

СОДЕРЖАНИЕ

Том 57, номер 6, 2021

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

О единственности решения обратных начальных задач для уравнения Бюргерса с неизвестным источником <i>А. В. Баев</i>	719
О многоволновых решениях одного нелинейного уравнения Шрёдингера <i>А. Н. Волобуев</i>	729
Задача с аналогом условия Франкля на внутренней характеристике для уравнения смешанного типа <i>У. М. Мирсабурова</i>	735
О собственных числах и функциях задач Дирихле и Неймана в области с дырчатými перегородками <i>С. А. Назаров</i>	752

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Регуляризованные асимптотические решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с нулевым оператором дифференциальной части и с несколькими быстро изменяющимися ядрами <i>А. А. Бободжанов, М. А. Бободжанова, В. Ф. Сафонов</i>	769
О положительных ограниченных решениях одного класса нелинейных интегральных уравнений с оператором Гаммерштейна–Немыцкого <i>А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян</i>	784

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Аппроксимации задач оптимального управления старшими коэффициентами эллиптических уравнений в недивергентной форме с неограниченной нелинейностью в коэффициентах <i>Ф. В. Лубышев, А. Р. Мананова</i>	796
Критерий устойчивости разностных схем для нелинейных дифференциальных задач <i>П. П. Матус</i>	821
Метод ортогональных многочленов для приближённого решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений в приложении к двумерным задачам дифракции <i>Г. А. Расолько, В. М. Волков</i>	830

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Многоточечная краевая задача на графе <i>М. Г. Завгородний</i>	840
К вопросу о единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром <i>С. М. Пономарёв</i>	844

ХРОНИКА

О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете	849
---	-----

УДК 517.956+530.182

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА С НЕИЗВЕСТНЫМ ИСТОЧНИКОМ

© 2021 г. А. В. Баев

Рассматриваются обратные задачи определения начальных условий и стационарной неоднородности в краевых задачах для уравнения Бюргера. Использовано преобразование, позволяющее свести уравнение Бюргера к уравнению с переменным коэффициентом относительно функции, доступной измерению в томографических наблюдениях. Доказаны теоремы единственности о восстановлении начальных условий по средним значениям решения по временной или пространственной переменным. Поставлены обратные задачи одновременного определения начальных данных и источника на отрезке и полупрямой. На основании спектральных представлений доказана единственность их решения.

DOI: 10.31857/S0374064121060017

Введение. Рассмотрим процесс переноса, описываемый неоднородным уравнением Бюргера

$$u_t + 2uu_x = \nu u_{xx} + f(x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

где $\nu > 0$ и l – постоянные, $f \in C[0, l]$. Существуют различные физические интерпретации функции $u(x, t)$. Мы будем придерживаться её интерпретации как плотности частиц, непрерывной субстанции (например, газа см. [1, с. 99; 2, с. 121]) и т.п.

Поставим следующие дополнительные условия, которые определяют единственное решение уравнения (1):

$$u(0, t) = \mu_0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u(l, t) = \mu_1, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

где $\varphi \in C[0, l]$, μ_0, μ_1 – действительные числа и выполнены условия согласования $\varphi(0) = \mu_0, \varphi(l) = \mu_1$.

Под решением обратных задач для (1)–(4) задач будем понимать, не формулируя пока точных постановок, восстановление функций $\varphi(x)$ или $f(x)$, если дополнительно известна некоторая функция или функции, доступные в измерениях и определяемые решением $u(x, t)$ прямой задачи (1)–(4). Поскольку саму плотность не всегда можно непосредственно измерить, то на практике (например, в томографии) широко используется метод, основанный на следующем феноменологическом законе изменения интенсивности проникающего излучения $w(x)$ в среде с плотностью $u(x)$:

$$\frac{dw}{dx} = -\gamma u(x)w, \quad x > 0,$$

что приводит к хорошо известной зависимости

$$w(x) = w(0)e^{-\gamma \int_0^x u(\xi) d\xi},$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент поглощения, определяемый как свойствами среды, так и параметрами излучения.

Рассмотрим процесс, при котором плотность $u(x, t)$ в уравнении (1) изменяется во времени значительно медленнее распространения излучения. Введём вспомогательную функцию

$$v(x, t) = \int_0^x u(\xi, t) d\xi, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0,$$

физический смысл которой – масса вещества на отрезке $[0, x]$. Тогда для интенсивности $w(x, t)$ приходим к следующей зависимости:

$$w(x, t) = w(0, t)e^{-\gamma v(x, t)},$$

где $w(0, t) \in C^1[0, \infty)$, и пусть далее $w(0, 0) = 1$.

Получим уравнение относительно функции $w(x, t)$. Так как $v_x = u$, то, заменяя в уравнении (1) u на v_x , будем иметь

$$v_{xt} + (v_x^2)_x = \nu v_{xxx} + f(x),$$

откуда следует, что

$$v_t + v_x^2 = \nu v_{xx} + F(x) + a(t), \quad F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi + b, \quad (5)$$

где функция $a(t)$ и постоянная b выбираются произвольно.

С другой стороны,

$$v(x, t) = -\frac{1}{\gamma} \ln \frac{w(x, t)}{w(0, t)}. \quad (6)$$

Подставляя последнее выражение в (5), находим:

$$\frac{1}{w} \left[w_t - \nu w_{xx} + \left(\nu - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{w_x^2}{w} \right] = -\gamma F(x) + \frac{w_t(0, t)}{w(0, t)} - \gamma a(t).$$

В силу произвольности функции $a(t)$ полагаем $\gamma a(t) = w_t(0, t)/w(0, t)$. Поскольку переопределением функции w (возведением в положительную степень) всегда можно добиться равенства $\gamma\nu = 1$, то окончательно получаем

$$w_t = \nu w_{xx} - q(x)w, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad q(x) = \gamma F(x). \quad (7)$$

Для решения $w(x, t)$ уравнения (7) вследствие условий (2)–(4) и равенств $v_x = u$ и (6) возникают следующие граничные и начальные условия:

$$w_x(0, t) + \gamma\mu_0 w(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

$$w_x(l, t) + \gamma\mu_1 w(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

$$w(x, 0) = \psi(x) = e^{-\gamma \int_0^x \varphi(\xi) d\xi}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (10)$$

Поскольку из условия (10) следует, что

$$w_x(x, 0) = -\gamma\varphi(x)w(x, 0), \quad (11)$$

то непосредственной подстановкой выражения (11) для функции $w_x(x, 0)$ в (8), (9) убеждаемся в выполнении условий согласования граничных и начальных данных для $w(x, t)$.

Заметим, что применённые выше редукции в какой-то мере можно рассматривать как обобщение преобразования Коула–Хопфа [1, с. 100], в основе которого лежит хорошо известное и

часто используемое в обратной задаче теории рассеяния линеаризующее преобразование для уравнения Риккати (см. [2, с. 228; 3, с. 154]).

Уравнению Бюргерса посвящено огромное число работ, однако бóльшая их часть связана либо с поиском аналитических решений для источников специального вида [4; 5], либо с использованием его как одного из эталонных уравнений при моделировании нелинейных процессов в гидродинамике [6; 7].

Настоящая работа посвящена постановке и решению обратных задач для неоднородного уравнения Бюргерса на основе дополнительных данных, доступных в измерениях, с одной стороны, и, с другой стороны, в рамках строгих математических постановок. При этом в статье при исследовании обратных начально-краевых задач для уравнений параболического типа используются подходы и методы, предложенные и развитые в работах А.М. Денисова [8, с. 160; 9; 10].

1. Задачи определения начальных данных для уравнения Бюргерса на отрезке.

1.1. Прежде чем переходить к постановке и исследованию обратных задач, построим решение прямой задачи (7)–(10), основываясь на методе Фурье. При этом нам понадобится ортогональный базис $X_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, в $L_2[0, l]$, определяемый собственными функциями (с.ф.) – решением задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Шрёдингера на отрезке $[0, l]$:

$$\nu X'' - q(x)X = -\lambda X, \quad (12)$$

$$X'(0) + \gamma\mu_0 X(0) = 0, \quad (13)$$

$$X'(l) + \gamma\mu_1 X(l) = 0. \quad (14)$$

Дополнительным требованием к решению этой задачи поставим условие положительности собственных значений (с.з.): $\lambda_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Хорошо известно, что не при любых действительных μ_0, μ_1 такое условие выполнено. Покажем, что его выполнения можно добиться увеличением функции $q(x)$, что возможно в силу произвольности постоянной b в (5).

Лемма 1. Для любой функции $f \in C[0, l]$ найдётся такая постоянная b , что для $q(x) = \gamma \int_0^x f(\xi) d\xi + \gamma b$ собственные значения задачи (12)–(14) положительны, т.е. $\lambda_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $\lambda_1^0 < \lambda_2^0 < \dots < \lambda_n^0 \dots$ – с.з. задачи Штурма–Лиувилля (12)–(14) с коэффициентом $q(x)$, равным $q_0(x) = \gamma \int_0^x f(\xi) d\xi$. Если в уравнении (12) коэффициент $q_0(x)$ заменить на $q_0(x) + \gamma b$, то, очевидно, что с.ф. сохраняются, а с.з. изменятся и станут равными $\lambda_n = \lambda_n^0 + \gamma b$, $n \in \mathbb{N}$. Выбирая число b достаточно большим, приходим к выполнению неравенства $\lambda_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Лемма доказана.

Пусть $\{X_n(x)\}$, $n \in \mathbb{N}$, – базис из с.ф. задачи (12)–(14) такой, что $\lambda_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда решение задачи (7)–(10) представимо в виде ряда:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n e^{-\lambda_n t} X_n(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \quad (15)$$

где

$$\psi_n = \frac{1}{\|X_n\|} \int_0^l \psi(x) X_n(x) dx = \frac{(\psi, X_n)}{\|X_n\|}.$$

1.2. Поставим обратную задачу об определении неизвестного начального условия $\varphi(x)$ в задаче (1)–(4) по дополнительным данным, имеющим смысл среднего взвешенного значения функции $w(x, t)$ по t на отрезке $[0, T]$:

$$\alpha w(x, 0) + (1 - \alpha)w(x, T) + \frac{\beta}{T} \int_0^T w(x, t) \eta(t) dt = \bar{w}_T(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (16)$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$, $\eta \in C[0, T]$. Условие (16) охватывает широкий класс дополнительных данных для уравнения Бюргерса, поскольку на практике получение достоверной томографической информации, как правило, основано на усреднении.

Теорема 1. Пусть неоднородность $f \in C[0, l]$ в уравнении (1) известна, а функция $\eta(t) \geq 0$ и числа α и $\beta \geq 0$ в условии (16) заданы. Тогда обратная задача (1)–(4), (16) может иметь лишь единственное решение.

Доказательство. Положим в (15) $t = T$. При этом для (16) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha w(x, 0) + (1 - \alpha)w(x, T) + \frac{\beta}{T} \int_0^T w(x, t)\eta(t) dt \right] \psi_n X_n(x) = \bar{w}_T(x).$$

Поскольку при $\bar{w}_T(x) = 0$ и $\alpha + (1 - \alpha)e^{-\lambda_n T} + \beta T^{-1} \int_0^l e^{-\lambda_n t} \eta(t) dt \neq 0$ верно равенство $\psi_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то в силу полноты системы $\{X_n(x)\}$ в $L_2[0, l]$ получаем, что $\psi = 0$. Предположение, что обратная задача (1)–(4), (16) имеет два решения $\varphi \neq \bar{\varphi}$, в силу доказанного выше приводит к противоречию $e^{-\gamma} \int_0^x \varphi(\xi) d\xi - e^{-\gamma} \int_0^x \bar{\varphi}(\xi) d\xi = \psi(x) = 0$ при всех $x \in [0, l]$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь обратную задачу об определении неизвестного начального условия $\varphi(x)$ в задаче (1)–(4), когда в качестве дополнительной информации дано среднее взвешенное значение функции $w(x, t)$ по x на отрезке $[0, l]$ при $t \in [t_0, T]$, $t_0 > 0$:

$$\alpha w(0, t) + (1 - \alpha)w(l, t) + \frac{\beta}{l} \int_0^l w(x, t)\rho(x) dx = \bar{w}_l(t), \quad (17)$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$, $\rho \in C[0, l]$.

Теорема 2. Пусть неоднородность $f \in C[0, l]$ в уравнении (1) известна, а функция $\rho(x)$ и число $\alpha > 1/2$ в условии (17) заданы, причём $\rho(x)$ такова, что $(\rho, X_n) > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда найдётся $\beta > 0$ такое, что обратная задача (1)–(4), (17) имеет не более одного решения.

Доказательство. Очевидно, что $(\rho, X_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ в силу свойств рядов Фурье по полной системе $\{X_n(x)\}$, $n \in \mathbb{N}$, такой, что $X_n(0) = 1$. При этом для с.ф. $X_n(x)$ справедлива асимптотическая формула (см. [11, с. 221]) $X_n(l) = \cos(\sqrt{\lambda_n} l) + O(1/n)$, т.е. найдётся $c > 0$ такое, что при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|X_n(l)| \leq 1 + 2c/n$. Тогда

$$\alpha X_n(0) + (1 - \alpha)X_n(l) \geq 2\alpha - 1 - 2c(1 - \alpha)/n.$$

Поскольку $\alpha > 1/2$, то найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\alpha X_n(0) + (1 - \alpha)X_n(l) \geq 2\varepsilon - c/n.$$

Выберем теперь $N = N(\varepsilon, c)$ таким, чтобы при $n > N$ выполнялось неравенство $\varepsilon - c/n > 0$. Очевидно, что при $n \leq N$ справедлива оценка $\alpha X_n(0) + (1 - \alpha)X_n(l) \geq 2\varepsilon - c$. Так как $(\rho, X_n) > 0$, то найдётся $\beta > 0$ такое, что $\beta(\rho, X_n) > c$.

Таким образом, доказано, что в условиях теоремы выполняется неравенство

$$\alpha X_n(0) + (1 - \alpha)X_n(l) + \beta(\rho, X_n) > \varepsilon.$$

Для доказательства единственности решения обратной задачи достаточно рассмотреть случай $\bar{w}_l(t) = 0$ при $t \in [t_0, T]$, т.е. когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\alpha X_n(0) + (1 - \alpha)X_n(l) + \beta(\rho, X_n)] \psi_n e^{-\lambda_n t} = 0.$$

Поскольку левая часть последнего равенства является функцией, аналитической при $t \geq t_0$ и равной нулю на отрезке $[t_0, T]$, то она равна нулю при всех $t \geq t_0$. Устремляя t к бесконечности, последовательно устанавливаем, что $\psi_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (подробнее см. [8, с. 119]). Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям из доказательства теоремы 1. Теорема доказана.

2. Обратные задачи для неоднородного уравнения Бюргера на отрезке и полу-прямой.

2.1. Пусть теперь неизвестны как начальное условие $\varphi(x)$, так и источник $f(x)$, $0 \leq x \leq l$, в уравнении Бюргера. С учётом п. 1 такая задача сводится к определению функции $q(x)$ в уравнении (7) при неизвестной функции $\psi(x)$. В качестве дополнительных данных рассмотрим след решения задачи (7)–(10) при $x = 0$:

$$w(0, t) = g(t), \quad t \geq 0, \tag{18}$$

и след решения $\hat{w}(x, t)$ задачи (7)–(10) при другом значении параметра μ_0 , а именно, при $\hat{\mu}_0 \neq \mu_0$:

$$\hat{w}(0, t) = h(t), \quad t \geq 0. \tag{19}$$

Для разности $z(x, t) = w(x, t) - \hat{w}(x, t)$ возникает обратная задача об определении функции $q(x)$:

$$z_t = \nu z_{xx} - q(x)z, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0, \tag{20}$$

$$z(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \tag{21}$$

$$z_x(0, t) + \gamma\mu_0 z(0, t) = \gamma(\hat{\mu}_0 - \mu_0)h(t), \quad t \geq 0, \tag{22}$$

$$z_x(l, t) + \gamma\mu_1 z(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{23}$$

$$z(0, t) = g(t) - h(t), \quad t \geq 0. \tag{24}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу Коши [11, с. 221] относительно функции $y(x, p)$, $p \in \mathbb{C}$ (ниже $y''(x, p) \equiv y_{xx}(x, p)$):

$$\nu y'' - q(x)y = py, \quad 0 \leq x \leq l, \tag{25}$$

$$y(l, p) = 1, \quad y'(l, p) = -\gamma\mu_1.$$

Совершим в задаче (20)–(24) преобразование Лапласа по переменной t с параметром p , предполагая, что $q(x) > 0$, и, тем самым, $g(t), h(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Неравенства $q(x) > 0$ можно добиться, зная априорную оценку: $f(x) > f_0 = \text{const}$ при всех $x \in [0, l]$. Для $\tilde{z}(x, p) \equiv z(x, t)$ получаем

$$\nu \tilde{z}_{xx} - q(x)\tilde{z} = p\tilde{z}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\tilde{z}_x(0, p) + \gamma\mu_0 \tilde{z}(0, p) = \gamma(\hat{\mu}_0 - \mu_0)\tilde{h}(p), \tag{26}$$

$$\tilde{z}_x(l, p) + \gamma\mu_1 \tilde{z}(l, p) = 0,$$

$$\tilde{z}(0, p) = \tilde{g}(p) - \tilde{h}(p), \tag{27}$$

где $\tilde{g}(p) \equiv g(t)$, $\tilde{h}(p) \equiv h(t)$.

Нетрудно убедиться, что функции $\tilde{z}(x, p)$ и $y(x, p)$ линейно зависимы, и, следовательно, $\tilde{z}(x, p) = C(p)y(x, p)$. При этом в силу (26), (27) имеем

$$C(p)[y'(0, p) + \gamma\mu_0 y(0, p)] = \gamma(\hat{\mu}_0 - \mu_0)\tilde{h}(p), \quad C(p)y(0, p) = \tilde{g}(p) - \tilde{h}(p).$$

Исключая $C(p)$, приходим к равенству

$$\frac{y'(0, p) + \gamma\mu_0 y(0, p)}{y(0, p)} = \gamma(\hat{\mu}_0 - \mu_0) \frac{\tilde{h}(p)}{\tilde{g}(p) - \tilde{h}(p)}.$$

Поскольку нули и полюсы правой части определяют два спектра задач Штурма–Лиувилля для уравнения (25) с граничными условиями

$$y'(l, p) + \gamma\mu_1 y(l, p) = 0, \quad y'(0, p) + \gamma\mu_0 y(0, p) = 0,$$

или вместо последнего условия

$$y(0, p) = 0,$$

то функция $q(x)$ однозначно определяется данными (18), (19) обратной задачи [8; 12, с. 74].

Вернёмся к задаче определения функции $\psi(x)$ по данным обратной задачи. Докажем, что $\psi(x)$ восстанавливается однозначно при известной функции $q(x)$. Проведём доказательство от противного. Пусть существуют различные функции $\psi_0(x)$ и $\psi(x)$, $0 \leq x \leq l$, такие, что $w_0(0, t) = w(0, t)$, где w_0 и w – решения задач (7)–(10) для ψ_0 и ψ соответственно. Поскольку для решений w_0 и w выполняются также краевые условия (8), то $w_{0,x}(0, t) = w_x(0, t)$. Но тогда для разности $\omega(x, t) = w_0(x, t) - w(x, t)$ имеет место следующая задача:

$$\omega_t = \nu\omega_{xx} - q(x)\omega, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (28)$$

$$\omega(0, t) = \omega_x(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (29)$$

$$\omega_x(l, t) + \gamma\mu_1\omega(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (30)$$

$$\omega(x, 0) = \bar{w}(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (31)$$

где $\bar{w} = \psi_0 - \psi$.

Для дальнейшего нам понадобится

Лемма 2. *Решение $\omega(x, t)$ задачи (28)–(30) равно нулю при $x \in [0, l]$, $t \in [0, \infty)$, т.е. задача (28)–(31) разрешима лишь при $\bar{w} = 0$.*

Доказательство. Пусть $\{X_n(x)\}$, $\{\lambda_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, – с.ф. и с.з. задачи (12)–(14) с условием $X_n(0) = 0$ вместо условия (13). Тогда

$$\omega(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_n e^{-\lambda_n t} X_n(x).$$

Продифференцируем функцию ω по x и положим $x = 0$:

$$\omega_x(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_n e^{-\lambda_n t} X'_n(0) = 0.$$

Очевидно, что $X'_n(0) \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Устремляя t к бесконечности, последовательно устанавливаем, что $\bar{w}_n = 0$, и, следовательно, $\bar{w}(x) = 0$. Лемма доказана.

Таким образом, имеет место следующая

Лемма 3. *Обратная задача определения функций $q(x)$, $\psi(x)$ из условий (7)–(10), (18), (19) может иметь лишь единственное решение.*

Вернёмся к обратной задаче для уравнения Бюргерса на отрезке. Пусть в качестве дополнительных данных для прямой задачи (1)–(4) заданы условия (18), (19), соответствующие $\hat{\mu}_0 \neq \mu_0$. Тогда из леммы 3 и связи задач (1)–(4) и (7)–(10) вытекает

Теорема 3. *Пусть неизвестная функция f в уравнении (1) непрерывна и известна её априорная оценка: $f(x) > f_0 = \text{const}$ при всех $x \in [0, l]$. Тогда обратная задача (1)–(4), (18), (19) имеет не более одного решения.*

2.2. Перейдём теперь к задаче определения начального условия $\varphi(x)$ и источника $f(x)$ на полупрямой $x \geq 0$. Пусть далее функции f и φ таковы, что $q \in C[0, \infty)$, $q(x)$ неотрицательна и достаточно быстро стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$, причём выполнено условие $\int_0^{\infty} xq(x) dx < \infty$, а $\psi \in C[0, \infty) \cap L_2[0, \infty)$. Нетрудно убедиться, что, согласно (5), (10), класс таких функций не пуст и соответствует реальным физическим требованиям.

Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$\nu X''(x, k) - q(x)X(x, k) = -k^2 X(x, k), \quad x \geq 0, \quad (32)$$

$$X'(0, k) + \gamma\mu_0 X(0, k) = 0, \quad |X(\infty, k)| < \infty, \quad (33)$$

с условием нормировки $X(0, k) = 1$. Хорошо известно (см., например, [11, с. 59; 13, с. 31], что любая функция $\psi(x)$ из указанного класса представима в виде

$$\psi(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \psi(\xi) X(\xi, k) d\xi X(x, k) d\sigma(k),$$

где $\sigma(k)$ – спектральная функция задачи (32), (33). Соответственно, решение задачи

$$w_t = \nu w_{xx} - q(x)w, \quad x, t > 0, \quad (34)$$

$$w_x(0, t) + \gamma\mu_0 w(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (35)$$

$$w(x, 0) = \psi(x), \quad x \geq 0, \quad (36)$$

представимо в виде [14, с. 6]

$$w(x, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \psi(\xi) X(\xi, k) d\xi e^{-k^2 t} X(x, k) d\sigma(k).$$

Из этого представления следует, что при $\operatorname{Re} p \geq p_0 > 0$ определено преобразование Лапласа функции $w(x, t)$ с параметром p .

Рассмотрим обратную коэффициентную начально-краевую задачу на полупрямой $x \geq 0$: в задаче (34)–(36) по следу решения

$$w(0, t) = g(t), \quad t \geq 0, \quad (37)$$

и следу решения при другом значении $\hat{\mu}_0 \neq \mu_0$

$$\hat{w}(0, t) = h(t), \quad t \geq 0, \quad (38)$$

найти функции $q(x)$ и $\psi(x)$ при $x \geq 0$.

Докажем, что эта задача имеет лишь единственное решение. Рассуждения повторяют п. 3.1. Для разности $z(x, t) = w(x, t) - \hat{w}(x, t)$ возникает следующая обратная задача об определении $q(x)$:

$$z_t = \nu z_{xx} - q(x)z, \quad x, t > 0, \quad (39)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \geq 0, \quad (40)$$

$$z_x(0, t) + \gamma\mu_0 z(0, t) = \gamma(\hat{\mu}_0 - \mu_0)h(t), \quad t \geq 0, \quad (41)$$

$$z(0, t) = g(t) - h(t), \quad t \geq 0, \quad (42)$$

$$z(\infty, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (43)$$

Из условий (41), (42) и принципа суперпозиции вытекает, что для функции $z_0(x, t)$, удовлетворяющей соотношениям (39), (40), (43), можно считать известными следующие начально-краевые условия:

$$2\nu z_{0,x}(+0, t) = -\delta(t), \quad t \geq 0, \quad (44)$$

$$z_0(x, 0) = 0, \quad x \geq 0,$$

$$z_0(0, t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad (45)$$

$$z_0(\infty, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Покажем, что из условия (45) можно найти функцию $q(x)$, $x \geq 0$, лишь единственным образом.

Замечание. Для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + F(x, t), \quad t > 0,$$

в [15, с. 239] установлено, что три задачи

- 1) $|x| < \infty$, $u(x, 0) = \delta(x)$, $F = 0$, $t \geq 0$,
- 2) $|x| < \infty$, $u(x, 0) = 0$, $F = \delta(x)\delta(t)$, $t \geq 0$,
- 3) $x > 0$, $u(x, 0) = 0$, $F = 0$, $2a^2 u_x(+0, t) = -\delta(t)$, $t \geq 0$,

при $x \geq 0$ имеют одно и то же (фундаментальное) решение

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-x^2/4a^2 t}.$$

Этот результат справедлив и в случае уравнения (39), что будет установлено в процессе доказательства следующей леммы.

Лемма 4. *Задача определения функции $q(x)$, $x \geq 0$, из условий (39), (40), (43) по данным (44), (45) может иметь лишь единственное решение.*

Доказательство. Продолжим коэффициент $q(x)$ и решение $z_0(x, t)$ на полупрямую $x \leq 0$ чётным образом. Очевидно, что $z_{0,x}(0, t) = 0$ при $t > 0$. Остается проверить условие (44). Для этого совершим преобразование Лапласа, положив $\tilde{z}_0(x, p) \doteq z_0(x, t)$:

$$\nu \tilde{z}_{0,xx} - q(x) \tilde{z}_0 = p \tilde{z}_0, \quad |x| < \infty,$$

$$2\nu \tilde{z}_{0,x}(\pm 0, p) = \mp 1, \quad \tilde{z}_0(\pm \infty, p) = 0.$$

Рассмотрим теперь соответствующую начальную задачу относительно функции $z(x, t)$:

$$z_t = \nu z_{xx} - q(x)z, \quad |x| < \infty, \quad t > 0,$$

$$z(x, 0) = \delta(x), \quad |x| < \infty,$$

$$z(\pm \infty, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Совершив преобразование Лапласа в этой задаче, получим

$$\nu \tilde{z}_{xx} - q(x) \tilde{z} = p \tilde{z} - \delta(x), \quad |x| < \infty, \quad (46)$$

$$\tilde{z}(\pm \infty, p) = 0. \quad (47)$$

Докажем, что $\tilde{z}(x, p) = \tilde{z}_0(x, p)$. Действительно, $\tilde{z}(x, p)$ является функцией Грина задачи (46), (47), откуда следует, что $\tilde{z}(x, p)$ имеет при $x = 0$ скачок производной, т.е. $2\nu \tilde{z}_x(\pm 0, p) = \mp 1$. Таким образом, функции $\tilde{z}(x, p)$ и $\tilde{z}_0(x, p)$ являются решением одной и той же краевой задачи на полупрямой $x > 0$. Доказательство для случая $F = \delta(x)\delta(t)$ аналогично.

Из доказанного следует справедливость замечания и, в частности, эквивалентность задач вида 1) и 3) для уравнения (39). Используем теперь результат из [14, с. 17], вкратце приведя соответствующие выкладки.

Совершим преобразование Фурье по системе функций $X_0(x, k)$, являющихся решением уравнения (32) с условиями Коши $X_0(0, k) = 1$, $X_0'(0, k) = 0$:

$$-\nu k^2 \int_0^\infty \tilde{z}(x, p) X_0(x, k) dx = p \int_0^\infty \tilde{z}(x, p) X_0(x, k) dx - 1.$$

Отсюда получаем, что

$$\int_0^\infty \tilde{z}(x, p) X_0(x, k) dx = \frac{1}{p + \nu k^2}.$$

Совершая обратное преобразование Фурье, находим

$$\tilde{z}(x, p) = \int_0^{\infty} \frac{X_0(x, k)}{p + \nu k^2} d\sigma(k),$$

где $\sigma(k)$ – спектральная функция задачи. Окончательно для прообраза Лапласа приходим к следующей формуле:

$$z(x, t) = \int_0^{\infty} e^{-\nu k^2 t} X_0(x, k) d\sigma(k).$$

Полагая теперь $x = 0$, из данных обратной задачи получаем уравнение на $\sigma(k)$:

$$\int_0^{\infty} e^{-\nu k^2 t} d\sigma(k) = f(t), \quad t \geq 0.$$

Из теоремы Лёрха о взаимнооднозначности преобразования Лапласа [14, с. 75] следует, что спектральная функция однозначно определяется по функции $f(t)$. В свою очередь, функция $\sigma(k)$ однозначно определяет коэффициент $q(x)$, $x \geq 0$ [13, с. 46]. Лемма доказана.

Осталось доказать, что функция $\psi(x)$ однозначно восстанавливается на полупрямой $x \geq 0$ при известной функции $q(x)$. Доказательство аналогично п. 3.1. Допустим, что существуют $\psi_0(x) \neq \psi(x)$ такие, что $w_0(0, t) = w(0, t)$, где w_0 и w – решения задач (34)–(36) для ψ_0 и ψ соответственно. Поскольку для решений w_0 и w выполняются также краевые условия (37), то $w_{0,x}(0, t) = w_x(0, t)$. Но тогда для разности $\omega(x, t) = w_0(x, t) - w(x, t)$ имеет место следующая задача:

$$\begin{aligned} \omega_t &= \nu \omega_{xx} - q(x)\omega, & x, t > 0, \\ \omega(0, t) &= \omega_x(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ |\omega(\infty, t)| &< \infty, & t \geq 0, \\ \omega(x, 0) &= \bar{w}(x), & x \geq 0, \end{aligned}$$

где $\bar{w} = \psi_0 - \psi$.

Функция $\omega(x, t)$ представима в виде

$$\omega(x, t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{w}(\xi) X_0(\xi, k) d\xi e^{-k^2 t} X_0(x, k) d\sigma(k),$$

поэтому

$$\omega(0, t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{w}(\xi) X_0(\xi, k) d\xi e^{-k^2 t} d\sigma(k) = 0, \quad t \geq 0.$$

Снова обращаясь к теореме о взаимнооднозначности преобразовании Лапласа [14, с. 75], заключаем, что

$$\int_0^{\infty} \bar{w}(\xi) X_0(\xi, k) d\xi = 0, \quad k \geq 0,$$

откуда следует

Теорема 4. Обратная задача определения функций $f(x)$, $\varphi(x)$, $x \geq 0$, в прямой задаче (1)–(4) по дополнительным данным (37), (38) может иметь лишь единственное решение.

Нетрудно убедиться, что теоремы единственности решения обратных задач одновременного определения начальных условий и источника в уравнении Бюргерса на отрезке и полупрямой,

аналогичные теоремам 3 и 4, могут быть доказаны для дополнительных условий второго или третьего рода взамен (37), (38).

Работа выполнена при содействии Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., 1977.
2. Нелинейные волны / Ред. С. Лейбович, С. Сибасс. М., 1977.
3. *Егоров А.И.* Уравнения Риккати. М., 2001.
4. *Петровский С.В.* Точные решения уравнения Бюргерса с источником // Журн. техн. физики. 1999. Т. 69. Вып. 8. С. 10–14.
5. *Кудрявцев А.Г., Сапожников О.А.* Получение точных решений неоднородного уравнения Бюргерса с использованием преобразования Дарбу // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 3. С. 313–322.
6. *Гужев Д.С., Калиткин Н.Н.* Уравнение Бюргерса – тест для численных методов // Мат. моделирование. 1995. Т. 7. № 4. С. 99–127.
7. *Samokhin A.* Gradient catastrophes for a generalized Burgers equation on a finite interval // Geometry and Physics. 2014. V. 85 (November). P. 177–184.
8. *Denisov A.M.* Elements of the Theory of Inverse Problems. Utrecht, 1999.
9. *Денисов А.М.* Единственность и неединственность решения задачи определения источника в уравнении теплопроводности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2016. Т. 56. № 10. С. 1754–1759.
10. *Денисов А.М.* Задачи определения неизвестного источника в параболическом и гиперболическом уравнениях // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2015. Т. 55. № 5. С. 830–835.
11. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М., 1988.
12. *Borg G.* Eine Umkehrung der Sturm–Liouvillschen Eigenwertaufgabe // Acta Math. 1946. Bd. 78. № 1. S. 1–96.
13. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М., 1984.
14. *Лаврентьев М.М., Резницкая М.М., Яхно В.Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск, 1982.
15. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1972.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 21.01.2020 г.
После доработки 06.04.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.

УДК 517.958:535.2

О МНГОВОЛНОВЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

© 2021 г. А. Н. Волобуев

Рассматривается нелинейное уравнение Шрёдингера, возникающее в ряде физических задач. Показано, что при выделении в этом уравнении действительной части возникает нелинейное дифференциальное уравнение, имеющее по крайней мере два вида решений: многоволновые и в виде стоячих волн. Представлены численные примеры многоволнового решения и его перехода в решение в виде стоячих волн.

DOI: 10.31857/S0374064121060029

Введение. Нелинейные уравнения Шрёдингера возникают при решении различных физических и технических задач. Наиболее часто исследуется нелинейное уравнение Шрёдингера с кубической нелинейностью, имеющее особые виды решений в виде солитонов [1, гл. 1, § 1.7а; 2, гл. 4, § 4.1]. Для такого уравнения различными методами, в частности методом обратной задачи рассеяния, найдены одно- и многосолитонные решения. Однако в физических и технических задачах возникают нелинейные уравнения Шрёдингера с другими видами нелинейностей. Одно из таких уравнений исследуется в данной работе.

1. Нелинейное уравнение Шрёдингера. Рассмотрим нелинейное уравнение Шрёдингера следующего вида:

$$i\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + V^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = \left(\frac{\partial \ln |\Phi|}{\partial t} \right)^2 \Phi, \quad (1)$$

где μ и V – действительные постоянные, $\Phi = \Phi(X, t)$ – искомая функция.

Несмотря на то, что уравнение (1) обычно не обсуждается в математической литературе, оно возникает, например, при анализе самоиндуцированной прозрачности [3].

Исследуем бегущие волны, подчиняющиеся уравнению (1) и описывающиеся соотношением

$$\Phi(X, t) = (\varphi - \varphi_0) \exp\{i(kX - \omega t)\}, \quad (2)$$

где k – волновое число бегущей волны, ω – её циклическая частота, φ_0 – постоянная величина, $\varphi = \varphi(X, t)$ – действительнoзначная функция, имеющая вторую производную по X и первую по t , такая, что $\varphi > \varphi_0$ при всех X и t ; в частности, $|\Phi| = \varphi - \varphi_0$.

Подставляя выражение (2) для функции Φ в уравнение (1) и учитывая, что

$$\frac{\partial \ln |\Phi|}{\partial t} = \frac{1}{\varphi - \varphi_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

приходим к следующему уравнению относительно функции φ :

$$V^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + i \left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2V^2 k \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right) + (\mu\omega - \omega^2)(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{\varphi - \varphi_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2. \quad (3)$$

Функция φ является действительнoзначной, поэтому должно выполняться равенство

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2V^2 k \frac{\partial \varphi}{\partial X} = 0. \quad (4)$$

Обозначим через ν множитель при $\varphi - \varphi_0$ в левой части уравнения (3), т.е.

$$\nu = \mu\omega - \omega^2. \quad (5)$$

Тогда уравнение (3) (при выполнении условия (4)) запишется в виде

$$V^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \nu(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{\varphi - \varphi_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2. \quad (6)$$

Уравнение вида (6) возникает также при исследованиях нервного импульса [4] и распространения электромагнитного поля в кириальной среде [5].

Таким образом, уравнение Шрёдингера (1) имеет решение вида (2) с действительнзначной функцией φ тогда и только тогда, когда функция φ удовлетворяет уравнениям (4) и (6) и неравенству $\varphi > \varphi_0$.

Уравнение (4) является линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами и поэтому легко решается: его общее вещественнзначное решение имеет вид $\varphi - \varphi_0 = f(\xi)$, где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная дифференцируемая функция, а

$$\xi = \mu X - 2V^2 kt.$$

Знак минус в переменной ξ соответствует распространению волны, как и в экспоненте (2), слева направо.

Следовательно, уравнение Шрёдингера (1) имеет решение вида (2) тогда и только тогда, когда найдётся дважды дифференцируемая положительная функция f , определённая на некотором (возможно, бесконечном) интервале, такая, что функция

$$\varphi(X, t) = \varphi_0 + f(\mu X - 2V^2 kt) \quad (7)$$

удовлетворяет уравнению (6).

Подставляя в уравнение (6) вместо функции φ её представление (7), придём к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$V^2 \mu^2 f'' + \nu f = 4V^4 k^2 \frac{1}{f} (f')^2 \quad (8)$$

(здесь штрих – производная по ξ).

Для упрощения будем считать, что $V\mu \neq 0$. Уравнение (8) относится к типу уравнений, не содержащих независимой переменной и поэтому стандартно интегрируется в квадратурах (см., например, [6, с. 169]): в качестве новой искомой функции введём функцию $p = df/d\xi$, а за независимую переменную примем f . Тогда $f'' = pdp/df$, и в этих обозначениях уравнение (8) принимает вид

$$p \frac{dp}{df} + \frac{a}{f} p^2 + bf = 0,$$

где $a = -4V^2 k^2 / \mu^2$, $b = \nu / (V^2 \mu^2)$. Это уравнение сводится к уравнению Бернулли.

Мы не будем записывать и анализировать общее решение уравнения (8) в случае произвольных коэффициентов, поскольку наша цель состоит в том, чтобы указать для уравнения (1) какое-либо параметрическое семейство решений (2), а также решения для уравнений (1) и (6) в виде бегущих волн. Поэтому будем считать, что величина k в представлении (2) выбрана такой, что имеет место равенство

$$4V^2 k^2 = \mu^2. \quad (9)$$

Тогда в уравнении (8) числовые коэффициенты при f'' и $(f')^2$ равны между собой, и, поделив обе его части на $4V^4 k^2$, после очевидных преобразований придём с учётом равенства (5) к уравнению

$$\left(\frac{f'}{f} \right)' = -\frac{\mu\omega - \omega^2}{4V^4 k^2},$$

откуда находим

$$f(\xi) = C_1 \exp \left\{ -\frac{\mu\omega - \omega^2}{4V^4 k^2} \frac{\xi^2}{2} + C_2 \xi \right\}, \quad (10)$$

где C_1 и C_2 – произвольные действительные постоянные.

Таким образом, если $V\mu \neq 0$, то при каждом $k = -\mu/(2V)$ и $k = \mu/(2V)$ уравнение Шрёдингера (1) имеет трёхпараметрическое семейство решений (2), где $\varphi = f(\mu X - 2V^2kt)$, а функция $f(\xi)$ задана равенством (10), в котором $C_1 > 0$, C_2 и ω – произвольные действительные постоянные.

2. Решения в виде бегущих волн. Перейдём к построению решений уравнений (1) и (6) в виде бегущих волн. В этом пункте будем считать, что величина ν в равенстве (5) неотрицательна, т.е. что

$$\omega_0^2 = \mu\omega - \omega^2 \tag{11}$$

(если искать частное решение уравнения (6) в том виде, который предлагается ниже, то, как показано, величина $\mu\omega - \omega^2$ должна быть неотрицательна; поэтому мы сразу обозначили её ω_0^2). Таким образом, далее мы ищем решения уравнения (1) и уравнения

$$V^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \omega_0^2(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{\varphi - \varphi_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \tag{12}$$

в виде бегущих волн.

Решение нелинейного уравнения (12) будем искать в виде бегущей уединённой волны

$$\varphi - \varphi_0 = \varphi_{\max} \exp \left\{ -(k_0(X - X_0) \pm \omega_0(t - t_0))^2 / 2 \right\}, \tag{13}$$

где k_0 , X_0 и t_0 – действительные постоянные, и физический смысл входящих в представление (13) величин следующий: φ_{\max} – амплитудное значение функции $\varphi - \varphi_0$, X_0 – координата максимума (центра) волнового импульса, t_0 – время достижения этого максимума. Знак минус относится к волне, распространяющейся слева направо, а знак плюс – справа налево.

Непосредственной подстановкой функции φ , задаваемой равенством (13), в уравнение (12) несложно убедиться, что эта функция будет его решением только при выполнении равенства

$$V^2 k_0^2 = \omega_0^2. \tag{14}$$

Более того, функция (13) будет являться решением уравнения (4), если в (13) перед ω_0 выбран знак минус, а коэффициенты k_0 и ω_0 с одним и тем же множителем пропорциональны соответственно коэффициентам μ и $2V^2k$ линейной формы ξ , т.е.

$$2V^2 k k_0 = \mu \omega_0. \tag{15}$$

Действительно, в этом случае в силу (13), (15) и (11) получаем

$$\varphi - \varphi_0 = \varphi_{\max} \exp \left\{ -\frac{\mu\omega - \omega^2}{4V^4 k^2} \frac{\xi^2}{2} + \frac{\omega_0 \delta_0}{V^2 k} \xi + \frac{\delta_0^2}{2} \right\},$$

где $\delta_0 = -k_0 X_0 + \omega_0 t_0$, т.е. поскольку из равенств (14) и (15) вытекает равенство (9), получаем найденное выше решение, соответствующее функции (10), при условии, что $\mu\omega - \omega^2 \geq 0$.

На рис. 1 показан график уединённого импульса $\Phi(X, t)$, построенный по формуле (2) с подстановкой в неё функции (13) при условиях: $\omega_0 = \omega = 0$ – отсутствие зависимости от времени, $\varphi_{\max} = 1$, $X_0 = 0$, отношение волновых чисел $k/k_0 = 5$.

Нелинейное уравнение (12), а следовательно, и уравнение (1), допускает многоволновое решение.

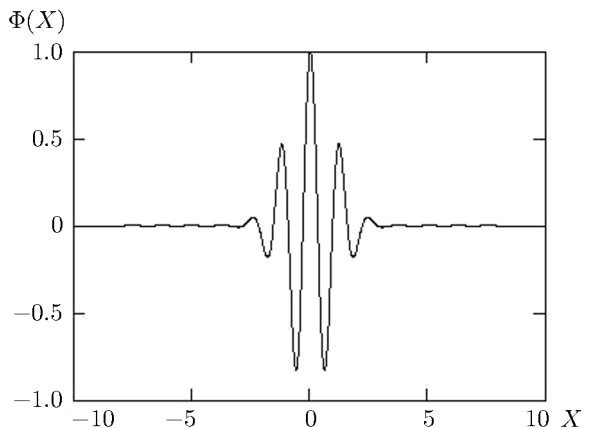


Рис. 1. Уединённый импульс функции $\Phi(X)$.

Многоволновые решения найдены для очень ограниченного круга нелинейных уравнений [1, 2]. Многоволновое решение уравнения (12) ищем в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{\max} \sum_{n=1}^N \varphi_n(X, t), \tag{16}$$

где

$$\varphi_n(X, t) = \varphi_n = \exp\{-\Delta_n^2(X, t)/2\}, \quad \text{а} \quad \Delta_n(X, t) = \Delta_n = k_0(X - X_{0n}) - \omega_0(t - t_{0n}). \tag{17}$$

В представлении (16), (17) число N – общее количество волн-импульсов, n – текущий номер импульса, X_{0n} – координаты максимумов волн-импульсов, t_{0n} – времена достижения этих максимумов.

Подставляя в уравнение (12) вместо функции φ её представления (16), (17), получаем равенство

$$\sum_{n=1}^N \varphi_n \sum_{n=1}^N \varphi_n \Delta_n^2 = \left(\sum_{n=1}^N \varphi_n \Delta_n \right)^2. \tag{18}$$

Рассмотрим два подряд идущих одинаковых импульса $n = 1, 2$. Записывая для этого случая ($N = 2$) равенство (18), будем иметь

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1 \Delta_1^2 + \varphi_2 \Delta_2^2) = (\varphi_1 \Delta_1 + \varphi_2 \Delta_2)^2. \tag{19}$$

Очевидно, что равенство (19) равносильно равенству $\Delta_1 - \Delta_2 = 0$, или

$$k_0(X_{02} - X_{01}) - \omega_0(t_{02} - t_{01}) = 0. \tag{20}$$

Соотношение (20) показывает, что расстояние между импульсами $\delta = X_{02} - X_{01}$ волна проходит за время $t_{02} - t_{01}$ со скоростью $V = \omega_0/k_0$.

Если в Δ_n при каждом n взять $t_{0n} = X_{0n}/V = k_0 X_{0n}/\omega_0$, то получим, что $\Delta_n = k_0 X - \omega_0 t$ для всех $n = \overline{1, N}$, т.е. тогда $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_N$ и в равенстве (18) их можно вынести за знак суммы и сократить. В результате (18) превращается в тождество.

Следовательно, при таком выборе значений t_{0n} , $n = \overline{1, N}$, функция (16) является многоволновым решением нелинейного уравнения (12).

Наиболее простой вид многоволновое решение (16) приобретает в случае одинакового расстояния δ между всеми волнами-импульсами. В этом случае для координат максимумов импульсов справедливо равенство $X_{0n} = n\delta$, а для времён достижения максимумов – равенство $t_{0n} = k_0 X_{0n}/\omega_0 = k_0 n\delta/\omega_0$.

На рис. 2 показаны несколько следующих друг за другом импульсов, построенных по формуле (16) при условиях

$$\omega_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \varphi_{\max} = 1, \quad k_0 = 2, \quad \delta = 4.$$

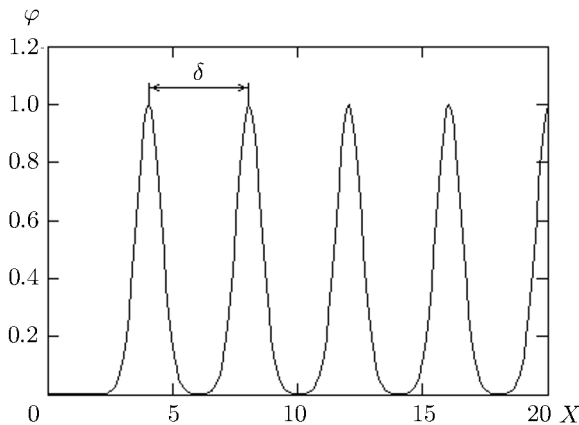


Рис. 2. Следующие друг за другом импульсы в многоволновом решении.

3. Решение в виде стоячих волн. Стоячие волны чаще всего образуются в линейных системах в результате суперпозиции (интерференции) прямых и отражённых бегущих волн. Однако известно, что стоячие волны могут возникать и в нелинейных системах [7, гл. 4, § 2]. Многие физические процессы носят принципиально нелинейный характер, и процесс возникновения стоячих волн в таких системах нетривиален. Мы не будем обсуждать физические

Рассмотрим другой вид волны, представляющий собой решение уравнения (16).

механизмы возникновения стоячих волн в этих системах. Исследуем математическую возможность возникновения стоячих волн, подчиняющихся нелинейному уравнению (12).

Некоторые решения нелинейного уравнения (12) можно найти методом разделения переменных (см., например, [8, гл. 2, § 3]). Рассмотрим решение уравнения (12), имеющее вид

$$\varphi - \varphi_0 = \phi(X)T(t), \quad (21)$$

где $\phi(X)$ – функция только координаты X , $T(t)$ – функция только времени t .

Подставив (21) в (12), получим

$$V^2 \phi(X) T^2(t) \frac{d^2 \phi(X)}{dX^2} = \left(\phi(X) \frac{dT(t)}{dt} \right)^2 - \phi^2(X) T^2(t) \omega_0^2. \quad (22)$$

Разделим обе части уравнения (22) на $\phi^2(X) T^2(t)$. В результате будем иметь

$$V^2 \frac{1}{\phi(X)} \frac{d^2 \phi(X)}{dX^2} + \omega_0^2 = \left(\frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} \right)^2 = -\alpha^2, \quad (23)$$

где α – постоянная величина.

Равенства (23) распадаются на два не зависящих друг от друга уравнения. Одно из них – уравнение относительно функции $\phi(X)$ – имеет вид

$$\frac{d^2 \phi(X)}{dX^2} + \left(k_0^2 + \frac{\alpha^2}{V^2} \right) \phi(X) = 0; \quad (24)$$

здесь мы воспользовались равенством (14), в силу которого $\omega_0^2/V^2 = k_0^2$.

Обозначим $k_S^2 = k_0^2 + \alpha^2/V^2$. Общим решением уравнения (24) является

$$\phi(X) = \phi(0) \exp(ik_S X), \quad (25)$$

где $\phi(0)$ – значение функции $\phi(X)$ в начале координат.

Другое уравнение, вытекающее из равенства (23), – уравнение относительно функции $T(t)$ – имеет вид

$$\frac{dT(t)}{dt} = i\alpha T(t). \quad (26)$$

Величина α может принимать как положительные, так и отрицательные значения, что не влияет на дальнейшие выкладки. Общим решением уравнения (26) является

$$T(t) = T(0) \exp(i\alpha t), \quad (27)$$

где $T(0)$ – начальное значение функции $T(t)$.

Подставляя общие решения (25) и (27) в представление (21), получаем

$$\varphi - \varphi_0 = \varphi_A \exp(i\alpha t) \exp(ik_S X), \quad (28)$$

где обозначено $\varphi_A = T(0)\phi(0)$.

Как показано выше, функция $\varphi - \varphi_0$ должна быть действительной. Использование же экспонент с мнимыми показателями вводится исключительно для удобства преобразований. На самом деле в этих экспонентах нужно учитывать только действительные слагаемые. Поэтому формула (28) описывает решение уравнения (12) в виде стоячих волн

$$\varphi - \varphi_0 = \varphi_A \cos(\alpha t) \cos(k_S X) = \varphi_A \cos(\alpha t) \cos(2\pi X/\delta), \quad (29)$$

где φ_A – амплитудное значение стоячих волн, δ – длина волны.

Интересно проследить графически переход многоволнового решения (16) в решение в виде стоячих волн (29). Этот переход осуществляется при сближении импульсов (см. рис. 2), т.е. при уменьшении величины δ .

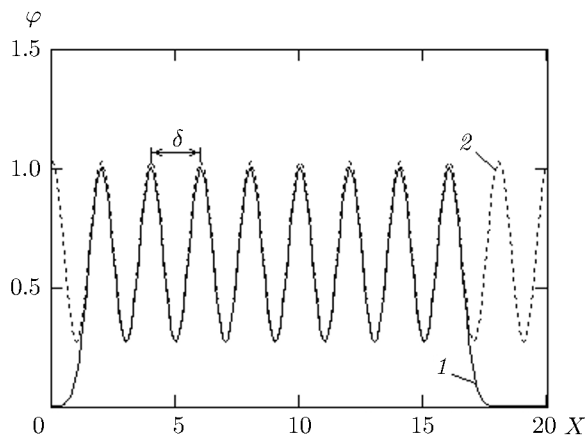


Рис. 3. Переход многоимпульсного решения в решение в виде стоячей волны: 1 – многоволновое решение, 2 – стоячая волна.

новлено, что это нелинейное уравнение имеет как многоволновые решения, так и решения в виде стоячих волн. Многоволновое решение при уменьшении расстояния между волнами-импульсами переходит в решение в виде стоячих волн.

На рис. 3 показаны два графика. График 1 построен по формуле (16) при условиях $\omega_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_{\max} = 1$, $k_0 = 2$, $\delta = 2$ для $N = 8$ импульсов. График 2 (пунктиром) построен по формуле (29) при условиях $\varphi_0 = 0.65$ и $\varphi_A \cos(\alpha t) = 0.38$ для некоторого момента времени t .

Заключение. В работе для рассмотренного в ней нелинейного уравнения Шрёдингера задача нахождения его решений, имеющих вид бегущей волны, сведена к решению системы двух уравнений в частных производных относительно одной и той же функции. Показано, как найти все решения этой системы в замкнутой форме. Одно из уравнений указанной системы является нелинейным и возникает в различных задачах прикладного характера. Уста-

новлено, что это нелинейное уравнение имеет как многоволновые решения, так и решения в виде стоячих волн. Многоволновое решение при уменьшении расстояния между волнами-импульсами переходит в решение в виде стоячих волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987.
2. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М., 1988.
3. Волобуев А.Н. Распространение импульса электромагнитного поля в диэлектрике в условиях самоиндуцированной прозрачности // Мат. моделирование. 2006. Т. 18. № 3. С. 93–102.
4. Волобуев А.Н. Индуктивно-емкостная модель возбудимой биоткани // Успехи совр. радиоэлектроники. 2006. № 3. С. 33–60.
5. Volobuev A.N. The Nonlinear Analysis of Chiral Medium / Ed. Takashiro Akitsu. "Chirality from Molecular Electronic States". IntechOpen. 2018. P. 1–10.
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М., 1953.
7. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. М., 1984.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1972.

Самарский государственный медицинский университет

Поступила в редакцию 24.12.2019 г.
После доработки 04.02.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА С АНАЛОГОМ УСЛОВИЯ ФРАНКЛЯ НА ВНУТРЕННЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

© 2021 г. У. М. Мирсабурова

Для уравнения $(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - (m/2y)u_y = 0$, рассматриваемого в некоторой смешанной области, доказаны теоремы единственности и существования решения задачи с недостающим условием Трикоми на граничной характеристике и аналогом условия Франкля на внутренней характеристике и на отрезке вырождения.

DOI: 10.31857/S0374064121060030

1. Постановка задачи ТФ (Трикоми–Франкля). Пусть D – конечная односвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C} = \{z = x + iy\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой σ_0 ($y = \sigma_0(x)$), заданной уравнением $x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$, а при $y < 0$ – характеристиками AC и BC уравнения

$$(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - (m/2y)u_y = 0, \quad (1)$$

где m – положительная постоянная.

Обозначим через D^+ и D^- части области D , лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, через C_0 и C_1 – точки пересечения соответственно характеристик AC и BC с характеристиками, выходящими из точки $E(c, 0)$, а через C^* – точку пересечения характеристики EC_1 с характеристикой, выходящей из точки $E_1(c_1, 0)$, где c, c_1 – некоторые числа, принадлежащие интервалу $I = (-1, 1)$ оси $y = 0$, причём $c < c_1 < 1$.

Пусть $p(x) = a_1x - b_1$ и $q(x) = a_2 - b_2x$ – линейные функции, отображающие отрезок $[c, 1]$ на отрезки $[c, c_1]$ и $[c_1, 1]$ соответственно, причём $p(c) = c$, $p(1) = c_1$ и $q(c) = 1$, $q(1) = c_1$, т.е. $a_1 = (c_1 - c)/(1 - c)$, $b_1 = c(c_1 - 1)/(1 - c)$ и $a_2 = (1 - cc_1)/(1 - c)$, $b_2 = (1 - c_1)/(1 - c)$, при этом $a_1 + b_2 = 1$, $a_2 + b_1 = 1$.

В работе Трикоми [1] краевое условие ставилось на всей характеристике AC . В настоящей работе исследуется корректность задачи, в которой характеристика AC произвольным образом разбита на два куска AC_0 и C_0C и на AC_0 задано условие Трикоми, а C_0C освобождён от краевого условия, и это недостающее условие Трикоми заменено аналогами условия Франкля [2–5] на внутренней характеристике EC_1 и на отрезке вырождения $EB \subset AB$.

Задача ТФ (Трикоми–Франкля). Требуется найти в области D функцию $u(x, y) \in C(\overline{D})$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) функция $u(x, y)$ принадлежит классу $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D^+ ;
- 2) функция $u(x, y)$ является в области D^- обобщённым решением класса R_1 уравнения (1) ($u(x, y) \in R_1$, если в формуле Даламбера $\tau'(x), \nu(x) \in H$ (см. ниже представление (7) [6, с. 104]);
- 3) на интервале вырождения AB имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow +0} y^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I \setminus \{c\}, \quad (2)$$

причём эти пределы при $x = \pm 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже единицы;

4) выполняются равенства

$$u(x, y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in \bar{I}, \tag{3}$$

$$u(x, y)|_{AC_0} = \psi_0(x), \quad x \in [-1, (c-1)/2], \tag{4}$$

$$u[\theta^*(p(x))] - \mu u[\theta^*(q(x))] = \psi_1(x), \quad x \in [c, 1], \tag{5}$$

$$u(p(x), 0) - u(q(x), 0) = f(x), \quad x \in [c, 1], \tag{6}$$

где μ – постоянная, $\mu \in (0, 1)$, а $\theta^*(x_0) = (x_0 + c)/2 - i[(m + 2)(x_0 - c)/4]^{2/(m+2)}$ – аффикс точки пересечения характеристики EC_1 с характеристикой, выходящей из точки $M(x_0, 0)$, где $x_0 \in (c, 1)$ [7, 8], функции $\varphi(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $f(x)$ заданы и $\varphi(x) \in C^{0,\alpha_0}(\bar{I})$, $\psi_0(x) \in C[-1, (c-1)/2] \cap C^{1,\alpha_0}(-1, (c-1)/2)$, $\psi_1(x)$, $f(x) \in C[c, 1] \cap C^{1,\alpha_0}(c, 1)$, причём

$$\varphi(x) = (1 - x^2)\varphi_0(x), \quad \varphi_0(x) \in C^{0,\alpha_0}(\bar{I}), \quad \psi_0(-1) = 0, \quad \psi_1(1) = 0, \quad f(1) = 0.$$

Заметим, что условия (5) и (6) являются аналогами условия Франкля [2] на внутренней характеристике $EC_1 = EC^* \cup C^*C_1$ и на отрезке вырождения $EB = (EE_1 \cup E_1B) \subset AB$ соответственно. Обозначим $u(x, 0) = \tau(x)$, $x \in \bar{I}$, тогда условие (6) примет вид

$$\tau(p(x)) - \tau(q(x)) = f(x), \quad x \in [c, 1]. \tag{6*}$$

2. Единственность решения задачи ТФ. Формула Даламбера, дающая в области D^- для уравнения (1) решение видоизменённой задачи Коши с начальными данными

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in \bar{I}; \quad \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in I,$$

имеет вид [9, с. 39]

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \left[\tau \left(x - \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} \right) + \tau \left(x + \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} \right) \right] - \frac{(-y)^{(m+2)/2}}{m+2} \int_{-1}^1 \nu \left(x + \frac{2t}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} \right) dt. \tag{7}$$

С помощью формулы Даламбера в силу краевых условий (4) и (5) с учётом равенства (6*) соответственно получаем

$$\tau'(x) - \nu(x) = \psi'_0((x-1)/2), \quad x \in (-1, c), \tag{8}$$

$$b_2(1 - \mu)\tau'(q(x)) + a_1\nu(p(x)) + \mu b_2\nu(q(x)) = \psi_2(x), \quad x \in (c, 1), \tag{9}$$

где $\psi_2(x) = f'(x) - 2\psi'_1(x)$.

Равенства (8) и (9) являются первыми функциональными соотношениями между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесёнными соответственно на интервалы $(-1, c)$ и $(c, 1)$ оси $y = 0$ из области D^- .

Для задачи ТФ аналогом принципа экстремума Бицадзе [10, с. 301] является

Теорема 1. *Решение $u(x, y)$ задачи ТФ при выполнении условий $\psi_0(x) \equiv 0$, $\psi_1(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$ свои наибольшее положительное значение (НПЗ) или наименьшее отрицательное значение (НОЗ) в замкнутой области \bar{D}^+ может принимать только в точках нормальной кривой σ_0 .*

Доказательство. Пусть функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. В силу принципа Хопфа [10, с. 25] решение $u(x, y)$ уравнения 1 своего НПЗ во внутренних точках области D^+ не достигает.

Допустим, что функция $u(x, y)$ в области $\overline{D^+}$ своего НПЗ или НОЗ достигает в точках интервала $I = (-1, 1)$ оси $y = 0$.

Пусть $(x_0, 0)$, $x_0 \in I$, – точка НПЗ функции $u(x, y)$, а следовательно, и функции $\tau(x) = u(x, 0)$.

Рассмотрим отдельно три случая возможного расположения точки x_0 .

1. Пусть $x_0 \in (-1, c)$. Тогда в этой точке имеем [11; 9, с. 74]

$$\nu(x_0) < 0. \tag{10}$$

С другой стороны, в силу соответствующего однородного соотношения (8) ($c \tau'(x_0) = 0$, $\psi_0(x) \equiv 0$) верно равенство $\nu(x_0) = 0$, что в силу (2) противоречит неравенству (10). Следовательно, $x_0 \notin (-1, c)$.

2. Пусть решение $u(x, y)$ своего НПЗ достигает во внутренней точке x_0 интервала $(c, 1)$. Тогда в силу соответствующего однородного условия (6*) ($c f(x) \equiv 0$) решение $u(x, y)$ своего НПЗ достигает в двух точках $(p(x_0), 0)$ и $(q(x_0), 0)$. Следовательно, в этих точках $\nu(p(x_0)) < 0$, $\nu(q(x_0)) < 0$ [11; 9, с. 74], откуда следует, что

$$a_1\nu(p(x_0)) + \mu b_2\nu(q(x_0)) < 0. \tag{11}$$

Однако в силу соответствующего однородного соотношения (9) ($c \tau'(q(x_0)) = 0$, $\psi_2(x) \equiv 0$) имеем $a_1\nu(p(x_0)) + \mu b_2\nu(q(x_0)) = 0$, что вследствие (2) противоречит неравенству (11). Поэтому $x_0 \notin (c, 1)$

3. Пусть $x_0 = c$. Тогда из соответствующего однородного условия (6*) ($c f(x) \equiv 0$) при $x = c$ с учётом значений $p(c) = c$, $q(c) = 1$, $\tau(1) = \varphi(1) = 0$ вытекает, что $\tau(c) - \tau(1) = 0$, т.е. $\tau(c) = 0$. Следовательно, и в этом случае приходим к противоречию.

Таким образом, решение $u(x, y)$, удовлетворяющее условиям теоремы 1, своего НПЗ во внутренних точках интервала I не достигает.

Так же, как и выше, доказывается, что решение $u(x, y)$, для которого выполнены условия теоремы 1, своего НОЗ не достигает во внутренних точках интервала I .

Итак, решение $u(x, y)$, удовлетворяющее условиям теоремы 1, своих НПЗ и НОЗ в замкнутой области $\overline{D^+}$ может достигать только в точках нормальной кривой σ_0 . Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Задача TF имеет не более одного решения.*

В самом деле, согласно теореме 1, решение однородной задачи TF в замкнутой области $\overline{D^+}$ своих НПЗ и НОЗ достигает в точках нормальной кривой σ_0 , а в этих точках в силу соответствующего однородного условия (3) ($c \varphi(x) \equiv 0$) $u(x, y)|_{\sigma_0} = 0$. Отсюда следует, что $u(x, y) \equiv 0$ всюду в замкнутой области $\overline{D^+}$, а значит, и во всей смешанной области D .

3. Существование решения задачи TF.

Теорема 2. *Пусть для числовых параметров задачи TF выполняется неравенство*

$$\frac{4}{(1 - \mu^2)} \sqrt{\frac{c_1 - c}{1 - c_1}} \left(\mu(1 + b_2^*) + \left(\frac{1 - c_1}{c_1 - c} \right)^2 (1 + a_1^*) \right) < 1, \tag{12}$$

в котором $a_1^* = \cos(\theta\pi) - 0.5a_1 \sin(\theta\pi)$, $b_2^* = \cos(\theta\pi) - 0.5b_2 \sin(\theta\pi)$, $\theta\pi = \arctg((1 + \mu)/(1 - \mu))$. Тогда задача TF однозначно разрешима.

Заметим, что множество числовых параметров задачи TF, удовлетворяющих неравенству (12), не пусто. Действительно, например, пусть $\mu = 1 - c_1$. Тогда, если число c_1 достаточно близко к единице, разность $1 - c_1$ достаточно мала, и неравенство (12) при этих значениях c_1 выполняется.

Доказательство теоремы 2.

3.1. Вывод системы неклассических сингулярных интегральных уравнений Трикоми. Решение уравнения (1) в области D^+ , удовлетворяющее краевым условиям Дирихле

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in \overline{I}; \quad u(x, y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in I,$$

имеет вид [9, с. 143; 10, с. 180; 11; 12]

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi(m+2)} y^{(m+2)/2} \int_{-1}^1 \left\{ \left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{-1} - \right. \\ \left. - \left[(1-xt)^2 + \frac{4t^2}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{-1} \right\} \tau(t) dt + \frac{1}{2\pi} (1-R^2) \int_{-1}^1 (r_-^{-2} - r_+^{-2}) \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi, \quad (13)$$

где

$$r_{\mp}^2 = (x-\xi)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} (y^{(m+2)/2} \mp \eta^{(m+2)/2})^2, \quad (\xi, \eta) \in \sigma_0, \\ \xi^2 + \frac{4}{(m+2)^2} \eta^{m+2} = 1, \quad R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}.$$

Продифференцируем решение (13) по y , затем умножим полученное тождество на $y^{-m/2}$ и перейдём к пределу при $y \rightarrow +0$, в результате получим

$$\nu(x) = -\frac{1}{\pi} \left(\int_{-1}^1 \frac{\tau'(t) dt}{x-t} + \int_{-1}^1 \frac{\tau(t) dt}{(1-xt)^2} \right) + \Phi_0(x), \quad x \in I, \quad (14)$$

где

$$\Phi_0(x) = \frac{2}{\pi} (1-x^2) \int_{-1}^1 (1-2x\xi+x^2)^{-2} \varphi(\xi) d\xi.$$

Равенство (14) является вторым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесённым на интервал $I = (-1, 1)$ оси $y = 0$ из области D^+ .

Отметим, что равенство (14) справедливо для всего промежутка I .

Заменяя в соотношениях (8) и (9) функцию $\nu(x)$ её представлением (14), запишем их в виде

$$\tau'(x) = -\frac{1}{\pi} \left(\int_{-1}^1 \frac{\tau'(t) dt}{x-t} + \int_{-1}^1 \frac{\tau(t) dt}{(1-xt)^2} \right) + F_0(x), \quad x \in (-1, c), \quad (15)$$

$$-b_2(1-\mu)\tau'(q(x)) + \frac{a_1}{\pi} \left(\int_{-1}^1 \frac{\tau'(t) dt}{p(x)-t} + \int_{-1}^1 \frac{\tau(t) dt}{(1-p(x)t)^2} \right) + \\ + \frac{\mu b_2}{\pi} \left(\int_{-1}^1 \frac{\tau'(t) dt}{q(x)-t} + \int_{-1}^1 \frac{\tau(t) dt}{(1-q(x)t)^2} \right) = E_0(x), \quad x \in (c, 1), \quad (16)$$

где $F_0(x) = \Phi_0(x) + \psi'_0((x-1)/2)$, $E_0(x) = a_1\Phi_0(p(x)) + \mu b_2\Phi_0(q(x)) - \psi_2(x)$.

Заметим, что соотношения (15) и (16) являются интегро-дифференциальными уравнениями для неизвестной функции $\tau(x)$ в промежутках $(-1, c)$ и $(c, 1)$ соответственно.

Равенство (15) проинтегрируем в пределах от -1 до x , а равенство (16) – от c до x , затем, выполнив стандартные преобразования [11, 12] с использованием следующих легко доказываемых тождеств:

$$-\frac{1}{t-p(x)} - \frac{1}{c-t} + \frac{1}{t(1-p(x)t)} - \frac{1}{t(1-ct)} = -\frac{p(x)-c}{t-c} \left(\frac{1}{t-p(x)} - \frac{t-c}{1-ct} \frac{1}{1-p(x)t} \right),$$

$$\frac{1}{q(x) - t} - \frac{1}{1 - t} + \frac{1}{t(1 - q(x)t)} - \frac{1}{t(1 - t)} = -\frac{1 - q(x)}{1 - t} \left(\frac{1}{t - q(x)} + \frac{1}{1 - q(x)t} \right),$$

получим интегральные уравнения

$$\tau(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1+x}{1+t} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) \tau(t) dt + (1+x)F_1(x), \quad x \in (-1, c), \tag{17}$$

$$(1 - \mu)\tau(q(x)) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(x) - c}{t - c} \left(\frac{1}{t - p(x)} - \frac{t - c}{1 - ct} \frac{1}{1 - p(x)t} \right) \tau(t) dt +$$

$$+ \frac{\mu}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1 - q(x)}{1 - t} \left(\frac{1}{t - q(x)} + \frac{1}{1 - q(x)t} \right) \tau(t) dt = (c - x)E_1(x), \quad x \in (c, 1), \tag{18}$$

где

$$(1 + x)F_1(x) = \int_{-1}^x F_0(t) dt, \quad (c - x)E_1(x) = \int_c^x E_0(t) dt.$$

Заметим, что уравнения (17) и (18) имеют место для $x \in (-1, c)$ и $x \in (c, 1)$ соответственно. Чтобы рассмотреть их на одном промежутке $I = (-1, 1)$, заменим x в уравнении (17) на $ax - b$, а в уравнении (18) на $bx + a$, где $a = (1 + c)/2$, $b = (1 - c)/2$, $a + b = 1$, $a - b = c$. Тогда уравнения (17) и (18) запишутся соответственно в виде

$$\tau(ax - b) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{a(1+x)}{1+t} \left(\frac{1}{t - ax + b} - \frac{1}{1 - (ax - b)t} \right) \tau(t) dt + a(1+x)F_1(ax - b), \quad x \in I, \tag{19}$$

$$(1 - \mu)\tau(q(bx + a)) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(bx + a) - c}{t - c} \left(\frac{1}{t - p(bx + a)} - \frac{t - c}{1 - ct} \frac{1}{1 - p(bx + a)t} \right) \tau(t) dt +$$

$$+ \frac{\mu}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1 - q(bx + a)}{1 - t} \left(\frac{1}{t - q(bx + a)} + \frac{1}{1 - q(bx + a)t} \right) \tau(t) dt = b(1+x)E_1(bx + a), \quad x \in I. \tag{20}$$

Теперь систему уравнений (19), (20) подчиним условию (6*). Для этого интегралы по промежутку $(-1, 1)$ разобьём на три интеграла по промежуткам $(-1, c)$, (c, c_1) и $(c_1, 1)$, затем в интегралах по промежутку (c, c_1) сделаем замену переменной интегрирования $t = p(s)$ ($t \in (c, c_1)$, $s \in (c, 1)$), а в интегралах по промежутку $(c_1, 1)$ – замену $t = q(s)$ ($t \in (c_1, 1)$, $s \in (c, 1)$) и учтём в них вытекающее из условия (6*) равенство $\tau(p(x)) = \tau(q(x)) + f(x)$. С учётом этих преобразований система уравнений (19), (20) примет вид

$$\tau(ax - b) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^c \frac{a(1+x)}{1+s} \left(\frac{1}{s - ax + b} - \frac{1}{1 - (ax - b)s} \right) \tau(s) ds +$$

$$+ \frac{a_1}{\pi} \int_c^1 \frac{a(1+x)}{1+p(s)} \left(\frac{1}{p(s) - ax + b} - \frac{1}{1 - (ax - b)p(s)} \right) \tau(q(s)) ds +$$

$$+ \frac{b_2}{\pi} \int_c^1 \frac{a(1+x)}{1+q(s)} \left(\frac{1}{q(s) - ax + b} - \frac{1}{1 - (ax - b)q(s)} \right) \tau(q(s)) ds + (1+x)F_2(x), \quad x \in I, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
& (1 - \mu)\tau(q(bx + a)) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^c \frac{p(bx + a) - c}{s - c} \left(\frac{1}{s - p(bx + a)} - \frac{s - c}{1 - cs} \frac{1}{1 - p(bx + a)s} \right) \tau(s) ds - \\
& - \frac{a_1}{\pi} \int_c^1 \frac{p(bx + a) - c}{p(s) - c} \left(\frac{1}{p(s) - p(bx + a)} - \frac{p(s) - c}{1 - cp(s)} \frac{1}{1 - p(bx + a)p(s)} \right) \tau(q(s)) ds + \\
& + \frac{b_2}{\pi} \int_c^1 \frac{p(bx + a) - c}{q(s) - c} \left(\frac{1}{q(s) - p(bx + a)} - \frac{q(s) - c}{1 - cq(s)} \frac{1}{1 - p(bx + a)q(s)} \right) \tau(q(s)) ds - \\
& - \frac{\mu}{\pi} \int_{-1}^c \left(\frac{1 - q(bx + a)}{1 - s} \right) \left(\frac{1}{s - q(bx + a)} + \frac{1}{1 - q(bx + a)s} \right) \tau(s) ds - \\
& - \frac{\mu a_1}{\pi} \int_c^1 \frac{1 - q(bx + a)}{1 - p(s)} \left(\frac{1}{p(s) - q(bx + a)} + \frac{1}{1 - q(bx + a)p(s)} \right) \tau(q(s)) ds + \\
& + \frac{\mu b_2}{\pi} \int_c^1 \frac{1 - q(bx + a)}{1 - q(s)} \left(\frac{1}{q(s) - q(bx + a)} + \frac{1}{1 - q(bx + a)q(s)} \right) \tau(q(s)) ds = \\
& = (1 + x)E_2(x), \quad x \in I, \tag{22}
\end{aligned}$$

где $(1 + x)F_2(x)$ и $(1 + x)E_2(x)$ – известные функции.

Чтобы заменить в уравнениях системы (21), (22) промежутки интегрирования $(-1, c)$ и $(c, 1)$ на один и тот же промежуток $(-1, 1)$, в интегралах по промежутку $(-1, c)$ сделаем замену переменной интегрирования $s = at - b$ ($s \in (-1, c)$, $t \in (-1, 1)$), а в интегралах по промежутку $(c, 1)$ – замену $s = bt + a$ ($s \in (c, 1)$, $t \in (-1, 1)$), и, выделив в них интегралы с сингулярными особенностями, запишем эту систему в виде

$$\begin{aligned}
\tau_0(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1 + x}{1 + t} \left(\frac{1}{t - x} - \frac{a}{1 - (ax - b)(at - b)} \right) \tau_0(t) dt + \\
& + \frac{a_1 b}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1 + x)\tau_1(t) dt}{p(bt + a) - ax + b} + (1 + x)T[\tau_1] + (1 + x)F_2(x), \quad x \in I, \tag{23} \\
(1 - \mu)\tau_1(x) &- \frac{a_1 b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(bx + a) - c}{p(bt + a) - c} \frac{\tau_1(t) dt}{p(bt + a) - p(bx + a)} + \frac{\mu b b_2}{\pi} \times \\
& \times \int_{-1}^1 \frac{1 - q(bx + a)}{1 - q(bt + a)} \left(\frac{1}{q(bt + a) - q(bx + a)} + \frac{1}{1 - q(bx + a)q(bt + a)} \right) \tau_1(t) dt = \\
& = \frac{a}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(bx + a) - c}{at - b - c} \frac{\tau_0(t) dt}{at - b - p(bx + a)} - \frac{b}{\pi} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{-1}^1 \left[\frac{p(bx+a)-c}{q(bt+a)-c} \frac{b_2}{q(bt+a)-p(bx+a)} - \frac{1-q(bx+a)}{1-p(bt+a)} \frac{\mu a_1}{p(bt+a)-q(bx+a)} \right] \tau_1(t) dt + \\ & + (1+x)R_0[\tau_0] + (1+x)R_1[\tau_1] + (1+x)E_2(x), \quad x \in I, \end{aligned} \tag{24}$$

где $\tau_0(x) = \tau(ax - b)$, $\tau_1(x) = \tau(q(bx + a))$, а $(1+x)T[\tau_1]$, $(1+x)R_0[\tau_0]$, $(1+x)R_1[\tau_1]$ – регулярные операторы.

Уравнения (23) и (24) являются неклассическими интегральными уравнениями Трикоми, так как они имеют две особенности:

1) несингулярные части ядра имеют некарлемановские сдвиги видов $ax - b$, $p(bx + a)$, $q(bx + a)$;

2) интегральные операторы в правых частях уравнений (23) и (24) не являются регулярными, поскольку ядра этих операторов при $(x, t) = (1, -1)$ в (23) и при $(x, t) = (-1, 1)$, $(x, t) = (1, 1)$ в (24) имеют изолированные особенности первого порядка (и поэтому они выделены отдельно).

3.2. Исключение неизвестной функции $\tau_0(x)$ из системы уравнений (23) и (24).

Временно считая правую часть уравнения (23) известной функцией и учитывая тождество

$$p(bt + a) - ax + b = \frac{1 + c_1}{2}(b_0t - a_0x + 1),$$

в котором $a_0 = (1 + c)/(1 + c_1)$, $b_0 = (c_1 - c)/(1 + c_1)$, $a_0 + b_0 = 1$, запишем (23) в виде

$$\tau_0(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1+t} \right) \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)} \right) \tau_0(t) dt = g_0(x), \quad x \in (-1, 1), \tag{25}$$

где

$$g_0(x) = \frac{a_1b}{\pi(1+c_1)} \int_{-1}^1 \frac{(1+x)\tau_1(t) dt}{b_0t - a_0x + 1} + (1+x)T[\tau_1] + (1+x)F_2(x), \quad x \in (-1, 1). \tag{26}$$

Решение уравнения (25) будем искать в классе функций Гёльдера $H(-1, 1)$, в котором функция $(1+x)^{-1}\tau_0(x)$ может быть неограниченной в точке $x = -1$ и ограничена на правом конце отрезка $[-1, 1]$, т.е. в классе $h(1)$ [6, с. 43].

Применяя к уравнению (25) метод регуляризации Карлемана, развитый С.Г. Михлиным [13], получаем решение

$$\begin{aligned} \tau_0(x) = & \frac{g_0(x)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{1/4} \left(\frac{1+x}{1+t} \right)^{1/2} \left(\frac{1-c(ax-b)}{1-c(at-b)} \right)^{1/4} \times \\ & \times \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)} \right) g_0(t) dt, \quad x \in I. \end{aligned} \tag{27}$$

Теперь, заменяя в выражении (27) функцию $g_0(x)$ её представлением (26), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \tau_0(x) = & \frac{a_1b}{\pi(1+c_1)} \int_{-1}^1 \frac{(1+x)\tau_1(t) dt}{b_0t - a_0x + 1} + \frac{a_1b}{\pi^2(1+c_1)} \int_{-1}^1 \tau_1(s) ds \int_{-1}^1 \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{1/4} \times \\ & \times \frac{(1+x)^{1/2}(1+t)^{1/2}}{t-x} \frac{dt}{b_0s - a_0t + 1} + (1+x)T_1[\tau_1] + (1+x)F_3(x), \end{aligned} \tag{28}$$

в котором $T_1[\tau_1]$ – регулярный оператор, а $(1+x)F_3(x)$ – известная функция.

Вычислим внутренний интеграл в (28):

$$A(x, s) = \int_{-1}^1 \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{1/4} \frac{(1+x)^{1/2}}{t-x} \frac{(1+t)^{1/2}}{b_0s - a_0t + 1} dt. \quad (29)$$

Рациональную часть подынтегрального выражения в (29) разложим на простые дроби и к получившимся интегралам применим формулы [9, с. 125; 14]

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{(1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{t-x} dt &= \frac{\pi \operatorname{ctg}(\beta\pi)}{(1+x)^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}} - \frac{2^{\beta-1}B(\alpha, \beta-1)}{(1+x)^{1-\alpha}} F\left(\alpha, 1-\beta, 2-\beta; \frac{1-x}{2}\right); \\ \int_{-1}^1 \frac{(1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{bs - at + 1} dt &= \frac{\pi}{\sin(\beta\pi)} \frac{b^{\beta-1}a^{1-\alpha-\beta}}{(1+a-bs)^{1-\alpha}(1+s)^{1-\beta}} + \\ &+ \frac{B(\alpha, \beta-1)}{2^{2-\alpha-\beta}a} F\left(2-\alpha-\beta, 1, 2-\beta; -\frac{b(1+s)}{2a}\right), \end{aligned} \quad (30)$$

здесь $\alpha = 3/2$, $\beta = 3/4$, $B(\alpha, \beta)$ – бета-функция Эйлера, $F(a, b, c; x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [6, с. 6]. В силу (30) находим интеграл (29):

$$\begin{aligned} A(x, s) &= \frac{(1-x)^{1/4}(1+x)^{1/2}}{b_0s - a_0x + 1} \left\{ -\frac{\pi(1+x)^{1/2}}{(1-x)^{1/4}} - 2^{1/4}B\left(3/2, -1/4\right) F\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}; \frac{1-x}{2}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{\sqrt{2}\pi a_0 b_0^{-1/4}}{(1+a_0-b_0s)^{-1/2}(1+s)^{1/4}} + \frac{B(3/2, -1/4)}{2^{1/4}} F\left(-\frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}; -\frac{b_0(1+s)}{2a_0}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Вследствие (31) уравнение (28) принимает вид

$$\begin{aligned} \tau_0(x) &= \frac{a_0^{-1/4}b_0^{-1/4}a_1b}{\pi(1+c_1)} (1+x)^{1/2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-x}{1+s} \right)^{1/4} \frac{\tau_1(s) ds}{b_0s - a_0x + 1} + \\ &+ (1+x)^{1/2} T_2[\tau_1] + (1+x)F_3(x), \quad x \in I, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} (1+x)^{1/2} T_2[\tau_1] &= \frac{\sqrt{2}a_0^{-1/4}b_0^{-1/4}a_1b}{\pi(1+c_1)} (1+x)^{1/2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-x}{1+s} \right)^{1/4} \left[\left((1+a_0-b_0s) \right)^{1/2} - 2^{1/2} \right] \frac{\tau_1(s) ds}{b_0s - a_0x + 1} - \\ &- \frac{a_1b2^{1/4}B(3/2, -1/4)}{\pi^2(1+c_1)} \int_{-1}^1 \frac{(1-x)^{1/4}}{b_0s - a_0x + 1} \left[F\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}; \frac{1-x}{2}\right) - \right. \\ &\left. - F\left(-\frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}; -\frac{b_0(1+s)}{2a_0}\right) \right] \tau_1(s) ds + (1+x)T_1[\tau_1] \end{aligned}$$

– регулярный оператор.

Подставляя выражение для $\tau_0(x)$ из (32) в первый интеграл и в регулярный оператор $R_0[\tau_0]$ правой части (24), будем иметь

$$(1-\mu)\tau_1(x) - \frac{ba_1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{p(bx+a)-c}{p(bt+a)-c} \right) \frac{\tau_1(t) dt}{p(bt+a)-p(bx+a)} + \frac{\mu bb_2}{\pi} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - q(bx + a)}{1 - q(bt + a)} \right) \left(\frac{1}{q(bt + a) - q(bx + a)} + \frac{1}{1 - q(bx + a)q(bt + a)} \right) \tau_1(t) dt = \\ & = \frac{\lambda_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(bx + a) - c}{(1 + s)^{1/4}} \tau_1(s) ds \int_{-1}^1 \frac{(1 + t)^{1/2}(1 - t)^{-3/4} dt}{(b_0s - a_0t + 1)(at - b - p(bx + a))} - \\ & - \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{p(bx + a) - c}{q(bt + a) - c} \right) \frac{b_2}{q(bt + a) - p(bx + a)} - \left(\frac{1 - q(bx + a)}{1 - p(bt + a)} \right) \frac{\mu a_1}{at - b - q(bx + a)} \right] \tau_1(t) dt + \\ & + (1 + x)R_2[\tau_1] + (1 + x)E_3(x), \end{aligned} \tag{33}$$

где $\lambda_0 = -a_0^{-1/4}b_0^{-1/4}a_1b(1 + c_1)$, $R_2[\tau_1]$ – регуляриный оператор, $(1 + x)E_3(x)$ – известная функция.

Вычислим внутренний интеграл в правой части уравнения (33):

$$I(x, s) = \int_{-1}^1 \frac{(1 + t)^{1/2}(1 - t)^{-3/4} dt}{(b_0s - a_0t + 1)(at - b - p(bx + a))}. \tag{34}$$

Разложив рациональную часть подынтегрального выражения в (34) на простые дроби, получим

$$I(x, s) = \frac{1}{\omega(x, s)}(a_0I_1(s) + aI_2(x)), \tag{35}$$

где

$$I_1(s) = \int_{-1}^1 \frac{(1 + t)^{1/2}(1 - t)^{-3/4} dt}{b_0s - a_0t + 1} = \frac{2^{3/4}(b_0(1 + s))^{-3/4}}{(b_0s + a_0 + 1)^{1/4}} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right) F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}; \frac{2a_0}{b_0s + a_0 + 1}\right), \tag{36}$$

$$\begin{aligned} I_2(x) &= \int_{-1}^1 \frac{(1 + t)^{1/2}(1 - t)^{-3/4} dt}{at - b - p(bx + a)} = \\ &= -\frac{2^{3/4}(p(bx + a) - c)^{-3/4}}{(1 + p(bx + a))^{1/4}} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right) F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}; \frac{2a}{1 + p(bx + a)}\right), \end{aligned} \tag{37}$$

$$\omega(x, s) = ab_0s + a - a_0b - a_0p(bx + a) = ab_0(s - 1) - a_0a_1b(x - 1) = ab_0(s - x). \tag{38}$$

При вычислении интегралов (36) и (37) сделаны замены переменной интегрирования $t = -1 + 2\sigma$, затем использованы интегральное представление гипергеометрической функции Гаусса $F(a, b, c; x)$ [6, с. 8] и формула автотрансформации для гипергеометрических функций [6, с. 10].

В силу (36)–(38) равенство (35) запишем в виде

$$I(x, s) = (1 + s)^{-3/4}K(x, s), \tag{39}$$

где

$$\begin{aligned} K(x, s) &= \frac{2^{3/4}B(3/2, 1/4)}{ab_0(s - x)} \left\{ \frac{a_0b_0^{-3/4}}{(b_0s + a_0 + 1)^{1/4}} F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}; \frac{2a_0}{b_0s + a_0 + 1}\right) - \right. \\ & \left. - \frac{a}{(1 + p(bx + a))^{1/4}} \left(\frac{1 + s}{p(bx + a) - c} \right)^{3/4} F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}; \frac{2a}{1 + p(bx + a)}\right) \right\}, \end{aligned}$$

и с учётом тождеств $2a_0/(b_0s + a_0 + 1) = 2a/(1 + p(bs + a))$, $a/a_1b = a_0/b_0$ заключаем, что $K(x, s)$ – регулярное ядро.

Вследствие равенства (39) двойной интеграл в правой части уравнения (33) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(bx + a) - c}{(1 + s)^{1/4}} \tau_1(s) ds \int_{-1}^1 \frac{(1 + t)^{1/2}(1 - t)^{-3/4} dt}{(b_0s - at + 1)(at - b - p(bx + a))} = \\ & = \frac{\lambda_0}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{p(bx + a) - c}{(1 + s)} \right) K(x, s) \tau_1(s) ds. \end{aligned} \tag{40}$$

С учётом равенства (40) и тождеств

$$\begin{aligned} p(bx + a) - c &= ba_1(1 + x), \quad 1 - q(bx + a) = bb_2(1 + x), \quad p(bt + a) - p(bx + a) = ba_1(t - x), \\ q(bt + a) - q(bx + a) &= -bb_2(t - x), \quad q(bt + a) - p(bx + a) = -b(b_2t + a_1x - 1), \\ p(bt + a) - q(bx + a) &= b(a_1t + b_2x - 1), \end{aligned}$$

уравнение (33) принимает вид

$$\begin{aligned} (1 - \mu)\tau_1(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1 + x}{1 + t} \right) \left(\frac{1 + \mu}{t - x} - \frac{\mu bb_2}{1 - q(bx + a)q(bt + a)} \right) \tau_1(t) dt = \\ = \frac{1 + x}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{b_2}{b_2t + a_1x - 1} + \frac{\mu a_1}{a_1t + b_2x - 1} \right) \tau_1(t) dt - \\ - \lambda_0 ba_1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1 + x}{1 + t} \right) K(x, t) \tau_1(t) dt + \frac{1 + x}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{ba_1(1 + t)}{q(bt + a) - c} - 1 \right) \frac{b_2}{b_2t + a_1x - 1} + \right. \\ \left. + \left(\frac{bb_2(1 + t)}{1 - p(bt + a)} - 1 \right) \frac{\mu a_1}{a_1t + b_2x - 1} \right] \tau_1(t) dt - (1 + x)R_2[\tau_1] - (1 + x)E_3(x). \end{aligned} \tag{41}$$

Уравнение (41) является неклассическим сингулярным интегральным уравнением, так как оно имеет две особенности:

1) “несингулярная” часть ядра имеет некарлемановские сдвиги $q(bx + a)$, $q(bt + a)$, причём $q(bx + a)q(bt + a)|_{x=-1, t=-1} = q(c)q(c) = 1$;

2) первый интегральный оператор в его правой части не является регулярным, поскольку при $t = 1$, $x = 1$ ядро этого оператора имеет изолированную особенность первого порядка (и поэтому он выделен отдельно первым).

Временно считая правую часть уравнения (41) известной функцией и вводя обозначение $\rho(x) = (1 + x)^{-1}\tau_1(x)$, запишем его в виде

$$(1 - \mu)\rho(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1 + \mu}{t - x} - \frac{\mu bb_2}{1 - q(bx + a)q(bt + a)} \right) \rho(t) dt = g(x), \quad x \in I, \tag{42}$$

где

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{b_2}{b_2t + a_1x - 1} + \frac{\mu a_1}{a_1t + b_2x - 1} \right) \rho(t) dt + R_3[\rho] - E_3(x), \quad x \in I, \tag{43}$$

$$R_3[\rho] = -\lambda_0 b a_1 \int_{-1}^1 K(x, t) \rho(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{b a_1 (1+t)}{q(b t + a) - c} - 1 \right) \frac{b_2}{b_2 t + a_1 x - 1} + \left(\frac{b b_2 (1+t)}{1 - p(b t + a)} - 1 \right) \frac{\mu a_1}{a_1 t + b_2 x - 1} \right] \rho(t) dt - R_2[\rho]$$

– регулярный оператор, а $R_2[\rho]$ получается из $R_2[\tau_1]$ заменой $\tau_1(x) = (1+x)\rho(x)$.

Решение $\rho(x)$ уравнения (42) будем искать в классе функций Гёльдера $H(-1, 1)$, в котором функция $\rho(x)$ может быть неограниченной в точке $x = -1$ и ограничена на правом конце отрезка $[-1, 1]$, т.е. в классе $h(1)$ [6, с. 43].

С учётом тождеств $q(bx + a) = a_3 - b_3x$, $bb_2 = b_3$, где $a_3 = (1 + c_1)/2$, $b_3 = (1 - c_1)/2$, запишем уравнение (42) в виде

$$\rho(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{\alpha}{t-x} - \frac{\beta b_3}{1 - (b_3x - a_3)(b_3t - a_3)} \right) \rho(t) dt = (\alpha - \beta)g(x), \quad x \in I, \quad (44)$$

где $\alpha = (1 + \mu)/(1 - \mu)$, $\beta = \mu/(1 - \mu)$, $\alpha = 1 - 2\beta$.

3.3. Решение нестандартного сингулярного интегрального уравнения (44).

Теорема 3. Если функция $g(x) \in L_p(-1, 1)$, $p > 1$, удовлетворяет условию Гёльдера при $x \in (-1, 1)$, то для решения $\rho(x)$ уравнения (44) в классе функций $H(-1, 1)$, в котором функция может быть неограниченной в точке $x = -1$ и ограничена при $x = 1$, справедлива формула

$$\rho(x) = \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha^2} g(x) + \frac{\alpha - \beta}{\pi(1 + \alpha^2)} \int_{-1}^1 \left(\left(\frac{1+t}{1+x} \right)^2 \frac{1-x}{1-t} \frac{1-c_1(b_3x - a_3)}{1-c_1(b_3t - a_3)} \right)^\theta \times \left(\frac{\alpha}{t-x} + \frac{b_3\beta((1+\alpha i)/(1+\beta i))}{1 - (b_3x - a_3)(b_3t - a_3)} \right) g(t) dt, \quad (45)$$

где $\theta\pi = \arctg \alpha$, $0 < \theta < 1/2$.

Доказательство. Хотя метод доказательства теоремы 3 такой же, как и в работах [13, 14], однако имеет свои особенности, обусловленные наличием двух различных параметров α и β в уравнении (44), поэтому приведём схему доказательства теоремы 3.

Пусть z – произвольная точка комплексной плоскости. Следуя подходу Карлемана, развитому С.Г. Михлиным [13], положим

$$\Phi(\alpha, \beta; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left(\frac{\alpha}{t-z} - \frac{\beta b_3}{1 - (b_3z - a_3)(b_3t - a_3)} \right) \rho(t) dt.$$

Очевидно, что функция $\Phi(\alpha, \beta; z)$ голоморфна как в верхней, так и в нижней полуплоскостях и обращается в нуль на бесконечности. Обозначим через $\Phi^+(\alpha, \beta; x)$ и $\Phi^-(\alpha, \beta; x)$ её предельные значения, когда z стремится к точке x действительной оси соответственно из верхней или из нижней полуплоскостей. Нетрудно проверить, что имеет место равенство

$$\Phi\left(\alpha, \beta; \frac{1 + a_3 + a_3z}{b_3z - a_3}\right) = (b_3z - a_3)\Phi(\beta, \alpha; z). \quad (46)$$

Дробно-линейное преобразование $W(z) = (1 + a_3 + a_3z)/(b_3z - a_3)$ переводит верхнюю полуплоскость в нижнюю и наоборот. При этом промежуток $(-1, 1)$ переходит в множество Δ , совпадающее с объединением интервалов $(-\infty, -1) \cup (-(2 + c_1)/c_1, +\infty)$, если $c_1 < 0$, с интервалом $(-\infty, -1)$, если $c_1 = 0$, и с интервалом $(-(2 + c_1)/c_1, -1)$, если $c_1 > 0$.

Формулы Сохоцкого–Племеля [10, с. 145] для функции $\Phi(\alpha, \beta; z)$ имеют вид

$$\Phi^{\pm}(\alpha, \beta; x) = \pm \frac{\alpha \rho(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left(\frac{\alpha}{t-x} - \frac{\beta b_3}{1 - (b_3 x - a_3)(b_3 t - a_3)} \right) \rho(t) dt. \quad (47)$$

В силу формул (47) уравнение (44) принимает вид

$$\Phi^+(\alpha, \beta; x) - \frac{1 + \alpha i}{1 - \alpha i} \Phi^-(\alpha, \beta; x) = \frac{\alpha(\alpha - \beta)g(x)}{1 - \alpha i}, \quad x \in I. \quad (48)$$

Заменяя в (48) x на $W(x)$, с учётом соотношения (46) получим равенство

$$\Phi^+(\beta, \alpha; W(x)) - \frac{1 - \alpha i}{1 + \alpha i} \Phi^-(\beta, \alpha; W(x)) = -\frac{\alpha(\alpha - \beta)g(W(x))}{1 + \alpha i} \frac{1}{b_3 x - a_3},$$

поменяв в котором α и β местами, будем иметь

$$\Phi^+(\alpha, \beta; W(x)) - \frac{1 - \beta i}{1 + \beta i} \Phi^-(\alpha, \beta; W(x)) = -\frac{\beta(\beta - \alpha)g(W(x))}{1 + \beta i} \frac{1}{b_3 x - a_3}, \quad x \in \Delta. \quad (49)$$

Таким образом, в силу (48) и (49) нахождение решения интегрального уравнения (44) сводится к следующей задаче теории функции комплексной переменной: найти исчезающую на бесконечности функцию $\Phi(\alpha, \beta; z)$, голоморфную как в верхней, так и в нижней полуплоскостях, и удовлетворяющую граничному условию

$$\Phi^+(\alpha, \beta; x) - G(x)\Phi^-(\alpha, \beta; x) = h(x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (50)$$

где

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1 + \alpha i}{1 - \alpha i} & \text{при } x \in I, \\ \frac{1 - \beta i}{1 + \beta i} & \text{при } x \in \Delta, \\ 1 & \text{при } x \notin I \cup \Delta, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha - \beta)g(x)}{1 - \alpha i} & \text{при } x \in I, \\ -\frac{\beta(\beta - \alpha)g(W(x))}{1 + \beta i} \frac{1}{b_3 x - a_3} & \text{при } x \in \Delta, \\ 0 & \text{при } x \notin I \cup \Delta. \end{cases} \quad (51)$$

Метод решения краевой задачи (50), (51) такой же, как и в работе [13].

3.4. Вывод интегрального уравнения Винера–Холфа. Решение (45) с учётом обозначений $\alpha = (1 + \mu)/(1 - \mu)$, $\beta = \mu/(1 - \mu)$ запишем в виде

$$\begin{aligned} \rho(x) = & \frac{(1 - \mu)g(x)}{2(1 + \mu^2)} + \frac{1}{\pi(1 + \mu^2)} \int_{-1}^1 \left(\left(\frac{1+t}{1+x} \right)^2 \frac{1-x}{1-t} \frac{1 - c_1(b_3 x - a_3)}{1 - c_1(b_3 t - a_3)} \right)^{\theta} \times \\ & \times \left(\frac{1 + \mu}{t-x} + \frac{b_3 \mu((1 - \mu + (1 + \mu)i)/(1 - \mu + \mu i))}{1 - (b_3 x - a_3)(b_3 t - a_3)} \right) g(t) dt. \end{aligned} \quad (52)$$

Заменяя в (52) $g(x)$ его выражением из (43), получаем

$$\begin{aligned} \rho(x) = & \frac{1 - \mu}{2\pi(1 + \mu^2)} \int_{-1}^1 \left(\frac{b_2}{b_2 t + a_1 x - 1} + \frac{\mu a_1}{a_1 t + b_2 x - 1} \right) \rho(t) dt + \\ & + \frac{1 + \mu}{\pi^2(1 + \mu^2)} \int_{-1}^1 \rho(s) ds \int_{-1}^1 \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{\theta} \left(\frac{b_2}{a_1 t + b_2 s - 1} + \frac{\mu a_1}{b_2 t + a_1 s - 1} \right) \frac{dt}{t-x} + R_4[\rho] + E_4(x), \end{aligned} \quad (53)$$

где $R_4[\rho]$ – регулярирующий оператор, $E_4(x)$ – известная функция.

Вычислим внутренний интеграл в (53):

$$B(x, s) = \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-t)^\theta} \left(\frac{b_2}{a_1 t + b_2 s - 1} + \frac{\mu a_1}{b_2 t + a_1 s - 1} \right) \frac{dt}{t-x}. \tag{54}$$

Разложив в равенстве (54) рациональную часть подынтегрального выражения на простые дроби, запишем это равенство в виде

$$B(x, s) = \frac{b_2}{a_1(a_1 x + b_2 s - 1)} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a_1}{a_1 t + b_2 s - 1} \right) \frac{dt}{(1-t)^\theta} + \frac{\mu a_1}{b_2(b_2 x + a_1 s - 1)} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b_2}{b_2 t + a_1 s - 1} \right) \frac{dt}{(1-t)^\theta}. \tag{55}$$

Согласно первой формуле в (30) имеем

$$I_3(x) = \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^{-\theta}}{t-x} dt = -\frac{\pi \operatorname{ctg}(\theta\pi)}{(1-x)^\theta} - \frac{B(1, -\theta)}{2^\theta} F(1, \theta, 1 + \theta; (1-x)/2). \tag{56}$$

Теперь, используя разложение [6, с. 55]

$$F(a, b, a + b; 1 - \sigma) = -\frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(a, b, 1; \sigma) \ln \sigma + \frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + k)\Gamma(b + k)}{(k!)^2} \times \left[2 \frac{\Gamma'(1 + k)}{\Gamma(1 + k)} - \frac{\Gamma'(a + k)}{\Gamma(a + k)} - \frac{\Gamma'(b + k)}{\Gamma(b + k)} \right] \sigma^k,$$

с учётом тождеств $B(1, -\theta) = -1/\theta$ и $F(a, b, b; \sigma) = (1 - \sigma)^{-a}$ правую часть равенства (56) запишем в виде

$$I_3(x) = \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^{-\theta}}{t-x} dt = -\frac{\pi \operatorname{ctg}(\theta\pi)}{(1-x)^\theta} - \frac{1}{(1-x)^\theta} \ln \frac{1+x}{2} + Q(x), \tag{57}$$

где

$$Q(x) = \frac{2^{-\theta}}{\Gamma(\theta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + k)\Gamma(\theta + k)}{(k!)^2} \left[\frac{\Gamma'(1 + k)}{\Gamma(1 + k)} - \frac{\Gamma'(\theta + k)}{\Gamma(\theta + k)} \right] \left(\frac{1+x}{2} \right)^k.$$

Нетрудно вычислить, что

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-t)^\theta} \frac{adt}{at + bs - 1} = -\frac{2^{1-\theta} ab^{-\theta}}{(1-\theta)(1-s)^\theta(1+a-bs)^{1-\theta}} F\left(1-\theta, 1-\theta, 2-\theta; \frac{2a}{1+a-bs}\right). \tag{58}$$

Таким образом, с учётом (57) и (58) равенство (55) запишется в виде

$$B(x, s) = \left[-\frac{b_2 \pi \operatorname{ctg}(\theta\pi)}{a_1(1-x)^\theta} - \frac{\pi(2b_2)^{1-\theta}}{\sin(\theta\pi)(1+a_1-b_2s)^{1-\theta}(1-s)^\theta} \right] \frac{1}{(a_1x + b_2s - 1)} + \left[-\frac{a_1 \pi \operatorname{ctg}(\theta\pi)}{b_2(1-x)^\theta} - \frac{\pi(2a_1)^{1-\theta}}{\sin(\theta\pi)(1+b_2-a_1s)^{1-\theta}(1-s)^\theta} \right] \frac{\mu}{(b_2x + a_1s - 1)} + B_0(x, s), \tag{59}$$

где

$$B_0(x, s) = \left(-\ln \frac{1+x}{2} + Q(x) \right) \left(\frac{b_2}{a_1(a_1x + b_2s - 1)} + \frac{\mu a_1}{b_2(b_2x + a_1s - 1)} \right) + \\ + \frac{(2b_2)^{1-\theta}(1+a_1-b_2s)^{\theta-1}}{(1-\theta)(1-s)^\theta} \left[F\left(1-\theta, 1-\theta, 2-\theta; \frac{2a_1}{1+a_1-b_2s}\right) - F\left(1-\theta, 1-\theta, 2-\theta; 1\right) \right] \times \\ \times \frac{1}{a_1x + b_2s - 1} + \frac{(2a_1)^{1-\theta}}{(1-\theta)(1-s)^\theta(1+b_2-a_1s)^{1-\theta}} \times \\ \times \left[F\left(1-\theta, 1-\theta, 2-\theta; \frac{2b_2}{1+b_2-a_1s}\right) - F\left(1-\theta, 1-\theta, 2-\theta; 1\right) \right] \frac{\mu}{b_2x + a_1s - 1},$$

здесь $(1-x)^\theta B_0(x, s)$ – регулярное ядро.

Следовательно, в силу (59) уравнение (53) принимает вид

$$\rho(x) = \frac{1-\mu}{2\pi(1+\mu^2)} \int_{-1}^1 \left(\frac{b_2}{b_2t + a_1x - 1} + \frac{\mu a_1}{a_1t + b_2x - 1} \right) \rho(t) dt - \\ - \frac{1-\mu}{\pi^2(1+\mu^2)} \int_{-1}^1 \left\{ \left[\frac{b_2\pi \operatorname{ctg}(\theta\pi)}{a_1} + \frac{\pi(2b_2)^{1-\theta}}{\sin(\theta\pi)(1+a_1-b_2s)^{1-\theta}} \left(\frac{1-x}{1-s} \right)^\theta \right] \frac{1}{a_1x + b_2s - 1} + \right. \\ \left. + \left[\frac{a_1\pi \operatorname{ctg}(\theta\pi)}{b_2} + \frac{\pi(2a_1)^{1-\theta}}{\sin(\theta\pi)(1+b_2-a_1s)^{1-\theta}} \left(\frac{1-x}{1-s} \right)^\theta \right] \frac{\mu}{b_2x + a_1s - 1} + \right. \\ \left. + (1-x)^\theta B_0(x, s) \right\} \rho(s) ds + R_4[\rho] + E_4(x). \quad (60)$$

Запишем уравнение (60), выделив в нём ядро с неподвижными особенностями первого порядка при $x = 1$, $s = 1$, в виде

$$\rho(x) = -\frac{1-\mu}{\pi(1+\mu^2)} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{b_2}{a_1 \sin(\theta\pi)} \left[\cos(\theta\pi) - \frac{a_1 \sin(\theta\pi)}{2} + \left(\frac{a_1}{b_2} \right)^\theta \left(\frac{1-x}{1-s} \right)^\theta \right] \frac{1}{a_1x + b_2s - 1} + \right. \\ \left. + \frac{\mu a_1}{b_2 \sin(\theta\pi)} \left[\cos(\theta\pi) - \frac{b_2 \sin(\theta\pi)}{2} + \left(\frac{b_2}{a_1} \right)^\theta \left(\frac{1-x}{1-s} \right)^\theta \right] \frac{1}{b_2x + a_1s - 1} \right\} \rho(s) ds + R_5[\rho] + E_4(x), \quad (61)$$

где $x \in I$, а

$$R_5[\rho] = R_4[\rho] - \frac{1-\mu}{\pi^2(1+\mu^2)} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\pi}{\sin(\theta\pi)} \left[\left(\frac{2b_2}{1+a_1-b_2s} \right)^{1-\theta} - \left(\frac{b_2}{a_1} \right)^{1-\theta} \right] \left(\frac{1-x}{1-s} \right)^\theta \frac{1}{a_1x + b_2s - 1} + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{\sin(\theta\pi)} \left[\left(\frac{2a_1}{1+b_2-a_1s} \right)^{1-\theta} - \left(\frac{a_1}{b_2} \right)^{1-\theta} \right] \left(\frac{1-x}{1-s} \right)^\theta \frac{\mu}{b_2x + a_1s - 1} + (1-x)^\theta B_0(x, s) \right\} \rho(s) ds$$

– регулярный оператор.

С учётом тождеств $a_1x + b_2s - 1 = b_2(s-1) + a_1(x-1)$, $b_2x + a_1s - 1 = a_1(s-1) + b_2(x-1)$, сделав замену переменных $x = 1 - 2e^{-y}$, $s = 1 - 2e^{-t}$, запишем уравнение (61) в виде

$$\rho(1 - 2e^{-y})e^{-y/2} = \frac{1-\mu}{b_2\pi \sin(\theta\pi)(1+\mu^2)} \int_0^\infty \left\{ k^{-1} [a_1^* + k^\theta e^{\theta(t-y)}] \frac{1}{ke^{-(y-t)/2} + e^{(y-t)/2}} + \right.$$

$$+ \mu k [b_2^* + k^{-\theta} e^{\theta(t-y)}] \frac{1}{e^{-(y-t)/2} + k e^{(y-t)/2}} \left. \right\} e^{-t/2} \rho(t) dt + e^{-y/2} R_5[\rho] + e^{-y/2} E_4(1 - 2e^{-y/2}), \quad (62)$$

где $0 \leq y < \infty$ и $k = a_1/b_2$, $a_1^* = \cos(\theta\pi) - 0.5a_1 \sin(\theta\pi)$, $b_2^* = \cos(\theta\pi) - 0.5b_2 \sin(\theta\pi)$.

В обозначениях $\rho_1(y) = \rho(1 - 2e^{-y})e^{-y/2}$ и

$$K_0(x) = \frac{\sqrt{2/\pi}(1 - \mu)}{b_2 \sin(\theta\pi)(1 + \mu^2)} \left\{ \frac{k^{-1}[a_1^* + k^\theta e^{-\theta x}]}{k e^{-x/2} + e^{x/2}} + \frac{\mu k [b_2^* + k^{-\theta} e^{-\theta x}]}{e^{-x/2} + k e^{x/2}} \right\} \quad (63)$$

уравнение (62) примет вид

$$\rho_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty K_0(y-t)\rho_1(t) dt + R_6[y] + E_5(y), \quad 0 \leq y < \infty, \quad (64)$$

где $R_6[y] = e^{-y/2} R_5[\rho]$, $E_5(y) = e^{-y/2} E_4(y)$.

Уравнение (64) представляет собой интегральное уравнение Винера–Хопфа [15, с. 55; 16, 17]. Так как в (63) $0 < \theta < 1/2$, то функция $K_0(x)$ имеет показательный порядок убывания на бесконечности, причём $K_0'(x) \in C[0, \infty]$. Тогда $K_0(x) \in L_2 \cap H_\alpha = \{0\}$ [15, с. 12].

3.5. Исследование интегрального уравнения Винера–Хопфа (64). Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свёртки применимы лишь в случае, когда индекс этих уравнений равен нулю. Индекс уравнения (64) совпадает с индексом выражения $1 - K^\wedge(x)$, взятым с обратным знаком, т.е. $\chi = -\text{Ind}(1 - K^\wedge(x))$, здесь

$$\begin{aligned} K^\wedge(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(t) e^{ixt} dt = \\ &= \frac{1 - \mu}{b_2 \pi \sin(\theta\pi)(1 + \mu^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{k^{-1}[a_1^* + k^\theta e^{-\theta t}]}{k e^{-t/2} + e^{t/2}} + \frac{\mu k [b_2^* + k^{-\theta} e^{-\theta t}]}{e^{-t/2} + k e^{t/2}} \right\} e^{ixt} dt = \\ &= -\frac{1 - \mu}{b_2 \pi \sin(\theta\pi)(1 + \mu^2)} \left[\mu k^{1-\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\theta t} e^{ixt} dt}{k e^{t/2} + e^{-t/2}} + \mu k b_2^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt} dt}{k e^{t/2} + e^{-t/2}} + \right. \\ &+ \left. k^{\theta-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\theta t} e^{ixt} dt}{e^{t/2} + k e^{-t/2}} + k^{-1} a_1^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt} dt}{e^{t/2} + k e^{-t/2}} \right] = \frac{1 - \mu}{b_2 \pi \sin(\theta\pi)(1 + \mu^2)} \times \\ &\times \left[\mu k^{1-\theta} J(k, \theta; x) + \mu k b_2^* J(k, 0; x) + k^{\theta-2} J\left(\frac{1}{k}, \theta; x\right) + k^{-2} a_1^* J\left(\frac{1}{k}, 0; x\right) \right], \quad (65) \end{aligned}$$

где

$$J(k, \theta; x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\theta t} e^{ixt} dt}{k e^{t/2} + e^{-t/2}}.$$

Вычислим интеграл Фурье (65) с помощью теории вычетов [15, с. 18]. Имеем

$$\begin{aligned} J(k, \theta; x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t/4} e^{-ixt} dt}{(k e^{t/2} + e^{-t/2})} = \frac{2\pi e^{-(\theta\pi + x \ln k)i} (1 - e^{-2\pi x} e^{-2\theta\pi i})}{k^{0.5-\theta} e^{\pi x} (1 - e^{-4\pi(x+\theta i)})} = \\ &= \frac{2\pi e^{-ix \ln k}}{k^{0.5-\theta} (e^{\pi(x+\theta i)} + e^{-\pi(x+\theta i)})} = \frac{\pi e^{-ix \ln k}}{k^{0.5-\theta} \text{ch}(\pi(x + \theta i))} = A(k, \theta; x) + iB(k, \theta; x), \quad (66) \end{aligned}$$

где

$$A(k, \theta; x) = \frac{\pi[\cos(x \ln k) - \operatorname{tg}(\theta\pi) \sin(x \ln k) \operatorname{th}(\pi x)]}{k^{0.5-\theta} \cos(\theta\pi) \operatorname{ch}(\pi x)[1 + \operatorname{tg}^2(\pi\theta) \operatorname{th}^2(\pi x)]}, \quad (67)$$

$$B(k, \theta; x) = -\frac{\pi[\sin(x \ln k) + \operatorname{tg}(\theta\pi) \cos(x \ln k) \operatorname{th}(\pi x)]}{k^{0.5-\theta} \cos(\theta\pi) \operatorname{ch}(\pi x)[1 + \operatorname{tg}^2(\pi\theta) \operatorname{th}^2(\pi x)]}. \quad (68)$$

В силу того, что $0 < \theta < 1/2$, $|\cos(x \ln k)| \leq 1$, $|\sin(x \ln k)| \leq 1$, $|\operatorname{th}(\pi x)| < 1$, из равенств (67) и (68) вытекает оценка

$$\left. \begin{array}{l} |A(k, \theta; x)| \\ |B(k, \theta; x)| \end{array} \right\} \leq \frac{\pi(1 + \operatorname{tg}(\theta\pi))}{k^{0.5-\theta} \cos(\theta\pi) \operatorname{ch}(\pi x)}, \quad (69)$$

причём $A(k, \theta; x) = O(1/\operatorname{ch}(\pi x))$, $B(k, \theta; x) = O(1/\operatorname{ch}(\pi x))$ для достаточно больших $|x|$.

Вследствие представлений (65) и (66) имеем $1 - K^\wedge(x) = 1 - A^*(x) - iB^*(x)$, где

$$A^*(x) = \frac{1 - \mu}{b_2 \pi \sin(\theta\pi)(1 + \mu^2)} \left[\mu k^{1-\theta} A(k, \theta; x) + \mu k b_2^* A(k, 0; x) + k^{\theta-2} A\left(\frac{1}{k}, \theta; x\right) + k^{-2} a_1^* A\left(\frac{1}{k}, 0; x\right) \right],$$

$$B^*(x) = \frac{-(1 - \mu)}{b_2 \pi \sin(\theta\pi)(1 + \mu^2)} \left[\mu k^{1-\theta} B(k, \theta; x) + \mu k b_2^* B(k, 0; x) + k^{\theta-2} B\left(\frac{1}{k}, \theta; x\right) + k^{-2} a_1^* B\left(\frac{1}{k}, 0; x\right) \right].$$

Из определения функций $A^*(x)$ и $B^*(x)$ и оценки (69) следует, что

$$\left. \begin{array}{l} |A^*(x)| \\ |B^*(x)| \end{array} \right\} \leq \frac{2(1 - \mu)(1 + \operatorname{tg}(\theta\pi))\sqrt{k}[\mu(1 + b_2^*) + (1 + a_1^*)k^2]}{b_2 \sin(2\theta\pi)(1 + \mu^2) \operatorname{ch}(\pi x)}, \quad (70)$$

причём $A^*(x) = O(1/\operatorname{ch}(\pi x))$, $B^*(x) = O(1/\operatorname{ch}(\pi x))$ для достаточно больших $|x|$.

Так как $\operatorname{tg}(\theta\pi) = (1 + \mu)/(1 - \mu)$, то

$$\left| \frac{(1 - \mu)(1 + \operatorname{tg}(\theta\pi))}{\sin(2\theta\pi)} \right| = \frac{2(1 + \mu^2)}{(1 - \mu^2)}.$$

Отсюда и из оценки (70) с учётом того, что $k = a_1/b_2 = (c_1 - c)/(1 - c_1)$ и $\operatorname{ch}(\pi x) \geq 1$, в силу условия (12) теоремы 2 вытекает неравенство

$$\left. \begin{array}{l} |A^*(x)| \\ |B^*(x)| \end{array} \right\} \leq \frac{4}{(1 - \mu^2)} \sqrt{\frac{c_1 - c}{1 - c_1}} \left(\mu(1 + b_2^*) + \left(\frac{1 - c_1}{c_1 - c}\right)^2 (1 + a_1^*) \right) < 1.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}(1 - K^\wedge(x)) = 1 - A^*(x) > 0. \quad (71)$$

Индекс χ уравнения (64), т.е. изменение аргумента комплекснозначной функции $1 - K^\wedge(x)$ на действительной оси, выраженное в полных оборотах и взятое с обратным знаком [15, с. 28, с. 56], с учётом неравенства (71) равен

$$\begin{aligned} \chi &= -\operatorname{Ind}(1 - K^\wedge(x)) = -\frac{1}{2\pi} [\arg(1 - K^\wedge(x))]_{-\infty}^{\infty} = -\frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(1 - K^\wedge(x))}{\operatorname{Re}(1 - K^\wedge(x))} \right]_{-\infty}^{\infty} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{-B^*(x)}{1 - A^*(x)} \right]_{-\infty}^{\infty} = -\frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{0}{1} - \operatorname{arctg} \frac{0}{1} \right] = 0, \end{aligned}$$

так как $A^*(\pm\infty) = 0$, $B^*(\pm\infty) = 0$. Следовательно, уравнение (64) однозначно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи ТФ. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.; Л., 1947.
2. Франкль Ф.И. Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20. № 2. С. 196–202.
3. Девингталь Ю.В. О существовании и единственности решения одной задачи Ф.И. Франкля // Изв. вузов. Математика. 1958. № 2 (3). С. 39–51.
4. Линь Цзянь-бин. О некоторых задачах Франкля // Вестн. Ленингр. гос. ун-та. Математика, механика и астрономия. 1961. Т. 3. № 13. С. 28–39.
5. Капустин Н.Ю., Сабитов К.Б. О решении одной проблемы в теории задачи Франкля для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 60–68.
6. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М., 1985.
7. Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на переходной линии // Учен. зап. Казанск. ун-та. 1962. Т. 122. № 3. С. 3–16.
8. Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 1. С. 44–59.
9. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент, 2005.
10. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
11. Бабенко К.И. К теории уравнений смешанного типа: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1952.
12. Мирсабуров М. Задача с аналогами условия Франкля на характеристике и на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 6. С. 778–788.
13. Михлин С.Г. Об интегральном уравнении Ф. Трикоми // Докл. АН СССР. 1948. Т. 59. № 6. С. 1053–1056.
14. Мирсабуров М., Хуррамов Н. Задача с условием Бицадзе–Самарского на характеристиках одного семейства и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1073–1094.
15. Гахов Ф.Д., Черский Ю.Н. Уравнения типа свертки. М., 1978.
16. Полосин А.А. Об однозначной разрешимости задачи Трикоми для специальной области // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 3. С. 394–401.
17. Мирсабуров М. Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 9. С. 1281–1284.

Термезский государственный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию 27.07.2020 г.
После доработки 27.04.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.8+517.956.328

О СОБСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ И ФУНКЦИЯХ
 ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА
 В ОБЛАСТИ С ДЫРЧАТЫМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ

© 2021 г. С. А. Назаров

Найдена асимптотика собственных пар спектральных задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в области, разделённой несколькими перегородками с отверстиями малых диаметров и распадающейся на несколько независимых ячеек в пределе при стремлении диаметров к нулю. При помощи асимптотических методов, обслуживающих сингулярно возмущённые области, изучены расщепление кратного собственного числа предельных задач, например, нулевого при краевых условиях Неймана, и локализация собственной функции в случае простого собственного числа.

DOI: 10.31857/S0374064121060042

1. Исходная и предельные задачи. Пусть Ω – ограниченная область в евклидовом пространстве \mathbb{R}^d , $d \geq 2$. Систему декартовых координат $x = (y, z) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ выберем так, чтобы отрезок $\Upsilon = (z^0, z^J)$ оси $z = x_d$ лежал внутри области Ω , а его концевые точки – на её границе $\partial\Omega$. Точками $z^1 < \dots < z^{j-1}$ разобьём Υ на меньшие отрезки, а “перегородками”

$$\Theta_j = \{x \in \Omega : z = z^j\}, \quad j = \overline{1, J-1},$$

область Ω – на “ячейки” $\omega_1, \dots, \omega_J$, которые считаем (связными) областями с липшицевыми границами. На каждом сечении Θ_j , $j = \overline{1, J-1}$, зафиксируем точку $x^j = (y^j, z^j)$ и образуем вокруг неё мелкое отверстие

$$\theta_j^\varepsilon = \{x : \eta^j := \varepsilon^{-1}(y - y^j) \in \theta_j, \quad z = z^j\}, \quad j = \overline{1, J-1}. \tag{1}$$

Здесь θ_j – области в \mathbb{R}^{d-1} с липшицевыми границами $\partial\theta_j$ и компактными замыканиями $\overline{\theta_j} = \theta_j \cup \partial\theta_j$, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, а число $\varepsilon_0 > 0$ таково, что $\overline{\theta_j^\varepsilon} \subset \Theta_j$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

В области (рис. 1, а)

$$\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{J-1} (\Theta_j \setminus \overline{\theta_j^\varepsilon})$$

рассмотрим для уравнения

$$-\Delta_x u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \tag{2}$$

спектральные задачи Дирихле

$$u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^\varepsilon, \tag{2}_D$$

и Неймана

$$\partial_\nu u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^\varepsilon. \tag{2}_N$$

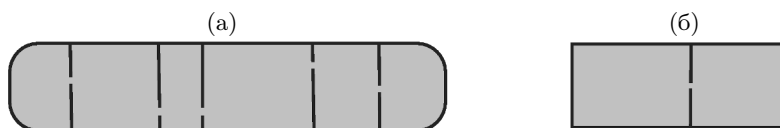


Рис. 1. Область с дырчатыми перегородками (а) и перегородка в цилиндре с одной дыркой (б).

Здесь $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ – оператор Лапласа, $\nabla_x = \text{grad}$, ∂_ν – производная вдоль внешней нормали, λ^ε – спектральный параметр.

Из-за возможных иррегулярностей собственных функций u^ε нужна обобщённая постановка задач (2), $(2)_D$ и (2), $(2)_N$ как интегральных тождеств [1, гл. 2, § 2 и 5]

$$(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \lambda^\varepsilon (u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \quad \text{для всех } \psi^\varepsilon \in \mathcal{H}_M^\varepsilon. \quad (3)$$

Здесь $(\cdot, \cdot)_{\Omega^\varepsilon}$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega^\varepsilon)$, индекс M здесь и далее принимает значения D и N , $\mathcal{H}_N^\varepsilon = H^1(\Omega^\varepsilon)$ – пространство Соболева, а $\mathcal{H}_D^\varepsilon = H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ – его подпространство, выделенное условием Дирихле $(2)_D$ на $\partial\Omega^\varepsilon$.

Ввиду компактности вложения $H^1(\Omega^\varepsilon) \subset L^2(\Omega^\varepsilon)$ задача (3) (или (2), $(2)_D$ и (2), $(2)_N$) имеет дискретный спектр, который образует неограниченную монотонную последовательность

$$0 \leq \lambda_{M1}^\varepsilon < \lambda_{M2}^\varepsilon \leq \lambda_{M3}^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_{Mn}^\varepsilon \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

составленную с учётом кратностей собственных чисел. Соответствующие собственные функции $u_{M1}^\varepsilon, u_{M2}^\varepsilon, u_{M3}^\varepsilon, \dots, u_{Mn}^\varepsilon, \dots \in \mathcal{H}_M^\varepsilon$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(u_{Mn}^\varepsilon, u_{Mm}^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

где $\delta_{m,n}$ – символ Кронекера. Даже в случае гладких поверхностей $\partial\Omega$ и $\partial\theta_1, \dots, \partial\theta_{J-1}$ функции u_{Mn}^ε , вообще говоря, не принадлежат пространству Соболева $H^2(\Omega^\varepsilon)$ из-за известных корневых сингулярностей градиента $\nabla_x u_{Mn}^\varepsilon$ на рёбрах трещин (1) (см., например, [2; гл. 2 и 10]). Первое собственное число λ_{M1}^ε простое, причём $\lambda_{D1}^\varepsilon > 0$ и

$$\lambda_{N1}^\varepsilon = 0, \quad u_{N1}^\varepsilon = |\Omega^\varepsilon|^{-1/2}, \quad (6)$$

где $|\Omega^\varepsilon|$ – объём тела Ω^ε .

Основная цель статьи – построить асимптотику нескольких собственных пар $\{\lambda_{Mn}^\varepsilon, u_{Mn}^\varepsilon\}$. Сама работа инициирована публикацией [3], в которой изучена первая собственная функция задачи Дирихле на двух соосных цилиндрах с одинаковым сечением (рис. 1, б), соединённых через малое отверстие θ_1^ε (случай $J = 2$ для областей ω_1 и ω_2 частной формы). При этом собственная функция раскладывается на цилиндрах в ряды Фурье, которые посредством весьма громоздких вычислений согласуются на малом множестве θ_1^ε . Этот неоправданно тяжёлый подход назван в [3] “мощным методом”, который может быть применён и в “нецилиндрических областях с вращательной симметрией”. Между тем более тридцати лет назад были разработаны общие асимптотические методы исследования статических и спектральных, скалярных и векторных эллиптических краевых задач в областях с разнообразными сингулярно возмущёнными границами (см. монографии [4–6] и др.). Очень близкими по тематике являются давние статьи [7–9], в которых используется метод сращиваемых разложений [10, 5] и конструируются полные асимптотические разложения решений спектральных задач для эллиптических уравнений второго порядка со сменой краевых условий на малых участках границы.

В данной работе применяется метод составных разложений (см. статьи [11–14], монографии [4, 6] и др.) к задачам в областях общих форм с произвольно перфорированными перегородками. Помимо упомянутой в [3] локализации собственной функции u_{D1}^ε в случае простого, не обязательно первого, как в [3], собственного числа задач Дирихле и Неймана на ячейках ω_j (см. п. 4), внимание уделяется кратным собственным числам, для которых в первую очередь требуется построить младшие члены асимптотики и тем самым показать, как они (числа) расцепляются при $\varepsilon > 0$.

Конкретизация асимптотических процедур [12, 4] для задач (2), $(2)_D$ и (2), $(2)_N$ требует детального описания характеристик предельных ($\varepsilon = 0$) задач. В п. 2 вводится несколько используемых в работе классических объектов гармонического анализа. В п. 3 изучается поведение при $\varepsilon \rightarrow +0$ первых J собственных пар задачи Неймана – построение и обоснование асимптотик описано во всех деталях. Схема анализа повторяется с упрощениями в п. 4 для

возмущённого простого собственного числа предельных задач Дирихле в $\Omega^0 = \omega_1 \cup \dots \cup \omega_J$, однако для сокращения объёма статьи обстоятельно рассматриваются только интересные для приложений случаи $d = 2$ и $d = 3$. Наконец, в п. 5 обсуждаются доступные обобщения и общие свойства спектральных пар в областях с перфорированными перегородками.

Перечислим возникающие предельные задачи. При $\varepsilon = 0$ отверстия $\theta_1^\varepsilon, \dots, \theta_{J-1}^\varepsilon$ исчезают и исходная задача распадается на J независимых спектральных задач

$$-\Delta_x u^{j0}(x) = \lambda^{j0} u^{j0}(x), \quad x \in \omega_j, \tag{7}$$

$$u^{j0}(x) = 0, \quad x \in \partial\omega_j, \quad j = \overline{1, J}, \tag{7}_D$$

или

$$\partial_\nu u^{j0}(x) = 0, \quad x \in \partial\omega_j, \quad j = \overline{1, J}. \tag{7}_N$$

Их собственные числа образуют последовательности

$$0 \leq \lambda_{M1}^{j0} < \lambda_{M2}^{j0} \leq \lambda_{M3}^{j0} \leq \dots \leq \lambda_{Mn}^{j0} \leq \dots \rightarrow +\infty, \tag{8}$$

а соответствующие собственные функции $u_{M1}^{j0}, u_{M2}^{j0}, u_{M3}^{j0}, \dots, u_{Mn}^{j0}, \dots \in \mathcal{H}_M^0(\omega_j)$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(u_{Mn}^{j0}, u_{Mm}^{j0})_{\omega_j} = \delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Понятно, что $\lambda_{D1}^{j0} > 0$, а для задачи Неймана верны формулы

$$\lambda_{N1}^{j0} = 0, \quad u_{N1}^{j0} = |\omega_j|^{-1/2}. \tag{10}$$

Задачи (7), (7)_D и (7), (7)_N нуждаются в обобщённой постановке [1, гл. 2, § 2 и 5], однако соответствующие интегральные тождества приводить не будем ввиду их очевидности и простоты.

Ещё одно семейство предельных задач появляется в результате растяжений координат

$$x \mapsto \xi^j = (\eta^j, \zeta^j) = (\varepsilon^{-1}(y - y^j), \varepsilon^{-1}(z - z^j)), \tag{11}$$

где $j = \overline{1, J-1}$. Замена (11) и формальный переход к $\varepsilon = 0$ превращают конечную область Ω^ε в два полупространства $\mathbb{R}_\pm^d = \{\xi^j : \pm \zeta^j > 0\}$, соединённых через отверстие $\theta_j(0) = \theta_j \times \{0\}$ в стенке $\partial\mathbb{R}_\pm^d$:

$$\Xi^j = \mathbb{R}_-^d \cup \theta_j(0) \cup \mathbb{R}_+^d. \tag{12}$$

Поскольку $\Delta_x + \lambda = \varepsilon^{-2} \Delta_{\xi^j} + \lambda$, главным членом оператора Гельмгольца в быстрых переменных ξ^j служит оператор Лапласа, т.е. предельная задача в области (12) выглядит так:

$$-\Delta_{\xi^j} w^{j0}(\xi^j) = 0, \quad \xi^j \in \Xi^j, \tag{13}$$

$$w^{j0}(\eta^j, \pm 0) = 0 \quad \text{при} \quad \eta^j \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus \overline{\theta_j} \tag{13}_D$$

или

$$\mp \partial_{\zeta^j} w^{j0}(\xi^j) = 0 \quad \text{при} \quad \eta^j \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus \overline{\theta_j}. \tag{13}_N$$

В асимптотических конструкциях будут востребованы специальные решения однородных задач (13), (13)_D и (13), (13)_N, описываемые в следующем пункте.

2. Вспомогательные объекты. 1°. *Ёмкость.* Пусть $d \geq 3$ (см. замечание в конце п. 3 по поводу плоской задачи). Ёмкостной потенциал P_j – затухающее при $|\xi^j| \rightarrow \infty$ решение задачи Дирихле во внешности трещины $\theta_j(0) = \{\xi^j : \eta^j \in \theta_j, \zeta^j = 0\}$

$$-\Delta_{\xi^j} P_j(\xi^j) = 0, \quad \xi^j \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\theta_j(0)}, \quad P_j(\xi^j) = 1, \quad \xi^j \in \overline{\theta_j(0)}. \tag{14}$$

Справедливо асимптотическое представление

$$P_j(\xi^j) = C(\theta_j)\Phi(\xi^j) + O(|\xi^j|^{1-d}) \quad \text{при } |\xi^j| \rightarrow +\infty, \quad (15)$$

в котором $\Phi(\xi^j) = |\xi^j|^{2-d}\Phi(|\xi^j|^{-1}\xi^j)$ – фундаментальное решение оператора Лапласа в \mathbb{R}^d , $d \geq 3$, а $C(\theta_j) = \|\nabla_{\xi^j} P_j; L^2(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\theta_j(0)})\|^2 > 0$ – коэффициент, пропорциональный гармонической емкости $\text{cap}_d(\theta_j)$ множества $\theta_j(0)$ (см. монографии [15, 16] и др.). Функция P_j чётная относительно переменной $\zeta^j = \xi^j_d$, а значит, гармоническая функция W_j , определённая равенством

$$W_j(\xi^j) = 1 - P_j(\xi^j), \quad \zeta^j > 0, \quad W_j(\xi^j) = -1 + P_j(\xi^j), \quad \zeta^j < 0, \quad (16)$$

является нечётной по ζ^j и гладкой в области Ξ^j вплоть до границы вне ребра $\partial\theta^j \times \{0\}$, а также удовлетворяет задаче Неймана (13), $(13)_N$.

2°. *Тензор виртуальной массы.* При $d \geq 2$ задача Неймана во внешности трещины

$$\begin{aligned} -\Delta_{\xi^j} Q_j(\xi^j) &= 0, \quad \xi^j \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\theta_j(0)}, \\ \mp \partial_{\zeta^j} Q_j(\eta^j, \pm 0) &= \pm 1, \quad \eta^j \in \theta_j(0), \end{aligned} \quad (17)$$

имеет затухающее на бесконечности решение, допускающее асимптотическое представление

$$Q_j(\xi^j) = M(\theta_j)\partial_{\zeta^j}\Phi(\xi^j) + O(|\xi^j|^{-d}) \quad \text{при } |\xi^j| \rightarrow \infty, \quad (18)$$

в котором $M(\theta_j) = \|\nabla_{\xi^j} Q_j; L^2\mathbb{R}^d \setminus \overline{\theta_j(0)}\|^2$ – положительный коэффициент, зависящий от формы трещины. Линейно растущее решение $\zeta^j + Q_j(\xi^j)$ однородной задачи Неймана (17) – классический объект гармонического анализа [15, приложение G], а $M(\theta_j)$ – единственный ненулевой элемент матрицы (тензора) виртуальной массы, поскольку в случае прямой трещины $\theta_j(0)$ другие решения с линейным ростом – мономы $\xi^j_p = \eta^j_p$, $p = \overline{1, d-1}$, – полностью удовлетворяют задаче Неймана. В пространственном случае $d = 3$ коэффициент $M(\theta_j)$ известен, например, для эллиптической трещины, а в плоском имеет место равенство $M(\theta_j) = \pi L_j^2/8$, где L_j – длина трещины θ_j , которое находится при помощи конформного преобразования Жуковского и издавна используется в механике трещин (см. монографии [17, гл. XI; 18, гл. 12] и др.).

Функция Q_j нечётна по переменной ζ^j , но далее понадобится чётная гладкая в Ξ^j функция W_j , являющаяся решением задачи Дирихле (13), $(13)_D$:

$$W_j(\xi^j) = \zeta^j + Q_j(\xi^j) \quad \text{при } \zeta^j > 0, \quad W_j(\xi^j) = -\zeta^j - Q_j(\xi^j) \quad \text{при } \zeta^j < 0. \quad (19)$$

3°. *Матрица.* Пусть $T = T^1 + \dots + T^J$, где T^j – блочно-диагональная $J \times J$ -матрица с единственным ненулевым 2×2 -блоком в строках и столбцах с номерами j и $j+1$

$$\begin{pmatrix} C_j \tau_j^2 & -C_j \tau_j \\ -C_j \tau_j & C_j \end{pmatrix}, \quad C_j > 0, \quad \tau_j > 0, \quad j = \overline{1, J-1}. \quad (20)$$

Лемма 1. *Матрица T положительная, и её (одномерное) корневое пространство натянуто на столбец $t = (t_1, \dots, t_J)^T$ (T – знак транспонирования) с компонентами $t_1 = 1$ и $t_j = \tau_1 \times \dots \times \tau_{j-1}$, $j = \overline{2, J}$.*

Доказательство. Поскольку блоки (20) – положительные симметричные матрицы, равенство $a^T T a = 0 \in \mathbb{R}^J$ для столбца $a \in \mathbb{R}^J$ означает, что $T^1 a = 0, \dots, T^J a = 0$. Нужное утверждение вытекает из записанных покомпонентно последних равенств:

$$C_j \tau_j^2 a_j - C_j \tau_j a_{j+1} = 0, \quad -C_j \tau_j a_j + C_j a_{j+1} = 0,$$

откуда следует, что $a_{j+1} = \tau_j a_j$. Лемма доказана.

3. Собственные числа задачи Неймана. Конечно же, далее речь пойдёт только о возмущении положительных собственных чисел задачи (2), $(2)_N$ (ср. собственные пары (10) и (6)). Кроме того, считаем, что $d \geq 3$, а двумерный случай обсудим в замечании в конце этого пункта.

В качестве основного асимптотического приближения к собственной функции $u_k^\varepsilon := u_{Nk}^\varepsilon$, отвечающей собственному числу

$$\lambda_k^\varepsilon := \lambda_{nk}^\varepsilon = 0 + \varepsilon^{d-2} \lambda'_k + \tilde{\lambda}_k^\varepsilon, \tag{21}$$

возьмём кусочно-постоянную функцию u_k^0 , т.е.

$$u_k^0(x) = a_j^k, \quad x \in \omega_j, \quad j = \overline{1, J}, \quad a^k = (a_1^k, \dots, a_J^k)^T \in \mathbb{R}^J. \tag{22}$$

Числа λ'_k и столбцы a^k подлежат определению, а малые остатки $\tilde{\lambda}_k^\varepsilon$ – оцениванию, но, разумеется, $\lambda'_1 = \tilde{\lambda}_1^\varepsilon = 0$ и $a_1^1 = \dots = a_J^1 = |\Omega^0|^{-1/2}$.

Скачки функции (22) на отверстиях (1) компенсируем при помощи слагаемых типа пограничного слоя

$$\chi_j(x) w'_{kj}(\xi^j) := \frac{1}{2} (a_j - a_{j-1}) \chi_j(x) \mathbf{w}_j(\xi^j), \quad j = \overline{1, J-1}, \tag{23}$$

где $\chi_j(x) = \chi(r_j)$ и $r_j = |x - x^j|$. Кроме того, $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ – срезающая функция с малым носителем, равная единице в окрестности начала координат и служащая для локализации пограничного слоя, а \mathbf{w}_j – функция, имеющая скачок -2 на множестве $\theta_j(0)$ и определяемая при помощи гармонической функции (16) равенствами

$$\mathbf{w}_j(\xi^j) = W_j(\xi^j) - 1 \quad \text{при} \quad \zeta^j > 0, \quad \mathbf{w}_j(\xi^j) = W_j(\xi^j) + 1 \quad \text{при} \quad \zeta^j < 0. \tag{24}$$

В качестве поправочных слагаемых члена регулярного типа $\varepsilon^{d-2} u'_k$ возьмём функцию со скачками на отверстиях (1), но принадлежащую пространствам $H^1(\omega_j)$, $j = \overline{1, J}$. К $u_k^0 + \varepsilon^{d-2} u'_k$ добавим сумму выражений (23) и подставим результат в задачу (2), $(2)_N$ со спектральным параметром (21). При учёте соотношения $\Phi(\xi^j) = \varepsilon^{d-2} \Phi(x - x^j)$ и представлений (16), (15) для функций (24) соберём члены порядка ε^{d-2} . В итоге получим предельные задачи

$$\begin{aligned} -\Delta_x u'_k(x) &= \lambda'_k u_k^0(x) + f'_{kj}(x), \quad x \in \omega_j, \\ \partial_\nu u'_k(x) &= 0, \quad x \in \partial\omega_j, \end{aligned} \tag{25}$$

с однородными условиями Неймана (поскольку $\partial_\nu \chi_j = 0$ на $\partial\Theta_j$) и следующими фрагментами правых частей уравнений Пуассона:

$$\begin{aligned} f'_{kj}(x) &= \frac{1}{2} (a_{j+1} - a_j) C(\theta_j) [\Delta_x, \chi_j(x)] \Phi(x - x^j) - \\ &- \frac{1}{2} (a_j - a_{j-1}) C(\theta_{j-1}) [\Delta_x, \chi_{j-1}(x)] \Phi(x - x^{j-1}). \end{aligned} \tag{26}$$

Подчеркнём, что при $j = 1$ и $j = J$ выражения в (26) содержат только по одному члену, и достаточно в (26) положить $C(\theta_0) = 0$ и $C(\theta_J) = 0$ для несуществующих отверстий θ_0^ε и θ_J^ε . Далее аналогичные и понятные упрощения формул отдельно оговаривать не будем.

Поскольку по предназначению фундаментального решения выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} [\Delta_x, \chi_j(x)] \Phi(x) dx = \int_{\mathbb{S}_R} \partial_{|x|} \Phi(x) ds_x = -1, \tag{27}$$

где \mathbb{S}_R – сфера большого радиуса $R > 0$, условия разрешимости $\int_{\omega_j} f'_{kj}(x) dx = 0$ задач Неймана (25) превращаются в соотношения

$$\lambda'_k |\omega_j| a_j^k = \frac{1}{4}(a_j - a_{j-1})C(\theta_{j-1}) - \frac{1}{4}(a_{j+1} - a_j)C(\theta_j), \quad j = \overline{1, J}, \tag{28}$$

где замена $1/2 \mapsto 1/4$ (ср. формулы (26) и (28)) обусловлена тем, что в отличие от (27) интегрирование ведётся по полусфере. В итоге получена система J линейных уравнений

$$Ta^k = \lambda'_k Ba^k, \tag{29}$$

где T – $J \times J$ -матрица, составленная из диагональных 2×2 -блоков (20), в которых $\tau_j = 1$ и $C_j = C(\theta_j)/4$, а $B = \text{diag}\{|\omega_1|, \dots, |\omega_J|\}$ – диагональная $J \times J$ -матрица. В силу леммы 1 алгебраическая система (29) имеет собственные числа

$$0 = \lambda'_1 < \lambda'_2 \leq \dots \leq \lambda'_J, \tag{30}$$

а соответствующие собственные векторы $a^1, \dots, a^J \in \mathbb{R}^J$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(a^\ell)^T Ba^k = \delta_{k,\ell}, \quad k, \ell = \overline{1, J}. \tag{31}$$

Компоненты особенного столбца a^1 указаны после формулы (22).

Итак, найдены все выделенные члены асимптотических анзацев для собственных пар задачи (2), $(2)_N$. Обоснование асимптотики начнём с простого утверждения.

Лемма 2. *На сегменте $[0, \Lambda_N]$ с концевой точкой $\Lambda_N = \max\{\lambda_{N2}^{10}, \dots, \lambda_{N2}^{J0}\}$ (см. последовательности (γ_N)) расположено не более J собственных чисел задачи (2), $(2)_N$.*

Доказательство. Применим максиминимальный принцип (см. [19, теорема 10.2.2])

$$\lambda_{Mm}^\varepsilon = \max_{\mathcal{E}_{Mm}^\varepsilon} \inf_{\psi^\varepsilon \in \mathcal{E}_{Mm}^\varepsilon \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla_x \psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2}{\|\psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{32}$$

где $\mathcal{E}_{Mm}^\varepsilon$ – любое подпространство в $\mathcal{H}_M^\varepsilon$ с коразмерностью $m - 1$, в частности, $\mathcal{E}_{M1}^\varepsilon = \mathcal{H}_M^\varepsilon$. В качестве пробного подпространства при $m = J + 1$ и $M = N$ возьмём

$$\mathcal{E}_{NJ+1}^\perp = \{\psi^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon) : (\psi^\varepsilon, 1)_{\omega_j} = 0, \quad j = \overline{1, J}\}. \tag{33}$$

На ячейках $\omega_1, \dots, \omega_J$ в силу условий ортогональности из определения (33) выполняются неравенства Пуанкаре, а значит, для функции $\psi^\varepsilon \in \mathcal{E}_{NJ+1}^\perp$ справедливы неравенства

$$\|\nabla_x \psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \geq \sum_{j=1}^J \lambda_{N2}^{j0} \|\psi^\varepsilon; L^2(\omega_j)\|^2 \geq \Lambda_N \|\psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2. \tag{34}$$

Учитывая (33) и (34) в формуле (32) с $m = J + 1$ и $M = N$, уменьшаем максимум и оцениваем снизу инфимум величиной Λ_N , которая тем самым оказывается меньше $\lambda_{NJ+1}^\varepsilon$. Лемма доказана.

Введём в пространстве $\mathcal{H}^\varepsilon = H^1(\Omega^\varepsilon)$ (индекс N не пишем) скалярное произведение

$$\langle v^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle = (\nabla_x v^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} + (v^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \tag{35}$$

и положительный самосопряжённый оператор \mathcal{K}^ε ,

$$\langle \mathcal{K}^\varepsilon v^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle = (v^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \quad \text{для всех } v^\varepsilon, \psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon. \tag{36}$$

В результате интегральное тождество (3) преобразуется в абстрактное уравнение с новым спектральным параметром, а именно,

$$\mathcal{K}^\varepsilon \mathcal{U}^\varepsilon = \kappa^\varepsilon \mathcal{U}^\varepsilon \quad \text{в } \mathcal{H}^\varepsilon, \quad \text{где } \kappa^\varepsilon = (1 + \lambda^\varepsilon)^{-1}.$$

Справедливость следующего утверждения, известного [11] как лемма о “почти собственных” числах и векторах, обеспечена спектральным разложением резольвенты (см., например, [19, гл. 6]).

Лемма 3. Пусть для $\mathbf{v}^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ и $\mathbf{k}^\varepsilon \in \mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$ выполнены соотношения

$$\|\mathbf{v}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1, \quad \|\mathcal{K}^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon - \mathbf{k}^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| =: h \in (0, \mathbf{k}^\varepsilon). \tag{37}$$

Тогда у оператора \mathcal{K}^ε имеется собственное число κ^ε , удовлетворяющее неравенству $|\kappa^\varepsilon - \mathbf{k}^\varepsilon| \leq h$. Более того, для любого $\mathbf{h} \in (h, \mathbf{k}^\varepsilon)$ найдутся такие коэффициенты $\mathbf{c}_{\mathcal{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathbf{c}_{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$, что

$$\left\| \mathbf{v}^\varepsilon - \sum_{p=\mathcal{N}^\varepsilon}^{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1} \mathbf{c}_p^\varepsilon \mathcal{U}_p^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon \right\| \leq 2 \frac{h}{\mathbf{h}}, \quad \sum_{p=\mathcal{N}^\varepsilon}^{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1} |\mathbf{c}_p^\varepsilon|^2 = 1. \tag{38}$$

При этом $\{\kappa_{\mathcal{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \kappa_{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon\}$ – набор всех собственных чисел оператора \mathcal{K}^ε на замкнутом сегменте $[\mathbf{k}^\varepsilon - \mathbf{h}, \mathbf{k}^\varepsilon + \mathbf{h}]$, а соответствующие собственные векторы $\mathcal{U}_{\mathcal{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathcal{U}_{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$ подчинены условиям ортогональности и нормировки

$$\langle \mathcal{U}_p^\varepsilon, \mathcal{U}_q^\varepsilon \rangle = \delta_{p,q}, \quad p, q = \overline{\mathcal{N}^\varepsilon, \mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}. \tag{39}$$

В качестве “почти собственных” пар оператора \mathcal{K}^ε возьмём пары

$$\mathbf{k}_k^\varepsilon = (1 + \varepsilon^{d-2} \lambda_k')^{-1}, \quad \mathbf{v}_k^\varepsilon = \|\mathbf{u}_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \mathbf{u}_k^\varepsilon, \tag{40}$$

где

$$\mathbf{u}_k^\varepsilon(x) = u_k^0(x) + \varepsilon^{d-2} X^\varepsilon(x) u_k'(x) + \sum_{j=1}^{J-1} \chi_j(x) w_{kj}' \left(\frac{x - x^j}{\varepsilon} \right), \quad X^\varepsilon(x) = 1 - \sum_{j=1}^{J-1} \chi \left(\frac{r_j}{2R\varepsilon} \right). \tag{41}$$

Здесь $u_k' \in H^1(\Omega^0)$ – какое-либо решение задач (25), существующее в силу равенств (28), а срезка X^ε введена для уничтожения скачков функции u_k' на отверстиях, т.е. размер $R > 0$ выбран так, что $X^\varepsilon = 0$ на $\theta_1^\varepsilon \cup \dots \cup \theta_{J-1}^\varepsilon$. В результате $\mathbf{u}_k^\varepsilon \in \mathcal{H}_N^\varepsilon$. Отметим, что функция u_k' гладкая внутри ячеек ω_j вплоть до прямых участков Θ_j и Θ_{j-1} их границ. Благодаря соотношению (31) и затуханию членов пограничного слоя получаем, что

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{u}_k^\varepsilon, \mathbf{u}_\ell^\varepsilon \rangle - \delta_{k,\ell}| &= |\langle \mathbf{u}_k^\varepsilon, \mathbf{u}_\ell^\varepsilon \rangle - (a^\ell)^\top B a^k| = |\langle \mathbf{u}_k^\varepsilon, \mathbf{u}_\ell^\varepsilon \rangle - (u_k^0, u_\ell^0)_{\Omega^\varepsilon}| \leq \\ &\leq c \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\left(1 + \varepsilon^{d-2} + \sum_{j=1}^{J-1} \frac{\chi(r_j)}{(1 + \varepsilon r_j)^{d-2}} \right)^2 - 1 \right) dx \leq C \varepsilon^{d-2}. \end{aligned} \tag{42}$$

Теперь оценим величину h из (37) для конкретной пары (40) – обозначим эту величину h_k . Согласно определениям (35) и (36) имеем

$$\begin{aligned} h_k &= \sup |\langle \mathcal{K}^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon - \mathbf{k}^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle| = \\ &= (1 + \varepsilon^{d-2} \lambda_k')^{-1} \|\mathbf{u}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \sup |(\nabla_x \mathbf{u}^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} - \varepsilon^{d-2} \lambda_k' (\mathbf{u}^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}|; \end{aligned} \tag{43}$$

здесь супремум вычисляется по всем функциям $\psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$, для которых $\|\psi^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1$. В силу одномерного неравенства Харди, записанного в радиальной переменной $r_j = |x - x^j|$ и проинтегрированного по угловым переменным, при $d \geq 3$ выполнена весовая оценка

$$\|(\varepsilon + r_j)^{-1} \psi^\varepsilon; L^2(\omega_j \cup \omega_{j-1})\| \leq c \|\psi^\varepsilon; H^1(\omega_j \cup \omega_{j-1})\|. \tag{44}$$

Разность скалярных произведений в $L^2(\Omega^\varepsilon)$ под знаком модуля в (43) представим как сумму выражений

$$I_j^u(\psi^\varepsilon), \quad S_j^u(\psi^\varepsilon), \quad j = \overline{1, J}, \quad I_\ell^w(\psi^\varepsilon), \quad S_\ell^w(\psi^\varepsilon), \quad \ell = \overline{1, J-1}. \quad (45)$$

Укажем и преобразуем каждое из них. Прежде всего верны равенства

$$\varepsilon^{2-d} I_j^u(\psi^\varepsilon) = (\nabla_x u'_k, \nabla_x (X^\varepsilon \psi^\varepsilon))_{\omega_j} + \lambda'_k(a_j^k, X^\varepsilon \psi^\varepsilon)_{\omega_j}, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{2-d} S_j^u(\psi^\varepsilon) &= (u'_k \nabla_x X^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\omega_j} - (\nabla_x u'_k, \psi^\varepsilon \nabla_x X^\varepsilon)_{\omega_j} + \\ &+ \lambda'_k a_j^k (1 - X^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\omega_j} + \varepsilon^{d-2} \lambda'_k (X^\varepsilon u'_k, \psi^\varepsilon)_{\omega_j}. \end{aligned} \quad (47)$$

Первые два слагаемых в правой части равенства (47) появились в результате переноса срезки X^ε от u'_k к ψ^ε и сопутствующего коммутирования с оператор-градиентом, а третье – из-за введения множителя X^ε в последнее скалярное произведение из (46). Примем во внимание неравенства $|u'_k(x)| + |\nabla_x u'_k(x)| \leq \mathbf{n}'_j$ при $x \in \overline{\omega_j} \cap (\text{supp } \chi_j \cup \text{supp } \chi_{j-1})$ с некоторой мажорантой \mathbf{n}'_j (напоминаем, что u'_k – гладкая функция вблизи прямых участков Θ_j и Θ_{j-1} границы $\partial\omega_j$), а также соотношение $\mathbf{r}_j = \min\{r_j, r_{j-1}\} \leq c\varepsilon$ на пересечении ячейки ω_j и множества $\text{supp}(1 - X^\varepsilon)$, содержащего носитель функции $|\nabla_x X^\varepsilon(x)| \leq c\varepsilon^{-1}$. В результате получим, что

$$\begin{aligned} \varepsilon^{2-d} |S_j^u(\psi^\varepsilon)| &\leq c(\varepsilon^{-1} \mathbf{n}'_j I_{X_j}^{1/2} \|\nabla_x \psi^\varepsilon; L^2(\omega_j)\| + \\ &+ I_{X_j}^{1/2} (\mathbf{n}'_j + |a_j^k|) \|(\varepsilon + \mathbf{r}_j)^{-1} \psi^\varepsilon; L^2(\omega_j)\| + \varepsilon^{d-2} |\lambda'_k| \|u'_k; L^2(\omega_j)\| \|\psi^\varepsilon; L^2(\omega_j)\|) \leq \\ &\leq c(\varepsilon^{-1+(d-2)/2} + \varepsilon^{d/2} + \varepsilon^{d-2}) \|\psi^\varepsilon; H^1(\omega_j)\| \leq C\varepsilon^{\min\{-1+(d-2)/2, d-2\}}. \end{aligned}$$

Наконец,

$$I_{X_j} = \int_{\text{supp}(1-X^\varepsilon)} dx \leq C_X \int_0^{c_j} \mathbf{r}_j^{d-1} d\mathbf{r}_j = C_j \varepsilon^d.$$

Далее при $\ell = \overline{1, J-1}$ имеем

$$I_\ell^w(\psi^\varepsilon) = (\nabla_x \mathcal{W}_{k\ell}, \nabla_x (\chi_\ell \psi^\varepsilon))_{\omega_\ell \cup \omega_{\ell+1}}, \quad (48)$$

$$S_\ell^w(\psi^\varepsilon) = \varepsilon^{d-2} \lambda'_k (\chi_\ell w'_{k\ell}, \psi^\varepsilon)_{\omega_\ell \cup \omega_{\ell+1}} + (w'_{k\ell} \nabla_x \chi_\ell, \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\omega_\ell \cup \omega_{\ell+1}} - (\nabla_x w'_{k\ell}, \psi^\varepsilon \nabla_x \chi_\ell)_{\omega_\ell \cup \omega_{\ell+1}}. \quad (49)$$

При этом $\mathcal{W}_{k\ell} = ((a_{\ell+1}^k + a_\ell^k) + (a_{\ell+1}^k - a_\ell^k)W_\ell)/2 \in H_{\text{loc}}^1(\overline{\Xi^j})$ – ограниченное решение задачи (13), (13)_N, а значит, скалярное произведение (48) обращается в нуль, так как пробная функция $\xi^j \mapsto \chi_\ell(x)\psi^\varepsilon(x)$ обладает компактным носителем. Выделим из слагаемого типа пограничного слоя (23) член

$$\varphi_{k\ell}^\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(a_{\ell+1}^k + a_\ell^k)C(\theta_\ell)\Phi(\xi^\ell) = \varepsilon^{d-2} \frac{1}{2}(a_{\ell+1}^k + a_\ell^k)C(\theta_\ell)\Phi(x - x^\ell), \quad (50)$$

входящий в правую часть (26) задачи (25). Остаток представляет собой величину порядка $(1 + |\xi^\ell|)^{1-d}$, превращающуюся в бесконечно малую $O(\varepsilon^{1-d})$ на носителе $\text{supp} |\nabla_x \chi_\ell|$ вектор-функции $\nabla_x \chi_\ell$, удалённом от точки x^ℓ . Отщепим от последних двух слагаемых, возникших в (49) вследствие переброски срезки χ_j от $w'_{k\ell}$ к ψ^ε , скалярные произведения, содержащие функции (50), а оставшееся выражение преобразуем и оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} &|S_\ell^w(\psi^\varepsilon) - (\varphi_{k\ell}^\varepsilon \nabla_x \chi_\ell, \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\omega_\ell \cup \omega_{\ell+1}} + (\nabla_x \varphi_{k\ell}^\varepsilon, \psi^\varepsilon \nabla_x \chi_\ell)_{\omega_\ell \cup \omega_{\ell+1}}| \leq c(\varepsilon^{d-2} \lambda'_k \times \\ &\times \sup_{x \in \omega_\ell \cup \omega_{\ell+1}} |(\varepsilon + r_\ell) \mathbf{w}_\ell(\xi^\ell)| \|(\varepsilon + r_\ell)^{-1} \psi^\varepsilon; L^2(\omega_\ell \cup \omega_{\ell+1})\| + \varepsilon^{d-1} \|\psi^\varepsilon; H^1(\omega_\ell \cup \omega_{\ell+1})\|) \leq c\varepsilon^{d-1}. \end{aligned} \quad (51)$$

Гармоническая в \mathbb{R}_{\pm}^d функция $\varphi_{\ell}^{\varepsilon}$ с нулевыми данными Неймана на $\partial\mathbb{R}_{\pm}^d \setminus \{0\}$ удовлетворяет равенству

$$([\Delta_x, \chi_j] \varphi_{k\ell}^{\varepsilon}, \psi^{\varepsilon})_{\omega_{\ell} \cup \omega_{\ell+1}} = (\varphi_{k\ell}^{\varepsilon} \nabla_x \chi_j, \nabla_x \psi^{\varepsilon})_{\omega_{\ell} \cup \omega_{\ell+1}} - (\nabla_x \varphi_{k\ell}^{\varepsilon}, \psi^{\varepsilon} \nabla_x \chi_j)_{\omega_{\ell} \cup \omega_{\ell+1}}. \tag{52}$$

Следовательно, сумма по $\ell = \overline{1, J-1}$ “лишних” слагаемых из левой части (51) и сумма по $j = \overline{1, J}$ выражений (45) взаимно уничтожаются благодаря интегральным тождествам, обслуживающим задачи (25) с правыми частями (26). Таким образом, при учёте определений (40) и (41) приходим к следующей оценке величин (43):

$$h_k \leq c_k \varepsilon^{d-2+\alpha_d}, \quad \alpha_d = \min\{1, -1 + d/2\} \geq 1/2. \tag{53}$$

Теорема 1. В случае $d \geq 3$ найдутся такие положительные константы ε_0 и c_0 , что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ первые J собственных чисел задачи Неймана (2), $(2)_N$ удовлетворяют соотношениям $\lambda_{N1}^{\varepsilon} = 0$ и

$$|\lambda_k^{\varepsilon} - \varepsilon^{d-2} \lambda'_k| \leq c_0 \varepsilon^{d-2+\alpha_d}, \quad k = \overline{2, J},$$

где α_d – показатель из оценки (53), а $\lambda'_2, \dots, \lambda'_J$ – положительные собственные числа алгебраической системы (29).

Доказательство. Согласно лемме 3 и оценке (53) найдутся собственные числа $\kappa_{Nm(2)}^{\varepsilon}, \dots, \kappa_{Nm(J)}^{\varepsilon}$ оператора $\mathcal{K}^{\varepsilon}$ и собственные числа $\lambda_{Nm(2)}^{\varepsilon}, \dots, \lambda_{Nm(J)}^{\varepsilon}$ задачи (2), $(2)_N$, для которых

$$|\kappa_{Nm(k)}^{\varepsilon} - \mathbf{k}_k^{\varepsilon}| \leq h_k \leq c_k \varepsilon^{d-2+\alpha_d}, \quad k = \overline{2, J},$$

и, следовательно,

$$\begin{cases} |\lambda_{Nm(k)}^{\varepsilon} - \varepsilon^{d-2} \lambda'_k| \leq c_k \varepsilon^{d-2+\alpha_d} (1 + \lambda_{Nm(k)}^{\varepsilon}) (1 + \varepsilon^{d-2} \lambda'_k), \\ 1 + \lambda_{Nm(k)}^{\varepsilon} \leq 2(1 + \varepsilon^{d-2} \lambda'_k) \text{ при } c_k \varepsilon^{d-2+\alpha_d} (1 + \varepsilon^{d-2} \lambda'_k) \leq 1/2, \end{cases}$$

а значит,

$$|\lambda_{Nm(k)}^{\varepsilon} - \varepsilon^{d-2} \lambda'_k| \leq 2c_k \varepsilon^{d-2+\alpha_d} (1 + \varepsilon^{d-2} \lambda'_k)^2 \leq C_k \varepsilon^{d-2+\alpha_d} \text{ при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_k], \quad \varepsilon_k > 0. \tag{54}$$

Если собственные числа $\lambda'_2, \dots, \lambda'_J$ системы (29) простые, то в силу неравенств (54) при малом ε величины $\kappa_{Nm(2)}^{\varepsilon}, \dots, \kappa_{Nm(J)}^{\varepsilon}$ попарно не совпадают. В итоге на интервале $(0, C\varepsilon^{d-2})$ найдены различные удовлетворяющие последней оценке из (54) положительные собственные числа задачи Неймана (2), $(2)_N$ в количестве $J - 1$ штуки. По лемме 2 других собственных чисел на интервале $(0, \Lambda_N)$ нет, т.е. утверждение теоремы проверено.

Рассмотрим теперь случай кратного собственного числа λ'_{Nq} . Пусть

$$\lambda'_{Nq-1} < \lambda'_{Nq} = \dots = \lambda'_{Nq+\mathcal{Q}_q-1} < \lambda'_{Nq+\mathcal{Q}_q}, \quad \mathcal{Q}_q > 1, \tag{55}$$

и убедимся в том, что обнаруженные собственные числа $\kappa'_{Nm(q)}, \dots, \kappa'_{Nm(q+\mathcal{Q}_q-1)}$ оператора $\mathcal{K}^{\varepsilon}$ также можно взять различными. Применим вторую часть леммы 3, положив в ней $h = \max\{h_1, \dots, h_J\}$ и $\mathbf{h} = h\varrho$, где $\varrho > 1$ – большое число. Пусть параметр ε настолько мал, что сегмент $\sigma_q^{\varepsilon} = [\mathbf{k}_q^{\varepsilon} - \mathbf{h}, \mathbf{k}_q^{\varepsilon} + \mathbf{h}]$ содержит среди найденных только точки $\kappa'_{Nm(q)}, \dots, \kappa'_{Nm(q+\mathcal{Q}_q-1)}$. Обозначим через $\mathcal{S}_q^{\varepsilon}, \dots, \mathcal{S}_{q+\mathcal{Q}_q-1}^{\varepsilon}$ указанные в (38) линейные комбинации собственных векторов $\mathcal{U}_p^{\varepsilon}$ оператора $\mathcal{K}^{\varepsilon}$, а через $\mathbf{c}_{(q)}^{\varepsilon}, \dots, \mathbf{c}_{(q+\mathcal{Q}_q-1)}^{\varepsilon}$ – соответствующие столбцы коэффициентов, нормированные в $\mathbb{R}^{\lambda^{\varepsilon}}$. Поскольку векторы a^1, \dots, a^J и $\mathcal{U}_{N^{\varepsilon}}^{\varepsilon}, \dots, \mathcal{U}_{N^{\varepsilon}+\lambda^{\varepsilon}-1}^{\varepsilon}$ подчинены условиям ортогональности и нормировки (31) и (39), выводим из (38) и (42), (40) соотношения

$$|\langle \mathbf{v}_k^{\varepsilon}, \mathbf{v}_{\ell}^{\varepsilon} \rangle - \delta_{k,\ell}| \leq c\varepsilon^{d-2},$$

$$|(\mathbf{c}_{\ell}^{\varepsilon})^T \mathbf{c}_k^{\varepsilon} - \delta_{k,\ell}| = |\langle \mathcal{S}_k^{\varepsilon}, \mathcal{S}_{\ell}^{\varepsilon} \rangle - \delta_{k,\ell}| = |\langle \mathcal{S}_k^{\varepsilon} - \mathbf{v}_k^{\varepsilon}, \mathcal{S}_{\ell}^{\varepsilon} \rangle - \langle \mathbf{v}_k^{\varepsilon}, \mathbf{v}_{\ell}^{\varepsilon} - \mathcal{S}_{\ell}^{\varepsilon} \rangle| \leq 4\varrho^{-1} + c\varepsilon^{d-2}.$$

Таким образом, при малом ε и большом ϱ столбцы $\mathbf{c}_{(q)}^\varepsilon, \dots, \mathbf{c}_{(q+\varrho-1)}^\varepsilon$ “почти ортонормированы” в $\mathbb{R}^{\mathcal{X}^\varepsilon}$, а значит, $\varrho \leq \mathcal{X}^\varepsilon$, и на сегменте σ_q^ε действительно присутствуют не менее ϱ собственных чисел оператора \mathcal{K}^ε . Именно в этом и требовалось убедиться, так как по лемме 2 строгое неравенство $\varrho < \mathcal{X}^\varepsilon$ невозможно. Теорема доказана.

Выполненные вычисления позволяют вывести асимптотические формулы для собственных функций $u_{N2}^\varepsilon, \dots, u_{NJ}^\varepsilon$. Вместе с тем поправочные слагаемые u_k' не определяются однозначно из задач (25), и то же самое можно сказать о собственных векторах системы (29) при наличии кратных (55) среди собственных чисел (30). Поэтому ограничимся формулировкой упрощённого результата – его переформулировка для случая (55) нуждается в стандартных, но достаточно громоздких изменениях и доставляет менее явные формулы. Применим вторую часть леммы 3, в которой возьмём $h_k = c_k \varepsilon^{d-2+\alpha_d}$ и $\mathbf{h}_k = \mathbf{c}_k \varepsilon^{d-2}$. Множители $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_J$ зафиксируем малыми настолько, чтобы в $\mathbf{c}_k \varepsilon^{d-2}$ -окрестности точки $(1 + \varepsilon^{d-2} \lambda_k')^{-1}$ располагалось только одно собственное число оператора \mathcal{K}^ε .

Теорема 2. Пусть $d \geq 3$ и все собственные числа (30) простые. Тогда для собственных функций $u_{N2}^\varepsilon, \dots, u_{NJ}^\varepsilon$ верны асимптотические формулы

$$\left\| u_{Nk}^\varepsilon - u_k^0 - \sum_{j=1}^{J-1} \chi_j w'_{kj}; H^1(\Omega^\varepsilon) \right\| \leq c_k \varepsilon^{\alpha_d}, \quad j = \overline{2, J}, \tag{56}$$

функции в которых заданы равенствами (22), (23) и $\alpha_d = \min\{1, -1 + d/2\} \geq 1/2$.

Подчеркнём, что $H^1(\omega_j)$ -нормы слагаемых $w'_{kj}(\xi^j)$ типа пограничного слоя равны $O(\varepsilon^{d-2})$, однако эти слагаемые нельзя убрать из левой части оценок (56), так как кусочно-постоянные функции u_2^0, \dots, u_J^0 не принадлежат пространству Соболева $H^1(\Omega^\varepsilon)$.

Замечание. При $d = 2$ асимптотические конструкции и процедура их обоснования разрушаются. Причина состоит в том, что для плоской задачи (14) решение $P_j(\xi^j) = 1$ тривиально, и вместо гармонической ёмкости вводится [16] логарифмическая ёмкость множества $\overline{\theta_j(0)}$ как коэффициент в разложении

$$P_j^{\log}(\xi^j) = -(2\pi)^{-1} (\ln |\xi^j| - \ln c_{\log}(\theta_j)) + O(|\xi^j|^{-1}), \quad |\xi^j| \rightarrow +\infty,$$

функции P_j^{\log} , гармонической в области $\Xi^j = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\theta_j(0)}$ и обращающейся в нуль на трещине $\theta_j(0)$.

Разработано несколько подходов к вычислению асимптотики собственных пар спектральных задач в такой необычной ситуации. Во-первых, простейшим оказывается итерационный процесс построения бесконечных рядов по обратным степеням большого параметра $|\ln \varepsilon|$. Во-вторых, при помощи усовершенствованного метода [13] (см. также [4, гл. 9]) можно просуммировать упомянутые ряды и вывести формулы

$$\lambda_{Nk}^\varepsilon = |\ln \varepsilon|^{-1} \Lambda_k(|\ln \varepsilon|^{-1}) + \tilde{\lambda}_{Nk}^\varepsilon, \quad |\tilde{\lambda}_{Nk}^\varepsilon| \leq c_k \varepsilon^\tau, \quad \tau \in (0, 1),$$

где $t \mapsto \Lambda_k(t)$ – вещественные аналитические функции. Первый подход обеспечивает малосодержательный результат, а второй, достаточно сложный и громоздкий в исполнении, воспроизводит в данной статье не будем.

4. Простое собственное число задачи Дирихле. Предположим, что для первых членов последовательностей (8) собственных чисел задач (7), (7)_D справедливы неравенства

$$\lambda_{D1}^{j0} < \lambda_{D1}^{j0} \quad \text{при } j = \overline{1, J}, \quad j \neq \mathbf{j}, \tag{57}$$

и построим асимптотику первого (заведомо простого; ср. п. 5, 3°) собственного числа λ_{D1}^ε задачи (2), (2)_D. Для определённости будем сначала считать, что $1 < \mathbf{j} < J$, – в случаях $\mathbf{j} = 1$ и $\mathbf{j} = J$ формулы укорачиваются. Не будем писать индекс D и примем такие асимптотические анзацы для собственных пар:

$$\lambda_1^\varepsilon = \lambda_1^{j0} + \varepsilon^d \lambda_1' + \dots, \tag{58}$$

$$u_1^\varepsilon(x) = u_1^{j0}(x) + \varepsilon^d u_1'(x) + \varepsilon \chi_j(x) w_j'(\xi^j) + \varepsilon \chi_{j-1}(x) w_{j-1}'(\xi^{j-1}) + \dots \tag{59}$$

Здесь многоточие заменяет несущественные младшие асимптотические члены, причём тривиальные анзацы $u_1^\varepsilon(x) = \dots$ на ячейках ω_j с номерами $j \neq \mathbf{j}$ при формальном анализе не понадобятся. Поскольку λ_1^{j0} – первое собственное число задачи Дирихле в ω_j и нормированная в $L^2(\omega_j)$ собственная функция выбрана положительной, справедливы неравенства

$$A_j := \partial_z u_1^{j0}(x^j) < 0, \quad A_{j-1} := \partial_z u_1^{j0}(x^{j-1}) > 0. \tag{60}$$

Вспомнив, что $u_1^{\pm 10} = 0$, компенсируем скачки производной по z на отверстиях θ_j^ε и θ_{j-1}^ε при помощи слагаемых типа пограничного слоя

$$w_j'(\xi^j) = -\frac{1}{2} A_j \mathbf{w}_j(\xi^j), \quad w_{j-1}'(\xi^{j-1}) = \frac{1}{2} A_{j-1} \mathbf{w}_{j-1}(\xi^{j-1}), \tag{61}$$

где фигурируют построенные по решению (19) задачи (13), (13)_D и затухающие при $|\xi^j| \rightarrow +\infty$ функции

$$\mathbf{w}_j(\xi^j) = W_j(\xi^j) - \zeta^j \quad \text{при} \quad \zeta^j > 0, \quad \mathbf{w}_j(\xi^j) = W_j(\xi^j) + \zeta^j \quad \text{при} \quad \zeta^j < 0, \tag{62}$$

у которых скачок производной по z на $\theta_j(0)$ равен -2 . Учитывая поведение функций (62) при $\zeta^j \rightarrow \pm\infty$, унаследованное от решений Q_j задачи (17) (см. формулы (19) и (18)), собираем множители при ε^d в уравнении (2) на ячейке ω_j после подстановки в него анзацев (58) и (59). В результате приходим к задаче Дирихле

$$\begin{aligned} -\Delta_x u_j'(x) - \lambda_1^{j0} u_j'(x) &= \lambda_1^0 u_j^0(x) + f_j'(x), \quad x \in \omega_j, \\ u_j'(x) &= 0, \quad x \in \partial\omega_j, \end{aligned} \tag{63}$$

с индексом $j = \mathbf{j}$ и фрагментом правой части

$$f_j'(x) = \frac{1}{2} A_j M(\theta_j) \Psi_j(x) - \frac{1}{2} A_{j-1} M(\theta_{j-1}) \Psi_{j-1}(x), \tag{64}$$

где

$$\Psi_j(x) = ([\Delta_x, \chi_j(x)] + \lambda_1^{j0} \chi_j(x)) \partial_z \Phi(x - x^j). \tag{65}$$

Способ вывода формул (64) и (65) мало отличается от представленного в п. 3 ввиду соотношения $\partial_{\zeta^j} \Phi(\xi^j) = \varepsilon^{d-1} \partial_z \Phi(x - x^j)$ для выделенного в представлении (18) члена. Вместе с тем из-за иррегулярности $O(\mathbf{r}_j^{1-d})$ у функции (65) задача (63) с $j = \mathbf{j}$ не имеет решения в классе $H_0^1(\omega_j)$ при $d \geq 4$. На помощь приходит теория Кондратьева [20] (см. также монографии [2, 21] и др.), следуя которой введём весовое пространство Соболева $V_\beta^l(\omega_j)$ как пополнение линейного множества $C_c^\infty(\overline{\omega_j} \setminus \{x^j, x^{j-1}\})$ (бесконечно дифференцируемые функции с компактными носителями) по норме

$$\|g; V_\beta^l(\omega_j)\| = \left(\sum_{p=0}^l \|\mathbf{r}_j^{\beta-l+p} \nabla_x^p g; L_2(\omega_j)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Здесь $\nabla_x^p g$ – набор всех производных функции g порядка p , а $l \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ – показатели гладкости и веса. Подпространство функций $u \in V_\beta^1(\omega_j)$, обращающихся в нуль на $\partial\omega_j$, обозначим $V_{\beta,0}^1(\omega_j)$. Сопряжённое пространство $V_{\beta,0}^1(\omega_j)^*$ включено в $V_{1-\beta}^0(\omega_j)$, а оператор $B_\beta^j(\lambda) = -(\Delta_x + \lambda) : V_{\beta,0}^1(\omega_j) \rightarrow V_{\beta,0}^1(\omega_j)^*$ при $|\beta| < d/2$ наследует все основные свойства отображения $-(\Delta_x + \lambda) : H_0^1(\omega_j) \rightarrow H_0^1(\omega_j)^*$ и, более того, при $\beta = 0$ совпадает с

ним. Иными словами, в силу предположения (57) оператор $B_\beta^j(\lambda_1^{j0})$ – изоморфизм при $j \neq \mathbf{j}$, а $B_\beta^{\mathbf{j}}(\lambda_1^{\mathbf{j}0})$ – фредгольмово отображение с одномерными ядром и коядром, натянутыми на собственную функцию $w_1^{\mathbf{j}0}$. Все эти факты вытекают из общей теории, и их можно почерпнуть, например, из источников [4, гл. 1; 2, гл. 2; 22, § 2 и теорема 2.7].

Учтём, что $w_1^{\mathbf{j}0} \in V_{\beta,0}^1(\omega_j)$, $\Psi_j, \Psi_{j-1} \in V_{1-\beta}^0(\omega_j)$ при $\beta \in (-d/2, 2 - d/2)$ и

$$\int_{\mathbb{R}^d} (z - z^j + c)[\Delta_x, \chi_j(x)] \partial_z \Phi(x - x^j) dx = \int_{\mathbb{S}_R} (\Phi(x) \partial_{|x|} z - (z + c) \partial_z \Phi(x)) ds_x = 1. \quad (66)$$

В результате вытекающее из (64) и (65) условие разрешимости задачи (63) будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= \lambda_1' \|w_1^{\mathbf{j}0}; L^2(\omega_j)\|^2 = - \int_{\omega_j} w_1^{\mathbf{j}0}(x) (\Delta_x u_j'(x) + \lambda_1^{\mathbf{j}0} u_j'(x)) dx = \\ &= \int_{\omega_j} w_1^{\mathbf{j}0}(x) f_j'(x) dx = -\frac{1}{4} (M(\theta_j) |\partial_z w_1^{\mathbf{j}0}(x^{\mathbf{j}})|^2 + M(\theta_{j-1}) |\partial_z w_1^{\mathbf{j}0}(x^{\mathbf{j}-1})|^2). \end{aligned} \quad (67)$$

Появление дроби 1/4 на месте дроби 1/2 обусловлено интегрированием по полусфере, а не по сфере, как в формуле (66). В ситуациях $\mathbf{j} = 1$ или $\mathbf{j} = J$ (ω_j – концевая ячейка) следует положить $M(\theta_{j-1}) = 0$ или $M(\theta_j) = 0$ соответственно (отверстий θ_0^ε и θ_J^ε нет), а значит, в правой части равенства (67) остаётся лишь одно слагаемое. Похожий, но частный случай при помощи иного подхода рассматривался в публикации [3], а именно, $J = 2$ и $\mathbf{j} = 1$, а ω_1 и ω_2 – соосные цилиндры с одинаковым сечением.

Итак, получена формула (67) для поправки в представлении (58) первого собственного числа λ_{N1}^ε задачи (2), $(2)_D$, причём в дополнение к пограничным слоям (61) поправка регулярного типа u_1' в анзаце (59) для собственной функции u_{D1}^ε находится из ставшей по причине (67) разрешимой задачи (63). Очевидное неравенство $\lambda_1' < 0$ согласуется с простым следствием $\lambda_{D1}^\varepsilon < \lambda_{D1}^{\mathbf{j}0}$ минимального принципа (см., например, [19, теорема 10.2.1]).

Сильные особенности $O(\mathbf{r}_j^{3-d})$ при $d > 3$ у поправки u_j' регулярного типа привносят новые трудности в процедуру обоснования формальной асимптотики, устраняемые в методе [4] введением в почти собственную спектральную пару младших асимптотических членов. Сформулируем результат, однако для сокращения объёма статьи исключим описание не нужных по существу конструкций, т.е. ограничимся при доказательстве случаями $d = 2$ и $d = 3$. При больших размерностях $d \geq 4$ для проверки доказываемой далее оценки (68) нетрудно приспособить упоминающуюся общую схему оправдания асимптотики из монографии [4].

Теорема 3. При ограничениях (57) и $d \geq 2$ найдутся такие положительные константы ε_1 и c_1, C_1 , что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ для первого собственного числа λ_{D1}^ε задачи (2), $(2)_D$ справедливо неравенство

$$|\lambda_{D1}^\varepsilon - \lambda_{D1}^{\mathbf{j}0} - \varepsilon^d \lambda_1'| \leq c_1 \varepsilon^d \alpha_d(\varepsilon), \quad (68)$$

и других собственных чисел на интервале $(0, \Lambda_D - C_1 \varepsilon^d)$ нет. Здесь $\lambda_1' > 0$ – величина (57), $\Lambda_D = \min\{\lambda_{D1+\delta_j}^{\mathbf{j}0} \mid j = \overline{1, J}\} > 0$ и $\alpha_2(\varepsilon) = \varepsilon(1 + |\ln \varepsilon|)$, $\alpha_3(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}$, но $\alpha_d(\varepsilon) = \varepsilon$ при $d \geq 4$.

Доказательство следует той же схеме, что и в п. 3. Укажем заменители леммы 3 и вычислений, приведших к теореме 1.

Сначала обратимся к смешанным краевым задачам

$$\begin{aligned} -\Delta_x v^{j\varepsilon}(x) &= \mu^{j\varepsilon} v^{j\varepsilon}(x), \quad x \in \omega_j, \\ v^{j\varepsilon}(x) &= 0, \quad x \in \partial\omega_j \setminus (\overline{\theta_j^\varepsilon} \cup \overline{\theta_{j-1}^\varepsilon}), \quad \partial_z v^{j\varepsilon}(x) = 0, \quad x \in (\theta_j^\varepsilon \cup \theta_{j-1}^\varepsilon). \end{aligned} \quad (69)$$

Как известно (см. [7–9] и др.) и нетрудно проверить при помощи метода [4, гл. 5; 9; 13], для первых двух собственных чисел задачи (69) верны оценки

$$|\mu_q^{j\varepsilon} - \lambda_{Dq}^{j0}| \leq c_q^j \varepsilon^d \quad \text{при } q = 1, 2 \quad \text{и } \varepsilon \in (0, \varepsilon_k^j] \tag{70}$$

с некоторыми положительными c_k^j и ε_k^j . Таким образом, применив неравенства Фридрихса–Пуанкаре на ячейках $\omega_1, \dots, \omega_J$, обнаруживаем, что для функции $\psi^\varepsilon \in \mathcal{H}_D^\varepsilon$ лишь при одном условии ортогональности $(\psi^\varepsilon, v_1^{j\varepsilon})_{\omega_j} = 0$ выполнено неравенство

$$\|\nabla_x \psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \geq \min\{\mu_{1+\delta_{j,j}}^{j\varepsilon} \mid j = \overline{1, J}\} \|\psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2.$$

Осталось применить оценки (70) и соотношение (32) с индексами $m = 2$ и $M = D$, т.е. второе утверждение теоремы проверено аналогично лемме 2.

Введём в пространстве $\mathcal{H}_D^\varepsilon$ скалярное произведение (35) и оператор (36), а в качестве “почти собственной” пары возьмём

$$\mathbf{k}^\varepsilon = (1 + \lambda_{D1}^{j0} + \varepsilon^d \lambda_1')^{-1}, \quad \mathbf{v}^\varepsilon = \|\mathbf{u}^\varepsilon; \mathcal{H}_D^\varepsilon\|^{-1} \mathbf{u}^\varepsilon, \tag{71}$$

где

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x) = u_{D1}^{j0}(x) + \varepsilon^d X^\varepsilon(x) \sum_{j=\mathbf{j}-1}^{\mathbf{j}+1} u'_j(x) + \varepsilon \sum_{j=\mathbf{j}-1}^{\mathbf{j}} \chi_j(x) w'_j(\xi^j). \tag{72}$$

Здесь собственная функция u_{D1}^{j0} продолжена нулём с ячейки ω_j на всю область Ω^ε . Кроме того, использованы те же срезки, что и в п. 3, функции w'_j взяты из (61), а функции u'_j – решения задач (63), однако при $j = \mathbf{j}+1$ и $j = \mathbf{j}-1$, во-первых, $u'_j = 0$ и, во-вторых, $f'_{\mathbf{j}+1}$ или $f'_{\mathbf{j}-1}$ содержат только первое или только второе слагаемое из формулы (64) соответственно. Подчеркнём, что последние две задачи однозначно разрешимы согласно предположению (57). Далее индекс D не пишем. Как и ранее, при $\mathbf{j} = 1$ и $\mathbf{j} = J$ суммы в (72) укорачиваются.

Как уже упоминалось, считаем, что $d = 2, 3$, а значит, $u'_j \in H^1(\omega_j)$, $j = \mathbf{j}, \mathbf{j} \pm 1$, поскольку из результатов работ [20, 23] (см. также [4, гл. 1; 2, гл. 3]) следует, что в окрестностях точек $x^{\mathbf{j}}$ и $x^{\mathbf{j}-1}$ на прямых участках границы $\partial\omega_j$ верны такие неравенства:

$$\begin{aligned} |u'_j(x)| + \mathbf{r}_j |\nabla_x u'_j(x)| &\leq c_j \quad \text{при } d = 3, \\ |u'_j(x)| + \mathbf{r}_j |\nabla_x u'_j(x)| &\leq c_j \mathbf{r}_j (1 + |\ln \mathbf{r}_j|) \quad \text{при } d = 2. \end{aligned} \tag{73}$$

Сразу же заметим, что вместо оценки (42) выполнена оценка

$$|\langle \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon \rangle - 1| \leq c \int_{\Omega^0} \left(\left(1 + \varepsilon^d + \varepsilon \sum_{j=\mathbf{j}-1}^{\mathbf{j}} \frac{\chi(r_j)}{(1 + \varepsilon r_j)^{d-1}} \right)^2 - 1 \right) dx \leq C \varepsilon^d. \tag{74}$$

Величину h , определённую в (37), для пары (71) преобразуем аналогично (43) и получим в силу (71) и (74) неравенство

$$h \leq c \sup |(\nabla_x \mathbf{u}^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} - \varepsilon^{d-2} \lambda'_k(\mathbf{u}^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}|. \tag{75}$$

Выражение под знаком модуля представим как сумму скалярных произведений

$$\begin{aligned} I_0^u(\psi^\varepsilon) &= (\nabla_x u_1^{j0}, \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\omega_j} - \lambda_1^{j0}(u_1^{j0}, \psi^\varepsilon)_{\omega_j}, \quad I_0^{u\lambda}(\psi^\varepsilon) = \varepsilon^d \lambda_1'(u_1^{j0}, \psi^\varepsilon)_{\omega_j}, \\ I_j^u(\psi^\varepsilon) &= \varepsilon^d (\nabla_x (X^\varepsilon u'_j), \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\omega_j} - \varepsilon^d \lambda_1^{j0}(X^\varepsilon u'_j, \psi^\varepsilon)_{\omega_j}, \quad I_j^{u\lambda}(\psi^\varepsilon) = \varepsilon^{2d} \lambda_1'(X^\varepsilon u'_j, \psi^\varepsilon)_{\omega_j}, \quad j = \mathbf{j}, \mathbf{j} \pm 1, \\ I_j^w(\psi^\varepsilon) &= \varepsilon (\nabla_x (\chi_j w'_j), \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\omega_j \cup \omega_{j+1}}, \quad I_j^{w\lambda}(\psi^\varepsilon) = \varepsilon (\lambda_1^{j0} + \varepsilon^d \lambda_1') (\chi_j w'_j, \psi^\varepsilon)_{\omega_j \cup \omega_{j+1}}, \quad j = \mathbf{j} - 1, \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Для главного u_1^{j0} и поправочных u'_j членов регулярного типа верны соотношения

$$\begin{aligned} I_0^u(\psi^\varepsilon) &= (\partial_z u_1^{j0}, \psi^\varepsilon)_{\theta_j^\varepsilon} - (\partial_z u_1^{j0}, \psi^\varepsilon)_{\theta_{j-1}^\varepsilon}, \quad |I_0^{u\lambda}(\psi^\varepsilon) - \varepsilon^d \lambda_1'(u_1^{j0}, X^\varepsilon \psi^\varepsilon)_{\omega_j}| \leq c \varepsilon^{d+1}, \\ |I_j^{u\lambda}(\psi^\varepsilon)| &\leq c \varepsilon^{2d} \|u'_j; L^2(\omega_j)\| \|\psi^\varepsilon; L^2(\omega_j)\| \leq C \varepsilon^{2d}. \end{aligned} \tag{76}$$

Интегралы по отверстиям θ_j^ε и θ_{j-1}^ε возникли потому, что пробная функция ψ^ε не обязательно обращается на них в нуль, а мажоранта во второй оценке (76) обусловлена тем, что $|u_1^{j0}(x)| \leq c\varepsilon$ на $\omega_j \cap \text{supp}(1 - X^\varepsilon)$ в силу условия Дирихле.

Отщепим от умноженных на ε членов (61) пограничного слоя (см. анзац (59)) величины

$$\varphi_j^\varepsilon(x) = -\varepsilon \frac{1}{2} (-1)^{j-j} A_j M(\theta_j) \partial_{\zeta_j} \Phi(\xi^j) = -\varepsilon \frac{1}{2} (-1)^{j-j} A_j M(\theta_j) \partial_z \Phi(x - x^j), \quad j = \mathbf{j} - 1, \mathbf{j}, \quad (77)$$

где A_j – коэффициенты (60). Вследствие соотношений (62) и (19), (18) остаток затухает как $O(|\xi^j|^{-d})$ и оказывается бесконечно малой $O(\varepsilon^d)$ на множестве $\text{supp}|\nabla_x \chi_j|$, удалённом от точки x^j . Таким образом,

$$\begin{aligned} & |I_j^{w\lambda}(\psi^\varepsilon) - \varepsilon \lambda_1^{j0}(\chi_j \varphi_j^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\omega_j \cup \omega_{j+1}}| \leq \\ & \leq c\varepsilon^{d+1} \left(\int_{\omega_j \cup \omega_{j+1}} \frac{(\varepsilon + r_j)^2 dx}{(\varepsilon + r_j)^{2d}} + \varepsilon^{2(d-1)} \int_{\omega_j \cup \omega_{j+1}} \frac{(\varepsilon + r_j)^2 dx}{(\varepsilon + r_j)^{2(d-1)}} \right)^{1/2} \times \\ & \times \|(\varepsilon + r_j)^{-1} \psi^\varepsilon; L^2(\omega_j \cup \omega_{j+1})\| \leq C\varepsilon^d \alpha_d(\varepsilon). \end{aligned} \quad (78)$$

Здесь выражения для множителей $\alpha_2(\varepsilon)$ и $\alpha_3(\varepsilon)$ указаны в формулировке теоремы, а весовая норма пробной функции ψ^ε обеспечена неравенством (44), теряющим своё отношение к неравенству Харди при $d = 2$, но справедливым вследствие неравенств Фридрихса по угловой переменной $\phi \in (0, \pi)$ и в $R\varepsilon$ -окрестностях точек $x^{\mathbf{j}}$ и $x^{\mathbf{j}-1}$ благодаря краевому условию Дирихле на $\Theta_{\mathbf{j}} \setminus \overline{\theta_{\mathbf{j}}^\varepsilon}$ и $\Theta_{\mathbf{j}-1} \setminus \overline{\theta_{\mathbf{j}-1}^\varepsilon}$.

По тем же причинам, переводя срезку X^ε от u'_j к ψ^ε , обнаруживаем, что при $j = \mathbf{j}, \mathbf{j} \pm 1$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} & |I_j^u(\psi^\varepsilon) - \varepsilon^d (\nabla_x u'_j, \nabla_x (X^\varepsilon \psi^\varepsilon))_{\omega_j} - \lambda_1^{j0}(u'_j, X^\varepsilon \psi^\varepsilon)_{\omega_j}| \leq \\ & \leq c\varepsilon^{d-1} \left(\int_{\text{supp}|\nabla_x X^\varepsilon|} (|u'_j(x)|^2 + \mathbf{r}_j^2 |\nabla_x u'_j(x)|^2) dx \right)^{1/2} \|\psi^\varepsilon; H^1(\Omega^\varepsilon)\| \leq c\varepsilon^d \alpha_d(\varepsilon), \end{aligned} \quad (79)$$

в котором использованы оценки (73) и выполнено интегрирование. Подчеркнём, что при $d > 3$ нарушены именно оценки (73) и (79) из-за больших сингулярностей функций u'_j , однако привлечение младших асимптотических членов по схеме [4] устраняет это препятствие в доказательстве.

Наконец, учитывая, что $w'_j \in H_{\text{loc}}^1(\overline{\Xi^j})$ – гармоническая функция в полупространствах \mathbb{R}_\pm^d – обращается в нуль на $\partial \Xi^j$, но приобретает скачок производной на отверстии $\theta_j(0)$, при помощи изложенных выше соображений выводим, что

$$\begin{aligned} & |I_j^w(\psi^\varepsilon) - (\varphi_j^\varepsilon \nabla_x \chi_j, \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\omega_j \cup \omega_{j+1}} + (\nabla_x \varphi_j^\varepsilon, \psi^\varepsilon \nabla_x \chi_j)_{\omega_j \cup \omega_{j+1}} + (\partial_z u_1^{j0}, \psi^\varepsilon)_{\theta_j^\varepsilon}| \leq \\ & \leq c\varepsilon^{1+d} \|\psi^\varepsilon; H^1(\Omega^\varepsilon)\| \leq C\varepsilon^{1+d}. \end{aligned} \quad (80)$$

Закончим преобразования и подведём итог. Последние “лишние” члены из левых частей неравенства (80), $j = \mathbf{j}$ и $j = \mathbf{j} - 1$, взаимно уничтожаются с $I_0^u(\psi^\varepsilon)$ согласно первой формуле в (76). Оставшиеся “лишние” члены из (80) вместе с вычитаемыми под знаками модуля в (78) и (76) также превращаются в нуль, так как u'_j – решения задач (63) с правыми частями f'_j , а для функции (77) выполнено аналогичное (52) тождество. Следовательно, $h \leq c\varepsilon^d \alpha_d(\varepsilon)$, и лемма 3 доставляет собственное число κ^ε оператора \mathcal{K}^ε , расположенное в $c\varepsilon^d \alpha_d(\varepsilon)$ -окрестности точки \mathbf{k}^ε . Повторив выкладки (54), находим собственное число задачи (2), $(2)_D$ с асимптотикой (79). Поскольку по доказанному ранее других собственных чисел

на интервале $(0, \lambda_1^{j0} + C\varepsilon^d)$ нет, проверка первого утверждения теоремы также закончена. Теорема доказана.

Благодаря единственности собственного числа Дирихле на интервале $(0, \Lambda_D - C_1\varepsilon^d)$ вторая часть леммы 3 при доказательстве теоремы 3 не применялась. Вместе с тем, положив $h = c\varepsilon^d$ и $\mathbf{h} = (\Lambda_D - \lambda_1^{j0})/3$ в неравенстве (38) и присоединив слагаемые $\varepsilon^d X^\varepsilon u'_j$ из (72) к остатку (это нужно сделать из-за неопределённости в выборе u'_j и “плохой” мажоранты в неравенстве (75) для нормы функции \mathbf{u}^ε), получаем асимптотику собственной функции u_{D1}^ε .

Теорема 4. При ограничениях (57) и $d \geq 2$ найдутся такие положительные константы ε_2 и c_2 , что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ для первой собственной функции задачи (2), $(2)_D$, нормированной равенством (5), выполняется неравенство

$$\|u_{D1}^\varepsilon - u_{D1}^{j0} - \varepsilon(\chi_j w'_j + \chi_{j-1} w'_{j-1}); H^1(\Omega^\varepsilon)\| \leq c_2 \varepsilon^\tau, \quad \tau > 0. \tag{81}$$

Поскольку собственная функция u_{D1}^{j0} , продолженная нулём с ячейки ω_j на всю область Ω^ε , возмущена в (81) слагаемыми типа пограничного слоя, приобретающими порядок ε^{d-1} при удалении от точек x^j и x^{j-1} вовнутрь $\Omega^\varepsilon \setminus \omega_j$, теорема 4 как раз устанавливает свойство локализации собственной функции u_{D1}^ε . В отличие от теоремы 2 сама функция u_{D1}^{j0} принадлежит пространству $\mathcal{H}_D^\varepsilon = H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ и, поскольку $H^1(\omega_j)$ -нормы слагаемых типа пограничного слоя – величины $O(\varepsilon^{1+d/2})$, члены $\varepsilon \chi_j w'_j$ из неравенства (81) можно убрать, уменьшив, может быть, показатель $\tau > 0$.

5. Несколько замечаний. 1°. *Доступные обобщения.* Многие геометрические ограничения в работе введены исключительно для упрощения изложения. Так, лишь с понятными изменениями в выкладках и рассуждениях можно допустить перфорацию несколькими отверстиями, несвязные ячейки и косые или изломанные перегородки (рис. 2, а и б). Разработанные в монографиях [4, 5] методы допускают многие другие в некотором смысле усложнения объекта анализа, например, векторные краевые задачи, в том числе для систем уравнений теории упругости. Наконец, метод составных разложений позволяет построить и обосновать бесконечные асимптотические ряды для собственных чисел и функций.

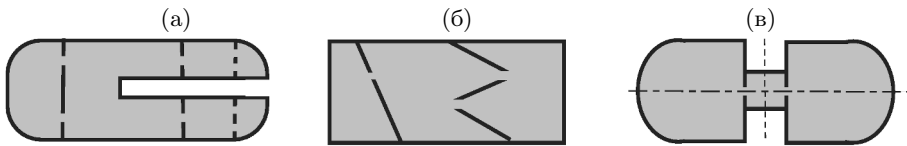


Рис. 2. Области с несвязными ячейками (а) и косыми или изломанными перегородками (б). Область, обладающая вращательной и зеркальной симметриями (в).

2°. *Локализация собственных функций.* Описанные конструкции и приёмы асимптотического анализа пригодны и для собственных чисел с любыми номерами. Пусть, например, при $d \geq 3$ собственное число λ_{Np}^{j0} задачи Неймана (13), $(13)_N$ с номером $\mathbf{j} \in \{1, \dots, J\}$ не принадлежит спектрам $(7)_N$ задач в других областях ω_j , т.е. при $j \neq \mathbf{j}$. Тогда, совместив рассуждения из п. 3 и п. 4, заключаем, что в последовательности $(4)_N$ имеется собственное число

$$\lambda_{Np}^\varepsilon = \lambda_{Np}^{j0} + \varepsilon^{d-2} \frac{1}{4} (C(\theta_j) |w_{Np}^{j0}(x^j)|^2 + C(\theta_{j-1}) |w_{Np}^{j0}(x^{j-1})|^2) + O(\varepsilon^{d-2+\alpha}), \quad \alpha > 0,$$

где \mathcal{P} – количество членов последовательностей $(7)_N$, строго меньших λ_{Np}^{j0} . Для соответствующей собственной функции выполнено похожее на (7) неравенство

$$\left\| u_{Np+1}^\varepsilon - u_{Np}^{j0} + \frac{1}{2} (\chi_j C(\theta_j) w_{Np}^{j0}(x^j) \mathbf{w}_j - \chi_{j-1} C(\theta_{j-1}) w_{Np}^{j0}(x^{j-1}) \mathbf{w}_{j-1}); H^1(\Omega^\varepsilon) \right\| \leq c\varepsilon^\tau, \quad \tau > 0.$$

Конечно же схему обоснования асимптотик приходится изменить, так как лемма 2 становится бесполезной, и вместо неё нужно проверить так называемую “теорему о сходимости”, а сильные сингулярности, обсуждавшиеся перед формулировкой теоремы 3, возникают не только в задаче Дирихле, но и в задаче Неймана при $\lambda_{Np}^{j0} \neq 0$.

Итак, замеченная в [3] локализация собственной функции не является прерогативой первой собственной функции задачи Дирихле. На самом деле локализация обусловлена лишь тем обстоятельством, что какое-то число является собственным для одной и только для одной из предельных задач (13), $(13)_D$ и (13) , $(13)_N$.

3°. *Кратное собственное число задачи Дирихле.* Предположим, что $\lambda^0 := \lambda_{D1}^{j0} = \dots = \lambda_{D1}^{j0}$ (например, Ω – цилиндр $\varpi \times (0, J) \subset \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ и $z^p = p$) и подчиним собственные функции u_{D1}^{j0} условиям нормировки (9). Тогда главный член асимптотики собственных функций u_{Dk}^ε , отвечающих собственным числам

$$\lambda_{Dk}^\varepsilon = \lambda^0 - \varepsilon^d \lambda'_k + \dots, \quad k = \overline{1, J}, \quad (82)$$

задачи (2), $(2)_D$, имеет вид $u_k^0(x) = a_j^k u_{D1}^{j0}(x)$ при $x \in \omega_j$, $j = \overline{1, J}$ (ср. (57) и (22)). Повторив асимптотический анализ из п. 4, видоизменённый согласно п. 3, получаем, что асимптотические поправки (30) в анзаце (82) суть собственные числа $J \times J$ -матрицы T , образованной 2×2 -блоками (20), в которых $C_j = M(\theta_j)(\partial_z u_{D1}^{j+10}(x^{j+1}))^{-2}$ и $\tau_j = \partial_z u_{D1}^{j0}(x^j) / \partial_z u_{D1}^{j+10}(x^{j-1})$. Обратим внимание на знак минус в правой части равенства в (82) (собственные числа уменьшаются) и вспомним неравенства (60) (знаменатели не обращаются в нуль).

4°. *Расщепление собственных чисел.* Найденные асимптотические формулы приводят к выводу: расщепление кратных собственных чисел в задачах Дирихле и Неймана происходит за счёт возмущений порядков ε^d при $d \geq 2$ и ε^{d-2} при $d > 2$ или $|\ln \varepsilon|^{-1}$ при $d = 2$ соответственно. Вместе с тем этот эффект может вообще отсутствовать или проявляться в членах $O(\varepsilon^q)$ с большими показателями q . Пусть, например, область Ω^ε обладает вращательной и зеркальной симметриями относительно оси z и плоскости $\{x : z = 0\}$ (рис. 2, в). Тогда, например, в задаче Неймана собственные функции u_{Np}^{j0} с номерами $p > 1$ и $j = 1, 3$ могут обратиться (и обращаются) в нуль при $z = 0$, а значит, в аналогичных (21) асимптотиках главная поправка λ'_p аннулируется. Кроме того, нетрудно проверить, что в случае $\lambda_{D1}^{20} > \lambda_{D1}^{10} = \lambda_{D1}^{30}$ несколько первых асимптотических членов в асимптотике собственных чисел λ_{D1}^ε и λ_{D2}^ε совпадают. Наконец, из-за симметрии в последовательностях (4) заведомо имеются кратные собственные числа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
2. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin; New York, 1994.
3. *Delitsyn A., Grebenkov D.S* Mode matching methods for spectral and scattering problems // Q. J. Mech. Appl. Math. 2018. V. 71. № 4. P. 537–580.
4. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenevski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. Bd. 1–2. Berlin, 1991.
5. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М., 1989.
6. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B.* Asymptotic Analysis of Fields in Multi-Structures. Oxford, 1999.
7. *Гадьльшин Р.Р.* Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной самосопряженной эллиптической задачи с малым параметром в граничных условиях // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 4. С. 640–652.
8. *Гадьльшин Р.Р.* Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия // Мат. заметки. 1992. Т. 52. № 4. С. 42–55.
9. *Гадьльшин Р.Р.* О возмущении спектра лапласиана при смене типа граничного условия на малой части границы // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1996. Т. 36. № 7. С. 77–88.
10. *Van-Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. New York; London, 1964.

11. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
12. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области // Проблемы мат. анализа. Вып. 8. Л., 1981. С. 72–153.
13. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1984. Т. 48. № 2. С. 347–371.
14. *Мазья В.Г., Назаров С.А.* Об особенностях решений задачи Неймана в конической точке // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30. № 3. С. 52–63.
15. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М., 1962.
16. *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. М., 1966.
17. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. II. М., 1976.
18. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М., 1988.
19. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л., 1980.
20. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московск. мат. о-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.
21. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J.* Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities. Providence, 1997.
22. *Назаров С.А.* Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
23. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.

Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 23.08.2020 г.
После доработки 09.12.2020 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.74

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НУЛЕВЫМ ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЧАСТИ И С НЕСКОЛЬКИМИ БЫСТРО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ЯДРАМИ

© 2021 г. А. А. Бободжанов, М. А. Бободжанова, В. Ф. Сафонов

Рассматривается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение с нулевым оператором дифференциальной части, интегральный оператор которого содержит несколько быстро изменяющихся ядер. Работа является продолжением исследований, проведённых ранее для уравнений с только одним быстро изменяющимся ядром. Доказано, что условия разрешимости соответствующих итерационных задач, как и в линейном случае, имеют вид не дифференциальных (как в задачах с ненулевым оператором дифференциальной части), а интегро-дифференциальных уравнений, причём на структуру этих уравнений существенное влияние оказывает нелинейность. В нелинейном случае могут возникнуть так называемые резонансы, которые значительно усложняют разработку соответствующего алгоритма метода регуляризации. В работе рассматривается нерезонансный случай.

DOI: 10.31857/S0374064121060054

Введение. В настоящей работе метод регуляризации Ломова [1, 2] обобщается на интегро-дифференциальные уравнения, интегральный оператор которых содержит несколько быстро изменяющихся ядер, имеющие вид

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = \sum_{j=1}^2 \int_0^t E_{\varepsilon}^j(t, s) K_j(t, s) y(s, \varepsilon) ds + \varepsilon f(y, t), \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где

$$E_{\varepsilon}^j(t, s) \equiv \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_j(\theta) d\theta\right).$$

Работа является продолжением исследований, проведённых ранее для уравнений, содержащих только одно быстро изменяющееся ядро. Основные идеи такого обобщения и тонкости, возникающие при разработке соответствующего алгоритма метода регуляризации, полностью просматриваются в случае двух быстро изменяющихся ядер, поэтому ради сокращения выкладок рассмотрен именно этот случай.

Аналогичная задача с одним спектральным значением ядра интегрального оператора изучалась в одной из работ авторов. В этом случае сингулярности в решении задачи описываются только спектральным значением ядра.

Следствием равенства нулю оператора дифференциальной части уравнения (1) является то, что в первом приближении асимптотика решения рассматриваемой задачи не содержит функции пограничного слоя, а сам предельный оператор является вырожденным (но не нулевым). При этом условия разрешимости соответствующих итерационных задач, как и в линейном случае, имеют вид не дифференциальных (как это было в задачах с ненулевым оператором дифференциальной части), а интегро-дифференциальных уравнений, причём на структуру этих уравнений существенное влияние оказывает нелинейность. Кроме того, в нелинейном случае могут возникнуть так называемые резонансы, которые значительно усложняют

разработку соответствующего алгоритма метода регуляризации. В настоящей работе рассматривается нерезонансный случай.

Задача (1) рассматривается при следующих предположениях:

- 1) $\mu_j(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C})$, $K_j(t, s) \in C^\infty(0 \leq s \leq t \leq T, \mathbb{C})$, $j = 1, 2$;
- 2) $\mu_1(t) \neq \mu_2(t)$ для любого $t \in [0, T]$;
- 3) $\mu_j(t) \neq 0$, $\operatorname{Re} \mu_j(t) \leq 0$ при всех $t \in [0, T]$, $j = 1, 2$;
- 4) $f(y, t)$ – многочлен*) по y , т.е. $f(y, t) = \sum_{m=0}^N f_m(t)y^m$ с коэффициентами

$$f_m(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}), \quad m = \overline{0, N}, \quad N < \infty;$$

5) спектральные значения $\mu_j(t)$, $j = 1, 2$, ядер интегрального оператора таковы, что при всех $t \in [0, T]$ выполняются неравенства ($m = (m_1, m_2)$ – мультииндекс, $|m| = m_1 + m_2$)

$$(m, \mu(t)) \equiv m_1\mu_1(t) + m_2\mu_2(t) \neq 0, \quad |m| \geq 2,$$

$$(m, \mu(t)) \neq \mu_j(t), \quad |m| \geq 2, \quad j \in 1, 2$$

(т.е. рассматривается нерезонансный случай).

Как сказано выше, работа является продолжением исследований [3, 4], проведённых ранее для одного быстро изменяющегося ядра. В отличие от линейного случая в правой части задачи (1) отсутствует неоднородность соответствующей линейной задачи. Наличие её в задаче повлекло бы за собой появление в асимптотическом решении членов с отрицательными степенями параметра ε , причём в нелинейном случае таких степеней оказалось бы бесконечно много, а соответствующее формальное асимптотическое решение имело бы вид ряда Лорана. Это сделало бы разработку алгоритма асимптотических решений проблематичной, поэтому в настоящей работе, стремясь оставаться в рамках асимптотических решений типа рядов Тейлора, мы исключили неоднородность. Переходя к разработке алгоритма, отметим, что всюду в работе векторы-столбцы записываются в фигурных скобках, а векторы-строки – в круглых скобках.

1. Эквивалентная интегро-дифференциальная система и её регуляризация. Введём две новые неизвестные функции

$$z_1 = \int_0^t E_\varepsilon^1(t, s)K_1(t, s)y(s, \varepsilon) ds, \quad z_2 = \int_0^t E_\varepsilon^2(t, s)K_2(t, s)y(s, \varepsilon) ds.$$

Дифференцируя их по t , будем иметь

$$\frac{dz_j}{dt} = K_j(t, t)y + \frac{\mu_j(t)}{\varepsilon} \int_0^t E_\varepsilon^j(t, s)K_j(t, s)y(s, \varepsilon) ds + \int_0^t E_\varepsilon^j(t, s) \frac{\partial K_j(t, s)}{\partial t} y(s, \varepsilon) ds,$$

т.е.

$$\varepsilon \frac{dz_j}{dt} = \mu_j(t)z_j + \varepsilon K_j(t, t)y + \varepsilon \int_0^t E_\varepsilon^j(t, s) \frac{\partial K_j(t, s)}{\partial t} y(s, \varepsilon) ds, \quad j = 1, 2.$$

Вместо (1) получаем систему

$$\varepsilon \frac{dw}{dt} = A(t)w + \varepsilon A_1(t)w + \varepsilon \int_0^t E_\varepsilon^1(t, s)G_1(t, s)w(s, \varepsilon) ds + \varepsilon \int_0^t E_\varepsilon^2(t, s)G_2(t, s)w(s, \varepsilon) ds + \varepsilon F(w, t),$$

$$w(0, \varepsilon) = \{y^0, 0, 0\}, \tag{2}$$

*) Функция $f(y, t)$ взята в виде многочлена ради упрощения выкладок. Можно считать, что $f(y, t)$ является аналитической по y , т.е. тогда в 4) $N = \infty$.

где $w = \{y, z_1, z_2\}$, $F(w, t) = \{f(y, t), 0, 0\}$, а матрицы $A(t)$, $A_1(t)$, $G_j(t, s)$ имеют вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mu_1(t) & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2(t) \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_1(t, t) & 0 & 0 \\ K_2(t, t) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_1(t, s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \partial K_1(t, s)/\partial t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_2(t, s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \partial K_2(t, s)/\partial t & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как спектр $\sigma(A(t)) = \{0, \mu_1(t), \mu_2(t)\}$ матрицы $A(t)$ имеет два ненулевых собственных значения $\mu_j(t)$, то регуляризацию задачи (2) проведём с помощью переменных

$$\tau_j = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_j(\theta) d\theta \equiv \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}, \quad j = 1, 2.$$

Для расширения $\tilde{w} = \{\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon), \tilde{z}_1(t, \tau, \varepsilon), \tilde{z}_2(t, \tau, \varepsilon)\}$ получим следующую систему:

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \mu_1(t) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau_1} + \mu_2(t) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau_2} - A(t)\tilde{w} - \varepsilon A_1(t)\tilde{w} -$$

$$- \varepsilon \sum_{j=1}^2 \int_0^t E_\varepsilon^j(t, s) G_j(t, s) \tilde{w}(s, \psi(s)/\varepsilon, \varepsilon) ds = \varepsilon F(\tilde{w}, t),$$

$$\tilde{w}(0, 0, \varepsilon) = \{y^0, 0, 0\}q \quad (\tau = (\tau_1, \tau_2), \quad \psi(t) = (\psi_1(t), \psi_1(t))). \tag{3}$$

Однако задачу (3) нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не проведена регуляризация интегрального оператора

$$J\tilde{w} \equiv J \left(\tilde{w}(t, \tau, \varepsilon) \Big|_{\substack{t=s \\ \tau=\psi(s)/\varepsilon}} \right) = \sum_{j=1}^2 \int_0^t E_\varepsilon^j(t, s) G_j(t, s) \tilde{w}(s, \psi(s)/\varepsilon, \varepsilon) ds.$$

Для регуляризации оператора $J\tilde{w}$ введём класс $M_\varepsilon = U|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}$, асимптотически инвариантный относительно оператора J (см. [1, с. 62]). При этом в качестве U возьмём пространство вектор-функций $w(t, \tau)$, представимых суммами вида

$$w(t, \tau) = w_0(t) + \sum_{|m|=1}^{N_w} w^{(m)}(t) e^{(m, \tau)}, \tag{4}$$

где $w_0(t), w^{(m)}(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^3)$, $|m| = \overline{1, N_w}$.

Покажем, что класс M_ε асимптотически инвариантен относительно оператора J . Для этого надо показать, что образ $Jw(t, \tau)$ на функциях вида (4) представим в виде ряда

$$Jw(t, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{1 \leq |m| \leq N_{w_k}} w_k^{(m)}(t) e^{(m, \tau)} + w_k^{(0)}(t) \right) \Big|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon},$$

сходящегося асимптотически к Jw (при $\varepsilon \rightarrow +0$) равномерно по $t \in [0, T]$. Подставляя ряд (4) в определение для $Jw(t, \tau)$, будем иметь

$$Jw(t, \tau) = \sum_{j=1}^2 \int_0^t E_\varepsilon^j(t, s) \sum_{|m|=1}^{N_w} G_j(t, s) w^{(m)}(s) E_\varepsilon^{[m]}(s) ds + \sum_{j=1}^2 \int_0^t E_\varepsilon^j(t, s) G_j(t, s) w_0(s) ds, \tag{5}$$

здесь и ниже принято обозначение

$$E_\varepsilon^{[m]}(s) \equiv \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (m, \mu(\theta)) d\theta\right).$$

Обозначим $w^{(1,0)}(t) \equiv w_1(t)$, $w^{(0,1)}(t) \equiv w_2(t)$ и преобразуем первую сумму в (5):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \int_0^t E_\varepsilon^j(t, s) \sum_{|m|=1}^{N_w} G_j(t, s) w^{(m)}(s) E_\varepsilon^{[m]}(s) ds &= \sum_{j=1}^2 \sum_{|m|=1}^{N_w} \int_0^t E_\varepsilon^j(t, s) E_\varepsilon^{[m]}(s) G_j(t, s) w^{(m)}(s) ds = \\ &= \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t, 0) \sum_{|m|=1}^{N_w} \int_0^t E_\varepsilon^{[m]}(s) E_\varepsilon^j(0, s) G_j(t, s) w^{(m)}(s) ds = \\ &= \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t, 0) \int_0^t E_\varepsilon^1(s, 0) E_\varepsilon^j(0, s) G_j(t, s) w_1(s) ds + \\ &+ \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t, 0) \int_0^t E_\varepsilon^2(s, 0) E_\varepsilon^j(0, s) G_j(t, s) w_2(s) ds + \\ &+ \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t, 0) \sum_{|m|=2}^{N_w} \int_0^t E_\varepsilon^{[m]}(s) E_\varepsilon^j(0, s) G_j(t, s) w^{(m)}(s) ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим по отдельности каждую из последних сумм:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t, 0) \int_0^t E_\varepsilon^1(s, 0) E_\varepsilon^j(0, s) G_j(t, s) w_1(s) ds \equiv \\ &\equiv E_\varepsilon^1(t, 0) \int_0^t G_1(t, s) w_1(s) ds + E_\varepsilon^2(t, 0) \int_0^t E_\varepsilon^1(s, 0) E_\varepsilon^2(0, s) G_2(t, s) w_1(s) ds, \\ S_2 &= \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t, 0) \int_0^t E_\varepsilon^2(s, 0) E_\varepsilon^j(0, s) G_j(t, s) w_2(s) ds \equiv \\ &\equiv E_\varepsilon^2(t, 0) \int_0^t G_2(t, s) w_2(s) ds + E_\varepsilon^1(t, 0) \int_0^t E_\varepsilon^2(s, 0) E_\varepsilon^1(0, s) G_1(t, s) w_2(s) ds, \\ S_3 &= \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t, 0) \sum_{|m|=2}^{N_w} \int_0^t E_\varepsilon^{[m]}(s) E_\varepsilon^j(0, s) G_j(t, s) w^{(m)}(s) ds. \end{aligned}$$

Первые слагаемые в полученных представлениях сумм S_1 и S_2 не нуждаются в регуляризации. Проведём регуляризацию вторых слагаемых в S_1 и S_2 , используя операцию интегрирования по частям:

$$E_\varepsilon^2(t, 0) \int_0^t E_\varepsilon^1(s, 0) E_\varepsilon^2(0, s) G_2(t, s) w_1(s) ds = \varepsilon E_\varepsilon^2(t, 0) \int_0^t \frac{G_2(t, s) w_1(s)}{\mu_1(s) - \mu_2(s)} d(E_\varepsilon^1(s, 0) E_\varepsilon^2(0, s)) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \varepsilon E_\varepsilon^2(t, 0) \left[\frac{G_2(t, t)w_1(t)}{\mu_1(t) - \mu_2(t)} E_\varepsilon^1(t, 0) E_\varepsilon^2(0, t) - \frac{G_2(t, 0)w_1(0)}{\mu_1(0) - \mu_2(0)} \right] - \\
 &\quad - \varepsilon E_\varepsilon^2(t, 0) \int_0^t E_\varepsilon^1(s, 0) E_\varepsilon^2(0, s) \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{G_2(t, s)w_1(s)}{\mu_1(s) - \mu_2(s)} \right) ds = \\
 &= \varepsilon \left[\frac{G_2(t, t)w_1(t)}{\mu_1(t) - \mu_2(t)} E_\varepsilon^1(t, 0) - \frac{G_2(t, 0)w_1(0)}{\mu_1(0) - \mu_2(0)} E_\varepsilon^2(t, 0) \right] - \\
 &\quad - \varepsilon E_\varepsilon^2(t, 0) \int_0^t E_\varepsilon^1(s, 0) E_\varepsilon^2(0, s) \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{G_2(t, s)w_1(s)}{\mu_1(s) - \mu_2(s)} \right) ds; \\
 E_\varepsilon^1(t, 0) \int_0^t E_\varepsilon^2(s, 0) E_\varepsilon^1(0, s) G_1(t, s) w_2(s) ds &= \varepsilon E_\varepsilon^1(t, 0) \int_0^t \frac{G_1(t, s)w_2(s)}{\mu_2(s) - \mu_1(s)} d(E_\varepsilon^2(s, 0) E_\varepsilon^1(0, s)) = \\
 &= \varepsilon \left[\frac{G_1(t, t)w_2(t)}{\mu_2(t) - \mu_1(t)} E_\varepsilon^2(t, 0) - \frac{G_1(t, 0)w_2(0)}{\mu_2(0) - \mu_1(0)} E_\varepsilon^1(t, 0) \right] - \\
 &\quad - \varepsilon E_\varepsilon^1(t, 0) \int_0^t E_\varepsilon^2(s, 0) E_\varepsilon^1(0, s) \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{G_1(t, s)w_2(s)}{\mu_2(s) - \mu_1(s)} \right) ds.
 \end{aligned}$$

Переходим к сумме S_3 . Проводя аналогичные преобразования, будем иметь

$$\begin{aligned}
 S_3 &= \varepsilon \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t, 0) \sum_{|m|=2}^{N_w} \int_0^t \frac{G_j(t, s)w^{(m)}(s)}{(m, \mu(s)) - \mu_j(s)} d(E_\varepsilon^{[m]}(s) E_\varepsilon^j(0, s)) = \\
 &= \varepsilon \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t, 0) \sum_{|m|=2}^{N_w} \left[\frac{G_j(t, t)w^{(m)}(t)}{(m, \mu(t)) - \mu_j(t)} E_\varepsilon^{[m]}(t) E_\varepsilon^j(0, t) - \frac{G_j(t, 0)w^{(m)}(0)}{(m, \mu(0)) - \mu_j(0)} \right] - \\
 &\quad - \varepsilon \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t, 0) \sum_{|m|=2}^{N_w} \int_0^t E_\varepsilon^{[m]}(s) E_\varepsilon^j(0, s) \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{G_j(t, s)w^{(m)}(s)}{(m, \mu(s)) - \mu_j(s)} \right) ds = \\
 &= \varepsilon \sum_{j=1}^2 \sum_{|m|=2}^{N_w} \left[\frac{G_j(t, t)w^{(m)}(t)}{(m, \mu(t)) - \mu_j(t)} E_\varepsilon^{[m]}(t) - \frac{G_j(t, 0)w^{(m)}(0)}{(m, \mu(0)) - \mu_j(0)} E_\varepsilon^j(t, 0) \right] - \\
 &\quad - \varepsilon \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t, 0) \sum_{|m|=2}^{N_w} \int_0^t E_\varepsilon^{[m]}(s) E_\varepsilon^j(0, s) \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{G_j(t, s)w^{(m)}(s)}{(m, \mu(s)) - \mu_j(s)} \right) ds.
 \end{aligned}$$

В итоге первая сумма в (5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^2 \int_0^t E_\varepsilon^j(t, s) \sum_{|m|=1}^{N_w} G_j(t, s)w^{(m)}(s) E_\varepsilon^{[m]}(s) ds = \\
 &= E_\varepsilon^1(t, 0) \int_0^t G_1(t, s)w_1(s) ds + E_\varepsilon^2(t, 0) \int_0^t G_2(t, s)w_2(s) ds +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon \left[\frac{G_2(t, t)w_1(t)}{\mu_1(t) - \mu_2(t)} E_\varepsilon^1(t, 0) - \frac{G_2(t, 0)w_1(0)}{\mu_1(0) - \mu_2(0)} E_\varepsilon^2(t, 0) \right] - \\
& - \varepsilon E_\varepsilon^2(t, 0) \int_0^t E_\varepsilon^1(s, 0) E_\varepsilon^2(0, s) \left(\frac{\partial G_2(t, s)w_1(s)}{\partial s \mu_1(s) - \mu_2(s)} \right) ds + \\
& + \varepsilon \left[\frac{G_1(t, t)w_2(t)}{\mu_2(t) - \mu_1(t)} E_\varepsilon^2(t, 0) - \frac{G_1(t, 0)w_2(0)}{\mu_2(0) - \mu_1(0)} E_\varepsilon^1(t, 0) \right] - \\
& - \varepsilon E_\varepsilon^1(t, 0) \int_0^t E_\varepsilon^2(s, 0) E_\varepsilon^1(0, s) \left(\frac{\partial G_1(t, s)w_2(s)}{\partial s \mu_2(s) - \mu_1(s)} \right) ds + \\
& + \varepsilon \sum_{j=1}^2 \sum_{|m|=2}^{N_w} \left[\frac{G_j(t, t)w^{(m)}(t)}{(m, \mu(t)) - \mu_j(t)} E_\varepsilon^{[m]}(t) - \frac{G_j(t, 0)w^{(m)}(0)}{(m, \mu(0)) - \mu_j(0)} E_\varepsilon^j(t, 0) \right] - \\
& - \varepsilon \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t, 0) \sum_{|m|=2}^{N_w} \int_0^t E_\varepsilon^{[m]}(s) E_\varepsilon^j(0, s) \left(\frac{\partial G_j(t, s)w^{(m)}(s)}{\partial s (m, \mu(s)) - \mu_j(s)} \right) ds.
\end{aligned}$$

Преобразуем теперь вторую сумму в (5), используя операцию интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^2 \int_0^t E_\varepsilon^j(t, s) G_j(t, s) w_0(s) ds = \varepsilon \sum_{j=1}^2 \int_0^t \frac{G_j(t, s)w_0(s)}{-\mu_j(s)} dE_\varepsilon^j(t, s) = \\
& = \varepsilon \sum_{j=1}^2 \frac{G_j(t, s)w_0(s)}{-\mu_j(s)} E_\varepsilon^j(t, s) \Big|_{s=0}^{s=t} - \varepsilon \sum_{j=1}^2 \int_0^t E_\varepsilon^j(t, s) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{G_j(t, s)w_0(s)}{-\mu_j(s)} \right) ds = \\
& = \varepsilon \left[\sum_{j=1}^2 \frac{G_j(t, t)w_0(t)}{-\mu_j(t)} - \frac{G_j(t, 0)w_0(0)}{-\mu_j(0)} E_\varepsilon^j(t, 0) \right] - \varepsilon \sum_{j=1}^2 \int_0^t E_\varepsilon^j(t, s) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{G_j(t, s)w_0(s)}{-\mu_j(s)} \right) ds.
\end{aligned}$$

Объединяя полученные результаты, будем иметь

$$\begin{aligned}
J(t, \varepsilon) & = \sum_{j=1}^2 \int_0^t E_\varepsilon^j(t, s) G_j(t, s) w_0(s) ds + \sum_{j=1}^2 \int_0^t E_\varepsilon^j(t, s) \sum_{|m|=1}^{N_w} G_j(t, s) w^{(m)}(s) E_\varepsilon^{[m]}(s) ds = \\
& = E_\varepsilon^1(t, 0) \int_0^t G_1(t, s) w_1(s) ds + E_\varepsilon^2(t, 0) \int_0^t G_2(t, s) w_2(s) ds + \\
& + \varepsilon \left[\frac{G_2(t, t)w_1(t)}{\mu_1(t) - \mu_2(t)} E_\varepsilon^1(t, 0) - \frac{G_2(t, 0)w_1(0)}{\mu_1(0) - \mu_2(0)} E_\varepsilon^2(t, 0) \right] - \\
& - \varepsilon E_\varepsilon^2(t, 0) \int_0^t E_\varepsilon^1(s, 0) E_\varepsilon^2(0, s) \left(\frac{\partial G_2(t, s)w_1(s)}{\partial s \mu_1(s) - \mu_2(s)} \right) ds + \\
& + \varepsilon \left[\frac{G_1(t, t)w_2(t)}{\mu_2(t) - \mu_1(t)} E_\varepsilon^2(t, 0) - \frac{G_1(t, 0)w_2(0)}{\mu_2(0) - \mu_1(0)} E_\varepsilon^1(t, 0) \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \varepsilon E_\varepsilon^1(t, 0) \int_0^t E_\varepsilon^2(s, 0) E_\varepsilon^1(0, s) \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{G_1(t, s) w_2(s)}{\mu_2(s) - \mu_1(s)} \right) ds + \\
 & + \varepsilon \sum_{j=1}^2 \sum_{|m|=2}^{N_w} \int_0^t \left[\frac{G_j(t, t) w^{(m)}(t)}{(m, \mu(t)) - \mu_j(t)} E_\varepsilon^{[m]}(t) - \frac{G_j(t, 0) w^{(m)}(0)}{(m, \mu(0)) - \mu_j(0)} E_\varepsilon^j(t, 0) \right] - \\
 & - \varepsilon \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t, 0) \sum_{|m|=2}^{N_w} \int_0^t E_\varepsilon^{[m]}(s) E_\varepsilon^j(0, s) \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{G_j(t, s) w^{(m)}(s)}{(m, \mu(s)) - \mu_j(s)} \right) ds + \\
 & + \varepsilon \left[\sum_{j=1}^2 \frac{G_j(t, t) w_0(t)}{-\mu_j(t)} - \frac{G_j(t, 0) w_0(0)}{-\mu_j(0)} E_\varepsilon^j(t, 0) \right] - \varepsilon \sum_{j=1}^2 \int_0^t E_\varepsilon^j(t, s) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{G_j(t, s) w_0(s)}{-\mu_j(s)} \right) ds.
 \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс далее, приходим к разложению

$$\begin{aligned}
 Jw(t, \tau) &= E_\varepsilon^1(t, 0) \int_0^t G_1(t, s) w_1(s) ds + E_\varepsilon^2(t, 0) \int_0^t G_2(t, s) w_2(s) ds + \\
 & + \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \varepsilon^{\nu+1} \{ [(I_{12}^\nu(G_1(t, s) w_2(s)))_{s=t} E_\varepsilon^2(t, 0) - (I_{12}^\nu(G_1(t, s) w_2(s)))_{s=0} E_\varepsilon^1(t, 0)] + \\
 & + [(I_{21}^\nu(G_2(t, s) w_1(s)))_{s=t} E_\varepsilon^1(t, 0) - (I_{21}^\nu(G_2(t, s) w_1(s)))_{s=0} E_\varepsilon^2(t, 0)] + \\
 & + \sum_{j=1}^2 [(I_{j0}^\nu(G_j(t, s) w_0(s)))_{s=t} - (I_{j0}^\nu(G_j(t, s) w_0(s)))_{s=0} E_\varepsilon^j(t, s)] + \\
 & + \sum_{j=1}^2 \sum_{|m|=2}^{N_w} [(I_{m,j}^\nu(G_j(t, s) w^{(m)}(s)))_{s=t} E_\varepsilon^{[m]}(t) - (I_{m,j}^\nu(G_j(t, s) w^{(m)}(s)))_{s=0} E_\varepsilon^j(t, 0)] \}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

где введены операторы

$$\begin{aligned}
 I_{12}^0 &= \frac{1}{\mu_2(s) - \mu_1(s)}, \quad I_{12}^\nu = \frac{1}{\mu_2(s) - \mu_1(s)} \frac{\partial}{\partial s} I_{12}^{\nu-1}, \quad I_{21}^0 = \frac{1}{\mu_1(s) - \mu_2(s)}, \\
 I_{21}^\nu &= \frac{1}{\mu_1(s) - \mu_2(s)} \frac{\partial}{\partial s} I_{21}^{\nu-1}, \quad I_{m,j}^0 = \frac{1}{(m, \mu(s)) - \mu_j(s)}, \quad I_{m,j}^\nu = \frac{1}{(m, \mu(s)) - \mu_j(s)} \frac{\partial}{\partial s} I_{m,j}^{\nu-1}, \\
 I_{j0}^0 &= \frac{1}{-\mu_j(s)}, \quad I_{j0}^\nu = \frac{1}{-\mu_j(s)} \frac{\partial}{\partial s} I_{j0}^{\nu-1}, \quad j = 1, 2, \quad |m| = 2, 3, \dots, \quad \nu = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

При этом нетрудно показать (см. [5, с. 294]), что ряд справа в (6) сходится к функции $Jw(t, \varepsilon)$ (при $\varepsilon \rightarrow +0$) равномерно по $t \in [0, T]$.

Введём операторы порядка (по ε) $R_m : U \rightarrow U$ равенствами

$$\begin{aligned}
 R_0 w(t, \tau) &= e^{\tau_1} \int_0^t G_1(t, s) w_1(s) ds + e^{\tau_2} \int_0^t G_2(t, s) w_2(s) ds, \\
 R_{\nu+1} w(t, \tau) &= (-1)^\nu \{ [(I_{12}^\nu(G_1(t, s) w_2(s)))_{s=t} e^{\tau_2} - (I_{12}^\nu(G_1(t, s) w_2(s)))_{s=0} e^{\tau_1}] + \\
 & + [(I_{21}^\nu(G_2(t, s) w_1(s)))_{s=t} e^{\tau_1} - (I_{21}^\nu(G_2(t, s) w_1(s)))_{s=0} e^{\tau_2}] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^2 [(I_{j0}^\nu(G_j(t, s)w_0(s)))_{s=t} - (I_{j0}^\nu(G_j(t, s)w_0(s)))_{s=0}e^{\tau_j}] + \\
 & + \sum_{j=1}^2 \sum_{|m|=2}^{N_w} [(I_{m,j}^\nu(G_j(t, s)w^{(m)}(s)))_{s=t}e^{(m,\tau)} - (I_{m,j}^\nu(G_j(t, s)w^{(m)}(s)))_{s=0}e^{\tau_j}], \quad \nu \geq 0, \quad (7)
 \end{aligned}$$

где $\tau = \psi(t)/\varepsilon$. Тогда образ $Jw(t, \tau)$ можно записать в виде

$$Jw(t, \tau) = R_0w(t, \tau) + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m+1} R_{m+1}w(t, \tau).$$

Проведём расширение оператора J на рядах вида

$$\tilde{w}(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(t, \tau) \quad (8)$$

с коэффициентами $w_k(t, \tau) \in U, k \geq 0$.

Определение 1. *Формальным расширением \tilde{J} оператора J на рядах вида (8) называется оператор*

$$\tilde{J}\tilde{w}(t, \tau, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu \sum_{s=0}^{\nu} R_{\nu-s}w_s(t, \tau).$$

Несмотря на то, что расширение \tilde{J} оператора J определено формально, им вполне можно пользоваться (см. ниже теорему 3) при построении асимптотического решения конечного порядка по ε . Теперь несложно записать регуляризованную (по отношению к (2)), задачу

$$\begin{aligned}
 L_\varepsilon \tilde{w} & \equiv \varepsilon \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \mu_1(t) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau_1} + \mu_2(t) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau_2} - A(t)\tilde{w} - \varepsilon A_1(t)\tilde{w} - \varepsilon \tilde{J}\tilde{w} = \varepsilon F(\tilde{w}, t), \\
 \tilde{w}(0, 0, \varepsilon) & = \{y^0, 0, 0\}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

2. Разрешимость итерационных задач. Подставляя ряд (8) в задачу (9) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем следующие итерационные задачи:

$$\begin{aligned}
 L_0 w_0(t, \tau) & \equiv \mu_1(t) \frac{\partial w_0}{\partial \tau_1} + \mu_2(t) \frac{\partial w_0}{\partial \tau_2} - A(t)w_0 = 0, \\
 w_0(0, 0) & = w^0; \quad (10_0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_0 w_1(t, \tau) & = -\frac{\partial w_0}{\partial t} + A_1(t)w_0 + F(w_0, t) + R_0 w_0, \\
 w_1(0, 0) & = 0; \quad (10_1)
 \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}
 L_0 w_k(t, \tau) & = -\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t} + A_1(t)w_{k-1} + P_k(w_0, \dots, w_{k-1}, t) + R_0 w_{k-1} + R_1 w_{k-2} + \dots + R_k w_{k-1}, \\
 w_k(0, 0) & = 0, \quad k \geq 1, \quad (10_k)
 \end{aligned}$$

где $P_k(w_0, w_1, \dots, w_{k-1}, t)$ – некоторый многочлен от w_0, \dots, w_{k-1} , линейный относительно w_{k-1} .

Переходя к формулировке теорем о нормальной и однозначной разрешимости итерационных задач (10_k), вычислим собственные векторы $\varphi_j(t)$ и $\chi_j(t)$ матриц $A(t)$ и $A^*(t)$ соответственно. Нетрудно проверить, что они имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \{1, 0, 0\}, \quad \varphi_1(t) = \left\{ 1/\mu_1(t), 1, 0 \right\}, \quad \varphi_2(t) = \left\{ 1/\mu_2(t), 0, 1 \right\}, \\ \chi_0(t) &= \left\{ 1, -1/\bar{\mu}_1(t), -1/\bar{\mu}_2(t) \right\}, \quad \chi_1(t) = \{0, 1, 0\}, \quad \chi_2(t) = \{0, 0, 1\}, \end{aligned}$$

причём векторы $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ соответствуют собственным значениям $\lambda_0(t) \equiv 0$, $\lambda_1(t) \equiv \mu_1(t)$, $\lambda_2(t) \equiv \mu_2(t)$ матрицы $A(t)$, а векторы $\chi_0(t)$, $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$ – собственным значениям $\lambda_0(t) \equiv 0$, $\lambda_1(t) \equiv \bar{\mu}_1(t)$, $\lambda_2(t) \equiv \bar{\mu}_2(t)$ матрицы $A^*(t)$ соответственно.

Каждая из итерационных систем (10_k) имеет вид

$$L_0 w(t, \tau) \equiv \mu_1(t) \frac{\partial w}{\partial \tau_1} + \mu_2(t) \frac{\partial w}{\partial \tau_2} - A(t)w = P(t, \tau), \tag{11}$$

где $P(t, \tau) = P_0(t) + P_1(t)e^{\tau_1} + P_2(t)e^{\tau_2} + \sum_{|m|=2}^{N_P} P^{(m)}(t)e^{(m, \tau)} \in U$.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1)–5) и $P(t, \tau) \in U$. Для того чтобы система (11) имела решение в пространстве U , необходимо и достаточно, чтобы* имели место тождества

$$(P_j(t), \chi_j(t)) \equiv 0, \quad j = 0, 1, 2, \quad t \in [0, T]. \tag{12}$$

Доказательство. Будем искать решение системы (11) в виде суммы (4). Подставляя (4) в (11), получаем равенство

$$\begin{aligned} &\mu_1(t)w_1(t)e^{\tau_1} + \sum_{|m|=2}^{N_w} \mu_1(t)m_1 w^{(m)}(t)e^{(m, \tau)} + \mu_2(t)w_2(t)e^{\tau_2} + \sum_{|m|=2}^{N_w} \mu_2(t)m_2 w^{(m)}(t)e^{(m, \tau)} - \\ &- A(t)w_0(t) - A(t)w_1(t)e^{\tau_1} - A(t)w_2(t)e^{\tau_2} - \sum_{|m|=2}^{N_w} A(t)w^{(m)}(t)e^{(m, \tau)} = \\ &= P_0(t) + P_1(t)e^{\tau_1} + P_2(t)e^{\tau_2} + \sum_{|m|=2}^{N_P} P^{(m)}(t)e^{(m, \tau)}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &-A(t)w_0(t) + [\mu_1(t)I - A(t)]e^{\tau_1} + [\mu_2(t)I - A(t)]e^{\tau_2} + \sum_{|m|=2}^{N_w} [(m, \mu(t)I - A(t))]w^{(m)}(t)e^{(m, \tau)} = \\ &= P_0(t) + P_1(t)e^{\tau_1} + P_2(t)e^{\tau_2} + \sum_{|m|=2}^{N_P} P^{(m)}(t)e^{(m, \tau)}, \end{aligned}$$

где I – единичная матрица.

В силу линейной независимости экспонент 1 , e^{τ_1} , e^{τ_2} , $e^{(m, \tau)}$ ($|m| \geq 2$) это равенство имеет место лишь при $N_w = N_P$. Приравнявая отдельно коэффициенты при одинаковых функциях $e^{(m, \tau)}$ и свободные члены, будем иметь

$$\begin{aligned} &[\mu_j(t)I - A(t)]w_j(t) = P_j(t) \quad (j = 1, 2), \\ &-A(t)w_0(t) = P_0(t), \\ &[(m, \mu(t))I - A(t)]w^{(m)}(t) = P^{(m)}(t), \quad 2 \leq |m| \leq N_P. \end{aligned} \tag{13}$$

*) Здесь и всюду далее через $(,)$ обозначено стандартное скалярное произведение в комплексном пространстве \mathbb{C}^3 .

Так как выполнено предположение 5) об отсутствии резонанса, то последняя система имеет единственное решение при каждом m ($2 \leq |m| \leq N_P$):

$$w^{(m)}(t) = [(m, \mu(t))I - A(t)]^{-1}P^{(m)}(t), \quad 2 \leq |m| \leq N_P. \tag{14}$$

Сделаем в первых трёх системах из (13) замены переменных $w_j(t) = \Phi(t)\xi_j$, $w_0(t) = \Phi(t)\eta$, $j = 1, 2$, где $\Phi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t))$ – матрица из собственных векторов оператора $A(t)$. Умножая полученные системы слева на $\Phi^{-1}(t)$ и учитывая, что $(\Phi^{-1}(t))^* = \chi(t) \equiv (\chi_0(t), \chi_1(t), \chi_2(t))$ – матрица из собственных векторов сопряжённого оператора $A^*(t)$, будем иметь

$$[\mu_j(t)I - \Lambda(t)]\xi_j(t) = \{(P_j(t), \chi_0(t)), (P_j(t), \chi_1(t)), (P_j(t), \chi_2(t))\}, \quad j = 1, 2,$$

$$-\Lambda\eta(t) = \{(P_0(t), \chi_0(t)), (P_0(t), \chi_1(t)), (P_0(t), \chi_2(t))\},$$

где $\Lambda(t) = \text{diag}(\mu_0(t), \mu_1(t), \mu_2(t)) \equiv \text{diag}(0, \mu_1(t), \mu_2(t))$. Запишем эти системы более подробно (аргумент t везде опускаем и обозначаем $\xi_j = \{\xi_j^1, \xi_j^2, \xi_j^3\}$, $\eta = \{\eta^1, \eta^2, \eta^3\}$):

$$\begin{pmatrix} \mu_j & 0 & 0 \\ 0 & \mu_j - \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_j - \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_j^1 \\ \xi_j^2 \\ \xi_j^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_j, \chi_0) \\ (P_j, \chi_1) \\ (P_j, \chi_2) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \tag{14_j}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_0, \chi_0) \\ (P_0, \chi_1) \\ (P_0, \chi_2) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Видим, что вторая строка матрицы системы (14₁) ($j = 1$) нулевая, поэтому для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество $(P_1(t), \chi_1(t)) \equiv 0$; при этом $\xi_1^2(t) \equiv \alpha_1(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ – произвольная скалярная функция. И аналогично, третья строка матрицы системы (14₂) ($j = 2$) нулевая, поэтому для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы имело место тождество $(P_2(t), \chi_2(t)) \equiv 0$; при этом $\xi_2^3(t) \equiv \alpha_2(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ – произвольная скалярная функция. Поскольку в системе (15) первая строка нулевая, то для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество $(P_0(t), \chi_0(t)) \equiv 0$; при этом $\eta^1(t) \equiv \alpha_0(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ – произвольная скалярная функция. Таким образом, для разрешимости систем (13) (а значит, и системы (11)) необходимо и достаточно выполнения условий (12). Теорема доказана.

Замечание 1. Если выполнены условия (12), то, как это видно из (14) и уравнений (14_j) и (15) (с учётом того, что $w_j(t) = \Phi(t)\xi_j$, $w_0(t) = \Phi(t)\eta$, $j = 1, 2$), система (11) имеет следующее решение в пространстве U :

$$w(t, \tau) = \left[\alpha_1(t)\varphi_1(t) + \frac{(P_1(t), \chi_0(t))}{\mu_1(t)}\varphi_0(t) + \frac{(P_1(t), \chi_2(t))}{\mu_1(t) - \mu_2(t)}\varphi_2(t) \right] e^{\tau_1} +$$

$$+ \left[\alpha_2(t)\varphi_2(t) + \frac{(P_2(t), \chi_0(t))}{\mu_2(t)}\varphi_0(t) + \frac{(P_2(t), \chi_1(t))}{\mu_2(t) - \mu_1(t)}\varphi_1(t) \right] e^{\tau_2} +$$

$$+ \left[\alpha_0(t)\varphi_0(t) + \frac{(P_0(t), \chi_1(t))}{-\mu_1(t)}\varphi_1(t) + \frac{(P_0(t), \chi_2(t))}{-\mu_2(t)}\varphi_2(t) \right] + \sum_{|m|=2}^{N_P} [(m, \mu(t))I - A(t)]^{-1}P^{(m)}(t)e^{(m, \tau)} \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^2 \left[\alpha_j(t)\varphi_j(t) + \sum_{k=0, k \neq j}^2 p_{jk}(t)\varphi_k(t) \right] e^{\tau_j} + \alpha_0(t)\varphi_0(t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^2 p_{0k}(t)\varphi_k(t) + \sum_{|m|=2}^{N_P} [(m, \mu(t))I - A(t)]^{-1}P^{(m)}(t)e^{(m, \tau)}, \tag{16}$$

где $\alpha_j(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ – произвольные функции, $p_{jk}(t) \equiv (P_j(t), \chi_k(t)) / (\mu_j(t) - \mu_k(t))$, $j, k = 0, 1, 2$.

Обозначим через $U^{(k)}$ подпространство пространства U однородных относительно e^{τ_1} , e^{τ_2} многочленов степени k :

$$z(t, u) = \sum_{|m|=k} z^{(m)}(t) e^{(m, \tau)}, \quad z^{(m)}(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^3), \quad |m| = k = 0, 1, 2, \dots,$$

с присоединённым к ним элементом $0 \equiv \sum_{|m|=k} 0 \cdot e^{(m, \tau)}$. В пространстве $U^{(k)}$ введём скалярное (при каждом $t \in [0, T]$) произведение

$$\begin{aligned} \langle w^{(k)}(t, u), z^{(k)}(t, u) \rangle &\equiv \left\langle \sum_{|m|=k} w^{(m)}(t) e^{(m, \tau)}, z^{(k)}(t) e^{(m, \tau)} \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|m|=k} (w^{(k)}(t), z^{(k)}(t)) = \sum_{|m|=k} (w^{(k)}(t))^T \cdot \overline{z^{(k)}(t)}. \end{aligned}$$

Если $w(t, \tau)$ – элемент (4) пространства U , то через $w^{(k)}(t, u)$ будем обозначать сумму его слагаемых, принадлежащую пространству $U^{(k)}$.

Рассмотрим систему (11) при дополнительных условиях

$$w(0, 0) = w^*,$$

$$\begin{aligned} \left\langle -\frac{\partial w^{(1)}}{\partial t} + A_1(t)w^{(1)} + R_0w^{(1)} + Q^{(1)}(t, \tau), \chi_j(t)e^{\tau_j} \right\rangle &\equiv 0, \quad j = 1, 2, \quad t \in [0, T]; \\ \left\langle -\frac{\partial w^{(0)}}{\partial t} + A_1(t)w^{(0)} + R_0w^{(0)} + Q^{(0)}(t, \tau), \chi_0(t) \right\rangle &\equiv 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{17}$$

где $Q(t, \tau) = Q_1(t)e^{\tau_1} + Q_2(t)e^{\tau_2} + Q_0(t) + \sum_{|m|=2}^{N_P} Q^{(m)}(t)e^{(m, \tau)} \in U$ – известная функция, $w^* \in \mathbb{C}^3$ – известный постоянный вектор.

Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1)–5) и вектор-функция $P(t, \tau) \in U$ удовлетворяет условиям (12). Тогда система (11) при дополнительных условиях (17) однозначно разрешима в пространстве U .

Доказательство. Так как выполнены условия (12), то система (11) имеет решение (16) в пространстве U , где функции $\alpha_j(t)$ пока произвольны. Подчинив решение (16) начальному условию $w(0, 0) = w^*$, получим равенство

$$\sum_{j=0}^2 \left[\alpha_j(0)\varphi_j(0) + \sum_{k=0, k \neq j}^2 p_{jk}(0)\varphi_k(0) \right] + \sum_{|m|=2}^{N_w} [(m, \mu(0))I - A(0)]^{-1} P^{(m)}(0) = w^*,$$

т.е.

$$\sum_{j=0}^2 \alpha_j(0)\varphi_j(0) = w_*, \tag{18}$$

где

$$w_* = w^* - \sum_{j=0}^2 \left[\sum_{k=0, k \neq j}^2 p_{jk}(0)\varphi_k(0) \right] - \sum_{|m|=2}^{N_w} [(m, \mu(0))I - A(0)]^{-1} P^{(m)}(0).$$

Умножая равенство (18) скалярно на $\chi_s(0)$, будем иметь

$$\alpha_s(0) = (w_*, \chi_s(0)), \quad s = 0, 1, 2. \tag{19}$$

Вычислим теперь выражения

$$-\frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} + A_1(t)w^{(k)} + R_0w^{(k)} + Q^{(k)}(t, \tau), \quad k = 0, 1, 2.$$

Поскольку в эти выражения не входят экспоненты измерения $|m| \geq 2$, то в решении (16) можно ограничиться суммой

$$\hat{w}(t, \tau) = \sum_{j=1}^2 \left[\alpha_j(t)\varphi_j(t) + \sum_{k=0, k \neq j}^2 p_{jk}(t)\varphi_k(t) \right] e^{\tau_j} + \alpha_0(t)\varphi_0(t) + \sum_{k=1}^2 p_{0k}(t)\varphi_k(t).$$

Учитывая определение в (7) оператора R_0 , будем иметь*)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} + A_1(t)\hat{w} + R_0\hat{w} + \hat{Q}(t, \tau) = & -\sum_{j=1}^2 \left[(\alpha_j(t)\varphi_j(t))^\bullet + \sum_{k=0, k \neq j}^2 (p_{jk}(t)\varphi_k(t))^\bullet \right] e^{\tau_j} - \\ & - (\alpha_0(t)\varphi_0(t))^\bullet + \sum_{k=1}^2 (p_{0k}(t)\varphi_k(t))^\bullet + \sum_{j=1}^2 \left[\alpha_j(t)A_1(t)\varphi_j(t) + \sum_{k=0, k \neq j}^2 p_{jk}(t)A_1(t)\varphi_k(t) \right] e^{\tau_j} + \\ & + \alpha_0(t)A_1(t)\varphi_0(t) + \sum_{k=1}^2 p_{0k}(t)A_1(t)\varphi_k(t) + e^{\tau_1} \int_0^t G_1(t, s) \left[\alpha_1(s)\varphi_1(s) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^2 p_{1k}(s)\varphi_k(s) \right] ds + \\ & + e^{\tau_2} \int_0^t G_2(t, s) \left[\alpha_2(s)\varphi_2(s) + \sum_{k=0}^1 p_{2k}(s)\varphi_k(s) \right] ds + \sum_{j=1}^2 Q_j(t)e^{\tau_j} + Q_0(t). \end{aligned}$$

Далее эту функцию надо подчинить условиям (17). Начнём с последнего условия в (17), т.е., что равносильно, с условия

$$\left\langle -\frac{\partial \hat{w}^{(0)}}{\partial t} + A_1(t)\hat{w}^{(0)} + R_0\hat{w}^{(0)} + Q^{(0)}(t, \tau), \chi_0(t) \right\rangle \equiv 0, \quad t \in [0, T].$$

Учитывая биортонормированность систем $\{\varphi_j(t)\}$ и $\{\chi_k(t)\}$, запишем это условие в виде

$$\dot{\alpha}_0(t) = (A_1(t)\varphi_0(t) - \dot{\varphi}_0(t), \chi_0(t))\alpha_0(t) + q_0(t), \quad (20)$$

где обозначено

$$q_0(t) \equiv \left(Q_0(t) - \sum_{k=1}^2 (p_{0k}(t)\varphi_k(t))^\bullet + \sum_{k=0}^1 p_{0k}(t)A_1(t)\varphi_k(t), \chi_0(t) \right).$$

Получено дифференциальное уравнение относительно функции $\alpha_0(t)$. В случае первых двух условий в (17) аналогично получим интегро-дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1(t) = & (A_1(t)\varphi_1(t) - \dot{\varphi}_1(t), \chi_1(t))\alpha_1(t) + \int_0^t (G_1(t, s)\varphi_1(s), \chi_1(t))\alpha_1(s) ds + q_1(t), \\ \dot{\alpha}_2(t) = & (A_1(t)\varphi_2(t) - \dot{\varphi}_2(t), \chi_2(t))\alpha_2(t) + \int_0^t (G_2(t, s)\varphi_2(s), \chi_2(t))\alpha_2(s) ds + q_2(t), \end{aligned} \quad (21)$$

*) Жирная точка означает дифференцирование по t .

где обозначено

$$q_1(t) \equiv (Q_1(t) - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^2 (p_{1k}(t)\varphi_k(t))^\bullet + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^2 p_{1k}(t)A_1(t)\varphi_k(t) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^2 \int_0^t p_{1k}(s)G_1(t, s)\varphi_k(s) ds, \chi_1(t)),$$

$$q_2(t) \equiv (Q_2(t) - \sum_{k=0}^1 (p_{2k}(t)\varphi_k(t))^\bullet + \sum_{k=0}^1 p_{2k}(t)A_1(t)\varphi_k(t) + \sum_{k=0}^1 \int_0^t p_{2k}(s)G_2(t, s)\varphi_k(s) ds, \chi_2(t)).$$

Присоединяя к уравнениям (20) и (21) начальные условия (19) и решая полученные начальные задачи, найдём однозначно функции $\alpha_j(t)$, а значит, однозначно вычислим в пространстве U решение (16) системы (11) при дополнительных условиях (17). Теорема доказана.

Решения итерационных задач $w_k(t, \tau) \in U$ находятся с помощью применения теорем 1 и 2. Покажем, как это можно сделать на примере первой итерационной задачи (10₀).

3. Построение решений итерационных задач. Рассмотрим первую итерационную задачу (10₀). Построим её решение, не используя выкладки, полученные в предыдущем параграфе. Так как её правая часть $P = P^{(0)}(t, \tau)$ тождественно нулевая, то условия ортогональности (12) для задачи (10₀) выполнены автоматически. Поэтому задача (10₀) имеет следующее решение (см. формулу (16)):

$$w_0(t, \tau) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + \alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), \tag{22}$$

где $\alpha_j^{(0)}(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ – пока произвольные функции. При этом система (10₁) принимает вид

$$L_0 w_1(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + \alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t) \right) + A_1(t) \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + \alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t) \right) + F \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + \alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t \right) + R_0 w_0 \equiv P^{(1)}(t, \tau). \tag{23}$$

Эта система будет разрешимой в пространстве U тогда и только тогда, когда свободный член $P_0(t)$ и коэффициенты $P_j(t)$ при экспонентах e^{τ_i} (измерения $|m| = 1$) её правой части $P^{(1)}(t, \tau)$ удовлетворяют условиям ортогональности (12). Выделим $P_0(t)$ и $P_j(t)$ в правой части $P^{(1)}(t, \tau)$. Используя формулу Тейлора, будем иметь

$$F \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + \alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t \right) = F(\alpha_0^{(0)}(t), t) + \frac{\partial F(\alpha_0^{(0)}(t), t)}{\partial w} \sum_{j=1}^2 \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + r(e^{\tau_1}, e^{\tau_2}, t),$$

где функция $r(e^{\tau_1}, e^{\tau_2}, t)$ содержит члены с экспонентами $e^{(m, \tau)}$ измерения $|m| \geq 2$. Учитывая определение в (7) оператора R_0 , выделим в $P^{(1)}(t, \tau)$ выражение $\hat{P}^{(1)}(t, \tau)$, не содержащее экспоненты $e^{(m, \tau)}$ измерения $|m| \geq 2$:

$$\hat{P}^{(1)}(t, \tau) = -(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t))^\bullet + A_1(t)(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t)) + F(\alpha_0^{(0)}(t), t) - \sum_{j=1}^2 (\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t))^\bullet e^{\tau_j} + A_1(t) \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} \right) + \frac{\partial F(\alpha_0^{(0)}(t), t)}{\partial w} \sum_{j=1}^2 \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + \sum_{j=1}^2 e^{\tau_j} \int_0^t G_j(t, s)\alpha_j^{(0)}(s)\varphi_j(s) ds.$$

Теперь нетрудно записать условия ортогональности (12) для задачи (23) (при этом нужно учесть, что $\dot{\varphi}_0(t) \equiv 0$):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_0^{(0)}(t) &= (A_1(t)\varphi_0(t), \chi_0(t))\alpha_0^{(0)}(t) + F(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t), \\ \dot{\alpha}_1^{(0)}(t) &= (A_1(t)\varphi_1(t) - \dot{\varphi}_1(t), \chi_1(t))\alpha_1^{(0)}(t) + \int_0^t (G_1(t, s)\varphi_1(s), \chi_1(t))\alpha_1^{(0)}(s) ds + \\ &\quad + \left(\frac{\partial F(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t)}{\partial w} \varphi_1(t), \chi_1(t) \right) \alpha_1^{(0)}(t), \\ \dot{\alpha}_2^{(0)}(t) &= (A_1(t)\varphi_2(t) - \dot{\varphi}_2(t), \chi_2(t))\alpha_2^{(0)}(t) + \int_0^t (G_2(t, s)\varphi_2(s), \chi_2(t))\alpha_2^{(0)}(s) ds + \\ &\quad + \left(\frac{\partial F(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t)}{\partial w} \varphi_2(t), \chi_2(t) \right) \alpha_2^{(0)}(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Начальные условия для этой системы находим из равенства $w_0(0, 0) = w^0$, т.е. равенства

$$\sum_{j=1}^2 \alpha_j^{(0)}(0)\varphi_j(0) + \alpha_0^{(0)}(0)\varphi_0(0) = w^0,$$

из которого следует, что

$$\alpha_0^{(0)}(0) = (w^0, \chi_0(0)) = y^0, \quad \alpha_j^{(0)}(0) = (w^0, \chi_j(0)) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Поскольку интегро-дифференциальные уравнения (24) для функций $\alpha_j^{(0)}(t)$ ($j = 1, 2$) являются однородными, получаем тождества $\alpha_j^{(0)}(t) \equiv 0$ ($j = 1, 2$). Для функции $\alpha_0^{(0)}(t)$, учитывая вид $A_1(t)$ и равенство $\varphi_0(t) = \{1, 0, 0\}$, приходим к нелинейной задаче Коши

$$\dot{\alpha}_0^{(0)}(t) = - \left(\sum_{j=1}^2 \frac{K_j(t, t)}{\mu_j(t)} \right) \alpha_0^{(0)}(t) + f(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t), \quad \alpha_0^{(0)}(0) = y^0, \quad (25)$$

вопрос о разрешимости в целом которой на отрезке $[0, T]$ представляет собой самостоятельную и весьма нетривиальную задачу. Поэтому введём ещё одно предположение:

6) задача (25) разрешима на отрезке $[0, T]$.

В этом случае решение (22) первой итерационной задачи (10₀) будет найдено в пространстве U в виде

$$w_0(t, \tau) = \alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t).$$

Оно, как сказано выше, не содержит функций пограничного слоя. Что же касается следующих итерационных задач (10_k), $k \geq 1$, то для них уравнения для функций $\alpha_j^{(k)}(t)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$, $j = 0, 1, 2$) будут линейными и поэтому разрешимыми в целом на отрезке $[0, T]$.

Замечание 2. Для задачи (1) в действительном случае предположение 6) будет выполнено (см. [6, с. 412–413]), если потребовать, чтобы существовала постоянная γ такая, что при всех $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$- \left(\sum_{j=1}^2 \frac{K_j(t, t)}{\mu_j(t)} \right) + \frac{\partial f(y, t)}{\partial y} \leq \gamma. \quad (26)$$

Это неравенство выполняется, например, для задачи (1), в которой $\mu_1(\theta) = -1$, $\mu_2(\theta) = -\sqrt{2}$ и $f(y, t) = -2y^3$. В этом случае неравенство (26) принимает вид $m(t) - 6y^2 \leq \gamma$, где обозначено $m(t) = K_1(t, t) + K_2(t, t)/\sqrt{2}$. Оно выполняется, если взять постоянную γ такой, чтобы $\gamma > \max\{m(t) : t \in [0, T]\}$.

При этом задача (25) будет иметь следующее решение:

$$\alpha_0^{(0)}(t) = \left(\left(4 \left(\int_0^t e(s) ds \right) (y^0)^2 + 1 \right) e(t) y^0 \right)^{1/2} \left(4 \left(\int_0^t e(s) ds \right) y_0^2 + 1 \right)^{-1},$$

где $e(s) \equiv \exp(2 \int_0^s m(\theta) d\theta)$.

При выполнении предположений 1)–6) можно построить ряд (8) с коэффициентами $w_k(t, \tau) \in U$. Так же, как и в [7], доказывается следующий результат.

Теорема 3. Пусть для системы (2) выполнены предположения 1)–6). Тогда при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0 > 0$ – достаточно мало) система (2) имеет единственное решение $w(t, \varepsilon) \in C^1([0, T], \mathbb{C}^3)$ и имеет место оценка

$$\|w(t, \varepsilon) - w_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0, T]} \leq c_N \varepsilon^{N+1}, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

где $w_{\varepsilon N}(t)$ – сужение (при $\tau = \psi(t)/\varepsilon$) N -й частичной суммы ряда (8) (с коэффициентами $w_k(t, \tau) \in U$, удовлетворяющими итерационным задачам (10_k)), а постоянная $c_N > 0$ не зависит от ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Поскольку решение $y(t, \varepsilon)$ исходной задачи (1) является первой компонентой вектор-функции $w(t, \varepsilon)$, то для него (при предположениях 1)–6)) также справедлива оценка

$$\|y(t, \varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0, T]} \leq c_N \varepsilon^{N+1}, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

в которой постоянная $c_N > 0$ не зависит от ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
2. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
3. Бободжанова М.А. Сингулярно возмущенные интегродифференциальные системы с нулевым оператором дифференциальной части // Вестн. Моск. энергетич. ин-та. 2010. № 6. С. 63–72.
4. Бободжанова М.А., Сафонов В.Ф. Асимптотический анализ сингулярно возмущенных интегродифференциальных систем с нулевым оператором дифференциальной части // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 519–536.
5. Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А. Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные задачи и метод регуляризации. М., 2012.
6. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М., 1994.
7. Бободжанова М.А. Обоснование метода регуляризации для нелинейных интегродифференциальных уравнений с нулевым оператором дифференциальной части // Вестн. Моск. энергетич. ин-та. 2011. № 6. С. 85–95.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 04.02.2021 г.
После доработки 11.04.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.4

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ ГАММЕРШТЕЙНА–НЕМЫЦКОГО

© 2021 г. А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян

Исследуется класс нелинейных интегральных заданных на всей прямой уравнений с некомпактным оператором Гаммерштейна–Немыцкого. Некоторые частные случаи таких уравнений имеют конкретные приложения в различных областях естествознания. Сочетание метода построения инвариантных конусных отрезков для соответствующего нелинейного монотонного оператора с методами теории функций вещественной переменной позволяет доказать конструктивную теорему о существовании ограниченных положительных решений у уравнений рассматриваемого класса. Изучается также асимптотическое поведение решения в $\pm\infty$. В частности, доказывается, что построенное решение является суммируемой функцией на отрицательной части числовой оси и разность между пределом в $+\infty$ и решением также интегрируема на положительной полуоси. В одном частном случае показано, что построенное решение порождает однопараметрическое семейство ограниченных положительных решений. В конце работы приводятся конкретные прикладные примеры нелинейностей, иллюстрирующие полученные результаты.

DOI: 10.31857/S0374064121060066

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим следующий класс заданных на всей прямой нелинейных интегральных уравнений с оператором типа Гаммерштейна–Немыцкого:

$$f(x) = G_0(x, f(x)) + \int_{\mathbb{R}} K(x-t)G(f(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R} := (-\infty, +\infty), \quad (1)$$

относительно искомой измеримой неотрицательной и ограниченной на \mathbb{R} функции $f(x)$. В уравнении (1) нелинейности $G_0(x, u)$ и $G(u)$ определены соответственно на множествах $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ и \mathbb{R}^+ (здесь и далее $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$) принимают вещественные значения и удовлетворяют условиям, сформулированным ниже.

Ядро K обладает следующими основными свойствами:

$$K(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} K(x) dx = 1, \quad (2)$$

$$K \in M(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 K(x) dx < +\infty, \quad (3)$$

$$\nu(K) := \int_{\mathbb{R}} x K(x) dx > 0, \quad (4)$$

где $M(\mathbb{R})$ – пространство существенно ограниченных функций на множестве \mathbb{R} .

Нелинейность G на множестве \mathbb{R}^+ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $G(0) = 0$, $G(u)$ выпукла вверх и монотонно возрастает;
- 2) существует число $\eta_0 > 0$ такое, что $G(\eta_0) = \eta_0$, причём $G(u) > u$ при $u \in (0, \eta_0)$ и $G(u) < u$ при $u \in (\eta_0, +\infty)$;

- 3) существует $\lim_{u \rightarrow +\infty} G(u) =: \gamma < +\infty$;
- 4) существует конечная производная в нуле $G'(0) > 1$, при этом

$$G(u) \leq G'(0)u \quad \text{для всех } u \geq 0;$$

- 5) существуют числа $c > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $G(u) \geq G'(0)u - cu^{1+\varepsilon}$, $u \in [0, \eta_0]$.

На рисунке приведена графическая иллюстрация условий 1)–5).

Уравнение (1) возникает во многих областях естествознания при математическом моделировании различных процессов. В частности, такие уравнения встречаются в математической теории пространственно-временного распространения эпидемии с учётом возникновения второй волны, в кинетической теории газов, в теории переноса излучения в спектральных линиях (см. [1–6] и приведённую в них библиографию). В том частном случае, когда $G_0 \equiv 0$, уравнение (1) подробно исследовалось в работах [1–3]. В случае $\nu(K) \leq 0$ уравнение (1) изучалось в работах [7–9]. Следует отметить, что в этих работах существенно использовались методы линейной теории интегральных уравнений типа свёртки.

В настоящей работе мы, накладывая на нелинейности G_0 и G другие ограничения и используя методы теории нелинейных монотонных операторов, с помощью специально выбранных итераций доказываем существование положительных и ограниченных решений у уравнения (1). Из соответствующих априорных оценок следует, в частности, свойство суммируемости решения на отрицательной части числовой оси. Далее, для одного важного частного случая, используя выпуклость нелинейности G и некоторые геометрические неравенства, устанавливаются существование предела решения в бесконечности $f(+\infty)$ и включение $f(+\infty) - f(x) \in L_1(\mathbb{R}^+)$. В конце работы приведены частные прикладные примеры функций G_0 и G . Прежде чем накладывать условия на функцию $G_0(x, u)$, введём несколько обозначений и приведём нужные в дальнейшем следствия, вытекающие из свойств функции $G(u)$.

2. Обозначения, вспомогательные факты и основные условия на функцию G_0 .

2.1. Обозначения и вспомогательные факты. Обозначим

$$\alpha_0 := \int_{-\infty}^0 K(t) dt > 0. \tag{5}$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим следующее вспомогательное уравнение типа Гаммерштейна на всей прямой:

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x-t)G(\varphi(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

относительно искомой непрерывной положительной и ограниченной на \mathbb{R} функции $\varphi(x)$.

В работе [3] доказано, что необходимым условием существования такого решения у уравнения (6) является выполнение неравенства

$$G'(0)\alpha_0 < 1. \tag{7}$$

В дальнейшем, если не будет оговорено противное, считаем, что условие (7) выполняется.

Определим на множестве \mathbb{R}^+ функцию

$$\chi(u) := (uG'(0) - G(u))\alpha_0 + G(u) - u, \quad u \geq 0. \tag{8}$$

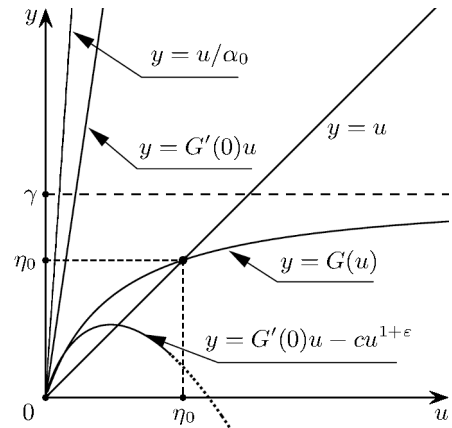


Рисунок.

Так как, согласно условию 4), существует конечная производная $G'(0)$ и в силу свойства (2) величина α_0 конечна, то функция χ определена корректно. Из равенства в условии 1) следует, что $\chi(0) = 0$, а из определения числа η_0 в условии 2) и неравенства $G'(0) > 1$ в условии 4) – что $\chi(\eta_0) = \eta_0(G'(0) - 1)\alpha_0 > 0$. В силу условия 3) и неравенства (7) имеем $\chi(+\infty) = -\infty$.

Следовательно, согласно теореме Больцано–Коши, существует число $\eta > \eta_0$ такое, что

$$\chi(\eta) = 0. \quad (9)$$

Убедимся, что число $\eta > \eta_0$ определяется из уравнения $\chi(u) = 0$ единственным образом. Предположим обратное: пусть существует также $\tilde{\eta} > \eta_0$, $\tilde{\eta} \neq \eta$, такое, что $\chi(\tilde{\eta}) = 0$. Тогда из определения (8) функции $\chi(u)$ вытекает равенство

$$\frac{G(\tilde{\eta}) - G(\eta)}{\tilde{\eta} - \eta} = \frac{1 - G'(0)\alpha_0}{1 - \alpha_0}. \quad (10)$$

С другой стороны, в силу выпуклости вверх функции $G(u)$ на \mathbb{R}^+ для любых $\tilde{\eta}, \eta \in \mathbb{R}^+$ справедливо неравенство

$$\frac{G(\tilde{\eta}) - G(\eta)}{\tilde{\eta} - \eta} < \frac{G(\eta)}{\eta}. \quad (11)$$

Действительно, обозначим принадлежащие графику функции $G(u)$ точки $O(0, 0)$, $A(\eta, G(\eta))$ и $\tilde{A}(\tilde{\eta}, G(\tilde{\eta}))$. Если $\tilde{\eta} - \eta > 0$, то неравенство (11) очевидно равносильно неравенству $G(\tilde{\eta})/\tilde{\eta} < G(\eta)/\eta$. Но последнее неравенство верно, так как в силу выпуклости вверх функции G точка \tilde{A} лежит над отрезком $O\tilde{A}$, а значит, тангенс угла наклона $G(\tilde{\eta})/\tilde{\eta}$ к оси абсцисс отрезка $O\tilde{A}$ меньше тангенса угла наклона $G(\eta)/\eta$ к оси абсцисс отрезка OA . Точно так же, если $\eta - \tilde{\eta} > 0$, то неравенство (11) очевидно равносильно неравенству $G(\tilde{\eta})/\tilde{\eta} > G(\eta)/\eta$, которое верно, поскольку в этом случае в силу выпуклости вверх функции G точка \tilde{A} лежит над отрезком OA .

Как следует из определения функции χ (или можно положить $\tilde{\eta} = 0$ в (10)), справедливо равенство

$$\frac{G(\eta)}{\eta} = \frac{1 - G'(0)\alpha_0}{1 - \alpha_0},$$

которое противоречит соотношениям (10), (11). Поэтому уравнение $\chi(u) = 0$ имеет единственное решение при $u \in (\eta_0, +\infty)$.

2.2. Основные условия на функцию G_0 . Теперь мы можем привести условия, которым должна удовлетворять функция $G_0(x, u)$:

а) на множестве $\mathbb{R} \times [0, \eta]$ она удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу u , т.е. функция $G_0(x, u)$ при всяком $u \in [0, \eta]$ измерима по x на \mathbb{R} и почти при всех $x \in \mathbb{R}$ непрерывна по u на $[0, \eta]$;

б) при каждом x функция $G_0(x, u)$ монотонно возрастает по u на множестве \mathbb{R}^+ ;

с) существует число $\xi \in (\eta_0, \eta)$ такое, что

$$G_0(x, u) \geq u \int_{-\infty}^x K(y) dy, \quad u \in [0, \xi], \quad x \in \mathbb{R};$$

д) имеет место оценка сверху

$$G_0(x, \eta) \leq (\eta G'(0) - G(\eta))\alpha_0 \int_{-\infty}^x K(y) dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

где число $\eta > \eta_0$ – единственный корень уравнения $\chi(u) = 0$, а число α_0 определяется равенством (5).

3. Построение положительного и ограниченного решения уравнения (1).**3.1. Функция Дикмана.** Рассмотрим следующую функцию Дикмана (см. [2]):

$$L(\lambda) := G'(0) \int_{\mathbb{R}} K(t) e^{-\lambda t} dt, \quad \lambda \geq 0,$$

при условии, что данный интеграл сходится для $\lambda \in [0, \lambda_1]$, $\lambda_1 > 0$. Из свойств (2)–(4) с учётом того, что $G'(0) > 1$, следуют неравенства

$$L(0) = G'(0) > 1, \quad (12)$$

$$\left. \frac{dL}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = -G'(0) \int_{\mathbb{R}} K(t)t dt < 0, \quad (13)$$

$$\frac{d^2L}{d\lambda^2} = G'(0) \int_{\mathbb{R}} K(t)t^2 e^{-\lambda t} dt > 0 \quad (14)$$

(данный интеграл может быть равным и бесконечности).

Из (14) следует, что функция $L(\lambda)$ выпукла вниз на $[0, \lambda_1]$. Так как функция $L(\lambda)$ непрерывна, то в силу неравенства (13) по теореме Коши существует число $\lambda_0 \in (0, \lambda_1]$ такое, что при всех $\lambda \in [0, \lambda_0]$ имеет место неравенство

$$\frac{dL}{d\lambda} < 0. \quad (15)$$

Предположим, что

$$L(\lambda_0) < 1. \quad (16)$$

Тогда с учётом неравенств (12) и (16) в силу теоремы Больцано–Коши существует единственное $\sigma \in (0, \lambda_0)$, при котором

$$L(\sigma) = 1. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь вспомогательное уравнение (6). Из результатов работы [3] следует, что при условиях 1)–5) уравнение (6) имеет положительное ограниченное непрерывное и неубывающее решение φ со свойствами:

$$\varphi(-\infty) = 0, \quad \varphi(+\infty) = \eta_0, \quad (18)$$

$$\varphi \in L_1(-\infty, 0), \quad \eta_0 - \varphi \in L_1(0, +\infty). \quad (19)$$

Более того, для решения φ имеет место следующая оценка сверху:

$$\varphi(x) \leq \begin{cases} \eta_0 e^{\sigma x} & \text{при } x \leq 0, \\ \eta_0 & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (20)$$

Свойства (18)–(20) нам существенно понадобятся в дальнейших рассуждениях.

3.2. Последовательные приближения для решения уравнения (1). Пусть $\psi(x)$ – любая измеримая “тестовая” функция, определённая на множестве \mathbb{R} и удовлетворяющая следующим условиям:

$$0 \leq \psi(x) \leq \varphi(x) \int_{-\infty}^x K(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}; \quad (21)$$

существует число $r > 0$ такое, что

$$\inf_{x \in [r, +\infty)} \psi(x) > 0. \quad (22)$$

Напомним, что $\varphi(x)$ – решение нелинейного уравнения (6).

Введём следующие специальные итерации для уравнения (1):

$$f_{n+1}(x) = G_0(x, f_n(x)) + \int_{\mathbb{R}} K(x-t)G(f_n(t)) dt,$$

$$f_0(x) = \varepsilon\psi(x) + \varphi(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

где

$$\varepsilon := \min\{1, (\eta - \eta_0)/\eta_0, (\xi - \eta_0)/\sup_{x \in \mathbb{R}} \psi(x)\}. \quad (24)$$

Индукцией по n убедимся, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ функций обладает следующими свойствами:

$$\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \text{ не убывает, т.е. } f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (25)$$

$$f_n(x) \leq \eta, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

Неравенство $f_0(x) \leq \eta$, $x \in \mathbb{R}$, непосредственно следует из (23), (24) и (20), (21):

$$f_0(x) \leq (\varepsilon + 1)\varphi(x) \leq \eta_0(\varepsilon + 1) \leq \eta_0 \left(\frac{\eta - \eta_0}{\eta_0} + 1 \right) = \eta.$$

Докажем теперь, что

$$f_1(x) \geq f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Учитывая условия $b)$ и $1)$ свойство (2), условие $c)$, неравенство (21), равенство (24), а также то, что функция $\varphi(x)$ является решением нелинейного уравнения (6), и воспользовавшись определением (23), получаем

$$\begin{aligned} f_1(x) &\geq G_0(x, \varepsilon\psi(x) + \varphi(x)) + \int_{\mathbb{R}} K(x-t)G(\varphi(t)) dt \geq \\ &\geq (\varepsilon\psi(x) + \varphi(x)) \int_{-\infty}^x K(y) dy + \varphi(x) \geq \varepsilon\psi(x) \int_{-\infty}^x K(y) dy + \psi(x) + \varphi(x) \geq \varepsilon\psi(x) + \varphi(x) = f_0(x). \end{aligned}$$

Предположим, что для некоторого натурального n выполняются следующие неравенства:

$$f_n(x) \geq f_{n-1}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$f_n(x) \leq \eta, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда снова вследствие монотонности функций G_0 и G , а также свойств (2) и условия $d)$ из определения (23) с учётом равенств (8) и (9) вытекает, что

$$f_{n+1}(x) \geq G_0(x, f_{n-1}(x)) + \int_{\mathbb{R}} K(x-t)G(f_{n-1}(t)) dt = f_n(x),$$

$$f_{n+1}(x) \leq G_0(x, \eta) + G(\eta) \leq (\eta G'(0) - G(\eta))\alpha_0 + G(\eta) = \eta.$$

Используя условие Каратеодори для функции G_0 и непрерывность функции G , индукцией по n несложно убедиться в том, что каждый элемент последовательности $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ представляет собой измеримую функцию на \mathbb{R} . Из доказанных свойств (25) и (26) вытекает, что последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ имеет при $n \rightarrow \infty$ поточечный предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. С учётом условий $1)$, $a)$ в силу предельных теорем Красносельского

(см. [10, с. 340]) и Б. Леви (см. [11, с. 303]) функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Из свойств (25) и (26) следует также, что имеет место двойное неравенство

$$\varepsilon\psi(x) + \varphi(x) \leq f(x) \leq \eta, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (27)$$

3.3. Асимптотическое поведение решения в $-\infty$. В этом пункте докажем, что для построенного нами решения $f(x)$ выполняется следующее неравенство:

$$f(x) \leq \eta e^{\sigma x}, \quad x \leq 0, \quad (28)$$

где число σ определяется из уравнения (17) и $\sigma \in (0, \lambda_0)$. С этой целью сначала индукцией по n докажем неравенство

$$f_n(x) \leq \eta e^{\sigma x}, \quad x \leq 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (29)$$

При $n = 0$ это неравенство непосредственно вытекает из (24), (20) и определения нулевого приближения:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \varepsilon\psi(x) + \varphi(x) \leq \varphi(x) \left(\varepsilon \int_{-\infty}^x K(y) dy + 1 \right) \leq \\ &\leq \eta_0 e^{\sigma x} (\varepsilon + 1) \leq \eta_0 e^{\sigma x} \left(\frac{\eta - \eta_0}{\eta_0} + 1 \right) = \eta e^{\sigma x}, \quad x \leq 0. \end{aligned}$$

Предположим, что $f_n(x) \leq \eta e^{\sigma x}$, $x \leq 0$, при некотором натуральном n . Тогда, используя условие d), монотонность функций $G_0(x, u)$ и $G(u)$ по u , а также условие 4) и равенство (17), вследствие определения (23) для $x \leq 0$ получаем

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &\leq G_0(x, \eta e^{\sigma x}) + \int_{\mathbb{R}} K(x-t) G(f_n(t)) dt \leq \\ &\leq G_0(x, \eta) + \int_{-\infty}^0 K(x-t) G(\eta e^{\sigma t}) dt + \int_0^{\infty} K(x-t) G(\eta) dt \leq \\ &\leq (\eta G'(0) - G(\eta)) \alpha_0 \int_{-\infty}^x K(y) dy + \eta G'(0) \int_{-\infty}^0 K(x-t) e^{\sigma t} dt + G(\eta) \int_{-\infty}^x K(y) dy \leq \\ &\leq (\eta G'(0) - G(\eta)) \int_{-\infty}^x K(y) dy + \eta G'(0) \int_x^{\infty} K(y) e^{\sigma(x-y)} dy + G(\eta) \int_{-\infty}^x K(y) dy = \\ &= \eta G'(0) \int_{-\infty}^x K(y) dy + \eta G'(0) e^{\sigma x} \int_x^{\infty} K(y) e^{-\sigma y} dy = \\ &= \eta G'(0) \int_{-\infty}^x K(y) dy + \eta e^{\sigma x} \left(G'(0) \int_{\mathbb{R}} K(y) e^{-\sigma y} dy - G'(0) \int_{-\infty}^x K(y) e^{-\sigma y} dy \right) = \\ &= \eta G'(0) \int_{-\infty}^x K(y) dy + \eta e^{\sigma x} L(\sigma) - \eta e^{\sigma x} G'(0) \int_{-\infty}^x K(y) e^{-\sigma y} dy = \\ &= \eta e^{\sigma x} - \eta G'(0) \int_{-\infty}^x K(y) (e^{\sigma(x-y)} - 1) dy \leq \eta e^{\sigma x}. \end{aligned}$$

Неравенство (29) доказано. Переходя в обеих его частях к пределу при $n \rightarrow \infty$, приходим к оценке (28). Из (28), в частности, следует, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{и} \quad f \in L_1(-\infty, 0). \quad (30)$$

Итак, на основе изложенного выше заключаем, что справедлива

Теорема 1. При выполнении свойств (2)–(4), условий 1)–5) и а)–d), неравенств (7) и (16) уравнение (1) обладает положительным существенно ограниченным решением f , причём имеют место соотношения (30). Более того, справедлива следующая двусторонняя оценка:

$$\varepsilon\psi(x) + \varphi(x) \leq f(x) \leq \Phi(x) := \begin{cases} \eta e^{\sigma x} & \text{при } x \leq 0, \\ \eta & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где число ε определяется равенством (24), $\psi(x)$ – любая “тестовая” измеримая функция, удовлетворяющая условиям (21), (22), а $\varphi(x)$ – непрерывное монотонно неубывающее положительное и ограниченное на \mathbb{R} решение уравнения (6) со свойствами (18), (19).

В следующем параграфе в одном частном случае мы докажем, что решение f обладает некоторыми дополнительными свойствами.

4. Асимптотическое поведение решения в $+\infty$ в одном частном случае.

4.1. Основные условия. Формулировка теоремы. В этом пункте предположим, что нелинейность $G_0(x, u)$ допускает представление вида

$$G_0(x, u) = G_1(u) \int_{-\infty}^x K(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad (31)$$

где $G_1(u)$ – определённая на \mathbb{R}^+ вещественная непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- A) $G_1(u)$ выпукла вверх на \mathbb{R}^+ и монотонно возрастает;
- B) $G_1(u) \geq u$, $u \in [0, \xi]$, $\xi \in (\eta_0, \eta)$,
- C) $G_1(\eta) = (G'(0)\eta - G(\eta))\alpha_0$.

Замечание 1. Несложно убедиться в том, что если функция G_0 допускает представление (31), а функция G_1 обладает свойствами A)–C), то условия а)–d) автоматически выполнены.

Ниже, используя выпуклость вверх функций G_1 и G_0 , с помощью некоторых геометрических неравенств докажем, что имеет место

Теорема 2. Пусть ядро K и нелинейность G удовлетворяют свойствам (2)–(4), неравенствам (7) и (16) и условиям 1)–5), а функция $G_0(x, u)$ допускает представление (31), в котором функция $G_1(u)$ обладает свойствами A)–C). Тогда для решения $f(x)$ справедливы следующие дополнительные свойства:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \eta \quad \text{и} \quad \eta - f \in L_1(0, +\infty).$$

4.2. Доказательство теоремы 2. Заметим, что из (18) следует существование такого числа $r_0 > 0$, что при $x \geq r_0$ имеет место неравенство

$$\eta_0 - \varphi(x) < \varepsilon \inf_{x \geq r} \psi(x).$$

Обозначим $r^* := \max(r, r_0)$. Тогда в силу неравенства (27) решение $f(x)$ будет удовлетворять при всех $x \in [r^*, +\infty)$ следующей оценке снизу:

$$f(x) \geq \varepsilon \inf_{x \geq r^*} \psi(x) + \varphi(x) \geq \varepsilon \inf_{x \geq r} \psi(x) + \varphi(x) > \eta_0. \quad (32)$$

Из уравнения (1) в силу соотношений (31), (2), (9) и условия C) вытекает, что

$$\begin{aligned}
0 \leq \eta - f(x) &= \eta - \int_{-\infty}^x K(y) dy \cdot G_1(f(x)) - \int_{\mathbb{R}} K(x-t)G(f(t)) dt = \\
&= (\eta G'(0) - G(\eta))\alpha_0 + G(\eta) - G_1(f(x)) + \\
&+ \int_x^{\infty} K(y) dy \cdot G_1(f(x)) - \int_{-\infty}^0 K(x-t)G(f(t)) dt - \int_0^{\infty} K(x-t)G(f(t)) dt \leq \\
&\leq G_1(\eta) \int_x^{\infty} K(y) dy + G_1(\eta) - G_1(f(x)) + \\
&+ \int_{-\infty}^0 K(x-t)(G(\eta) - G(f(t))) dt + \int_0^{\infty} K(x-t)(G(\eta) - G(f(t))) dt \leq \\
&\leq G_1(\eta) \int_x^{\infty} K(y) dy + G(\eta) \int_x^{\infty} K(y) dy + G_1(\eta) - G_1(f(x)) + \\
&+ \int_0^{r^*} K(x-t)(G(\eta) - G(f(t))) dt + \int_{r^*}^{\infty} K(x-t)(G(\eta) - G(f(t))) dt \leq \\
&\leq \eta \int_x^{\infty} K(y) dy + G(\eta) \int_{x-r^*}^x K(y) dy + G_1(\eta) - G_1(f(x)) + \int_{r^*}^{\infty} K(x-t)(G(\eta) - G(f(t))) dt.
\end{aligned}$$

Заметим, что при всех $x \geq r^*$ в силу оценки (32) и условий А) и 1), 2) имеют место неравенства

$$0 \leq G_1(\eta) - G_1(f(x)) \leq \frac{G_1(\eta)}{\eta}(\eta - f(x)), \quad (33)$$

$$0 \leq G(\eta) - G(f(x)) \leq \frac{G(\eta) - \eta_0}{\eta - \eta_0}(\eta - f(x)). \quad (34)$$

В самом деле, в силу оценки (32) справедливы неравенства $\eta_0 < f(x) < \eta$. Так как функция G_1 , согласно условию А), выпукла вверх, то то в силу условия В) неравенство (33) доказывается точно так же, как и неравенство (11). Взяв в (11) $\tilde{\eta} = \eta_0$, получим неравенство

$$\frac{G(\eta) - G(\eta_0)}{\eta - \eta_0} < \frac{G(\eta)}{\eta}. \quad (35)$$

Докажем неравенства (34). Так как в силу условия 1) функция G монотонно возрастает, то левое неравенство в (34) очевидно. Для доказательства его правой части заменим, согласно условию 2), в числителе дроби η_0 на $G(\eta_0)$ и учтём, что $\eta > f(x)$, тогда правое неравенство в (34) примет вид

$$\frac{G(\eta) - G(f(x))}{\eta - f(x)} \leq \frac{G(\eta) - G(\eta_0)}{\eta - \eta_0}. \quad (36)$$

Записывая числитель дроби в левой его части в виде $(G(\eta) - G(\eta_0)) + (G(\eta_0) - G(f(x)))$, видим, что неравенство (36) равносильно неравенству

$$(G(\eta) - G(\eta_0))(\eta - \eta_0) + (G(\eta_0) - G(f(x)))(\eta - \eta_0) \leq (G(\eta) - G(\eta_0))(\eta - f(x)),$$

т.е. неравенству $(G(\eta_0) - G(f(x)))(\eta - \eta_0) \leq (G(\eta) - G(\eta_0))(\eta_0 - f(x))$, или

$$\frac{G(f(x)) - G(\eta_0)}{f(x) - \eta_0} \geq \frac{G(\eta) - G(\eta_0)}{\eta - \eta_0}. \quad (37)$$

Неравенство (37) верно и доказывается так же, как и неравенство (11). Действительно, обозначим точки $E(\eta_0, G(\eta_0))$, $A(\eta, G(\eta))$ и $F(f(x), G(f(x)))$. Так как точки E , A и F принадлежат графику функции $G(u)$ и эта функция выпукла вверх, то точка F лежит над отрезком EA , поэтому тангенс угла наклона к оси абсцисс отрезка EF больше тангенса угла наклона к оси абсцисс отрезка EA , т.е. выполнено неравенство (37), а тогда и равносильное ему правое неравенство в (34).

Учитывая оценки (33) и (34) в полученном выше неравенстве

$$\begin{aligned} 0 \leq \eta - f(x) &\leq \eta \int_x^\infty K(y) dy + G(\eta) \int_{x-r^*}^x K(y) dy + \\ &+ G_1(\eta) - G_1(f(x)) + \int_{r^*}^\infty K(x-t)(G(\eta) - G(f(t))) dt, \end{aligned} \quad (38)$$

приходим для $x \geq r^*$ к следующей оценке:

$$\begin{aligned} 0 \leq \eta - f(x) &\leq \eta \int_x^\infty K(y) dy + G(\eta) \int_{x-r^*}^x K(y) dy + \\ &+ \frac{G_1(\eta)}{\eta}(\eta - f(x)) + \frac{G(\eta) - \eta_0}{\eta - \eta_0} \int_{r^*}^\infty K(x-t)(\eta - f(t)) dt, \quad x \geq r^*, \end{aligned} \quad (39)$$

или

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\eta - G_1(\eta)}{\eta}(\eta - f(x)) &\leq \eta \int_x^\infty K(y) dy + G(\eta) \int_{x-r^*}^x K(y) dy + \\ &+ \frac{G(\eta) - \eta_0}{\eta - \eta_0} \int_{r^*}^\infty K(x-t)(\eta - f(t)) dt, \quad x \geq r^*. \end{aligned} \quad (40)$$

Из неравенства (37) следует, что $\eta - f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$. Ниже убедимся, что $\eta - f \in L_1(r^*, +\infty)$. Пусть $\delta > r^*$ — произвольное число. Проинтегрируем обе части неравенства (38) в пределах от r^* до δ . Тогда, учитывая свойства (2)–(4), в силу теоремы Фубини (см. [11, с. 317]) будем иметь

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{r^*}^\delta (\eta - f(x)) dx &\leq \eta \int_{r^*}^\delta \int_x^\infty K(y) dy dx + G(\eta) \int_{r^*}^\delta \left(\int_{x-r^*}^\infty K(y) dy - \int_x^\infty K(y) dy \right) + \\ &+ \frac{G_1(\eta)}{\eta} \int_{r^*}^\delta (\eta - f(x)) dx + \frac{G(\eta) - \eta_0}{\eta - \eta_0} \int_{r^*}^\delta \int_{r^*}^\infty K(x-t)(\eta - f(t)) dt dx \leq \\ &\leq \eta \int_0^\infty yK(y) dy + G(\eta) \int_0^\infty yK(y) dy + \frac{G_1(\eta)}{\eta} \int_{r^*}^\delta (\eta - f(x)) dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{G(\eta) - \eta_0}{\eta - \eta_0} \int_{r^*}^{\delta} \int_{r^*}^{\delta} K(x-t)(\eta - f(t)) dt dx + \frac{G(\eta) - \eta_0}{\eta - \eta_0} \int_{r^*}^{\delta} \int_{\delta}^{\infty} K(x-t)(\eta - f(t)) dt dx \leq \\
 & \leq (\eta + G(\eta)) \int_0^{\infty} yK(y) dy + \frac{G_1(\eta)}{\eta} \int_{r^*}^{\delta} (\eta - f(x)) dx + \\
 & + \frac{G(\eta) - \eta_0}{\eta - \eta_0} \int_{r^*}^{\delta} (\eta - f(t)) dt + \eta \frac{G(\eta) - \eta_0}{\eta - \eta_0} \int_{r^*}^{\delta} \int_{\delta}^{\infty} K(x-t) dt dx = \\
 & = (\eta + G(\eta)) \int_0^{\infty} yK(y) dy + \frac{G_1(\eta)}{\eta} \int_{r^*}^{\delta} (\eta - f(x)) dx + \\
 & + \frac{G(\eta) - \eta_0}{\eta - \eta_0} \int_{r^*}^{\delta} (\eta - f(t)) dt + \eta \frac{G(\eta) - \eta_0}{\eta - \eta_0} \int_0^{\delta} \int_{-\infty}^{x-\delta} K(y) dy dx \leq \\
 & \leq (\eta + G(\eta)) \int_0^{\infty} yK(y) dy + \left(\frac{G_1(\eta)}{\eta} + \frac{G(\eta) - \eta_0}{\eta - \eta_0} \right) \int_{r^*}^{\delta} (\eta - f(x)) dx + \eta \frac{G(\eta) - \eta_0}{\eta - \eta_0} \int_{-\infty}^0 K(y)(-y) dy,
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{G_1(\eta)}{\eta} - \frac{G(\eta) - \eta_0}{\eta - \eta_0} \right) \int_{r^*}^{\delta} (\eta - f(x)) dx \leq \\
 & \leq (\eta + G(\eta)) \int_0^{\infty} yK(y) dy + \eta \frac{G(\eta) - \eta_0}{\eta - \eta_0} \int_{-\infty}^0 K(y)(-y) dy.
 \end{aligned}$$

В силу неравенства (35) и соотношения $G_1(\eta) + G(\eta) = \eta$ имеем

$$\lambda_0 := 1 - \frac{G_1(\eta)}{\eta} - \frac{G(\eta) - \eta_0}{\eta - \eta_0} > 1 - \frac{G_1(\eta) + G(\eta)}{\eta} = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{r^*}^{\delta} (\eta - f(x)) dx \leq \frac{1}{\lambda_0} \left((\eta + G(\eta)) \int_0^{\infty} yK(y) dy + \eta \frac{G(\eta) - \eta_0}{\eta - \eta_0} \int_{-\infty}^0 K(y)(-y) dy \right).$$

Устремляя в этом неравенстве δ к бесконечности, получаем, что $f \in L_1(r^*, +\infty)$ и

$$\int_{r^*}^{\infty} (\eta - f(x)) dx \leq \frac{1}{\lambda_0} \left((\eta + G(\eta)) \int_0^{\infty} yK(y) dy + \eta \frac{G(\eta) - \eta_0}{\eta - \eta_0} \int_{-\infty}^0 K(y)(-y) dy \right).$$

Для завершения доказательства осталось убедиться, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \eta$. Действительно, так как $K \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$ и $\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+)$, то в силу леммы 5 из работы [12] справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{r^*}^{\infty} K(x-t)(\eta - f(t)) dt = 0. \tag{41}$$

Учитывая неравенство (40) и предельное соотношение (41), получаем, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \eta$.

Теорема 2 доказана.

Приведём важное

Замечание 2. Если функция $G_0(x, u)$ является периодической по x с основным периодом $T > 0$ и непрерывной на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ по совокупности своих аргументов, то построенное решение $f(x)$ порождает однопараметрическое семейство новых решений вида $\{f(x + cT)\}_{c \in \mathbb{R}}$.

Это утверждение вытекает из очевидного равенства

$$\begin{aligned} G_0(x, f(x + cT)) + \int_{\mathbb{R}} K(x - t)G(f(x + cT)) dt = \\ = G_0(x + cT, f(x + cT)) + \int_{\mathbb{R}} K(x + cT - y)G(f(y)) dy = f(x + cT). \end{aligned}$$

5. Примеры. В качестве применения и иллюстрации полученных результатов приведём прикладные примеры нелинейностей G_0 и G . Известными примерами в математической теории пространственно-временного распространения эпидемии являются следующие функции (см. [2, 3]):

$$G_0(x, u) = \int_{-\infty}^x K(y) dy \cdot q\sqrt{u}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad (42)$$

$$G(u) = \gamma(1 - e^{-u}), \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad (43)$$

где $q := \alpha_0(\eta G'(0) - G(\eta))/\sqrt{\eta}$, а $\gamma > 1$ – числовой параметр. В данной теории неравенство $\gamma > 1$ называется “пороговым условием” и представляет собой критическое значение числа заражённых лиц, при превышении которого эпидемию невозможно остановить без серьёзных медицинских вмешательств. С математической точки зрения если $\gamma \leq 1$, то в рамках рассматриваемой модели О. Дикмана (см. [2]) соответствующее нелинейное уравнение в классе ограниченных функций обладает только тривиальным решением. Последнее означает, что эпидемия с течением времени не угасает.

Для примера (42) в качестве ξ можно выбрать, например, число

$$\xi := \max\{\alpha_0^2(\eta G'(0) - G(\eta))^2/\eta, \eta_0 + \varepsilon_0\},$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – произвольный достаточно малый параметр.

Приведём также прикладной пример ядра K , для которого выполняются свойства (2)–(4), а также связанные с ним неравенства (7) и (16). В качестве такого ядра K выберем следующее антисимметрическое гауссовское распределение:

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-1)^2}. \quad (44)$$

Очевидно, что для ядра (44) выполняются свойства (2)–(4). В этом случае функция Дикмана $L(\lambda)$ имеет вид

$$L(\lambda) = G'(0) \int_{\mathbb{R}} K(t) e^{-\lambda t} dt = G'(0) e^{\lambda^2/4 - \lambda}.$$

В качестве нелинейности $G(u)$ выберем функцию вида (43) и предположим, что $\gamma \in (1, e)$. Очевидно, что $L(\lambda)$ убывает на отрезке $[0, 2]$, выпукла вниз на \mathbb{R}^+ и если в качестве числа λ_0 выбрать $\lambda_0 = 2$, то $L(\lambda_0) = \gamma/e < 1$, т.е. условие (16) выполнено. Теперь проверим условие (7). В силу выбора (44) имеем

$$G'(0)\alpha_0 = \gamma \int_{-\infty}^0 K(y) dy = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-(y-1)^2} dy = \frac{\gamma(1 - \operatorname{erf}(1))}{2} \approx 0,079\gamma < 1,$$

поскольку $\gamma \in (1, e)$. Условие (7) выполнено.

Небезынтересно отметить, что ответ на вопрос о единственности решения в конкретно выбранном конусном отрезке для уравнения (1) до сих пор остаётся открытой проблемой.

Исследования Хачатряна Х.А. и Петросян А.С. выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barbour A.D.* The uniqueness of Atkinson and Reuter's epidemic waves // *Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc.* 1977. V. 82. № 1. P. 127–130.
2. *Diekmann O.* Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // *J. Math. Biol.* 1978. V. 6. № 2. P. 109–130.
3. *Хачатрян Х.А., Петросян А.С.* О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна–Стилтьеса на всей прямой // *Тр. Матем. института им. В.А. Стеклова РАН.* 2020. Т. 308. С. 253–264.
4. *Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.* О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны // *Теор. и мат. физика.* 2016. Т. 189. № 2. С. 239–255.
5. *Енгибарян Н.Б., Хачатрян А.Х.* О точной линеаризации задач скольжения разреженного газа в модели Бхатнагара–Гросса–Крука // *Теор. и мат. физика.* 2000. Т. 125. № 2. С. 339–342.
6. *Енгибарян Н.Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения // *Астрофизика.* 1966. Т. 2. № 1. С. 31–36.
7. *Хачатрян Х.А., Петросян А.С.* О построении суммируемого решения одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна–Немыцкого на всей прямой // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2020. Т. 26. № 2. С. 278–287.
8. *Хачатрян Х.А.* О решении одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна–Немыцкого на всей оси // *Тр. Ин-та математики НАН Беларуси.* 2013. Т. 21. № 2. С. 154–161.
9. *Хачатрян Х.А.* О положительной разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси и на всей прямой // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 205–224.
10. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
11. *Колмогоров А.Н., Фомин В.С.* Элементы теории функции и функционального анализа. М., 1976.
12. *Арабаджян Л.Г., Хачатрян А.С.* Об одном классе интегральных уравнений типа свертки // *Мат. сб.* 2007. Т. 198. Вып. 7. С. 45–62.

Национальный аграрный университет Армении,
г. Ереван,
Ереванский государственный университет,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 28.02.2021 г.
После доработки 16.04.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.

УДК 517.977.58+517.957.6+519.632.4

АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СТАРШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕДИВЕРГЕНТНОЙ ФОРМЕ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

© 2021 г. Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова

Рассматриваются задачи оптимального управления процессами, описываемыми первой краевой задачей для эллиптических уравнений со смешанными производными и неограниченной нелинейностью. Управления содержатся в коэффициентах при старших производных уравнения состояния. Построены и исследованы разностные аппроксимации нелинейных моделей оптимизации, причём для нахождения приближённого решения нелинейной краевой задачи для состояния построен реализующий её итерационный процесс. Проведено строгое исследование сходимости итерационного процесса, с помощью которого доказаны существование и единственность решения нелинейной разностной схемы, аппроксимирующей исходную краевую задачу для состояния. Установлены согласованные с гладкостью искомого решения оценки скорости сходимости разностных схем в сеточной $W_{2,0}^2(\omega)$ -норме, аппроксимирующих нелинейное уравнение для состояния. Исследована сходимость аппроксимаций задач оптимального управления по состоянию, функционалу и управлению, проведена регуляризация аппроксимаций.

DOI: 10.31857/S0374064121060078

Введение. В статье разрабатываются и исследуются разностные аппроксимации задач оптимального управления для систем, описываемых нелинейными эллиптическими уравнениями с обобщёнными решениями (состояниями) и неограниченной нелинейностью. Здесь функции, входящие в главную часть основного дифференциального оператора (в старшие коэффициенты), рассматриваются как управляемые параметры. В случае неограниченной нелинейности при исследовании фундаментальных свойств разностных схем (устойчивость, сходимость) для нелинейных уравнений предполагается, что коэффициенты уравнений, зависящие от точного решения u , удовлетворяют нужным свойствам (положительная определённость, ограниченность производных по переменной u) не для всех возможных значений, а лишь на множестве значений точного решения или в его малой окрестности.

Отметим, что модели, описываемые стационарными уравнениями со смешанными производными и неограниченной нелинейностью, имеют важное прикладное значение (к примеру, дифференциальные уравнения со смешанными производными возникают, в частности, в задачах о распределении тепла в анизотропной среде, о потоках подземных вод, в финансовой математике при оценке опционов в моделях стохастической волатильности или в численной математике при преобразовании координат и т.д.) и потому являются объектом пристального изучения, см., например, [1–5], в том числе с позиций теории оптимального управления [6–8].

Среди работ, посвящённых исследованию сходимости конкретных разностных схем для нестационарных задач с неограниченными нелинейностями, отметим работы В.Н. Абрашина (см., например, [1, 2] и приведённую в них библиографию). В работах [4, 5] впервые (для одномерного случая) исследована сходимость разностных схем к обобщённым решениям одномерных квазилинейных уравнений эллиптического типа с нелинейностью неограниченного роста и получены согласованные оценки скорости сходимости. Из публикаций за последние годы следует, прежде всего, выделить работы [9–17]. В частности, в работе [16] впервые применена новая методика исследования сходимости решения разностных схем, аппроксимирующих дифференциальные задачи с неограниченной нелинейностью. Дело в том, что решения монотонных разностных схем принадлежат окрестности точного решения, и в этом случае не

нужно доказывать сходимость в равномерной норме, что позволяет проводить анализ точности разностных схем для задач с существенно обобщёнными решениями. В работе [17] выведены согласованные оценки скорости сходимости разностных схем к решениям нелинейных двумерных уравнений математической физики (УМФ) эллиптического типа со смешанными производными с обобщёнными решениями и неограниченной нелинейностью. Отметим, что оптимизационные аспекты в этих работах не рассматривались.

Проблема численного решения задач оптимального управления приводит к необходимости заменить (аппроксимировать) их задачами более простой природы – конечномерными задачами. Соответственно, ключевыми проблемами здесь являются разработка алгоритмов конструирования аппроксимаций, анализ их сходимости для задач оптимизации по состоянию, функционалу и управлению, а также регуляризация аппроксимаций (см., например, [18–22]).

К настоящему времени проведено достаточно большое число исследований, посвящённых изучению задач оптимального управления с ограничениями на состояние и управление. Среди недавних работ на эту тему укажем, например, статьи [6–8] (см. в них же библиографию). В отличие от настоящей работы, в этих работах не изучаются вопросы сходимости задач оптимального управления старшими коэффициентами уравнений состояния с нелинейностями неограниченного роста в коэффициентах. В статье [6] авторы занимаются анализом погрешности вариационной аппроксимации для задачи управления, описываемой полулинейным эллиптическим уравнением вида $-\Delta y + \theta(y) = f$, $x \in \Omega$, в котором на нелинейное слагаемое θ уравнения состояния накладываются некоторые условия роста, а управление содержится в правой части уравнения. Статья [7] посвящена разработке жадных и слабых жадных алгоритмов в контексте задач оптимального управления.

Данная работа дополняет и развивает результаты, установленные в статье [8] для задач оптимального управления, описываемых нелинейными двумерными УМФ эллиптического типа со смешанными производными с обобщёнными решениями и неограниченной нелинейностью. Результаты работы [8] и настоящей работы отличаются друг от друга, в частности, тем, что, получены для задач оптимального управления с разными множествами допустимых управлений, при этом разница в ограничениях на допустимые управления существенно влияет на характер и методику доказательства сходимости аппроксимаций. Кроме того, в работе [8] получены оценки только для точности дискретизаций по состоянию. Авторам неизвестны другие результаты о сходимости разностных схем для задач оптимального управления, описываемых уравнениями математической физики в недивергентной форме с нелинейностями неограниченного роста в коэффициентах. Постановки задач и результаты о сходимости аппроксимаций являются новыми.

В настоящей работе для задач оптимального управления коэффициентами эллиптических уравнений со смешанными производными и неограниченной нелинейностью построены конечно-разностные аппроксимации. Сначала доказывается корректность аппроксимаций (п. 3) и анализируется их точность по состоянию (п. 4). Доказательство сходимости разностных схем проводится в предположении, что само точное решение краевой задачи существует в классе $W_{2,0}^m(\Omega)$, $3 < m \leq 4$, и множество его значений принадлежит некоторому отрезку и только при значениях независимой переменной, принадлежащих этому отрезку, функции, входящие в уравнение, удовлетворяют требуемым свойствам. Исследования сходимости разностных схем для данного класса задач показали, что даже для гладких решений вопрос о сходимости представляет собой довольно сложную техническую проблему. Это связано с тем, что анализ точности разностных схем сильно усложняется, так как задача для погрешности метода является уже нелинейной. В п. 3 мы, таким образом, доказываем, что решение разностной краевой задачи принадлежит области (либо её малой окрестности) значений точного решения, что в свою очередь требует обязательного исследования скорости сходимости разностной схемы в норме $C(\bar{\omega})$ [3–5].

Отметим, что при исследовании сходимости аппроксимаций по состоянию техника, применяемая в [21] при получении оценок скорости сходимости задач оптимизации по состоянию для полулинейных эллиптических уравнений, оказывается неприменимой. Поэтому приходится разрабатывать специальные подходы. В частности, техника, развитая в [17] для доказательства корректности разностной схемы для нелинейной краевой задачи с обобщённым решением

и неограниченной нелинейностью, адаптируется для задачи оптимального управления состоянием и установления оценок точности по состоянию. А именно, для доказательства существования и единственности решения исследуемой нелинейной разностной задачи, аппроксимирующей исходную дифференциальную задачу, используется итерационный процесс, который можно рассматривать и как эффективный метод реализации этой нелинейной разностной схемы. Проводится строгое исследование сходимости итерационного метода для нелинейной сеточной задачи без каких-либо предположений о свойствах нелинейной разностной схемы. В п. 4 получена также шкала априорных оценок скорости сходимости в сеточной $W_{2,0}^2(\omega)$ -норме для разностного решения. Другим важным результатом настоящего исследования является получение оценок скорости сходимости аппроксимаций по функционалу, доказательство слабой сходимости по управлению и регуляризация аппроксимаций по Тихонову (п. 5). Отметим, что процесс регуляризации позволяет построить минимизирующие последовательности для функционала, которые сильно сходятся в пространствах управлений ко множеству минимумов исходных функционалов.

1. Постановка задачи оптимального управления. Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ – прямоугольник в \mathbb{R}^2 с границей $\Gamma = \partial\Omega$, где $l_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1, 2$, фиксированы. Пусть управляемый процесс для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа в недивергентной форме описывается следующей задачей Дирихле:

$$Lu(x) \equiv - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 k_{\alpha, \beta}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + q(u)u = f(u), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2)$$

Здесь $k_{12}(x) = k_{21}(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, т.е. выполняется условие симметрии; $q(\eta)$, $f(\eta)$ – заданные функции аргумента $\eta \in \Omega$; $g = (g_{11}, g_{22}, g_{12}, g_{21}) = (k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21})$ – управление.

Так же, как и в работе [17], априори предположим, что задача (1), (2) однозначно разрешима в классе $W_{2,0}^m(\Omega) = W_2^m(\Omega) \cap \overset{\circ}{W} \frac{1}{2}(\Omega)$, $3 < m \leq 4$. Обозначим через M_u область значений точного решения задачи (1), (2) (которая, в силу предположения о гладкости решения, является ограниченным множеством), т.е. $M_u = [M_1, M_2]$, где $M_1 = \min\{u(x) : x \in \Omega\}$, $M_2 = \max\{u(x) : x \in \Omega\}$. Определим δ -окрестность области значений M_u точного решения $D_u = [\bar{M}_1, \bar{M}_2]$, где $\bar{M}_1 = M_1 - \delta$, $\bar{M}_2 = M_2 + \delta$, здесь $\delta > 0$ – произвольная постоянная, которая может быть достаточно малой.

Относительно заданных функций будем предполагать выполнение следующих условий на решении задачи (1), (2):

$$0 \leq q_0 \leq q(\eta) \leq \bar{q}_0 \quad \text{и} \quad |f(\eta)| \leq f_0 \quad \text{для любого} \quad \eta \in D_u; \quad (3)$$

$$|q(\eta_1) - q(\eta_2)| \leq L_q |\eta_1 - \eta_2| \quad \text{и} \quad |f(\eta_1) - f(\eta_2)| \leq L_f |\eta_1 - \eta_2| \quad \text{для всех} \quad \eta_1, \eta_2 \in D_u, \quad (4)$$

где q_0 , \bar{q}_0 , f_0 и L_q , L_f – некоторые постоянные. Подчеркнём, что условия (3), (4), накладываемые на коэффициенты $q(u)$ и $f(u)$ уравнения в настоящей работе, предполагаются выполненными лишь в окрестности значений точного решения, что обусловлено наличием нелинейностей неограниченного роста и даёт возможность расширить классы допустимых нелинейностей.

Относительно управлений $g = (g_{11}, g_{22}, g_{12}, g_{21}) = (k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21})$ будем предполагать, что имеют место следующие ограничения: $g = (k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21}) \in U \subset B$, где $B = (W_\infty^1(\Omega))^4$ – пространство управлений, а U – множество допустимых управлений, оно состоит из управлений $g \in B$, которые удовлетворяют условиям

$$U = \{k_{\alpha, \beta} = g_{\alpha, \beta} \in W_\infty^1(\Omega), \quad \alpha, \beta = 1, 2 : \quad 0 < \nu \leq k_{\alpha\alpha}(x) \leq \bar{\nu}, \quad \alpha = 1, 2; \quad k_{12}(x) = k_{21}(x), \\ |k_{12}(x)| \leq \nu_* = \nu - \delta_*, \quad 0 < \delta_* < \nu, \quad |\partial k_{\alpha\beta}(x)/\partial x_i| \leq R_i, \quad \alpha, \beta, i = 1, 2, \quad \text{п.в.} \quad x \in \bar{\Omega}\}, \quad (5)$$

где $\nu, \bar{\nu}, \delta_*$ и R_1, R_2 – некоторые постоянные. Пусть, кроме того, выполняются условия

$$\frac{2\bar{\nu}(\max l_\alpha)^2}{\nu\delta_* - \bar{\nu}\bar{q}_0(\max l_\alpha)^2} \left\{ L_f + \frac{\bar{\nu}f_0L_q(\max l_\alpha)^2}{\nu\delta_* - \bar{\nu}\bar{q}_0(\max l_\alpha)^2} \right\} = q_0^* \tag{6}$$

$$\nu\delta_* - \bar{\nu}\bar{q}_0(\max l_\alpha)^2 > 0, \quad q_1^* = q_0^*/2 < 1. \tag{7}$$

Зададим функционал цели в виде

$$J(g) = \int_{\Omega} |u(x, g) - u_0(x)|^2 dx, \tag{8}$$

где $u_0(x) \in W_2^1(\Omega)$ – заданная функция.

Поставим задачу оптимального управления: найти управление $g_* \in U$ такое, что $J(g_*) = \inf_{g \in U} J(g)$, где функционал цели имеет вид (8) на решениях краевой задачи (1), (2).

Исходное уравнение (1) в более подробной записи выглядит следующим образом:

$$-\sum_{\alpha=1}^2 k_{\alpha\alpha}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - (k_{12}(x) + k_{21}(x)) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + q(u)u = f(u), \quad x \in \Omega, \quad k_{12}(x) = k_{21}(x). \tag{9}$$

Заметим, что условия, накладываемые на коэффициенты при производных уравнения (1):

$$0 < \nu \leq k_{\alpha\alpha}(x) \leq \bar{\nu}, \quad \alpha = 1, 2, \quad k_{12}(x) = k_{21}(x), \quad |k_{12}(x)| \leq \nu_* = \nu - \delta_*, \quad \text{где } 0 < \delta_* < \nu,$$

обеспечивают выполнение двусторонних оценок

$$C_1 \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha,\beta=1}^2 k_{\alpha,\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \leq C_2 \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

с константами $C_1 = \delta_*, C_2 = 2\bar{\nu}$, означающих эллиптичность уравнения (1).

В дальнейшем будем использовать пространства вещественнозначных функций, заданных в области Ω , введённые в работе [17]. В частности, определим скалярное произведение двух управлений g и \tilde{g} следующим образом:

$$(g, \tilde{g})_H = (g_{11}, \tilde{g}_{11})_{W_2^1(\Omega)} + (g_{22}, \tilde{g}_{22})_{W_2^1(\Omega)} + (g_{12}, \tilde{g}_{12})_{W_2^1(\Omega)} + (g_{21}, \tilde{g}_{21})_{W_2^1(\Omega)}.$$

В результате получим гильбертово пространство управлений $(W_2^1(\Omega))^4 = H$ с нормой

$$\|g\|_H = ((g, g)_H)^{1/2} = (\|g_{11}\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|g_{22}\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|g_{12}\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|g_{21}\|_{W_2^1(\Omega)}^2)^{1/2}.$$

Замечание 1. При постановке нелинейной краевой задачи (1), (2) мы априори предполагали, что для любого $g \in U$ решение $u(x) = u(x, g)$ задачи (1), (2) существует, единственно и принадлежит пространству $W_{2,0}^m(\Omega)$, $3 < m \leq 4$. В связи с этим и с учётом вложения $W_2^m(\Omega) \rightarrow C^2(\bar{\Omega})$ при $m > 3$ под *решением* краевой задачи (1), (2) можно понимать функцию $u = u(x), x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, u \in W_{2,0}^m(\Omega), m > 3$, удовлетворяющую уравнению (1) в классическом смысле. Будем предполагать, что выполнена оценка

$$\sup_{g \in U} \|u(g)\|_{W_2^m(\Omega)} \leq M, \quad M = \text{const}, \quad m > 3. \tag{10}$$

Через M и C в дальнейшем будем обозначать положительные константы, не зависящие от управления g , шагов вводимых сеток и от сеточного управления $\Phi_h \in U_h$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия, сформулированные при постановке экстремальной задачи (1)–(10). Тогда отображение $g \mapsto u(x; g)$ является усиленно непрерывным из U в $W_2^m(\Omega)$, т.е. оно переводит слабо сходящуюся в U последовательность в последовательность, сильно сходящуюся в $C(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Пусть $\{g^{(n)}\}_{n=1}^\infty = \{g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, g_3^{(n)}, g_4^{(n)}\}_{n=1}^\infty = \{k_{11}^{(n)}, k_{22}^{(n)}, k_{12}^{(n)}, k_{21}^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset U$ – произвольная последовательность такая, что она слабо в $H = (W_2^1(\Omega))^4$ сходится к некоторому элементу $g^{(0)} = (g_1^{(0)}, g_2^{(0)}, g_3^{(0)}, g_4^{(0)}) = (k_{11}^{(0)}, k_{22}^{(0)}, k_{12}^{(0)}, k_{21}^{(0)}) \in H$. В силу однозначной разрешимости краевой задачи каждому элементу $g^{(n)} \in U$ ставится в соответствие единственное решение $u^{(n)} \equiv u(\xi, g^{(n)})$ задачи (1) при $g = g^{(n)}(\xi)$. Согласно замечанию 1 обобщённое решение $u(\xi, g^{(n)})$ задачи (1) из $\dot{W} \frac{1}{2}(\Omega)$, отвечающее элементу $g^{(n)} \in U$, удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле, кроме того, последовательность $\{u^{(n)}(\xi)\}_{n=1}^\infty$ равномерно ограничена в норме пространства $W_2^m(\Omega)$, $3 < m \leq 4$, т.е. $\|u(g^{(n)})\|_{W_2^m(\Omega)} \leq M$ для любого $g \in U$ и всех n .

Покажем, что $u^{(0)}(\xi)$ – решение задачи (1) при $g = g^{(0)}(\xi) = (k_{11}^{(0)}, k_{22}^{(0)}, k_{12}^{(0)}, k_{21}^{(0)})$, т.е. с учётом введённых обозначений

$$Lu^{(0)}(x) \equiv - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 k_{\alpha, \beta}^{(0)}(x) \frac{\partial^2 u^{(0)}(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + q(u^{(0)})u^{(0)} = f(u^{(0)}), \quad x \in \Omega,$$

$$u^{(0)} = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{11}$$

Очевидно, что каждый элемент последовательности $\{u^{(n_k)}\}$ удовлетворяет краевой задаче

$$Lu^{(n_k)}(x) \equiv - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 k_{\alpha, \beta}^{(n_k)}(x) \frac{\partial^2 u^{(n_k)}(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + q(u^{(n_k)})u^{(n_k)} = f(u^{(n_k)}), \quad x \in \Omega,$$

$$u^{(n_k)} = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{12}$$

Перейдём к пределу при $k \rightarrow \infty$ в уравнении (12). В силу того, что $W_2^m(\Omega)$ компактно вкладывается в $C^2(\bar{\Omega})$, $m > 3$, имеем

$$u^{(n_k)}(x) \rightarrow u^{(0)}(x) \quad \text{сильно в } C(\bar{\Omega}),$$

$$D^{(\alpha\beta)}u^{(n_k)} \equiv \frac{\partial^2 u^{(n_k)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \rightarrow D^{(\alpha\beta)}u^{(0)} \equiv \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad \text{сильно в } C(\bar{\Omega}).$$

Далее, поскольку $k_{\alpha\beta}(x) \in W_\infty^1(\Omega)$, то $k_{\alpha\beta}(x) \in C(\bar{\Omega})$, $\alpha, \beta = 1, 2$. Функция $h(x) = f(u(x))$, $x \in \bar{\Omega}$, непрерывна как сложная функция. Аналогично получаем, что $q(u(x)) \in C(\bar{\Omega})$. Тогда сильно в $C(\bar{\Omega})$ имеют место при $n \rightarrow \infty$ сходимости: $q(u^{(n_k)}(x))u^{(n_k)}(x) \rightarrow q(u^{(0)}(x))u^{(0)}(x)$, $k_{\alpha\beta}^{(n_k)}(x)\partial^2 u^{(n_k)}(x)/\partial x_\alpha \partial x_\beta \rightarrow k_{\alpha\beta}^{(0)}(x)\partial^2 u^{(0)}(x)/\partial x_\alpha \partial x_\beta$ и $f(u^{(n_k)}(x)) \rightarrow f(u^{(0)}(x))$.

Покажем далее, что $\lim_{k \rightarrow \infty} u^{(n_k)} \equiv u^{(0)}$ принадлежит окрестности D_u значений точного решения. Так как $u^{(n_k)} \in S_u$, то $\|u^{(n_k)} - u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \delta$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^{(n_k)} - u\|_{C(\bar{\Omega})} = \|u^{(0)} - u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \delta$, т.е. $u^{(0)} \in S_u$, следовательно, $u^{(0)} \in D_u$.

Теперь, переходя в (12) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем (11), значит $u^{(0)}(x)$ – решение краевой задачи (11) при $g = g^{(0)}(x)$, т.е. $u^{(0)}(x) = u(x, g^{(0)})$.

Таким образом, установлено, что из сходимости $g^{(n)} \rightarrow g^{(0)}$ в $H = (W_2^1(\Omega))^4$ следует, что $u^{(n)}(x) = u(x, g^{(n)}) \rightarrow u^{(0)}(x) = u(x, g^{(0)})$ сильно в $C(\bar{\Omega})$. Следовательно, $g \rightarrow u(x, g)$ – усиленно непрерывное отображение. Лемма доказана.

Теорема 1. *Функционал цели $g \mapsto J(g)$ задачи оптимального управления слабо в H непрерывен на множестве U .*

Доказательство. Пусть $g^{(n)} \rightarrow g^{(0)}$ слабо в H . Поскольку в нормированном пространстве его норма непрерывна, то в силу леммы 1 в функционале $J(g^{(n)}) = \int_{\Omega} |u(\xi, g^{(n)}) - u_0(\xi)|^2 d\Omega$ можно осуществить предельный переход

$$J(g^{(n)}) = \|u(g^{(n)}) - u_0\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|u(g^{(0)}) - u_0\|_{L_2(\Omega)} = J(g^{(0)}).$$

Теорема 2. *Задача оптимального управления (1)–(10) корректно поставлена в слабой топологии пространства H , т.е. $J_* = \inf\{J(g) : g \in U\} > -\infty$, $U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \neq \emptyset$, U – слабо компактно в $H = (W_2^1(\Omega))^4$ и любая минимизирующая последовательность $\{g^{(n)}\} \subset U$ функционала $J(g)$ слабо в H сходится к множеству U_* .*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что функционал $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу на U . Кроме того, легко убедиться, что множество U слабо компактно в H . Далее, применяя результат из [18, с. 505], убеждаемся в справедливости теоремы 2.

2. Некоторые обозначения и оценки для сеточных функций. Постановка сеточной задачи и её корректность. Для аппроксимации задачи (1)–(10) и исследования сходимости разностных аппроксимаций нам понадобятся сетки на $[0, l_\alpha]$, $\alpha = 1, 2$, и в $\bar{\Omega} : \bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha = x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha \in [0, l_\alpha] : i_\alpha = 0, N_\alpha, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2$; $\omega_\alpha = \bar{\omega}_\alpha \cap (0, l_\alpha)$; $\omega_\alpha^+ = \bar{\omega}_\alpha \cap (0, l_\alpha]$, $\omega_\alpha^- = \bar{\omega}_\alpha \cap [0, l_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$; $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$; $\omega^{(\pm 1)} = \omega_1^\pm \times \omega_2$, $\omega^{(\pm 2)} = \omega_1 \times \omega_2^\pm$; $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$; $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$. По аналогии с работами [17, 23] обозначим: V – множество сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$, и $\overset{\circ}{V}$ – его подмножество, состоящее из сеточных функций, обращающихся в нуль на $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$. Для сеточных функций из множества $\overset{\circ}{V}$ введём скалярные произведения, нормы и полунормы:

$$(y, v)_{L_2(\omega)} = \sum_{\omega} h_1 h_2 y(x) v(x), \quad \|y\|_{L_2(\omega)}^2 = \sum_{\omega} h_1 h_2 y^2(x), \quad \|y\|_{C(\bar{\omega})} = \|y\|_{L_\infty(\bar{\omega})} = \max_{\bar{\omega}} |y(x)|,$$

$$\|y\|_{W_2^1(\omega)}^2 = \|y_{\bar{x}_1}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2)}^2 + \|y_{\bar{x}_2}\|_{L_2(\omega_1 \times \omega_2^+)}^2 = |y|_{W_2^1(\omega)}^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega^{(\alpha+)}} h_1 h_2 y_{\bar{x}_\alpha}^2 = \|\nabla y\|_{L_2(\omega)}^2,$$

$$\begin{aligned} \|y\|_{W_{2,0}^2(\omega)}^2 &= \|y_{\bar{x}_1 x_1}\|_{L_2(\omega)}^2 + \|y_{\bar{x}_2 x_2}\|_{L_2(\omega)}^2 + 2\|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2^+)}^2 = \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega} h_1 h_2 y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}^2 + 2 \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2 = |y|_{W_2^2(\omega)}^2. \end{aligned}$$

Здесь символами $|\cdot|_{W_2^1(\omega)}$ и $|\cdot|_{W_2^2(\omega)}$ обозначены полунормы в $W_2^1(\omega)$ и $W_2^2(\omega)$ соответственно.

Для полноты изложения приведём для сеточных функций так называемые разностные аналоги теорем вложения Соболева с вычисляемыми (конструктивными) константами и ряд вспомогательных априорных оценок, используемых при установлении оценок скорости сходимости аппроксимаций.

Лемма 2. *Для любой сеточной функции $y(x)$, $x \in \bar{\omega}$, обращающейся в нуль на границе $\gamma = \partial\omega$, справедливы следующие разностные аналоги теорем вложения:*

$$\|y\|_{L_2(\omega)} \leq C_1 \|y\|_{W_2^1(\omega)}, \quad \|y\|_{C(\bar{\omega})} \leq C_2 \|y\|_{W_{2,0}^2(\omega)}, \quad C_1^2 = \frac{(l_1 l_2)^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}; \quad C_2 = \frac{(\max l_\alpha)^2}{2\sqrt{l_1 l_2}}; \quad (13)$$

$$\|y\|_{L_2(\omega)} \leq C_3 \|y\|_{W_{2,0}^2(\omega)}, \quad C_3 = C_2 \sqrt{l_1 l_2} = (\max l_\alpha)^2 / 2; \quad (14)$$

$$\|y\|_{W_2^1(\omega)} \leq C_4 \|y\|_{W_{2,0}^2(\omega)}, \quad C_4 = \sqrt{(l_1^2 + l_2^2) / 32}. \quad (15)$$

Доказательство оценок (13) можно найти в [24–27]. Справедливость оценки (14) непосредственно следует из оценки в (13). По поводу доказательства оценки (15) см. [17].

Поставим в соответствие задаче оптимального управления (1)–(10) следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x \in \bar{\omega}} |y(x, \Phi_h) - u_{0h}(x)|^2 \bar{h}_1 \bar{h}_2 = \|y(\Phi_h) - u_{0h}\|_{L_2(\bar{\omega})}^2 \tag{16}$$

при условиях, что сеточная функция $y(x, \Phi_h) \in \overset{\circ}{V}$, называемая *решением* разностной краевой задачи для дифференциальной задачи (1), (2), удовлетворяет следующей сеточной задаче на сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$:

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha\alpha}(x) y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - (\Phi_{12}(x) + \Phi_{21}(x)) Q(y) + q(y)y = f(y), \quad x \in \omega, \tag{17}$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \gamma, \tag{18}$$

где $\Phi_{12}(x) = \Phi_{21}(x)$,

$$Q(y)(x) = \frac{y_{x_1 x_2}(x) + y_{\bar{x}_1 x_2}(x) + y_{x_1 \bar{x}_2}(x) + y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}(x)}{4} = \frac{y(x_1 + h_1, x_2 + h_2)}{4} + \frac{y(x_1 - h_1, x_2 + h_2) + y(x_1 + h_1, x_2 - h_2) + y(x_1 - h_1, x_2 - h_2)}{4h_1 h_2} = y_{x_1 \bar{x}_2}^{\circ}(x_1, x_2), \tag{19}$$

а сеточные управления $\Phi_h = (\Phi_{11}, \Phi_{22}, \Phi_{12}, \Phi_{21})$ принадлежат множеству допустимых сеточных управлений:

$$U_h = \{ \Phi_{\alpha\beta}(x) \in W_\infty^1(\omega) : 0 < \nu \leq \Phi_{\alpha\alpha h}(x) \leq \bar{\nu}, \quad \alpha = 1, 2, \quad \Phi_{12}(x) = \Phi_{21}(x), \\ |\Phi_{12}(x)| \leq \nu_* = \nu - \delta_*, \quad 0 < \delta_* < \nu, \quad x \in \omega, \quad |\Phi_{\alpha\beta x_1}(x)| \leq R_1, \\ x \in [\omega_1 \setminus l_1 - h_1] \times \omega_2, \quad |\Phi_{\alpha\beta x_2}(x)| \leq R_2, \quad x \in \omega_1 \times [\omega_2 \setminus l_2 - h_2], \quad \alpha, \beta = 1, 2 \}. \tag{20}$$

Здесь $u_{0h}(x)$ – сеточная аппроксимация функции $u_0(\xi)$, определяемая с помощью операции усреднения по Стеклову

$$u_{0h}(x) = S^{x_1} S^{x_2}(u_0)(x) = \frac{1}{\bar{h}_1 \bar{h}_2} \int_{e(x)} u_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad x \in \bar{\omega}.$$

Введём сеточный оператор $A(\theta)v$, зависящий от параметра $\theta = \theta(x)$:

$$A(\theta)v \equiv -\sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha\alpha}(x) v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}(x) - 2\Phi_{12}(x) Q(v)(x) + q(\theta)v(x), \quad x \in \omega, \tag{21}$$

на множестве сеточных функций $v(x)$, $x \in \bar{\omega}$; $v(x) = 0$, $x \in \gamma$, где $\theta(x)$, $x \in \bar{\omega}$, – произвольная сеточная функция, играющая роль функционального параметра, а под $A(\theta)v$ понимается результат применения сеточного оператора $A(\theta)$ к элементу v .

Для полноты изложения приведём ряд вспомогательных результатов, связанных с установлением априорных оценок для оператора $A(\theta)$, которые далее будут использованы при исследовании разностной схемы (17)–(19). При доказательстве этих результатов используем методику из [4, 17].

Лемма 3. Пусть $\theta(x)$, $x \in \bar{\omega}$, – произвольная сеточная функция, заданная на сетке $\bar{\omega}$, такая, что $\theta(x) \in D_u$ для любого $x \in \bar{\omega}$. Тогда оператор $A(\theta)$, задаваемый соотношением (21), обладает следующими свойствами:

$$\frac{\nu \delta_*}{2\bar{\nu}} \|v\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})} - C_3 \bar{q}_0 \|v\|_{L_2(\bar{\omega})} \leq \|A(\theta)v\|_{L_2(\bar{\omega})}, \tag{22}$$

$$\|v\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})} \leq C_0 \|A(\theta)v\|_{L_2(\bar{\omega})} \tag{23}$$

при любых $v(x)$, $x \in \bar{\omega}_h$, $v(x) = 0$, $x \in \gamma$; $\theta(x) \in D_u$, $x \in \bar{\omega}$, где

$$C_0 = \frac{2\bar{\nu}}{\nu\delta_* - 2\bar{\nu}C_3\bar{q}_0} = \frac{2\bar{\nu}}{\nu\delta_* - \bar{\nu}\bar{q}_0(\max l_\alpha)^2}, \quad \nu\delta_* - \bar{\nu}\bar{q}_0(\max l_\alpha)^2 > 0. \tag{24}$$

Доказательство. В силу определения (21) имеет место равенство

$$\Phi_{11}(x)v_{\bar{x}_1x_1} + 2\Phi_{12}(x)Q(v) + \Phi_{22}(x)v_{\bar{x}_2x_2} = q(\theta)v - A(\theta)v \equiv F(\theta; v), \tag{25}$$

умножив которое на $\Phi_{22}^{-1}(x)v_{\bar{x}_1x_1}$, получим

$$\Phi_{22}^{-1}(x)[\Phi_{11}(x)v_{\bar{x}_1x_1}^2 + 2\Phi_{12}(x)v_{\bar{x}_1x_1}Q(v) + \Phi_{22}(x)Q^2(v)] = \Phi_{22}^{-1}(x)v_{\bar{x}_1x_1}F(\theta; v) + I(v), \tag{26}$$

где

$$I(v) = Q^2(v) - v_{\bar{x}_1x_1}v_{\bar{x}_2x_2} = (v_{x_1x_2} + v_{x_1\bar{x}_2} + v_{\bar{x}_1x_2} + v_{\bar{x}_1\bar{x}_2})^2/16 - v_{\bar{x}_1x_1}v_{\bar{x}_2x_2}.$$

Учитывая условие равномерной эллиптичности

$$\delta_* \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Phi_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \leq 2\bar{\nu} \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2$$

для $\xi_1 = v_{\bar{x}_1x_1}$, $\xi_2 = Q(v)$, будем иметь

$$[\Phi_{11}(x)v_{\bar{x}_1x_1}^2 + 2\Phi_{12}(x)v_{\bar{x}_1x_1}Q(v) + \Phi_{22}(x)Q^2(v)]\Phi_{22}^{-1}(x) \geq \frac{\delta_*}{\bar{\nu}}v_{\bar{x}_1x_1}^2, \tag{27}$$

так как $Q^2(v) \geq 0$. Тогда из равенства (26) с учётом неравенства (27) следует, что

$$\frac{\delta_*}{\bar{\nu}}v_{\bar{x}_1x_1}^2 \leq \frac{|F(\theta, v)|}{\nu}|v_{\bar{x}_1x_1}| + I(v) \leq \frac{1}{\nu} \left[\frac{1}{4\varepsilon}F^2(\theta, v) + \varepsilon|v_{\bar{x}_1x_1}|^2 \right] + I(v), \quad \varepsilon > 0.$$

Далее, выбирая $\varepsilon = \delta_*\nu/(2\bar{\nu})$, получаем

$$\frac{\delta_*}{2\bar{\nu}}v_{\bar{x}_1x_1}^2 \leq \frac{\bar{\nu}}{2\delta_*\nu^2}F^2(\theta, v) + I(v). \tag{28}$$

Умножим неравенство (28) на h_1h_2 и просуммируем по сетке $\omega = \omega_1 \times \omega_2$. В результате получим

$$\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_{L_2(\omega)}^2 \leq \frac{\bar{\nu}^2}{\delta_*^2\nu^2}\|F(\theta, v)\|_{L_2(\omega)}^2 + \frac{2\bar{\nu}}{\delta_*} \sum_{\omega} I(v)h_1h_2. \tag{29}$$

Используя неравенство $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$ и формулу суммирования по частям (дважды), несложно показать, что

$$\sum_{\omega} h_1h_2I(v) \leq 0 \quad \text{для всех } v \in \mathring{V}. \tag{30}$$

В силу (30) из неравенства (29) вытекает оценка

$$\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_{L_2(\omega)}^2 \leq \frac{\bar{\nu}^2}{\delta_*^2\nu^2}\|F(\theta, v)\|_{L_2(\omega)}^2,$$

складывая которую с такой же оценкой для $\|v_{\bar{x}_2x_2}\|_{L_2(\omega)}^2$, будем иметь

$$\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_{L_2(\omega)}^2 + \|v_{\bar{x}_2x_2}\|_{L_2(\omega)}^2 \leq \frac{2\bar{\nu}^2}{\nu^2\delta_*^2}\|F(\theta, v)\|_{L_2(\omega)}^2. \tag{31}$$

Далее

$$2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_{L_2(\omega)}^2 \leq \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} (v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^2 + v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}^2)h_1h_2 = 2 \sum_{\omega} h_1h_2v_{\bar{x}_1x_1}v_{\bar{x}_2x_2} \leq \sum_{\omega} h_1h_2(v_{\bar{x}_1x_1}^2 + v_{\bar{x}_2x_2}^2),$$

откуда

$$\|v\|_{W_{2,0}^2(\omega)}^2 \leq 2(\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_{L_2(\omega)}^2 + \|v_{\bar{x}_2x_2}\|_{L_2(\omega)}^2), \tag{32}$$

и вследствие (32) и (31) заключаем, что

$$\|v\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq \frac{2\bar{\nu}}{\nu\delta_*} \|F(\theta, v)\|_{L_2(\omega)}. \tag{33}$$

Оценим теперь правую часть неравенства (33). Из равенства (25) и сделанного выше предположения $0 \leq q_0 \leq q(\eta) \leq \bar{q}_0$, $\eta \in D_u$, следует, что

$$\|F(\theta, v)\|_{L_2(\omega)} \leq \|q(\theta)v\|_{L_2(\omega)} + \|A(\theta)v\|_{L_2(\omega)} \leq \bar{q}_0\|v\|_{L_2(\omega)} + \|A(\theta)v\|_{L_2(\omega)}. \tag{34}$$

Тогда в силу неравенств (33), (34) получаем оценку

$$\frac{\nu\delta_*}{2\bar{\nu}} \|v\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq \|F(\theta, v)\|_{L_2(\omega)} \leq \bar{q}_0\|v\|_{L_2(\omega)} + \|A(\theta)v\|_{L_2(\omega)},$$

из которой непосредственно вытекает справедливость оценки (22).

Отсюда вследствие неравенства $\|v\|_{L_2(\omega)} \leq C_3\|v\|_{W_{2,0}^2(\omega)}$ имеем

$$\left(\frac{\nu\delta_*}{2\bar{\nu}} - C_3\bar{q}_0\right) \|v\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq \|A(\theta)v\|_{L_2(\omega)}.$$

Зададим условие

$$\frac{\nu\delta_*}{2\bar{\nu}} - \frac{(\max l_\alpha)^2}{2}\bar{q}_0 > 0,$$

тогда для любой функции $v(x)$, $x \in \omega$, такой, что $v(x) = 0$, $x \in \gamma$, получаем

$$\|v\|_{W_2^2(\bar{\omega})} \leq C_0\|A(\theta)v\|_{L_2(\bar{\omega})}, \quad \theta(x) \in D_u, \quad x \in \bar{\omega},$$

где константа C_0 определена в (24). Лемма доказана.

Для нахождения приближённого решения нелинейных разностных уравнений (17)–(19) построим итерационный процесс, в котором коэффициенты сеточного оператора $A(y)$ берутся с предыдущей итерации, так что новое приближение $y^{(s+1)}(x)$, $x \in \bar{\omega}$, находится как решение линейной задачи:

$$A(y^{(s)})y^{(s+1)} = - \sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha\alpha}(x)y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}^{(s+1)} - 2\Phi_{12}(x)Q(y^{(s+1)}) + q(y^{(s)})y^{(s+1)} = f(y^{(s)}), \quad x \in \omega, \tag{35}$$

$$y^{(s+1)}(x) = 0, \quad x \in \gamma_h, \tag{36}$$

где $y^{(0)}(x)$, $x \in \bar{\omega}$, принадлежит малой окрестности D_u области значений точного решения (более того, см. далее теорему 4, $y^{(0)} \in S_u^* = \{v : \|v - u\|_C \leq \delta(1 - q_1^*)/(2(1 + q_1^*))\}$).

Лемма 4. Пусть $y^{(s)} \in D_u$, $x \in \bar{\omega}$. Тогда сеточная функция $y^{(s+1)}(x)$, $x \in \bar{\omega}$, определяемая из итерационного процесса (35), (36), ограничена в сеточных нормах пространств $W_{2,0}^2(\omega)$, $C(\bar{\omega})$, $L_2(\omega)$, $\mathring{W}_2^1(\omega)$:

$$\|y^{(s+1)}\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq C_5; \tag{37}$$

$$\|y^{(s+1)}\|_{C(\bar{\omega})} \leq C_2C_5, \quad \|y^{(s+1)}\|_{L_2(\omega)} \leq C_3C_5, \quad \|y^{(s+1)}\|_{\mathring{W}_2^1(\omega)} \leq C_4C_5, \tag{38}$$

где $C_5 = C_0f_0(l_1, l_2)^{1/2}$, а постоянные C_2 , C_3 и C_4 определены в лемме 2.

Доказательство оценки (37) следует из [17]. Доказательство оценок (38) непосредственно следует из леммы 3 и оценок (13)–(15) леммы 2.

В дальнейшем при доказательстве корректности разностной схемы (17)–(19) нам понадобится оценка погрешности первого приближения $z^{(1)}(x) = y^{(1)}(x) - u(x)$, $x \in \bar{\omega}$, в равномерной метрике. Обозначим через $\psi(x)$, $x \in \omega$, – невязку разностного уравнения (17) (погрешность аппроксимации уравнения (17) на решении исходного уравнения (1)):

$$\psi(x) = f(u) - \left[- \sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha\alpha}(x)u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - 2\Phi_{12}(x)Q(u) + q(u)u \right] = f(u) - A(u)u, \quad x \in \omega. \quad (39)$$

Складывая уравнения (35) при $s = 0$ с невязкой $\psi(x) = f(u(x)) - A(u(x))u(x)$, $x \in \omega$, после некоторых очевидных преобразований получим следующую задачу для погрешности $z^{(1)}(x)$, $x \in \bar{\omega}$:

$$A(u)z^{(1)} = [q(u) - q(y^{(0)})]y^{(1)} + [f(y^{(0)}) - f(u)] + \psi(x), \quad x \in \omega, \quad z^{(1)} = 0, \quad x \in \gamma,$$

где $A(u)z^{(1)} = - \sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha\alpha}(x)z_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}^{(1)} - 2\Phi_{12}(x)Q(z^{(1)}) + q(u)z^{(1)}$, $x \in \omega$, а сеточная функция $\psi(x)$, $x \in \omega$, имеет вид (39).

Лемма 5. Пусть $y^{(0)}(x)$, $x \in \bar{\omega}$, – начальное приближение итерационного процесса (35), (36), а $u(\xi)$ – точное решение задачи (1), (2). Тогда при $y^{(0)} \in D_u$ имеют место оценки

$$\|y^{(1)} - u\|_{W_{2,0}^2(\omega)} = \|z^{(1)}\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq C_0 C_6 \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} + C_0 \|\psi\|_{L_2(\omega)}, \quad (40)$$

$$\|z^{(1)}\|_{C(\bar{\omega})} \leq C_0 C_2 C_6 \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} + C_0 C_2 \|\psi\|_{L_2(\omega)} \leq (1 + q_1^*) \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} + C_0 C_2 \|\psi\|_{L_2(\omega)} = \beta,$$

где $C_0 C_2 C_6 = q_1^*$ (см. (7), (8)), $C_6 = C_3 C_5 L_q + L_f(l_1 l_2)^{1/2}$.

Доказательство. Имеем

$$\|A(u)z^{(1)}\|_{L_2(\omega)} \leq \|[q(u) - q(y^{(0)})]y^{(1)}\|_{L_2(\omega)} + \|[f(y^{(0)}) - f(u)]\|_{L_2(\omega)} + \|\psi\|_{L_2(\omega)}. \quad (41)$$

Далее, так как $y^{(0)}(x), u(x) \in D_u$, то в силу условий на входные данные задачи

$$|q(u) - q(y^{(0)})| \leq L_q |z^{(0)}(x)|, \quad |f(u) - f(y^{(0)})| \leq L_f |z^{(0)}(x)|$$

из оценки (41) следует, что

$$\|A(u)z^{(1)}\|_{L_2(\omega)} \leq L_q \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} \|y^{(1)}\|_{L_2(\omega)} + L_f \|z^{(0)}\|_{L_2(\omega)} + \|\psi\|_{L_2(\omega)}.$$

Очевидна оценка $\|z^{(0)}\|_{L_2(\omega)} \leq (l_1 l_2)^{1/2} \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})}$. Тогда

$$\|A(u)z^{(1)}\|_{L_2(\omega)} \leq L_q \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} \|y^{(1)}\|_{L_2(\omega)} + L_f (l_1 l_2)^{1/2} \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} + \|\psi\|_{L_2(\omega)}.$$

В силу неравенств (38) имеем

$$\|A(u)z^{(1)}\|_{L_2(\omega)} \leq C_6 \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} + \|\psi\|_{L_2(\omega)}. \quad (42)$$

Принимая во внимание оценку (23) из леммы 3 при $v = z^{(1)}$, вследствие неравенства (42) получаем

$$\|z^{(1)}\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq C_0 C_6 \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} + C_0 \|\psi\|_{L_2(\omega)}. \quad (43)$$

В силу оценки $\|z^{(1)}\|_{C(\bar{\omega})} \leq C_2 \|z^{(1)}\|_{W_{2,0}^2(\omega)}$ из неравенства (43) следует, что

$$\|z^{(1)}\|_{C(\bar{\omega})} \leq C_0 C_2 C_6 \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} + C_0 C_2 \|\psi\|_{L_2(\omega)},$$

откуда

$$\|z^{(1)}\|_{C(\bar{\omega})}(1 - C_0C_2C_6) \leq C_0C_2\|\psi\|_{L_2(\omega)}.$$

Поэтому справедлива оценка

$$\|z^{(1)}\|_{C(\bar{\omega})} \leq q_1^*\|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} + C_0C_2\|\psi\|_{L_2(\omega)} \leq (1 + q_1^*)\|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} + C_0C_2\|\psi\|_{L_2(\omega)} = \beta.$$

Лемма доказана.

Следствие. Пусть выполнены условия леммы 5. Тогда имеет место оценка

$$\|\Delta y^{(1)}\|_{C(\bar{\omega})} \leq (1 + q_1^*)\|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} + C_0C_2\|\psi(x)\|_{L_2(\omega)} = \beta.$$

Теорема 3. Пусть $y^{(k)}(x) \in D_u$, $k = \overline{0, s}$, – приближения, построенные при помощи итерационного процесса (35), (36). Тогда справедлива оценка

$$\|\Delta y^{(s+1)}\|_{C(\bar{\omega})} = \max_{x \in \bar{\omega}} |y^{(s+1)}(x) - y^{(s)}(x)| \leq q_1^*\|\Delta y^{(s)}\|_{C(\bar{\omega})} \leq \beta(q_1^*)^s,$$

где константы $\beta > 0$ и q_1^* определены в лемме 5 и в соотношении (8) соответственно.

Доказательство. Рассмотрим итерационный процесс (35), (36). Получим задачу для разности соседних итераций $\Delta y^{(s+1)} = y^{(s+1)} - y^{(s)}$. Для этого вычтем из (35) это же уравнение, записанное для предыдущей итерации. В результате получаем задачу

$$\begin{aligned} A(y^{(s)})\Delta y^{(s+1)} &= -[q(y^{(s)}) - q(y^{(s-1)})]y^{(s)} + [f(y^{(s)}) - f(y^{(s-1)})], \\ \Delta y^{(s+1)}(x) &= 0, \quad x \in \gamma, \end{aligned} \tag{44}$$

где

$$A(y^{(s)})\Delta y^{(s+1)} = -\sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha\alpha}(x)\Delta y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}^{(s+1)} - 2\Phi_{12}(x)[Q(y^{(s+1)}) - Q(y^{(s)})] + q(y^{(s)})\Delta y^{(s+1)}. \tag{45}$$

Рассмотрим теперь задачу (44), (45). Имеем

$$\|A(y^{(s)})\Delta y^{(s+1)}\|_{L_2(\omega)} \leq \|[q(y^{(s)}) - q(y^{(s-1)})]y^{(s)}\|_{L_2(\omega)} + \|f(y^{(s)}) - f(y^{(s-1)})\|_{L_2(\omega)}. \tag{46}$$

Оценим правую часть неравенства (46). Поскольку $y^{(k)} \in D_u$, $k = \overline{0, s}$, $x \in \bar{\omega}$, то, учитывая ограничения на входные данные задачи, получаем

$$|q(y^{(s)}) - q(y^{(s-1)})| \leq L_q|\Delta y^{(s)}|, \quad |f(y^{(s)}) - f(y^{(s-1)})| \leq L_f|\Delta y^{(s)}|,$$

откуда следует, что

$$\|A(y^{(s)})\Delta y^{(s+1)}\|_{L_2(\omega)} \leq L_q\|\Delta y^{(s)}\|_{C(\bar{\omega})}\|y^{(s)}\|_{L_2(\omega)} + L_f\|\Delta y^{(s)}\|_{L_2(\omega)} \leq C_6\|\Delta y^{(s)}\|_{C(\bar{\omega})}. \tag{47}$$

Далее, так как $y^{(k)} \in D_u$, $k = \overline{0, s}$, то справедлива оценка

$$\|\Delta y^{(s+1)}\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})} \leq C_0\|A(y^{(s)})\Delta y^{(s+1)}\|_{L_2(\omega)}. \tag{48}$$

Принимая во внимание неравенства (47) и (48), будем иметь

$$\|\Delta y^{(s+1)}\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})} \leq C_0C_6\|\Delta y^{(s)}\|_{C(\bar{\omega})}. \tag{49}$$

Наконец, используя разностный аналог теоремы вложения $\|\Delta y^{(s+1)}\|_{C(\bar{\omega})} \leq C_2\|\Delta y^{(s+1)}\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}$, вследствие (49) получаем оценку

$$\|\Delta y^{(s+1)}\|_{C(\bar{\omega})} \leq C_0C_2C_6\|\Delta y^{(s)}\|_{C(\bar{\omega})} = q_1^*\|\Delta y^{(s)}\|_{C(\bar{\omega})}.$$

Откуда, учитывая приведенное выше следствие, заключаем, что

$$\begin{aligned} \|\Delta y^{(s+1)}\|_{C(\bar{\omega})} &\leq q_1^* \|\Delta y^{(s)}\|_{C(\bar{\omega})} \leq \dots \leq (q_1^*)^s \|\Delta y^{(1)}\|_{C(\bar{\omega})} \leq \\ &\leq (q_1^*)^s [(1 + q_1^*) \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} + C_0 C_2 \|\psi\|_{L_2(\omega)}] = \beta (q_1^*)^s. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Под δ -окрестностью точного решения $u(x)$ задачи (1), (2) будем понимать множество $S_u = \{v : \|v - u\|_C \leq \delta\}$. Вопрос о сходимости итерационного процесса (35), (36) и разрешимости нелинейной разностной задачи (17)–(19) изучается в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть выполнены условия, сформулированные при постановке краевой задачи (1), (2), а выбор начального приближённого $y^{(0)}(x)$ в итерационном процессе (35), (36) для нелинейной сеточной краевой задачи (17)–(19) подчинён условию

$$y^{(0)} \in S_u^* = \left\{ v : \|v - u\|_C \leq \frac{1 - q_1^*}{1 + q_1^*} \frac{\delta}{2} \right\}, \quad \frac{\beta}{1 - q_1^*} < \delta,$$

где константа β определена в лемме 5.

Тогда в δ -окрестности S_u точного решения $u(x)$ дифференциальной задачи существует и притом единственное решение $y(x)$ нелинейной разностной схемы (17)–(19), которое может быть получено при любом фиксированном управлении $g \in U$ как предел последовательности $\{y^{(s)}\}_{s=1}^\infty$, определяемой итерационным процессом (35), (36), причём скорость сходимости последовательности итераций $\{y^{(s)}\}_{s=1}^\infty$ к решению $y(x)$ задачи (17)–(19) удовлетворяет неравенству

$$\|y^{(s)} - y\|_{C(\bar{\omega})} \leq \frac{\beta}{1 - q_1^*} (q_1^*)^s.$$

Кроме того, справедливы следующие оценки:

$$\|y\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq C_5, \quad \|y\|_{C(\bar{\omega})} \leq C_2 C_5, \quad \|y\|_{L_2(\omega)} \leq C_3 C_5, \quad \|y\|_{W_{2,0}^1(\omega)} \leq C_4 C_5. \quad (50)$$

Доказательство. Прежде всего докажем, что все последовательные приближения $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots$, определяемые итерационным процессом (35), (36), содержатся в множестве S_u , т.е. $y^{(s)} \in S_u, s = 1, 2, \dots$ (не выходят из S_u).

Доказательство проведём методом математической индукции. По условию теоремы $y^{(0)} \in S_u^*$, откуда очевидно следует, что $y^{(0)} \in S_u$. Значит, $y^{(0)} \in D_u$, а в силу леммы 5 и условия $\beta/(1 - q_1^*) < \delta$ имеем

$$\|z^{(1)}\|_{C(\bar{\omega})} = \|y^{(1)} - u\|_{C(\bar{\omega})} \leq \beta < \beta/(1 - q_1^*) < \delta.$$

Откуда $y^{(1)} \in S_u$. Основание индукции доказано. Допустим теперь, что $y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(s)} \in S_u$, и покажем, что $y^{(s+1)} \in S_u$. Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned} \|y^{(s+1)} - u\|_{C(\bar{\omega})} &\leq \|y^{(1)} - u\|_{C(\bar{\omega})} + \dots + \|y^{(s+1)} - y^{(s)}\|_{C(\bar{\omega})} = \|y^{(1)} - u\|_{C(\bar{\omega})} + \\ &+ \sum_{k=1}^s \|\Delta y^{(k+1)}\|_{C(\bar{\omega})} \leq \beta + \beta q_1^* + \beta (q_1^*)^2 + \dots + \beta (q_1^*)^s = \sum_{k=0}^s \beta (q_1^*)^k < \beta \frac{1}{1 - q_1^*} < \delta. \end{aligned} \quad (51)$$

Следовательно, $y^{(s)} \in S_u$. Таким образом, $y^{(m)} \in S_u, m = 0, 1, 2, \dots$, т.е. метод итераций не выводит за пределы множества S_u .

Далее, возьмём отрезок $y^{(s)}, y^{(s+1)}, \dots, y^{(s+p)}$ последовательности $\{y^{(m)}\}_{m=1}^\infty$. Так как элементы $y^{(s+k)}, k = \overline{0, p}$, принадлежат S_u , то, последовательно применяя неравенство треугольника и оценку из теоремы 3, получаем цепочку неравенств

$$\|y^{(s+p)} - y^{(s)}\|_{C(\bar{\omega})} \leq \sum_{k=1}^p \|\Delta y^{(s+k)}\|_{C(\bar{\omega})} \leq \beta (q_1^*)^{(s)} + \beta (q_1^*)^{(s+1)} + \dots + \beta (q_1^*)^{(s+p-1)} =$$

$$= \beta(q_1^*)^{(s)} [1 + q_1^* + (q_1^*)^{(2)} + \dots + (q_1^*)^{(p-1)}] = \beta(q_1^*)^{(s)} \sum_{k=1}^p (q_1^*)^{(k-1)} < \frac{\beta(q_1^*)^s}{1 - q_1^*}. \tag{52}$$

Это означает, что последовательность $\{y^{(s)}\}_{s=1}^\infty$ является фундаментальной (Коши). Так как пространство $C(\bar{\omega})$ с нормой $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega})}$ полное, то существует предел данной последовательности $\lim_{s \rightarrow \infty} y^{(s+1)} = y$. Переходя к пределу в (51) при $s \rightarrow \infty$, получаем, что предел y последовательности $\{y^{(s)}\}_{s=1}^\infty$ принадлежит S_u . Затем, переходя к пределу при $s \rightarrow \infty$ в (35), (36), убеждаемся, что сеточная функция y является решением сеточной краевой задачи. Следовательно, решение разностной краевой задачи существует.

Оценка скорости сходимости метода итераций (35), (36) вытекает из (52) при $p \rightarrow \infty$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|y^{(s+p)} - y^{(s)}\|_{C(\bar{\omega})} = \|y - y^{(s)}\|_{C(\bar{\omega})} \leq \beta(q_1^*)^s / (1 - q_1^*).$$

Поскольку $y \in S_u$, то аналогично лемме 4 показывается, что решение y разностной схемы удовлетворяет первой оценке в (50). Далее, принимая во внимание оценку из леммы 4, убеждаемся в справедливости остальных оценок в теореме 4.

Докажем единственность решения нелинейной разностной схемы (17). Допустим противное: кроме $y \in S_u$ существует другое решение $\tilde{y} \in S_u$ разностной схемы (17)–(19). Вычитая из (17) это же уравнение при $y = \tilde{y}$, получаем задачу для $\Delta y = y(x) - \tilde{y}(x)$:

$$A(y)\Delta y = [q(\tilde{y}) - q(y)]\tilde{y} + [f(\tilde{y}) - f(y)], \quad x \in \omega, \quad \Delta y = 0, \quad x \in \gamma, \tag{53}$$

где $A(y)\Delta y = -\sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha\alpha}(x)\Delta y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - 2\Phi_{12}(x)[Q(y) - Q(\tilde{y})] + q(y)\Delta y$. Нетрудно видеть (приводя для задачи (53) рассуждения, аналогичные тем, что и при доказательстве леммы 5, и принимая во внимание оценку из леммы 3), что справедливо неравенство

$$\|\Delta y\|_{C(\bar{\omega})} \leq C_2 \|\Delta y\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq C_0 C_2 C_6 \|\Delta y\|_{C(\bar{\omega})} = q_1^* \|\Delta y\|_{C(\bar{\omega})}.$$

Откуда $(1 - q_1^*)\|\Delta y\|_{C(\bar{\omega})} \leq 0$. Поскольку $q_1^* < 1$, то $\|\Delta y\|_{C(\bar{\omega})} = 0$. Следовательно, $y(x) = \tilde{y}(x)$. Теорема доказана.

Замечание 2. В дальнейшем будем предполагать, что условия теоремы 4 выполнены.

3. Погрешность сеточной задачи по состоянию. Перейдём к изучению погрешности разностной схемы (17)–(19) на сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$.

Теорема 5. Для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ при достаточно малом $h < h_0$ справедлива следующая оценка погрешности метода сеток $z(x, g, \Phi_h) = y(x, \Phi_h) - u(x, g)$ в сеточной $W_{2,0}^2(\omega)$ -норме:

$$\|z\|_{W_{2,0}^2(\omega)} = \|y - u\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq \frac{C_0}{1 - q_1^*} \|\psi\|_{L_2(\omega)}, \tag{54}$$

где $\psi(x)$ – невязка разностного уравнения (17)–(19):

$$\begin{aligned} \psi(x) &= f(u) - A(u)u = f(u) - \left[-\sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha\alpha}(x)u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - 2\Phi_{12}(x)Q(u) + q(u)u \right] = \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \left[\Phi_{\alpha\alpha}(x)u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - k_{\alpha\alpha}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \right] + 2 \left[\Phi_{12}(x)Q(u) - k_{12}(x)\frac{\partial^2(u)}{\partial x_1 \partial x_2} \right]. \end{aligned} \tag{55}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что при достаточно малом $h < h_0$ неравенство $\beta/(1 - q_1^*) < \delta$ в теореме 4, где $\beta = (1 + q_1^*)\|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} + C_0 C_2 \|\psi\|_{L_2(\omega)}$, будет выполнено, так как $\beta = \beta(h)$. Действительно, во-первых, если $y^{(0)} \in S_u^*$, т.е.

$$\|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} = \|y^{(0)} - u\|_{C(\bar{\omega})} \leq \frac{1 - q_1^*}{1 + q_1^*} \frac{\delta}{2}, \tag{56}$$

то $y^{(0)} \in S_u$. Для $y^{(0)} \in S_u^*$ имеем

$$\delta - \frac{\beta}{1 - q_1^*} = \delta - \frac{1}{1 - q_1^*} (1 + q_1^*) \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} - \frac{C_0 C_2}{(1 - q_1^*)} \|\psi\|_{L_2(\omega)}.$$

В силу (56) получаем

$$\delta - \frac{\beta}{1 - q_1^*} \geq \frac{\delta}{2} - \frac{C_0 C_2}{1 - q_1^*} \|\psi\|_{L_2(\omega)}.$$

Тогда при достаточно малых $h < h_0$ имеем $C_0 C_2 \|\psi\|_{L_2(\omega)} / (1 - q_1^*) \leq \delta/2$, так что $\beta / (1 - q_1^*) \leq \delta$ при достаточно малых $h > 0$.

Таким образом, условия теоремы 4 выполнены и, следовательно, $y \in S_u$.

Установим теперь оценку (54), (55). Складывая уравнение (17) с невязкой $\psi(x) = f(u(x)) - A(u(x))u(x)$, $x \in \omega$, придём после некоторых очевидных преобразований к задаче для погрешности $z(x) = y(x) - u(x)$ разностной схемы (17)–(19):

$$A(u)z = [q(u) - q(y)]y + [f(y) - f(u)] + \psi(x), \quad x \in \omega, \\ z(x) = 0, \quad x \in \gamma,$$

где $A(u)z = -\sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha\alpha}(x) z_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - 2\Phi_{12}(x)[Q(y) - Q(u)] + q(y)z$, $x \in \omega$.

Далее, рассуждениями, аналогичными приведённым при доказательстве оценки (40) леммы 5, несложно показать, что для погрешности z справедлива оценка

$$\|z(x)\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq C_0 C_6 \|z\|_{C(\bar{\omega})} + C_0 \|\psi\|_{L_2(\omega)},$$

из которой в силу оценки (13) для функции z следует неравенство

$$\|z(x)\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq \frac{C_0}{1 - C_0 C_2 C_6} \|\psi\|_{L_2(\omega)} = \frac{C_0}{1 - q_1^*} \|\psi\|_{L_2(\omega)}.$$

Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что для получения оценки скорости сходимости разностной схемы (17)–(19) достаточно установить оценку для сеточной функции $\psi(x)$.

Лемма 6. Пусть $u \in W_2^m(\Omega)$, где $3 < m \leq 4$, и $y \in W_{2,0}^2(\bar{\omega})$ – соответственно решения дифференциальной (1), (2) и разностной задач (17)–(19) при фиксированных управлениях $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$. Тогда для погрешности аппроксимации схемы (17)–(19) справедлива оценка

$$\|\psi\|_{L_2(\omega)} \leq \sum_{\alpha=1}^2 \|k_{\alpha\alpha} - \Phi_{\alpha\alpha}\|_{L_\infty(\omega)} \|u\|_{W_{2,0}^2(\omega)} + M_* |h|^{m-2} \|u\|_{W_2^m(\Omega)} + 2\|k_{12} - \Phi_{12}\|_{L_\infty(\omega)} \|u\|_{W_{2,0}^2(\omega)};$$

где $3 < m \leq 4$, а константа M_* не зависит от h и $u(x)$.

Доказательство. Рассмотрим сеточную функцию $\psi(x)$, $x \in \omega = \omega_1 \times \omega_2$. Её можно представить в следующем виде:

$$\psi(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \psi_{\alpha\alpha}^{(1)}(x) + 2\psi_{12}^{(1)}(x) + \sum_{\alpha=1}^2 \psi_{\alpha\alpha}^{(2)}(x) + 2\psi_{12}^{(2)}(x), \quad x \in \omega \in \Omega,$$

где $\psi_{\alpha\alpha}(x) = \psi_{\alpha\alpha}^{(1)}(x) + \psi_{\alpha\alpha}^{(2)}(x)$, $\psi_{\alpha\alpha}^{(1)}(x) = k_{\alpha\alpha}(x)(u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - \partial^2 u / \partial x_\alpha^2)$, $\psi_{\alpha\alpha}^{(2)}(x) = \Phi_{\alpha\alpha}(x)u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - k_{\alpha\alpha}(x)u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $\psi_{12}^{(1)}(x) = k_{12}(x)(Q(u) - \partial^2 u / \partial x_1 \partial x_2)$, $\psi_{12}^{(2)}(x) = \Phi_{12}(x)Q(u) - k_{12}(x)Q(u)$.

Тогда

$$\|\psi\|_{L_2(\omega)}^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega} \left[k_{\alpha\alpha} \left(u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \right) \right]^2 h_1 h_2 + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega} [\Phi_{\alpha\alpha} u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - k_{\alpha\alpha} u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}]^2 h_1 h_2 +$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2 \left\{ \sum_{\omega} [\Phi_{12}(x)Q(u) - k_{12}(x)Q(u)]^2 h_1 h_2 + \sum_{\omega} \left[k_{12}(x) \left(Q(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right]^2 h_1 h_2 \right\} = \\
 &= \sum_{\alpha=1}^2 \{ \|\psi_{\alpha\alpha}^{(1)}\|_{L_2(\omega)} + \|\psi_{\alpha\alpha}^{(2)}\|_{L_2(\omega)} \} + 2 \{ \|\psi_{12}^{(1)}\|_{L_2(\omega)} + \|\psi_{12}^{(2)}\|_{L_2(\omega)} \}. \tag{57}
 \end{aligned}$$

Справедливы оценки

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\omega} [\Phi_{\alpha\alpha}(x)u_{\bar{x}_{\alpha}x_{\alpha}} - k_{\alpha\alpha}(x)u_{\bar{x}_{\alpha}x_{\alpha}}]^2 h_1 h_2 \leq \|\Phi_{\alpha\alpha}(x) - k_{\alpha\alpha}(x)\|_{L_{\infty}(\omega)}^2 \|u_{\bar{x}_{\alpha}x_{\alpha}}\|_{L_2(\omega)}^2; \\
 &\sum_{\omega} [\Phi_{12}(x)Q(u) - k_{12}(x)Q(u)]^2 h_1 h_2 \leq \|\Phi_{12}(x) - k_{12}(x)\|_{L_{\infty}(\omega)}^2 \sum_{\omega} (Q(u))^2 h_1 h_2; \\
 &\sum_{\omega} Q^2(u) h_1 h_2 = \sum_{\omega} \left(\frac{u_{x_1 x_2} + u_{x_1 \bar{x}_2} + u_{\bar{x}_1 x_2} + u_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}}{4} \right)^2 h_1 h_2 \leq \\
 &\leq \frac{1}{4} \sum_{\omega} (u_{x_1 x_2}^2 + u_{x_1 \bar{x}_2}^2 + u_{\bar{x}_1 x_2}^2 + u_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2) h_1 h_2 \leq \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} u_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2 h_1 h_2,
 \end{aligned}$$

вследствие которых имеем

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega} [\Phi_{\alpha\alpha}(x) - k_{\alpha\alpha}(x)]^2 u_{\bar{x}_{\alpha}x_{\alpha}}^2 h_1 h_2 + 2 \sum_{\omega} [\Phi_{12}(x) - k_{12}(x)]^2 Q^2(u) h_1 h_2 \leq \\
 &\leq \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \|\Phi_{\alpha\alpha}(x) - k_{\alpha\alpha}(x)\|_{L_{\infty}(\omega)}^2 + 2\|\Phi_{12} - k_{12}\|_{L_{\infty}(\omega)}^2 \right\} \|u\|_{W_{2,0}^2(\omega)}^2. \tag{58}
 \end{aligned}$$

В работе [17, с. 25–28] установлены оценки остальных слагаемых в (57); воспользовавшись ими, получим

$$\begin{aligned}
 &|\psi_{\alpha\alpha}^{(1)}(x)| \leq \bar{\nu} \bar{M} M M_0 |h|^{m-2} (h_1 h_2)^{-1/2} |u|_{W_2^m(e(x))}, \quad \alpha = 1, 2, \quad x \in \omega; \\
 &|\psi_{12}^{(1)}(x)| \leq \bar{\nu} \bar{M} M M_0 |h|^{m-2} (h_1 h_2)^{-1/2} |u|_{W_2^m(e(x))}, \quad x \in \omega, \quad u \in W_2^m(e(x)), \quad 3 < m \leq 4. \tag{59}
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание неравенства (57)–(59), будем иметь

$$\|\psi\|_{L_2(\omega)}^2 \leq \|g - \Phi_h\|_{L_{\infty}(\omega)}^2 \|u\|_{W_{2,0}^2(\omega)}^2 + M_*^2 (|h|^{m-2})^2 \|u\|_{W_2^m(\Omega)},$$

откуда

$$\|\psi\|_{L_2(\omega)} \leq \|g - \Phi_h\|_{L_{\infty}(\omega)} \|u\|_{W_{2,0}^2(\omega)} + M_* |h|^{m-2} \|u\|_{W_2^m(\Omega)}, \quad 3 < m \leq 4.$$

Лемма доказана.

Теорема 6. Для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ экстремальных задач (1)–(8) и (16)–(20) и при достаточно малом $h < h_0$ справедлива оценка погрешности $z(\Phi_h, g) = y(\Phi_h) - u(g)$ метода сеток по состоянию в сеточной $W_{2,0}^2(\omega)$ -норме:

$$\|z(\Phi_h, g)\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq \tilde{M}_* |h|^{m-2} \|u\|_{W_2^m(\Omega)} + \tilde{C} \|g - \Phi_h\|_{L_{\infty}(\omega)} \|u\|_{W_{2,0}^2(\omega)}, \quad 3 < m \leq 4.$$

Доказательство. В силу теоремы 5 и леммы 6 получаем

$$\|z\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq \frac{C_0}{1 - q_1^*} \|\psi\|_{L_2(\omega)} \leq \frac{C_0}{1 - q_1^*} \{ M_* |h|^{m-2} \|u\|_{W_2^m(\Omega)} + \|g - \Phi_h\|_{L_{\infty}(\omega)} \|u\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \} \leq$$

$$\leq \widetilde{M}_* |h|^{m-2} \|u\|_{W_2^m(\Omega)} + \widetilde{C} \|g - \Phi_h\|_{L_\infty(\omega)} \|u\|_{W_{2,0}^2(\Omega)}, \quad 3 < m \leq 4,$$

где константы \widetilde{M}_* и \widetilde{C} не зависят от h (шага сетки) и функции $u(x)$. Теорема доказана.

4. Оценки погрешности сеточного функционала, сходимость аппроксимаций по функционалу и управлению. Регуляризация аппроксимаций. Используя доказанные выше утверждения, рассмотрим вопрос о сходимости аппроксимаций по функционалу и аргументу (управлению).

Теорема 7. Для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ экстремальных задач (1)–(8) и (16)–(20) соответственно при достаточно малом $h < h_0$ для погрешности сеточного функционала $J_h(\Phi_h)$ задач (16)–(20) справедлива оценка

$$|J(g(\xi)) - J_h(\Phi_h(x))| \leq M_0 \{ |h| + \|g - \Phi_h\|_{L_\infty(\omega)} \},$$

где $M_0 = \text{const} > 0$, не зависящая от h, y, u, Φ_h, g .

Доказательство. Пусть $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ – произвольные управления, а $u(\xi) = u(\xi; g)$ и $y(x) = y(x; \Phi_h)$ – соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах (1)–(8) и (16)–(20). Принимая во внимание представления (8), (16) и проводя некоторые очевидные преобразования, приведём погрешность функционала $\theta_h(g, \Phi_h) = J(g) - J_h(\Phi_h)$ к виду

$$\theta_h(g, \Phi_h) = J(g) - J_h(\Phi_h) = B_h^{(1)} + B_h^{(2)},$$

где

$$B_h^{(1)} = \|u(\xi, g) - u_0(\xi)\|_{L_2(\Omega)}^2 - \|P_h u(\xi, g) - P_h u_0(\xi)\|_{L_2(\Omega)}^2;$$

$$B_h^{(2)} = \|P_h u(\xi, g) - P_h u_0(\xi)\|_{L_2(\Omega)}^2 - \|y(x, \Phi_h) - u_{0h}(x)\|_{L_2(\bar{\omega})}^2.$$

Несложно показывается, что для величин $B_h^{(k)}$, $k = 1, 2$, справедливы оценки

$$|B_h^{(1)}| \leq [\|u(\xi, g) - P_h u(\xi, g)\|_{L_2(\Omega)} + \|u_0(\xi) - P_h u_0(\xi)\|_{L_2(\Omega)}] \times$$

$$\times [\|u(\xi, g)\|_{L_2(\Omega)} + \|P_h u(\xi, g)\|_{L_2(\Omega)} + \|u_0(\xi)\|_{L_2(\Omega)} + \|P_h u_0(\xi)\|_{L_2(\Omega)}], \quad (60)$$

$$|B_h^{(2)}| \leq \|y(x, \Phi_h) - u(\xi, g)\|_{L_2(\bar{\omega})} [\|u(x, g)\|_{L_2(\bar{\omega})} + \|y(x, \Phi_h)\|_{L_2(\bar{\omega})} + 2\|u_{0h}(x)\|_{L_2(\bar{\omega})}].$$

Здесь через $P_h \nu(\xi)$, $\xi \in \Omega$, обозначено кусочно-постоянное восполнение на Ω сеточной функции $\nu(x)$, $x \in \bar{\omega}$, определяемое по формуле

$$P_h \nu(\xi) = \nu(x), \quad \xi \in e(x), \quad x \in \bar{\omega},$$

где $e(x) = e_1(x_1) \times e_2(x_2)$, $x \in \bar{\omega}$, $e_\alpha(x_\alpha) = \{\xi_\alpha : x_\alpha - 0.5h_\alpha \leq \xi_\alpha \leq x_\alpha + 0.5h_\alpha\}$, $x_\alpha \in \omega_\alpha$, $e_\alpha(0) = \{\xi_\alpha : 0 \leq \xi_\alpha \leq 0.5h_\alpha\}$, $e_\alpha(l_\alpha) = \{\xi_\alpha : l_\alpha - 0.5h_\alpha \leq \xi_\alpha \leq l_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2$.

Оценим величину $\|u(\xi) - P_h u(\xi)\|_{L_2(\Omega)}^2$. Имеем

$$\|u(\xi) - P_h u(\xi)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{\bar{\omega}} \int_{e(x)} (u(\xi) - P_h u(\xi))^2 d\xi = \sum_{\bar{\omega}} \int_{e(x)} (u(\xi) - u(x))^2 d\xi =$$

$$= \sum_{\bar{\omega}} \int_{e(x)} \left(\int_{x_2}^{\xi_2} \frac{\partial u(\xi_1, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{x_1}^{\xi_1} \frac{\partial u(\nu, \xi_2)}{\partial \nu} d\nu + \int_{x_1}^{\xi_1} \int_{x_2}^{\xi_2} \frac{\partial^2 u(\nu, \tau)}{\partial \nu \partial \tau} d\nu d\tau \right)^2 d\xi \leq$$

$$\leq \sum_{\bar{\omega}} \int_{e(x)} \left[h_2^{1/2} \left(\int_{e_2(x_2)} \left| \frac{\partial u(\xi_1, \tau)}{\partial \tau} \right|^2 d\tau \right)^{1/2} + h_1^{1/2} \left(\int_{e_1(x_1)} \left| \frac{\partial u(\nu, \xi_2)}{\partial \nu} \right|^2 d\nu \right)^{1/2} + \right.$$

$$+ (h_1 h_2)^{1/2} \left(\int_{e(x)} \left| \frac{\partial^2 u(\nu, \tau)}{\partial \nu \partial \tau} \right|^2 d\nu d\tau \right)^{1/2} d\xi_1 d\xi_2 \leq \sum_{\bar{\omega}} |h|^2 \|u(\xi)\|_{W_2^2(e(x))}^2.$$

Следовательно,

$$\|u(\xi) - P_h u(\xi)\|_{L_2(\Omega)} \leq |h| \|u\|_{W_2^2(\Omega)}. \quad (61)$$

Оценим величину $\|u_0 - P_h u_0^h\|_{L_2(\Omega)}^2$. Получаем

$$\begin{aligned} \|u_0 - P_h u_0^h\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \sum_{\bar{\omega}} \int_{e(x)} (u_0(t) - u_0^h(x))^2 dt = \sum_{\bar{\omega}} \int_{e(x)} \left[\frac{1}{\bar{h}_1 \bar{h}_2} \int_{e(x)} (u_0(t) - u_0(\xi)) d\xi \right]^2 dt = \\ &= \sum_{\bar{\omega}} \int_{e(x)} \left\{ \frac{1}{\bar{h}_1 \bar{h}_2} \int_{e(x)} \left[\int_{\xi_1}^{t_1} \frac{\partial u_0(\theta_1, t_2)}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \int_{\xi_2}^{t_2} \frac{\partial u_0(\xi_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} d\theta_2 \right] d\xi \right\}^2 dt \leq \\ &\leq 2 \sum_{\bar{\omega}} (\bar{h}_1 \bar{h}_2)^{-1} \int_{e(x)} \left\{ \int_{e(x)} \left[\bar{h}_1 \int_{e_1(x_1)} \left| \frac{\partial u_0(\theta_1, t_2)}{\partial \theta_1} \right|^2 d\theta_1 + \bar{h}_2 \int_{e_2(x_2)} \left| \frac{\partial u_0(\xi_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \right|^2 d\theta_2 \right] d\xi \right\} dt \leq \\ &\leq 2 \sum_{\bar{\omega}} \left[h_1^2 \int_{e(x)} \left| \frac{\partial u_0(t_1, t_2)}{\partial t_1} \right|^2 dt + h_2^2 \int_{e(x)} \left| \frac{\partial u_0(t_1, t_2)}{\partial t_2} \right|^2 dt \right] \leq 2|h|^2 \|u_0(t)\|_{W_2^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|u_0 - P_h u_0^h\|_{L_2(\Omega)} \leq 2^{1/2} |h| \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}. \quad (62)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|P_h u_0^h(\xi)\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \sum_{\bar{\omega}} \int_{e(x)} (u_0^h(x))^2 d\xi = \sum_{\bar{\omega}} (u_0^h(x))^2 \bar{h}_1 \bar{h}_2 = \|u_0^h(x)\|_{L_2(\bar{\omega})}^2 = \\ &= \sum_{\bar{\omega}} \left(\frac{1}{\bar{h}_1 \bar{h}_2} \int_{e(x)} u_0(\xi) d\xi \right)^2 \bar{h}_1 \bar{h}_2 \leq \sum_{\bar{\omega}} \int_{e(x)} (u_0(\xi))^2 d\xi = \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (63)$$

откуда вытекает, что

$$\|u_0^h(x)\|_{L_2(\bar{\omega})} \leq \|u_0(\xi)\|_{L_2(\Omega)}. \quad (64)$$

Кроме того, имеем

$$\|P_h u(\xi)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{\bar{\omega}} \int_{e(x)} u^2(x) d\xi = \|u(x)\|_{L_2(\bar{\omega})}^2 \leq C_3 \|u\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}. \quad (65)$$

Учитывая оценки (61)–(65), а также теоремы вложения и оценки (50), вследствие неравенства (60) получаем

$$|B_h^{(1)}| \leq \{ |h| \|u\|_{W_{2,0}^2(\Omega)} + 2^{1/2} |h| \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \} [\|u\|_{L_2(\Omega)} + C_3 \|u\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})} + 2 \|u_0\|_{L_2(\Omega)}] \leq |h| C^*.$$

Используя априорную оценку для погрешности метода по состоянию (см. теорему 6), неравенства (50), (64) и теоремы вложения, получаем оценку для $B_h^{(2)}$:

$$\begin{aligned} |B_h^{(2)}| &\leq \{ \widetilde{M}_* |h|^{m-2} \|u\|_{W_{2,0}^2(\Omega)} + \widetilde{C} \|g - \Phi_h\|_{L_\infty(\omega)} \|u\|_{W_{2,0}^2(\Omega)} \} \times \\ &\times [\|u\|_{L_2(\bar{\omega})} + \|y\|_{L_2(\bar{\omega})} + 2 \|u_0\|_{L_2(\Omega)}] \leq |h|^{m-2} C^{**} + \widetilde{C}^* \|g - \Phi_h\|_{L_\infty(\omega)}, \end{aligned}$$

откуда

$$|J(g) - J_h(\Phi_h)| \leq |h|C^* + |h|^{m-2}C^{**} + \tilde{C}^* \|g - \Phi_h\|_{L_\infty(\omega)} \leq M_0\{|h| + \|g - \Phi_h\|_{L_\infty(\omega)}\}.$$

Теорема доказана.

Определим теперь некоторые восполнения сеточных управлений $\Phi_{\alpha\beta h}(x)$, $x \in \bar{\omega}$, $\alpha, \beta = 1, 2$, на Ω . Для построения кусочно-линейного восполнения сеточного управления $\Phi_{\alpha\beta h}(x)$, $x \in \omega$, $\alpha, \beta = 1, 2$, на Ω каждую элементарную ячейку $e^+(x) \subset \bar{\Omega}$, где $e^+(x) = e^+(x_1, x_2) = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : x_\alpha \leq \xi_\alpha \leq x_\alpha + h_\alpha, \alpha = 1, 2\} = \bar{e}'_1(x_1) \times \bar{e}'_2(x_2)$, $x \in \omega_1^- \times \omega_2^-$, разобьём диагональю, образующей тупой угол с осью ξ_1 , на два треугольника. Треугольники, расположенные выше диагонали, будем обозначать через $\Delta_-(x)$, а нижние – через $\Delta_+(x)$. Здесь $x = (x_1, x_2)$ – узел, соответствующий вершине прямого угла треугольника Δ_\pm . Пусть r – управляющий параметр, принимающий значения ± 1 . Если через $\Phi'_{\alpha\beta hr}(\xi)$ обозначить функцию, определённую в $\Delta_r(x)$, линейную по ξ_1 и ξ_2 и совпадающую в вершинах треугольника с сеточной функцией $\Phi_{\alpha\beta h}(x)$, то кусочно-линейное восполнение на $\bar{\Omega}$ определится в виде $F_h^{(1)}\Phi_{\alpha\beta h}(\xi) = \{\Phi'_{\alpha\beta hr}(\xi) : \xi \in \Delta_r(x), r = -1, +1, \Delta_r(x) \in \bar{\Omega}\}$:

$$F_h^{(1)}\Phi_{\alpha\beta h}(\xi) = \begin{cases} \Phi_{\alpha\beta h}(x) + \Phi_{\alpha\beta hx_1}(x)(\xi_1 - x_1) + \Phi_{\alpha\beta hx_2}(x)(\xi_2 - x_2), & \xi \in \Delta_+(x), \quad x \in \omega_1^- \times \omega_2^-, \\ \Phi_{\alpha\beta h}(x) + \Phi_{\alpha\beta hx_1}(x)(\xi_1 - x_1) + \Phi_{\alpha\beta hx_2}(x)(\xi_2 - x_2), & \xi \in \Delta_-(x), \quad x \in \omega_1^+ \times \omega_2^+. \end{cases}$$

Далее, каждую ячейку $e^+(x) \subset \bar{\Omega}$ разобьём диагональю, образующей острый угол с осью ξ_1 , на два треугольника $\Delta'_-(x)$ (верхние) и $\Delta'_+(x)$ (нижние). Аналогично найдём, что

$$F_h^{(2)}\Phi_{\alpha\beta h}(\xi) = \begin{cases} \Phi_{\alpha\beta h}(x) + \Phi_{\alpha\beta hx_1}(x)(\xi_1 - x_1) + \Phi_{\alpha\beta hx_2}(x)(\xi_2 - x_2), & \xi \in \Delta'_+(x), \quad x \in \omega_1^+ \times \omega_2^-, \\ \Phi_{\alpha\beta h}(x) + \Phi_{\alpha\beta hx_1}(x)(\xi_1 - x_1) + \Phi_{\alpha\beta hx_2}(x)(\xi_2 - x_2), & \xi \in \Delta'_-(x), \quad x \in \omega_1^- \times \omega_2^+. \end{cases}$$

Положим

$$F_h\Phi_{\alpha\beta h}(\xi) = \frac{1}{2}F_h^{(1)}\Phi_{\alpha\beta h}(\xi) + \frac{1}{2}F_h^{(2)}\Phi_{\alpha\beta h}(\xi), \quad \xi \in \bar{\Omega}. \tag{66}$$

Пусть

$$\tilde{R}_h g_{\alpha\beta}(x) \equiv \tilde{R}_h k_{\alpha\beta}(x) = S^x k_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e(x)} k_{\alpha\beta}(\xi) d\xi, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad x \in \omega, \tag{67}$$

– дискретизации на сетке ω управлений $g_{\alpha\beta}(\xi) \equiv k_{\alpha\beta}(\xi)$.

Для исследования связи между экстремальными задачами (1)–(8) и (16)–(20) введём отображения

$$\tilde{R}_h : H \rightarrow H_h, \quad N_h : H_h \rightarrow H, \tag{68}$$

которые определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_h g &= \Phi_h, \quad \text{где } g = (g_1, g_2, g_3, g_4) = (k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21}), \quad \Phi_h = (\tilde{R}_h k_{11}, \tilde{R}_h k_{22}, \tilde{R}_h k_{12}, \tilde{R}_h k_{21}); \\ N_h \Phi_h &= g, \quad \text{где } \Phi_h = (\Phi_{11h}, \Phi_{22h}, \Phi_{12h}, \Phi_{21h}), \quad g = (F_h \Phi_{11}, F_h \Phi_{22}, F_h \Phi_{12}, F_h \Phi_{21}). \end{aligned}$$

Функции \tilde{R}_h и F_h определены равенствами (67) и (66). Нетрудно показать, что для произвольных управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ экстремальных задач (1)–(8) и (16)–(20) соответственно справедливы включения $\tilde{R}_h g \in U_h$, $N_h \Phi_h \in U$.

Лемма 7. Для кусочно-линейного восполнения $F_h\Phi_{\alpha\beta h}(\xi)$ на Ω сеточных управлений $\Phi_{\alpha\beta h}(x)$, $x \in \bar{\omega}$, $\alpha, \beta = 1, 2$, и дискретизации $\tilde{R}_h g_{\alpha\beta}(x)$ управлений $g_{\alpha\beta}(\xi) \equiv k_{\alpha\beta}(\xi)$ на сетке ω справедливы оценки

$$\|N_h \Phi_h\|_H \leq \|\Phi_h\|_{H_h} + \gamma_h, \quad \text{где } 0 < \gamma_h = O(|h|) \text{ при } |h| \rightarrow 0; \tag{69}$$

$$\|\tilde{R}_h g\|_{H_h} \leq \|g\|_H. \tag{70}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|\tilde{R}_h g\|_{H_h}^2 = \|\tilde{R}_h g_{11}\|_{W_2^1(\omega)}^2 + 2\|\tilde{R}_h g_{12}\|_{W_2^1(\omega)}^2 + \|\tilde{R}_h g_{22}\|_{W_2^1(\omega)}^2.$$

Очевидно неравенство $\|R_h k_{\alpha\beta}\|_{L_2(\omega)}^2 \leq \int_{\Omega} k_{\alpha\beta}^2(\xi) d\xi$. Введём множество $\Omega_h = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : 0 \leq \xi_1 \leq l_1 - h_1, 0 \leq \xi_2 \leq l_2\}$. Применяя теорему Фубини [28, с. 317; 29, с. 55], получаем

$$\begin{aligned} \|[\tilde{R}_h k_{\alpha\beta}(x)]_{x_1}\|_{L_2([\omega_1/\{l_1-h_1\}] \times \omega_2)}^2 &= \sum_{[\omega_1/\{l_1-h_1\}] \times \omega_2} ([\tilde{R}_h k_{\alpha\beta}(x)]_{x_1})^2 h_1 h_2 = \\ &= \sum_{[\omega_1/\{l_1-h_1\}] \times \omega_2} \left(\frac{1}{h_1^2 h_2} \int_{x_1-0.5h_1}^{x_1+0.5h_1} \int_{e_2(x_2)}^{\xi_1+h_1} \frac{\partial k_{\alpha\beta}(\tau, \xi_2)}{\partial \tau} d\tau d\xi \right)^2 h_1 h_2 \leq \\ &\leq \frac{1}{h_1} \int_0^{l_1-h_1} \int_0^{l_2} \int_{\xi_1}^{\xi_1+h_1} \left(\frac{\partial k_{\alpha\beta}(\tau, \xi_2)}{\partial \tau} \right)^2 d\tau d\xi = \frac{1}{h_1} \int_{\Omega_h} \int_{\xi_1}^{\xi_1+h_1} \left(\frac{\partial k_{\alpha\beta}(\tau, \xi_2)}{\partial \tau} \right)^2 d\tau d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \frac{1}{h_1} \int_{\Omega_h} d\xi_1 d\xi_2 \int_0^{h_1} \left(\frac{\partial k_{\alpha\beta}(z_1 + \xi_1, \xi_2)}{\partial z_1} \right)^2 dz_1 = \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} dz_1 \int_{\Omega_h} \left(\frac{\partial k_{\alpha\beta}(z_1 + \xi_1, \xi_2)}{\partial z_1} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} dz_1 \int_{z_1}^{l_1-h_1+z_1} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial k_{\alpha\beta}(t_1, \xi_2)}{\partial t_1} \right)^2 dt_1 d\xi_2 \leq \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} dz_1 \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial k_{\alpha\beta}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

Откуда

$$\|[\tilde{R}_h k_{\alpha\beta}(x)]_{x_1}\|_{L_2([\omega_1/\{l_1-h_1\}] \times \omega_2)}^2 \leq \int_{\Omega} \left(\frac{\partial k_{\alpha\beta}(\xi)}{\partial \xi_1} \right)^2 d\xi.$$

Аналогично имеем

$$\|[\tilde{R}_h k_{\alpha\beta}(x)]_{x_2}\|_{L_2(\omega_1 \times [\omega_2/\{l_2-h_2\}])}^2 \leq \left\| \frac{\partial k_{\alpha\beta}}{\partial \xi_2} \right\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Следовательно,

$$\|\tilde{R}_h g\|_{H_h}^2 \leq \|k_{11}\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|k_{22}\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + 2\|k_{12}\|_{W_2^1(\Omega)}^2.$$

Оценка (70) доказана.

Установим оценку (69). Сначала заметим, что справедливо неравенство

$$\|F_h \Phi_{11}(\xi)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (F_h^{(1)} \Phi_{11}(\xi))^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (F_h^{(2)} \Phi_{11}(\xi))^2 d\xi. \tag{71}$$

Поскольку сеточная функция $\Phi_{\alpha\beta h}(x)$, $\alpha, \beta = 1, 2$, определена в точках сетки ω , то определим сеточные функции $\Phi_{\alpha\beta h}(x)$ на множестве узлов $\bar{\omega} \setminus \omega$ следующим образом: сначала на прямых $x_2 = 0$ и $x_2 = l_2$ положим $\Phi_{\alpha\beta h}(x_1, 0) = \Phi_{\alpha\beta h}(x_1, h_2)$, $\Phi_{\alpha\beta h}(x_1, l_2) = \Phi_{\alpha\beta h}(x_1, l_2 - h_2)$, $x_1 \in \omega_1$, затем на прямых $x_1 = 0$ и $x_1 = l_1$ положим $\Phi_{\alpha\beta h}(0, x_2) = \Phi_{\alpha\beta h}(h_1, x_2)$, $\Phi_{\alpha\beta h}(l_1, x_2) = \Phi_{\alpha\beta h}(l_1 - h_1, x_2)$, $x_2 \in \omega_2$, и, наконец, $\Phi_{\alpha\beta h}(0, 0) = \Phi_{\alpha\beta h}(h_1, h_2)$, $\Phi_{\alpha\beta h}(0, l_2) = \Phi_{\alpha\beta h}(h_1, l_2 - h_2)$, $\Phi_{\alpha\beta h}(l_1, 0) = \Phi_{\alpha\beta h}(l_1 - h_1, h_2)$, $\Phi_{\alpha\beta h}(l_1, l_2) = \Phi_{\alpha\beta h}(l_1 - h_1, l_2 - h_2)$. При этом разностные производные (левые и правые) $\Phi_{\alpha\beta x_m}, \Phi_{\alpha\beta \bar{x}_m}$, $m = 1, 2$, занулятся в точках границ $\bar{\omega} \setminus \omega$.

Рассмотрим первый интеграл в неравенстве (71). Имеем

$$\int_{\Omega} (F_h^{(1)} \Phi_{11h}(\xi))^2 d\xi = \sum_{\Delta_+(x) \in \bar{\Omega}_{\Delta_+(x)}} \int_{\Delta_+(x)} (F_h^{(1)} \Phi_{11h}(\xi))^2 d\xi + \sum_{\Delta_-(x) \in \bar{\Omega}_{\Delta_-(x)}} \int_{\Delta_-(x)} (F_h^{(1)} \Phi_{11h}(\xi))^2 d\xi,$$

при этом

$$\sum_{\Delta_+(x) \in \bar{\Omega}_{\Delta_+(x)}} \int_{\Delta_+(x)} (F_h^{(1)} \Phi_{11h}(\xi))^2 d\xi = \sum_{\omega_1^- \times \omega_2^- \in \Delta_+(x)} \int_{\omega_1^- \times \omega_2^-} [\Phi_{11h}(x) + \Phi_{11hx_1}(x)(\xi_1 - x_1) + \Phi_{11hx_2}(x)(\xi_2 - x_2)]^2 d\xi,$$

$$\sum_{\Delta_-(x) \in \bar{\Omega}_{\Delta_-(x)}} \int_{\Delta_-(x)} (F_h^{(1)} \Phi_{11h}(\xi))^2 d\xi = \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+ \in \Delta_-(x)} \int_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} [\Phi_{11h}(x) + \Phi_{11h\bar{x}_1}(x)(\xi_1 - x_1) + \Phi_{11h\bar{x}_2}(x)(\xi_2 - x_2)]^2 d\xi,$$

$$S_1(x) = \int_{\Delta_+(x)} [\Phi_{11h}(x) + \Phi_{11hx_1}(x)(\xi_1 - x_1) + \Phi_{11hx_2}(x)(\xi_2 - x_2)]^2 d\xi_2 d\xi_1 =$$

$$= \frac{h_1 h_2}{24} [(\Phi_{11h}^2(x) + \Phi_{11h}^2(x_1 + h_1, x_2) + \Phi_{11h}^2(x_1, x_2 + h_2)) + (\Phi_{11h}(x) + \Phi_{11h}(x_1 + h_1, x_2) +$$

$$+ \Phi_{11h}(x_1, x_2 + h_2))^2] \leq \frac{h_1 h_2}{6} [\Phi_{11h}^2(x) + \Phi_{11h}^2(x_1, x_2 + h_2) + \Phi_{11h}^2(x_1 + h_1, x_2)], \quad x \in \Delta_+(x) \in \bar{\Omega}.$$

Совершенно аналогично получаем неравенство

$$S_2(x) = \int_{\Delta_-(x)} [\Phi_{11h}(x) + \Phi_{11h\bar{x}_1}(x)(\xi_1 - x_1) + \Phi_{11h\bar{x}_2}(x)(\xi_2 - x_2)] d\xi \leq$$

$$\leq \frac{h_1 h_2}{6} [\Phi_{11h}^2(x) + \Phi_{11h}^2(x_1 - h_1, x_2) + \Phi_{11h}^2(x_1, x_2 - h_2)], \quad x \in \Delta_-(x) \in \bar{\Omega}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_h} (F_h^{(1)} \Phi_{11h}(\xi))^2 d\xi \leq \\ & \leq \frac{1}{6} \left[\sum_{\omega_1^- \times \omega_2^-} \Phi_{11h}^2(h_1 h_2) + \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} \Phi_{11h}^2 h_1 h_2 + 2 \sum_{\omega_1^- \times \omega_2^+} \Phi_{11h}^2 h_1 h_2 + 2 \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^-} \Phi_{11h}^2 h_1 h_2 \right] = \\ & = \|\Phi_{11h}\|_{L_2(\omega)}^2 + \frac{1}{6} \left[h_1 \sum_{\omega_2} \Phi_{11h}^2(h_1, x_2) h_2 + h_1 h_2 \Phi_{11h}^2(h_1 h_2) + h_2 \sum_{\omega_1} \Phi_{11h}^2(x_1, h_2) h_1 + \right. \\ & + h_1 \sum_{\omega_2} \Phi_{11h}^2(l_1 - h_1, x_2) h_2 + h_1 h_2 \Phi_{11h}^2(l_1 - h_1, l_2 - h_2) + h_2 \sum_{\omega_1} \Phi_{11h}^2(x_1, l_2 - h_2) h_1 \left. \right] + \\ & + \frac{1}{3} \left[h_1 \sum_{\omega_2} \Phi_{11h}^2(h_1, x_2) h_2 + h_1 h_2 \Phi_{11h}^2(h_1, l_2 - h_2) + h_2 \sum_{\omega_1} \Phi_{11h}^2(x_1, l_2 - h_2) h_1 + \right. \\ & + h_1 \sum_{\omega_2} \Phi_{11h}^2(l_1 - h_1, x_2) h_2 + h_1 h_2 \Phi_{11h}^2(l_1 - h_1, h_2) + h_2 \sum_{\omega_1} \Phi_{11h}^2(x_1, h_2) h_1 \left. \right] \leq \\ & \leq \|\Phi_{11h}\|_{L_2(\omega)}^2 + |h| \bar{\nu}^2 ((l_2 - h_2) + (l_1 - h_1)) + |h|^2 \bar{\nu}^2. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial F_h^{(1)} \Phi_{11h}(\xi)}{\partial \xi_{\alpha}} \right)^2 d\xi = \\ &= \sum_{\Delta_+(x) \in \bar{\Omega}} \int_{\Delta_+(x)} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial F_h^{(1)} \Phi_{11h}(\xi)}{\partial \xi_{\alpha}} \right)^2 d\xi + \sum_{\Delta_-(x) \in \bar{\Omega}} \int_{\Delta_-(x)} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial F_h^{(1)} \Phi_{11h}(\xi)}{\partial \xi_{\alpha}} \right)^2 d\xi, \\ & \int_{\Delta_-(x)} \left(\frac{\partial F_h^{(1)} \Phi_{11h}(\xi)}{\partial \xi_{\alpha}} \right)^2 d\xi = \int_{\Delta_-(x)} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} (\Phi_{11h}(x) + \Phi_{11h\bar{x}_1}(x)(\xi_1 - x_1) + \Phi_{11h\bar{x}_2}(x)(\xi_2 - x_2)) \right]^2 d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \int_{x_1-h_1}^{x_1} \int_{x_2-h_2-h_2(\xi_1-x_1)/h_1}^{x_2} [\Phi_{11h\bar{x}_1}(x)]^2 d\xi_1 d\xi_2 = \Phi_{11h\bar{x}_1}^2(x) \frac{h_1 h_2}{2}. \end{aligned}$$

Откуда после некоторых очевидных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial F_h^{(1)} \Phi_{11h}(\xi)}{\partial \xi_{\alpha}} \right)^2 d\xi &= \sum_{\omega_1^- \times \omega_2^-} \sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{11h\alpha}^2(x) \frac{h_1 h_2}{2} + \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} \sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{11h\bar{\alpha}}^2(x) \frac{h_1 h_2}{2} \leq \\ &\leq \|\Phi_{11h}(x)\|_{W_2^1(\omega_1 \times \omega_2)}^2 + \frac{1}{2} |h| \{ \|\Phi_{11hx_1}(x_1, h_2)\|_{L_2(\omega_1/\{l_1-h_1\})}^2 + \\ &+ \|\Phi_{11hx_1}(x_1, l_2 - h_2)\|_{L_2(\omega_1/\{l_1-h_1\})}^2 + \|\Phi_{11hx_2}(h_1, x_2)\|_{L_2(\omega_2/\{l_2-h_2\})}^2 + \\ &+ \|\Phi_{11hx_2}(l_1 - h_1, x_2)\|_{L_2(\omega_2/\{l_2-h_2\})}^2 \} \leq \|\Phi_{11h}(x)\|_{W_2^1(\omega)}^2 + \frac{1}{2} |h| \{ 2R_1^2(l_1 - h_1) + 2R_2^2(l_2 - h_2) \}. \end{aligned}$$

В результате будем иметь

$$\|F_h^{(1)} \Phi_{11h}\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq \|\Phi_{11h}\|_{W_2^1(\omega)}^2 + \gamma_h^{(1)}, \quad 0 < \gamma_h^{(1)} = O(|h|) \quad \text{при } |h| \rightarrow 0.$$

Таким образом,

$$\|N_h \Phi_h\|_H^2 \leq \|\Phi_{11h}\|_{W_2^1(\omega)}^2 + 2\|\Phi_{12h}\|_{W_2^1(\omega)}^2 + \|\Phi_{22h}\|_{W_2^1(\omega)}^2 + \gamma_h^{(1)} + 2\gamma_h^{(2)} + \gamma_h^{(3)} = \|\Phi_h\|_{H_h}^2 + \gamma_h.$$

Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ – произвольные управления в экстремальных задачах (1)–(8) и (16)–(20). Тогда при достаточно малом $h < h_0$ справедливы оценки

$$|J(g) - J_h(\tilde{R}_h g)| \leq M_1 |h|, \quad |J(N_h \Phi_h(\xi)) - J_h(\Phi_h(x))| \leq \bar{M}_1 |h|. \tag{72}$$

Доказательство леммы опирается на определения отображений $\tilde{R}_h g$ и $N_h \Phi_h$ и следует из теоремы 7 и леммы 7. Докажем справедливость первого неравенства в (72). Сначала установим оценку

$$\begin{aligned} |k_{11} - \tilde{R}_h k_{11}| &= \left| \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e(x)} \left[\int_{x_2}^{\xi_2} \frac{\partial k_{11}(x_1, \theta)}{\partial \theta} d\theta + \int_{\xi_1}^{x_1} \frac{\partial k(\tau, \xi_2)}{\partial \tau} d\tau \right] d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \int_{x_1-0.5h_1}^{x_1+0.5h_1} \int_{x_2-0.5h_2}^{x_2+0.5h_2} \int_{x_2}^{\xi_2} \left| \frac{\partial k_{11}(x_1, \theta)}{\partial \theta} \right| d\theta d\xi_1 d\xi_2 + \iint_{e(x)} \int_{\xi_1}^{x_1} \left| \frac{\partial k(\tau, \xi_2)}{\partial \tau} \right| d\tau \right\} d\xi \leq R_2 h_2 + R_1 h_1. \end{aligned}$$

Тогда

$$|J(g(\xi)) - J_h(\tilde{R}_h g(x))| \leq M_0|h| + 4R_1h_1 + 4R_2h_2 \leq M_1|h|.$$

Оценим теперь при $x \in [\omega_1/\{l_1 - h_1, h_1\}] \times [\omega_2/\{l_2 - h_2, h_2\}]$ разность

$$\begin{aligned} |N_h \Phi_{11h}(\xi) - \Phi_{11h}(x)| &= \frac{1}{2} |(F_h^{(1)} \Phi_{11h}(\xi) - \Phi_{11}(x)) + (F_h^{(2)} \Phi_{11h}(\xi) - \Phi_{11}(x))| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} R_1 h_1 + \frac{1}{2} R_2 h_2 + \frac{1}{2} R_1 h_1 + \frac{1}{2} R_2 h_2 \leq (R_1 + R_2)|h|. \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$|J(N_h \Phi_h(\xi)) - J_h(\Phi_h(x))| \leq M_0|h| + 4(R_1 + R_2)|h| = \bar{M}_1|h|.$$

Лемма доказана.

Теорема 8. Пусть J_* и J_{h*} – нижние грани функционалов $J(g)$ и $J_h(\Phi_h)$ в экстремальных задачах (1)–(8) и (16)–(20) соответственно. Семейство сеточных задач (16)–(20), зависящих от шага $h = (h_1, h_2)$ сетки $\bar{\omega} \subset \bar{\Omega}$, при $|h| \rightarrow 0$ аппроксимирует исходную экстремальную задачу (1)–(8) по функционалу, т.е. $\lim J_{h*} = J_*$ при $|h| \rightarrow 0$, и для скорости сходимости справедлива оценка

$$|J_{h*} - J_*| \leq M|h|. \tag{73}$$

Доказательство. Согласно теореме 2 множество U_* не пусто. Возьмём какое-либо управление $g_* \in U_*$. Тогда $\tilde{R}_h(g_*) \in U_h$. Отсюда и из леммы 8 следует, что

$$J_{h*} \leq J_h(\tilde{R}_h g_*) \leq J(g_*) + M_1|h|.$$

Так как функции конечного числа переменных Φ_h на слабо бикompактных множествах U_h достигают своей нижней грани, то $J_{h*} > -\infty$, $U_{h*} \neq \emptyset$. Выберем какое-нибудь управление $\Phi_{h*} \in U_{h*}$. Тогда $N_h \Phi_{h*} \in U$. В силу леммы 8 имеем

$$J_* \leq J(N_h \Phi_{h*}) \leq J_h(\Phi_{h*}) + \bar{M}_1|h|.$$

Из полученных неравенств вытекает, что $\lim_{|h| \rightarrow 0} J_{h*} = J_*$, т.е. семейство разностных задач (16)–(20) при $|h| \rightarrow 0$ аппроксимирует исходные экстремальные задачи (1)–(8) по функционалу и справедлива оценка (73). Теорема доказана.

Предположим теперь, что при каждом $h = (h_1, h_2)$ и соответствующей сетке $\bar{\omega}$ с помощью какого-либо метода минимизации получено приближённое значение $J_{h*} + \epsilon_h$ нижней грани J_{h*} функционала $J_h(\Phi_h)$ на U_h в задаче (16)–(20) и найдено сеточное управление $\Phi_{h\epsilon_h}(x) \in U_h$, дающее приближённое решение задачи (16)–(20) в следующем смысле:

$$J_{h*} \leq J_h(\Phi_{h\epsilon_h}) \leq J_{h*} + \epsilon_h, \quad \Phi_{h\epsilon_h} \in U_h, \tag{74}$$

где последовательность ϵ_h такова, что $\epsilon_h \geq 0$ и $\epsilon_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$, и характеризует точность решения задачи минимизации функционала $J_h(\Phi_h)$ на U_h .

Возникает вопрос, можно ли принять сеточное управление $\Phi_{h\epsilon_h}(x) \in U_h$ из (74) в качестве некоторого приближения оптимального управления задачи (1)–(8).

Теорема 9. Пусть последовательность сеточных управлений $\{\Phi_{h\epsilon_h}\} \subset U_h$ определена условиями (74). Тогда последовательность управлений $\{N_h \Phi_{h\epsilon_h}(r)\}$, где $N_h : H_h \rightarrow H$ – отображение, определяемое в (68), является минимизирующей для функционала $J(g)$ исходной задачи (1)–(8), т.е. $\lim J(N_h \Phi_{h\epsilon_h}) = J_*$ при $|h| \rightarrow 0$, и для скорости сходимости справедлива оценка

$$0 \leq J(N_h \Phi_{h\epsilon_h}) - J_* \leq (\bar{M}_1 + M)|h| + \epsilon_h. \tag{75}$$

Последовательность $\{N_h \Phi_{h\epsilon_h}(r)\}$ слабо в $H = (W_2^1(\Omega))^4$ сходится к множеству $U_* \neq \emptyset$ оптимальных управлений исходной экстремальной задачи (1)–(8).

Доказательство. Пусть последовательности сеточных управлений $\{\widehat{\Phi}_h(x)\} \subset U_h$ определены условиями (74). Тогда $N_h \widehat{\Phi}_h \in U$ и

$$0 \leq J(N_h \widehat{\Phi}_h) - J_* \leq [J(N_h \widehat{\Phi}_h) - J_h(\widehat{\Phi}_h)] + [J_h(\widehat{\Phi}_h) - J_{h*}] + [J_{h*} - J_*] \leq (\bar{M}_1 + M)|h| + \epsilon_h,$$

т.е. справедлива оценка (75) скорости сходимости. При $|h| \rightarrow 0$ имеем $\lim_{|h| \rightarrow 0} J(N_h \widehat{\Phi}_h) = J_*$. По-

этому последовательности управлений $\{N_h \widehat{\Phi}_h(\xi)\}$ являются минимизирующими для функционалов $J(g)$ исходных задач (1)–(8) оптимального управления. Отсюда и из теоремы 2 следует слабая сходимость минимизирующих последовательностей $\{N_h \widehat{\Phi}_h\}$ к соответствующим множествам $U_* \neq \emptyset$. Теорема 9 доказана.

Замечание 3. Из оценки (73) и неравенства (74) при условии, что начальное приближение в итерационном процессе (35), (36) принадлежит окрестности значений точного решения исходной краевой задачи, нетрудно получить, что $\lim J_h(\Phi_{h\epsilon_h}) = J_*$ при $|h| \rightarrow 0$, причём справедлива оценка скорости сходимости $|J_h(\Phi_{h\epsilon_h}) - J_*| \leq M|h| + \epsilon_h$.

Рассмотрим теперь вопрос о сильной сходимости в H по аргументу (управлению) разностных аппроксимаций (16)–(20). В силу теоремы 2 задача (16)–(20) корректно поставлена в слабой топологии пространства H . Однако, вообще говоря, она является некорректно по Тихонову поставленной задачей минимизации в сильной топологии пространства H , т.е. нет основания ожидать, что любая минимизирующая последовательность (в том числе и последовательность из теоремы 9) будет сходящейся в норме H к множеству U_* . Для разработки устойчивых алгоритмов построения сильно сходящихся минимизирующих последовательностей успешно применяется известный метод регуляризации Тихонова [18, 30].

Рассмотрим один вариант этого метода, позволяющий построить для исходной экстремальной задачи минимизирующую последовательность, которая получается с помощью разностной аппроксимации и сильно сходится к множеству “ Ω -нормальных решений” задачи оптимального управления (1)–(8). Будем допускать, что вычисления сеточных функционалов $J_h(\Phi_h)$ ведутся приближённо, как в силу приближённой исходной информации, так и в силу того, что счёт ведётся с округлениями, так что вместо функционала $J_h(\Phi_h)$ фактически используется приближённый функционал $J_{h\delta_h}(\Phi_h)$, который связан с $J_h(\Phi_h)$ для всех $\Phi_h \in U_h$ соотношениями

$$J_{h\delta_h}(\Phi_h) = J_h(\Phi_h) + \theta_{\delta_h}(\Phi_h), \quad |\theta_{\delta_h}(\Phi_h)| \leq \delta_h, \quad \delta_h \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |h| \rightarrow 0.$$

Для регуляризации семейства сеточных экстремальных задач (16)–(20) введём на U функционал-стабилизатор $\Omega(g) = \|g\|_H^2$, $g \in U$, и его сеточный аналог $\Omega_h(\Phi_h) = \|\Phi_h\|_{H_h}^2$, $\Phi_h \in U_h$. При каждом $h = (h_1, h_2)$ рассмотрим на U_h сеточный функционал Тихонова задачи (16)–(20): $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) = J_{h\delta_h}(\Phi_h) + \alpha_h\Omega(\Phi_h)$, $\Phi_h \in U_h$, где $\{\alpha_h\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $|h| \rightarrow 0$. Рассмотрим задачу минимизации функционала $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h)$ на U_h : при каждом $h = (h_1, h_2)$ определим сеточное управление $\widehat{\Phi}_h = \Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h} \in U_h$, удовлетворяющее условиям

$$T_{h\delta_h\alpha_h*} = \inf\{T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) : \Phi_h \in U_h\} \leq T_{h\delta_h\alpha_h}(\widehat{\Phi}_h) \leq T_{h\delta_h\alpha_h*} + \nu_h, \quad (76)$$

где $\nu_h \geq 0$ и $\nu_h \rightarrow +0$ при $|h| \rightarrow 0$. Введём множество Ω -нормальных решений задачи оптимального управления (1)–(8):

$$U_{**} = \{g_{**} \in U_* : \Omega(g_{**}) = \inf \Omega(g_*) : g_* \in U_*\}.$$

Теорема 10. Пусть последовательность сеточных управлений $\{\widehat{\Phi}_h\}$ определена условиями (76). Тогда последовательность $\{N_h \widehat{\Phi}_h(r)\}$, где отображение $N_h : H_h \rightarrow H$ определено в (68), является минимизирующей для функционала $J(g)$ исходной экстремальной задачи (1)–(8), т.е. $\lim J(N_h \widehat{\Phi}_h) = J_*$ при $|h| \rightarrow 0$, и для скорости сходимости справедлива оценка

$$0 \leq J(N_h \widehat{\Phi}_h) - J_* \leq M(|h| + \delta_h + \nu_h + \alpha_h).$$

Если, кроме того, последовательности $\{\alpha_h\}$, $\{\delta_h\}$, $\{\nu_h\}$ положительны и $\alpha_h, \delta_h, \nu_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$, причём $\{\alpha_h\}$ стремится к нулю согласовано с величинами $|h|$, δ_h , ν_h так, что $(|h| + \nu_h + \delta_h)/\alpha_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$, то последовательность $\{N_h \widehat{\Phi}_h\}$ сильно в H сходится к множеству Ω -нормальных (в смысле минимальной нормы) оптимальных управлений U_{**} задачи (1)–(8), т.е.

$$\lim \rho(N_h \widehat{\Phi}_h; U_{**}) = \lim \inf \{\|N_h \widehat{\Phi}_h - g_{**}\|_H : g_{**} \in U_{**}\} = 0 \quad \text{при } |h| \rightarrow 0,$$

$$\lim \Omega(N_h \widehat{\Phi}_h) = \lim \|N_h \widehat{\Phi}_h\|_H^2 = \Omega_* = \inf \Omega(g_*), \quad g_* \in U_*, \quad \text{при } |h| \rightarrow 0.$$

Доказательство теоремы проводится с помощью методики из [18, гл. 9, § 4] и [30, гл. 2] и опирается на полученные выше результаты.

Замечание 4. Можно показать, что $\lim T_{h\delta_h\alpha_h^*} = J_*$ и $\lim T_{h\delta_h\alpha_h}(\widehat{\Phi}_h) = J_*$ при $|h| \rightarrow 0$, причём справедливы следующие оценки скорости сходимости:

$$|T_{h\delta_h\alpha_h^*} - J_*| \leq M[|h| + \delta_h + \alpha_h], \quad |T_{h\delta_h\alpha_h}(\widehat{\Phi}_h) - J_*| \leq M[|h| + \nu_h + \delta_h + \alpha_h].$$

Замечание 5. Полученные результаты не зависят от способа решения разностных задач минимизации (16)–(20).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрашн В.Н. Разностные схемы для нелинейных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 2. С. 294–308.
2. Абрашн В.Н., Асмолик В.А. Локально-одномерные разностные схемы для многомерных квазилинейных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 7. С. 1107–1117.
3. Матус П.П., Станшневская Л.В. О безусловной сходимости разностных схем для нестационарных квазилинейных уравнений математической физики // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 7. С. 1203–1219.
4. Матус П.П., Москальков М.Н., Щеглик В.С. Согласованные оценки точности метода сеток для нелинейного уравнения второго порядка с обобщенными решениями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1249–1256.
5. Щеглик В.С. Анализ разностной схемы, аппроксимирующей третью краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1997. Т. 37. № 8. С. 951–957.
6. Ali A.A., Deckelnick K., Hinze M. Error analysis for global minima of semilinear optimal control problems // arXiv preprint. 2017. arXiv:1705.01201.
7. Hernández-Santamaría V., Lazar M., Zuazua E. Greedy optimal control for elliptic problems and its application to turnpike problems // Numer. Math. 2019. V. 141. № 2. P. 455–493.
8. Mananova A., Lubyshev F. About convergence of difference approximations for optimization problems described by elliptic equations with mixed derivatives and unbounded nonlinearity // AIP Conf. Proc. 2018. V. 1997. P. 020011-1–020011-5.
9. Jovanovic B.S., Suli E. Analysis of Finite Difference Schemes. Springer Ser. in Comput. Math. V. 46. London, 2014.
10. Jovanovic B.S. Finite difference scheme for PDEs with weak solutions and irregular coefficients // Comput. Methods Appl. Math. 2004. V. 4. № 1. P. 48–65.
11. Berikelashvili G. On a nonlocal boundary-value problem for two-dimensional elliptic equation // Comput. Methods Appl. Math. 2003. V. 3. № 1. P. 35–44.
12. Berikelashvili G., Gupta M.M., Mirianashvili M. Convergence of fourth order compact difference schemes for three-dimensional convection-diffusion equations // SIAM J. Numer. Anal. 2007. V. 45. № 1. P. 443–455.
13. Berikelashvili G., Mirianashvili M. On the convergence of difference schemes for generalized Benjamin–Bona–Mahony equation // Numer. Methods for Partial Differ. Equat. 2014. V. 30. № 1. P. 301–320.
14. Jovanovich B.S., Matus P.P., Shchehlik V.S. The estimates of accuracy of difference schemes for the nonlinear heat equation with weak solutions // Math. Model. and Anal. 2000. V. 5. P. 86–96.
15. Матус П.П. О корректности разностных схем для полулинейного параболического уравнения с обобщенными решениями // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50. № 12. С. 2155–2175.

16. *Matus P.* On convergence of difference schemes for IBVP for quasilinear parabolic equations with generalized solutions // *Comp. Meth. Appl. Math.* 2014. V. 14. № 3. P. 361–371.
17. *Лубышев Ф.В., Файрузов М.Э.* Согласованные оценки скорости сходимости в сеточной норме $W_{2,0}^2(\omega)$ разностных схем для нелинейных эллиптических уравнений со смешанными производными и решениями из $W_{2,0}^m(\Omega)$, $3 < m \leq 4$ // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* 2017. Т. 57. № 9. С. 1444–1470.
18. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М., 2002.
19. *Потапов М.М.* Аппроксимация экстремальных задач в математической физике (гиперболические уравнения). М., 1985.
20. *Ишмухаметов А.З.* Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления. М., 1999.
21. *Лубышев Ф.В., Манапова А.Р.* О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* 2007. Т. 47. № 3. С. 376–396.
22. *Лубышев Ф.В., Манапова А.Р.* Аппроксимация задач оптимального управления коэффициентами эллиптических уравнений конвекции-диффузии с условиями сопряжения неидеального контакта // *Журн. Средневожского мат. о-ва.* 2019. Т. 21. № 2. С. 187–214.
23. *Мапарова А.* On convergence of difference approximations to problems of optimal control in the coefficients of elliptic equations with mixed derivatives and unbounded non-linearity // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. V. 1391. P. 012140.
24. *Карчевский М.М., Ляшко А.Д.* Разностные схемы для нелинейных задач математической физики. Казань, 1976.
25. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1989.
26. *Самарский А.А., Андреев В.Б.* Разностные схемы для эллиптических уравнений. М., 1976.
27. *Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М., 1987.
28. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
29. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976.
30. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М., 1986.

Башкирский государственный университет,
г. Уфа

Поступила в редакцию 02.09.2020 г.
После доработки 24.02.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.

УДК 519.63

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

© 2021 г. П. П. Матус

Для абстрактных нелинейных разностных схем с операторами, действующими в конечномерных банаховых пространствах, формулируется и доказывается критерий устойчивости: при наличии аппроксимации корректно поставленной дифференциальной задачи решение разностной схемы сходится тогда и только тогда, когда она безусловно устойчива. В известном смысле этот критерий обобщает теорему эквивалентности Лакса на нелинейные дифференциальные задачи. Полученные результаты применяются для исследования устойчивости разностных схем, аппроксимирующих квазилинейные параболические уравнения с нелинейностями неограниченного роста.

DOI: 10.31857/S037406412106008X

Введение. Основными понятиями теории разностных схем являются аппроксимация, устойчивость и сходимость. Связь между этими понятиями даётся теоремой Филиппова–Рябенского [1, с. 16; 2, с. 764], которая за рубежом известна как теорема эквивалентности Лакса [3, с. 54]: для согласованного конечно-разностного метода для корректно поставленной линейной начально-краевой задачи для уравнений в частных производных разностный метод сходится тогда и только тогда, когда он устойчив. Под *согласованностью* понимается требование аппроксимации корректно поставленной дифференциальной задачи. В нелинейном случае из сходимости, вообще говоря, не следует устойчивость [4].

Многими авторами предпринимались попытки по перенесению сформулированного утверждения на нелинейные разностные задачи [5–7]. Обзор некоторых результатов в этом направлении представлен в [4] и связан в основном с другими определениями устойчивости – типа слабой устойчивости или слабой обобщённой устойчивости. Следует отметить цикл работ [8–12], посвящённых исследованию устойчивости разностных схем, аппроксимирующих квазилинейные параболические и гиперболические уравнения специального вида. Все исследования в этих работах проводятся лишь в предположениях, относящихся только к свойствам входных данных дифференциальной задачи. Устойчивость в общем случае удаётся доказать лишь до некоторого конечного момента времени $t \leq t_0$, величина которого обусловлена применением сеточного аналога леммы Бихари. В [13, 14] аналогичные результаты получены и для вычислительных методов для уравнений политропного газа с дозвуковыми течениями.

В настоящей работе теорема эквивалентности Лакса обобщается на абстрактные нелинейные разностные задачи с операторами, действующими в конечномерных банаховых пространствах. В нелинейном случае такой критерий удаётся установить лишь для безусловно устойчивых вычислительных методов, когда соответствующие априорные оценки имеют место при достаточно малом $|h| \leq h_0$. При этом величина h_0 зависит как от согласованности дискретных и непрерывных норм в банаховых пространствах, так и от величины возмущения входных данных задачи. Проведённые исследования позволяют сделать вывод о тесной и неразрывной связи понятий устойчивости в дискретном и непрерывном случаях.

1. Формулировка проблемы. Пусть H_k – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_k$, $k = 1, 2$, $L : H_1 \rightarrow H_2$ – нелинейный неограниченный дифференциальный оператор и задан элемент $f \in H_2$. Рассмотрим операторное уравнение

$$Lu = f. \tag{1}$$

Далее предполагаем, что задача (1) поставлена корректно по Адамару, т.е. что выполняются следующие условия:

- 1) решение существует и единственно при всех входных данных $f \in H_2$;
 2) решение непрерывно зависит от входных данных, т.е. существует такая положительная постоянная $c_0 > 0$, при которой справедливо следующее неравенство:

$$\|\tilde{u} - u\|_1 \leq c_0 \|\tilde{f} - f\|_2, \quad (2)$$

где $\tilde{u} \in H_1$ – решение задачи (1) с возмущёнными входными данными $\tilde{f} \in H_2$.

Свойство решения дифференциальной задачи, выражаемое неравенством (2), называется *устойчивостью* решения по отношению к малому возмущению входных данных.

Для приближённого решения задачи (1) будем использовать разностную схему (абстрактная запись)

$$L_h y = \varphi_h. \quad (3)$$

Здесь $L_h : H_{1h} \rightarrow H_{2h}$ и $\varphi \in H_{2h}$ аппроксимируют L и f соответственно, H_{kh} , $k = 1, 2$, – конечномерные банаховы пространства, зависящие от положительного параметра h , являющегося вектором некоторого нормированного пространства с нормой $|h|$.

В работе будем придерживаться основных определений теории разностных схем, данных в [7, 15].

Под *аппроксимацией* разностной схемы (3) на решении дифференциальной задачи (1) будем понимать невязку

$$\psi_h = L_h u_h - \varphi_h = L_h u_h - (Lu)_h + f_h - \varphi_h, \quad (4)$$

для которой

$$\|\psi_h\|_{2h} \leq M h^{k_3}, \quad k_3 = \text{const} > 0. \quad (5)$$

Мы говорим, что разностная схема *аппроксимирует* дифференциальную задачу, если

$$\|L_h u_h - (Lu)_h\|_{2h} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \|f_h - \varphi_h\|_{2h} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |h| \rightarrow 0. \quad (6)$$

Для всех элементов из H_m и H_{mh} полагаем, что $\Pi_{mh} g = g_h$, где Π_{mh} – проектор. В случае непрерывных функций оператор Π_{mh} является единичным (тождественным), т.е.

$$g_{mh}(x) = \Pi_{mh} g_m(x) = g_m(x), \quad m = 1, 2; \quad x \in \bar{\omega}_h.$$

Будем предполагать также, что введённые в H_{kh} сеточные нормы $\|\cdot\|_{kh}$ согласованы с соответствующими нормами $\|\cdot\|_k$ в пространствах H_k , $k = 1, 2$, т.е.

$$\|g_h\|_{mh} - \|g\|_m \leq c_m |h|^{k_m}, \quad m = 1, 2,$$

для всех $g_h \in H_{mh}$, $g \in H_m$, где $k_m > 0$.

Кроме того, будем предполагать, что разностная схема (3) аппроксимирует корректно поставленную задачу (1) в смысле выполнения соотношений (5), (6).

Напомним также, что решение разностной схемы *сходится* к решению дифференциальной задачи со скоростью $O(|h|^{k_3})$, если выполнено неравенство

$$\|y - u_h\|_{1h} \leq c_3 |h|^{k_3}.$$

2. Критерий сходимости. Сформулируем и докажем главный результат данной работы.

Теорема. *Если корректно поставленная задача (1) и её конечно-разностная аппроксимация удовлетворяют условию согласованности, то безусловная устойчивость необходима и достаточна для сходимости разностной схемы.*

Доказательство. **Необходимость** доказана ранее (см., например, [7, с. 107]). Для полноты изложения мы повторим здесь это доказательство. Итак, пусть разностная схема (3) является безусловно устойчивой. Это означает, что существует такая постоянная c_4 , не зависящая от h, y, \tilde{y} , что при всех достаточно малых $|h| \leq h_0$ имеет место априорная оценка

$$\|\tilde{y} - y\|_{1h} \leq c_4 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h}, \quad (7)$$

где \tilde{y} – решение задачи (3) с входными данными $\tilde{\varphi}_h \in H_{2h}$. Напомним также, что если неравенство (7) выполнено для произвольных $|h|$, то такая схема называется *абсолютно устойчивой* [7, с. 286].

Из равенства (4), определяющего невязку ψ_h , выразим

$$L_h u_h = \psi_h + \varphi_h = \tilde{\varphi}_h,$$

откуда в силу определения устойчивости и неравенств (5), (7) получаем

$$\|y - u_h\|_{1h} \leq c_4 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h} = c_4 \|\psi_h\|_{2h} \rightarrow 0 \quad \text{при } |h| \rightarrow 0.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Докажем, что из сходимости следует безусловная устойчивость схемы, т.е. существует такая положительная константа c_4 , что при достаточно малом

$$|h| \leq h_0, \quad h_0 = c_5 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h}^{1/k_4}, \quad k_4 = \min\{k_1, k_2, k_3\}, \tag{8}$$

имеет место оценка (7).

Вследствие сделанных выше предположений, воспользовавшись неравенством треугольника для норм, получаем

$$\begin{aligned} \|\tilde{y} - y\|_{1h} &= \|\tilde{y} - \tilde{u}_h - (y - u_h) + (\tilde{u}_h - u_h)\|_{1h} \leq \|\tilde{y} - \tilde{u}_h\|_{1h} + \|y - u_h\|_{1h} + \|\tilde{u}_h - u_h\|_{1h} \leq \\ &\leq c_5 |h|^{k_3} + c_1 |h|^{k_1} + \|\tilde{u} - u\|_1 \leq c_5 |h|^{k_3} + c_1 |h|^{k_1} + c_0 \|\tilde{f} - f\|_2, \end{aligned}$$

а значит,

$$\|\tilde{y} - y\|_{1h} \leq c_5 |h|^{k_3} + c_1 |h|^{k_1} + c_0 c_2 |h|^{k_2} + c_0 \|\tilde{f}_h - f_h\|_{2h}.$$

Отсюда, поскольку

$$\|\tilde{f}_h - f_h\|_{2h} = \|\tilde{f}_h - \tilde{\varphi}_h - (f_h - \varphi_h) + \tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h} \leq \|\psi_h\|_{2h} + \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h} \leq M |h|^{k_1} + \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h},$$

приходим к оценке (7), означающей безусловную устойчивость разностной схемы (3) в предположении (8).

Теорема доказана.

3. Устойчивость разностных схем, аппроксимирующих квазилинейное параболическое уравнение.

3.1. Случай существования классического решения. Теория разностных схем для нелинейных уравнений математической физики с нелинейностями неограниченного роста является одной из наиболее сложных и актуальных областей вычислительной математики. Вопросы сходимости и корректности разностных схем для данного класса задач исследовались многими авторами [16–19].

Несмотря на полученные оценки точности решений разностных схем, аппроксимирующих нелинейные уравнения математической физики, вопрос об их устойчивости оставался долгое время открытым. На наш взгляд, главная причина отсутствия научных результатов в этом направлении связана с необходимостью предварительного получения априорных оценок не только для разностного решения в задаче для возмущения $\delta y = \tilde{y} - y$, но и для его производных в сильной равномерной метрике.

Доказанный в настоящей работе критерий сходимости нелинейных разностных схем позволяет доказать безусловную устойчивость разностных методов, для которых уже доказана сходимость.

В прямоугольнике $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0 \leq t \leq T]$, где $\overline{\Omega} = \{x : 0 \leq x \leq l\}$, рассмотрим первую краевую задачу для квазилинейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \tag{9}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}; \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T]. \tag{10}$$

Введём область значений точного решения

$$\bar{D} = \{u : m \leq u \leq M, \bar{u}_0 > 0, (x, t) \in \bar{Q}_T\}, \quad m = \inf_{(x,t) \in \bar{Q}_T} u(x, t), \quad M = \sup_{(x,t) \in \bar{Q}_T} u(x, t),$$

и определим её окрестность

$$\bar{D}_1 = \{\tilde{u} : |\tilde{u} - u| < r, \quad u \in \bar{D}, \quad r > 0\}.$$

В задачах с неограниченной нелинейностью предполагается, что существует постоянная $r_0 > 0$ такая, что

$$k(u) \geq r_0 \quad \text{для всех } u \in \bar{D},$$

и, кроме того, функция $k(\tilde{u})$ имеет все ограниченные производные в \bar{D}_1 .

Будем предполагать, что задача (9), (10) корректно поставлена в следующем смысле:

а) существует единственное её решение $u(x, t) \in C^{2+\lambda, 1+\beta}(\bar{Q}_T)$, $0.5 < \lambda, \beta < 1$, причём функция $\partial^2 u / \partial x^2$ липшиц-непрерывна по переменной t . Здесь $C^{m_1+\lambda, m_2+\beta}(\bar{Q}_T)$ – класс функций, имеющих в \bar{Q}_T непрерывные производные по x до порядка m_1 включительно и по t до порядка m_2 включительно, которые удовлетворяют условию Гёльдера с показателями λ и β соответственно;

б) решение устойчиво в равномерной норме для всех $u, \tilde{u} \in C^{2+\lambda, 1+\beta}(\bar{Q}_T)$ по отношению к малому возмущению начальных данных

$$\|\tilde{u} - u\|_{C(\bar{Q}_T)} \leq c_0 \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{C(\bar{\Omega})},$$

где $\|\cdot\|_{C(\bar{Q}_T)} = \max_{(x,t) \in \bar{Q}_T} |\cdot|$, $\|\cdot\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |\cdot|$, а \tilde{u} – решение задачи (9), (10) с возмущённым начальным условием \tilde{u}_0 .

На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = \overline{0, N}, \quad hN = l\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, \quad N = \overline{0, N_0}, \quad \tau N_0 = T\}$ исходную дифференциальную задачу аппроксимируем консервативной чисто неявной разностной схемой

$$y_t = (k(\hat{y}_{(0.5)})\hat{y}_{\bar{x}})_x, \quad y_{(0.5)} = (y_{i-1} + y_i)/2, \tag{11}$$

$$y_i^0 = u_{0i}, \quad i = \overline{0, N}; \quad y_0^{n+1} = \mu_1^{n+1}, \quad y_N^{n+1} = \mu_N^{n+1}. \tag{12}$$

Здесь использованы стандартные обозначения теории разностных схем [7, с. 12]:

$$y = y_i^n = y(x_i, t_n), \quad y_t = (\hat{y} - y)/\tau, \quad \hat{y} = y_i^{n+1}, \quad y_{\bar{x}} = (y_i - y_{i-1})/h,$$

$$y_x = (y_{i+1} - y_i)/h, \quad (ay_{\bar{x}})_x = (a_{i+1}y_{\bar{x}, i+1} - a_i y_{\bar{x}, i})/h.$$

Вопросы точности разностной схемы (11), (12) подробно изучались в работе [18]. В частности, для погрешности аппроксимации $\psi = -u_t + (k(\hat{u}_{(0.5)})\hat{u}_{\bar{x}})_x$ на решении дифференциальной задачи была получена оценка $\|\psi\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} \leq M(h^\lambda + \tau^\beta)$, $M = \text{const} > 0$, и доказана следующая оценка точности:

$$\|y - u\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} \leq c_3(h^{\lambda-0.5} + \tau^{\beta-0.5}),$$

где, как обычно, $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_h)} = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |\cdot|$, $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} = \max_{(x,t) \in \bar{\omega}_{h\tau}} |\cdot|$.

Очевидно, что и для возмущённой разностной схемы справедлива аналогичная оценка

$$\|\tilde{y} - \tilde{u}\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} \leq c_3(h^{\lambda-0.5} + \tau^{\beta-0.5}); \quad 0.5 < \lambda, \quad \beta < 1.$$

На основании изложенного заключаем, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{y} - y\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} &\leq \|y - u\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} + \|\tilde{y} - \tilde{u}\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} + \|\tilde{u} - u\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} \leq \\ &\leq 2c_3(h^{\lambda-0.5} + \tau^{\beta-0.5}) + \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{C(\bar{\Omega})}. \end{aligned}$$

Очевидно, что при достаточно малых $h \leq h_0$, $\tau \leq \tau_0$, удовлетворяющих неравенству

$$2c_3(h^{\lambda-0.5} + \tau^{\beta-0.5}) \leq \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{C(\bar{\Omega})},$$

разностная схема (11), (12) безусловно устойчива в C -норме по начальным данным и имеет место неравенство

$$\|\tilde{y} - y\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} \leq 2\|\tilde{u}_0 - u_0\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

3.2. Устойчивость разностных схем для задач с обобщёнными решениями. В прямоугольнике \bar{Q}_T рассмотрим задачу (10) для несколько более общего уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{13}$$

коэффициент $k(x, t, u)$ которого удовлетворяет следующим свойствам:

$$k(x, t, u) \in C(\bar{Q}_T \times \bar{D}), \quad \frac{\partial k(x, t, u)}{\partial u} \in C(\bar{Q}_T \times \bar{D}),$$

$$k(x, t, u) \geq k_1 > 0 \quad \text{при всех } (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad u \in \bar{D}.$$

В соответствии с [20] функцию $u(x, t)$ назовём *обобщённым решением* задачи (13), (10), если для каждой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x, t)$ с компактным носителем выполнено следующее равенство:

$$\iint_{Q_T} \left(-u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt = 0. \tag{14}$$

Если $u(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$ и $\partial u / \partial x$ – кусочно-непрерывная функция, тогда требование (14) равносильно равенству

$$\oint_C u dx + k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} dt = 0 \tag{15}$$

вдоль любого контура, ограничивающего подобласть $Q' \in \bar{Q}_T$. Это обычная формулировка для консервативных законов [20]. С помощью тождества (14) мы можем определить обобщённое решение задачи (13), (10) из пространства $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Такое решение, когда существование производной $\partial u / \partial t$ не требуется ни в каком смысле, часто называют *слабым обобщённым решением*. Однако равенство (14) неявно содержит информацию о производной [21], именно,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Мы не можем использовать определение в форме (14), потому что, во-первых, в рассматриваемом случае функция $u(x, t)$ не равна нулю на границе, а во-вторых, мы строим теорию, которая была бы верна в случае несамосопряжённых операторов и для задач произвольной размерности.

Согласно (15) на линии разрыва $\partial x / \partial t = D(t)$ справедливо равенство

$$\left[uD - k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0; \tag{16}$$

здесь и ниже через $[\cdot]$ обозначается разность между значениями функции слева и справа от линии разрыва.

Физические законы, утверждающие непрерывность решения и потока, являются частным случаем соотношения (16):

$$[u] = 0, \quad \left[k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0. \quad (17)$$

Поскольку мы предположим, что $u(x, t) \in C(\overline{Q}_T)$, далее ограничимся случаем, когда $\partial u / \partial x$ на линиях разрыва $x_k = v_k(t)$, $k = \overline{1, m}$, имеет разрывы только первого рода.

Отметим, что в случае линейных задач второе условие в (17) имеет вид

$$\left[k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0.$$

Поэтому, если $\partial u / \partial x$ – разрывная функция, то это влечёт за собой разрыв коэффициента $k = k(x, t)$. В нелинейном случае это не является необходимым. Непрерывность потока может быть обеспечена вырождением коэффициента $k = k(x, t, u)$ на слабых линиях разрыва, как мы можем наблюдать это в случае бегущих температурных волн вдоль нулевого фона для степенных нелинейностей $k = u^\sigma$, $\sigma > 0$ (см. [7, с. 450]).

В случае разрывных коэффициентов вдоль прямых $x = \xi$ А.А. Самарский в [7, с. 417] доказал, что наилучшая консервативная схема с шаблонным функционалом вида

$$a_i = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x, t)} \right)^{-1}$$

сходится в L_2 -норме со вторым порядком по пространственной переменной. Более сложный случай, когда линия разрыва не параллельна координатным осям, не рассматривался. В общем случае для получения соответствующих оценок погрешности аппроксимации наряду с негативной нормой по пространству требуется использовать также и негативные нормы по временной переменной.

На введённой равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальную задачу (13), (10) аппроксимируем линеаризованной разностной схемой

$$y_t = (a\hat{y}_{\overline{x}})_x, \quad (18)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h; \quad y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), \quad t_n \in \omega_\tau. \quad (19)$$

Шаблонный функционал

$$a = a(y) = 0.5[k(x_{(0.5)}, t_n, y_{i-1}^n) + k(x_{(0.5)}, t_n, y_i^n)], \quad x_{(0.5)} = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i),$$

как обычно, выбирается из условия аппроксимации второго порядка для эллиптического оператора [7, с. 409]:

$$(a\hat{u}_{\overline{x}})_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) = O(h^2 + \tau).$$

Укажем некоторые свойства решения разностной схемы (18), (19). Определим область значений обобщённого решения задачи (13), (10):

$$\overline{D} = \{m_1 \leq u(x, t) \leq m_2, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T\},$$

$$m_1 = \min_{(x,t) \in \overline{Q}_T} \{\mu_1(t), \mu_2(t), u_0(x)\}, \quad m_2 = \max_{(x,t) \in \overline{Q}_T} \{\mu_1(t), \mu_2(t), u_0(x)\}.$$

Далее будем использовать доказанную в [22] двустороннюю оценку для разностного решения

$$m_1 \leq y_i^n \leq m_2, \quad i = \overline{0, N}, \quad n = \overline{0, N_0}, \quad (20)$$

т.е. $y(x, t) \in \overline{D}_u$ для всех $(x, t) \in \overline{\omega}_{h\tau}$. Доказательство основывается на установленном в [22, 23] принципе максимума для разностных схем со знакопеременными входными данными.

Следствием двусторонней оценки (20) является априорная оценка [22]

$$\|y^n\|_{C(\overline{\omega}_{h\tau})} \leq \max\{\max_{t \in \overline{\omega}_\tau}\{|\mu_1(t)|, |\mu_2(t)|\}, \|u_0\|_{C(\overline{\omega}_h)}\}.$$

Получим теперь задачу для погрешности метода $z = y - u$. В силу нелинейности исследуемой схемы эта задача будет заведомо нетривиальна. Фактически, вычитая из разностного уравнения (18) уравнение для погрешности аппроксимации $u_t = (a\hat{u}_{\overline{x}})_x$, мы получаем две эквивалентные формы для уравнения для погрешности метода z :

$$z_t = (a(y)\hat{z}_{\overline{x}})_x + ((a(y) - a(u))\hat{u}_{\overline{x}})_x + \psi, \tag{21}$$

$$z_t = (a(y)\hat{z}_{\overline{x}})_x + ((a(y) - a(u))\hat{y}_{\overline{x}})_x + \psi. \tag{22}$$

К этим уравнениям следует добавить соответствующие начальные и граничные условия:

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad z(0, \hat{t}) = z(l, \hat{t}) = 0, \quad t \in \omega_\tau.$$

Хотя эти задачи эквивалентны, в постановке (22) нам нужно иметь предварительную информацию о локальном поведении разностной производной от приближённого решения y_x . Получение такой априорной оценки для производной y_x не является простой задачей. Аналогичные проблемы возникают при непосредственном изучении устойчивости. Задача для возмущения $\delta y = \tilde{y} - y$ в этом случае имеет вид

$$\delta y_t = (a(y)\delta\hat{y}_{\overline{x}})_x + ((a(\tilde{y}) - a(y))\hat{y}_{\overline{x}})_x,$$

$$\delta y(x, 0) = \tilde{u}_0 - u_0, \quad x \in \overline{\omega}_h; \quad \delta y(0, \hat{t}) = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_1, \quad \delta y(l, \hat{t}) = \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_2, \quad t \in \omega_\tau.$$

Так как $y, u \in \overline{D}_u$ и $k(u) \in C^1(\overline{D}_u)$, то

$$\max_{(x,t) \in \overline{\omega}_{h\tau}} |a(y) - a(u)| \leq Lz_{(0.5)}, \quad L = \text{const} > 0.$$

Далее будем использовать скалярные произведения и нормы в пространстве сеточных функций $L_2(\omega_h)$, $W_2^1(\omega_h)$:

$$(v, g) = \sum_{i=1}^{N-1} hv_i g_i, \quad \|v\|_h = \sqrt{(v, v)}, \quad \|v_{\overline{x}}\|^2 = \sum_{i=1}^N hv_{\overline{x},i}^2.$$

Умножая разностное уравнение (21) скалярно в $L_2(\omega_h)$ на $2\tau z$ и используя формулу суммирования по частям

$$(u, v_x) = -(u_{\overline{x}}, v] + u_N v_N - u_0 v_1,$$

а также тождество

$$z^{n+1} = 0.5(z^n + z^{n+1}) + 0.5\tau z_t,$$

получаем энергетическое соотношение

$$\tau^2 \|z_t\|_h^2 + \|z^{n+1}\|_h^2 + 2\tau(a(y), \hat{z}_{\overline{x}}] = \|z^n\|_h^2 + 2\tau(a(y) - a(u), \hat{u}_{\overline{x}}\hat{z}_{\overline{x}}] + 2\tau(\hat{z}, \psi).$$

Далее, следуя работе [19] с использованием техники негативных норм, приходим к следующей оценке точности метода в сеточной L_2 -норме:

$$\|y^n - u^n\|_h \leq c_6(\sqrt{h} + \sqrt{\tau}), \quad n = \overline{0, N_0},$$

означающей безусловную сходимость разностного решения к обобщённому решению дифференциальной задачи (13), (10).

Очевидно, что аналогичная оценка имеет место и для решения \tilde{y} разностной схемы (18), (19) с возмущённым начальным условием

$$\|\tilde{y}^n - \tilde{u}^n\|_h \leq c_7(\sqrt{h} + \sqrt{\tau}), \quad n = \overline{0, N_0}.$$

Для применения доказанной в работе теоремы мы должны предположить, что обобщённое решение задачи (13), (10) существует, единственно и непрерывно зависит от начального условия

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\tilde{u} - u\|_{L_2(0,t)} \leq c_8 \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{L_2(0,t)}.$$

Так как мы не возмущаем граничное условие ($\delta u(0, t) = \delta u(l, t) = 0$), то ошибка

$$R(u) = \|u\|_h^2 - \|u\|_{L_2(0,t)}$$

представляет собой погрешность аппроксимации обобщённой квадратурной формулы трапеций. В силу отсутствия существования второй производной $\partial^2 u / \partial x^2$ условие согласования норм выглядит следующим образом:

$$|R(u)| \leq c_8 h.$$

Применяя теперь такие же оценки, как и в доказательстве достаточности теоремы, получаем оценку устойчивости

$$\max_{t \in \overline{\omega}_\tau} \|\tilde{y}(t) - y(t)\|_h \leq c_9 \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{L_2(0,t)},$$

которая имеет место при всех достаточно малых $h \leq h_0$, $\tau \leq \tau_0$, удовлетворяющих условию

$$\sqrt{h} + \sqrt{\tau} \leq c_{10} \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{L_2(0,t)}.$$

Автор выражает благодарность профессору Б.С. Йовановичу за обсуждение работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рябенский В.С., Филиппов А.Ф. Об устойчивости разностных схем. М., 1956.
2. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.; Ижевск, 2002.
3. Рунтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М., 1972.
4. Guo Ben-Yu (Guo Pen-Yu). Generalized stability of discretization and its applications to numerical solutions of non-linear partial differential equations // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1992. Т. 32. № 4. Р. 530–541.
5. Якут Л.И. Теоремы Лакса для нелинейных эволюционных уравнений // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156. № 6. С. 1304–1307.
6. Якут Л.И. К вопросу обоснования сходимости разностных схем // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 1. С. 76–79.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1977.
8. Matus P. Stability of difference schemes for non-linear time-dependent problems // Comput. Meth. Appl. Math. 2003. V. 3. № 2. Р. 313–329.
9. Матус П.П. О корректности разностных схем для полулинейного параболического уравнения с обобщёнными решениями // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50. № 12. С. 2155–2175.
10. Matus P.P., Lemeshevsky S.V. Stability and monotonicity of difference schemes for nonlinear scalar conservation laws and multidimensional quasi-linear parabolic equations // Comput. Meth. Appl. Math. 2009. V. 9. № 3. Р. 253–280.
11. Матус П.П. Устойчивость по начальным данным и монотонность неявной разностной схемы для однородного уравнения пористой среды с квадратичной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 7. С. 1011–1021.
12. Якубук Р.М. Устойчивость по входным данным и монотонность неявной разностной схемы для одного квазилинейного параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 2. С. 274–285.

13. Матус П.П., Чуйко М.М. Исследование устойчивости и сходимости разностных схем для политропного газа с дозвуковыми течениями // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 7. С. 1053–1064.
14. Марцинкевич Г.Л., Матус П.П., Чуйко М.М. Устойчивость разностных схем в инвариантах Римана для политропного газа // Журн. вычислит. математики и мат. физ. 2010. Т. 50. № 6. С. 1078–1091.
15. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П. Разностные схемы с операторными множителями. Минск, 1998.
16. Абрашин В.Н. Разностные схемы для нелинейных гиперболических уравнений. I // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 11. С. 2029–2040.
17. Ляшко А.Д., Федотов Е.М. Исследование нелинейных двухслойных операторно-разностных схем с весами // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 7. С. 1217–1227.
18. Матус П.П., Станишевская Л.В. О безусловной сходимости разностных схем для нестационарных квазилинейных уравнений математической физики // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 7. С. 1203–1219.
19. Matus P. On convergence of difference schemes for IBVP for quasilinear parabolic equations with generalized solutions // Comput. Meth. Appl. Math. 2014. V. 14. № 3. P. 361–371.
20. Годунов С.К. Разностный метод численного расчёта разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47 (89). № 3. С. 271–306.
21. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. Уравнения математической физики. Дополнительные главы. Казань, 2008.
22. Matus P., Hieu L.M., Vulkov L.G. Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations // J. of Comput. and Appl. Math. 2017. V. 310. P. 186–199.
23. Матус П.П., Утебаев Б.Д. Компактные и монотонные разностные схемы для параболических уравнений // Мат. моделирование. 2021. Т. 33. № 4. С. 60–78.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск,
Католический университет им. Иоанна-Павла II,
г. Люблин, Польша

Поступила в редакцию 05.11.2020 г.
После доработки 05.11.2020 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.

УДК 519.642.7+517.968.73

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ДЛЯ ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРИЛОЖЕНИИ К ДВУМЕРНЫМ ЗАДАЧАМ ДИФРАКЦИИ

© 2021 г. Г. А. Расолько, В. М. Волков

Рассматривается математическая модель рассеяния H -поляризованных электромагнитных волн на экране с криволинейной границей, основанная на сингулярном интегро-дифференциальном уравнении с ядром Коши и логарифмической особенностью. Подынтегральные выражения содержат как искомую функцию, так и её первую производную. Для численного анализа данной модели построены две вычислительные схемы, основанные на представлении искомой функции в виде линейной комбинации ортогональных многочленов Чебышёва и спектральных соотношениях, позволяющих получить простые аналитические выражения для сингулярной составляющей уравнения. Коэффициенты разложения решения по базису полиномов Чебышёва вычисляются как решение соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. Результаты численных экспериментов показывают, что на сетке из 20–30 узлов погрешность приближённого решения не превышает вычислительной погрешности.

DOI: 10.31857/S0374064121060091

Введение. Аппарат сингулярных интегральных уравнений (СИУ) широко используется при решении задач аэродинамики, дифракции и в разных областях естествознания. Точность приближённого численного решения интегральных уравнений во многом определяется способом их дискретизации, т.е. выбором квадратурных формул, базисных функций и узлов аппроксимации, с помощью которых исходная задача сводится при численном интегрировании к системе линейных алгебраических уравнений приемлемой размерности и обусловленности. Для сингулярных интегральных уравнений вследствие наличия особенностей в подынтегральных функциях требуется максимально учитывать специфику задачи.

Данная работа является продолжением исследований [1–4], посвящённых разработке вычислительных схем приближённого решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений методом ортогональных многочленов.

1. Постановка задачи. Математическое описание задачи рассеяния H -поляризованных электромагнитных волн экраном с криволинейной границей сводится к решению интегро-дифференциального уравнения вида (см. [5, с. 87])

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 M(x,t)\varphi(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t)K(x,t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1. \quad (1)$$

Здесь $M(x,t)$, $K(x,t)$ и $f(x)$ – заданные функции из класса Гёльдера H_α , $0 < \alpha \leq 1$, и $\varphi(x) \in H_\alpha$ – искомая функция. В монографии [5, с. 67] отмечено, что решение данного уравнения существует и единственно при выполнении условий

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = 0 \quad (2)$$

и искомая функция представима в виде

$$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2} v(x), \quad (3)$$

где $v(x)$ – функция, ограниченная на отрезке $x \in [-1, 1]$.

Вычислительная схема, предложенная в [5, с. 85], основывается на интерполировании искомого решения многочленом по узлам Чебышёва $\tau_m = \cos \theta_m$, $\theta_m = m\pi/(n + 1)$, $m = \overline{1, n}$, и привлечении известных спектральных соотношений для интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln |t-x| dt = \alpha_k T_k(x), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{4}$$

где $\alpha_0 = -\ln 2$, $\alpha_k = -1/k$, $k > 0$, а $T_k(x)$ – многочлены Чебышёва первого рода; как известно, $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ при $x \in [-1, 1]$.

В данной работе предлагаются алгоритмы численного решения уравнения (1) методом ортогональных многочленов, которые, в отличие от методики [5], построены на основе спектральных или квазиспектральных соотношений и позволяют получить приближённые аналитические выражения для сингулярных интегралов, не прибегая к квадратурным формулам.

2. Предварительные сведения. Наряду с (4) будем использовать известные спектральные соотношения [6, с. 45]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} = U_{n-1}(x), \quad -1 < x < 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_{n-1}(t) \frac{dt}{t-x} = -T_n(x), \quad -1 < x < 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

где $U_k(x)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, – многочлены Чебышёва второго рода. Кроме приведённых, получим некоторые дополнительные тождества, необходимые для построения эффективных алгоритмов численного решения поставленной задачи.

Для произвольной функции $f(x)$, $x \in [-1, 1]$, используем приближённое её представление в виде интерполяционного многочлена по узлам Чебышёва первого рода [7, с. 104]

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j T_j(x), \tag{7}$$

где

$$f_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k), \quad f_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{1, n}, \quad x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = \overline{0, n}.$$

Для разложения функции $f(x)$ по многочленам Чебышёва второго рода воспользуемся в представлении (7) известными тождествами [7, с. 23]

$$T_0(x) = U_0(x), \quad 2T_1(x) = U_1(x), \quad 2T_j(x) = U_j(x) - U_{j-2}(x), \quad j \geq 2.$$

В результате будем иметь

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j U_j(x), \tag{8}$$

где

$$f_j = G_j - G_{j+2}, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad f_{n-1} = G_{n-1}, \quad f_n = G_n, \\ G_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{0, n}, \quad x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = \overline{0, n}.$$

Используя разложения (7) и (8), несложно построить следующий интерполяционный многочлен $\Psi_{n,n}(x, t)$ функции двух переменных $\Psi(x, t)$:

$$\Psi(x, t) \approx \Psi_{n,n}(x, t) = \sum_{q=0}^n T_q(x) \sum_{j=0}^n U_j(t) \psi_{q,j},$$

$$\psi_{q,j} = \frac{\delta_q}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n T_q(x_l) \sum_{r=0}^n \Psi(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)),$$

$$\delta_q = \begin{cases} 1, & q = 0, \\ 2, & q \neq 0, \end{cases} \quad \theta_j = \begin{cases} 1, & j = \overline{0, n-2}, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases} \quad x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = \overline{0, n}. \quad (9)$$

3. Спектральные схемы решения задачи (1), (2). Рассмотрим две схемы численного решения задачи (1), (2). Данные схемы основаны на представлении искомого решения в виде интерполяционных полиномов Чебышёва и использовании соответствующих спектральных соотношений вида (4)–(6).

3.1. В первой схеме приближённое решение задачи (1), (2) будем искать как решение следующей задачи относительно новой неизвестной функции $\varphi_n(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'_n(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 M_{n,n}(x, t) \varphi_n(t) \ln|t-x| dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = f_{3n+2}(x), \quad |x| < 1, \quad \varphi_n(-1) = \varphi_n(1) = 0, \quad (10)$$

где $M_{n,n}(x, t)$ и $K_{n,n}(x, t)$ – интерполяционные многочлены вида (9) степени n для функций $M(x, t)$ и $K(x, t)$ соответственно, $f_{3n+2}(x)$ – интерполяционный многочлен функции $f(x)$ вида (8) степени $3n+2$. Отметим, что, согласно [5, с. 67], уравнение (10) разрешимо.

Чтобы получить явное выражение для функции $\varphi_n(x)$, поступим следующим образом. Введём вспомогательную функцию

$$v_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'_n(t)}{t-x} dt. \quad (11)$$

Тогда, выполнив обращение интеграла (11) в классе неограниченных функций, получим

$$\varphi'_n(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} v_n(t)}{t-x} dt + \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Далее, учитывая, что $\varphi_n(-1) = 0$, приходим к выражению

$$\varphi_n(x) = \int_{-1}^x \varphi'_n(\tau) d\tau = -\int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{v_n(t)}{t-\tau} dt + \frac{c}{\sqrt{1-\tau^2}} \right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) v_n(t) dt + \mu(x), \quad \mu(x) = c(\arcsin x + \pi/2), \quad (12)$$

где

$$H(x, t) = -\sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) =$$

$$= -\sqrt{1-t^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{|t-x|} \right) = -\ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{|t-x|}.$$

Учитывая тождество $H(-1, t) = H(1, t)$, находим, что $c = 0$. Функция $H(x, t)$, очевидно, является симметрической и неположительной, и кроме того, имеют место оценки

$$H(x, t) = H(\cos \theta, \cos \sigma) = -\ln \left((1 - \cos(\theta + \sigma)) \left(2 \sin \frac{\theta + \sigma}{2} \left| \sin \frac{\theta - \sigma}{2} \right| \right)^{-1} \right) =$$

$$= -\ln \left(\sin \frac{\theta + \sigma}{2} \left| \sin \frac{\theta - \sigma}{2} \right|^{-1} \right) \leq 0, \quad 0 < \sigma, \quad \theta \leq \pi,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H(x, t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) dt = \sqrt{1-x^2} \leq 1.$$

Для вспомогательной функции (11) используем разложение

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k U_k(x), \tag{13}$$

$c_k, k = \overline{0, n}$, – пока неизвестные постоянные. Из (12) и (13) следует, что

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x), \tag{14}$$

так как

$$\varphi_n(x) = -\int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{v_n(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau =$$

$$= -\sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_k(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} T_{k+1}(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^n c_k A_k(x),$$

где

$$A_k(x) = \int_{-1}^x \frac{T_{k+1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = -\frac{1}{k+1} \sin((k+1) \arccos(x)) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{k+1} U_k(x), \quad k \geq 0.$$

Далее, введём обозначения

$$I(\varphi_n; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 M_{n,n}(x, t) \varphi_n(t) \ln |t-x| dt, \tag{15}$$

$$k(\varphi_n; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) K_{n,n}(x, t) dt. \tag{16}$$

Уравнение (10) с учётом разложения (13) и обозначений (15), (16) принимает вид

$$v_n(x) + I(\varphi_n; x) + k(\varphi_n; x) = f_{3n+2}(x). \quad (17)$$

Воспользовавшись представлением (14), преобразуем слагаемые (15) и (16) в равенстве (17). Для интеграла $I(\varphi_n; x)$ имеем

$$\begin{aligned} I(\varphi_n; x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) M_{n,n}(x, t) \ln |t - x| dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n \beta_k c_k U_k(t) M_{n,n}(x, t) \ln |t - x| dt = - \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1} J_k(x), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} M_{n,n}(x, t) U_k(t) \ln |t - x| dt. \quad (19)$$

Запишем для функции $M(x, t)$ её интерполяционный многочлен $M_{n,n}(x, t)$ вида (9):

$$\begin{aligned} M_{n,n}(x, t) &= \sum_{q=0}^n T_q(x) \sum_{j=0}^n U_j(t) m_{q,j}, \\ m_{q,j} &= \frac{\delta_q}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n T_q(x_l) \sum_{r=0}^n M(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)), \end{aligned} \quad (20)$$

где δ_q , θ_j и x_k , $k = \overline{0, n}$, – те же, что в (9). Тогда функция (19) примет вид

$$J_k(x) = \sum_{q=0}^n T_q(x) \sum_{j=0}^n m_{q,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) U_j(t) \ln |t - x| dt = \sum_{q=0}^n T_q(x) \sum_{j=0}^n m_{q,j} L_{k,j}(x), \quad (21)$$

здесь

$$L_{k,j}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) U_j(t) \ln |t - x| dt.$$

Учитывая тождество

$$\sqrt{1-t^2} U_k(t) U_j(t) = \frac{T_{|k-j|}(t) - T_{k+j+2}(t)}{2\sqrt{1-t^2}}$$

и спектральные соотношения (4), для функции $L_{k,j}(x)$ получаем представление

$$L_{k,j}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_{|k-j|}(t) - T_{k+j+2}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln |t - x| dt = \frac{1}{2} (\alpha_{|k-j|} T_{|k-j|}(x) - \alpha_{k+j+2} T_{k+j+2}(x)),$$

и тогда из (21) следует, что

$$J_k(x) = \sum_{q=0}^n T_q(x) \sum_{j=0}^n m_{q,j} \frac{1}{2} S_{k,j}(x), \quad S_{k,j}(x) = (\alpha_{|k-j|} T_{|k-j|}(x) - \alpha_{k+j+2} T_{k+j+2}(x)). \quad (22)$$

Вследствие тождества (22) представление (18) принимает вид

$$I(\varphi_n; x) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1} \sum_{q=0}^n T_q(x) \sum_{j=0}^n m_{q,j} S_{k,j}(x).$$

Аналогичным образом получим представление интеграла (16), используя интерполяционный многочлен $K_{n,n}(x, t)$ вида (9) для функции $K(x, t)$:

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{q=0}^n T_q(x) \sum_{j=0}^n U_j(t) k_{q,j},$$

$$k_{q,j} = \frac{\delta_q}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n T_q(x_l) \sum_{r=0}^n K(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)), \tag{23}$$

где δ_q , θ_j и x_k , $k = \overline{0, n}$, – те же, что в (9).

С учётом представления (23) и свойства ортогональности многочленов Чебышёва второго рода выражение (16) принимает вид

$$k(\varphi_n; x) = -\sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1} \sum_{q=0}^n T_q(x) \sum_{j=0}^n k_{q,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) U_j(t) dt =$$

$$= -\sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1} \sum_{q=0}^n T_q(x) \sum_{j=0}^n k_{q,j} \rho_{k,j}, \quad \rho_{k,j} = \begin{cases} 0, 5, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

или

$$k(\varphi_n; x) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1} \sum_{q=0}^n T_q(x) k_{q,k}.$$

Окончательно, используя полученные выше представления интегралов в уравнении (10), приходим к задаче расчёта коэффициентов разложения приближённого решения по базису полиномов Чебышёва

$$\sum_{k=0}^n c_k U_k(x) - \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{2k+2} \sum_{q=0}^n T_q(x) \left[\sum_{j=0}^n m_{q,j} (\alpha_{|k-j|} T_{|k-j|}(x) - \alpha_{k+j+2} T_{k+j+2}(x)) + k_{q,k} \right] =$$

$$= f_{3n+2}(x). \tag{24}$$

Рассматривая равенство (24) на множестве узлов чебышёвской сетки

$$x_l = \cos\left(\frac{2l+1}{2n+2}\pi\right), \quad l = \overline{0, n}, \tag{25}$$

приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_k , $k = \overline{0, n}$:

$$\sum_{k=0}^n c_k a_{l,k} = f_{3n+2}(x_l), \tag{26}$$

где

$$a_{l,k} = U_k(x_l) - \frac{1}{2k+2} \sum_{q=0}^n T_q(x_l) \left[\sum_{j=0}^n m_{q,j} (\alpha_{|k-j|} T_{|k-j|}(x_l) - \alpha_{k+j+2} T_{k+j+2}(x_l)) + k_{q,k} \right],$$

$$\alpha_0 = -\ln 2, \quad \alpha_k = -1/k, \quad k > 0.$$

Система (26), являющаяся следствием равенства (24), разрешима и имеет единственное решение $c_k, k = \overline{0, n}$.

Приближённое решение $\varphi_n(x)$ вычисляется по формуле (14)

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} c_k U_k(x).$$

3.2. Рассмотрим построение другой схемы численного решения задачи (1), (2). Вначале докажем следующие два утверждения.

Утверждение 1. Для $|x| < 1$ имеет место равенство

$$L_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (\sqrt{1-t^2} T_k(t))' \frac{dt}{t-x} = \begin{cases} -U_k(x), & k = 0, \quad k = 1, \\ \frac{k-1}{2} U_{k-2}(x) - \frac{k+1}{2} U_k(x), & k \geq 2. \end{cases} \tag{27}$$

Доказательство. При $k = 0$ и $k = 1$ формула (27) очевидно верна вследствие соотношений (5), (6).

Пусть $k \geq 2$. Вычислим производную от подынтегральной функции и используем тождество [7, с. 23] $xT_k(x) = (1-x^2)U_{k-1}(x) - T_{k-1}(x)$. Тогда

$$L_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left((k+1)\sqrt{1-t^2}U_{k-1}(t) - \frac{T_{k-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \right) \frac{dt}{t-x}.$$

Принимая во внимание соотношения (5), (6) и тождество $2T_k(x) = U_k(x) - U_{k-2}(x)$, получаем

$$L_k(x) = -(k+1)T_k(x) - U_{k-2}(x) = \frac{k-1}{2}U_{k-2}(x) - \frac{k+1}{2}U_k(x),$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 2. Для $|x| < 1$ имеет место равенство

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) \ln|t-x| dt = \begin{cases} -\frac{\ln 2}{2} T_0(x) + \frac{1}{4} T_2(x), & k = 0, \\ -\frac{1}{2k} T_k(x) + \frac{1}{2k+4} T_{k+2}(x), & k \geq 1. \end{cases} \tag{28}$$

Доказательство. С учётом тождества $2(1-x^2)U_k(x) = T_k(x) - T_{k+2}(x)$ (см., например, [7, с. 23]) подынтегральная функция в (28) принимает вид (4), откуда следует справедливость утверждения.

Приближённое решение задачи (1), (2) будем искать в том же виде, что и (3), т.е. в виде $\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2} v_n(x)$, где новая неизвестная функция $v_n(x)$ – решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(\sqrt{1-t^2} v_n(t))'}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) M_{n,n}(x, t) \ln|t-x| dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = f_{3n+2}(x), \quad -1 < x < 1, \end{aligned} \tag{29}$$

здесь, как и выше, $M_{n,n}(x, t)$ и $K_{n,n}(x, t)$ – интерполяционные многочлены вида (9) степени n для функций $M(x, t)$ и $K(x, t)$ соответственно, $f_{3n+2}(x)$ – интерполяционный многочлен функции $f(x)$ вида (7) степени $3n + 2$.

Используем следующее представление искомой функции:

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \tag{30}$$

в котором $c_k, k = \overline{0, n}$, – пока неизвестные постоянные.

При подстановке (30) в (29) с учётом равенства (27) и того, что $U_{-1}(x) = 0$, получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(\sqrt{1-t^2}v_n(t))'}{t-x} dt = \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(\sqrt{1-t^2}T_k(t))'}{t-x} dt = \sum_{k=0}^n c_k L_k(x). \tag{31}$$

Рассмотрим, далее, второй интеграл в (29):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}v_n(t)M_{n,n}(x,t) \ln|t-x| dt = \\ & = \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}T_k(t)M_{n,n}(x,t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^n c_k I_k(x), \end{aligned}$$

где

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}M_{n,n}(x,t)T_k(t) \ln|t-x| dt.$$

Воспользовавшись представлением (20) для многочлена $M_{n,n}(x,t)$, будем иметь

$$I_k(x) = \sum_{q=0}^n T_q(x) \sum_{j=0}^n m_{q,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}T_k(t)U_j(t) \ln|t-x| dt = \sum_{q=0}^n T_q(x) \sum_{j=0}^n m_{q,j} P_{k,j}(x),$$

где

$$P_{k,j}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}T_k(t)U_j(t) \ln|t-x| dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}(U_{j+k}(t) + U_{j-k}(t)) \ln|t-x| dt \right).$$

Для вычисления интегралов из определения функции $P_{k,j}(x)$ используем, поскольку $U_{-1}(x) = 0$ и $U_k(x) = -U_{-(k+2)}(x)$ при $k < 0$, равенство (28). В результате для второго интеграла в (29) получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}v_n(t)M_{n,n}(x,t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{q=0}^n T_q(x) \sum_{j=0}^n m_{q,j} P_{k,j}(x), \tag{32}$$

где

$$P_{k,j}(x) = \frac{1}{2}J_{j+k}(x) + \frac{1}{2} \begin{cases} J_{j-k}(x), & \text{если } j-k \geq 0, \\ 0, & \text{если } j-k = -1, \\ -J_{k-j-2}(x), & \text{если } j-k < -1. \end{cases}$$

Аналогичным образом преобразуем третий интеграл в (29), используя представление (23) для многочлена $K_{n,n}(x, t)$ и свойство ортогональности многочленов Чебышёва второго рода:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt &= \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) U_j(t) dt = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} (U_{j+k}(t) + U_{j-k}(t)) dt \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n k_{m,j} (\mu_{j,k} + \omega_{j,k}) = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) D_{m,k}. \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь $\mu_{j,k} = 0.5$, если $j = k = 0$, и $\mu_{j,k} = 0$ в противном случае,

$$\omega_{j,k} = \begin{cases} 0.5, & \text{если } j = k, \\ -0.5, & \text{если } j = k - 2 \geq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad D_{m,k} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n k_{m,j} (\mu_{j,k} + \omega_{j,k}).$$

Для $D_{m,k}$ имеем

$$D_{m,k} = \begin{cases} k_{m,0}/2, & \text{если } k = 0, \\ k_{m,1}/4, & \text{если } k = 1, \\ (k_{m,k} - k_{m,k-2})/4, & \text{если } k \geq 2. \end{cases}$$

Используя полученные выше представления интегралов (31)–(33) в уравнении (29), приходим к задаче для нахождения коэффициентов разложения приближённого решения по базису полиномов Чебышёва:

$$\sum_{k=0}^n c_k L_k(x) + \sum_{k=0}^n c_k \sum_{q=0}^n T_q(x) \sum_{j=0}^n m_{q,j} P_{k,j}(x) + \sum_{k=0}^n c_k \sum_{q=0}^n T_q(x) D_{q,k} = f_{3n+2}(x). \tag{34}$$

Рассматривая уравнение (34) на множестве узлов чебышёвской сетки (25), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_k , $k = \overline{0, n}$:

$$\sum_{k=0}^n c_k a_{l,k} = f_{3n+2}(x_l), \quad l = \overline{0, n}, \tag{35}$$

где

$$a_{l,k} = L_k(x_l) + \sum_{q=0}^n T_q(x_l) \left(\sum_{j=0}^n m_{q,j} P_{k,j}(x_l) + D_{q,k} \right), \quad k = \overline{0, n}, \quad l = \overline{0, n}.$$

Приближённое решение уравнения (1) в произвольной точке $x \in [-1, 1]$ вычисляется по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x). \tag{36}$$

4. Результаты численных экспериментов. Предложенные схемы протестированы на примере решения модельной задачи для уравнения (1) при

$$f(x) = \frac{4x^4}{5} - \frac{32x^2}{15} + \frac{x(60\sqrt{2} - 90) - 79}{30(x^2 + 1)} - x(2\sqrt{2} + 1) + \frac{79}{30},$$

$$M(x, t) = \frac{x}{x^2 + 1} (2t^2 - 1), \quad K(x, t) = \frac{x^3 t}{x^2 + 1} \frac{1}{t^2 + 1}.$$

Известно, что точным решением задачи (1), (2) в данном случае является функция $\varphi(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, в чём несложно убедиться и непосредственно.

Как показывают расчёты, уже при небольшом числе точек чебышёвской сетки достигается достаточно высокая точность вычисления приближённого решения данного уравнения.

Для первой схемы вычисления, решая систему (26) при $n \geq 18$, получаем, что точное решение $\varphi(x)$ отличается от приближённого $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (14), в системе точек $x = -0.99, -0.98, \dots, 0.99$ не более чем на $3 \cdot 10^{-15}$, что соизмеримо с вычислительной погрешностью. Такие же результаты справедливы и относительно точности приближённого решения, полученного при использовании второй схемы (35), (36).

Заключение. Построенные схемы численного решения интегро-дифференциальных уравнений вида (1), в отличие от ранее известных методик [5], позволяют получить приближённое решение задачи, не прибегая к квадратурным формулам. Благодаря этому, как показывают численные примеры, предложенные алгоритмы при небольших вычислительных затратах на достаточно грубой сетке обеспечивают высокую точность приближённого решения, ограниченную лишь вычислительной погрешностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Расолько Г.А.* Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 3. С. 68–74.
2. *Расолько Г.А.* К численному решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 58–68.
3. *Расолько Г.А., Шешко С.М., Шешко М.А.* Об одном методе численного решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1285–1292.
4. *Расолько Г.А., Шешко С.М.* Приближенное решение одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения методом ортогональных многочленов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2020. № 2. С. 10–20.
5. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев, 1984.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М., 1966.
7. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 28.10.2020 г.
После доработки 28.10.2020 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.

УДК 517.927.6

МНОГОТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НА ГРАФЕ

© 2021 г. М. Г. Завгородний

Даётся постановка многоточечной краевой задачи, заданной на геометрическом графе. Описаны характеристики графа, допускающего такую постановку. Найден вид краевой задачи, сопряжённой к поставленной задаче. Для функции Грина спектральной многоточечной краевой задачи на графе получен аналог теоремы Келдыша о вычетах.

DOI: 10.31857/S0374064121060108

1. Об одном подходе к многоточечной краевой задаче Валле-Пуссена. Пусть на конечном отрезке $[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, вещественной оси заданы непрерывные функции $p_i(x)$, $i = \overline{0, n}$, $n \geq 2$, и непрерывная функция $f(x)$. Пусть также задан набор из $(m + 1)$ -й точки: $\alpha = a_0 < a_1 < \dots < a_m = \beta$, $m \geq 1$.

Рассмотрим многоточечную краевую задачу Валле-Пуссена для дифференциального уравнения

$$p_0(x)u^{(n)}(x) + p_1(x)u^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x)u(x) = f(x) \quad (x \in [\alpha, \beta]) \quad (1)$$

при условиях

$$u(a_k) = u'(a_k) = \dots = u^{(\mu_k-1)}(a_k) = 0, \quad k = \overline{0, m}, \quad (2)$$

где $\mu_k \geq 1$ и $\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_m = n$.

Считаем, что $\inf_{x \in [\alpha, \beta]} |p_0(x)| > 0$. Эта задача имеет n условий и её решение ищется в пространстве $C^n[\alpha, \beta]$.

Опишем иной подход к поставленной задаче. Для этого сузим дифференциальное уравнение (1) на объединение интервалов $\mathfrak{S} = [\alpha, \beta] \setminus \{a_k : k = \overline{0, m}\}$ и дополним его во внутренних точках a_k , $k = \overline{1, m-1}$, отрезка $[\alpha, \beta]$ условиями непрерывности

$$u^{(j)}(a_k - 0) = u^{(j)}(a_k + 0), \quad j = \overline{0, n-1}, \quad k = \overline{1, m-1}.$$

Полученная задача вместе с условиями (2) эквивалентна многоточечной краевой задаче Валле-Пуссена (1), (2). Она имеет $n + n(m-1) = nm$ условий и является краевой задачей, заданной на геометрическом графе $\Gamma = [\alpha, \beta]$ с множеством вершин a_k , $k = \overline{0, m}$, и множеством рёбер $\gamma_k = (a_{k-1}, a_k)$, $k = \overline{1, m}$.

Такая трактовка многоточечной задачи Валле-Пуссена полезна как для построения сопряжённой к ней краевой задачи, так и для описания поведения функции Грина. При этом не обязательно требовать непрерывность в точках a_k , $k = \overline{1, m-1}$, коэффициентов и правой части дифференциального уравнения (1). Достаточно, чтобы они были равномерно непрерывны на интервалах (a_{k-1}, a_k) , $k = \overline{1, m}$.

2. Постановка многоточечной краевой задачи на графе. Приступим к построению многоточечной краевой задачи, заданной на произвольном графе.

Пусть Γ – конечный связный ориентированный геометрический граф (см. [1]), имеющий m рёбер. Считаем, что каждое ребро инцидентно двум различным вершинам, которые по определению этому ребру не принадлежат [1]. Следуя указанной работе, введём обозначения: \mathfrak{S} – объединение всех рёбер графа Γ , ρ – его цикломатическое число и I^a – множество всех рёбер, инцидентных вершине a . Положим $\zeta_\gamma^a = 1$ ($\zeta_\gamma^a = -1$), если ребро γ ориентировано к вершине a (от вершины a). Напомним, что цикломатическое число ρ определяется равенством $\rho = m - \nu + 1$, где ν – количество вершин графа; вершину называют *внутренней (границной)*, если ей инцидентны два или более рёбер (лишь одно ребро).

Для коэффициентов $p_i \in C(\mathfrak{S})$, $i = \overline{0, n}$, $\inf_{x \in \mathfrak{S}} |p_0(x)| > 0$, и функции $f \in C(\mathfrak{S})$ рассмотрим на множестве \mathfrak{S} дифференциальное уравнение порядка $n \geq 2$

$$p_0(x)u^{(n)}(x) + p_1(x)u^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x)u(x) = f(x) \quad (x \in \mathfrak{S}), \tag{3}$$

дополненное условиями непрерывности

$$(\zeta_\gamma^a)^k u^{(k)}(a_\gamma) = (-\zeta_\eta^a)^k u^{(k)}(a_\eta), \quad \gamma \in \mathfrak{S} \setminus \{\eta\}, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{4}$$

в каждой внутренней вершине a , и условиями

$$u(a_\eta) = u'(a_\eta) = \dots = u^{(\mu^a-1)}(a_\eta) = 0 \quad (0 \leq \mu^a < n) \tag{5}$$

во всех или в некоторых вершинах графа Γ . В условиях (5) $\eta \in I^a$ – фиксированное ребро, своё для каждой вершины a . Очевидно, что если $\mu^a > 0$ для некоторой вершины a , то условия (4) и (5) гарантируют равенство нулю всех односторонних пределов $u^{(j)}(a_\gamma)$, $j = \overline{0, \mu^a - 1}$, вычисленных в вершине a вдоль рёбер $\gamma \in I^a$.

Если суммарное количество κ условий (4) и (5), заданных во всех вершинах графа, равно nt , то краевую задачу (3)–(5) будем называть *многоточечной краевой задачей, заданной на графе*. Под её решением будем понимать функцию из пространства $C^n(\mathfrak{S})$. Отметим, что если граф Γ представляет собой конечный отрезок $[\alpha, \beta]$, то многоточечная задача (3)–(5) является (см. п. 1) классической многоточечной краевой задачей Валле-Пуссена (1), (2).

Теорема 1. *Многоточечная краевая задача (3)–(5) может быть задана либо на графе-дереве при суммарном количестве условий (5), равным n , либо на графе, имеющем один простой цикл, при отсутствии условий (5) во всех вершинах этого графа.*

На графе, имеющем более одного простого цикла, постановка многоточечной краевой задачи невозможна.

Доказательство. Несложно проверить, что равенство $\kappa = nt$ выполняется, если только суммарное количество условий (5) равно $n(1 - \rho)$. Теорема доказана.

3. Сопряжённая краевая задача. Пусть везде ниже $p_i \in C^{(n-k)}(\mathfrak{S})$, $i = \overline{0, n}$. На пространстве $C^n(\mathfrak{S})$ определим операторы

$$(L_k^* u)(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^j (p_{k-j}(x)u(x))^{(j)}, \quad k = \overline{0, n}.$$

В силу результатов работы [1] верно следующее утверждение.

Теорема 2. *Краевая задача, сопряжённая к многоточечной краевой задаче (3)–(5), состоит в определении функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению*

$$(L_n^* u)(x) = f^*(x) \quad (f^* \in C(\mathfrak{S}), \quad x \in \mathfrak{S}) \tag{6}$$

на множестве \mathfrak{S} , условиям

$$\sum_{\gamma \in \mathfrak{S} \setminus \{\eta\}} (\zeta_\gamma^a)^{k+1} (L_k^* u)(a_\gamma) = (-\zeta_\eta^a)^{k+1} (L_k^* u)(a_\eta), \quad k = \overline{0, n - \mu^a - 1}, \tag{7}$$

во всех внутренних вершинах a и условиям

$$u(b) = u'(b) = \dots = u^{(n-\mu^b-1)}(b) = 0 \tag{8}$$

во всех граничных вершинах b , если $\rho = 0$; и только условиям (7) с $\mu^a = 0$, если $\rho = 1$.

Следствие. *Краевая задача, сопряжённая к многоточечной краевой задаче (1), (2), задается на объединении интервалов $\mathfrak{S} = [\alpha, \beta] \setminus \{a_k : k = \overline{0, t}\}$ дифференциальным уравнением (6) при условиях непрерывности*

$$u^{(j)}(a_k - 0) = u^{(j)}(a_k + 0), \quad j = \overline{0, n - \mu_k - 1}, \quad k = \overline{1, t - 1},$$

и краевых условиях

$$u(\alpha) = u'(\alpha) = \dots = u^{(n-\mu_\alpha-1)}(\alpha) = 0, \quad u(\beta) = u'(\beta) = \dots = u^{(n-\mu_\beta-1)}(\beta) = 0.$$

Отметим, что в отличие от многоточечной краевой задачи (1), (2), решение которой принадлежит пространству $C^n[\alpha, \beta]$, решение $u(x)$ сопряжённой к ней краевой задачи не обладает аналогичной гладкостью. В силу приведённого выше утверждения мы можем гарантировать непрерывность производных этого решения $u(x)$ в каждой точке $a_k \in (\alpha, \beta)$ лишь до порядка $n - \mu_k - 1$ включительно. Производные порядка $n - \mu_k$ и выше могут иметь разрывы.

4. Самосопряжённая многоточечная краевая задача. В силу теоремы 3 работы [1] для самосопряжённости краевой задачи, заданной на графе, необходимо, чтобы дифференциальное уравнение (3) имело чётный порядок $n = 2s$ и было приводимо к самосопряжённому виду

$$(Du)(x) \triangleq (g_0(x)u^{(s)}(x))^{(s)} + (g_1(x)u^{(s-1)}(x))^{(s-1)} + \dots + g_s(x)u(x) = f(x) \tag{9}$$

при некоторых коэффициентах $g_k \in C^{(s-k)}(\mathfrak{S})$, $k = \overline{0, s}$, $\inf_{x \in \mathfrak{S}} |g_0(x)| > 0$.

Теорема 3. *Многоточечная краевая задача (9), (4), (5), является самосопряжённой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- а) граф Γ является простой цепью и в каждой его внутренней вершине условия (5) отсутствуют;*
- б) коэффициенты $g_k(x)$, $k = \overline{0, s-1}$, дифференциального уравнения (9) непрерывны на всей цепи Γ вместе со своими производными до $(s - k - 1)$ порядка включительно;*
- в) если $\rho = 0$, то в каждой из двух граничных вершин задано по s условий вида (5).*

Доказательство. Пусть многоточечная краевая задача (9), (4), (5) является самосопряжённой. Тогда

- 1) в каждой внутренней вершине a выполняется равенство $\delta^a - 2 = -2\mu^a$, где δ^a – степень вершины a , и, следовательно, $\delta^a = 2$ и $\mu^a = 0$;
- 2) условия (7), пересчитанные для оператора D с учётом утверждения 1), эквивалентны условиям (4), а это возможно, лишь когда $g_k \in C^{(s-k-1)}(\Gamma)$;
- 3) в силу теоремы 3 работы [1] $\mu^a = s$ для любой граничной вершины a графа Γ .

Обратно, непосредственной проверкой убеждаемся, что многоточечная краевая задача (9), (4), (5) при выполнении условий а)–в) теоремы является самосопряжённой. Теорема доказана.

Следствие. *Среди всей совокупности многоточечных краевых задач Валле-Пуссена (1), (2), заданных на конечном отрезке вещественной оси, только двухточечная краевая задача для дифференциального уравнения самосопряжённого вида с одинаковым количеством условий (2) в каждой из двух граничных точек отрезка является самосопряжённой.*

5. О вычетах функции Грина многоточечной краевой задачи. Рассмотрим многоточечную краевую задачу для дифференциального уравнения

$$p_0(x)u^{(n)}(x) + p_1(x)u^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x)u(x) = \lambda u(x) \quad (x \in \mathfrak{S}) \tag{10}$$

со спектральным параметром λ при условиях (4), (5) и сопряжённую к ней краевую задачу для дифференциального уравнения $(L_n^*u)(x) = \lambda u(x)$ при условиях (7), (8).

Лемма 1. *Собственные значения рассматриваемых взаимно сопряжённых спектральных краевых задач совпадают с учётом геометрической и алгебраической кратностей.*

Перейдём к рассмотрению функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$, $x, \xi \in \mathfrak{S}$, краевой задачи (10), (4), (5) и установим для неё аналог классического результата М.В. Келдыша (см. [2]).

Теорема 4. *Пусть λ_0 – изолированное собственное значение многоточечной краевой задачи (10), (4), (5), геометрическая и алгебраическая кратности которого равны i и q соответственно. Тогда для любой отвечающей λ_0 канонической системы корневых (собственных и присоединённых) функций*

$$u_{k0}(x), u_{k1}(x), \dots, u_{k,q_k-1}(x), \quad k = \overline{1, i}, \quad q_1 + q_2 + \dots + q_i = q,$$

краевой задачи (10), (4), (5) найдётся биортогональная к ней каноническая система корневых функций

$$v_{k0}(\xi), v_{k1}(\xi), \dots, v_{k,q_k-1}(\xi), \quad k = \overline{1, i},$$

сопряжённой краевой задачи, отвечающая тому же собственному значению λ_0 , такая, что вычет функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ относительно её полюса λ_0 является следующей линейной комбинацией произведений корневых функций $u_{kj}(x)$ и $v_{k, q_k - j - 1}(\xi)$:

$$\operatorname{Res}(G(x, \xi, \lambda), \lambda_0) = - \sum_{k=1}^i \sum_{j=0}^{q_k-1} u_{kj}(x) v_{k, q_k - j - 1}(\xi).$$

Теорема 4 для классической многоточечной краевой задачи Валле-Пуссена доказана в работе [3]. Там же фактически была построена краевая задача, сопряжённая к задаче Валле-Пуссена, хотя это в работе не было отмечено.

Лемма 2. *Функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ и $G^*(x, \xi, \lambda)$ взаимно сопряжённых краевых задач, заданных на графе, связаны равенством $G^*(x, \xi, \bar{\lambda}) = \overline{G(x, \xi, \lambda)}$.*

Лемма 2 и теорема 4 позволяют найти вычет $\operatorname{Res}(G^*(x, \xi, \lambda), \lambda_0)$ функции Грина $G^*(x, \xi, \lambda)$ краевой задачи, сопряжённой к многоточечной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Завгородний М.Г.* Сопряжённые и самосопряжённые краевые задачи на геометрическом графе // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 4. С. 446–456.
2. *Келдыш М.В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. Вып. 4 (160). С. 15–41.
3. *Завгородний М.Г., Литманович О.Ю.* Аналог одной теоремы Келдыша для многоточечной задачи Валле-Пуссена // Докл. АН СССР. 1992. Т. 326. № 4. С. 589–591.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 09.02.2020 г.

После доработки 07.04.2021 г.

Принята к публикации 27.04.2021 г.

УДК 517.956.6

К ВОПРОСУ О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

© 2021 г. С. М. Пономарёв

Получены некоторые теоремы о единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром λ с данными на параллельных и на внешних характеристиках.

DOI: 10.31857/S037406412106011X

1. Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \lambda u = 0, \quad (1)$$

в котором λ – вещественный параметр, в области G , ограниченной в полуплоскости $y > 0$ лежащей в этой полуплоскости ляпуновской кривой Γ с концами в точках $A_1(-l_1, 0)$ и $A_2(l_2, 0)$, где l_1 и l_2 – заданные положительные числа, и при $y \leq 0$ отрезками A_1C_1 , C_1O , OC_2 , C_2A_2 характеристик соответственно $x + y = -l_1$, $x - y = 0$, $x + y = 0$, $x - y = l_2$ уравнения (1), где координаты точек следующие: $C_1(-l_1/2, -l_1/2)$, $O(0, 0)$ и $C_2(l_2/2, -l_2/2)$.

Через G_0 обозначим область $G \cap \{y > 0\}$ и в полуплоскости $y < 0$ через G_1 – треугольную область A_1C_1O , а через G_2 – треугольную область OC_2A_2 .

В области G для уравнения (1) рассмотрим задачу Геллерстедта с краевыми условиями на параллельных характеристиках, которую обозначим ${}_1G_\lambda^1$.

Задача ${}_1G_\lambda^1$. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x, y) \in C(\overline{G}) \cap C^1(G) \cap C^2(G_0 \cup G_1 \cup G_2); \quad (2)$$

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \lambda u = 0, \quad (x, y) \in G_0 \cup G_1 \cup G_2; \quad (3)$$

частные производные u_x и u_y непрерывны в замкнутой области \overline{G}_0 , за исключением точек A_1 , O , A_2 , и для любого $\varepsilon > 0$ градиент функции $u(x, y)$ в точках A_1 , O , A_2 может иметь следующую особенность:

$$|\nabla u(x, y)| \leq \frac{C}{[(x + l_1)^2 + y^2](x^2 + y^2)[(x - l_2)^2 + y^2]^{1/2 - \varepsilon}}, \quad C = \operatorname{const} > 0; \quad (4)$$

$$u(x, y)|_\Gamma = u(x(s), y(s)) = \varphi(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad (5)$$

где $x = x(s)$, $y = y(s)$ – параметрические уравнения кривой Γ , s – длина её дуги, отсчитываемой от точки $A_2(l_2, 0)$, l – длина кривой Γ , а $\varphi(s)$ – заданная достаточно гладкая функция;

$$u(x, y)|_{A_1C_1} = u(x, -l_1 - x) = \psi_1(x), \quad -l_1 \leq x \leq -l_1/2, \quad (6)$$

$$u(x, y)|_{OC_2} = u(x, -x) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l_2/2, \quad (7)$$

где $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ – заданные достаточно гладкие функции и $\varphi(l) = \psi_1(-l_1)$.

Обозначим через G_0^* область в полуплоскости $y < 0$, симметричную области G_0 относительно оси $y = 0$.

Пусть λ_0 – наименьшее положительное собственное значение спектральной задачи

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad (x, y) \in \Omega = G_0 \cup G_0^* \cup A_1A_2,$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $\partial\Omega$ – граница области Ω .

Теорема 1. Если существует решение задачи ${}_1G_\lambda^1$, то оно единственно при всех $0 \leq \lambda < \lambda_0$.

Доказательство. Допуская существование двух различных решений $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ неоднородной задачи ${}_1G_\lambda^1$, заключаем, что функция $u = u_1 - u_2$ является решением однородной задачи ${}_1G_\lambda^1$ и удовлетворяет следующей однородной задаче [1]:

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0 \quad \text{в } G_0, \tag{8}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{9}$$

$$(u_x - u_y)|_{y=0} = -\lambda \int_{-l_1}^x \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)} \tau(t) dt, \quad -l_1 < x < 0, \tag{10}$$

$$(u_x - u_y)|_{y=0} = -\lambda \int_0^x \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)} \tau(t) dt, \quad 0 < x < l_2, \quad u(0, 0) = 0, \tag{11}$$

где $\tau(x) = u(x, 0)$, $J_1(z)$ – функция Бесселя первого рода первого порядка, $\sqrt{\lambda} > 0$ при $\lambda > 0$.

Так же, как в доказательстве теоремы 1 из [2] для случая $\lambda \geq 0$, показывается, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} \int_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 - \lambda u^2) dx dy &= -\lambda \int_{-l_1}^0 \tau(x) \int_{-l_1}^x \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)} \tau(t) dt dx - \\ &- \lambda \int_0^{l_2} \tau(x) \int_0^x \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)} \tau(t) dt dx \end{aligned} \tag{12}$$

и

$$\begin{aligned} \int_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 - \lambda u^2) dx dy &= -\frac{\lambda}{2} \int_{-l_1}^0 \tau(x) \int_{-l_1}^0 \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)} \tau(t) dt dx - \\ &- \frac{\lambda}{2} \int_0^{l_2} \tau(x) \int_0^{l_2} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)} \tau(t) dt dx = (-\lambda)(M_1 + M_2), \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$M_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-l_1}^0 \tau(x) \int_{-l_1}^0 \int_0^1 \sqrt{1-\theta^2} \cos(\sqrt{\lambda}(x-t)\theta) d\theta \tau(t) dt dx \geq 0, \tag{14}$$

$$M_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{l_2} \sqrt{1-\theta^2} \left[\left(\int_0^{l_2} \tau(x) \cos(\sqrt{\lambda}\theta x) dx \right)^2 + \left(\int_0^{l_2} \tau(x) \sin(\sqrt{\lambda}\theta x) dx \right)^2 \right] d\theta \geq 0 \tag{15}$$

для всех $\lambda \geq 0$.

Дальнейшие рассуждения полностью совпадают с рассуждениями доказательства теоремы 1 из [2] для случая $\lambda \geq 0$. В них, в частности, устанавливается неравенство

$$\int_{G_0} u^2 dx dy \leq \frac{1}{\lambda_0} \int_{G_0} (u_x^2 + u_y^2) dx dy, \tag{16}$$

которое понадобится нам ниже. Теорема доказана.

Как показано в [2] с использованием оценки [3, с. 71, (2.12)], справедливо неравенство $\lambda_0 \geq 2/(9 \operatorname{mes} G_0)$. Поэтому хотя точное значение λ_0 и не всегда известно, но вследствие этого неравенства можно утверждать, что теорема 1 имеет место при всех $\lambda \in [0, 2/(9 \operatorname{mes} G_0))$.

Заметим, что функциональные уравнения (10) и (11), дающие связь между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x) = \partial u(x, 0)/\partial y$, иногда полезно записать в виде [1, с. 94; 2]

$$\tau(x) = \int_{l_1}^x J_0(\sqrt{\lambda}(x-t))\nu(t) dt, \quad -l_1 \leq x \leq 0,$$

$$\tau(x) = \int_0^x J_0(\sqrt{\lambda}(x-t))\nu(t) dt, \quad 0 \leq x \leq l_2,$$

где $J_0(z)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Рассмотрим теперь для уравнения (1) в области G задачу Геллерстедта с краевыми условиями на внешних характеристиках, которую обозначим ${}_2G_\lambda^1$.

Задача ${}_2G_\lambda^1$. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (2)–(6) и условию

$$u|_{C_2A_2} = u(x, x - l_2) = \psi(x), \quad l_2/2 \leq x \leq l_2, \tag{17}$$

где $\psi_1(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции и $\varphi(l) = \psi_1(-l_1)$, $\varphi(0) = \psi(l_2)$.

Теорема 2. Если существует решение задачи ${}_2G_\lambda^1$, то оно единственно при всех $0 \leq \lambda < \lambda_0$.

Доказательство. Допуская существование двух различных решений $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ неоднородной задачи ${}_2G_\lambda^1$, заключаем, что функция $u = u_1 - u_2$ является решением однородной задачи ${}_2G_\lambda^1$ и удовлетворяет следующей однородной задаче [1]: (8)–(10) и

$$(u_x + u_y)|_{y=0} = \lambda \int_x^{l_2} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(t-x))}{\sqrt{\lambda}(t-x)} \tau(t) dt, \quad 0 < x < l_2. \tag{18}$$

Так как Γ – ляпуновская кривая, то, применяя формулу Грина в области G_0 и учитывая равенства (8)–(10), (18) и то, что $\tau(-l_1) = \tau(l_2) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 - \lambda u^2) dx dy &= -\frac{1}{2}u^2(0, 0) - \lambda \int_{-l_1}^0 \tau(x) \int_{-l_1}^x \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)} \tau(t) dt dx - \\ &- \frac{1}{2}u^2(0, 0) - \lambda \int_0^{l_2} \tau(x) \int_x^{l_2} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(t-x))}{\sqrt{\lambda}(t-x)} \tau(t) dt dx. \end{aligned} \tag{19}$$

Если $\lambda = 0$, то $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{G_0}$, а значит, и во всей области \overline{G} .

Если $\lambda > 0$, то, учитывая тождество $J_1(-z) = -J_1(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и меняя порядок интегрирования в интегралах в правой части равенства (19), будем иметь

$$\begin{aligned} u^2(0, 0) + \int_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 - \lambda u^2) dx dy &= -\frac{\lambda}{2} \int_{-l_1}^0 \tau(x) \int_{-l_1}^0 \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)} \tau(t) dt dx - \\ &- \frac{\lambda}{2} \int_0^{l_2} \tau(x) \int_0^{l_2} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)} \tau(t) dt dx = (-\lambda)(M_1 + M_2), \end{aligned} \tag{20}$$

где постоянные M_1 и M_2 определены равенствами (14) и (15). Отсюда в силу равенств (14)–(16) следует, что

$$(\lambda_0 - \lambda) \int_{G_0} u^2 dx dy \leq 0,$$

и если $0 < \lambda < \lambda_0$, то $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{G_0}$, а значит, и во всей области \overline{G} . Теорема доказана.

Заметим, что функциональное уравнение (18), дающее связь между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, иногда полезно записать в виде

$$\tau(x) = \int_x^{l_2} J_0(\sqrt{\lambda}(t-x))\nu(t) dt, \quad 0 \leq x \leq l_2.$$

2. Рассмотрим уравнение

$$(\operatorname{sgn} y)u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0, \tag{21}$$

где λ – вещественный параметр, в области G (характеристики уравнений (1) и (21) совпадают).

В области G для уравнения (21) рассмотрим задачу Геллерстедта с краевыми условиями на параллельных характеристиках.

Задача ${}_1G_\lambda^2$. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x, y) \in C(\overline{G}) \cap C^1(G)C^2(G_0 \cup G_1 \cup G_2), \tag{22}$$

$$(\operatorname{sgn} y)u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in G_0 \cup G_1 \cup G_2 \tag{23}$$

и условиям (4)–(7).

Теорема 3. Если существует решение задачи ${}_1G_\lambda^2$, то оно единственно при всех $\lambda \leq 0$.

Доказательство. Допуская существование двух различных решений $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ неоднородной задачи ${}_1G_\lambda^2$, заключаем, что функция $u = u_1 - u_2$ является решением однородной задачи ${}_1G_\lambda^2$, и, если положить $\alpha = -\lambda$, удовлетворяет следующей однородной задаче [1]:

$$u_{xx} + u_{yy} - \alpha u = 0 \quad \text{в} \quad G_0, \tag{24}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{25}$$

$$(u_x - u_y)|_{y=0} = -\alpha \int_{-l_1}^x \frac{J_1(\sqrt{\alpha}(x-t))}{\sqrt{\alpha}(x-t)} \tau(t) dt, \quad -l_1 < x < 0, \tag{26}$$

$$(u_x - u_y)|_{y=0} = -\alpha \int_0^x \frac{J_1(\sqrt{\alpha}(x-t))}{\sqrt{\alpha}(x-t)} \tau(t) dt, \quad 0 < x < l_2, \quad u(0, 0) = 0. \tag{27}$$

Применяя формулу Грина в области G_0 и учитывая равенства (24)–(27) и то, что $\tau(-l_1) = \tau(0) = \tau(l_2) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 + \alpha u^2) dx dy &= -\alpha \int_{-l_1}^0 \tau(x) \int_{-l_1}^x \frac{J_1(\sqrt{\alpha}(x-t))}{\sqrt{\alpha}(x-t)} \tau(t) dt dx - \\ &- \alpha \int_0^{l_2} \tau(x) \int_0^x \frac{J_1(\sqrt{\alpha}(x-t))}{\sqrt{\alpha}(x-t)} \tau(t) dt dx. \end{aligned} \tag{28}$$

Если $\alpha = 0$, то $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{G_0}$, а значит, и во всей области \overline{G} (при $\lambda = 0$).

Если $\alpha > 0$, то из представления (28) в силу равенств (12)–(15) следует, что

$$\int_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 + \alpha u^2) dx dy \leq 0,$$

и поэтому $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{G_0}$, а значит, и во всей области \overline{G} (при $\lambda < 0$). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь в области G для уравнения (21) задачу Геллерстедта с краевыми условиями на внешних характеристиках, которую обозначим ${}_2G_\lambda^2$.

Задача ${}_2G_\lambda^2$. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (22), (23), (4)–(6), (17).

Теорема 4. Если существует решение задачи ${}_2G_\lambda^2$ (22), (23), (4)–(6), (17), то оно единственно при всех $\lambda \leq 0$.

Доказательство. Допуская существование двух различных решений $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ неоднородной задачи ${}_2G_\lambda^2$, заключаем, что функция $u = u_1 - u_2$ является решением однородной задачи ${}_2G_\lambda^2$ и, если положить $\alpha = -\lambda$, удовлетворяет следующей однородной задаче:

$$u_{xx} + u_{yy} - \alpha u = 0 \quad \text{в } G_0, \quad (29)$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad (30)$$

$$(u_x - u_y)|_{y=0} = -\alpha \int_{-l_1}^x \frac{J_1(\sqrt{\alpha}(x-t))}{\sqrt{\alpha}(x-t)} \tau(t) dt, \quad -l_1 < x < 0, \quad (31)$$

$$(u_x + u_y)|_{y=0} = \alpha \int_x^{l_2} \frac{J_1(\sqrt{\alpha}(t-x))}{\sqrt{\alpha}(t-x)} \tau(t) dt, \quad 0 < x < l_2. \quad (32)$$

Применяя формулу Грина в G_0 и учитывая равенства (29)–(32), а также то, что $\tau(-l_1) = \tau(l_2) = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 + \alpha u^2) dx dy &= -\frac{1}{2} u^2(0, 0) - \alpha \int_{-l_1}^0 \tau(x) \int_{-l_1}^x \frac{J_1(\sqrt{\alpha}(x-t))}{\sqrt{\alpha}(x-t)} \tau(t) dt dx - \\ &- \frac{1}{2} u^2(0, 0) - \alpha \int_0^{l_2} \tau(x) \int_x^{l_2} \frac{J_1(\sqrt{\alpha}(t-x))}{\sqrt{\alpha}(t-x)} \tau(t) dt dx. \end{aligned} \quad (33)$$

Если $\alpha = 0$, то $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{G_0}$, а значит, и во всей области \overline{G} (при $\lambda < 0$).

Если $\alpha > 0$, то из представления (33) в силу равенств (19), (20), (14), (15), вытекает неравенство $\int_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 + \alpha u^2) dx dy \leq 0$, из которого следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{G_0}$, а значит, и во всей области \overline{G} (при $\lambda < 0$). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пономарёв С.М. Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева–Бицадзе: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1981.
2. Пономарёв С.М. Некоторые теоремы единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 488–495.
3. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.

г. Москва

Поступила в редакцию 11.02.2021 г.

После доработки 11.02.2021 г.

Принята к публикации 27.04.2021 г.

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ*)

Ниже публикуются**) аннотации докладов, заслушанных в весеннем семестре 2021 г. и частично в осеннем семестре 2020 г. (предыдущее сообщение о работе семинара см. в журнале “Дифференц. уравнения”. 2020. Т. 56. № 11).

DOI: 10.31857/S0374064121060121

И. В. Асташова, А. В. Боровских, И. Н. Сергеев (Москва) “О научном вкладе Николая Христовича Розова” (19 февраля 2021 г.).

2 ноября 2020 г. скоропостижно скончался доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАО, декан факультета педагогического образования МГУ, профессор механико-математического факультета МГУ, руководивший с 1977 г. нашим семинаром по качественной теории дифференциальных уравнений, Николай Христович Розов.

Н.Х. Розов окончил в 1958 г. механико-математический факультет МГУ, на котором прошёл путь от студента до профессора. Он работал секретарём комсомольской организации и заместителем декана, участвовал в организации Колмогоровского интерната (ныне СУНЦ МГУ) и Всесоюзной заочной математической школы, входил в редколлегию журнала “Квант” и вёл раздел обыкновенных дифференциальных уравнений в Реферативном журнале “Математика”, руководил секцией преподавания математики Московского математического общества и состоял членом редколлегии целого ряда научных журналов. В 1997 г. возглавил только что созданный в МГУ факультет педагогического образования, которым руководил до конца своей жизни.

Область деятельности Николая Христовича была практически необъятна. Перечислим прежде всего некоторые его научные достижения в математике, относящиеся к дифференциальным уравнениям (см., например, [1–5]).

1. *Релаксационные колебания.* Посвящённая им монография (написанная Н.Х. Розовым совместно с Е.Ф. Мищенко) стала одной из пионерских в этом направлении. В ней изучено понятие градиентной катастрофы, описывающее особенности поведения решений телеграфных уравнений и пролившее свет на природу релаксационных колебаний в системах с распределёнными параметрами: оказалось, что причиной возникновения релаксационных колебаний в данном случае являются не сингулярные возмущения, а резонансные свойства задачи.

2. *Буферность.* Это явление (открытое совместно с А.Ю. Колесовым) состоит в одновременном наличии у системы при подходящем выборе её параметров сколь угодно большого числа однопериодных аттракторов (состояний равновесия, циклов и т.д.). Если их немного, то буферность свидетельствует об упорядоченности системы, а если их число велико, то поведение системы при малых возмущениях может стать хаотичным и непредсказуемым. Так, был установлен феномен параметрической буферности, состоящий в том, что при надлежащем уменьшении коэффициентов диффузии и при подходящем выборе параметров внешнего воздействия можно гарантировать существование любого заданного числа устойчивых циклов.

3. *Сложные системы и среды.* Усилиями Н.Х. Розова выявлена роль буферности в динамике сложных систем и в процессах самоорганизации. Если в потенциально автоколебательных

*) Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллиончиков, Н.Х. Розов. В настоящее время руководители семинара – И.Н. Сергеев, И.В. Асташова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара – В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

**) Составитель хроники И.Н. Сергеев.

средах, описываемых гиперболическими уравнениями, она вполне естественна и даже ожидаема, то её реализация в нелинейных диссипативных средах – факт весьма нетривиальный. Результаты о высококомодовых (т.е. быстро осциллирующих по пространственным переменным) аттракторах в системах гиперболических уравнений с малыми коэффициентами диффузии позволили обосновать и дополнить известную гипотезу Ландау о природе турбулентности.

4. *Хаос*. Предпринята попытка систематизации всех имеющихся к настоящему времени результатов о феномене буферности, высококомодовых аттракторах и диффузионном хаосе в краевых задачах для параболических и гиперболических уравнений, следствием чего явилось создание единой концепции нелинейной среды с диффузией: даны новые определения хаотического множества и хаотического аттрактора, обнаружен и описан новый феномен нелинейной динамики – хаотическая буферность, предложен новый подход к учёту редких катастрофических событий в системах со сложным поведением, пролит дополнительный свет на природу аттракторов краевых задач для гиперболических уравнений, исследованы дискретные автоволны, реализующиеся при определённых условиях в дискретных цепочках диффузионно связанных уравнений с запаздыванием.

Ещё одно важное направление деятельности Николая Христовича – преподавание математики: студентам и школьникам, математикам и гуманитариям, в России и за рубежом. Он читал лекции в МГУ на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета и на кафедре оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики, работал в Алжире и на Мадагаскаре, выступал перед учёными и педагогами. Пособие для поступающих в вузы, вышедшее в 1964 г. и широко известное под названием “Дорофеев–Потапов–Розов”, было настольной книгой многих абитуриентов за последние 50 лет. Существенный вклад внесён Николаем Христовичем и в дело становления педагогической подготовки в Московском университете и во всей стране: программы профессиональной переподготовки “Преподаватель” и “Преподаватель высшей школы” (разработанные совместно с Л.В. Поповым) задали направление всей педагогике в дополнительном образовании, сотни статей были посвящены проблемам организации школьного образования – его содержанию и целям, подготовке учителей, включению в него новых идей, технологий и методов, а также восстановлению утраченных достижений.

До самого последнего дня Н.Х. Розов активно работал – вёл исследования, писал научные и методические работы, руководил факультетом, выступал экспертом высшего уровня в вопросах образования и образовательной политики, читал лекции, работал со студентами и аспирантами. Более 300 работ в ведущих отечественных и зарубежных журналах, почти 30 монографий и учебников, десятки учеников и последователей, сотни выпускников – вот итог всегда умной, плодотворной и благотворной деятельности Николая Христовича Розова, светлая память о котором навсегда сохранится в наших сердцах.

Литература. 1. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М., 1975. 2. Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М., 1995. 3. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М., 2004. 4. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М., 2005. 5. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Многоликий хаос. М., 2012.

А. И. Назаров, Я. Ю. Никитин (Санкт-Петербург) “О некоторых преобразованиях гауссовских случайных процессов и связанных с ними обыкновенных дифференциальных уравнениях” (4 декабря 2020 г.).

Гауссовский процесс $X(t)$ (для определённости, заданный при $t \in [0, 1]$) с нулевым средним $\mathbb{E}X \equiv 0$ называется *гриновским*, если его ковариационная функция $G_X(t, s) = \mathbb{E}X(t)X(s)$ является функцией Грина для обыкновенного дифференциального оператора на $[0, 1]$ с подходящими граничными условиями. Этот класс гауссовских процессов, впервые выделенный в работе [1], играет важную роль в спектральном анализе гауссовских процессов и связанных с ним задачах.

В частности [1], если X – гриновский гауссовский процесс, то проинтегрированные (слева или справа) процессы – соответственно

$$X^{[0]}(t) = \int_0^t X(s) ds, \quad X^{[1]}(t) = \int_t^1 X(s) ds,$$

также являются гриновскими. Если же обыкновенный дифференциальный оператор, соответствующий процессу X , не содержит члена нулевого порядка, то центрированный процесс

$$\overline{X}(t) = X(t) - X^{[0]}(1)$$

является обобщённым гриновским [2] (соответствующий дифференциальный оператор имеет нулевое собственное число с собственной функцией $\varphi_0 \equiv \text{const}$).

Рассмотрим теперь операцию *онлайн-центрирования*

$$\widehat{X}(t) = X(t) - t^{-1}X^{[0]}(t),$$

введённую в [3] для винеровского процесса. Для гриновского гауссовского процесса X процесс \widehat{X} не обязательно является гриновским: например, для винеровского процесса он – гриновский [4, предложение 6.3]), а для броуновского моста – нет. Однако справедливы [5] следующие

Теорема 1. *Для любого гауссовского процесса X на $[0, 1]$ с нулевым средним спектры центрированного \overline{X} и онлайн-центрированного \widehat{X} процессов совпадают.*

Теорема 2. *Если X – гриновский гауссовский процесс на $[0, 1]$, то онлайн-центрированный проинтегрированный слева процесс $\widehat{X}^{[0]}$ – также гриновский.*

Если исходному процессу X соответствует обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то дифференциальное уравнение, соответствующее процессу $\widehat{X}^{[0]}$, интегрируется в элементарных функциях (см. [6]). Это уравнение (за исключением простейшего случая) отсутствует в справочниках Э. Камке и В. Зайцева–А. Полянина.

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (проект DFG 20-51-12004).

Литература. 1. Nazarov A.I., Nikitin Ya.Yu. Exact small ball behavior of integrated Gaussian processes under L_2 -norm and spectral asymptotics of boundary value problems // Prob. Theory and Rel. Fields. 2004. V. 129. № 4. P. 469–494. 2. Nazarov A.I. Exact L_2 -small ball asymptotics of Gaussian processes and the spectrum of boundary-value problems // J. of Theor. Prob. 2009. V. 22. № 3. P. 640–665. 3. Kleptsyna M.L., Le Breton A. A Cameron–Martin type formula for general Gaussian processes – a filtering approach // Stochastics. 2002. V. 72. № 3. P. 229–250. 4. Karol’ A.I., Nazarov A.I., Nikitin Ya.Yu. Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators // Trans. of the Amer. Math. Soc. 2008. V. 360. № 3. P. 1443–1474. 5. Nazarov A.I., Nikitin Ya.Yu. Gaussian processes centered at their online average, and applications // Stat. and Prob. Letters. 2021. V. 170. P. 1–5. 6. Nazarov A.I. On a family of ordinary differential equations integrable in elementary functions // Math. Notes. 2020. V. 108. № 4. P. 623–625.

Е. А. Барабанов (Минск), **В. В. Быков** (Москва) “Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности” (26 февраля 2021 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через \mathcal{M}_n класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

с непрерывными и ограниченными коэффициентами. Пусть $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ – показатели Ляпунова системы (1), $\Lambda(A) = (\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A))$ – их спектр, а $\text{es}(A)$ – индекс экспоненциальной устойчивости системы (1), т.е. размерность линейного подпространства её решений с отрицательными характеристическими показателями.

Для системы $A \in \mathcal{M}_n$ и метрического пространства M рассмотрим класс $\mathcal{E}_n[A](M)$ непрерывных матриц-функций $Q: \mathbb{R}_+ \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, удовлетворяющих оценке

$$\|Q(t, \mu)\| \leq C_Q \exp(-\sigma_Q t), \quad (t, \mu) \in \mathbb{R}_+ \times M, \quad C_Q, \sigma_Q > 0,$$

и таких, что показатели Ляпунова $\lambda_1(A+Q, \mu) \leq \dots \leq \lambda_n(A+Q, \mu)$ системы $A+Q$, зависящие от параметра $\mu \in M$, не меньше соответствующих показателей Ляпунова системы A , т.е.

$$\lambda_k(A+Q, \mu) \geq \lambda_k(A), \quad k = \overline{1, n}, \quad \mu \in M.$$

Отметим, что для любой системы $A \in \mathcal{M}_n$ класс $\mathcal{E}_n[A](M)$ не пуст, поскольку ему заведомо принадлежит матрица $Q = 0$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M ставится задача о полном дескриптивно-множественном описании класса пар $(\Lambda(A), \Lambda(\cdot, A+Q))$, составленных из спектров систем A и $A+Q$, когда A пробегает множество \mathcal{M}_n , а матрица-функция Q (при каждом фиксированном A) – класс $\mathcal{E}_n[A](M)$, т.е. об описании класса

$$\text{П}\mathcal{E}_n(M) = \{(\Lambda(A), \Lambda(\cdot, A+Q)) : A \in \mathcal{M}_n, Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\}.$$

Решение поставленной задачи содержит, как частный случай, пример Перрона [1, § 1.4].

Напомним, что функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ называется [2, с. 224] *функцией класса* $(*, G_\delta)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}([r, +\infty))$ луча $[r, +\infty)$ является G_δ -множеством метрического пространства M . В частности, класс $(*, G_\delta)$ – подкласс второго класса Бэра [2, с. 248].

В работе [3] установлена

Теорема. Для каждого метрического пространства M и натурального числа $n \geq 2$ пара $(l, F(\cdot))$, где $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ и $F = (f_1, \dots, f_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$, принадлежит классу $\text{П}\mathcal{E}_n(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) $l_1 \leq \dots \leq l_n$;
- 2) $f_1(\mu) \leq \dots \leq f_n(\mu)$ для любого $\mu \in M$;
- 3) $f_i(\mu) \geq l_i$ для всех $\mu \in M$ и $i = \overline{1, n}$;
- 4) для любого $i = \overline{1, n}$ функция $f_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и принадлежит классу $(*, G_\delta)$.

Заметим, что полное описание класса

$$\Lambda\mathcal{E}_n(M) = \{\Lambda(\cdot, A+Q) : A \in \mathcal{M}_n, Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\},$$

составленного из вторых элементов пар класса $\text{П}\mathcal{E}_n(M)$, фактически получено в работе [4].

Следствие 1. Существует система $A \in \mathcal{M}_2$ с показателем Ляпунова $\lambda_2(A) = -1$ и её возмущение $Q \in \mathcal{E}_2[A]([0, 1])$, аналитическое по $\mu \in [0, 1]$ и такое, что показатель Ляпунова $\lambda_2(A+Q)$ возмущённой системы равен -1 при рациональных μ и 1 при иррациональных.

Поставим каждому $\mu \in M$ в соответствие индекс экспоненциальной устойчивости системы

$$\dot{x} = (A(t) + Q(t, \mu))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

получив функцию $\text{es}(\cdot, A+Q): M \rightarrow \mathcal{Z}_n$, где $\mathcal{Z}_n \equiv \{0, \dots, n\}$. Возникает естественная задача об описании класса пар, составленных из индексов экспоненциальной устойчивости исходной и возмущённой систем, т.е. класса

$$\text{I}\mathcal{E}_n(M) = \{(\text{es}(A), \text{es}(\cdot, A+Q)) : A \in \mathcal{M}_n, Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\}.$$

Его описание даёт

Следствие 2 [3]. Для каждого метрического пространства M и натурального числа $n \geq 2$ пара (d, f) , где $d \in \mathcal{Z}_n$ и $f: M \rightarrow \mathcal{Z}_n$, принадлежит классу $\text{I}\mathcal{E}_n(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

- а) $f(\mu) \leq d$ для любого $\mu \in M$;
- б) функция $-f$ принадлежит классу $(*, G_\delta)$.

Литература. 1. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006. 2. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л., 1937. 3. Барабанов Е.А., Быков В.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 31–43. 4. Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временной полуоси // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1579–1588.

А. Н. Ветохин (Москва) “Бэровская классификация топологической энтропии динамических систем в случае неинвариантного компакта” (12 марта 2021 г.).

Пусть (X, d) – метрическое пространство, $\mathcal{M}^c(X)$ – пространство непрерывных отображений из X в X , наделённое компактно-открытой топологией, K – компакт в X . Наряду с исходной метрикой d , определим на X дополнительную систему метрик [1]

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^{oi}(x), f^{oi}(y)), \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N},$$

где f^{oi} , $i \in \mathbb{N}$, – i -я итерация отображения $f \in \mathcal{M}^c(X)$, $f^{o0} \equiv \text{id}_X$. Для всяких $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $N_d(K, f, \varepsilon, n)$ максимальное число точек в компакте $K \subset X$, попарные d_n^f -расстояния между которыми больше ε . Верхней или нижней топологическими энтропиями отображения f на компакте K называют соответственно величины (не меняющиеся при замене метрики d эквивалентной ей метрикой d')

$$\bar{h}_{\text{top}}(K, f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln N_d(K, f, \varepsilon, n), \quad \underline{h}_{\text{top}}(K, f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln N_d(K, f, \varepsilon, n). \quad (1)$$

Для заданного компакта $K \subset X$ рассмотрим функции

$$f \mapsto \bar{h}_{\text{top}}(K, f), \quad (2)$$

$$f \mapsto \underline{h}_{\text{top}}(K, f). \quad (3)$$

Если компакт K является для отображения f инвариантным множеством, т.е. выполнено включение $f(K) \subset K$, то значения обеих величин (1) совпадают, а обе функции (2) и (3) принадлежат второму бэровскому классу [2]. В общем случае, как показывает следующий пример, величины (1) могут не совпадать. Рассмотрим множество Ω_2 последовательностей $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, где $x_i \in \{0, 1\}$, с метрикой

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ (\min\{i : x_i \neq y_i\})^{-1}, & x \neq y, \end{cases}$$

компакт $K_0 \subset \Omega_2$, определяемый условием:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \in K_0, \quad \text{если и только если} \quad x_i = 0, \quad i = 2k!, \dots, (2k+1)!, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и отображение $f((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$ – сдвиг влево на один элемент. Для этого отображения имеем $\bar{h}_{\text{top}}(K_0, f) = \ln 2$, $\underline{h}_{\text{top}}(K_0, f) = 0$. Оказывается, функции (2) и (3) различны и с точки зрения бэровской классификации.

Теорема 1. Для любого компакта $K \subset X$ функция (2) принадлежит третьему бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X)$.

Теорема 2. Для любого компакта $K \subset X$ функция (3) принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X)$, а точки её полунепрерывности снизу образуют всюду плотное множество типа G_δ .

Если $X = \Omega_2$, то из работы [3] следует, что функции (2) и (3) не принадлежат первому бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X)$, а в силу компактности пространства Ω_2 топология на $\mathcal{M}^c(X)$ совпадает с равномерной. Возникает вопрос: можно ли уменьшить номер бэровского класса в теореме 1? Ответ на него, вообще говоря, отрицателен.

Рассмотрим метрическое пространство X_0 , точками которого являются всевозможные пары (x, i) , где $x \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{N}$, а расстояние задаётся формулой

$$d((x, i), (y, j)) = \begin{cases} |x - y|, & i = j; \\ 1, & i \neq j, \end{cases} \quad (x, i), (y, j) \in X_0.$$

Каждому $r \in \mathbb{N}$ поставим в соответствие компакт $K_r = [0, 1] \times \{1, \dots, r\} \subset X_0$.

Теорема 3. Для любого $r \in \mathbb{N}$ и компакта $K = K_r$ функция (2) не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X_0)$.

В связи с теоремой 3 возникает естественная

Задача. Принадлежит ли функция (3) второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^u(X)$ непрерывных отображений из X в X с равномерной топологией?

Литература. 1. Bowen R. Entropy for group endomorphism and homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 153. P. 401–414. 2. Ветохин А.Н. Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 448–453. 3. Ветохин А.Н. О некоторых свойствах топологической энтропии динамических систем // Мат. заметки. 2013. Т. 93. № 3. С. 347–356.

И. В. Асташова, Д. А. Лашин, А. В. Филиновский (Москва) “О задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения с весовым квадратичным функционалом” (19 марта 2021 г.).

Для параболического уравнения

$$u_t = (a(x, t)u_x)_x, \quad (x, t) \in Q_T \equiv (0, 1) \times (0, T), \quad (1)$$

где число T задано, а функция a определена на замыкании \overline{Q}_T , достаточно гладкая и удовлетворяет неравенствам $0 < a_0 \leq a(\cdot, \cdot) \leq a_1 < \infty$, $a_0, a_1 = \text{const}$, рассматриваем задачу

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u_x(1, t) = \psi(t), \quad 0 < t < T, \quad u(x, 0) = \xi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

в которой $\varphi, \psi \in W_2^1(0, T)$ и $\xi \in L_2(0, 1)$.

В докладе изучается следующая экстремальная задача с точечным наблюдением: управляя функцией φ (функции ξ и ψ фиксированы), сделать функцию $u(c, t)$ в заданной точке $c \in (0, 1)$ близкой (в указанном ниже смысле) к заданной функции $z(t)$ на всём интервале $(0, T)$. Задачи управления с финальным или распределённым наблюдением для параболических уравнений рассматривались в работах [1, 2]. Ниже приводятся результаты, представляющие собой развитие и обобщение результатов [3–10] на уравнение (1) с переменным по t коэффициентом диффузии $a(x, t)$, и устанавливаются качественные свойства минимизирующей функции.

Через $V_2^{1,0}(Q_T)$ обозначаем [11, с. 15] банахово пространство таких функций $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)},$$

для которых $t \mapsto u(\cdot, t)$ – непрерывное отображение из $[0, T]$ в $L_2(0, 1)$, а через $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – множество функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta(x, T) = \eta(0, t) = 0$.

Определение 1. Слабым решением задачи (1), (2) называем функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u|_{x=0} = \varphi$ (в смысле следа) и при каждом $\eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} (a(x, t)u_x \eta_x - u \eta_t) dx dt = \int_0^1 \xi(x) \eta(x, 0) dx + \int_0^T a(1, t) \psi(t) \eta(1, t) dt.$$

Теорема 1 [9, 10]. Задача (1), (2) имеет единственное слабое решение $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, причём для него справедлива оценка

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq C(\|\xi\|_{L_2(0,1)} + \|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)})$$

с некоторой константой $C > 0$, не зависящей от функций φ , ψ , ξ .

Для непустого, замкнутого, выпуклого и ограниченного множества $\Phi \subset W_2^1(0, T)$ управляющих функций φ и множества $Z \subset L_2(0, T)$ целевых функций z рассматриваем весовой квадратичный функционал

$$J[z, \rho, \varphi] = \int_0^T (u_\varphi(c, t) - z(t))^2 \rho(t) dt, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in Z,$$

$u_\varphi \in V_2^{1,0}(Q_T)$ – решение задачи (1), (2) с управляющей функцией φ , а $\rho \in L_\infty(0, T)$ – весовая функция, удовлетворяющая условию $\text{ess inf}\{\rho(t) : t \in (0, T)\} > 0$. Считая функции z и ρ фиксированными, рассмотрим задачу минимизации функционала J :

$$m[z, \rho, \Phi] = \inf_{\varphi \in \Phi} J[z, \rho, \varphi]. \quad (3)$$

Теорема 2. Для любой функции $z \in L_2(0, T)$ существует единственная функция $\varphi_0 \in \Phi$, для которой справедливо равенство

$$m[z, \rho, \Phi] = J[z, \rho, \varphi_0].$$

Ниже некоторые результаты работ [6–10] распространяем на случай, когда коэффициент a в уравнении (1) зависит только от времени.

Теорема 3. Если функция a не зависит от x и $m[z, \rho, \Phi] > 0$, то $\varphi_0 \in \partial\Phi$.

Теорема 4. Если функция a не зависит от x , а множества $\Phi_1, \Phi_2 \subset W_2^1(0, T)$ ограничены, выпуклы и замкнуты, что $\Phi_2 \subset \text{Int } \Phi_1$ и $m[z, \rho, \Phi_1] > 0$, то $m[z, \rho, \Phi_1] < m[z, \rho, \Phi_2]$.

Определение 2. Задачу (1)–(3) с фиксированной функцией ρ называем *плотно управляемой* из множества Φ во множество Z , если для всех $z \in Z$ верно равенство $m[z, \rho, \Phi] = 0$.

Следующая теорема устанавливает плотную управляемость задачи (1)–(3) из множества $Z = L_2(0, T)$ во множество $\Phi = W_2^1(0, T)$.

Теорема 5. Если функция a не зависит от x , то для любой функции $z \in L_2(0, T)$ верно равенство

$$m[z, \rho, W_2^1(0, T)] = 0.$$

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Troltsch F. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications, Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence, 2010. 2. Lurie K.A. Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems. Berlin, 2013. 3. Astashova I.V., Filinovskiy A.V., Lashin D.A. On maintaining optimal temperatures in greenhouses // WSEAS Trans. on Circuits and Systems. 2016. V. 15. № 23. P. 198–204. 4. Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D. On optimal temperature control in hothouses // Proc. Int. Conf. on Numer. Anal. and Appl. Math. 2016. AIP Conf. Proc. 2017. P. 4–8. 5. Асташова И.В., Филиновский А.В. Об управляемости в параболической задаче с распределённым по времени функционалом // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 53. № 6. С. 851–853. 6. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 9–25. 7. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations // Opuscula Math. 2019. V. 39. № 5. P. 595–609. 8. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 258–274. 9. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. Controllability and exact controllability in a problem of heat transfer with convection and time distributed functional // J. Math. Sci. 2020. V. 244. № 2. P. 148–157. 10. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. О задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения при наличии конвекции и обедняющего потенциала // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 828–829. 11. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.

В. В. Амелькин (Минск), **В. Ю. Тыщенко** (Гродно) “О продолжимости решений автономных дифференциальных систем” (26 марта 2021 г.).

Рассмотрим вполне разрешимую [1, с. 21] автономную систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx = F(x) dt, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $t = (t_1, \dots, t_m)^T$, $1 \leq m < n$, а ранг матрицы $F = (F_{ij}) \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times m})$ равен $r \in \{1, \dots, m\}$ почти всюду на \mathbb{R}^n .

Для односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ назовём *локальным решением* $(\Omega, x; t_0, x_0)$ системы (1) функцию $x \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую условиям $x(t_0) = x_0$ и $dx(t) \equiv F(x(t)) dt$, $t \in \Omega$. График такого решения в пространстве $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ назовём *локальной интегральной поверхностью*, а его проекцию на пространство \mathbb{R}^n – *локальной орбитой* $\text{orb}(\Omega_0, x; t_0, x_0)$. Будем говорить, что решения $(\Omega_1, x^1; t_0^1, x_0^1)$ и $(\Omega_2, x^2; t_0^2, x_0^2)$, а также их орбиты $\text{orb}(\Omega_1, x^1; t_0^1, x_0^1)$ и $\text{orb}(\Omega_2, x^2; t_0^2, x_0^2)$ являются *продолжениями друг друга через область* $\Omega_0 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2 (\neq \emptyset)$, если $x^1(t) = x^2(t)$, $t \in \Omega_0$. При продолжении решений через некоторую область могут появляться многозначные функции, что однако невозможно в случае $m = 1$.

Назовём решения системы (1) *эквивалентными в точке* t_0 , если они продолжают друг друга через некоторую окрестность этой точки. *Ростком* $\mathfrak{g}(t_0, x_0)$ системы (1) в точке $t_0 \in \Omega$ назовём класс эквивалентности решений этой системы по отношению к введённому понятию эквивалентности, а *непродолжаемым* решением $(\Theta, x; t_0, x_0)$, порождённым ростком $\mathfrak{g}(t_0, x_0)$, – множество всех ростков, которые можно получить в результате продолжений ростка $\mathfrak{g}(t_0, x_0)$ через всевозможные области. График в пространстве $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, соответствующий непродолжаемому решению, – это *непродолжаемая интегральная поверхность*, а её проекция на пространство \mathbb{R}^n – *орбита* $\text{orb}(x_0)$. Понятие непродолжаемого решения можно вводить [1, с. 27; 2; 3] путём поглощения областей определения решений. В силу теоремы 2.1 [4, с. 61] размерность любой орбиты системы (1) не превосходит r и существуют орбиты размерности r .

Теорема 1 [5]. *У нелинейной полиномиальной системы (1) общего положения существуют решения, не определённые на всём пространстве \mathbb{R}^m .*

Имеет место представление $F(x) \equiv f(x)\nu(x)$, где ранг матрицы $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times r})$ не превосходит r , а ранг матрицы $\nu \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{r \times m})$ равен r на \mathbb{R}^n . Выберем невырожденную на \mathbb{R}^n матрицу $\mu \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{r \times r})$ и поставим в соответствие системе (1) систему

$$dx = f(x)\mu(x) d\tau, \quad (2)$$

где $d\tau = (d\tau_1, \dots, d\tau_r)^T$. Матрицу μ назовём *допустимой*, если система (2) вполне разрешима. Орбиты систем (1) и (2) совпадают. Будем говорить, что система уравнений (1) *приводима к динамической системе*, если существует допустимая матрица μ , приводящая систему (1) к системе (2), все решения которой определены на \mathbb{R}^r .

Теорема 2. *Система (1) при $r = 1$ приводима к динамической системе.*

Систему (1) назовём *выпрямляемой*, если существует диффеоморфизм $\xi \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, переводящий каждую её орбиту в одну из r -мерных плоскостей семейств $x_k = C_k$, $k = \overline{1, n-r}$. В отличие от [1, с. 139] мы не предполагаем продолжимости всех решений системы (1) на \mathbb{R}^m .

Теорема 3. *Система (1) приводима к динамической системе тогда и только тогда, когда система $dx = f(x) dt$, $d\tau = dt$ выпрямляема.*

В комплексном случае аналоги теорем 1–3 получены в [5; 6].

Литература. 1. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. М., 2004. 2. Мышкис А.Д. О продолжении решений уравнений Пфаффа // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 8. С. 1331–1337. 3. Сергеев И.Н. Продолжаемость решений дифференциальных уравнений до непродолжаемого // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 6. С. 847–848. 4. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения с “многомерным временем”. Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения. Saarbrücken, 2012. 5. Амелькин В.В., Тыщенко В.Ю. О продолжимости решений автономных полиномиальных дифференциальных систем // Изв. вузов. Математика. 2020. № 2. С. 10–21. 6. Амелькин В.В., Тыщенко В.Ю. О продолжимости решений автономных дифференциальных систем // Изв. вузов. Математика. 2020. № 11. С. 15–28.

И. Н. Сергеев (Москва) “Об исследовании ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств устойчивости по первому приближению” (2 апреля 2021 г.)

Для заданной окрестности нуля $G \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(\cdot, 0) \equiv 0, \quad x \in G, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

допускающую нулевое решение и удовлетворяющую условию $f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G)$. Через S_{δ^*} будем обозначать множество (непродолжаемых и ненулевых) решений x системы (1), удовлетворяющих начальному условию $|x(0)| < \delta$.

Определение 1 [1, 2]. Скажем, что система (1) обладает *перроновской (верхнепредельной)*:

1) *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_{\delta^*}$ удовлетворяет требованию

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| \leq \varepsilon \quad \left(\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| \leq \varepsilon \right), \quad (2)$$

молчаливо предполагающему, что решение x определено на всей полуоси \mathbb{R}_+ ;

2) *частичной устойчивостью*, если для каждого $\varepsilon, \delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in S_{\delta^*}$ удовлетворяет требованию (2);

3) *асимптотической устойчивостью*, если для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in S_{\delta^*}$ удовлетворяет требованию (2) при $\varepsilon = 0$;

4) *неустойчивостью, полной неустойчивостью или асимптотической неустойчивостью*, если оно не обладает устойчивостью, частичной устойчивостью или асимптотической устойчивостью соответственно.

Свойства перроновского и верхнепредельного типов из определения 1 являются аналогами соответствующих *ляпуновских* свойств (часть из них см. в [3, гл. II, § 1]), для описания которых достаточно внести в определение 1 следующие поправки: в пп. 1) и 2) заменить требование (2) требованием

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |x(t)| \leq \varepsilon,$$

а в п. 3) дополнительно потребовать наличия у системы (1) ляпуновской устойчивости (определённой в п. 1 в результате указанной замены).

Определение 2. Линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

или только её правую часть $A(t)x$, назовём *первым (линейным) приближением* для системы (1), если выполнено условие

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |f(t, x) - A(t)x| = o(x), \quad G \ni x \rightarrow 0$$

(влекущее за собой совпадение $A(\cdot) \equiv f'_x(\cdot, 0) \in C(\mathbb{R}_+)$). Систему (3) назовём *ограниченной*, если функция A ограничена, и *скалярной*, если она имеет вид $A(\cdot) = a(\cdot)I$, где $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Скажем, что линейное приближение (3) *обеспечивает (допускает)* заданное свойство, если им обладает всякая (соответственно хотя бы одна) система (1) с этим линейным приближением.

Исследованию ляпуновской асимптотической устойчивости по первому приближению, составляющему суть первого метода Ляпунова, посвящено огромное число работ (см. [4, § 11]).

И устойчивость, и асимптотическая устойчивость, и ляпуновская, и перроновская, и верхнепредельная – все эти свойства сразу, равно как и каждое из них в отдельности, обеспечиваются в точности одними и теми же линейными приближениями, образующими единый *класс устойчивости*, что и подразумевает

Теорема 1. *Если линейное приближение (3) обеспечивает хотя бы одно из следующих шести свойств: устойчивость или асимптотическую устойчивость ляпуновского, перроновского или верхнепредельного типа, то оно обеспечивает и остальные пять из них.*

Похожее совпадение наблюдается и для линейных приближений, обеспечивающих какую-либо частичную устойчивость и образующих *класс частичной устойчивости*, как показывает

Теорема 2. *Если линейное приближение (3) обеспечивает хотя бы одно из следующих трёх свойств: частичную устойчивость ляпуновского, перроновского или верхнепредельного типа, то оно обеспечивает и остальные два из них.*

Класс частичной устойчивости, естественно, включает в себя класс устойчивости. Однако обратное включение уже не верно, что, в частности, и подтверждает

Теорема 3. *При каждом $n > 1$ существует автономная линейная система (3), которая одновременно:*

- 1) *обеспечивает неустойчивость ляпуновского типа;*
- 2) *обеспечивает частичную устойчивость ляпуновского, перроновского и верхнепредельного типов;*
- 3) *допускает неустойчивость перроновского и верхнепредельного типов;*
- 4) *при $n = 2$ допускает асимптотическую устойчивость перроновского типа.*

Из теоремы 3 вытекает также *несовпадение* множеств линейных приближений, обеспечивающих ляпуновскую неустойчивость и соответственно ляпуновскую полную неустойчивость. Кстати, аналогичное несовпадение для перроновской неустойчивости (происходящее из ошибочно сформулированного п. 1 теоремы 4 [5]) установить не удаётся.

Ещё один важный вывод из формулировки теоремы 3 состоит в том, что множество линейных приближений, обеспечивающих ляпуновскую неустойчивость, содержит в себе не только все линейные приближения, обеспечивающие одноимённое перроновское свойство, но также и некоторые линейные приближения, допускающие перроновскую устойчивость (причём даже асимптотическую). Более того, в точности те же слова можно отнести и к множеству линейных приближений, обеспечивающих ляпуновскую (и даже верхнепредельную) полную неустойчивость, о чём и говорит

Теорема 4. *При каждом $n \in \mathbb{N}$ существует ограниченная скалярная линейная система (3), которая одновременно:*

- 1) *обеспечивает полную неустойчивость ляпуновского и верхнепредельного типов;*
- 2) *допускает полную неустойчивость перроновского типа;*
- 3) *допускает асимптотическую устойчивость перроновского типа.*

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Сергеев И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557. 3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967. 4. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006. 5. Сергеев И.Н. Об исследовании перроновских и ляпуновских свойств устойчивости по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 897–899.

А. А. Бондарев (Москва) “Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью” (2 апреля 2021 г.).

Доклад посвящён недавно введённому [1, 2] понятию устойчивости по Перрону (см. также аннотацию предыдущего доклада И.Н. Сергеева) и усиливает результаты [3, 4], первый из которых исправлял недостаток, указанный в замечании 4 к теореме 1 [2], но сопровождался ненулевым (хотя и ограниченным на всей временной полуоси) линейным приближением системы в нуле, а второй предъявлял систему с теми же свойствами, но уже с нулевым линейным приближением в нуле.

Приводимое ниже усиление этих результатов состоит в утверждении о существовании системы, обладающей перроновской (а значит, также ляпуновской и верхнепредельной) полной неустойчивостью и одновременно с этим не просто частной (как это было во всех примерах выше), а даже *массивной* частной устойчивостью – теперь начальные значения решений, сходящихся к нулю на бесконечности, заполняют в фазовом пространстве целую область.

Для в пространстве \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, с евклидовой нормой $|\cdot|$ рассматривается система вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty), \quad x \equiv (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

с правой частью, удовлетворяющей условиям (а значит, допускающей нулевое решение)

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n), \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (2)$$

Теорема. При $n = 2$ существует система (1) с условиями (2), обладающая следующими тремя свойствами:

- 1) правая часть системы (1) бесконечно дифференцируема, и $f'_x(t, 0) = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$;
- 2) для всех решений x системы (1) с начальными условиями $|x(0)| < 1$ или $x(0) = (1, 0)^T$, а также $|x(0)| = 1$ и $x_2(0) > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty;$$

- 3) для всех остальных решений x системы (1) с начальными условиями $|x(0)| > 1$ или $x(0) = (-1, 0)^T$, а также $|x(0)| = 1$ и $x_2(0) < 0$ имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0.$$

Таким образом, при $t \rightarrow +\infty$ все близкие к нулю ненулевые решения описанной системы стремятся по норме к бесконечности, а все остальные – к нулю. Заметим, что полученный результат не распространяется на автономные системы, для которых полная и глобальная неустойчивости сразу всех перечисленных типов (и перроновского, и верхнепредельного, и ляпуновского), согласно теореме 6 [2], неразличимы.

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и ее связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Сергеев И.Н. Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646. 3. Бондарев А.А. Один пример неустойчивой системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 899. 4. Бондарев А.А. Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 2. С. 43–47.

И. Н. Сергеев (Москва) “Определение шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы” (9 апреля 2021 г.).

Для заданной фазовой области G евклидова пространства \mathbb{R}^n ($n > 1$, $0 \in G$) рассмотрим нелинейную, вообще говоря, дифференциальную систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in G, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G). \quad (1)$$

Через $S_*(f)$ будем обозначать множество всех непродолжаемых ненулевых решений системы (1), а через $x_f(\cdot, x_0)$ – то из них, которое удовлетворяет начальному условию $x_f(0, x_0) = x_0$.

Определение 1. Перечислим три основных [1] функционала $K(u, t)$ (определённых на парах $u : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}_+$), соответствующих показателям

$$\varkappa = \nu, \theta, \rho \quad (2)$$

и отвечающих за следующие свойства решений:

- 1) колеблемость ($\varkappa = \nu$), если $K(u, t) = N(u, t)$ – умноженное на π число нулей на промежутке $(0, t]$ функции $P_1 u$, а P_1 – ортогональный проектор на фиксированную прямую, причём если хотя бы один из этих нулей кратен (т.е. является нулём ещё и производной $(P_1 u)'$), то считаем $N(u, t) = +\infty$;

- 2) вращаемость (ориентированная, $\varkappa = \theta$), если $K(u, t) = \Theta(u, t) \equiv |\varphi(P_2 u, t)|$ – модуль ориентированного угла $\varphi(P_2 u, t)$ (непрерывного по t , с начальным условием $\varphi(P_2 u, 0) = 0$) между вектором $P_2 u(t)$ и начальным вектором $P_2 u(0)$, а P_2 – ортогональный проектор на фиксированную плоскость, причём если $P_2 u(\tau) = 0$ хотя бы при одном $\tau \in [0, t]$, то считаем $\Theta(u, t) = +\infty$;

3) *блуждаемость* ($\varkappa = \rho$), если

$$K(u, t) = P(u, t) \equiv \int_0^t |(u(\tau)/|u(\tau)|)'| d\tau, \quad u(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [0, t].$$

Известны и другие функционалы, отвечающие за неориентированную или частотную вращаемость [1], поворачиваемость k -го ранга [2], а также плоскую вращаемость [3].

Определение 2. Для каждого из функционалов, описанных в определении 1, определим соответствующие *линейные показатели* (2) решения $x \in S_*(f)$, если оно задано на всей полуоси \mathbb{R}_+ : *слабый* и *сильный нижние* – по формулам

$$\hat{\varkappa}^\circ(x) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} K(Lx, t), \quad \hat{\varkappa}^\bullet(x) \equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} K(Lx, t),$$

а также *слабый* $\hat{\varkappa}^\circ(x)$ и *сильный* $\hat{\varkappa}^\bullet(x)$ *верхние* соответственно – по тем же формулам, но с заменой в них нижних пределов при $t \rightarrow +\infty$ верхними. Наконец, в случае совпадения значений нижнего и верхнего показателей будем называть их *точными* и опускать в их обозначении любую тильду, а в случае совпадения значений слабого и сильного показателей будем называть их *абсолютными* и опускать в их обозначении любой кружочек.

В случае нелинейной системы (1) некоторые решения (возможно даже, все ненулевые сразу) могут оказаться определёнными не на всей временной полуоси из-за выхода их фазовых кривых за конечное время на границу фазовой области. Один из наиболее естественных выходов из этой ситуации (два чуть более тонких подхода порождают сферические \varkappa_s [4] и радиальные \varkappa_r [5] показатели) состоит в том, чтобы на каждом начальном отрезке времени рассматривать не все решения, а только начинающиеся достаточно близко к нулю, – при этом, правда, приходится отказаться от определения показателей для отдельных решений, привязывая получающиеся шаровые показатели к самим системам.

Определение 3. Каждому функционалу K из определения 1, системе (1), моменту $t \in \mathbb{R}_+$ и невырожденному преобразованию $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$ поставим в соответствие значение *нижнего* и *верхнего шаровых* функционалов, определяемых соответственно равенствами

$$\check{K}_b(f, t, L) \equiv \lim_{x_0 \rightarrow 0} K(Lx_f(\cdot, x_0), t), \quad \hat{K}_b(f, t, L) \equiv \overline{\lim}_{x_0 \rightarrow 0} K(Lx_f(\cdot, x_0), t)$$

(заметим, что выражения, стоящие в этих равенствах под знаками нижнего и верхнего пределов, при достаточно малых значениях $|x_0|$ обязательно определены в силу непрерывной зависимости решений от начальных значений на компакте $[0, t]$). Затем определим соответствующие *шаровые* показатели (2) системы (1): *слабый* и *сильный нижние* – по формулам

$$\check{\varkappa}_b^\circ(f) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} t^{-1} \check{K}_b(f, t, L), \quad \check{\varkappa}_b^\bullet(f) \equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \check{K}_b(f, t, L),$$

а также *слабый* $\hat{\varkappa}_b^\circ(f)$ и *сильный* $\hat{\varkappa}_b^\bullet(f)$ *верхние* – аналогичными формулами с заменой в них всех нижних пределов и нижних шаровых функционалов верхними и, наконец, *точные* и *абсолютные* их разновидности – по той же схеме, что и в определении 2.

Между шаровыми и соответствующими радиальными показателями существует естественная связь, которую раскрывает

Теорема 1. Для любой системы (1) и любого функционала из определения 1 верны неравенства

$$\check{\varkappa}_b^*(f) \leq \inf_{0 \neq x_0 \in G} \check{\varkappa}_r^*(f, x_0) \leq \sup_{0 \neq x_0 \in G} \hat{\varkappa}_r^*(f, x_0) \leq \hat{\varkappa}_b^*(f), \quad * = \circ, \bullet.$$

В линейном случае шаровые показатели оценивают снаружи множество значений соответствующего линейного показателя на всех решениях системы, как показывает

Теорема 2. Если система (1) – линейная однородная и $G = \mathbb{R}^n$, то для любого функционала из определения 1 и соответствующих ему показателей (2) из определений 2 и 3 справедливы оценки

$$\hat{\kappa}_b^*(f) \leq \inf_{x \in S_*(f)} \hat{\kappa}^*(x) \leq \sup_{x \in S_*(f)} \hat{\kappa}^*(x) \leq \hat{\kappa}_b^*(f), \quad * = \circ, \bullet.$$

Для нелинейных же систем связи между шаровыми и линейными, а также сферическими показателями почти непредсказуемы, причём даже в автономном случае, что и подтверждают

Теорема 3. При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существует такая автономная система (1), что все решения $x_+ \in S_*(f)$ и $x_- \in S_*(-f)$ определены на всей полуоси \mathbb{R}_+ , а все показатели (2) точны, абсолютны и при любом $x_0 \neq 0$ удовлетворяют соотношениям

$$+\infty = \kappa(x_+) > \kappa_s(f, x_0) = \kappa_s(-f, x_0) > \kappa(x_-) = \kappa_r(\pm f, x_0) = \kappa_b(\pm f) = 0.$$

Теорема 4. При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существует такая автономная система (1), что все решения $x_+ \in S_*(f)$ и $x_- \in S_*(-f)$ определены на всей полуоси \mathbb{R}_+ , а все показатели (2) точны, абсолютны и при любом $x_0 \neq 0$ удовлетворяют соотношениям

$$0 = \kappa(x_+) < \kappa_s(f, x_0) = \kappa_s(-f, x_0) < \kappa(x_-) = \kappa_r(\pm f, x_0) = \kappa_b(\pm f) = 1.$$

Доказательства этих и других теорем о нелинейных показателях см. в работе [6].

Литература. 1. Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219. 2. Сергеев И.Н. Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1353–1361. 3. Сергеев И.Н. Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 325–348. 4. Сергеев И.Н. Определение сферических показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 839–840. 5. Сергеев И.Н. Определение радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1560–1562. 6. Сергеев И.Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 3. С. 41–46.

Т. А. Корчёмкина (Москва) “Об асимптотическом поведении стремящихся к нулю решений уравнений второго порядка со степенной нелинейностью общего вида” (16 апреля 2021 г.).

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = p(x, y, y')|y|^{k_0}|y'|^{k_1} \operatorname{sgn}(yy'), \quad k_0, k_1 > 0, \quad (1)$$

где функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x , липшицева по u, v и $0 < m \leq p(\cdot, \cdot, \cdot) \leq M < \infty$.

В случае потенциала $p = p(x)$ в [1] получены необходимые и достаточные условия существования положительных решений с заданным асимптотическим поведением. Для потенциала общего вида $p = p(x, u, v)$ результаты о единственности решений установлены в [2], а качественное поведение решений уравнения (1) исследовано в [3]. Результаты об асимптотическом поведении решений, неограниченных вблизи границы области определения, получены в [4], а о поведении решений, стремящихся к ненулевой константе вблизи границ области определения – в [5]. Оставался открытым вопрос об поведении решений, стремящихся к нулю вблизи границы области определения. В силу сохранения типа уравнения при замене $y(x) \mapsto -y(-x)$ достаточно рассмотреть поведение решений вблизи правой границы области определения.

Поскольку при некоторых значениях показателей k_0 и k_1 решение может быть продолжено неединственным образом, рассматриваются μ -решения уравнения.

Определение 1 [6]. Решение y уравнения (1), определённое на промежутке (a, b) , возможно, бесконечном, назовём μ -решением, если выполнены условия:

1) уравнение не имеет решений, совпадающих с y на некотором подынтервале промежутка (a, b) , но отличных от y в некоторой точке промежутка (a, b) ;

2) для любой конечной граничной точки решение y либо непродолжаемо за неё, либо имеет по крайней мере два продолжения, различающихся в точках, сколь угодно близких к ней.

Определение 2 [7]. Назовём μ -решение y уравнения (1) *сингулярным первого рода* в точке $a \in \mathbb{R}$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} y(x) = \lim_{x \rightarrow a} y'(x) = 0.$$

Определение 3 [7]. Решение y уравнения (1) назовём *отрицательным кнезеровским на промежутке* $(x_0, +\infty)$, если оно удовлетворяет условиям $y(x) < 0$ и $y'(x) > 0$ при $x > x_0$.

Из [3] следует, что μ -решения уравнения (1) могут стремиться к нулю вблизи правой границы области определения только в двух случаях: это либо отрицательные сингулярные решения первого рода, либо отрицательные кнезеровские решения. Для изучения существования решений использованы результаты, доказанные в работе [2].

Теорема 1. *Существование y уравнения (1) сингулярных μ -решений первого рода равносильно условию $k_0 + k_1 < 1$.*

Теорема 2. *При $k_0 + k_1 < 1$ или $k_1 > 2$ уравнение (1) не имеет кнезеровских решений.*

Теорема 3. *Если $k_1 \leq 2$ и $p(x, u, v) \equiv p_0 > 0$, а $y(\cdot)$ – μ -решение уравнения (1), удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0) = y_0 < 0$, $y'(x_0) = y_1 > 0$ и*

$$\frac{y_1^{2-k_1}}{2-k_1} = \frac{p_0|y_0|^{k_0+1}}{k_0+1}, \quad k_1 \neq 2, \quad \text{или} \quad \ln y_1 = \frac{p_0|y_0|^{k_0+1}}{k_0+1}, \quad k_1 = 2,$$

то $y(\cdot)$ – сингулярное решение первого рода, если $k_0 + k_1 < 1$, и отрицательное кнезеровское решение на $(x_0, +\infty)$, если $k_0 + k_1 \geq 1$.

Введём обозначения

$$\alpha = \frac{2-k_1}{k_0+k_1-1}, \quad C(P) = \left(\frac{|\alpha|^{1-k_1}|\alpha+1|}{P} \right)^{1/(k_0+k_1-1)}, \quad P \in \mathbb{R}.$$

Теорема 4. *Если $y(\cdot)$ – отрицательное сингулярное первого рода в точке x_0 μ -решение уравнения (1), то*

$$y(x) = -C(p(x_0, 0, 0))(x_0 - x)^{-\alpha}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0 - 0.$$

Теорема 5. *Если функция $p(x, u, v)$ имеет предел p_+ при $x \rightarrow +\infty$, $u, v \rightarrow 0$, а $y(\cdot)$ – отрицательное кнезеровское решение уравнения (1), то*

$$y(x) = \begin{cases} -C(p_+)x^{-\alpha}(1 + o(1)), & k_0 + k_1 > 1, \\ -e^{-p_-^{1/(k_0+1)}x}(1 + o(1)), & k_0 + k_1 = 1, \end{cases} \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 19-31-90168.

Литература. 1. Евтухов В.М. Об асимптотике монотонных решений нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 6. С. 1076–1078. 2. Astashova I. Existence and uniqueness theorems to generalized Emden–Fowler type equations // Intern. workshop on the qualitative theory of differential equations “QUALITDE–2020”. 2020. P. 17–21. 3. Korchemkina T. On the behavior of solutions to second-order differential equation with general power-law nonlinearity // Memoirs on Differ. Equat. and Math. Phys. 2018. V. 73. P. 101–111. 4. Корчёмкина Т.А. Об асимптотическом поведении неограниченных решений дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями общего вида // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Т. 32. С. 239–256. 5. Корчёмкина Т.А. Об асимптотическом поведении ограниченных решений уравнения второго порядка со степенной нелинейностью общего вида // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1583–1584. 6. Astashova I. On qualitative properties and asymptotic behavior of solutions to higher-order nonlinear differential equations // WSEAS Trans. on Math. 2017. V. 16. № 5. P. 39–47. 7. Кигурадзе И.Т., Чангурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1990.

А. Н. Ветохин (Москва) “Бэровская классификация топологической энтропии динамических систем на метрических пространствах” (23 апреля 2021 г.).

Пусть (X, d) – метрическое пространство, $\mathcal{K}(X)$ – множество компактов в X , а $\mathcal{M}^c(X)$ – пространство непрерывных отображений из X в X , наделённое компактно-открытой топологией. *Верхней* и *нижней топологическими энтропиями* отображения f называют соответственно величины [1] (не меняющиеся при замене метрики d эквивалентной ей метрикой d')

$$\bar{h}_{\text{top}}(f) = \sup_{K \in \mathcal{K}(X)} \bar{h}_{\text{top}}(K, f), \quad \underline{h}_{\text{top}}(f) = \sup_{K \in \mathcal{K}(X)} \underline{h}_{\text{top}}(K, f),$$

где $\bar{h}_{\text{top}}(K, f)$ и $\underline{h}_{\text{top}}(K, f)$ – верхняя и нижняя топологические энтропии отображения на компакте K , определённые в докладе того же автора от 12 марта 2021 г. В случае компактности пространства (X, d) верхняя топологическая энтропия совпадает с нижней и принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X)$ [2].

Изучим с точки зрения бэровской классификации следующие функции:

$$f \mapsto \bar{h}_{\text{top}}(f), \quad (1)$$

$$f \mapsto \underline{h}_{\text{top}}(f). \quad (2)$$

Теорема 1. Если (X, d) – локально-компактное метрическое пространство со счётной базой, то функция (1) принадлежит третьему бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X)$.

Теорема 2. Если (X, d) – локально-компактное метрическое пространство со счётной базой, то функция (2) принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X)$, а точки её полунепрерывности снизу образуют всюду плотное множество типа G_δ .

Метрическое пространство $X_0 = [0, 1] \times \mathbb{N}$ с расстоянием

$$d((x, i), (y, j)) = \begin{cases} |x - y|, & \text{если } i = j; \\ 1, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

является локально-компактным со счётной базой.

Теорема 3. Функция (1) не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X_0)$.

В связи с теоремами 1–3 возникают естественные

Задача 1. Какому бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X)$ принадлежат функции (1) и (2) для произвольного метрического пространства (X, d) ?

Задача 2. Какому бэровскому классу принадлежат функции (1) и (2) на пространстве $\mathcal{M}^u(X)$ непрерывных отображений из X в X с равномерной топологией?

Литература. 1. Bowen R. Entropy for group endomorphism and homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 153. P. 401–414. 2. Ветохин А.Н. Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 448–453.

Н. А. Изобов (Минск), **А. В. Ильин** (Москва) “О числе решений с отрицательными показателями у линейной дифференциальной системы со всеми положительными показателями первого приближения и экспоненциально убывающим возмущением” (30 апреля 2021 г.).

Рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и положительными характеристическими показателями $\lambda_2(A) \geq \lambda_1(A) > 0$, а также возмущённые системы

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \quad (2)$$

с бесконечно дифференцируемыми экспоненциально убывающими $n \times n$ -возмущениями

$$Q : \|Q(t)\| \leq C_Q e^{-\sigma t}, \quad \sigma > 0, \quad t \geq t_0. \quad (3)$$

Возникает вопрос о существовании, например, таких двумерной системы (1) и возмущения (3), что возмущённая система (2) имеет нетривиальное решение с отрицательными показателями Ляпунова. Решение этой (первой) задачи может служить предварительным этапом в решении более важной (второй) задачи о существовании нетривиальных решений с отрицательными показателями у нелинейной дифференциальной системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq t_0, \quad (4)$$

с бесконечно дифференцируемым m -возмущением

$$f(t, y) : \|f(t, y)\| \leq C_f \|y\|^m, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq t_0,$$

порядка $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и допустимого роста вне её в “антиперроновском” случае положительности всех характеристических показателей линейного приближения (1). В силу принципа линейного включения возможное отрицательное решение первой задачи влекло бы за собой такое же решение и второй. Смена же положительных характеристических показателей линейного приближения (1) на отрицательные у решений возмущённой системы (4) являлась бы эффектом, противоположным известному эффекту Перрона [1–5].

Положительному решению первой задачи и посвящено настоящее сообщение.

Теорема. Для любых параметров $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$, $\theta > 1$ и $\sigma \in (0, \lambda_1 + \theta^{-1}\lambda_2)$ существуют:

1) двумерная система (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1, 2$;

2) бесконечно дифференцируемое экспоненциально убывающее возмущение (3) $Q(t)$, такие, что возмущённая линейная система (2) имеет решение $y(t)$ с отрицательным показателем

$$\lambda_0 = \frac{\sigma\theta - \theta\lambda_1 - \lambda_2}{\theta - 1}.$$

С помощью этой теоремы и её доказательства устанавливается справедливость аналогичного утверждения в n -мерном случае: для любых параметров

$$\lambda_n \geq \dots \geq \lambda_1 > 0, \quad \theta > 1, \quad \sigma \in (0, \lambda_1 + \theta^{-1}\lambda_2),$$

существуют линейная система (1) с показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, экспоненциально убывающее возмущение (3) такие, что возмущённая система (2) имеет $n - 1$ линейно независимых решений $y_i(t)$ с показателями

$$\lambda[y_i] = \frac{\sigma\theta - \theta\lambda_1 - \lambda_{i+1}}{\theta - 1} < 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского (проект 20-57-00001 Бел_a) и Белорусского республиканского (проект Ф20Р-005) фондов фундаментальных исследований.

Литература. 1. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 32. H. 5. S. 702–728. 2. Леонов Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.; Ижевск, 2006. 3. Изобов Н.А., Ильин А.В. О бэровской классификации положительных характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1435–1439. 4. Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 463–472. 5. Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение счётного числа различных суслинских множеств характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1585–1590.