где  $\delta > 0$  – достаточно малое.

**П р и м е р 1** (продолжение). Для функции  $f(x) = x^2$  условие сильной 2-регулярности в точке  $x^* = 0$  выполнено. Действительно, здесь  $p = 2, x^* = 0, P_1 = 0, P_2 = 1$  и

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_2(x, h) &= x^2 + 2xh, \\ \bar{\Psi}_2(x, h) &= f'(x) + P_2 f''(x)[h] = 2x + 2h, \end{aligned}$$

$\langle \bar{\Psi}_2(x, h) \bar{\Phi}_2(x, h), f(x) \rangle = 2(x+h)(x^2 + 2xh)x^2 < 0 \forall x \in U_\delta(0) \setminus \{0\}$ , где  $h = 1$ , если  $x < 0$  и  $-x < h < -\frac{x}{2}$ , если  $x > 0$  и выполнено (9).

**Т е о р е м а 4.** Пусть  $f \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ .

Тогда если отображение  $f$  – сильно  $p$ -регулярно в точке  $x^*$ , то тривиальное решение  $x^*$  системы (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Покажем, что  $p$ -фактор функция Ляпунова  $v_p(x, h) = \|\bar{\Phi}_p(x, h)\|^2$  является искомой функцией Ляпунова для применения теоремы 1 при  $x \in U_\delta(x^*) \setminus \{x^*\}$  и  $\delta > 0$  достаточно малом. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dv_p(x, h)}{dt} &= 2\langle \bar{\Phi}_p'(x, h)\bar{\Phi}_p(x, h), \dot{x}(t) \rangle = \\ &= 2\langle \bar{\Psi}_p(x, h)\bar{\Phi}_p(x, h), f(x) \rangle. \end{aligned}$$

Последнее выражение согласно (9) отрицательно  $\forall x \in U_\delta(x^*) \setminus \{0\}$ . При этом  $\|\bar{\Phi}_p(x, h)\| \leq c$  равномерно по  $h$ , так как  $\|h\| \leq 1 \forall x \in U_\delta(x^*)$ . Поэтому доказательство теоремы 1 не изменится (см., например, [13]), при использовании функции  $v_p(x, h)$  на траектории решений уравнения (1), хотя в некоторых точках траектории  $x(t)$  векторы  $h$ , вообще говоря, могут быть разные и зависеть от  $x$ , но это не влияет на анализ устойчивости.

Однако при исследовании на устойчивость в общем случае ситуация зависит от начальной точки  $x(0) = x_0$  и при различных точках  $x_0$  траектория  $x(x_0, t)$  может как сходиться к  $x^*$ , так и не сходиться к  $x^*$ . Ответ на этот вопрос весьма сложен и связан с существованием решения краевых задач. Поясним это.

Заменим переменные  $u = \frac{1}{t}$  и пусть в точке  $t = +\infty$  соответственно  $u = 0$ . Тогда система (1) перепишется следующим образом:

$$\dot{x}(u)u^2 = f(x), \quad x(0) = 0, \quad x(u_0) = x_0. \quad (10)$$

Обозначив  $g(u, x) = \dot{x}u^2 - f(x)$ , можем исследовать, при каких начальных значениях  $x_0$  уравнение  $g(u, x) = 0$  имеет в окрестности точки  $(0, 0)$  решение  $x = x(u)$ . Частично ответ на этот вопрос может дать теорема 2, которая гарантирует существование устойчивого решения, если при начальных значениях  $x_0$  выполняется условие  $p$ -регулярности отображения  $g(u, x)$  на элементе  $h = (0, x_0)$ , а значит, существование решения  $x(u) \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow 0$  (или соответственно  $t \rightarrow \infty$ ).

Пример 1 (продолжение). Таким образом, из теоремы 4 следует асимптотическая устойчивость системы (8) с использованием модификации 2-фактор-функции Ляпунова

$$\bar{v}_2(x, h) = \|\bar{\Phi}_2(x, h)\|^2 = (x^2 + 2xh)^2.$$

Отметим также, что для системы (8) применение модифицированной 2-фактор функции  $\bar{\Phi}_2(x, h)$  в теореме 3 также дает новую устойчивую динамическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{\Phi}_2(x, h) = \\ &= f(x) + P_2 f'(x)[h] = x^2 + 2xh, \quad x(0) = x_0, \end{aligned}$$

при  $h = -1$ .

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-71-30005).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
2. Барбашин Е.А., Красовский Н.Н. Об устойчивости движения в целом // ДАН СССР. 1952. Т. 86. № 3. С. 453–456.
3. LaSalle J.P., Lefschetz S. Stability by Liapunov's direct method. Academic Press, 1961.
4. Chellaboina V.S., Haddad W.M. Nonlinear dynamical systems and control: A Lyapunov-based approach. Princeton University Press, 2008.
5. Teschl G. Ordinary differential equations and dynamical systems. Providence: American Mathematical Society, 2012. V. 140.
6. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
7. Absil P.A., Kurdyka K. On the stable equilibrium points of gradient systems // Systems & control letters. 2006. V. 55. № 7. P. 573–577.
8. Гладиллина Р.И. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости импульсных систем // Динамические системы. 2009. № 26. С. 25–30.
9. Бибиков Ю.Н., Плисс В.А., Трушина Н.В. Об устойчивости нулевого решения существенно нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в случае центра // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4. № 3.
10. Stamova I.M., Stamov G.T. Stability analysis of differential equations with maximum // Mathematica Slovaca. 2013. V. 63. № 6. P. 1291–1302.
11. Ismayilova K.E. Stability analysis for first-order nonlinear differential equations with three-point boundary conditions // e-Journal of Analysis and Applied Mathematics. 2020. V. 2020. № 1. P. 40–52.
12. Tretyakov A., Marsden J.E. Factor analysis of nonlinear mappings: p-regularity theory // Communications on Pure & Applied Analysis. 2003. V. 2. № 4. P. 425.
13. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
14. Brezhneva O.A., Tretyakov A.A. Implicit function theorems for nonregular mappings in Banach spaces. Exit from singularity // Banach Spaces and Their Applications in Analysis. 2007. P. 285–302.

# NEW CLASS OF LYAPUNOV'S FUNCTIONS FOR SINGULAR DYNAMIC SYSTEMS STABILITY ANALYSIS. ELEMENTS OF $p$ -REGULARITY THEORY

**Yu. G. Evtushenko<sup>a,b</sup> and A. A. Tret'yakov<sup>a,c,d</sup>**

<sup>a</sup> *Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

<sup>c</sup> *System Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland*

<sup>d</sup> *Siedlice University, Faculty of Sciences, Siedlice, Poland*

The article proposes a new approach for studying the stability of dynamic systems in the case when the traditional Lyapunov functions are ineffective or generally not applicable for research. The main tool used for the analysis of degenerate systems is the so-called  $p$ -factor Lyapunov function, which makes it possible to reduce the original problem to a new one based on the constructions of the  $p$ -regularity theory. An example of a meaningful application of the method considered in the article is given.

*Keywords:* dynamic systems, stability, degeneration, singular,  $p$ -factor Lyapunov function

УДК 517.957,517.984

# ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ РАЗМЕРНОСТИ АТТРАКТОРОВ ТРЕХМЕРНОЙ РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ЭЙЛЕРА С ДИССИПАЦИЕЙ

© 2021 г. С. В. Зелик<sup>2,3,\*</sup>, А. А. Ильин<sup>1,\*\*</sup>, А. Г. Костянко<sup>3,\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН Б. Н. Четверушкиным 13.05.2021 г.

Поступило 14.05.2021 г.

После доработки 04.06.2021 г.

Принято к публикации 04.06.2021 г.

Рассматриваются регуляризованная система Эйлера с трением в двумерной и трехмерной постановке. Доказано существование глобального аттрактора и получены явные оценки его фрактальной размерности. В случае периодических краевых условий как в двумерном, так и в трехмерном случае доказывается, что полученные оценки сверху точны в пределе  $\alpha \rightarrow 0^+$ , где  $\alpha$  – параметр, описывающий сглаживание векторного поля в нелинейном члене.

*Ключевые слова:* невязкая модель Эйлера–Бардины, аттракторы, фрактальная размерность, потоки Колмогорова

DOI: 10.31857/S2686954321040160

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В работе изучается асимптотическое поведение решений регуляризованной системы Эйлера [1]

$$\begin{aligned} \partial_t u + (\bar{u}, \nabla_x) \bar{u} + \gamma u + \nabla_x p &= g, \\ \operatorname{div} \bar{u} &= 0, \quad u(0) = u_0, \quad u = (1 - \alpha \Delta_x) \bar{u}, \end{aligned} \quad (1)$$

с правой частью  $g$  и диссипацией, описывающей однородным трением  $\gamma u$ . Параметр  $\alpha > 0$ , имеющий размерность квадрата длины, является малым параметром, так что  $\bar{u}$  – это сглаженное векторное поле с отфильтрованными высокими гармониками по пространству.

С точки зрения аттракторов система (1) представляет интерес и в двумерном случае, поскольку при  $\alpha = 0$  в естественном энергетическом пространстве (2) решение существует, но его единственность неизвестна. Одна из возможных регуляризаций с помощью добавления в правую часть малой вязкой диссипации  $\nu \Delta_x u$  была

подробно рассмотрена в [2], где были получены точные оценки размерности аттрактора при  $\nu \rightarrow 0^+$ .

В размерности три система интересна прежде всего как подсеточная модель турбулентности и известна в литературе под названием невязкая модель Эйлера–Бардины [1]. Анализ асимптотического поведения решений и оценки числа степеней свободы для этой модели и очень близкой к ней системы Навье–Стокса–Войта содержится в работах [3, 4] (см. также цитированную там литературу).

В нашей работе система изучается в размерности  $d = 2$  и  $d = 3$ . Каждый случай, в свою очередь, рассматривается для трех типов краевых условий.

1. Периодические краевые условия  $x \in \mathbb{T}^d = [0, L]^d$ . При этом налагается стандартное условие

$$\int_{\mathbb{T}^d} (u, \bar{u}, g) dx = 0.$$

2. Во всем пространстве  $\mathbb{R}^d$ .

3. В ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Тогда  $\bar{u}$  есть решение задачи Дирихле для оператора Стокса

$$\begin{aligned} (1 - \alpha \Delta_x) \bar{u} + \nabla_x q &= u, \\ \operatorname{div} \bar{u} &= 0, \quad \bar{u} |_{\partial \Omega} = 0. \end{aligned}$$

Фазовое пространство по  $\bar{u}$  есть пространство Соболева  $\mathbf{H}^1$  с условием бездивергентности, точнее

<sup>1</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup> Department of Mathematics, University of Surrey, Guildford, United Kingdom

<sup>3</sup> School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou, China

\*E-mail: s.zelik@surrey.ac.uk

\*\*E-mail: ilyin@keldysh.ru

\*\*\*E-mail: anna.kostianko@surrey.ac.uk

$$\bar{u} \in \mathbf{H}^1 := \begin{cases} \dot{\mathbf{H}}^1(\mathbb{T}^d), & x \in \mathbb{T}^d, \quad \int_{\mathbb{T}^d} \bar{u}(x) dx = 0, \\ \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^d), & x \in \mathbb{R}^d, \\ \mathbf{H}_0^1(\Omega), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \bar{u} = 0,$$

а по  $u$ , соответственно,  $u \in \mathbf{H}^{-1} := (1 - \Delta_x)\mathbf{H}^1 = \mathbf{H}^{-1} \cap \{\operatorname{div} u = 0\}$ .

Исключая давление, запишем систему (1) как эволюционное уравнение в  $\mathbf{H}^1$ :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{u} + B(\bar{u}, \bar{u}) + \gamma \bar{u} &= \bar{g}, \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0, \quad \bar{u}(0) = \bar{u}_0, \quad u &= (1 - \alpha \Delta_x) \bar{u}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} B(\bar{u}, \bar{v}) &= (1 - \alpha \operatorname{P} \Delta_x)^{-1} ((\bar{u}, \nabla_x) \bar{v}), \\ \bar{g} &= (1 - \alpha \operatorname{P} \Delta_x)^{-1} g, \end{aligned}$$

$\operatorname{P}$  – ортогональный проектор Гельмгольца–Лере, а  $\operatorname{P} \Delta_x$  – оператор Стокса. Из эллиптической регулярности оператора Стокса и теорем вложения Соболева следует, что билинейный оператор  $B$  является ограниченным (сглаживающим) оператором в  $\mathbf{H}^1$ :

$$\begin{aligned} B: \mathbf{H}^1 \times \mathbf{H}^1 &\rightarrow \mathbf{H}^{2-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad d = 2, \\ B: \mathbf{H}^1 \times \mathbf{H}^1 &\rightarrow \mathbf{H}^{3/2}, \quad d = 3. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (3) является эволюционным уравнением с ограниченным нелинейным оператором в гильбертовом пространстве, поэтому существование локального по времени решения следует из принципа сжимающих отображений, а глобальное по времени решение существует в силу следующей диссипативной оценки:

$$\|\bar{u}(t)\|_\alpha^2 \leq \|\bar{u}(0)\|_\alpha^2 e^{-\gamma t} + \frac{1}{\gamma^2} \|g\|_{L^2}^2,$$

где

$$\|\bar{u}\|_\alpha^2 := \|\bar{u}\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla_x \bar{u}\|_{L^2}^2.$$

Итак, уравнению (3) соответствует полугруппа разрешающих операторов  $S(t): \mathbf{H}^1 \rightarrow \mathbf{H}^1$ ,  $S(t)\bar{u}_0 = \bar{u}(t)$ , где  $\bar{u}(t)$  – решение уравнения (3).

**Определение 1.** Пусть  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ , – полугруппа непрерывных операторов в банаховом пространстве  $H$ . Множество  $\mathcal{A} \subset H$  называется глобальным аттрактором  $S(t)$ , если:

- 1) множество  $\mathcal{A}$  компактно в  $H$ ;
- 2) оно строго инвариантно:  $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ ;

3)  $\mathcal{A}$  притягивает ограниченные множества в  $H$  при  $t \rightarrow \infty$ , т.е. для любого ограниченного  $B \subset H$  и любой окрестности  $\mathcal{O}(\mathcal{A})$  множества  $\mathcal{A}$  в  $H$  существует  $T = T(B, \mathcal{O})$ , для которого при  $t \geq T$

$$S(t)B \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{A}).$$

При этом аттрактор  $\mathcal{A}$  имеет следующую структуру:

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}|_{t=0}, \quad (4)$$

где  $\mathcal{K} \subset L^\infty(\mathbb{R}, H)$  есть семейство всех полных траекторий  $u: \mathbb{R} \rightarrow H$  полугруппы  $S(t)$ , которые ограничены при всех  $t \in \mathbb{R}$ .

Сформулируем основной результат.

**Теорема 1.** Пусть  $d = 2$ . Для каждого из трех видов краевых условий система (1) обладает глобальным аттрактором  $\mathcal{A}$ , фрактальная размерность которого конечна и допускает следующую явную оценку сверху:

$$\begin{aligned} \dim_F \mathcal{A} &\leq \frac{1}{8\pi} \times \\ &\times \begin{cases} \frac{1}{\alpha \gamma^4} \min \left( \|\operatorname{rot} g\|_{L^2}^2, \frac{\|g\|_{L^2}^2}{2\alpha} \right), & x \in \mathbb{T}^2, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ \frac{\|g\|_{L^2}^2}{2\alpha^2 \gamma^4}, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2. \end{cases} \end{aligned}$$

В трехмерном случае  $d = 3$  все три оценки формально выглядят одинаково:

$$\dim_F \mathcal{A} \leq \frac{1}{12\pi \alpha^{5/2} \gamma^4} \|g\|_{L^2}^2.$$

Наконец, для периодических краевых условий, как для  $\mathbb{T}^2$ , так и для  $\mathbb{T}^3$ , оценки сверху точны при  $\alpha \rightarrow 0^+$ .

Оценки сверху основаны на получении мажорант глобальных показателей Ляпунова [5, 6] в фазовом пространстве  $\mathbf{H}^1$  со скалярным произведением (10). Получение их в явном виде возможно благодаря неравенствам из теоремы 3.

## 2. ОЦЕНКИ СНИЗУ

Оценки снизу размерности аттракторов основаны на анализе неустойчивости обобщенных потоков Колмогорова. Пусть

$$\begin{aligned} g_s(x_2) &= (\gamma \lambda(s) \sin s x_2, 0)^T, \\ g_s(x_3) &= (\gamma \lambda(s) \sin s x_3, 0, 0)^T \end{aligned} \quad (5)$$

правые части в системе (1) на  $\mathbb{T}^2 = [0, 2\pi]^2$  и  $\mathbb{T}^3 = [0, 2\pi]^3$  соответственно. Здесь  $s \in \mathbb{N}$ ,  $s \geq 1$ , а  $\lambda$  – параметр, выбор которого указан ниже. Этим правым частям соответствуют стационарные решения

$$\begin{aligned} u_s(x_2) &= (\lambda(s) \sin sx_2, 0)^T, \\ u_s(x_3) &= (\lambda(s) \sin sx_3, 0, 0)^T. \end{aligned} \quad (6)$$

Теорема 2. При  $\lambda \geq \lambda(s)$ , где

$$\lambda(s) = c_1 \gamma \frac{(1 + \alpha s^2)^2}{s}, \quad (7)$$

и где здесь и далее  $c_i$  – абсолютные эффективно вычисляемые постоянные, стационарные решения (6) неустойчивы, и размерность неустойчивого многообразия  $\mathcal{M}^{\text{un}}$  около них не менее чем

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}^{\text{un}}(u_s) &\geq c_2 s^2, \quad d = 2; \\ \dim \mathcal{M}^{\text{un}}(u_s) &\geq c_3 s^3, \quad d = 3. \end{aligned} \quad (8)$$

Следствие 1. Пусть правая часть в системе (1) задана в (5), и  $\lambda(s)$  определена в (7). Тогда размерность соответствующего аттрактора  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_s$  допускает следующую оценку снизу:

$$\dim_F \mathcal{A} \geq c_6 \begin{cases} \max \left( \frac{\|\text{rot } g_s\|_{L^2}^2}{\alpha \gamma^4}, \frac{\|g_s\|_{L^2}^2}{\alpha^2 \gamma^4} \right), & x \in \mathbb{T}^2, \\ \frac{\|g_s\|_{L^2}^2}{\alpha^{5/2} \gamma^4}, & x \in \mathbb{T}^3. \end{cases} \quad (9)$$

Доказательство. Поскольку из представления глобального аттрактора (4) следует, что неустойчивое многообразие любого стационарного решения лежит в глобальном аттракторе [5, 6], то надо лишь выразить оценки (8) в терминах безразмерных чисел в правой части (9). Рассмотрим трехмерный случай. Система изучается при  $\alpha \rightarrow 0^+$ . Параметр  $s$  в нашем распоряжении, и мы полагаем

$$s = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Тогда  $\lambda$  в (7) и  $\|g_s\|_{L^2}^2$  в (5) становятся

$$\lambda = c_4 \gamma \sqrt{\alpha}, \quad \|g_s\|_{L^2}^2 = c_5 \gamma^4 \alpha,$$

и мы в результате получаем

$$\dim_F \mathcal{A} \geq c_3 s^3 = c_3 \frac{1}{\alpha^{3/2}} = c_3 \frac{\alpha \|g_s\|_{L^2}^2}{\alpha^{5/2} \|g_s\|_{L^2}^2} = c_3 \frac{\alpha \|g_s\|_{L^2}^2}{\alpha^{5/2} c_5 \alpha^4},$$

что и доказывает оценку (9) для  $\mathbb{T}^3$ .

Для двумерного тора заметим, что  $\lambda \sim \gamma \sqrt{\alpha}$  и  $\|\text{rot } g_s\|_{L^2}^2 \sim \gamma^4$  и, как и раньше,  $\|g_s\|_{L^2}^2 \sim \gamma^4 \alpha$ . Действуя аналогично, получаем (9) для  $\mathbb{T}^2$ .

### 3. НЕРАВЕНСТВА

Получение в явном виде оценок сверху размерности аттракторов основано на следующих

неравенствах для бездивергентных вектор-функций с ортонормированными производными.

Теорема 3. Пусть система  $\{\bar{\theta}_j\}_{j=1}^n \in \mathbf{H}^1$  ортонормирована в смысле скалярного произведения

$$(\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_j)_{L^2} + \alpha (\nabla \bar{\theta}_i, \nabla \bar{\theta}_j)_{L^2} = \delta_{ij}. \quad (10)$$

Тогда функция

$$\rho(x) = \sum_{j=1}^n |\bar{\theta}_j(x)|^2$$

удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \|\rho\|_{L^2} &\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{n^{1/2}}{\alpha^{1/2}}, \quad d = 2, \\ \|\rho\|_{L^2} &\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{n^{1/2}}{\alpha^{3/4}}, \quad d = 3. \end{aligned} \quad (11)$$

Замечание 1. Полученные оценки верны, разумеется, и для семейств скалярных функций  $\{\bar{\theta}_i\}_{i=1}^n \in H^1$  с ортонормированными производными в смысле (10). А именно, функция  $\rho(x) = \sum_{i=1}^n |\bar{\theta}_i(x)|$  удовлетворяет оценкам

$$\begin{aligned} \|\rho\|_{L^2} &\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{n^{1/2}}{\alpha^{1/2}}, \quad d = 2, \\ \|\rho\|_{L^2} &\leq \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{n^{1/2}}{\alpha^{3/4}}, \quad d = 3, \end{aligned} \quad (12)$$

которые выполняются для всех трех типов краевых условий  $\Omega = \mathbb{T}^d$  (с условием нулевого среднего),  $\Omega = \mathbb{R}^d$  и  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , где в последнем случае функции обращаются в ноль на границе области.

Неравенства (11) и (12) играют в оценке размерности аттракторов в задаче (1) ту же роль, что и неравенства Либа–Тирринга [7] в теории аттракторов классических уравнений Навье–Стокса [5, 6].

Доказательство неравенств (11) состоит в обобщении метода и результатов работы [8] на бездивергентный векторный случай и (что более сложно технически) на случай тора  $\mathbb{T}^d$ . Для периодического случая основная техническая сложность заключается в получении точных оценок функции Грина оператора  $(-\Delta_x + m^2)^2$  на  $\mathbb{T}^2$  и  $\mathbb{T}^3$ . Соответствующие ряды по  $\mathbb{Z}^2$  и  $\mathbb{Z}^3$  при этом точно оцениваются чисто аналитически без привлечения вычислений, что часто приходится делать в аналогичных случаях, как, например, в [9].

Подробные доказательства изложенных здесь результатов в двумерном периодическом случае содержатся в [10].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bardina J., Ferziger J., Reynolds W.* Improved subgrid scale models for large eddy simulation / Proc. 13th AIAA Conference on Fluid and Plasma Dynamics, 1980.
2. *Ilyin A.A., Miranville A., Titi E.S.* Small viscosity sharp estimates for the global attractor of the 2-D damped-driven Navier–Stokes equations // Commun. Math. Sci. 2004. V. 2. P. 403–426.
3. *Cao Y., Lunasin E.M., Titi E.S.* Global well-posedness of the three-dimensional viscous and inviscid simplified Bardina turbulence models // Commun. Math. Sci. 2006. V. 4. P. 823–848.
4. *Kalantarov V.K., Titi E.S.* Global attractors and determining modes for the 3D Navier–Stokes–Voight equations // Chin. Ann. Math. 2009. V. 30B. P. 697–714.
5. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989. 296 с.
6. *Temam R.* Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, 2nd ed. N.Y.: Springer-Verlag, 1997.
7. *Lieb E., Thirring W.* Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities / Studies in Mathematical Physics. Essays in honor of Valentine Bargmann. Princeton NJ: Princeton University Press, 1976. P. 269–303.
8. *Lieb E.H.* An  $L^p$  bound for the Riesz and Bessel potentials of orthonormal functions // J. Func. Anal. 1983. V. 51. P. 159–165.
9. *Ильин А.А., Лантнев А.А.* Магнитное неравенство Либа–Тирринга для периодических функций // УМН. 2020. Т. 75. Вып. 4. С. 89–90.
10. *Ilyin A.A., Zelik S.V.* Sharp dimension estimates of the attractor of the damped 2D Euler–Bardina equations / Partial Differential Equations, Spectral Theory, and Mathematical Physics. Berlin: EMS Press, 2021. P. 209–229.

## SHARP DIMENSION ESTIMATES FOR THE ATTRACTORS OF THE REGULARIZED DAMPED EULER SYSTEM

S. V. Zelik<sup>b,c</sup>, A. A. Ilyin<sup>a</sup>, and A. G. Kostianko<sup>c</sup>

<sup>a</sup> *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Department of Mathematics, University of Surrey, Guildford, UK*

<sup>c</sup> *School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou, P.R. China*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverishkin

A regularized damped Euler system in two-dimensional and three-dimensional setting is considered. The existence of a global attractor is proved and explicit estimates of its fractal dimension are given. In the case of periodic boundary conditions both in two-dimensional and three-dimensional cases, it is proved that the obtained upper bounds are sharp in the limit  $\alpha \rightarrow 0$ , where  $\alpha$  is the parameter describing smoothing of the vector field in the nonlinear term.

*Keywords:* inviscid Euler–Bardina model, attractors, fractal dimension, Kolmogorov flows

УДК 519.1

## АСИМПТОТИКА ЧИСЛА НЕЗАВИСИМОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПОДГРАФА ГРАФА $G(n, r, < s)$

© 2021 г. В. С. Карась<sup>1</sup>, П. А. Огарок<sup>2</sup>, А. М. Райгородский<sup>1,2,3,4,\*</sup>

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 23.03.2020 г.

Поступило 26.03.2020 г.

После доработки 15.05.2021 г.

Принято к публикации 16.05.2021 г.

Рассматривается вопрос о вероятностной версии классической проблемы экстремальной комбинаторики. Представлены обобщения на случай непостоянных параметров и на случай различных вероятностей ребра для теоремы устойчивости, утверждающей, что число независимости случайного подграфа графа  $G(n, r, < s)$  асимптотически не изменяется при независимом удалении ребер.

*Ключевые слова:* асимптотика, число независимости, случайный подграф, граф  $G(n, r, < s)$

**DOI:** 10.31857/S268695432104007X

### ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

В данном сообщении речь пойдет о вероятностной версии классической задачи экстремальной комбинаторики, изучение которой было инициировано более полувека назад П. Эрдешем, Ч. Ко и Р. Радо. В своей работе упомянутые авторы доказали следующую замечательную теорему.

**Теорема 1** (П. Эрдеш, Ч. Ко, Р. Радо). Пусть даны натуральные числа  $r$  и  $s$ ,  $s < r$ . Пусть  $\mathcal{R}_n = \{1, 2, \dots, n\}$  — множество из  $n$  элементов. Обозначим  $t(n, r, s)$  максимальную мощность такой совокупности  $r$ -элементных подмножеств множества  $\mathcal{R}_n$ , что любые два подмножества в этой совокупности имеют не менее  $s$  общих элементов (такая совокупность называется  $s$ -пересекающейся). Тогда найдется такое  $n_0(r, s)$ , что при всех  $n \geq n_0(r, s)$  выполнено  $t(n, r, s) = C_{n-s}^{r-s}$ .

Отметим, что оценка  $t(n, r, s) \geq C_{n-s}^{r-s}$  практически очевидна: достаточно зафиксировать какие-

либо  $s$  элементов  $v_1, v_2, \dots, v_s \in \mathcal{R}_n$  и рассмотреть все  $r$ -элементные подмножества, которые их содержат. В мировой литературе такую “тривиальную”  $s$ -пересекающуюся конструкцию принято называть звездой.

Ввиду своей исключительной значимости, результат теоремы 1 неоднократно обобщался и уточнялся. В частности, был получен ряд утверждений о своеобразной устойчивости результата Эрдеша–Ко–Радо. Ярким примером является, в первую очередь, так называемая граница Франкла, представленная последним в следующей формулировке.

**Теорема 2** (П. Франкл). Пусть даны натуральные числа  $r$  и  $s$ ,  $s < r$ . Пусть  $\mathcal{M}$  — произвольная  $s$ -пересекающаяся совокупность  $r$ -элементных подмножеств множества  $\mathcal{R}_n$ . Тогда найдется такое  $n_0(r, s)$ , что при всех  $n \geq n_0(r, s)$  либо  $\mathcal{M}$  — это часть некоторой звезды, либо мощность  $\mathcal{M}$  не превосходит величины

$$a) \quad (s+2)C_{n-s-2}^{r-s-1} + C_{n-s-2}^{r-s-2} = |\{V: |V|=r, |\{1, \dots, s+2\} \cap V| \geq s+1\}| \text{ при } r \leq 2s+1,$$

$$b) \quad \sum_{i=1}^{r-s} C_{r-s+1}^i C_{n-r-1}^{r-s-i} + s = |\{V: |V|=r, \{1, \dots, s\} \subset V, V \cap \{1+s, \dots, 1+r\} \neq \emptyset\} \cup \{\{1, \dots, s+1\} \setminus \{i\} : i \in \{1, \dots, s\}\}| \text{ при } r > 2s+1.$$

Важно сказать, что наименьшее  $n_0(r, s)$  было определено Франклом и Уилсоном для любых  $r, s$ :

$$n_0(r, s) = (r-s+1)(s+1).$$

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

<sup>3</sup> Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Майкоп, Республика Адыгея

<sup>4</sup> Бурятский государственный университет, Институт математики и информатики, Улан-Удэ, Россия

\*E-mail: mraigor@yandex.ru

О современном состоянии исследований в области см. [1]. Мы же перейдем к версии устойчивости, которая изучалась в серии недавних работ (см. [2–9]).

Рассмотрим граф  $G(n, r, < s) = (V(n, r), E(n, r, s))$ :

$$V(n, r) = \{A \subset \{1, 2, \dots, n\}: |A| = r\},$$

$$E(n, r, s) = \{\{A, B\}: |A \cap B| < s\}.$$

Напомним, что числом независимости  $\alpha(G)$  графа  $G$  называют размер максимального множества его вершин, попарно не соединенных ребрами (сами такие множества называются независимыми). Очевидно, что  $\alpha(G(n, r, < s)) = m(n, r, s)$ , а любая  $s$ -пересекающаяся совокупность  $r$ -элементных множеств взаимно однозначно отвечает некоторому независимому множеству вершин графа  $G(n, r, < s)$ . Графы такого типа активно изучаются в теории кодирования, в теории Рамсея, в теории гиперграфов, в комбинаторной геометрии (см. [10–24]).

Теперь введем понятие случайного подграфа графа  $G(n, r, < s)$ . Пусть  $p \in [0, 1]$ . Тогда  $G_p(n, r, < s)$  – это случайный элемент со значениями во множестве всех остовных подграфов  $G = (V(n, r), E)$  графа  $G(n, r, < s)$  и с биномиальным распределением:

$$\mathbb{P}(G_p(n, r, < s) = G) = p^{|E|}(1-p)^{|E(n, r, s)|-|E|}.$$

В работе [2] была доказана следующая теорема об устойчивости.

**Теорема 3** (М.М. Пядеркин, А.М. Райгородский). *Для любых фиксированных  $r$  и  $s$*

$$\mathbb{P}(\alpha(G_{1/2}(n, r, < s)) = C_{n-s}^{r-s}) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Нам удалось доказать аналогичное утверждение для неконстантных параметров  $r = r(n)$  и  $s = s(n)$ .

**Теорема 4.** *Утверждение теоремы 3 верно для  $r = r(n) \rightarrow \infty$ ,  $s = s(n) \rightarrow \infty$  при условии, что*

$$r = o\left(\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{3}}\right), \quad s = o(r).$$

Отметим, что в доказательстве теоремы 4 очень существенно используется теорема 2, в которой присутствует неупрощаемое условие  $(r-s+1)(s+1) < n$ . В частности, это условие означает, что  $r^2 < n$ . Таким образом, ограничение вида  $r^3 < xn$ , которое имеется по сути в теореме 4, вряд ли в рамках текущего метода удастся значительно ослабить. Иными словами, с точки зрения условий, теорема достаточно близка к оптимуму.

Также нам удалось перенести результат теоремы 3 на случай различных вероятностей ребра.

**Теорема 5.** *Справедливы следующие две асимптотики.*

1. *Для любых констант  $r$  и  $s$  таких, что  $r > s$  и  $r > 3$ , при вероятности сохранения ребра*

$$p \geq p_1(n) = \frac{2sC_r^s \ln n}{C_{n-s}^{r-s}}$$

*имеем*

$$\mathbb{P}(\alpha(G_p(n, r, < s)) = C_{n-s}^{r-s}) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

2. *Для любого  $\varepsilon > 0$  и для любых констант  $r$  и  $s$  таких, что  $r > s$ , при вероятности сохранения ребра*

$$p \leq p_2(n) = \frac{(1-\varepsilon)(r+s) \ln n}{C_{n-s}^{r-s}}$$

*имеем*

$$\mathbb{P}(\alpha(G_p(n, r, < s)) \leq C_{n-s}^{r-s} + 1) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

При текущих ограничениях на  $r$  и  $s$  (нет зависимости от  $n$ ) результат теоремы 5 практически неупрощаем.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Настоящая работа выполнена за счет гранта РФФИ (проект № 16-11-10014).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kupavskii A. Degree versions of theorems on intersecting families via stability // J. Comb. Theory Ser. A. 2019. V. 168. P. 272–287.
2. Pyaderkin M.M. On the chromatic number of random subgraphs of a certain distance graph // Discrete Applied Mathematics. 2019. V. 267. P. 209–214.
3. Пядёркин М.М. О пороговой вероятности для устойчивости независимых множеств в дистанционном графе // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 2. С. 280–294.
4. Деревянко Н.М., Киселев С.Г. Числа независимости случайных подграфов некоторого дистанционного графа // Пробл. передачи информ. 2017. Т. 53. № 4. С. 3–15.
5. Пядёркин М.М. Числа независимости случайных подграфов дистанционных графов // Матем. заметки. 2016. Т. 99. № 4. С. 564–573.
6. Пядёркин М.М. Числа независимости случайных подграфов некоторого дистанционного графа // Матем. заметки. 2016. Т. 99. № 2. С. 288–297.
7. Devlin Pat, Kahn Jeff. On “stability” in the Erdős–Kő–Rado Theorem // SIAM J. Discrete Math. 2016. V. 30. № 2. P. 1283–1289.
8. Das Shagnik, Tran Tuan. Removal and Stability for Erdős–Kő–Rado Theorem // SIAM J. Discrete Math. 2016. V. 30. Iss. 2.
9. Kupavskii A. On random subgraphs of Kneser and Schrijver graphs // J. Combinatorial Theory Ser. A. 2016. V. 30. Iss. 2.

10. *Kiselev S., Supavskii A.* Rainbow matchings in  $k$ -partite hypergraphs // *Bulletin of the London Mathematical Society*. 2021. V. 53. № 2. P. 360–369.
11. *Кунавский А.Б., Сагдеев А.А.* Теория Рамсея в пространстве с чебышёвской метрикой // *УМН*. 2020. Т. 75. № 5 (455). С. 191–192.
12. *Сагдеев А.А.* Об одной теореме Франкла–Уилсона // *Пробл. передачи информ.* 2019. Т. 55. № 4. С. 86–106.
13. *Sagdeev A. A.* On the Chromatic Numbers Corresponding to Exponentially Ramsey Sets // *J. Math. Sciences*. 2020. V. 247. № 3. P. 488–497.
14. *Шабанов Д.А., Шайхеева Т.М.* О предписанном хроматическом числе полных многодольных гиперграфов и кратных покрытиях независимыми множествами // *Матем. заметки*. 2020. Т. 107. № 3. С. 454–465.
15. *Semenov A., Shabanov D.* On the weak chromatic number of random hypergraphs // *Discrete Applied Mathematics*. 2020. V. 276. P. 134–154.
16. *Akhmejanova M.B., Shabanov D.A.* Equitable colorings of hypergraphs with few edges // *Discrete Applied Mathematics*. 2020. V. 276. P. 2–12.
17. *Пушняков Ф.А., Райгородский А.М.* Оценка числа ребер в особых подграфах некоторого дистанционного графа // *Матем. заметки*. 2020. Т. 107. № 2. С. 286–298.
18. *Пушняков Ф.А., Райгородский А.М.* Оценка числа ребер в подграфах графов Джонсона // *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления*. 2021. Т. 499. С. 40–43.

## ASYMPTOTIC OF THE INDEPENDENCE NUMBER OF A RANDOM SUBGRAPH OF THE GRAPH $G(n, r, < s)$

**V. S. Karas<sup>a</sup>, P. A. Ogarok<sup>b</sup>, and A. M. Raigorodskii<sup>a,b,c,d</sup>**

<sup>a</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

<sup>b</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),  
Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

<sup>c</sup>*Institute of Mathematics and Computer Science, Adygya State University,  
Maykop, Russian Federation*

<sup>d</sup>*Institute of Mathematics and Computer Science, Buryat State University,  
Ulan-Ude, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In this paper, we deal with a probabilistic version of a classical problem of extremal combinatorics. An extension to the case of non-constant parameters and to the case of different probabilities of edges is established for a stability theorem asserting that the independence number of a random subgraph of a graph  $G(n, r, < s)$  does not change asymptotically, provided the initial edges are destroyed independently.

*Keywords:* Asymptotic, the independence number, random subgraphs, graph  $G(n, r, < s)$

УДК 519.21+514.154

## СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОПЕРАТОРА КУПМАНА

© 2021 г. Академик РАН В. В. Козлов<sup>1,2,\*</sup>

Поступило 12.05.2021 г.

После доработки 12.05.2021 г.

Принято к публикации 19.05.2021 г.

Рассматривается оператор Купмана, который порождается обратимым преобразованием пространства с конечной счетно-аддитивной мерой. Если квадрат этого преобразования эргодичен, то ортогональный оператор Купмана будет симплектическим преобразованием на вещественном гильбертовом пространстве квадратично суммируемых функций с нулевым средним значением. Указан бесконечный набор квадратичных инвариантов оператора Купмана, которые находятся попарно в инволюции относительно соответствующей симплектической структуры. Для преобразований с дискретным спектром и лебеговским спектром эти квадратичные инварианты функционально независимы и образуют полный инволютивный набор, что свидетельствует о свойстве полной интегрируемости преобразования Купмана.

*Ключевые слова:* оператор Купмана, эргодичность, симплектическая структура, квадратичные инварианты, дискретный спектр, лебеговский спектр

DOI: 10.31857/S268695432104010X

### 1. ОПЕРАТОР КУПМАНА

Пусть  $(M, \mu)$  – пространство с конечной счетно-аддитивной мерой  $\mu$ , а  $T: M \rightarrow M$  – обратимое сохраняющее меру преобразование. Пусть  $L_2(M, \mu)$  – гильбертово пространство вещественных функций на  $M$ , интегрируемых по мере  $\mu$  со своим квадратом. Скалярное произведение функций  $f, g$  определяется по обычному правилу

$$(f, g) = \int_M f(x)g(x)d\mu(x).$$

Оператор Купмана  $U: L_2 \rightarrow L_2$  переводит функцию  $x \mapsto f(x)$  в функцию

$$x \mapsto f(T(x)).$$

Как известно, этот оператор ортогональный:

$$U^*U = UU^* = I, \quad (1)$$

или, что то же самое,  $U^{-1} = U^*$ . Ясно, что  $\lambda = 1$  всегда будет его собственным значением. Ненулевые постоянные функции на  $M$  будут соответствующими собственными векторами.

Для нас существенное значение имеет следствие (1): оператор  $U$  допускает квадратичный инвариант  $F = (f, f)$ . Другими словами,

$$(Uf, Uf) = (f, f) \quad \text{для всех } f \in L_2.$$

Далее в качестве иллюстрации будут рассматриваться два примера. Пусть  $M$  –  $n$ -мерный тор  $\mathbb{T}^n = \{x_1, \dots, x_n \bmod 2\pi\}$ , а  $\mu$  – стандартная мера Лебега на  $\mathbb{T}^n$ .

**Пример 1.**  $T: x \mapsto x + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ . В нерезонансном случае (когда соотношение  $(m, \alpha) = k$ ,  $m \in \mathbb{Z}^n$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  влечет  $m = 0$ ,  $k = 0$ ) отображение  $T$  эргодично (теорема Г. Вейля). Соответствующую дискретную динамическую систему часто называют каскадом Кронекера–Вейля.

**Пример 2.**  $T: x \mapsto Ax$ , где  $A$  – унимодулярная матрица с целочисленными элементами. Если ни одно из собственных значений  $A$  не лежит на единичной окружности комплексной плоскости, то отображение  $T$  заведомо будет перемешиванием. Классический пример:  $n = 2$  и

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следует иметь в виду, что для преобразований из примера 2 эргодичность эквивалентна перемешиванию.

<sup>1</sup> Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup> Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия

\*E-mail: kozlov@pran.ru

В примере 1 функции  $\varphi_m = \exp[i(m, x)]$ ,  $m \in \mathbb{Z}^n$ , являются собственными для соответствующего оператора Купмана:

$$U\varphi_m = \lambda_m \varphi_m, \quad \lambda_m = e^{i(m, \alpha)}.$$

Они составляют ортогональный базис в  $L_2(\mathbb{T}^n)$ . Это простое наблюдение подразумевает рассмотрение пространства квадратично интегрируемых функций с комплексными значениями. В вещественном случае оператор Купмана имеет двумерные инвариантные плоскости, натянутые на векторы  $\sin(m, x)$  и  $\cos(m, x)$  ( $m \neq 0$ ).

Если отображение  $T$  является перемешиванием (или даже слабым перемешиванием), то спектр оператора Купмана “непрерывный” (более точно, единственным собственным значением является  $\lambda = 1$  и это собственное значение простое).

Основные факты спектральной теории оператора Купмана содержатся, например, в [1, 2].

## 2. СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА

Перейдем к рассмотрению более общей ситуации. Пусть  $\mathcal{H}$  – вещественное гильбертово пространство (случай  $\dim \mathcal{H} < \infty$  не исключается) со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и  $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  – ортогональный оператор. Отображение  $x \mapsto Ux$ , очевидно, допускает квадратичный инвариант  $F(x) = (x, x)$ .

Введем оператор

$$\Omega = (U^* + I)(U - I). \tag{2}$$

С учетом условий ортогональности (1)

$$\Omega = U - U^*.$$

Следовательно,  $\Omega$  – кососамосопряженный оператор. Ввиду (1) его также можно представить в виде

$$\Omega = (U - I)(U^* + I) = -(U^* - I)(U + I). \tag{3}$$

Оператору (2) отвечает билинейная кососимметрическая форма

$$[x, y] = (\Omega x, y) = -(x, \Omega y). \tag{4}$$

Напомним, что эта форма называется невырожденной, если из  $[x, y] = 0$  для всех  $y \in \mathcal{H}$  вытекает, что  $x = 0$ . При условии невырожденности 2-форма (4) задает симплектическую структуру в  $\mathcal{H}$  (ее саму обычно называют симплектической структурой).

Как известно, спектр ортогонального преобразования лежит на единичной окружности. Из (2) и (3) вытекает вырожденность оператора  $\Omega$ , если  $\lambda = \pm 1$  является собственным значением оператора  $U$ . Отметим простое

**Предложение 1.** Если оператор  $U^2$  не имеет ненулевых собственных векторов с единичным собственным значением, то 2-форма  $[ \cdot, \cdot ]$  невырождена.

Действительно, пусть  $[ \cdot, \cdot ]$  вырождена и пусть  $(\Omega x, y) = 0$  для всех  $y \in \mathcal{H}$ . Тогда  $\Omega x = 0$  хотя бы для одного  $x \neq 0$ . Это означает, что  $Ux = U^{-1}x$ . Но это эквивалентно равенству  $U^2x = x$ .

**Теорема 1.** Оператор  $U$  сохраняет 2-форму  $[ \cdot, \cdot ]$ .

Надо доказать, что

$$U^* \Omega U = \Omega.$$

С учетом (1) левая часть равна

$$U^*(U - I)(U^* + I)U = (I - U^*)(I + U) = \Omega.$$

Что и требовалось.

Таким образом, если 2-форма  $[ \cdot, \cdot ]$  невырождена, то  $(\mathcal{H}, [ \cdot, \cdot ])$  – симплектическое пространство и (по теореме 1) оператор  $U$  будет симплектическим. В конечномерном случае этот факт отмечен в [3]. В частности,  $\dim \mathcal{H}$  четно.

Если  $U$  – оператор Купмана из п. 1, то 2-форма  $[ \cdot, \cdot ]$  вырождена: оператор  $U$  оставляет на месте постоянные функции. Чтобы поправить дело, надо рассмотреть гильбертово пространство  $\hat{L}_2 \subset L_2$ , ортогональное одномерному подпространству, состоящему из постоянных функций. Другими словами,  $\hat{L}_2$  составляют квадратично суммируемые функции с нулевым средним значением. Ясно, что оператор  $U$  отображает  $\hat{L}_2$  в  $\hat{L}_2$ .

В частности, справедливо

**Предложение 2.** Пусть отображение  $T^2: M \rightarrow M$  эргодично. Тогда 2-форма  $[ \cdot, \cdot ]$  невырождена на  $\hat{L}_2$ .

Действительно, тогда  $\lambda = 1$  является простым собственным значением соответствующего оператора Купмана  $U^2: L_2 \rightarrow L_2$ . Значит, оператор  $U^2$  в  $\hat{L}_2$  не имеет ненулевых собственных векторов с собственным значением  $\lambda = 1$ . Остается воспользоваться предложением 1.

Не стоит думать, что квадрат эргодического преобразования всегда эргодичен. Однако в двух примерах из п. 1 это заведомо так.

Итак, в общем случае (для каскадов с эргодическим квадратом) оператор Купмана  $U^2: \hat{L}_2 \rightarrow \hat{L}_2$  будет симплектическим оператором. Правда, инвариантная симплектическая структура зависит от этого оператора.

Хорошо известно, что вещественный ортогональный оператор, который одновременно является симплектическим преобразованием, будет унитарным оператором. Это означает, что в веще-

ственном  $\hat{L}_2$  можно ввести комплексную структуру так, что действие  $U$  будет эквивалентно действию унитарного оператора в комплексном пространстве  $\hat{L}_2$ . Такая конструкция особенно просто выглядит для операторов с дискретным спектром. Этот круг вопросов обсуждается в [4] для вещественных линейных систем дифференциальных уравнений с квадратичным инвариантом в гильбертовом пространстве с целью их представления в виде уравнения Шрёдингера.

3. КВАДРАТИЧНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Квадратичная форма  $(Bx, x)$ ,  $B^* = B$  – инвариант линейного отображения  $x \mapsto Ux$  тогда и только тогда, когда

$$U^*BU = B.$$

Оказывается, кроме исходного квадратичного инварианта (когда  $B = I$ ), это отображение допускает целую серию квадратичных инвариантов, которые находятся попарно в инволюции относительно симплектической структуры из п. 2.

Невырожденная кососимметрическая 2-форма  $[, ]$  позволяет ввести скобку Пуассона на векторном пространстве непрерывных квадратичных форм. Пусть

$$f = (Fx, x)/2 \quad \text{и} \quad g = (Gx, x)/2$$

суть две такие формы (самосопряженные операторы  $F$  и  $G$  ограничены). Их скобкой Пуассона  $\{f, g\}$  называется квадратичная форма

$$h = (Hx, x)/2, \quad \text{где} \quad H = F\Omega G - G\Omega F. \quad (5)$$

Оператор  $H$  (как и операторы  $F$  и  $G$ ) самосопряженный (симметрический и ограниченный). В частности, квадратичная форма  $h$  также будет непрерывной.

Скобка  $\{, \}$  билинейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби. В работах [5, 6] скобка Пуассона определяется при более общих предположениях.

Введем самосопряженные операторы

$$B_n = [(U + I)(U^* + I)]^n = (U + I)^n(U^* + I)^n, \quad n \geq 0.$$

Те о р е м а 2. *Непрерывные квадратичные формы*

$$F_n = (B_n x, x)/2 \quad (6)$$

*суть инварианты отображения  $x \mapsto Ux$ , причем*

$$\{F_k, F_l\} = 0 \quad (7)$$

*для всех  $k, l \geq 0$ .*

Для доказательства инвариантности  $F_n$  надо проверить равенство  $U^*B_nU = B_n$ , или

$$U^*(U + I)^n(U^* + I)^nU = (U + I)^n(U^* + I)^n. \quad (8)$$

Действительно, ввиду ортогональности  $U$ ,

$$U^*(U + I) = U^* + I, \quad (U^* + I)U = U + I.$$

Следовательно, левая часть (8) равна

$$\begin{aligned} & (U^* + I)(U + I)^{n-1}(U^* + I)^{n-1}(U + I) = \\ & = (U + I)^n(U^* + I)^n. \end{aligned}$$

Для доказательства инволютивности этих инвариантов надо проверить равенство

$$\begin{aligned} & [(U + I)(U^* + I)]^k(U^* + I)(U + I) \times \\ & \times [(U + I)(U^* + I)]^l = [(U + I)(U^* + I)]^l \times \\ & \times (U^* + I)(U + I)[(U + I)(U^* + I)]^k. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как операторы  $U^* + I$ ,  $U + I$  и  $U - I$  коммутируют между собой, то обе части равенства (9) симметричны относительно  $k$  и  $l$ . Что доказывает равенства (7).

Квадратичные инварианты  $F_n$  могут оказаться зависимыми. Вот простой пример: если  $U = I$ , то все они пропорциональны  $(x, x)$ .

Пусть  $N = \dim \mathcal{H}$  конечна и ортогональный оператор  $U$  не имеет собственных значений  $\lambda = \pm 1$ . Тогда  $N$  четно. Кроме того, как отмечено в [3], если среди собственных чисел оператора  $U$  нет кратных, то квадратичные формы  $F_1, \dots, F_{N/2}$  функционально независимы. Поскольку они находятся попарно в инволюции, то их непустые совместные уровни

$$\{x \in \mathcal{H}: F_1(x) = c_1, \dots, F_{N/2}(x) = c_{N/2}\}$$

для почти всех значений  $c_1, \dots, c_{N/2}$  будут торами размерности  $N/2$ , инвариантными относительно действия оператора  $U$ . Далее, на этих торах можно так ввести угловые координаты

$$\varphi_1, \dots, \varphi_{N/2} \quad \text{mod } 2\pi,$$

что действие оператора  $U$  сводится к отображению Кронекера–Вейля

$$\varphi_j \mapsto \varphi_j + \alpha_j, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{N/2} = \text{const}.$$

В силу линейности оператора  $U$  числа  $\{\alpha_j\}$  не меняются от тора к тору.

Отметим, что полная интегрируемость линейного симплектического отображения имеет место и без предположения о простоте спектра. Этот результат выводится из теории нормальных форм Вильямсона [7]. Однако в случае простого спектра полный набор инволютивных инвариантов предьявляется без предварительного решения алгебраической задачи о собственных значениях и собственных векторах симплектического оператора.

В бесконечномерном случае ситуация более сложная. Мы рассмотрим два (в определенном

смысле противоположных) случая, когда оператор  $U$  имеет простой дискретный спектр и когда его спектр непрерывный.

4. ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР

Хорошо известно, что спектр ортогонального оператора лежит на единичной окружности комплексной плоскости. Мы исключаем возможность наличия двух вещественных точек спектра  $\lambda = \pm 1$ .

Итак, пусть

$$U(\xi + i\eta) = (\alpha + i\beta)(\xi + i\eta), \tag{10}$$

где  $\xi, \eta$  – векторы из вещественного гильбертова пространства  $\mathcal{H}$ , а  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ . Равенство (10) эквивалентно двум вещественным соотношениям

$$U\xi = \alpha\xi - \beta\eta, \quad U\eta = \beta\xi + \alpha\eta.$$

Следовательно, вещественная плоскость  $\pi$ , натянутая на векторы  $\xi, \eta$ , будет инвариантной относительно действия ортогонального оператора  $U$ . Легко показать, что при этом

$$(\xi, \xi) = (\eta, \eta) \quad \text{и} \quad (\xi, \eta) = 0.$$

Так что можно считать векторы  $\xi$  и  $\eta$  единичной длины; они составляют ортонормированный базис на плоскости  $\pi$ .

Пусть

$$x = p\xi + q\eta, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

суть точки инвариантной плоскости  $\pi$  и  $x' = Ux = p'\xi + q'\eta$ . Тогда

$$p' = \alpha p + \beta q, \quad q' = -\beta p + \alpha q \tag{11}$$

суть ортогональное преобразование плоскости  $\pi$ ; это поворот на угол

$$\varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ясно, что линейное преобразование допускает квадратичный инвариант

$$p^2 + q^2. \tag{12}$$

Последнему наблюдению можно придать инвариантный смысл, если ввести оператор ортогонального проектирования  $P$  гильбертова пространства на плоскость  $\pi$ . Это ограниченный самосопряженный оператор:  $P^* = P$  и  $P^2 = P$ . Инвариант (12) представляется в следующем виде:

$$f = (Px, Px), \quad x \in \mathcal{H}.$$

Предположим теперь, что оператор  $U$  имеет бесконечно много различных собственных значений

$$\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2, \dots$$

с собственными векторами

$$\xi_1 + i\eta_1, \xi_2 + i\eta_2, \dots$$

Двумерные плоскости

$$\pi_n = \{x \in \mathcal{H}: x = p\xi_n + q\eta_n, p, q \in \mathbb{R}\}$$

снова будут инвариантными для оператора  $U$ . Можно показать, что плоскости  $\pi_k$  и  $\pi_l$  ортогональны, если, конечно,  $k \neq l$  (см., например, [6]).

Таким образом, в  $\mathcal{H}$  имеется ортонормированная система векторов

$$\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots \tag{13}$$

Кроме того, оператор  $U$  допускает бесконечно много квадратичных инвариантов

$$f_n = (P_n x, P_n x), \quad n \geq 1, \tag{14}$$

где  $P_n$  – оператор ортогонального проектирования на  $\pi_n$ .

С другой стороны, плоскости  $\pi_n$  инвариантны также относительно действия кососамосопряженного оператора  $\Omega$ . На инвариантной плоскости  $\pi_n$  он представляется кососимметрической матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & 2\beta_n \\ -2\beta_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Все эти матрицы невырождены, поскольку  $\beta_n \neq 0$ . В противном случае оператор  $U$  будет иметь собственные значения  $\pm 1$ .

**Теорема 3.** *Предположим, что ортонормированная система векторов (13) полна. Тогда*

а) *квадратичные формы (14) составляют полный набор независимых квадратичных инвариантов оператора  $U$ , находящихся попарно в инволюции относительно симплектической структуры в  $\mathcal{H}$ , которая задается кососамосопряженным оператором  $\Omega$ ,*

б) *совместные уровни этих инвариантов*

$$\left\{ x \in \mathcal{H}: f_n(x) = c_n, n \geq 1; c_n > 0 \text{ и } \sum c_j^2 < \infty \right\}$$

*будут бесконечномерными торами*

$$\mathbb{T}_c^\infty = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}_n^1,$$

в) *на этих торах можно выбрать угловые переменные  $\varphi_1, \varphi_2, \dots \bmod 2\pi$  так, что в этих переменных действие оператора  $U$  на  $\mathbb{T}_c^\infty$  задается формулами*

$$\varphi_n \mapsto \varphi_n + \varphi_n^0, \quad \text{tg} \varphi_n^0 = \frac{\beta_n}{\alpha_n}; \quad n \geq 1. \tag{15}$$

Это утверждение указывает на свойство полной интегрируемости отображения  $x \mapsto Ux$  (как и в конечномерном случае, о котором упоминалось в п. 3). Полнота семейства инволютивных инвариантов (14) означает, что к этому набору нельзя

добавить еще одну квадратичную форму, которая была бы независима от набора (14) и находилась бы с ними в инволюции. Отображение (15) — это бесконечномерный вариант отображения Кронекера–Вейля. Его свойства вполне аналогичны эргодическим свойствам непрерывных потоков Кронекера–Вейля на бесконечномерных торах (они обсуждаются в [8, 9]; там же можно найти дальнейшие ссылки).

## 5. ЛЕБЕГОВСКИЙ СПЕКТР

Случай непрерывного спектра более сложный. Ограничимся рассмотрением каскадов с так называемым лебеговским спектром. Сюда, в частности, относятся автоморфизмы тора из примера 2 (п. 1). Такие системы заведомо обладают перемешиванием. Для простоты ограничимся случаем однократного лебеговского спектра.

В этом случае в  $\mathcal{H} = \hat{L}_2$  имеется полный ортонормированный базис  $\{e_j\}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  такой, что

$$Ue_j = e_{j+1}. \quad (16)$$

В определенном смысле общий случай сводится к этому частному (см., например, [2]).

Пусть  $x = \sum p_j e_j$ ,  $\sum p_j^2 < \infty$ . Тогда

$$Ux = \sum p_j e_{j+1} = \sum p_{j-1} e_j.$$

Таким образом, если отождествить  $\mathcal{H}$  с  $l_2$  (пространство бесконечных в обе стороны последовательностей  $\{p_j\}$  с условием  $\sum p_j^2 < \infty$ ), то действие оператора  $U$  сводится к сдвигу элементов на единицу влево. При таком сдвиге, конечно, сохраняется скалярный квадрат  $F = \sum p_j^2$ . Теорема 2 дает бесконечный набор квадратичных инвариантов:

$$F_n = \sum p_{j-n} p_j + \sum p_{j+n} p_j. \quad (17)$$

Более точно, инварианты (6) сводятся к конечным линейным комбинациям квадратичных форм (17).

Далее,  $\Omega e_j = e_{j+1} - e_{j-1}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Значит,

$$\Omega x = \sum p_j \Omega e_j = \sum (p_{j-1} - p_{j+1}) e_j. \quad (18)$$

Соответствующая 2-форма  $[x, y] = (\Omega x, y)$  будет невырожденной. Действительно, пусть  $(\Omega x, y) = 0$  для всех  $y$ . Положим  $y = e_j$ . Тогда из (18) вытекает, что  $p_{j-1} = p_{j+1}$ . Следовательно, элементы вектора  $x$  с четными (нечетными) номерами равны между собой. Но тогда они все равны нулю, иначе будет расходиться ряд  $\sum p_j^2$ . Поэтому  $x = 0$ .

Значит, кососамосопряженный оператор  $\Omega$  задает симплектическую структуру в  $\mathcal{H} = \hat{L}_2$ . Из формулы (18) вытекает инвариантность этой структуры относительно преобразования  $U$ . Из теоремы 2

также следует инволютивность квадратичных инвариантов (17) относительно скобки Пуассона, порожденной этой симплектической структурой.

Нетрудно показать, что квадратичные формы  $F_0, F_1, F_2, \dots$  независимы: их градиенты (как векторы из  $\mathcal{H}$ ) линейно независимы (хотя бы в одной точке  $\mathcal{H}$ ). Далее, можно показать, что любая непрерывная квадратичная форма на  $\mathcal{H}$ , инвариантная относительно действия оператора  $U$ , представляется в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n F_n$$

с некоторыми постоянными  $\alpha_n$ ,  $n \geq 0$ . Все это свидетельствует о свойстве полной интегрируемости оператора Купмана для систем с лебеговским спектром. Однако вопрос о строении совместных уровней квадратичных инвариантов (17) остается открытым. Сводится ли действие оператора Купмана на этих бесконечномерных многообразиях к отображению Кронекера–Вейля?

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 21-71-30011).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Халмош П.П. Лекции по эргодической теории. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. Арнольд В.И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999.
3. Козлов В.В. // ДАН. 2017. Т. 477. № 6. С. 646–648.
4. Козлов В.В. // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 496. № 1. С. 48–52.
5. Трещёв Д.В., Шкаликов А.А. // Матем. заметки. 2017. Т. 101. № 6. С. 911–918.
6. Козлов В.В. // УМН. 2020. Т. 75. № 3. С. 55–106.
7. Williamson J. // Amer. J. Math. 1936. V. 58. № 1. P. 141–163.
8. Klimek S., Leśniewski A. Ergodic theorems for quantum Kronecker flows / Perspectives of quantization South Hadly, MA, 1996 Amer. Math. Soc. Providence, RI 1998 P. 71–80.
9. Kozlov V.V. // Russian Journal of Math. Physics. 2021. V. 28. № 1. P. 74–84

**THE SYMPLECTIC GEOMETRY OF THE KOOPMAN OPERATOR****Academician of the RAS V. V. Kozlov<sup>a,b</sup>**<sup>a</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*<sup>b</sup> *P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation*

We consider the Koopman operator, which is generated by an invertible transformation of a space with a finite countably additive measure. If the square of this transformation is ergodic, then the orthogonal Koopman operator will be a symplectic transformation on the real Hilbert space of quadratically summable functions with zero mean value. An infinite set of quadratic invariants of the Koopman operator, which are pairwise in the involution with respect to the corresponding symplectic structure, is specified. For transformations with a discrete spectrum and a Lebesgue spectrum, these quadratic invariants are functionally independent and form a complete involutive set, which indicates that the Koopman transform has the property of complete integrability.

*Keywords:* Koopman operator, ergodicity, symplectic structure, quadratic invariants, discrete spectrum, Lebesgue spectrum

УДК 510.6

## ОБ ОДНОМ УСИЛЕНИИ ТЕОРЕМЫ О НЕИЗОМОРФИЗМЕ АЛГЕБР ДОКАЗУЕМОСТИ

© 2021 г. Е. А. Колмаков<sup>1,2,\*</sup>

Представлено академиком РАН Л.Д. Беклемишевым 28.04.2021 г.

Поступило 29.04.2021 г.

После доработки 29.04.2021 г.

Принято к публикации 15.05.2021 г.

Мы получаем усиление теоремы В.Ю. Шаврукова о неизоморфизме алгебр доказуемости двух  $\Sigma_1$ -корректных теорий, основываясь на результатах, полученных Г. Адамссоном. Усиленное достаточное условие неизоморфизма позволяет построить новые примеры пар теорий с неизоморфными алгебрами. В частности, мы доказываем отсутствие эпиморфизмов из алгебры  $(\mathcal{L}_T, \square_T)$  на алгебру  $(\mathcal{L}_T, \square_T)$ .

*Ключевые слова:* предикат доказуемости, алгебра доказуемости, принцип рефлексии

DOI: 10.31857/S2686954321040081

Эквациональный класс алгебр Магари был введен Р. Магари [5] для изучения понятия доказуемости в данной формальной теории в более общем алгебраическом контексте. Алгебра Магари — это булева алгебра  $(\mathcal{B}, \square)$  с унарным оператором  $\square$ , которая удовлетворяет следующим тождествам:  $\square(a \rightarrow b) \rightarrow (\square a \rightarrow \square b) = \top$ ,  $\square(\square a \rightarrow a) \rightarrow \square a = \top$  и  $\square \top = \top$ , где  $\top$  есть единица алгебры  $\mathcal{B}$ .

С данной формальной теорией  $T$  (в рамках которой можно выразить синтаксические понятия, связанные с языком этой теории, и, в частности, понятие доказуемости) можно связать конкретную алгебру Магари  $\mathcal{D}_T$ , называемую алгеброй доказуемости теории  $T$ , которая определяется как  $(\mathcal{L}_T, \square_T)$ , где  $\mathcal{L}_T$  есть алгебра Линденбаума теории  $T$ , а  $\square_T$  есть унарный оператор, индуцируемый предикатом доказуемости  $\text{Pr}_T(x)$  в теории  $T$ , т.е. формулой в языке теории  $T$ , выражающей, что формула с гёделевым номером  $x$  является теоремой теории  $T$ , следующим образом

$$\square_T[\varphi]_{\sim_T} = [\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)]_{\sim_T},$$

где  $\varphi \sim_T \psi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ .

Формальное изучение понятия доказуемости как оператора (или модальности) традиционно относят к области, известной как логика доказуе-

мости. Алгебры доказуемости позволяют взглянуть на вопросы, изучаемые в рамках этой области, с алгебраической точки зрения. Одним из центральных результатов в логике доказуемости является знаменитая теорема Р. Соловея об арифметической полноте [11], которая может быть переформулирована на алгебраическом языке следующим образом: для каждой  $\Sigma_1$ -корректной теории  $T$  эквациональная теория алгебры  $\mathcal{D}_T$  аксиоматизируется пропозициональной модальной логикой Гёделя–Лёба GL.

Наиболее сильные результаты об алгебрах доказуемости формальных теорий были получены В.Ю. Шавруковым [7–10]. Среди них неарифметичность полной первопорядковой теории  $\text{Th}(\mathcal{D}_T)$  алгебры доказуемости любой  $\Sigma_1$ -корректной теории  $T$  и неразрешимость ее  $\forall^* \exists^* \forall^* \exists^*$ -фрагмента, полное описание рекурсивно перечислимых подалгебр  $\mathcal{D}_T$  (впоследствии Д. Замбелла распространил этот результат на произвольные подалгебры), существование нетривиальных автоморфизмов алгебры  $\mathcal{D}_T$ . Шавруковым также были получены несколько важных результатов об изоморфизмах алгебр доказуемости [7, 9]. Именно эти результаты, формулируемые ниже, являются объектом исследований данной работы.

Первый из них — это достаточное условие отсутствия элементарной эквивалентности (а значит, и изоморфизма) алгебр доказуемости двух  $\Sigma_1$ -корректных теорий (см. [7] и [10, Theorem 2.11]). В частности, отсюда вытекает неизоморфизм алгебр доказуемости арифметики Пеано и теории множеств Цермело–Френкеля.

<sup>1</sup> Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: kolmakov-ea@yandex.ru

**Теорема 1.** *Если теория  $T$  доказывает схему  $\text{RFN}_{\Sigma_1}(S)$  равномерной  $\Sigma_1$ -рефлексии для теории  $S$ , то  $\mathcal{D}_T \not\equiv \mathcal{D}_S$ . Более того, в этом случае  $\mathcal{D}_T$  и  $\mathcal{D}_S$  не являются элементарно эквивалентными.*

Отметим, что в силу результата Крипке и Пур-Эль [6] для достаточно широкого класса теорий  $T$  и  $S$  алгебры Линденбаума  $\mathcal{L}_T$  и  $\mathcal{L}_S$  рекурсивно изоморфны. Второй важный результат Шаврукова [9] – это достаточное условие существования (рекурсивного) изоморфизма между  $\mathcal{D}_T$  и  $\mathcal{D}_S$ , точную формулировку которого мы здесь не приводим.

Впоследствии Г. Адамссон усилил теорему 1 и получил следующий результат [1] (мы приводим другую, но, в силу результатов [1, Theorem 17], эквивалентную формулировку). Здесь  $\mathcal{R}_T(x)$  есть функция  $\Sigma_1$ -рефлексии теории  $T$ , которая определяется следующим образом. Значение  $\mathcal{R}_T(x)$  есть наименьшая верхняя граница для минимальных свидетелей  $\Sigma_1$ -предложений, которые доказуемы в  $T$  доказательствами с гёделевыми номерами, не превосходящими  $x$ .

**Теорема 2.** *Если существует эпиморфизм из  $\mathcal{D}_T$  на  $\mathcal{D}_S$ , то существует элементарная функция  $t(x)$  такая, что неравенство*

$$\mathcal{R}_T(n) \leq t(\mathcal{R}_S^{(4)}(n))$$

*имеет место для бесконечно многих  $n \in \mathbb{N}$ .*

Отметим, что это усиливает теорему Шаврукова о неизоморфизме в двух направлениях. Во-первых, ослаблено само достаточное условие неизоморфизма, что позволило построить примеры, демонстрирующие, что алгебра  $\mathcal{D}_T$  действительно зависит от конкретного выбора предиката доказуемости для теории  $T$ . В частности, Адамссон установил [1, Corollary 21], что  $(\mathcal{L}_{T, \square_T}) \not\equiv (\mathcal{L}_{T, \square_T^{(6)}})$ , где  $\square_T^{(6)}$  есть 6-кратная итерация оператора  $\square_T$ . Во-вторых, это условие гарантирует отсутствие эпиморфизма (а не просто изоморфизма). В своей работе Адамссон отмечает, что полученное им условие не является оптимальным и возможны более точные оценки.

Настоящая работа является продолжением исследований в этом направлении. Наш основной результат (теорема 3) усиливает приведенный выше результат Адамссона. Мы доказываем несколько свойств функции рефлексии  $\mathcal{R}_T(x)$  для теории  $T$ , которые затем используются для получения более точных оценок в условии неизоморфизма, а также вводим классы функций  $\mathcal{F}_T^k(U)$ , которые являются обобщениями класса доказуемо тотальных вычислимых функций  $\mathcal{F}(T)$  и позволяют обобщить основной результат. Используя усиленный результат о неизоморфизме, мы дока-

зываем  $(\mathcal{L}_{T, \square_T}) \not\equiv (\mathcal{L}_{T, \square_T \square_T})$ , что подтверждает одну из гипотез из работы [1], а также получаем серию новых примеров пар теорий с неизоморфными алгебрами доказуемости, но совпадающими классами доказуемо тотальных вычислимых функций.

В настоящей работе мы рассматриваем теории первого порядка в языке арифметики. Базовой арифметической теорией является элементарная арифметика EA, т.е. теория первого порядка в языке  $0, (\cdot)', +, \times$ , расширенном одноместным функциональным символом  $\text{exp}$  для функции  $2^x$ . Теория EA задается стандартным набором аксиом, определяющих эти символы, и схемой индукции для всех элементарных формул (или  $\Delta_0(\text{exp})$ -формул), т.е. формул в языке с экспонентой, все входящие кванторы в которые ограничены термами в этом языке. Через  $\text{EA}^+$  обозначается теория, расширяющая EA аксиомой, выражающей тотальность суперэкспоненциальной функции  $2^x$ . Классы арифметической иерархии  $\Sigma_n$  и  $\Pi_n$  в чисто арифметическом языке без экспоненты рекурсивно определяются стандартным образом для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Для заданного класса формул  $\Gamma$  две теории  $T$  и  $S$  называются  $\Gamma$ -эквивалентными, если они доказывают одни и те же формулы из  $\Gamma$ .

Мы предполагаем фиксированной стандартную арифметизацию синтаксиса. В частности,  $\ulcorner \varphi \urcorner$  обозначает гёделев номер формулы  $\varphi$ . Все теории, рассматриваемые в этой работе, предполагаются элементарно аксиоматизируемыми  $\Sigma_1$ -корректными расширениями теории EA. Напомним, что  $\Sigma_1$ -корректность означает истинность любого  $\Sigma_1$ -предложения, доказуемого в  $T$ . Каждая теория  $T$  задается элементарной формулой  $\sigma_T(x)$ , определяющей множество (гёделевых номеров) аксиом теории  $T$  в стандартной модели арифметики  $\mathbb{N}$ . Эта формула используется в построении (упомянутых выше) стандартного предиката доказательства  $\text{Prf}_T(p, x)$  и связанного с ним предиката доказуемости  $\exists p \text{Prf}_T(p, x)$ , который мы обозначаем через  $\square_T(x)$ . Конечные итерации предиката  $\square_T$  обозначаются через  $\square_T^{(k)}$ . Стандартный предикат доказуемости  $\square_T$  удовлетворяет условиям Лёба и обладает свойством доказуемой  $\Sigma_1$ -полноты, что гарантирует истинность тождеств, задающих класс алгебр Магари, в определенной выше алгебре доказуемости  $\mathcal{D}_T$  (см. [4]).

Среди расширений заданной теории  $T$  мы рассматриваем так называемые схемы рефлексии. Схема локальной  $\Gamma$ -рефлексии  $\text{Rfn}_\Gamma(T)$  задается множеством формул вида  $\square_T \gamma \rightarrow \gamma$ , для каждого предложения  $\gamma \in \Gamma$ . Схема равномерной  $\Gamma$ -рефлексии  $\text{RFN}_\Gamma(T)$  задается множеством формул

вида  $\forall x(\Box_T \gamma(x) \rightarrow \gamma(x))$ , для каждой формулы  $\gamma \in \Gamma$ . Обычно класс  $\Gamma$  есть один из классов арифметической иерархии.

Функция  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  называется доказуемо тотальной вычислимой функцией в теории  $T$ , если существует  $\Sigma_1$ -формула  $\psi(x_1, \dots, x_k, y)$ , определяющая график функции  $f$  в стандартной модели, такая, что

$$T \vdash \forall x_1 \dots \forall x_k \exists y \psi(x_1, \dots, x_k, y).$$

Класс доказуемо тотальных вычислимых функций теории  $T$  обозначается через  $\mathcal{F}(T)$ . Известно, что  $\mathcal{F}(EA) = \mathcal{E}_3$  есть класс функций элементарных по Кальмару. Будем говорить, что функция  $g(x)$  мажорирует функцию  $f(x)$ , если неравенство  $f(n) > g(n)$  выполнено только для конечного множества натуральных чисел  $n \in \mathbb{N}$ . Выражение  $f^{(n)}(x)$  обозначает  $n$ -кратную композицию функции  $f(x)$  с собой, и  $f^{(0)}(x) = x$ .

В работе [1] вводится несколько функций, связанных с “ускорением” доказательств при добавлении к теории  $T$  некоторых допустимых правил вывода (и других принципов), например, правила Париха (из  $\Box_T \psi$  вывести  $\psi$ ), и доказывается, что они имеют одинаковую скорость роста. В исходной формулировке теоремы 2 фигурирует другая функция, но как было упомянуто выше, использование функции  $\Sigma_1$ -рефлексии  $\mathcal{R}_T(x)$  приводит к эквивалентной формулировке.

Поскольку теория  $T$  является  $\Sigma_1$ -корректной, функция  $\mathcal{R}_T(x)$  тотальна и вычислима. Как отмечается в [1], функция  $\mathcal{R}_T(x)$  близка к тому, чтобы быть доказуемо тотальной вычислимой функцией теории  $T$ , хотя и не является таковой (см. утверждение 1). Определение следующих классов функций  $\mathcal{F}_T^k(U)$  базируется на этом наблюдении. Обозначим через  $\mathcal{F}_T(U)$  класс всех функций  $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  таких, что

$$U \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \Box_T (\exists y \psi_f(x_1, \dots, x_n, y)),$$

для некоторой  $\Sigma_1$ -формулы  $\psi_f(x_1, \dots, x_n, y)$ , определяющей график функции  $f$  в стандартной модели. Аналогично определяются классы  $\mathcal{F}_T^k(U)$  при  $k \geq 1$ , где используется итерированный предикат доказуемости  $\Box_T^{(k)}$  вместо  $\Box_T$ . Мы также пишем  $\Box_T^{(0)} \psi(x)$  вместо  $\psi(x)$ , хотя  $\Box_T^{(0)}(x)$ , вообще говоря, не является формулой. Тогда естественно определить  $\mathcal{F}_T^0(U)$  как  $\mathcal{F}(U)$ . В силу доказуемой  $\Sigma_1$ -полноты имеют место следующие включения:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U) &= \mathcal{F}_T^0(U) \subseteq \mathcal{F}_T^1(U) \subseteq \\ &\subseteq \mathcal{F}_T^2(U) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}(U + \text{RFN}_{\Sigma_1}(T)), \end{aligned}$$

а также  $\mathcal{F}(T) \subseteq \mathcal{F}_T(EA)$ , поскольку  $EA \vdash \Box_T \forall x \psi(x) \rightarrow \forall x \Box_T \psi(x)$ . Таким образом, мы получаем расширяющуюся цепочку классов, которые, вообще говоря, не замкнуты относительно суперпозиции (в отличие от класса  $\mathcal{F}(U)$  доказуемо тотальных вычислимых функций). Однако имеет место следующее свойство замкнутости.

**Лемма 1.** Если теория  $T$  содержит  $U$ , то для всех  $F(x) \in \mathcal{F}_T^m(U)$  и  $G(x) \in \mathcal{F}_T^n(U)$  имеет место  $G(F(x)) \in \mathcal{F}_T^{m+n}(U)$  для всех  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Следующее утверждение является переформулировкой упомянутого выше утверждения про функцию  $\mathcal{R}_T(x)$ , доказанного в [1].

**Утверждение 1.** Для всех  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{R}_T^{(k)}(x) \in \mathcal{F}_T^k(EA)$ .

Ниже мы приводим без доказательства несколько фактов о свойствах функции рефлексии  $\mathcal{R}_T(x)$  и о классах  $\mathcal{F}_T^k(U)$ , которые используются в доказательстве основной теоремы настоящей работы для получения более точных оценок в условии неизоморфизма Адамссона.

**Лемма 2.** Существует строго монотонная элементарная функция  $v(x)$  такая, что для всех  $\psi$ ,  $\chi$  и  $n \in \mathbb{N}$ , если существует  $S$ -вывод формулы  $\Box_S \psi \vee \Box_S \chi$  с гёделевым номером, не превосходящим  $n$ , то либо существует  $S$ -вывод  $\psi$ , либо существует  $S$ -вывод  $\chi$  с гёделевым номером, не превосходящим  $\mathcal{R}_S(v(n))$ .

**Лемма 3.** Существует элементарная функция  $w(x, y)$  такая, что для любой  $f(x) \in \mathcal{F}(T)$  существует  $c \in \mathbb{N}$  такое, что  $f(\mathcal{R}_S(n)) \leq \mathcal{R}_S(w(c, n))$  имеет место для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

**Следствие 1.** Существует строго монотонная элементарная функция  $h(x)$  такая, что для любых  $k \in \mathbb{N}$  и  $f(x) \in \mathcal{F}(T)$  неравенство

$$f(\mathcal{R}_S^{(k+1)}(n)) \leq \mathcal{R}_S^{(k+1)}(h(n))$$

выполнено для почти всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Следующая теорема является основным результатом нашей работы и усиливает теорему 2.

**Теорема 3.** Пусть  $T$  и  $S$  – теории со стандартными предикатами доказуемости  $\Box_T$  и  $\Box_S$ . Если существует эпиморфизм алгебры  $\mathcal{D}_T$  на алгебру  $\mathcal{D}_S$ , то существует элементарная функция  $q(x)$  такая, что для всех  $k \in \mathbb{N}$  и для любой функции  $F(x) \in \mathcal{F}_T^k(T)$  неравенство  $F(n) \leq \mathcal{R}_S^{(k+1)}(q(n))$  выполнено для бесконечно многих  $n \in \mathbb{N}$ .

Мы не приводим здесь доказательства этой теоремы. Отметим лишь, что оно во многом следует доказательству Адамссона [1] (которое, в свою очередь, следует исходному доказательству Шаврукова [7]), а сформулированные выше леммы позволяют получить более точные оценки и более общий результат. Теорема 3 дает несколько достаточных условий неизоморфизма алгебр доказуемости, которые приводятся ниже.

**Следствие 2.** Каждое из следующих условий влечет отсутствие эпиморфизмов из  $\mathfrak{D}_T$  на  $\mathfrak{D}_S$ :

- (i)  $\mathcal{R}_S^{(k+1)}(x) \in \mathcal{F}_T^k(T)$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}$ ;
- (ii)  $\mathcal{F}_S^{k+1}(EA) \subseteq \mathcal{F}_T^k(T)$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}$ ;
- (iii)  $T \vdash \forall \sigma \in \Sigma_1(\Box_S^{(k+1)}\sigma \rightarrow \Box_T^{(k)}\sigma)$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}$ .

Отметим, что пункты (ii) и (iii) этого следствия также применимы к алгебрам для теорий с нестандартными предикатами доказуемости (например,  $\Box_T \Box_T$ ) при условии, что эти предикаты могут быть заменены стандартными предикатами, которые эквивалентны исходным, и эта эквивалентность доказуема в теории EA.

Рассмотрим несколько применений теоремы 3 для получения новых примеров пар теорий с неизоморфными алгебрами. Для доказательства неизоморфизма (и отсутствия эпиморфизмов) мы будем пользоваться следствием 2 и замечанием относительно нестандартных предикатов доказуемости, приведенным выше.

**Следствие 3.** Для всех  $n, m \in \mathbb{N}$ , если  $n > m \geq 1$ , то не существует эпиморфизма из  $(\mathcal{R}_{T, \Box_T}^{(n)})$  на  $(\mathcal{R}_{T, \Box_T}^{(m)})$ .

**Доказательство.** В силу доказуемой  $\Sigma_1$ -полноты и  $m+1 \leq n$ , в EA выводимо  $\forall \sigma \in \Sigma_1(\Box^{(m+1)m}\sigma \rightarrow \Box_T^{(m-n)}\sigma)$ , откуда, в силу пункта (iii) следствия 2 при  $k = m$  и возможности заменить итерированные предикаты доказуемости на EA-эквивалентные стандартные предикаты, вытекает требуемый результат.

В частности, при  $n = 2, m = 1$  мы получаем, что не существует эпиморфизма из алгебры  $(\mathcal{R}_{T, \Box_T \Box_T})$  на алгебру  $(\mathcal{R}_{T, \Box_T})$ , что подтверждает гипотезу из [1].

Хотя достаточное условие Шаврукова из теоремы 1 строго сильнее условия из теоремы 2, оно имеет более теоретико-доказательственную форму, и поэтому более удобно при применении к конкретным парам теорий. Применение условия Адамссона требует более тщательного анализа длины доказательств  $\Sigma_1$ -предложений в рассматриваемых теориях для получения точных оценок на скорость роста функций  $\mathcal{R}_T(x)$  и  $\mathcal{R}_S(x)$ , но оно также позволяет получить новые примеры неизо-

морфизма в тех случаях, когда теорема 1 не применима.

Следующая теорема (вместе с пунктом (iii) следствия 2) показывает, что условие Шаврукова может быть существенно ослаблено с сохранением его теоретико-доказательственной формы.

**Теорема 4.** Если теория  $T$  доказывает схему  $\text{Rfn}_{\Sigma_1}(S)$  и этот факт формализуется в виде  $T \vdash \forall \sigma \in \Sigma_1(\Box_S\sigma \rightarrow \sigma)$ , то не существует эпиморфизма из  $\mathfrak{D}_T$  на  $\mathfrak{D}_S$ .

**Доказательство.** Применяя данное в формулировке теоремы условие и доказуемую  $\Sigma_1$ -полноту, получаем  $T \vdash \forall \sigma \in \Sigma_1(\Box_S\Box_S\sigma \rightarrow \Box_T\sigma)$ . Требуемый результат тогда вытекает из пункта (iii) следствия 2 при  $k = 1$ .

Как следствие доказанной теоремы мы получаем семейство пар теорий с одинаковыми классами доказуемо тотальных вычислимых функций, но неизоморфными алгебрами доказуемости.

**Следствие 4.** Ни для какого  $n \geq 1$  не существует эпиморфизма из  $\mathfrak{D}_U$  на  $(\mathcal{R}_{T, \Box_T}^{(n)})$ , где  $U$  есть теория  $T + \text{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$ .

Следующее утверждение дает другой пример подобного рода. Оно вытекает из следствия 4 и теоремы об изоморфизме [9] (с использованием результатов [3, Proposition 5.4] и [2, Corollary 5.2]).

**Утверждение 2.** Для теорий  $U = EA^+$ ,  $S = U + \text{Rfn}_{\Sigma_1}(U)$  и  $T = U + \text{RFN}_{\Sigma_1}(U)$  имеет место  $\mathfrak{D}_U \not\cong \mathfrak{D}_S \cong \mathfrak{D}_T$ , но  $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(S) \neq \mathcal{F}(T)$ .

Отметим, что во всех рассмотренных примерах теорий с неизоморфными алгебрами, теории не были доказуемо равнонепротиворечивыми. Следующая теорема дает естественный пример семейства доказуемо  $\Pi_1$ -эквивалентных (а значит, и равнопротиворечивых) теорий с неизоморфными алгебрами. Напомним, что теория  $T_\omega$  есть расширение теории  $T$  утверждениями  $\neg \Box_T^{(n)} \perp$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . По теореме Горячева теории  $T_\omega$  и  $T + \text{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$  являются  $\Pi_1$ -эквивалентными, и этот факт доказуем в EA (см. [3, Proposition 6.1]).

**Теорема 5.** Не существует эпиморфизма из  $\mathfrak{D}_U$  на  $\mathfrak{D}_{T_\omega}$ , где  $U$  есть теория  $T + \text{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$ .

**Доказательство.** Воспользуемся пунктом (i) следствия 2. В силу утверждения 1 имеем  $\mathcal{R}_{T_\omega}(x) \in \mathcal{F}_{T_\omega}(EA) = \mathcal{F}_T(EA)$ , где равенство имеет место, поскольку  $T_\omega$  есть  $\Pi_1$ -расширение теории  $T$ . Откуда, в силу леммы 1, получаем  $\mathcal{R}_{T_\omega}^{(2)}(x) \in \mathcal{F}_T^2(EA) \subseteq \mathcal{F}_U(U)$ , где включение вытекает из доказуемости в EA предложения  $\forall \sigma \in \Sigma_1(\Box_T\Box_T\sigma \rightarrow \Box_U\sigma)$ .

## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность академику РАН Л. Д. Беклемишеву за поддержку и внимание к работе.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90050.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adamsson G.* Diagonalizable Algebras and the Length of Proofs // *Magister-uppsats, Göteborgs universitet/Institutionen för filosofi, lingvistik och vetenskapsteori.* 2011.
2. *Beklemishev L.D.* A Proof-theoretic Analysis of Collection // *Arch. Math. Logic.* 1998. V. 37. P. 275–296.
3. *Beklemishev L.D.* Proof-theoretic Analysis by Iterated Reflection // *Arch. Math. Logic.* 2003. V. 42. P. 515–552.
4. *Беклемишев Л.Д.* Схемы рефлексии и алгебры доказуемости в формальной арифметике // *УМН.* 2005. Т. 60. № 2. С. 3–78.
5. *Magari R.* The Diagonalizable Algebras (the Algebraization of the Theories Which Express Theor.: II) // *Boll. d. Unione Matem. Ital.* 1975. Suppl. fasc. 3. V. 4. № 12. P. 117–125.
6. *Pour-El M.B., Kripke S.* Deduction-preserving “Recursive Isomorphisms” Between Theories // *Fund. Math.* 1967. V. 61. P. 141–163.
7. *Shavrukov V.Yu.* A note on the diagonalizable algebras of PA and ZF // *Ann. Pure Appl. Logic.* 1993. V. 61. P. 161–173.
8. *Shavrukov V.Yu.* Subalgebras of diagonalizable algebras of theories containing arithmetic // *Diss. Math.* 1993. V. 323.
9. *Shavrukov V.Yu.* Isomorphisms of diagonalizable algebras // *Theoria.* 1997. V. 63. № 3. P. 210–221.
10. *Shavrukov V.Yu.* Undecidability in diagonalizable algebras // *J. Symbolic Logic.* 1997. V. 62. № 1. P. 79–116.
11. *Solovay R.M.* Provability interpretations of modal logic // *Isr. J. Math.* 1976. V. 25. P. 287–304.

## ON A STRENGTHENING OF THE NON-ISOMORPHISM THEOREM FOR PROVABILITY ALGEBRAS

**E. A. Kolmakov<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS L.D. Beklemishev

We prove a strengthened version of V. Shavrukov’s result on the non-isomorphism of provability algebras of two  $\Sigma_1$ -sound theories, based on the improvements previously discovered by G. Adamsson. We then obtain several corollaries to the strengthened result by applying it to various pairs of theories and obtain new non-isomorphism examples. In particular, we show that there are no epimorphisms from  $(\mathfrak{L}_T, \Box_T \Box_T)$  onto  $(\mathfrak{L}_T, \Box_T)$ .

*Keywords:* provability predicate, provability algebra, reflection principle

УДК 517.9

## О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ПОЛОСЕ

© 2021 г. В. А. Костин<sup>1,\*</sup>, Д. В. Костин<sup>1,2,\*\*</sup>, А. В. Костин<sup>1</sup>

Представлено академиком РАН В.П. Масловым 30.03.2021 г.

Поступило 27.04.2021 г.

После доработки 04.06.2021 г.

Принято к публикации 15.06.2021 г.

В рамках теории операторных косинус-функций и ее приложения находится решение и устанавливается корректная разрешимость граничной задачи Дирихле для обобщенного уравнения Гельмгольца в полосе. Устанавливается критическая ширина полосы в зависимости от граничных условий. Применение этого результата к задаче по распространению тепла в двугранном углу позволяет определить угол корректности этой задачи и указать закон распространения тепла в рассматриваемой области.

*Ключевые слова:* сильно непрерывные косинус-функции и полугруппы преобразований, краевые задачи, корректная разрешимость

DOI: 10.31857/S2686954321040093

Как известно [1–3], уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \beta u(x, t) = 0, \quad (1)$$

$\beta \in R = (-\infty, \infty)$ ,  $x, t \in R \times R$ , называется в математической физике уравнением Гельмгольца.

Уравнение (1) занимает важное место в изучении физических процессов, причем в их описании существенную роль играет знак параметра  $\beta$ . Так, диффузии с реакцией распада молекул газа соответствует  $\beta < 0$ . Случаю  $\beta > 0$  соответствует процесс с наличием размножения диффузионных частиц.

С математической точки зрения свойства решения уравнений (1) также существенно зависят от знака  $\beta$  при постановке краевых задач. Так, при  $\beta \leq 0$  имеет место однозначная разрешимость уравнения (1) в классе непрерывных в замкнутой области  $\Omega + \Sigma$  функций, принимающих на границе  $\Sigma$  заданное значение  $u|_{\Sigma} = u_{\Sigma}$ . Если же  $\beta > 0$ , то единственности может не быть. Этот факт приводит к задаче определения размеров области  $\Omega$  (см. [1, с. 462]).

В настоящем сообщении исследуется корректная разрешимость задачи Дирихле для обобщенного уравнения Гельмгольца, с применением результатов к задаче (1), в интервале  $t \in [0, l]$ .

### 1. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} + Au(t) + \beta u(t) = 0, \quad t \in [0, l] \subset [0, \infty), \quad (2)$$

где  $A$  – линейный замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве  $E$ , с областью определения  $D(A)$ , плотной в  $E$ .

Ставится задача отыскания функции  $u(t)$ , со значениями в  $D(A)$ , дважды непрерывно дифференцируемой, удовлетворяющей уравнению (2) на отрезке  $[0, l]$  и условиям

$$u(0) = \varphi, \quad u(l) = \psi, \quad \varphi, \psi \in D(A). \quad (3)$$

Определение 1 [4–6]. Задача (2)–(3) называется корректной, если она однозначно разрешима для любых  $\varphi, \psi \in D(A)$  и существует константа  $M > 0$ , такая, что для всех решений уравнения (1) справедливо неравенство

$$\sup_{t \in [0, l]} \|u(t)\|_E \leq M (\|\varphi\|_E + \|\psi\|_E). \quad (4)$$

<sup>1</sup> Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

<sup>2</sup> Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия

\*E-mail: vlkostin@mail.ru

\*\*E-mail: dvk605@mail.ru

Для  $\beta = 0$  в [7] показано, что если оператор  $A$  является генератором сильно непрерывной косинус-функции  $C(A, t)$ , удовлетворяющей условиям

$$\|C(t, A)\| \leq Me^{\omega t}, \tag{5}$$

то задача (2)–(3) корректно разрешима в интервале  $[0, l]$

$$0 \leq l < \frac{\pi}{\omega}. \tag{6}$$

В настоящем сообщении рассматривается случай  $\beta \neq 0$  и доказывается

**Теорема 1.** Если в уравнении (1) оператор  $A$  является генератором  $C_0$ -косинус-функции с оценкой (5), то на интервале  $[0, l]$ , где  $l$  задается условиями

$$0 \leq l < \begin{cases} \frac{\pi}{\omega + \sqrt{\beta}}, & \text{если } \beta \geq 0, \\ \frac{\pi}{\omega}, & \text{если } \beta < 0, \end{cases} \tag{7}$$

задача (2)–(3) корректно разрешима и ее решение имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{l} \sin \frac{\pi t}{l} \left[ \int_0^\infty \frac{C(y, A_\beta) \varphi dy}{\operatorname{ch} \left( \frac{\pi y}{l} \right) - \cos \left( \frac{\pi t}{l} \right)} + \int_0^\infty \frac{C(y, A_\beta) \psi dy}{\operatorname{ch} \left( \frac{\pi y}{l} \right) + \cos \left( \frac{\pi t}{l} \right)} \right], \tag{8}$$

где  $A_\beta = A + \beta I$ ,  $I$  – тождественный оператор в  $E$ ,

$$C(t, A_\beta) f = C(t, A) f + \sqrt{\beta} \int_0^t \frac{I_1(\sqrt{\beta} \sqrt{t^2 - s^2}) C(s, A) f ds}{\sqrt{t^2 - s^2}}, \tag{9}$$

$I_1(z) = \frac{z}{\pi} \int_0^1 (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} z \xi d\xi$  – модифицированная функция Бесселя 1-го рода.

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Для доказательства теоремы достаточно получить представление (9).

Так как  $A$  – генератор сильно непрерывной косинус-функции, то для его резольвенты справедливо представление через преобразование Лапласа  $L$  ([8, с. 177])

$$R(\lambda^2, A) f = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t, A) f dt = \frac{1}{\lambda} L[C(t, A) f](\lambda), \quad (\operatorname{Re} \lambda > \omega). \tag{10}$$

Из (10) следует равенство

$$C(t, A) f = [L^{-1}(\lambda R(\lambda^2, A)) f](t), \tag{11}$$

где  $[L^{-1}(h)](t)$  – обратное преобразование Лапласа.

Применяя (11) к  $C(A_\beta)$ , получаем

$$\begin{aligned} C(t, A_\beta) f &= L^{-1}[\lambda R(\lambda^2, A_\beta) f](t) = \\ &= L^{-1} \left[ \frac{\lambda R(\lambda^2 - \beta, A) f}{\sqrt{\lambda^2 - \beta}} \right](t) = \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ L^{-1} \left[ \frac{R(\lambda^2 - \beta, A) f}{\sqrt{\lambda^2 - \beta}} \right](t) \right\} = \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ L^{-1} \left[ \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2 - \beta} s}}{\sqrt{\lambda^2 - \beta}} C(s, A) f ds \right] \right\}(t) = \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \int_0^\infty L^{-1} \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2 - \beta} s}}{\sqrt{\lambda^2 - \beta}} C(s, A) f ds \right](t). \end{aligned}$$

Пользуясь таблицей преобразования Лапласа, получаем соотношение

$$\begin{aligned} C(t, A_\beta) f &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t I_0[-\beta(t^2 - s^2)]^{\frac{1}{2}} C(s, A) f ds \right\} = \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t J_0[\beta(t^2 - s^2)]^{\frac{1}{2}} C(s, A) f ds \right\}. \end{aligned}$$

После дифференцирования получаем соотношение (9).

Для определения порядка роста  $C(t, A_\beta)$  сделаем замену  $\frac{s}{t} = \tau$  под знаком интеграла в (9) и оценим

$$\begin{aligned} \|F(t) f\| &= \left\| \int_0^t \frac{I_1[\beta(t^2 - s^2)]^{\frac{1}{2}} C(s, A) f ds}{\sqrt{t^2 - s^2}} \right\| \leq \\ &\leq Me^{\omega t} \int_0^t \frac{I_1[\beta(t^2 - s^2)]^{\frac{1}{2}} ds}{\sqrt{t^2 - s^2}} \|f\| = \\ &= Me^{\omega t} \int_0^1 \frac{I_1[t\sqrt{\beta}(1 - \tau^2)]}{\sqrt{1 - \tau^2}} d\tau \|f\|. \end{aligned} \tag{12}$$

Если  $\beta > 0$ , то из (12) следует неравенство

$$\begin{aligned} \|F(t) f\| &\leq \frac{2\sqrt{\beta} t}{\pi} e^{\omega t} \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 - \xi^2} \operatorname{ch}[t\xi\sqrt{\beta}(1 - \tau^2)] d\xi \|f\| \leq \\ &\leq \frac{2\sqrt{\beta} t}{\pi} e^{\omega t} \int_0^1 \operatorname{ch}[t\xi\sqrt{\beta}] d\xi \|f\| \leq \frac{e^{(\omega + \sqrt{\beta})t}}{\pi} \|f\|. \end{aligned} \tag{13}$$

Если  $\beta < 0$ , то очевидна оценка

$$\|F(t)\| \leq \frac{2e^{\omega t} \sqrt{|\beta|} t}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times |\cos t \xi \sqrt{\beta(1 - \tau^2)}| d\xi d\tau \|f\| \leq \frac{\sqrt{|\beta|} e^{\omega t}}{2}. \quad (14)$$

Применение неравенства (5), (13), (14) в представлении (9) дает оценку

$$\|C(t, A\beta)\| \leq M[e^{\omega|t|} + \sqrt{|\beta|} t e^{\omega + \sqrt{|\beta|}|t|}] \leq \\ \leq M_1(1 + \sqrt{|\beta|}|t|) e^{(\omega + \sqrt{|\beta|})|t|}. \quad (15)$$

Таким образом, порядок роста косинус-функции  $C(t, A\beta)$  равен  $\omega + \sqrt{|\beta|}$ . И, следовательно, пользуясь (13), (14) для оператора  $A\beta$ , получаем оценку (15) в случае  $\beta \geq 0$ .

Соответствующая оценка для  $\beta < 0$  получается аналогично, с учетом неравенства  $(I_1(\sqrt{\beta} t \sqrt{1 - \tau^2})) \leq 1$ . Это завершает доказательство теоремы.

**З а м е ч а н и е 1.** Для частного случая  $\beta > 0$  и оператора  $A = B^2$ , где  $B$  порождает сильно непрерывную группу операторов  $T(t)$ , представление (9) получено в [8] другим способом.

### 3. ПРИМЕНЕНИЕ К УРАВНЕНИЯМ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Рассмотрим граничную задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в следующей постановке.

Ищется решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + \beta u(x, t) = 0, \quad (16)$$

$x \in R = (-\infty, \infty)$ ,  $t \in [0, l] \in R^+ = [0, \infty)$ ,  $\beta = \text{const}$ , удовлетворяющее граничным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(l, x) = \psi(x), \quad (17)$$

$\varphi$  и  $\psi$  являются элементами банахова пространства  $C_p(\bar{R})$  равномерно непрерывных и ограниченных с весом  $e^{-\sigma x}$  ( $\sigma > 0$ ) функций с нормой

$$\|f\|_\sigma = \sup_{x \in R} e^{-\sigma x} |f(x)|. \quad (18)$$

Зададим оператор  $A$  дифференциальным выражением  $\frac{d^2}{dx^2}$  с областью определения  $D(A) = \left\{ f: f \in C_\sigma, \frac{d^2 f}{dx^2} \in C_\sigma \right\}$  и приведем задачу (16)–(17) к виду (3)–(4).

Так, определенный оператор  $A$  является генератором косинус-функции

$$C(t, A)f(x) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)], \quad (19)$$

с оценкой

$$\left| e^{-\sigma x} C(t)f(x) \right| \leq \\ \leq e^{-\sigma x} |f(x+t) + f(x-t)| \leq \left( \frac{e^{\sigma t} + e^{-\sigma t}}{2} \right) \|f\|_\sigma, \quad (20)$$

показывающий выполнение условия (5) с порядком роста  $C(t)$ , равным  $\sigma$ .

Следовательно, задача (16)–(17) корректно разрешима в пространствах  $E = C_\sigma(\bar{R})$  на интервале  $[0, l]$ ,

$$0 < l < \begin{cases} \frac{\pi}{\sigma + \sqrt{\beta}}, & \text{если } \beta > 0, \\ \frac{\pi}{\sigma}, & \text{если } \beta \leq 0. \end{cases} \quad (21)$$

**З а м е ч а н и е 2.**

1. Если  $\beta > 0$ ,  $\sigma = 0$ , то (21) совпадает с аналогичным неравенством в [1, с. 462].

2. Если  $\beta < 0$ ,  $\sigma \neq 0$ , то интервал корректности сужается в зависимости от увеличения концентрации вещества на границе.

3. Если  $\beta < 0$ ,  $\sigma = 0$ , то интервал корректности может быть неограниченным, что совпадает с известными результатами.

### 4. О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ВНУТРИ ДВУГРАННОГО УГЛА. УГОЛ КОРРЕКТНОСТИ

Применим полученные результаты к задаче о распределении тепла внутри двугранного угла ([9, с. 133]), нахождения функции  $V(r, u)$ ,  $0 < r < \infty$ ,  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0 < \infty$ , являющейся решением уравнения

$$\frac{\partial^2 V(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0, \quad (22)$$

удовлетворяющей граничным условиям

$$v(r, 0) = w_1(r) = Ar^\sigma, \quad V(r, \varphi_0) = w_2(r) = Br^\sigma, \quad (23)$$

$A, B, \sigma$  – действительные константы.

Замена  $r = \ln x$ ,  $\varphi = t$  приводит (22)–(23) к виду

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (24)$$

$$u(x, 0) = Ae^{\sigma x}, \quad u(x, \varphi_0) = Be^{\sigma x}, \quad (25) \\ x \in (-\infty, \infty), \quad t \in [0, \varphi_0].$$

Применяя соотношение (8) к (24)–(25) и возвращаясь к переменным  $r, \varphi$  с ограничениями

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_0 < \frac{\pi}{\sigma}, \quad (26)$$

получаем решение задачи (22)–(23) в виде

$$V(r, \varphi) = [A \sin \sigma \varphi + B \sin \sigma(\varphi_0 - \varphi)] \frac{r^\sigma}{\sin \sigma \varphi_0}. \quad (27)$$

В силу теоремы 1, отсюда следует, что задача (24)–(25), а вместе с ней и задача (22)–(23) корректны на интервале  $[0, \varphi_0]$ , который удовлетворяют условиям (26).

Назовем его углом корректности. Интересно, что увеличение параметра  $\sigma$  на границе влечет уменьшение угла корректности. Так, при  $\sigma = 2$  угол корректности не должен превосходить  $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ .

Далее заметим, что если  $A \geq 0, B \geq 0$ , то имеют место оценки

$$\begin{aligned} 0 \leq V(r, \varphi) &\leq \frac{(A+B) \sin \frac{\sigma \varphi_0}{2}}{\sin \sigma \varphi_0} r^\sigma = \\ &= \frac{(A+B)}{2} \cdot \frac{r^\sigma}{\cos \frac{\sigma \varphi_0}{2}} = V\left(r, \frac{\varphi_0}{2}\right). \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, угол между гранями должен удовлетворять условиям корректности, зависящим от граничных данных. В этом случае максимум температуры аккумулируется на середине угла корректности и изменяется в зависимости от расстояния  $r$  в соответствии с формулой (28), показывающей, что при возрастании  $\sigma$  угол между гранями уменьшается.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
3. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепло-массообмена. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", 1987. 352 с.
4. Горбачук В.И., Князюк А.И. Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44. № 3. С. 55–91.
5. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
6. Kurepa S. Semigroups and cosine functions. Lecture Notes in Math. B.: Springer, 1982. V. 948. P. 47–72.
7. Костин В.А., Костин Д.В., Костин А.В. Операторные косинус-функции и граничные задачи // ДАН. 2019. Т. 486. № 5. С. 531–536.
8. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев: Выща школа, 1989. 347 с.
9. Волков И.К. Интегральные преобразования и операторное исчисление // Волков И.К., Канатников А.Н. Изд-во МГТУ им. Баумана, 1999. 227 с.

## ON THE CORRECT SOLVABILITY OF THE DIRICHLET BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE GENERALIZED HELMHOLTZ EQUATION IN A STRIP

V. A. Kostin<sup>a</sup>, D. V. Kostin<sup>a,b</sup>, and A. V. Kostin<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

<sup>b</sup> Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.P. Maslov

Within the framework of the theory of operator cosine functions and its application, a solution is found and the correct solvability of the Dirichlet boundary value problem for the generalized Helmholtz equation in the band is established. The critical bandwidth is set depending on the boundary conditions. Applying this result to the problem of heat propagation in a dihedral angle allows us to determine the angle of correctness of this problem and specify the law of heat propagation in the considered region.

**Keywords:** strongly continuous cosine functions and transformation semigroups, boundary value problems, correct solvability

УДК 517.968.43

## ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В РАВНОВЕСНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ

© 2021 г. М. В. Николаев<sup>1,\*</sup>, У. Дикман<sup>2,3,\*\*</sup>, А. А. Никитин<sup>1,4,\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН И.А. Соколовым 31.03.2021 г.

Поступило 31.03.2021 г.

После доработки 04.04.2021 г.

Принято к публикации 07.05.2021 г.

Изучается нелинейное интегральное уравнение, возникающее в некоторой модели пространственной логистической динамики. Вопрос разрешимости данного уравнения исследуется с помощью введения специальных пространств функций, интегрируемых с точностью до константы. Устанавливаются достаточные условия на биологические характеристики, а также параметры замыкания третьего пространственного момента, гарантирующие существование решения описанного выше уравнения в некотором шаре с центром в нуле. Кроме того, показывается, что данное решение единственно в рассматриваемом шаре и не является нулевым. Это означает, что при соответствующих условиях состояние равновесия популяции некоторого вида существует и не совпадает с состоянием вымирания.

*Ключевые слова:* функциональный анализ, нелинейные интегральные уравнения, математическая биология

DOI: 10.31857/S2686954321040123

Основным предметом изучения в данной работе является параметрическое семейство нелинейных интегральных уравнений, возникающее при замыкании третьего момента в пространственной логистической модели У. Дикмана и Р. Лоу [1, 2]. Краткое описание данной модели, а также математическая постановка рассматриваемой задачи приведены в первой части нашей работы. Во втором разделе вводится специальное функциональное пространство и приводятся некоторые операторы, действующие в нем. В третьей части рассмотренные операторы используются для построения параметрического отображения,

действующего в обозначенном ранее пространстве функций, неподвижные точки которого совпадают с решениями исследуемых уравнений. Кроме того, указываются достаточные условия существования неподвижных точек данного отображения и их единственность в некотором шаре при различных наборах параметров.

### 1. ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

#### 1.1. Модель биологических сообществ

Рассмотрим некоторую популяцию неподвижных организмов, обитающих в пространстве  $\mathbb{R}^k$ . Модель характеризуется следующими гомогенными в пространстве биологическими параметрами:

- 1) естественная смертность ( $d \geq 0$ ),
- 2) агрессивность индивидов ( $d' \geq 0$ ),
- 3) интенсивность рождения новых особей ( $b > 0$ ),
- 4) ядро движения ( $m = m(x)$ ),
- 5) ядро конкуренции ( $w = w(x)$ ).

При этом ядра движения и конкуренции являются неотрицательными, радиально-симметричными, интегрируемыми функциями, с  $L_1$ -нормой равной 1, которые исчезают на бесконечности. Ядро движения представляет собой плотность веро-

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>Международный институт прикладного системного анализа, Лаксенбург, Австрия

<sup>3</sup>Department of Evolutionary Studies of Biosystems, The Graduate University for Advanced Studies (Sokendai), Hayama, Japan

<sup>4</sup>Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия

\*E-mail: nikolaev.mihail@inbox.ru

\*\*E-mail: dieckmann@iiasa.ac.at

\*\*\*E-mail: nikitin@cs.msu.ru

ятности случайной величины, определяющей положение потомков относительно своих родителей. Ядро конкуренции описывает пространственную структуру конкуренции между индивидами.

В каждый момент времени состояние изучаемой популяции характеризуется пространственными моментами, которые являются усреднением некоторых статистических характеристик. Мы будем рассматривать первые три момента:

- 1)  $N(t)$  – средняя плотность особей,
- 2)  $C(x, t)$  – средняя плотность пар особей, в которых сдвиг второго индивида относительно первого равен  $x$ ,
- 3)  $T(x, y, t)$  – средняя плотность троек особей, в которых сдвиг второго и третьего индивидов относительно первого равен  $x$  и  $y$  соответственно.

В настоящей статье мы будем работать с состоянием равновесия популяции, которое характеризуется отсутствием динамики моментов во времени (таким образом, моменты перестают зависеть от  $t$ ). Оно описывается следующей системой интегральных уравнений (подробнее см. в [2]):

$$\begin{aligned} 0 &= (b - d)N - d' \int_{\mathbb{R}^k} C(x)w(x)dx, \\ 0 &= bm(x)N + \int_{\mathbb{R}^k} bm(y)C(x + y)dy - \\ &- (d + d' w(x))C(x) - \int_{\mathbb{R}^k} d' w(y)T(x, y)dy. \end{aligned} \tag{1}$$

1.2. Уравнение равновесия

В работе рассматривается трехпараметрическое семейство замыканий третьего момента вида

$$T(x, y) = \frac{\alpha C(x)C(y) + \beta C(x)C(y - x) + \gamma C(y)C(y - x) - \beta N^4}{(\alpha + \gamma)N}, \tag{2}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , при этом  $\alpha + \gamma \neq 0$ . Оно используется с целью уменьшения количества неизвестных в системе (1) (подробнее о методе замыканий см. [3]). После подстановки замыкания (2) в систему (1) и некоторых преобразований, получим

$$Q = \frac{\bar{m} + [\bar{m} * Q] - \bar{w}Q - \frac{\beta}{\alpha + \gamma} Q[\bar{w} * Q] - \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} [Q\bar{w} * Q] + \frac{\beta d'}{\alpha + \gamma} N^2}{d + \frac{\alpha(b - d)}{\alpha + \gamma}}, \tag{3}$$

где  $Q = C/N$ ,  $\bar{m} = bm$ ,  $\bar{w} = d'w$ . Для сокращения записи все аргументы у функций опущены. Нотация  $[f * g]$  здесь обозначает интеграл следующего вида:

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x - y)g(y)dy.$$

Будем называть уравнение (3) уравнением равновесия. Отметим, что

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^k} \rightarrow +\infty} Q(x) = N, \tag{4}$$

поскольку в [3] было показано, что

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^k} \rightarrow +\infty} C(x) = N^2.$$

2. ПРОСТРАНСТВО  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$

2.1. Определение

Прежде чем приступить к дальнейшему исследованию уравнения равновесия, рассмотрим некоторое специальное пространство функций, которому, как будет показано далее, принадлежит решение уравнения (3).

Рассмотрим множество функций вида  $f = F + n$ , где  $F \in L_1(\mathbb{R}^k)$ , а  $n \in \mathbb{R}$ . Будем в дальнейшем назы-

вать функцию  $F$  функциональной частью элемента  $f$  и обозначать  $\mathcal{F}f$ , а  $n$  – числовой частью и обозначать  $\mathcal{N}f$ . Очевидно, что рассмотренное множество линейно относительно операций сложения и умножения на число. Введем на вышеупомянутом множестве структуру нормированного пространства, определив норму по правилу

$$\|f\|_{\widehat{L}_1} = \|\mathcal{F}f\|_{L_1} + |\mathcal{N}f|.$$

Полученное пространство обозначим за  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$ .

З а м е ч а н и е 1. Элементы  $f$  и  $g$  пространства  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$  равны тогда и только тогда, когда равны их функциональные и числовые части соответственно.

Л е м м а 1. Пространство  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$  банахово.

2.2. Некоторые операторы в  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$

Рассмотрим некоторые операторы, действующие в  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$ , которые представляют наибольший интерес в данной работе.

Определим сверточный оператор  $\mathcal{C}_\varphi$ , действующий на функции из  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$  по правилу

$$\mathcal{C}_\varphi f = [\varphi * f] = \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(x - y)f(y)dy,$$

где  $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^k)$ .

Лемма 2. Оператор  $\mathcal{C}_\varphi$  является ограниченным линейным оператором, действующим в  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$ , норма которого равна  $\|\varphi\|_{L_1}$ .

Введем вспомогательное пространство функций

$$BL_1(\mathbb{R}^k) = \{f \in L_1(\mathbb{R}^k) \mid \text{ess sup}_{\mathbb{R}^k} |f| < +\infty\},$$

обозначая

$$\|f\|_{BL_1} = \max\{\|f\|_{L_1}, \text{ess sup}_{\mathbb{R}^k} |f|\}.$$

Определим оператор самосвертки  $\mathcal{S}_\varphi$ , действующий на функции из  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$  по правилу

$$\mathcal{S}_\varphi f = [f\varphi * f] = \int_{\mathbb{R}^k} f(x - y)\varphi(x - y)f(y)dy,$$

где  $\varphi \in BL_1(\mathbb{R}^k)$ . Можно показать, что этот оператор действует в  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$ . Более того, верно следующее утверждение.

Лемма 3. Для любой пары элементов  $f, g \in \widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$  имеет место неравенство

$$\|\mathcal{S}_\varphi f - \mathcal{S}_\varphi g\|_{\widehat{L}_1} \leq \|\varphi\|_{BL_1} (\|f\|_{\widehat{L}_1} + \|g\|_{\widehat{L}_1}) \|f - g\|_{\widehat{L}_1}.$$

Определим оператор произведения на свертку  $\mathcal{P}_\varphi$ , действующий из  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$  по правилу

$$\mathcal{P}_\varphi f = f[\varphi * f] = f(x) \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(x - y)f(y)dy,$$

где  $\varphi \in BL_1(\mathbb{R}^k)$ . Данный оператор также действует в  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$  и верно следующее утверждение, которое аналогично лемме 3.

Лемма 4. Для любой пары элементов  $f, g \in \widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$  имеет место неравенство

$$\|\mathcal{P}_\varphi f - \mathcal{P}_\varphi g\|_{\widehat{L}_1} \leq \|\varphi\|_{BL_1} (\|f\|_{\widehat{L}_1} + \|g\|_{\widehat{L}_1}) \|f - g\|_{\widehat{L}_1}.$$

### 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

#### 3.1. Оператор равновесия

Теперь мы готовы приступить к дальнейшему исследованию уравнения равновесия (3). Далее будем дополнительно считать, что ядра рождения и конкуренции почти всюду ограничены. В таком случае они принадлежат классу  $BL_1(\mathbb{R}^k)$ .

Будем искать решение уравнения (3) в пространстве  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$ . Условие (4) позволяет нам сказать, что в таком случае  $N = NQ$ . Учитывая это, перепишем уравнение в операторной форме

$$Q = \mathcal{A}Q, \tag{5}$$

где оператор  $\mathcal{A}$  действует из  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$  по правилу

$$\mathcal{A}f = \frac{\bar{m} + [\bar{m} * f] - \bar{w}f - \frac{\beta}{\alpha + \gamma} f[\bar{w} * f] - \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} [f\bar{w} * f] + \frac{\beta d'}{\alpha + \gamma} (Nf)^2}{d + \frac{\alpha(b - d)}{\alpha + \gamma}}. \tag{6}$$

С помощью введенных ранее операторов, представление (6) может быть переписано в виде

$$\mathcal{A}f = \frac{\bar{m} + \mathcal{C}_{\bar{m}}f - \bar{w}f - \frac{\beta}{\alpha + \gamma} \mathcal{P}_{\bar{w}}f - \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} \mathcal{S}_{\bar{w}}f + \frac{\beta d'}{\alpha + \gamma} (Nf)^2}{d + \frac{\alpha(b - d)}{\alpha + \gamma}}. \tag{7}$$

Отметим, что  $\mathcal{A}$  действует в  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$ , поскольку операторы  $\mathcal{C}_{\bar{m}}$ ,  $\mathcal{P}_{\bar{w}}$  и  $\mathcal{S}_{\bar{w}}$  действуют в этом пространстве. Фактически мы свели задачу о решении уравнения (3) к задаче нахождения неподвижной точки оператора (7). Будем называть этот оператор оператором равновесия.

#### 3.2. Неподвижная точка оператора равновесия

С учетом рассмотренных выше лемм 2–4, можно оценить, насколько сильно меняется расстояние

между двумя элементами пространства  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$  под действием операторов  $\mathcal{C}_{\bar{m}}$ ,  $\mathcal{S}_{\bar{w}}$  и  $\mathcal{P}_{\bar{w}}$ . Исходя из этого нетрудно найти достаточные условия сжимаемости оператора  $\mathcal{A}$  в некотором шаре  $B$  пространства  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$ . Проводя оценку величин  $\|\mathcal{A}\|_{\widehat{L}_1}$  при  $f \in B$ , можно выявить замкнутый шар  $B' \subset B$ , инвариантный относительно оператора равновесия. Однако замкнутый шар полного метрического пространства сам является полным метрическим пространством. Это позволяет нам, вос-

пользовавшись принципом Банаха, доказать, что оператор  $\mathcal{A}$  будет иметь в  $B'$  единственную неподвижную точку.

Данные рассуждения приводят нас к следующей теореме.

**Теорема 1.** Если выполнены условия

$$\begin{aligned} \gamma &< 0, \\ \alpha b + \gamma d &> 0, \\ 2\beta - \gamma &> 0, \\ b - d &> \frac{\alpha + \gamma}{-\gamma} \|\bar{w}\|_{BL_1}, \\ b - d &> \frac{4b(2\beta - \gamma)}{-\gamma}, \end{aligned}$$

а положительное число  $R$  удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha + \gamma}{4\beta - 2\gamma} \leq R < -\frac{\gamma(b - d)}{\|\bar{w}\|_{BL_1}(4\beta - 2\gamma)} - \frac{\alpha + \gamma}{4\beta - 2\gamma}, \\ \frac{\gamma(b - d) - \sqrt{D}}{2\|\bar{w}\|_{BL_1}(2\beta - \gamma)} \leq R \leq \frac{\gamma(b - d) + \sqrt{D}}{2\|\bar{w}\|_{BL_1}(2\beta - \gamma)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$D = \gamma^2(b - d)^2 - 4b(\alpha + \gamma)(2\beta - \gamma)\|\bar{w}\|_{BL_1},$$

то оператор равновесия (6) имеет в шаре радиуса  $R$  с центром в нуле единственную неподвижную точку.

**Замечание 2.** В условиях теоремы 1 неподвижная точка оператора равновесия ненулевая, так как образ нулевого элемента пространства  $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$  под действием оператора  $\mathcal{A}$  не является нулевым.

Приведем пример параметров модели, удовлетворяющих условиям вышеуказанной теоремы. Пусть  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = -7/16$ , а  $\gamma = -1$ , тогда

$$\begin{aligned} \gamma &= -1 < 0, \\ 2\beta - \gamma &= \frac{1}{8} > 0. \end{aligned}$$

Если выбрать  $b = 1$  и  $d = 1/10$ , то

$$\begin{aligned} \alpha b + \gamma d &= \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5} > 0, \\ b - d &= \frac{9}{10} > \frac{1}{2} = \frac{4b(2\beta - \gamma)}{-\gamma}. \end{aligned}$$

Выберем ядро конкуренции в виде плотности нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением равным  $(10\sqrt{2\pi})^{-1}$ , т.е.

$$w(x) = 10e^{-100\pi x^2},$$

а также возьмем  $s = 1$ , тогда  $\|\bar{w}\|_{BL_1} = 10$ . Поэтому

$$b - d = \frac{9}{10} > -5 = \frac{\alpha + \gamma}{-\gamma} \|\bar{w}\|_{BL_1}.$$

Значение величины  $D$  при таком выборе будет равно  $331/100$ , значит,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(b - d) + \sqrt{D}}{\|\bar{w}\|_{BL_1}(2\beta - \gamma)} &= \frac{-1 \cdot 9/10 + \sqrt{331/100}}{10 \cdot 1/8} = \\ &= \frac{-72 + 8\sqrt{331}}{100} > \frac{-72 + 8 \cdot 18}{100} = \frac{36}{50}. \end{aligned}$$

При этом

$$-\frac{\alpha + \gamma}{4\beta - 2\gamma} = \frac{2}{5} < \frac{36}{50},$$

т.е.

$$-\frac{\alpha + \gamma}{4\beta - 2\gamma} < \frac{\gamma(b - d) + \sqrt{D}}{\|\bar{w}\|_{BL_1}(2\beta - \gamma)}. \quad (9)$$

С другой стороны,

$$\frac{\gamma(b - d) - \sqrt{D}}{2\|\bar{w}\|_{BL_1}(2\beta - \gamma)} = \frac{-72 - 8\sqrt{331}}{100} < 0,$$

а

$$-\frac{\gamma(b - d)}{\|\bar{w}\|_{BL_1}(4\beta - 2\gamma)} - \frac{\alpha + \gamma}{4\beta - 2\gamma} = \frac{72}{100} + \frac{2}{5} > 0,$$

значит,

$$\frac{\gamma(b - d) - \sqrt{D}}{2\|\bar{w}\|_{BL_1}(2\beta - \gamma)} < -\frac{\gamma(b - d)}{\|\bar{w}\|_{BL_1}(4\beta - 2\gamma)} - \frac{\alpha + \gamma}{4\beta - 2\gamma}. \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что система (8) разрешима. Если теперь выбрать  $R$ , например, равным  $2/5$ , то все условия теоремы 1 будут выполнены.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе был поставлен вопрос о существовании и единственности решения задачи о нахождении состояния равновесия некоторой популяции организмов. Было показано, что решение системы уравнений (1) можно искать в виде неподвижной точки некоторого оператора, действующего в специальном функциональном пространстве. С помощью принципа Банаха были найдены достаточные условия, накладываемые на биологические параметры модели и параметры замыкания третьего пространственного момента, гарантирующие существование и единственность неподвижной точки этого оператора в некотором шаре с центром в нуле. При этом показано, что данное состояние нетривиально.

Отметим, что ранее проводился лишь численный анализ нелинейных интегральных уравнений, получающихся после замыканий третьего момента. Аналитическое исследование подобных

уравнений при трехпараметрическом замыкании (2) в случае ненулевых  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  проводится впервые. Кроме того, результаты данной работы иллюстрируют важность подбора параметров замыкания (2), поскольку в статьях [4, 5] было показано, что при  $\alpha = 1$ ,  $\beta = a = 0$  нетривиальное состояние равновесия существует исключительно при  $d = 0$ .

**ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ**

Публикация подготовлена в результате проведения исследования (проекта 20–04–021) в рамках программы “Научный фонд НИУ ВШЭ”.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Law R., Dieckmann U.* Moment approximations of individual-based models // *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity* / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. 2000. P. 252–270.
2. *Dieckmann U., Law R.* Relaxation projections and the method of moments // *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity* / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. 2000. P. 412–455.
3. *Murrell D. J., Dieckmann U., Law R.* On moment closures for population dynamics in continuous space // *J. Theor. Biology.* 2004. 229. P. 421–432. russian
4. *Давыдов А.А., Данченко В.И., Звягин М.Ю.* Существование и единственность стационарного распределения биологического сообщества // *Труды МИАН.* 2009. Т. 267. С. 46–55.
5. *Давыдов А.А., Данченко В.И., Никитин А.А.* Об интегральном уравнении для стационарных распределений биологических сообществ // *Проблемы динамического управления. Сборник научных трудов.* 2010. С. 15–29.

**APPLICATION OF SPECIAL FUNCTION SPACES TO THE STUDY OF NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS ARISING IN EQUILIBRIUM SPATIAL LOGISTIC DYNAMICS**

**M. V. Nikolaev<sup>a</sup>, U. Dieckmann<sup>b,c</sup>, and A. A. Nikitin<sup>a,d</sup>**

<sup>a</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Advancing Systems Analysis Program, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria*

<sup>c</sup> *Department of Evolutionary Studies of Biosystems, The Graduate University for Advanced Studies (Sokendai), Hayama, Japan*

<sup>d</sup> *Higher School of Economics University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS I.A. Sokolov

In this paper, we study a nonlinear integral equation that arises in a model of spatial logistic dynamics. The problem of this equation’s solution’s existence is investigated by introducing special spaces of functions that are integrable up to a constant. Sufficient conditions are established for the biological characteristics and the parameters of the third spatial moment closure, that guarantee the existence of the solution of the equation mentioned above in some ball centered at zero. In addition, it is shown that this solution is unique in the considered ball and not zero. This means that, under the appropriate conditions, the equilibrium state of the population of a certain species exists and does not coincide with the state of extinction.

*Keywords:* functional analysis, nonlinear integral equations, mathematical biology

УДК 519.1

## ОЦЕНКА ЧИСЛА РЕБЕР В ПОДГРАФАХ ГРАФА ДЖОНСОНА

© 2021 г. Ф. А. Пушняков<sup>1</sup>, А. М. Райгородский<sup>1,2,3,4,\*</sup>

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 01.11.2019 г.

Поступило 01.11.2019 г.

После доработки 09.05.2021 г.

Принято к публикации 16.05.2021 г.

Получены новые оценки минимального числа ребер в подграфах графа Джонсона.

*Ключевые слова:* граф Джонсона, дистанционные графы, теорема Турана

**DOI:** 10.31857/S2686954321040135

Пусть  $n > r > s$ . Рассмотрим следующее семейство графов:

$$G(n, r, s) = (V, E), \quad V = \binom{[n]}{r}, \\ E = \{(A, B) : |A \cap B| = s\},$$

т.е. вершины графа – это всевозможные  $r$ -элементные подмножества  $[n] := \{1, \dots, n\}$ , а ребрами мы соединяем пары множеств, пересекающихся ровно по  $s$  элементам. Эти графы называются графами Джонсона и играют важную роль в задачах теории кодирования (см. [1]), теории Рамсея (см. [2–4]), комбинаторной геометрии (см. [5–11]), теории гиперграфов (см. [12–19]).

Напомним, что независимое множество вершин графа – это любое такое множество его вершин, в котором нет ни одного его ребра, а число независимости графа  $G$  – это величина  $\alpha(G)$ , равная мощности любого из максимальных по числу вершин независимых множеств в  $G$ . Классическая проблематика теории графов, восходящая к Турану, состоит в отыскании величины  $r_G(l)$ , равной минимальному количеству ребер графа  $G$ , попадающих внутрь его множества вершин мощности  $l$ . Конечно, если  $l \leq \alpha(G)$ , то  $r_G(l) = 0$ . Поэтому интересны лишь случаи  $l > \alpha(G)$ .

Классическая теорема Турана утверждает, что на множестве всех графов следующая оценка неумлучшаема:

$$r_G(l) \geq l \cdot \frac{l}{\alpha(G)} - \alpha(G) \cdot \frac{\left\lfloor \frac{l}{\alpha(G)} \right\rfloor \cdot \left( \left\lfloor \frac{l}{\alpha(G)} \right\rfloor + 1 \right)}{2}. \quad (1)$$

В частности, если  $G_n$  – последовательность графов с растущими к бесконечности числами вершин, а  $l = l(n) \rightarrow \infty$ ,  $\alpha = \alpha(G_n)$  и  $\alpha = o(l)$ , то

$$r_{G_n}(l) \geq (1 + o(1)) \frac{l^2}{2\alpha}, \\ \min_{\{G_n\}} r_{G_n}(l) \sim \frac{l^2}{2\alpha}. \quad (2)$$

Однако для графов  $G(n, r, s)$  картина меняется, и именно она интересует нас в этой работе. Во-первых, в серии статей первого автора (см. [6]) подробно исследованы графы  $G_n = G(n, 3, 1)$ , для которых, среди прочего, доказано, что в обозначениях и условиях оценки (2)

$$(1 + o(1)) \frac{3l^2}{2\alpha} \leq r_{G_n}(l) \leq (1 + o(1)) \frac{9l^2}{2\alpha}. \quad (3)$$

Иными словами, нижняя оценка в (3) втрое больше оценки (2), которая неумлучшаема в общем случае.

Для произвольных графов  $G(n, r, s)$  оценок ранее не было. Однако это дистанционные графы, т.е. их вершины можно считать точками в  $\mathbb{R}^n$  (это  $n$ -мерные векторы с  $r$  единицами и  $n - r$  нулями), а ребра тогда – это пары точек на расстоянии  $\sqrt{2(r - s)}$ . Для графов такого типа в работе [20] доказана следующая оценка. Пусть условия те же, что в неравенстве (2), и, более того,  $\alpha n = o(l)$ . Тогда

<sup>1</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>3</sup> Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Майкоп, Россия

<sup>4</sup> Бурятский государственный университет, Институт математики и информатики, Улан-Удэ, Россия

\*E-mail: mraigor@yandex.ru

$$r_{G_n}(l) \geq (1 + o(1)) \frac{l^2}{\alpha} \tag{4}$$

Таким образом, оценка (4) вдвое сильнее оценки (2).

Прежде всего мы докажем следующую несложную теорему.

**Теорема 1.** Пусть даны числа  $r, s$ . Пусть  $G_n = G(n, r, s)$ . Пусть  $l = l(n) \rightarrow \infty$ . Тогда

$$r_{G_n}(l) \leq (1 + o(1)) \cdot \frac{l^2}{n^s} \cdot \frac{C_r^s \cdot r!}{2 \cdot (r - s)!}.$$

Чтобы сравнить теорему 1 с оценками (1)–(4), надо напомнить, как ведут себя числа независимости графов  $G(n, r, s)$ . В работе [21] доказана

**Теорема 2.** Пусть даны числа  $r, s$ . Тогда

1. Если  $r > 2s + 1$ , то при достаточно больших  $n$

$$\alpha(G(n, r, s)) = C_{n-s-1}^{r-s-1} \sim \frac{n^{r-s-1}}{(r-s-1)!};$$

2. Если  $r \leq 2s + 1$  и  $r - s$  — степень простого числа, то

$$\alpha(G(n, r, s)) \sim n^s \cdot \frac{(2r - 2s - 1)!}{r! \cdot (r - s - 1)!};$$

3. Для любых  $r, s$  существуют  $c(r, s)$  и  $d(r, s)$ , с которыми

$$c(r, s) \cdot \max\{n^s, n^{r-s-1}\} \leq \alpha(G(n, r, s)) \leq d(r, s) \cdot \max\{n^s, n^{r-s-1}\}.$$

Из теоремы 2 сразу следует, что новая теорема 1 дает лучшую из ранее известных верхних оценок для случая параметров  $n, 3, 1$  — оценку (3). Более того, при  $r \leq 2s + 1$  получаем, что порядок новой

верхней оценки из теоремы 1 совпадает с порядком классических нижних оценок, ведь у них в знаменателе стоит число независимости, которое в данном режиме имеет порядок  $n^s$ . И только при  $r > 2s + 1$  имеется серьезный зазор по порядку. Особенно любопытно выглядит случай  $s = 0$ . Это случай так называемых кнезеровских графов (см. [2]). Получается, что в его рамках новая верхняя оценка из теоремы 1 тривиальна, ибо асимптотически равна  $\frac{l^2}{2}$ , а это асимптотика числа ребер полного графа на  $l$  вершинах! Как ни странно, это не свидетельство слабости новой оценки. Имеет место

**Теорема 3.** Пусть  $G_n = G(n, r, 0)$ . Пусть  $l > \alpha(G(n, r, 0)) = C_{n-1}^{r-1}$ . Тогда

$$r_{G_n}(l) \geq \frac{l(l - (C_n^r - C_{n-r}^r))}{2}.$$

Видно, что если  $l$  сильно больше числа независимости, т.е.  $n^{r-1} = o(l)$ , то оценка в теореме 3 асимптотически равна  $\frac{l^2}{2}$ . Действительно, разность  $C_n^r - C_{n-r}^r$  имеет порядок  $n^{r-1}$ .

Есть, наконец, интересный режим, в котором теорема 3 не работает. Это режим, когда  $l \sim C_{n-1}^{r-1}$ . В таком случае оценка теоремы 3 становится отрицательной. Здесь удастся доказать следующую теорему.

**Теорема 4.** Пусть  $G_n = G(n, r, 0)$ . Пусть  $l > \alpha(G(n, r, 0)) = C_{n-1}^{r-1}$ . Тогда

$$r_{G_n}(l) \geq \min_{\beta \leq C_{n-1}^{r-1}} \max \left\{ l \cdot \left\lfloor \frac{l}{\beta} \right\rfloor - \beta \cdot \frac{\left\lfloor \frac{l}{\beta} \right\rfloor \cdot \left( \left\lfloor \frac{l}{\beta} \right\rfloor + 1 \right)}{2}, (l - \beta)(\beta - r^2 C_{n-2}^{r-2}) \right\}.$$

Например, если  $l = \alpha(G(n, r, 0)) + 1$ , то все классические оценки принимают значение 1. Однако здесь мы имеем значительное усиление. В самом деле, если  $\beta \leq 2r^2 C_{n-2}^{r-2}$ , то первая величина из двух под знаком максимума имеет порядок не ниже  $n^r$ . При больших  $\beta$  уже вторая величина имеет порядок, как минимум,  $n^{r-2}$ . Можно и аккуратнее оценить, но суть ясна и так.

В следующем разделе мы приведем схемы доказательств теорем 1, 3, 4.

### СХЕМЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

#### 1. Схема доказательства теоремы 1

Рассмотрим множество всех индуцированных подграфов графа  $G(n, r, s)$ , имеющих  $l$  вершин. Для каждого графа  $H$  из этого множества и каждого ребра графа  $G(n, r, s)$  рассмотрим индикатор вхождения этого ребра в  $H$ . Просуммируем индикаторы по всем ребрам и по всем графам двумя способами. С одной стороны, получится произведение числа ребер и числа графов, содержащих данное ребро:

$$A = \left( \frac{1}{2} \cdot C_n^r \cdot C_{n-r}^{r-s} \cdot C_r^s \right) \cdot \left( C_{C_n^{r-2}} \right).$$

С другой стороны, получится сумма по  $H$  чисел ребер в  $H$ . Таким образом, минимальное число ребер не меньше, чем

$$\frac{A}{C_n^r} \sim \frac{1}{2} \cdot C_n^r \cdot C_n^{r-s} \cdot C_r^s \cdot \frac{l^2}{(C_n^r)^2} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{n^s} \cdot C_r^s \cdot \frac{r!}{(r-s)!}.$$

Теорема доказана.

### 2. Схема доказательства теоремы 3

Пусть  $W$  – некоторое множество вершин графа  $G(n, r, 0)$ , имеющее мощность  $l$ . Тогда для любой вершины  $v \in W$  имеем

$$\begin{aligned} & |\{w \in W: w \sim v\}| = \\ & = l - |\{w \in W: w \not\sim v\}| = l - |\{w: w \not\sim v\}| = \\ & = l - (C_n^r - |\{w \in W: w \sim v\}|) = l - (C_n^r - C_{n-r}^r). \end{aligned}$$

Суммирование по всем вершинам завершает доказательство.

### 3. Схема доказательства теоремы 4

Пусть  $H$  – подграф графа  $G(n, r, 0)$ , имеющий  $l$  вершин. Пусть  $\beta$  – максимальная мощность независимого множества вершин в  $H$ . Очевидно,  $\beta \leq \alpha(G(n, r, 0)) = C_{n-1}^{r-1}$ . Пусть  $B$  – любое независимое множество вершин  $H$  мощности  $\beta$ . С одной стороны, имеет место рассуждение, которое восходит к Турану и дает оценку (1) с заменой  $\alpha$  на  $\beta$ . Именно она и стоит первой под знаком максимума. С другой стороны, как и в начале турановского рассуждения, отметим, что каждая вершина  $H$ , не принадлежащая  $B$ , отправляет хотя бы одно ребро в  $B$ . Если на этом остановиться, то получится оценка  $l - \beta$ , которая намного слабее турановской, ибо входит лишь как одно из слагаемых в турановское неравенство. Однако вид второй величины под знаком максимума в теореме 4 подсказывает, что можно значимо усилить утверждение о хотя бы одном ребре, идущем в  $B$ . Действительно, покажем, что таких ребер не меньше, чем  $\beta - r^2 C_{n-2}^{r-2}$ . Пусть  $v \notin B$ , а  $w$  – ее гарантированный сосед из  $B$ . Пусть  $z \in B$  и  $z \neq w$ . Разумеется,  $z \neq w$ , ведь  $B$  – независимое множество. Получается, что  $r$ -элементные подмножества  $R, S$  множества  $[n]$ , отвечающие вершинам  $v, w$ , не пересекаются (вершины образуют ребро), а  $r$ -элементное подмножество  $T$ , отвечающее  $z$ , пересекает и  $R$  и  $S$ . Таких множеств  $T$  не больше, чем  $r^2 C_{n-2}^{r-2}$ . Следовательно, не более  $r^2 C_{n-2}^{r-2}$  вершин из  $B$  не соединены с

$v$ , откуда число вершин в  $B$ , являющихся соседками с  $v$ , не меньше  $\beta - r^2 C_{n-2}^{r-2}$ . Теорема доказана.

## ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Настоящая работа выполнена за счет гранта РФФИ (проект № 18-01-00355) и гранта президента НШ-6760.2018.1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. MacWilliams F.J., Sloane N.J.A. The theory of error-correcting codes. North-Holland, Amsterdam. 1977.
2. Raigorodskii A.M., Koshelev M.M. New bounds on clique-chromatic numbers of Johnson graphs // Discrete and Applied Math. 2020. V. 283. P. 724–729.
3. Кунавский А.Б., Сагдеев А.А. Теория Рамсея в пространстве с чебышевской метрикой // УМН. 2020. Т. 75. № 5 (455). С. 191–192.
4. Sagdeev A.A. On the Chromatic Numbers Corresponding to Exponentially Ramsey Sets // J. Math. Sciences. 2020. V. 247. № 3. P. 488–497.
5. Райгородский А.М. О разбиении множеств на части меньшего диаметра // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. С. 74–77.
6. Пушняков Ф.А., Райгородский А.М. Оценка числа ребер в особых подграфах некоторого дистанционного графа // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 2. С. 286–298.
7. Шишунов Е.Д., Райгородский А.М. О числах независимости некоторых дистанционных графов с вершинами в  $\{-1, 0, 1\}^n$  // ДАН. 2019. Т. 485. № 3.
8. Prosanov R. A new proof of the Larman–Rogers upper bound for the chromatic number of the Euclidean space // Discrete Applied Mathematics. 2020. V. 276. P. 115–120.
9. Просанов Р.И. Контрпримеры к гипотезе Борсука, имеющие большой обхват // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 6. С. 890–898.
10. Сагдеев А.А. Об одной теореме Франкла–Уилсона // Пробл. передачи информ. 2019. Т. 55. № 4. С. 86–106.
11. Бердников А.В., Райгородский А.М. Оценки чисел Борсука по дистанционным графам специального вида // Проблемы передачи информации. 2021. Т. 57. № 2. С. 44–50.
12. Frankl P., Kupavskii A. Almost intersecting families // Electron. J. Comb. 2021. V. 28. № 2. Research Paper P2.7. 16 p.
13. Frankl P., Kupavskii A. Simple juntas for shifted families // Discrete Anal. 2020. Paper No. 14. 18 p.
14. Shabanov D.A., Krokmal N.E., Kravtsov D.A. Pan-chromatic 3-colorings of random hypergraphs // Europ. J. Combinatorics. 2019. V. 78. P. 28–43.
15. Cherkashin D., Petrov F. Regular behavior of the maximal hypergraph chromatic number // SIAM J. Discrete Mathematics. 2020. V. 34. № 2. P. 1326–1333.

16. Райгородский А.М., Черкашин Д.Д. Экстремальные задачи в раскрасках гиперграфов // Успехи матем. наук. 2020. Т. 75. № 1. С. 95–154.
17. Шабанов Д.А., Шайхеева Т.М. О предписанном хроматическом числе полных многодольных гиперграфов и кратных покрытиях независимыми множествами // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 3. С. 454–465.
18. Semenov A., Shabanov D. On the weak chromatic number of random hypergraphs // Discrete Applied Mathematics. 2020. V. 276. P. 134–154.
19. Akhmetjanova M.B., Shabanov D.A. Equitable colorings of hypergraphs with few edges // Discrete Applied Mathematics. 2020. V. 276. P. 2–12.
20. Райгородский А.М., Михайлов К.А. О числе Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в  $\{0, 1\}^n$  // Матем. сборник. 2009. Т. 200. № 12. С. 63–80.
21. Frankl P., Füredi Z. Forbidding just one intersection // J. Combinatorial Theory. Series A. 1985. V. 39. P. 160–176.

## ESTIMATE OF THE NUMBER OF EDGES IN SUBGRAPHS OF JOHNSON'S GRAPH

Ph. A. Pushnyakov<sup>a</sup> and A. M. Raigorodskii<sup>a,b,c,d</sup>

<sup>a</sup> *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

<sup>c</sup> *Institute of Mathematics and Computer Science, Adygya State University, Maykop, Russian Federation*

<sup>d</sup> *Institute of Mathematics and Computer Science, Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

New estimates of the number of edges in subgraphs of Johnson's graph are obtained.

*Keywords:* Johnson's graph, distance graphs, Turán's theorem

## О ПОКРЫТИИ ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВ

© 2021 г. А. Д. Толмачев<sup>1,\*</sup>, Д. С. Протасов<sup>1,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 30.03.2021 г.

Поступило 22.04.2021 г.

После доработки 22.04.2021 г.

Принято к публикации 02.05.2021 г.

В статье предлагаются методы улучшения верхних и нижних оценок для различных покрытий множеств на плоскости. Приведены новые оценки для различного количества частей разбиения, а также предложения по обобщению представленных методов.

*Ключевые слова:* проблема Борсука, диаметр множества, покрытия плоских множеств, универсальные покрывающие системы, хроматическое число

DOI: 10.31857/S2686954321040147

### 1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть  $F$  – произвольное ограниченное множество на плоскости,  $n \in \mathbb{N}$ . Определим следующую величину:

$$d_n(F) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : \exists F_1, \dots, F_n : F \subseteq F_1 \cup \dots \cup F_n, \forall i \text{ diam}(F_i) \leq x\}.$$

Другими словами, среди всех покрытий множества  $F$  некоторыми  $n$  множествами  $F_1, \dots, F_n$  мы хотим выбрать покрытия, состоящие из множеств как можно меньшего диаметра.

Заметим, что величина  $d_n(F)$  не изменится, если потребовать, чтобы все множества покрытия были выпуклыми и замкнутыми. Это следует из того, что диаметр замыкания выпуклой оболочки произвольного множества  $F$  совпадает с диаметром  $F$ .

Заметим, что для произвольного  $F$  последовательность  $d_n(F)$  является невозрастающей, поскольку в классе всех покрытий  $n + 1$  множествами существует подкласс, для которого  $F_{n+1} = \emptyset$ , совпадающий с классом всех покрытий  $n$  множествами.

Определим величину  $d_n = \sup d_n(F)$ , где супремум берется по всем множествам  $F$  единичного диаметра на плоскости. Из сделанного выше за-

мечания ясно, что последовательность  $d_n$  не возрастает.

Исследование величин  $d_n$  глубоко мотивировано классической проблемой Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра (см. [1–4]). В разные годы Х. Ленц (см. [5]), М. Дембиньски и М. Лассак (см. [6]), В. Филимонов (см. [7]), Д. Белов и Н. Александров (см. [8]), В. Коваль (см. [9]) оценивали величину  $d_n$  для различных значений  $n$ . Нам удалось существенно усилить многие из предшествующих результатов. Новые результаты мы приведем в разделе 2, а ниже дадим еще несколько определений, важных для формулировок и их доказательств.

**Определение 1.** Множество  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  называется универсальной покрывкой, если любое плоское множество  $F$  единичного диаметра может быть полностью накрыто  $\Omega$  (т.е. на плоскости существует множество  $\Omega_0$ , конгруэнтное  $\Omega$ , такое что  $F \subset \Omega_0$ ).

В 1920 г. Й. Пал доказал [10], что правильный шестиугольник со стороной  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  является универсальной покрывкой. Введем для него обозначение  $\Omega_6$ . Приведем еще одно определение.

**Определение 2.** Система множеств  $S = \{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$  называется универсальной покрывающей системой, если любое плоское множество  $F$  единичного диаметра может быть полностью накрыто одним из множеств  $\Omega_\alpha$ . Здесь  $I$  – некоторый (возможно, бесконечный) набор индексов.

Рассмотрим произвольное множество  $F$  единичного диаметра. Накроем его множеством  $\Omega_6$  и

<sup>1</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

\*E-mail: [tolmachev.ad@phystech.edu](mailto:tolmachev.ad@phystech.edu)

\*\*E-mail: [dmitry.protasov@gmail.com](mailto:dmitry.protasov@gmail.com)

проведем все шесть прямых, которые перпендикулярны отрезкам, соединяющим центр шестиугольника со всеми его вершинами, и отстоят от центра на расстояние  $\frac{1}{2}$ . Эти прямые отсекают от  $\Omega_6$  шесть треугольников. Очевидно, для каждой пары треугольников, содержащих противоположные вершины, хотя бы один из них не содержит внутренних точек  $F$  (поскольку расстояние между этими треугольниками равно единице). Назовем такой треугольник отсеченным. Далее покрывшку с тремя подряд такими отсеченными уголками обозначим  $\Omega_{6,2}$ , а покрывшку с тремя отсеченными через один уголками обозначим  $\Omega_{6,1}$ . Несложно видеть, что  $\{\Omega_{6,1}, \Omega_{6,2}\}$  – универсальная покрывающая система.

Заметим, что правильный шестиугольник со стороной  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  (т.е. покрывшка  $\Omega_6$ ) с двумя отсеченными указанным выше способом уголками при вершинах, идущих через одну, тоже является универсальной покрывшкой, потому что им можно накрыть и  $\Omega_{6,1}$ , и  $\Omega_{6,2}$ . Обозначим такую универсальную покрывшку  $\Omega_2$ .

Кроме того, будем рассматривать величину

$$d'_n(F) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : \exists F_1, \dots, F_n : F \subseteq F_1 \cup \dots \cup F_n, \forall i \forall X, Y \in F_i : |XY| \neq x\},$$

где  $F$  – произвольное ограниченное множество на плоскости,  $n \in \mathbb{N}$ . Другими словами,  $d'_n(F)$  – инфимум по всем таким  $x$ , что  $F$  можно правильно покрасить в  $n$  цветов, если  $x$  считать за величину запрещенного расстояния. Таким образом, величина  $d'_n(F)$  мотивирована классической проблемой Нелсона–Хадвигера о раскраске плоскости (см. [11–17]).

Далее определим величину  $d'_n = \sup d'_n(F)$ , где супремум берется по всем множествам  $F$  единичного диаметра на плоскости. Ясно, что последовательность  $d'_n$  невозрастающая. Более того,  $d'_n = 0$  при всех натуральных  $n \geq 7$  как следствие известной оценки  $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$  для хроматического числа плоскости (см. [11]).

В следующем разделе мы приведем формулировки новых результатов и их сопоставление с ранее известными, а также вкратце обсудим идеи доказательства.

## 2. УЛУЧШЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

### 2.1. Формулировки

Приведем таблицу улучшенных результатов для элементов последовательности  $d'_n$  при  $1 \leq n \leq 30$  (табл. 1). В столбце “комментарий” указано, на

сколько процентов уменьшился “зазор” между верхней и нижней оценкой в результате предложенных в данной работе улучшений. В последнем столбце указан список фигур, рассматриваемых в качестве универсальной покрывающей системы для доказательства оценки сверху.

На рис. 1 изображены все покрывающие множества, используемые для получения верхних оценок. Разбиения для доказательства верхних оценок приведены в [18]. В доказательствах нижних оценок величин  $d'_{10}$ ,  $d'_{11}$  и  $d'_{54}$  в качестве множества диаметра 1 был рассмотрен круг единичного диаметра.

Все константы приведены с четырьмя верными знаками после запятой. Кроме улучшений, показанных в таблице, доказаны оценки  $\frac{1}{\sqrt{52}} \leq d'_{54}$  и  $d'_6 \leq 0.5$ .

### 2.2. Идеи доказательства

Для доказательства того, что  $d'_n \leq \rho$ , где  $\rho$  – некоторое фиксированное число, рассмотрим некоторую универсальную покрывающую систему  $S$  и разобьем каждое из множеств, входящих в нее, на  $n$  частей, диаметр каждой из которых не превосходит  $\rho$ . В табл. 1 в столбце “используемая УПС” приведена универсальная покрывающая система, используемая в доказательстве указанной верхней оценки величины  $d'_n$  для соответствующего значения  $n$ .

Разбиения элементов универсальной покрывающей системы на  $n$  частей диаметра  $\rho$  для всех улучшенных оценок мы не будем подробно описывать в данной работе, однако рассмотрим одно из наиболее красивых разбиений, которое значительно улучшает верхнюю оценку величины  $d'_{18}$ .

Положим  $\rho = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3}} \approx 0.2989$  и будем доказывать, что  $d'_{18} \leq \rho$ . Рассмотрим универсальную покрывающую систему  $S$ , состоящую из одного множества – универсальной покрывшки  $\Omega_6$ .

На рис. 2 правильный шестиугольник  $ABCDEF$  со стороной  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  соответствует покрывшке  $\Omega_6$ . Окружность  $\omega$  вписана в этот шестиугольник. Отрезок  $AO$  пересекает окружность  $\omega$  в точке  $N$ , а перпендикуляр к прямой  $AO$ , проходящий через точку  $N$ , пересекает отрезки  $AB$  и  $AF$  в точках  $A_1$  и  $A_2$  соответственно. Аналогично получим точки  $B_1, B_2, \dots, F_1, F_2$ . Можно показать, что двенадцатиугольник  $F_1F_2\dots B_1B_2A_1A_2$  является правильным. Тогда разобьем исходный шестиугольник на 6 равных четырехугольников  $OA_2AB_2, OB_2BC_2, \dots, OF_2FA_2$ . Рассмотрим один из этих четырехугольников и покажем, как его разбить на три части диаметра в

Таблица 1. Полученные результаты

<i>n</i>	Новая оценка снизу	Старая оценка снизу	Старая оценка сверху	Новая оценка сверху	Комментарий	Используемая УПС
1	—	1.0000	1.0000	—	точная	—
2	—	1.0000	1.0000	—	точная	—
3	—	0.8660	0.8660	—	точная	—
4	—	0.7071	0.7071	—	точная	—
5	—	0.5877	0.6020	0.5953	47%	$\Omega_{6,2}, \Omega_{6,1.1}, \Omega_{6,1.2.1}, \Omega_{6,1.2.2}, \Omega_{6,1.2.3}$
6	—	0.5051	0.5344	—	—	—
7	—	0.5000	0.5000	—	точная	—
8	—	0.4338	0.4456	—	—	—
9	—	0.3826	0.4047	—	—	—
10	0.3667	0.3420	0.4012	—	41%	—
11	0.3420 <sup>1)</sup>	0.3333	0.3970	0.3942	19%	$\Omega_2$
12	—	0.3333	0.3660	—	—	—
13	—	0.3333	0.3660	0.3550	33%	$\Omega_2$
14	—	0.3090	0.3324	—	—	—
15	—	0.2928	0.3324	0.3226	24%	$\Omega_2$
16	—	0.2817	0.3324	0.3191	26%	$\Omega_6$
17	—	0.2701	0.3324	0.3010	48%	$\Omega_2$
18	—	0.2588	0.3324	0.2989 <sup>2)</sup>	46%	$\Omega_6$
19	—	0.2500	0.2857	—	—	—
20	—	0.2500	0.2857	—	—	—
21	—	0.2393	0.2857	0.2723	29%	$\Omega_2$
22	—	0.2323	0.2857	0.2650	39%	$\Omega_2$
23	—	0.2225	0.2857	0.2650	33%	$\Omega_2$
24	—	0.2167	0.2849	0.2610	35%	$\Omega_{6,1}, \Omega_{6,2}$
25	—	0.2079	0.2776	0.2610	24%	$\Omega_{6,1}, \Omega_{6,2}$
26	—	0.2030	0.2709	0.2610	15%	$\Omega_{6,1}, \Omega_{6,2}$
27	—	0.2000	0.2646	0.2610	5%	$\Omega_{6,1}, \Omega_{6,2}$
28	—	0.2000	0.2587	0.2500	15%	$\Omega_2$
29	—	0.1950	0.2531	0.2500	5%	$\Omega_2$
30	—	0.1939	0.2479	—	—	—

<sup>1)</sup> Точное значение полученной нижней оценки для  $d_{11}$  равно  $\sin(\pi/9)$ .

<sup>2)</sup> Точное значение полученной верхней оценки для  $d_{18}$  равно  $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$ .

точности,  $\rho$ , откуда будет следовать, что исходный шестиугольник можно разбить на 18 частей диаметра  $\rho$ . Без ограничения общности будем рассматривать четырехугольник  $OD_2DE_2$ , который является вписанным, так как  $\angle E_2OD_2 = 60^\circ$  и  $\angle E_2DD_2 = 120^\circ$ . Пусть  $\gamma$  — описанная около  $OD_2DE_2$  окружность, а  $S$  — центр  $\gamma$ . Можно пока-

зать, что радиус окружности  $\gamma$  равен в точности  $\rho = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$ . Окружность радиуса  $\rho$  с центром в точке  $D_1$  пересекает отрезки  $OE_2$  и  $OD_2$  в точках  $U$  и  $V$  соответственно. Тогда четырехугольник  $OD_2DE_2$  разбивается на два четырехугольника  $OUSV$ ,  $USD_1E_2$  и один пятиугольник  $DD_1SVD_2$ , диаметр

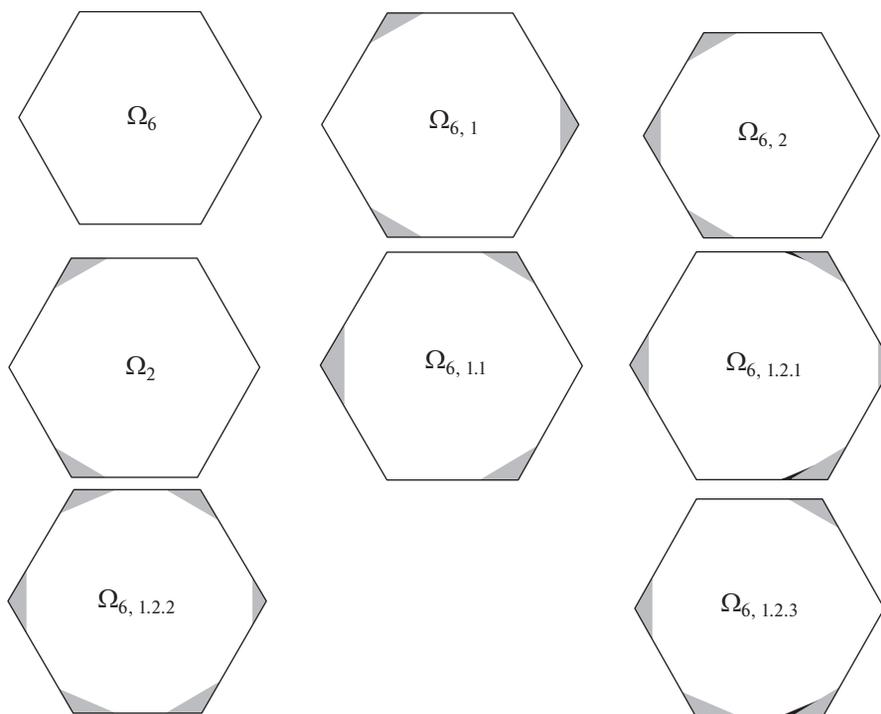


Рис. 1. Фигуры, используемые в УПС.

каждого из которых равен  $\rho$ . На рис. 2 длины отрезков, выделенных жирным пунктиром, равны  $\rho$ . Тем самым показано, что шестиугольник  $ABCDEF$  можно разбить на 18 частей, диаметр каждой из которых равен  $\rho$ . На рис. 2 выделены части данного разбиения.

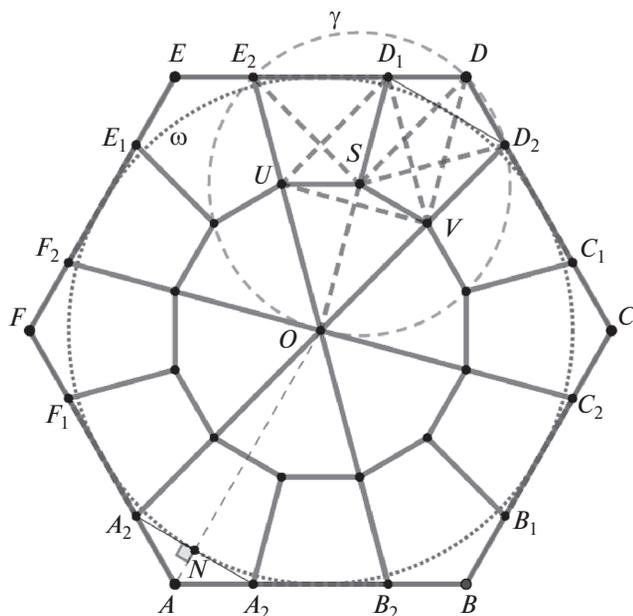


Рис. 2. Разбиение  $\Omega_6$  на 18 частей.

Выше мы показали, как получается верхняя оценка на примере оценки величины  $d_{18}$ . Также важно отметить, что эта оценка — единственная, которую удалось точно выразить в радикалах среди всех полученных в данном исследовании оценок.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают искреннюю благодарность своему научному руководителю А.М. Райгородскому за координацию работы над данной темой, а также В.П. Филимонову и В.А. Воронову за консультации по различным вопросам.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borsuk K. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre // Fundamenta Math. 1933. V. 20. P. 177–190.
2. Raigorodskii A.M. Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory. J. Pach ed. Springer. 2013. P. 429–460.
3. Райгородский А.М. О разбиении множеств на части меньшего диаметра // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. С. 74–77.
4. Berdnikov A.V., Raigorodskii A.M. Bounds for Borsuk's numbers using special distance graphs // submitted to Information Transmission Problems.
5. Lenz H. Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen von möglichst kleinem Durchmesser // Jber. Deutsch. Math. Verein. 1956. V. 58. P. 87–97.

6. *Dembiński M., Lassak M.* Covering plane sets with sets of three times less diameter // *Demonstratio Math.* 1985. V. 18. № 2. P. 517–526.
7. *Филимонов В.П.* О покрытии плоских множеств // *Матем. сборник.* 2010. Т. 201. № 8. С. 127–160.
8. *Белов Д., Александров Н.* О разбиении плоских множеств на шесть частей малого диаметра // *Труды МФТИ.* 2012. Т. 4. № 1. С. 11–13.
9. *Коваль В.О.* О разбиении плоских множеств на 6 частей малого диаметра // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* 2020. Т. 497. С. 100–123.
10. *Pal J.* Uber ein elementares Variationsproblem // *Danske Videnskab. Selskab. Math.-Fys. Meddel.* 1920. V. 3. № 2.
11. *Райгородский А.М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // *Успехи матем. наук.* 2001. Т. 56. № 1. С. 107–146.
12. *Просанов Р.И.* Контрпримеры к гипотезе Борсука, имеющие большой обхват // *Матем. заметки.* 2019. Т. 105. № 6. С. 890–898.
13. *Боголюбский Л.И., Райгородский А.М.* Замечание о нижних оценках хроматических чисел пространств малой размерности с метриками  $l_1$  и  $l_2$  // *Матем. заметки.* 2019. Т. 105. № 2. С. 187–213.
14. *Raigorodskii A.M., Koshelev M.M.* New bounds on clique-chromatic numbers of Johnson graphs // *Discrete and Applied Math.* 2020. V. 283. P. 724–729.
15. *Райгородский А.М., Кошелев М.М.* Новые оценки клико-хроматических чисел графов Джонсона // *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления.* 2020. Т. 490. С. 78–80.
16. *Prosanov R.* A new proof of the Larman–Rogers upper bound for the chromatic number of the Euclidean space // *Discrete Applied Mathematics.* 2020. №. 276. P. 115–120.
17. *Кунавский А.Б., Сагдеев А.А.* Теория Рамсея в пространстве с чебышевской метрикой // *Успехи матем. наук.* 2020. Т. 75. № 5. С. 191–192.
18. Разбиения для верхних оценок.  
<https://github.com/Vosatorp/Partitions>

## COVERING PLANAR SETS

**A. D. Tolmachev<sup>a</sup> and D. S. Protasov<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),  
Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

Problems connected with the classical Borsuk problem on partitioning a set in Euclidean space into subsets of smaller diameter. The article proposes methods for improving the upper and lower bounds for various coverings of planar sets. The obtained bounds are better than any known before. The article contains suggestions for the generalization of presented methods.

*Keywords:* Borsuk problem, diameter of a set, coverings of planar sets, universal covering sets and systems, chromatic number

УДК 517.977.58

## МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ВОРОНКИ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© 2021 г. Член-корреспондент РАН В. Н. Ушаков<sup>1,\*</sup>, А. А. Ершов<sup>1,\*\*</sup>

Поступило 16.04.2021 г.  
После доработки 11.05.2021 г.  
Принято к публикации 13.05.2021 г.

Рассматривается зависящая от параметра управляемая система в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Исследуется зависимость от параметра множеств достижимости и интегральных воронок дифференциального включения, соответствующего системе. Получены оценки, характеризующие эту зависимость.

*Ключевые слова:* управляемая система, дифференциальное включение, множество достижимости, интегральная воронка, хаусдорфово расстояние, аппроксимация

**DOI:** 10.31857/S2686954321040159

Рассматривается на конечном промежутке времени управляемая система в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , зависящая от параметра. Изучается зависимость от параметра множеств достижимости и интегральных воронок соответствующего системе дифференциального включения.

При исследовании множеств достижимости, их конструировании и оценивании применяются различные теоретические подходы и методы [1–7], сопровождаемые, как правило, разработкой вычислительных алгоритмов и программ. В многочисленных задачах теории динамических систем, и в том числе – теории управления динамическими системами, множества достижимости и интегральные воронки играют ключевую роль, являя собой базу для построения разрешающих управлений и стратегий [8–14]. Так, в задачах оптимального управления и дифференциальных играх множества разрешимости можно трактовать и конструировать как интегральные воронки управляемых систем, соответствующих исходным системам [1–5, 12, 13]. Кроме того, многие из задач теории управляемости динамических систем органически связаны с понятиями множеств достижимости и интегральных воронок [15].

В настоящей работе при определенных условиях на управляемую систему выводятся оценки,

характеризующие зависимость от параметра множеств достижимости и интегральных воронок соответствующего дифференциального включения.

### 1. УПРАВЛЯЕМАЯ СИСТЕМА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

На промежутке времени  $[t_0, \vartheta]$ ,  $t_0 < \vartheta < \infty$ , задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f_\alpha(t, x, u); \quad (1)$$

здесь  $t$  – время;  $x \in \mathbb{R}^n$  – фазовый вектор системы (1);  $u \in P \in \text{comp}(\mathbb{R}^p)$  – управляющее воздействие;  $\alpha \in \mathcal{L}$  – параметр,  $\mathcal{L}$  – компакт в метрическом пространстве  $\mathbb{E}$  с метрикой  $r(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  из  $\mathbb{E}$ ;  $\text{comp}(\mathbb{R}^k)$  – пространство компактов в  $\mathbb{R}^k$  с хаусдорфовой метрикой  $d(X_*, X^*) = \max(h(X_*, X^*), h(X^*, X_*))$ ,  $h(X_*, X^*) = \max_{x_* \in X_*} \rho(x_*, X^*)$  – хаусдорфово отклонение  $X_*$  от  $X^*$ , где  $\rho(x_*, X^*) = \min_{x^* \in X^*} \|x_* - x^*\|$ .

Предполагается, что система (1) удовлетворяет условиям:

А. Функция  $f_\alpha(t, x, u)$  определена на  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P \times \mathcal{L}$  и для любой ограниченной и замкнутой области  $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$  найдутся такие функция  $\omega^*(\xi)$ ,  $\xi \in (0, \infty)$  ( $\omega^*(\xi) \downarrow 0$ ,  $\xi \downarrow 0$ ) и непрерывная функция  $L(t) \in (0, \infty)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ , что

<sup>1</sup> Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

\*E-mail: ushak@imm.uran.ru

\*\*E-mail: ale10919@yandex.ru

$$\|f_\alpha(t, x, u) - f_\beta(\tau, x, u)\| \leq \omega^*(|t - \tau| + r(\alpha, \beta)),$$

$(t, x)$  и  $(\tau, x)$  из  $D$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  из  $\mathcal{L}$ ,  $u \in P$ ;

$$\|f_\alpha(t, x, u) - f_\alpha(t, y, u)\| \leq L(t)\|x - y\|,$$

$(t, x)$  и  $(t, y)$  из  $D$ ,  $\alpha \in \mathcal{L}$ ,  $u \in P$ .

Б. Найдется такое  $\gamma \in (0, \infty)$ , что

$$\|f_\alpha(t, x, u)\| \leq \gamma \cdot (1 + \|x\|),$$

$(t, x, u, \alpha) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P \times \mathcal{L}$ .

Введем многозначное отображение на  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$

$$(t, x) \mapsto F_\alpha(t, x) = \text{co}\mathcal{F}_\alpha(t, x),$$

$$\mathcal{F}_\alpha(t, x) = \{f_\alpha(t, x, u) : u \in P\}, \quad \alpha \in \mathcal{L}.$$

Отображение  $(t, x) \mapsto F_\alpha(t, x) \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$  удовлетворяет условиям, индуцируемым условиями А, Б.

А\*. Для любой ограниченной и замкнутой области  $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$  и функций  $\omega^*(r)$  и  $L(t)$  выполняются соотношения

$$d(F_\alpha(t, x), F_\beta(\tau, x)) \leq \omega^*(|t - \tau| + r(\alpha, \beta)),$$

$(t, x)$  и  $(\tau, x)$  из  $D$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  из  $\mathcal{L}$ ; (2)

$$d(F_\alpha(t, x), F_\alpha(t, y)) \leq L(t)\|x - y\|,$$

$(t, x)$  и  $(t, y)$  из  $D$ ,  $\alpha \in \mathcal{L}$ . (3)

Б\*. Справедливо неравенство

$$h(F_\alpha(t, x), \{0\}) \leq \gamma \cdot (1 + \|x\|),$$

$(t, x, \alpha) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}$ .

Введем дифференциальное включение (д.в.)

$$\frac{dx}{dt} \in F_\alpha(t, x), \quad (t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathcal{L}. \quad (4)$$

Пусть  $t_*$  и  $t^*$  из  $[t_0, \vartheta]$  ( $t_0 \leq t_* < t^* \leq \vartheta$ ),  $x_* \in \mathbb{R}^n$ ,  $X_* \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\alpha \in \mathcal{L}$ . Полагаем

$X_\alpha(t^*, t_*, x_*)$  – множество достижимости д.в. (4) в момент  $t^*$  с начальной точкой  $x(t_*) = x_*$ ,

$X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$  – множество достижимости д.в. (4) в момент  $t^*$  с начальным множеством  $X_*$ .

Известно, что  $X_\alpha(t^*, t_*, X_*) \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ , отображение  $(t^*, t_*, X_*) \mapsto X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$  непрерывно по  $t^*$  на  $[t_*, \vartheta]$  при фиксированных  $(t_*, X_*)$  и непрерывно зависит от  $X_*$  при фиксированных  $t_*$ ,  $t^*$ . Также отображение  $\alpha \mapsto X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$  непрерывно на  $\mathcal{L}$ .

## 2. О ЗАВИСИМОСТИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВОРОНОК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ОТ ПАРАМЕТРА

Уточним зависимость  $X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$  от  $\alpha$ : оценим сверху величину

$$d(X_\alpha(t^*, t_*, X_*), X_\beta(t^*, t_*, X_*)), \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathcal{L}, \quad (5)$$

как функцию от  $r(\alpha, \beta)$ .

Для этого введем разбиение  $\Gamma = \{\tau_0 = t_*, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N = t^*\}$  промежутка  $[t_*, t^*]$  ( $\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta_i = \Delta = \Delta(\Gamma) = N^{-1}(t^* - t_*)$ ) и систему множеств  $\{\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ , отвечающую этому разбиению:

$$\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_0) = X_*, \quad \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}) = \tilde{X}_\alpha(\tau_{i+1}, \tau_i, \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_i)),$$

$$i = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где обозначено  $\tilde{X}_\alpha(t^*, \tau_*, Y_*) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : x^* = y_* + (\tau^* - \tau_*)f_*, y_* \in Y_*, f_* \in F_\alpha(\tau_*, y_*)\}$ ,  $t_* \leq \tau_* < \tau^* \leq t^*$ ,  $Y_* \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ .

Множества  $X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$  и  $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*) = \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_N)$  при условиях А\*, Б\* стеснены равенством

$$X_\alpha(t^*, t_*, X_*) = \lim_{\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0} \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*); \quad (6)$$

здесь имеется в виду сходимость множеств в хаусдорфовой метрике.

Равенством (6) воспользуемся при выводе оценки величины (5). Учитывая условия, наложенные на систему (1), можем указать ограниченную и замкнутую область  $D$  в  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ , которая включает в себе все множества, участвующие в последующих выкладках. Считаем, что в этих выкладках задействованы функции  $\omega^*(r)$ ,  $r \in (0, \infty)$  и  $L(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ , отвечающие этой области.

Вывод оценки величины (5) сначала проведем для одноточечного множества  $X_* = \{x_*\}$ ,  $(t_*, x_*) \in D$ . При этом практикуем пошаговую схему рассуждений, продвигаясь в выводе оценки последовательно по шагам  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  разбиения  $\Gamma$ .

На начальном шаге рассмотрим промежуток  $[\tau_0, \tau_1]$ . Оценим сверху хаусдорфово отклонение  $h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1))$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  из  $\mathcal{L}$ ; здесь  $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1) = \tilde{X}_\alpha(\tau_1, \tau_0, x_*)$ ,  $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1) = \tilde{X}_\beta(\tau_1, \tau_0, x_*)$ .

В  $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1)$  выберем точку  $x(\tau_1)$ , где  $\rho(x(\tau_1), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1)) = h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1))$ . Точка  $x(\tau_1)$  представима в виде  $x(\tau_1) = x_* + \Delta f_\alpha(\tau_0)$ ,  $f_\alpha(\tau_0) \in F_\alpha(\tau_0, x_*)$ .

Вектор  $f_\beta(\tau_0)$ , ближайший к  $f_\alpha(\tau_0)$  в  $F_\beta(\tau_0, x_*)$ , удовлетворяет неравенству  $\|f_\alpha(\tau_0) - f_\beta(\tau_0)\| \leq h(F_\alpha(\tau_0, x_*), F_\beta(\tau_0, x_*)) \leq \omega^*(r(\alpha, \beta))$ .

Точка  $y(\tau_1) = x_* + \Delta f_\beta(\tau_0) \in \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1)$  удовлетворяет неравенству  $\|x(\tau_1) - y(\tau_1)\| \leq \Delta \omega^*(r(\alpha, \beta))$ . Из определения точки  $x(\tau_1)$  и включения  $y(\tau_1) \in \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1)$  следует

$$h(\tau_1) = h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1)) \leq \Delta \omega^*(r(\alpha, \beta)). \quad (7)$$

Обратимся теперь к промежутку  $[\tau_1, \tau_2]$  разбиения  $\Gamma$  и множествам  $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2) = \tilde{X}_\alpha(\tau_2, \tau_1, \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1))$ ,  $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2) = \tilde{X}_\beta(\tau_2, \tau_1, \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1))$ .

В  $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2)$  выберем точку  $x(\tau_2)$ , где

$$\rho(x(\tau_2), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2)) = h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2)). \quad (8)$$

Справедливо представление для  $x(\tau_2)$ :  $x(\tau_2) = x_*(\tau_1) + \Delta f_\alpha(\tau_1)$ ,  $x_*(\tau_1) \in \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1)$ ,  $f_\alpha(\tau_1) \in F_\alpha(\tau_1, x_*(\tau_1))$ .

В  $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1)$  выберем точку  $y_*(\tau_1)$ , ближайшую к  $x_*(\tau_1)$ :  $\|x_*(\tau_1) - y_*(\tau_1)\| = \rho(x_*(\tau_1), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1))$ . Справедлива оценка

$$\|x_*(\tau_1) - y_*(\tau_1)\| \leq h(\tau_1). \quad (9)$$

В  $F_\beta(\tau_1, y_*(\tau_1))$  выберем вектор  $f_\beta(\tau_1)$ , ближайший к  $f_\alpha(\tau_1)$ . Справедливо неравенство  $\|f_\alpha(\tau_1) - f_\beta(\tau_1)\| \leq h(F_\alpha(\tau_1, x_*(\tau_1)), F_\beta(\tau_1, y_*(\tau_1))) \leq \omega^*(r(\alpha, \beta)) + L(\tau_1)h(\tau_1)$ , согласно (2) и (3).

Введем точку  $y(\tau_2) = y_*(\tau_1) + \Delta f_\beta(\tau_1)$ ,  $y_*(\tau_1) \in \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1)$ ,  $f_\beta(\tau_1) \in F_\beta(\tau_1, y_*(\tau_1))$ .

Точки  $x(\tau_2)$  и  $y(\tau_2)$  стеснены неравенством

$$\begin{aligned} \|x(\tau_2) - y(\tau_2)\| &\leq \|x_*(\tau_1) - y_*(\tau_1)\| + \\ &+ \Delta \|f_\alpha(\tau_1) - f_\beta(\tau_1)\| \leq h(\tau_1) + \Delta(\omega^*(r(\alpha, \beta)) + \\ &+ L(\tau_1)h(\tau_1)) \leq \Delta \omega^*(r(\alpha, \beta)) + e^{L(\tau_1)\Delta_1} \cdot h(\tau_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Принимая во внимание (8) и включение  $y(\tau_2) \in \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2)$ , получаем

$$h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2)) \leq \|x(\tau_2) - y(\tau_2)\|. \quad (11)$$

Из (10), (11) следует

$$h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2)) \leq \Delta \omega^*(r(\alpha, \beta)) + e^{L(\tau_1)\Delta_1} h(\tau_1). \quad (12)$$

Рассмотрим следующий промежуток  $[\tau_2, \tau_3]$  разбиения  $\Gamma$  и множества  $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3) = \tilde{X}_\alpha(\tau_3, \tau_2, \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2))$ ,  $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3) = \tilde{X}_\beta(\tau_3, \tau_2, \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2))$ .

Оценим сверху  $h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3))$ . Для этого выберем точку  $x(\tau_3)$  в  $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3)$ :

$$\rho(x(\tau_3), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)) = h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)). \quad (13)$$

Точка  $x(\tau_3)$  представима в виде

$$\begin{aligned} x(\tau_3) &= x_*(\tau_2) + \Delta f_\alpha(\tau_2), \quad x_*(\tau_2) \in \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2), \\ f_\alpha(\tau_2) &\in F_\alpha(\tau_2, x_*(\tau_2)). \end{aligned}$$

Выберем в  $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2)$  точку  $y_*(\tau_2)$ , ближайшую к  $x_*(\tau_2)$ :

$$\|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\| = \rho(x_*(\tau_2), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2)).$$

Выполняется  $\|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\| \leq h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2))$ .

Выберем в  $F_\beta(\tau_2, y_*(\tau_2))$  вектор  $f_\beta(\tau_2)$ , ближайший к  $f_\alpha(\tau_2)$ , и получаем оценку

$$\begin{aligned} \|f_\alpha(\tau_2) - f_\beta(\tau_2)\| &\leq h(F_\alpha(\tau_2, x_*(\tau_2)), F_\beta(\tau_2, y_*(\tau_2))) \leq \\ &\leq \omega^*(r(\alpha, \beta)) + L(\tau_2) \cdot \|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\|. \end{aligned}$$

Рассмотрим точку  $y(\tau_3) = y_*(\tau_2) + \Delta f_\beta(\tau_2) \in \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)$ .

Точки  $x(\tau_3)$  и  $y(\tau_3)$  удовлетворяют неравенству

$$\begin{aligned} \|x(\tau_3) - y(\tau_3)\| &\leq \|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\| + \\ &+ \Delta(\omega^*(r(\alpha, \beta)) + L(\tau_2)\|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\|) \leq \\ &\leq \Delta \cdot \omega^*(\|\alpha - \beta\|) + \\ &+ e^{L(\tau_2)\Delta_2}(\Delta \omega^*(r(\alpha, \beta)) + e^{L(\tau_1)\Delta_1} h(\tau_1)). \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая (13) и  $y(\tau_3) \in \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)$ , имеем

$$h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)) \leq \|x(\tau_3) - y(\tau_3)\|. \quad (15)$$

Из оценок (7), (14), (15) получаем

$$\begin{aligned} h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)) &\leq \\ &\leq (1 + e^{L(\tau_2)\Delta_2} + e^{L(\tau_1)\Delta_1 + L(\tau_2)\Delta_2}) \cdot \Delta \omega^*(r(\alpha, \beta)). \end{aligned} \quad (16)$$

Анализируя оценки (12), (16), заключаем, что величина  $h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1}))$  стеснена неравенством

$$\begin{aligned} h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1})) &\leq \left( 1 + e^{\sum_{k=i}^i L(\tau_k)\Delta_k} + e^{\sum_{k=i-1}^i L(\tau_k)\Delta_k} + \right. \\ &\left. + e^{\sum_{k=i-2}^i L(\tau_k)\Delta_k} + \dots + e^{\sum_{k=i}^i L(\tau_k)\Delta_k} \right) \Delta \omega^*(r(\alpha, \beta)), \quad (17) \\ &i = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Оценка (17) обосновывается с помощью метода математической индукции.

Очевидно, что оценка сверху величины  $h(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}))$ ,  $i = 0, 1, \dots, N - 1$  аналогична оценке (17). Учитывая это, сформулируем утверждение.

**Л е м м а 1.** Пусть  $[t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$ ,  $X_* \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\Gamma = \{\tau_0 = t_*, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N = t^*\}$  ( $\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta_i = \Delta$ ,  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ ) и  $\{\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$  – система множеств (5), аппроксимирующая множество достижимости  $X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ ,  $\alpha \in L$  д.в. (4). Справедлива оценка

$$d(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1})) \leq \left( 1 + \sum_{s=0}^{i-1} e^{\sum_{k=i-s}^{i-1} L(\tau_k)\Delta_k} \right) \cdot \Delta \omega^*(r(\alpha, \beta)), \quad (18)$$

$\alpha$  и  $\beta$  из  $\mathcal{L}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Представим некоторые загробления этой оценки, более простые по форме.

Заменив в (18) единицу и экспоненты  $e^{\sum_{k=r}^{i-1} L(\tau_k)\Delta_k}$ ,  $r = 1, 2, \dots, i$ , большей экспонентой  $e^{\sum_{k=0}^{i-1} L(\tau_k)\Delta_k}$ , получаем оценку

$$d(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1})) \leq e^{\sum_{k=0}^{i-1} L(\tau_k)\Delta_k} \cdot (\tau_{i+1} - \tau_0) \omega^*(r(\alpha, \beta)). \quad (19)$$

В частности, справедлива оценка

$$d(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*), \tilde{X}_\beta^\Gamma(t^*)) \leq e^{\sum_{k=0}^{N-1} L(\tau_k)\Delta_k} \cdot (t^* - t_*) \omega^*(r(\alpha, \beta)). \quad (20)$$

Заменив в оценке (20) числа  $L(\tau_k)$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$ , каким-либо  $L$ , удовлетворяющим неравенству  $\max_{t \in [t_0, \vartheta]} L(t) \leq L < \infty$ , получаем более грубую оценку

$$d(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*), \tilde{X}_\beta^\Gamma(t^*)) \leq e^{L \cdot (t^* - t_*)} \cdot (t^* - t_*) \omega^*(r(\alpha, \beta)). \quad (21)$$

Мы изучили случай, когда  $X_* = \{x_*\}$ ,  $(t_*, x_*) \in D$ , и для него получили оценки (18)–(21). Эти оценки справедливы и в общем случае  $X_* \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ ,  $(t_*, X_*) \subset D$ .

В общем случае выделим из (18)–(21) для следующих выкладок оценку (20). Наряду с множествами  $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*)$  и  $\tilde{X}_\beta^\Gamma(t^*)$ , входящими в (20), рассмотрим множества достижимости  $X_\alpha(t^*) = X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$  и  $X_\beta(t^*) = X_\beta(t^*, t_*, X_*)$  д.в. (4).

Можно показать, что справедливы оценки

$$\begin{aligned} d(X_\alpha(t^*), \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*)) &\leq \\ &\leq e^{L \cdot (t^* - t_*)} (t^* - t_*) (\omega^*(\Delta) + LK\Delta), \\ d(X_\beta(t^*), \tilde{X}_\beta^\Gamma(t^*)) &\leq \\ &\leq e^{L \cdot (t^* - t_*)} (t^* - t_*) (\omega^*(\Delta) + LK\Delta); \end{aligned} \quad (22)$$

здесь  $K = \max(\|f_\alpha(t, x, u)\| : (t, x, u, \alpha) \in D \times P \times \mathcal{L}) < \infty$ ,  $\Delta = \Delta(\Gamma)$ .

Принимая во внимание (21), (22), получаем

$$\begin{aligned} d(X_\alpha(t^*), X_\beta(t^*)) &\leq \\ &\leq e^{\sum_{k=1}^{N-1} L(\tau_k)\Delta_k} \cdot (t^* - t_*) \omega^*(r(\alpha, \beta)) + \\ &+ 2e^{L \cdot (t^* - t_*)} \cdot (\omega^*(\Delta) + LK\Delta). \end{aligned}$$

Так как эта оценка имеет место при любых разбиениях  $\Gamma$  промежутка  $[t_0, \vartheta]$ , то устремив  $\Delta = \Delta(\Gamma)$  к нулю, получаем

$$d(X_\alpha(t^*), X_\beta(t^*)) \leq e^{\int_{t_*}^{t^*} L(t) dt} (t^* - t_*) \omega^*(r(\alpha, \beta)); \quad (23)$$

здесь  $\int_{t_*}^{t^*} L(t) dt$  – интеграл Римана функции  $L(t)$  на отрезке  $[t_*, t^*]$ .

В результате справедливо следующее утверждение.

**Л е м м а 2.** Пусть  $[t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$ ,  $X_* \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$  и  $L(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$  – функция, удовлетворяющая условию А. Тогда множество  $X_\alpha(t^*) = X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$  и  $X_\beta(t^*) = X_\beta(t^*, t_*, X_*)$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  из  $\mathcal{L}$  стеснены оценкой (23).

Обратимся теперь к промежутку  $[t_0, \vartheta]$ , на котором изначально рассматриваем систему (1) и д.в. (4). Полагая в предыдущих выкладках  $t_* = t_0$ ,  $t^* = t \in [t_0, \vartheta]$ ,  $X_* = X^{(0)} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ ,  $(t_0, X^{(0)}) \subset D$ , получаем для множества достижимости  $X_\alpha(t) = X_\alpha(t, t_0, X^{(0)})$  и  $X_\beta(t) = X_\beta(t, t_0, X^{(0)})$  оценку

$$d(X_\alpha(t), X_\beta(t)) \leq e^{\int_{t_0}^t L(\tau) d\tau} \cdot (t - t_0) \omega^*(r(\alpha, \beta)), \quad (24)$$

$t \in [t_0, \vartheta]$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  из  $\mathcal{L}$ .

Наряду с множествами достижимости  $X_\alpha(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ ,  $\alpha \in \mathcal{L}$  рассмотрим интегральные воронки  $X_\alpha(t_0, X^{(0)}) = \bigcup_{t \in [t_0, \vartheta]} (t, X_\alpha(t))$ ,  $\alpha \in \mathcal{L}$  д.в. (4).

Из определения интегральных воронок и оценки (24) следует

$$d(X_\alpha(t_0, X^{(0)}), X_\beta(t_0, X^{(0)})) \leq \int_0^{\vartheta} L(t) dt \cdot (\vartheta - t_0) \omega^*(r(\alpha, \beta)), \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathcal{L}. \quad (25)$$

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kurjanski A., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Systems & Control: Foundations & Applications. Boston, Basel, V.: Birkhäuser Basel and PIASA, 1997. 321 p.
2. Куржанский А.Б. Избранные труды. М.: Изд-во МГУ, 2009. 756 с.
3. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем: Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
4. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974. 456 с.
6. Lempio F., Veliov V.M. Discrete approximation of differential inclusions // Bayr. Math. Schriften. 1998. V. 54. P. 149–232.
7. Никольский М.С. Об аппроксимации множества достижимости дифференциального включения //

Вест. Москов. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1987. № 4. С. 31–34.

8. Вдовин С.А., Тарасьев А.М., Ушаков В.Н. Построение множества достижимости интегратора Брокитта // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68. Вып. 5. С. 707–794. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2004.09.001>
9. Ананьевский И.М. Синтез управления линейными системами с помощью методов теории устойчивости движения // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 3–11. <https://doi.org/10.1023/A:1025170521270>
10. Гусев М.И. Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 82–94. <https://doi.org/10.1134/S008154381006012X>
11. Филиппова Т.Ф. Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 262–269. <https://doi.org/10.1134/S008154381006009X>
12. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В. Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок дифференциальных включений // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки. 2011. Вып. 4. С. 23–39.
13. Ершов А.А., Ушаков В.Н. О сближении управляемой системы, содержащей неопределенный параметр // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 9. С. 56–99. <https://doi.org/10.1070/SM8761>
14. Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В., Охочимский Д.Е., Формальский А.М. Управление маятником при помощи маховика / Под ред. В.В. Александрова. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. С. 170–195.
15. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Шербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014. 560 с.

## REACHABLE SETS AND INTEGRAL FUNNELS OF DIFFERENTIAL INCLUSIONS DEPENDING ON THE PARAMETER

Corresponding Member of the RAS V. N. Ushakov<sup>a</sup> and A. A. Ershov<sup>a</sup>

<sup>a</sup> N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation

A parameter-dependent control system is considered in the Euclidean space  $\mathbb{R}^n$ . The dependence on the parameter of the reachable sets and integral funnels of the differential inclusion corresponding to the system is investigated. Estimates are obtained that characterize this dependence.

**Keywords:** control system, differential inclusion, reachable set, integral funnel, Hausdorff distance, approximation

УДК 517.984.5

## ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЗАДАЧИ СТЕКЛОВА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С БЫСТРО МЕНЯЮЩИМИСЯ УСЛОВИЯМИ НА ГРАНИЦЕ

© 2021 г. А. Г. Чечкина<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН В. В. Козловым 18.01.2021 г.

Поступило 10.02.2021 г.

После доработки 21.05.2021 г.

Принято к публикации 31.05.2021 г.

Рассмотрена спектральная задачи типа Стеклова для лапласиана в неограниченной области с гладкой границей. Условие Стеклова быстро чередуется с однородным условием Дирихле на части границы. Получены операторные оценки, с помощью которых изучено асимптотическое поведение собственных элементов исходной задачи при стремлении малого параметра к нулю. Малый параметр характеризует размер участков границы с условием Дирихле, расстояние между которыми имеет порядок логарифма малого параметра в отрицательной степени.

*Ключевые слова:* операторные оценки, задача Стеклова, граничное усреднение

**DOI:** 10.31857/S2686954321040044

Большой интерес последнее время вызывает задача Стеклова, зависящая от малого параметра (см., например, [1–5]). Предполагается, что микро-неоднородность сосредоточена на границе, аналогичные задачи см. [6–9]. В этой работе рассматривается задача в неограниченной области, у которой условие Стеклова быстро чередуется с условием Дирихле на границе. Мы получаем операторные оценки для этой задачи, а также и для аналогичной задачи в ограниченной области. Некоторые интегральные оценки для подобных задач см. в [10, 11].

Отметим, что техника операторных оценок, впервые появившаяся в работах М.С. Бирмана, Т.А. Суслиной, В.В. Жикова, С.Е. Пастуховой и G. Griso (см. работы [12, 13], а также ссылки в них), позволяет получать значительно более строгие результаты (сходимость резольвент в соответствующих нормах) по сравнению с результатами, получаемыми в теории сингулярных возмущений и теории усреднения. Слабая и сильная сходимость решений (из теории возмущений и теории усреднения) влечет только частичные результаты о сходимости спектра.

В настоящей работе рассмотрена задача в неограниченной области, что приводит к существенному усложнению структуры спектра зада-

чи, при этом получены точные по порядку оценки скорости сходимости, которые позволяют с помощью стандартных результатов спектральной теории самосопряженных операторов в гильбертовых пространствах доказать результат о сходимости спектра и соответствующих спектральных проекторов.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть связная область  $\Omega$  с непустой границей лежит в пространстве  $\mathbb{R}^2$  с локальными координатами  $x = (x_1, x_2)$ . Предполагается, что граница области  $\Omega$  имеет гладкость  $C^2$  и равномерно ограниченную кривизну. Отметим еще раз, что ограниченность области  $\Omega$  не предполагается.

Выберем на границе  $\partial\Omega$  точку  $x_0$  и назовем  $\Gamma_1$  множество точек  $x(s) \in \partial\Omega$  таких, что  $|s| < 1$ , где  $s$  – длина дуги от  $x_0$  до данной точки. Пусть  $s_k = k \cdot |\ln \varepsilon|^{\delta-1}$ ,  $x_k = x(s_k)$ , где  $\delta \in (0, 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , а  $\varepsilon$  – положительный малый параметр. Обозначим  $\Upsilon_\varepsilon = \{k : |k \cdot |\ln \varepsilon|^{\delta-1}| < 1\}$ .

Таким образом,  $\Gamma_1$  – часть границы  $\partial\Omega$  длины 2. Обозначим оставшуюся часть границы за  $\Gamma_2$ , т.е.  $\Gamma_2 := \partial\Omega \setminus \Gamma_1$ . Мы предполагаем, что  $\partial\Omega$  имеет в окрестности  $\Gamma_1$  гладкость  $C^3$ . При этом  $\Gamma_1$  состоит из двух быстро чередующихся частей (см. рис. 1):

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: chechkina@gmail.com

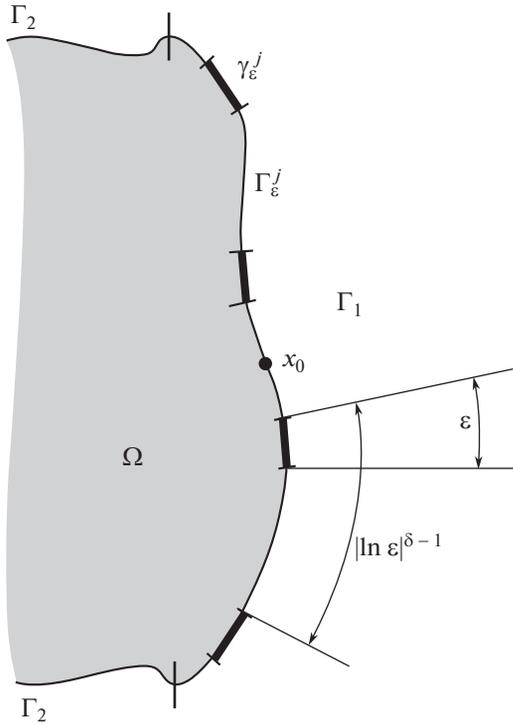


Рис. 1. Область  $\Omega$ .

$\Gamma_1 = \gamma_\epsilon \cup \Gamma_\epsilon$ , где  $\gamma_\epsilon = \bigcup_{k \in \Upsilon_\epsilon} \gamma_\epsilon^k$ ,  $\Gamma_\epsilon = \bigcup_{k \in \Upsilon_\epsilon} \Gamma_\epsilon^k$ . Длина  $|\gamma_\epsilon^k| = \epsilon$ ,

$\bar{\gamma}_s^j \cup \bar{\Gamma}_s^k = [x(s_k), x(s_{k+1})]$ ,  $k \in \Upsilon_\epsilon$ .

Рассмотрим следующую сингулярно возмущенную спектральную задачу с краевым условием Стеклова:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}u_\epsilon &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} &= \lambda u_\epsilon \quad \text{на } \Gamma_2 \cup \Gamma_\epsilon, \\ u_\epsilon &= 0 \quad \text{на } \gamma_\epsilon, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\hat{\mathcal{H}} := -\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + i \sum_{j=1}^2 \left( A_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} A_j \right) + A_0.$$

Здесь  $A_{ij} = A_{ij}(x)$ ,  $A_j = A_j(x)$ ,  $A_0 = A_0(x)$  – действительные функции, определенные в  $\bar{\Omega}$ , а  $i$  – мнимая единица. Предполагаем, что  $A_{ij}$  и  $A_j \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $A_0 \in C(\bar{\Omega})$ ,  $A_{ij} = A_{ji}$  и все эти функции равномерно ограничены на  $\bar{\Omega}$ ,

$$\sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c_0 \sum_{j=1}^2 \xi_j^2, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2,$$

где  $c_0 > 0$  – фиксированная константа. Через  $\frac{\partial}{\partial n}$  обозначена кономальная производная:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(x) v_i \frac{\partial}{\partial x_j} + i \sum_{j=1}^2 A_j v_j,$$

где  $v = (v_1, v_2)$  – единичная внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ .

Основное требование к области  $\Omega$  следующее. В пространстве  $W_2^1(\Omega)$  введем полуторалинейную форму:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(u, v) &:= \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx + \\ &+ i \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \left( A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \bar{v} - A_j u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} \right) dx + \int_{\Omega} A_0 u \bar{v} dx. \end{aligned}$$

Предполагается, что существуют такие константы  $c_1 > 0$  и  $\lambda_0 > 0$ , что для всех  $u \in W_2^1(\Omega)$  верна оценка

$$\mathfrak{h}(u, u) + \lambda_0 \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \geq c_1 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (2)$$

Имеет место

Л е м м а 1. Полуторалинейная форма

$$\mathfrak{h}_0(u, v) := \mathfrak{h}(u, v) + \lambda_0(u, v)_{L_2(\partial\Omega)}$$

определяет эквивалентное скалярное произведение в  $W_2^1(\Omega)$ .

Обозначим через  $W_2^1(\partial\Omega)$  пространство следов функций из  $W_2^1(\Omega)$  на  $\partial\Omega$ . Определим норму в  $W_2^1(\partial\Omega)$  как

$$\|g\|_{W_2^1(\partial\Omega)}^2 := \inf_{\substack{u \in W_2^1(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = g}} \mathfrak{h}_0(u, u).$$

Эта норма естественно возникает, если рассматривать пространство  $W_2^1(\partial\Omega)$  как факторпространство  $W_2^1(\Omega)/\hat{H}^1(\Omega)$ , где  $\hat{H}^1(\Omega)$  – подпространство  $W_2^1(\Omega)$ , состоящее из функций с нулевым следом на границе  $\Omega$ .

Для функций  $u \in \hat{H}^1(\Omega)$  неравенство (2) принимает форму

$$\mathfrak{h}(u, u) \geq c_1 \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2,$$

и, следовательно, краевая задача

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}U &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ U &= g \quad \text{на } \partial\Omega \end{aligned} \quad (3)$$

имеет единственное решение для каждого  $g \in W_2^1(\partial\Omega)$ .

Обозначим через  $\mathcal{A}: W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow W_2^1(\Omega)$  оператор, отображающий функцию  $g \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  в решение  $U$  задачи (3). Можно заметить, что

$$\|g\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 = \mathfrak{h}_0(\mathcal{A}g, \mathcal{A}g).$$

Это дает возможность определить скалярное произведение в пространстве  $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ .

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \mathcal{H}U_\varepsilon &= 0 & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial n} + \lambda_0 U_\varepsilon &= g & \text{на } \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon, \\ U_\varepsilon &= 0 & \text{на } \gamma_\varepsilon, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $g \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  — заданная функция. Задачу (4) мы понимаем в обобщенном смысле, решения ищутся в соболевском пространстве  $\dot{H}^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ , состоящем из функций пространства  $W_2^1(\Omega)$  с нулевым следом на  $\gamma_\varepsilon$ . Решение задачи (4) — функция  $U_\varepsilon \in \dot{H}^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ , удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\mathfrak{h}_0(U_\varepsilon, v) = (g, v)_{L_2(\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)} \quad (5)$$

для любого  $v \in \dot{H}^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ . Имея в виду тождество (5) и предположение (2), получаем, что задача (4) имеет единственное решение.

Обозначим оператор в  $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , отображающий каждую функцию  $g \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  в след решения задачи (4) на границе  $\Omega$ , через  $\mathcal{H}_\varepsilon$ . Ясно, что эти следы равны нулю на  $\gamma_\varepsilon$ . Тогда задача нахождения собственных значений задачи (1) может быть записана в виде

$$\mathcal{H}_\varepsilon \mathfrak{u}_\varepsilon = \Lambda \mathfrak{u}_\varepsilon,$$

где  $\mathfrak{u}_\varepsilon$  — след  $U_\varepsilon$  на  $\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon$ , а  $\Lambda := (\lambda + \lambda_0)^{-1}$ . В данной работе изучается спектр оператора  $\mathcal{H}_\varepsilon$ .

Пусть  $\mathcal{H}_0$  — тот же оператор, что и  $\mathcal{H}_\varepsilon$ , но в случае  $\gamma_\varepsilon = \emptyset$ ,  $\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon = \partial\Omega$ . Ясно, что оба этих оператора,  $\mathcal{H}_\varepsilon$  и  $\mathcal{H}_0$  ограничены.

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Первая теорема — об операторной сходимости.

**Теорема 1.** *Операторы  $\mathcal{H}_\varepsilon$  и  $\mathcal{H}_0$  являются самосопряженными в пространстве  $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . Имеет место оценка*

$$\|\mathcal{H}_\varepsilon - \mathcal{H}_0\| \leq C |\ln \varepsilon|^{\frac{\delta}{2}},$$

где  $\|\cdot\|$  — норма ограниченного оператора в пространстве  $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ,  $\delta = \text{const}$ ,  $0 < \delta < 1$ .

Следующий результат — о сходимости спектра оператора  $\mathcal{H}_\varepsilon$ .

**Теорема 2.** *Спектр оператора  $\mathcal{H}_\varepsilon$  сходится к спектру  $\mathcal{H}_0$ . Спектральные проекторы оператора  $\mathcal{H}_\varepsilon$  сходятся к спектральным проекторам оператора  $\mathcal{H}_0$ . А именно, если  $\lambda_0$  — дискретное собственное значение оператора  $\mathcal{H}_0$  кратности  $n$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то существует ровно  $n$  собственных значений оператора  $\mathcal{H}_\varepsilon$  с учетом кратности, сходящихся к  $\lambda_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . И полный проектор этих собственных значений сходится в норме ограниченных операторов в  $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  к проектору на собственное подпространство, порожденное  $\lambda_0$ .*

## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит рецензента, в результате внимательного и тщательного прочтения работы которого удалось значительно улучшить изложение результатов.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Математические методы анализа сложных систем”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mel'nyk T.A. Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Steklov problem in a thick periodic junction // Nonlinear Oscillations. 2001. V. 4. № 1. P. 91–105.
2. Pérez E. On periodic Steklov type eigenvalue problems on half-bands and the spectral homogenization problem // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2007. V. 7. № 4. P. 859–883.
3. Назаров С.А. Асимптотика решения спектральной задачи Стеклова в области с затупленным пиком // Мат. заметки. 2009. Т. 86. № 4. С. 571–587.
4. Чечкина А.Г. Усреднение спектральных задач с сингулярным возмущением условия Стеклова // Известия РАН. 2017. Т. 81. № 1. С. 203–240.
5. Chechkina A.G., D'Apice C., De Maio U. Rate of Convergence of Eigenvalues to Singularly Perturbed Steklov-Type Problem for Elasticity System // Applicable Analysis. 2019. V. 98. № 1-2. P. 32–44.
6. Гадыльшин Р.Р., Чечкин Г.А. Краевая задача для Лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области // Сиб. мат. журнал. 1999. Т. 40. № 2. С. 271–287.

7. Перес М.Е., Чечкин Г.А., Яблокова (Доронина) Е.И. О собственных колебаниях тела с “легкими” концентрированными массами на поверхности // Успехи мат. наук. 2002. Т. 57. Вып. 6. С. 195–196.
8. Chechkin G.A. On Vibration of Partially Fastened Membrane with Many “Light” Concentrated Masses on the Boundary // C. R. Mécanique. 2004. V. 332. № 12. P. 949–954.
9. Amirat Y., Chechkin G.A., Gadyl'shin R.R. Asymptotics of the Solution of a Dirichlet Spectral Problem in a Junction with Highly Oscillating Boundary // C. R. Mécanique. 2008. V. 336. № 9. P. 693–698.
10. Chechkin G.A., Koroleva Yu.O., Persson L.-E. On the Precise Asymptotics of the Constant in the Friedrich's Inequality for Functions, Vanishing on the Part of the Boundary with Microinhomogeneous Structure // Journal of Inequalities and Applications. 2007. V. 2007. article ID 34138. 13 pages. <https://doi.org/10.1155/2007/34138>
11. Chechkin G.A., Koroleva Yu.O., Meidell A., Persson L.-E. On the Friedrichs inequality in a domain perforated aperiodically along the boundary. Homogenization procedure. Asymptotics for parabolic problems. // Russ. J. Math. Phys. 2009. V. 16, P. 1–16.
12. Суслина Т.А. Усреднение задачи Дирихле для эллиптических уравнений высокого порядка с периодическими коэффициентами // Алгебра и анализ. 2017. Т. 29. № 2. С. 139–192.
13. Griso G. Interior error estimate for periodic homogenization. // Anal. Appl. 2006. V. 4. P. 61–79.

## OPERATOR ESTIMATES FOR THE STEKLOV PROBLEM IN UNBOUNDED DOMAIN WITH RAPIDLY CHANGING CONDITIONS ON THE BOUNDARY

A. G. Chechkina<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In the paper one considers a spectral problem of the Steklov type for the Laplacian in an unbounded domain with a smooth boundary. The Steklov condition rapidly alternates with the homogeneous Dirichlet condition on a part of the boundary. There are obtained operator estimates with the help of which the asymptotic behavior of the eigenelements of the original problem is studied as the small parameter tends to zero. The small parameter characterizes the size of the part of the boundary with the Dirichlet condition, the distance between which is of the order of the logarithm of the small parameter in the negative power.

*Keywords:* operator estimates, Steklov problem, boundary homogenization

УДК 519.626

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ

© 2021 г. А. Ф. Албу<sup>1,\*</sup>, академик РАН Ю. Г. Евтушенко<sup>1,\*\*</sup>, В. И. Зубов<sup>1,\*\*\*</sup>

Поступило 02.04.2021 г.  
После доработки 02.04.2021 г.  
Принято к публикации 08.06.2021 г.

Предложен алгоритм решения задачи определения коэффициента теплопроводности вещества по результатам наблюдения за динамикой температурного поля. Эффективность предлагаемого подхода базируется на применении современной методологии быстрого автоматического дифференцирования. Искомый коэффициент теплопроводности определяется из решения сформулированной в работе задачи оптимального управления.

*Ключевые слова:* обратные коэффициентные задачи, нелинейные задачи, уравнение теплопроводности, оптимальное управление, численные методы оптимизации, быстрое автоматическое дифференцирование

DOI: 10.31857/S2686954321040020

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При экспериментальном исследовании тепловых процессов нередко возникают ситуации, когда невозможно определить требуемую физическую величину путем проведения прямых измерений. В таких случаях прибегают к решению обратных задач, и интересующие характеристики восстанавливаются по результатам косвенных измерений [1, 2].

Рассматриваемая в работе обратная задача посвящена определению зависящего от температуры коэффициента теплопроводности вещества по результатам экспериментального наблюдения за динамикой температурного поля в объекте и (или) теплового потока на поверхности объекта. Предложен новый эффективный алгоритм решения этой обратной задачи, одним из важных элементов которого является методология быстрого автоматического дифференцирования (БАД-методология).

Рассматривается область  $Q \subset R^n$  с кусочно-гладкой границей  $S$ , заполненная исследуемым веществом. Динамика температурного поля в ве-

ществе описывается решением следующей начально-краевой задачи:

$$C(x) \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(K(T) \nabla_x T), \quad x \in Q, \quad (1)$$

$$T(x, 0) = w_0(x), \quad x \in Q, \quad (2)$$

$$T(x, t) = w_S(x, t), \quad x \in S, \quad 0 \leq t \leq \Theta. \quad (3)$$

Здесь  $x = (x_1, \dots, x_n)$  – декартовы координаты;  $t$  – время;  $T(x, t)$  – температура вещества в точке с координатами  $x$  в момент времени  $t$ ;  $C(x)$  – объемная теплоемкость вещества;  $K(T)$  – коэффициент теплопроводности;  $w_0(x)$  – заданная температура вещества в начальный момент времени  $t = 0$ ;  $w_S(x, t)$  – заданная температура на границе области. Объемная теплоемкость  $C(x)$  считается известной функцией координат.

Если коэффициент теплопроводности  $K(T)$  известен, то, решив прямую задачу (1)–(3), найдем распределение температуры  $T(x, t)$  в  $Q \times (0, \Theta]$ . Если же функция  $K(T)$  неизвестна, то ее определение представляет большой интерес. Обратная коэффициентная задача сводится к следующей вариационной задаче: требуется найти такую зависимость коэффициента теплопроводности вещества  $K(T)$  от температуры  $T$ , при которой температурное поле  $T(x, t)$  и потоки тепла  $\left(-K(T(x, t)) \frac{\partial T(x, t)}{\partial \bar{n}}\right)$  на границе объекта, полученные в результате решения прямой задачи (1)–(3), мало отличаются от температурного поля  $Y(x, t)$  и потока тепла  $P(x, t)$ ,

<sup>1</sup> Федеральный исследовательский центр  
“Информатика и управление”  
Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: alla.albu@yandex.ru

\*\*E-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru

\*\*\*E-mail: vladimir.zubov@mail.ru

полученных экспериментально. Мерой отклонения этих функций может служить величина

$$\begin{aligned} \Phi(K) = & \int_0^\Theta \int_Q [T(x,t) - Y(x,t)]^2 \cdot \mu(x,t) dxdt + \\ & + \int_0^\Theta \int_S \beta(x,t) \cdot \left[ -K(T(x,t)) \frac{\partial T(x,t)}{\partial n} - P(x,t) \right]^2 dSdt + \\ & + \varepsilon \int_a^b (K(T))^2 dT, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mu(x,t) \geq 0$ ,  $\beta(x,t) \geq 0$  и  $\varepsilon \geq 0$  – заданные весовые параметры;  $Y(x,t)$  – заданное температурное поле;  $P(x,t)$  – заданный тепловой поток на границе  $S$  области  $Q$ ,  $\frac{\partial T}{\partial n}$  – производная температуры по направлению внешней нормали к границе  $S$  области  $Q$ .

## 2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Подобные задачи оптимального управления обычно решаются численно с помощью некоторого метода спуска, который требует знания градиента функционала. При этом крайне важно определять точное значение этого градиента. Было получено аналитическое выражение градиента целевого функционала для сформулированной здесь задачи в  $n$ -мерной постановке. Однако использовать это аналитическое выражение при численном решении задачи практически невозможно в силу его сложности. В предлагаемом алгоритме для вычисления градиента функционала использовалась эффективная БАД-методология. Эффективность этой методологии обеспечивается использованием решения сопряженной задачи. Основным достоинством БАД-методологии является автоматическое построение такой аппроксимации сопряженной задачи, которая согласованна с выбранной аппроксимацией прямой задачи.

Важным элементом алгоритма решения обратной коэффициентной задачи является решение прямой задачи (1)–(3). От эффективности ее решения зависит эффективность решения обратной задачи в целом. Для аппроксимации уравнения теплопроводности в одномерном случае применялась двухслойная неявная схема с весами.

При использовании БАД-методологии аппроксимация сопряженной задачи однозначно определяется выбором аппроксимации прямой задачи, и при переходе от одномерного случая к многомерному влияние этого выбора становится более весомым. Так, если начально-краевая задача в двумерном случае аппроксимируется неявной схемой с весами, аппроксимация сопряжен-

ной задачи будет представлять собой линейную систему алгебраических уравнений, для разрешения которой (в силу двумерности по пространству) также требуется строить итерационный процесс. Поэтому для решения прямой задачи в многомерном случае рекомендуется использовать схемы переменных направлений [3, 4]. При дискретизации двумерной начально-краевой задачи была выбрана безусловно устойчивая ( $n = 2$ ) схема Писмена–Рекфорда [5].

Алгоритм решения прямой задачи в трехмерном случае заметно усложняется и требует больших затрат машинного времени. В [6] на примере ряда нелинейных задач для трехмерного уравнения теплопроводности проводится сравнительный анализ нескольких схем переменных направлений. При сравнении методов принимались во внимание точность получаемого решения и время достижения требуемой точности.

Сопряженные уравнения и формула для вычисления градиента целевого функционала, использовавшиеся при решении обратной задачи в трехмерном случае, получены для случая работы с локально-одномерной схемой. Для других схем эти формулы можно получить аналогичным образом.

Для численного решения задачи вводилась временная и пространственная сетки. В каждом сеточном узле расчетной области  $\bar{Q} \times [0, \Theta]$  все функции определялись своими точечными значениями. Отрезок  $[a, b]$ , на котором идентифицировалась функция  $K(T)$ , определялся как множество значений заданных функций  $w_0(x)$  и  $w_S(x,t)$ . Этот отрезок разбивался точками  $\tilde{T}_0 = a$ ,  $\tilde{T}_1$ ,  $\tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_M = b$  на  $M$  частей. Каждой из точек  $\tilde{T}_m$  ( $m = 0, \dots, M$ ) ставилось в соответствие число  $k_m = K(\tilde{T}_m)$ . Искомая функция  $K(T)$  аппроксимировалась непрерывной кусочно-линейной функцией с узлами в точках  $\{(\tilde{T}_m, k_m)\}_{m=0}^M$ , так что

$$K(T) = k_{m-1} + \frac{k_m - k_{m-1}}{\tilde{T}_m - \tilde{T}_{m-1}} (T - \tilde{T}_{m-1})$$

при  $\tilde{T}_{m-1} \leq T \leq \tilde{T}_m$  ( $m = 1, \dots, M$ ).

Целевой функционал (4) аппроксимировался функцией  $F(k_0, k_1, \dots, k_N)$  конечного числа переменных с помощью метода прямоугольников. Минимизация этой функции проводилась численно с помощью градиентных методов. Использование БАД-методологии позволило добиться того, что градиент целевой функции в предложенном алгоритме вычислялся с машинной точностью, что увеличивало скорость минимизации функционала.

Проведенные численные эксперименты показали, что качество восстановления коэффициента теплопроводности сильно зависит от распределения “экспериментальных” данных. Бывают случаи,

когда на некоторых участках отрезка  $[a, b]$  слишком мало данных, необходимых для идентификации коэффициента теплопроводности. Для анализа распределения экспериментальных данных по интервалам отрезка температур  $[a, b]$  вводится функция  $W_*(T)$  – относительная мера той под-области области  $Q \times (0, \Theta)$ , температура в точках которой меньше  $T$ . При решении конкретных задач необходимо предварительно проанализировать плотность распределения функции  $W_*(T)$ .

Было выявлено, что коэффициент теплопроводности не идентифицируется регулярным способом для тех значений  $T$ , при которых плотность распределения экспериментальных данных мала. Для его определения в таких точках требуется проведение дополнительных исследований или введение дополнительных предположений.

Отметим также, что в многомерном случае градиент целевого функционала распределен по температуре сильно неравномерно. Это приводит к ухудшению сходимости итерационного процесса в целом. Для ускорения итерационного процесса предложен подход, основанный на последовательном увеличении числа  $M$  разбиений отрезка  $[a, b]$  [5]. Начинать процесс желательно с  $M = 1$ . Полученное решение следует использовать в качестве начального приближения для варианта с  $M = 2$  и т.д.

Задача оптимального управления (1)–(4) может быть рассмотрена в двух крайних постановках. Если в целевом функционале  $\beta(x, t) = 0$ , то в качестве экспериментальных данных в задаче выступает заданное температурное поле (функционал “поле”). Если в (4)  $\mu(x, t) = 0$ , то в качестве экспериментальных данных выступает заданный тепловой поток на поверхности рассматриваемого объекта (функционал “поток”).

При исследовании обратной задачи с  $\beta(x, t) = 0$  (функционал “поле”) большое внимание уделялось практически важному случаю, когда температурное поле задано только в части рассматриваемого объекта. Анализ результатов решения большого числа обратных коэффициентных задач показал, что при использовании функционала “поле” обратная задача может иметь неединственное решение. Будет решение обратной задачи единственным или нет – существенно зависит от заданного экспериментального поля  $Y(x, t)$ . Ответ на вопрос, в каких случаях возможно появление неединственности решения сформулированной обратной коэффициентной задачи, может дать следующее утверждение.

**Л е м м а.** Пусть функция  $Y(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(G) \cap C^1(\bar{G})$  является решением прямой задачи (1)–(3) при двух допустимых коэффициентах теплопроводности  $K_1(T) \in C^1([a, b])$  и  $K_2(T) \in C^1([a, b])$ ,  $T \in [a, b]$ . Тогда

а) найдется функция  $R(T) \in C([a, b])$  такая, что

$$\Delta_x Y(x, t) = R(Y(x, t)) \cdot |\nabla_x Y(x, t)|^2,$$

б) при такой функции  $Y(x, t)$  решений  $K(T)$  обратной задачи бесконечно много.

Доказательство этого утверждения в  $n$ -мерном случае аналогично тому, которое приводится в [5] для двумерного случая.

В этом случае рекомендуется решать задачу идентификации коэффициента теплопроводности несколько раз, выбирая в качестве начального приближения каждый раз новую функцию. Если при этом получается одно и то же решение задачи оптимального управления, то его можно считать решением задачи идентификации. Если же решение задачи будет зависеть от выбора начального приближения, то необходимо задать дополнительное условие, например, задавать точку, в которой искомый коэффициент теплопроводности известен.

Необходимо отметить, что при исследовании большого числа задач с функционалом “поток” никогда не приходилось сталкиваться с неединственностью решения.

Известно, что в окрестности решения градиентные методы сходятся довольно медленно. Поэтому в работе исследовалась возможность применения оптимизационных методов второго порядка сходимости для решения рассматриваемой обратной коэффициентной задачи.

Так как рассматриваемый в работе функционал имеет квадратичный вид, то наиболее подходящим оптимизационным методом второго порядка сходимости в этом случае представляется метод Левенберга–Марквардта. При использовании этого метода вводится дополнительная вектор-функция  $\bar{U} = \{U_d\}_{d=1}^D$  ( $D$  – количество квадратичных слагаемых в функционале), элементы которой – квадратный корень каждого слагаемого целевого функционала. Далее строится матрица Якоби  $\Omega = \{\Omega_{dm}\}$  вектор-функции  $\bar{U}$ . Каждая  $d$ -я строка матрицы  $\Omega$  – это градиент функции  $U_d$  относительно компонент вектора управления  $k_0, k_1, \dots, k_M$ .

Точность вычисления элементов матрицы типа Якоби оказывает заметное влияние на сходимость метода Левенберга–Марквардта. Существенным в предлагаемом подходе является то, что элементы матрицы типа Якоби вычисляются с машинной точностью благодаря использованию БАД-методологии.

Согласно алгоритму Левенберга–Марквардта вектор управления  $\mathbf{k} = \{k_m\}_{m=0}^M$  меняется на каждой последующей итерации  $(s + 1)$  по формуле:  $\mathbf{k}_{s+1} = \mathbf{k}_s + \mathbf{r}_s$ . Направление спуска  $\mathbf{r}_s$  определяет-

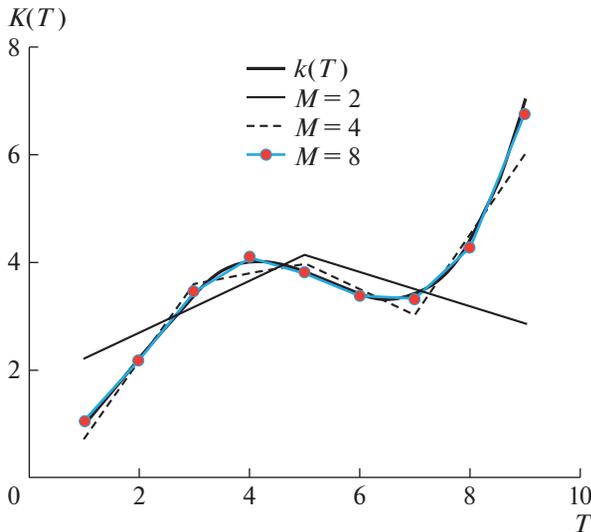


Рис. 1. Пример построения решения задачи идентификации.

ся как решение следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$[\Omega^T(\mathbf{k}_s)\Omega(\mathbf{k}_s) + \lambda_s \text{diag}(\Omega^T(\mathbf{k}_s)\Omega(\mathbf{k}_s))] \mathbf{r}_s = -\Omega^T(\mathbf{k}_s)\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{k}_s).$$

На основании проведенных исследований предлагается рассчитывать константы  $\lambda_s$  для рассматриваемой обратной задачи по формуле

$$\lambda_s = \alpha \cdot \max_{0 \leq m \leq M} (\text{diag}(\Omega^T(\mathbf{k}_s)\Omega(\mathbf{k}_s))),$$

где  $\alpha > 0$  – некоторая константа, зависящая от задачи.

Для проверки работоспособности и эффективности предложенного алгоритма было решено большое количество тестовых задач. Во всех рассмотренных случаях коэффициент теплопроводности восстанавливался с высокой точностью.

В качестве примера приведем задачу определения коэффициента теплопроводности вещества при следующих входных данных: в качестве начальной функции  $w_0(x, y, z)$  и граничной функции  $w_T(x, y, z, t)$  выбраны следы функции  $\Lambda(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{9 \cdot (x+1)^2 + 20y^2 + 25z^2}{9-8t}}$  на параболической границе области  $Q \times (0, \Theta) = (0,1) \times (0,1) \times (0,1) \times (0, 1)$ . Анализ входных данных позволил определить диапазон изменения температуры:  $a = 1, b = 9$ . В качестве “экспериментальных” данных использовался поток тепла, вычисленный по температурному полю, полученному в результате решения прямой задачи (1)–(3)

при  $C(x) = 1$  и с коэффициентом теплопроводности:

$$k(T) = \begin{cases} 0.1 \cdot (T-3) \cdot (T-6) \cdot (T-7) + 3.4, & T \geq 3, \\ 1.2 \cdot (T-3) + 3.4, & T < 3. \end{cases}$$

Анализ распределения “экспериментальных” данных показал, что на правом конце отрезка  $[1.0, 9.0]$  практически нет “экспериментальных” данных. Проведенные расчеты показали, что при равномерном разбиении отрезка температур на  $M = 64$  интервала последняя компонента вектора градиента равнялась нулю с машинной точностью, т.е. коэффициент теплопроводности можно идентифицировать лишь на отрезке  $[1.0, 8.875]$ .

Процесс построения решения задачи идентификации проиллюстрирован на рис. 1. Там представлены функция  $k(T)$  и оптимальные управления, полученные при  $M = 2, 4, 8$ . Видно, что опорные точки кусочно-линейного оптимального управления, полученного при  $M = 8$ , почти лежат на “теоретической” линии  $K(T) = k(T)$ .

График оптимального управления, полученного при  $M = 64$ , совпадает с графиком функции  $k(T)$ . Максимальное отклонение рассчитанного коэффициента теплопроводности  $K_{opt}(T)$  от его аналитического значения  $K(T) = k(T)$  на отрезке  $[1.0, 8.875]$  составляет  $1.3914 \times 10^{-7}$ .

Для всех рассмотренных примеров было проведено численное исследование устойчивости получаемых решений. “Экспериментальные” данные возмущались с помощью генератора случайных чисел. Необходимо отметить, что использование небольшого количества разбиений отрезка температур ( $M \leq 15$ ) действует как сглаживающий фактор при решении задачи. При умеренном возмущении “экспериментальных” данных осцилляции в решении задачи появляются, когда отрезок температур разбивается на большое количество интервалов ( $M \geq 20$ ).

Анализ проведенных исследований показал, что возмущения в решениях задач, полученные с помощью предложенного алгоритма, имеют тот же порядок, что и вызвавшие их возмущения в экспериментальных данных. При малых возмущениях в экспериментальных данных (до 10%) осцилляции в решениях задач практически незаметны даже при большом количестве  $M$  разбиений отрезка температур.

При умеренных возмущениях в экспериментальных данных (10–25%) необходимо решать оптимизационную задачу с функционалом, в котором присутствует регуляризатор, т.е. в целевом функционале параметр  $\epsilon > 0$ .

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 21-71-30005).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 279 с.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
4. Ch. Gao, Y. Wang. A general formulation of Peaceman and Rachford ADI method for the N-dimensional heat diffusion equation // Int. Comm. Heat Mass Transfer. 1996. V. 23. № 6. P. 845–854.
5. Албу А.Ф., Zubov В.И. О восстановлении коэффициента теплопроводности вещества по температурному полю // ЖВМиМФ. 2018. Т. 58. № 10. С. 1642–1657.
6. Албу А.Ф., Евтушенко Ю.Г., Zubov В.И. О выборе разностных схем при решении обратных коэффициентных задач // ЖВМиМФ. 2020. Т. 60. № 10. С. 1643–1655.

## ON ONE APPROACH TO THE NUMERICAL SOLUTION OF THE INVERSE COEFFICIENT PROBLEM

**A. F. Albu<sup>a</sup>, Academician of the RAS Yu. G. Evtushenko<sup>a</sup>, and V. I. Zubov<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

An approach to solving the problem of determining the thermal conductivity coefficient of a substance based on the results of observing the dynamics of the temperature field is proposed. The effectiveness of the proposed approach is based on the application of the modern Fast Automatic Differentiation methodology. The required thermal conductivity coefficient is determined from the solution of the formulated optimal control problem.

*Keywords:* Inverse coefficient problems, nonlinear problems, heat conduction equation, optimal control, numerical optimization methods, Fast Automatic Differentiation

УДК 004.855

## ДВУХУРОВНЕВЫЙ МЕТОД РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ АНСАМБЛИ ДЕРЕВЬЕВ С ОПТИМАЛЬНОЙ ДИВЕРГЕНЦИЕЙ

© 2021 г. Академик РАН Ю. И. Журавлев<sup>1,\*</sup>, О. В. Сенько<sup>1,\*\*</sup>,  
А. А. Докукин<sup>1,\*\*\*</sup>, Н. Н. Киселева<sup>2,\*\*\*\*</sup>, И. А. Саенко<sup>3,\*\*\*\*\*</sup>

Поступило 17.06.2021 г.

После доработки 17.06.2021 г.

Принято к публикации 19.06.2021 г.

Рассмотрен новый двухуровневый метод регрессионного анализа, в котором корректирующая процедура применяется к оптимальным ансамблям регрессионных деревьев. При этом оптимизация производится исходя из одновременного достижения расходимости алгоритмов в пространстве прогнозов и хорошей аппроксимации данных отдельными алгоритмами ансамбля. В качестве корректирующих процедур рассматриваются простое усреднение, случайный регрессионный лес и градиентный бустинг. Приведены эксперименты по сравнению предложенного метода со стандартным решающим лесом и стандартным методом градиентного бустинга для решающих деревьев.

*Ключевые слова:* регрессия, коллективные методы, бэггинг, градиентный бустинг

**DOI:** 10.31857/S2686954321040172

### ВВЕДЕНИЕ

Методы регрессионного моделирования, основанные на вычислении более точного коллективного прогноза, по прогнозам, вычисленным набором (ансамблем) менее точных и более простых исходных алгоритмов, получили самое широкое распространение в современном машинном обучении. К числу таких методов может быть отнесен регрессионный случайный лес, а также методы, основанные на использовании адаптивного или градиентного бустинга. Важную роль при построении коллективных алгоритмов играет способ получения исходного ансамбля так называемых слабых алгоритмов. Теоретический анализ показывает, что увеличение обобщающей

способности может быть достигнуто за счет выбора ансамбля алгоритмов, обладающих не только высокой точностью, но и максимально расходящимися прогнозами [1]. Низкая коррелированность прогнозов потенциально позволяет также добиваться более точной аппроксимации алгоритма, объективно обеспечивающей наиболее точный прогноз, с использованием ограниченного числа алгебраических операций [2, 3]. В методе “регрессионный случайный лес” расходимость прогнозов достигается за счет обучения алгоритмов ансамбля на различных выборках, генерируемых из исходной обучающей выборки с использованием процедуры бутстрэпа [4]. В методе градиентного бустинга [5] ансамбль генерируется последовательно. При этом на каждой итерации в ансамбль добавляются деревья, аппроксимирующие первые производные функции потерь по переменным, соответствующим коллективному прогнозу.

Другой важной составляющей является способ вычисления коллективного прогноза, который может также интерпретироваться как результат взаимной коррекции прогнозов. В методе “случайный регрессионный лес” коррекция осуществляется простым вычислением средних прогнозов.

Другим возможным способом организации корректирующей процедуры является схема стэкинга, в которой выходы алгоритмов ансамбля рассматриваются как входные признаки алгоритма,

<sup>1</sup> Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление”

Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup> Институт металлургии и материаловедения им. А.А. Байкова Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>3</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: zhur@ccas.ru

\*\*E-mail: senkoov@mail.ru

\*\*\*E-mail: dalax@ccas.ru

\*\*\*\*E-mail: kis@imet.ac.ru

\*\*\*\*\*E-mail: i.a.saenko@mail.ru

вычисляющего выходной скорректированный прогноз [6, 7]. Эффективность стэкинга, как правило, оказывается низкой при использовании его для вычисления коллективных решений по наборам слабых алгоритмов, генерируемых с помощью процедур, применяемых при генерации случайных лесов. Можно предположить, что причиной снижения эффективности является недостаточное расхождение слабых алгоритмов в пространстве прогнозов при стандартных способах генерации ансамблей.

Целью работы является исследование эффективности двухуровневого метода увеличения обобщающей способности, предусматривающего построение ансамбля, состоящего из алгоритмов с высокой степенью расхождения в пространстве прогнозов и хорошей аппроксимацией этими алгоритмами целевой переменной. При этом в качестве корректирующей процедуры рассматриваются простое усреднение и стэкинг.

## ДВУХУРОВНЕВЫЙ МЕТОД

Пусть  $\{A_1(X), \dots, A_{k-1}(X)\}$  – некоторый ансамбль алгоритмов, предсказывающих значение переменной  $y$  по вектору  $X$  переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Предполагается, что алгоритмы ансамбля обучаются по выборке  $S = \{(X_1, y_1), \dots, (X_m, y_m)\}$ . Предварительно выбирается базовый метод регрессионного анализа. Обычно в качестве такого метода выступает модель регрессионного дерева. Обозначим  $L_k(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k A_i(X)$ ,  $Q_k(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k A_i^2(X)$ . В соответствии с объявленной целью ансамбль должен строиться, исходя из одновременной минимизации критерия  $\Phi_E$ :

$$\Phi_E(A_1(X), \dots, A_k(X)) = \frac{1}{mk} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (y_j - A_i(X_j))^2,$$

оценивающего среднюю ошибку аппроксимации  $y$  по вектору  $X$ , и  $\Phi_V$ :

$$\Phi_V(A_1(X), \dots, A_k(X)) = \frac{1}{mk} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (L_k(X_j) - A_i(X_j))^2,$$

представляющего собой дисперсию прогнозов вычисляемых алгоритмами ансамбля.

Задача одновременной минимизации  $\Phi_E$  и максимизации  $\Phi_E$  может быть сведена к минимизации

$$\Phi_G = (1 - \mu)\Phi_E - \mu\Phi_V,$$

где  $\mu \in [0, 1]$  регулирует вклад разнородности ансамбля в смысле дисперсии прогнозов.

Обозначим через  $D_E^k$  и  $D_V^k$  изменения функционалов  $\Phi_E$  и  $\Phi_V$  при включении в ансамбль дополнительно алгоритма  $A_{k+1}$ .

$$\begin{aligned} D_E^k &= \Phi_E(A_1(X), \dots, A_{k+1}(X)) - \Phi_E(A_1(X), \dots, A_k(X)) = \\ &= \left( \Phi_E(A_1(X), \dots, A_k(X)) * k + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (y_j - A_{k+1}(X_j))^2 \right) \frac{1}{k+1} - \\ &\quad - \Phi_E(A_1(X), \dots, A_k(X)) = \frac{1}{m(k+1)} \times \\ &\times \sum_{j=1}^m (y_j - A_{k+1}(X_j))^2 - \frac{1}{k+1} \Phi_E(A_1(X), \dots, A_k(X)) = \\ &= \frac{1}{m(k+1)} \sum_{j=1}^m (y_j - A_{k+1}(X_j))^2 - C_E, \end{aligned}$$

где  $C_E$  не зависит от  $A_{k+1}(X)$ .

Для расчета  $D_V$  потребуется использовать известное выражение для дисперсии:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k (L_k(X_j) - A_i(X_j))^2 &= \sum_{j=1}^m (Q_k(X_j) - L_k^2(X_j)); \\ D_V^k &= \Phi_V(A_1(X), \dots, A_{k+1}(X)) - \Phi_V(A_1(X), \dots, A_k(X)) = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (Q_{k+1}(X_j) - L_{k+1}^2(X_j)) - \\ &\quad - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (Q_k(X_j) - L_k^2(X_j)) = \frac{1}{m(k+1)} \times \\ &\quad \times \sum_{j=1}^m \left( -Q_k(X_j) + A_{k+1}^2(X_j) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{k+1} (kL_k(X_j) + A_{k+1}(X_j))^2 + (k+1)L_k^2(X_j) \right) = \\ &= \frac{k}{m(k+1)^2} \sum_{j=1}^m (A_{k+1}^2(X_j) - 2L_k(X_j)A_{k+1}(X_j)) + C_V, \end{aligned}$$

где  $C_V$  не зависит от  $A_{k+1}(X)$ .

Одним из способов решения задачи минимизации  $\Phi_G$  является сведение ее к поиску и включению в ансамбль алгоритма  $A_{k+1}$ , для которого оказывается минимальным функционал  $D_G$ :

$$\begin{aligned} D_G^k &= (1 - \mu)D_E^k - \mu D_V^k = \\ &= \frac{1 - \mu}{m(k+1)} \sum_{j=1}^m (y_j - A_{k+1}(X_j))^2 - \\ &\quad - \frac{\mu k}{m(k+1)^2} \sum_{j=1}^m (A_{k+1}^2(X_j) - 2L_k(X_j)A_{k+1}(X_j)) + C_G, \end{aligned}$$

Таблица 1. Результаты экспериментов

	reference	forest	boosting	average
$I2/m, a$	$0.943 \pm 0.0012$	$0.948 \pm 0.0031$	$0.941 \pm 0.005$	$0.94 \pm 0.0025$
$I2/m, b$	$0.692 \pm 0.0087$	$0.78 \pm 0.0038$	$0.746 \pm 0.012$	$0.758 \pm 0.0088$
$I2/m, c$	$0.847 \pm 0.004$	$0.875 \pm 0.0052$	$0.856 \pm 0.0051$	$0.87 \pm 0.0063$
$I4/m, c$	$0.99 \pm 0.0015$	$0.993 \pm 0.0006$	$0.993 \pm 0.0007$	$0.994 \pm 0.0003$
$Fm3(-)m, a$	$0.636 \pm 0.0019$	$0.639 \pm 0.0026$	$0.615 \pm 0.0034$	$0.631 \pm 0.0041$
$P2_1/n, a$	$0.593 \pm 0.0075$	$0.575 \pm 0.005$	$0.575 \pm 0.0052$	$0.572 \pm 0.0041$
$P2_1/n, b$	$0.928 \pm 0.0004$	$0.903 \pm 0.0019$	$0.895 \pm 0.0025$	$0.906 \pm 0.0009$
$P2_1/n, c$	$0.441 \pm 0.0047$	$0.516 \pm 0.0103$	$0.439 \pm 0.013$	$0.54 \pm 0.008$
$R3(-), c$	$0.319 \pm 0.0146$	$0.343 \pm 0.013$	$0.364 \pm 0.0178$	$0.346 \pm 0.0134$
$A_3BHal_6, Tm$	$0.903 \pm 0.0001$	$0.893 \pm 0.0015$	$0.89 \pm 0.0014$	$0.895 \pm 0.0009$
$ABHal_3, Tm$	$0.861 \pm 0.02$	$0.874 \pm 0.022$	$0.881 \pm 0.021$	$0.871 \pm 0.021$

где  $G_k$  не зависит от  $A_{k+1}(X)$ . Построение алгоритма, включаемого в ансамбль на шаге  $k + 1$  производится с помощью комбинации бэггинга и варианта градиентного бустинга, реализуемой в два этапа:

1. На первом этапе из исходной выборки  $S$  с использованием датчика случайных чисел генерируется выборка с возвращениями  $S_{k+1}^0$ . Алгоритм  $A_{k+1}^0$  обучается далее по выборке  $S_{k+1}^0$ .

2. На втором этапе строится алгоритм  $A_{k+1}$ , который собственно должен войти в ансамбль. Прогноз значения  $y$  в точке  $X$  вычисляется алгоритмом  $A_{k+1}$  по формуле

$$A_{k+1}(X) = A_{k+1}^0(X) - \epsilon G_{k+1}(X),$$

где  $G_{k+1}(X)$  – алгоритм, вычисляющий в точке  $(A_{k+1}^0(X_1), \dots, A_k^0(X_m))$  прогноз градиента функционала  $D_G^k(A_k(X_1), \dots, A_{k+1}(X_m))$ .

Алгоритм  $G_{k+1}$  обучается по выборке  $\left\{ \left( X_1, \frac{\partial D_G^k}{\partial A_{k+1}(X_1)} \Big|_{A_{k+1}^0(X_1)} \right), \dots, \left( X_m, \frac{\partial D_G^k}{\partial A_{k+1}(X_m)} \Big|_{A_{k+1}^0(X_m)} \right) \right\}$ .

Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial D_G^k}{\partial A_{k+1}(X_i)} = \frac{-2(1 - \mu)}{m(k + 1)} (y_i - A_{k+1}(X_i)) - \frac{\mu 2k}{m(k + 1)^2} (A_{k+1}(X_i) - L_k(X_i)).$$

### ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Метод был реализован на языке python с помощью библиотеки scikit-learn [8]. Так, базовые деревья строятся с помощью метода BaggingRegressor.

На втором уровне используется либо GradientBoostingRegressor (далее этот вариант называется boosting), либо RandomForestRegressor (forest), либо усредняются результаты базовых методов (average). GradientBoostingRegressor также используется в качестве референсного метода для оценки эффективности предлагаемого метода.

Разработанный метод использовался для прогнозирования различных параметров кристаллической решетки сложных неорганических соединений: параметров кристаллической решетки соединений состава  $A_2^+B^{+3}C^{+5}O_6$ , и температуры плавления галогенидов состава  $A_3BHal_6$  и  $ABHal_3$ . Для различных пространственных групп симметрии приведены результаты для части параметров, допускаящих достаточно надежный прогноз, а именно: для моноклинных пространственных групп (пр. гр.  $I2/m$  и  $P2_1/n$ ) предсказывались параметры  $a, b$  и  $c$ , для тетрагональных (пр. гр.  $I4/m$ ) и гексагональных (пр. гр.  $R3(-)$ ) – параметр  $c$ , для кубических (пр. гр.  $Fm3(-)m$ ) – параметр  $a$ . Для оценки точности использовался стандартный показатель  $r^2$ , или коэффициент детерминации, который вычислялся с использованием метода кросс-валидации. В связи с тем, что генерация алгоритмов в процедуре бэггинга происходит в значительной мере случайно, результаты решения одной и той же задачи изменяются от эксперимента к эксперименту. Поэтому в таблице для каждой задачи приведено значения показателя  $r^2$ , усредненное по 10 экспериментам.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из результатов, приведенных в табл. 1, видно, что в большинстве случаев предлагаемый двухуровневый метод позволяет добиваться более высоких результатов по сравнению со стандартным

алгоритмом градиентного бустинга, что указывает на целесообразность дальнейших исследований в данном направлении. Предполагается исследование возможности подбора оптимальной в смысле ряда критериев длины шага градиентного спуска при коррекции алгоритмов, сгенерированных с помощью бэггинга.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проекты 18-29-03151, 20-01-00609, 21-51-53019.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Докукин А.А., Сенько О.В. Регрессионная модель, основанная на выпуклых комбинациях, максимально коррелирующих с откликом // ЖВМиМФ. 2015. Т. 55. № 3. С. 530–544.
2. Журавлёв Ю.И. Корректные алгебры над множеством некорректных (эвристических) алгоритмов I // Кибернетика. 1977. 4. С. 14–21.
3. Журавлёв Ю.И. Корректные алгебры над множеством некорректных (эвристических) алгоритмов II // Кибернетика. 1977. 6. С. 21–27.
4. Breiman L. Bagging predictors // Machine Learning. 1996. № 24. P. 123–140.
5. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.H. 10. Boosting and Additive Trees. The Elements of Statistical Learning (2nd ed.). New York: Springer, 2009. P. 337–384. ISBN 978-0-387-84857-0.
6. Wolpert D.H. Stacked Generalization // Neural Networks. 1992. V. 5. № 2. P. 241–259.
7. Breiman L. Stacked Regressions // Machine Learning. 1996. V. 24. P. 49–64.
8. Pedregosa F., Varoquaux G., Gramfort A., Michel V., Thirion B., Grisel O., Blondel M., Prettenhofer P., Weiss R., Dubourg V., Vanderplas J., Passos A., Cournapeau D., Brucher M., Perrot M., Duchesnay E. Scikit-learn: Machine Learning in Python // J. Machine Learning Research. 2011. № 12. P. 2825–2830.

## TWO-LEVEL REGRESSION METHOD USING ENSEMBLES OF TREES WITH OPTIMAL DIVERGENCE

Academician of the RAS Yu. I. Zhuravlev<sup>a</sup>, O. V. Senko<sup>a</sup>,  
A. A. Dokukin<sup>a</sup>, N. N. Kiselyova<sup>b</sup>, and I. A. Saenko<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

<sup>b</sup> Institute of Metallurgy and Materials Science of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

<sup>c</sup> Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

The article discusses a new two-level regression analysis method, in which a corrective procedure is applied to optimal ensembles of regression trees. Optimization is carried out based on the simultaneous achievement of the divergence of the algorithms in the forecast space and a good approximation of the data by individual algorithms of the ensemble. Simple averaging, random regression forest, and gradient boosting are considered as corrective procedures. Experiments are presented comparing the proposed method with the standard decision forest and the standard gradient boosting method for decision trees.

*Keywords:* regression, ensembles, bagging, gradient boosting

УДК 621.391.2

## ПОДАВЛЕНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ШУМОВ В ИЗОБРАЖЕНИЯХ НА ОСНОВЕ ГРУППИРОВАНИЯ СХОЖИХ ОБЪЕКТОВ

© 2021 г. В. Ф. Кравченко<sup>1,2,3,\*</sup>, В. И. Пономарев<sup>4,\*\*</sup>,  
академик РАН В. И. Пустовойт<sup>2,3,\*\*\*</sup>, Г. Аранда-Бохоррес<sup>4,\*\*\*\*</sup>

Поступило 28.04.2021 г.

После доработки 16.05.2021 г.

Принято к публикации 26.05.2021 г.

Впервые обоснована и реализована процедура фильтрации изображений, искаженных мультипликативным шумом. Процедура включает следующие этапы: формирование сходных структур в трехмерном пространстве (3D), гомоморфное преобразование, фильтрация изображения в 3D-пространстве дискретного косинусного преобразования (DCT), формирование статистической оценки изображения на основе группирования схожих структур, обратное гомоморфное преобразование и заключительный этап обработки, где корректируются погрешности и восстанавливаются контуры и детали изображений. Дана физическая интерпретация процедуры фильтрации в условиях мультипликативных шумов и разработана структурная схема подавления шумов. Моделирование предложенного метода подтвердило преимущество новой процедуры фильтрации в терминах общепризнанных критериев: оценки структурного индекса схожести, пикового отношения сигнал/шум и индекса сохранения контуров, а также и при визуальном сравнении профильтрованных изображений.

*Ключевые слова:* изображение, фильтрация, мультипликативный шум, группирование объектов, гомоморфное преобразование, пиковое отношение сигнал/шум

**DOI:** 10.31857/S2686954321040111

### ВВЕДЕНИЕ

Улучшение качества деталей изображений в системах дистанционного зондирования и в медицинских исследованиях существенно усложнено вследствие влияния шумов различной природы, смазывания деталей и контуров. Сложная и меняющаяся структура реальных изображений не позволяет эффективно уменьшать влияние шумов и восстанавливать искаженные детали изображений, что

часто приводит к неверным решениям в приложениях (визуализация объектов в дистанционном зондировании, распознавание образов, медицинская диагностика заболеваний, управление объектами, др.). Различные шумы, как мультипликативные, в частности спекл шумы, так и аддитивные, присутствуют в изображениях, полученных системами дистанционного зондирования, в ультразвуковой диагностике, а также в медицинских приложениях. Снижение интенсивности шумов в изображениях является обязательным элементом для улучшения визуализации контуров и мелких деталей и восстановлении структуры и качества изображений [1–12]. Ряд эффективных методов фильтрации основан на применении статистических процедур [1–7] совместно с использованием дисперсного представления изображений в базисах пространственных преобразований (DCT, различных вейвлет- и контурлет-функций, др.), которые позволяют улучшить визуализацию деталей и контуров, сохранить качество хроматических и структурных свойств [8–12].

Известные в литературе алгоритмы подавления шумов различной природы в изображениях, как правило, разработаны для конкретных шумов (мультипликативного, импульсного или аддитивного) и не позволяют осуществлять эффективную

<sup>1</sup> *Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук, Москва, Россия*

<sup>2</sup> *Научно-технологический центр уникального приборостроения Российской академии наук, Москва, Россия*

<sup>3</sup> *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*

<sup>4</sup> *Национальный Политехнический институт Мексики, Мехико, Мексика*

\*E-mail: kvf-ok@mail.ru

\*\*E-mail: vponomar@ipn.mx

\*\*\*E-mail: vlad\_pst@yahoo.com

\*\*\*\*E-mail: gibran.aranda.bionics@gmail.com

фильтрацию изображений, искаженных шумом сложной структуры, в частности мультипликативно-аддитивным шумом [2–4, 8–12]. Большинство известных алгоритмов требует априорных статистических данных о шумах и изображениях.

Здесь предложен и обоснован оригинальный подход в обработке изображений на основе использования идей изложенных в [1–7] в случае искажений мультипликативным спекл-шумом. Разработанный подход сочетает процедуры группирования 3D-структур, гомоморфной фильтрации, теорию статистических оценок и алгоритмы обработки изображений в дисперсном их представлении. Метод содержит четыре этапа: на первом этапе изображение сегментируется в ряд областей, в каждой из которых находятся объекты со схожими структурными свойствами. Внутри сегментированной области проводится группирование структур (лучей) из объектов со схожими свойствами на основе выбранного критерия подобия. На заключительном шаге первого этапа каждый луч объектов подвергается гомоморфному преобразованию ( $\log$ ), которое формирует новые структуры в 3D-пространстве. На втором этапе фильтрации лучи из 2D-объектов изображения в сегментах преобразуются на основе дискретного косинусного преобразования (DCT). Здесь сгруппированные схожие объекты образуют третью координату в дисперсном представлении изображения, что позволяет улучшить качество фильтрации. Второй этап обработки завершается обратным гомоморфным преобразованием ( $\exp$ ), формируя предварительную оценку изображения, необходимую для реализации последующего этапа. На третьем этапе обработки изображений реализуется новая статистическая оценка изображения с учетом корреляции между схожими сгруппированными участками в каждом луче изображения. На заключительном четвертом этапе проводится коррекция погрешностей предыдущих процедур, а также восстановление контуров и мелких деталей изображений.

Критериями, используемыми при сравнении предложенных алгоритмов с известными в литературе, являются: пиковое отношение сигнал-шум в децибелах (PSNR), оценка структурного индекса схожести (SSIM) и индекс сохранения контуров (EPI) [1–5, 8–12, 14].

Результаты многочисленных численных экспериментов в условиях различных интенсивностей шумов на изображениях из базы данных дистанционного зондирования подтверждают эффективность нового метода, позволяющего существенно уменьшить искажение изображений спекл-шумами, восстанавливая мелкомасштабные детали и контуры изображений и улучшая качество изображений.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Предложенная процедура фильтрации включает в себя четыре основных этапа обработки, как показано на рис. 1.

Регистрируемое искаженное изображение  $S(i, j)$  в случае модели мультипликативно-аддитивного шума ( $\varepsilon(i, j)$  и  $n(i, j)$ ), которая характерна для изображений дистанционного зондирования или сформированных ультразвуковыми датчиками при медицинской диагностике:

$$S(i, j) = \varepsilon(i, j) \circ R(i, j) + n(i, j), \quad (1)$$

анализируется с целью формирования групп схожих объектов. На первом шаге на основе анализа гистограммы изображения оценивается количество кластеров со схожими структурными свойствами и проводится кластеризация областей по алгоритму ( $K$ -means). В каждом кластере реализуется поиск схожих блоков (block-matching: BM) и формируются 3D-образования из объектов со схожими структурами путем минимизации критерия подобия  $SAD$ :

$$SAD(i, j) = \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{q=1}^{N_q} |B(i, j) - B(i + p, j + q)|,$$

где  $N_p$  и  $N_q$  — это размеры используемых окон изображения в процессе поиска схожих объектов, а  $B(i, j)$  — это выделенное опорное окно схожести. Найденные схожие окна  $B_l(i, j)$ ,  $l = 1, \dots, K$ , образуют 3D-структуру — луч их схожих 2D-окон, упорядоченных с учетом степени схожести согласно критерия  $SAD$ . В дальнейшем каждый луч с выделенными объектами подвергается гомоморфному преобразованию ( $\log$ ), формируя новые структуры в 3D. Операция  $\log$  преобразовывает спекл-шум в аддитивный, причем в областях, где  $\varepsilon(i, j) \circ R(i, j)$  значительно превосходит интенсивность аддитивных шумов  $n(i, j)$ , модель шума (1) преобразуется в аддитивную шумовую модель:

$$\log[S(i, j)] \approx \log[\varepsilon(i, j)] + \log[R(i, j)] + n(i, j)/[\varepsilon(i, j)R(i, j)]. \quad (2)$$

На втором этапе обработки изображение (2) фильтруется в 3D-пространстве дисперсного представления на основе DCT, где лучи схожих объектов формируют третью координату (рис. 1).

Преобразование, примененное к 3D-структурам, формирует в пространстве DCT массив данных  $S(u, v; l)$ , который подвергается пороговой фильтрации. Здесь выделенные ранее кластеры изображения с плавным изменением интенсивности ( $\alpha = 1$ ) и области с контурами или мелкими деталями ( $\alpha = 2$ ) подвергаются пороговым ограничениям. Для каждой 3D-структуры реализуется ограничение коэффициентов в пространстве преобразования DCT:

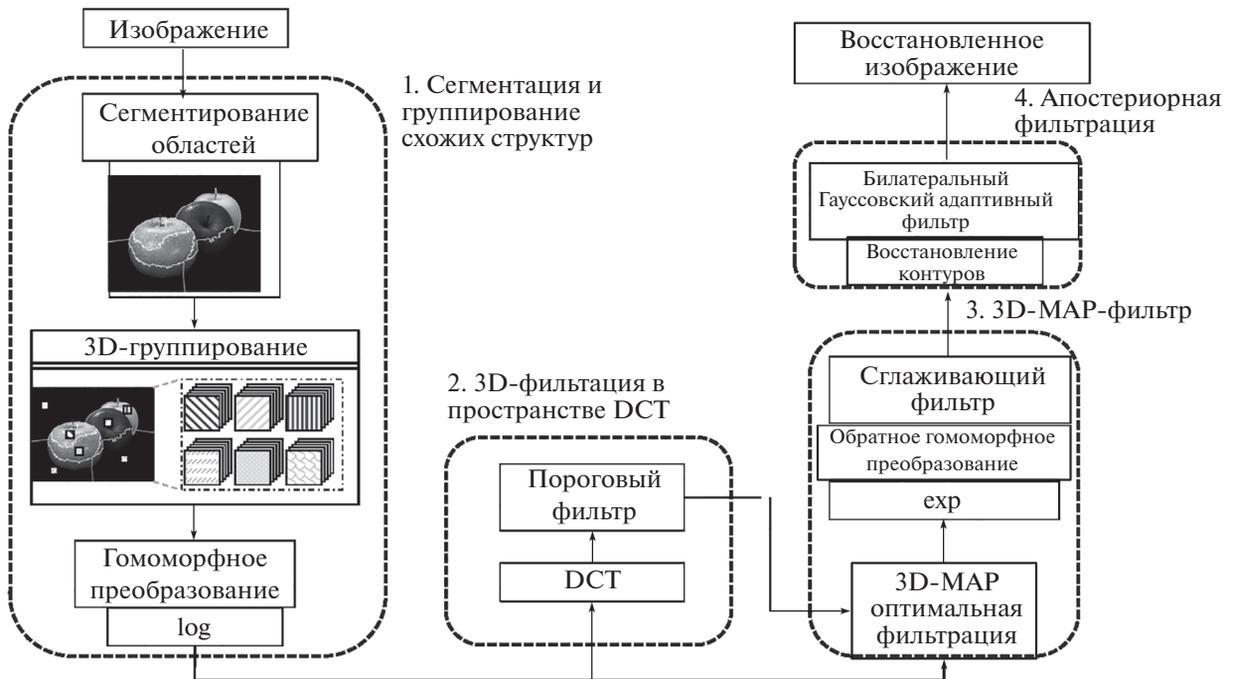


Рис. 1. Блок-схема метода фильтрации спекл-шумов.

$$\hat{S}(u, v, l) = \begin{cases} S(u, v, l), & S(u, v, l) \geq T_\alpha, \\ 0, & S(u, v, l) < T_\alpha, \end{cases} \quad (3)$$

В дальнейшем к массиву данных  $\hat{S}(u, v, l)$  применяется обратное преобразование (IDCT), формируя первую аппроксимацию блоков  $\tilde{B}_l(i, j)$ ,  $l = 1, \dots, K$ .

На третьем этапе обработки существующая корреляция между схожими 2D-структурами в луче группирования используется при формировании оценок пикселей на основе статистического метода максимума функции апостериорной плотности вероятности (MAP). Оценка каждого пикселя определяется вычисляемой матрицей корреляции в сформированном после обратного преобразования луче схожих 2D-объектов  $\tilde{B}_l(i, j)$ ,  $l = 1, \dots, K$ .

Функции плотностей вероятностей аппроксимируются гауссовскими:

$$p(S_{3D}/R_{3D}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det \|K\|}} \times \exp\left[-\frac{1}{2} (S_{3D} - R_{3D}A)^T \|K\|^{-1} (S_{3D} - R_{3D}A)\right],$$

$$p(R_{3D}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(S_{3D} - \bar{R}_{3D})^2}{2\sigma^2}\right],$$

где матрица корреляций вычисляется путем обработки разности окон  $B_l(i, j) - \tilde{B}_l(i, j)$ ,  $l = 1, \dots, K$ , в

луче схожих объектов изображения,  $A$  – это единичный вектор  $(1, 1, \dots, 1)$  размерности  $K$ .

Оценка MAP определяется одноименными пикселями в луче схожих объектов на основе критерия максимума функции апостериорной плотности вероятности так:

$$\max_{R_{3D}} p(S_{3D}/R_{3D}) = \max_{R_{3D}} \{p(S_{3D}/R_{3D}) \circ p(R_{3D})\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{R}_{3D} = \frac{A^T \|K\|^{-1} \bar{R}_{3D} - \frac{\bar{R}_{3D}}{\sigma^2}}{A^T \|K\|^{-1} A - \frac{1}{\sigma^2}}. \quad (4)$$

Здесь  $\hat{R}_{3D}$  определяет оцениваемое значение пикселей в 3D-структуре,  $\bar{R}_{3D}$  является средним значением вектора из массива зашумленных пикселей  $S_{3D}$  в луче 2D-схожих структур,  $\hat{R}_{3D}$  определен блоками  $\tilde{B}_l(i, j)$ , которые сформированы на предыдущем этапе, а  $\sigma$  определяется среднеквадратическим значением этих пикселей. На заключительном шаге этого этапа 3D-обработка завершается линейным сглаживанием с весами, которые зависят от дистанции SAD:

$$\hat{R}(i, j) = \sum_{l=1}^K \hat{R}_{3DMAP}(i, j, l) w_l / \sum_{l=1}^K w_l, \quad (5)$$

$$w_l = 1 - SAD [B_l(i, j), \tilde{B}_l(i, j)].$$

На четвертом этапе фильтрации шумов производится коррекция эффектов предыдущих этапов,

**Таблица 1.** Усредненные по 12 изображениям SAR значения PSNR, SSIM и EPI из базы данных [13] в случае применения алгоритмов фильтрации L. Chen, Wang, Sun, S. Chen, Mullisa и предложенного алгоритма DES-SP-MAP

Фильтр	СКО														
	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
L. Chen [8]	24.86	24.81	24.68	24.56	24.42	0.775	0.774	0.773	0.771	0.770	0.751	0.746	0.744	0.743	0.742
Wang [9]	23.41	23.28	23.10	22.92	22.71	0.652	0.651	0.649	0.648	0.646	0.678	0.669	0.667	0.665	0.664
Sun [10]	24.90	24.73	24.58	24.44	24.31	0.789	0.788	0.771	0.770	0.771	0.755	0.751	0.750	0.748	0.746
S. Chen [11]	24.04	23.92	23.77	23.57	23.39	0.725	0.710	0.696	0.695	0.693	0.704	0.704	0.703	0.702	0.700
Mullisa [12]	25.49	25.38	25.28	25.13	25.00	0.804	0.803	0.802	0.800	0.799	0.768	0.766	0.763	0.762	0.762
Новый DES-SP-MAP	<b>26.21</b>	<b>25.84</b>	<b>25.67</b>	<b>25.51</b>	<b>25.41</b>	<b>0.813</b>	<b>0.810</b>	<b>0.809</b>	<b>0.807</b>	<b>0.806</b>	<b>0.799</b>	<b>0.797</b>	<b>0.796</b>	<b>0.796</b>	<b>0.793</b>
	PSNR					SSIM					EPI				

реконструируются сглаженные контуры и мелкие детали изображений с использованием билатеральной фильтрации и восстановления контуров (рис. 1). Здесь обработка определяется адаптивным билатеральным фильтром с двумя весовыми функциями гауссовского типа, где первая зависит от геометрического расстояния между пикселями, подлежащим фильтрации, и соседним в окне обработки, а вторая весовая функция вводит нелинейную обработку с весами, которые зависят от разности интенсивностей пикселей.

### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Свойства нового метода фильтрации спеклшумов, названного DES-SP-MAP, а также известных наилучших по качеству алгоритмов [1, 8–12] были исследованы на основе стандартных численных критериев PSNR, SSIM и EPI, а также используя субъективный визуальный анализ профильтрованных изображений.

Значения критерия PSNR вычисляются по следующей формуле:

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \frac{(255)^2}{\text{MSE}}, \quad (6)$$

а величины SSIM критерия определяются так:

$$\text{SSIM}(R, \hat{R}) = \frac{(2\mu_R \mu_{\hat{R}} + C_1)(\sigma_{R\hat{R}} + C_2)}{(\mu_R^2 + \mu_{\hat{R}}^2 + C_1)(\sigma_R^2 + \sigma_{\hat{R}}^2 + C_2)}. \quad (7)$$

В формуле (7)  $\mu_R$  и  $\mu_{\hat{R}}$  определяют локальные средние для  $R$  и  $\hat{R}$ , соответственно;  $\sigma_R^2$  и  $\sigma_{\hat{R}}^2$  являются локальными значениями дисперсий для  $R$  и  $\hat{R}$ , и  $\sigma_{R\hat{R}}$  — это локальная функция ковариации

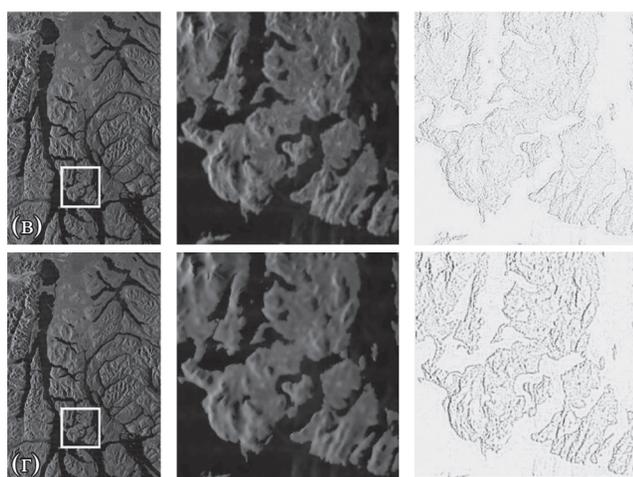
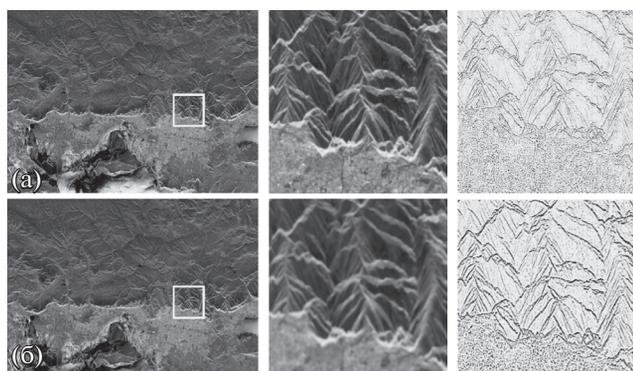
для  $R$  и  $\hat{R}$ . Константы  $c_n$  выбираются такими, чтобы избежать неустойчивости [14].

Индекс EPI [10–12] позволяет оценить количество контуров, которые сохраняются в обработанном изображении, что важно при фильтрации как изображений в дистанционном зондировании, так и медицинских изображений, где контуры несут информацию о подозрительных структурах, связанных с заболеванием. Критерий EPI определяется так:

$$\begin{aligned} \text{EPI}(R, \hat{R}) &= \\ &= \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (\Delta R(i, j) - \mu_{\Delta R})(\Delta \hat{R}(i, j) - \mu_{\Delta \hat{R}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (\Delta R(i, j) - \mu_{\Delta R})^2 (\Delta \hat{R}(i, j) - \mu_{\Delta \hat{R}})^2}}, \quad (8) \end{aligned}$$

где  $\Delta R$  и  $\Delta \hat{R}$  — это профильтрованными высокочастотным фильтром изображения  $R$  и  $\hat{R}$  соответственно;  $\mu_{\Delta R}$  и  $\mu_{\Delta \hat{R}}$  определяют их средние значения.

Изображения из базы данных дистанционного зондирования [13] были искажены мультипликативным шумом разной интенсивности (СКО шума: 0.02–0.10) и в дальнейшем обработаны алгоритмами. Представленные в табл. 1 величины PSNR, SSIM и EPI, это их усредненные значения по всем 12 изображениям из базы данных [13] в случае применения алгоритмов фильтрации L. Chen [8], Wang [9], Sun [10], S. Chen [11], Mullisa [12] и нового DES-SP-MAP, а также визуальный анализ рис. 2 подтверждают, что новый алгоритм превосходит лучшие из известных в широком диапазоне интенсивностей шумов. Эффективная фильтра-



**Рис. 2.** Профильтрованные изображения и инвертированные ошибки (увеличение в 3 раза): а – изображение SAR-05 (СКО = 0.08), обработанное новым фильтром DES-SP-MAP; б – изображение SAR-05 (СКО = 0.08), обработанное фильтром R. Wang; в – изображение SAR-06 (СКО = 0.1), обработанное новым фильтром DES-SP-MAP; г – изображение SAR-06 (СКО = 0.1), обработанное фильтром S. Chen. Следующие изображения в строках а–г – это увеличенная часть из предыдущего и инвертированные ошибки.

ция изображений SAR-05 SAR-06, в которых наблюдается много мелких деталей и контуров, и вариации интенсивности, подтверждает робастность предложенного метода для разных интенсивностей шумов (рис. 2).

## ВЫВОДЫ

Теоретическое обоснование и анализ физических результатов численного моделирования нового метода в фильтрации изображений в условиях их искажений спекл-шумом позволяют сделать ряд важных выводов:

1. Предложенный метод, который основан на дисперсном представлении данных (DCT), корреляции между схожими объектами и оптималь-

ной оценке MAP, эффективно восстанавливает сложные структуры в изображениях.

2. Логарифмирование значений пикселей изображения позволяет преобразовать мультипликативную шумовую модель в аддитивную и реализовать фильтрацию с использованием дисперсных методов фильтрации.

3. 3D-фильтрация с весами, зависящими от степени схожести объектов, улучшает качество обработанных изображений.

4. Апостериорная обработка, использующая билатеральную фильтрацию и восстановление контуров в изображении, улучшает качество визуализации мелких деталей и контуров.

5. Новый метод подтвердил наилучшее качество как в значениях критериев (PSNR, SSIM и EPI), так и при визуальном анализе профильтрованных изображений среди всех известных методов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравченко В.Ф., Пономарев В.И., Пустовойт В.И., Паласиос-Энрикес А. // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 494. С. 71–75.
2. Кравченко В.Ф., Пономарев В.И., Пустовойт В.И. // ДАН. 2018. Т. 481. № 4. С. 375–380.
3. Palacios-Enriquez A., Ponomaryov V., Reyes-Reyes R., Sadovnychiy S. // Circuits, System & Signal Proces. 2018. V. 37. № 12. P. 5389–5416.
4. Kravchenko V., Perez H., Ponomaryov V. Adaptive Signal Processing of Multidimensional Signals with Applications. M.: Fizmatlit, 2009.
5. Dabov K., Foi A., Katkovnik V., Egiazarian K. // IEEE Trans. Image Process. 2007. V. 16. № 8. P. 2080–2095.
6. Donoho D. L., Johnstone J. M. // Biometrika. 1994. V. 81. № 3. P. 425–455.
7. Verdoliva L., Gaetano R., Ruello G., Poggi G. // IEEE Geosci. Rem. Sens. Lett. 2015. V. 12. № 2. P. 314–318.
8. Chen L., Jiang X., Li Z., Liu X. // IEEE Trans. Geosci. Rem. Sens. 2020. V. 58. № 11. P. 7734–7752.
9. Wang R., He N., Wang Y., Lu K. // Multimedia Tools Appl. 2020. V. 79. P. 7633–7647.
10. Sun Y., Lei L., Guan D., Li X. // IEEE Trans. Geosci. Rem. Sens. 2021. V. 59. № 2. P. 1231–1249.
11. Chen S., Wang X., Xiao S. // IEEE Geosci. Rem. Sens. Lett. 2021. V. 18. № 4. P. 702–706.
12. Mullissa A. G., Marcos D., Tuia D., et al. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. 2020. P. 1–15. <https://doi.org/10.1109/TGRS.2020.3042694>
13. Avolio S., Galli L., Passaro, D., et al. In: Proc. 2007 IEEE Int. Geosci. Remote Sens. Symp., Barcelona, 2007. P. 3874–3877. <https://doi.org/10.1109/IGARSS.2007.4423690>.
14. Wang Z., Bovik A. // IEEE Signal Process. Mag. 2009. V. 26. № 1. P. 98–117.

## SUPPRESSION OF MULTIPLICATIVE NOISE IN IMAGES VIA SIMILAR OBJECTS GROUPING

V. F. Kravchenko<sup>a,b,c</sup>, V. I. Ponomaryov<sup>d</sup>,

Academician of the RAS V. I. Pustovoi<sup>b,c</sup>, and G. Aranda Bojorges<sup>d</sup>

<sup>a</sup> *Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Scientific and Technological Center of Unique Instrumentation of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

<sup>c</sup> *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

<sup>d</sup> *Instituto Politecnico Nacional de Mexico, Mexico City, Mexico*

Novel filtering method in images that are contaminated by noise consisting of mixture of multiplicative and additive noises is designed in this paper. Proposed method consists of several stages: 3D filtering approach based on sparse representation in DCT, homomorphic transformation, MAP estimation, and final post-processing that uses adaptive bilateral and edge reconstruction filters. During numerous experiments, the developed method has confirmed their superiority in term of visual image quality via human visual perception as well as in better criteria values, such as PSNR, SSIM, and EPI for different test images corrupted by speckle noise.

*Keywords:* filtering, speckle noise, additive noise, homomorphic transformation, MAP estimation, peak signal/noise ratio

УДК 519.62

## ОПТИМАЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ НАБЛЮДАТЕЛЯ, ОТСЛЕЖИВАЮЩЕГО ДВИЖЕНИЕ ОБЪЕКТА С ПОРАЖАЮЩИМ УСТРОЙСТВОМ

© 2021 г. Академик РАН В. И. Бердышев<sup>1,\*</sup>

Поступило 23.03.2021 г.  
После доработки 27.04.2021 г.  
Принято к публикации 28.04.2021 г.

Телесный наблюдатель  $f$ , отслеживающий движущегося по заданной траектории  $\mathcal{T}$  объекта  $t$  со скоростным поражающим устройством, вынужден скрываться за выпуклые фрагменты окружающей среды. Предлагается способ построения траектории  $\mathcal{T}_f$  наблюдателя, обеспечивающей возможность следить за движением объекта на возможно большей части траектории  $\mathcal{T}$ . В предположении ухода наблюдателя в укрытие по  $\mathcal{T}_f$  на постоянной максимальной скорости, объект  $t$  выбирает оптимальный скоростной режим движения на своей траектории.

*Ключевые слова:* навигация, автономный аппарат, траектория, наблюдатель

**DOI:** 10.31857/S2686954321040032

1. В заданном коридоре  $Y \subset \mathbb{R}^3$ , граница которого гомеоморфна сфере, движется объект  $t$  со скоростным поражающим мини-объектом  $m$ . В  $\mathbb{R}^3$  имеется множество  $G$ ,  $G \cap Y = \emptyset$ , являющееся замыканием открытого множества, препятствующее видимости и движению. Наблюдатель  $f$ , недружественный по отношению к объекту  $t$ , опасаясь мини-объекта, располагается вблизи выпуклых фрагментов границы  $\partial G$  множества  $G$ . Такой фрагмент, далее обозначаемый через  $S$ , должен обеспечить возможность наблюдателю укрыться от  $m$ . Скорость  $v_m$  мини-объекта  $m$  существенно превосходит скорости  $v_f, v_t$  наблюдателя и объекта, при этом  $v_t \geq \underline{v} > 0$ , где  $\underline{v}$  – минимальная скорость объекта.

Пусть объект  $t$ , движущийся по своей траектории  $\mathcal{T} \subset Y$ , проходя точку  $t_0 \in \mathcal{T}$ , обнаружил наблюдателя  $f \notin Y$ , демаскировавшего себя. Учитывая возможность немедленного запуска мини-объекта, наблюдатель занимает исходное для движения положение  $f_0$ , имея точку  $t_0$  в зоне

видимости и рассчитывая уйти в укрытие за время  $\bar{\tau} = \mathcal{R}/v_m$ , где  $\mathcal{R} = \|f_0 - t_0\|$ . Одновременно с перемещением из начального положения  $f_0$  в укрытие наблюдатель продолжает по мере возможности следить за движением объекта  $t$ . В предлагаемой модели объект и мини-объект  $m$  изображаются точками, а наблюдатель – шаром  $V_\varepsilon(f)$  радиуса  $\varepsilon > 0$ , в центре  $f$  которого расположено средство наблюдения. Попадание мини-объекта в шар  $V_\varepsilon(f)$  означает гибель наблюдателя.

Траектория объекта – это кривая  $\mathcal{T} \subset Y$  (маршрут) в совокупности со скоростным режимом  $v_t$  движения объекта по ней. Требуется выяснить возможности наблюдателя следить за объектом в безопасном для себя режиме, а объекта – уклониться от наблюдения на участке траектории от момента  $\tau = 0$  прохождения объектом точки  $t_0$  до момента  $\bar{\tau}$  полного укрытия наблюдателя.

В данной работе предлагается траектория  $\mathcal{T}_f$  наблюдателя, позволяющая ему следить за движением объекта  $t$  на максимально длинном, начинающемся в точке  $t_0$  участке траектории  $\mathcal{T}$ . Кроме того, указывается оптимальная для объекта  $t$  тактика выбора скорости  $v_t$  на временном участке  $[0, \bar{\tau}]$ .

<sup>1</sup> Институт математики и механики  
им. Н.Н. Красовского Уральского отделения  
Российской академии наук, Екатеринбург, Россия  
\*E-mail: bvi@imm.uran.ru

Задачам движения объектов в среде с препятствиями посвящена, например, работа [1], см. также [2, 3].

2. Фрагмент  $S$  — связная открытая на  $\partial G$  выпуклая поверхность: в каждой ее точке существует опорная к  $S$  плоскость, относительно которой  $S$  расположена по одну сторону. Наблюдатель  $f$  выбирает фрагмент  $S$  и свое начальное положение  $f_0$  так, чтобы:

1) расстояние  $\rho(t_0, S)$  было достаточно большим для обеспечения наблюдателю возможности укрыться от мини-объекта, стартовавшего из точки  $t_0$ ;

$$2) \inf \{\|x - y\| : x \in S, y \in Y\} > \varepsilon;$$

3) существовал шар  $V_\varepsilon(\bar{f})$ , удовлетворяющий включению

$$V_\varepsilon(\bar{f}) \subset \text{co}(t_0, S) \setminus \text{conv}(t_0 \cup S), \quad (1)$$

где

$$\text{co}(t_0, S) = \{t_0 + \lambda(x - t_0) : x \in S, \lambda \geq 0\}$$

есть конус с вершиной  $t_0$ , натянутый на  $S$ , а  $\text{conv}(t_0 \cup S)$  — выпуклая оболочка объединения  $t_0 \cup S$ ;

4) время  $\bar{\tau}$  на процесс перехода наблюдателя в положение  $V_\varepsilon(\bar{f}) : V_\varepsilon(f_\tau) : 0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ , было бы не больше, чем  $R/v_m$ , где  $f_\tau = \bar{f}$ , далее предполагается, что  $\bar{f}$  — ближайшая к  $f_0$  из точек, удовлетворяющих включению (1);

5) существует плоскость  $Q$ , содержащая точку  $t_0$ , опорная к  $S$  в некоторой точке  $s \in S$ , при этом  $S$  и точка  $y_s \in Y$ , ближайшая к  $s$ , расположены по разные стороны от  $Q$ .

Объект  $t$  движется через точку  $t_0$  в сторону точки  $y_s$ . Траектория движения центра шара  $V_\varepsilon(f_\tau)$  при переходе из положения  $V_\varepsilon(f_0)$  в положение  $V_\varepsilon(f_\tau)$  обозначается через  $\mathcal{T}_f$ . Естественно предположить, что  $\rho(f_\tau, S) = \varepsilon$  ( $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ ) и наблюдатель движется по  $\mathcal{T}_f$  с постоянной максимальной скоростью  $v_f$ . Ради простоты будем предполагать, что поверхность  $S$  строго выпукла, т.е. не содержит прямолинейных отрезков. Нам понадобится лишь часть поверхности  $S$ , расположенная между  $Q$  и параллельной ей плоскостью  $\bar{Q}$ , содержащей точку  $\bar{f}$ , и все построения будут производиться “выше” плоскости  $\bar{Q}$ . Пусть

$$f_\tau \in \mathcal{T}_f, \quad K_\tau = K_{f_\tau} = \text{co}(f_\tau, S), \quad B_\tau = S \cap \partial K_\tau,$$

где  $\partial K_\tau$  — граница конуса  $K_\tau$ . Определим конечную поверхность  $k_\tau \subset \partial K_\tau$ ,  $k_\tau = \{b + \lambda(b - f_\tau) :$

$\lambda > 0, b \in B_\tau\}$  и множество  $\mathcal{H}_\tau = \text{conv}(k_\tau \cup S)$  — это множество точек, невидимых из точки  $k_\tau$ .

Лемма 1. *Отображения  $\tau \rightarrow K_\tau \cap V_R(s)$ ,  $\tau \rightarrow \mathcal{H}_\tau \cap V_R(s)$  непрерывны по Хаусдорфу, где  $R = \|t_0 - f_0\|$ .*

3. Пусть  $S_\varepsilon$  — часть поверхности  $\{x : \rho(x, S) = \varepsilon\}$ , невидимая из точки  $t_0$ , расположенная между плоскостями  $Q, \bar{Q}$ . Определим на  $S_\varepsilon$  систему координат  $\{(h, \varphi)\}$  так, что ее ось — луч с началом в центре отрезка  $Z \cap \bar{Q} \cap \text{conv} S$ , содержащий точку  $s$ , где  $Z$  — плоскость, натянутая на точки  $t_0, s, \bar{f}$ ; “широта”  $h$  определяется положением плоскости  $Q_h = (1 - h)\bar{Q} + hQ$ ,  $0 \leq h \leq 1$ ,  $(h, \varphi) \in Q_h$ ; “долгота”  $\varphi$  — величина угла, на который следует повернуть вокруг оси плоскость  $Z$  до поглощения точки  $(h, \varphi)$ .

В простейшем случае, когда  $\mathcal{T}_f \subset Z$ , справедливо соотношение  $\mathcal{H}_\tau \subset \mathcal{H}_{\tau'}$  ( $\tau' \leq \tau$ ), из которого следует, что для близких к нулю  $\tau$  начальная часть траектории  $\mathcal{T}$  содержится в  $\mathcal{H}_\tau^\circ$  и, значит, не видна наблюдателю  $f_\tau$ , где  $\mathcal{H}_\tau^\circ$  — внутренность множества  $\mathcal{H}$ . От этого недостатка можно избавиться, изменив начальную часть траектории  $\mathcal{T}_f$ . Если наблюдатель из начальной точки  $f_0$  пройдет участок  $f_\varphi = (1, \varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq \delta$ , при малом  $\delta$ , то весь отрезок  $[s, t_0]$  и начальная часть траектории  $\mathcal{T}$  окажутся вне множества  $\mathcal{H}_{f_\varphi}^\circ$  и будут видны наблюдателю  $f_\varphi$ .

4. Поскольку  $\bar{f}$  — ближайшая к  $f_0$  точка из  $S_\varepsilon$ , удовлетворяющая включению (1), то для любой траектории

$$\mathcal{T}_f = \{f_\tau : 0 \leq \tau \leq \bar{\tau}, f_\tau = \bar{f}\} \subset S_\varepsilon, \quad (2)$$

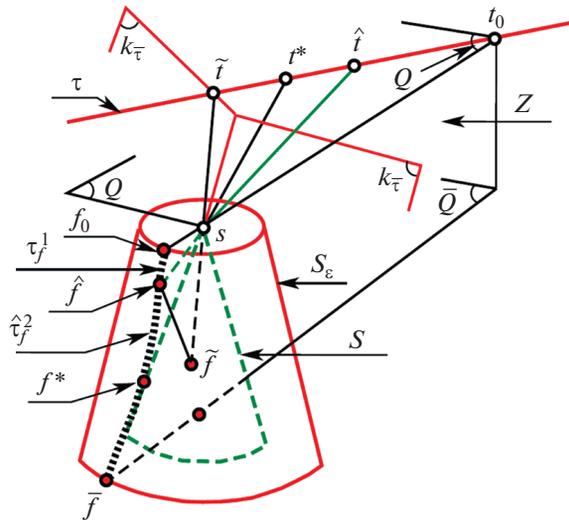
где  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_f$  — время движения наблюдателя из  $f_0$  в точку  $\bar{f}$ , множество

$$W = \left[ \bigcup_{0 \leq \tau < \bar{\tau}} V_\varepsilon(f_\tau) \right] \setminus \text{co}(t_0, S)$$

непусто. Время движения  $\bar{\tau}_f$  наблюдателя на траектории  $\mathcal{T}_f$  должно удовлетворять неравенству

$$\bar{\tau}_f = \frac{|\mathcal{T}_f|}{v_f} \leq \tau_m = \frac{\rho(t_0, W)}{v_m}, \quad (3)$$

где  $|\mathcal{T}_f|$  — длина траектории  $\mathcal{T}_f$ ,  $\tau_m$  — время движения мини-объекта  $m$  от  $t_0$  до множества  $W$ . Заметим, что в момент времени  $\tau_m$  наблюдатель должен прибыть в точку  $\bar{f}$ , иначе он будет уничтожен мини-объектом. После занятия позиции  $V_\varepsilon(\bar{f})$  наблюдатель выключает излучающее устройство.



**Рис. 1.** Оптимальная траектория наблюдателя. На рисунке плоскости  $Q, \bar{Q}, Z$ , траектория  $\mathcal{T}$ , граница  $k_\tau$  конуса  $K_\tau$  и поверхность  $S_\varepsilon$  изображены сплошными линиями, поверхность  $S$  – штриховой, оптимальная траектория  $\hat{\mathcal{T}}_f$  – пунктирной линиями.

Из условия (1) следует, что  $\mathcal{H}_f^\circ$  содержит отрезок  $(s, t_0]$  и начальную часть траектории  $\mathcal{T}$ . Пусть  $\tilde{t} \in \mathcal{T}$  – ближайшая к  $t_0$  точка из пересечения  $\mathcal{T} \cap k_{\tilde{f}}$ . Далее через  $\mathcal{T}$  будем обозначать участок траектории объекта между точками  $t_0$  и  $\tilde{t}$ .

Задача наблюдателя – поиск траектории  $\hat{\mathcal{T}}_f$ , удовлетворяющей условиям (3)–(4), которая позволит отслеживать движение объекта на возможной большей части траектории  $\mathcal{T}$ .

5. Вначале рассмотрим частный случай, когда  $S$  является выпуклым конусом с вершиной  $s$  и, значит, конус  $K_\tau$  является частью двугранного угла с гранями, касающимися боковой поверхности конуса  $S$ . Введем отображение траектории  $\mathcal{T}$  на поверхность  $S_\varepsilon$ :

$$z \rightarrow f(z) : s \in [z, f(z)] \quad (z \in \mathcal{T}, f(z) \in S_\varepsilon), \quad (4)$$

тогда  $f(t_0) = f_0$ , и обозначим

$$\mathcal{T}_f^* = \{f(z) : z \in \mathcal{T}\}, \quad \mathcal{T}_f^* \subset S_\varepsilon, \quad \tilde{f} = f(\tilde{t}).$$

Наложим на  $\mathcal{T}$  дополнительное условие:

(E) Для любой точки  $z \in \mathcal{T}$  выполняется соотношение  $K_{f(z)} \cap \mathcal{T} = z$ .

При этом условии отображение (4) гомеоморфно. Класс кривых, удовлетворяющих условию (E), достаточно широк. В частности, он содержит прямолинейные траектории, не содержащиеся в плоскости  $Z$ . Условие (E) гарантирует наблюдателю  $f$  видимость всей траектории  $\mathcal{T}$  при

движении по траектории  $\mathcal{T}_f^*$ . Но  $f$  хотел бы наблюдать движение объекта на максимально протяженном участке. Далее через  $\mathcal{T}_f(f', f'')$  обозначается часть траектории  $\mathcal{T}_f$  между точками  $f'$  и  $f''$ .

Пусть  $t \in \mathcal{T}$ ,  $f = f(t)$ . Определим верхнюю грань

$$\hat{\rho} = \left\{ \sup_{t \in \mathcal{T}} \rho(t_0, t) : f(t) \in \mathcal{T}_f^*, \frac{\rho(f_0, f) + d(f, \tilde{f})}{v_f} \leq \tau_m \right\}, \quad (5)$$

где  $\rho(t_0, t)$  – длина участка траектории  $\mathcal{T}$  от  $t_0$  до  $t$ ,  $\rho(f_0, f)$  – длина участка траектории  $\mathcal{T}_f^*$  от  $f_0$  до  $f$ ,  $d(f, \tilde{f})$  – длина кратчайшей кривой на поверхности  $S_\varepsilon$ , соединяющей точки  $f$  и  $\tilde{f}$ . Найдем точки  $\hat{t} \in \mathcal{T}$  и  $\hat{f} \in \mathcal{T}_f^*$ ,  $\hat{f} = f(\hat{t})$  (см. (4)), реализующие верхнюю грань (5).

Поскольку  $\mathcal{T} \subset K_{\tilde{f}}^\circ$ , то  $\hat{f} \neq \tilde{f}$ . Искомую траекторию  $\hat{\mathcal{T}}_f$  составим из двух дуг:

$$\hat{\mathcal{T}}_f = \mathcal{T}_f^1 \cup \mathcal{T}_f^2,$$

первая является замыканием части траектории  $\mathcal{T}_f^*$  (см. рис. 1), ограниченной точками  $f_0$  и  $\hat{f}$ , т.е.  $\mathcal{T}_f^1 = \mathcal{T}_f^*(f_0, \hat{f})$ , вторая – кратчайшая кривая на поверхности  $S_\varepsilon$ , соединяющая точки  $\hat{f}$  и  $\tilde{f}$ .

Двигаясь по траектории  $\mathcal{T}_f^1$ , наблюдатель видит всю траекторию  $\mathcal{T}$  объекта. Переход наблю-

дателя  $f = (h, \varphi)$  на дугу  $\mathcal{T}_f^2$  и дальнейшее движение в сторону точки  $\bar{f}$  влечет уменьшение ширины  $h$  и возникновение невидимого наблюдателем участка  $\mathcal{T} \cap \mathcal{K}_f^\circ$ . При стремлении наблюдателя  $f$  к  $\bar{f}$  множество  $\mathcal{K}_f \cap V_R(s)$  сходится к  $\mathcal{K}_{\bar{f}} \cap V_R(s)$  в метрике Хаусдорфа (см. лемму 1). По построению множество  $\mathcal{K}_{\bar{f}}^\circ$  содержит траекторию  $\mathcal{T}$ . Поэтому существует позиция  $f^* = f_{\tau^*} \in \mathcal{T}_f^2$  такая, что для всех последующих позиций  $f, f \rightarrow \bar{f}$ , дуга траектории  $\mathcal{T}$  от  $t_0$  до некоторой точки  $t_f \in \mathcal{T}$  содержится в  $\mathcal{K}_f^\circ$ , т.е. лежит вне зоны видимости наблюдателя, и при этом  $\rho(t_f, k_{\bar{\tau}}) \rightarrow 0$  (при  $f \rightarrow \bar{f}$ ). Отсюда, в частности, следует, что часть траектории  $\mathcal{T}$  от  $t^* = z(f^*)$  до точки  $\tilde{t}$  не удовлетворяет условию (E) и, как уже отмечалось,  $\hat{f} \neq \bar{f}$ , где  $z(f)$  – обратное к (4) отображение.

Объект  $t$ , предполагая, что наблюдатель намерен двигаться по приведенной выше траектории  $\hat{\mathcal{T}}_f$  с постоянной максимальной скоростью, и стремясь сократить длину траектории, пройденной под наблюдением, будет придерживаться следующей тактики движения.

**В а р и а н т 1.** Во временном промежутке  $[0, \tau^*]$  объект движется с минимальной скоростью, преодолев расстояние  $\underline{v} \cdot \tau^*$  под наблюдением. В момент  $\tau^*$  участок траектории  $\mathcal{T}$  от  $t_0$  до точки  $t_f$  попадает в невидимую наблюдателем зону, в которой объект продолжает свое движение, учитывая, что  $t_f \rightarrow \tilde{t}$ , и преодолевает расстояние  $|\mathcal{T}| - \underline{v} \cdot \tau^*$  вне зоны наблюдения.

**В а р и а н т 2.** Объект движется вместе с точкой  $z(f)$  на участке от  $t_0$  до  $\hat{t}$  под наблюдением. Для позиции  $f(t)$  при  $t \in z(\mathcal{T}_f^2)$  выполняется соотношение  $\mathcal{K}_{f(t)}^\circ \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$ , поэтому объект в дальнейшем движется, включившись в множество  $\mathcal{K}_{f(t)}^\circ$ , и пройдет вне наблюдения участок длины  $|\mathcal{T}| - \rho(\hat{t}, t_0)$ .

Установлены следующие утверждения.

**Л е м м а 2.** Пусть  $S$  – выпуклая коническая поверхность с вершиной  $s$ ,  $\tilde{t}$  – ближайшая к  $t_0$  точка из пересечения траектории объекта с  $k_{\bar{\tau}}$ ,  $\mathcal{T}$  – часть траектории объекта, ограниченная точками  $t_0$  и  $\tilde{t}$ ; точка  $\hat{t}$  представляет верхнюю грань (5)  $f_{\hat{\tau}} = \hat{f} = f(\hat{t})$  (см. (4));  $\hat{\mathcal{T}}_f$  – траектория наблюдателя, заданная равенством (6).

Тогда

1) для любого  $\tau \in [0, \hat{\tau}]$  траектория  $\mathcal{T}$  видна наблюдателю  $f_{\tau}$ ;

2)  $\mathcal{K}_{\tau}^\circ \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$  для любого  $\tau \in (\hat{\tau}, \bar{\tau}]$ ;

3) существует  $\tau^* \in (\hat{\tau}, \bar{\tau})$  такой, что для любого  $\tau \in (\tau^*, \bar{\tau})$  найдется точка  $t_{\tau}$ , удовлетворяющая условиям  $t_{\tau} \rightarrow \tilde{t}$  при  $\tau \rightarrow \bar{\tau}$ , и отрезок траектории  $\mathcal{T}$  от до  $t_{\tau}$  содержится в  $\mathcal{K}_{\tau}^\circ$ .

**Т е о р е м а.** Пусть выполняются условия леммы 2. Тогда существуют  $\tau^* \in (\hat{\tau}, \bar{\tau})$  и скоростной режим движения объекта по траектории  $\mathcal{T}$  (см. варианты 1, 2), позволяющий пройти вне наблюдения концевой участок траектории  $\mathcal{T}$  длины

$$|\mathcal{T}| - \min\{\underline{v} \cdot \tau^*, \rho(t_0, \hat{t})\},$$

где  $|\mathcal{T}|$  – длина траектории  $\mathcal{T}$ ,  $\rho(t_0, \hat{t})$  – длина ее участка от  $t_0$  до  $\hat{t}$ ,  $\underline{v} > 0$  – минимальная скорость объекта  $t$ .

6. В общем случае, когда  $S$  – выпуклая поверхность, найдем

$h^* = \inf\{h: K_{(h, \varphi)} \cap \mathcal{T} = \emptyset\}$ ,  $f^* = f^*(\varphi) = (h^*, \varphi)$  и определим траекторию

$$\mathcal{T}_f^* = \{f^*(\varphi): (h^*, \varphi) \in S_{\varepsilon}\}.$$

Находясь в любой позиции  $f \in \mathcal{T}_f^*$ , наблюдатель видит всю траекторию  $\mathcal{T}$ , так как  $\mathcal{K}_f^\circ \cap \mathcal{T} = \emptyset$ . Используя изложенный выше способ, построим траекторию  $\hat{\mathcal{T}}_f$  (см. (6)). Движение по ней на максимальной скорости гарантирует наблюдателю возможность следить за движением объекта на участке траектории  $\mathcal{T}$  от  $t_0$  до точки  $\min\{\underline{v} \cdot \tau^*, \rho(t_0, \hat{t})\}$  (при оптимальном выборе объектом варианта тактики движения).

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лю В. Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор) // Математика и мат. моделирование. 2018. № 1. С. 15–58.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Бердышев В.И., Костюсов В.Б. Визуальные характеристики наблюдения и оптимальные траектории. Ин-т математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2021. 250 с.

# OPTIMAL TRAJECTORY OF AN OBSERVER TRACKING THE MOVEMENT OF AN OBJECT WITH A STRIKING DEVICE

Academician of the RAS V. I. Berdyshev<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*

A tight observer  $f$ , tracking an object  $t$  with a high-speed striking device moving along a given trajectory  $\mathcal{T}$ , is forced to hide behind convex fragments of the environment. A method is proposed for constructing the observer's trajectory  $\mathcal{T}_f$ , which makes it possible to follow the movement of the object on the largest possible part of the trajectory  $\mathcal{T}$ . Under the assumption that the observer leaves for a shelter at a constant maximum speed, the object  $t$  chooses the optimal speed mode of movement on its trajectory.

*Keywords:* moving object, solid observer, trajectory

Журнал “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” публикует статьи и краткие сообщения, содержащие результаты приоритетных, оригинальных, ранее неопубликованных исследований в области математики, информатики, процессов управления. Цель журнала – ознакомление широкого круга специалистов с последними достижениями в различных разделах этих наук. Высокое качество публикаций должно обеспечиваться соблюдением требований к рукописям и всесторонним экспертным рецензированием.

Журнал публикует сообщения, авторами которых являются действительные члены (академики) и члены-корреспонденты Российской академии наук. Журнал публикует также сообщения других авторов, представленные академиками РАН по соответствующей специальности. Представление должно быть получено автором до направления статьи в редакцию.

Журнал издается на русском языке один раз в 2 месяца (6 выпусков в год). Периодичность англоязычной версии “Doklady Mathematics” – 6 выпусков в год.

Подразделы журнала: Математика, Информатика, Процессы управления.

В журнале не публикуются работы полемические и узкоспециальные; содержащие решения стандартных задач; статьи обзорные и методические; статьи, излагающие обобщения и предположения; статьи серийные, разделенные на несколько последовательных публикаций; статьи о рядовых исследованиях, не представляющие общего интереса.

Решением редакционной коллегии работа может быть отклонена, если она не удовлетворяет перечисленным выше требованиям. Статьи, отклоненные редколлекцией, повторно не рассматриваются.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

DOI: 10.31857/S2686954321020090

Редакция журнала “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” просит авторов руководствоваться приводимыми ниже правилами и надеется, что авторы ознакомятся с ними, прежде чем отошлют сообщение в редакцию.

**Работы, оформленные без соблюдения этих правил, возвращаются без рассмотрения.**

1. Публикуемые статьи должны иметь представление действительного члена Российской Академии наук, если оно требуется.

2. Авторы должны определить раздел, в который они рекомендуют поместить сообщение, и индекс по Универсальной десятичной классификации (УДК).

3. Рукописи статей и сопроводительные материалы загружаются в Редакционно-издательскую систему издательства Pleiades Publishing Ltd по ссылке <https://sciencejournals.ru/journal/danmiup/> или направляются в редакцию по электронной почте [doklady\\_mathematics@mail.ru](mailto:doklady_mathematics@mail.ru).

Бумажный вариант представлять в редакцию не требуется.

4. На отдельной странице нужно указать полное название (на русском и английском языках) учреждения, в котором выполнено исследование; фамилии, имена и отчества всех авторов; почтовый индекс, адрес, номера телефонов и E-mail каждого соавтора. Необходимо также указать автора, с которым редакция будет вести переговоры и переписку.

5. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к печати. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией. Доработанный текст автор должен срочно вернуть вместе с исходным вариантом, а также с ответом на все замечания.

6. Журнал публикует статьи и краткие сообщения, занимающие не более 25000 знаков. В этот объем входят текст, таблицы, библиография (не более 25 источников). Рекомендуется включать в список литературы актуальные журнальные статьи, опубликованные за последние 2 года, в том числе в журнале “Доклады Академии наук”. Число рисунков не должно превышать восьми. Части, обозначенные как а, б и т.д., считаются различными рисунками. Повторение данных в тексте, таблицах и графиках недопустимо. Рисунки должны быть выполнены четко, в формате, обеспечивающем ясность передачи всех деталей.

7. Электронная версия должна включать (текст в формате .doc):

– название статьи; ФИО каждого автора статьи; аффилиация; аннотация; ключевые слова; текст сообщения; список литературы; рисунки (отдельными файлами в формате jpeg или tif);

– на английском языке: название статьи; ФИО каждого автора статьи; аффилиация; аннотация; ключевые слова.

8. Текст статьи должен быть тщательно отредактирован и подписан всеми авторами. При ис-

пользовании сокращений необходимо дать их расшифровку; следует ограничиваться общепринятыми сокращениями и не вводить новых без достаточных на то оснований.

9. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

10. Финансирование работы. Укажите информацию о грантах и любой другой финансовой поддержке исследований.

11. Обязательное указание конфликта интересов – любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (например, член редколлегии обязан указывать, что он публикуется в журнале, где он член редколлегии).

12. Авторы могут приложить свою версию перевода статьи на английский язык или дать необходимые пояснения переводчику.

13. В формулах следует избегать громоздких обозначений. Занумерованные формулы обязательно выключаются в красную строку, номер формулы ставится у правого края.

14. Ссылки в тексте на цитируемую литературу даются в квадратных скобках, например [1]. В списке все работы перечисляются в порядке цитирования. Самоцитирование допускается в объеме не более 30%.

*Для книг:* фамилия и инициалы автора, полное название книги, место издания, издательство, год издания, том или выпуск и общее количество страниц.

Ссылки на книги, переведенные на русский язык, должны сопровождаться ссылками на оригинальные издания с указанием выходных данных.

*Для периодических изданий:* фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, первая и последняя страницы статьи.

Желательно указывать индекс DOI цитируемой статьи.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

15. Редакция обращает внимание авторов на то, что журнал “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” является органом общей научной информации и в связи с этим просит авторов излагать материал в ясной и доступной форме.

16. Если материал не может быть изложен в объемах, указанных выше, или требует большого числа иллюстраций, редакция советует авторам направлять его в какой-либо специализированный журнал. Работы, нарушающие эти условия, редакция возвращает авторам для сокращения.

17. Появление краткого сообщения в “Докладах Академии наук” не препятствует впоследствии

публикации расширенного варианта в другом периодическом издании, с соблюдением всех этических норм. Одновременная отсылка рукописи в “Доклады” и в другой журнал не допускается.

18. В соответствии с новыми международными правилами будет проводиться проверка на предмет соблюдения авторами прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Проверка с использованием компьютерных программ проводится и зарубежными партнерами Издательства в отношении переводной версии статьи. Если автором нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отозвано.

19. Рукописи проходят процедуру анонимного внешнего рецензирования ведущими отечественными и зарубежными экспертами и рекомендуются к печати Редколлегией журнала на конкурсной основе.

20. Важно соблюдать правила публикационной этики и избегать следующих нарушений: 1) фабрикация и фальсификация данных, т.е. их подделки или изменения; 2) плагиата и самоплагиата – копирования без надлежащего цитирования хотя бы одного предложения из чужой или даже собственной ранее опубликованной рукописи, а также рисунков и таблиц; 3) многократной подачи рукописи в несколько журналов одновременно; 4) избыточных публикаций, основанных на одном и том же эксперименте; 5) неподобающего указания авторства, когда в авторский коллектив включены люди, не внесшие вклада в работу, или, наоборот, не включены люди, внесшие значительный вклад.

21. На любой материал, который автор заимствует из других работ, необходимо получить разрешение от правообладателя и приложить к рукописи. Правообладателем статей в журналах, как правило, является не автор, а издатель журнала, в котором опубликован материал. Подробнее о получении разрешения см. по ссылке <https://www.pleiades.online/ru/authors/permission/>

22. Все используемые в статье цитаты обязательно приводятся на оригинальном языке и сопровождаются соответствующей ссылкой.

23. Для более полного описания исследования к статье могут прилагаться дополнительные материалы (аудио- и видеофайлы, презентации, дополнительные таблицы и рисунки и пр.). Они публикуются только в электронной версии на сайте <https://link.springer.com/> (для англоязычных журналов) и <https://elibrary.ru> (для русскоязычных журналов).

## ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ СООБЩЕНИЯ

Раздел (Математика, Информатика, Процессы управления)

УДК

## НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

© 2021 г. Академик РАН В. П. Иванов<sup>1,\*</sup>, Г. В. Сидоров<sup>2,\*\*</sup><sup>1</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия\*E-mail: [ivanov@niisi.ras.ru](mailto:ivanov@niisi.ras.ru)\*\*E-mail: [sidorov@msu.su](mailto:sidorov@msu.su)

Поступило 23.01.2021 г.

Аннотация (объем не должен превышать 1000 знаков с учетом пробелов) может быть размещена в свободном доступе в электронных базах поиска и индексирования. Она должна быть информативной, описывать методы и главные результаты исследования и не должна содержать ссылок на другие работы и аббревиатур. Из аннотации должно быть ясно, какие вопросы поставлены для исследования и какие ответы на них получены. Должен быть сформулирован приоритетный научный результат, требующий срочной публикации.

*Ключевые слова:* необходимо указать от 3 до 10 ключевых слов, способствующих индексированию статьи в поисковых системах. Рекомендуется использовать общепринятые термины

Текст статьи....

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят...

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счет средств Российского научного фонда, проект № 00101.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов С.М., Петров В.С. Экспериментальное доказательство // ДАН. 2016. Т. 469. № 6. С. 711–716.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

В таком же порядке метаданные должны быть представлены на английском языке:

## THE TITLE OF ARTICLE

© 2021 г. Academician of the RAS V. P. Ivanov<sup>a</sup>, G. V. Sidorov<sup>b</sup><sup>a</sup>Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation<sup>b</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Summary

Keywords:

## СОПРОВОДИТЕЛЬНЫЕ ДОКУМЕНТЫ

Вместе с рукописью в редакцию высылаются отсканированные копии следующих сопроводительных документов:

- Лицензионный договор для русской версии, подписанный всеми авторами

[https://sciencejournals.ru/journals/danmiup/license\\_agreement.doc](https://sciencejournals.ru/journals/danmiup/license_agreement.doc)

- Авторский договор для английской версии

<https://www.pleiades.online/ru/authors/agreement/>

При использовании заимствованных материалов обязательно наличие разрешения от правообладателя.