Russian Academy of Sciences

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 84. Iss. 5

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

September–October

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:
В.Г. Байдулов — отв. секретарь
Е.В. Есина — зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245
Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49
E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: http://pmm.ipmnet.ru

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706
ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:
V.G. Baydulov — executive secretary
E.V. Esina — head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Adress: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia
Phone: 8 (495) 434-21-49
E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL : http://pmm.ipmnet.ru

The subscription index in Rospechat catalogue 70706
ISSN 0021-8928

С О Д Е Р Ж А Н И Е

CONTENTS

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 5, с. 543–553

УДК 531.5:534.1

О ЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТРОСА КОСМИЧЕСКОГО ЛИФТА

© 2020 г. Ю. А. Садов[1], А. Б. Нуралиева[1,*]

[1]*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*
**e-mail: annanuralieva@yandex.ru*

Поступила в редакцию 10.10.2019 г.
После доработки 10.07.2020 г.
Принята к публикации 18.07.2020 г.

Исследуются малые поперечные колебания сверхдлинного гибкого нерастяжимого троса космического лифта относительно равновесного вертикального положения. Показано, что в линейном приближении колебания в плоскости экватора и в меридиональной плоскости разделяются и имеют одинаковые наборы собственных функций, а их собственные частоты связаны простым соотношением. Описана постановка задачи Штурма–Лиувилля для определения собственных частот и собственных мод колебаний троса. Обсуждается ее преобразование с целью упрощения расчетов.

Ключевые слова: космический лифт, гибкий нерастяжимый трос, равнонапряженный трос, малые колебания, задача Штурма–Лиувилля, подстановка Прюфера

DOI: 10.31857/S0032823520050094

1. Трос космического лифта. Сверхдлинный и сверхпрочный трос – это не только несущая часть всей конструкции космического лифта (КЛ), но и наиболее массивная и протяженная ее часть. В связи с этим именно трос определяет главные особенности динамики всей системы. Трос – это практически одномерная, абсолютно гибкая, сильно напряженная нить, и динамические задачи не выглядят сложными. Проблемы возникают при изучении движений, сильно отклоняющихся от вертикали, в связи с большой гибкостью системы. Систематическое изучение таких движений пока труднодоступно, и планомерное исследование динамики целесообразно, как и в других случаях, начинать с линейных постановок, относящихся к малым колебаниям системы вблизи стационарного положения. Фактически необходимо изучить малые колебания длинного гибкого маятника. С другой стороны, перспективы реализации конструкции КЛ настолько заманчивы, что необходимо воспроизвести, проверить и развить имеющиеся немногочисленные результаты.

Первые данные о линейных колебаниях КЛ были получены еще в 1975 г. Пирсоном [1] с использованием простых динамических моделей. Так, на основе аналогии с центробежным математическим маятником была выполнена оценка периода маятниковых (с прямым тросом) колебаний, который оказался равным нескольким суткам, и в результате сделан вывод об отсутствии резонанса таких колебаний с основными лунно-солнечными возмущениями.

Более подробные вычисления были проведены на основе динамической модели Белецкого [2], в которой лифт моделируется точечной массой, связанной невесомым тросом с поверхностью Земли. Были получены [3] линеаризованные уравнения таких колебаний и выведена простая формула, связывающая частоты маятниковых колебаний в двух плоскостях – меридиональной (T^{mer}) и экваториальной (T^{eq}).

Из указанной формулы сразу следует [3], что в одномассовой модели T^{mer} всегда меньше суток; вычисления показывают, что T^{eq} больше суток. Оценка периодов изгибных колебаний не может быть сделана в рамках простой одномассовой модели КЛ, но такая же формула (см. (4.9)) ниже – справедлива и для изучаемой здесь модели троса с непрерывно распределенной массой; более того, она распространяется и на другие моды колебаний.

Промежуточное место занимает двухмассовая модель системы, изученная в [3], где одна масса помещается на геостационарной орбите, а вторая – на конце троса. Были проанализированы две моды колебаний – синфазная и антифазная. В синфазной моде обе массы отклоняются одновременно в одну сторону от вертикали, в антифазной – в противоположные стороны. Показано, что в экваториальной плоскости синфазные колебания, являющиеся аналогом маятниковых, имеют периоды больше суток. Периоды колебаний всех остальных видов меньше суток.

Уравнения колебаний троса КЛ с распределенной массой выведены в [4]; здесь вывод кратко воспроизводится. Работа [5] близка к данной статье, пересекается с ней в ряде результатов и тоже использует описанную [6] методологию анализа малых колебаний троса с грузом на конце.

С использованием дискретной, многомассовой модели троса были получены [7] численные данные о периодах и некоторых других характеристиках изгибных мод низкого порядка (учитывались также линейные упругие колебания на основе предполагаемых, малоизвестных пока данных об упругих свойствах материала троса). Обобщение этой модели, допускающее внеэкваториальную стартовую позицию троса КЛ, рассмотрено в статье [8]. Там же содержится достаточно полная библиография работ по динамике КЛ в рецензируемых изданиях.

Настоящая работа касается углубленной проработки важной, но частной задачи, связанной с тематикой космического лифта. Более широкая перспектива намечена в работе авторов [9]. Представляют интерес публикации американской организации ISEC (The International Space Elevator Consortium), где обсуждается комплекс научных и инженерных проблем, связанных с КЛ.

В ИПМ им. М.В. Келдыша РАН с конца 1960-х гг. ведутся работы по космическим тросовым системам (КТС). Изучение вопросов, связанных с космическим лифтом, было инициировано В.В. Белецким как ответвление от этого направления. Несколько страниц монографии [10] посвящено космическому лифту. Несмотря на схожесть основных уравнений динамики гибкого троса в моделях КТС и КЛ, количественные и качественные характеристики этих систем сильно различаются.

2. Уравнения движения троса. Рассматривается движение абсолютно гибкой, весомой, нерастяжимой нити, неподвижно закрепленной одним концом на экваторе Земли. На втором конце закреплено тяжелое твердое тело (материальная точка). Вся система движется в поле тяжести и инерционной центробежной силы. Для описания движения нити в непрерывной модели используем связанную с вращающейся Землей систему координат, центр которой O совмещен с центром Земли, ось x направлена из точки O к точке закрепления нити на экваторе, ось z параллельна оси вращения Земли и направлена на север, ось y параллельна линии экватора в точке закрепления и направлена на восток.

Положение точки нити, находящейся на расстоянии s вдоль нити от точки закрепления, задается вектором $\mathbf{r} = (x(s,t), y(s,t), y(s,t))$, где t – время. Пусть $\rho(s)$ – локальная линейная плотность нити в точке s и $P(s,t)$ – сила натяжения, действующая вдоль нити на нижний участок (с меньшими значениями s) троса со стороны верхнего участка и направленная в точке s в положительном направлении по s. Тогда уравнение движения для текущей точки троса с учетом силы тяжести, центробежной и кориолисовой сил во вращающейся вместе с Землей системе координат и силы натяжения троса записывается так:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -2[\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{r}}] - [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]] - \frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \frac{1}{\rho}(P\mathbf{r}'), \tag{2.1}$$

где μ — гравитационный параметр, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор сидерической угловой скорости Земли. Точкой обозначена производная по t, штрихом — по s.

К этому уравнению необходимо добавить условие для определения натяжения $P(s,t)$ (в данном случае — условие нерастяжимости нити)

$$|\mathbf{r}'| = 1 \tag{2.2}$$

К системе уравнений с частными производными (2.1), (2.2) требуется добавить начальные и краевые условия. Начальными данными служат значения $\mathbf{r}(s,0)$ и $\dot{\mathbf{r}}(s,0)$.

Обозначим через L длину троса, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки его закрепления, $R = |\mathbf{R}|$ — экваториальный радиус Земли.

Краевые условия на нижнем конце троса выражают стационарность его закрепления в нижней точке. Условия на верхнем конце, где к тросу прикреплена массивная точка (противовес), выражают согласованность движения этой точки с движением верхнего конца троса. Уравнение движения точки на верхнем конце имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_L = -2[\vec{\omega}, \dot{\mathbf{r}}_L] - [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \mathbf{r}_L]] - \frac{\mu}{r_L^3}\mathbf{r}_L + \frac{1}{M}P_L\mathbf{r}_{L'}, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{r}_L$ — положение верхней точки, P_L — сила натяжения на верхнем конце троса, M — масса противовеса.

В результате краевые условия для уравнения (2.1) принимают вид

$$\mathbf{r}(0,t) = \mathbf{R}, \quad \dot{\mathbf{r}}(0,t) = 0, \quad \mathbf{r}(L,t) = \mathbf{r}_L(t), \quad \dot{\mathbf{r}}(L,t) = \dot{\mathbf{r}}_L(t) \tag{2.4}$$

Продифференцируем краевые условия в точке L по времени, подставим вместо вторых производных их выражения из уравнений движения (2.1) и (2.3) и спроецируем найденные соотношения на касательный вектор к тросу $\mathbf{r}'(L,t)$ в его конце. Получим краевое условие для величины натяжения троса в конечной точке

$$P'(L,t) + \frac{\rho(L)P_L(t)}{M} = 0 \tag{2.5}$$

Для завершения постановки задачи нужно задать функцию распределения линейной плотности $\rho(s)$ вдоль троса. Ее неоднородность существенна для динамики системы, но явный вид $\rho(s)$ не понадобится для описываемого ниже анализа. Для нескольких моделей КЛ он приведен в [9, уравнения (2), (8) и (11)].

Вертикальная равновесная конфигурация. Уравнения (2.1)—(2.4) имеют частное стационарное решение, соответствующее равновесию троса, вытянутого вдоль радиус-вектора

$$\begin{aligned} x_0(s) &= r, \quad y_0(s,t) = 0, \quad z_0(s) = 0 \\ x_0(L) &= \ell, \quad y_0(L) = 0, \quad z_0(L) = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

В соответствии с введенными ранее обозначениями, $r = r(s) = s + R$. Дополнительно введено обозначение $\ell = L + R$ (расстояние от центра Земли до конца троса).

Индексом 0 обозначаем величины, относящиеся к равновесному состоянию.

Натяжение троса $P_0(s)$ в равновесном состоянии, согласно уравнениям (2.1) и (2.5), определяется дифференциальным соотношением

$$P_{0'}(s) = -\rho(s)\left(\omega^2 r - \frac{\mu}{r^2}\right) \tag{2.7}$$

с граничным условием

$$P_{0L} = M\left(\omega^2\ell - \frac{\mu}{\ell^2}\right) \tag{2.8}$$

Здесь $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ – частота суточного вращения Земли. Заметим, что в выражение (2.8) не входит значение $\rho(L)$ плотности троса на конце.

Пусть L_{gs} – высота геостационарной орбиты. Тогда $P_{0'}(L_{gs}) = 0$, а условие $P_{0L} > 0$ равносильно тому, что $L > L_{gs}$. Это условие хорошо известно [2]: для обеспечения натянутого состояния троса противовес должен находиться за геостационаром.

3. Линеаризация уравнений. Рассматривая теперь равновесное состояние как невозмущенное, запишем уравнения близких к нему движений в линейном приближении. Для этого введем малые вариации и запишем переменные, входящие в исходные уравнения, в виде $\mathbf{r}(s,t) = \mathbf{r}_0(s) + \delta\mathbf{r}(s,t)$ и (учитывая, что $\dot{\mathbf{r}}_0 = 0$) $\dot{\mathbf{r}}(s,t) = \dot{\delta}\mathbf{r}(s,t)$.

Из условия нерастяжимости троса (2.2), с учетом краевых условий (2.4) получим $\delta x(s,t) = 0$, т.е. в линейном приближении вариации как радиального смещения, так и радиальной скорости относительно вертикального положения равновесия отсутствуют. Введем вектор вариаций в трансверсальном к тросу направлении

$$Y(s,t) = (\delta y(s,t), \delta z(s,t))$$

и положим

$$Y_L(t) = (\delta y_L(t), \delta z_L(t)), \quad Y_{L'}(t) = Y'(L,t)$$

Введем также обозначения (напомним: $r = s + R$)

$$F_z(s) = -\frac{\mu}{r^3}, \quad F_y(s) = F_z(s) + \omega^2 \tag{3.1}$$

и $F(s) = \mathrm{diag}(F_y, F_z)$ (2×2 диагональная матрица).

Линеаризация уравнений (2.1), (2.3) дает систему

$$\ddot{Y} = F(s)Y + \frac{1}{\rho(s)}(P_0Y'), \quad \ddot{Y}_L = F_LY_L - \frac{P_{0L}}{M}Y_{L'} \tag{3.2}$$

с краевыми условиями, соответствующими (2.4)

$$Y(0,t) = \dot{Y}(0,t) = 0, \quad Y(L,t) = Y_L(t) \tag{3.3}$$

Коэффициенты $P_0(s)$, P_{0L} определены уравнениями (2.7), (2.8).

Итак, в линейной постановке смещения $\delta y(s,t)$ и $\delta z(s,t)$ разделяются. Скалярные линейные краевые задачи для δy и δz отличаются только постоянным сдвигом коэффициентов в силу (3.1). Для определенности мы подробно рассмотрим задачу для компоненты δy.

4. Задача Штурма–Лиувилля. *Разделение переменных.* Будем искать частные решения краевой задачи (3.2), (3.3) для экваториальной компоненты δy в виде

$$\delta y(s,t) = S(s)T(t) \tag{4.1}$$

Посредством обычной процедуры разделения переменных находим

$$\frac{\ddot{T}}{T} = F_y(s) + \frac{(P_0(s)S')'}{\rho(s)S} = -\lambda, \quad -F_y(L) + \frac{P_{0L}S'(L)}{MS(L)} = \lambda, \tag{4.2}$$

где λ – некоторая постоянная. Оказывается (см. ниже), что $\lambda > 0$, так что параметр λ является квадратом частоты моды колебаний, соответствующей частному решению (4.1). Форма по s такой моды описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$(P_0(s)S') + F_y(s)\rho(s)S = -\lambda\rho(s)S \tag{4.3}$$

с однородными краевыми условиями

$$S(0) = 0, \quad P_{0L}S'(L) = M(F_y(L) + \lambda)S(L) \tag{4.4}$$

В результате для определения функции $S(s)$ получаем одномерную задачу Штурма—Лиувилля (4.3), (4.4) со спектральным параметром λ. Отличие ее постановки от классической состоит в том, что здесь спектральный параметр входит также во второе краевое условие (4.4).

Классическая теории задачи Штурма—Лиувилля дает обоснование метода разделения переменных: доказывается, что при выполнении определенных условий собственные функции, удовлетворяющие заданным однородным соотношения на границе, существуют для счетного дискретного множества значений параметра λ и образуют ортогональный базис в соответствующем гильбертовом пространстве. В рассматриваемом случае дело обстоит так же.

Спектральные свойства задачи. Будем интерпретировать задачу Штурма—Лиувилля (4.3), (4.4) как поиск спектра дифференциального оператора D

$$Du = -\frac{1}{\rho(s)}\left(P_0(s)u'\right) - F_y(s)u, \tag{4.5}$$

действующего на функции из $C^2[0, L]$, удовлетворяющие краевым условиям, ср. (3.3), (3.2):

$$u(0) = 0, \quad \frac{1}{\rho(L)}\left(P_0(s)u'\right)(L) = -\frac{1}{M}P_{0L}u'(L) \tag{4.6}$$

Множество (вещественное линейное пространство) таких функций обозначим C_0^2. (Для того, чтобы получить оператор на области определения, не зависящей от λ, приходится использовать краевое условие со второй производной.) Превратим C_0^2 в предгильбертово пространство, введя на нем скалярное произведение по аналогии с ([11], гл. II, приложение III)

$$(u, v) = \int_0^L u(s)v(s)ds + Mu(L)v(L) \tag{4.7}$$

Интегрируя по частям с учетом (4.6), получаем

$$(Du, v) = \int_0^L \left(P_0u'v' - F_y\rho uv\right)ds - MF_y(L)u(L)v(L) \tag{4.8}$$

Отсюда видно, что оператор D симметричен в C_0^2, так что собственные функции данной задачи с разными собственными значениями λ ортогональны относительно введеного скалярного произведения.

Счетность множества собственных значений следует из описанного ниже алгоритма их вычисления.

При математически строгом анализе задачи необходимо доказать полноту системы собственных функций оператора D в гильбертовом пространстве — пополнении пространства C_0^2 по норме, порожденной скалярным произведением (4.7). Для задач Штурма—Лиувилля такого типа это сделано, например, в [12].

Проверим, что все собственные значения оператора D положительны. Для этого докажем, что $(Du, u) > 0$ для ненулевой функции u.

Полагая $v = u$ в (4.8) и используя соотношения (2.8) и (3.1), получаем

$$(Du, u) = \int_0^L \left(P_0u'^2 - F_y\rho u^2 - (r^{-1}P_0u^2)'\right)ds$$

Преобразуем подинтегральное выражение, используя (2.7), (3.1) и тождество $u'^2 - (u^2/r)' = (u' - u/r)^2$:

$$P_0 u'^2 - F_y \rho u^2 - \left(\frac{P_0 u^2}{r}\right) = P_0 u'^2 + \frac{P_0' u^2}{r} - \left(\frac{P_0 u^2}{r}\right) = P_0 \left(u' - \frac{u}{r}\right)^2$$

Поскольку $P_0(s) > 0$ при $0 < s \le L$ (сила натяжения положительна), имеем $(Du, u) \ge 0$. Равенство $(Du, u) = 0$ могло бы иметь место только если $ru' - u \equiv 0$, то есть при $u/r = \text{const}$, но тогда из граничных условий $u(0) = 0$, $r(0) = R$ следует $u \equiv 0$.

Сказанное выше относилось к задаче Штурма–Лиувилля для компоненты δy малого отклонения троса в экваториальной плоскости. Для компоненты δz, в силу (3.1), справедливо следующее. Задачи Штурма–Лиувилля для обеих компонент имеют общий набор собственных функций, и если $\omega_n^{\text{eq}} = \sqrt{\lambda_n}$ – собственная частота n-й экваториальной моды, то собственная частота соответствующей меридиональной моды (пространственная форма которой такая же) равна

$$\omega_n^{\text{mer}} = \sqrt{(\omega_n^{\text{eq}})^2 + \omega^2} \tag{4.9}$$

В частности, при любом распределении массы троса $\omega_n^{\text{mer}} > \omega$ и, значит, периоды всех собственных колебаний в меридиональной плоскости меньше суток.

5. Вычисление собственных частот и мод. Отметим особенности задачи, влияющие как на методы ее решения, так и на постановку вычислительных вопросов:

1) большой геометрический размер системы и сильная неоднородность троса, что обусловливает сильное изменение коэффициентов $P_e(s)$, $\rho(s)$ и $F_Y(s)$;

2) практическое отсутствие как внешней (вакуум космического пространства), так и внутренней (почти одномерная конфигурация с нулевой изгибной жесткостью) диссипации, что вместе с огромной длиной приводит к увеличению относительной роли в динамике колебаний высоких мод и необходимости их адекватного учета.

Подстановка Прюфера. Опишем метод решения краевой задачи, использующий переход к полярным координатам на фазовой плоскости. Аналогичный метод для стандартной задачи Штурма–Лиувилля рассмотрен в [13] и назван тригонометрической прогонкой.

Для удобства дальнейших выкладок сделаем подстановку $S(s) = rV(s)$, предложенную А.В. Черновым. Введем обозначения $Q = P_0 r^2$, $J = \rho r^2$. Физический смысл переменной V – угол отклонения точки троса от вертикали (отсчитываемый от центра Земли). Функция $J(s)$ – момент инерции элемента троса, а $(QV')'$ – момент силы (относительно центра Земли), создаваемой натяжением троса. Задача Штурма–Лиувилля (4.3), (4.4) примет вид

$$(Q(s)V')' = -\lambda J(s)V, \quad V(0) = 0, \quad P_{0L}V'(L) = \lambda MV(L) \tag{5.1}$$

Введем полярные координаты q, φ (подстановку Прюфера):

$$q\cos\varphi = f(s)V', \quad q\sin\varphi = g(s)V \tag{5.2}$$

Функции f и g пока не фиксируем. Дифференцируя по s с учетом (5.1), имеем

$$q'\cos\varphi - q\varphi'\sin\varphi = \left(\frac{f(s)}{Q(s)}\right)\frac{Q(s)}{f(s)}q\cos\varphi - \frac{f(s)}{Q(s)}\frac{J(s)}{g(s)}\lambda q\sin\varphi$$

$$q'\sin\varphi + q\varphi'\cos\varphi = \frac{g'(s)}{g(s)}q\sin\varphi + \frac{g(s)}{f(s)}q\cos\varphi,$$

откуда следует

$$\frac{q'}{q} = \left(\log\frac{f}{Q}\right)\cos^2\varphi + (\log g)'\sin^2\varphi + \left(\frac{g}{f} - \lambda\frac{fJ}{gQ}\right)\cos\varphi\sin\varphi \tag{5.3}$$

и

$$\varphi' = \lambda\frac{fJ}{gQ}\sin^2\varphi + \frac{g}{f}\cos^2\varphi + \left(\log\frac{Qg}{f}\right)\sin\varphi\cos\varphi \tag{5.4}$$

В силу (5.1) граничные условия для уравнения (5.4) имеют вид

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(L) = \frac{P_{0L}g(L)}{\lambda Mf(L)} \tag{5.5}$$

Назовем уравнение (5.4) *определяющим уравнением*. Спектр задачи Штурма–Лиувилля состоит из таких значений λ, при которых краевая задача (5.4), (5.5) имеет решение. Когда λ и $\varphi(s)$ уже вычислены, функция $q(s)$ находится интегрированием уравнения (5.3); после этого соответствующая собственная функция $V(s)$ определяется посредством второго уравнения (5.2).

Произвол в выборе функций f и g в подстановке Прюфера можно использовать для получения краевой задачи (5.4), (5.5) в наиболее удобной для определенных целей форме. Рассмотрим два конкретных варианта.

Вариант I. $f(s) = Q(s)$, $g = \text{const} = \lambda M\ell^2$. Определяющее уравнение имеет вид

$$\varphi' = \lambda a(s)\cos^2\varphi + b(s)\sin^2\varphi, \tag{5.6}$$

где $a(s) = M\ell^2/Q(s)$, $b(s) = J(s)/(M\ell^2)$. Эта форма удобна тем, что правое граничное условие $\varphi(L) = 1$ не зависит от λ.

Для вычисления частоты главной моды можно разделить обе части уравнения (5.6) на $\cos^2\varphi$ и получить краевую задачу для уравнения Риккати относительно $\tau(s) = \varphi(s)$,

$$\tau' = \lambda a(s) + b(s)\tau^2, \quad \tau(0) = 0, \quad \tau(L) = 1$$

Отсюда, полагая $A = \int_0^L a(s)ds$, $B = \int_0^L b(s)ds$, получаем оценку

$$\frac{1-B}{A} < \lambda_0 < \frac{1}{A} \tag{5.7}$$

С вычислительной точки зрения, недостаток этого варианта преобразования Прюфера, особенно при больших λ, состоит в том, что функция $\varphi(s)$, определяемая уравнением (5.6), имеет характерную ступенчатую структуру, в которой чередуются участки с большим и малым наклоном к оси абсцисс. (Наглядное представление о поведении $\varphi(s)$ можно получить, рассмотрев решение уравнения (5.6) с постоянными коэффициентами a и b.) Помимо этого, в нашей задаче коэффициенты изменяются на несколько порядков на интервале интегрирования.

Вариант II. $f = \sqrt{Q/\lambda J}$, $g = 1$. Определяющее уравнение таково:

$$\varphi' = \sqrt{\frac{\lambda J}{Q}} + \frac{1}{4}(\log(JQ))'\sin 2\varphi, \tag{5.8}$$

с правым граничным условием

$$\varphi(L) = \eta/\sqrt{\lambda}, \tag{5.9}$$

где $\eta = M^{-1}\sqrt{P_0(L)\rho(L)}$.

Можно еще упростить краевую задачу, заменив независимую переменную s на $z = \int_0^s \sqrt{J/Q}ds$ и обозначив $\varphi(z(s)) = \varphi(s)$, $Z = z(L)$. Получим

$$\frac{d\varphi}{dz} = \sqrt{\lambda} + \frac{1}{4}\frac{d}{dz}\ln(JQ)\sin 2\varphi, \quad \varphi(Z) = \pi n + (\eta/\sqrt{\lambda}) \tag{5.10}$$

Если λ велико, то угловая переменная φ изменяется (в нулевом приближении) равномерно по z, и на интервале периодичности правой части по φ изменение коэффициента при $\sin 2\varphi$ – величина порядка $\lambda^{-1/2}$. Этим обстоятельством можно воспользоваться для построения полуаналитического алгоритма вычисления собственных мод высокого порядка. Из (5.10) нетрудно также вывести, что асимптотика собственных частот в экваториальной плоскости имеет вид

$$\omega_n^{\mathrm{eq}} = \frac{\pi n}{Z} + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{5.11}$$

Из выражений (4.9) и (5.11) следует, что разность частот для меридиональной и экваториальной мод одного порядка имеет асимптотику

$$\omega_n^{\mathrm{mer}} - \omega_n^{\mathrm{eq}} \sim \frac{\omega^2 Z}{2\pi n},$$

так что правая часть формулы (5.11) с такой же точностью описывает асимптотику собственных частот в меридиональной моде.

Случай равнонапряженного троса. Модель равнонапряженного троса [1] характеризуется соотношением

$$P_0(s) = \tau\rho(s), \tag{5.12}$$

где $\tau = \mathrm{const}$. Модель полностью определяется, помимо физических констант, двумя параметрами: длиной троса L и напряжением троса τ, имеющим размерность квадрата скорости.

При условии (5.12) уравнение (2.7) принимает вид

$$\tau(\log\rho)' = -\omega^2 r + \mu r^{-2}$$

Для коэффициентов в уравнении (5.8) получаем простые выражения: $J/Q = 1/\tau$ и

$$\frac{1}{4}(\log(JQ))' = \frac{1}{2}(\log\rho r^2)' = \frac{1}{r} + \frac{1}{2\tau}\left(\frac{\mu}{r^2} - \omega^2 r\right) \tag{5.13}$$

Из соотношения (2.8) находим выражение для параметра η в (5.9):

$$\eta = \tau^{-1/2}(P_{0L}/M) = \tau^{-1/2}(\omega^2\ell - \mu/\ell^2) \tag{5.14}$$

Для наглядности вместо параметра τ можно использовать параметр, имеющий размерность длины, а именно, *эквивалентную разрывную длину* L_p, связанную с τ формулой $\tau = g_0 L_p$, где $g_0 = 10$ м/с^2 – верхняя оценка ускорения свободного падения вблизи поверхности Земли. Имеет место соотношение $k\tau = \tau_b = g_0 L_b$, где τ_b – удельная прочность на разрыв материала троса, $k > 1$ – коэффициент, называемый *запасом прочности*, а L_b – так называемая *разрывная длина*. За подробностями отсылаем читателя к статье [9].

Пример расчета собственных частот. Для примера взяты следующие значения, приведенные в табл. 1.

В табл. 2 приведены периоды для первых 10 мод колебаний в экваториальной плоскости $T_n^{\mathrm{eq}} = 2\pi/\omega_n^{\mathrm{eq}}$ в часах и для некоторых мод высшего порядка – в секундах. Также

Таблица 1.

Физические параметры Земли		
Гравитационный параметр Земли	μ	3.986×10^{14} м^3/с^2
Скорость вращения Земли	ω	7.292×10^{-5} с$^{-1}$
Радиус Земли	R	6.378×10^{5} м
Определяющие параметры модели		
Длина троса	L	8.0×10^{7} м
Напряжение троса	τ	3×10^{7} м^2/с^2
Вспомогательные (зависимые) параметры		
Эквивалентная разрывная длина	L_p	3×10^{6} м
Отношение масс троса и баланса	$M_{\text{тр}}/M$	1.288
Параметр в гр. усл. (5.9)	η	7.41×10^{-5}
Коэф. в асимптотике частот (5.11)	π/Z	2.15×10^{-4} с$^{-1}$

Таблица 2.

n	T_n^{eq}, ч	T_n^{mer}, ч	n	T_n^{eq}, ч	n	T_n^{eq}, с
0	138.25	23.58	5	1.615	20	1460
1	7.818	7.431	6	1.347	40	730.2
2	3.996	3.941	7	1.155	60	486.8
3	2.679	2.662	8	1.012	80	365.1
4	2.015	2.008	9	0.8996	100	292.1

приведены периоды первых 5 мод колебаний в меридиональной плоскости; далее разность $T_n^{\text{eq}} - T_n^{\text{mer}}$ становится очень малой.

Заметим, что оценка периода (в часах) главной моды по формуле (5.7) дает $114 < T_0^{\text{eq}} < 158$.

Доработка статьи осуществлена при участии С.Ю. Садова и Г.В. Калачева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pearson J.* The orbital tower: a spacecraft launcher using the Earth's rotational energy // Acta Astron. 1975. V. 2. № 10. P. 785–799.

2. *Белецкий В.В., Иванов М.Б., Отставнов Е.И.* Модельная задача о космическом лифте // Космич. исслед. 2005. Т. 43. № 3. С. 157–160.

3. *Нуралиева А.Б.* О динамике троса космического лифта // Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, М., 2012. 103 с. https://keldysh.ru/council/1/nuralieva-diss.pdf

4. *Садов Ю.А., Нуралиева А.Б.* Нелинейные поперечные колебания троса космического лифта // Матем. модел. 2011. Т. 23. № 12. С. 3–19.

5. *Калачев Г.В., Нуралиева А.Б., Чернов А.В.* Малые колебания троса космического лифта // Тр. МФТИ. 2013. Т. 5. № 4. С. 26–36.
https://mipt.ru/upload/medialibrary/090/26-36.pdf
6. *Петров А.Л., Садов С.Ю.* Исследование близких к маятниковым движений тяжелой нити на круговой орбите // Препринт 11. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1989. 28 с.
https://istina.msu.ru/publications/article/302515268/
7. *Williams P.* Dynamic multibody modeling for tethered space elevators // Acta Astron. 2009. V. 65. P. 399–422.
8. *Wang Zhenkun, Cui Naigang, Fan Youhua, Liu Dun.* Modal and dynamic analysis of a tether for a nonequatorial space elevator // IEEE Access. 2018. V. 6. P. 74940–74952.
https://ieeexplore.ieee.org/document/8543785
9. *Садов Ю.А., Нуралиева А.Б.* Нагруженный секционированный космический лифт // Космич. исслед. 2015. Т. 53. № 3. С. 246–252.
10. *Белецкий В.В., Левин Е.М.* Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 329 с.
11. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
12. *Fulton C.T.* Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions // Proc. Royal Soc. Edinburgh. 1977. V. 77A. P. 293–308.
https://doi.org/10.1017/S030821050002521X
13. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. М.: Изд. МФТИ, 1994. 528 с.

On Linear Transverse Oscillations of the Space Elevator Cable

Yu. A. Sadov[a] **and A. B. Nuralieva**[a,#]

[a]*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia*
[#]*e-mail: annanuralieva@yandex.ru*

For an extra-long flexible inextensible cable of a space elevator, small transverse oscillations near the equilibrium vertical position are studied. It is shown that in the linear approximation the oscillations in the two planes, equatorial and meridional, are separated and have identical sets of eigenfunctions, while their eigenfrequencies are connected by a simple relation. A Sturm–Liouville problem for determining the frequencies and shapes of cable's natural vibrations is stated. A transformation of the problem aimed at facilitating computations is described.

Keywords: space elevator, flexible inextensible cable, uniformly stressed cable, small oscillations, Sturm–Liouville problem, Prüfer susbstitution

REFERENCES

1. *Pearson J.* The orbital tower: a spacecraft launcher using the Earth's rotational energy. // Acta Astron., 1975, vol. 2, no. 10, pp. 785–799.
https://doi.org/10.1016/0094-5765(75)90021-1
2. *Beletskii V.V., Ivanov M.B., Otstavnov E.I.* Model problem of a space elevator // Cosmic Res., 2005, vol. 43, no. 3, pp. 152–156.
https://doi.org/10.1007/s10604-005-0029-1
3. *Nuralieva A.B.* On the dynamics of the space elevator cable // Diss. Cand. deg. Moscow: Keldysh Inst. Appl. Math., 2012. (in Russian)
4. *Sadov Yu.A., Nuralieva A.B.* Nonlinear transverse oscillations of the space elevator's tether // Mat. Model., 2011, vol. 23, no. 12, pp. 3–19.
5. *Kalachev G.V., Nuralieva A.B., Chernov A.V.* Small oscillations of a space elevator cable // MIPT Proc., 2013, vol. 5, no. 4, pp. 26–36. (in Russian)
6. *Petrov A.L., Sadov S.Yu.* A study of motions, close to that of a pendulum, of a heavy thread on a circular orbit // Preprint Keldysh Inst. Appl. Math., 1989, no. 11. (in Russian) MathSciNet 99e:65180.

7. *Williams P.* Dynamic multibody modeling for tethered space elevators // Acta Astron., 2009, vol. 65, pp. 399–422.
https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2008.11.016
8. *Wang Zhenkun, Cui Naigang, Fan Youhua, Liu Dun* Modal and dynamic analysis of a tether for a nonequatorial space elevator // IEEE Access, 2018, vol. 6, pp. 74940–74952.
https://ieeexplore.ieee.org/document/8543785.
https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2883363
9. *Sadov Yu.A., Nuralieva A.B.* Loaded sectioned space elevator // Cosmic Res., 2015, vol. 53, no. 3, pp. 230–236.
https://doi.org/10.1134/S0010952515030065
10. *Beletsky V.V., Levin E.M.* Dynamics of Space Tether Systems. N.Y.: Amer Astron. Soc., 1993.
11. *Tikhonov A.N., Samarskii A.A.* Equations of Mathematical Physics. N.Y.: Dover Publ., 1990.
12. *Fulton C.T.* Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions // Proc. Royal Soc., 1977, vol. 77A, pp. 293–308.
https://doi.org/10.1017/S030821050002521X
13. *Fedorenko R.P.* Introduction to Computational Physics. Moscow: MIPT, 1994. (in Russian)

УДК 532.59

ОБ ОБРУШЕНИИ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН И ФОРМИРОВАНИИ КУМУЛЯТИВНЫХ СТРУЙ

© 2020 г. Н. Д. Байков[1],*, А. Г. Петров[2],**

[1] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
[2] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
**e-mail:baikov_nd@rambler.ru*
***e-mail: petrovipmech@gmail.ru*

Поступила в редакцию 18.10.2019 г.
После доработки 14.07.2020 г.
Принята к публикации 20.07.2020 г.

Изучаются плоские нестационарные задачи движения свободной границы в потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости. На основе метода граничных элементов строится численный алгоритм расчета формы свободной границы. При построении аппроксимаций учитывается гладкость границы. Основное внимание уделяется задачам формирования тонких кумулятивных струй и обрушению волн, обоснованию достоверности численных расчетов.

Ключевые слова: кумулятивные струи, метод граничных элементов, обрушение волн

DOI: 10.31857/S0032823520050021

Введение. При описании плоских потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости удобно пользоваться методом граничных элементов. Одним из преимуществ этого метода является уменьшение размерности задачи за счет сведения расчетов к (одномерной) границе области течения жидкости. Данная работа посвящена численному моделированию движения свободной границы в трех типах задач: деформации цилиндрических полостей в неограниченном объеме жидкости, деформации свободной границы цилиндров жидкости под действием заданного поля скоростей и обрушения капиллярно-гравитационных периодических волн. При определенных начальных условиях в каждой из этих задач на свободной поверхности жидкости могут образовываться тонкие кумулятивные струи. Сложность проведения таких расчетов обычно связана с потерей устойчивости численной схемы и стремительным ростом кривизны кумулятивной струи, требующей большого измельчения сетки в ее окрестности. Использование аппроксимаций специального вида, разработанных одним из авторов [1], позволяет преодолеть указанные трудности. Для обоснования достоверности расчетов по предложенной численной схеме авторами было сделано следующее:

• Проведены расчеты для задачи восстановления кривой по заданному распределению нормальной скорости и сравнение расчета с точным решением

• Приведены четыре закона сохранения, по которым ведется контроль точности расчетов

• Проведено сравнение численных расчетов с известными полуаналитическими решениями

• Проведен анализ уменьшения погрешности при удвоении элементов сетки.

1. Математическая постановка задачи. Конечной целью предлагаемого численного алгоритма будет являться нахождение формы движущейся свободной границы, которая может быть определена кинематически по значениям нормальной компоненты скорости жидкости V на границе. Для определения V достаточно знать значение функции тока Ψ на границе, поскольку $V = \partial\Psi/\partial s$. Покажем, что для отыскания значений Ψ и описания ее движения в задачах деформации цилиндрических полостей, движения цилиндров жидкости, а также движения периодических волн могут использоваться интегро-дифференциальные уравнения одного и того же типа.

Начнем с задачи деформации цилиндрической полости в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости, движение которой плоскопараллельно и потенциально. Пусть ось цилиндра направлена перпендикулярно плоскости течения. Будем рассматривать задачу в плоскости, параллельной течению. На этой плоскости внутренности полости соответствует некоторая ограниченная область S с замкнутой гладкой свободной границей ∂S. Областью течения жидкости является внешность полости $\mathbb{R}^2 \backslash S$, и в ней функция тока Ψ удовлетворяет уравнению Лапласа. При условии, что жидкость покоится на бесконечности, из него можно вывести интегральное уравнение, связывающее значения Ψ на границе ∂S с вещественной функцией потенциала Φ. Для этого введем два интегральных оператора A и B. Пусть F — произвольная гладкая функция, заданная на ∂S. Действие A и B на F в точке $M \in \partial S$ определим по следующим формулам:

$$[AF](M) = -\int_{\partial S} G(M, M')F(M')ds' \tag{1.1}$$

$$[BF](M) = \int_{\partial S} \frac{\partial G}{\partial n'}(M, M')(F(M') - F(M))ds', \tag{1.2}$$

где $G(M, M')$ обозначает функцию Грина и для пары точек $M(x, y)$ и $M'(x', y')$ вычисляется по формуле

$$G(M, M') = \frac{1}{2}\ln[(x' - x)^2 + (y' - y)^2] \tag{1.3}$$

При этом направление нормали на свободной границе выбрано внешним по отношению к полости S. Для Ψ справедливо следующее уравнение:

$$-2\pi\Psi(M, t) = \left[A\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right) + B\Psi\right](M, t), \tag{1.4}$$

которое и будет использоваться для построения численного алгоритма.

Постановка задачи о движении цилиндра жидкости со свободной границей может быть получена из постановки задачи о деформации цилиндрической полости. Для этого достаточно поменять местами полость S и область течения жидкости $\mathbb{R}^2 \backslash S$. Интегральное уравнение для Ψ в этом случае также определено на ∂S, использует те же интегральные операторы A и B, и ту же самую функцию Грина (1.3) и имеет следующий вид:

$$0 = \left[A\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right) + B\Psi\right](M, t), \tag{1.5}$$

т.е. отличается от (1.4) лишь левой частью уравнения.

Для задания уравнения, определяющего значения Ψ в задаче о движении периодической волны в жидкости постоянной глубины, требуется внести в (1.4) более существенные изменения. Сформулируем постановку задачи. Введем декартову систему координат Oxy, где ось y направлена вертикально вверх. Пусть уровень дна задается уравнением $y = -h$, где $h > 0$ обозначает глубину жидкости. Для простоты будем считать, что длина волны $\lambda = 2\pi$. Область жидкости, заключенную между двумя вертикальными прямыми $x = 0$ и $x = 2\pi$ обозначим через S_w. Граница области S_w является кусочно-гладкой и состоит из четырех частей: отрезка дна, пары вертикальных отрезков и криволинейного участка свободной границы, который мы обозначим через L.

При движении периодических волн в дополнение к уравнению Лапласа Ψ удовлетворяет также условию периодичности

$$\Psi(x, y, t) = \Psi(x + 2\pi, y, t) \tag{1.6}$$

На дне задается условие непротекания. В этом случае прямая $y = -h$ (дно) совпадает с линией тока жидкости:

$$\Psi\big|_{y=-h} = \Psi_h = \text{const} \tag{1.7}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\Psi_h = 0$. Следствием этих условий является интегральное уравнение

$$\pi\Psi(M, t) = \left[\tilde{A}\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right) + \tilde{B}\Psi\right](M, t) \tag{1.8}$$

Здесь интегральные операторы $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ определяются аналогично операторам A, B из (1.1), (1.2), но вместо ∂S интегрирование ведется по (незамкнутому) участку свободной границы L, а в качестве функции Грина используется

$$\tilde{G}(M, M') = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{2(\operatorname{ch}(y' - y) - \cos(x' - x))}{1 - 2E\cos(x' - x) + E^2}\right], \tag{1.9}$$

где $E = e^{-2h-y-y'}$. Направление нормали внешнее по отношению к области S_w. Вывод всех этих интегральных уравнений представлен в [2].

Таким образом, уравнения (1.4), (1.5) и (1.8) позволяют по известным значениям Φ на свободной границе определять значения Ψ и $V = \partial\Psi/\partial s$ во всех трех типах задач. Касательная скорость точек границы U на геометрическую форму не влияет, но от ее выбора существенно зависит устойчивость численной схемы. Ниже будет описан способ вычисления U, повышающий устойчивость численного алгоритма.

Наконец, чтобы получить полную систему уравнений, достаточную для построения численного алгоритма, необходимо указать способ вычисления потенциала Φ. Будем использовать для этого интеграл Коши–Лагранжа. Дополнительно потребуем, чтобы давление p на свободной поверхности во всех трех случаях равнялось нулю. Интеграл может быть записан в следующем виде:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{x,y} + \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{2} + gy - \sigma k = F(t), \tag{1.10}$$

где плотность жидкости ρ полагается равной единице, g характеризует силу тяжести, σ – коэффициент поверхностного натяжения, k – кривизна, а $F(t)$ – некоторая функция времени. Так как потенциал определен с точностью до произвольной функции времени, можно положить $F(t) = 0$. В зависимости от рассматриваемой задачи g и σ могут также оказаться равными нулю. Отметим, что для использования интеграла (1.10) на подвижной свободной границе необходимо отказаться от эйлеровых координат и выразить соответствующие слагаемые через координаты на границе.

2. Численный алгоритм. Предлагаемый численный алгоритм является обобщением алгоритма [3], предложенного для решения задачи деформации цилиндрических полостей. Численные эксперименты показали, что предложенный алгоритм [3] сохраняет устойчивость при расчете тонких кумулятивных струй жидкости, возникающих при деформации полостей. Поскольку кумулятивные струи могут возникать в каждом из трех рассматриваемых случаев, это служит мотивацией для выбора метода решения.

Рассмотрим более подробно аппроксимацию интегральных уравнений (1.4), (1.5) и (1.8). При этом достаточно рассмотреть аппроксимацию только операторов A и B, поскольку аппроксимации $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ могут быть получены аналогичным образом: необходимо лишь учесть изменение вида функции Грина, а также незамкнутость L.

Заменим интегралы в A и B квадратурными формулами, порядок аппроксимации которых неограниченно возрастает с ростом количества точек сетки. Для этого введем гладкую параметризацию свободной границы ∂S при помощи вспомогательного параметра $\zeta \in [0,1]$ (критерии выбора параметризации будут сформулированы ниже), зададим равномерную сетку $\zeta_i = i/N$, где $i = 1,2,\ldots,N$, и применим квадратурные формулы [1]. Получим следующую аппроксимацию оператора A:

$$\left[A\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)\right](\zeta_i,t) \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\beta(|i-j|) + G_{ij}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}(\zeta_j,t), \tag{2.1}$$

где

$$\beta(0) = \alpha(0), \quad \beta(m) = -\ln\left|\sin\frac{\pi m}{N}\right| + \alpha(m)$$

$$\alpha(m) = -\left(\ln 2 + \frac{(-1)^m}{N} + \sum_{k=1}^{N/2-1}\frac{1}{k}\cos\frac{2\pi km}{N}\right)$$

$$G_{ij} = G(\zeta_i,\zeta_j), \quad i \neq j$$

$$G_{ii} = \lim_{\zeta\to\zeta_i}\left(G(\zeta_i,\zeta) - \ln\left|\sin(\pi(\zeta_i-\zeta))\right|\right)$$

Для функции Грина (1.3) имеем

$$G_{ii} = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1}{\pi^2}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial\zeta}(\zeta_i,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\zeta}(\zeta_i,t)\right)^2\right)\right]$$

Соответствующие коэффициенты для функции Грина (1.9) имеют вид

$$\tilde{G}_{ii} = \frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\zeta}(\zeta_i,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\zeta}(\zeta_i,t)\right)^2\right] - \frac{1}{2}\ln[\pi^2(1-E_i)^2], \quad E_i = e^{-2(h+y_i)}$$

Аппроксимация оператора B приобретает вид

$$[B\Psi](\zeta_i,t) \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}G_{ij}^n(\Psi(\zeta_j,t) - \Psi(\zeta_i,t)), \tag{2.2}$$

где

$$G_{ij}^n = \frac{\partial G}{\partial x'}(\zeta_i,\zeta_j)\frac{\partial y}{\partial\zeta}(\zeta_j,t) - \frac{\partial G}{\partial y'}(\zeta_i,\zeta_j)\frac{\partial x}{\partial\zeta}(\zeta_j,t) \quad (i \neq j), \quad G_{ii}^n = 0$$

Формулы (2.1) и (2.2) оперируют значениями $\partial x/\partial\zeta$, $\partial y/\partial\zeta$ и $\partial\Phi/\partial\zeta$ в точках сетки. Для их вычисления можно, например, использовать аппроксимацию в виде кубического сплайна или аппроксимацию производной по 4 точкам. Пусть $F(\zeta)$ обозначает произвольную гладкую периодическую функцию, заданную на отрезке $\zeta \in [0,1]$. Продолжим функцию по периоду за пределы отрезка. Аппроксимация ее производной по 4 точкам имеет следующий вид:

$$\frac{\partial F}{\partial\zeta}(\zeta_i) \approx N\left(\frac{2}{3}(F(\zeta_{i+1}) + F(\zeta_{i-1})) - \frac{1}{12}(F(\zeta_{i+2}) + F(\zeta_{i-2}))\right); \quad \zeta_i = \frac{i}{N}, \quad i \in \mathbb{Z} \tag{2.3}$$

Таким образом, уравнения (1.4), (1.5) и (1.8) сводятся к системе линейных уравнений относительно значений Ψ_i в точках сетки. Они, в свою очередь, определяют $V_i = (\partial\Psi/\partial\zeta)_i$.

Определение касательных скоростей точек сетки $U_i(t) := U(\zeta_i, t)$ тесно связано со способом ее параметризации. Зададим параметризацию ∂S (и аналогично L) при помощи вспомогательной положительной функции $f(\zeta)$ по формуле

$$ds = l(t)f(\zeta)d\zeta, \quad 0 \le \zeta \le 1, \quad \int_0^1 f(\zeta)d\zeta = 1,$$

где $l(t)$ – длина ∂S (или одного периода волны L) в момент времени t. Функция $f(\zeta)$ здесь является известной заданной положительной функцией и позволяет управлять распределением точек на границе. Принципиальным является то, что f не зависит от t, т.е. заданное в начальный момент распределение точек обязано сохраняться с течением времени. Такой подход позволяет за счет выбора $f(\zeta)$ вручную задать высокую плотность точек сетки на тех участках, где из-за высокой кривизны требуется более высокая точность, а также предотвратить возможность разрежения в процессе вычислений там, где точки сетки изначально были размещены близко друг к другу.

Сформулированное требование определяет значения U_i. Численно оно выражается в виде системы уравнений:

$$\Delta\tilde{s}_i = \frac{1}{N}l(t+\Delta t)f\left(\frac{\zeta_{i-1}+\zeta_i}{2}\right); \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.4}$$

где $\Delta\tilde{s}_i$ – расстояние между точками сетки с индексами i и $i-1$ в момент $t + \Delta t$. Для получения системы уравнений относительно U_i достаточно выразить $\Delta\tilde{s}_i$ через значения координат x_i, y_i и скоростей U_i, V_i на текущем шаге по времени t. Для решения (2.4) используется итерационный процесс по параметру $l(t + \Delta t)$.

3. Тестирование алгоритма вычисления касательной скорости. Для тестирования алгоритма вычисления U_i рассмотрим численное решение задачи о восстановлении эволюции контура, изменяющего свою форму, по заданному распределению нормальной скорости на границе.

Сформулируем математическую постановку задачи. Пусть на отрезке $x \in [-\pi, \pi]$ задан контур, эволюция которого с течением времени известна и определяется по следующему закону:

$$y(t,x) = \frac{1}{1 - t\cos x} \tag{3.1}$$

Уравнение кривой (3.1) имеет особенность в точке $(t, x) = (1, 0)$, в которой координата y обращается в $+\infty$. При меньших значениях t контур имитирует растяжение вдоль вертикали с неограниченным ростом кривизны в точке $x = 0$. Будем считать, что скорости точек, из которых состоит контур, в каждый момент времени направлены по нормали к контуру, т.е. $U = 0$. Необходимо численно восстановить форму профиля во все моменты времени по его начальной форме и известной (нормальной) компоненте скорости.

Вычислим нормальную компоненту вектора скорости. Пусть направление обхода контура задано от точки $x = \pi$ к точке $x = -\pi$, а вектор нормали получается из касательного вектора поворотом на угол $\pi/2$ по часовой стрелке (т.е. нормаль направлена "вверх"). Вектор нормали в осях x, y имеет компоненты $(\partial y/\partial s, -\partial x/\partial s)$. Нормальная компонента скорости точек профиля точно определяется как

$$V = \frac{\partial y}{\partial t}\left(-\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \frac{\partial y}{\partial t}\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{-1/2} = \frac{\cos x}{\sqrt{(1 - t\cos x)^4 + (t\sin x)^2}} \tag{3.2}$$

В начальный момент $t = 0$ контур имеет форму отрезка прямой. Будем использовать для его аппроксимации N точек, распределенных равномерно в начальный момент времени. Приращения пространственных координат этих точек x_i и y_i будем определять на основе метода Эйлера при помощи нормальной скорости (3.2) и касательной скорости U_i, которую определим одним из двух способов:

- $U_i = 0$;
- Значения U_i вычисляются из условия сохранения пропорций расстояний между узлами сетки.

В численном эксперименте будем использовать $N = 32$ точек сетки и постоянный шаг по времени $\Delta t = 10^{-4}$. В первом случае результаты удается получить лишь для $t \leq 0.72$. Возникающее к этому моменту разрежение точек сетки в окрестности $x = 0$ вызывает дестабилизацию алгоритма, не позволяя продолжить вычисления из-за быстро растущей погрешности аппроксимации. Значение кривизны в точке $x = 0$ в последний момент составляет примерно $k \approx 9.18$. Во втором случае расчет удается продлить вплоть до момента времени $t_e = 0.92$, после чего погрешность от использования метода Эйлера уже становится слишком большой, чтобы можно было считать численное решение близким к аналитическому. Тем не менее значение кривизны в точке $x = 0$ в последний момент времени достигает величины $k \approx 143.75$, что наглядно демонстрирует влияние способа задания U_i на устойчивость расчетов.

4. Законы сохранения. Одним из способов контроля точности в численном алгоритме могут служить законы сохранения. Например, для движения цилиндра жидкости со свободной границей при отсутствии массовых сил выполнены следующие законы сохранения импульса (I_x, I_y), энергии E и момента количества движения M:

$$I_x = -\int_0^1 y\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}d\zeta, \quad I_y = \int_0^1 x\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}d\zeta, \quad E = \frac{1}{2}\int_0^1 \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}d\zeta, \quad K = \int_0^1 (x^2 + y^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}d\zeta \tag{4.1}$$

Ранее [4] на примере (I_x, I_y) было доказано, что указанные интегралы (4.1) сохраняются в том числе и при деформации полостей под действием течений с ненулевой циркуляцией Γ, хотя и не являются при этом импульсом, энергией и моментом количества движения, т.к. прямое вычисление их невозможно из-за расходимости соответствующих интегралов.

В дополнение к законам сохранения (4.1) в задаче о деформации границы цилиндрической полости сохраняется площадь поперечного сечения полости. Для ее вычисления справедлива следующая аналитическая формула:

$$\mathrm{mes}(S) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x\frac{\partial y}{\partial\zeta} - y\frac{\partial x}{\partial\zeta} \right) d\zeta \tag{4.2}$$

Ее сеточный аналог имеет вид

$$M^j = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N} \left(x_i^j \frac{\partial y^j}{\partial\zeta_i} - y_i^j \frac{\partial x^j}{\partial\zeta_i} \right), \tag{4.3}$$

где при помощи верхнего индекса j обозначены значения соответствующих величин на j-м шаге по времени. Стоит отметить, что формула (5.3) учитывает гладкость подынтегральных функций. Если x и y являются бесконечно гладкими, то порядок аппроксимации величины (5.2) формулой (5.3) неограниченно возрастает вместе с увеличением количества точек сетки.

Уменьшение погрешности в (4.3) имеет важное значение для устойчивости численного алгоритма. Покажем, что величину погрешности можно оценить аналитически.

Для простоты положим, что шаг алгоритма по времени Δt фиксирован, аппроксимация координат x_i, y_i при помощи V_i и U_i на каждом следующем шаге по времени выполняется по методу Эйлера первого порядка точности, а для аппроксимации производных используется формула (3.3).

Оценим величину приращения при переходе от M^j к M^{j+1}. При использовании метода Эйлера в численном алгоритме справедливы следующие формулы для вычисления приращений пространственных координат:

$$x_i^{j+1} = x_i^j + \Delta t \Delta x_i^j = x_i^j + \frac{\Delta t}{l^j f_i^j}\left(U_i^j \frac{\partial x^j}{\partial \zeta_i} + \frac{1}{l^j f_i^j} \frac{\partial \Psi^j}{\partial \zeta}_i \frac{\partial y^j}{\partial \zeta_i} \right)$$
$$y_i^{j+1} = y_i^j + \Delta t \Delta y_i^j = y_i^j + \frac{\Delta t}{l^j f_i^j}\left(U_i^j \frac{\partial y^j}{\partial \zeta_i} - \frac{1}{l^j f_i^j} \frac{\partial \Psi^j}{\partial \zeta}_i \frac{\partial x^j}{\partial \zeta_i} \right) \tag{4.4}$$

Аппроксимации (2.3) обладают свойством линейности, поэтому

$$M^{j+1} - M^j = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\left[x_i^{j+1}\frac{\partial y^{j+1}}{\partial \zeta_i} - y_i^{j+1}\frac{\partial x^{j+1}}{\partial \zeta_i} - x_i^j \frac{\partial y^j}{\partial \zeta_i} + y_i^j \frac{\partial x^j}{\partial \zeta_i}\right] =$$
$$= \frac{\Delta t}{2N}\sum_{i=1}^{N}\left[\Delta x_i^j \frac{\partial y^j}{\partial \zeta_i} + x_i^j \frac{\partial \Delta y^j}{\partial \zeta}_i - \Delta y_i^j \frac{\partial x^j}{\partial \zeta_i} - y_i^j \frac{\partial \Delta x^j}{\partial \zeta}_i \right] + O(\Delta t^2)$$

Заметим, что для аппроксимаций (2.3) выполнен сеточный аналог формулы интегрирования по частям:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i \frac{\partial g}{\partial \zeta_i} = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial \zeta_i} g_i, \tag{4.5}$$

где f_i и g_i – две произвольные периодические сеточные функции. С учетом соотношений (4.5) формула для приращения приобретает следующий вид:

$$M^{j+1} - M^j = \frac{\Delta t}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\Delta x_i^j \frac{\partial y^j}{\partial \zeta_i} - \Delta y_i^j \frac{\partial x^j}{\partial \zeta_i}\right] + O(\Delta t^2) =$$
$$= \frac{\Delta t}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(U_i^j \frac{1}{l^j f_i^j}\frac{\partial x^j}{\partial \zeta_i} + \frac{1}{(l^j f_i^j)^2}\frac{\partial \Psi^j}{\partial \zeta}_i \frac{\partial y^j}{\partial \zeta_i}\right)\frac{\partial y^j}{\partial \zeta_i} - \left(U_i^j \frac{1}{l^j f_i^j}\frac{\partial y^j}{\partial \zeta_i} - \frac{1}{(l^j f_i^j)^2}\frac{\partial \Psi^j}{\partial \zeta}_i \frac{\partial x^j}{\partial \zeta_i}\right)\frac{\partial x^j}{\partial \zeta_i}\right] +$$
$$+ O(\Delta t^2) = \frac{\Delta t}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \Psi^j}{\partial \zeta}_i \left[\left(\frac{\partial x^j}{\partial \zeta_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y^j}{\partial \zeta_i}\right)^2\right]\frac{1}{(l^j f_i^j)^2} + O(\Delta t^2)$$

Поскольку коэффициенты при производных Ψ по построению численного алгоритма в точности являются длинами единичных векторов нормали, полученное выражение удается упростить:

$$M^{j+1} - M^j = \frac{\Delta t}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \Psi^j}{\partial \zeta}_i + O(\Delta t^2)$$

Если отдельно рассмотреть слагаемое при Δt и подставить в него аппроксимацию (2.3), то получим

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \Psi^j}{\partial \zeta}_i = 0 \tag{4.6}$$

Таким образом, M^{j+1} и M^j отличаются не более, чем на величину $O(\Delta t^2)$ на любом шаге j алгоритма по времени, следовательно, на любом фиксированном временном интервале $[0,T]$ сеточный аналог закона сохранения площади выполнен с точностью до погрешности порядка $O(\Delta t)$, т.е. определяется погрешностью метода Эйлера.

Фактически полученная оценка показывает, что использование в численном алгоритме интегрального уравнения (1.4) для Ψ, а также аппроксимации (2.3) позволяет исключить влияние шага сетки по пространственной координате ζ на погрешность в (4.3). Кроме того, несовпадение касательных скоростей точек сетки U_i с касательными скоростями жидкости $(\partial\Phi/\partial s)_i$ также не влияет (в первом порядке) на погрешность в (4.3).

Еще раз отметим, что для упрощения рассуждений здесь использовался метод Эйлера при интегрировании по времени. В численных экспериментах использовались схемы с более высокими порядками аппроксимации, например, метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности.

6. Численные результаты. Различным способам моделирования деформации свободной границы в задачах движения цилиндрических полостей в жидкости, а также жидких цилиндров посвящено много работ. Например, предложено полуаналитическое решение для задачи деформации полости [5], которая до этого решалась (численно) [6]. Рассмотрено [7] применение полуаналитического метода решения к задаче растекания цилиндра жидкости под действием заданного поля скоростей. Эти задачи использовались для тестирования численного алгоритма из настоящей работы. Рассчитанная по представленной схеме деформация формы полости при начальных условиях [6] изображена на рис. 1а, а модификация этой задачи с добавлением циркуляции – на рис. 1б. Добавление циркуляции нарушает симметрию задачи, делая проверку законов сохранения менее тривиальной. Рис. 2 соответствует задаче растекания цилиндра жидкости из [7].

В каждом из случаев свободная граница в начальный момент имела форму единичной окружности с центром в начале координат. В первом случае потенциал течения в начальный момент задавался по формуле

$$\Phi = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{z}\right] = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Заметим, что особенность функции соответствует точке внутри полости. Во втором случае к потенциалу добавлялось дополнительное слагаемое, делающее его многозначной функцией:

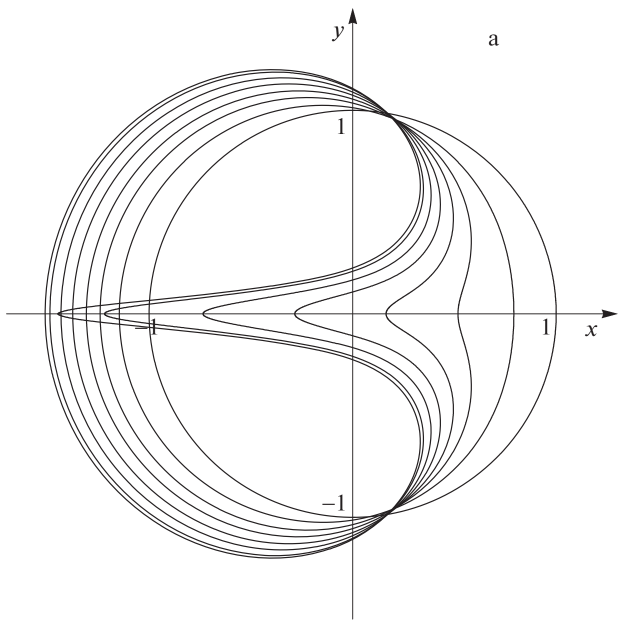
$$\Phi = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z\right] = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi$$

В третьем случае для дополнительного подтверждения работоспособности алгоритма была рассмотрена задача [7], где решение строилось при помощи полуаналитических методов. Начальное поле скоростей цилиндра в этом случае задавалось по формуле

$$\Phi = \mathrm{Re}\left[\frac{z^3}{3}\right] = \frac{x^3 - 3xy^2}{3}$$

Силы тяжести и поверхностного натяжения во всех трех задачах отсутствовали. Каждой кривой на рисунках соответствует положение свободной границы в один из моментов времени. В совокупности они демонстрируют возникновение и развитие кумулятивных струй. При этом для получения рис. 1а, б использовалось всего 128 точек сетки, а для рис. 2 – 192 точки. Можно заметить, что точки распределялись на границе неравномерно и были размещены ближе друг к другу там, где возникали струи.

Для проверки точности вычислений использовались законы сохранения (4.1). Ошибка в них не превышала по абсолютной величине 3×10^{-4}.



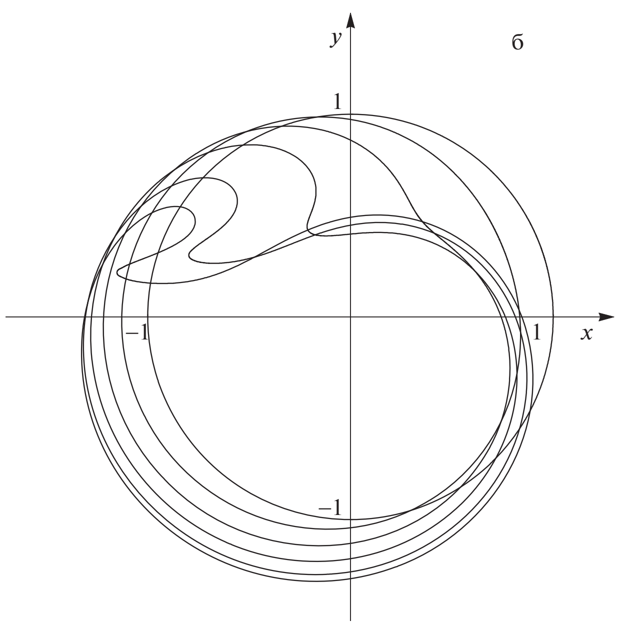


Рис. 1. Деформация. а – полости: $N = 128$, $t = 0$; 0.17; 0.31; 0.43; 0.57; 0.71; 0.86; 0.93, б – полости с циркуляцией: $N = 128$, $\Gamma = 10$, $t = 0$; 0.15; 0.3; 0.45; 0.6; 0.69.

Исследованию процесса обрушения волн также посвящено большое количество работ (см., например, обзор [8]). Для сравнения будем использовать результаты [9], где также был построен численный алгоритм решения задачи.

В качестве начальной формы для численных экспериментов с обрушением использовалась прогрессивная волна для жидкости бесконечной глубины ($h = -\infty$, $\sigma = 0$).

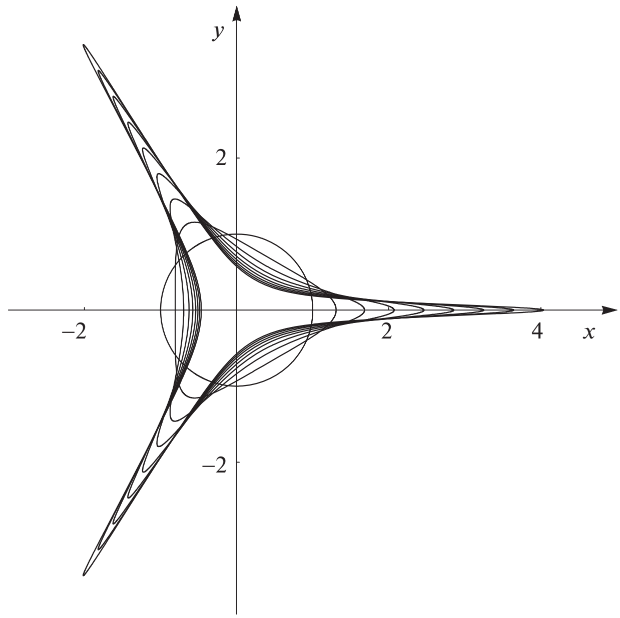


Рис. 2. Растекание цилиндра жидкости ($N = 192$, $\Delta t = 0.25$).

Форма прогрессивной волны рассчитывалась по итерационному алгоритму [10]. Суть метода сводилась к поиску экстремума функционала $E_c - E_g - E_\sigma$, где E_c, E_g и E_σ определялись по формулам

$$E_c = \frac{c^2}{2}\int_0^l \bar{\Phi}\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial n}ds, \quad E_g = \frac{g}{2}\int_0^l y^2\frac{\partial x}{\partial s}ds, \quad E_\sigma = \sigma l$$

Здесь c обозначает скорость волны, а потенциалом поля скоростей является функция $c\bar{\Phi}$.

Обрушение прогрессивной волны вызывалось внешним давлением, приложенным к свободной поверхности жидкости. Зависимость давления от времени задавалась по формуле вида [9]

$$p_s = \begin{cases} p_0\sin(x - ct)\sin t, & 0 \le t \le \pi \\ 0, & \pi \le t \end{cases}$$

Главный недостаток алгоритма [9] — его неустойчивость: свободная поверхность в процессе расчетов приобретает пилообразную форму. Для подавления неустойчивости авторы [9] прибегали к сглаживанию границы по формуле

$$\bar{f}_j = \frac{1}{16}(-f_{j-2} + 4f_{j-1} + 10f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2}) \tag{5.1}$$

Использование сглаживания позволяло продлить расчет, однако также вносило погрешность в алгоритм. Частое применение формулы (5.1) искусственно понижало кривизну границы, из-за чего [9] удалось рассчитать лишь начальную стадию обрушения до момента времени $t = 4.928$ (началом обрушения приблизительно можно считать момент времени $t = 4.6$).

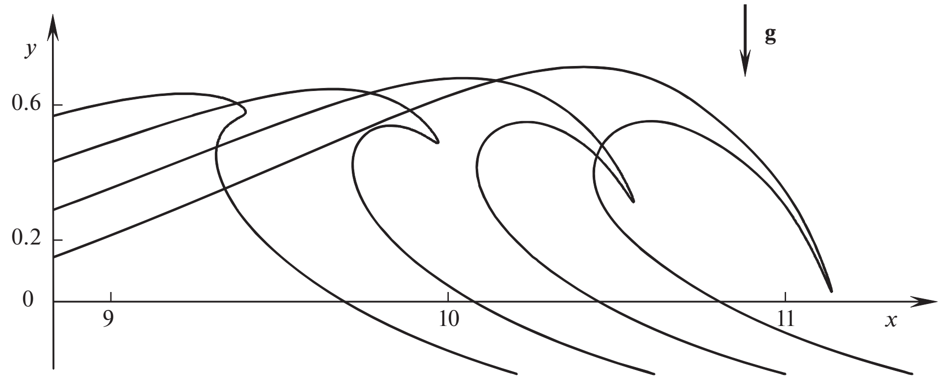


Рис. 3. Обрушение гравитационной волны ($t = 4.8$; 5.1; 5.4; 5.7).

Предложенный в данной статье алгоритм также был применен к решению задачи [9]. Рассматривалась прогрессивная волна с амплитудой $a = 0.406$, что составляет приблизительно 90% от предельной амплитуды прогрессивной волны, а $p_0 = 0.146$. Сравнение с результатами [9] при одинаковом количестве точек сетки показало, что новый алгоритм значительно устойчивее и позволяет продолжить расчет до полного обрушения волны. Радиус кривизны в вершине волны на конечной стадии более чем в 1000 раз меньше длины волны. Преимущества нового алгоритма наглядно демонстрирует рис. 3. Четырем контурам гребня волны соответствуют моменты времени $t = 4.8$; 5.1; 5.4; 5.7. Для получения первых двух контуров использовалось $N = 60$ точек сетки. Именно такое количество точек использовалось при аппроксимации границы [9]. Точки сгущались в окрестности формирующейся кумулятивной струи, что позволило рассчитать форму свободной границы вплоть до момента $t = 5.1$ без потери гладкости. Для дальнейших расчетов 60 точек оказалось недостаточно, поэтому при $t > 5.1$ их количество было увеличено до значения $N = 192$. Основные трудности при расчете последней стадии обрушения были связаны с удержанием наибольшей плотности точек сетки в вершине кумулятивной струи при помощи явного задания касательной скорости U_0. Для упрощения расчетов форма струи при $t = 5.7$ была получена с использованием сглаживания в окрестности вершины по формуле (5.1).

Перейдем к рассмотрению капиллярных волн ($g = 0$). Разработанный численный алгоритм применялся для расчета неустойчивости возмущенной волны Крэппера. Параметрическое уравнение волны Крэппера имеет следующий вид:

$$x(\alpha) = -\frac{\lambda}{2\pi}\left(\alpha + \frac{4b\sin\alpha}{1 - 2b\cos\alpha + b^2}\right), \quad y(\alpha) = \frac{2\lambda}{\pi}\frac{b\cos\alpha - b^2}{1 - 2b\cos\alpha + b^2},$$

где λ – длина волны, а b – вещественный параметр, связанный с амплитудой волны a соотношением

$$a = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{4b}{1 - b^2}$$

Как и в случае прогрессивной волны в тяжелой жидкости, профиль волны Крэппера не изменяется в процессе движения, а безразмерная скорость волны c постоянна. Значение c и скорость распространения волны определяются как

$$c^2 = \frac{1 - b^2}{1 + b^2}, \quad u^2 = c^2\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}$$

Сохранение формы профиля было экспериментально проверено в численном алгоритме в качестве теста. Рассматривалась волна Крэппера, заданная значением параметра $b = 0.3$. Ее достаточно сложная форма изображена на первом рис. 4. Для аппроксимации границы использовалось $N = 32$ точек сетки, распределенных равномерно по параметру α. Для расчетов использовался фиксированный шаг по времени $\Delta t = 0.01$. Сравнивались значения пространственных координат с интервалом $T = 100$. Невязка определялась в виде

$$r = \max_{i=1,N}\sqrt{(\tilde{x}_i - x_i - uT)^2 + (\tilde{y}_i - y_i)^2}, \tag{5.2}$$

где x_i, y_i обозначают пространственные координаты точек сетки в начальный момент времени, $\tilde{x}_i$, $\tilde{y}_i$ — координаты в конечный момент времени. Было получено, что $r \le 5.2\times10^{-3}$. Эта проверка показывает, что в численном методе отсутствуют схемное поверхностное натяжение и схемная вязкость, которые обычно появляются в разностных схемах.

Ранее [11] была доказана устойчивость по Ляпунову точного решения Крэппера относительно возмущений с периодом, равным длине волны. Тем не менее, доказательство не распространяется на возмущения с периодом, превышающим длину волны, — устойчивость в этом случае не обязана сохраняться. В численных экспериментах использовались возмущения вида $\delta y = \varepsilon \sin x$ при длине волны Крэппера $\lambda = \pi$. Расчеты показали, что подобные возмущения даже при малых значениях параметра ε способны вызывать значительные по амплитуде колебания свободной поверхности, а при достаточно больших значениях параметра b — приводить к разрушению волны. На рис. 4 изображена эволюция формы одного периода возмущенной волны при $b = 0.3$ и $\varepsilon = 0.03$. Для аппроксимации границы использовалось $N = 192$ точек сетки. Как и в предыдущем расчете, сгущение точек сетки проводилось в окрестности участков границы, имеющих наибольшую кривизну. Как видно из рис. 4, таких участков два; они соответствуют локальным минимумам функции y.

Наконец, перейдем к рассмотрению аналога опыта Покровского как простейшей демонстрации формирования кумулятивной струи на свободной поверхности жидкости. В оригинальном эксперименте, описанном в монографии [12] (с. 253–254), струя образуется при ударе падающей стеклянной пробирки с водой о твердую неподвижную поверхность. Измерения показывают, что при падении с 10 см кумулятивная струя достигает более метра в высоту.

Согласно [12] при ударе свободная поверхность жидкости получает такой импульс, что центральная часть поверхности приобретает конечную скорость, направленную вверх, а ее края вблизи стенок пробирки — скорость, направленную вниз.

При проведении численного эксперимента для простоты предполагалось, что в начальный момент времени жидкость заполняет полуполосу $-\pi < x < \pi$, $y < 0$; нормальная скорость на границе $y = 0$ задавалась по формуле $v_y = \cos x$. Данная скорость соответствует начальному потенциалу скорости жидкости $\Phi = e^y \cos x$. Сила тяжести полагалась равной нулю, что позволяло струе неограниченно вытягиваться. Благодаря этому предположению удалось оценить возможности численного алгоритма, так как расчет можно вести до тех пор, пока схема не потеряет устойчивость. Результаты вычислений на сетке из $N = 128$ точек изображены на рис. 5. Приведены формы кумулятивной струи в моменты времени $t = 2.05$; 4.1 и 6.15. В момент времени 6.15 кривизна в вершине струи достигает значения 1143.5.

Дополнительно для данной задачи был проведен анализ уменьшения погрешности при удвоении элементов (с сохранением прежнего распределения точек на контуре,

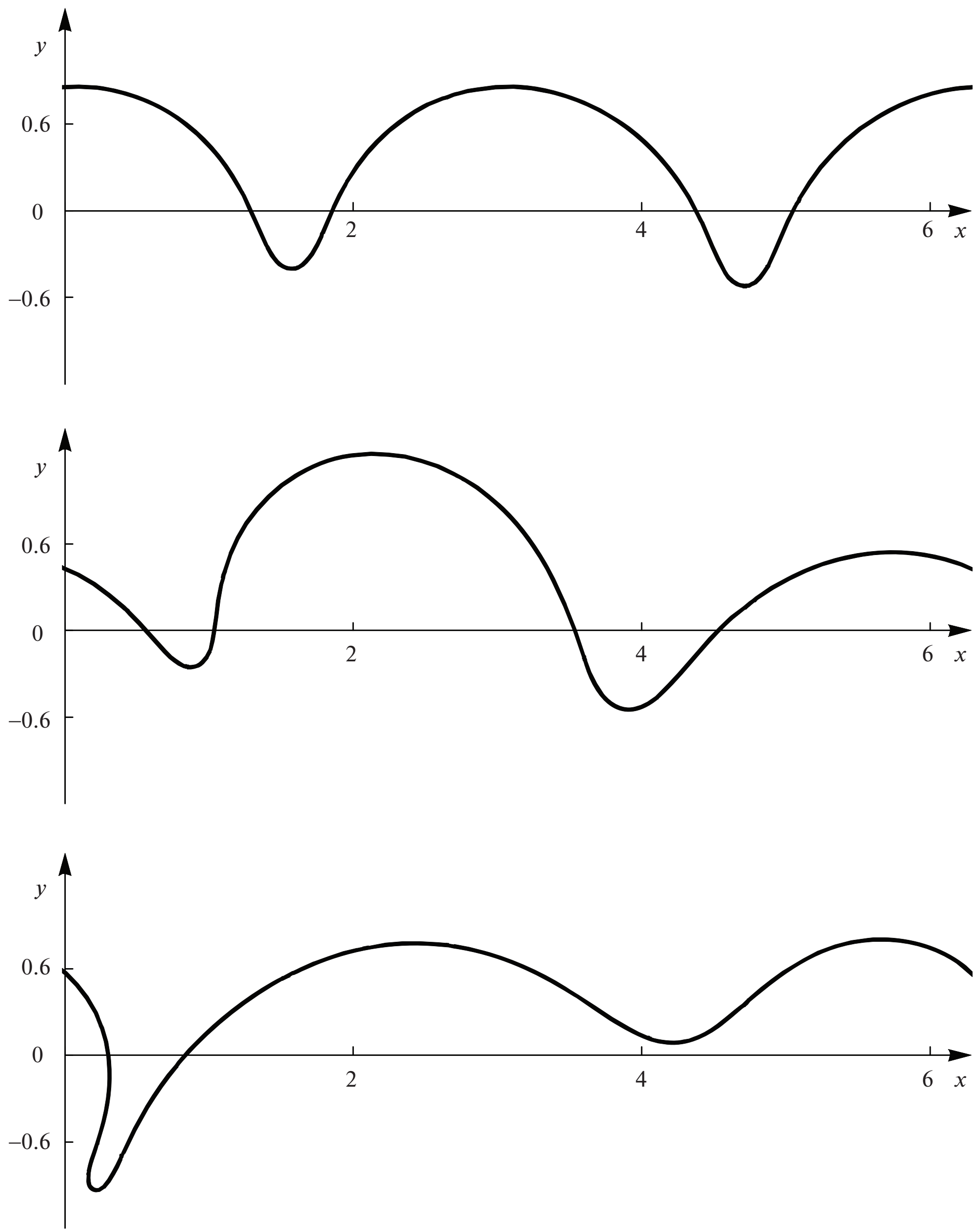


Рис. 4. Деформация возмущенной волны Крэппера ($t = 0$; 30; 40.5).

определяемого функцией $f(\zeta)$). Невязка определялась при помощи следующей формулы:

$$R_N^j = \max_{i=1,N} \sqrt{(x_i^j - \tilde{x}_{2i}^j)^2 + (y_i - \tilde{y}_{2i}^j)^2}, \tag{5.3}$$

где x_i^j и y_i^j – пространственные координаты точек сетки в момент времени $t = j\Delta t$ для сетки из N точек, а $\tilde{x}_i^j$ и $\tilde{y}_i^j$ – соответствующие координаты для сетки из $2N$ точек.

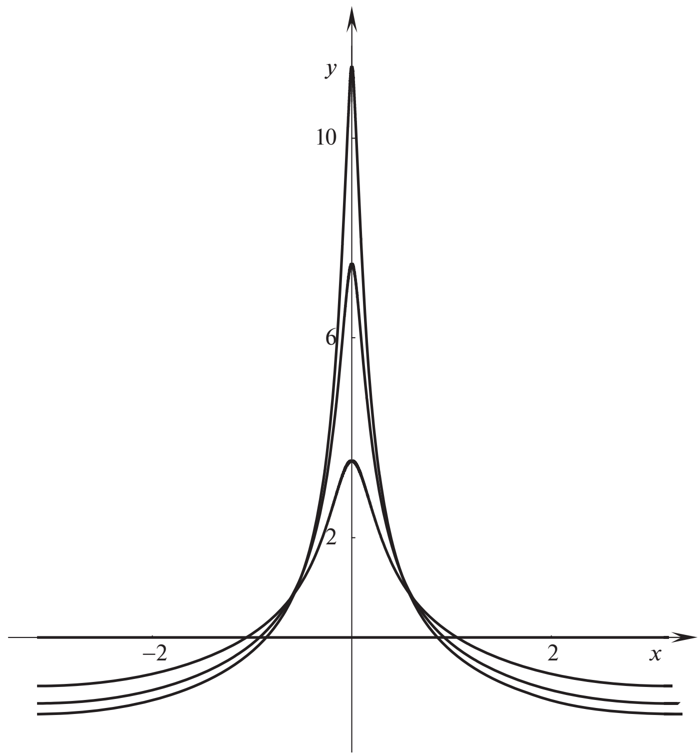


Рис. 5. Аналог опыта Покровского (t = 2.05; 4.1; 6.15).

Было проведено сравнение результатов для 64 и 128 точек, а также для 128 и 256 точек в моменты времени 2.05 и 4.1. Эти результаты приведены в табл. 1. Отметим, что значение максимума достигалось на участках границы с наибольшим расстоянием между точками сетки.

Выводы. Приведенные примеры показали, что кривизна вершины струи может увеличиваться до очень больших значений без потери гладкости свободной границы. К этому же выводу пришли и авторы работ [5, 7], в которых построены полуаналитические решения для описания формирования кумулятивных струй. Предложенный в настоящей работе численный алгоритм позволяет за счет учета аналитичности свободных границ значительно сократить время расчетов тонких кумулятивных струй, сохраняя при этом высокую точность и устойчивость. Достоверность расчетов обоснована путем контроля точности на специально выведенных законах сохранения, сравнения расчетов с полуаналитическими решениями и другими специально построенными точными решениями.

Таблица 1. Сравнение погрешности в аналоге опыта Покровского

Сетка	64 × 128	128 × 256
$t = 2.05$	2.7×10^{-3}	6.4×10^{-4}
$t = 4.1$	9.9×10^{-3}	2.3×10^{-3}

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петров А.Г.* Квадратурные формулы для периодических функций и их применение в методе граничных элементов // ЖВММФ. 2008. Т. 48. № 8. С. 1344–1361.
2. *Петров А.Г.* Аналитическая гидродинамика. М.: Физматлит, 2010. 520 с.
3. *Байков Н.Д., Петров А.Г.* О формировании кумулятивной струи в плоско-параллельном потоке идеальной жидкости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 2017. № 5. С. 42–47.
4. *Байков Н.Д., Петров А.Г.* Деформация цилиндрических полостей в плоскопараллельных потенциальных течениях с циркуляцией и под влиянием массовых сил // Вычисл. методы и программ. 2018. Т. 19. С. 207–214.
5. *Karabut E.A., Petrov A.G., Zhuravleva E.N.* Semi-analytical study of the Voinovs problem// Euro. J. Appl. Math. 2018. P. 1–40. https://doi.org/10.1017/S0956792518000098
6. *Воинов О.В., Воинов В.В.* Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 3. С. 559–562.
7. *Karabut E.A., Zhuravleva E.N.* Unsteady flows with a zero acceleration on the free boundary // J. Fluid Mech. 2014. V. 754. P. 308–331.
8. *Peregrine D.H.* Breaking waves on beaches // Ann. Rev. Fluid Mech. 1983. V. 15. P. 149–178.
9. *Longuet-Higgins M.S., Cokelet E.D.* The deformation of steep surface waves on water. I. A numerical method of computation // Proc. R. Soc. Lond. A. 1976. V. 350. P. 1–26.
10. *Петров А.Г., Смолянин В.Г.* Расчет профиля капиллярно-гравитационной волны на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 1991. № 3. С. 92–96.
11. *Петров А.Г.* Об устойчивости капиллярных волн конечной амплитуды // ППМ. 2017. Т. 81. № 4. С. 462–470.
12. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука. 1977. 407 с.

Breaking of Capillary-Gravity Waves and Generation of Cumulative Jets

N. D. Baykov[a,#] **and A. G. Petrov**[b,##]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[b] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: baikov_nd@rambler.ru*

[##]*e-mail: petrovipmech@gmail.com*

In this paper, we study the problem of the motion of the free boundary in the unsteady flow of the ideal incompressible fluid. The numerical algorithm is based on the boundary element method. To derive the approximations, we take into account the smoothness of the boundary. The paper focuses mainly on the numerical problems of generation of thin cumulative jets and wave breaking. It includes numerical results validation.

Keywords: cumulative jets, boundary element method, wave breaking

REFERENCES

1. *Petrov A.G.* Quadrature formulas for periodic functions and their application to the boundary element method // Comp. Math. & Math. Phys, 2008, vol. 48, no. 8, pp. 1266–1283.
2. *Petrov A.G.* Analytical Hydrodynamics. Moscow: Fizmatlit, 2010. 520 p. (in Russian)
3. *Baykov N.D., Petrov A.G.,* Formation of a cumulative jet in the plane-parallel flow of a perfect fluid // MSU Bull., Ser 1: Mech., 2017, no. 5, pp. 119–123.

4. *Baikov N.D., Petrov A.G.* Deformation of cylindrical cavities in plane-parallel potential flows with circulation and under the action of mass forces // Numer. Meth.& Programm., 2018, vol. 19, pp. 207–214. (in Russian)
5. *Karabut E.A., Petrov A.G., Zhuravleva E.N.* Semi-analytical study of the Voinovs problem // Euro. J. Appl. Math., 2018, pp. 1–40.
6. *Voinov O.V., Voinov V.V.* Numerical method of calculating nonstationary motions of an ideal incompressible fluid with free surfaces// Sov. Phys. Dokl., 1975, vol. 20, no. 3, pp. 179–180.
7. *Karabut E.A., Zhuravleva E.N.* Unsteady flows with a zero acceleration on the free boundary // J. Fluid Mech., 2014, vol. 754, pp. 308–331.
8. *Peregrine D.H.* Breaking waves on beaches // Ann. Rev. Fluid Mech., 1983, vol. 15, pp. 149–178.
9. *Longuet-Higgins M.S., Cokelet E.D.* The deformation of steep surface waves on water. I. A numerical method of computation // Proc. R. Soc. Lond. A, 1976, vol. 350, pp. 1–26.
10. *Petrov A.G., Smolyanin V.G.* Calculation of capillary-gravity wave contour on the surface of heavy liquid of finite depth // MSU Bull. Ser. 1: Math. Mech., 1991, no. 2, pp. 92–96. (in Russian)
11. *Petrov A. G.*, The stability of capillary waves of finite amplitude // JAMM, 2017, vol. 81, no. 4, pp. 317–324.
12. *Lavrent'ev M.A., Shabat B.V.* Hydrodynamics Problems and Their Mathematical Models. Moscow: Nauka, 1977. 407 p. (in Russian)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 5, с. 570–589

УДК 532.527

О ПОРОЖДЕНИИ ВИХРЯ ВРАЩАЮЩИМСЯ ЦИЛИНДРОМ

© 2020 г. Д. А. Гаджиев[1,2,*], А. М. Гайфуллин[1,2,**], А. В. Зубцов[1,***]

[1] *Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия*
[2] *Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия*
**e-mail: gadzhiev@phystech.edu*
***e-mail: gaifullin@tsagi.ru*
****e-mail: azub1941@yandex.ru*

Поступила в редакцию 13.04.2020 г.
После доработки 13.07.2020 г.
Принята к публикации 18.07.2020 г.

Рассмотрена задача об эволюции в вязком сжимаемом газе осесимметричного вихревого течения, порожденного вращением бесконечно протяженного кругового цилиндра вокруг своей оси. Построено асимптотическое решение на больших временах. Найдены условия, при которых циркуляция скорости на больших расстояниях будет превышать циркуляцию в случае несжимаемой жидкости.

Ключевые слова: вихрь, вращающийся цилиндр, сжимаемость, поток тепла, асимптотическое решение

DOI: 10.31857/S0032823520050033

1. Введение. Решения уравнений движения вязкого газа, описывающие достаточно простые течения, помогают нам понять физические особенности сложных течений. Исследование задачи о диффузии точечного вихря в вязкой несжимаемой жидкости можно найти практически во всех учебниках по гидродинамике. Вместе с тем известно, что поле окружных скоростей точечного вихря

$$w = \frac{\Gamma_0}{r}, \tag{1.1}$$

где $2\pi\Gamma_0$ – циркуляция вихря, r – расстояние от вихря, является и точным решением уравнений Эйлера, и точным решением уравнений Навье–Стокса. Во втором случае для поддержания поля скоростей (1.1) необходим постоянный подвод энергии [1]. Кроме того, жидкость, движущаяся со скоростью (1.1), обладает бесконечной кинетической энергией. Поле скоростей (1.1) в трехмерном течении индуцирует бесконечная прямолинейная вихревая нить интенсивности $2\pi\Gamma_0$. Выделим в направлении оси вихревой нити слой жидкости единичной протяженности и вычислим кинетическую энергию этого слоя

$$\int \frac{w^2}{2}dm = \int_0^\infty \frac{\Gamma_0^2}{2r^2}\rho 2\pi r dr = \pi\Gamma_0^2\rho\int_0^\infty \frac{dr}{r} \tag{1.2}$$

Здесь m – масса жидкости, ρ – плотность.

Интеграл (1.2) имеет логарифмическую особенность и в нуле и на бесконечности. Следовательно, встает вопрос о том, как в принципе такое поле скоростей могло быть создано. Создать поле (1.1) во всем пространстве невозможно. Обычно в физически реализуемых течениях образуется не один, а, например, два вихря с противоположной интенсивностью. Тогда поле скоростей имеет более быстро затухающее асимптотическое представление на больших удалениях. Таким образом, устраняется особенность при $r \to \infty$. Особенность при $r \to 0$ устраняется за счет того, что образующийся вихрь не является бесконечно тонким, а имеет структуру.

Можно предложить один из способов создания поля (1.1) в ограниченной области пространства. Это можно сделать в несжимаемой вязкой жидкости с помощью вращающегося вокруг своей оси бесконечного по протяженности цилиндра [2, 3].

Ранее [3, 4] исследовались нестационарное и предельное стационарное течение, порождаемые вращающимся цилиндром с заданным расходом жидкости через его поверхность. Задачи, связанные с взаимодействием набегающего потока с вращающимся цилиндром, рассмотрены во многих публикациях, например, [4–6]. Изучалась устойчивость подвижного цилиндра в циркуляционном потоке [7].

В данной статье рассматривается задача о вращении бесконечного цилиндра, но уже в сжимаемом газе с вязкостью, зависящей от температуры. Показано, что решение задачи во всем пространстве можно получить только в рамках нестационарной постановки. Нигде, кроме ограниченной области у поверхности цилиндра, течение не выходит на стационарный режим, что не было учтено ранее [8], где была предпринята попытка получить стационарное решение во всем пространстве.

2. Постановка задачи. Пусть бесконечный по протяженности круговой цилиндр радиуса r_* помещен в покоящийся вязкий совершенный газ с температурой $T = T_0$, плотностью $\rho = \rho_0$ и коэффициентами динамической вязкости $\mu = \mu_0$ и теплопроводности $\lambda = \lambda_0$. В момент времени $t = 0$ цилиндр начинает вращаться вокруг своей оси с угловой скоростью w_*/r_*, которая поддерживается постоянной. Исследуется возмущенное состояние газа при $t > 0$ при условии, что температура газа на поверхности цилиндра также сохраняется постоянной $T = T_*$.

Предполагается, что в цилиндрической системе координат (x, r, θ) нестационарное течение зависит только от координаты r и имеет ламинарный характер. Таким образом, пренебрегается возможной неустойчивостью течения. Уравнения и краевые условия, определяющие состояние газа, имеют вид [9]

$$\rho\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + v\Gamma'\right) = \mu\left(\Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r}\right) + \mu'\left(\Gamma' - \frac{2\Gamma}{r}\right)$$

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + vT'\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + vp' + \frac{c_p}{\mathrm{Pr}}\left[\mu\left(T'' + \frac{T'}{r}\right) + \mu' T'\right] +$$

$$+ \mu\left[\frac{1}{r^2}\left(\Gamma' - \frac{2\Gamma}{r}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(v'^2 - \frac{vv'}{r} + \frac{v^2}{r^2}\right)\right] \tag{2.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + vv' - \frac{\Gamma^2}{r^3}\right) = -p' + \frac{4}{3}\mu\left(v'' + \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2}\right) + \frac{2}{3}\mu'\left(2v' - \frac{v}{r}\right)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{(r\rho v)'}{r} = 0, \quad p = R\rho T$$

$$\Gamma = 0, \quad T = T_0, \quad \rho = \rho_0, \quad v = 0 \quad (t = 0,\ r > r_*)$$

$$\Gamma = \Gamma_* = w_* r_*, \quad T = T_*, \quad v = 0 \quad (t > 0,\ r = r_*) \tag{2.2}$$

$$\Gamma \to 0, \quad T \to T_0, \quad \rho \to \rho_0, \quad v \to 0, \quad \mu \to \mu_0 \quad (t > 0,\ r \to \infty),$$

где $2\pi\Gamma$ – циркуляция азимутальной составляющей скорости w, v – радиальная составляющая скорости, p – давление газа, $\mathrm{Pr} = \mu c_p/\lambda \sim O(1)$ – число Прандтля, c_p –

удельная теплоемкость при постоянном давлении, R – универсальная газовая постоянная, $(\,)' \equiv \partial/\partial r$. Число Прандтля Pr и c_p полагаются постоянными.

Согласно уравнениям (2.1) радиальный масштаб области, в которой возникают вязкие возмущения, является величиной пропорциональной $\sqrt{\nu_0 t}$, где $\nu_0 = \mu_0/\rho_0$. Безразмерный параметр $\sqrt{\nu_0 t}/r_*$ – отношение характерных независимых линейных размеров рассматриваемой задачи – может меняться при $t > 0$ в широких пределах. В настоящей работе ставится задача о построении асимптотического решения уравнений (2.1), (2.2) при относительно больших временах, когда $\sqrt{\nu_0 t}/r_* = \varepsilon^{-1} \gg 1$. Для определенности рассматривается случай линейной зависимости коэффициента вязкости от температуры газа $\mu(T)/\mu_0 = T/T_0$.

Для решения задачи всю область течения можно разбить на три асимптотические подобласти. Линейные размеры r_* и $\sqrt{\nu_0 t}$ соответствуют внутренней и внешней областям вязких возмущений (соответственно области G_1 и G_2). Как будет показано ниже, внешнему пределу решения в области G_2 соответствуют нулевая азимутальная скорость и конечный (но малый при больших числах Рейнольдса) расход, вызванный переменной по времени радиальной скоростью. Поскольку при ограниченной скорости распространения возмущений в газе расход должен обращаться в нуль на больших расстояниях от цилиндра, возникает третья асимптотическая область G_3, за размер которой отвечают акустические возмущения. Линейный размер области G_3 равен $a_0 t$, где a_0 – скорость звука в невозмущенном газе, и является наибольшим из трех масштабов: его отношение к размеру области G_2 составляет $a_0 t/\sqrt{\nu_0 t} = \mathrm{Re}/(\mathrm{M}_1 \varepsilon) \gg 1$, где $\mathrm{Re} = w_* r_*/\nu_0 \gg 1$, $\mathrm{M}_1 = w_*/a_0$, $a_0 = \sqrt{(æ - 1) c_p T_0}$, æ – показатель адиабаты.

Цель данной статьи – определить характеристики течения в областях G_1 и G_2. В каждой из этих областей вместо независимых переменных r, t введем новые независимые переменные: $\eta = r/r_*$, ε в области G_1 и $\tau = r/\sqrt{\nu_0 t}$, ε в области G_2.

Зависимые переменные в уравнениях (2.1), (2.2) представим в безразмерном виде

$$F = \frac{T^2}{T_0^2}, \quad \gamma = \frac{\Gamma}{\Gamma_*}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{v} = \frac{t}{r} v, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}$$

Далее черточки над безразмерными переменными будут опущены. Уравнения (2.1), (2.2) можно переписать в безразмерном виде. В области G_1 $(1 \le \eta < \infty)$

$$\gamma'' - \frac{\gamma'}{\eta} + \frac{F'}{2F}\left(\gamma' - \frac{2\gamma}{\eta}\right) = \varepsilon^2 \frac{\rho}{\sqrt{F}}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon} + \eta v \gamma'\right)$$

$$\begin{gathered}
F'' + \frac{F'}{\eta} + 2\frac{(æ - 1)\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{M}_1^2}{\eta^2}\sqrt{F}\left(\gamma' - \frac{2\gamma}{\eta}\right)^2 = \varepsilon^2\, \mathrm{Pr}\left[\frac{\rho}{\sqrt{F}}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \eta v F'\right) - \right. \\
\left. - 2\frac{(æ - 1)}{æ}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} + \eta v p'\right) - \frac{8}{3}\frac{æ(æ - 1)}{\mathrm{Re}^2}\mathrm{M}_1^2 \varepsilon^2 \sqrt{F}\left(\eta v'(v + \eta v') + v^2\right)\right] \\
\frac{1}{\rho} p' - \frac{æ\,\mathrm{M}_1^2}{\eta^3}\gamma^2 = \frac{æ}{\mathrm{Re}^2}\mathrm{M}_1^2 \varepsilon^2 \left\{\frac{\sqrt{F}}{\rho}\left[\frac{4}{3}(\eta v'' + 3v') + \frac{F'}{3F}(2\eta v' + v)\right] + \right. \\
\left. + \varepsilon^2 \eta\left[\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} + v - v(v + \eta v')\right]\right\}
\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$(\rho\eta^2 v)' = \frac{\varepsilon}{2}\eta\frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon}, \quad p = \rho\sqrt{F}$$

$$\gamma = 1, \quad F = F_* = \frac{T_*^2}{T_0^2}, \quad v = 0 \quad (\eta = 1) \tag{2.4}$$

В области G_2 $(0 < \tau < \infty)$

$$\gamma'' - \frac{\gamma'}{\tau} + \frac{F'}{2F}\left(\gamma' - \frac{2\gamma}{\tau}\right) + \frac{\rho}{\sqrt{F}}\left(\frac{1}{2} - v\right)\tau\gamma' = -\frac{\rho}{\sqrt{F}}\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\gamma}{\partial\varepsilon}$$

$$F'' + \frac{F'}{\tau} + \frac{\rho\,\mathrm{Pr}}{\sqrt{F}}\left(\frac{1}{2} - v\right)\tau F' = -\mathrm{Pr}\left\{\frac{\rho}{\sqrt{F}}\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial F}{\partial\varepsilon} - 2\frac{(æ-1)}{æ}\left(\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial p}{\partial\varepsilon} + \left(\frac{1}{2} - v\right)\tau p'\right) + \right.$$

$$\left. + 2\frac{(æ-1)\varepsilon^2\mathrm{M}_1^2}{\tau^2}\sqrt{F}\left(\gamma' - \frac{2\gamma}{\tau}\right)^2 + \frac{8}{3}\frac{(æ-1)}{\mathrm{Re}^2}\mathrm{M}_1^2\varepsilon^2\sqrt{F}\left(\tau v'(v + \tau v') + v^2\right)\right\} \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{\rho}p' = æ\,\mathrm{M}_1^2\varepsilon^2\left\{\frac{\gamma^2}{\tau^3} + \frac{1}{\mathrm{Re}^2}\left[\tau\left(\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial v}{\partial\varepsilon} + \tau v'\left(\frac{1}{2} - v\right) + v - v^2\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sqrt{F}}{\rho}\left(\frac{4}{3}(\tau v'' + 3v') + \frac{F'}{3F}(2\tau v' + v)\right)\right]\right\}$$

$$\left(\rho\tau^2 v\right)' = \frac{\varepsilon}{2}\tau\frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon} + \frac{\tau^2}{2}\rho', \quad p = \rho\sqrt{F}$$

$$\gamma \to 0, \quad F \to 1, \quad p \to 1, \quad v \to 0 \quad (\tau \to \infty) \tag{2.6}$$

Здесь

$$(\,)' = \begin{cases} \partial/\partial\eta & \text{в} \quad G_1 \\ \partial/\partial\tau & \text{в} \quad G_2 \end{cases}$$

Из уравнений (2.3)–(2.6) следует, что при $\varepsilon \to 0$ и $\mathrm{M}_1 \sim F_* \sim O(1)$ искомые функции в областях G_1 и G_2 являются величинами порядка $O(1)$ или меньше. Очевидно, что граничных условий (2.4), (2.6) недостаточно для однозначного определения этих функций в каждой из областей G_1, G_2. Необходимо потребовать, чтобы выполнялось сращивание асимптотического решения в области G_1 при $\eta \to \infty$ с асимптотическим решением в области G_2 при $\tau \to 0$.

3. Асимптотическое решение уравнений в области G_2. Из третьего уравнения (2.5) следует, что с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$ статическое давление в области G_2 является при $\tau \sim O(1)$ постоянной величиной $p = 1$ и имеет координатную особенность $p \sim \varepsilon^2/\tau^2$ при $\tau \to 0$. Из уравнений (2.5) можно получить, что с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$ плотность газа и радиальная составляющая скорости выражаются через функцию F:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{F}}, \quad v = \frac{c(\varepsilon)}{\tau^2} + \frac{F'}{2\tau\,\mathrm{Pr}} \tag{3.1}$$

Зависимость $c(\varepsilon)$ пока оставим неизвестной. Эта величина должна определяться из условия $v(\tau,\varepsilon) \le O(1)$ при $\tau \le O(1)$, вытекающего из условий сращивания с решением в области G_1.

В главном приближении функция $F(\tau,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$F'' + \frac{1}{\tau}F'\left(1 + \frac{1}{F}\tau^2\left(\frac{1}{2} - v\right)\mathrm{Pr}\right) + \frac{\varepsilon\,\mathrm{Pr}}{2F}\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = 0 \tag{3.2}$$

Асимптотическое поведение решения уравнения (3.2) при $\tau \to 0$ имеет вид

$$F \sim \alpha_0 + \alpha \ln \tau \tag{3.3}$$

Из условия, что при $\tau \to 0$ функция $F(\tau,\varepsilon)$ должна сращиваться с решением в области G_1, а ее величина сохранять порядок $O(1)$ при $\tau \sim O(\varepsilon)$, следует

$$\alpha_0\left(\mathrm{M}_1, F_*, \mathrm{Pr}\right) \sim O(1), \quad \alpha = \frac{\alpha_1\left(\mathrm{M}_1, F_*, \mathrm{Pr}\right)}{\ln \varepsilon}, \quad \alpha_1 \sim O(1) \tag{3.4}$$

С учетом соотношений (3.3), (3.4) функции $F(\tau,\varepsilon)$, $\gamma(\tau,\varepsilon)$ представим в виде степенного ряда по малому параметру $1/\ln\varepsilon$:

$$\begin{gathered} F(\tau,\varepsilon) = F_0(\tau) + \frac{\alpha_1}{\ln\varepsilon}F_1(\tau) + \frac{1}{\ln^2\varepsilon}F_2(\tau) + O\left(\frac{1}{\ln^3\varepsilon}\right) \\ \gamma(\tau,\varepsilon) = \gamma_0(\tau) + \frac{1}{\ln\varepsilon}\gamma_1(\tau) + O\left(\frac{1}{\ln^2\varepsilon}\right) \end{gathered} \tag{3.5}$$

Таким образом, в главном приближении решение для температуры и циркуляции зависит только от автомодельной переменной τ. Функция F_0 удовлетворяет нелинейному уравнению

$$F_0'' + \frac{1}{\tau}F_0'\left(1 + \frac{1}{F_0}\tau^2\left(\frac{1}{2} - v\right)\mathrm{Pr}\right) = 0 \tag{3.6}$$

и краевым условиям

$$F_0(0) = \alpha_0, \quad F_0'(0) = 0, \quad F_0(\infty) = 1 \tag{3.7}$$

Единственным решением для $F_0(\tau)$, удовлетворяющим (3.6), (3.7), является

$$F_0(\tau) = \alpha_0 = 1 \tag{3.8}$$

Согласно выражениям (3.1),

$$\rho(\tau,\varepsilon) = 1 - \frac{\alpha_1}{2\ln\varepsilon}F_1(\tau) + O\left(\ln^{-2}\varepsilon\right), \quad v(\tau,\varepsilon) = \frac{1}{\ln\varepsilon}v_1(\tau) + O\left(\ln^{-2}\varepsilon\right)$$

Функции F_1, γ_0 удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям

$$F_1'' + \frac{F_1'}{\tau}\left(1 + \frac{\mathrm{Pr}}{2}\tau^2\right) = 0, \quad \gamma_0'' - \frac{\gamma_0'}{\tau}\left(1 - \frac{\tau^2}{2}\right) = 0 \tag{3.9}$$

и граничным условиям

$$F_1(\infty) = 0, \quad \gamma_0(\infty) = 0 \tag{3.10}$$

Решение уравнений (3.9), удовлетворяющих условиям (3.3)–(3.5) и (3.10):

$$F_1 = \int\limits_{\infty}^{x}\frac{e^{-x^2/4}}{x}dx, \quad \gamma_0 = Ae^{-\tau^2/4}, \tag{3.11}$$

где $x = \tau\sqrt{\mathrm{Pr}}$. В главном приближении распределение циркуляции отличается от случая несжимаемой жидкости на постоянный множитель $A\left(\mathrm{M}_1, F_*, \mathrm{Pr}\right)$ – неизвестную константу, которая определяется из условия асимптотического сращивания решения (3.11) с решением в области G_1.

Из представлений (3.1) и (3.5), решения (3.11) и условия $v \le O(1)$ при $\tau \sim O(\varepsilon)$ (область перекрытия с решением в G_1)

$$v_1(\tau) = -\frac{\alpha_1}{2\,\mathrm{Pr}\,\tau^2}(1 - \tau F_1')$$

Для следующего приближения функций, определяющих температуру и циркуляцию, имеем

$$\begin{gathered} F_2'' + \frac{F_2'}{\tau}\left(1 + \frac{\mathrm{Pr}}{2}\tau^2\right) = \frac{\alpha_1 \mathrm{Pr}}{2}[F_1 + \tau F_1'(\alpha_1 F_1 + 2v_1)] \\ \gamma_1'' - \frac{\gamma_1'}{\tau}\left(1 - \frac{\tau^2}{2}\right) = -\frac{\alpha_1 F_1'}{2}\left(\gamma_0' - \frac{2\gamma_0}{\tau}\right) + \frac{\tau\gamma_0'}{2}(\alpha_1 F_1 + 2v_1) \end{gathered} \tag{3.12}$$

Граничные условия для уравнений (3.12)

$$F_2(\infty) = 0, \quad \gamma_1(\infty) = 0 \tag{3.13}$$

В решение уравнений (3.12) с граничными условиями (3.13) войдут еще две пока неизвестные константы c_1 и c_2.

$$\begin{gathered} F_2 = \alpha_1\left[F_1 \ln x - 2\int_\infty^x \frac{e^{-x^2/4}}{x}\ln x dx + \frac{\alpha_1}{4}\left(4\int_\infty^x \frac{e^{-x^2/2}}{x}dx - \frac{1}{2}\int_\infty^x xe^{-x^2/4}\ln^2 x dx - \right.\right. \\ \left.\left. - e^{-x^2/4}\ln^2 x - 2F_1 e^{-x^2/4} + F_1^2\right)\right] + c_2 F_1 \\ \gamma_1 = \frac{\alpha_1 A}{2}\left\{\left(1 + \mathrm{Pr} + \frac{1}{\mathrm{Pr}} + \frac{\tau^2}{2}\right)e^{-\tau^2/4}\int_\infty^\tau \frac{e^{-\tau^2 \mathrm{Pr}/4}}{\tau}d\tau - \left(2 + \mathrm{Pr} + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\int_\infty^\tau \frac{e^{-\tau^2(1+\mathrm{Pr})/4}}{\tau}d\tau + \right. \\ \left. + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left[\int_\infty^\tau \frac{e^{-\tau^2/4}}{\tau}d\tau + e^{-\tau^2/4}\left(e^{-\tau^2\mathrm{Pr}/4} - \ln\tau\right)\right]\right\} + c_1\gamma_0 \end{gathered} \tag{3.14}$$

В двух первых приближениях при $\tau \to \infty$ функции F, γ, ρ отличаются от своих предельных значений (2.6) на экспоненциально малые величины. Безразмерная радиальная составляющая скорости $v \to 0$ затухает по степенному закону $v \sim \alpha_1 / (\tau^2 \ln\varepsilon)$. Такое поведение $v(\tau)$ соответствует тому, что расширение области G_2 с течением времени индуцирует при $\tau \to \infty$ поле радиальных скоростей, эквивалентных источнику (или стоку) с отношением интенсивности источника к циркуляции вихря, неограниченно убывающему при возрастании числа Рейнольдса, малому по сравнению с характерной циркуляцией вихря Γ_* и зависящему от времени

$$Q = \lim_{\tau\to\infty} 2\pi r \frac{r}{t} v = -\frac{\pi\alpha_1\nu_0}{\mathrm{Pr}\ln\varepsilon} \tag{3.15}$$

В области G_3 возникает задача о распространении возмущений от источника, который "включается" в момент времени $t = 0$ и на больших временах имеет вид (3.15). Так как со временем $\varepsilon(t)$ уменьшается, то интенсивность источника убывает. Из асимптотики (3.15) и уравнений (2.1) следует, что радиальная скорость v и возмущения температуры $\tilde{T} = T - 1$, плотности $\tilde{\rho} = \rho - 1$ и давления $\tilde{p} = p - 1$ имеют порядок $O\left(\mathrm{M}_1^2\,\varepsilon^2/\mathrm{Re}^2\ln\varepsilon\right)$ и удовлетворяют линейным уравнениям Эйлера, которые преобразуются к виду

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r}\right)-\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\tilde p}{\partial r}\right)-\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\tilde p}{\partial t^2}=0,\quad \tilde\rho=\frac{1}{æ}\tilde p,\quad \tilde T=\frac{æ-1}{æ}\tilde p$$

При $r\ge a_0t$ характеристики течения соответствуют невозмущенному состоянию газа. В отличие от главного приближения уравнений в областях G_1 (4.12) и G_2 (3.5), уравнения в области G_3 не сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям и решение не является автомодельным.

Из представлений (3.5), решений (3.8) и (3.11) следует, что на масштабе $\tau\sim O(\varepsilon)$, т.е. в области G_1, первые два приближения становятся членами одного порядка малости. Для проведения процедуры сращивания решения в области G_2 с решением в области G_1 выпишем поведение функций F, γ при $\tau\to0$ (внутренний предел внешнего разложения):

$$\begin{gathered}F=1+\frac{\alpha_1}{\ln\varepsilon}\left(\ln\tau+c_F+\frac{1}{2}\ln\mathrm{Pr}\right)+\\
+\frac{\alpha_1}{\ln^2\varepsilon}\left\{\left[\frac{c_2}{\alpha_1}+c_F+\frac{\alpha_1}{2}(1+c_F)\right]\ln\tau+O(1)\right\}+O\left(\ln^{-3}\varepsilon\right)\\
\gamma=A\left\{1+\frac{\alpha_1}{2\ln\varepsilon}\left[-\ln\tau+\frac{2c_1}{\alpha_1}+\frac{1-\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}}c_F+\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{Pr}+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\ln\frac{\mathrm{Pr}}{1+\mathrm{Pr}}-\right.\right.\\
\left.\left.-\frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{Pr})+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right]\right\}+O\left(\ln^{-2}\varepsilon\right),\end{gathered}\tag{3.16}$$

где $c_F=-\ln2+c/2$, $c=0.5772$ – постоянная Эйлера.

Первое из соотношений (3.16), переписанное в переменных η $(\tau=\varepsilon\eta)$, определяет граничные условия для функции F в области G_1 при $\eta\to\infty$ (внешний предел внутреннего разложения). С точностью до членов порядка $O(1/\ln\varepsilon)$

$$F=1+\alpha_1+\frac{\alpha_1}{\ln\varepsilon}\left(\ln\eta+2c_F+\frac{1}{2}\ln\mathrm{Pr}+\frac{\alpha_1}{2}(1+c_F)+\frac{c_2}{\alpha_1}\right)+O\left(\ln^{-2}\varepsilon\right)\tag{3.17}$$

Из-за логарифмического характера особенности в решении задачи при $\tau\to0$ (3.16) возникает ситуация, когда для сращивания решений в переменных области G_1 (3.17) с точностью до членов $O\left(\ln^{-n}\varepsilon\right)$ необходимо в области G_2 построить решение (3.5), (3.8), (3.11), (3.14) с точностью до $O\left(\ln^{-(n+1)}\varepsilon\right)$.

4. Асимптотическое решение уравнений в области G_1. Решение уравнений (2.3) будем искать, пренебрегая в них членами порядка $O\left(\varepsilon^2\right)$. Тогда для функций F и γ имеем

$$\begin{gathered}F''+\frac{F'}{\eta}+2\frac{(æ-1)\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{M}_1^2}{\eta^2}\sqrt{F}\left(\gamma'-\frac{2\gamma}{\eta}\right)^2=0\\
\gamma''-\frac{\gamma'}{\eta}+\frac{F'}{2F}\left(\gamma'-\frac{2\gamma}{\eta}\right)=0,\quad\gamma=1,\quad F=F_*\quad(\eta=1)\end{gathered}\tag{4.1}$$

Легко проверить, что циркуляция $\gamma(\eta)$, не имеющая особенность при $\eta \to \infty$ и удовлетворяющая условию $\gamma(1) = 1$, выражается через функцию $F(\eta)$:

$$\gamma(\eta) = b\eta^2 \int\limits_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3\sqrt{F}}, \quad b = \left(\int\limits_{1}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3\sqrt{F}} \right)^{-1} \tag{4.2}$$

Подстановка представления (4.2) во второе уравнение (4.1) приводит к тождеству. С учетом уравнений (4.1) из уравнений (2.3) следует, что $p(\eta)$ и $\rho(\eta)$ также выражаются через интегралы функции $F(\eta)$. Сосредоточимся на решении первого уравнения (4.1), т.к. остальные гидродинамические функции могут быть найдены по виду функции F. Подставляя представления (4.2) в первое уравнение (4.1) и учитывая граничное условие и условие сращивания решений, имеем

$$F'' + \frac{F'}{\eta} + 2\frac{(æ - 1) b^2 \Pr M_1^2}{\eta^4\sqrt{F}} = 0, \quad F(1) = F_* \tag{4.3}$$

$$\lim_{\eta\to\infty} F(\eta) = 1 + \alpha_1 + \frac{\alpha_1}{\ln\varepsilon}\left(\ln\eta + 2c_F + \frac{1}{2}\ln\Pr + \frac{\alpha_1}{2}(1 + c_F) + \frac{c_2}{\alpha_1} \right) + O\left(\ln^{-2}\varepsilon\right) \tag{4.4}$$

Введем новую зависимую переменную $y(\eta)$

$$F(\eta) = \left[2(æ - 1) b^2 \Pr \mathrm{M}_1^2\right]^{2/3} y(\eta) = F_* \frac{y(\eta)}{y(1)} \tag{4.5}$$

Выпишем уравнения и краевые условия, которым с точностью до $O\left(1/\ln^2\varepsilon\right)$ удовлетворяет функция $y(\eta)$. Из задачи (4.3) с учетом замены (4.5) приходим к уравнению

$$y'' + \frac{y'}{\eta} + \frac{1}{\eta^4\sqrt{y}} = 0 \tag{4.6}$$

Используя определение величины b и замену (4.5), получаем

$$y(1) = \lambda\left(\int\limits_{1}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3\sqrt{y}} \right)^4, \tag{4.7}$$

где $\lambda = F_* / [2(æ - 1)\Pr \mathrm{M}_1^2]^2 = 1/[2(æ - 1)\Pr \mathrm{M}_*^2]^2$, $\mathrm{M}_* = w_*/a_*$, a_* — скорость звука в газе у поверхности цилиндра. Из асимптотики (4.4) получаем

$$\lim_{\eta\to\infty} y(\eta) = \frac{y(1)}{F_*}\left[1 + \alpha_1 + \frac{\alpha_1}{\ln\varepsilon}\left(\ln\eta + 2c_F + \frac{1}{2}\ln\Pr + \frac{\alpha_1}{2}(1 + c_F) + \frac{c_2}{\alpha_1} \right) \right] \tag{4.8}$$

Уравнение (4.6) можно переписать в виде

$$(y'\eta)' + \frac{1}{\eta^3\sqrt{y}} = 0 \tag{4.9}$$

Откуда

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3\sqrt{y}} = y'(1) - \lim_{\eta\to\infty} \eta y'(\eta)$$

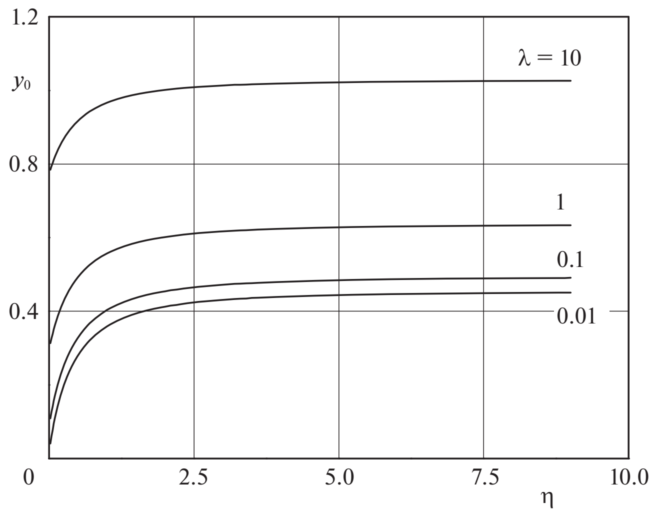


Рис. 1.

Следовательно, для задачи (4.6)–(4.8) вместо соотношения (4.7) можно использовать граничное условие

$$y(1) = \lambda\left(y'(1) - \lim_{\eta\to\infty} \eta y'(\eta)\right)^4 \tag{4.10}$$

Асимптотическое поведение решения уравнения (4.6) при $\eta \to \infty$ имеет вид

$$y(\eta) \sim q_0 + q_1 \ln \eta \tag{4.11}$$

Решение уравнений (4.6), (4.8), (4.10) будем искать в виде асимптотического ряда

$$y(\eta) = y_0(\eta) + \frac{1}{\ln \varepsilon} y_1(\eta) + O\left(\frac{1}{\ln^2 \varepsilon}\right) \tag{4.12}$$

Из решений (4.8), (4.11), (4.12) следует, что $y_0(\eta)$ не содержит логарифмического члена при $\eta \to \infty$. Уравнение и граничные условия для функции $y_0(\eta)$ имеют вид

$$y_0'' + \frac{y_0'}{\eta} + \frac{1}{\eta^4 \sqrt{y_0}} = 0 \tag{4.13}$$

$$y_0(1) = \lambda(y_0'(1))^4 \tag{4.14}$$

$$\lim_{\eta\to\infty} \eta y_0' = 0 \tag{4.15}$$

При заданных параметрах течения около цилиндра параметр λ фиксирован. Тогда если в дополнение к граничным условиям (4.14), (4.15) задавать произвольное значение $y_0'(1)$, то система (4.13)–(4.15) будет переопределенной. Варьируя $y_0'(1)$ и решая задачу Коши, можно найти такое его значение, при котором система (4.13)–(4.15) разрешима. В качестве примеров на рис. 1 приведены решения (снизу вверх) при $\lambda = 0.01$ и $y_0'(1) = 1.1731$, $\lambda = 0.1$ и $y_0'(1) = 0.9754$, $\lambda = 1$ и $y_0'(1) = 0.7396$, $\lambda = 10$ и $y_0'(1) = 0.5275$.

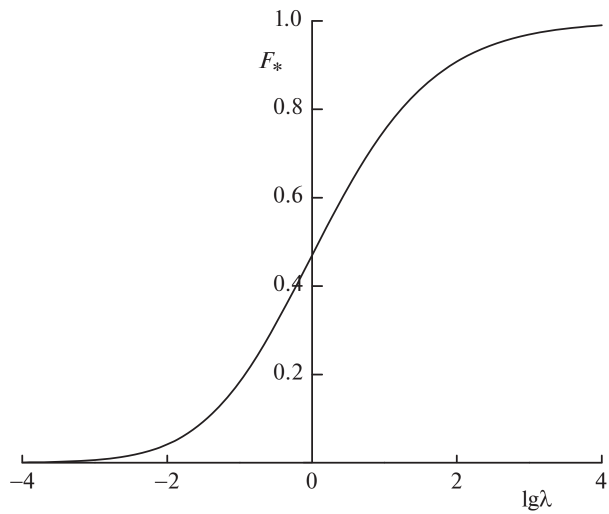


Рис. 2.

Из (4.4), (4.5) следует, что параметр α_1 определяется главным приближением решения в области G_1

$$1 + \alpha_1 \left(F_*, \lambda\right) = F_* \frac{y_0(\infty)}{y_0(1)} \tag{4.16}$$

При $F_* \sim O(1)$ и $\lambda \sim O(1)$ параметр α_1 есть также величина порядка $O(1)$, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Взаимодействие температурного и вихревого полей в области G_1 приводит к переходу энергии вращательного движения газа в энергию тепловую. Относительная температура газа $T(\eta)/T_*$ вблизи поверхности цилиндра возрастает. Зависимость $F_* = \tilde{F}_*(\lambda)$, представленная на рис. 2, соответствует $\alpha_1\left(F_*, \lambda\right) = 0$. Если $F_* > \tilde{F}_*(\lambda)$, то поток тепла поступает из области G_1 в область G_2; в противном случае поток тепла меняет свое направление.

Согласно граничному условию (4.8) функция $y_1(\eta)$ должна иметь логарифмическую особенность при $\eta \to \infty$. Из-за этой особенности оба слагаемых в асимптотике (4.12) становятся одного порядка при переходе из области G_1 в область G_2. Сращивание решений становится возможным, если в представлении (4.12) учитываются оба члена асимптотического разложения.

Уравнения и краевые условия для функции $y_1(\eta)$:

$$y_1'' + \frac{y_1'}{\eta} - \frac{y_1}{2\eta^4 y_0^{3/2}} = 0 \tag{4.17}$$

$$y_1(1) = 4\frac{y_0(1)}{y_0'(1)}\left(y_1'(1) - \frac{\alpha_1 y_0(1)}{F_*}\right) \tag{4.18}$$

$$\lim_{\eta\to\infty} \eta y_1' = \frac{\alpha_1 y_0(1)}{F_*} \tag{4.19}$$

При произвольном значении $y_1'(1)$ система (4.17)–(4.19) также является переопределенной. Варьируя $y_1'(1)$, можно найти его значение, при котором выполняется условие (4.19).

С точностью до членов порядка $O\left(\ln^{-2}\varepsilon\right)$ решение для $F(\eta,\lambda)$ в области G_1 можно считать известным. При $\eta\to\infty$ это решение имеет вид

$$F(\eta)=1+\alpha_1(F_*,\lambda)+\frac{1}{\ln\varepsilon}\left(\alpha_1(F_*,\lambda)\ln\eta+h(F_*,\lambda)\right),\tag{4.20}$$

где

$$h=(1+\alpha_1)\left[\frac{1}{y_0(\infty)}\lim_{\eta\to\infty}\left(y_1(\eta)-\frac{\alpha_1 y_0(1)}{F_*}\ln\eta\right)-\frac{y_1(1)}{y_0(1)}\right]\tag{4.21}$$

Используя решения (4.4), (4.20), (4.21) можно найти неизвестный коэффициент c_2 в асимптотическом представлении для функции F в области G_2.

Через известные функции $y_0(\eta)$ и $y_1(\eta)$ можно из представлений (4.2) и уравнения (4.9) выразить с точностью до членов $O\left(\ln^{-2}\varepsilon\right)$ решение для циркуляции

$$\gamma(\eta)=\frac{\eta^2\left(\eta y'(\eta)-\dfrac{1}{\ln\varepsilon}\dfrac{\alpha_1 y_0(1)}{F_*}\right)}{y'(1)-\dfrac{1}{\ln\varepsilon}\dfrac{\alpha_1 y_0(1)}{F_*}}\tag{4.22}$$

Интегрируя два раза выражение (4.2) по частям, с учетом (4.20) получаем при $\eta\to\infty$

$$\gamma(\eta)=\frac{b}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{F}}-\frac{1}{\ln\varepsilon}\frac{\alpha_1}{4F^{3/2}}+O\left(\frac{1}{\ln^2\varepsilon}\right)\right\}\tag{4.23}$$

Откуда внешний предел внутреннего разложения представляется формулой

$$\gamma(\eta)=\frac{(æ-1)\Pr \mathrm{M}_1^2}{(y_0'(1))^3}\lim_{\eta\to\infty}\left[k_\eta^{-1/2}-\frac{1}{\ln\varepsilon}\left(\frac{\alpha_1}{4}k_\eta^{-3/2}+\frac{3}{4}\frac{y_1(1)}{y_0(1)}k_\eta^{-1/2}\right)\right],\tag{4.24}$$

где $k_\eta=1+\alpha_1+(\alpha_1\ln\eta+h)/\ln\varepsilon$.

Соотношение (4.24), переписанное в переменных τ, определяет вид внутреннего предела внешнего разложения для функции γ в области G_2

$$\gamma(\eta)=\frac{(æ-1)\Pr \mathrm{M}_1^2}{(y_0'(1))^3}\lim_{\tau\to 0}\left[k_\tau^{-1/2}-\frac{1}{\ln\varepsilon}\left(\frac{\alpha_1}{4}k_\tau^{-3/2}+\frac{3}{4}\frac{y_1(1)}{y_0(1)}k_\tau^{-1/2}\right)\right],\tag{4.25}$$

где $k_\tau=1+(\alpha_1\ln\tau+h)/\ln\varepsilon$.

Раскладывая (4.25) в ряд по степеням $1/\ln\varepsilon$, получим

$$\gamma(\eta)=\frac{(æ-1)\Pr \mathrm{M}_1^2}{(y_0'(1))^3}\left[1-\frac{1}{\ln\varepsilon}\left(\frac{\alpha_1}{2}\ln\tau+\frac{2h+\alpha_1}{4}+\frac{3}{4}\frac{y_1(1)}{y_0(1)}\right)+O\left(\ln^{-2}\varepsilon\right)\right]\tag{4.26}$$

Сравнение асимптотику (4.26) с (3.16) позволяет определить неизвестные константы A и c_1, входящие в представление величин в области G_2. Для константы A получаем соотношение

$$A = \frac{(æ - 1)\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{M}_1^2}{(y_0'(1))^3} \tag{4.27}$$

Выражение (4.27) можно переписать в виде

$$A = \left(2\sqrt{\frac{y_0(1)}{F_*}}\int_1^{\infty}\frac{d\eta}{\eta^3\sqrt{y_0(\eta)}}\right)^{-1} \tag{4.28}$$

Из уравнений и граничных условий (4.13)–(4.15) следует, что $y_0'(\eta) > 0$. Заменяя в подынтегральном выражении (4.28) $y_0(\eta)$ на меньшую величину $y_0(1)$, приходим к неравенству

$$A > \left(\frac{2}{\sqrt{F_*}}\int_1^{\infty}\frac{d\eta}{\eta^3}\right)^{-1} = \sqrt{F_*} \tag{4.29}$$

В случае $F_* \geq 1$ температура газа во всем пространстве будет превосходить температуру невозмущенного газа ($F \geq 1$), поскольку нет причин, противодействующих нагреву газа вследствие перехода энергии вращательного движения в тепло. В этом случае из (4.29) следует, что $A > 1$. Можно показать, что тот же результат будет иметь место при произвольной монотонно возрастающей зависимости $\mu(T)$. Это позволяет сформулировать *теорему о скачке циркуляции*: если $F_* \geq 1$ и $d\mu/dT > 0$, то циркуляция в сжимаемом газе в области $r \sim \sqrt{\nu_0 t}$ будет превышать циркуляцию в несжимаемой жидкости при тех же r и t (сравнение приведено на рис. 5, см. ниже). Название теоремы связано с тем, что внутренний предел внешнего решения ($\tau \to 0$) для циркуляции $\gamma_0(\tau)$ не совпадает со значением циркуляции на поверхности цилиндра.

Пользуясь промежуточными асимптотиками температуры (3.17) и циркуляции (4.23), можно в главном приближении вычислить кинетическую энергию течения

$$E = \pi\int_0^{\infty}\frac{\rho\Gamma^2}{r}dr \approx \pi\rho_0\Gamma_*^2A^2\int_1^{\varepsilon^{-1}}\left(1 + \alpha_1 + \alpha_1\frac{\ln\eta}{\ln\varepsilon}\right)^{-3/2}d\ln\eta = \frac{2A^2}{\alpha_1}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_1}}\right)E_0, \tag{4.30}$$

где $E_0 = \pi\rho_0\Gamma_*^2|\ln\varepsilon|$ – кинетическая энергия для случая несжимаемой жидкости в тот же момент времени. Почти вся энергия приходится на течение в промежуточной области $r_* \ll r \ll \sqrt{\nu_0 t}$ и со временем неограниченно растет вместе с размером этой области. В случае $M_1 = F_* = \mathrm{Pr} = 1$, численное решение дает значения констант $A \approx 1.19$, $\alpha_1 = 0.88$. Кинетическая энергия течения сжимаемого газа оказывается меньше, чем у несжимаемой жидкости: в пределе $\varepsilon \to 0$ из (4.30) получается $E/E_0 \approx 0.87$.

5. Составное решение. С точностью до членов $O\left(\ln^{-2}\varepsilon\right)$ равномерно пригодное решение для функций F и γ в области $G_1 \cap G_2$ представляется в виде [10]

$$\hat{F}(\tau) = \frac{F^{(1)}(\tau)\,F^{(2)}(\tau)}{F^{(2)}_{\text{пред}}(\tau)}, \quad \hat{\gamma}(\tau) = \frac{\gamma^{(1)}(\tau)\,\gamma^{(2)}(\tau)}{\gamma^{(2)}_{\text{пред}}(\tau)},$$

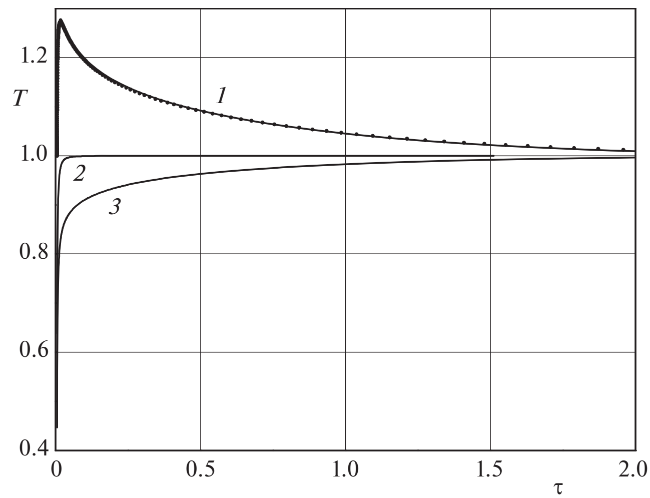


Рис. 3.

где $F^{(1)}(\tau)$ и $\gamma^{(1)}(\tau)$ – решения (4.5), (4.12), (4.22) в области G_1, переписанные в переменных τ, $F^{(2)}(\tau)$ и $\gamma^{(2)}(\tau)$ – решения (3.5) в области G_2, $F^{(2)}_{\text{пред}}(\tau)$ и $\gamma^{(2)}_{\text{пред}}(\tau)$ – внутренний предел внешнего разложения (3.16).

На рис. 3–4 представлено поведение зависимостей $\hat{T}(\tau) = \sqrt{\hat{F}(\tau)}$ и $\hat{\gamma}(\tau)$, соответствующих случаю $M_1 = \mathrm{Pr} = 1$, $1/\ln\varepsilon = -0.189$ и трем разным значениям F_*: кривые *1* соответствуют значениям параметров $F_* = 1$, $\alpha_1 > 0$; *2* – $F_* = 0.407$, $\alpha_1 = 0$; *3* – $F_* = 0.2$, $\alpha_1 < 0$; пунктирами изображено численное решение уравнений Навье–Стокса при $F_* = 1$ (см. разд. 8). В случае $\alpha_1 > 0$ температура имеет максимум в области G_1; при $\alpha_1 \le 0$ – монотонно возрастает при удалении от поверхности цилиндра. Переход энергии вращательного движения в тепловую вызывает рост температуры газа в области G_1, в области G_2 – влияние на изменение температуры газа в основном оказывает диффузия тепла. Рост температуры газа вызывает увеличение коэффициента динамической вязкости $(\mu \sim T)$ и появление градиента вязкости $(\partial\mu/\partial r \sim \partial T/\partial r)$, что в случае $\alpha_1 > 0$ приводит к немонотонному изменению циркуляции вращательного движения вдоль координаты r. По мере удаления от поверхности цилиндра завихренность

$$\omega = \frac{1}{\eta}\frac{\partial\gamma}{\partial\eta}$$

дважды меняет свой знак. Имеется участок, на котором генерируется положительная завихренность. В случае, соответствующем рис. 3 при $F_* = 1$, он включает $2.3\varepsilon < \tau < 0.36$. Из второго уравнения системы (4.1) можно получить соотношение

$$\frac{\partial\omega}{\partial\eta} = \frac{b}{2\eta^2 F^{3/2}}\frac{\partial F}{\partial\eta},$$

из которого следует, что экстремум завихренности в области G_1 достигается в той же точке ($\tau \approx 3.4\varepsilon$, рис. 3), что экстремум температуры. Циркуляция окружной скорости

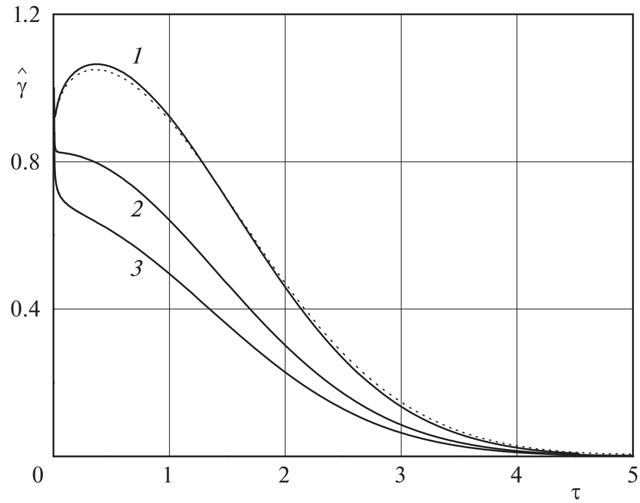


Рис. 4.

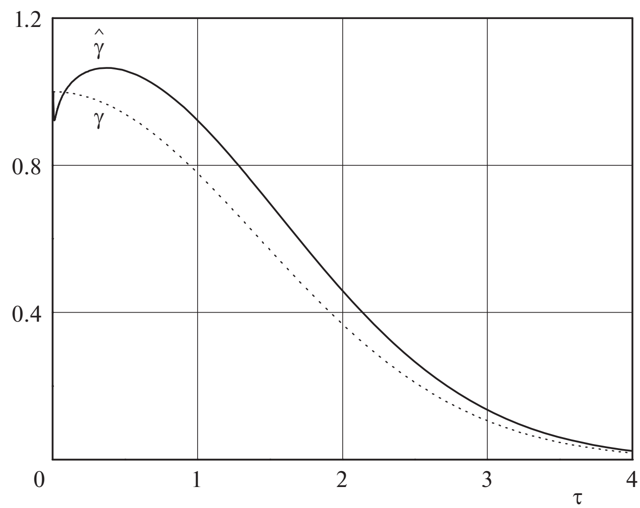


Рис. 5.

на участке 0.084–0.099 < τ < 0.72–0.77 превосходит циркуляцию около поверхности цилиндра. Этот эффект не наблюдается в несжимаемой жидкости, в которой изменение циркуляции вдоль координаты r – монотонное, а в пределах области G_1 циркуляция постоянна. На рис. 5 приведено сравнение $\hat{\gamma}(\tau)$ для сжимаемого газа при $M_1 = F_* = \mathrm{Pr} = 1$, $1/\ln\varepsilon = -0.189$ (сплошная кривая) и $\gamma(\tau) = e^{-\tau^2/4}$ для несжимаемой жидкости (пунктир).

6. Решение задачи при малых числах M_1. При $\lambda \to \infty$, что соответствует малым числам M_1, можно получить решение для F в аналитическом виде. Из соотношения (4.3) и граничного условия на поверхности цилиндра следует, что с точностью до $O\left(\lambda^{-1}\right)$ в области G_1

$$F = F_*\left[1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) + d\ln\eta\right] \tag{6.1}$$

В области G_2 по-прежнему выполняется

$$F = 1 + \frac{\alpha_1}{\ln\varepsilon}\ln\tau \tag{6.2}$$

Асимптотическое сращивание решений (6.1) и (6.2) определяет неизвестные константы α_1 и d

$$\alpha_1 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)F_* - 1, \quad d = \frac{\alpha_1}{F_*\ln\varepsilon}$$

Аналогичным путем определяется распределение циркуляции. Из (4.27) следует, что в главном приближении

$$A = \sqrt{F_*}$$

7. Решение задачи при больших числах M_1**.** В предыдущих пунктах асимптотическое решение задачи при числах $\mathrm{M}_1 \sim O(1)$ получено при условии, что $\varepsilon \to 0$. В этом случае и величина $1/\ln\varepsilon \to 0$. Вместе с тем, при реально достижимых больших временах (малых ε) величина $1/\ln\varepsilon$ может перестать быть пренебрежимо малой, например при $\varepsilon = 10^{-4}$: $1/\ln\varepsilon \approx -0.1$.

Анализ результатов при $\mathrm{M}_1 \sim O(1)$ указывает на то, что с ростом M_1 величина коэффициента α_1 также растет. Поэтому при больших числах M_1 может наступить ситуация, когда коэффициент $\alpha_1/\ln\varepsilon$ может перестать быть малой величиной. Определим условия, при котором $\alpha_1/\ln\varepsilon$ становится величиной порядка $O(1)$. Для этого рассмотрим решение при $\lambda \ll 1$.

Функции $y_0(1)$ и $y_0'(1)$ связаны соотношением (4.14) и поэтому имеют разный порядок малости по параметру λ. Для определения порядков этих функций проведем численное решение задачи (4.13)–(4.15) при малых λ. На рис. 6 показано решение этих уравнений при $\lambda = 10^{-6}$ (сплошная кривая) и $\lambda = 10^{-3}$ (точки). Видно, что зависимости $y_0(\eta, \lambda)$ в этих случаях близки друг к другу. В пределе при $\lambda \to 0$ обозначим значение $y_0(\eta)$ через $y_{00}(\eta)$. Из численного решения получаются величины, которые имеют порядок $O(1)$: $y_{00}'(1) = d_1 \approx 1.3641$, $y_{00}(\infty) = d_2 = 0.4450$. Подставляя эти значения в формулу (4.16), получаем

$$\frac{\alpha_1}{\ln\varepsilon} \sim \frac{F_*}{\ln\varepsilon}\frac{y_{00}(\infty)}{y_{00}(1)} = \frac{1}{\lambda\ln\varepsilon}\frac{F_* d_2}{d_1^4} = \frac{1}{\ln\varepsilon}\frac{d_2}{d_1^4}\left[2(æ - 1)\Pr \mathrm{M}_1^2\right]^2 \sim \frac{\mathrm{M}_1^4}{\ln\varepsilon}$$

Таким образом, соотношения, полученные в разд. 2–4, справедливы при $\mathrm{M}_1^4/\ln\varepsilon \ll 1$. Построим решение при $\mathrm{M}_1^4/\ln\varepsilon \sim O(1)$.

Так же, как и в случае малых возмущений, в области G_2 с точностью до членов порядка $O\left(M_1^2\varepsilon^2\right)$ статическое давление $p = 1$ при $\tau \sim O(1)$ и имеет координатную особенность $p \sim \mathrm{M}_1^2\varepsilon^2/\tau^2$ при $\tau \to 0$. Плотность, радиальная компонента скорости и

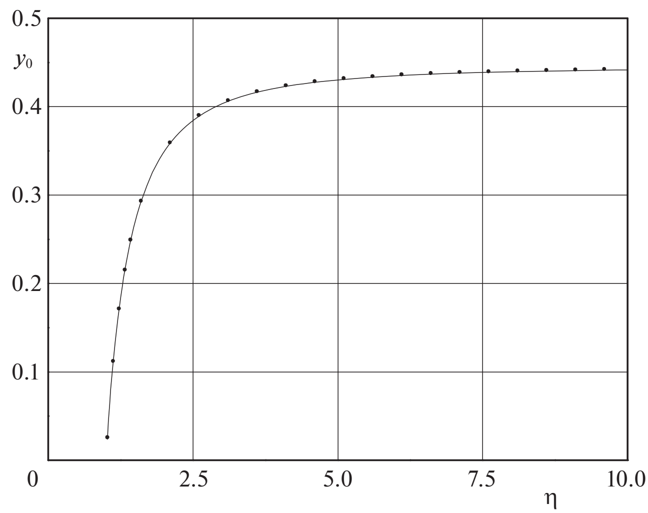


Рис. 6.

функция F подчиняются соотношениям (3.1), (3.2). Асимптотическое поведение решения уравнения (3.2) при $\tau \to 0$ имеет вид

$$F \sim \alpha_0 + \frac{M_1^4}{\ln\varepsilon}\tilde{\alpha}_1 \ln\tau \tag{7.1}$$

Здесь $\alpha_0 \geq O(1)$, $\tilde{\alpha}_1 \sim O(1)$. Так как функции F и v согласно (7.1) зависят от τ и $1/\ln\varepsilon$, уравнения для их определения в области G_2 в главном приближении будут иметь вид

$$F'' + \frac{1}{\tau}F'\left(1 + \frac{1}{F}\tau^2\left(\frac{1}{2} - v\right)\mathrm{Pr}\right) = 0, \qquad v = -\frac{1}{2\,\mathrm{Pr}\,\tau^2}\left(\frac{M_1^4\,\tilde{\alpha}_1}{\ln\varepsilon} - \tau F'\right) \tag{7.2}$$

Неизвестные коэффициенты α_0 и $\tilde{\alpha}_1$ определяют решение краевой задачи для уравнений (7.2) и должны выбираться из условия $F = 1$ при $\tau \to \infty$ и из сращивания с решением в области G_1.

Внешний предел внутреннего разложения для функции y в области G_1 определяется из соотношения (7.1). При $\eta \to \infty$

$$y(\eta) \sim \frac{y(1)}{F_*}\left(\alpha_0 + M_1^4\,\tilde{\alpha}_1 + \frac{M_1^4}{\ln\varepsilon}\tilde{\alpha}_1 \ln\eta\right) \tag{7.3}$$

Формула (7.3) указывает на то, что функцию $y(\eta)$ можно представить в виде асимптотического ряда

$$y(\eta) = y_0(\eta) + \frac{M_1^4}{\ln\varepsilon}y_1(\eta)$$

Для определения $y_0(\eta)$ можно выписать задачу, совпадающую с (4.13)–(4.15) (рис. 1). Условие сращивания записывается в виде

$$\alpha_0 + M_1^4\,\tilde{\alpha}_1 = \frac{F_* y_{00}(\infty)}{(y'_{00}(1))^4}\lambda^{-1} = \frac{F_* d_2}{d_1^4}\lambda^{-1} \tag{7.4}$$

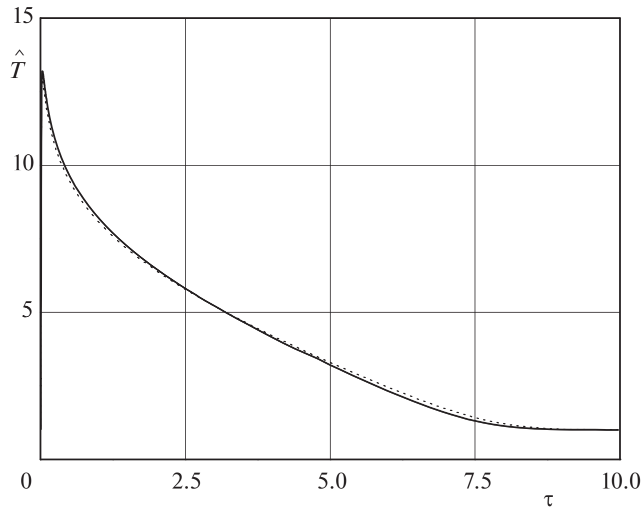


Рис. 7.

Краевую задачу (7.2) можно решать, варьируя начальные условия задачи Коши для уравнений (7.2). В качестве начального условия выступает значение F, задаваемое функцией (7.1). При этом коэффициенты α_0 и $\tilde{\alpha}_1$ связаны соотношением (7.4). Таким образом, варьируя только значение α_0 и определяя $\tilde{\alpha}_1$ с помощью (7.4), необходимо найти то значение α_0, при котором $F = 1$ при $\tau \to \infty$.

После того, как коэффициенты α_0 и $\tilde{\alpha}_1$ найдены, решается задача об определении функции $y_1(\eta)$ в области G_1. Алгоритм ее нахождения изложен в разд. 4.

Определение поля температур позволяет решить задачу о нахождении распределения циркуляции в области G_2. В главном приближении функция γ должна подчиняться уравнению

$$\gamma'' - \frac{\gamma'}{\tau} + \frac{F'}{2F}\left(\gamma' - \frac{2\gamma}{\tau}\right) + \frac{1}{F}\left(\frac{1}{2} - v\right)\tau\gamma' = 0$$

с граничными условиями $\gamma = A$ при $\tau \to 0$ и $\gamma = 0$ при $\tau \to \infty$.

В области G_1 для определения γ по-прежнему верна формула (4.2). Величина A выбирается из условия сращивания

$$A = \frac{(æ - 1)\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{M}_1^2}{d_1^3\sqrt{\alpha_0}}$$

На рис. 7–8 представлено поведение зависимостей $\hat{T}(\tau) = \sqrt{\hat{F}(\tau)}$ и $\hat{\gamma}(\tau)$ (разд. 5), соответствующих случаю $M_1 = 7$, $F_* = \mathrm{Pr} = 1$ и $1/\ln\varepsilon = -0.217$ (сплошные кривые), и численного решения уравнений Навье–Стокса при тех же значениях параметров (пунктир).

8. Численное решение уравнений Навье–Стокса. Асимптотическое решение задачи сравнивается с численным решением уравнений Навье–Стокса (2.1), которое производится методом конечного объема 2-го порядка точности по пространству с разностями против потока и 1-го порядка по времени в круговой области $r_* \le r \le 10^3 r_*$ на

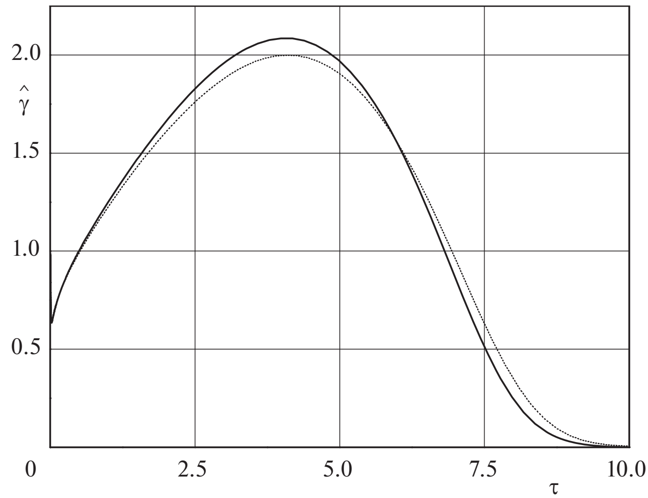


Рис. 8.

радиально-симметричной сетке с 24000 ячейками. Число ячеек составляет $N_\theta = 120$ вдоль окружности $r = \mathrm{const}$ и $N_r = 200$ вдоль радиуса; размер ячеек в радиальном направлении равен 10^{-3} у поверхности цилиндра $r = r_*$ и 20 на внешней границе расчетной области $r = 10^3 r_*$. На внешней границе ставится граничное условие невозмущенного потока; ошибка ввиду наличия радиального течения с ненулевым значением v оказывается приемлемой.

Все расчеты проведены при значениях безразмерных параметров $F_* = 1$, $\mathrm{Pr} = 1$, $\mathrm{Re} = 100$. Наибольший период времени, до которого был проведен расчет, соответствует значениям $\varepsilon = 0.005$, $1/|\ln\varepsilon| \approx 0.189$ при $\mathrm{M}_1 = 1$; $\varepsilon = 0.01$, $1/|\ln\varepsilon| \approx 0.217$ при $\mathrm{M}_1 = 7$. Дальнейший расчет в течение обозримого времени не позволяет существенно уменьшить значение малого параметра $1/\ln\varepsilon$ в разложениях (3.5), (4.12). Шаг по времени Δt таков, что $r_*/\sqrt{\nu_0 \Delta t} \approx 61.3$ при $\mathrm{M}_1 = 1$; $r_*/\sqrt{\nu_0 \Delta t} \approx 12.5$ при $\mathrm{M}_1 = 7$.

Распределения циркуляции и температуры, полученные из численного решения уравнений Навье–Стокса, подтверждают асимптотическое решение и приведены на рис. 3, 4, 7, 8.

Заключение. Хорошо известна задача о диффузии вихря и обратная задача о создании вихря с помощью вращающегося цилиндра в несжимаемой жидкости. Для данных задач характерен рост линейного размера вязкой области по закону $\sqrt{\nu_0 t}$. Распределение циркуляции по радиусу является монотонной функцией, растущей для задачи о диффузии вихря и убывающей для вращающегося цилиндра.

Задача о создании вихря в сжимаемом газе с вязкостью, зависящей от температуры, сходна с аналогичной задачей для случая несжимаемой жидкости размером вязкой области, но кардинально отличается от нее немонотонным распределением циркуляции внутри этой области. На распределение циркуляции, как это следует из уравнений (2.1), влияет не только коэффициент вязкости, но и градиент коэффициента вязкости. Именно благодаря этому влиянию в отличие от несжимаемой жидкости, когда вся завихренность вращающейся жидкости имеет одинаковый знак, в сжимаемом газе имеются режимы, когда завихренность по мере движения вдоль радиуса дважды меняет знак. При одинаковых ν_0 и t и при температуре цилиндра не ниже температуры невозмущенного газа ближние к цилиндру частицы в несжимаемой жидкости будут вращаться быстрее чем в сжимаемом газе, в дальнем поле ситуация будет противоположной (рис. 5). В случае сжимаемого газа с постоянной вязкостью распределение циркуляции будет близким к случаю несжимаемой жидкости.

Решения получены с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений на больших временах, когда размер вязкой области намного превосходит радиус цилиндра. Заметим, что в главном приближении решение для температуры и для циркуляции терпит разрыв на стыке областей G_1 и G_2, т.е. внешний предел внутреннего разложения не равен внутреннему пределу внешнего разложения; данное равенство обеспечивается только в следующих приближениях.

В области G_1 температура и циркуляция подчиняются стационарным уравнениям, но граничное условие, обеспечивающее сращивание решения с решением в области G_2, нестационарно. Поэтому решение в области G_1 будет параметрически зависеть от времени, в пределе $t \to \infty$ выходя на установившийся режим.

Малый параметр задачи $1/\ln\varepsilon$ медленно уменьшается с ростом времени. При $\mathrm{M}_1 \sim O(1)$ в дальней области задача поддается линеаризации. Но, если $\mathrm{M}_1 \gg 1$, то возможна ситуация, когда в дальней области необходимо решать нелинейную задачу обыкновенных дифференциальных уравнений, и это возможно сделать только численным методом. При больших числах M_1 максимум температуры и коэффициент A, который отвечает за поведение циркуляции в дальней области, пропорциональны M_1^2. На рис. 7 для случая $\mathrm{M}_1 = 7$ максимум температуры больше температуры поверхности цилиндра в 13 раз. На рис. 8 максимум циркуляции превосходит циркуляцию на поверхности цилиндра всего в 2 раза; можно показать, что он достигнет порядка M_1^2 только на экспоненциально больших временах, на которых задача в дальней области линейна ($\mathrm{M}_1^4/\ln\varepsilon \ll 1$).

Все основные результаты подтверждены численными расчетами уравнений (2.1) для нестационарных осесимметричных течений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 19-01-00163).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
2. *Гайфуллин А.М.* Автомодельное нестационарное течение вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 4. С. 29–35.
3. *Гайфуллин А.М.* Вихревые течения. М.: Наука, 2015. 319 с.
4. *Башкин В.А., Егоров И.В.* Численное исследование задач внешней и внутренней аэродинамики. М.: Физматлит, 2013. 332 с.
5. *Nair M.T., Sengupta T.K., Chauhen V.S.* Flow past rotating cylinders at high Reynolds numbers using higher order upwind scheme // Comput. & Fluids. 1998. V. 27. № 1. P. 47–70.
6. *Калинин Е.И., Мазо А.Б.* Стационарные и периодические режимы ламинарного обтекания вращающегося цилиндра // Уч. зап. ЦАГИ. 2011. Т. 42. № 5. С. 52–71.
7. *Петров А.Г., Юдин М.А.* К динамике цилиндра в ограниченном потоке идеальной жидкости с постоянной завихренностью // ПММ. 2019. Т. 83. № 3. С. 393–402.
8. *Mack L.M.* The compressible viscous heat-conducting vortex // J. Fluid Mech. 1960. V. 8. № 2. P. 284–292.
9. *Быркин А.П.* О точных решениях уравнений Навье–Стокса для течения сжимаемого газа в каналах // Уч. зап. ЦАГИ. 1970. Т. 1. № 6. С. 15–21.
10. *Ван-Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 296 с.

On a Vortex Generation by a Rotating Cylinder

D. A. Gadzhiev[a,b,#], A. M. Gaifullin[a,b,##] and A. V. Zubtsov[a,###]

[a] *Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovskiy, Russia*
[b] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*
[#] *e-mail: gadzhiev@phystech.edu*
[##] *e-mail: gaifullin@tsagi.ru*
[###] *e-mail: azub1941@yandex.ru*

The problem of the axysimmetric vortex evolution in a compressible viscous fluid generated by an infinitely elongated cylinder rotating around its axis is considered. The asymptotic solution at large times is constructed. The conditions, guaranteeing that the velocity circulation at large distances is higher than in the incompressible fluid case, are determined.

Keywords: vortex, rotating cylinder, compressibility, heat flux, asymptotic solution

REFERENCES

1. *Loitsyanskiy L.G.* Fluid Mechanics. (Mekhanika zhidkosti i gaza) Moscow: Drofa, 2003. 840 p. (in Russian)
2. *Gaifullin A.M.* Self-similar unsteady viscous flow // Fluid Dyn., 2005, no. 4, pp. 29–35.
3. *Gaifullin A.M.* Vortical Flows. (Vikhrevye techeniya) Moscow: Nauka, 2015. 319 p. (in Russian)
4. *Bashkin V.A., Egorov I.V.* Numerical Investigation of Problems of External and Internal Aerodynamics. (Chislennoe issledovanie zadach vneshney i vnutrenney aerodinamiki) Moscow: Fizmatlit, 2013. 332 p. (in Russian)
5. *Nair M.T., Sengupta T.K., Chauhen V.S.* Flow past rotating cylinders at high Reynolds numbers using higher order upwind scheme // Comput. & Fluids, 1998, vol. 27, no. 1, pp. 47–70.
6. *Kalinin E.I., Mazo A.B.* Steady and periodic regimes of laminar flow around the rotating cylinder // TsAGI Science J., 2011, vol. 42, no. 5, pp. 52–71.
7. *Petrov A.G., Yudin M.A.* On cylinder dynamics in bounded ideal fluid flow with constant vorticity // Fluid Dyn., 2019, vol. 83, no. 3, pp. 393–402.
8. *Mack L.M.* The compressible viscous heat-conducting vortex // J. Fluid Mech, 1960, vol. 8, no. 2, pp. 284–292.
9. *Byrkin A.P.* On exact solution to the Navier–Stokes equations for compressible flows in channels. (O tochnykh resheniyakh uravneniy Navye–Stoksa dlya techeniya szhimayemogo gaza v kanalakh) // Uchyonye zapiski TsAGI, 1970, vol. 1, no. 6, pp. 15–21. (in Russian)
10. *Van Dyke M.D.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N.Y.: Acad. Press, 1964. 229 p.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 5, с. 590–611

УДК 532

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА В ЦЕНТРОБЕЖНОМ СЕПАРАТОРЕ

© 2020 г. З. М. Маликов[1,]*, М. Э. Мадалиев[1,]**

[1] Институт механики и сейсмостойкости сооружений Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

**e-mail: malikov.z62@mail.ru*

***e-mail: Madaliev.ME2019@mail.ru*

Поступила в редакцию 19.05.2020 г.
После доработки 15.07.2020 г.
Принята к публикации 24.07.2020 г.

В статье представлены численные результаты математического моделирования двухфазного осесимметричного закрученного турбулентного потока в центробежном сепараторе. Расчеты проведены для различных моделей турбулентности: модели SARC (Spalart-Allmaras Rotation/Curvature Correction) и SST-RC (Shear Stress Transport Rotation/Curvature Correction) с коррекцией на вращение/кривизну потока, модель Рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012, а также новой двухжидкостной модели. При численном решении была использована продольно-поперечная неявная схема, а связь давления со скоростями потока реализовывалась с помощью процедуры SIMPLEC. Полученные численные результаты различных моделей сравниваются между собой и с экспериментальными данными.

Ключевые слова: осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса, модель SARC, модель SST-RC, модель SSG/LRR-RSM-w2012, новая двухжидкостная модель, центробежный воздушный сепаратор, прогонка, SIMPLEC

DOI: 10.31857/S0032823520050057

Введение. Центробежные аппараты широко используются во многих отраслях народного хозяйства. Вопросы проектирования новых моделей и совершенствование существующих конструкций тесно связаны с анализом процессов, происходящих в этих аппаратах. Гидродинамическая картина течения, реализуемая в таких устройствах, оказывает существенное влияние на весь технологический процесс. Очень часто в пневматических аппаратах в качестве рабочей среды используют воздух, а сами конструкции имеют сложную геометрическую форму. При этом режимы течения всегда являются турбулентными. Физическое моделирование таких процессов связано с большими затратами средств и времени. Методы математического моделирования можно рассматривать как один из перспективных способов успешного решения задачи о нахождении поля скорости, при этом получение аналитических решений практически невозможно или связано с низкой степенью достоверности. Следовательно, единственным способом решения поставленных задач можно считать метод численного моделирования [1].

В настоящее время для решения задач турбулентности используются метод прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS) [2, 3], метод моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) [4] и методы, направленные на замыкание уравнений Навье–Стокса осредненные по Рейнольдсу (Reynolds-Averaged

Navier–Stokes Equations, RANS). Современные возможности метода DNS с определением всех составляющих движения ограничены расчетами при относительно невысоких числах Рейнольдса, не превышающих величину порядка 10^3. Метод LES по сравнению с DNS может применяться для расчетов течений с существенно большими числами Рейнольдса. Однако использование метода LES для расчета течений вблизи стенки требует применения сеток, приближающихся по своим характеристикам к сеткам метода DNS [5]. Поэтому для технических приложений более применимым является метод, базирующийся на решении осредненных уравнений Навье–Стокса по Рейнольдсу.

Таким образом, для инженерных расчетов требуются модели турбулентности, достаточно точно описывающие усредненные поля и крупномасштабные пульсации закрученных течений. Получившие широкое распространение в инженерных расчетах многие модели турбулентности плохо описывают такие течения. Чтобы улучшить адекватность моделирования турбулентных закрученных течений пытаются модифицировать существующие RANS модели турбулентности. Такими моделями являются широко известные модели SARC [6] и k-ω SST-RC [7], где введены специальные поправки на вращение потока в моделях SA [8] и k-ω SST [9] соответственно. В то же время отмечается [10], что в определенных задачах с сильным вращением потока эти модели могут дать не совсем адекватные результаты. Это объясняется тем, что в основе этих моделей лежит гипотеза Буссинеска, которая справедлива для изотропных турбулентных течений, а в течениях с сильной закруткой возникает анизотропная турбулентность. Поэтому для течений с анизотропной турбулентностью разработаны модели без привлечения гипотезы Буссинеска. Их представителями являются модели Рейнольдсовых напряжений. Недостаток моделей Рейнольдсовых напряжений в том, что необходимо решать много дифференциальных уравнений, не менее семи уравнений для турбулентности, что требует много вычислительных ресурсов. Кроме того, необходимо использовать специальные средства для улучшения устойчивости и сходимости, нет строгих физических оснований при постановке граничных условий на свободных границах для напряжений.

Необходимо упомянуть, что еще одним подходом к решению проблемы турбулентности, который на сегодняшний день можно считать почти забытым, является двухжидкостной подход Сполдинга [11]. Суть данного подхода заключается в том, что турбулентный поток делится на две жидкости по некоторым отличительным признакам потока. Например, для описания перемежаемости поток делится на ламинарный и турбулентный, в задачах горения на сгоревший и не сгоревший газ и т.д. Сложнее обстоит дело с простым турбулентным потоком, где отсутствуют явные отличительные черты потока, по которым можно было бы разделить поток на две жидкости. Поэтому в следующей работе Сполдинга [12] предложено умозрительно разделить поток на “быструю” и “медленную” жидкости. С помощью этой модели были получены результаты предсказавшие довольно точно турбулентные характеристики потока. Однако двухжидкостный подход [12] не получил дальнейшего развития. Причина этого явления заключается в том, что для замыкания систем уравнений, как в моделях RANS привлекались еще дополнительные уравнения на основе различных гипотез. В результате число решаемых уравнений удваивалось по сравнению с RANS-моделями, что увеличивало вычислительное время.

Новое развитие двухжидкостного подхода после более 30 летнего перерыва получено в недавно опубликованной работе одного из авторов [13] настоящей статьи. В указанной работе продемонстрировано, что новая двухжидкостная модель является низкорейнольдсовой и хорошо описывает сильно закрученные турбулентные течения. Поэтому целью настоящей работы является сравнение различных подходов к турбулентности для моделирования двухмерного осесимметричного турбулентного течения в воздушном центробежном сепараторе, который используется в процессах сепарации

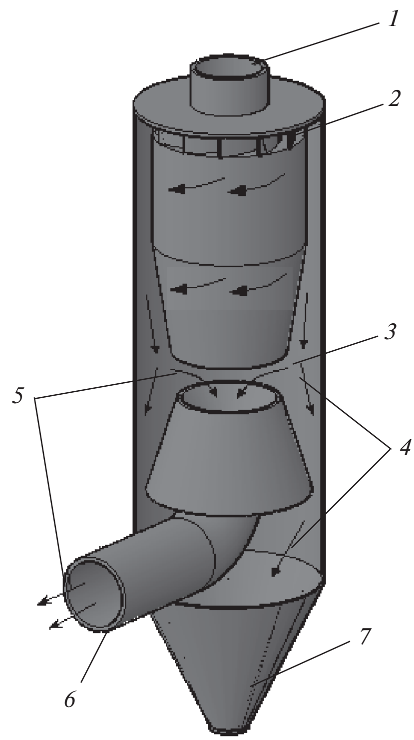


Рис. 1. Схема рассчитываемого воздушно-центробежного сепаратора.

и классификации частиц, получении порошков требуемого качества. Для этого использованы хорошо апробированные и имеющие хорошую точность модели RANS с привлечением гипотезы Буссинеска SARC и SST-RC, один из вариантов метода Рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012, а также упомянутая новая двухжидкостная модель. Численные результаты этих моделей сравниваются не только между собой, но и с экспериментальными данными для дисперсного состава отсепарированного порошка.

1. Физическая и математическая постановки задачи. Принципиальная схема центробежного сепаратора показана на рис. 1. Центробежный воздушный сепаратор работает следующим образом. Исходный материал подается через патрубок *1* в верхнюю часть сепаратора. Управляемыми лопатами *2* потоку воздуха придается вращательное движение. Под действием центробежной силы инерции частицы движутся к внутренней цилиндрической стенке корпуса сепаратора и попадают в зону классификации *3*, расположенную между усеченными конусами и стенкой корпуса сепаратора. Крупные частицы – линии *4*, вследствие своей большей массы под действием центробежной силы накапливаются около внутренней стенки корпуса сепаратора и по инерции попадают в бункер сепаратора *7*. А мелкие частицы – линии *5*, увлекаются воздухом и выносятся из сепаратора через выходной патрубок *6*, который соединен с всасывающим вентилятором. Таким образом, исходный материал разделяется на две фракции.

Несложно понять, что эффективность такого сепаратора сильно зависит от его геометрии. Поэтому для поиска оптимальных геометрических параметров возникает задача моделирования кинематики частиц внутри установки. Ясно, что кинематика частиц зависит от динамики потока воздуха. Поэтому здесь возникают две задачи: 1) исследовать динамику воздушного потока; 2) на основе полученных гидродинамических параметров воздушного потока исследовать траектории сепарируемых частиц.

На практике объемная плотность пыли в сепараторах может достигать 50 г/м^3. Данное значение существенно меньше, чем плотность несжимаемого воздуха (1.29 г/м^3). Поэтому во многих работах влиянием твердой фазы на динамику воздуха пренебрегается. Однако около стенки, где скапливаются частицы пыли под действием центробежной силы, концентрация твердой фазы может достигать больших значений. В таком случае влиянием твердой фазы на динамику газовой фазы пренебрегать нельзя. Поэтому в настоящей работе проводится численное исследование турбулентного потока с учетом влияния твердой фазы на динамику воздушного потока внутри центробежной установки.

Для численного исследования поставленной задачи используется система уравнений Навье–Стокса, осредненная по Рейнольдсу с учетом взаимодействия между фазами [14]. При моделировании двухфазного потока не будут учитываться силы, действующие на частицы, обусловленные эффектами турбулентной миграции, Сефмена, Магнуса (подъемная сила) и Кориолиса, поскольку они существенно меньше, чем центробежная сила. Таким образом, для математического моделирования процессов переноса частиц порошка в сепараторе является достаточным учет центробежной и Стоксовой силы взаимодействия между фазами. По теории пограничного слоя Прандтля можно пренебречь и членами в диффузионных членах с производными в продольном и тангенциальном направлениях. Сепаратор имеет осевую симметрию, поэтому удобной системой является цилиндрическая система координат. Используя метод осреднения Рейнольдса для двухфазного потока можно получить систему уравнений

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \bar U}{\partial z} + \frac{\partial r\bar V}{r\partial r} = 0 \\
\frac{\partial \bar U}{\partial t} + \bar U\frac{\partial \bar U}{\partial z} + \bar V\frac{\partial \bar U}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar p}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 \bar U}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar U}{r\partial r}\right) + \frac{\partial}{r\partial r}\left(-r\overline{v'u'}\right) - \sum_{i=1}^{N}\frac{\rho_i}{\rho}k_i\left(\bar U - \bar U_{pi}\right) \\
\frac{\partial \bar V}{\partial t} + \bar U\frac{\partial \bar V}{\partial z} + \bar V\frac{\partial \bar V}{\partial r} - \frac{\bar W^2}{r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar p}{\partial r} = \\
= \nu\left(\frac{\partial^2 \bar V}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar V}{r\partial r} - \frac{\bar V}{r^2}\right) + \frac{\partial}{r\partial r}\left(-r\overline{v'v'}\right) - \frac{1}{r}\left(-\overline{w'w'}\right) - \sum_{i=1}^{N}\frac{\rho_i}{\rho}k_i\left(\bar V - \bar V_{pi}\right) \\
\frac{\partial \bar W}{\partial t} + \bar U\frac{\partial \bar W}{\partial z} + \bar V\frac{\partial \bar W}{\partial r} + \frac{\bar W\bar V}{r} = \\
= \nu\left(\frac{\partial^2 \bar W}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar W}{r\partial r} - \frac{\bar W}{r^2}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(-\overline{v'w'}\right)' + \frac{2}{r}\left(-\overline{v'w'}\right) - \sum_{i=1}^{N}\frac{\rho_i}{\rho}k_i\left(\bar W - \bar W_{pi}\right) \\
\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial\left(\bar U_{pi}\rho_i\right)}{\partial z} + \frac{\partial\left(\bar V_{pi}\rho_i\right)}{\partial r} = \frac{\partial}{r\partial r}\left(-r\overline{v'\rho'}\right) \\
\frac{\partial \bar U_{pi}}{\partial t} + \bar U_{pi}\frac{\partial \bar U_{pi}}{\partial z} + \bar V_{pi}\frac{\partial \bar U_{pi}}{\partial r} = k_i\left(\bar U - \bar U_{pi}\right) \\
\frac{\partial \bar V_{pi}}{\partial t} + \bar U_{pi}\frac{\partial \bar V_{pi}}{\partial z} + \bar V_{pi}\frac{\partial \bar V_{pi}}{\partial r} - \frac{\bar W_{pi}^2}{r} = k_i\left(\bar V - \bar V_{pi}\right)
\end{gathered}
\qquad (1.1)
$$

$$\frac{\partial \bar{W}_{pi}}{\partial t} + \bar{U}_{pi}\frac{\partial \bar{W}_{pi}}{\partial z} + \bar{V}_{pi}\frac{\partial \bar{W}_{pi}}{\partial r} + \frac{\bar{W}_{pi}\bar{V}_{pi}}{r} = k_i\left(\bar{W} - \bar{W}_{pi}\right),$$

здесь $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$ – соответственно аксиальная, радиальная и тангенциальная составляющие скорости воздушного потока; $\bar{U}_{pi}$, $\bar{V}_{pi}$, $\bar{W}_{pi}$ – аналогичные составляющие скорости для i-й фракции пыли; $\bar{p}$ – гидростатическое давление; ρ – плотность газа; ν – его молекулярная вязкость; $\overline{v'u'}$, $\overline{v'v'}$, $\overline{v'w'}$, $\overline{w'w'}$ – компоненты тензора Рейнольдсовых напряжений; ρ_i – массовая плотность пыли; k_i – коэффициент взаимодействия между воздухом и i-й фракции пыли; N – число фракций пыли. В работе рассмотрено число фракций $N = 5$.

Коэффициент взаимодействия между фазами определялся через параметр Стокса:

$$k_i = \frac{18\rho\nu}{\rho_\rho\delta_i^2}$$

В данном выражении ρ_ρ – плотность материала частиц пыли, δ_i – “эффективный” диаметр частиц. Система уравнений (1.1) является незамкнутой, т.к. возникающие Рейнольдсовые члены являются неизвестными. Следовательно, задача RANS-моделей турбулентности заключается в замыкании этой системы на основе различных гипотез и математических приемов. RANS-модели в основном разработаны для однофазного потока. Поэтому при использовании этих моделей для двухфазного потока необходимо учесть влияние твердой фракции на флуктуирующие характеристики турбулентного потока. Данная задача требует дополнительных исследований. В настоящей работе это влияние в первом приближении предполагается малым при небольших концентрациях и в моделировании не учитывается. Данное предположение можно оправдать тем, что концентрация частиц высока около стенки сепаратора, где находится вязкий подслой потока, где турбулентные пульсации имеют не большие значения. Таким образом, далее обратное влияние твердой фазы на течения газовой фазы в системе (1.1) учтено только через уравнения движения газовой фазы.

Для замыкания системы уравнений (1.1) в моделях, где используется гипотеза Буссинеска, использованы соотношения

$$-\overline{u_i'u_j'} = \nu_t\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}k\delta_{ij}, \quad -\overline{v'\rho'} = \frac{\nu_t}{\mathrm{Sc}_t}\frac{\partial \rho}{\partial r}$$

Здесь v_t – турбулентная вязкость, Sc_t – турбулентное число Шмидта. Следовательно, задача сводится к поиску неизвестной турбулентной вязкости. Что касается методов Рейнольдсовых напряжений, то дополнительные уравнения получаются из осредненных уравнений Рейнольдса и Навье–Стокса. Ниже используются модели SARC, SST-RC и SSG/LRR-RSM-w2012. Эти модели являются широко известными и методика их реализации представлена во многих ранее выполненных исследованиях, поэтому в данной работе они не приводятся. Больший интерес представляет реализация новой двухжидкостной модели для поставленной задачи. Особенность этой модели в том, что для ее вывода использован иной подход к проблеме турбулентности. По этой причине ниже приводится суть этого подхода и основные моменты вывода математической модели турбулентности на основе этого подхода.

2. Новая двухжидкостная модель турбулентности. Рассмотрим течение двух жидкостей составляющие гетерогенную смесь, где эти жидкости состоят из отдельных объемов. На рис. 2 показано течение такой смеси в плоскости перпендикулярной к направлению i. Здесь темным цветом обозначена I жидкость и светлым цветом II жид-

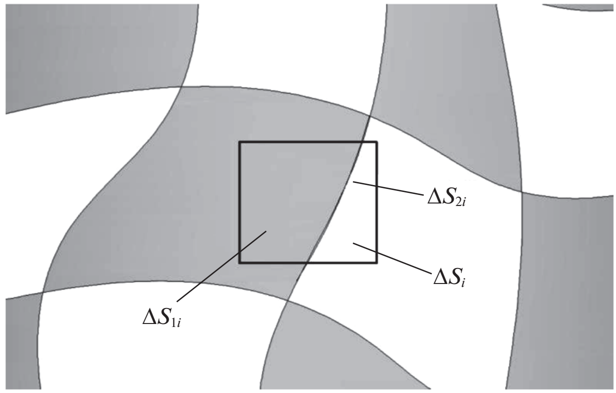


Рис. 2.

кость. Обозначим через V_1, V_2 их скорости. Будем считать их плотности одинаковыми и равными ρ. Пусть ΔS_i неподвижная элементарная площадь, а ΔS_{1i} – площадь занимаемая жидкостью I и ΔS_{2i} – жидкостью II. Очевидно, что

$$\Delta S_i = \Delta S_{1i} + \Delta S_{2i} \tag{2.1}$$

Определим суммарную массу жидкостей проходящих через элементарную площадку ΔS_i за время Δt

$$\Delta m = \rho V_{1i}\Delta S_{1i}\Delta t + \rho V_{2i}\Delta S_{2i}\Delta t \tag{2.2}$$

С другой стороны данную массу через скорость смеси V_i запишем в виде

$$\Delta m = \rho V_i \Delta S_i \Delta t \tag{2.3}$$

Приравнивая правые части (2.2) и (2.3), а также учитывая (2.1) найдем скорость гетерогенной смеси двух жидкостей

$$V_i = \frac{\Delta S_{1i}}{\Delta S_i} V_{1i} + \left(1 - \frac{\Delta S_{1i}}{\Delta S_i}\right) V_{2i} \tag{2.4}$$

Очевидно, что

$$0 < \frac{\Delta S_{1i}}{\Delta S_i} < 1 \tag{2.5}$$

Жидкости состоят из отдельных объемов. Поэтому элементарная площадь ΔS_i может быть полностью внутри I или II жидкости в промежутке времени $\tau \approx l/\left|\vec{V}\right|$, где l – характерный размер объемов жидкостей. Если данный размер существенно меньше, чем характерный размер течения, т.е. $l \ll L$, то и время τ тоже будет существенно меньше, чем характерное время течения. Следовательно, параметр $\alpha_i = \Delta S_{1i}/\Delta S_i$ имеет флуктуирующий характер. Параметр α_i можно интерпретировать как поверхностную долю первой жидкости в элементарной площадке. Следовательно, соотношение (2.4) можно представить в виде

$$V_i = \alpha_i V_{1i} + (1 - \alpha_i) V_{2i} \tag{2.6}$$

Рассмотрим теперь турбулентный поток для несжимаемой жидкости. Тогда флуктуациями плотности можно пренебречь. Следуя гипотезе Рейнольдса, скорость турбулентного потока представим в виде суммы осредненной $\overline{V}_i$ и флуктуирующей v'_i скоростей

$$V_i = \overline{V}_i + v'_i \tag{2.7}$$

Осреднение скорости здесь проводится по способу Рейнольдса

$$\overline{V}_i = \frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} V_i d\tau \tag{2.8}$$

Здесь T период интегрирования. Введем непульсирующую скорость v_i, для которой выполняется условие $|v_i| = |v'_i|_{\max}$ в промежутке времени $t - T/2 < \tau < t + T/2$. Флуктуирующую скорость представим в виде

$$v'_i = \frac{v'_i}{v_i} v_i = \varphi_i v_i, \tag{2.9}$$

где, $\varphi_i = \dfrac{v'_i}{v_i}$ флуктуирующая безразмерная функция, которая меняется во времени в пределах $-1 < \varphi_i < 1$. Таким образом, скорость $|v_i|$ можно интерпретировать как амплитуду флуктуирующей скорости. Введем еще один параметр $\gamma_i = (\varphi_i + 1)/2$. Тогда (2.9) можно записать в виде

$$v'_i = (2\gamma_i - 1)v_i \tag{2.10}$$

Осредненное по времени значение флуктуирующей скорости должно быть равно нулю, т.е.

$$\overline{v}'_i = (2\overline{\gamma}_i - 1)v_i \tag{2.11}$$

Отсюда следует, что $\overline{\gamma}_i = 0.5$. Таким образом, выражение (2.7) можно представить в виде

$$V_i = \gamma_i(\overline{V}_i + v_i) + (1 - \gamma_i)(\overline{V}_i - v_i) \tag{2.12}$$

Опытные наблюдения показывают, что в турбулентном потоке жидкость распадается на отдельные объемы – моли. Эти моли совершают относительное движение. Следовательно, турбулентный поток можно представить, как гетерогенную смесь. Поэтому сравнивая выражения (2.12) и (2.6) можем заключить, что турбулентный поток можно представить в виде гетерогенной смеси из двух жидкостей со скоростями

$$V_{1i} = \overline{V}_i + v_i, \quad V_{2i} = \overline{V}_i - v_i \tag{2.13}$$

и поверхностной доли первой жидкости

$$\alpha_i = \Delta S_{1i}/\Delta S_i = \gamma_i \tag{2.14}$$

Следовательно

$$\overline{\alpha}_i = \overline{\gamma}_i = 0.5 \tag{2.15}$$

Из соотношений (2.13) следует, что первая жидкость соответствует более “быстрой”, а вторая жидкость более “медленной” жидкостям, а скорость v_i можно рассматривать как относительную скорость жидкостей. Таким образом, флуктуирующий характер скорости в турбулентном потоке вызван относительным движением двух жидкостей и случайными изменениями их поверхностных долей во времени.

Следовательно, в турбулентном потоке флуктуирующим параметром являются их поверхностные доли, а не скорости жидкостей, поскольку не существует такой силы, под действием которой объемы жидкостей (моли) могут иметь флуктуирующие скорости.

Для дальнейшего исследования введем объемную долю первой жидкости

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Omega_1}{\Delta\Omega} \tag{2.16}$$

Здесь $\Delta\Omega$ — элементарный объем, $\Delta\Omega_1$ — объем занимаемый первой жидкостью.

Теперь определим массовую плотность первой жидкости в элементарном объеме

$$\rho_1 = \frac{\rho\Delta\Omega_1}{\Delta\Omega} = \varepsilon\rho \tag{2.17}$$

Масса первой жидкости, пересекаемая через элементарную площадь ΔS_i за время T, определяется интегралом

$$\Delta m_1 = \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \rho V_{1i}\Delta S_{1i} d\tau = \rho V_{1i}\Delta S_i \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \alpha_i d\tau = T\overline{\alpha}_i \rho V_{1i}\Delta S_i \tag{2.18}$$

С другой стороны, данная масса определяется интегралом

$$\Delta m_1 = \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \rho_1 V_{1i}\Delta S_i d\tau = \rho V_{1i}\Delta S_i \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \varepsilon d\tau = T\overline{\varepsilon}\rho V_{1i}\Delta S_i \tag{2.19}$$

Сопоставляя правые части выражений (2.18) и (2.19) получим

$$\overline{\varepsilon} = \overline{\alpha}_i = 0.5 \tag{2.20}$$

Таким образом, представляя турбулентное течение, как смесь двух потоков, уравнения неразрывности для каждой жидкости запишем в виде

$$\frac{\partial\beta\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho\alpha_j V_{1j}}{\partial x_j} = J, \quad \frac{\partial(1-\beta)\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho(1-\alpha_j)V_{2j}}{\partial x_j} = -J \tag{2.21}$$

Здесь J интенсивность массообмена между жидкостями. После подстановки в данное уравнение скорости из соотношения (2.13) и осреднения по времени получим уравнения

$$\frac{\partial 0.5\rho(\overline{V_j} + v_j)}{\partial x_j} = \overline{J}, \quad \frac{\partial 0.5\rho(\overline{V_j} - v_j)}{\partial x_j} = -\overline{J} \tag{2.22}$$

При этом учтена несжимаемость потока, а также, что $\overline{\beta} = \overline{\alpha}_j = 0.5$. Из систем уравнений (2.22) можно получить

$$\frac{\partial\rho\overline{V_j}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial\rho v_j}{\partial x_j} = 2\overline{J} \tag{2.23}$$

Аналогично запишем для каждой жидкости уравнение движения [14]

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varepsilon\rho V_{1i}}{\partial t} + \frac{\partial\alpha_j(\rho V_{1j}V_{1i} + \delta_{ij}p - \sigma_{1ji})}{\partial x_j} = f_i \\ \frac{\partial(1-\varepsilon)\rho V_{2i}}{\partial t} + \frac{\partial(1-\alpha_j)(\rho V_{2j}V_{2i} + \delta_{ij}p - \sigma_{2ji})}{\partial x_j} = -f_i\end{gathered} \tag{2.24}$$

Согласно гипотезе Рейнольдса давление жидкости представим в виде суммы осредненного и пульсационного давлений $p = \overline{p} + p'$. Поэтому после осреднения по времени получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial 0.5\rho V_{1i}}{\partial t} + \frac{\partial 0.5(\rho V_{1j}V_{1i} + \delta_{ij}\overline{p} - \sigma_{1ji})}{\partial x_j} = \overline{f}_i \\ &\frac{\partial 0.5\rho V_{2i}}{\partial t} + \frac{\partial 0.5(\rho V_{2j}V_{2i} + \delta_{ij}\overline{p} - \sigma_{2ji})}{\partial x_j} = -\overline{f}_i \end{aligned} \tag{2.25}$$

В этих выражениях

$$\overline{f}_i = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2}(f_i - \alpha_i p')d\tau, \quad \sigma_{1ij} = \mu\left(\frac{\partial V_{1i}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{1j}}{\partial x_i}\right), \quad \sigma_{2ij} = \mu\left(\frac{\partial V_{2i}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{2j}}{\partial x_i}\right) \tag{2.26}$$

Здесь μ – коэффициент динамической вязкости жидкости.

Подставим скорости молей из (2.13) в (2.25), затем сложим эти уравнения. В итоге получим уравнение импульса для осредненного потока

$$\frac{\partial\rho\overline{V}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\overline{V}_j\overline{V}_i + \delta_{ij}\overline{p})}{\partial x_j} = \frac{\partial(\Pi_{ji} - \rho v_j v_i)}{\partial x_j} \tag{2.27}$$

В данном уравнении

$$\Pi_{ji} = \mu\left(\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{V}_j}{\partial x_i}\right)$$

Теперь, если в системе (2.25) вычесть из первого уравнения второе, получим уравнение для относительной скорости

$$\frac{\partial\rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\overline{V}_j v_i + \rho v_j\overline{V}_i - \pi_{ji}) = 2\overline{f}_i; \quad \pi_{ji} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.28}$$

Таким образом, систему уравнений для осредненных величин турбулентного потока можно записать

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\rho\overline{V_j}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial\rho v_j}{\partial x_j} = 2\overline{J} \\ &\frac{\partial\rho\overline{V_i}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\overline{V_j V_i} + \delta_{ji}\overline{p})}{\partial x_j} = \frac{\partial(\Pi_{ji} - \rho v_j v_i)}{\partial x_j} \\ &\frac{\partial\rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\overline{V_j}v_i + \rho v_j\overline{V_i} - \pi_{ji}) = 2\overline{f_i} \\ &\Pi_{ji} = \mu\left(\frac{\partial\overline{V_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{V_j}}{\partial x_i}\right), \quad \pi_{ji} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \end{aligned} \tag{2.29}$$

Система (2.29) представляет собой основные уравнения нового двухжидкостного подхода к математическому описанию турбулентности. Как видно из (2.29) уравнение движения для осредненного потока имеет очень похожий вид, что и в осредненном уравнении Рейнольдса. Однако в уравнениях Рейнольдса турбулентные напряжения являются неизвестными. Следовательно, уравнения Рейнольдса незамкнуты, и для замыкания необходимо привлечь различные гипотезы. Что касается нового двухжидкостного подхода, то он дает замкнутую систему уравнений (2.29). Принципиальная разница двух подходов в том, что они основываются на различных концепциях. Подход Рейнольдса базируется на двух гипотезах: 1) скорость турбулентного потока состоит из осредненной и флуктуирующей скоростей; 2) турбулентный поток описывается уравнением Навье–Стокса. Приведенных условий оказывается недостаточным для описания турбулентности, поскольку на основе первой гипотезы вводятся две неизвестные скорости, а используется только одно уравнение. Первую гипотезу Рейнольдса на сегодняшний день можно считать экспериментально подтвержденной. Что касается второй гипотезы, то она не совсем очевидная, в силу того, что уравнение Навье–Стокса представляет собой "точную" модель ламинарного потока.

Для двухжидкостного подхода основными условиями являются первая гипотеза Рейнольдса и то, что в турбулентном потоке жидкость разбивается на отдельные объемы (моли), которые совершают относительное движение. В работе на основе этих условий математически показано, что турбулентный поток можно представить, как гетерогенную смесь двух жидкостей. Следовательно, для двух неизвестных можно записать два уравнения движения – для первой и второй жидкостей, что приводит к замкнутой системе уравнений. Еще одной особенностью двухжидкостной модели является то, что многие параметры турбулентности с большой достоверностью определяются через относительные скорости.

В упомянутой работе одного из авторов [13] подробно приводятся методики определения сил взаимодействия между жидкостями $\overline{f_i}$. Поэтому здесь приведем окончательный их вид

$$
\begin{gathered}
2\overline{f_i} = 2\overline{V_i}\overline{J} + F_{si} + F_{fi} + F_{mi} \\
\mathbf{F}_s = \rho C_s \operatorname{rot}\overline{\mathbf{V}} \times \vec{v}, \quad \mathbf{F}_i = -\rho K_f \mathbf{v} \\
F_{mi} = 2\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho \nu_{ji}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right] \\
\nu_{ji} = 3\nu + 2\left|\frac{v_i v_j}{\operatorname{def}(\overline{\overline{\mathbf{V}}})}\right| \quad \text{для} \quad i \neq j, \quad \nu_{ii} = 3\nu + \frac{1}{\operatorname{div}\mathbf{v}}\left|\frac{v_k v_k}{\operatorname{def}(\overline{\overline{\mathbf{V}}})}\right|\frac{\partial v_k}{\partial x_k}
\end{gathered}
\tag{2.30}
$$

Здесь $2\overline{V_i}\overline{J}$ – сила вызванная массообменом между жидкостями, F_{si} – поперечная сила Сефмена обусловленная сдвиговым полем скорости, F_{fi} – сила трения, F_{mi} – сила возникающая в результате относительного молярного движения жидкостей, $\operatorname{def}(\overline{\mathbf{V}}) = \sqrt{2\overline{S_{ij}}S_{ij}}$, $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V_j}}{\partial x_i}\right)$ – скорость деформации. Подставляя выражения (2.30) в систему уравнений (2.29) получим следующую систему уравнений для турбулентного потока в новом двухжидкостном подходе

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \rho \overline{V_j}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial \overline{V_i}}{\partial t} + \overline{V_j}\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{p}}{\rho \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu\left(\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V_j}}{\partial x_i}\right) - v_j v_i)\right] \\
\frac{\partial v_i}{\partial t} + \overline{V_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\rho v_j \frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu_{ji}\left(\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V_j}}{\partial x_i}\right)\right] + \frac{F_{si}}{\rho} + \frac{F_{fi}}{\rho} \\
\nu_{ji} = 3\nu + 2\left|\frac{v_i v_j}{\operatorname{def}(\overline{\overline{\mathbf{V}}})}\right| \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad \nu_{ii} = 3\nu + \frac{1}{\operatorname{div}\mathbf{v}}\left|\frac{v_k v_k}{\operatorname{def}(\overline{\overline{\mathbf{V}}})}\right|\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \\
\mathbf{F}_f = -\rho K_f \mathbf{v}, \quad \mathbf{F}_s = \rho C_s \operatorname{rot}\overline{\mathbf{V}} \times \mathbf{v}
\end{gathered}
\tag{2.31}
$$

Здесь K_f – коэффициент трения

$$
K_f = C_1 \lambda_{\max} + C_2 \frac{|\mathbf{d} \cdot \mathbf{v}|}{d^2}
\tag{2.32}
$$

В данном выражении d – ближайшее расстояние до твердой стенки, $\lambda_{\max}$ – наибольший корень характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{2.33}$$

где A матрица

$$A = \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial \bar{V}_1}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial \bar{V}_1}{\partial x_2} - C_s\zeta_3 & -\dfrac{\partial \bar{V}_1}{\partial x_3} + C_s\zeta_2 \\ -\dfrac{\partial \bar{V}_2}{\partial x_1} + C_s\zeta_3 & -\dfrac{\partial \bar{V}_2}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial \bar{V}_2}{\partial x_3} - C_s\zeta_1 \\ -\dfrac{\partial \bar{V}_3}{\partial x_1} - C_s\zeta_2 & -\dfrac{\partial \bar{V}_3}{\partial x_2} + C_s\zeta_1 & -\dfrac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

и $\boldsymbol{\zeta} = \operatorname{rot} \mathbf{V}$.

В тестовых задачах показано, что удовлетворительные результаты получаются при $C_1 = 0.7825$, $C_2 = 0.306$, $C_s = 0.2$.

Необходимо отметить, что при моделировании движения твердой фазы, как было отмечено выше, силой Сеффмена пренебрегается, поскольку плотность материала твердых включений намного больше, чем плотность газовой фазы. Поэтому твердые частицы в силу своей инертности не чувствительны к этой силе. А для движения газовой или жидкой фазы сила Сеффмена [15] играет решающую роль для возникновения турбулентного перемешивания. Например, при обтекании плоской пластины поперечное движение жидкостей обусловлено именно этой силой. О существовании такой силы упоминал еще Сполдинг в своей двухжидкостной модели. Эта сила достаточно хорошо изучена как в теоретическом, так и в экспериментальном плане.

3. Математическое моделирование двухфазного потока на основе новой двухжидкостной модели турбулентности. Для описания двухфазного потока в центробежном сепараторе систему уравнений новой двухжидкостной модели (2.31) запишем в цилиндрических координатах. Тогда полная система уравнений двухфазного потока (1.1) будет иметь вид

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial r\bar{V}}{r\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \bar{V}\frac{\partial \bar{U}}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar{U}}{r\partial r}\right) - \frac{\partial r v u}{r\partial r} - \sum_{i=1}^{N}\frac{\rho_i}{\rho}k_i\left(\bar{U} - \bar{U}_{pi}\right)$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial \bar{V}}{\partial z} + \bar{V}\frac{\partial \bar{V}}{\partial r} - \frac{\bar{W}^2}{r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} =$$

$$= \nu\left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar{V}}{r\partial r} - \frac{\bar{V}}{r^2}\right) - \frac{\partial r v v}{r\partial r} + \frac{w^2}{r} - \sum_{i=1}^{N}\frac{\rho_i}{\rho}k_i\left(\bar{V} - \bar{V}_{pi}\right)$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} + \bar{V}\frac{\partial \bar{W}}{\partial r} + \frac{\bar{W}\bar{V}}{r} = \nu\left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar{W}}{r\partial r} - \frac{\bar{W}}{r^2}\right) - \frac{\partial r^2 v w}{r^2\partial r} - \sum_{i=1}^{N}\frac{\rho_i}{\rho}k_i\left(\bar{W} - \bar{W}_{pi}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial u}{\partial z} + \bar{V}\frac{\partial u}{\partial r} = -(1 - C_s)v\frac{\partial \bar{U}}{\partial r} + \frac{\partial}{r\partial r}\left(r\nu_{zr}\frac{\partial u}{\partial r}\right) - K_f u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial v}{\partial z} + \bar{V}\frac{\partial v}{\partial r} = -C_s\left(u\frac{\partial \bar{U}}{\partial r} + w\frac{\partial r\bar{W}}{r\partial r}\right) + \frac{2\bar{W}}{r}w + \frac{\partial}{\partial r}\left(2r\nu_{rr}\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{2\nu_{rr}}{r^2}v - K_f v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial w}{\partial z} + \bar{V}\frac{\partial w}{\partial r} = -(1 - C_s)v\frac{\partial r\bar{W}}{r\partial r} + \frac{\partial}{r^2\partial r}\left(r^2\nu_{\varphi r}\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}\right)\right) - K_f w \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\frac{\partial\left(\bar{U}_{pi}\rho_i\right)}{\partial z}+\frac{\partial\left(\bar{V}_{pi}\rho_i\right)}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(D_p r\frac{\partial\rho_i}{\partial r}\right)$$

$$\nu_{rr}=\nu_{\varphi\varphi}=\frac{3}{\mathrm{Re}}+2\left|\frac{vv}{\operatorname{def}\bar{\bar{\mathbf{V}}}}\right|,\quad \nu_{zr}=\frac{3}{\mathrm{Re}}+2\left|\frac{uv}{\operatorname{def}\bar{\bar{\mathbf{V}}}}\right|,\quad \nu_{\varphi r}=\frac{3}{\mathrm{Re}}+2\left|\frac{vw}{\operatorname{def}\bar{\bar{\mathbf{V}}}}\right|$$

$$\left|\operatorname{def}\bar{\mathbf{V}}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{W}}{\partial r}-\frac{\bar{W}}{r}\right)^2}$$

$$C_r=C_1\lambda_{\max}+C_2\frac{|v|}{d},\quad C_s=0.2,\quad C_1=0.7825,\quad C_2=0.306$$

$$\frac{\partial\bar{U}_{pi}}{\partial t}+\bar{U}_{pi}\frac{\partial\bar{U}_{pi}}{\partial z}+\bar{V}_{pi}\frac{\partial\bar{U}_{pi}}{\partial r}=k_i\left(\bar{U}-\bar{U}_{pi}\right)$$

$$\frac{\partial\bar{V}_{pi}}{\partial t}+\bar{U}_{pi}\frac{\partial\bar{V}_{pi}}{\partial z}+\bar{V}_{pi}\frac{\partial\bar{V}_{pi}}{\partial r}-\frac{\bar{W}_{pi}^2}{r}=k_i\left(\bar{V}-\bar{V}_{pi}\right)$$

$$\frac{\partial\bar{W}_{pi}}{\partial t}+\bar{U}_{pi}\frac{\partial\bar{W}_{pi}}{\partial z}+\bar{V}_{pi}\frac{\partial\bar{W}_{pi}}{\partial r}+\frac{\bar{W}_{pi}\bar{V}_{pi}}{r}=k_i\left(\bar{W}-\bar{W}_{pi}\right)$$

Для определения коэффициента трения K_f составим матрицу A

$$A=\begin{vmatrix} 0 & -(1-C_s)\dfrac{\partial\bar{U}}{\partial r} & 0\\ -C_s\dfrac{\partial\bar{U}}{\partial r} & 0 & -C_s\dfrac{\partial r\bar{W}}{r\partial r}+\dfrac{2\bar{W}}{r}\\ 0 & -(1-C_s)\dfrac{\partial r\bar{W}}{r\partial r} & 0 \end{vmatrix}$$

Решением характеристического уравнения (2.33) для составленной матрицы будет

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{D}$$
$$\lambda_3=0,$$

здесь $$D=C_s(1-C_s)\left[\left(\frac{\partial r\bar{W}}{r\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial r}\right)^2\right]-2(1-C_s)\frac{\bar{W}}{r}\frac{\partial r\bar{W}}{r\partial r}$$

Из полученных решений находим наибольший вещественный корень

$$\lambda_{\max}=\sqrt{D}\quad\text{если}\quad D>0\quad\text{и}\quad\lambda_{\max}=0\quad\text{если}\quad D<0$$

Еще одним неизвестным и очень важным параметром в системе (3.1) является коэффициент турбулентной диффузии частиц D_p. Согласно кинетической теории данный коэффициент определяется по формуле

$$D_p=\frac{1}{3}V_{\text{отн}}l_p \tag{3.2}$$

Здесь $V_{\text{отн}}$ относительная скорость твердой фракции, l_p – длина пути перемешивания концентрации частиц. В рамках двухжидкостной модели турбулентности твердые фракции содержатся как в первой, так и во второй жидкостях, а, так как эти жидкости имеют относительную скорость, то и твердые частицы, содержащихся в них, также совершают относительное движение. В первом приближении, для не очень крупных частиц, их относительные скорости можно считать равными относительным скоростям жидкости

$$V_{\text{отн}}=|\mathbf{v}|=\sqrt{u^2+v^2+w^2}$$

В классической теории турбулентности делается гипотеза о пропорциональности длины пути перемешивания концентрации l_p и длины пути перемешивания импульса l

$$l_p = \frac{l}{\mathrm{Sc}_t}$$

Здесь $\mathrm{Sc}_t = 0.8$ – турбулентное число Шмидта. Т.к. относительные скорости частиц и жидкости одинаковые, то будут одинаковыми и их длины пути перемешивания импульсов. Ранее [13] на основе теории пути перемешивания Прандтля предложено соотношение

$$|\mathbf{v}| = l\,\mathrm{def}(\overline{\mathbf{V}})$$

Подставляя полученные результаты в (3.2) найдем коэффициент диффузии

$$D_p = \frac{1}{3\,\mathrm{Sc}_t}\frac{u^2 + v^2 + w^2}{\mathrm{def}\,\overline{\mathbf{V}}} \tag{3.3}$$

Для исследования стационарного решения динамики двухфазного потока применен метод установления, т.е. решаются нестационарные уравнения, и стационарное решение достигается при достаточно большом количестве итерации по времени. Для всех рассматриваемых моделей турбулентности в качестве начального условия задавалось решение уравнений Эйлера для однофазного потока. На твердых поверхностях ставились условия прилипания, на входе в сепаратор параметры потока задавались, а на выходе воздуха и в бункере использовалась экстраполяция второго порядка точности. Численное решение представленных систем уравнений проводилось в физических переменных скорость–давление [16]. Для конвективных членов использовался метод контрольного объема. Коррекция давления на скорости потока проводилась процедурой SIMPLEC. Для конечно-разностной аппроксимации исходных уравнений использована двухшаговая неявная схема Писмена–Ракфорда [17]. Для численного исследования течения двухфазного потока в сепараторе, область течения была разделена на 4 участка. Безразмерная схема расчетной области сепаратора показана на рис. 3.

Для численной реализации уравнений расчетная область приведена к прямоугольным областям. Для этого произведена замена переменных (z, r) на (ξ, η), где $\xi = z$, а вторая переменная определялась из соотношений

$$0 < z < z_2, \quad F_2(z) < r < F_1(z), \quad \eta = \frac{F_1(z) - r}{F_1(z) - F_2(z)}$$

$$z_2 < z < z_3, \quad 0 < r < F_1(z), \quad \eta = \frac{r}{F_1(z)}$$

$$z_3 < z < z_4, \quad F_3(z) < r < F_1(z), \quad \eta = \frac{\eta_0 F_1(z) - F_3(z) + r(1-\eta_0)}{F_1(z) - F_3(z)}$$

$$z_3 < z < z_4, \quad 0 < r < F_4(z), \quad \eta = \eta_0\frac{r}{F_4(z)}, \quad \eta_0 = \frac{F_3(z_3)}{F_1(z_3)}$$

Как было сказано выше при обезразмеривании все длины были соотнесены к радиусу корпуса сепаратора, который в экспериментальной установке был равен $R = 125$ мм. Опыты проводились при следующих значениях параметров потока на входе в коаксиальный канал: $U_{\mathrm{ref}} = 5.5$ м/с, $V = 0$, $W_0 = 4.7$ м/с, $\rho^0 = 7000$ кг/м^3. Здесь U_{ref} – средняя продольная скорость на входе, W_0 – средняя тангенциальная скорость, ρ^0 – плотность материала твердой фазы. В новой двухжидкостной модели относительные

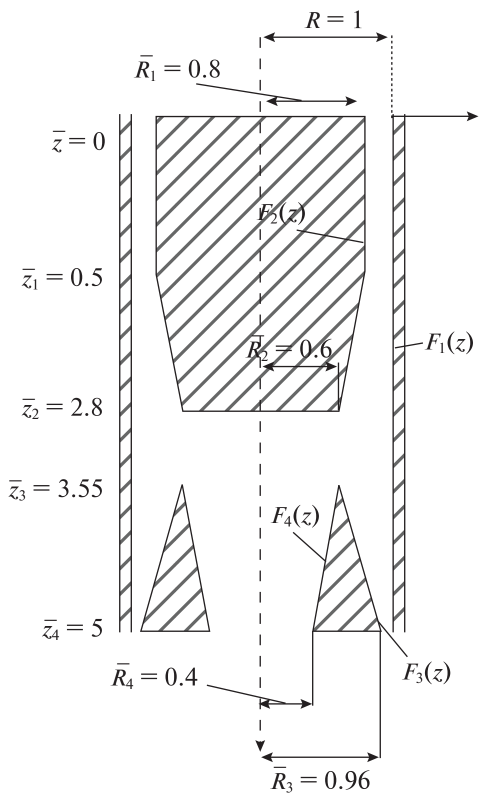


Рис. 3. Область течения в сепараторе.

скорости жидкостей имели значения $u = 0.01$, $v = 0$, $w = 0$. Численные расчеты показали, что результаты слабо зависят от входных условий для относительных скоростей. Суммарная плотность твердой фазы на входе была равна $\rho_m = 18$ г/м^3 и распределена по сечению однородно.

Несложно определить, что число Рейнольдса на входе по отношению к радиусу корпуса сепаратора имеет небольшое значение Re = 3820. Следовательно, толщина вязкого подслоя турбулентного потока имеет значительный размер и можно использовать довольно грубую расчетную сетку без сгущения около стенок. Поэтому в работе вязкий слой рассчитывался напрямую без использования пристеночных функций, т.к. все тестируемые в работе модели являются низкорейнольдсовыми. Численные результаты получены для расчетной сетки 100 × 100. Численные эксперименты показали, что сгущение расчетных ячеек в два раза приводило к изменениям не более 2%, но зато значительно увеличивало время расчета.

Лабораторный эксперимент был проведен для порошка цинка. Массовый состав частиц цинка по размерам приведен в таблице 1, который разделен на пять фракций.

4. Обсуждение результатов. На рис. 4 иллюстрируются профили скоростей воздуха в сечении $z = 2$. Здесь U/U_{ref}, V/U_{ref}, W/U_{ref} безразмерные скорости. Данное сечение соответствует течению в расширяющемся коаксиальном канале.

Рис. 4 показывает довольно заметное отличие результатов различных моделей. Особенно сильно различаются результаты RANS-моделей с результатами двухжидкостной

Таблица 1. Фракционный состав твёрдой фазы

Размеры частиц цинка δ_i, в мкм	0 до 5	5 до 10	10 до 20	20 до 30	30 до 45	свыше 45
Исходный материал ПЦ-4, по массе %	16	29	35	16	4	0

модели. Данные различия авторы объясняют тем, что число Рейнольдса в пересчете на ширину коаксиального канала достаточно мало и соответствует переходному режиму от ламинарного к турбулентному. Известно, что для многих моделей турбулентности для расчета переходного режима требуются специальные поправки.

На рис. 5 показаны профили скоростей потока воздуха в сечении $z = 3.5$. Из рисунка видно, что в этом сечении результаты различных моделей качественно совпадают. Это происходит потому, что по всей видимости данное сечение соответствует зоне с наибольшей турбулентностью, что адекватно описывается всеми моделями.

На рис. 6 показаны линии тока осредненных скоростей для всех моделей. По этим линиям тока видно, что модель SSG/LRR-RSM дает большую длину зон рециркуляции как на оси, так и за уступом, по сравнению с расчетом по SARC, SST-RC и двухжидкостной модели.

Еще одним отличием в этих картинах течений является циркуляция потока на входе в бункер. Можно заметить, что во всех RANS-моделях эта циркуляция в правой части бункера происходит против, а по результатам двухжидкостной модели по часовой стрелке. Данная циркуляция потока играет большую роль для эффективности сепаратора.

Для оперделения эффективности, а также для оптимизации параметров сепаратора большую информацию дает отслеживание траекторий частиц внутри установки [18–22]. Поэтому в работе кроме систем уравнений (1.1) и (3.1) дополнительно была исследована кинематика твердых частиц. Известно, что для отслеживания траекторий частиц удобным является подход Лагранжа. В лагранжевом подходе уравнения движения для частиц запишем в виде

$$\frac{d\bar{U}_{pi}}{dt} = k_i\left(\bar{U}_i - \bar{U}_{pi}\right), \quad \frac{d\bar{V}_{pi}}{dt} = k_i\left(\bar{V}_i - \bar{V}_{pi}\right), \quad \frac{d\bar{W}_{pi}}{dt} = k_i\left(\bar{W}_i - \bar{W}_{pi}\right)$$

В данной системе уравнений производная в левых частях уравнений является субстанциональной производной. Как видно из этой системы зная поле скоростей несущей газовой фазы можно определить скорости частиц, а по ним и траектории для каждой фракции. Для численной реализации приведенной системы уравнений была использована неявная схема Эйлера с пересчетом. На рис. 7 приведены траектории частиц размером 10 мкм, рассчитанные различными моделями. Из рисунка видно, что все модели предсказывают улавливание частиц размером 10 мкм. Однако по результатам двухжидкостной модели за счет циркуляции потока по часовой стрелке, эти частицы отбрасываются в сторону выхода воздуха.

Аналогичная картина траекторий для частиц размером 8 мкм представлена на рис. 8, из которого видно, что по модели SSG/LRR-RSM частицы имеют более сложную траекторию, чем в других моделях.

Как видно из приведенных рисунков путем отслеживания траекторий для каждой фракции твердой фазы можно определить эффективность сепаратора. Поэтому на рис. 9 приведены расчетные графики различных моделей для дисперсного распределения частиц цинка, осевшие в сепараторе. Для сравнения приведено также дисперсное распределение частиц, полученное лазерным анализатором. Анализ проводился

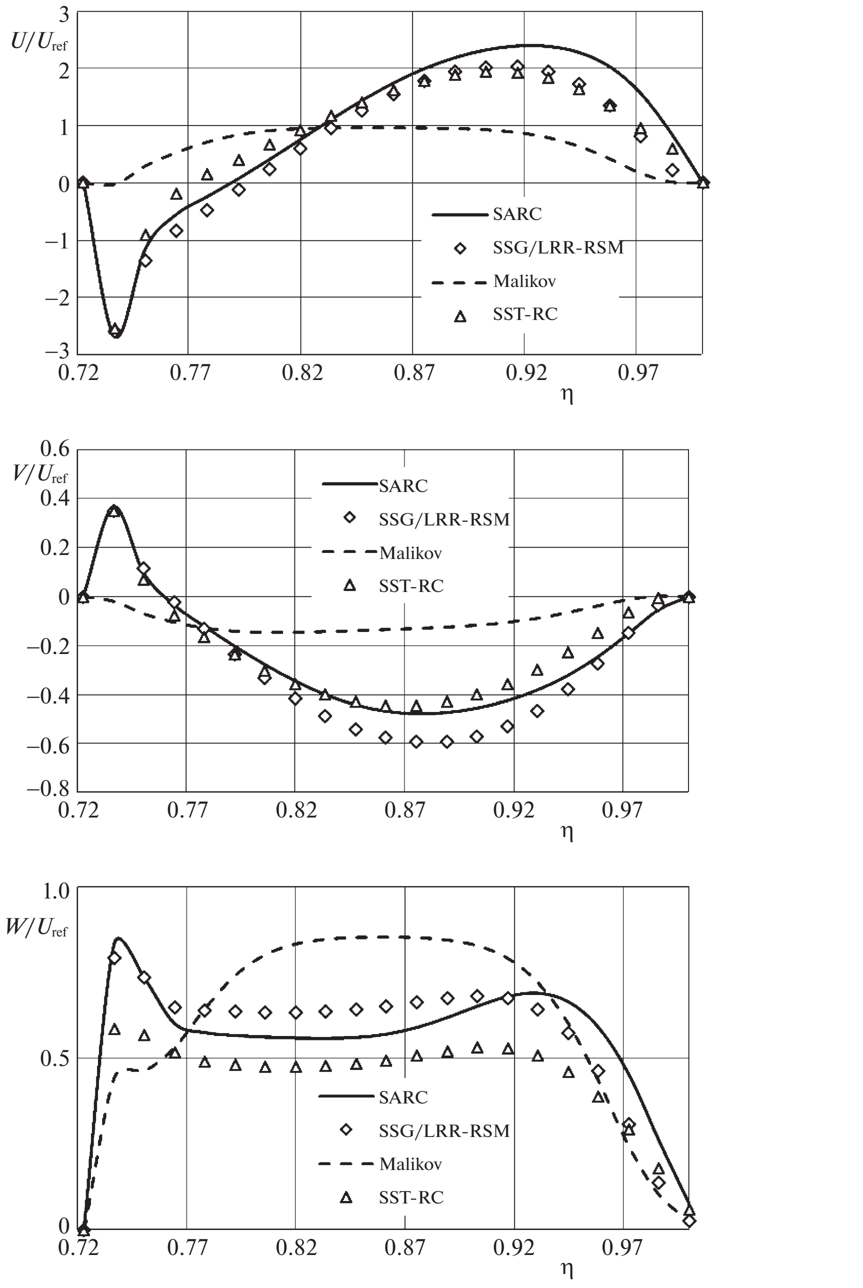


Рис. 4. Профили безразмерных аксиальной, радиальной и тангенциальной скоростей потока в сечении $z = 2$.

для уловленной пыли сепаратором. Видно, что наиболее близкие результаты к опытным данным имеет двухжидкостная модель турбулентности.

Выводы. Сопоставление численных результатов принципиально различных моделей турбулентности показывает, что они количественно дают разные результаты для

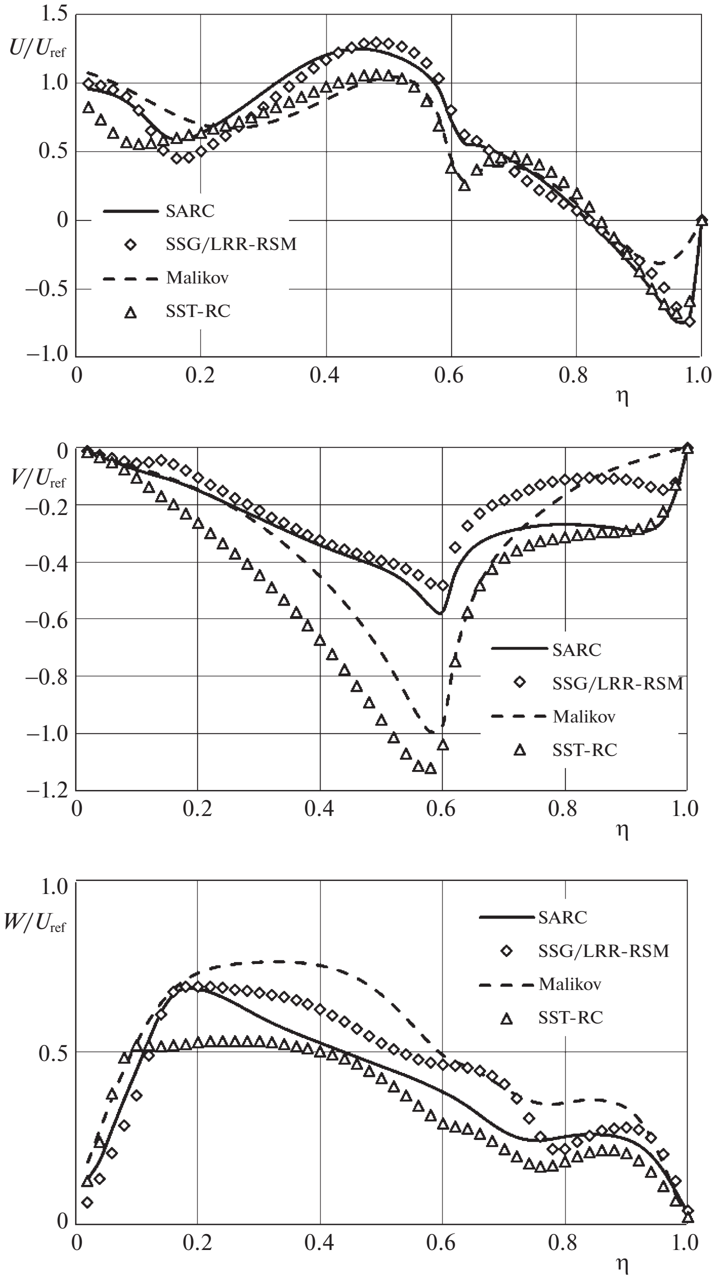


Рис. 5. Профили аксиальной, радиальной и тангенциальной скоростей потока в сечении $z = 3.5$.

параметров газового потока. Однако примерно одинаково предсказывают эффективность центробежного сепаратора. Численная реализация моделей показала, что эти модели имеют различные степени сложности в эксплуатации и требуют различные вычислительные ресурсы. Практически все модели турбулентности, кроме двухжид-

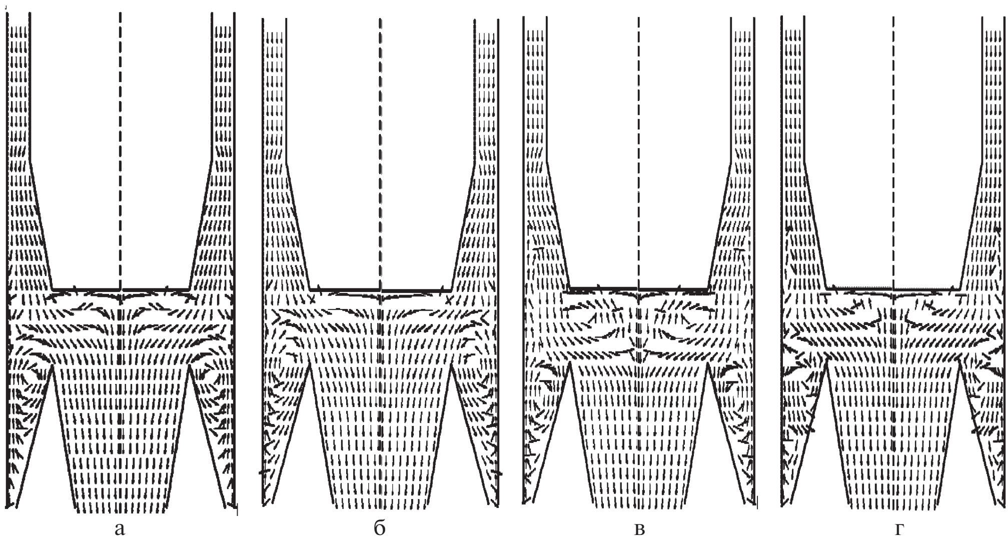


Рис. 6. Линии тока скорости в сепараторе, рассчитанные различными моделями. а) SARC, б) SST-RC, в) SSG/LRR-RSM, г) двухжидкостная модель.

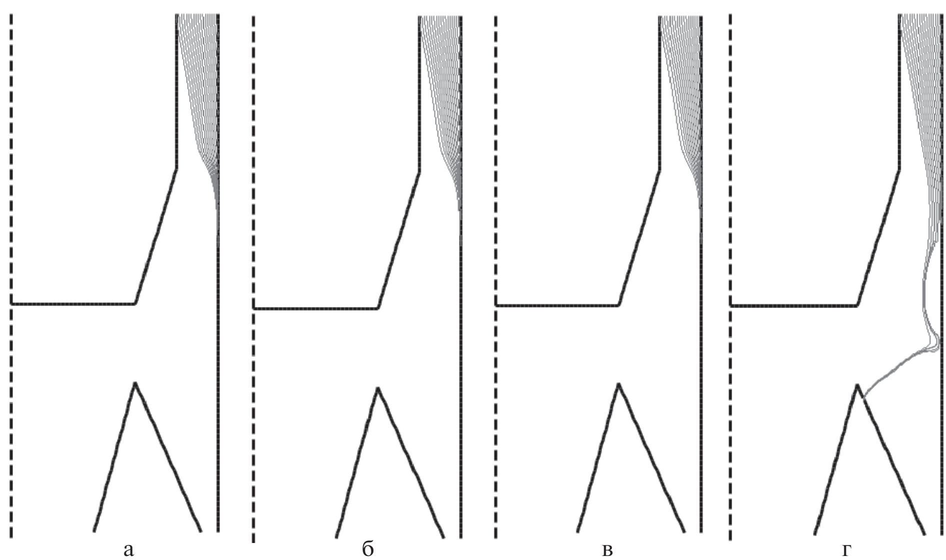


Рис. 7. Траектории частиц размером 10 мкм. а) SARC, б) SST-RC, в) SSG/LRR-RSM, г) двухжидкостная модель.

костной модели, для устойчивости требовали очень малые шаги интегрирования по времени, что сильно увеличивало вычислительный ресурс. Например, модели SARC и SST-RC интегрировались безразмерным шагом по времени $\Delta t = 10^{-4}$, модель SSG/LRR-RSM шагом $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$. При незначительном увеличении шагов интегри-

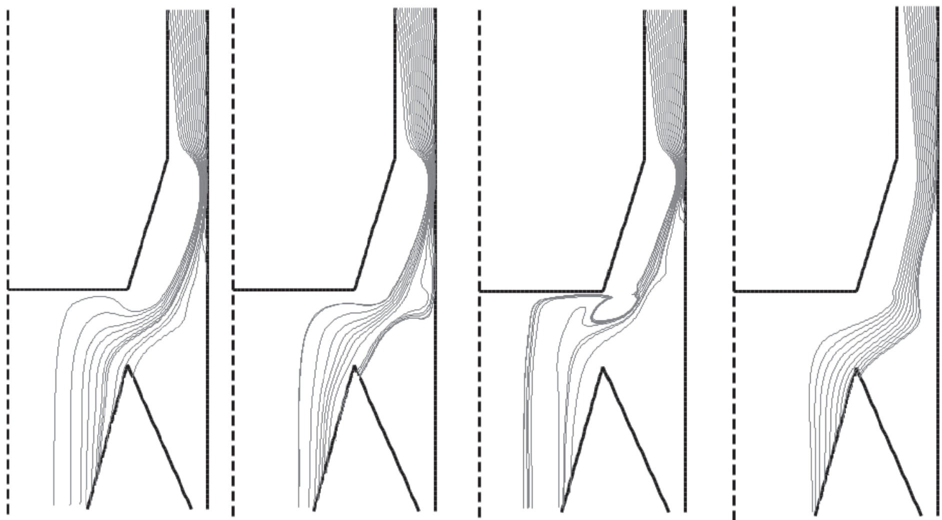


Рис. 8. Траектории частиц размером 8 мкм. а) SARC, б) SST-RC, в) SSG/LRR-RSM, г) двухжидкостная модель.

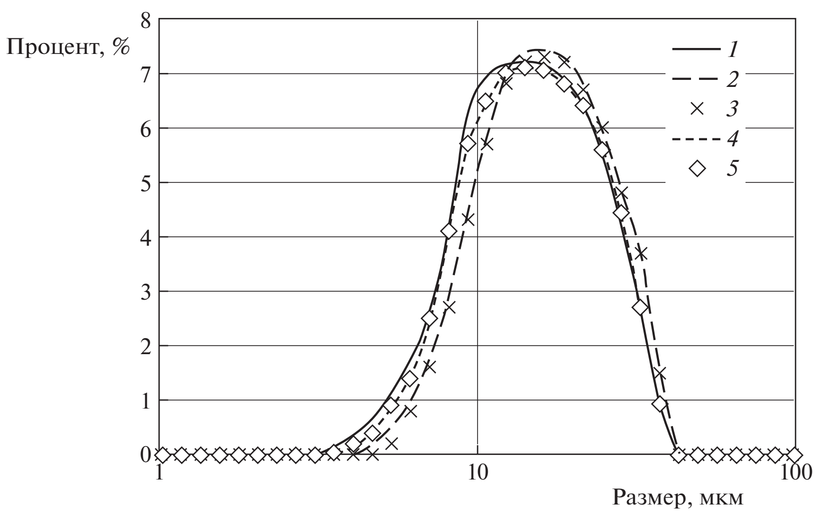


Рис. 9. Дисперсный анализ состава цинкового порошка из бункера сепаратора. *1* – SSG/LRR-RSM, *2* – SARC, *3* – SST-RC, *4* – новая двухжидкостная модель, *5* – данные анализатора.

рования эти модели давали неустойчивые решения. Что касается новой двухжидкостной модели, то она дала хорошие результаты при интегрировании шагом $\Delta t = 10^{-3}$. Кроме того, новая модель достаточно проста в реализации и дала наиболее близкие результаты к экспериментальным данным. Например, по сравнению с громоздкой моделью SSG/LRR-RSM, которая рекомендуется для расчетов течений с сильной закруткой потока, новая двухжидкостная модель оказалась существенно проще. Таким образом, представленный опыт, а также опыт из статьи [13] позволяют предположить, что новая двухжидкостная модель может оказаться эффективной при моделировании и других течений с анизотропной турбулентностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шваб А.В., Брендаков В.Н.* Математическое моделирование турбулентного течения в центробежном аппарате // Изв. Томского политехн. унив. 2005. Т. 308. № 3.
2. *Versteegh T.A., Nieuwstadt T.M.* Turbulent budgets of natural convection in an infinite, differentially heated, vertical channel // Intern. J. Heat Fluid Flow. 1997. V. 19. P. 135.
3. *Boudjemadi R., Maupu V., Laurence D., Le Quere P.* Direct Numerical simulation of natural convection in a vertical channel: a tool for second-moment closure modelling // Proc. Engng. Turbulence Modelling and Experiments 3. Amsterdam: Elsevier, 1996. P. 39.
4. *Peng S.H., Davidson L.* Large eddy simulation of turbulent buoyant flow in a confined cavity // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2001. V. 22. P. 323.
5. *Cabot W., Moin P.* Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow // Flow, Turbul.&Combus. 1999. V. 63. P. 269.
6. *Spalart P.R., Shur M.L.* On the sensitization of turbulence models to rotational and curvature // Aerosp. Sci.&Technol. 1997. V. 1. № 5. 297–302.
7. *Smirnov P., Menter F.* Sensitization of the SST turbulence model to rotation and curvature by applying the Spalart-Shur correction term // Proc. ASME Turbo Expo 2008: Power for Land, Sea and Air, GT 2008, Germany, Berlin, June 9–13, 2008. 10 p.
8. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flow // AIAA Paper. 1992. V. 12. № 1. P. 439–478.
9. *Menter F. R.* Zonal two-equation k-ω turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper 1993–2906.
10. *Sentyabov A.V., Gavrilov A.A., Dekterev A.A.* Investigation of turbulence models for computation of swirling flows // Thermophys.&Aeromech. 2011. V. 18. № 1. P. 73–85.
11. *Spalding D.B.* Chemical reaction in turbulent fluids // J. Physico-Chem. Hydrodyn. 1983. V. 4. P. 323–336.
12. *Spalding D.B.* A turbulence model for buoyant and combusting flows // 4th Int. Conf. on Numerical methods in Thermal Problems, Swansea, 15–18 July 1984. Also, as Imperial College report CFD/86/4 (1984).
13. *Malikov Z.* Mathematical model of turbulence based on the dynamics of two fluids// Appl. Math. Model. V. 82. P. 409–436.
14. *Nigmatulin R.I.* Dynamics of Multiphase Media. V. 1. New York: Hemisphere Publ. Corp., 1991. P. 30–34.
15. *Saffman P.G.* The lift on a small sphere in a slow shear flow // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. P. 385–400.
16. *Patankar S.V.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. New York: Hemisphere Publ. Corp., 1980.
17. *Peacemen D.W., Rachford H.H.* The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // J. Soc. Ind. Appl. Math. V. 3. P. 28–41.
18. *Василевский М.В., Зыков Е.Г.* Расчет эффективности очистки газа в инерционных аппаратах. Томск: Изд-во ТПУ, 2005. 86 с.
19. *Шиляев М.И., Шиляев А.М.* Моделирование процесса пылеулавливания в прямоточном циклоне. 1. Аэродинамика и коэффициент диффузии частиц в циклонной камере // Теплофизика и аэромеханика. 2003. Т. 10. № 2. С. 157–170.
20. *Шиляев М.И., Шиляев А.М.* Моделирование процесса пылеулавливания в прямоточном циклоне. 2. Расчет фракционного коэффициента проскока // Теплофизика и аэромеханика. 2003. Т. 10. № 3. С. 427–437.
21. *Баранов Д.А., Кутепов А.М., Лагуткин М.Г.* Расчет сепарационных процессов в гидроциклонах // Теоретич. основы хим. технол. 1996. Т. 30. № 2. С. 117–122.
22. *Ахметов Т.Г., Порфильева Р.Т., Гайсин Л.Г.* Химическая технология неорганических веществ. М.: Высшая школа, 2002. 688 с.

Numerical Simulation of Two Phase Flow in Centrifugal Separator

Z. M. Malikov[a,#] and M. E. Madaliev[a,##]

[a] *Institute of Mechanics and Earthquake Engineering of the Academy of Sciences of the Republic Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

[#]*e-mail: malikov.z62@mail.ru*

[##]*e-mail: Madaliev.ME2019@mail.ru*

The numerical results of mathematical modeling of a two-phase, axisymmetric swirling turbulent flow in the separation zone of a centrifugal separator are presented. For the reliability of the numerical results obtained, the dynamics of the carrier gas flow was modeled by various turbulence models. Is used the linear models SARC (Spalart-Allmaras Rotation/Curvature Correction) and SST-RC (Shear Stress Transport Rotation/Curvature Correction), the nonlinear model SSG/LRR-RSM-w2012 Reynolds stresses, as well as the new two-fluid model. For solving numerically, a longitudinal-transverse implicit scheme was used, and the connection of pressure with the velocity fields was realized using the SIMPLEC procedure. The results of comparing numerical calculations with experimental data are presented.

Keywords: Reynolds-averaged Navier-Stokes equations, SARC model, SST-RC model, SSG, LRR-RSM-w2012 model, Malikov model, centrifugal air separator, sweep, SIMPLEC

REFERENCES

1. *Schwab A.V., Brendakov V.N.* Mathematical modeling of turbulent flow in a centrifugal apparatus // Izv. Tomsk Polytech. Univ., 2005, vol. 308, no. 3. (in Russian)
2. *Versteegh T.A., Nieuwstadt T.M.* Turbulent budgets of natural convection in an infinite, differentially heated, vertical channel // Intern. J. Heat Fluid Flow, 1997, vol. 19, pp. 135.
3. *Boudjemadi R., Maupu V., Laurence D., Le Quere P.* direct numerical simulation of natural convection in a vertical channel: a tool for second-moment closure modelling // Proc. Enging. Turbulence Modelling and Experiments 3. Amsterdam: Elsevier, 1996. pp. 39.
4. *Peng S.H., Davidson L.* Large eddy simulation of turbulent buoyant flow in a confined cavity // Intern. J. Heat Fluid Flow, 2001, vol. 22, pp. 323.
5. *Cabot W., Moin P.* Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow // Flow, Turbul.&Combust., 1999, vol. 63, pp. 269.
6. *Spalart P.R., Shur M.L.* On the sensitization of turbulence models to rotational and curvature // Aerosp. Sci.&Techn., 1997, vol. 1, no. 5, pp. 297–302.
7. *Smirnov P., Menter F.* Sensitization of the SST turbulence model to rotation and curvature by applying the Spalart–Shur correction term // Proc. ASME Turbo Expo, 2008: Power for Land, Sea and Air, GT 2008, Germany, Berlin, June 9–13, 2008. 10 p.
8. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flow // AIAA Paper, 1992, vol. 12, no. 1, pp. 439–478.
9. *Menter F.R.* Zonal two-equation k-ω turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper, 1993–2906.
10. *Sentyabov A.V., Gavrilov A.A., Dekterev A.A.* Investigation of turbulence models for computation of swirling flows // Thermophys.&Aeromech., 2011, vol. 18, no. 1, pp. 73–85.
11. *Spalding D.B.* Chemical reaction in turbulent fluids // J. Phys.-Chem. Hydrodyn., 1983, vol. 4, pp. 323–336.
12. *Spalding D.B.* A turbulence model for buoyant and combusting flows // 4th Intern. Conf. on Numerical methods in Thermal Problems, Swansea, 15–18 July 1984. Also, as Imperial College report CFD/86/4 (1984).
13. *Malikov Z.* Mathematical model of turbulence based on the dynamics of two fluids // Appl. Math. Model., vol. 82, pp. 409–436.
14. *Nigmatulin R.I.* Dynamics of Multiphase Media. Vol 1. N. Y.: Hemisphere Publ. Corp., 1991. pp. 30–34.
15. *Saffman P.G.* The lift on a small sphere in a slow shear flow // J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, pp. 385–400.

16. *Patankar S.V.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. New York: Hemisphere Publ. Corp., 1980.
17. *Peacemen D.W., Rachford H.H.* The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // J. Soc. Ind. Appl. Math., vol. 3, pp. 28–41.
18. *Vasilevsky M.V., Zykov E.G.* Calculation of the Efficiency of Gas Purification in Inertial Apparatus. Tomsk: TPU Publ. House, 2005. 86 p. (in Russian)
19. *Shilyaev M.I., Shilyaev A.M.* Modeling the process of dust collection in a once-through cyclone. 1. Aerodynamics and the diffusion coefficient of particles in a cyclone chamber // Thermophys.&Aeromech., 2003, vol. 10, no. 2, pp. 157–170. (in Russian)
20. *Shilyaev M.I., Shilyaev A.M.* Modeling the process of dust collection in a once-through cyclone. 2. Calculation of the fractional slip coefficient // Thermophys.&Aeromech., 2003, vol. 10, no. 3, pp. 427–437. (in Russian)
21. *Baranov D.A., Kutepov A.M., Lagutkin M.G.* Calculation of separation processes in hydrocyclones // Theor. Found. Chem. Technol., 1996, vol. 30, no. 2, pp. 117–122. (in Russian)
22. *Akhmetov T.G., Porfilyeva R.T., Gaysin L.G.* Chemical Technology of Inorganic Substances. Moscow: Higher School, 2002. 688 p. (in Russian)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 5, с. 612–624

УДК 519.958:531.33:517.956.8

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ НА МАЛЫХ ЧАСТОТАХ В СОЧЛЕНЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

 С. А. Назаров*

Санкт-Петербургский государственный университет, С. Петербург, Россия

**e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk*

Поступила в редакцию 06.04.2020 г.
После доработки 22.05.2020 г.
Принята к публикации 11.06.2020 г.

Рассмотрено сочленение полубесконечных цилиндрических акустических волноводов в количестве N штук. Для малых частот построена асимптотика матрицы рассеяния. Эффекты почти полного отражения и прохождения волн обнаружены только для $N = 1$ и $N = 2$ при одинаковых площадях сечений цилиндров, но в других случаях какие-либо аномалии дифракции волн отсутствуют.

Ключевые слова: сочленение полубесконечных цилиндрических акустических волноводов, малые частоты, матрицы рассеяния и поляризации, асимптотика, аномалии Вайнштейна

DOI: 10.31857/S0032823520050069

1. Постановка задачи. Акустический волновод $\Xi \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, образован полубесконечными цилиндрами (рукавами)

$$\Pi_n = \{x : y^n = (y_1^n, \ldots, y_{d-1}^n) \in \varpi_n, z_n \geq 0\}, \quad n = 1, \ldots, N \tag{1.1}$$

и центральным ядром Θ (резонатором) – областью с липшицевой границей $\partial\Theta$ и компактным замыканием $\overline{\Theta} = \Theta \cup \partial\Theta$ (рис. 1). Система декартовых координат $x = (x_1, \ldots, x_d)$ соотнесена со всем сочленением Ω, а в рукавах (1.1) применяются локальные координаты y^n и z_n, поперечные и продольная. Поверхности $\partial\varpi_n$, ограничивающие сечения $\varpi_n \subset \mathbb{R}^{d-1}$ цилиндров (1.1), также являются компактными и липшицевыми. Масштабированием характерный размер резонатора Θ сведен к единице, и тем самым декартовы координаты и геометрические параметры сделаны безразмерными.

При частоте $\omega > 0$ гармонических во времени колебаний акустической среды давление u удовлетворяет краевой задаче Неймана для оператора Гельмгольца

$$-\Delta u(x) = \omega^2 u(x), \quad x \in \Xi = \Theta \cup \Pi_1 \cup \ldots \cup \Pi_N \tag{1.2}$$

$$\partial_\nu u(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi \tag{1.3}$$

Здесь $\nabla = \mathrm{grad}$, $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ – оператор Лапласа и ∂_ν – производная вдоль внешней нормали, определенная почти всюду на поверхности $\partial\Xi$, липшицевой по предположению. Обобщенная формулировка задачи (1.2), (1.3) сводится к интегральному тождеству [1]

$$(\nabla u, \nabla v)_\Xi = \omega^2 (u, v)_\Xi \quad v \in C_c^\infty(\overline{\Xi}) \tag{1.4}$$

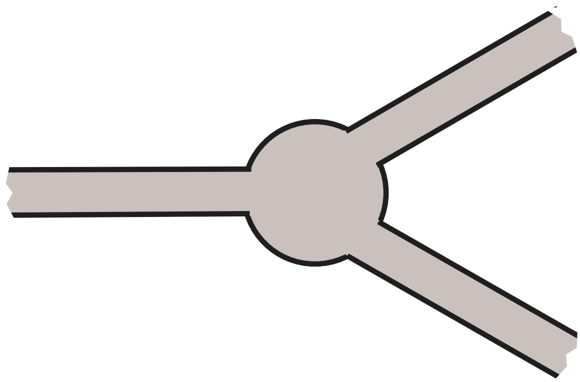


Рис. 1.

При этом $(\,,\,)_\Xi$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Xi)$, а пробные функции $v \in C_c^\infty(\overline{\Xi})$ считаются бесконечно дифференцируемыми и имеющими компактные носители потому, что далее изучаются решения, не затухающие на бесконечности, т.е. не попадающие в пространство Соболева $H^1(\Xi)$. Из-за возможных особенностей решений в иррегулярных точках границы $\partial\Xi$ всюду под решениями краевых задач в неограниченной области Ξ понимаем именно функции, удовлетворяющие соответствующим интегральным тождествам вида (1.4).

Проверено [2], что непрерывный спектр оператора задачи (1.4) (или краевой задачи (1.2), (1.3) в случае гладкой границы $\partial\Xi$) занимает замкнутую положительную полуось $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty)$. Таким образом, при любой частоте $\omega > 0$ в рукавах (1.1) возникают поршневые моды

$$w_n^{\omega\pm}(z_n) = a_n^\omega e^{\pm iz_n} \tag{1.5}$$

$$a_n^\omega = \omega^{-1/2}a_n, \quad a_n = (2|\varpi_n|)^{-1/2} \tag{1.6}$$

Нормирующий множитель a_n^ω, включающий $(d-1)$-мерный объем $|\varpi_n|$ сечения ϖ_n, нужен для придания полезных свойств используемых далее объектам. Согласно классическому принципу излучения Зоммерфельда [2, 3] волна $w_n^{\omega-}$ приходящая в рукаве Π_n, а волна $w_n^{\omega+}$ уходящая на бесконечность.

Основная цель настоящей работы – изучение дифракционных характеристик сочленения Ξ акустических волноводов $\Pi_1, \ldots, \Pi_N$ на малых частотах, т.е. при $\omega \ll 1$. Далее решение задачи (1.4) или (1.2), (1.3) удобно обозначать u^ω. Полученные асимптотические формулы показывают, что в главном структура матрицы рассеяния в волноводе Ξ зависит только от количества N рукавов и $(d-1)$-мерного объема (площади при $d = 3$) сечений ϖ_n. Какие-либо странности в процессе рассеяния волн происходят только в случаях $N = 1$, $N = 2$ и при одинаковых объемах сечений

$$|\varpi| := |\varpi_1| = \ldots = |\varpi_N| \tag{1.7}$$

2. Матрица рассеяния и главный член ее асимптотики. Акустическое поле, инициированное приходящей в рукаве Π_m волной, допускает представление

$$\zeta_m^\omega(x) = \chi_m(z_m)w_m^{\omega-}(z_n) + \sum_{n=1}^{N}\chi_n(z_n)S_{mn}^\omega w_n^{\omega+}(z_n) + \breve{\zeta}_m^\omega(x) \tag{2.1}$$

При этом $\tilde{\zeta}_m^{\omega}$ – экспоненциально затухающий на бесконечности остаток, а χ_n – гладкая срезающая функция, служащая для локализации волн в рукаве Π_n

$$\chi_n(z_n) = 1 \quad \text{при} \quad z_n > 1, \quad \chi_n(z_n) = 0 \quad \text{при} \quad z_n < 0, \quad 0 \le \chi \le 1 \tag{2.2}$$

Коэффициенты S_{mn}^{ω} разложений (2.1) образуют $(N \times N)$-матрицу S^{ω}, называемую матрицей рассеяния и в силу выбора нормирующих множителей (1.6) являющуюся унитарной и симметричной, но не обязательно эрмитовой (простая проверка этих свойств представлена, например, в статье [4]).

Определим главный член асимптотики матрицы рассеяния

$$S^{\omega} = S^0 + \omega S' + \omega^2 S'' + \ldots \tag{2.3}$$

Здесь и далее многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные для предпринимаемого формального анализа. Оценки асимптотических остатков будут приведены в разд. 5.

Метод сращиваемых асимптотических разложений [5, 6], ([7], Гл. 2) был приспособлен [4, 8] к исследованию бесконечных волноводов. Применим формулу Тейлора к волнам (1.5)

$$w_n^{\omega\pm}(z_n) = \omega^{-1/2} a_n \left(1 \pm i\omega z_n - \omega^2 \frac{z_n^2}{2} + O(\omega^3 z_n^3)\right) \tag{2.4}$$

В итоге внешние разложения решения (2.1) в рукавах (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned}\zeta_m^{\omega}(x) = \omega^{-1/2} a_n((\delta_{m,n} + S_{mn}^0) + \omega(i(-\delta_{m,n} + S_{mn}^0)z_n + S'_{mn}) + \\ + \omega^2(-(\delta_{m,n} + S_{mn}^0)\frac{z_n^2}{2} + iS'_{mn}z_n + S''_{mn}) + \ldots) \quad \text{в} \quad \Pi_n\end{aligned} \tag{2.5}$$

Множители при $\omega^{p-1/2}$ предписывают поведение на бесконечности членов внутреннего разложения, пригодного для описания поля ζ_m^{ω} вблизи резонатора Θ

$$\zeta_m^{\omega}(x) = \omega^{-1/2}(Z_m^0(x) + \omega Z'_m + \omega^2 Z''_m + \ldots) \tag{2.6}$$

Ввиду “излишней малости” спектрального параметра ω^2 правой частью уравнения Гельмгольца (1.2) можно пренебречь, и поэтому первые два члена разложения (2.6) суть решения однородных задач Неймана для оператора Лапласа

$$-\Delta Z_m^0(x) = 0, \quad x \in \Xi, \quad \partial_\nu Z_m^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi \tag{2.7}$$

$$-\Delta Z'_m(x) = 0, \quad x \in \Xi, \quad \partial_\nu Z'_m(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi, \tag{2.8}$$

однако уравнение в задаче для Z''_m становится неоднородным

$$-\Delta Z''_m(x) = Z_m^0(x), \quad x \in \Xi, \quad \partial_\nu Z''_m(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi \tag{2.9}$$

При учете слагаемых порядка $\omega^{-1/2}$ в соотношении (2.5) получим для решения задачи (2.7) условия на бесконечности

$$Z_m^0(x) = a_n(\delta_{m,n} + S_{mn}^0) + o(1) \quad \text{где} \quad z_n \to +\infty \quad \text{в} \quad \Pi_n \tag{2.10}$$

В итоге гармоническая функция Z_m^0 ограничена и, следовательно, равна какой-то постоянной c_m^0, причем в силу формул (2.10) и (1.6) имеем

$$S_{mn}^0 = -\delta_{m,n} + (2|\varpi_n|)^{1/2} c_m^0 \tag{2.11}$$

Выделив в разложении (2.5) члены $O(\omega^{1/2})$, видим, что решение Z'_m задачи (2.8) нужно подчинить условию

$$Z'_m(x) = -ia_n(\delta_{m,n} - S^0_{mn})z_n + a_n S'_{mn} + o(1) \quad \text{при} \quad z_n \to +\infty \quad \text{в} \quad \Pi_n \tag{2.12}$$

Из-за линейного роста при $z_n \to +\infty$ такая гармоническая функция, обладающая нулевой нормальной производной на поверхности $\partial\Xi$, существует в том и только в том случае, если суммарный поток на бесконечность обращается в нуль, а именно

$$0 = -\lim_{R\to+\infty}\int_{\Xi(R)} \Delta Z'_m(x)dx = \lim_{R\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_{\varpi_n} \frac{\partial Z'_m}{\partial z_n}(x)\Bigg|_{z_n=R} dy^n =$$

$$= -i\sum_{n=1}^{N}|\varpi_n|a_n\left(\delta_{m,n} - S^0_{mn}\right) \tag{2.13}$$

Иными словами, соотношение (2.13) служит условием существования решения (2.12) задачи (2.9).

В силу формулы (1.6) равенства (2.11) и (2.13) позволяют вычислить постоянную

$$c^0_m = \Sigma^{-1}\sqrt{2|\varpi_m|} \tag{2.14}$$

$$\Sigma = |\varpi_1| + \ldots + |\varpi_N| \tag{2.15}$$

Следовательно

$$S^0_{mn} = 2\Sigma^{-1}\sqrt{|\varpi_m||\varpi_n|} - \delta_{m,n}, \quad m, n = 1, \ldots, N \tag{2.16}$$

Для того чтобы описать простейшие свойства матрицы S^0 с элементами (2.16) введем ортогональный проектор P и диагональную матрицу B

$$P = I - \Sigma^{-1}BEB, \quad B = \operatorname{diag}\left\{\sqrt{|\varpi_1|}, \ldots, \sqrt{|\varpi_N|}\right\} \tag{2.17}$$

Здесь I и E – матрицы размером $N \times N$, соответственно единичная и составленная из N^2 единиц, а след $\operatorname{tr} B^2$ матрицы $B^2 = \operatorname{diag}\{|\varpi_1|, \ldots, |\varpi_N|\}$ совпадает с величиной (2.15). Итак, матрица S^0 приобретает вид

$$S^0 = 2\Sigma^{-1}BEB - I = I - 2P \tag{2.18}$$

и является ортогональной (вещественной унитарной), так как $EB^2E = E \operatorname{tr} B^2$ и

$$P^2 = I - 2\Sigma^{-1}BEB + \Sigma^{-2}BEB^2EB = I - \Sigma^{-1}BEB = P$$

$$(S^0)^* S^0 = (I - P)^2 = I - 4P + 4P^2 = I$$

При этом $(S^0)^*$ – сопряженная для S^0 матрица, совпадающая с транспонированной $(S^0)^{\mathrm{T}}$ ввиду вещественности S^0, т.е. T – знак транспонирования.

Матрица (2.18) имеет собственные числа -1 и 1, причем первое простое и ему отвечает собственный вектор

$$b = \left(\sqrt{|\varpi_1|}, \ldots, \sqrt{|\varpi_N|}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N$$

Кратность второго собственного числа равна $N - 1$ и $P\mathbb{R}^N$ – соответствующее собственное подпространство.

3. Матрица поляризации и поправочный член асимптотики. Задача Неймана для уравнения Лапласа

$$-\Delta u^0(x) = 0, \quad x \in \Xi, \quad \partial_\nu u^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi, \tag{3.1}$$

помимо постоянного решения $Y_0(x) = 1$ обладает решениями $Y_1, \ldots, Y_N$ с линейным ростом на бесконечности

$$Y_m(x) = \sum_{n=1}^{N} \chi_n(z_n)\left(\left(\delta_{m,n} - \frac{1}{N}\right)\frac{z_n}{|\varpi_n|} + M_{mn}\right) + \tilde{Y}_m(x), \quad m = 1, \ldots, N \tag{3.2}$$

и остатками $\tilde{Y}_m$, экспоненциально затухающими при $|x| \to \infty$. У каждого из решений (3.2) суммарный поток на бесконечность обращается в нуль (ср. выкладку (2.13)). Таким образом, правая часть уравнения Пуассона в задаче Неймана для остатка $\tilde{Y}_m$ имеет компактный носитель Υ_m и нулевое среднее по множеству Υ_m, а значит, гармонические функции Y_m действительно существуют и их поведение при $z_n \to \infty$ выясняется при помощи метода Фурье.

Решения (3.2) ищем в виде

$$Y_m(x) = \sum_{n=1}^{N} \chi_n(z_n)\left(\delta_{m,n} - \frac{1}{N}\right)\frac{z_n}{|\varpi_n|} + \hat{Y}_m(x) \tag{3.3}$$

Правая часть

$$\hat{F}_m(x) = \sum_{n=1}^{N}\left(\delta_{m,n} - \frac{1}{N}\right)\frac{1}{|\varpi_n|}\left(2\frac{\partial\chi_n}{\partial z_n}(z_n) + z_n\frac{\partial^2\chi_n}{\partial z_n^2}(z_n)\right)$$

уравнения Пуассона в задаче Неймана для слагаемого $\hat{Y}_m$ суммы (3.3)

$$-\Delta\hat{Y}_m(x) = \hat{F}_m(x), \quad x \in \Xi, \quad \partial_\nu\hat{Y}_m(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi$$

имеет компактный носитель и нулевое среднее по Ξ

$$\int_{\Xi}\hat{F}_m(x)dx = \lim_{R\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{|\varpi_n|}\left(\delta_{m,n} - \frac{1}{N}\right)\int_{\varpi_n\times(0,R)}\frac{\partial^2}{\partial z_n^2}(z_n\chi_n(z_n))dy^n dz_n =$$
$$= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{|\varpi_n|}\left(\delta_{m,n} - \frac{1}{N}\right)\int_{\varpi_n}dy^n = \sum_{n=1}^{N}\left(\delta_{m,n} - \frac{1}{N}\right) = 0$$

Следовательно, существует решение задачи (3.3) с конечным интегралом Дирихле, которое согласно методу Фурье ограничено и стабилизируется в рукавах Π_n к некоторым постоянным M_{mn}. Поскольку решение $\hat{Y}_m$ определено с точностью до постоянного слагаемого, можно соблюсти равенства

$$M_{m1} + \ldots + M_{mN} = 0, \quad m = 1, \ldots, N$$

Итак, матрица $M = (M_{mn})$ размером $N \times N$, составленная из коэффициентов в разложениях (3.2) и называемая матрицей поляризации, удовлетворяет соотношению

$$ME = 0 \in \mathbb{R}^{N\times N} \tag{3.4}$$

Функции (3.2) линейно зависимы. В самом деле, сумма $Y_1 + \ldots + Y_N$ ограничена в Ξ, т.е. является постоянной, причем равенства (3.4) обеспечивают тождество

$$Y_1(x) + \ldots + Y_N(x) = 0, \quad x \in \Xi \tag{3.5}$$

Введем ортогональный проектор

$$Q = I - N^{-1}E \tag{3.6}$$

и заметим, что матрица поляризации осуществляет взаимно однозначное отображение

$$M : Q\mathbb{R}^N \to Q\mathbb{R}^N \tag{3.7}$$

При этом

$$Q\mathbb{R}^N = \{c \in \mathbb{R}^N : e^{\mathrm{T}}c = 0\}, \quad Q^2 = I - 2N^{-1}E + N^{-2}E^2 = Q$$

Кроме того, матрица поляризации симметрична, так как в силу формулы Грина и соотношений (3.4) имеем

$$0 = \lim_{R\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{\varpi_n} \left(Y_m(x) \frac{\partial Y_p}{\partial z_n}(x) - Y_p(x) \frac{\partial Y_m}{\partial z_n}(x) \right)\Bigg|_{z_n = R} dy^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \left(M_{mn}\left(\delta_{p,n} - \frac{1}{N}\right) - M_{pn}\left(\delta_{m,n} - \frac{1}{N}\right)\right) = M_{mp} - M_{pm}$$

Из решений (3.2) и $Y_0(x) = 1$ задачи (3.1) соорудим решение $Z'_m(x)$ задачи (2.8), (2.12). С этой целью удобно использовать запись

$$\mathbf{G} \approx Tg$$

и интерпретировать ее как разложение столбца функций $\mathbf{G} = (G_1, \ldots, G_N)^{\mathrm{T}}$

$$\mathbf{G}(x) = \sum_{n=1}^{N} \chi_n(z_n) T^n g_n(z_n) + \tilde{\mathbf{G}}(x)$$

Здесь $T = (T^1, \ldots, T^N)$ – числовая $(N \times N)$-матрица со столбцами $T^n \in \mathbb{C}^N$, $g = (g_1, \ldots, g_N)^{\mathrm{T}}$ – столбец функций переменных z_n, а $\tilde{\mathbf{G}}$ – столбец экспоненциально затухающих остатков. В результате формулы (2.12) и (3.2) принимают вид

$$\mathbf{Z}' = (Z'_1, \ldots, Z'_N)^{\mathrm{T}} \approx -2^{-1/2} i(1 - S^0)B^{-1}\mathbf{z} + 2^{-1/2} S' B^{-1}\mathbf{1} \tag{3.8}$$

$$\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_N)^{\mathrm{T}} \approx QB^{-2}\mathbf{z} + M\mathbf{1} \tag{3.9}$$

Введены обозначения $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_N)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$.

Сравнивая разложения (3.8) и (3.9), находим, что

$$\mathbf{Z}' = -2^{-1/2} i(I - S^0)BQ^{-1}\mathbf{Y} + C' B^{-1} b \approx$$

$$\approx -2^{1/2} i(I - S^0)BQB^{-2}\mathbf{z} - \left(2^{1/2} i(I - S^0)BQ - C'E\right)\mathbf{1} \tag{3.10}$$

Здесь $C' = \mathrm{diag}\{C'_1, \ldots, C'_N\}$ – неизвестная числовая диагональная матрица. В силу соотношения (3.5) при любом $x \in \Xi$ справедливо включение $\mathbf{Y}(x) \in Q\mathbb{R}^N$. Следовательно, выражение $Q^{-1}\mathbf{Y}$ определено корректно и, кроме того, множитель Q^{-1} можно не писать, так как сужение проектора Q на подпространство $Q\mathbb{R}^N$ – тождественное отображение. Наконец, $Q^{-1}M = M$ согласно формуле (3.7).

Итак, соотношения (3.8)–(3.10) дают равенство

$$S' = -i(I - S^0)BMB + \sqrt{2}C'EB \tag{3.11}$$

Для определения последнего слагаемого нужно было бы построить следующий член $\omega^2 S''$ разложения (2.3). Точно так же для вычисления главного члена (2.18) потребовалась первичная информация о коэффициентах представления (2.12) асимптотических поправок Z'_m в разложениях (2.6).

4. Упрощенная постановка: второй поправочный член. В предыдущих разделах был построен главный член асимптотики (2.3) матрицы рассеяния, достаточный для целей данной работы. Закончим построение поправочного члена (3.11) в предположении (1.7), которое упомянуто в разд. 1 и будет принято в разд. 6 при обсуждении аномалий рассеяния. В этом случае формулы (3.6), (2.17) и (2.14), (2.18) принимают вид

$$P = Q = I - \frac{1}{N}E, \quad B = |\varpi| I \tag{4.1}$$

$$c_m^0 = c^0 := \frac{1}{N}\sqrt{\frac{2}{|\varpi|}} \tag{4.2}$$

$$S^0 = \frac{2}{N}E - I \tag{4.3}$$

Соотношения (1.7) и (3.7) обеспечивают равенство

$$(I - S^0)BM = 2|\varpi|^{-1/2}QM = 2|\varpi|^{-1/2}M \tag{4.4}$$

Таким образом, в формуле (3.11) для поправочного члена $\omega S'$ нужно найти лишь диагональную матрицу C'.

В отличие от гармонических функций Z_m^0 и Z'_m третий член Z''_m разложения (2.6) – решение неоднородной задачи Неймана (2.9). Ищем его в виде

$$Z''_m(x) = Y''_m(x) + \sum_{p=1}^{N} K_p Y_p(x) + K_0 Y_0(x) \tag{4.5}$$

$$Y''_m(x) = \sum_{n=1}^{N} \chi_n(z_n)\left(-c^0\frac{z_n^2}{2} + c''_m z_n + M''_{mn}\right) + \ddot{Y}''_m(x) \tag{4.6}$$

Остаток $\ddot{Y}''_m(x)$ исчезает на бесконечности с экспоненциальной скоростью, c^0 – величина (4.2), $Y_1, \ldots, Y_N$ и $Y_0 = 1$ – введенные в разд. 3 решения задачи (3.1), а χ_n – срезающие функции (2.2). Присутствие в сумме (4.5) слагаемых Y_m с разложениями (3.2) и произвол в выборе коэффициентов $K_1, \ldots, K_N$, образующих матрицу $K = \mathrm{diag}\{K_1, \ldots, K_N\}$, позволили ввести одинаковый множитель (4.2) при z_n в асимптотике (4.6) на каждом из рукавов $\Pi_1, \ldots, \Pi_N$.

Постоянные слагаемые $M''_{mn} \in \mathbb{R}$ далее не понадобятся, а множитель c''_m в линейных членах вычисляется при помощи формулы Грина

$$-\int_{\Xi(R)} Z_m^0(x)dx = \int_{\Xi(R)} \Delta Z''_m(x)dx = \sum_{n=1}^{N}\left[\sum_{p=1}^{N}\int_{\varpi_n} K_p \frac{\partial Y_p}{\partial z_n}(x)\Big|_{z_n=R} dy^n + \int_{\varpi_n}\frac{\partial Y''_m}{\partial z_n}(x)\Big|_{z_n=R} dy^n\right] =$$
$$= \sum_{n=1}^{N}\left[\sum_{p=1}^{N} K_p\left(\delta_{p,n} - \frac{1}{N}\right) + |\varpi_n|(c''_m - c^0 R)\right] = \Sigma(c''_m - c^0 R)$$

При этом

$$Z_m^0(x) = c^0, \quad \Xi(R) = \Theta \cup \bigcup_{n=1}^{N}\{x : y^n \in \varpi_n, z_n \in [0, R)\}, \quad |\Xi(R)| = |\Theta| + NR|\varpi|$$

Следовательно, при учете формулы (2.14) получим

$$c'' := c''_m = -c^0\frac{|\Theta|}{N|\varpi|} = -\frac{|\Theta|}{N^2}\sqrt{\frac{2}{|\varpi|^3}} \tag{4.7}$$

Согласно разложениям (2.5) и (2.6) решениям Z''_m задачи (2.9) предписано такое поведение на бесконечности:

$$\mathbf{Z}'' \approx \frac{1}{\sqrt{2|\varpi|}}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{z}^2 + iS'\mathbf{z} + S''\mathbf{1}\right) \tag{4.8}$$

Сравнивая соотношения (4.5), (3.3), (4.6) и (4.8), находим

$$i(2|\varpi|)^{-1/2}S' = KP + c''I \tag{4.9}$$

Теперь при учете формул (3.11), (4.1), (4.4), (4.6) и (4.7) получим

$$S' = -i(I - S^0)M - i\sqrt{2|\varpi|}c''E = 2i\left(M + \frac{1}{N^2}\frac{|\Theta|}{|\varpi|}E\right) \tag{4.10}$$

Соотношение (4.9) позволяет вычислить и коэффициенты $K_1, \ldots, K_N$ представления (4.5), однако явное выражение для них не понадобится.

5. Полные асимптотические ряды и обоснование асимптотики. Построение асимптотики матрицы рассеяния можно продолжить и вычислить коэффициенты формального ряда

$$S^\omega \cong S^0 + \sum_{k=1}^{\infty}\omega^k S^{(k)} \tag{5.1}$$

В рамках метода сращиваемых разложений (см. [5, 6] и др.) скорость полиномиального роста решений предельной задачи (3.1) неограниченно возрастает от шага к шагу итерационного процесса, что делает сопутствующие рассуждения и выкладки излишне сложными и громоздкими. Поэтому более удобно применить метод составных разложений (см. [7, 9] и др.) и искать представление решения (2.1) в виде суммы формальных рядов

$$\zeta_m^\omega(x) \cong \chi_m(z_m)w_m^{\omega-}(z_m) + \sum_{n=1}^{N}\chi_n(z_n)\sum_{j=0}^{\infty}\omega^j S_{mn}^{(j)}w_n^{\omega+}(z_n) + \sum_{j=0}^{\infty}\omega^j\tilde{Z}_m^{(j)}(x) \tag{5.2}$$

Алгоритм определения членов $\tilde{Z}_m^{(j)}$ и $S_{mn}^{(j)}$ весьма прост: волны (1.5) раскладываются в ряды Тейлора (ср. формулы (2.4) и (2.5)), а функции $\tilde{Z}_m^{(j)}$ служат для компенсации невязок, возникающих вследствие умножения названных волн на срезки (2.2), и приобретают экспоненциальное затухание при $|x| \to +\infty$ в результате подбора коэффициентов $S_{mn}^{(j)}$. При этом условия существования решения $u^0 \in H^1(\Xi)$ неоднородной задачи (3.1)

$$-\Delta u^0(x) = f(x), \quad x \in \Xi, \quad \partial_\nu u^0(x) = g(x), \quad x \in \partial\Xi \tag{5.3}$$

принимают вид

$$\int_{\Xi} Y_q(x)f(x)dx + \int_{\partial\Xi} Y_q(x)g(x)ds_x = 0, \quad q = 0,1,\ldots,N \tag{5.4}$$

В силу соотношения (3.5) условия ортогональности (5.4) с индексами $q = 1,\ldots,N$ линейно зависимы, и поэтому формулы (5.4) фиксируют только N связей и позволяют поочередно вычислить коэффициенты $S_{mn}^{(j)}$.

Обоснование асимптотических разложений проводится при помощи техники весовых пространств с отделенной асимптотикой [4, 8]. Обозначим $W^1_\beta(\Xi)$ пространство Кондратьева [10], полученное пополнением линейного множества $C^\infty_c(\overline{\Xi})$ (бесконечно дифференцируемые функции с компактными носителями) по весовой соболевской норме

$$\left\| v; W^1_\beta(\Xi) \right\| = \left(\left\| e^{\beta|x|} \nabla v; L^2(\Xi) \right\|^2 + \left\| e^{\beta|x|} v; L^2(\Xi) \right\|^2 \right)^{1/2}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Пространство $W^1_{\beta,\omega}(\Xi)$ составлено из функций

$$u^\omega(x) = \sum_{n=1}^{N} \chi_n(z_n) b_n^\omega w_n^{\omega+}(z_n) + \tilde{u}^\omega(x) \tag{5.5}$$

и снабжено гильбертовой нормой

$$\left\| u^\omega; W^1_{\beta,\omega}(\Xi) \right\| = \left[\sum_{n=1}^{N} \left| b^\omega \right|^2 + \omega \left\| \ddot{u}^\omega; W^1_\beta(\Xi) \right\|^2 \right]^{1/2} \tag{5.6}$$

Коэффициент $\omega^{1/2}$ при $\left\| \ddot{u}^\omega; W^1_\beta(\Xi) \right\|$ учитывает наличие большого множителя $a_n^\omega = O(\omega^{-1/2})$ в волнах (1.5) и тем самым уравнивает вклады слагаемых суммы (5.5) в составную норму (5.6).

Поскольку разложение (5.5) поля $u^\omega \in W^1_{\beta,\omega}(\Xi)$ включает только уходящие в рукавах Π_n волны $w_n^{\omega+}$ и исчезающий на бесконечности с экспоненциальной скоростью остаток $\ddot{u}^\omega$, интегральное тождество

$$(\nabla u^\omega, \nabla v^\omega)_\Xi - \omega^2 (u^\omega, v^\omega)_\Xi = F(v^\omega), \quad v \in W^1_\beta(\Xi) \tag{5.7}$$

отвечает постановке условий излучения Зоммерфельда в задаче (5.3). При этом F — линейный непрерывный функционал на пространстве $W^1_{-\beta}(\Xi)$, принадлежащий сопряженному пространству $W^1_{-\beta}(\Xi)^*$, например

$$F(v^\omega) = (f, v^\omega)_\Xi + (g, v^\omega)_{\partial\Xi}, \quad \text{где} \quad e^{\beta|x|} f \in L^2(\Xi), \quad e^{\beta|x|} g \in L^2(\partial\Xi)$$

Проверено [11, Гл. 5], [4, 8], что существует зависящее от области Ξ число $\beta_\Xi > 0$, для которого при $\beta \in (0, \beta_\Xi)$ оператор задачи (5.7)

$$W^1_{\beta,\omega}(\Xi) \ni u^\omega \mapsto A_\beta(\omega) u^\omega = F \in W^1_{-\beta}(\Xi)^*$$

осуществляет изоморфизм, причем его норма и норма обратного не превосходят $c\omega^{-1/2}$.

Обоснование асимптотики (5.1) матрицы рассеяния S^ω проводится по стандартной схеме [4, 8]. Зафиксируем натуральное число J и в качестве приближения $\zeta_m^{\omega as}$ к функции ζ_m^ω возьмем частичные суммы рядов (5.2) (ограничиваем суммирование по $j = 0, 1, \ldots, J$). По построению функция $\zeta_m^{\omega as}$ оставляет малую невязку порядка $\omega^{J-1/2}$ в задаче (1.2), (1.3), так что правая часть $F^{(j)}$ интегрального тождества вида (5.7) для разности $\zeta_m^\omega - \zeta_m^{\omega as}$, освободившейся от приходящей волны $w_m^{\omega-}$, удовлетворяющей усло-

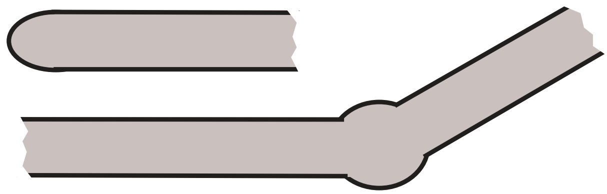


Рис. 2.

виям излучения Зоммерфельда и потому принадлежащей пространству $W^1_{\beta,\omega}(\Xi)$, выполнено соотношение

$$\left\| F^{(j)}; W^1_{-\beta}(\Xi)^* \right\| \le c_J \omega^{J-1/2}$$

В результате упомянутая оценка нормы обратного оператора $A_\beta(\omega)^{-1}$ дает неравенство

$$\left\| \zeta_m^\omega - \zeta_m^{\omega as}; W^1_{\beta,\omega}(\Omega) \right\| \le c\omega^{-1/2} \left\| F^{(j)}; W^1_{-\beta}(\Xi)^* \right\| \le C_J \omega^{J-1} \tag{5.8}$$

Норма (5.6) включает модули коэффициентов рассеяния, а значит, неравенство (5.8) влечет за собой искомую оценку

$$\left| S_m^\omega - \sum_{j=0}^{N} \omega^j S^{(j)} \right| \le C_J \omega^{J-1} \tag{5.9}$$

Понижение степени малого параметра ω на единицу в мажоранте (5.9) означает, что в сумме присутствует “лишний” член $\omega^J S^{(J)}$, который следует присоединить к остатку. Точно так же в разд. 2 для вычисления главного члена (2.18) асимптотики матрицы рассеяния потребовалось обследовать основную поправку $\omega S' = \omega S^{(1)}$.

6. Аномалии Вайнштейна. Явные формулы [12] для акустического поля в полубесконечной цилиндрической круговой трубе, открытой в пространство $\mathbb{R}^3$, указывают на эффект “почти полного” отражения волны, приходящей с бесконечности в трубе. Такое необычное поведение волн на околопороговых частотах можно смоделировать слабопроницаемой мягкой стенкой Неймана (третье краевое условие с большим множителем $O(\omega^{-1})$ при производной ∂_z).

Похожие, но несколько другие эффекты обнаружены [13, 14] в цилиндрическом волноводе с резонатором и одним или двумя рукавами (рис. 2, а и б). Формулы (2.11) для главных членов асимптотики матрицы рассеяния позволяют сделать выводы о рассеянии волн в волноводах с разным количеством рукавов (рис. 1). Для упрощения дальнейших формул предположим, что все сечения одинаковы $\varpi_1 = \ldots = \varpi_N$ и, следовательно, верны формулы (1.7) и (4.1)–(4.3).

1°. В случае $N = 1$ имеем

$$S_{11}^\omega = 1 + O(\omega) \tag{6.1}$$

Разумеется, в акустическом волноводе с одним рукавом, ограниченном жесткими стенками, реализуется полное отражение приходящей с бесконечности волны – в конце волновода располагается жесткая стенка (краевое условие Неймана). Формула (6.1) означает, что коэффициент отражения $S_{11}^\omega = e^{i\psi_\omega}$ имеет фазу $\psi_\omega = 2\omega|\varpi|^{-1}|\Theta| + O(\omega 2)$, найденную при учете представлений (4.3) и (4.10), так как $M = M_{11} = 0 \in \mathbb{R}$.

2°. В случае $N = 2$ волновод Ξ, прямой или изломанный (рис. 2, а), характеризуется (2×2)-матрицей рассеяния, которая согласно соотношениям (5.9) и (4.1) принимает вид

$$S^{\omega} = E - I + O(\omega) = \begin{pmatrix} O(\omega) & 1 + O(\omega) \\ 1 + O(\omega) & O(\omega) \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Итак, в рассматриваемом волноводе происходит почти "полное прохождение" волн. Этот эффект следует связать с инвертированной аномалией Вайнштейна. Если отказаться от требования (1.7), то согласно формуле (2.16) матрица рассеяния принимает вид

$$S^{\omega} = \begin{pmatrix} \dfrac{|\varpi_1| - |\varpi_2|}{|\varpi_1| + |\varpi_2|} + O(\omega) & \dfrac{2\sqrt{|\varpi_1||\varpi_2|}}{|\varpi_1| + |\varpi_2|} + O(\omega) \\ \dfrac{2\sqrt{|\varpi_1||\varpi_2|}}{|\varpi_1| + |\varpi_2|} + O(\omega) & \dfrac{|\varpi_2| - |\varpi_1|}{|\varpi_1| + |\varpi_2|} + O(\omega) \end{pmatrix}$$

и эффект почти полного прохождения волны исчезает.

3°. При $N = 3$ для волновода Ξ (рис. 1) выполнено соотношение

$$S^{\omega} = \frac{2}{N}E - I + O(\omega) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} + O(\omega) & \frac{2}{3} + O(\omega) & \frac{2}{3} + O(\omega) \\ \frac{2}{3} + O(\omega) & -\frac{1}{3} + O(\omega) & \frac{2}{3} + O(\omega) \\ \frac{2}{3} + O(\omega) & \frac{2}{3} + O(\omega) & -\frac{1}{3} + O(\omega) \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

Таким образом, волна проникает во все рукава сочленения Ξ в значительной мере. Такой же вывод получается при большем количестве рукавов.

4°. Гипотетический случай $N = \infty$ с большой натяжкой можно ассоциировать с упомянутой задачей Вайнштейна [12] о полубесконечной трубе, которая открыта в пространство, образованное бесконечным количеством цилиндрических волноводов. При этом формула (2.11) с $m = 1$ показывает, что $S_{11}^{\omega} = -1$, т.е. реализуется прямая аномалия Вайнштейна, а выделенный рукав Π_1 у основания $\{x : y^1 \in \varpi_1, z_1 = 0\}$ перекрыт малопроницаемой мягкой стенкой. Эти выводы конечно же условны.

Формулы (4.3) и (4.10) с повышенной точностью $O(\omega^2)$ описывают почти одинаковую картину рассеяния волны $w_m^{\omega-}$, приходящей с бесконечности в разных рукавах Π_m волновода Ξ. Рассеяние волны можно условно разбить на два процесса. В первом волна $w_m^{\omega-}$ отражается от ядра Θ как от мягкой стенки, т.е. с сохранением фазы и изменением знака амплитуды на противоположный. Во втором в каждом из рукавов Π_n, $n = 1,\ldots,N$, возникает уходящая волна с уменьшенной в $N/2$ раз амплитудой и слабым искажением фазы

$$\psi_n^{\omega} = \omega\left(\frac{N}{2}M_{mn} + \frac{1}{N}\frac{|\Theta|}{|\varpi|}\right) + O(\omega^2)$$

Суммарные амплитуды волн определяются в главном лишь количеством рукавов у волновода, но фазы – также другими характеристиками, в частности, матрицей поляризации M, введенной в разд. 3. Только при ограничении (1.7) и в частных случаях $N = 1$ или $N = 2$ рассеяние волн трактуется как аномалия Вайнштейна, связанная с почти полными отражением или прохождением волны.

5°. На физическом уровне строгости приближенные формулы (6.2) и (6.3) могут быть получены при помощи простейшей одномерной модели. Сделаем замену координат $x \mapsto \xi = \omega^{-1/2}x$, т.е. превратим рукава (1.1) в тонкие, с сечениями диаметром $O(\omega^{-1/2})$, цилиндры, сочленение Ξ в область $\Xi^\omega = \{\xi : \omega^{1/2}\xi \in \Xi\}$ и тем самым исключим малый параметр ω из уравнения Гельмгольца (1.2). Акустическое поле $u^\omega(x)$, записанное в координатах ξ, обозначим $u^\omega(\xi)$, и получим для него задачу

$$\begin{gathered} -\Delta_\xi u^\omega(\xi) = u^\omega(\xi), \quad \xi \in \Xi^\omega \\ \partial_{\nu(\xi)} u^\omega(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Xi^\omega \end{gathered} \tag{6.4}$$

Первичный асимптотический анализ ([7], Гл. 5) задачи (6.4) на сочленении тонких областей предоставляет совокупность обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\frac{\partial^2 w_n}{\partial \zeta_n^2}(\zeta_n) = w_n(\zeta_n), \quad \zeta_n \in \mathbb{R}_+, \quad n = 1,\dots,N \tag{6.5}$$

с классическими условиями Кирхгофа

$$w_1(0) = \dots = w_N(0), \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial w_n}{\partial \zeta_n}(0) = 0 \tag{6.6}$$

При выполнении соотношений

$$1 + S^0_{mm} = S^0_{mn}, \quad m \neq n, \quad \sum_{n=1}^{N} S^0_{mn} = -1 \tag{6.7}$$

функции

$$w^m_n(\zeta_n) = \delta_{m,n} e^{-i\zeta_n} + S^0_{mn} e^{+i\zeta_n}$$

служат решениями одномерной задачи (6.5), (6.6) и одновременно дают главные члены асимптотики решения (2.1) многомерной задачи (1.2), (1.3). Коэффициенты S^0_{mn}, найденные из алгебраической системы (6.7), суть главные члены матриц рассеяния при любом N (ср. формулы (6.1)–(6.3) при $N = 1, 2, 3$).

Полученные тем или иным образом первые члены асимптотики (2.3) матрицы S^ω показывают, что на малых частотах в главном матрица рассеяния не зависит от глобальной геометрии сочленения цилиндрических волноводов, но только от площадей их сечений ϖ_n. В то же время найденные поправочные члены (4.9) в анзаце (2.3) включают и другие характеристики: объем $|\Theta|$ ядра Θ сочленения Ξ и, что особенно важно, матрицу поляризации M. Именно последняя зависит не только от скалярных величин $|\Theta|$ и $|\omega_1|, \dots, |\omega_N|$, но и от общей формы волновода Ξ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01003).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
2. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.
3. *Wilcox C.H.* Scattering Theory for Diffraction Gratings. NewYork, Berlin: Springer, 1983.
4. *Назаров С.А.* Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода // ТМФ. 2011. Т. 167. № 2. С. 239–262.
5. *Ван Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967. 310 с.
6. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.

7. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestö rten Gebieten. Vol. 1 & 2 Berlin: Akademie-Verlag. 1991.
8. *Назаров С.А.* Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода // Функциональный анализ и его приложения. 2013. Т. 47. № 3. С. 37–53.
9. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
10. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды Московск. матем. общества. 1963. Т. 16. С. 219–292.
11. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 1994.
12. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции и метод факторизации. М.: Советское радио, 1966.
13. *Назаров С.А.* Аномалии рассеяния в резонаторе выше порогов непрерывного спектра // Матем. сборник. 2015. Т. 206. № 6. С. 15–48.
14. *Korolkov A.I., Nazarov S.A., Shanin A.V.* Stabilizing solutions at thresholds of the continuous spectrum and anomalous transmission of waves // ZAMM. 2016. V. 96. № 10. P. 1245–1260.

The Scattering Matrix at Small Frequencies in a Junction of Cylindrical Acoustic Waveguides

S. A. Nazarov[#]

Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia
[#]e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

We consider a junction of N semi-infinite cylindrical acoustic waveguides, and, for a small frequency, construct asymptotics of the scattering matrix. The effects of almost complete reflection and transmission are found only in the cases $N = 1$ and $N = 2$ under condition of equal area of cross-sections while for ather case no anomaly is present

Keywords: junction of semi-infinite cylindrical acoustic waveguides, small frequencies, scattering and polarization matrices, asymptotics, Weinstein anomalies

REFERENCES

1. *Ladyzhenskaya O.A.* The boundary value problems of mathematical physics. N.Y.: Springer, 1985. xxx+322 pp.
2. *Mittra R., Lee S.W.* Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves. N.Y.: MacMillan, 1971.
3. *Wilcox C.H.* Scattering Theory for Diffraction Gratings. N.Y.; Berlin: Springer, 1983.
4. *Nazarov S.A.* Asymptotic expansions of eigenvalues in the continuous spectrum of a regularly perturbed quantum waveguide // Theor.&Math. Phys., 2011, vol. 167, no. 2. pp. 606–627.
5. *Van-Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N.Y.; L.: Acad. Press. 1964.
6. *Il'in A.M.* Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems. L.: Am. Math. Soc., 1992. 281 p.
7. *Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B.* Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1 & 2. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000.
8. *Nazarov S.A.* Enforced stability of a simple eigenvalue in the continuous spectrum // Funct. Anal. Appl., 2013, vol. 475, no. 3, pp. 195–209.
9. *Vishik M.I., Lyusternik L.A.* Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter // in: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 1962, vol. 20, pp. 239–364.
10. *Kondrat'ev V.A.* Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points // Trans. Moscow Math. Soc., 1967, vol. 16, pp. 227–313.
11. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 1994.
12. *Weinstein L.A.* The Theory of Diffraction and the Factorization Method. Boulder CO: Golem Press, 1969. 411 p.
13. *Nazarov S.A.* Scattering anomalies in a resonator above thresholds of the continuous spectrum // Sb. Math., 2015, vol. 206, no. 6, pp. 782–813.
14. *Korolkov A.I., Nazarov S.A., Shanin A.V.* Stabilizing solutions at thresholds of the continuous spectrum and anomalous transmission of waves // ZAMM, 2016, vol. 96, no. 10, pp. 1245–1260.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 5, с. 625–639

УДК 539.3:534.26

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКА НА ШАРЕ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ

С. А. Скобельцын[1,*], Л. А. Толоконников[1,]**

[1]Тульский государственный университет, Тула, Россия
**e-mail: skbl@rambler.ru*
***e-mail: tolokonnikovla@mail.ru*

Поступила в редакцию 23.05.2020 г.
После доработки 23.06.2020 г.
Принята к публикации 11.07.2020 г.

Получено аналитическое решение задачи дифракции сферических звуковых волн на шаре с упругим радиально-неоднородным покрытием в плоском волноводе. Представлены результаты расчетов акустического поля в волноводе. Проведено сравнение результатов расчета с результатами моделирования дифракции в волноводе в системе компьютерного моделирования физических процессов COMSOL на основе метода конечных элементов.

Ключевые слова: дифракция звука, плоский волновод, шар с неоднородным упругим покрытием

DOI: 10.31857/S0032823520050112

Введение. Для обеспечения требуемых звукоотражающих свойств тела можно использовать неоднородное упругое покрытие при соответствующем подборе законов неоднородности для его механических параметров. В частности это было показано для упругого тела сферической формы [1], где на основе полученного [2] решения прямой задачи дифракции плоской звуковой волны на упругом шаре с непрерывно-неоднородным покрытием, найдены функциональные зависимости для плотности и модулей упругости материала покрытия, обеспечивающие наименьшее отражение звука в определенном угловом секторе и в заданном диапазоне частот. Была показана [3] возможность математического моделирования непрерывно-неоднородного покрытия упругого шара системой однородных упругих слоев. Решены задачи [4, 5] дифракции цилиндрических и сферических звуковых волн на упругом шаре с непрерывно-неоднородным упругим покрытием в предположении, что тела находятся в безграничном пространстве.

Исследованию рассеяния звука телами, помещенными в плоский волновод, посвящен ряд работ. Изучено [6] рассеяние звуковых волн, излучаемых точечным источником, упругой сферической оболочкой в однородном волноводе с абсолютно жестким дном и акустически мягкой верхней границей. Решена [7] задача дифракции сферической волны на жесткой сфере в волноводе с жидким дном и мягкой верхней границей. Исследовано [8] акустическое рассеяние на упругой сферической оболочке, помещенной в волновод с жидким поглощающим дном и акустически мягкой верхней границей. Проведено моделирование акустического поля, рассеянного акустически жесткой или мягкой сферой, помещенной в однородный волновод с жидкими границами [9]. Исследована дифракция звука [10], излучаемого точечным источником, на жест-

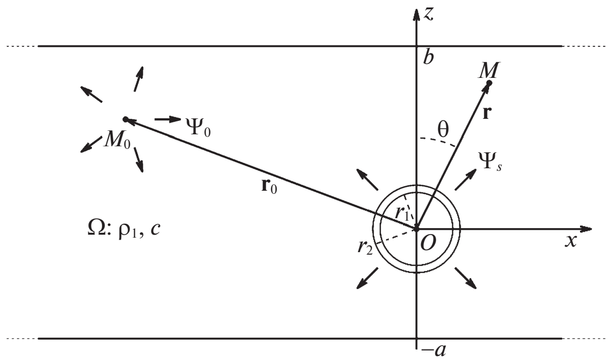


Рис. 1.

кой сфере, находящейся в однородном слое жидкости, граничащем со слоем, скорость звука в котором возрастает с глубиной. Рассмотрено [11—14] рассеяние звуковых волн на теле произвольной формы в плоскослоистом волноводе с учетом многократных переотражений.

В настоящей работе решается задача дифракции сферических звуковых волн на жестком шаре с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе.

1. Постановка задачи. Рассмотрим абсолютно жесткий шар радиуса r_1 с покрытием в виде непрерывно-неоднородного упругого сферического слоя, внешний радиус которого равен r_2. Толщина слоя – $h = r_2 - r_1$. Шар помещен в плоский волновод, заполненный идеальной жидкостью с плотностью ρ_1 и скоростью звука c. Полагаем, что каждая граница волновода является либо абсолютно жесткой, либо акустически мягкой.

Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z с началом в центре шара. Схема волноводной системы изображена на рис. 1. В системе координат x, y, z нижняя граница волновода определяется уравнением $z = -a$, верхняя граница – уравнением $z = b$. С прямоугольной системой координат свяжем сферическую и цилиндрическую системы координат r, θ, φ и R, φ, z.

Полагаем, что плотность материала покрытия ρ является непрерывной функцией радиальной координаты r, а модули упругости материала покрытия λ и μ – дифференцируемыми функциями координаты r.

В волноводе находится точечный источник, излучающий сферическую монохроматическую волну с круговой частотой ω и амплитудой A. Положение источника определяется точкой M_0, имеющей декартовы, сферические и цилиндрические координаты $(x_0, 0, z_0)$, $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ и (R_0, φ_0, z_0). При этом $\varphi_0 = 0$, если $x_0 > 0$ и $\varphi_0 = \pi$, если $x_0 < 0$. Точка наблюдения M имеет координаты (x, y, z), (r, θ, φ) и (R, φ, z).

Определим акустическое поле в волноводе.

2. Дифракция сферической звуковой волны на шаре с неоднородным покрытием в свободном пространстве. Вначале рассмотрим задачу о дифракции сферической звуковой волны на жестком шаре с радиально-неоднородным покрытием, находящемся в безграничном пространстве.

Потенциал скорости сферической волны в свободном пространстве представляется в виде

$$\Psi_0 = A\frac{e^{ikl}}{l}\exp(-i\omega t); \quad l = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|,$$

где $k = \omega/c$ — волновое число в жидкости, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ — радиус-векторы точек M и M_0 соответственно, t — время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Представим потенциал скорости падающей волны в сферических координатах в виде разложения [15]

$$\Psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\gamma_{mn}P_n^m(\cos\theta)\cos m(\varphi-\varphi_0)\begin{cases} j_n(kr)h_n(kr_0), & r_0 > r \\ j_n(kr_0)h_n(kr), & r > r_0 \end{cases},$$

где $\gamma_{mn} = Aik(2-\delta_{0m})(2n+1)\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta_0)$, $j_n(x)$ и $h_n(x)$ — сферические функции Бесселя и Ганкеля порядка n; $P_n^m(x)$ — присоединенный многочлен Лежандра степени n порядка m; δ_{0m} — символ Кронекера.

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [16]

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0,$$

где $\Psi = \Psi_0 + \Psi_s$ — потенциал скорости полного акустического поля во внешней области, Ψ_s — потенциал скорости рассеянной волны. При этом скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяются по формулам $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\Psi$, $p = i\rho\omega\Psi$.

Учитывая условия излучения на бесконечности [16], потенциал скорости рассеянной волны будем искать в виде

$$\Psi_s(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}A_{mn}h_n(kr)P_n^m(\cos\theta)\cos(\varphi-\varphi_0), \tag{2.1}$$

где $h_n(x)$ — сферическая функция Ганкеля первого рода порядка n.

Распространение упругих волн в неоднородном покрытии шара описывается общими уравнениями движения упругой среды [17], которые для установившегося режима движения в сферической системе координат имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\left(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta}\operatorname{ctg}\theta\right) = -\rho(r)\omega^2 u_r \\
\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}[(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})\operatorname{ctg}\theta + 3\sigma_{r\theta}] = -\rho(r)\omega^2 u_\theta \\
\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}(3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta) = -\rho(r)\omega^2 u_\varphi,
\end{gathered} \tag{2.2}$$

где u_r, u_θ, u_φ и σ_{ij} — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ и тензора напряжений в покрытии шара.

Введем функции u_2 и u_3 с помощью соотношений

$$u_\theta = \frac{\partial u_2}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_3}{\partial\varphi}, \quad u_\phi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_2}{\partial\varphi} - \frac{\partial u_3}{\partial\theta}$$

и воспользуемся связью компонентов тензора напряжений с компонентами тензора деформаций (обобщенный закон Гука), а также выражениями компонентов тензора деформаций через компоненты вектора смещения [17]. В результате приходим от (2.2) к системе уравнений, записанных относительно функций u_r, u_2 и u_3, которая после преобразований, указанных в [4], принимает вид

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left[\lambda' + 2\mu' + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r}\right]\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2}L[u_r] +$$
$$+\left[\frac{2}{r}\left(\lambda' - \frac{\lambda + 2\mu}{r}\right) + \rho\omega^2\right]u_r + \frac{1}{r}\left[(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial r} + \lambda' - \frac{\lambda + 3\mu}{r}\right]L[u_2] = 0$$
$$\frac{1}{r}\left[(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial r} + \mu' + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r}\right]L[u_r] + \tag{2.3}$$
$$+\left[\mu\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\mu' + \frac{2\mu}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu'}{r} + \rho\omega^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{r^2}L[\ ]\right]L[u_2] = 0$$
$$\left[\mu\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\mu' + \frac{2\mu}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu'}{r} + \rho\omega^2 + \frac{\mu}{r^2}L[\ ]\right]L[u_3] = 0,$$

где

$$L[\ ] = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Штрихами обозначено дифференцирование по радиальной координате r.

Функции u_r, u_2, u_3 будем искать в виде

$$u_r = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} U_{1mn}(r)P_n^m(\cos\theta)\cos m(\varphi - \varphi_0)$$
$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} U_{2mn}(r)P_n^m(\cos\theta)\cos m(\varphi - \varphi_0) \tag{2.4}$$
$$u_3 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} U_{3mn}(r)P_n^m(\cos\theta)\sin m(\varphi - \varphi_0)$$

Вид зависимостей от φ в этих разложениях определяется соображениями симметрии вектора смещения $\mathbf{u}$ относительно плоскости $\varphi = \varphi_0$, $\varphi_0 + \pi$.

Подставим разложения (2.4) в уравнения системы (2.3). Воспользовавшись уравнением для присоединенных многочленов Лежандра и свойством ортогональности сферических гармоник [18], получим для каждой пары индексов m, n ($n = 0,1,\ldots$; $m \le n$) систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{jmn}(r)$ ($j = 1, 2, 3$)

$$(\lambda + 2\mu)U''_{1mn} + b_{11}U'_{1mn} + b_{12}U'_{2mn} + c_{11}U_{1mn} + c_{12}U_{2mn} = 0$$
$$\mu U''_{2mn} + b_{21}U'_{1mn} + b_{22}U'_{2mn} + c_{21}U_{1mn} + c_{22}U_{2mn} = 0 \tag{2.5}$$
$$\mu U''_{3mn} + b_{33}U'_{3mn} + c_{33}U_{3mn} = 0,$$

где

$$b_{11} = \lambda' + 2\mu' + 2(\lambda + 2\mu)/r, \quad b_{12} = -n(n+1)(\lambda + \mu)/r$$
$$b_{21} = (\lambda + \mu)/r, \quad b_{22} = b_{33} = (r\mu' + 2\mu)/r$$
$$c_{11} = \rho\omega^2 + [2\lambda' r - 2(\lambda + 2\mu) - n(n+1)\mu]/r^2$$

$$c_{12} = n(n+1)(\lambda + 3\mu - r\lambda')/r^2$$

$$c_{21} = [r\mu' + 2(\lambda + 2\mu)]/r^2, \quad c_{22} = \rho\omega^2 - [r\mu' + n(n+1)(\lambda + 2\mu)]/r^2$$

$$c_{33} = \rho\omega^2 - [r\mu' + n(n+1)\mu]/r^2$$

Искомые функции Ψ_s, u_r, u_2 и u_3 должны удовлетворять граничным условиям. Граничные условия на внешней поверхности неоднородного покрытия шара (при $r = r_2$) заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

$$-i\omega u_r = v_{1r}, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0,$$

а на внутренней поверхности покрытия (при $r = r_1$) должен быть равен нулю вектор смещения частиц упругой среды

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad u_\varphi = 0$$

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = r_2$ находим коэффициенты A_{mn}, выраженные через величины $U_{1mn}(r_1)$

$$A_{mn} = -\frac{\gamma_{mn} k h_n(kr_0) j_n'(kr_2) + i\omega U_{1mn}(r_2)}{k h_n'(kr_2)}$$

Из оставшихся неиспользованными граничных условий с применением преобразований, аналогичных [4], получим шесть краевых условий, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений (2.5).

$$(\lambda + 2\mu)U_{1mn}'(r_2) + \left[\frac{2\lambda(r_2)}{r_2} + \frac{\omega^2\rho_1 h_n(kr_2)}{k h_n'(kr_2)}\right]U_{1mn}(r_2) - \frac{\lambda(r_2)}{r_2} n(n+1)U_{2mn}(r_2) = \frac{\omega\rho_1\gamma_{mn}h_n(kr_0)}{(kr_2)^2 h_n'(kr_2)}$$

$$U_{2mn}'(r_2) + \frac{1}{r_2}[U_{1mn}(r_2) - U_{2mn}(r_2)] = 0$$

$$U_{3mn}'(r_2) + \frac{1}{r_2}U_{3mn}(r_2) = 0 \qquad (2.6)$$

$$U_{1mn}(r_1) = 0, \quad U_{2mn}(r_1) = 0, \quad U_{3mn}(r_1) = 0$$

Анализ краевой задачи (2.5), (2.6) показывает, что функция $U_{3mn}(r)$ не связана с функциями $U_{1mn}(r)$ и $U_{2mn}(r)$ не только в уравнениях системы (2.5), но и в краевых условиях (2.6). Так как дифференциальное уравнение и краевое условие для нахождения функции $U_{3mn}(r)$ однородны, то можно утверждать, что $U_{3mn}(r) \equiv 0$. Поэтому $u_3(r, \theta, \varphi) \equiv 0$.

Все коэффициенты системы (2.5) и краевых условий (2.6) не зависят от индекса m. Индекс m присутствует только в правой части первого краевого условия (2.6), причем он входит в виде множителя γ_{mn}.

Введем новые неизвестные функции $U_{1n}(r)$ и $U_{2n}(r)$ по формулам

$$U_{1mn}(r) = \gamma_{mn}U_{1n}, \quad U_{2mn}(r) = \gamma_{mn}U_{2n}$$

Тогда для нахождения функций $U_{1n}(r)$ и $U_{2n}(r)$ при каждом значении $n = 0, 1, 2, \ldots$ следует решить краевую задачу для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на отрезке $[r_1, r_2]$. При этом следует исключить множитель γ_{mn} из правой части первого краевого условия.

При проведении расчетов краевая задача (2.5), (2.6) решена методом сведения ее к задачам с начальными условиями [2].

После определения $U_{1mn}(r_2)$ вычисляем коэффициенты A_{mn}, и получаем согласно (2.2) аналитическое описание акустического поля, рассеянного шаром с радиально-неоднородным упругим покрытием в свободном пространстве.

3. Дифракция сферической звуковой волны на шаре с неоднородным покрытием в плоском волноводе. Теперь рассмотрим задачу дифракции сферических звуковых волн на жестком шаре с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе с идеальными границами, воспользовавшись методом, предложенным в [12].

Согласно методу потенциал скорости полного акустического поля в волноводе Ψ будем искать в виде суммы вклада от источника Ψ^0 и вклада от рассеивателя Ψ^s: $\Psi = \Psi^0 + \Psi^s$, где

$$\Psi^0 = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{4}\Psi^0_{jm}, \quad \Psi^s = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{4}\Psi^s_{jm} \tag{3.1}$$

Оценим вклад от источника в акустическое поле, рассматривая слагаемые в первом выражении (3.1).

Слагаемое $\Psi^0_{01} = \Psi_0$ характеризует вклад в акустическое поле при прямом распространении сферической волны в свободном пространстве от точки источника M_0 до точки наблюдения M.

Воспользуемся интегральным представлением сферической волны [12]

$$\Psi_0 = A\frac{e^{ikl}}{l} = Ai\int_0^{\infty}\frac{\xi}{\eta}J_0(\xi|\mathbf{R}-\mathbf{R}_0|)e^{i\eta|z-z_0|}d\xi, \quad \eta = \left(k^2-\xi^2\right)^{1/2}, \tag{3.2}$$

получаемым из разложения сферической волны по плоским волнам [19]. Направление распространения плоской волны задается горизонтальной ξ и вертикальной η компонентами падающего волнового вектора $\mathbf{k}$. Здесь J_0 – цилиндрическая функция Бесселя нулевого порядка, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_0$ – радиус-векторы проекций точек M и M_0 на плоскость xOy соответственно.

Выполнение условия $\operatorname{Im}\eta \geq 0$ обеспечивает ограниченность Ψ_0. Таким образом, когда $\xi > k$ следует выбрать $\eta = i\left(\xi^2 - k^2\right)^{1/2}$.

Пусть точка наблюдения M имеет координаты $(x, 0, z)$, (r, θ, φ) и (R, φ, z), где φ принимает значение 0 или π. Тогда $|\mathbf{R}-\mathbf{R}_0| = |x - x_0|$.

Отраженная от границ волновода сферическая волна может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн, возникающих при отражении плоских волн, на которые раскладывается сферическая волна. При оценке вклада источника в акустическое поле будем учитывать многократное отражение плоских волн от границ волновода.

Пусть коэффициенты отражения плоской волны от нижней границы волновода и верхней границы равны V_a и V_b соответственно.

Сначала рассмотрим случай $z > z_0$. Слагаемое Ψ^0_{02} учитывает единственное отражение от нижней границы волновода, что соответствует распространению волны от точки M_0 до точки нижней границы с последующим отражением и распространением до точки наблюдения M. При этом проекции пути, проходимой плоской волной, по осям координат x и z равны $(x - x_0)$ и $-(-a - z_0) + (z + a)$ соответственно. Будем иметь

$$\Psi^0_{02} = Ai\int_0^{\infty}\frac{\xi}{\eta}J_0(\xi|x-x_0|)\left[e^{-i\eta(-a-z_0)}V_a e^{i\eta(z+a)}\right]d\xi$$

Слагаемое Ψ_{03}^0 описывает единственное отражение от верхней границы волновода, что соответствует распространению волны от точки M_0 до верхней границы с отражением от нее и распространением до точки M. Тогда

$$\Psi_{03}^0 = Ai\int_0^\infty \frac{\xi}{\eta} J_0(\xi|x-x_0|)\left[e^{i\eta(b-z_0)}V_b e^{-i\eta(z-b)}\right]d\xi$$

Для волны, распространяющейся по пути от точки M_0 до нижней границы, затем после отражения до верхней границы и, наконец, после повторного отражения до точки M, получаем следующее выражение

$$\Psi_{04}^0 = Ai\int_0^\infty \frac{\xi}{\eta} J_0(\xi|x-x_0|)\left[e^{-i\eta(-a-z_0)}V_a e^{i\eta(b+a)}V_b e^{-i\eta(z-b)}\right]d\xi$$

Вариант, когда волна сначала отражается от верхней границы, а затем от нижней, при $j=0$ не рассматривается, так как этот вариант будет учитываться при $j=1$ и $m=1$.

При $j=1,2,\ldots$ каждое слагаемое Ψ_{jm}^0 $(m=1,2,3,4)$ учитывает два дополнительных отражения от верхней и нижней границ волновода. Поэтому выражения для Ψ_{jm}^0 получаются из выражений для $\Psi_{j-1,m}^0$ умножением на коэффициент $V_aV_be^{2i\eta(a+b)}$, т.к. дополнительный набег фазы составляет $2i\eta(a+b)$.

В результате после суммирования слагаемых Ψ_{jm}^0 выражение для Ψ^0 принимает вид геометрической прогрессии. Полагая, что $|V_aV_b|<1$ и суммируя прогрессию, получаем

$$\Psi^0 = Ai\int_0^\infty \frac{\xi}{\eta} J_0(\xi|x-x_0|)\frac{1}{1-V_aV_be^{2i\eta(a+b)}}\times$$
$$\times\left(e^{i\eta(z-z_0)} + V_a e^{i\eta(z+z_0+2a)} + V_b e^{-i\eta(z+z_0-2b)} + V_aV_b e^{-i\eta((z-z_0-2(a+b))}\right)d\xi \tag{3.3}$$

Будем считать, что условие $|V_aV_b|<1$ выполняется даже в случае идеальных границ (для жесткой границы $V=1$, а для мягкой $V=-1$), так как всегда имеет место хотя бы малое отличие $|V_a|$ или $|V_b|$ от единицы.

В случае $z<z_0$ выражение для вклада от источника получаем из (3.3) перестановкой z и z_0.

Рассмотрим вклад в акустическое поле от рассеивателя. Слагаемое Ψ_{01}^s в выражении (3.2) для Ψ^s описывает вклад прямого распространения рассеянной телом волны в свободном пространстве до точки наблюдения M, то есть $\Psi_{01}^s=\Psi_s$, где Ψ_s определяется выражением (2.1).

Воспользуемся интегральным представлением сферических базисных решений уравнения Гельмгольца через цилиндрические базисные решения [20]

$$h_n(kr)P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi} = \frac{\alpha_{mn}}{k}i^{m-n}\int_0^\infty \frac{\xi}{\eta}P_n^m\left(\frac{\eta}{k}\right)J_m(\xi R)\,e^{i\eta|z|}e^{im\varphi}d\xi, \tag{3.4}$$

где $\alpha_{mn}=1$ при $z>0$ и $\alpha_{mn}=(-1)^{n+m}$ при $z<0$, J_m – цилиндрическая функция Бесселя порядка m.

Тогда с учетом (3.4) для точек наблюдения, лежащих за пределами сферы радиуса r_2, Ψ_{01}^s запишется в виде

$$\Psi_{01}^s = k^{-1}\sum_{n=0}^\infty\sum_{m=0}^n A_{mn}\alpha_{mn}i^{m-n}\cos m(\varphi-\varphi_0)\int_0^\infty \frac{\xi}{\eta}P_n^m\left(\frac{\eta}{k}\right)J_m(\xi|x|)\,e^{i\eta|z|}d\xi$$

Волна Ψ_s, отраженная от плоской границы, может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн, возникающих при отражении плоских волн, на которые раскладывается рассеянная шаром волна.

Рассматривая те же варианты отражения, что и при определении вклада от источника, получим выражения для слагаемых Ψ^s_{jm}. В результате суммирования выражение для Ψ^s принимает вид

$$\Psi^S = k^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} A_{mn}\alpha_{mn}i^{m-n}\cos m(\varphi-\varphi_0)\int_0^{\infty}\frac{\xi}{\eta}P_n^m\left(\frac{\eta}{k}\right)J_m(\xi|x|)e^{i\eta|z|}\times$$
$$\times\frac{1}{1-V_aV_be^{2i\eta(a+b)}}\left(e^{i\eta|z|}+V_ae^{i\eta(z+2a)}+V_be^{-i\eta(z-2b)}+V_aV_be^{-i\eta(|z|-2(a+b))}\right)d\xi \tag{3.5}$$

Отметим, что при рассмотрении вклада в акустическое поле от рассеивателя пренебрегаем рассеянием телом волн, отраженных от границ волновода, а учитываем только рассеяние шаром волны, идущей непосредственно от источника.

4. Результаты расчетов. На основе полученного аналитического решения задачи были проведены численные расчеты акустического поля в волноводе. Рассматривалась волноводная система с геометрическими параметрами: $a+b=8r_2$, $h/r_1=0.2$. Положение источника фиксировалось в сечении $x_0=-5r_2$. Полагалось, что частота излучения источника ω соответствует волновому размеру тела $kr_2=5$, а плотность и скорость звука в акустической среде, заполняющей волновод, равны $\rho_1=1000$ кг/м^3, $c=1485$ м/с (вода).

Плотность и модули упругости покрытия шара задавались соотношениями

$$\rho=\rho_0 f(r;\alpha),\quad \lambda=\lambda_0 f(r;\beta),\quad \mu=\mu_0 f(r;\beta), \tag{4.1}$$

где $f(r;q)=1+q((r-r_1)/h-1/2)$ — линейная функция координаты r, коэффициент наклона которой равен q/h; $\rho_0=1488$ кг/м^3, $\lambda_0=7.695\times10^9$ Н/м^2, $\mu_0=2.918\times10^9$ Н/м^2 — средние значения плотности и модулей упругости по толщине покрытия (полиамид), например, $\lambda_0=1/h\int_{r_1}^{r_2}\lambda(r)dr$.

Акустическое поле рассчитывалось на двух множествах точек: L и C. Оба множества находятся в окрестности шара в плоскости $y=0$, содержащей точки источника M_0 и центра шара O. Множество L – отрезок с координатами $x=-r_2-h$, $y=0$, $-a\le z\le b$. Множество C – окружность с центром в точке O и радиусом $r=r_2+h$. Таким образом, отрезок L и окружность C отстоят от поверхности шара на толщину покрытия h. Иллюстрация положения источника M_0 и размещения точек расчета давления представлена на рис. 2. Множества точек L и C представлены тонкими штриховыми линиями.

Для точек множества C рассчитывалась зависимость $|\Psi'_s|$ от координаты θ, а для точек множества L рассчитывалась зависимость $|\Psi'|$ от безразмерной координаты $z'=z/r_2$, где величины $|\Psi'_s|$ и $|\Psi'|$ получены нормировкой соответствующих величин $|\Psi_s|$ и $|\Psi|$ значением амплитуды потенциала источника Ψ_0 в точке O.

При вычислении несобственных интегралов (3.3), (3.5) бесконечный верхний предел заменялся конечным ξ_∞ таким, чтобы для всех значений координаты x, используемых в расчетах, выполнялось условие $\xi_\infty|x-x_0|\ge1000$.

На рис. 3 и 4 представлены зависимости $|\Psi'(z')|$ и $|\Psi'_s(\theta)|$ для случая, когда обе поверхности волновода — акустически мягкие ($V_a=V_b=-0.99$), $b=a=4r_2$, $z_0=0$.

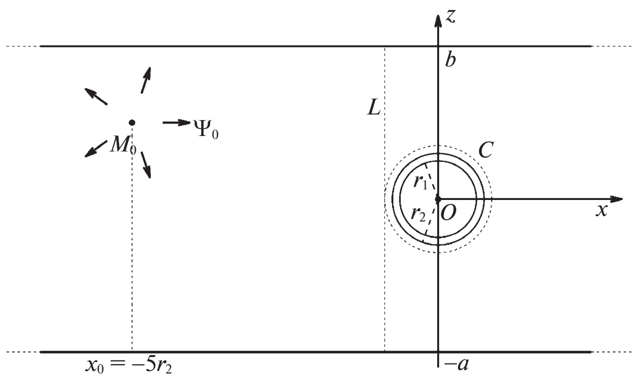


Рис. 2.

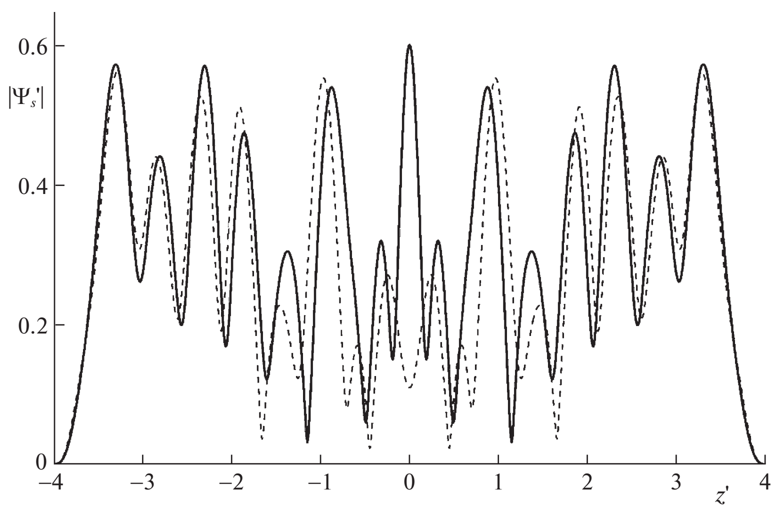


Рис. 3.

Штриховые линии соответствуют однородному покрытию ($\beta = \alpha = 0$), а сплошные – покрытию с неоднородными модулями упругости ($\alpha = 0, \beta = 1$). Окружность, изображенная тонкой линией на рис. 4, соответствует значению $|\Psi_0(O)|$.

Графики показывают, что неоднородность покрытия изменяет величину акустического давления в окрестности шара на 10–20%.

Результаты расчета $|\Psi'|$, $|\Psi_s'|$ показаны на рис. 5 и 6 для аналогичных условий, отличающихся только величиной β, которая в этом случае равна –1 (величина модулей упругости в покрытии убывает с ростом r); на рис. 7 и 8 – результаты расчета потенциалов акустического поля для случая, когда источник смещен к верхней поверхности волновода ($z_0 = r_2$) при неоднородности материала покрытия, задаваемой параметрами $\alpha = 0, \beta = 1$.

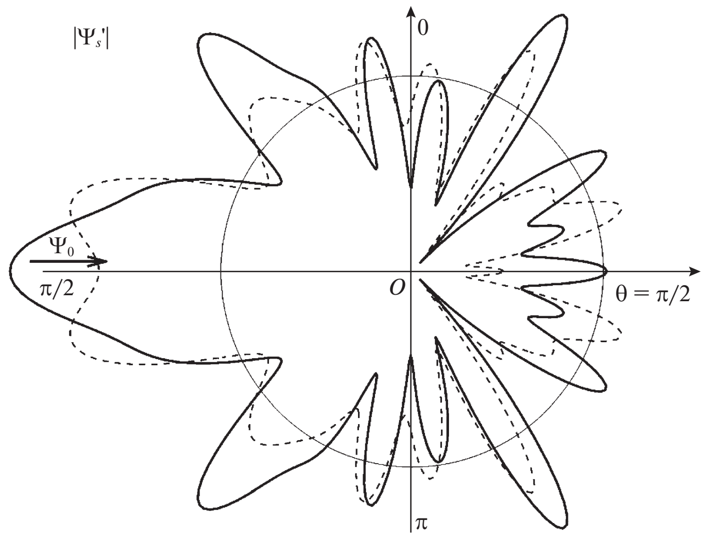


Рис. 4.

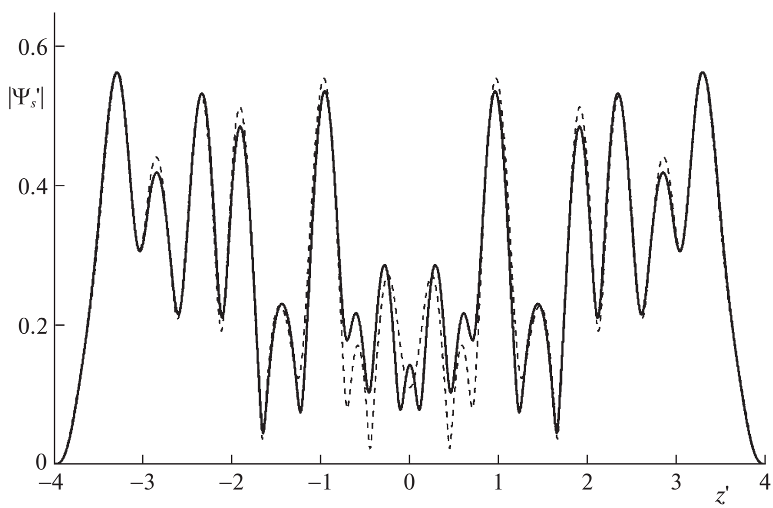


Рис. 5.

Видно, что смещение источника приводит к заметной асимметрии в распределении давления. Неоднородность материала покрытия и в этом случае изменяет давление в окрестности шара до 40% по сравнению со случаем однородного покрытия.

Было проведено сравнение результатов расчета на основе приближенного аналитического решения задачи с результатами моделирования дифракции в волноводе в системе компьютерного моделирования физических процессов COMSOL [21] на основе метода конечных элементов. Использовалась конечно-элементная модель участка волновода, включающего источник, препятствие и области в их окрестности с гори-

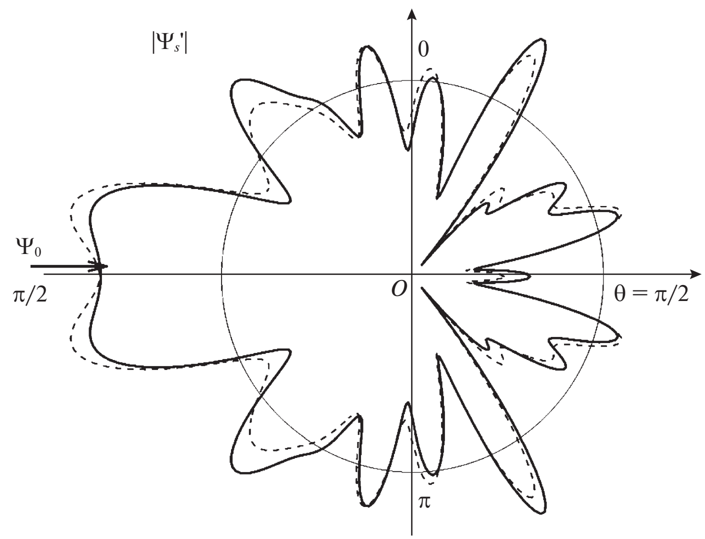


Рис. 6.

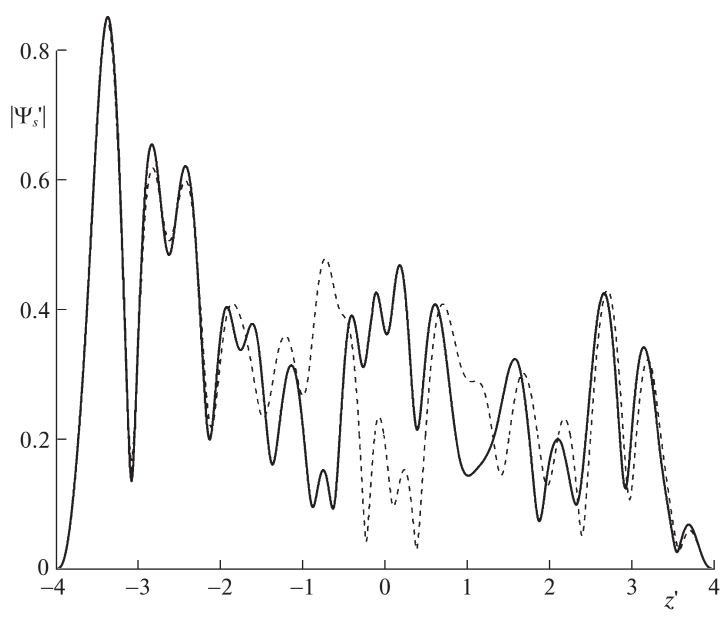


Рис. 7.

зонтальным размером, равным удвоенному расстоянию между ними. Условия излучения на боковых поверхностях участка обеспечивались так называемым идеально согласованным слоем (PML) [22]. Характерный размер тетраэдральных конечных элементов полагался равным 0.1λ, где λ – длина звуковой волны в жидкости, заполняющей волновод.

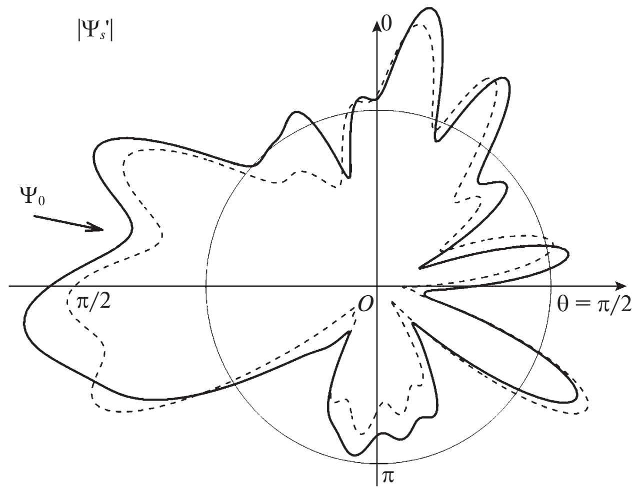


Рис. 8.

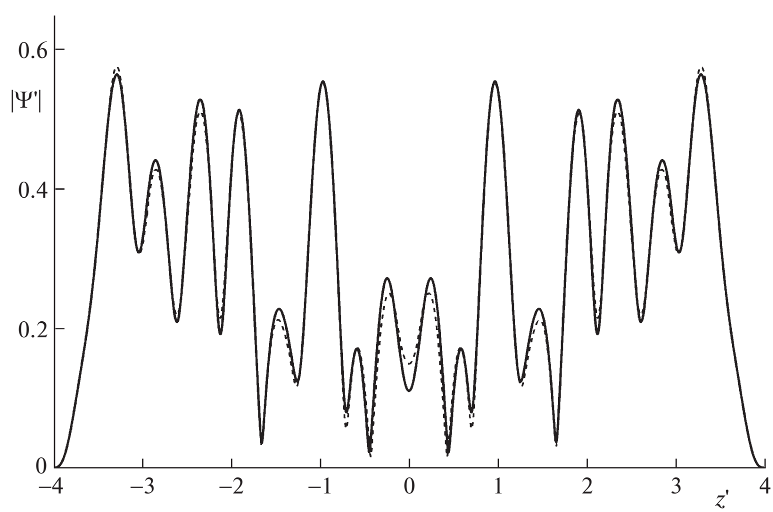


Рис. 9.

Результаты расчета давления в рассеянной волне для случая однородного покрытия, представленные на рис. 3 и 4 (сплошные линии), сопоставляются на рис. 9 и 10 с соответствующими зависимостями, полученными в COMSOL (штриховые линии).

Анализ полученных результатов показывает, что при рассматриваемых геометрических параметрах волновода и свойствах источника и препятствия различие в значениях потенциалов акустического поля, полученных по построенному в работе приближенному аналитическому решению и определенному по конечно-элементной модели, составляет 5–7%.

Полученное приближенное аналитическое решение задачи справедливо тогда, когда параметры a, b существенно превышают радиус шара r_2. Проведенные исследова-

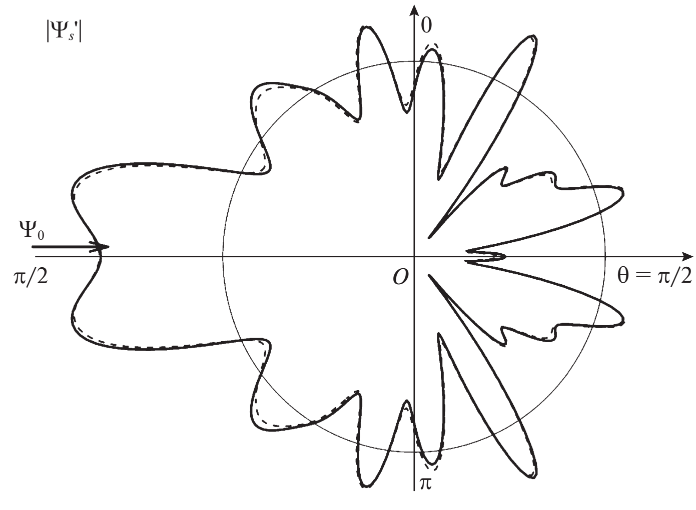


Рис. 10.

ния показали, что, например, при частоте источника, соответствующей волновому размеру шара $kr_2 \leq 5$, наблюдается хорошее совпадение аналитического решения с результатами моделирования, когда параметры a, b превышают радиус шара r_2 в 4 и более раз.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Толоконников Л.А., Ларин Н.В., Скобельцын С.А.* Моделирование неоднородного покрытия упругого шара с требуемыми звукоотражающими свойствами // Матем. модел. 2017. Т. 29. № 11. С. 89–98.
2. *Толоконников Л.А.* Рассеяние плоской звуковой волны упругим шаром с неоднородным покрытием // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 4. С. 519–526.
3. *Толоконников Л.А.* Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого шара системой однородных упругих слоев в задаче рассеяния звука // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 6. С. 699–707.
4. *Толоконников Л.А.* Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругой сфере с неоднородным покрытием // ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 5. С. 663–673.
5. *Толоконников Л.А., Родионова Г.А.* Дифракция сферической звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием // Изв. ТулГУ. Естеств. науки. 2014. Вып. 3. С. 131–137.
6. *Sammelman G.S., Hackman R.H.* Acoustic scattering in a homogeneous waveguide // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 82. № 1. P. 324–336.
7. *Ingenito F.* Scattering from an object in a stratified medium // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 82 № 6. P. 2051–2059.
8. *Григорьева Н.С., Фридман Г.М.* Рассеяние звука сферической оболочкой, помещенной в волновод с жидким дном // Акуст. ж. 2013. Т. 59. № 4. С. 424–432.
9. *Григорьева Н.С., Михайлова Д.А., Островский Д.Б.* Эхосигнал от рассеивателя, находящегося в покрытом льдом волноводе // Акуст. ж. 2015. Т. 61. № 2. С. 143–151.
10. *Григорьева Н.С., Кадыров С.Г., Куприянов М.С.* Дифракция звуковых импульсов на сфере в плоскослоистом волноводе с градиентным слоем // Акуст. ж. 2018. Т. 64. № 3. С. 275–282.

11. *Hackman R.H., Sammelman G.S.* Acoustic scattering in an inhomogeneous waveguide: Theory // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. V. 80. № 5. P. 1447–1458.
12. *Hackman R.H., Sammelman G.S.* Multiple-scattering analysis for a target in oceanic waveguide // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. V. 84. № 5. P. 1813–1825.
13. *Кузькин В.М.* Рассеяние звуковых волн на теле в плоскослоистом волноводе // Акуст. ж. 2003. Т. 49. № 1. С. 77–84.
14. *Шарфарец Б.П.* Метод расчета поля излучателя и поля рассеяния неоднородного включения в плоскослоистых волноводах // Акуст. ж. 2004. Т. 50. № 1. С. 123–128.
15. *Иванов Е.А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
16. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
17. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
18. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.
19. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
20. *Ерофеенко В.Т.* Решение одной краевой задачи для уравнения Гельмгольца в слоистом пространстве с шаровым включением // Дифф. ур. 1978. Т. 14. № 8. С. 1439–1447.
21. *Pryor R.W.* Multiphysics Modeling Using COMSOL: A First Principles Approach. Burlington: Jones & Bartlett Publishers, 2009. 852 p.
22. *Ihlenburg F.* Finite element analysis of acoustic scattering. New York: Springer, 2013. 226 p.

Sound Diffraction on a Sphere with Inhomogeneous Covering in a Plane Waveguide

S. A. Skobel'tsyn[a,#] and L. A. Tolokonnikov[a,##]

[a]*Tula State University, Tula, Russia*
[#]*e-mail: skbl@rambler.ru*
[##]*e-mail: tolokonnikovla@mail.ru*

An analytical solution is obtained for the spherical sound waves diffraction problem in a plane waveguide. A scatterer is ball with an elastic radially inhomogeneous coating. The results of calculations of the acoustic field in the waveguide are presented. The calculation data are compared with the results of diffraction modeling based on the finite element method. The FEM-based solution was carried out in the computer simulation system of physical processes COMSOL.

Keywords: sound diffraction, plane waveguide, ball with elastic inhomogeneous covering

REFERENCES

1. *Tolokonnikov L.A., Larin N.V., Skobel'tsyn S.A.* Modeling an inhomogeneous coating of an elastic ball with the required sound-reflecting properties // Math. Model., 2017, vol. 29, no. 3, pp. 89–98.
2. *Tolokonnikov L.A.* Scattering of a plane sound wave by an elastic ball with an inhomogeneous coating // J. Appl. Math. Mech., 2014, vol. 78, no. 4, pp. 519–526.
3. *Tolokonnikov L.A.* Modeling a continuously inhomogeneous coating of an elastic ball by a system of homogeneous elastic layers in the sound scattering problem // JAMM, 2017, vol. 81, no. 6, pp. 699–707.
4. *Tolokonnikov L.A.* Diffraction of cylindrical sound waves on an elastic sphere with an inhomogeneous coating // JAMM, 2015, vol. 79, no. 5, pp. 663–673.
5. *Tolokonnikov L.A., Rodionova G.A.* Diffraction of a spherical sound wave on an elastic ball with an inhomogeneous coating // Izv. TulGU Yest. Nauki, 2014, no. 3, pp. 131–137. (in Russian)
6. *Sammelman G.S., Hackman R.H.* Acoustic scattering in a homogeneous waveguide // J. Acoust. Soc. Amer., 1987, vol. 82, vol. 1, pp. 324–336.
7. *Ingenito F.* Scattering from an object in a stratified medium // J. Acoust. Soc. Amer., 1987, vol. 82, no. 6, pp. 2051–2059.
8. *Grigoryeva N.S., Friedman G.M.* Sound scattering by a spherical shell placed in a liquid bottom waveguide // Acoust. Phys., 2013, vol. 59, no. 4, pp. 424–432.

9. *Grigoryeva N.S., Mikhailova D.A., Ostrovsky D.B.* Echo from a scatterer located in an ice-covered waveguide // Acoust. Phys., 2015, vol. 61, no. 2, pp. 143–151.
10. *Grigoryeva N.S., Kadyrov S.G., Kupriyanov M.S.* Diffraction of sound pulses on a sphere in a plane-layered waveguide with a gradient layer // Acoust. Phys., 2018, vol. 64, no. 3, pp. 275–282.
11. *Hackman R.H., Sammelman G.S.* Acoustic scattering in an inhomogeneous waveguide: Theory // J. Acoust. Soc. Amer., 1986, vol. 80, no. 5, pp. 1447–1458.
12. *Hackman R.H., Sammelman G.S.* Multiple-scattering analysis for a target in oceanic waveguide // J. Acoust. Soc. Amer., 1988, vol. 84, no. 5, pp. 1813–1825.
13. *Kuzkin V.M.* Scattering of sound waves by a body in a plane-layered waveguide // Acoust. Phys., 2003, vol. 49, no. 1, pp. 77–84.
14. *Sharfarets B.P.* Method for calculating the source field and the scattering field of an inhomogeneous inclusion in plane-layered waveguides // Acoust. Phys., 2004, vol. 50, no. 1, pp. 123–128.
15. *Ivanov E.A.* Diffraction of Electromagnetic Waves on Two Bodies. Minsk: Science and Technology, 1988. (in Russian)
16. *Shenderov E.L.* Wave Problems of Hydroacoustics. Leningrad: Shipbuilding, 1972. (in Russian)
17. *Nowacki W.* Teoria sprezystosci. Warszawa: PWN, 1973.
18. *Lebedev N.N.* Special Functions and Their Applications. Moscow: Fizmatgiz, 1963. (in Russian)
19. *Brekhovskikh L.M., Godin O.A.* Acoustics of Layered Media. Moscow: Nauka, 1989. (in Russian)
20. *Erofeenko V.T.* Solution of a boundary value problem for the Helmholtz equation in a layered space with spherical inclusion // Diff. Eqns, 1978, vol. 14, no. 8, pp. 1439–1447.
21. *Pryor R.W.* Multiphysics Modeling Using COMSOL: A First Principles Approach. Burlington: Jones & Bartlett Pub., 2009.
22. *Ihlenburg F.* Finite Element Analysis of Acoustic Scattering. N.Y.: Springer, 2013.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 5, с. 640–649

УДК 539. 3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ, НА ГРАНИЦЕ КОТОРОЙ ПРИКЛЕЕН НЕЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМЫЙ СТРИНГЕР КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

© 2020 г. Н. Н. Шавлакадзе[1,*], О. М. Джохадзе[1], С. С. Харибегашвили[1]

[1] *Тбилисский государственный университет, Математический институт им. А. Размадзе, Тбилиси, Грузия*

** e-mail: nusha1961@yahoo.com*

Поступила в редакцию 10.10.2019 г.
После доработки 04.07.2020 г.
Принята к публикации 15.07.2020 г.

Рассматривается задача определения механического поля в однородной полуплоскости, подкрепленной конечным однородным стрингером, материал которого подчиняется нелинейному закону Гука. Контакт между пластинкой и стрингером осуществляется тонким слоем клея. Поставленная задача редуцируется к нелинейному сингулярному интегродифференциальному уравнению. Используя принцип неподвижной точки Шаудера доказывается существование решения этого уравнения. Доказывается единственность решения поставленной задачи. Применяя метод малого параметра нелинейное сингулярное интегродифференциальное уравнение сводится к системе рекуррентных линейных сингулярных интегральных уравнений второго рода.

Ключевые слова: контактная задача, нелинейное сингулярное интегродифференциальное уравнение, принцип Шаудера, метод малого параметра

DOI: 10.31857/S0032823520050100

Введение. В инженерных конструкциях и механизмах, машиностроении и кораблестроении, проектировании летательных аппаратов особенно важное значение имеют задачи подкрепления массивных упругих тел тонкостенными упругими элементами (включениями, стрингерами, накладками), которые относятся к неклассическим гранично-контактным и смешанным задачам.

Были получены [1–4] точные и приближенные решения статических и динамических контактных задач для разных областей, усиленных упругими тонкими накладками как постоянной, так и переменной жесткости, изучено поведение контактных напряжений в концах линии контакта в зависимости от закона изменения геометрических и физических параметров задачи. Библиография различных контактных задач приводится в монографии [1], где рассматриваются плоские контактные задачи о передаче нагрузки от полубесконечного или конечного стрингера (включения) к упругой полуплоскости или плоскости. Задачи сведены к сингулярному интегродифференциальному уравнению Прандтля, получены различные аналитические методы его решения. Рассматривалась [4] контактная задача для анизотропной полуплоскости с упрочняющимися накладками конечной длины, она сводится к решению нелинейного сингулярного интегродифференциального уравнения при определённых граничных условиях. Решались [5–8] контактные задачи для изотропной и ортотропной кусочно-однородной плоскости, а также для клиновидной анизотропной пластины с

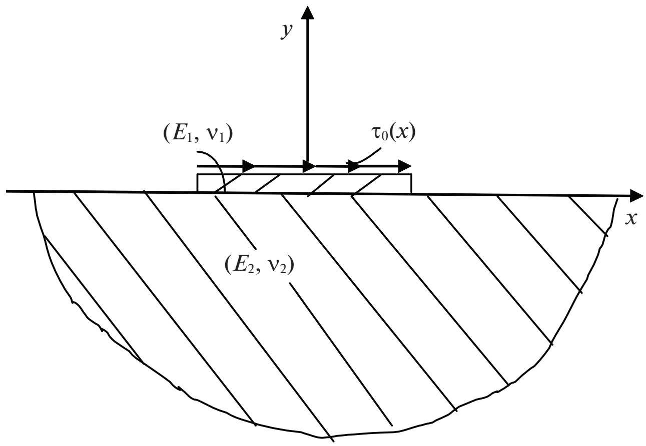


Рис. 1. Геометрия задачи.

полубесконечной и конечной накладкой. В работе [9] стрингер конечной длины приклеен к пластинке с тонким однородным слоем клея, который находится в условиях чистого сдвига. Изгибом стрингера пренебрегается, и он находится в условиях одноосного напряженного состояния. Рассмотрены [10–13] различные задачи, касающиеся контактного взаимодействия упругих тел с тонким слоем клея. Изучалась задача [14, 15] об упругой полубесконечной пластине, которая на конечном отрезке своей границы усилена стрингером из линейно-упругого и нелинейно-упругого материала общего вида. В линейном случае найдены асимптотические оценки, точные и приближенные решения полученного интегродифференциального уравнения, а в нелинейном – доказывается существование и единственность решения полученного нелинейного интегродифференциального уравнения, эквивалентного интегральному уравнению типа Гаммерштейна. Нелинейная деформация упругого тела исследуется в [16, 17].

В представленной работе рассматривается задача взаимодействия упругого стрингера к упругой полуплоскости, когда контакт между пластинкой и стрингером осуществляется тонким слоем клея. Доказывается существование и единственность решения полученного нелинейного интегрального уравнения, которое при помощи метода малого параметра сводится к решению системы рекуррентных линейных интегральных уравнений второго рода.

1. Постановка задачи и ее редукция к нелинейному интегральному уравнению. Пусть линейно-упругая бесконечная пластинка (занимающая нижнюю полуплоскость комплексной плоскости) с модулем упругости E_2 и коэффициентом Пуассона ν_2 на конечном отрезке $[-1,1]$ оси Ox усилена нелинейно-упругим стрингером в виде накладки конечной длины и достаточно малой толщины h_1, модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1, загруженной тангенциальной силой интенсивности $\tau_0(x)$. Контакт между ними осуществляется через тонкий слой клея с модулем упругости E_0, коэффициентом Пуассона ν_0 и шириной h_0. В условиях плоского напряженного состояния требуется определить касательное контактное напряжение $\tau(x)$, действующего на отрезке соединения стрингера с пластинкой (рис. 1).

Материал стрингера удовлетворяет нелинейному закону Гука

$$\varepsilon_x^{(1)}(x) = \frac{du_1(x)}{dx} = \frac{1}{E} g(\sigma_x^{(1)}(x)), \tag{1.1}$$

где $\varepsilon_x^{(1)}(x)$ и $u_1(x)$ – деформация и перемещение точек стрингера, соответственно, $\sigma_x^{(1)}(x)$ – осевое напряжение по направлению оси Ox, $E = \dfrac{E_1}{1-\nu_1^2}$, $\sigma_x^{(1)}(x) = \dfrac{1}{h_1}\int_{-1}^{x}[\tau(t)-\tau_0(t)]dt$, $g: R \to R$ – непрерывная, вообще говоря нелинейная, заданная функция.

Условие равновесия стрингера имеет вид

$$\int_{-1}^{1}[(\tau(x)-\tau_0(x)]dx = 0 \tag{1.2}$$

Предполагая, что каждый дифференциальный элемент слоя клея находится в условиях чистого сдвига, будем иметь [9, 10]

$$u_1(x) - u_2(x,0) = k_0\tau(x), \quad |x| < 1, \quad k_0 = \frac{2h_0(1+\nu_0)}{E_0}, \tag{1.3}$$

где $u_2(x,y)$ – перемещения точек пластинки вдоль оси Ox.

В результате интегрирования уравнения (1.1) получим

$$u_1(x) = \frac{1}{E}\int_{-1}^{x} g\left(\frac{1}{h_1}\int_{-1}^{t}[\tau(s)-\tau_0(s)]ds\right)dt + u_1(-1) \tag{1.4}$$

На основе известных результатов (см., например [18]), деформация граничных точек пластинки по оси Ox, вызванной распределенными по интервалу $(-1,1)$ касательными напряжениями интенсивности $\tau(x)$, представляется в виде

$$u_2(x,0) = -\frac{(3-4\nu_2)(1+\nu_2)}{4\pi E_2(1-\nu_2)}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-t|}\tau(t)dt + C, \quad |x| < 1 \tag{1.5}$$

На основании условия контакта (1.3) вдоль линии соединения стрингера с основанием, с учетом (1.4) и (1.5), получим

$$\varphi(x) = \frac{1}{Ek_0}\int_{-1}^{x} g\left(\frac{1}{h_1}\int_{-1}^{t}\varphi(s)ds\right)dt + \frac{\lambda}{\pi k_0}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-t|}\varphi(t)dt + f(x), \quad |x| < 1, \tag{1.6}$$

где $\varphi(x) = \tau(x) - \tau_0(x)$,

$$\lambda = \frac{(3-4\nu_2)(1+\nu_2)}{4E_2(1-\nu_2)}, \quad f(x) = \frac{\lambda}{\pi k_0}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-t|}\tau_0(t)dt + \frac{C^*}{k_0}, \quad C^* = u_1(-1) - C$$

В уравнение (1.6) неизвестная постоянная C^* определяется из условия (1.2), т.е.

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx = 0 \tag{1.7}$$

С другой стороны, вводя обозначение $\int_{-1}^{x}\varphi(s)ds = \psi(x)$, уравнение (1.6) примет вид

$$k_0\psi''(x) = \frac{1}{E}g(\psi(x)) - \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi'(t)dt}{t-x} - \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\tau_0(t)dt}{t-x}, \quad |x| < 1 \tag{1.8}$$

при условии

$$\psi(1) = 0 \tag{1.9}$$

Таким образом, поставленная гранично-контактная задача (1.1)–(1.5) эквивалентно редуцирована к решению нелинейного интегрального уравнения (1.6) при условии (1.7) или к нелинейному сингулярному интегродифференциальному уравнению (1.8) при условии (1.9). Относительно функции $f(x)$ будем предполагать, что она принадлежит классу Гёльдера (H) на сегменте [−1, 1]. Решение уравнения (1.6) ищется в классе непрерывных функций в смысле Гёльдера (H) на том же сегменте.

Решение задачи (1.8), (1.9) ищется в классе непрерывных функций на сегменте [−1, 1], первая производная которых ограничена в точках $x = \pm 1$, а вторая производная принадлежит классу H^* [18, 19].

2. Существование решения уравнения (1.6). Уравнение (1.6) при условии (1.7) представим в следующем операторном виде

$$\varphi = A\varphi, \tag{2.1}$$

где

$$A\varphi := A_0\varphi - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(A_0\varphi)\,dx, \tag{2.2}$$

а

$$(A_0\varphi)(x) := \frac{1}{Ek_0}\int_{-1}^{x} g\left(\frac{1}{h_1}\int_{-1}^{t}\varphi(s)ds\right)dt + \frac{\lambda}{\pi k_0}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-t|}\varphi(t)dt + \frac{\lambda}{\pi k_0}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-t|}\tau_0(t)dt \tag{2.3}$$

Пусть

$$|g(\xi)| \le M_1|\xi|^{\alpha} + M_2, \quad \alpha \ge 0, \quad \xi \in R, \quad M_i = \mathrm{const} \ge 0, \quad i = 1,2 \tag{2.4}$$

Из (2.3) с учетом (2.4) будем иметь

$$\begin{aligned} |(A_0\varphi)(x)| &\le \frac{1}{Ek_0}\int_{-1}^{x}\left|g\left(\frac{1}{h_1}\int_{-1}^{t}\varphi(s)ds\right)\right|dt + \\ &+ \frac{\lambda}{\pi k_0}\int_{-1}^{1}\left|\ln\frac{1}{|x-t|}\right||\varphi(t)|\,dt + \frac{\lambda}{\pi k_0}\int_{-1}^{1}\left|\ln\frac{1}{|x-t|}\right||\tau_0(t)|\,dt \le \\ &\le \frac{M_1}{Ek_0h_1^{\alpha}}\int_{-1}^{1}\left|\int_{-1}^{t}\varphi(s)ds\right|^{\alpha}dt + \frac{2M_2}{Ek_0} + \frac{\lambda}{\pi k_0}(\|\varphi\|_C + \|\tau_0\|_C)\int_{-1}^{1}\left|\ln\frac{1}{|x-t|}\right|dt \le \\ &\le \frac{2^{\alpha+1}M_1}{Ek_0h_1^{\alpha}}\|\varphi\|_C^{\alpha} + \frac{2M_2}{Ek_0} + \frac{\lambda}{Ek_0}(\|\varphi\|_C + \|\tau_0\|_C)\int_{-1}^{1}|\ln|x-t||dt \end{aligned} \tag{2.5}$$

Принимая во внимание оценку

$$\int_{-1}^{1}|\ln|x-t||dt = \int_{x-1}^{x+1}|\ln|s||ds \le 2\int_{0}^{2}|\ln s|ds = 4\ln 2$$

выражение $A\varphi$ из (2.2) с учетом (2.5) оценивается следующим образом

$$|(A\varphi)(x)| \le \frac{2^{\alpha+2}M_1}{Ek_0h_1^{\alpha}}\|\varphi\|_C^{\alpha} + \frac{4M_2}{Ek_0} + \frac{8\lambda\ln 2}{Ek_0}(\|\varphi\|_C + \|\tau_0\|_C) \tag{2.6}$$

Рассмотрим неравенство

$$a + br^{\alpha} \le r \tag{2.7}$$

относительно$r \ge 0$, где $a, b = \mathrm{const} > 0$, $\alpha = \mathrm{const} \ge 0$

Как известно [20, 21]:

1) если $0 \le \alpha < 1$, то для любых a и b всегда существует $r > 0$, удовлетворяющий неравенству (2.7);

2) если $\alpha = 1$, то $b < 1$ и неравенство (2.7) имеет решение $r \geq \dfrac{a}{1-b}$;

3) если $\alpha > 1$ и имеет место неравенство $a \leq \dfrac{\alpha-1}{\alpha}(\alpha b)^{-(\alpha-1)^{-1}}$, то тогда существует хотя бы одно положительное решение неравенства (2.7).

Опираясь на эти заключения, связанные с неравенством (2.7), в котором

$$a = \frac{4(M_2 + 2\lambda \ln 2\|\tau_0\|_C)}{\gamma}, \quad b = \frac{2^{\alpha+2}M_1}{\gamma h_1^\alpha}$$

при условии

$$\gamma := Ek_0 - 8\lambda \ln 2 > 0 \tag{2.8}$$

получим, что в силу (2.6) оператор $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, действующий по формуле (2.2), переводит шар $B(0,r) := \{\chi \in C([0,1]) : \|\chi\|_{C([0,1])} \leq r\}$ в себя:

а) для достаточно большого фиксированного r в случае $0 \leq \alpha < 1$

б) для произвольного $r \geq \dfrac{a}{1-b}$ в случае $\alpha = 1$ и $b < 1$, т.е.

$$r \geq \frac{4h_1^\alpha(M_2 + 2\lambda \ln 2\|\tau_0\|_C)}{\gamma h_1^\alpha - 2^{\alpha+2}M_1}$$

при

$$E > \frac{8\lambda \ln 2h_1^\alpha + 2^{\alpha+2}M_1}{k_0 h_1^\alpha} \tag{2.9}$$

в) в случае $\alpha > 1$, при

$$E > \max\left\{\frac{4(M_2 + 2\lambda \ln 2(\|\tau_0\|_C + 1))}{k_0}, \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{\alpha-1}\frac{2^{\alpha+2}\alpha M_1}{k_0 h_1^\alpha} + \frac{8\lambda \ln 2}{k_0}\right\} \tag{2.10}$$

Поскольку оператор $A : C([0,1]) \to C([0,1])$ является компактным, согласно принципа неподвижной точки Шаудера [21] интегральное уравнение (2.1) имеет хотя бы одно непрерывное решение, которое, опираясь на результаты, изложенные в работе ([19], стр. 175), будет принадлежать классу H.

Замечание 1. Неравенства (2.8)–(2.10), наложенные на жесткость E материала стрингера, показывают естественные условия, выражающие как возможность ее увеличения, так и существование широкого возможного спектра значений геометрических и физических параметров материала пластинки, стрингера и клея.

Существование решения интегрального уравнения (1.6) в классе непрерывных на сегменте $[-1, 1]$ функций обеспечивает ограниченность искомых контактных напряжений на концах тонкостенного элемента, в то время, как в условиях жесткого контакта, как известно, контактные напряжения имеют особенность в указанных сингулярных точках.

3. Единственность решения поставленной задачи. Теперь покажем, что если задача (1.1)–(1.6) имеет решение, то оно единственное.

Действительно, предположим, что задача допускает два возможных различных решения $u_2^{(1)}(x,y)$ и $u_2^{(2)}(x,y)$. Из соотношений (1.1) и (1.3) получаем

$$E\frac{du_1^{(j)}(x)}{dx} = g(\varphi_j(x)); \quad |x| < 1$$

$$u_1^{(j)}(x) - u_2^{(j)}(x,0) = k_0\tau^{(j)}(x),$$

где

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{h_1}\int_{-1}^{x}[\tau^{(j)}(t) - \tau_0(t)]dt; \quad j = 1,2,$$

$\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$ – соответствующие искомые контактные напряжения, а $u_1^{(1)}(x)$, $u_1^{(2)}(x)$ – соответствующие перемещения точек стрингера. Разность этих решений $u(x,y) = u_2^{(1)}(x,y) - u_2^{(2)}(x,y)$ удовлетворяет основным уравнениям теории упругости при отсутствии внешних сил, а для ее граничного значения имеем

$$E\frac{du(x,0)}{dx} + Ek_0\frac{d\tau^{(0)}(x)}{dx} = \frac{1}{h_1}\left(\int_{-1}^{x}\tau^0(t)dt\right)K(x)$$
$$u_0(x) - u(x,0) = k_0\tau^0(x), \tag{3.1}$$

где

$$u_0(x) = u_1^{(1)}(x) - u_1^{(2)}(x), \quad \tau^0(t) = \tau^{(1)}(t) - \tau^{(2)}(t)$$

$$K(x) = \int_0^1 g'[\varphi_1(x) + \theta(\varphi_2(x) - \varphi_1(x))]d\theta$$

Как известно, согласно формуле Остроградского–Грина имеет место следующее соотношение [18]

$$\int_L (X_n u + Y_n v)dl = \iint_S (\lambda\theta^2 + 2\mu(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + 2e_{xy}^2))dxdy, \tag{3.2}$$

где X_n, Y_n, u, v – компоненты внешних напряжений и смещений на границе L пластинки, соответственно, $\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$, а $e_{xx}, e_{yy}, e_{xy}, e_{zz}$ – компоненты деформации.

Учитывая (3.1), интеграл в левой части выражения (3.2) имеет вид

$$\int_L (X_n u + Y_n v)dl = \int_{-1}^{1}\tau^0(x)u(x,0)dx = \int_{-1}^{1}\tau^0(x)[u_0(x) - k_0\tau^0(x)]dx =$$
$$= -k_0\int_{-1}^{1}[\tau^0(x)]^2dx + \int_{-1}^{1}u_0(x)d\left(\int_{-1}^{x}\tau^0(t)dt\right) = -k_0\int_{-1}^{1}[\tau^0(x)]^2dx + \left[u_0(t)\int_{-1}^{x}\tau^0(t)dt\right]_{-1}^{1} -$$
$$-\int_{-1}^{1}u_0'(x)\left(\int_{-1}^{x}\tau^0(t)dt\right)dx = -k_0\int_{-1}^{1}[\tau^0(x)]^2dx - Eh_1\int_{-1}^{1}u_0'^2(x)\frac{dx}{K(x)} \tag{3.3}$$

Так как подынтегральная функция правой части формулы (3.2) представляет собой положительно определенную квадратичную форму, имея в виду (3.3), можно заключить, что если $g' > 0$, оба решения $u_2^{(1)}(x,y)$ и $u_2^{(2)}(x,y)$ дают одинаковые компоненты деформации и напряжения, что означает, задача (1.1)–(1.6) не может иметь более одного решения.

4. Построение решения задачи (1.8), (1.9) при помощи метода малого параметра. Уравнение (1.8) перепишем в виде

$$k_0\psi''(x) = \delta g(\psi(x)) - \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi'(t)dt}{t-x} - f_0(x); \quad |x| < 1, \tag{4.1}$$

где $\delta = \dfrac{1}{E}$, $f_0(x) = \dfrac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\dfrac{\tau_0(t)dt}{t-x}$.

Будем предполагать, что функции $f_0(x)$ принадлежит классу $C^1[-1,1]$.

Когда δ малый параметр, т.е. материал стрингера – жесткий, представим решение уравнения (4.1) в виде ряда по степеням δ:

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \psi_k(x) = \psi_0(x) + \delta\psi_1(x) + \delta^2\psi_2(x) + \delta^3\psi_3(x) + O(\delta^4) \tag{4.2}$$

В предположении, что функция g – аналитическая и разлагается в ряд Маклорена: $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k$ на всей действительной оси, будем иметь

$$g(\psi(x)) = g(0) + \frac{g'(0)}{1}\psi(x) + \frac{g''(0)}{1\times 2}\psi^2(x) + \frac{g'''(0)}{1\times 2\times 3}\psi^3(x) + \cdots \tag{4.3}$$

Подставляя разложения (4.2) и (4.3) в уравнение (4.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях δ, получим систему рекуррентных уравнений относительно ψ_k

$$k_0\psi_0''(x) = -\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_0'(t)dt}{t-x} - f_0(x); \quad |x| < 1 \quad \text{и т.д.} \tag{4.4}$$

при условиях

$$\psi_k(\pm 1) = 0; \quad k \geq 0 \tag{4.5}$$

Таким образом, решение уравнения (1.8) при условии (1.9) сводится к решению системы рекуррентных линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (4.4) при условиях (4.5). Решения каждого из этих уравнений (относительно функций $\psi_k'(x)$, $k \geq 0$) с учетом (4.5) представляются в виде ряда ортогональных многочленов Чебышёва [22] в классе функций, ограниченных на обеих концах линии интегрирования. С применением метода ортогональных многочленов уравнения (4.4) при условиях (4.5) сводятся к совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, квазивполне регулярных при любых конечных значениях параметров k_0 и λ.

В виде образца рассмотрим первое уравнение из системы (4.4), решение которого будем искать в виде

$$\psi_0'(x) = \sqrt{1-x^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{k}U_{k-1}(x), \tag{4.6}$$

где числа X_k подлежат определению, а $U_{k-1}(x)$ – ортогональные многочлены Чебышева второго рода, $k = 1,2,\ldots$.

На основе известных соотношений [22] для ортогональных многочленов Чебышёва

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}U_{k-1}(t)dt}{t-x} = -\pi T_k(x), \quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}U_{k-1}(x)\right) = -\frac{kT_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.7}$$

подставляя выражения (4.6) и (4.7) в первое уравнение системы (4.4), умножая обе части полученного равенства на $T_m(x)$ и интегрируя на интервале $(-1,1)$ получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$X_m - \frac{2\lambda}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_{mk}}{k}X_k = f_m; \quad m = 1,2,\ldots k_0, \tag{4.8}$$

где

$$R_{mk} = \int_{-1}^{1}T_m(x)T_k(x)dx, \quad f_m = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}f_0(x)T_m(x)dx,$$

а $T_k(x)$ – ортогональные многочлены Чебышёва первого рода.

Исследуем систему (4.8) на регулярность в классе ограниченных последовательностей. Используя известные соотношения для полиномов Чебышёва первого рода получаем

$$R_{mk} = \begin{cases} 0, \quad m = k+1, \quad m = k-1 \\ -\dfrac{(-1)^{k+m}+1}{2}\left[\dfrac{1}{(m+k)^2-1} + \dfrac{1}{(m-k)^2-1}\right], \quad m \neq k+1, \quad m \neq k-1 \end{cases}$$

и, соответственно,

$$S_m = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{R_{mk}}{k}\right| \to 0, \quad m \to \infty \tag{4.9}$$

а при помощи формулы интегрирования по частям можно показать, что свободный член этой системы f_m стремится к нулю при $m \to \infty$ со скоростью не менее, чем m^{-1}, т.е.

$$f_m = O(m^{-1}); \quad m \to \infty \tag{4.10}$$

Таким образом, из (4.9) и (4.10) следует, что система (4.8) квазивполне регулярна для любых положительных значений параметров k_0 и λ в классе ограниченных последовательностей [23, 24].

В качестве примера рассмотрим случай $g(u) = u^2$. Тогда система рекуррентных уравнений (4.4) принимает вид:

$$\begin{gathered} L\psi_0(x) = -f_0(x), \quad L\psi_1(x) = \psi_0^2(x), \quad L\psi_2(x) = 2\psi_0(x)\psi_1(x) \\ \ldots \\ L\psi_k(x) = \sum_{i+j=k-1}\psi_i(x)\psi_j(x); \quad |x| < 1, \end{gathered} \tag{4.11}$$

где $L\psi(x) = k_0\psi''(x) + \dfrac{\lambda}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{\psi'(t)dt}{t-x}$

Из системы (4.11) следует, что $\|\psi_n\|_C \leq 4^{n-1}\left\|L^{-1}\right\|_{C^1\to C}^{2n+1}\|f_0\|_{C^1}^{n+1}$, и ряд (4.2) сходится при условии

$$\delta \leq \frac{\delta_0}{4\left\|L^{-1}\right\|_{C^1\to C}\|f_0\|_{C^1}}, \quad 0 < \delta_0 = \text{const} < 1 \tag{4.12}$$

Замечание 2. Хорошо известна общая теорема Пуанкаре [25] о разложении решения нелинейных дифференциальных уравнений по степеням малого параметра. Тогда в случае нелинейного сингулярного интегродифференциального уравнения вида (4.1) при конкретных нелинейных функциях g, например, для степенных функций, можно получить условие вида (4.12) относительно малого параметра δ, при котором ряд (4.2) сходится. Соответственно, решение уравнения (4.1) при условиях (1.9) можно построить в виде ряда (4.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
2. *Банцури Р.Д.* Контактная задача для анизотропного клина с упругим креплением // Докл. АН СССР. 1975. Т. 222. № 3. С. 568 –571.
3. *Нуллер Б.М.* О деформации упругой клиновидной пластинки, подкрепленной стержнем переменной жесткости и об одном методе решения смешанных задач // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 306–316.

4. *Саркисян В.С.* Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: ЕГУ, 1983. 534 с.
5. *Shavlakadze N.* The contact problems of the mathematical theory of elasticity for plates with an elastic inclusion // Acta Appl. Math. 2007. V. 99. № 1. P. 29–51.
6. *Банцури Р.Д., Шавлакадзе Н.Н.* Контактная задача для кусочно-однородной ортотропной пластинки с конечным включением // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 1. С. 133–138.
7. *Shavlakadze N.* The solution of system of integral differential equations and its application in the theory of elasticity // ZAMM. 2011. V. 91. № 12. P. 979–992.
8. *Shavlakadze N., Odishelidze N., Criado-Aldeanueva F.* The contact problem for a piecewise-homogeneous orthotropic plate with a finite inclusion of variable cross-section // MMS. 2017. V. 22. № 6. P. 1326–1333.
9. *Lubkin J.I., Lewis I.C.* Adhesive shear flow for an axially loaded finite stringer bonded to an infinite sheet // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1970. № 23. P. 521–533.
10. *Kesari H., Lew A.* Adhesive frictionless contact between an elastic isotropic half-space and rigid axi-symetric punch // J. Elasticity. 2011. V. 106. № 2. P. 203–224.
11. *Stan G., Adams G.G.* Adhesive contact between a rigid spherical indenter and elastic multi-layer coated substrate.// Intern. J. Solids &Struct. 2016. V. 87. P. 1–10.
12. *Borodich F.M.* The Hertz-Type and adhesive contact problem for depth-sensing indentation // Adv. Appl. Mech. 2014. V. 47. P. 225–366.
13. *Selvadurai A.P.S., Katebi A.* An Adhesive contact problem for an incompressible non-homogeneous elastic half-space // Acta Mech. 2015. V. 226. № 2. P. 249–265.
14. *Джохадзе О.М., Харибегашвили С.С, Шавлакадзе Н.Н.* Приближенные и точные решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения, связанного с контактной задачей теории упругости // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 114–124.
15. *Джохадзе О.М., Харибегашвили С.С, Шавлакадзе Н.Н.* Контактное взаимодействие пластинки с нелинейно-упругим стрингером // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 2. С. 101–110.
16. *Nonlinear Elasticity*: Theory and Application / *Ed. by Fu Y.B., Ogden R.W.* Cambridge: Univ. Press, 2001. 525 p.
17. *Luo A.C.J.* Nonlinear Deformable-Body, Dynamics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. P. 161–199.
18. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
19. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
20. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 302 с.
21. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.
22. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962. 500 с.
23. *Канторович Л., Крылов В.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
24. *Канторович Л., Акилов Г.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.
25. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнении. М.: Изд. технико-теорет. лит., 1950. 436 с.

The Contact Problem for Elastic Plate, on the Border which is Adhered Nonlinearly Deformable Stringer of Finite Length

N. N. Shavlakadze[a,#], **O. M. Jokhadze**[a] **and S. S. Kharibegashvili**[a]

[a] *Tbilisi State University, Pazmadze Mathematical Institute, Tbilisi, Georgia*
[#] *e-mail: nusha1961@yahoo.com*

A problem of determining the mechanical field in a homogeneous half-plane supposed by a finite homogeneous stringer, material of which obeys the nonlinear Hooke's law, is considered. The contact between the plate and stringer is realized by a thin glue layer. The posed problem is reduced to a nonlinear singular integro-differential equation. Using the Schauder fixed-point principle existence of a solution for this equation is proved. The uniqueness of the solution of the problem is proved. Using small parameter method, a system of recurrence linear singular integral equations of the first kind is obtained.

Keywords: contact problem, nonlinear integro-differential equation, Schauder principle, small parameter method

REFERENCES

1. *Aleksandrov V.M., Mkhitaryan S.M.* Contact Problems for Bodies with Thin Coverings and Layers. Moscow: Nauka, 1983. 487 p. (in Russian)
2. *Bantsuri R.* The contact problem for an anisotropic wedge with an elastic fastening // Dokl. Akad. Nauk SSSR ,1975, vol. 222, no. 3, P. 568–571.
3. *Nuller B.* The deformation of an elastic wedge- shaped plate supported by a rod of variable stiffness and a method of solving mixed problems // JAMM, 1976, vol. 40, no. 2, pp. 306–316.
4. *Sargsyan V.S.* Some Problems of the Mathematical Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. Yerevan: YSU, 1983. 534 p. (in Russian)
5. *Shavlakadze N.* The contact problems of the mathematical theory of elasticity for plates with an elastic inclusion // Acta Appl. Math., 2007, vol. 99, no. 1, pp. 29–51.
6. *Bantsuri R., Shavlakadze N.* The contact problem for piecewise homogeneous orthotropic plane with finite inclusion // JAMM, 2011, vol.75, no. 1, pp. 93–97.
7. *Shavlakadze N.* The solution of system of integral differential equations and its application in the theory of elasticity // ZAMM, 2011, vol. 91, no. 12, pp. 979–992.
8. *Shavlakadze N., Odishelidze N., Criado-Aldeanueva F.* The contact problem for a piecewise-homogeneous orthotropic plate with a finite inclusion of variable cross-section // MMS, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1326–1333.
9. *Lubkin J.I., Lewis I.C.* Adhesive shear flow for an axially loaded finite stringer bonded to an infinite sheet// Quart. J. Mech. Appl. Math., 1970, no. 23, pp. 521–533.
10. *Kesari H., Lew A.* Adhesive frictionless contact between an elastic isotropic half-space and rigid axi-symetric punch // J. Elasticity, 2011, vol. 106, no. 2, pp. 203–224.
11. *Stan G., Adams G.G.* Adhesive contact between a rigid spherical indenter and elastic multi-layer coated substrate // Intern. J. Solids &Struct., 2016, vol. 87, pp. 1–10.
12. *Borodich F.M.* The Hertz-Type and adhesive contact problem for Depth-Sensing indentation // Adv. Appl. Mech., 2014, vol. 47, pp. 225–366.
13. *Selvadurai A.P.S., Katebi A.* An Adhesive contact problem for an incompressible non-homogeneous elastic half-space // Acta Mech., 2015, vol. 226, no. 2, pp. 249–265.
14. *Jokhadze O., Kharibegashvili S., Shavlakadze N.* Approximate and exact solution of a singular integro-differential equation related to contact problem of elasticity theory // JAMM, 2018, vol. 82, no. 1, pp. 114–124.
15. *Jokhadze O, Kharibegashvili S, Shavlakadze N.* Contact interaction of the plate with a nonlinear elastic stringer // Mech. Solids, 2020, vol. 54, no. 3, pp. 440–447.
16. Nonlinear Elasticity: Theory and Application / *Ed. by Fu Y.B., Ogden R.W.* Cambridge: Univ. Press, 2001. 525 p.
17. *Luo A.C.J.* Nonlinear Deformable-Body, Dynamics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. pp. 161–199.
18. *Muskhelishvili N.I.* Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1966. 707 p. (in Russian)
19. *Muskhelishvili N.I.* Singular Integral Equations. Moscow: Nauka, 1968. 511 p. (in Russian)
20. *Krasnov M.L.* Integral Equations. Moscow: Nauka, 1975. 302 p. (in Russian)
21. *Trenogin V.A.* Functional analysis. Moscow: Nauka, 1980. 495 p. (in Russian)
22. *Szegö G.* Orthogonal Polynomials. Moscow: Fizmatlit, 1962. 500 p. (in Russian)
23. *Kantorovich L., Krylov V.* Approximate Methods of Higher Analysis. Moscow; Leningrad: Fizmatgiz, 1962. 708 p. (in Russian)
24. *Kantorovich L., Akilov G.* Functional Analysis. Moscow: Nauka, 1977. 741 p. (in Russian)
25. *Golubev V.V.* Lecture on the Analytical Theory of Differential Equations. Moscow: Izd. Tech. Teor. Lit, 1950. 436 p. (in Russian)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 5, с. 650–662

УДК 53.072.23:534.5

МОДЕЛИ КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ В МЕХАНИКЕ БЕЗКОГЕЗИОННЫХ СРЕД (ОБЗОР)

С. В. Кузнецов[1,2,3,*]

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
[2] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*
[3] *Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*
**e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru*

Поступила в редакцию 03.02.2020 г.
После доработки 14.05.2020 г.
Принята к публикации 08.06.2020 г.

Анализируются основные уравнения и допущения, принимаемые при конструировании моделей критического состояния, применяемых в механике безкогезионных сред. Отмечается связь модифицированной кэм–клей модели с родственными моделями теории пластичности с изотропным упрочнением, описываемыми замкнутыми поверхностями пластичности. Дается анализ уравнений состояния модифицированных кэм–клей моделей в упругой зоне; отмечены работы, в которых упругое состояние описывается уравнениями гиперупругости с экспоненциальным потенциалом. Рассмотрены обобщения модифицированных кэм–клей моделей на случай конечных деформаций. Отмечено, что необходимы дополнительные исследования по кинематическим комбинированным нагружениям в шаровой и девиаторной области.

Ключевые слова: упругопластическая среда, модель критического состояния, кэм–клей модель, конечные деформации

DOI: 10.31857/S0032823520050045

Введение. Модель кэм–клей, также как и ее модификация, применяются для моделирования поведения безкогезионных или слабо когезионных грунтов при их упругопластическом деформировании [10, 11]. Впервые эта модель с логарифмической поверхностью пластичности в докритической зоне построена [28, 29]. Позже [27] предложено логарифмическую поверхность пластичности заменить эллипсоидальной (рис. 1). Такая модель именуется модифицированной кэм–клей моделью. Как кэм–клей, так и модифицированная кэм–клей модель относятся к упругопластическим моделям с изотропным упрочнением.

Имеется значительное число работ по применению как кэм–клей модели, так и ее модификации для исследования поведения различных гранулированных материалов с малой когезией в условиях как монотонных нагружений [3, 5, 8–12, 15, 17–19], так и при циклических воздействиях [2, 4, 14, 22, 23, 26, 30, 32, 35, 36, 38, 39]. Большая часть рассматриваемых исследований посвящена либо одноосному [30, 35], либо трехосному силовому нагружению [2, 4, 14, 23, 26, 36, 38].

Предложен [2, 23, 38] аналог модифицированной кэм–клей модели с кинематическим упрочнением, что позволяет учитывать в расчетах эффект Баушингера. В некоторых моделях вводят дополнительные параметры, учитывающие частоту циклических нагружений, а также деградацию материала [14, 24, 33, 39].

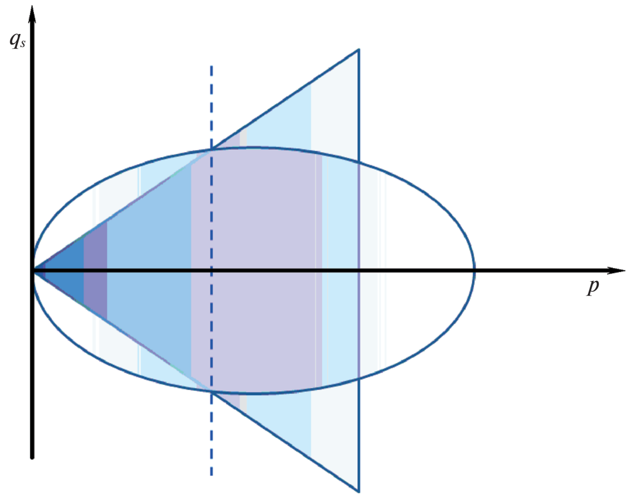


Рис. 1. Поверхность пластичности и критический конус для модифицированной кэм–клей модели: штриховая линия отвечает пересечению эллипсоидальной поверхности текучести с критическим конусом [27].

Ниже рассматривается модифицированная кэм–клей модель в условиях циклического кинематического нагружения при линейной связи между напряжениями и деформациями в упругой области и отсутствием упрочнения при объемном нагружении.

1. Основные уравнения. В этом разделе вводятся основные уравнения модифицированной кэм–клей модели для инфинитезимальных деформаций.

1.1. Основные обозначения. Для дальнейшего потребуется представление произвольного симметрического разложимого тензора второго ранга вида

$$\mathbf{S} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^3 \tag{1.1}$$

на шаровую и девиаторную части

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} \cdot \cdot \mathbf{S}), \quad \mathbf{D} = \mathbf{S} - \mathbf{V}, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{I} \in R^3 \otimes R^3$ – единичный тензор второго ранга.

Ниже вводятся тензорные инварианты тензора $\mathbf{S}$

$$I_{\mathbf{S}} \equiv \sum_{k=1}^{3} S_{kk}, \quad II_{\mathbf{S}} \equiv \|\mathbf{S}\|^2, \quad III_{\mathbf{S}} \equiv \det(\mathbf{S}), \tag{1.3}$$

где $\|\mathbf{S}\|$ – норма Шура тензора $\mathbf{S}$:

$$\|\mathbf{S}\| = \sqrt{\sum_{k,j} S_{kj}^2} \tag{1.4}$$

Объединение (1.2), (1.3) дает

$$II_{\mathbf{D}} \equiv \|\mathbf{S}\|^2 - \frac{1}{3} I_{\mathbf{S}}^2 \tag{1.5}$$

Декомпозиция (1.2) для тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и инфинитезимального тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ обычно записывается в несколько измененном виде

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = -\frac{1}{3}\theta\delta_{ij} + e_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{1.6}$$

где обозначено

$$p = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\sigma_{kk}, \quad \theta = -\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}, \quad d_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} \tag{1.7}$$

в разложении (1.6)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{1.8}$$

Замечание 1. При решении задач динамики грунтовых сред знак объемной деформации обычно принимается таким же, как знак соответствующего первого инварианта тензора деформаций, однако, в кэм–клей модели (и некоторых других моделях критического состояния) знак объемной деформации берется противоположным знаку первого инварианта, по аналогии со знаком давления, см. соотношения (1.7).

В соответствии с определениями (1.3)–(1.7) удобно ввести следующую норму для девиаторов напряжений и деформаций

$$N_{\mathbf{s}} = \sqrt{II_{\mathbf{s}}}, \quad N_{\mathbf{e}} = \sqrt{II_{\mathbf{e}}} \tag{1.9}$$

Наряду с девиаторными нормами (1.9) для дальнейшего потребуются следующие параметры, основанные на нормах (1.9), см. [25]

$$N_{\mathbf{s}}^{\pm} = \frac{f(\boldsymbol{\sigma})}{|f(\boldsymbol{\sigma})|}\sqrt{II_{\mathbf{s}}}, \quad N_{\mathbf{e}}^{\pm} = \frac{f(\boldsymbol{\sigma})}{|f(\boldsymbol{\sigma})|}\sqrt{II_{\mathbf{e}}}, \tag{1.10}$$

где $f(\bullet)$ – функция от соответствующих тензорных инвариантов. В большинстве приложений функция $f(\bullet)$ выбирается совпадающей с первым инвариантом [25], таким образом (1.10) принимают вид

$$N_{\mathbf{s}}^{\pm} = -\frac{p}{|p|}\sqrt{II_{\mathbf{s}}}, \quad N_{\mathbf{e}}^{\pm} = -\frac{\theta}{|\theta|}\sqrt{II_{\mathbf{e}}} \tag{1.11}$$

Вместо норм (1.9), в теориях пластичности могут использоваться девиаторные нормы, известные как напряжения и деформации Треска

$$\sigma_{\text{Tresca}} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad \varepsilon_{\text{Tresca}} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \tag{1.12}$$

где σ_k, ε_k, $k = 1,2,3$ – главные компоненты соответствующих тензоров, ранжированные по убыванию. По аналогии с (1.10) могут быть введены параметры $N_{\mathbf{s}}^{\pm}$ и $N_{\varepsilon}^{\pm}$, основанные на нормах Треска.

1.2. Упругое состояние. Тензор деформаций может быть разбит на тензоры упругой и пластической деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{\varepsilon}^e \tag{1.13}$$

В случае упругих деформаций, закон состояния в кэм–клей моделях формулируется либо в виде

(А) линейной связи между напряжениями и деформациями

$$\sigma = \lambda_e\theta^e\mathbf{I} + 2\mu_e\varepsilon^e, \tag{1.14}$$

где λ_e и μ_e упругие модули (константы Ламе);

(Б) гипоупругих соотношений, записываемых в виде [8, 27]

$$\begin{cases} \dfrac{p_0 - p_t}{p - p_t}\dot{p} = K_e\dot{\theta}^e \\ \dot{\sigma} + \dfrac{1}{3}\dot{p}\mathbf{I} = 2\mu_e\dot{\mathbf{e}}^e \end{cases}, \tag{1.15}$$

где $p_t \le 0$ нижняя граница давлений, — параметр, позволяющий избежать сингулярности в первом уравнении (1.15) при малых p; p_0 начальное давление при $\theta^e = 0$; либо в виде

(B) гиперупругого потенциала [10, 11]

$$W = p_0 e^{\theta^*}\left(k + \alpha II_\varepsilon\right), \tag{1.16}$$

где θ^* имеет вид

$$\theta^* = \left(\gamma k\right)^{-1}\theta, \quad \gamma = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \tag{1.17}$$

Безразмерные константы k, α соответствуют объемному и сдвиговому модулям.

Замечание 2. а) Гипоупругие соотношения (1.15) могут быть записаны в терминах инкрементов dp, $d\theta^e$ или соответствующих скоростей:

$$\dot{p} = K_e^*(p)\dot{\theta}^e, \tag{1.18}$$

где $K_e^*(p) = (p - p_t)K_e$.

б) В гипоупругих соотношениях (1.15) сдвиговой модуль обычно считают либо постоянным [14], либо определяют из (1.15) в предположении постоянного коэффициента Пуассона [9], в этом случае

$$\mu_e = \gamma K_e^*(p) \tag{1.19}$$

Надо отметить, что случай постоянного коэффициента Пуассона и формула для модуля сдвига (1.19) представляются более реалистичными, чем условие постоянного модуля сдвига [9].

1.3. Поверхность пластичности. В модифицированных кэм—клей моделях поверхность пластичности описывается следующим уравнением [8, 27]

$$f(p, q_{\mathbf{s}}, p_c) \equiv \frac{1}{\beta}\left(\frac{p^2}{a^2} - 2\frac{p}{a} + 1\right) + \frac{q_{\mathbf{D}_\varepsilon}^2}{(Ma)^2} = 1, \tag{1.20}$$

где β — безразмерный параметр, определяющий форму эллипсоида: в докритической зоне (левая часть эллипсоида) $\beta = 1$, в закритической зоне (правая часть) $\beta \le 1$; безразмерный параметр M, определяемый углом раствора критического конуса, определяет размер эллипсоида по оси $q_{\mathbf{s}}$; $q_{\mathbf{D}_\varepsilon}$ — одна из эквивалентных норм девиатора деформаций, часто в качестве $q_{\mathbf{D}_\varepsilon}$ используют норму Шура:

$$q_{\mathbf{D}_\varepsilon} = \sqrt{\mathbf{D}_\varepsilon \cdot \cdot \mathbf{D}_\varepsilon} \tag{1.21}$$

Причем девиатор соответствует упругим деформациям. В уравнении (1.20) a — параметр, определяющий собой размер эллипсоида по оси p:

$$a = \frac{p_c}{1+\beta}, \tag{1.22}$$

где p_c текущее значение пластических давлений.

1.4. Объемное упрочнение. В соответствии с [8, 11], объемное упрочнение может быть задано в виде (i) кусочно-линейного продолжения соотношений (1.14); или (ii) с помощью соотношений гипоупругости (1.15), или (iii) с помощью гиперупругого потенциала (1.16). Надо отметить, что в моделях кэм—клей задается только объемное упрочнение.

(i) Объемное упрочнение, задаваемое в терминах кусочно-линейного продолжения уравнений (1.10), записывается в виде соответствующих скоростей

$$\dot{p} = K(p)\dot{\theta} \tag{1.23}$$

Обычно для объемного модуля принимают ступенчатую зависимость от p

$$K(p) = \begin{cases} K_e, & 0 < p < p_{c0} \\ K_p, & p > p_{c0} \end{cases}, \tag{1.24}$$

где K_p – модуль упрочнения ($K_p < K_e$), а p_{c0} – начальное значение давления, отвечающего началу пластического течения. Интегрирование уравнений (1.23) дает

$$p = \begin{cases} K_e\theta, & 0 < p < p_{c0} \\ p_{c0} + K_p\theta_p, & p > p_{c0}, \end{cases} \tag{1.25}$$

где $\theta_p = \theta - \theta_{c0}$ и $\theta_{c0} = p_{c0}/K_e$. При разгрузке $K(p)$ совпадает с K_e.

(ii) Продолжение уравнений (1.15) для учета пластичности осуществляется, фактически, теми же уравнениями: первое уравнение (1.15) можно переписать в терминах двух модулей, по аналогии с (1.23) [20, 31]

$$\frac{p_0 - p_t}{p - p_t}\dot{p} = \begin{cases} K_e\dot{\theta}_e, & 0 < p < p_{c0} \\ K_p\dot{\theta}_p, & p > p_{c0} \end{cases} \tag{1.26}$$

Замечание 3. Аналогично уравнению (1.18), второе уравнение (1.26) можно записать в терминах касательного модуля:

$$\dot{p} = K_p^*(p)\dot{\theta}_p, \tag{1.27}$$

где $K_p^*(p) = (p - p_t)K_p$.

(iii) Продолжение гиперупругого потенциала (1.16) в зону пластичности осуществляется с помощью введения зависимостей параметров α и k от давления при $p > p_{c0}$:

$$W = p_0 e^{\theta^*}\left(k(p) + \alpha(p)II_\varepsilon\right) \tag{1.28}$$

Наиболее простые зависимости $\alpha(p)$, $k(p)$ получаются в случае билинейных функций:

$$k(p) = \begin{cases} k_e & 0 < p < p_{c0} \\ k_p, & p > p_{c0} \end{cases}, \quad \alpha(p) = \begin{cases} \alpha_e & 0 < p < p_{c0} \\ \alpha_p, & p > p_{c0} \end{cases} \tag{1.29}$$

1.5. Закон пластического течения. Для описания пластического течения, уравнение (1.20) должно быть дополнено уравнением, описывающим пластическое течение. В большинстве работ по кэм–клей пластичности [9, 27–29] принимается ассоциированный закон пластического течения. Это означает совпадение потенциалов течения и уравнения, определяющего поверхность пластичности (1.20), в каждой точке поверхности $f(p, q_{\mathbf{s}}, p_c) = 0$:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\gamma}\nabla_{\boldsymbol{\sigma}} f, \tag{1.30}$$

где $\dot{\gamma}$ – параметр, определяющий скорость пластического течения. Уравнение (1.30) можно представить в виде двух уравнений в терминах шаровых и девиаторных тензоров

$$\dot{\mathbf{e}}_p \equiv \dot{\gamma}\nabla_{\mathbf{s}} f(p, q_{\mathbf{s}}, p_c), \quad \dot{\theta}_p = 3\dot{\gamma}\partial_p f(p, q_{\mathbf{s}}, p_c) \tag{1.31}$$

Выполняя дифференцирование в (1.31), получаем

$$\dot{\mathbf{e}}_p = \dot{\gamma}\frac{2\mathbf{s}}{(Ma)^2}, \quad \dot{\theta}_p = \dot{\gamma}\frac{6}{\beta a}\left(\frac{p}{a} - 1\right) \tag{1.32}$$

Учитывая (1.22), второе уравнение в (1.32) принимает вид

$$\dot{\theta}_p = \dot{\gamma}\frac{6(1+\beta)}{\beta p_c}\left(\frac{p(1+\beta)}{p_c} - 1\right) \tag{1.33}$$

В предположении $p = p_c$ и, следовательно $\mathbf{s} = 0$, уравнение (1.33) дает

$$\dot{\theta}_p = \dot{\gamma}\frac{6(1+\beta)}{p_c} \tag{1.34}$$

Поскольку в точке $(p_c, 0)$ выполняется одно из условий упрочнения (1.23)–(1.29), уравнение (1.34) может быть записано в терминах скорости $\dot{p}_c$

$$\dot{p}_c = \dot{\gamma}\frac{6(1+\beta)}{p_c} g(p_c), \tag{1.35}$$

где функция $g(p_c)$ определена соответствующим уравнением, описывающим упрочнение. Например, для уравнения упрочнения (1.25)

$$g(p_c) = K_p \tag{1.36}$$

Ввиду (1.35) скорость $\dot{\gamma}$ может быть определена из условия совместности Прагера:

$$\nabla_{\boldsymbol{\sigma}} f \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \partial_{p_c} f \, \dot{p}_c = 0 \tag{1.37}$$

Подстановка в уравнение (1.37) представления для $\dot{p}_c$ из уравнения (1.35) дает искомое уравнение для скорости $\dot{\gamma}$

$$\dot{\gamma} = -\frac{\nabla_{\boldsymbol{\sigma}} f \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial_{p_c} f} \times \frac{p_c}{6(1+\beta) g(p_c)} \tag{1.38}$$

Уравнение (1.38) является дополняющим уравнением для уравнения пластического течения (1.32).

1.6. Обобщение на случай конечных деформаций. Модификация кэм–клей моделей для учета конечных деформаций предложена в [11, 13, 34, 41, 42]. В рамках теории конечных деформаций рассматривалась [34] линейная зависимость $v - \ln p$ и принималось предположение о постоянном модуле сдвига, а построена [11, 13] аналогичная модель для постоянного коэффициента Пуассона.

Для обобщения кэм–клей модели на случай конечных деформаций, необходимо ввести безразмерный параметр v (относительный объем)

$$v = \frac{V}{V_{\text{solid}}} \tag{1.39}$$

где V – текущий объем, содержащий поры, а V_{solid} – объем твердой фракции. В терминах относительного объема, может быть определена (конечная) объемная деформация

$$\theta = \det \mathbf{F} - \det \mathbf{I} = \frac{V - V_0}{V_0}, \tag{1.40}$$

где $\mathbf{F}$ – градиент смещений, а V_0 – начальный объем. Как правило [34] в теориях, учитывающих конечные деформации гранулированных сред, объемным деформированием твердой фракции пренебрегают, это позволяет представить объемную деформацию в виде

$$\theta = \frac{v - v_0}{v_0} \tag{1.41}$$

Следуя [34, 42], закон состояния в упругой зоне удобно представить в виде

$$\dot{\mathbf{s}} = 2\mu(p, \|\mathbf{e}\|)\left(I_{6\times 6} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\right)\dot{\mathbf{e}}, \tag{1.42}$$

где $\dot{\mathbf{s}}$ – инкремент девиатора напряжений, $I_{6\times 6}$ – единичный тензор, действующий в шестимерном пространстве R^6, $\dot{\mathbf{e}}$ – инкремент девиатора упругих деформаций, $\mu(p, \|\mathbf{e}\|)$ – модуль сдвиговых деформаций, зависящий от текущего объема и какой-либо нормы текущего девиатора упругих деформаций. Наиболее часто [34, 42] в качестве нормы используется шуровская норма:

$$\|\mathbf{e}\| = \sqrt{\mathbf{e}\cdot\cdot\mathbf{e}} \tag{1.43}$$

Заметим, что в законе гипоупругости (1.42) соответствующие инкременты предполагаются малыми, – это позволяет использовать линейные инкрементальные соотношения.

Для описания закона состояния при объемном упругом деформировании применяют следующий линейный в полулогарифмических координатах закон состояния [20, 34]

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -K_0\theta_e \tag{1.44}$$

где θ_e – упругая часть объемной деформации, K_0 – постоянный (в полулогарифмических координатах) объемный модуль, p_0 – начальное давление. Закон состояния (1.44) позволяет записать соответствующее уравнение состояния в терминах инкрементов

$$\frac{\dot{p}}{p} = -K_0\dot{\theta}_e \tag{1.45}$$

Именно в инкрементальной форме (1.45) уравнения гипоупругости применяются для описания объемного упругого деформирования.

Объединяя (1.42) и (1.45), уравнение состояния рассматриваемой гранулированной среды представимо в виде тензорного уравнения для гипоупругой среды

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = K(p)\dot{\theta}_e\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} + 2\mu(p, \|\mathbf{e}\|)\left(I_{6\times 6} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\right)\dot{\mathbf{e}}, \quad K(p) = K_0\frac{1}{p} \tag{1.46}$$

В пластической стадии при учете больших деформаций используют уравнения (1.23)–(1.29), применявшиеся для описания пластичности с объемным упрочнением и отсутствием упрочнения в девиаторной плоскости, таким предполагается, что при больших деформациях инкременты девиаторных компонент напряжений отсутствуют [20, 34], а объемная пластическая деформация описывается следующим соотношением (1.27). Заметим, что поверхность пластичности обычно [34] описывается уравнением (1.20). С учетом уравнений состояния (1.46), удается решить задачу о деформировании гранулированной среды в условиях больших деформаций.

1.7. Дальнейшее развитие модифицированных кэм–клей моделей. Одна из модификаций [37] возникает при замене эллипсоидальной поверхности пластичности на яйцеобразную.

Еще одно развитие кэм–клей моделей связано с введением концепции ограничивающей поверхности (BS) [16]. Введение BS-поверхности позволяет охватить все допустимые в процессе нагружения поверхности пластичности. Модуль объемного упрочнения в этой теории задается как функция расстояния между текущей поверхностью пластичности и BS-поверхностью. Дальнейшее обобщение этой теории известно, как теория общей пластичности (General Plasticity, GP). Эта теория [6, 7], позволяет рассматривать несколько BS-поверхностей. Как BS, так и GP модели обеспечивают задание гладкого перехода от упругого к пластическому состоянию.

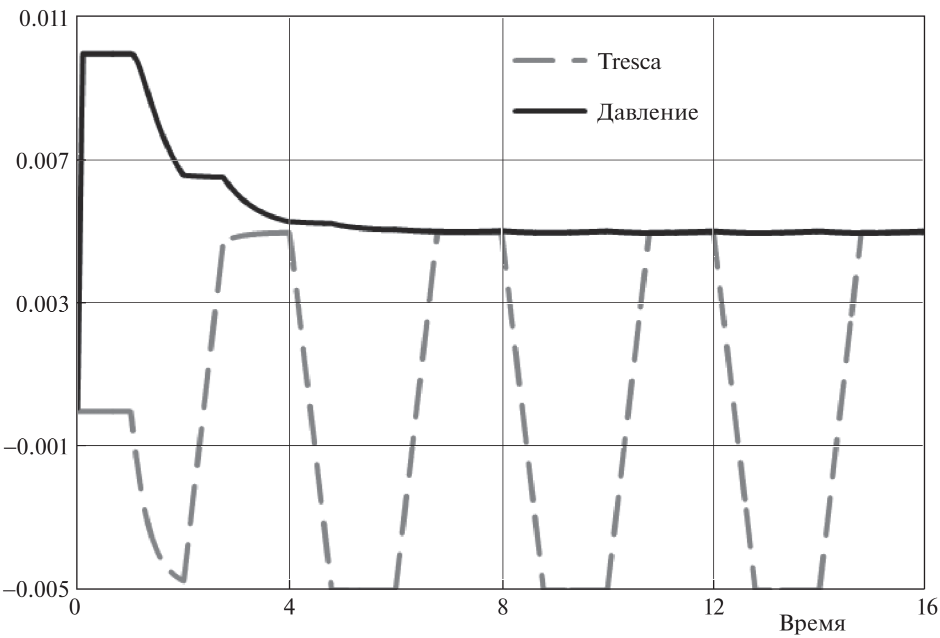


Рис. 2. Сверхкритическая зона: изменение девиаторных компонент напряжений и давления от времени: штриховая линия – девиаторные компоненты напряжений Треска; сплошная линия – гидростатическое давление; напряжения, МПа, [42].

В последнее время рассмотрены [41–44] приложения модифицированных кэм–клей моделей для описания поведения гранулированных сред в условиях циклических квазистатических [41–44] нагружений, причем, как показано [42, 43], в закритической области циклическое деформирование в девиаторной плоскости необходимо приводит к размягчению в плоскости, определяемой параметрами $\theta - p$; см. рис. 2 [42]; в то же время в докритической области, при циклическом деформировании в девиаторной плоскости наблюдается упрочнение в плоскости $\theta - p$.

Некоторые задачи нестационарной сейсмодинамики, описываемые модифицированными кэм–клей моделями, рассмотрены в [45–48]. В недавних исследованиях [49–53] рассмотрены обобщения кэм–клей моделей на случай (трансверсальной) анизотропии как в упругой, так и в пластической зонах, причем [53] наряду с трансверсальной анизотропией рассмотрен несколько более общий случай кубической сингонии.

2. Заключительные замечания. Рассмотренные модели критического состояния и, в том числе кэм–клей модели, применяемые для анализа безкогезионных или слабо когезионных сред, можно рассматривать, как частный случай моделей с изотропным упрочнением и замкнутой поверхностью пластичности [38]. В этой связи кэм–клей модели наследуют свойства таких моделей и им присущи те же ограничения, что и другим моделям кэп-пластичности: это, прежде всего, выраженная область упругих деформаций, ограниченная поверхностью текучести и, принимаемый в большинстве исследований ассоциированный закон пластического течения.

Надо отметить, что известны также подходы, в которых рассматриваются модели с распределенной поверхностью пластичности (по терминологии [38] это модели с микропластичностью). Эти модели позволяют достичь эффектов, аналогичным эффектам, реализуемым в моделях критического состояния, в частности, в моделях микропластичности удается реализовать эффект разупрочнения, реализуемый в моделях критического состояния. Рассматривались [40] некоторые приложения моделей критического состояния к задачам волновой динамики.

Работа выполнена за счет гранта № 20-49-08002 Российского научного фонда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aboim C., Roth W.* Bounding surface plasticity theory applied to cyclic loading of sand // in: Intern. Symp. Num. Models Geomech. 1982. P. 65–72.
2. *Al Tabbaa A., Wood D.M.* An experimentally based bubble model for clay // In: Proc. 3rd Intern. Symp. Num. Models Geomech. (NUMOG III), 1989. P. 90–99.
3. *Alawaji H., Runesson K., Sture S., Axelsson K.* Implicit integration in soil plasticity under mixed control for drained and undrained response // Intern. J. Numer. Anal. Methods Geomech. 1992. V. 13. P. 737–756.
4. *Andersen K.H.* Bearing capacity under cyclic loading – offshore, along the coast, and on land // Can. Geotech J. 2009. V. 46. P. 513–535.
5. *Armero F., Pérez-Foguet A.* On the formulation of closest-point projection algorithms in elastoplasticity – Part I: The variational structure // Intern. J. Numer. Methods Eng. 2002. V. 53. P. 297–329.
6. *Auricchio F., Taylor R.* A return-map algorithm for general associative isotropic elasto-plastic materials in large deformation regimes // Intern. J. Plasticity. 1999. V. 15. P. 1359–1378.
7. *Auricchio F., Taylor R.L., Lubliner J.* Application of a return map algorithm to plasticity models // in: Computational Plasticity / *Ed. by Owen D.R.J. et al.* Barcelona: CIMNE, 1992. P. 2229–2248.
8. *Bigoni D., Hueckel T.* Uniqueness and localization associative and non-associative elasto–plasticity // Intern. J. Solids Struct. 1991. V. 28. P. 197–213.
9. *Borja R.I., Lee S.R.* Cam–Clay plasticity. Part I: Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1990. V. 78. P. 49–72.
10. *Borja R., Sama K., Sanz P.* On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2003. V. 192. P. 1227–1258.
11. *Borja R., Tamagnini C.* Cam–Clay plasticity, Part III: Extension of the infinitesimal model to include finite strains // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1998. V. 155. P. 73–95.
12. *Buscarnera G., Dattola G., di Prisco C.* Controllability, uniqueness and existence of the incremental response: A mathematical criterion for elastoplastic constitutive laws // Intern. J. Solids Struct. 2011. V. 48. P. 1867–1878.
13. *Callari C., Auricchio F., Sacco E.* A finite-strain cam–clay model in the framework of multiplicative elasto-plasticity // Intern. J. Plasticity. 1998. V. 14. P. 1155–1187.
14. *Carter J.P., Booker J.R., Wroth C.P.* Acritical state soil model for cyclic loading // in: Soil Mechanics–Transient and Cyclic Loading / *Ed. by Pande G.N., Zienkiewicz O.C.* Chichester: Wiley, 1982. P. 219–252.
15. *Conti R., Tamagnini C., De Simone A.* Critical softening in Cam–Clay plasticity: Adaptive viscous regularization, dilated time and numerical integration across stress–strain jump discontinuities // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2013. V. 258. P. 118–133.
16. *Dafalias Y.F., Herrmann L.R.* A bounding surface soil plasticity model // in: Proc. Intern. Symp. Soils Cyclic Trans. Load. Swansea, 1980. P. 335–345.
17. *Dal Maso G., De Simone A.* Quasistatic evolution for cam–clay plasticity: Examples of spatially homogeneous solutions // Math. Models Methods Appl. Sci. 2009. V. 19. P. 1643–1711.
18. *Dal Maso G., De Simone A., Solombrino F.* Quasistatic evolution for cam–clay plasticity: A weak formulation via viscoplastic regularization and time rescaling // Calc. Var. 2011. V. 40. P. 125–181.
19. *Dal Maso G., Solombrino F.* Quasistatic evolution for Cam–Clay plasticity: The spatially homogeneous case // Netw. Heter. Media. 2010. V. 5. P. 97–132.
20. *Hashiguchi K.* On the linear relations of V–ln p and ln v–ln p for isotropic consolidation of soils // Intern. J. Num. Anal. Methods Geomech. 1995. V. 19. P. 367–376.
21. *Hirai H.* An elastoplastic constitutive model for cyclic behaviour of sands // Intern. J. Num. Anal. Methods Geomech. 1987. V. 11. P. 503–520.

22. *Liu J., Xiao J.* Experimental study on the stability of railroad silt subgrade with increasing train speed // J. Geotech. Geoenviron. Eng. 2010. V. 10. P. 833–841.
23. *Mroz Z.* On the description of anisotropic work hardening // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. P. 163–175.
24. *Ni J., Indraratna B., Geng X., Carter J., Chen Y.* Model of soft soils under cyclic loading // Intern. J. Geomech. Eng. 2014. V. 10.1061. P. 1–10.
25. *Papuga J.* A survey on evaluating the fatigue limit under multiaxial loading // Intern. J. Fatigue. 2011. V. 33. P. 153–165.
26. *Puppala A.J., Mohammad L.N., Allen A.* Permanent deformation characterization of subgrade soils from RLT test // J. Mater. Civil Eng. 1999. V. 11. P. 274–282.
27. *Roscoe K.H., Burland J.B.* On the generalized stress-strain behavior of wet clay // in: Engineering Plasticity / *Ed. by Heyman J., Leckie F.A.* Cambridge: Univ. Press, 1968. P. 535–609.
28. *Roscoe K.H., Schofield A.N., Wroth C.P.* On the yielding of soils // Geotechnique. 1958. V. 8. P. 22–53.
29. *Roscoe K.H., Schofield A.N.* Mechanical behavior of an idealized wet clay // in: Proc. 2nd European Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering, Wiesbaden. V. I. 1963. P. 47–54.
30. *Sangrey D.A.* Cyclic loading of sands, silts and clays. Earthquake engineering and soil dynamics // Proc. ASCE Geot. Eng. Div. Conf. 1978. P. 836–851.
31. *Schofield A.N., Wroth C.P.* Critical State Soil Mechanics. London: McGraw-Hill, 1968. 310 p.
32. *Selig E.T.* Soil failure modes in undrained cyclic loading // J. Geot. Eng. Div. V. 107. 1981. P. 539–551.
33. *Shahin M.A., Loh R.B.H., Nikraz H.R.* Some observations on the behaviour of soft clay under undrained cyclic loading // J. Geo Engng. 2011. V. 6. P. 109–112.
34. *Simo J.C., Meschke G.* A new class of algorithms for classical plasticity extended to finite strains. Application to geomaterials // Comput. Mech. 1993. V. 11. P. 253–278.
35. *Takahashi M., Hight D.W., Vaughan P.R.* Effective stress changes observed during undrained cyclic triaxial tests on clay // in: Proc. Intern. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading / *Ed. by Pande G.N., Zienkiewicz O.C.* Rotterdam: Balkema, 1980. P. 201–209.
36. *Uzan J.* Characterization of granular materials // Transp. Res. Rec. 1022, TRB. Washington DC: National Research Council, 1985. P. 52–59.
37. *Van Eekelen S.J., Van den Berg P.* The delft egg model, a constitutive model for clay // in: DIANA Comput. Mech.'94. Springer. 1994. P. 103–116.
38. *Wood D.M.* Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 1990.
39. *Zhou J., Gong X.* Strain degradation of saturated clay under cyclic loading // Can. Geotech. J. 2001. V. 38. P. 208–212.
40. *Zienkiewicz O., Mroz Z.* Generalized plasticity formulation and applications to geomechanics // in: Mech. Eng. Mater. Chicheste: Wiley, 1984. P. 655–679.
41. *Гольдштейн Р.В., Кузнецов С.В.* Модифицированная Кэм–клэй модель. Основы теории и численный анализ // Вычисл. мех. сплошных сред. 2016. № 2. С. 162–172.
42. *Goldstein R.V., Dudchenko A.V., Kuznetsov S.V.* The modified Cam–Clay (MCC) model: cyclic kinematic deviatoric loading // Arch. Appl. Mech. 2016. V. 86. P. 2021–2031.
43. *Dudchenko A.V., Kuznetsov S.V.* The modified Mohr–Coulomb and Drucker–Prager models. influence of eccentricity on hysteresis loop and energy loss // Intern. J. Comp. Civil Struct. Eng. 2017. V. 13. P. 35–44.
44. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Cam–clay models in mechanics of granular materials // Mech. Mech. Eng. 2017. V. 21. P. 813–821.
45. *Гольдштейн Р.В., Ильяшенко А.В., Кузнецов С.В.* Волны Лэмба в анизотропных средах: шестимерный формализм Коши // Матеем. модел. 2017. № 10. С. 86–94.
46. *Sijia L., Brun M., Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.* Hybrid asynchronous absorbing layers based on Kosloff damping for seismic wave propagation in unbounded domains // Comput.&Geotechn. 2019. V. 109. P. 69–81.
47. *Kuznetsov S.V., Maigre H.* Granular metamaterials for seismic protection. Hyperelastic and hypoelastic models // IOP Conf. Ser. 2020. V. 1425. P. 012184.
48. *Pham H.V., Dias D., Dudchenko A.V.* 3D modeling of geosynthetic-reinforced pile-supported embankment under cyclic loading // Geosynthetics Intern., 2020. V. 27. P. 157–169.

49. *Coombs W.M.* Continuously unique anisotropic critical state hyperplasticity // Intern. J. Numer. Anal. Methods Geomech. 2017. V. 41. P. 578–601.
50. *Sivasithamparam N., Castro J.* An anisotropic elastoplastic model for soft clays based on logarithmic contractancy // Intern. J. Numer. Anal. Methods Geomech. 2016. V. 40. P. 596–621.
51. *Mo P.Q., Yu H.S.* Undrained cavity contraction analysis for prediction of soil behavior around tunnels // Intern. J. Geomech. 2017. V. 17. Paper # 04016121.
52. *Liu K., Chen S.L.* Theoretical analysis on drained cylindrical cavity expansion in anisotropic modified cam clay // in: GeoShanghai Intern. Conf. 2018, Shanghai, China, May 27–30, Paper # A0555.
53. *Chen S.L., Liu K.* Undrained cylindrical cavity expansion in anisotropic critical state soils // Geotechn. 2019. V. 69. P. 189–202.

Critical State Models in Mechanics of Cohesionless Media (Review)

S. V. Kuznetsov[a,b,c,#]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Moscow, Russia*
[b] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*
[c] *Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*
[#] *e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru*

The modified cam–clay model state equations and principle assumptions are analysed. Connections of the modified cam–clay model with the allied plasticity models described by the isotropic hardening rules and closed yield surfaces are noted. Equations of state in the elastic zone are analyzed, along with models related to the hyperelastic equations of state with the exponential potential. Some generalizations of the modified cam–clay model are presented including models that account finite strain. Generalizations of the cam–clay models for the case of finite strain are considered. The combined kinematic loadings in volumetric and deviatoric spaces are analyzed.

Keywords: elastoplastic medium, critical state model, cam–clay model, finite deformations

REFERENCES

1. *Aboim C., Roth W.* Bounding surface plasticity theory applied to cyclic loading of sand // in: Intern. Symp. Num. Models Geomech., 1982, pp. 65–72.
2. *Al Tabbaa A., Wood D.M.* An experimentally based bubble model for clay // In: Proc. 3rd Intern. Symp. Num. Models Geomech. (NUMOG III), 1989, pp. 90–99.
3. *Alawaji H., Runesson K., Sture S., Axelsson K.* Implicit integration in soil plasticity under mixed control for drained and undrained response // Intern. J. Numer. Anal. Methods Geomech., 1992, vol. 13, pp. 737–756.
4. *Andersen K.H.* Bearing capacity under cyclic loading – offshore, along the coast, and on land // Can. Geotech J., 2009, vol. 46, pp. 513–535.
5. *Armero F., Pérez-Foguet A.* On the formulation of closest-point projection algorithms in elastoplasticity – Part I: The variational structure // Intern. J. Numer. Methods Eng., 2002, vol. 53, pp. 297–329.
6. *Auricchio F., Taylor R.* A return-map algorithm for general associative isotropic elasto-plastic materials in large deformation regimes // Intern. J. Plasticity, 1999, vol. 15, pp. 1359–1378.
7. *Auricchio F., Taylor R.L., Lubliner J.* Application of a return map algorithm to plasticity models // in: Computational Plasticity / *Ed. by Owen D.R.J. et al.* Barcelona: CIMNE, 1992. pp. 2229–2248.
8. *Bigoni D., Hueckel T.* Uniqueness and localization associative and non-associative elasto–plasticity // Intern. J. Solids Struct., 1991, vol. 28, pp. 197–213.
9. *Borja R.I. and Lee S.R.* Cam–Clay plasticity. Part I: Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations // Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 1990, vol. 78, pp. 49–72.
10. *Borja R., Sama K., Sanz P.* On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models // Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 2003, vol. 192, pp. 1227–1258.

11. *Borja R., Tamagnini C.* Cam–Clay plasticity, Part III: Extension of the infinitesimal model to include finite strains // Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 1998, vol. 155, pp. 73–95.
12. *Buscarnera G., Dattola G., di Prisco C.* Controllability, uniqueness and existence of the incremental response: A mathematical criterion for elastoplastic constitutive laws // Intern. J. Solids Struct., 2011, vol. 48, pp. 1867–1878.
13. *Callari C., Auricchio F., Sacco E.* A finite-strain cam–clay model in the framework of multiplicative elasto-plasticity // Intern. J. Plasticity, 1998, vol. 14, pp. 1155–1187.
14. *Carter J.P., Booker J.R., Wroth C.P.* Acritical state soil model for cyclic loading // in: Soil Mechanics–Transient and Cyclic Loading / *Ed. by Pande G.N., Zienkiewicz O.C.* Chichester: Wiley, 1982, pp. 219–252.
15. *Conti R., Tamagnini C., De Simone A.* Critical softening in Cam–Clay plasticity: Adaptive viscous regularization, dilated time and numerical integration across stress–strain jump discontinuities // Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 2013, vol. 258, pp. 118–133.
16. *Dafalias Y.F., Herrmann L.R.* A bounding surface soil plasticity model // in: Proc. Intern. Symp. Soils Cyclic Trans. Load., Swansea, 1980, pp. 335–345.
17. *Dal Maso G., De Simone A.* Quasistatic evolution for cam–clay plasticity: Examples of spatially homogeneous solutions // Math. Models Methods Appl. Sci., 2009, vol. 19, pp. 1643–1711.
18. *Dal Maso G., De Simone A., Solombrino F.* Quasistatic evolution for cam–clay plasticity: A weak formulation via viscoplastic regularization and time rescaling // Calc.Var., 2011, vol. 40, pp. 125–181.
19. *Dal Maso G., Solombrino F.* Quasistatic evolution for Cam–Clay plasticity: The spatially homogeneous case // Netw. Heter. Media, 2010, vol. 5, pp. 97–132.
20. *Hashiguchi K.* On the linear relations of V–ln p and ln v–ln p for isotropic consolidation of soils // Intern. J. Num. Anal. Methods Geomech., 1995, vol. 19, pp. 367–376.
21. *Hirai H.* An elastoplastic constitutive model for cyclic behaviour of sands // Intern. J. Num. Anal. Methods Geomech., 1987, vol. 11, pp. 503–520.
22. *Liu J., Xiao J.* Experimental study on the stability of railroad silt subgrade with increasing train speed // J. Geotech. Geoenviron. Eng., 2010, vol. 10, pp. 833–841.
23. *Mroz Z.* On the description of anisotropic work hardening // J. Mech. Phys. Solids, 1967, vol. 15, pp. 163–175.
24. *Ni J., Indraratna B., Geng X., Carter J., Chen Y.* Model of soft soils under cyclic loading // Intern. J. Geomech. Eng., 2014, vol. 10.1061, pp. 1–10.
25. *Papuga J.* A survey on evaluating the fatigue limit under multiaxial loading // Intern. J. Fatigue, 2011, vol. 33, pp. 153–165.
26. *Puppala A.J., Mohammad L.N., Allen A.* Permanent deformation characterization of subgrade soils from RLT test // J. Mater. Civil Eng., 1999, vol. 11, pp. 274–282.
27. *Roscoe K.H., Burland J.B.* On the generalized stressstrain behavior of wet clay // in: Engineering Plasticity / *Ed. by Heyman J., Leckie F.A.* Cambridge: Univ. Press, 1968. pp. 535–609.
28. *Roscoe K.H., Schofield A.N., Wroth C.P.* On the yielding of soils // Geotechnique, 1958, vol. 8, pp. 22–53.
29. *Roscoe K.H., Schofield A.N.* Mechanical behavior of an idealized wet clay // in: Proc. 2nd Europ. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering, Wiesbaden, Vol. I, 1963, pp. 47–54.
30. *Sangrey D.A.* Cyclic loading of sands, silts and clays. Earthquake engineering and soil dynamics // Proc. ASCE Geot. Eng. Div. Conf., 1978, pp. 836–851.
31. *Schofield A.N., Wroth C.P.* Critical State Soil Mechanics. London: McGraw-Hill, 1968. 310 p.
32. *Selig E.T.* Soil failure modes in undrained cyclic loading // J. Geot. Eng. Div., 107, 1981, pp. 539–551.
33. *Shahin M.A., Loh R.B.H., Nikraz H.R.* Some observations on the behaviour of soft clay under undrained cyclic loading // J. Geo Engng., 2011, vol. 6, pp. 109–112.
34. *Simo J.C., Meschke G.* A new class of algorithms for classical plasticity extended to finite strains. Application to geomaterials // Comput. Mech., 1993, vol. 11, pp. 253–278.
35. *Takahashi M., Hight D.W., Vaughan P.R.* Effective stress changes observed during undrained cyclic triaxial tests on clay // in: Proc. Intern. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading / *Ed. by Pande G.N., Zienkiewicz O.C.* Rotterdam: Balkema, 1980. pp. 201–209.
36. *Uzan J.* Characterization of granular materials // Transport. Res. Rec. 1022, TRB. Washington DC: National Research Council, 1985. pp. 52–59.

37. *Van Eekelen S.J., Van den Berg P.* The delft egg model, a constitutive model for clay // in: DIANA Computational Mechanics'94, Springer, 1994, pp. 103–116.
38. *Wood D.M.* Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics, Cambridge: Univ. Press, 1990.
39. *Zhou J., Gong X.* Strain degradation of saturated clay under cyclic loading // Can. Geotech. J., 2001, vol. 38, pp. 208–212.
40. *Zienkiewicz O., Mroz Z.* Generalized plasticity formulation and applications to geomechanics // in: Mech. Eng. Materials, Chicheste: Wiley, 1984. pp. 655–679.
41. *Goldstein R.V., Kuznetsov S.V.* Modified cam–clay model. Basics of the theory and numerical analysis // Vychislit. Mech. Sploshnykh Sred, 2016, no. 2, pp. 162–172. (in Russian)
42. *Goldstein R.V., Dudchenko A.V., Kuznetsov S.V.* The modified Cam–Clay (MCC) model: cyclic kinematic deviatoric loading // Arch. Appl. Mech., 2016, vol. 86, pp. 2021–2031.
43. *Dudchenko A.V., Kuznetsov S.V.* The modified Mohr–Coulomb and Drucker–Prager models. influence of eccentricity on hysteresis loop and energy loss // Intern. J. Comp. Civil Struct. Eng., 2017, vol. 13, pp. 35–44.
44. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Cam–clay models in mechanics of granular materials // Mech. Mech. Eng., 2017, vol. 21, pp. 813–821.
45. *Goldstein R.V., Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Lamb waves in anisotropic media: sextic Cauchy formalism // Matem. Modelirovanie, 2017, no. 10, pp. 86–94. (in Russian)
46. *Sijia L., Brun M., Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.* Hybrid asynchronous absorbing layers based on Kosloff damping for seismic wave propagation in unbounded domains // Comput.&Geotechn., 2019, vol. 109, pp. 69–81.
47. *Kuznetsov S.V., Maigre H.* Granular metamaterials for seismic protection. Hyperelastic and hypoelastic models // IOP Conf. Ser., 2020, vol. 1425, pp. 012184.
48. *Pham H.V., Dias D., Dudchenko A.V.* 3D modeling of geosynthetic-reinforced pile-supported embankment under cyclic loading // Geosynth. Intern., 2020, vol. 27, pp. 157–169.
49. *Coombs W.M.* Continuously unique anisotropic critical state hyperplasticity // Intern. J. Numer. Anal. Methods Geomech., 2017, vol. 41, pp. 578–601.
50. *Sivasithamparam N., Castro J.* An anisotropic elastoplastic model for soft clays based on logarithmic contractancy // Intern. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 2016, vol. 40, pp. 596–621.
51. *Mo P.Q., Yu H.S.* Undrained cavity contraction analysis for prediction of soil behavior around tunnels // Intern. J. Geomech., 2017, vol. 17, Paper # 04016121.
52. *Liu K., Chen S.L.* Theoretical analysis on drained cylindrical cavity expansion in anisotropic modified cam clay // in: Geo Shanghai Intern. Conf. 2018, Shanghai, China, May 27–30, Paper # A0555.
53. *Chen S.L., Liu K.* Undrained cylindrical cavity expansion in anisotropic critical state soils // Geotechn., 2019, vol. 69, pp. 189–202.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 5, с. 663–674

УДК 539.3

МУЛЬТИРЕЖИМНАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ УСТАЛОСТНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ

И. С. Никитин[1,*], Н. Г. Бураго[1,2,], А. Б. Журавлев[2,***], А. Д. Никитин[1,****]**

[1] Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия

[2] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

**e-mail: i_nikitin@list.ru*

***e-mail: buragong@yandex.ru*

****e-mail: zhuravlev.alex2010@yandex.ru*

*****e-mail: nikitin_alex@bk.ru*

Поступила в редакцию 18.05.2020 г.
После доработки 15.07.2020 г.
Принята к публикации 21.07.2020 г.

Предложена мультирежимная кинетическая модель развития повреждаемости при циклическом нагружении для описания развития процесса усталостного разрушения. Для определения коэффициентов кинетического уравнения повреждаемости использован известный критерий многоосного усталостного разрушения, в котором заложен механизм, связанный с развитием микротрещин нормального отрыва. На этой основе предложена процедура вычисления коэффициентов кинетического уравнения для различных режимов усталостного разрушения от малоцикловой до сверхмногоцикловой усталости. Разработан единообразный численный метод и приведены примеры расчета развития трещиноподобных зон повреждаемости и усталостного разрушения образцов, содержащих дефекты разного типа для различных режимов циклического нагружения.

Ключевые слова: усталостное разрушение, многоцикловая усталость, сверхмногоцикловая усталость, мультирежимная модель, уравнение повреждаемости, критерий разрушения

DOI: 10.31857/S0032823520050070

Введение. Имеются две основные задачи теории усталостного разрушения – это задача определения локальной зоны и количества циклов нагружения до зарождения усталостных повреждений, а также задача определения скорости и направления их развития вплоть до выхода на поверхность образца или элемента конструкции и финального макроразрушения.

Основные способы их решения для случая многоосного циклического нагружения связаны с проведением испытаний образцов, обобщением закономерностей, установленных для одноосных нагружений и описываемых усталостными S–N кривыми типа Веллера и соотношениями типа Баскина [1].

Большое количество критериев (stress-based criteria) основано на прямом обобщении S–N кривых, построенных по результатам усталостных испытаний, и они делятся на две большие группы. В первую группу входят критерии, которые включают амплитуды инвариантных характеристик напряженного состояния в цикле нагружения – октаэдрических напряжений, главных напряжений и т.п. [2, 3], а во вторую группу входят те, которые учитывают значения амплитуд касательных и/или нормальных напряжений на так называемой критической плоскости [4–9]. Как правило, эта плос-

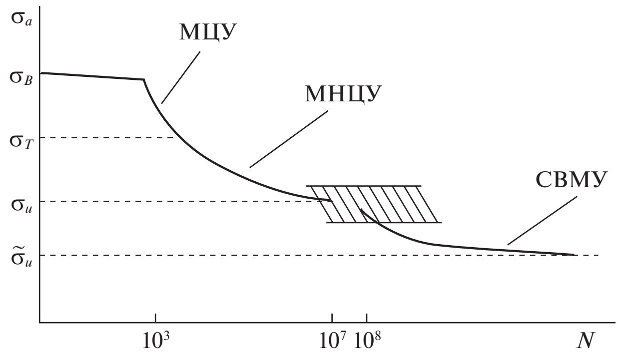


Рис. 1.

кость определяется из условия максимума амплитуд касательных, нормальных напряжений или их определенной комбинации по площадкам всевозможных ориентаций. Обзоры по этой тематике представлены в работах [10–13].

Для того чтобы исследовать процессы развития зон усталостных повреждений также существует два подхода. Первый основан на классических представлениях механики разрушения и связывает условия развития усталостных трещин при увеличении числа циклов с амплитудами коэффициентов интенсивности напряжений в вершине трещины. Основное уравнение было предложено Парисом [14], существует большое количество его модификаций [15, 16].

Второй подход использует представления теории повреждаемости, восходящей к работам [17, 18] и развитый впоследствии в [19, 20]. Он применялся [21–23] в приложении к задачам циклического нагружения и усталостного разрушения.

В данной работе предлагается мультирежимная модель развития усталостного разрушения, основанная на эволюционном уравнении для функции повреждаемости. Параметры модели определены для различных режимов усталостного разрушения – малоцикловой и многоцикловой усталости (МЦУ, МНЦУ), а также режима сверхмногоцикловой усталости (СВМУ), соответствующего высокочастотному низкоамплитудному нагружению.

Для выделения различных режимов усталостного разрушения используется схема мультирежимной амплитудной усталостной кривой, представленная на рис. 1. Вплоть до значения $N \sim 10^3$ реализуется режим повторно-статического нагружения с амплитудой, мало отличающейся от статического предела прочности σ_B. Далее левая часть бимодальной усталостной кривой (кривая Веллера) описывает режимы МЦУ–МНЦУ вплоть до $N \sim 10^7$ и значений амплитуды порядка предела усталости σ_u. Затем начинается зона смены механизмов разрушения и дальнейшее падение усталостной прочности, начиная с величин $N \sim 10^8$, до нового предельного значения $\tilde{\sigma}_u$ в соответствии с правой ветвью бимодальной усталостной S–N кривой. Эта ветвь описывает режим СВМУ [24].

Отметим, что в настоящее время развиваются представления о явном разделении классической ветви Веллера еще на две части – собственно, МЦУ и МНЦУ. Граница этой переходной области определяется не значением величины N, а величиной амплитуды нагружения, равной пределу текучести материала σ_T [25], так как при этом также происходит смена физического механизма усталостного разрушения.

Граница повторно-статического диапазона $N \sim 10^3$ довольно условна. Она уточняется в современных исследованиях [25] в зависимости от прочностных и пластических характеристик материала.

Тем не менее, в данной работе мы сохраним изложение предлагаемой модели развития повреждаемости, основанное на вышеописанной схеме.

Для того чтобы согласовать модель с известными критериями многоосного усталостного разрушения, был выбран основанный на напряженном состоянии (stress-based) критерий, который описывает усталостное разрушение, связанное с развитием микротрещин нормального отрыва. Это модифицированный критерий Smith–Watson–Topper (SWT) [26, 27], в котором определяющую роль в развитии усталостных повреждений играют амплитуды максимальных растягивающих напряжений. В исходном изложении этот и подобные ему stress-based критерии уже применялись для описания режимов МЦУ и МНЦУ. Был предложен [24] подход для обобщения многоосных критериев разрушения при описании правых ветвей усталостных кривых в режиме СВМУ, использующий опорные точки каждой из ветвей и обратную степенную зависимость от числа циклов N для выхода на асимптоту предела усталости. В данной работе для обобщения критерия SWT на случай СВМУ был также использован этот аналитический подход.

1. Кинетическое уравнение для повреждаемости в режиме МЦУ–МНЦУ.

1.1. Критерий многоосного усталостного разрушения в режиме МЦУ–МНЦУ с развитием микротрещин нормального отрыва (stress-based SWT), соответствующий левой ветви бимодальной усталостной кривой (рис. 1) имеет вид:

$$\sqrt{\langle \sigma_{1_{\max}} \rangle \Delta\sigma_1/2} = \sigma_u + \sigma_L N^{-\beta_{LH}}, \tag{1.1}$$

где σ_1 – наибольшее главное напряжение, $\Delta\sigma_1$ – размах наибольшего главного напряжения за цикл, $\Delta\sigma_1/2$ – его амплитуда. Из условия повторного статического разрушения вплоть до значений $N \sim 10^3$ по методике [13] можно получить, что $\sigma_L = 10^{3\beta_{LH}}(\sigma_B - \sigma_u)$. В соответствии с выбранным критерием к разрушению приводят только растягивающие напряжения, поэтому в него входит величина $\langle \sigma_{1_{\max}} \rangle = \sigma_{1_{\max}} H(\sigma_{1_{\max}})$, где σ_B – статический предел прочности материала, σ_u – классический предел усталости материала при реверсивном цикле (коэффициент асимметрии цикла $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max} = -1$), β_{LH} – степенной показатель левой ветви бимодальной усталостной кривой, $H(x)$ – функция Хевисайда.

Из критерия усталостного разрушения получаем число циклов до разрушения при однородном напряженном состоянии:

$$N_{LH} = 10^3 \left[(\sigma_B - \sigma_u)/\langle \sigma_{LH} - \sigma_u \rangle\right]^{1/\beta_{LH}}, \quad \sigma_{LH} = \sqrt{\langle \sigma_{1_{\max}} \rangle \Delta\sigma_1/2} \tag{1.2}$$

1.2. Для описания процесса развития усталостной поврежденности в режиме МЦУ–МНЦУ вводится функция повреждаемости $0 \le \psi(N) \le 1$, которая описывает процесс постепенного циклического (усталостного) разрушения материала. При $\psi = 1$ материальная частица считается полностью разрушенной. Ее модули Ламе становятся равными нулю. Функция повреждаемости ψ в зависимости от числа циклов нагружения N для режима МЦУ-МНЦУ описывается кинетическим уравнением:

$$d\psi/dN = B_{LH}\psi^{\gamma}/(1 - \psi^{\alpha}),$$

где α и $0 < \gamma < 1$ – параметры модели, определяющие скорость процесса развития усталостных повреждений. Выбор знаменателя в этом двухпараметрическом уравнении задает бесконечно большую скорость роста зоны полного разрушения при $\psi \to 1$ и обусловлен известными экспериментальными данными по кинетическим кривым роста усталостных трещин, имеющим вертикальную асимптоту и отражающим факт их взрывного, неконтролируемого роста на последней стадии макроразрушения.

Уравнение для повреждаемости сходного типа рассматривалось ранее [21, 22], его многочисленные параметры и коэффициенты определялись косвенно по результатам одноосных усталостных испытаний. Определим коэффициент B_{LH} по процедуре, явно ассоциированной с выбранным критерием многоосного усталостного разрушения, которая выглядит следующим образом. Интегрируя уравнение для поврежденности при однородном напряженном состоянии

$$[\psi^{1-\gamma}/(1-\gamma)-\psi^{(1+\alpha-\gamma)}/(1+\alpha-\gamma)]\Big|_0^1 = B_{LH}\, N\Big|_0^{N_{LH}},$$

находим число циклов до полного разрушения N_{LH} при $\psi = 1$

$$N_{LH} = \alpha/(1+\alpha-\gamma)/(1-\gamma)/B_{LH} \tag{1.3}$$

Приравнивая значения N_{LH} из критерия разрушения (1.2) и из решения уравнения для повреждаемости (1.3) , получим выражение для коэффициента B_{LH}:

$$B_{LH} = 10^{-3}\left[\langle\sigma_{LH}-\sigma_u\rangle/(\sigma_B-\sigma_u)\right]^{1/\beta_{LH}}\alpha/(1+\alpha-\gamma)/(1-\gamma),$$

где величина σ_{LH} определяется выбранным механизмом усталостного разрушения и соответствующим многоосным критерием (1.1).

2. Кинетическое уравнение для повреждаемости в режиме СВМУ.

2.1. Критерий многоосного усталостного разрушения в режиме СВМУ, соответствующий правой ветви бимодальной усталостной кривой на рис. 2 (обобщенный stress-based SWT) имеет вид:

$$\sqrt{\langle\sigma_{1_{\max}}\rangle\Delta\sigma_1/2} = \tilde{\sigma}_u + \sigma_V N^{-\beta_{VH}}, \tag{2.1}$$

где из условия подобия опорных точек для левой и правой ветвей бимодальной усталостной кривой [24] можно получить формулу $\sigma_V = 10^{8\beta_{VH}}(\sigma_u - \tilde{\sigma}_u)$.

Из критерия усталостного разрушения получаем число циклов до разрушения при однородном напряженном состоянии:

$$N_{VH} = 10^8\left[(\sigma_u-\tilde{\sigma}_u)/\langle\sigma_{VH}-\tilde{\sigma}_u\rangle\right]^{1/\beta_{VH}}, \quad \sigma_{VH} = \sigma_{LH} = \sqrt{\langle\sigma_{1_{\max}}\rangle\Delta\sigma_1/2} \tag{2.2}$$

Здесь $\tilde{\sigma}_u$ – предел усталости материала при реверсивном цикле для режима СВМУ, β_{VH} – степенной показатель левой ветви бимодальной усталостной кривой.

2.2. Для режима СВМУ подобно п. 1.4 можно определить коэффициент в эволюционном уравнении для повреждаемости:

$$d\psi/dN = B_{VH}\psi^{\gamma}/(1-\psi^{\alpha}), \quad 0<\gamma<1$$

Аналогично уравнению (1.3) имеем:

$$N_{VH} = \alpha/(1+\alpha-\gamma)/(1-\gamma)/B_{VH} \tag{2.3}$$

Приравнивая значения N_{VH} из критерия разрушения (2.2) и из решения уравнения для повреждаемости (2.3), получим выражение для коэффициента B_{VH} в уравнении для повреждаемости:

$$B_{VH} = 10^{-8}\left[\langle\sigma_{VH}-\tilde{\sigma}_u\rangle/(\sigma_u-\tilde{\sigma}_u)\right]^{1/\beta_{VH}}\alpha/(1+\alpha-\gamma)/(1-\gamma),$$

где величина σ_{VH} определяется выбранным механизмом усталостного разрушения и соответствующим ему многоосным критерием (2.1).

Поведение поврежденного материала описывается уравнениями деградации его модулей упругости $\lambda(\psi) = \lambda_0(1-\psi)$, $\mu(\psi) = \mu_0(1-\psi)$. Материал становится полностью разрушенным, его модули упругости обнуляются при достижении функции повреждаемости $\psi(N)$ значения 1.

3. Условие переключения режимов накопления усталостной поврежденности. Точка перехода с левой ветви усталостной кривой на правую ветвь, при которой происходит

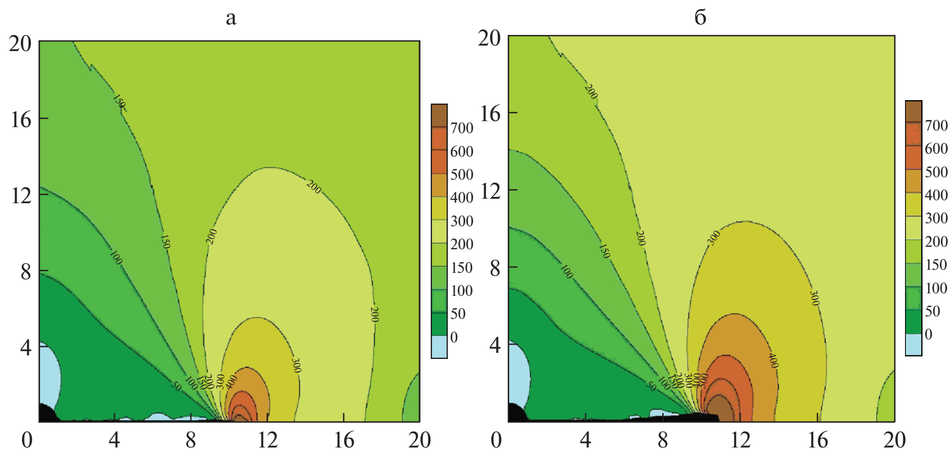


Рис. 2. а – Режим СВМУ: $P = 160$ МПа, $N_k = 6.799\times10^7$, $N_i = 1.007\times10^6$, $N_f = 6.806\times10^7$; б – Режим МНЦУ: $P = 210$ МПа, $N_k = 3.765\times10^6$, $N_i = 7.229\times10^4$, $N_f = 3.807\times10^6$.

смена механизма усталостного разрушения, находится чуть выше предела усталости σ_u (рис. 1) и определяется значением $\sigma_* = \sigma_u + \Delta\sigma$. Для обеспечения непрерывного сопряжения левой и правой ветвей усталостной кривой необходимо выполнить условие $N_{LH} = N_{VH}$, которое эквивалентно уравнению для величины $\Delta\sigma$:

$$10^3\left[(\sigma_B - \sigma_u)/\langle\Delta\sigma\rangle\right]^{1/\beta_{LH}} = 10^8\left[(\sigma_u - \tilde{\sigma}_u)/\langle\sigma_u + \Delta\sigma - \tilde{\sigma}_u\rangle\right]^{1/\beta_{VH}}$$

или

$$\Delta\sigma = 10^{-5\beta_{LH}}(\sigma_B - \sigma_u)\left[1 + \Delta\sigma/(\sigma_u - \tilde{\sigma}_u)\right]^{\beta_{LH}/\beta_{VH}}$$

С учетом фактической малости поправочного члена в квадратных скобках, можно установить значение поправки $\Delta\sigma$ приближенной формулой:

$$\Delta\sigma = 10^{-5\beta_{LH}}(\sigma_B - \sigma_u)$$

Соответствующее приближенное значение $N_* = N_{LH}(\sigma_*)$ определяется величиной $N_* = 10^3\left[(\sigma_B - \sigma_u)/\Delta\sigma\right]^{1/\beta_{LH}} \approx 10^8$, как и следовало ожидать.

С учетом полученных уточненных оценок для точки перехода с одной ветви усталостной кривой на другую, получим окончательные формулы для диапазонов и коэффициентов кинетических уравнений повреждаемости.

Для режима МЦУ–МНЦУ при $\sigma_u + \Delta\sigma_u < \sigma_{LH} < \sigma_B$, $\Delta\sigma = 10^{-5\beta_{LH}}(\sigma_B - \sigma_u)$

$$B_{LH} = 10^{-3}\left[\frac{\langle\sigma_{LH} - \sigma_u\rangle}{\langle\sigma_B - \sigma_u\rangle}\right]^{1/\beta_{LH}} \frac{\alpha}{(1 + \alpha - \gamma)(1 - \gamma)}, \quad \sigma_{LH} = \sqrt{\langle\sigma_{1_{\max}}\rangle\Delta\sigma_1/2}$$

Для режима СВМУ при $\tilde{\sigma}_u < \sigma_{VH} \le \sigma_u + \Delta\sigma_u$

$$B_{VH} = 10^{-8}\left[\frac{\langle\sigma_{VH} - \tilde{\sigma}_u\rangle}{\langle\sigma_B - \tilde{\sigma}_u\rangle}\right]^{1/\beta_{VH}} \frac{\alpha}{(1 + \alpha - \gamma)(1 - \gamma)}, \quad \sigma_{VH} = \sqrt{\langle\sigma_{1_{\max}}\rangle\Delta\sigma_1/2}$$

При $\sigma_{VH} \le \tilde{\sigma}_u$ усталостного разрушения не происходит, при $\sigma_{LH} \ge \sigma_B$ оно наступает мгновенно.

4. Алгоритм расчета развития усталостных повреждений. Численная процедура решения дифференциального уравнения для функции повреждаемости состоит из следующих этапов. На первом этапе рассчитывается напряженное состояние упругого образца материала в одном цикле нагружения.

Для расчета цикла нагружения деформируемого образца с дефектами был использован программный пакет Астра, использующий высокоэкономичный безматричный вариант МКЭ [28] и дополненный кодом для расчета уравнения усталостной повреждаемости и изменения модулей упругости.

Ранее этот вариант МКЭ применялся для развития методов сквозного счета процессов динамического разрушения [29, 30]. С его использованием были построены [31] алгоритмы решения контактных задач. Он применялся [32] для решения задач прессования и спекания образцов при квазистатических или нестационарных (нециклических) нагрузках.

Для интегрирования уравнения $d\psi/dN = B\psi^{\gamma}/(1-\psi^{\alpha})$, $B = B_{LH}$, B_{VH} применялась аппроксимация функции повреждаемости в k-узле расчетной сетки при заданных дискретных значениях ψ_k^n в моменты N^n и искомых ψ_k^{n+1} в моменты N^{n+1}.

Отметим, что вблизи состояния полного разрушения при $\psi \to 1$ знаменатель кинетического уравнения становится сколь угодно малым, уравнение становится “жестким” и обычные явные методы его численного решения становятся непригодными. При численном решении по неявным схемам возникает нелинейная алгебраическая система, решение которой при большом числе шагов затратно по времени расчета и достижению приемлемой точности.

Поэтому был выбран следующий метод расчета повреждаемости. Было замечено, что для значения $\alpha = 1-\gamma$ путем аналитического интегрирования кинетического уравнения для повреждаемости на приращении числа циклов можно получить явное выражение для $\psi_k^{n+1}(\psi_k^n, \Delta N^n)$. Кинетическое уравнение при этом становится однопараметрическим, но сохраняет желаемые особенности поведения скорости роста повреждаемости (заданный параметром γ степенной рост в окрестности нуля, и бесконечный рост при $\psi \to 1$).

Выполним это интегрирование:

$$\frac{\psi^{1-\gamma}}{2(1-\gamma)}[2-\psi^{1-\gamma}]\Big|_{\psi_k^n}^{\psi_k^{n+1}} = BN\Big|_{N_n}^{N_{n+1}}$$

Обозначив $(\psi_k^{n+1})^{1-\gamma} = x$, $q = 2(1-\gamma)B\Delta N^n + (\psi_k^n)^{1-\gamma} - 2(\psi_k^n)^{2(1-\gamma)}$, $\Delta N^n = N^{n+1} - N^n$, получим уравнение $x^2 - 2x + q = 0$ и его допустимый корень $x = 1 - \sqrt{1-q} < 1$. Из него следует точная формула для повреждаемости на приращении числа циклов ΔN^n:

$$\psi_k^{n+1} = \left(1 - \sqrt{1 - [2(1-\gamma)B\Delta N^n + (\psi_k^n)^{1-\gamma} - 2(\psi_k^n)^{2(1-\gamma)}]}\right)^{1/(1-\gamma)}$$

Значение приращения ΔN^n определяется следующим образом.

На основе данных расчета напряженного состояния для каждого узла рассчитывается коэффициент B. Для определения приращения числа циклов выбираем точку с наиболее быстро растущей функцией поврежденности, то есть ту, в которой раньше других ψ_k^n возрастет на заданную величину $\Delta\psi_0$. Выборка проводится по точкам, где $0 \le \psi_k^n \le 1$. Величину шага определяем следующим образом:

$$\Delta N^n = \min_k \left(\frac{\Delta\psi_0 \left(1 - \psi_k^n\right)^{1-\gamma}}{B\left(\psi_k^n\right)^{\gamma}} \right), \quad \psi_k^n > 0$$

$$\Delta N^n = \min_k \left(\frac{\Delta\psi_0^{1-\gamma}}{B} \right), \quad \psi_k^n = 0$$

Величина шага ограничена заданным максимумом $\Delta N_{\max}$. В расчетах используются значения $\Delta\psi_0 = 0.1$, $\Delta N_{\max} = 10^5$.

Для каждого узла, исходя из его текущего уровня повреждаемости и эквивалентного напряжения, находится новый уровень повреждаемости с учетов вычисленного приращения ΔN^n.

Деградация поврежденного материала при численных расчетах определялась зависимостью $E_k^{n+1} = E_0(1 - \psi_k^{n+1})(H(\psi_0 - \psi_k^{n+1}) + 0.001)$, где E_k^{n+1} – значение модуля Юнга на $n + 1$-м шаге по циклам нагружения при фиксированном значении коэффициента Пуассона, H – функция Хэвисайда, а $\psi_0 \sim 1$ – критический параметр повреждаемости, по достижении которого материал переходит в полностью разрушенное состояние с околонулевыми модулями упругости. При расчетах выбиралось $\psi_0 = 0.9$. Малое значение остаточного модуля Юнга – $0.001E$ для полностью разрушенного материала играет роль регуляризатора и вводится для того, чтобы сохранялась возможность вести сквозной счет для любого состояния поврежденности.

Расчет заканчивается при выходе границ области полностью разрушенного материала на поверхность образца (макроразрушение) или прекращении эволюции этой области.

С помощью мультирежимной модели и разработанной численной процедуры решены задачи о развитии зон усталостной поврежденности в окрестности типичных дефектов структуры материала (микропоры, различным образом ориентированные микротрещины).

Предложенную модель и численный метод можно считать развитием и распространением ранее разработанных алгоритмов сквозного счета процессов динамического разрушения [29, 30] на случай циклического нагружения и усталости материалов.

5. Примеры расчетов. Были проведены расчеты циклического нагружения пластин с дефектами для коэффициента асимметрии $R = -1$ (реверсивный цикл) с зарождением зон поврежденности, возникновения и развития трещиноподобных зон полного разрушения частиц материала (“квазитрещин”) вплоть до их выхода на боковую грань пластины (макроразрушения).

Нормальная нагрузка прикладывается с торцов, боковые грани пластины свободны от напряжений. Рассматривается плоское напряженное состояние. Упругие, прочностные и усталостные свойства материала пластины (титановый сплав) были взяты из [21]: $\sigma_B = 1160$ МПа, $\sigma_u = 337$ МПа, $\tilde{\sigma}_u = 250$ МПа, $\beta_{LH} = 0.31$, $\beta_{VH} = 0.27$. Модули упругости неповрежденного сплава равны $\lambda_0 = 77$ ГПа, $\mu_0 = 44$ ГПа.

Степенной показатель кинетического уравнения γ должен быть определен в процессе согласования результатов вычислительных и усталостных экспериментов. Для численных расчетов в уравнении для повреждаемости было принято среднее значение $\gamma = 0.5$, $\alpha = 1 - \gamma$.

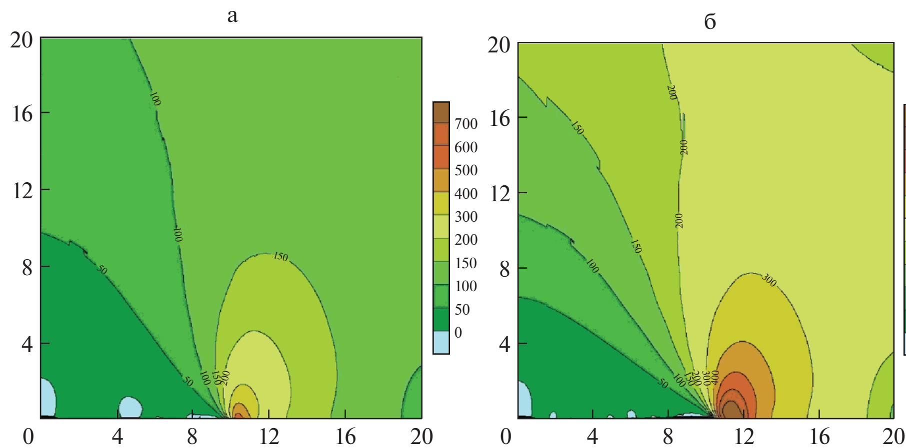


Рис. 3. а – Режим СВМУ: $P = 100$ МПа, $N_k = 1.350 \times 10^9$, $N_i = 2.903 \times 10^4$, $N_f = 1.351 \times 10^9$; б – Режим МНЦУ: $P = 180$ МПа, $N_k = 1.009 \times 10^6$, $N_i = 1.971 \times 10^4$, $N_f = 1.057 \times 10^6$.

Размеры пластины 40 × 40 мм. Горизонтальная $y = 0$ и вертикальная $x = 0$ центральные оси пластины являются осями симметрии, поэтому расчет проводится для области $x > 0$, $y > 0$. Рассмотрены три вида дефектов в центре пластины: круговое отверстие радиусом $r = 1$ мм; узкое эллиптическое отверстие с горизонтальной осью $a = 1$ мм, вертикальной осью $b = 0.2a$; узкое эллиптическое отверстие с вертикальной осью $b = 1$ мм, горизонтальной осью $a = 0.2b$. На рис. 2 показаны результаты расчета для кругового отверстия. На этом и последующих рисунках представлены изолинии максимального главного напряжения вокруг “квазитрещины” в тот момент, когда она прошла примерно половину расстояния до боковой грани. В подписях к рисункам указаны значения количества циклов: N_i – до начала разрушения, N_f – до макроразрушения, N_k – для положения, представленного на графике. Также указан максимальный уровень растягивающих напряжений P в цикле приложенных нагрузок и соответствующий им режим усталостного разрушения.

На рис. 3 показаны результаты расчета для горизонтально ориентированного узкого эллиптического отверстия; на рис. 4 – для вертикально ориентированного узкого эллиптического отверстия.

Отметим, что количество циклов N_k, соответствующее уровню продвижения трещиноподобных зон разрушения частиц материала (“квазитрещин”) примерно до середины образца (рис. 2–4), очень мало отличается от количества циклов N_f, что указывает на дальнейший финальный, быстропротекающий процесс макроразрушения.

Из рисунков видно, что близкий уровень циклических нагрузок, приложенных к образцу с дефектами разного типа и ориентации, может приводить к усталостному макроразрушению образца в совершенно различных режимах. Так, например, для вертикально ориентированного эллиптического дефекта при уровне $P = 264$ МПа имеем режим, переходный к СВМУ (рис. 4а) с долговечностью $N_f = 4.709 \times 10^7$, а для горизонтально ориентированного эллиптического дефекта при существенно более низком $P = 180$ МПа макроразрушение происходит по механизму МНЦУ (рис. 3б) с долговечностью $N_f = 1.057 \times 10^6$.

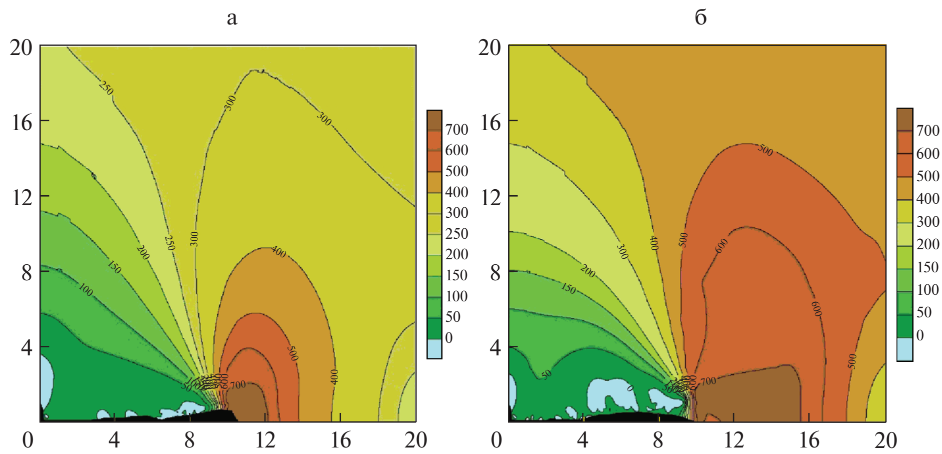


Рис. 4. а – Режим СВМУ: P = 264 МПа, $N_k = 4.893 \times 10^7$, $N_i = 2.619 \times 10^7$, $N_f = 4.896 \times 10^7$; б – Режим МНЦУ: P = 400 МПа, $N_k = 9.659 \times 10^5$, $N_i = 8.701 \times 10^5$, $N_f = 9.776 \times 10^5$.

Также можно отметить, что при проведении расчетов по мультирежимной модели неоднократно проявлялся и моделировался эффект, наблюдаемый при фрактографических исследованиях элементов конструкций, разрушенных при эксплуатации [33]. При относительно небольшом уровне приложенных нагрузок, за счет внутренних дефектов зарождение и начальное развитие зон усталостного разрушения происходит по механизму СВМУ, а затем при концентрации и росте уровня напряжений в окрестности фронта распространяющейся "квазитрещины" происходит переход на другую ветвь (МЦУ–МНЦУ) усталостной кривой. При этом резко меняется скорость развития процесса усталостного разрушения.

Разработанная мультирежимная модель и численный метод позволяют проводить сквозной счет развития зон повреждаемости и трещиноподобных зон усталостного разрушения материала без явного выделения трещин в их классическом понимании, а также оценивать долговечность образцов от появления первых очагов до макроразрушения.

Заключение. Предложена мультирежимная кинетическая модель развития повреждаемости при циклическом нагружении для описания развития процесса усталостного разрушения. Для определения коэффициентов кинетического уравнения повреждаемости использован известный критерий многоосного усталостного разрушения SWT, в котором заложен механизм, связанный с развитием микротрещин нормального отрыва. На этой основе предложена процедура вычисления коэффициентов кинетического уравнения для различных режимов усталостного разрушения МЦУ–МНЦУ, СВМУ.

Разработан единообразный численный метод и приведены примеры расчета развития трещиноподобных зон повреждаемости и усталостного разрушения образцов, содержащих дефекты разного типа для различных режимов циклического нагружения от МЦУ до СВМУ.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-19-00705).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Basquin O.H.* The exponential law of endurance tests // in: Proc. Amer. Soc. for Testing & Mater. 1910. V. 10. P. 625–630.
2. *Sines G.* Behavior of Metals under Complex Static and Alternating Stresses. Metal Fatigue. New York: McGraw-Hill, 1959. P. 145–169.
3. *Crossland B.* Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel // Proc. Intern. Conf. on Fatigue of Metals. London. 1956. P. 138–149.
4. *Findley W.* A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending// J. Eng. for Indust. 1959. P. 301–306.
5. *Morel F.* A critical plane approach for life prediction of high cycle fatigue under multiaxial variable amplitude loading // Intern. J. Fatigue. 2000. V. 22. № 2. P. 101–119.
6. *Matake T.* An explanation on fatigue limit under combined stress // Bull. JSME. 1977. V. 20. P. 257–263.
7. *McDiarmid D.L.* A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 1999. V. 17 P. 1475–1484.
8. *Papadopoulos I.V.* Long life fatigue under multiaxial loading // Intern. J. Fatigue. 2001. V. 23. P. 839–849.
9. *Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S.* Multiaxial assessment using a simplified critical plane based criterion // Intern. J. Fatigue. 2011. V. 33. P. 969–976.
10. *Meggiolaro M.A., Miranda A.C., de Castro J.* Comparison among fatigue life prediction methods and stress-strain models under multiaxial loading // Proc. 19th Intern. Congress Mech. Eng. 2007. Brasilia, DF.
11. *Ying-Yu Wang, Wei-Xing Yao.* Evaluation and comparison of several multiaxial fatigue criteria // Intern. J. Fatigue. 2004. V. 26. P. 17–25.
12. *Karolczuk A., Papuga J., Palin-Luc T.* Progress in fatigue life calculation by implementing life-dependent material parameters in multiaxial fatigue criteria // Intern. J. Fatigue. 2020. V. 134. 105509.
13. *Bourago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S.* Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements// Mech. Sol. 2011. V. 46. № 6. P. 828–838.
14. *Paris P.C., Erdogan F.* A Critical analysis of crack propagation laws // J. Basic Engng. 1963. V. 85. P. 528–533.
https://doi.org/10.1115/1.3656900
15. *Collins J.A.* Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention. New York: Wiley. 1993. 654 p.
16. *Shlyannikov V.N.* Creep-Fatigue crack growth rate prediction based on fracture damage zones models // Engng. Fract. Mech. 2019. V. 214. P. 449–463.
17. *Качанов Л.М.* О времени разрушения в условиях ползучести// Изв. АН СССР ОТН. 1958. Т. 8. С. 26–31.
18. *Работнов Ю.Н.* О механизме длительного разрушения. Вопросы прочности материалов и конструкций // АН СССР ОТН. 1959. С. 5–7.
19. *Murakami S.* Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. Dordrecht: Springer, 2012.
20. *Lemaitre J., Chaboche J.L.* Mechanics of solid materials. Cambridge Univ. Press, 1994. 582 p.
21. *Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L.* Multiaxial fatigue damage modeling at macro scale of Ti6Al4V alloy // Intern. J. Fatigue. 2009. V. 31. P. 2031–2040.
22. *Zhi Yong Huang, Wagner D., Bathias C., Chaboche J.L.* Cumulative fatigue damage in low cycle fatigue and gigacycle fatigue for low carbon–manganese steel// Intern. J. Fatigue. 2011. V. 33. P. 115–121.
23. *Plekhov O., Naimark O. et al.* The study of a defect evolution in iron under fatigue loading in gigacycle fatigue regime// Frattura ed Integrita Strutturale. 2016. V. 10. № 35. P. 414–423.
24. *Burago N.G., Nikitin I.S.* Multiaxial fatigue criteria and durability of titanium compressor disks in low- and giga- cycle fatigue modes // in: Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. Heidelberg: Springer, 2016. P. 117–130.
25. *Shanyavskiy A.A., Soldatenkov A.P.* The fatigue limit of metals as a characteristic of the multimodal fatigue life distribution for structural materials// Proc. Struct. Integr. 2019. 2011. V. 23. P. 63–68.

26. *Smith R.N., Watson P., Topper T.H.* A stress-strain parameter for the fatigue of metals // J. Mater. 1970. V. 5. № 4. P. 767–778.
27. *Gates N., Fatemi A.* Multiaxial variable amplitude fatigue life analysis including notch effects// Intern. J. Fatigue. 2016. V. 91. P. 337–351.
28. *Бураго Н.Г., Никитин И.С.* Безматричная реализация неявных схем методом сопряженных градиентов // ЖВММФ. 2018. Т. 58. № 8. С. 52–63.
29. *Burago N.G., Nikitin I.S., Nikitin A.D., Stratula B.A.* Algorithms for calculation damage processes // Frattura ed Integrità Strutturale. 2019. V. 49. P. 212–224.
30. *Бураго Н.Г., Никитин И.С.* Алгоритмы сквозного счета для процессов разрушения // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Т. 10. № 5. С. 645–666.
31. *Burago N.G., Nikitin I.S., Nikitin A.D.* Algorithms for calculating contact problems in the solid dynamics // in: Advances in Theory and Practice Computational Mechanics. *Ed. by Jain L.C.* Singapore: Springer, 2020. P. 185–198.
32. *Бураго Н.Г., Никитин И.С.* Математическая модель и алгоритм расчета прессования и спекания // Матем. модел. 2019. Т. 31. № 2. С. 3–17.
33. *Шанявский А.А.* Моделирование усталостных разрушений металлов. Уфа: Монография, 2007. 498 с.

Multi-Mode Model for Fatigue Damage Development

I. S. Nikitin[a,#], N. G. Burago[a,b,##], A. B. Zhuravlev[b,###] and A. D. Nikitin[a,####]

[a] *Institute for Computer Aided Design RAS, Moscow, Russia*
[b] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*
[#] *e-mail: i_nikitin@list.ru*
[##] *e-mail: buragong@yandex.ru*
[###] *e-mail: zhuravlev.alex2010@yandex.ru*
[####] *e-mail: nikitin_alex@bk.ru*

A multimode kinetic model for the development of damage under cyclic loading is proposed to describe the development of fatigue failure process. To determine the coefficients of the kinetic equation of damage, we used the well-known criterion for multiaxial fatigue fracture SWT. On this basis, a procedure for calculating the kinetic equation coefficients for various modes of fatigue failure from low-cycle to very-high-cycle fatigue is proposed. A uniform numerical method is proposed and examples of calculating the development of crack-like zones of damage and fatigue fracture of samples with defects of various types for different modes of cyclic loading are presented.

Keywords: fatigue failure, high-cycle fatigue, very-high-cycle fatigue, multi-mode model, damage equation, fracture criterion

REFERENCES

1. *Basquin O.H.* The exponential law of endurance tests // in: Proc. Amer. Soc. for Testing&Mater., 1910, vol. 10, pp. 625–630.
2. *Sines G.* Behavior of Metals under Complex Static and Alternating Stresses. Metal Fatigue. N. Y.: McGraw-Hill, 1959. pp. 145–169.
3. *Crossland B.* Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel // Proc. Intern. Conf. on Fatigue Metals. London. 1956, pp. 138–149.
4. *Findley W.* A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending // J. Eng. for Indust., 1959, pp. 301–306.
5. *Morel F.* A critical plane approach for life prediction of high cycle fatigue under multiaxial variable amplitude loading // Intern. J. Fatigue, 2000, vol. 22, no. 2, pp. 101–119.
6. *Matake T.* An explanation on fatigue limit under combined stress // Bull JSME, 1977, vol. 20, pp. 257–263.

7. *McDiarmid D.L.* A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct., 1999, vol. 17, pp. 1475–1484.
8. *Papadopoulos I.V.* Long life fatigue under multiaxial loading // Intern. J. Fatigue, 2001, vol. 23, pp. 839–849.
9. *Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S.* Multiaxial assessment using a simplified critical plane based criterion // Intern. J. Fatigue, 2011, vol. 33, pp. 969–976.
10. *Meggiolaro M.A., Miranda A.C., de Castro J.* Comparison among fatigue life prediction methods and stress-strain models under multiaxial loading // Proc. 19th Intern. Congress Mech. Eng. 2007. Brasilia, DF.
11. *Ying-Yu Wang, Wei-Xing Yao.* Evaluation and comparison of several multiaxial fatigue criteria // Intern. J. Fatigue, 2004, vol. 26, pp. 17–25.
12. *Karolczuk A., Papuga J., Palin-Luc T.* Progress in fatigue life calculation by implementing life-dependent material parameters in multiaxial fatigue criteria// Intern. J. Fatigue, 2020, vol. 134, 105509.
13. *Bourago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S.* Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements// Mech. Sol., 2011, vol. 46, no. 6, pp. 828–838.
14. *Paris P.C., Erdogan F.* A Critical analysis of crack propagation laws// J. Basic Engng., 1963, vol. 85, pp. 528–533. http://dx.doi.org/10.1115/1.3656900
15. *Collins J.A.* Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention. N.Y.: Wiley, 1993. 654 p.
16. *Shlyannikov V.N.* Creep-Fatigue crack growth rate prediction based on fracture damage zones models // Engng. Fract. Mech., 2019, vol. 214, pp. 449–463.
17. *Kachanov L.M.* O vremeni razrushenija v usloviyah polzuchesty // Izv. AN SSSR OTN, 1958, vol. 8, pp. 26–31. (in Russian)
18. *Rabotnov J.N.* O mechanizme dlitel'nogo razrushenia. Voprosi prochnosti materialov i konstrukcij // AN SSSR OTN, 1959, pp. 5–7. (in Russian)
19. *Murakami S.* Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. Dordrecht: Springer, 2012.
20. *Lemaitre J., Chaboche J.L.* Mechanics of Solid Materials. Cambridge: Univ. Press, 1994. 582 p.
21. *Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L.* Multiaxial fatigue damage modeling at macro scale of Ti6Al4V alloy // Intern. J. Fatigue, 2009, vol. 31, pp. 2031–2040.
22. *Zhi Yong Huang, Wagner D., Bathias C., Chaboche J.L.* Cumulative fatigue damage in low cycle fatigue and gigacycle fatigue for low carbon–manganese steel// Intern. J. Fatigue, 2011, vol. 33, pp. 115–121.
23. *Plekhov O., Naimark O. et al.* The study of a defect evolution in iron under fatigue loading in gigacycle fatigue regime // Frattura ed Integrita Strutturale, 2016, vol. 10, no. 35, pp. 414–423.
24. *Burago N.G., Nikitin I.S.* Multiaxial fatigue criteria and durability of titanium compressor disks in low- and giga- cycle fatigue modes // in: Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. Heidelberg: Springer, 2016. P. 117–130.
25. *Shanyavskiy A.A., Soldatenkov A.P.* The fatigue limit of metals as a characteristic of the multimodal fatigue life distribution for structural materials// Proc. Struct. Integrity, 2019, vol. 23, pp. 63–68.
26. *Smith R.N., Watson P., Topper T.H.* A stress-strain parameter for the fatigue of metals.// J. Mater., 1970, vol. 5, no. 4, pp. 767–778.
27. *Gates N., Fatemi A.* Multiaxial variable amplitude fatigue life analysis including notch effects // Intern. J. Fatigue, 2016, vol. 91, pp. 337–351.
28. *Burago N.G., Nikitin I.S.* Matrix-free conjugate gradient implementation of implicit schemes // Comput. Math.&Math. Phys., 2018, vol. 58, no. 8, pp. 1247–1258.
29. *Burago N.G., Nikitin I.S., Nikitin A.D., Stratula B.A.* Algorithms for calculation damage processes // Frattura ed Integrità Strutturale, 2019, vol. 49, pp. 212–224.
30. *Burago N.G., Nikitin I.S.* Algorithms of through calculation for damage processes // Comput. Res.& Model., 2018, vol. 10, no. 5, pp. 645–666.
31. *Burago N.G., Nikitin I.S., Nikitin A.D.* Algorithms for calculating contact problems in the solid dynamics // in: Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics. *Ed by Jain L.C. et al.* Singapore: Springer, 2020. pp. 185–198.
32. *Burago N.G., Nikitin I.S.* Mathematical model and algorithm for calculating pressing and sintering // Mathem. Models&Comput. Simul., 2019, vol. 11, no. 5, pp. 731–739.
33. *Shanyavskiy A.A.* Modeling of Metal Fatigue fracture. Ufa: Monografia, 2007. 498 p.