

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 66, номер 3, 2020

---

---

## КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

Асимптотический подход к расчету волновых полей в слое с дефектом  
малого характерного размера

*А. О. Ватulyян, О. А. Беляк* 235

Анализ эффекта аномальной прозрачности границы раздела вода–воздух

*А. П. Волощенко* 242

Упругие волны в цилиндрических металлических клиньях с разной геометрией

*А. И. Коробов, М. Ю. Изосимова, А. А. Агафонов, А. И. Кокшайский, Р. А. Жостков* 251

---

## НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

Модульные “солитоны”: взаимное поглощение и аннигиляция в диссипативных средах

*О. А. Васильева, О. В. Руденко* 258

---

## ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

Распространение упругих волн в динамически-самоподобных структурах  
(динамических фракталах)

*Л. Я. Банах* 265

Коллимация акустического излучения двумерными периодическими структурами  
с нулевым показателем преломления

*В. И. Голованов, К. Ф. Шипилов* 273

Пьезокерамический резонатор для исследования сонолюминесценции

*Р. В. Козабаранов, В. А. Борисенок, И. Н. Диденкулов, А. С. Буркацкий,  
А. С. Егоров, Д. А. Литвинов, В. В. Чернов* 278

Исследование структурной неоднородности магнитной жидкости посредством  
восстановления пространственного распределения коэффициента экстинкции  
света с использованием лазерного оптико-акустического метода

*Ю. Г. Соколовская, Н. Б. Подымова, А. А. Карабутов* 284

---

## АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

Пространственная векторно-скалярная структура низкочастотных полей мультипольных  
источников в зонах интерференционных максимумов

*Г. Н. Кузнецов, А. Н. Степанов* 294

---

## АТМОСФЕРНАЯ И АЭРОАКУСТИКА

Сравнение направленности шума несущего вертолетного винта для режимов полета и висения

*В. И. Воронцов, Г. А. Фараносов, С. А. Карабасов, М. Ю. Зайцев*

308

---

## АКУСТИЧЕСКАЯ ЭКОЛОГИЯ. ШУМЫ И ВИБРАЦИЯ

Исследование возможности локализации нескольких источников вибрации в механоакустической системе с большим числом степеней свободы

*Н. А. Кутузов, А. А. Родионов, А. В. Стуленков, А. С. Суворов*

319

---

## АКУСТИКА ПОМЕЩЕНИЙ. МУЗЫКАЛЬНАЯ АКУСТИКА

Максимальное поглощение звука монополюсом в помещении на низких частотах

*Н. Г. Канев*

327

---

## ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ

Лабораторная установка для исследования звукопоглощающих покрытий из метаматериалов при скользящем распространении звука и влияние типа источника на их эффективность

*Ю. И. Бобровницкий, Т. М. Томила, Б. Н. Бахтин, А. С. Гребенников,  
Ш. А. Асфандияров, И. А. Карпов, А. А. Ким*

332

---

## ИНФОРМАЦИЯ

Процесс старения статей по акустике. Взгляд со стороны “Акустического журнала”

*В. Г. Шамаев, А. Б. Горшков*

342

---

---

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ  
И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РАСЧЕТУ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ  
В СЛОЕ С ДЕФЕКТОМ МАЛОГО ХАРАКТЕРНОГО РАЗМЕРА

© 2020 г. А. О. Ватульян<sup>a, b, \*</sup>, О. А. Беляк<sup>c, \*\*</sup>

<sup>a</sup>Южный федеральный университет,  
ул. Большая Садовая 105/42, Ростов-на-Дону, 344006 Россия

<sup>b</sup>Южный математический институт ВЦ РАН,  
ул. Маркуса 22, Владикавказ, 362027 Россия

<sup>c</sup>Ростовский государственный университет путей сообщения,  
пл. Народного Ополчения 2, Ростов-на-Дону, 344038 Россия

\*e-mail: vatuilyan@math.rsu.ru

\*\*e-mail: o\_bels@mail.ru

Поступила в редакцию 21.04.2019 г.

После доработки 16.10.2019 г.

Принята к публикации 29.10.2019 г.

Рассмотрены задачи о колебаниях ортотропного слоя с цилиндрической полостью произвольного поперечного сечения под действием нагрузки, приложенной на его поверхности. В случае полостей малого относительного размера предложен асимптотический подход к расчету полей. Дана оценка области применимости асимптотического подхода по сравнению с методом граничных интегральных уравнений, а также сравнение с решением, полученным на основе приближения Борна.

*Ключевые слова:* колебания полуограниченных тел с полостями, асимптотика, граничные интегральные уравнения

DOI: 10.31857/S0320791920020136

ВВЕДЕНИЕ

Задачи о колебаниях упругих полуограниченных тел [1–11] достаточно давно привлекают внимание многих исследователей, поскольку анализ динамических процессов весьма важен, например, при оценке динамической прочности элементов тяжело нагруженных транспортных средств, машин и механизмов, в геофизике и горной механике. Отметим, что для изотропных однородных сред динамические процессы в таких структурах хорошо изучены [1, 2], а исследование волновых процессов для сред с более сложной структурой, например, для слоистых [3, 4], функционально-градиентных [5, 6], пористых [7–9] является весьма актуальным и в настоящее время. Одним из важных классов динамических задач теории упругости являются задачи о колебаниях упругих тел с локальными неоднородностями [10–13], такими как полости, включения, трещины. Изучение рассеяния упругих волн на неоднородностях разных типов и форм позволяет устанавливать факт наличия дефекта [14–16], что дает возможность определять тип и положение повреждения в исследуемой структуре. Чаще всего решение таких задач базируется на сведениях их к системам граничных интегральных уравнений [1, 2, 11, 12] при помощи фундаментальных решений или матриц

функций Грина, что позволяет снизить размерность исходной задачи на единицу. Такой подход к решению реализован в настоящей работе. При решении динамических задач теории упругости также применяется метод блочных элементов [3] и гибридные численно-аналитические схемы [10, 13]. На основе решения задач о колебаниях сред с дефектами может быть осуществлен расчет амплитудных значений волновых полей, используемых для идентификации дефекта. В настоящей работе реализован подход, основанный на расчете волнового поля в волноводе с полостью на основе метода граничных элементов [17, 18], асимптотического подхода и приближения Борна, часто используемого в акустике [19, 20], и проведено сравнение результатов.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим установившийся режим колебаний с частотой  $\omega$  ортотропного упругого слоя толщины  $h$  с цилиндрической полостью, не выходящей на его границы, направляющая которой есть гладкая замкнутая кривая  $l_0$  с образующей, параллельной оси  $Ox_2$ . Нижняя грань слоя жестко зашпемлена и совпадает с осью  $Ox_1$ , ось  $Ox_3$  направлена перпендикулярно вверх. Оси упругой

симметрии материала совпадают с осями системы координат. Колебания в слое вызваны нагрузкой  $\mathbf{p}(x_1, t) = \text{Re}(\mathbf{p}(x_1)e^{-i\omega t})$ , приложенной к верхней части границы слоя.

Краевая задача после отделения временного множителя имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i &= 0, \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl}u_{k,l}, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{1}$$

$$u_i|_{x_3=0} = 0, \quad \sigma_{i3}|_{x_3=h} = p_i, \quad \sigma_{ij}n_j|_{l_0} = 0, \tag{2}$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $C_{ijkl}$  – компоненты тензора упругих постоянных материала, удовлетворяющие соотношениям симметрии и положительной определенности,  $n_j$  – компоненты единичного вектора нормали к кривой  $l_0$ , внешнего по отношению к области, занятой упругой средой. Замыкает постановку задачи условие излучения волн на бесконечности, при формулировке которого использован принцип предельного поглощения [2].

Исходная задача (1)–(2) в зависимости от типа нагрузки распадается на две: задача об антиплоских колебаниях ортотропного слоя с цилиндрической полостью (задача 1) и плоская задача о колебаниях слоя с полостью (задача 2). В задаче 1 ненулевой является компонента  $u_2(x_1, x_3)$  и в краевой задаче (1)–(2) полагаем  $i = 2, j = 1, 3$ . Для задачи 2 отличными от нуля являются компоненты  $u_i(x_1, x_3), i = 1, 3$  и в краевой задаче (1)–(2) полагаем  $i, j = 1, 3$ .

Основным способом исследования задач 1, 2 является предварительное сведение их к интегральным уравнениям с нерегулярными ядрами на основе идей теории потенциала. Решения краевых задач 1, 2 построены на основе матриц-функций Грина для слоя  $U_i^{(m)}(\mathbf{x}, \xi), i = 1, 2, 3$ , удовлетворяющих однородным граничным условиям на границах, и обобщенной теоремы взаимности [2], где индекс  $m$  указывает, что сосредоточенная сила приложена в направлении оси  $Ox_m, m = 1, 2, 3$ . Функция Грина для ортотропного слоя в случае задачи 1 приведена в работе [21], а для задачи 2 имеет вид:

$$\begin{aligned} U_i^{(m)}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{4\pi^2 C_{33}} \times \\ &\times \iint_{\Gamma} \frac{\Delta_i^{(m)}}{\Delta} e^{i(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \xi)} d\alpha_1 d\alpha_3 + S_i^{(m)}(\mathbf{x}, \xi), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} i &= 1, 3, \\ (\mathbf{a}, \mathbf{x} - \xi) &= \alpha_1(x_1 - \xi_1) + \alpha_3(x_3 - \xi_3), \\ \Delta &= \begin{vmatrix} \gamma_1\alpha_1^2 + \gamma_5\alpha_3^2 - k^2 & (\gamma_5 + \gamma_7)\alpha_1\alpha_3 \\ (\gamma_5 + \gamma_7)\alpha_1\alpha_3 & \gamma_5\alpha_1^2 + \alpha_3^2 - k^2 \end{vmatrix}, \\ \gamma_1 &= C_{11}/C_{33}, \quad \gamma_5 = C_{55}/C_{33}, \\ \gamma_7 &= C_{13}/C_{33}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь  $\Delta_i^{(m)}, i, m = 1, 3$  – определители, получающиеся путем замены  $k$ -го столбца ( $k = 1, 2$ ) в (4) столбцом  $g^{(m)} = (\delta_{im}\delta_{3m})^T, \alpha_i, i = 1, 3$  – параметры преобразования Фурье,  $\Gamma$  – поверхность, всюду совпадающая с плоскостью  $R^2$ , за исключением множества нулей  $\Delta$ , которые она огибает в соответствии с принципом предельного поглощения. Второе слагаемое в выражении (3) представляет собой некоторую регулярную при  $-h + \delta_1 < x_3, \xi_3 < h - \delta_1, \delta_1 > 0$  добавку, обеспечивающую выполнение однородных граничных условий. Надо отметить, что представление функций Грина для ортотропного слоя в виде однократного интеграла по контуру  $\sigma$  в комплексной плоскости [21, 22] удобно использовать при построении решения задачи (1)–(2) путем сведения ее к интегральным уравнениям с нерегулярными ядрами (6), тогда как при решении задачи в рамках асимптотического подхода использовался вид (3).

Поле перемещений в слое под действием поверхностной нагрузки с носителем на отрезке  $[a, b]$  для задач 1, 2 имеет вид:

$$\begin{aligned} u_m(\xi) &= u_m^*(\xi) - \int_{l_0} \sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \xi)n_j(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x})dl_x, \\ i, j, m &= 1, 2, 3, \\ u_m^*(\xi) &= \int_a^b p_i(x_1)U_i^{(m)}(x_1, h, \xi)dx_1, \end{aligned} \tag{5}$$

где  $\sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \xi)$  – компоненты тензора напряжений, выраженные через функции Грина для слоя  $U_i^{(m)}(\mathbf{x}, \xi), i = 1, 2, 3$ .

Поля перемещений в слое (5) представимы в виде суммы двух слагаемых, первое из которых  $u_m^*(\xi)$  – поле смещений в среде без дефекта под действием заданной нагрузки (эталонное поле смещений), второе слагаемое обусловлено наличием полости в слое. Таким образом, на основании соотношения (5) может быть рассчитано поле смещений всюду в слое, если найдено поле смещений на границе полости. В настоящей работе поля смещений на контуре полости рассчитаны на основании двух подходов: метод интегральных уравнений и основанный на нем метод граничных элементов (МГЭ), который может быть использован для полостей любой конфигурации, и асимптотический метод для круговых полостей малого относительного радиуса.

Далее сформулированы системы граничных интегральных уравнений (ГИУ), которые за счет специального выбора матриц-функций Грина содержат операторы лишь по границе полости. Системы ГИУ для задачи 1 ( $j = 1, 3; i, m = 2$ ) и задачи 2 ( $i, j, m = 1, 3$ ) имеют вид:

$$\frac{1}{2}u_m(\mathbf{y}) = u_m^*(\mathbf{y}) - \text{v.p.} \int_{l_0} \sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) dl_x, \quad (6)$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_3) \in l_0,$$

где интеграл по  $l_0$  понимается в смысле главного значения по Коши, а в случае нерегулярной кривой  $l_0$  коэффициент при  $u_m(\mathbf{y})$  отличен от  $\frac{1}{2}$  и зависит от угла между касательными в особой точке и упругих постоянных материала [22].

В настоящей работе численная реализация систем ГИУ (6) с нерегулярным ядром на основе МГЭ [17, 18] выполнена следующим образом. Гладкая граница аппроксимировалась  $N$ -угольником  $l = \bigcup_{q=1}^N l_q$ , где функция  $u_m(x_1, x_3)$  постоянна в пределах каждого из элементов  $l_q$ , а в качестве узлов выбраны середины соответствующих отрезков. Число ГЭ  $N$  выбиралось таким образом, чтобы было не менее 5–6 элементов на длину волны. Таким образом, системы ГИУ (6) сводились к линейным алгебраическим системам относительно  $u_{mq} = u_m(y_{1q}, y_{3q})$ . Полученные алгебраические системы относительно узловых смещений на контуре хорошо обусловлены, имеют явное диагональное преобладание. Отметим, что МГЭ позволяет рассчитывать поле перемещений на поверхности слоя в случае произвольной формы и размера дефекта. Процедура решения ГИУ (6) достаточно сложна и требует значительной вычислительной работы, однако, если сечение полости представляет собой окружность малого характерного размера, то схему расчета волновых полей можно значительно упростить на основе асимптотического анализа.

Асимптотический подход к решению многопараметрической задачи (1)–(2) о колебаниях ортотропного слоя с цилиндрической полостью, поперечное сечение которой представляет собой окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{30})$ , был реализован в области изменения безразмерных параметров:

$$\varepsilon_1 \ll 1, \quad \varepsilon_* < \varepsilon_2 < 1, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_1 = r/h$ ,  $\varepsilon_2 = \omega r \sqrt{\rho/C}$ , где  $C = C_{44}$  для задачи 1,  $C = C_{33}$  для задачи 2, а  $\varepsilon_*$  соответствует частоте запаривания, когда в слое нет бегущих волн.

Поля перемещений, всюду в области, занятой упругой средой, отличные от соотношений (5) и полученные на основании обобщенной теоремы взаимности, имеют вид:

$$u_m(\xi) = u_m^*(\xi) - \int_{l_0} K_{im}(\mathbf{x}, \xi) (u_i(\mathbf{x}) - u_i(\xi)) dl_x - \rho \omega^2 \int_{S_0} U_i^{(m)}(\mathbf{x}, \xi) dS_x u_i(\xi), \quad i, j, m = 1, 2, 3, \quad (8)$$

$$K_{im}(\mathbf{x}, \xi) = \sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \xi) n_j(\mathbf{x}),$$

где  $S_0$  – плоская область, ограниченная гладкой замкнутой кривой  $l_0$ . На основании представления (8) при предельном переходе  $\xi \rightarrow \mathbf{y} \in l_0$  получена следующая система ГИУ:

$$u_m(\mathbf{y}) = u_m^*(\mathbf{y}) - \int_{l_0} K_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (u_i(\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{y})) dl_x - \rho \omega^2 \int_{S_0} U_i^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_x u_i(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in l_0, i, j, m = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Надо отметить, что система ГИУ (9) имеет регулярные подынтегральные функции в отличие от уравнений (6), а криволинейный интеграл по контуру  $l_0$  существует как несобственный, что позволяет при дискретизации избежать вычисления сингулярных интегралов. Функцию  $K_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  можно представить в виде суммы двух слагаемых, первое из которых соответствует статическому случаю ( $\varepsilon_2 = 0$ ), а второе – некоторая добавка:

$$K_{im}(\mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}_0 + r\zeta) = K_{im}^0(\mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}_0 + r\zeta) + K_{im}^1(\mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}_0 + r\zeta),$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + r\boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\eta} = \{\cos \theta, \sin \theta\}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + r\zeta,$$

$$\zeta = \{\cos \psi, \sin \psi\}, \quad \theta, \psi \in [0, 2\pi].$$

При этом имеют место следующие оценки:

$$K_{im}^1(\theta, \psi) = O(\varepsilon_2^2), \quad K_{im}^0(\theta, \psi) = \varepsilon_1^{-1} F_{im}(\theta, \psi) + O(\varepsilon_1),$$

$$\rho \omega^2 \int_{S_0} U_i^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_x = O(\varepsilon_2^2),$$

$$F_{im}(\theta, \psi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{A_{im}(\theta, \varphi)}{A(\varphi) (\cos(\theta - \varphi) - \cos(\varphi - \psi))} d\varphi.$$

Выше введены следующие обозначения для задачи 1:

$$A_{22}(\theta, \varphi) = v \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi,$$

$$A(\varphi) = v \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi,$$

а для задачи 2:

$$A_{11}(\theta, \varphi) = (\gamma_1 \gamma_5 \cos^3 \varphi + G \cos \varphi \sin^2 \varphi) \cos \theta + (\gamma_5 \sin^3 \varphi - \gamma_5 \gamma_7 \cos^2 \varphi \sin \varphi) \sin \theta,$$

$$A_{13}(\theta, \varphi) = (\gamma_5 \sin^3 \varphi - \gamma_5 \gamma_7 \cos^2 \varphi \sin \varphi) \cos \theta + (\gamma_5 \gamma_7 \cos^3 \varphi - \gamma_5 \cos \varphi \sin^2 \varphi) \sin \theta,$$

$$A_{31}(\theta, \varphi) = (\gamma_5 \gamma_7 \sin^3 \varphi - \gamma_5 \gamma_1 \cos^2 \varphi \sin \varphi) \cos \theta + (\gamma_1 \gamma_5 \cos^3 \varphi - \gamma_5 \gamma_7 \cos \varphi \sin^2 \varphi) \sin \theta,$$

$$A_{33}(\theta, \varphi) = (\gamma_1 \gamma_5 \cos^3 \varphi - \gamma_5 \gamma_7 \cos \varphi \sin^2 \varphi) \cos \theta + (\gamma_5 \sin^3 \varphi + G \cos^2 \varphi \sin \varphi) \sin \theta,$$

$$A(\varphi) = \gamma_5 \sin^4 \varphi + G \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \gamma_1 \gamma_5 \cos^4 \varphi,$$

$$G = \gamma_1 - \gamma_5 \gamma_7 - \gamma_7^2.$$

Поля смещений на контуре полости  $l_0$  представимы в виде разложения по малому параметру  $\varepsilon_1$ :

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^0(\mathbf{x}_0) + \varepsilon_1(u_{m,1}(\mathbf{x}_0) \cos \theta + u_{m,3}(\mathbf{x}_0) \sin \theta) + O(\varepsilon_1^2), \quad m = 1, 2, 3. \quad (10)$$

Коэффициенты в разложении (10) вычислены аналитически и для задачи 1 приведены в работах [11, 12], а для задачи 2 имеют вид:

$$\begin{aligned} u_m(\mathbf{x}_0) &= u_m^*(\mathbf{x}_0), \\ u_{1,1}(\mathbf{x}_0) &= (I_3 u_{3,3}^*(\mathbf{x}_0) - (1 - I_6) u_{1,1}^*(\mathbf{x}_0)) / \Delta_1, \\ u_{3,3}(\mathbf{x}_0) &= ((1 - I_1) u_{3,3}^*(\mathbf{x}_0) + I_4 u_{1,1}^*(\mathbf{x}_0)) / \Delta_1, \\ u_{1,3}(\mathbf{x}_0) &= (-I_2 u_{3,1}^*(\mathbf{x}_0) + (1 - I_5) u_{1,3}^*(\mathbf{x}_0)) / \Delta_2, \\ u_{3,1}(\mathbf{x}_0) &= (-(1 - I_2) u_{3,1}^*(\mathbf{x}_0) - (1 - I_5) u_{1,3}^*(\mathbf{x}_0)) / \Delta_2 J, \\ \Delta_1 &= I_1 I_6 - I_3 I_4 - I_1 - I_6 + 1, \quad \Delta_2 = I_2 + I_5 - 1, \\ I_1 &= I(\gamma_1 \gamma_5 - G, G, 0), \\ I_2 &= I(\gamma_5 \gamma_7 + \gamma_5, -\gamma_5 \gamma_7 - 2\gamma_5, \gamma_5), \\ I_3 &= I(\gamma_5 \gamma_7 + \gamma_5, -\gamma_5, 0), \\ I_4 &= I(\gamma_1 \gamma_5 + \gamma_1 \gamma_7, -\gamma_1 \gamma_5 - \gamma_1 \gamma_7, 0), \\ I_5 &= I(\gamma_1 \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_7, -\gamma_5 \gamma_7, 0), \\ I_6 &= I(\gamma_5 - G + G, G - 2\gamma_5, \gamma_5). \end{aligned} \quad (11)$$

Интеграл  $I(C_1, C_2, C_3) = \frac{C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2 + C_3 \Psi_3}{\Lambda}$  вычислен аналитически по теории вычетов, где

$$\begin{aligned} \Lambda &= w_0 \sqrt{\frac{w_1^3}{\gamma_5^3}}, \quad \Psi_1 = \sqrt{\left(\frac{w_1}{\gamma_5}\right)^3} + \\ &+ w_1 \frac{(s_1^2 - 2\gamma_1 \gamma_5)(\gamma_5 \sqrt{\gamma_1} - s_1 + \gamma_1 \gamma_5) - s_1 w_1 \gamma_1 \gamma_5}{\gamma_1^2 \gamma_5^4}, \\ \Psi_2 &= \frac{w_0}{2\gamma_1 \gamma_5^3} \sqrt{4\gamma_5^2 - s_1^2} \sqrt{4\gamma_1 \gamma_5^2 - s_1^2}, \\ \Psi_3 &= \frac{w_0}{\gamma_5^2} w_1 (1 + 1/\sqrt{\gamma_1}), \\ w_0 &= \gamma_1 \gamma_5 + \gamma_5 - s_1, \quad w_1 = 2\gamma_5 \sqrt{\gamma_1} - s_1, \\ s_1 &= \gamma_1 - 2\gamma_5 \gamma_7 - \gamma_7^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для задач 1, 2 получено явное асимптотическое представление полей смещений на контуре полости, минуя процедуру дискретизации ГИУ (6) на основе МГЭ. Поля перемещений на поверхности  $u_m(\xi_1, h)$ ,  $m = 1, 2, 3$ , построенные в рамках асимптотического подхода, в дальнейшей от дефекта зоне ( $x_1 < \xi_1$ ), имеют вид:

$$u_m(\xi_1, h) = u_m^*(\xi_1, h) - \sum_{p=1}^M A_p^{(m)}(u_m(x)) e^{i\alpha_{1p}^* \xi_1} + O(e^{-\gamma \xi_1}), \quad \gamma > 0, \quad \xi_1 > x_1 > 0, \quad (12)$$

где  $M$  – число распространяющихся волн в слое,  $\alpha_{1p}^*$  – корни дисперсионного уравнения. Амплитуды бегущих волн на поверхности слоя для задачи 1 имеют вид [12], а для задачи 2 имеют вид:

$$\begin{aligned} A_p^{(m)} &= \frac{\varepsilon_1^2 \pi i \exp(-i\alpha_{1p}^* x_{10})}{2\psi(\alpha_{1p}^*)} \times \\ &\times \left[ \Phi_1^{(m)}(x_{30}) u_1^*(\mathbf{x}_0) + \Phi_3^{(m)}(x_{30}) u_3^*(\mathbf{x}_0) + \right. \\ &\left. + \sum_{k=1,3} \Omega_k^{(m)}(x_{30}) u_{1,k}(\mathbf{x}_0) + \Lambda_k^{(m)}(x_{30}) u_{3,k}(\mathbf{x}_0) \right], \\ m &= 1, 3. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражения  $\psi(\alpha_{1p}^*)$ ,  $\Phi_k^{(m)}(x_{30})$ ,  $\Omega_k^{(m)}(x_{30})$ ,  $\Lambda_k^{(m)}(x_{30})$  не приводятся в виду их громоздкости, а  $u_{s,k}(\mathbf{x}_0)$ ,  $s, k = 1, 3$  заданы формулами (11).

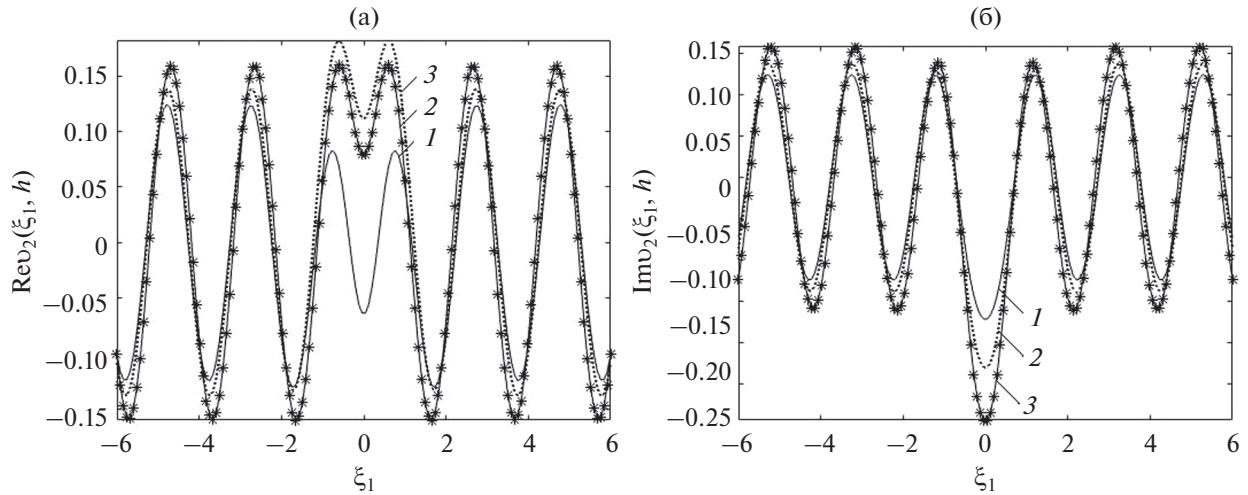
Надо отметить, что в рамках приближения Борна, широко используемого в акустике [19, 20], перемещения на контуре заменяются эталонными полями смещений в точке  $\mathbf{x}_0$ , поэтому амплитуды полей перемещений на поверхности слоя в этом приближении не учитывают изменчивость полей смещений на контуре. В рамках такого приближения однократного рассеяния поля смещений на контуре полости определяются соотношением (10) при удержании лишь первого члена в разложении полей. В свою очередь, в соотношении (13) для амплитуд отсутствуют слагаемые, содержащие производные от эталонных полей  $u_m^*(\mathbf{x}_0)$ ,  $m = 1, 3$ , а их выражение имеет вид:

$$\begin{aligned} A_p^{(m)} &= \frac{\varepsilon_1^2 \pi i \exp(-i\alpha_{1p}^* x_{10})}{2\psi(\alpha_{1p}^*)} \times \\ &\times \left[ \Phi_1^{(m)}(x_{30}) u_1^*(\mathbf{x}_0) + \Phi_3^{(m)}(x_{30}) u_3^*(\mathbf{x}_0) \right], \quad m = 1, 3. \end{aligned} \quad (14)$$

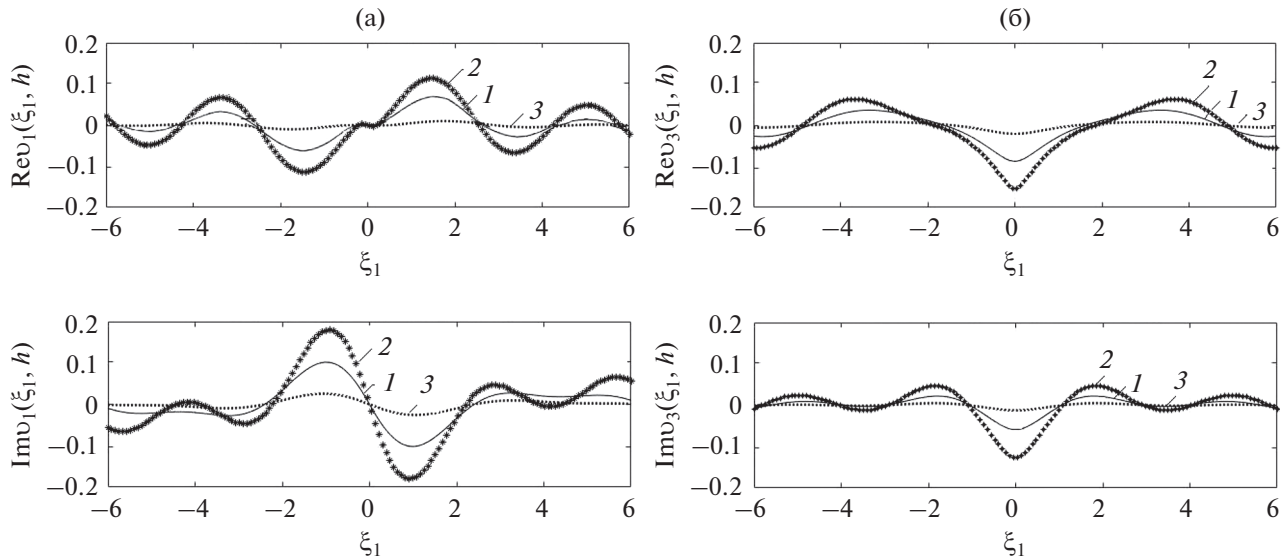
### ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

На основании соотношений (5), (12)–(14) построены поля перемещений  $v_m(\xi_1, h) = u_m(\xi_1, h) - u_m^*(\xi_1, h)$ ,  $m = 1, 2, 3$  на поверхности слоя  $x_3 = h$ , обусловленные лишь наличием полости. Проведен ряд численных экспериментов по расчету волновых полей на поверхности слоя для случая цилиндрической полости кругового сечения малого относительного размера на основании трех подходов: МГЭ, асимптотического подхода и приближения Борна.

В расчетах приняты следующие значения упругих постоянных для диоксида гафния  $\text{HfO}_2$   $C_{11} = 502$ ,  $C_{13} = 159$ ,  $C_{33} = 597$ ,  $C_{44} = 78$ ,  $C_{55} = 90$ ,  $C_{66} = 111$  (ГПа),  $\rho = 13310$  кг/м<sup>3</sup> [22]. Колебания в слое вызваны сосредоточенной нагрузкой  $\mathbf{p} = \{0, -p_0/C_{44}, 0\}$  и  $\mathbf{p} = \{0, 0, -p_0/C_{33}\}$  для задач 1 и 2 соответственно, которая приложена в точке  $(0, h)$ .



**Рис. 1.** Действительная и мнимая части поля перемещений  $v_2(\xi_1, h)$ , рассчитанные на основе МГЭ (1), асимптотического подхода (2), приближения Борна (3) для значений параметров  $\epsilon_1 = 0.24$ ,  $\epsilon_2 = 0.98$ .



**Рис. 2.** (а) – Действительная и мнимая части поля перемещений  $v_1(\xi_1, h)$ , рассчитанные на основе МГЭ (1), асимптотического подхода (2), приближения Борна (3) для значений параметров  $\epsilon_1 = 0.15$ ,  $\epsilon_2 = 0.3$ . (б) – Действительная и мнимая части поля перемещений  $v_3(\xi_1, h)$ , рассчитанные на основе МГЭ (1), асимптотического подхода (2), приближения Борна (3) для значений параметров  $\epsilon_1 = 0.15$ ,  $\epsilon_2 = 0.3$ .

Направляющая цилиндрической полости  $l_0$  – окружность с центром в точке  $(0, h/2)$ . Число граничных элементов  $N = 12$ . На рис. 1–4 приведены графики полей перемещений на поверхности слоя  $v_m(\xi_1, h)$ ,  $m = 1, 2, 3$ , рассчитанных тремя способами для задач 1 и 2, при этом сплошная линия соответствует расчетам по МГЭ, графики полей, полученных на основе асимптотического подхода, изображены сплошной линией с маркером “\*” и штриховой линией отмечены поля, полученные в рамках приближения Борна. На рис. 1–2 пред-

ставлены графики, соответствующие случаю одной распространяющейся моды в слое для значений параметров  $\epsilon_1 = 0.24$ ,  $\epsilon_2 = 0.98$  (задача 1) и  $\epsilon_1 = 0.15$ ,  $\epsilon_2 = 0.3$  (задача 2).

На рис. 3–4 представлены графики полей перемещений на поверхности слоя  $v_m(\xi_1, h)$ ,  $m = 1, 2, 3$  для двух распространяющихся мод при следующих значениях параметров  $\epsilon_1 = 0.15$ ,  $\epsilon_2 = 0.98$  (задача 1) и  $\epsilon_1 = 0.1$ ,  $\epsilon_2 = 0.4$  (задача 2).

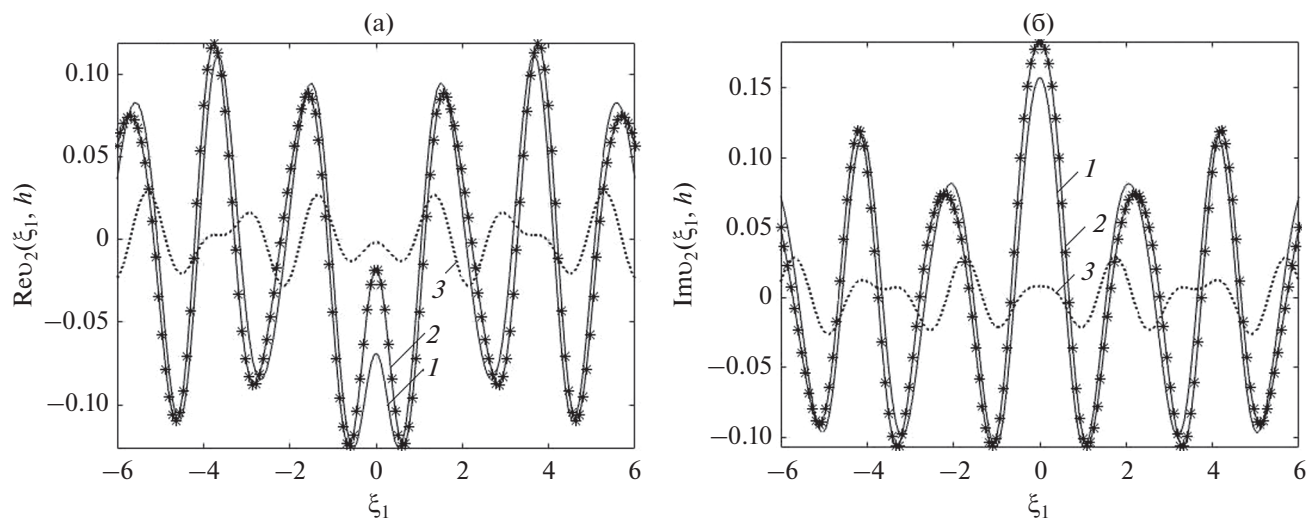


Рис. 3. Действительная и мнимая части поля перемещений  $v_2(\xi_1, h)$ , рассчитанные на основе МГЭ (1), асимптотического подхода (2), приближения Борна (3) для значений параметров  $\varepsilon_1 = 0.15$ ,  $\varepsilon_2 = 0.98$ .

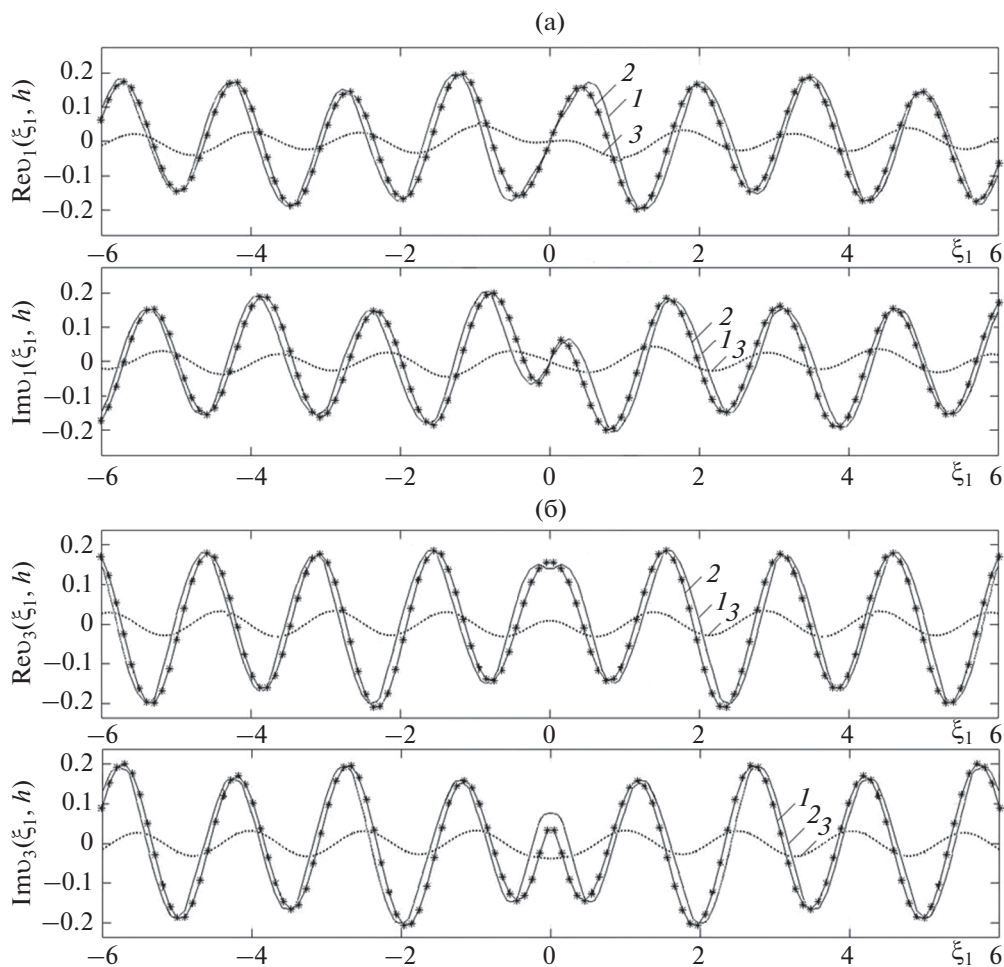


Рис. 4. (а) – Действительная и мнимая части поля перемещений  $v_1(\xi_1, h)$ , рассчитанные на основе МГЭ (1), асимптотического подхода (2), приближения Борна (3) для значений параметров  $\varepsilon_1 = 0.1$ ,  $\varepsilon_2 = 0.4$ . (б) – Действительная и мнимая части поля перемещений  $v_3(\xi_1, h)$ , рассчитанные на основе МГЭ (1), асимптотического подхода (2), приближения Борна (3) для значений параметров  $\varepsilon_1 = 0.1$ ,  $\varepsilon_2 = 0.4$ .



## ВЫВОДЫ

На основе численных экспериментов определена область корректной работы асимптотического подхода для задач 1 и 2 для среднезаглубленных полостей малого поперечного размера и приближения Борна при расчете волновых полей в дальней зоне. Эта область описывается следующими неравенствами:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 < 0.24 \\ \varepsilon_2 < 1 \end{cases} \text{ для задачи 1 и}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 < 0.15 \\ \varepsilon_2 < 1 \end{cases} \text{ для задачи 2 (относительное расхождение}$$

результатов не превышало 10%). Как видно из графиков на рис. 1, на частотах, соответствующих одной распространяющейся моде в слое, волновое поле в дальней от дефекта зоне, рассчитанное на основе приближения Борна, практически совпадает с полем, рассчитанным на основе МГЭ. На тех частотах, для которых имеются две распространяющиеся моды, приближение Борна значительно отличается от расчетов по МГЭ. В то же время поле на поверхности, рассчитанное на основе асимптотического подхода, отличается от поля, полученного на основе МГЭ, не более, чем на 4%. Отметим, что для задачи 2 для любых частот, соответствующих распространяющимся модам в слое, наблюдается качественное и количественное отличие полей перемещений, построенных на основании приближения Борна от полей, рассчитанных на основе МГЭ и асимптотического подхода.

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы “Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы” при финансовой поддержке государства в лице Министерства науки и высшего образования России (идентификатор проекта RFMEFI60718X0203).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. М.: Наука, 1981. 282 с.
2. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
3. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова В.О. О колебаниях слоистых упругих сред с рельефной границей // ПММ. 2010. Т. 74. № 6. С. 890–894.
4. Lei Huang, Jianwen Liang, Chengqing Wu. A three-dimensional indirect boundary integral equation method for modeling elastic wave scattering in a layered half-space // Int. J. Solids Structures. 2019. V. 169. P. 81–94.
5. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И., Жанг Ч. Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 3. С. 370–385.
6. Калинин В.В., Белянкова Т.И. О динамике среды с непрерывно изменяющимися по глубине свойствами // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. 2004. Спецвыпуск. С. 46–49.
7. Gusakov D., Vatul'yan A. Dispersion properties of inhomogeneous poroelastic layer // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2018. V. 98. № 4. P. 532–541.
8. Суворова Т.В., Беляк О.А., Усошин С.А. Волновое поле, генерируемое в слоистом полупространстве движущейся осциллирующей нагрузкой // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. № 1. С. 53–61.
9. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И. Влияние пористости на характеристики волн релеевского типа в многослойном полупространстве // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 2. С. 234–245.
10. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А. Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 1. С. 3–12.
11. Ватульян А.О., Беляк О.А. К реконструкции малых полостей в упругом слое // Дефектоскопия. Уральское отделение РАН. 2006. № 10. С. 33–39.
12. Ватульян А.О., Беляк О.А. О различных способах реконструкции полости в ортотропном слое // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 3(295). С. 181–189.
13. Falleta S., Monegato G., Scuderi L. On the discretization and application of two space–time boundary integral equations for 3D wave propagation problems in unbounded domains // Applied Numerical Mathematics. 2018. V. 124. P. 22–43.
14. Гурбатов С.Н., Грязнова И.Ю., Иващенко Е.Н. Исследование обратного рассеивания акустических волн дискретными неоднородностями разных размеров // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 2. С. 203–207.
15. Буров В.А., Шуруп А.С., Румянцева О.Д., Зотов Д.И. Функционально-аналитическое решение задачи об акустической томографии по данным от точечных преобразователей // Изв. РАН. Серия физическая. 2012. Т. 76. № 12. С. 1524–1529.
16. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. 272 с.
17. Бребия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
18. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
19. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
20. Горюнов А.А., Сасковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989. 149 с.
21. Ватульян А.О., Суворова О.А. Об обратной задаче для упругого слоя с полостью // Экологический вестник научных центров черноморского сотрудничества (ЧЭС). 2005. № 1. С. 10–16.
22. Ватульян А.О., Гусева И.А., Сюнякова И.М. О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применении // Изв. СКНЦ. Сер. естеств. науки. 1989. № 2. С. 81–85.
23. Caravaca M.A., Mino J.C., Perez V.J., Casali R.A., Ponce C.A. Ab initio study of the elastic properties of single and polycrystal TiO<sub>2</sub>, ZrO<sub>2</sub> and HfO<sub>2</sub> in the cotunnite structure // J. Phys. Condens. Matter. 2009. V. 21(1). P. 1–11.

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ  
И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.2

АНАЛИЗ ЭФФЕКТА АНОМАЛЬНОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ  
ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ВОДА–ВОЗДУХ

© 2020 г. А. П. Волощенко\*

ФГАОУ ВО Южный федеральный университет, ул. Шевченко 2, Таганрог, 347922 Россия

\*e-mail: apvoloshhenko@sfedu.ru

Поступила в редакцию 26.04.2019 г.

После доработки 23.10.2019 г.

Принята к публикации 29.10.2019 г.

Рассмотрено влияние эффекта аномальной прозрачности на прохождение звука из воды в воздух. На основе математической модели рассчитан коэффициент прохождения по давлению через границу раздела вода–воздух с учетом влияния неоднородных плоских волн. Показаны особенности акустического поля в воздухе при расположении подводного источника на расстоянии меньше длины волны от границы раздела сред. Приведены теоретические зависимости коэффициента прохождения по давлению от волнового расстояния от источника до границы раздела сред. Описаны условия и методики измерения коэффициента прохождения сферических волн через плоскую границу раздела сред. Приведены экспериментальные зависимости коэффициента прохождения по давлению от частоты излучения источника и его глубины. Приведены осциллограммы акустических сигналов, прошедших из воды в воздух.

*Ключевые слова:* неоднородная плоская волна, сферическая волна, граница раздела вода-воздух, коэффициент прохождения

DOI: 10.31857/S032079192002015X

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос взаимосвязи акустических полей в соприкасающихся водной и воздушной средах является одним из основных в акустике и актуален как для фундаментальных, так и для прикладных задач. Согласно расчетам, прохождение акустических волн из воды в воздух незначительно и имеет слабое практическое применение. Данный вывод основан на анализе процессов падения, отражения и прохождения плоских волн от точечного источника сигнала в рамках лучевой теории. Эта теория не может быть использована для описания сферической звуковой волны на расстояниях меньше длины волны от источника сигнала. Лучевая теория не учитывает процессы, которые могут стать причиной значительного увеличения прохождения волн через границу раздела вода–воздух [1–7].

Необходимо отметить теоретические работы [8–10], в которых математически описан процесс прохождения сферических волн через плоскую границу раздела двух сред. В работах доказано, что сферическая волна является суммой однородных и неоднородных плоских волн. Этот факт показан при вычислении интеграла, полученного в результате разложения сферической волны на плоские волны. Из-за своих свойств, амплитуда

неоднородной плоской волны быстро падает в направлении распространения. Поэтому для большинства прикладных задач ее вкладом в акустическое поле можно пренебречь. Если источник в воде поместить на расстояние меньше длины волны от границы раздела двух сред, то уровень звукового давления в воздухе будет одновременно зависеть от двух типов плоских волн.

Недавно эта задача получила новое решение. В работах [11–13] описана математическая модель, позволяющая оценить степень прохождения акустической энергии через границу раздела вода–воздух. Само явление получило название эффекта аномальной прозрачности. В работе [13] теоретически доказано существование эффекта аномальной прозрачности не только для точечных источников, но и для излучателей с реальными размерами. Был проведен эксперимент [1], подтверждающий данное явление. Однако полученные в ходе лабораторных исследований результаты нельзя назвать исчерпывающими, а сами условия проведения исследований вызывают много вопросов. Поэтому, чтобы дополнить существующие знания о явлении, была проведена серия экспериментальных исследований данного вопроса [14–17].

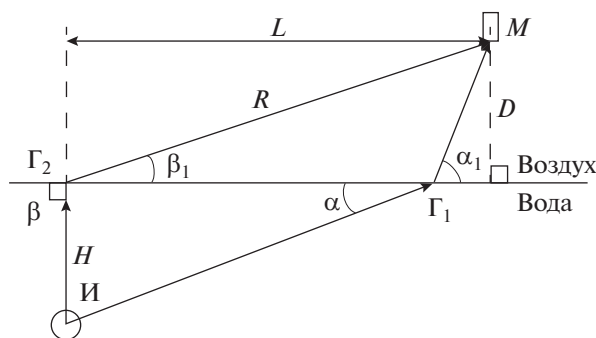


Рис. 1. Распространение однородной (путь ИГ<sub>1</sub>М) и неоднородной (путь ИГ<sub>2</sub>М) плоских волн от источника И в приемник М для случая  $n > 1$ .

Однако в работах [14–17] основным доказательством эффекта аномальной прозрачности являются графики зависимостей коэффициента прохождения по давлению для различных условий моделирования и эксперимента. В тоже время практически не рассмотрены причины, объясняющие характер зависимостей. А именно тот факт, что в процессе прохождения звука из воды в воздух участвуют две волны. Отсутствуют осциллограммы, которые наглядно демонстрируют этот факт и являются существенным доказательством эффекта аномальной прозрачности. В результате недочетов в расчетах на графиках зависимостей коэффициента по давлению отсутствуют осцилляции, которые являются результатом интерференции двух волн. Отсутствуют также расчеты скорости распространения неоднородной плоской волны. Целью данной статьи является устранение описанных выше недостатков.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Математическая модель в работах [11–13] описывает перенос энергии. Данный факт несколько затрудняет привязку результатов моделирования к условиям эксперимента. В работе [8] акустическое поле описано с помощью звукового потенциала, который можно легко преобразовать в акустическое давление. Поэтому наиболее рационально воспользоваться математической моделью работы [8]. Коэффициент прохождения по давлению определяется формулой

$$A_p = 20 \lg \left( \left| \frac{p}{p_0} \right| \right), \tag{1}$$

где  $p$  – акустическое давление в точке М (рис. 1) в воздухе,  $p_0$  – акустическое давление в точке И в воде. Путь распространения акустической волны из точки И в точку М в обоих случаях одинаков.

Акустическое давление в воздухе  $p$  в точке М складывается из двух составляющих. Первая часть – это акустическое давление  $p_1$ , создаваемое плоской волной, прошедшей путь ИГ<sub>1</sub>М. Вторая часть – это акустическое давление  $p_2$ , создаваемое волной, прошедшей путь ИГ<sub>2</sub>М. Необходимо отметить, что тип волны, проходящий путь ИГ<sub>2</sub>М, на разных участках различен. Отрезок ИГ<sub>2</sub> проходит неоднородная плоская волна. После чего, на границе раздела, происходит ее трансформация в однородную плоскую волну [8]. В итоге, акустическое давление в воздухе волне можно записать как

$$p = p_1 + p_2, \tag{2}$$

$$p_1 = \frac{i\rho_1\omega 2\sqrt{\cos\alpha} e^{ik\left[\frac{H}{\sin\alpha} + \frac{n^2D}{\sqrt{n^2 - \cos^2\alpha}}\right]}}{\sqrt{L\left(\frac{H}{\sin^3\alpha} - \frac{n^2D}{(n^2 - \cos^2\alpha)^{3/2}}\right)} (m\sin\alpha + \sqrt{n^2 - \cos^2\alpha})}, \tag{3}$$

$$p_2 = i\rho_1\omega \frac{2n}{R} e^{ik_1R - kH\sqrt{n^2\cos^2\beta_1 - 1}} \times \left[ \frac{\sin\beta_1}{n\sin\beta_1 + im\sqrt{n^2\cos^2\beta_1 - 1}} + \frac{i}{m(1 - n^2)kR} \right], \tag{4}$$

$$R = \sqrt{L^2 + D^2}, \quad \cos\beta_1 > 1/n,$$

$$k^2(L^2 + H^2 + D^2) \gg 1,$$

где  $L$  – расстояние между приемником и источником (рис. 1),  $D$  – высота приемника,  $H$  – глубина источника,  $\omega$  – угловая частота,  $\alpha$  – угол скольжения волны на отрезке ИГ<sub>1</sub>,  $\alpha_1$  – угол скольжения волны на отрезке Г<sub>1</sub>М,  $\beta_1$  – угол скольжения волны на отрезке Г<sub>2</sub>М,  $k$  – волновое

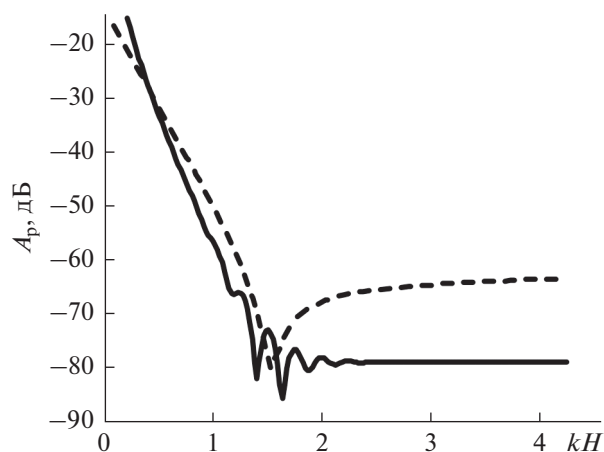
число в воде,  $k_1$  – волновое число в воздухе,  $m = \rho_1/\rho$ ,  $\rho$  – плотность воды,  $\rho_1$  – плотность воздуха,  $n$  – коэффициент преломления.

Акустическое давление в воде равно

$$p_0 = \frac{i\rho\omega B e^{ikh}}{h}, \tag{5}$$

где  $h = \frac{H}{\sin\alpha} + \frac{n^2D}{\sqrt{n^2 - \cos^2\alpha}}$ ,  $B$  – константа, определяемая из граничных условий.

Формулы (1)–(5) позволяют исследовать зависимость коэффициента прохождения по давлению от двух основных параметров: глубины ис-

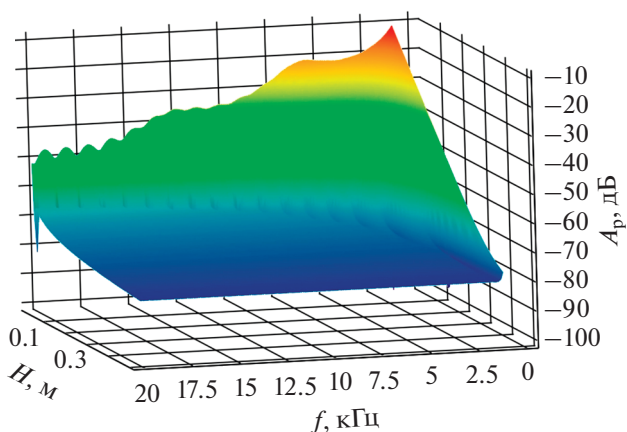


**Рис. 2.** Зависимость коэффициента прохождения по давлению от волнового расстояния от источника до границы раздела. Сплошная линия —  $H = 0.05$  м,  $L = 0.5$  м,  $\alpha = 6^\circ$ ,  $\beta_1 = 11.3^\circ$ ,  $D = 0.1$  м,  $f = [1...20]$  кГц. Пунктирная линия —  $H = [0.01...0.5]$  м,  $L = 0.5$  м,  $\alpha = [1.2...45.9]^\circ$ ,  $\beta = 11.3^\circ$ ,  $D = 0.1$  м,  $f = 2$  кГц.

точника  $H$  и его частоты излучения  $f$ . При проведении расчетов примем значения скорости звука в воде  $c$  и воздухе  $c_1$  равными  $c = 1480$  и  $c_1 = 340$  м/с. Значения плотности воды  $\rho$  и воздуха  $\rho_1$  примем равными  $\rho = 1000$  и  $\rho_1 = 1.2$  кг/м<sup>3</sup>. Тогда значения показателя преломления  $n$  и отношения  $m$  плотностей двух сред равны  $n = 4.35$  и  $m = 0.0012$ .

Результаты математического моделирования зависимости коэффициента прохождения по давлению  $A_p$  от глубины источника  $H$  и его частоты излучения  $f$  представлены на рис. 2 и 3. Для удобства сравнения зависимостей на рис. 2 параметры  $H$  и  $f$  связаны при помощи волнового расстояния  $kH = 2\pi fH/c$ . Сплошной линией показана зависимость коэффициента прохождения при изменении частоты излучения источника. Пунктирной линией показана зависимость коэффициента прохождения при изменении глубины источника.

Из рис. 2 видно, что величина коэффициента прохождения существенно зависит от волнового расстояния от излучателя до границы раздела. При уменьшении волнового расстояния растет уровень акустического давления в воздухе, причем влияние изменения частоты и глубины на коэффициент прохождения неодинаково. Кривые зависимостей на рис. 2 можно условно разделить на три участка. На первом участке ( $kH \leq 1$ ) подавляющее влияние на коэффициент прохождения оказывает акустическая волна, прошедшая путь  $IG_2M$  (рис. 1). На втором участке ( $1 \leq kH \leq 2$ ) влияние на коэффициент прохождения оказывает интерференция акустических волн, прошедших путь  $IG_2M$  и  $IG_1M$ . Поэтому на рис. 2 на втором участке можно наблюдать увеличение или



**Рис. 3.** Зависимость коэффициента прохождения по давлению от глубины  $H$  источника и его частоты  $f$  излучения:  $L = 0.5$  м,  $\beta_1 = 11.3^\circ$ ,  $D = 0.1$  м.

уменьшение результирующей амплитуды двух волн. На третьем участке ( $kH \geq 2$ ) подавляющее влияние на коэффициент прохождения оказывает акустическая волна, прошедшая путь  $IG_1M$ . Различный характер кривых на третьем участке можно объяснить тем, что при изменении глубины  $H$  углы скольжения  $\alpha$  и  $\alpha_1$  изменяются, в то время как при изменении частоты они постоянны.

Анализ рис. 3 приводит к похожим выводам, полученным при анализе рис. 2. В определенных диапазонах частоты излучения источника и глубины его расположения происходит значительный рост коэффициента прохождения по давлению. В этих диапазонах основной вклад в акустическое поле в воздухе вносит формула (4). Вне этих диапазонов коэффициент прохождения остается неизменным, т.к. основной вклад вносит формула (3).

Необходимо отметить, что математическая модель не объясняет, какой путь проходит неоднородная плоская волна от источника И до границы раздела Г (рис. 1), т.е. под каким углом  $\beta$  волна падает на границу (в расчетах  $\beta$  был принят равным  $90^\circ$ ). Не определены также механизм трансформации неоднородной плоской волны в однородную плоскую волну и под каким углом  $\beta_1$  происходит дальнейшее распространение однородной плоской волны в воздухе. Чтобы разобраться в этих вопросах, рассмотрим процесс формирования акустического поля сферическим источником.

Акустическое давление и колебательная скорость частиц среды связаны соотношением [18, 19]

$$\frac{p}{v} = \rho c \cos \varphi e^{i\varphi} = \left( \frac{\rho c k r}{\sqrt{1 + k^2 r^2}} \right) e^{i\varphi},$$

где

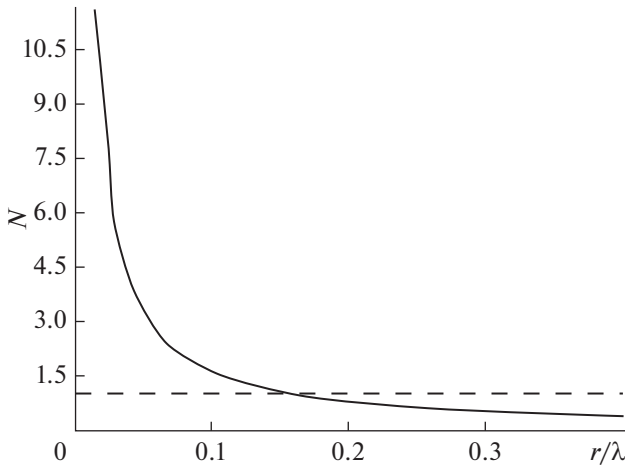


Рис. 4. Отношение скорости частиц в ближнем и дальнем поле как функция расстояния (выраженная в длинах волн) от источника.

$$\varphi = \text{arctg}\left(\frac{1}{kr}\right) = \text{arctg}\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right). \quad (6)$$

В сферической волне колебательная скорость частиц  $v$  запаздывает по фазе на угол  $\varphi$  от давления. Угол  $\varphi$  зависит от волнового расстояния  $kr$  до точки наблюдения. Нам интересен случай  $kr \ll 1$  ( $r \ll \lambda$ ). Тогда  $\cos(\varphi) \rightarrow kr$ ,  $\varphi \rightarrow \pi/2$ , а амплитуда скорости частиц убывает обратно пропорционально квадрату расстояния ( $1/r^2$ ). Область вблизи центра волны, где действует этот закон, называют неволновой зоной или ближним полем, так как в этой области гидродинамические эффекты перетекания жидкости преобладают над волновыми процессами. Размеры этой области определяются неравенством  $kr < 1$  или  $r < \lambda/2\pi \approx \lambda/6$  [18, 19].

Действительная часть выражения для скорости частиц в сферической волне имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Re}(v) = & \left(\frac{p_0}{\rho cr}\right) \cos(\omega t - kr) + \\ & + \left(\frac{p_0}{\omega r^2}\right) \sin(\omega t - kr). \end{aligned} \quad (7)$$

Первое слагаемое в формуле (7) совпадает по фазе с давлением и, следовательно, определяет излучаемую акустическую энергию. Эта часть существенна при больших значениях  $r$ , т.е. в дальнем поле, где амплитуда скорости частиц, как и акустического давления, уменьшается пропорционально увеличению расстояния. Второе слагаемое, убывающее с расстоянием по квадратичному закону, преобладает при малых значениях  $r$ , т.е. в ближнем поле источника. Здесь скорость колебаний частиц отстает по фазе от давления на  $\pi/2$ , и поэтому ближнее поле не вносит вклада в излуча-

емую источником энергию, оно характеризует поток жидкости вблизи источника. Отношение амплитуд колебательной скорости в ближнем и дальнем полях  $N$  совпадает со значением  $\text{tg}(\varphi)$  (формула (6) и рис. 4):

$$N = (p_0/\omega r^2)/(p_0/\rho cr) = 1/kr = \text{tg}\varphi. \quad (8)$$

На малых расстояниях это отношение амплитуд резко уменьшается, на больших расстояниях — уменьшается значительно медленнее. На рис. 4 пунктирной линией показано отношение амплитуд колебательной скорости в ближнем и дальнем полях, равное 1. Таким образом, из рис. 4 видно, что граница ближнего и дальнего полей находится на расстоянии  $0.16r/\lambda$  от источника звука и обладает зависимостью от частоты.

Акустическая волна, распространяющаяся в ближнем поле, не является чисто продольной волной. Ее скорость распространения зависит от фазы  $\varphi$  между колебательной скоростью частиц и акустическим давлением.

Как известно [20], скорость распространения волны можно записать в виде

$$c = \frac{\omega}{k}.$$

Тогда скорость распространения волны в ближнем поле равна

$$c_{\text{б.п.}} = \frac{\omega}{k\sqrt{1 + \text{tg}^2\varphi}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\varphi}}. \quad (9)$$

Из рис. 5 видно, что скорость звука в воде в ближнем поле меняется в широком диапазоне значений (от 0 до 1480 м/с), и при определенных условиях ( $77^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ ) может быть меньше скорости звука в воздухе (340 м/с). Это означает, что при наличии границы раздела вода—воздух вблизи источника, углы скольжения  $\alpha_1$  для акустической волны, прошедшей через границу, не ограничены диапазоном значений от  $0^\circ$  до  $13^\circ$ .

Если достаточно близко приблизить источник акустических волн к границе раздела вода—воздух, то получается, что акустическое поле в воздушной среде формируется в результате преломления акустических волн из ближнего и дальнего полей. Акустическая волна попадает из источника в приемник двумя разными путями (рис 6). Один из них характерен для акустической волны, распространяющейся в дальнем поле (путь ИГ<sub>1</sub>М), другой свойственен акустической волне, распространяющейся в ближнем поле (путь ИГ<sub>2</sub>М).

Рассчитаем геометрическую картину на рис. 6. Примем  $c_{\text{д.п.}} = 1480$  м/с,  $c_1 = 340$  м/с,  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\beta = 78^\circ$ ,  $D = 0.1$  м,  $H = 0.05$  м. Тогда применив закон Снеллиуса, получим  $\alpha_1 = 77^\circ$ ,  $\beta_1 = 27^\circ$ ,  $c_{\text{б.п.}} = 79$  м/с. Согласно формуле (9) и рис 5, по-

добная скорость в ближнем поле возможна, если  $\varphi = 87^\circ$ . Согласно формуле (8) и рис. 4, подобные условия выполняются для частоты 230 Гц.

Можно заметить, что свойства акустической волны в ближнем поле повторяют свойства неоднородной плоской волны [8, 20]. Обе волны не являются чисто продольными волнами, т.к. их колебательные скорости частиц имеют компоненту, перпендикулярную к скорости распространения волн. Картина прохождения однородной и неоднородной плоских волн через плоскую границу раздела воды и воздуха похожа на картину прохождения акустических волн из ближнего и дальнего полей через границу раздела двух сред. Поэтому можно связать коэффициент преломления  $n_1$  неоднородной плоской волны с расстоянием  $r$ , которое она проходит от поверхности источника до границы раздела сред. Используя формулы закон Снеллиуса и формулы (8), (9), запишем

$$n_1 = \frac{\cos\beta}{\cos\beta_1}, \quad n_1 = \frac{\omega r c}{c_1 \sqrt{\omega^2 r^2 + c^2}}, \quad \frac{c}{\omega r} > 1.$$

#### АППАРАТУРА И УСЛОВИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Основная задача экспериментов состояла в измерении уровня акустического давления в воздухе в результате работы сферического источника в воде. В ходе экспериментов был определен коэффициент прохождения по давлению сферических акустических волн  $A_p$  для гладкой границы раздела вода–воздух. Были получены зависимости коэффициента  $A_p$  от двух параметров: а) места расположения излучателя и б) его частоты излучения.

Структурная схема измерительной установки с заглушенным гидроакустическим бассейном показана на рис. 7. Пространственное расположение приемника и излучателя соответствует рис. 1. Акустические оси приемника и излучателя направлены перпендикулярно к границе раздела сред. Измерительная установка состоит из излучающего (блоки 1–4) и приемного (блоки 7–12) тракта.

Генератор 1 работал в импульсном режиме и формировал электрический сигнал с требуемыми параметрами. Длительность импульса на разных этапах эксперимента изменялась от 1 до 20 периодов. С выхода генератора 1 электрический сигнал проходил на вход усилителя мощности 2, а затем усиленный сигнал поступал на вход излучателя 4. Контроль уровня и формы электрического сигнала на излучателе 5 осуществлялся с помощью осциллографа 3, синхронизированного с генератором 1. В качестве источника акустических волн использовался сферический излучатель диаметром 30 мм.

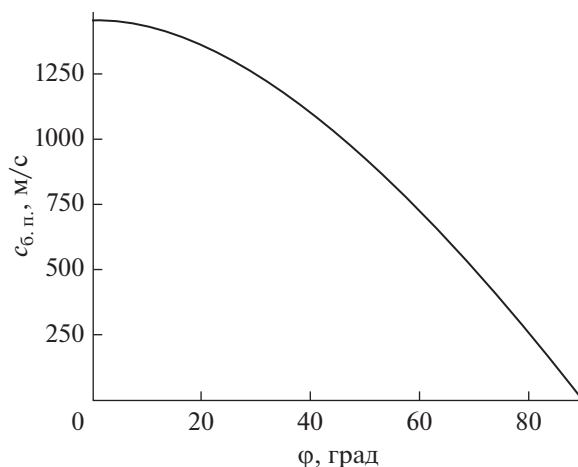


Рис. 5. Зависимость скорости распространения акустической волны в ближнем поле от разности фаз между колебательной скоростью частиц и акустическим давлением.

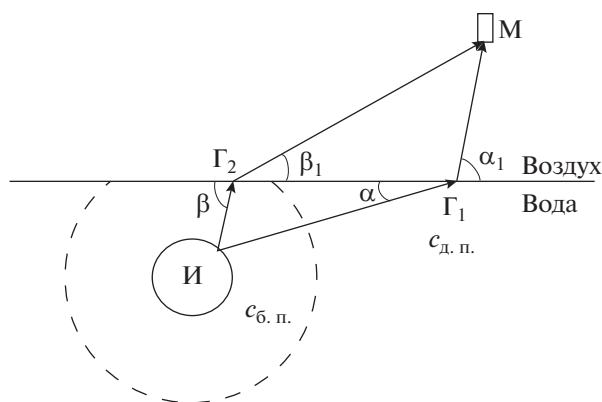


Рис. 6. Прохождение акустических волн из ближнего (ИГ<sub>2</sub>М) и дальнего (ИГ<sub>1</sub>М) полей через плоскую границу раздела двух сред.

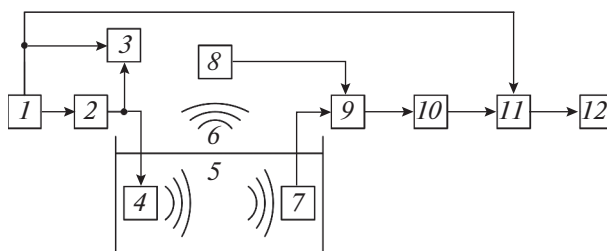


Рис. 7. Структурная схема измерительного стенда. 1 – генератор; 2 – усилитель мощности; 3 – осциллограф; 4 – сферический излучатель; 5 – водная среда; 6 – воздушная среда; 7 – гидрофон; 8 – конденсаторный микрофон с предусилителем; 9 – микрофонный усилитель; 10 – фильтр верхних частот (ФВЧ); 11 – аналогово-цифровой преобразователь (АЦП); 12 – электронная вычислительная машина (ЭВМ).

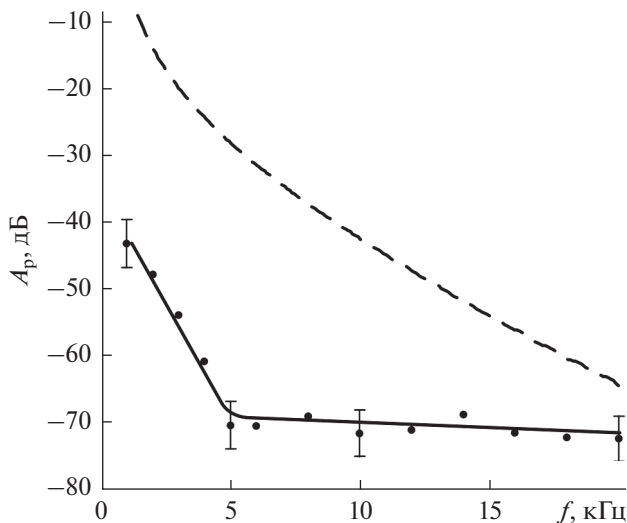


Рис. 8. Зависимость коэффициента прохождения по давлению от частоты излучения:  $H = 0.01$  м,  $L = 0.5$  м,  $D = 0.1$  м,  $f = [1...20]$  кГц.

Излучение и распространение акустического сигнала происходило в водной среде 5 гидроакустического бассейна. Габаритные размеры бассейна не менее  $6 \times 3 \times 2.5$  м. На гидроакустическом бассейне установлены три координатно-поворотных устройства, обеспечивающие перемещение приемника и излучателя в трех плоскостях. Для ослабления возникающих отражений, стенки и дно гидроакустического бассейна покрыты звукопоглощающей резиной.

Гидрофон 7 принимал акустический сигнал в водной среде 6. Гидрофон 7 был расположен на расстоянии 1 м от излучателя и был удален от стенок и дна бассейна. С выхода гидрофона 7 электрический сигнал поступал на вход усилителя 9. С выхода усилителя 9 электрический сигнал поступал на вход ФВЧ 10, а затем на вход первого канала АЦП 11, который был синхронизирован с генератором 1. С выхода АЦП электрический сигнал поступал на вход ЭВМ 12 для записи и обработки результатов.

Визуализация и обработка данных проводились с помощью программы LGraph2 [21]. В программе LGraph2 был создан цифровой полосовой фильтр (ПФ) Баттерворта десятого порядка с регулируемыми частотами среза [22]. Измерение амплитуды сигналов также проводилось с помощью программы LGraph2.

Далее гидрофон 7 заменили микрофоном 8, который осуществлял прием акустического сигнала, прошедшего из водной среды 5 в воздушную среду 6. Микрофон был расположен на высоте 10 см от поверхности воды, его акустическая ось была ориентирована перпендикулярно к границе раздела. С выхода микрофона 8 электриче-

ский сигнал поступал на вход усилителя 9. Дальнейший путь сигнала от микрофона был подобен пути сигнала от гидрофона. Полученные данные позволили определить акустическое давление, создаваемое преломленной волной в воздухе, на расстоянии 10 см от границы раздела.

Согласно работам [11, 12], влияние неоднородных плоских волн на увеличение коэффициента прохождения  $A_p$  в случае точечного источника возникает, только если излучатель находится на глубине, малой по сравнению с длиной волны. Для размерных источников также необходима малость волновых размеров излучателя по сравнению с длиной волны [13]. Поэтому измерения проводились в низкочастотном диапазоне. Источник располагался на глубинах меньше или порядка длины волны от границы раздела двух сред.

Определение коэффициента прохождения условно можно разделить на две части: 1) измерение звукового давления в воде, 2) измерение звукового давления в воздухе. Частота повторения импульсов была выбрана так, чтобы отражения и реверберация успевали затухнуть в интервале между посылками.

Глубина источника в ходе эксперимента изменялась в диапазоне от 1 до 50 см. Данные условия измерений могли привести к многократному преотражению волн между границей раздела сред и поверхностью излучателя. Однако в работе [13] теоретически доказано, что отражения не влияют на явление, если геометрические размеры излучателя меньше длины волны. Также теоретически показано, что не требуется малость размеров источника по сравнению с глубиной его расположения. Это обусловлено особенностями дифракции волн на объектах малого волнового размера [13].

После прохождения акустической волны через границу раздела сред, она распространялась в воздушной среде. Измерения происходили в замкнутом помещении. Использование импульсного режима позволило отделить во времени не только полезные сигналы и сигналы помехи, но и выделить сигналы, образующиеся в результате трансформации неоднородной акустической волны на границе раздела сред в однородную акустическую волну.

## ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 8 представлена зависимость коэффициента прохождения от частоты излучения источника. Излучатель расположен на глубине 0.01 м. Расстояние между акустическими осями излучателя и микрофона равно 0.5 м. Высота микрофона над границей раздела равна 0.1 м. Частоты, излучаемые источником, лежат в диапазоне от 1 до 20 кГц.

На рис. 9 представлена зависимость коэффициента прохождения от глубины расположения

источника. Расположение источника изменяется в диапазоне глубин от 0.01 до 0.5 м. Расстояние между акустическими осями излучателя и микрофона равно 0.5 м. Высота микрофона над границей раздела равна 0.1 м. Частота излучения источника равна 2 кГц.

На рис. 8 и 9 экспериментальные данные обозначены точками. Сплошная линия – результат усреднения экспериментальных данных. Пунктирная линия – результат математического моделирования. Погрешность измерений не более 5.5%.

Из рис. 8 и 9 видно, что результаты эксперимента хорошо согласуются с расчетами. Коэффициент прохождения зависит как от частоты излучения источника, так и от глубины его расположения. Из рис. 8 видно, что чем ниже частота, тем выше уровень акустического давления в воздухе. Экспериментальный коэффициент прохождения меняется более чем на 25 дБ. К примеру, на частоте 1 кГц он равен –45 дБ, а на частоте 20 кГц составляет –74 дБ. Из рис. 9 видно, что чем ближе источник расположен к поверхности, тем выше уровень акустического давления в воздухе. К примеру, на глубине 0.01 м он равен –48 дБ, а на глубине 0.5 м составляет –73 дБ.

Зависимости на рис. 8 и 9 нельзя объяснить в рамках лучевой теории, согласно которой коэффициент прохождения определяется только соотношением акустических сопротивлений соприкасающихся сред. В тоже время, зависимости на рис. 8 и 9 объясняются влиянием неоднородных плоских волн. Из рис. 1 видно, что две акустические волны приходят в точку М различными путями (путь ИГ<sub>1</sub>М и путь ИГ<sub>2</sub>М). Согласно работам [8, 10] фазовая скорость неоднородной плоской волны на участке ИГ<sub>2</sub> всегда меньше фазовой скорости однородной плоской волны на участке ИГ<sub>1</sub>. Таким образом, время прихода двух акустических сигналов в точку М будет различно. Проанализируем сигналы, которые принимает микрофон.

На рис. 10а показана осциллограмма сигнала частотой 5 кГц, длительностью импульса  $T = 1$  мс при условиях  $H = 0.01$  м,  $L = 0.5$  м,  $D = 0.1$  м. Из рис. 10а видно, что в точку М пришло два сигнала одинаковой частоты. Первый сигнал лежит в интервале от 0.65 до 1.6 мс. Далее идет интервал интерференции сигналов, который примерно занимает промежуток времени от 1.6 до 1.7 мс. Второй сигнал лежит в интервале от 1.7 до 2.8 мс. Амплитуда второго сигнала почти в 2.5 раза больше, чем у первого сигнала. Сигнал в интервале от 0 до 0.7 мс можно отнести к электромагнитной наводке и не учитывать.

На рис. 10б показана осциллограмма сигнала частотой 2 кГц, длительностью импульса  $T = 2.5$  мс при условиях  $H = 0.01$  м,  $L = 0.5$  м,  $D = 0.1$  м. Из

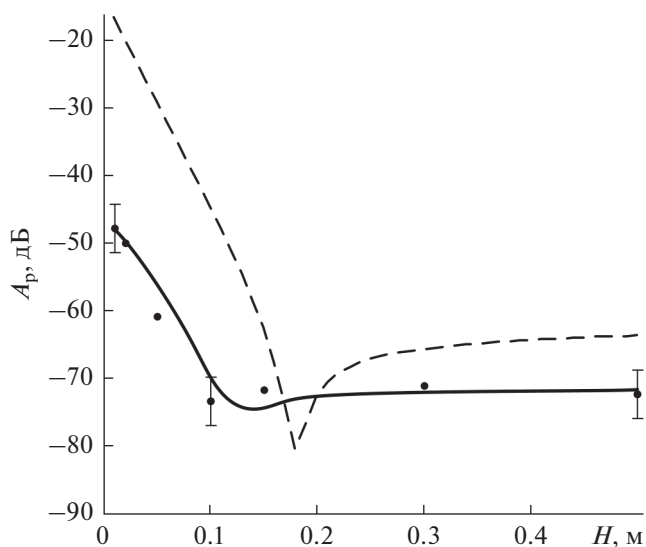


Рис. 9. Зависимость коэффициента прохождения по давлению от глубины расположения источника:  $H = [0.01 \dots 0.5]$  м,  $L = 0.5$  м,  $D = 0.1$  м,  $f = 2$  кГц.

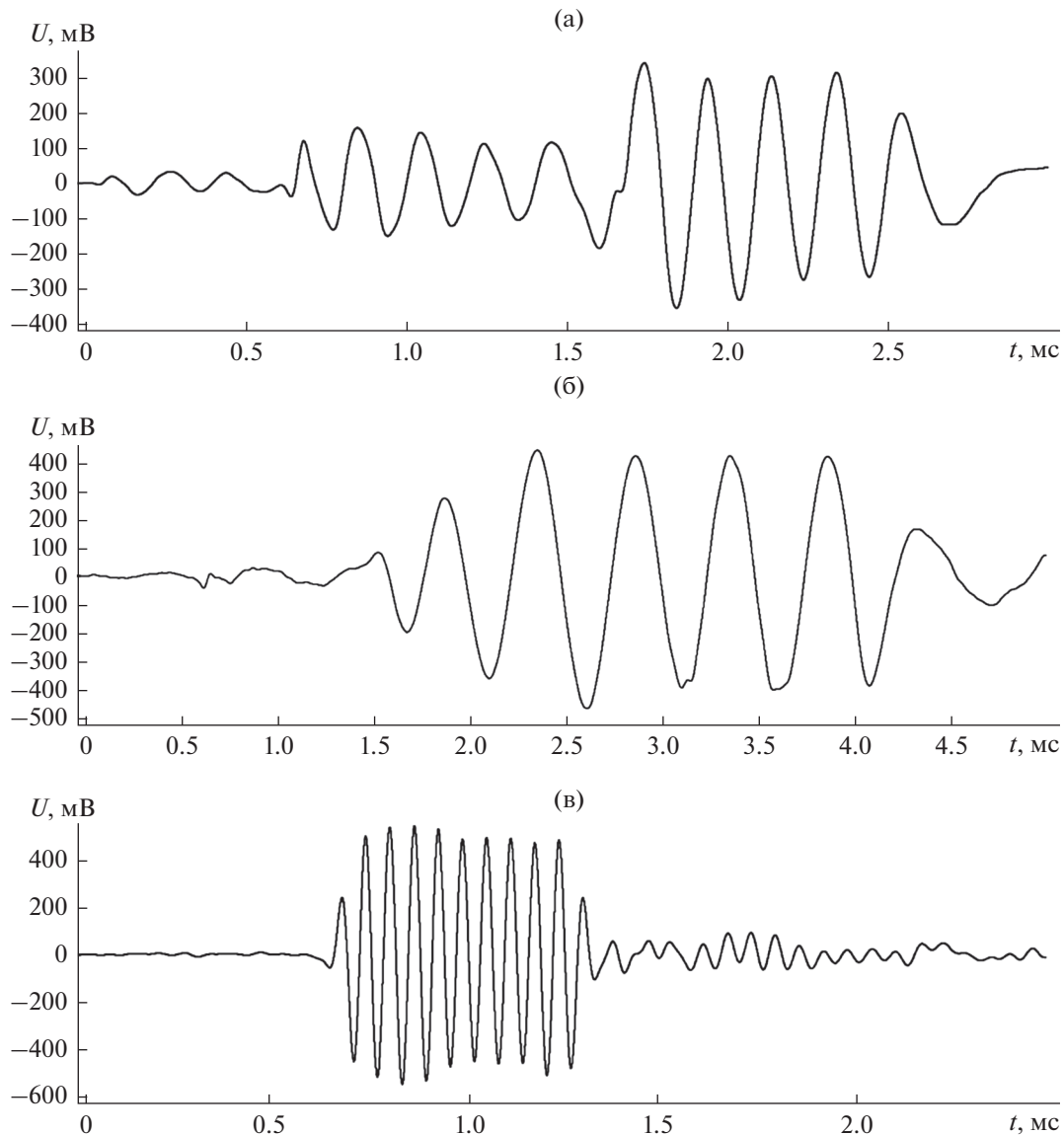
рис. 10б видно, что в точку М пришло два сигнала одинаковой частоты. Первый сигнал лежит в интервале от 0.65 до 1.6 мс. Второй сигнал лежит в интервале от 1.6 до 4.7 мс. Интервал, на котором происходит интерференция двух сигналов, визуально определить невозможно, т.к. амплитуда второго сигнала существенно больше, чем у первого сигнала.

На рис. 10в показана осциллограмма сигнала частотой 16 кГц, длительностью импульса  $T = 0.625$  мс при условиях  $H = 0.01$  м,  $L = 0.5$  м,  $D = 0.1$  м. Из рис. 10в видно, что в точку М пришло два сигнала одинаковой частоты. Первый сигнал лежит в интервале от 0.65 до 1.3 мс. Второй сигнал лежит в интервале от 1.6 до 2.2 мс. Интервал, на котором происходит интерференция двух сигналов, отсутствует.

Из рис. 10а–10в видно, что соотношение амплитуд первого и второго сигналов зависит от частоты. Чем она выше, тем меньше уровень второго сигнала относительно первого. На низких частотах амплитуда второго сигнала в несколько десятков раз превосходит амплитуду первого сигнала. На высоких частотах второй сигнал практически отсутствует. Такое поведение второго сигнала позволяет предположить, что оно образуется на границе раздела сред в результате трансформации неоднородной волны в однородную волну.

Некоторые расхождения теоретических и экспериментальных зависимостей можно частично объяснить особенностью методики оценки экспериментальных данных. Если теоретические расчеты являются результатом интерференции двух волн, то при оценке экспериментальных





**Рис. 10.** (а) – Сигнал в точке М ( $f = 5$  кГц,  $H = 0.01$  м,  $L = 0.5$  м,  $D = 0.1$  м,  $T = 1$  мс); (б) – сигнал в точке М ( $f = 2$  кГц,  $H = 0.01$  м,  $L = 0.5$  м,  $D = 0.1$  м,  $T = 2.5$  мс); (в) – сигнал в точке М ( $f = 16$  кГц,  $H = 0.01$  м,  $L = 0.5$  м,  $D = 0.1$  м,  $T = 0.625$  мс).

данных учитывалась только одна волна, обладающая наибольшей амплитудой.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты показывают, что коэффициент прохождения по давлению сферических акустических волн зависит как от места расположения источника, так и от его частоты изучения. При расположении источника на расстоянии меньше длины волны от границы раздела сред акустическое поле в воздухе формируют две акустические волны. Вклад первой волны (однородной) постоянен, вклад второй волны (трансформировавшейся из неоднородной) меняется в за-

висимости от волнового расстояния от источника до границы. Полученные данные хорошо соотносятся с теоретическими и экспериментальными результатами других авторов [11–13], исследовавших влияние неоднородных плоских волн на прохождение звука из воды в воздух.

Возрастание коэффициента прохождения из-за влияния неоднородных плоских волн может найти применение в ряде прикладных задач. В-первых, явление можно использовать в системах связи и навигации. Появляется возможность напрямую передавать информацию от подводного аппарата или гидроакустической станции на летательный аппарат при помощи акустических волн, т.е. подводному аппарату не нужно всплы-

вать или использовать радиогидроакустический буй [23]. Вторая область применения явления – мониторинг подводной сейсмической активности или других источников низкочастотного акустического излучения при помощи групп беспилотных летательных аппаратов.

Исследования проводились при финансовой поддержке Южного федерального университета.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Calvo D.C., Nicholas M., Orris G.J. Experimental verification of enhanced sound transmission from water to air at low frequencies // *J. Acoust. Soc. Am.* 2013. V. 134. P. 3403–3408.
2. Guo Y.-C., Lian C.-F., Zhang X.-Z., Zhao Y.-B. Influences of environmental factors on low frequency abnormal sound transmission through sea-air interface // *Acta Physica Sinica.* 2016. V. 64. № 14. P. 144301-1–144301-15.
3. Woods D.C., Bolton J.S., Rhoads J.F. On the use of evanescent plane waves for low-frequency energy transmission across material interfaces // *J. Acoust. Soc. Am.* 2015. V. 138. № 4. P. 2062–2078.
4. Wehner D., Landro M., Amundsen L., Westerdahl H. Frequency-depth-dependent spherical reflection response from the sea surface – a transmission experiment // *Geophys. J. Int.* 2018. V. 214. № 2. P. 1206–1217.
5. Шаганов В.Ш., Сарапулова В.В. Особенности преломления и отражения звука на границе пузырьковой жидкости // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61. № 1. С. 40–48.
6. Скворцов Б.В., Солнцева А.В., Борминский С.А., Родионов Л.В. Теоретические основы дистанционного акустического контроля уровня и плотности жидких контактирующих сред на границе раздела // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 6. С. 731–737.
7. Легуша Ф.Ф., Клубина К.А., Никущенко Д.В., Рытов Е.Ю. Излучение вторичных звуковых волн поверхностью жидкости, контактирующей с газообразной средой // *Морские интеллектуальные технологии.* 2018. № 1–2. С. 109–113.
8. Бреховских Л.М. Отражение и преломление сферических волн // *Успехи физ. наук.* 1949. Т. 38. № 1. С. 1–42.
9. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: АН СССР, 1957. 503 с.
10. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
11. Godin O.A. Low-frequency sound transmission through a gas–liquid interface // *J. Acoust. Soc. Am.* 2008. V. 123. P. 1866–1879.
12. Godin O.A. Sound transmission through water–air interfaces: new insights into an old problem // *Contemporary Physics.* 2008. V. 49. P. 105–123.
13. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Годин О.А. Эффект аномальной прозрачности границы вода–воздух для объемного излучателя // *Акуст. журн.* 2013. Т. 59. № 1. С. 8–18.
14. Волощенко А.П., Тарасов С.П. Влияние неоднородных волн на прохождение низкочастотного звука через границу раздела вода–воздух // *Известия ЮФУ. Технические науки.* 2012. Т. 134. № 9. С. 201–206.
15. Волощенко А.П., Тарасов С.П. Эффект аномальной прозрачности границы раздела жидкость–газ для звуковых волн // *Акуст. журн.* 2013. Т. 59. № 2. С. 186–192.
16. Волощенко А.П., Тарасов С.П. Исследование неоднородных волн вблизи границ раздела сред // *Инженерный вестник Дона.* 2013. Т. 25. № 2. <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1652>
17. Волощенко А.П., Тарасов С.П. Исследование неоднородных волн в целях экологического мониторинга водных пространств // *Известия ЮФУ. Технические науки.* 2013. Т. 146. № 9. С. 123–129.
18. Скучик Е. Основы акустики. Пер. с англ. В 2-х томах. Под ред. Лямшева Л.М. Т. 2. М.: Мир, 1976. 520 с.
19. Свердлин Г.М. Прикладная гидроакустика. Учеб. пособие. 2-е изд., пер. и доп. Л.: Судостроение, 1990. 320 с.
20. Исакович М.А. Общая акустика. Учебное пособие. М.: Наука, 1973. 496 с.
21. <http://www.lcard.ru/products/software/lgraph> (дата обращения 05.11.2019)
22. <http://www.lcard.ru/plugins/digfilters> (дата обращения 05.11.2019)
23. Тарасов С.П., Волощенко А.П., Плешков А.Ю. Способ акустической связи между подводными и надводными робототехническими средствами // *Известия ТулГУ. Технические науки.* 2015. № 11(2). С. 169–178.

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ  
И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.23

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ  
КЛИНЬЯХ С РАЗНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

© 2020 г. А. И. Коробов<sup>а</sup> \*, М. Ю. Изосимова<sup>а</sup>, А. А. Агафонов<sup>а</sup>,  
А. И. Кокшайский<sup>а</sup>, Р. А. Жостков<sup>б</sup>

<sup>а</sup>МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет,  
Ленинские горы 1, стр. 2, Москва, 119234 Россия

<sup>б</sup>Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН,  
Б. Грузинская ул. 10, стр. 1, Москва, 123995 Россия

\*e-mail: aikor42@mail.ru

Поступила в редакцию 18.12.2019 г.

После доработки 18.12.2019 г.

Принята к публикации 24.12.2019 г.

Представлены результаты численного моделирования и экспериментальных исследований особенностей распространения клиновых упругих волн в цилиндрических клиньях с положительной и отрицательной кривизной в диапазоне частот 100–600 кГц. Показано, что клиновые волны в таких структурах обладают дисперсией и их локализация у ребра клина сильнее, чем у прямых клиньев. Приведены результаты исследования распространения клиновых волн для случаев, когда внутренняя поверхность клина граничит с жидкостями с различной вязкостью (вода, автомобильное масло марки по SAE 10W-30, 86% водный раствор глицерина).

*Ключевые слова:* клиновые упругие волны, цилиндрический клин, лазерная виброметрия, численное моделирование

DOI: 10.31857/S0320791920030028

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к клиновым упругим волнам (КУВ) начал активно проявляться после публикаций двух независимых исследовательских групп под руководством Лагасса и Марадудина [1–4] с целью исследования возможности их применения в акустоэлектронике. Проведенные численные расчеты показали, что вдоль ребра линейного твердотельного клина с углом раскрытия от 0° до 90° могут распространяться несколько антисимметричных (изгибных) локализованных и одна симметричная мода КУВ. В [3] была предложена эмпирическая формула для оценки скорости антисимметричных мод  $V_n$ :

$$V_n \approx V_R \sin n\theta, \quad n_{\max}\theta < 90^\circ. \quad (1)$$

Здесь и далее  $V_R$  – скорость поверхностной волны на боковой поверхности клина,  $n$  – номер моды КУВ,  $\theta$  – угол раскрытия клина.

Многочисленные экспериментальные исследования [5–9] антисимметричных мод КУВ в прямых изотропных бездефектных клиньях показали высокую степень локализации энергии КУВ у ребра клина. (В работе прямыми считаются клинья, у которых ребро клина представляет прямую линию.) Была также экспериментально подтвер-

ждена эмпирическая формула (1) для оценки скорости распространения мод КУВ в прямых идеальных клиньях, и было установлено отсутствие дисперсии скорости мод КУВ в таких клиньях.

Создание и использование оптических методов генерации и регистрации акустических волн в твердотельных клиньях расширило диапазоны исследуемых частот и увеличило точность определения амплитуды колебательной скорости и скорости распространения КУВ. Совершенствование экспериментальных методов исследования КУВ позволяет использовать их для неразрушающего контроля [10–14].

Однако необходимо учитывать, что большинство клиновидных структур, которые нуждаются в неразрушающем контроле (ребра лопасти, крыло, кромки режущих инструментов (сверла, буры и др.)), не являются прямыми идеальными клиньями. Потому исследование особенностей распространения КУВ в клиньях с другой геометрией ребра клина, например, с усечением и изгибом ребра клина, является актуальной задачей.

Следующей после прямого клина “по простоте геометрии” является структура, ограниченная конической поверхностью с одной стороны и цилиндрической с другой. В такой структуре образу-

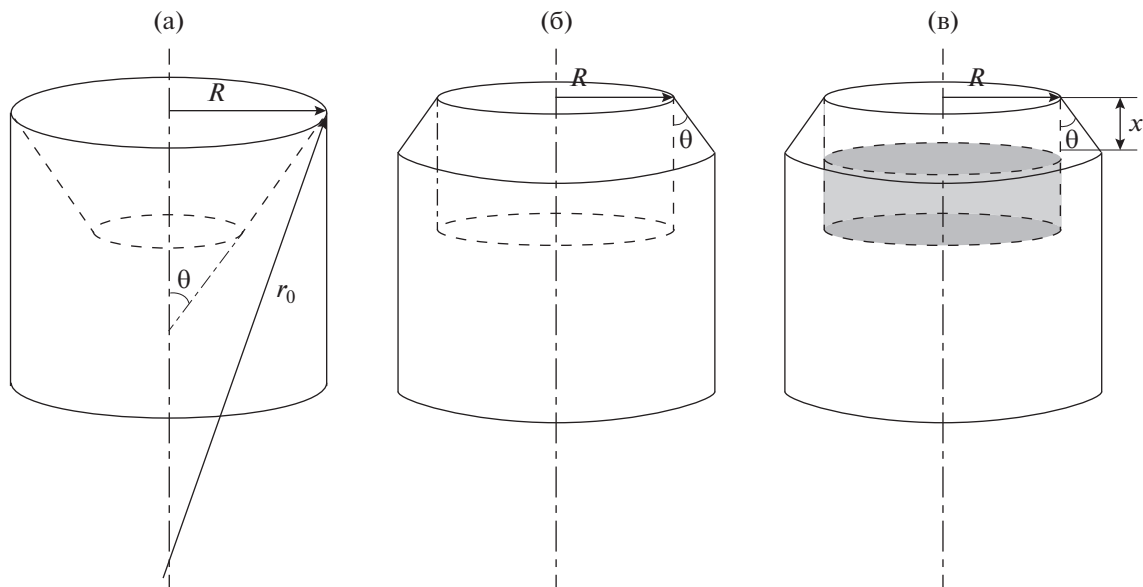


Рис. 1. (а) – Цилиндрический клин с положительной кривизной; (б) – цилиндрический клин с отрицательной кривизной; (в) – цилиндрический клин с жидкостью.

ется клин, ребром которого является окружность с радиусом  $R$  [15–19]. Так как в таком клине появился размерный параметр – радиус кривизны  $R$ , величина которого может быть сравнима с длиной волны  $\lambda$ , то упругие волны в цилиндрическом клине обладают дисперсией. Используя лучевой подход, в работе [16] В.В. Крылов аналитически рассчитал дисперсию скорости мод КУВ в таких структурах (рис. 1а, 1б) в случае малых углов и при условии, что радиус кривизны значительно превышает длину волны:

$$V_{\text{cyl}} = V_1 \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{\beta_0 r_0} \right], \quad (2)$$

где  $V_1$ ,  $\beta_0 = \omega/V_1$  – скорость и волновой вектор первой моды КУВ в прямолинейном клине соответственно,  $r_0 = R/\sin(\theta/2)$  – радиус кривизны клина (имеет отрицательное значение в случае клина, ограниченного внешней конической поверхностью),  $\theta$  – угол раскрытия клина,  $R$  – радиус ограничивающего цилиндра.

К настоящему времени проведены исследования, посвященные влиянию усечения и искривления клина на дисперсию скорости КУВ. Были численно и экспериментально исследованы дисперсионные свойства дискообразных клиньев [15] и цилиндрических клиньев, с положительной кривизной [16–19]. В работе [17] методом компьютерного моделирования исследована локализация первой моды клиновой волны в цилиндрическом клине с положительной кривизной.

В настоящей работе приведены результаты численного моделирования и экспериментальных исследований особенностей распростране-

ния антисимметричной моды КУВ в цилиндрических клиньях как с положительной, так и отрицательной кривизной, в частности, локализации КУВ у ребра клина и дисперсии скорости КУВ (рис. 1а, 1б). Кроме того, приведены результаты исследования распространения КУВ для случаев, когда внутренняя поверхность клина граничит с жидкостями с различной вязкостью (вода, автомобильное масло марки по SAE 10W-30, 86% водный раствор глицерина) (рис. 1в).

## МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Трехмерное полноволновое численное моделирование распространения КУВ в цилиндрических образцах заданной конфигурации проведено методом конечных элементов с помощью специально разработанного программного обеспечения, созданного в пакете COMSOL Multiphysics 5.4 (лицензия № 9600341) с подключенными модулями “Акустика” и “Структурная механика” [20].

В рамках линейной теории с использованием уравнения движения в форме Ламэ и закона Гука для твердой среды и системы гидродинамических уравнений для вязкой жидкости смоделировано распространение КУВ в цилиндрических клиньях с положительной и отрицательной кривизной, в том числе при контакте одной из боковых поверхностей клина с жидкостями, обладающими различной вязкостью. Параметры использованных материалов приведены в таблице.

Для проведения экспериментальных исследований из цилиндрического прутка сплава алюминия Д16 диаметром 98 мм было изготовлено два

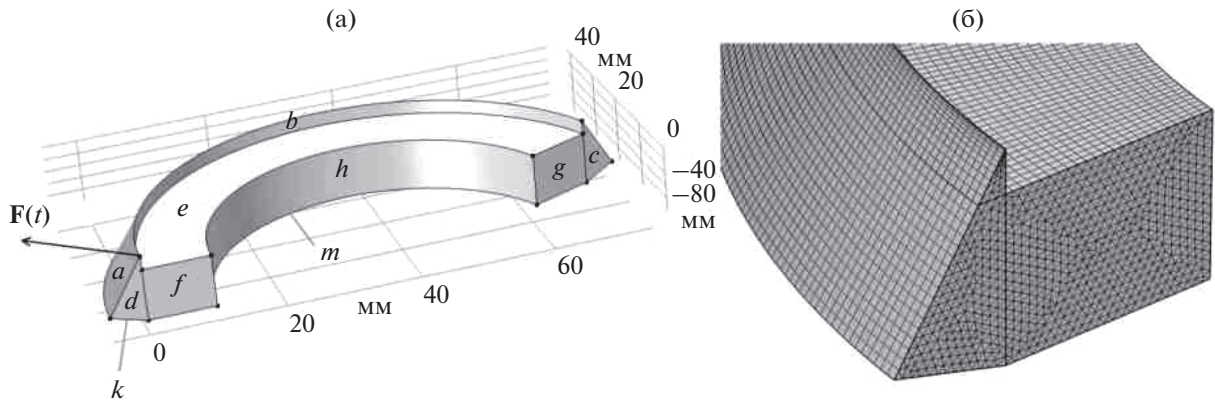


Рис. 2. (а) – Граничные условия:  $a, b$  – свободная граница твердого тела;  $c, k$  – слабоотражающее условие;  $d, f$  – условие симметрии;  $e$  – свободная граница жидкости;  $g, h, m$  – условие излучения плоской волны (для удобства обозначений показана область, в полтора раза превышающая реально использовавшуюся); (б) – фрагмент сетки конечных элементов.

цилиндрических клина с примерно одинаковыми углами раскрытия: угол клина с положительной кривизной –  $32.78^\circ$ , а клина с отрицательной кривизной –  $32.06^\circ$ . Диаметр ограничивающего цилиндра в клине с отрицательной кривизной составлял 73.2 мм, а с положительной кривизной был равен 98 мм (рис. 1а, 1б). При численном моделировании распространения КУВ в образцах использовались геометрические размеры изготовленных клиньев и упругие параметры сплава Д16: плотность –  $2775.3 \text{ кг/м}^3$ , модуль Юнга – 76 ГПа, коэффициент Пуассона – 0.33.

Жидкости, использовавшиеся для заполнения клиньев, имели различную вязкость и плотность: вода (плотность –  $1000 \text{ кг/м}^3$ , скорость звука – 1490 м/с, кинематическая вязкость –  $0.894 \text{ мм}^2/\text{с}$ ), 86% водный раствор глицерина (измеренная плотность –  $1221 \pm 0.5 \text{ кг/м}^3$ , измеренная скорость звука –  $1950 \pm 20 \text{ м/с}$ , динамическая вязкость  $0.0926 \text{ Па с}$  [21]) и машинное масло марки по SAE 10W-30 (измеренная плотность  $890 \pm 1 \text{ кг/м}^3$ , кинематическая вязкость –  $146.5 \text{ мм}^2/\text{с}$  [22], измеренная скорость звука –  $1420 \pm 20 \text{ м/с}$ ). Все значения приведены при температуре  $25^\circ\text{C}$  и атмосферном давлении.

Граничные условия модели соответствовали свободным внешним граням клина ( $a, b$  на рис. 2а), а нижняя часть ( $k$  на рис. 2а) – слабо отражающему условию для практически полного исключения влияния отраженного сигнала, поскольку для экономии вычислительных ресурсов численно моделировалась только верхняя часть клина. Такой подход не искажает получаемые результаты, поскольку изучаемые КУВ не испытывают влияния нижней части клина. Для этой же цели протяженность модели ограничивалась 10 длинами волн, а на противоположной от источника торцевой поверхности клина ( $c$  на рис. 2а) задано слабоотражающее условие, при этом на ближней торцевой поверхности ( $d$  на рис. 2а) задано усло-

вие симметрии. При наличии жидкости ее верхняя поверхность ( $e$  на рис. 2а) также считалась свободной, а на ближней торцевой поверхности ( $f$  на рис. 2а) задано условие, аналогичное соответствующей грани клина. На дальней торцевой поверхности ( $g$  на рис. 2а), нижней ( $m$  на рис. 2а) и внутренней поверхности жидкости ( $h$  на рис. 2а) наложено условие излучения плоских волн, приводящее к исключению отраженных помеховых сигналов. На контакте жидкой и твердой сред задано равенство нормальных и отсутствие тангенциальных напряжений. Точечный источник представляет собой модулированную окном Ханнинга шириной  $2/F$  гармоническую силу амплитудой 1 Н, приложенную к ребру клина в точке пересечения с его ближней торцевой поверхностью и направленную вдоль линии, перпендикулярной его ребру и биссектрисе.

Решение задачи проводилось во временной области, длительность которой определялась временем, необходимым КУВ для прохождения всей модели. Размер конечных элементов, имевших форму четырех- и треугольных призм (рис. 2б), был выбран таким образом, чтобы ошибка расчетов не превышала 0.5%, причем при приближении к ребру клина сетка сгущалась для повышения точности расчетов. Шаг по времени удовлетворял условию Фридрихса–Леви–Куранта с двойным запасом прочности [23]. Пример результатов расчета приведен на рис. 3.

При обработке использовались временные записи смещения, полученные виртуальными датчиками, расположенными вдоль ребра клина (рис. 3б). Фазовая скорость КУВ определялась как отношение расстояния между двумя виртуальными датчиками вдоль ребра клина к интервалу времени, на который смещается максимальный пик на записях этих датчиков.

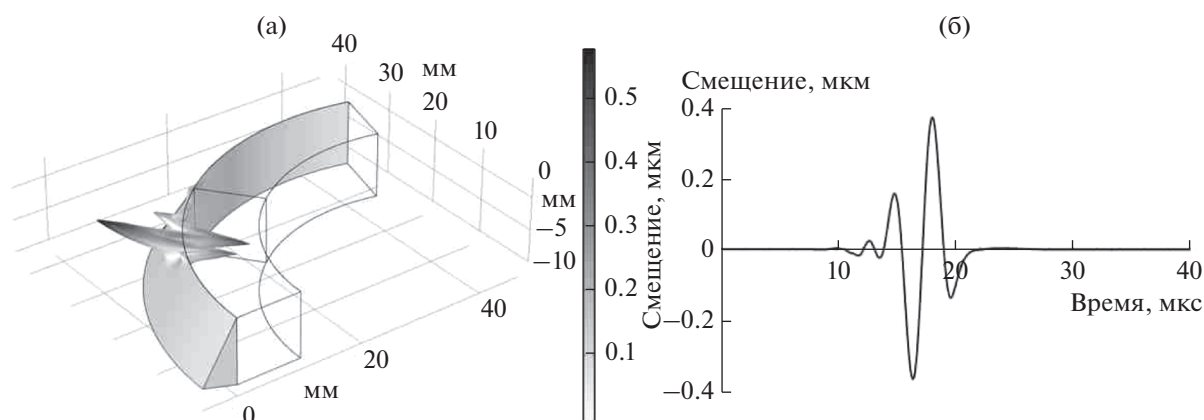


Рис. 3. (а) – Пример деформации клина через 0.05 мс после начала воздействия силового источника (деформация увеличена в 20 тыс. раз); (б) – пример записи смещения частиц клина виртуальным датчиком.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Экспериментальные исследования проводились с использованием модернизированной компьютеризированной ультразвуковой установки, разработанной для ранее проводимых исследований прямых клиньев (рис. 4) [24]. Для генерации зондирующего сигнала КУВ в исследуемом образце (1) использовался ультразвуковой измерительный комплекс RPR-4000 (2), работающий в импульсном режиме. Возбуждение и прием ультразвуковых КУВ проводилось методом point-to-point [25] с помощью системы из трех точечных преобразователей (3 – излучающий преобразователь, 4 – принимающие преобразователи с коническими концентраторами). Время прохождения импульса КУВ регистрировалось с помощью цифрового осциллографа (5) DS09104A (Agilent). Сканирующий лазерный виброметр PSV-300 (Polytec, Германия) (6) позволял визуализировать колебания поверхности клина. Скорость КУВ определялась по задержке прохождения импульса

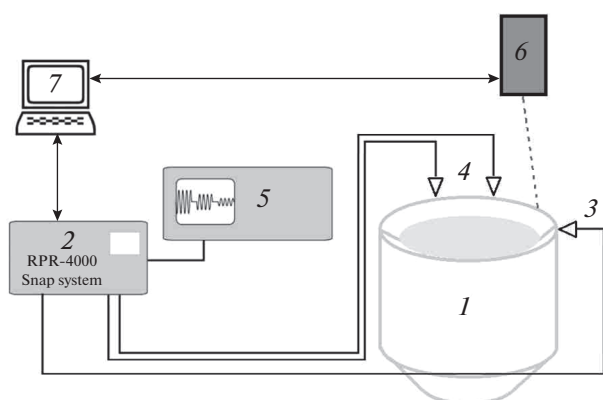


Рис. 4. Экспериментальная установка.

КУВ между двумя принимающими преобразователями, а также на основании визуализации распространения колебаний ребра клина лазерным виброметром (рис. 5). Кроме того, с помощью лазерного виброметра проводилось измерение распределения амплитуды КУВ перпендикулярно ребру клина. Эти измерения позволили оценить степень локализации первой антисимметричной моды КУВ у ребра клина. Управление ультразвуковой установкой и регистрация экспериментальных результатов проводились с помощью ПК (7).

Экспериментальные исследования в образцах клиньев проводились в диапазоне частот от 100 до 600 кГц. Выбор частотного диапазона обуславливался геометрическими размерами образцов и обеспечивал наблюдение дисперсии клиновых волн в указанном диапазоне. Длительность зондирующего электрического импульса составляла 3–5 периодов зондирующей волны, частота повторения от 10 мс до 1 с в зависимости от режима

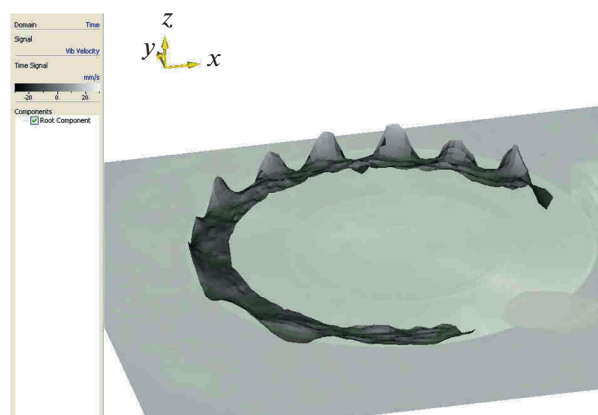


Рис. 5. Визуализация распространения КУВ в цилиндрическом клине с положительной кривизной с помощью лазерного виброметра PSV-300 (Polytec).

**Таблица 1.** Параметры материалов, заданные при численном моделировании

Материал	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Скорость продольной волны, м/с	Скорость поверхностной волны, м/с	Динамическая вязкость, Па с	Объемная вязкость, Па с
Дюралюминий Д16	2775.3	6370	2950	—	—
Вода	1000	1490	—	0.0009	0.0025
Автомобильное масло	890	1420	—	0.1	0.28
86% водный раствор глицерина	1221.0	1950	—	0.09	0.26

измерения. Для исключения влияния встречных волн с одной стороны от источника сигнала на ребро клина помещался кусочек пластилина.

### РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Предварительно экспериментально было измерено значение скорости поверхностной акустической волны (ПАВ) в образце из сплава алюминия Д16, из которого были изготовлены клинья. Скорость ПАВ была равна  $2950 \pm 30$  м/с.

На рис. 6 представлены дисперсионные кривые, рассчитанные по формуле (2) и на основании численного моделирования, а также полученные экспериментально для обоих образцов без жидкости. Экспериментальные значения находятся в хорошем соответствии с результатами моделирования. Отклонения экспериментальных значений скорости КУВ в случае цилиндрического клина с положительной кривизной объясняются усечением в образце экспериментального клина, сравнимым на высоких частотах с длиной волны. Действительно, если рассматривать усечение клина как скругление, то получается, что по мере приближения к ребру клина угол раскрытия клина увеличивается, и скорость высокочастотных импульсов увеличивается, стремясь к скорости волн Рэлея.

Согласно проведенному моделированию, амплитуда антисимметричной моды КУВ также, как и в случае прямого клина, убывает экспоненциально в направлении перпендикулярно ребру клина в зависимости от расстояния от ребра клина:

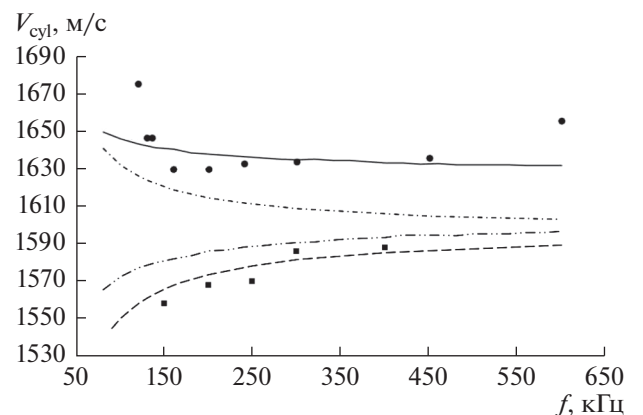
$$A = A_0 \exp\left(-B \frac{r}{\lambda}\right), \quad (3)$$

где  $A$  и  $A_0$  — амплитуды колебательной скорости, перпендикулярной радиусу кривизны клина  $r_0$  на расстоянии  $r$  от его ребра и на самом ребре соответственно,  $r$  — расстояние от ребра клина вдоль радиуса кривизны клина,  $\lambda$  — длина волны КУВ,  $B$  — безразмерный коэффициент, характеризующий степень локализации КУВ у ребра клина.

При этом коэффициент  $B$  в показателе экспоненты определяется только формой и материалом клина и не зависит от частоты КУВ. На рис. 7 приведены результаты моделирования и экспери-

ментального измерения локализации КУВ в клине как с положительной, так и с отрицательной кривизной в зависимости от частоты. Амплитуда сигнала нормировалась на ее максимальное значение, а расстояние от вершины клина — на длину клиновой волны. Коэффициент  $B$  для клина с положительной кривизной был равен  $B = 5.176$ , а для клина с отрицательной кривизной  $B = 4.843$ . Это указывает на то, что локализация КУВ у ребра клина в цилиндрических клиньях с положительной кривизной выше, чем в клине с отрицательной кривизной. При этом в цилиндрических клиньях локализация КУВ больше, чем в прямом клине из сплава Д16, для которого  $B = 2.5$  [24]. Как видно на рис. 7, результаты численного моделирования и экспериментов находятся в хорошем согласии.

Одновременно с измерением скорости КУВ регистрировалась амплитуда колебательной скорости по мере распространения импульса вдоль ребра клина. Изменений амплитуды в пределах погрешности измерений зафиксировано не было.



Положительная кривизна: --- Аналитический расчет  
● Эксперимент  
— Моделирование  
Отрицательная кривизна: --- Аналитический расчет  
■ Эксперимент  
--- Моделирование

**Рис. 6.** Дисперсионные кривые для цилиндрических клиньев с положительной и отрицательной кривизной.

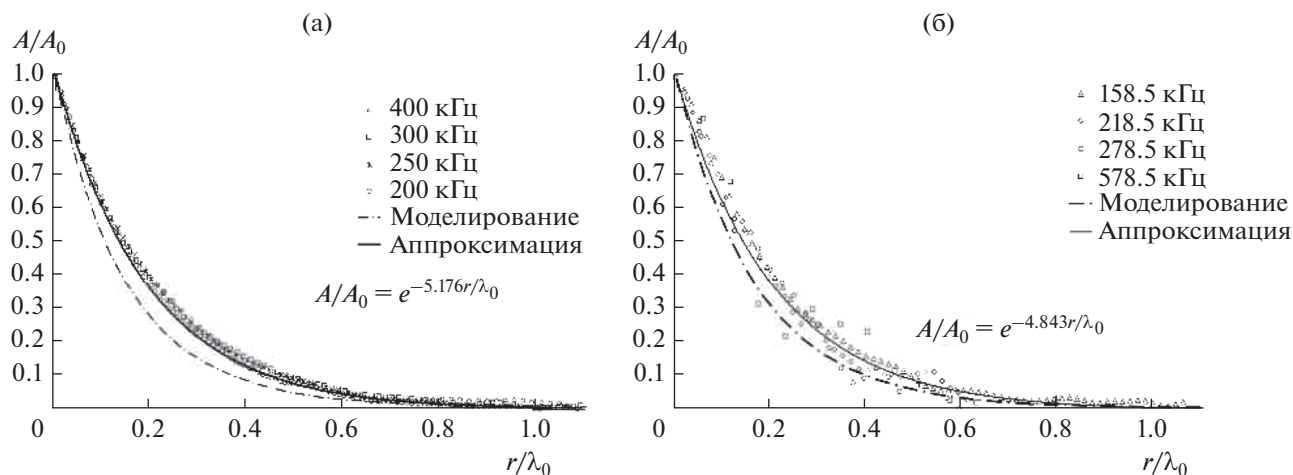


Рис. 7. Локализация КУВ в цилиндрических клиньях с (а) – положительной и (б) – отрицательной кривизной.

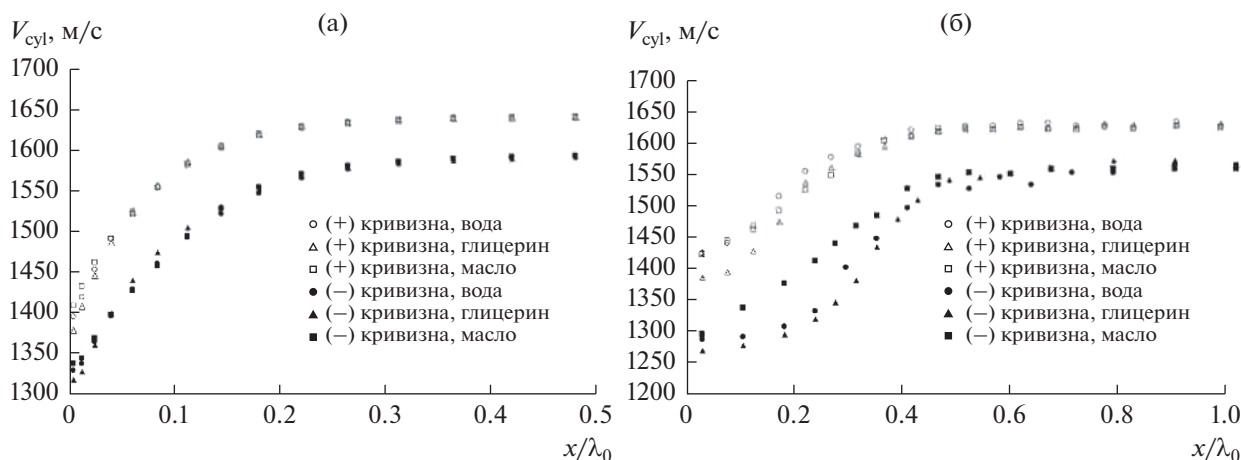


Рис. 8. Зависимость скорости КУВ от расстояния до поверхности жидкости (частота 250 кГц): (а) – моделирование; (б) – эксперимент.

Дальнейшие исследования проводились с образцами цилиндрических клиньев, заполненными жидкостями с различной вязкостью и плотностью. Это привело к различным граничным условиям на внутренней и внешней сторонах клина. Результаты численного моделирования и экспериментального исследования зависимости скорости КУВ от уровня жидкости, заполняющей цилиндрический клин, приведены на рис. 8. Эти эксперименты проведены на частоте 250 кГц. Уровень жидкости оценивался в долях длины волны от ребра клина ( $x/\lambda_0$ ) по вертикальной поверхности, где  $\lambda_0$  – длина КУВ в случае отсутствия жидкости в образце, при этом значению 0 соответствует уровень жидкости у вершины клина, а увеличение значения  $x/\lambda_0$  соответствует понижению уровня жидкости (рис. 1в). Как видно на рис. 8, при уменьшении области клина, свободной от жидкости, скорость КУВ начинает резко уменьшаться до значений ниже скорости звука в

жидкости. При этом заметное влияние жидкости на величину скорости КУВ происходит, как и следовало ожидать, в области локализации клиновидной волны. С ростом плотности жидкости значение минимальной скорости КУВ увеличивается, при этом логично, что при увеличении параметра  $x/\lambda_0$  значения скоростей КУВ для разных жидкостей сравниваются. При исследовании зависимости скорости КУВ от величины уровня жидкости заметного влияния изменения вязкости жидкости не обнаружено. Более медленное изменение скорости КУВ при экспериментальных исследованиях по сравнению с результатами численного моделирования объясняется наличием небольшого мениска жидкости у поверхности клина.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе экспериментально и численным моделированием были исследованы особенности



распространения упругих волн в цилиндрических клиньях. Для проведения экспериментальных исследований из сплава алюминия Д16 были изготовлены два образца цилиндрических клиньев с положительной и отрицательной кривизной. Численным методом было смоделировано распространение КУВ в цилиндрических образцах с различной конфигурацией клиньев и размерами, соответствующими изготовленным. Модернизированы экспериментальная установка и методика для возбуждения и регистрации КУВ в этих клиньях. Методом лазерной интерферометрии были визуализированы КУВ и измерена их локализация у ребра клина. Установлено, что КУВ в цилиндрических клиньях локализованы сильнее по сравнению с локализацией КУВ в прямом клине. Цилиндрический и прямой клинья были изготовлены из одного материала — сплава алюминия Д16. Импульсным ультразвуковым методом в интервале частот 100–600 кГц в изготовленных образцах клиньев обнаружена дисперсия скорости КУВ. Были проведены исследования зависимости скорости КУВ от уровня жидкости, заполняющей цилиндрический клин. Установлено, что по мере увеличения уровня жидкости в области локализации КУВ их скорость в цилиндрическом клине уменьшается.

Результаты численного моделирования, аналитических расчетов по формуле (2) и экспериментальных исследований, проведенных в работе, находятся в удовлетворительном согласии.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 17-02-01123) и гранта Президента Российской Федерации для поддержки научных школ № НШ-5545.2018.5.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lagasse P.E.* Analysis of a dispersion free guide for elastic waves // *Electronics Letters*. 1972. V. 8. P. 372–373.
2. *Lagasse P.E.* Higher-order finite-element analysis of topographic guides supporting elastic surface waves // *J. Acoust. Soc. Am.* 1973. V. 53. P. 1116–1122
3. *Maradudin A.A., Wallis R.F., Mills D.L., Ballard R.L.* Vibrational edge modes in finite crystals // *Phys. Rev. B*. 1972. № 6. P. 1106–1111.
4. *Sharon T.M., Maradudin A.A., Cunningham S.L.* Vibrational edge modes for small-angle wedges // *Phys. Rev. B*. 1973. № 8. P. 6024–6026.
5. *Боженко В.В., Иванов-Шиц К.М., Случ М.И., Солодов И.Ю.* Экспериментальное исследование клиновых акустических волн // *Акуст. журн.* 1983. Т. 31. № 2. С. 262–264.
6. *Krylov V.V.* Wedge acoustic waves: new theoretical and experimental results / *Proc. II Int. Symposium on Surface Waves in Solids and Layered Structures and Acoustoelectronics'89*. Eds. Borissov M., Spassov L., Georgiev Z. and Avramov I. 1990. P. 174–189.
7. *Auribault D., Jia X., De Billy M., Quentin G.* Study of surface acoustic waves guided by a metallic cylindrical wedge using laser-ultrasonic techniques // *Journal de Physique IV Colloque*. 1994. V. 04. C5. P. C5-737–C5-740.
8. *Mayer A.P., Krylov V.V., Lomonosov A.M.* Guided acoustic waves propagating at surfaces, interfaces and edges / *Ultrasonic Symposium*. 2011. P. 2046–2052.
9. *Korobov A., Izosimova M., Kokshaiskii A., Agafonov A.* Elastic waves in a wedge of aluminum alloy with permanent residual deformations / *AIP Conf. Proc.* 2015. No. 1685. P. 080005-1–080005-1.
10. *Крылов В.В., Шанин А.В.* Рассеяние клиновой акустической волны на неглубокой выемке // *Акуст. журн.* 1993. Т. 39. № 2. С. 292–298.
11. *Lui I.H., Yang C.H.* An investigation on wedge waves and the interaction with a defect using a quantitative laser ultrasound visualization system / *IEEE Int. Ultrason. Symp. Proc.* 2010. P. 817–820.
12. *Chen M.-I., Tesng S.P., Lo P.Y., Yang C.H.* Characterization of wedge waves propagating along wedge tips with defects // *Ultrasonics*. 2018. V. 82. P. 289–297.
13. *Tung P.H., Yang C.H.* A study in wedge waves with applications in delay-line / *Proc. IEEE Ultrason. Symp.* 2013. P. 1642–1645.
14. *Krylov V.V.* Wedge elastic waves, with applications to ultrasonic non-destructive testing / *Proc. 55th Annual British Conference on Non-Destructive Testing*. 2016. P. 1–12.
15. *Yang C.H., Liaw J.S.* Observation of dispersion behavior of acoustic wedge waves propagating along the tip of a circular wedge with laser ultrasonics // *J. Appl. Phys.* 2000. V. 39. P. 2741–2743.
16. *Krylov V.V.* Localized vibration modes propagating along edges of cylindrical and conical wedge-like structures // *J. Sound Vib.* 1999. V. 227. P. 215–221.
17. *Jing Jia, Zhonghua Shen, Qingbang Han, Xueping Jiang.* Design of wedge structure with non-dispersive wedge wave propagation // *Appl. Opt.* 2017. V. 56. P. 8564–8569.
18. *Yu T.-H., Yin C.-C.* A modal sensor integrated circular cylindrical wedge wave ultrasonic motor // *Sensors and Actuators A: Physical*. 2012. V. 174. P. 144–154.
19. *Yu T.-H.* Vibration mode analyses for circular wedge acoustic waveguides // 2018 IEEE ISAF-FMA-AMF-AMEC-PFM Joint Conference (IFAAP). 2018. P.46–50.
20. *Жостков Р.А.* Программа для моделирования клиновых волн // Номер гос. регистрации программы для ЭВМ 2018665669. Дата регистрации 06.12.2018. Бюл. 12.
21. *Беззубов Л.П.* Химия жиров. М.: Пищепромиздат, 1962. 297 с.
22. <https://widman.biz/English/Calculators/Graph.html>
23. *Цуканов А.А., Калабухов Д.И., Романов А.И., Горбатилов А.В., Сердобольская М.Л., Грачев Е.А.* Моделирование волн Рэлея в неоднородной среде с использованием вычислительных систем с параллельной архитектурой. Учебное пособие. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, 2010.
24. *Коробов А.И., Агафонов А.А., Изосимова М.Ю.* Нелинейные упругие волны в твердотельном изотропном клине с дефектами // *ЖТФ*. 2018. Т. 88. № 3. С. 385–391.
25. *Degertekin F.L., Khuri-Yakub B.T.* Hertzian contact transducers for nondestructive for nondestructive evaluation // *J. Acoust. Soc. Am.* 1996. V. 99. № 1. P. 299–308.

УДК 534.222

## МОДУЛЬНЫЕ “СОЛИТОНЫ”: ВЗАИМНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ И АННИГИЛЯЦИЯ В ДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ

© 2020 г. О. А. Васильева<sup>a, b, \*</sup>, О. В. Руденко<sup>c, d, e, \*\*</sup>

<sup>a</sup>Московский государственный строительный университет,  
Ярославское ш. 26, Москва, 129337 Россия

<sup>b</sup>Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева,  
Миусская пл. 9, Москва, 125047 Россия

<sup>c</sup>Физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,  
Ленинские горы 1, стр. 2, Москва, 119991 Россия

<sup>d</sup>Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН,  
ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия

<sup>e</sup>Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН,  
ул. Б. Грузинская 10, стр. 1, Москва, 123995 Россия

\*e-mail: vasilievaoa@mgsu.ru

\*\*e-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 03.12.2019 г.

После доработки 03.12.2019 г.

Принята к публикации 24.12.2019 г.

Исследованы столкновения двух импульсных сигналов в среде с модульной (М) нелинейностью и со специальным законом релаксации. Процессы описываются интегро-дифференциальным уравнением, ядро которого отлично от нуля на конечном интервале времени. Считается, что внутри этого интервала “память среды” постоянна, а вне его обращается в ноль. Для этой модели анализ сводится к решению простого дифференциально-разностного уравнения; при этом объем вычислений заметно сокращается. Описаны явления, сопровождающие столкновения импульсов – нелинейное взаимное затухание, аннигиляция, уширение сигналов во времени. Выяснено влияние параметров сигналов и свойств среды на протекание указанных процессов. Рассмотрено столкновение двух модульных солитонов, описываемых М-уравнением типа Кортевега–де Вриза. Показано, что в рамках этой модели взаимодействие может отличаться от обычного поведения солитонов, обнаруживающих аналогию с упругим взаимодействием частиц.

*Ключевые слова:* метаматериал, модульная нелинейность, время релаксации, интегро-дифференциальное уравнение, взаимное поглощение, аннигиляция

DOI: 10.31857/S0320791920030077

### ВВЕДЕНИЕ

Солитонами обычно называют уединенные волны, форма которых не изменяется благодаря двум конкурирующим процессам. Конкурентами являются нелинейное “обострение” волнового профиля и его дисперсионное “сглаживание”. Солитонные решения, допускаемые некоторыми хорошо известными нелинейными уравнениями, безусловно, важны как точные результаты математической физики. Однако наибольший интерес, наблюдавшийся в течение последних 50 лет, по-видимому, связан с “корпускулярным” поведением солитонов. Сталкиваясь друг с другом, солитоны ведут себя как упругие частицы [1]. Они могут притягиваться или отталкиваться между собой, образуя связанные состояния. Именно с

перспективами физических приложений солитоники была связана необычайная популярность и высокая цитируемость соответствующих работ.

Однако корпускулярные свойства обнаруживают не только консервативные солитоны, но и волны в диссипативных системах. Например, слабые ударные волны сталкиваются между собой и слипаются при этом как абсолютно неупругие частицы [2]. Ансамбль треугольных импульсов, образующих пилообразную волну, ведет себя как совокупность неупругих частиц, “испаряющихся” в промежутках между соударениями в результате нелинейного затухания [3]. Такие явления хорошо известны для интенсивных акустических волн и наблюдаются в средах, где нет дисперсии, т.е. скорость распространения волны не зависит от частоты.

Недавно появились работы по взаимодействию уединенных импульсов в средах с модульной нелинейностью, которые для краткости назовем М-средами. Такие взаимодействия имеют интересные физические особенности, изучение которых представляет несомненный интерес. Эволюцию возмущений в М-среде, обладающей высокочастотной дисперсией и диссипацией, можно описать следующей математической моделью:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta} |V| = \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + D \frac{\partial^3 V}{\partial \theta^3}. \quad (1)$$

При  $\Gamma = D = 0$  из (1) получается М-уравнение Хопфа, при  $\Gamma \neq 0, D = 0$  – М-уравнение Бюргерса, при  $\Gamma = 0, D \neq 0$  – М-уравнение Кортевега–де Вриза.

Модель (1) есть частный случай более общего интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta} |V| = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int_0^\infty K(s) V(\theta - s) ds. \quad (2)$$

Уравнение (1) следует из (2) для ядра  $K(s) = \Gamma \delta(s) + D \delta'(s)$ , выражаемого через дельта-функцию и ее производную.

Среди моделей типа (2), обладающих невырожденными ядрами  $K(s)$ , наиболее известны уравнения с экспоненциальным ядром

$$K(s) = D \exp\left(-\frac{s}{\theta_{rel}}\right). \quad (3)$$

Ядро (3) предсказывается релаксационной моделью Мандельштама–Леонтовича [4]. В этом случае из общего уравнения (2) получается:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta} |V| \right] + \frac{1}{\theta_{rel}} \left[ \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta} |V| \right] = D \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \quad (4)$$

Такое уравнение в дифференциальной форме (4) для квадратично нелинейной среды выведено в работе [5]; его интегральная форма представлена в работе [6].

Однако экспоненциальное ядро, характеризующее единственной парой чисел  $D, \theta_{rel}$ , есть лишь простейший пример релаксационной внутренней динамики среды. Часто физически адекватными являются более сложные модели, содержащие несколько времен релаксации  $\theta_{rel,n}$  и соответствующих им чисел  $D_n$  или даже непрерывный спектр таких времен. Сложная перестройка внутренней структуры инициируется, например, в процессе динамического деформирования полимеров, содержащих разномасштабные структурные элементы [7], а также при распространении акустических волн в неоднородных средах и искусственно создаваемых матаматериалах.

Разнообразные формы ядер, полезные для приложений, обсуждаются в статье [8]. В частности, степенные зависимости коэффициента затухания волны от частоты с дробными показателями степени, типичные для биологических тканей и геофизических структур, принципиально требуют интегро-дифференциального описания.

Кратко напомним схему нахождения ядра  $K(s)$  в каждом конкретном случае. Частотные зависимости дисперсии и поглощения, которые даются действительной и мнимой частями  $k'(\omega), k''(\omega)$  волнового числа  $k$ , измеряются в эксперименте или определяются из физической модели типа Мандельштама–Леонтовича. Затем решается обратная задача и ядро реконструируется стандартными методами, использующими принцип причинности и соотношения типа Крамерса–Кронига [9].

Известно, например, что показатель степени в частотной зависимости затухания ультразвука в биологических тканях является дробным и, согласно измерениям, в МГц-диапазоне изменяется от 2.1 (кости черепа) до 0.6 (кожа) [10]. Для частот порядка нескольких МГц, используемых в медицинской практике, обычно полагают  $k'' \sim \omega^{2-\nu}, 0 < \nu < 1$ . При этом ядро имеет вид  $K(s) \sim s^{\nu-1}$ . Особенность функции  $K(s)$  в точке  $s = 0$  часто оказывается несущественной, поскольку уравнение содержит “свертку” сингулярного ядра с осциллирующей функцией, описывающей поле ультразвуковой волны.

Когда представляют интерес волны не в конкретной релаксирующей среде, а общие закономерности совместного проявления нелинейных и релаксационных процессов, удобен прием, сводящий интегро-дифференциальное уравнение к дифференциально-разностной модели или даже к простому отображению. Этот переход [8] эффективен для ядер, отличных от нуля на конечном интервале. Простейший случай соответствует среде с постоянной “памятью” [11], для которой

$$K(s) = D \begin{cases} 1, & 0 < s < \theta_{rel}, \\ 0, & s < 0, s > \theta_{rel}. \end{cases} \quad (5)$$

Ядро (5) означает, что в течение промежутка времени  $0 < s < \theta_{rel}$  среда “все помнит”, а в момент времени  $s = \theta_{rel}$  “все забывает”. Для такого ядра (5) уравнение (2) принимает вид дифференциально-разностного уравнения:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta} |V| = D \frac{\partial}{\partial \theta} [V(z, \theta) - V(z, \theta - \theta_{rel})]. \quad (6)$$

Нетрудно показать, что и для некоторых других ядер, отличных от нуля на конечном интервале, анализ сложных интегро-дифференциальных уравнений (2) удастся свести к решению более

простого уравнения типа (6); при этом объем вычислений заметно сокращается.

Нелинейные явления, сопровождающие распространение одиночных импульсных сигналов в релаксирующей среде с ядром (5) для трех видов нелинейности (модульной, квадратичной и квадратично-кубичной) изучены в работе [11]. Однако взаимодействие таких импульсов между собой в [11] не рассматривалось.

Итак, мы перечислили уравнения, которые будут использованы в дальнейшем изложении. Перейдем теперь к пояснению принятых обозначений и примерам сред с М-нелинейностью. Чтобы придать физический смысл обозначениям, будем для определенности иметь в виду упругие (акустические) плоские волны. Для понимания достаточно ограничиться наиболее простой исходной моделью, приводящей к уравнению Хопфа. Эта модель состоит из уравнения динамической теории упругости:

$$\rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

и уравнения состояния:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (\sigma + g |\sigma|). \quad (8)$$

Здесь  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  – механическое напряжение и деформация,  $\rho$  – плотность среды,  $E$  – модуль Юнга,  $g$  – параметр М-нелинейности.

Ограничимся рассмотрением волн, бегущих в положительном направлении оси  $x$  со скоростью, близкой к скорости звука  $c = \sqrt{E/\rho}$ . Считаем искажения волны медленными, что обусловлено малостью нелинейного члена. Используя метод медленно изменяющегося профиля [9, 12], приходим к эволюционному уравнению (2), в котором

$$z = \frac{x}{l_{NL}}, \quad \theta = \omega \left( t - \frac{x}{c} \right), \quad V = -\frac{\sigma}{\sigma_0}. \quad (9)$$

Смысл констант:  $\omega$  и  $\sigma_0$  – характерные частота и амплитуда исходного сигнала, а характерное нелинейное расстояние равно  $l_{NL} = 2c/(g\omega)$ . Числа  $\Gamma$ ,  $D$  в уравнении (1) представляют собой отношения нелинейной длины  $l_{NL}$  к характерным значениям диссипативной и дисперсионной длин.

Укажем, что теоретические и экспериментальные исследования волн в средах с “модульной” нелинейностью были начаты сравнительно недавно [13–17]. Например, М-среды, встречающиеся в механике, имеют различную упругость при деформациях растяжения и сжатия. Такими свойствами обладают армированные полимеры и бетоны (см. [18], гл. 1). М-уравнения (1), (2), (4), (6) линейны для функции, сохраняющей знак,

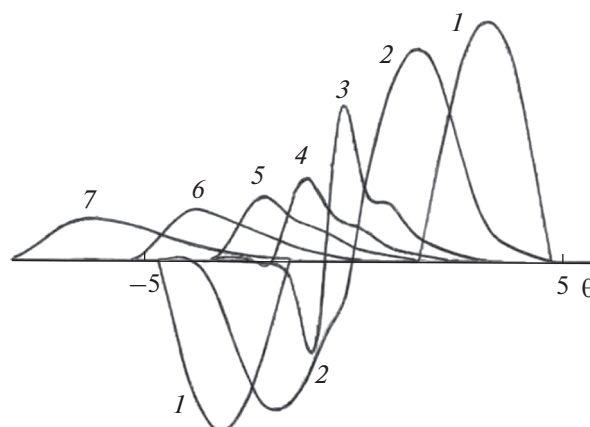


Рис. 1. Столкновение двух импульсных сигналов: отрицательной полярности и положительной полярности с большей амплитудой. Значения параметров  $D = 0.1$ ,  $\theta_{rel} = 1$ . Кривые 1–7 изображают профиль волны на расстояниях  $z = 0, 1.5, 3.75, 5, 6, 7.5, 10$ .

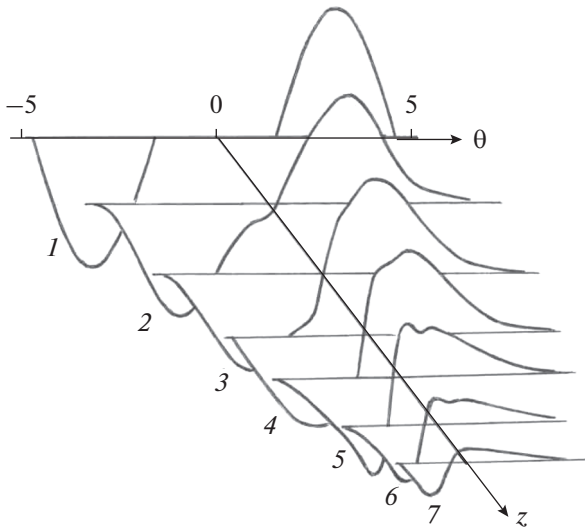
т.е. для  $V > 0$  или  $V < 0$ . Нелинейные эффекты проявляются лишь для знакопеременных решений.

Примером таких эффектов является генерация высших гармоник при подаче на вход нелинейной среды одночастотного гармонического колебания. Очевидно, что М-нелинейность приводит к линейной зависимости амплитуды второй гармоники от амплитуды первой ( $A_2 \sim A_1$ ). С другой стороны, обычная квадратичная нелинейность дает иную зависимость ( $A_2 \sim A_1^2$ ). В общем случае существенны обе нелинейности, и показатель степени в зависимости  $A_2 = K A_1^m$  лежит в области от единицы до двух [19]. Проведя несколько измерений, можно решить обратную задачу [17] и восстановить нелинейные модули среды. Важным примером М-нелинейной среды может служить метаматериал, содержащий искусственно изготовленные сосредоточенные М-нелинейные элементы [20], которые включены в однородную матрицу.

## ВЗАИМНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ И АННИГИЛЯЦИЯ ИМПУЛЬСОВ В СРЕДЕ С РЕЛАКСАЦИЕЙ

Перейдем теперь к анализу процесса столкновения импульсных сигналов разной полярности в М-нелинейной релаксирующей среде. Взаимодействие волн описывается уравнением (2) с ядром (5), которое сводится к дифференциально-разностному уравнению (6). Результаты численного расчета иллюстрированы на рис. 1.

Исходный сигнал (кривая 1) задан в виде двух импульсов разной полярности, находящихся на



**Рис. 2.** Столкновение двух импульсных сигналов: отрицательной и положительной полярности с одинаковыми амплитудами. Значения параметров  $D = 0.3$ ,  $\theta_{rel} = 0.75$ . Кривые 1–7 соответствуют расстояниям  $z = 0, 1, 1.5, 2, 3, 4, 5$

некотором “расстоянии” (временной задержке) друг от друга:

$$V(z = 0, \theta) = \begin{cases} -0.7 \sin(\theta + \frac{3}{2}\pi), & -\frac{3}{2}\pi < \theta < -\frac{1}{2}\pi, \\ 0, & -\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi, \\ \sin(\theta - \frac{1}{2}\pi), & \frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi. \end{cases} \quad (10)$$

В отсутствие релаксации ( $D = 0$ ) решение уравнения (6) имеет вид

$$V(z, \theta) = V_{\pm}(z \pm \theta). \quad (11)$$

Здесь знаки ( $\pm$ ) соответствуют импульсам соответствующей полярности. Видно, что отрицательный импульс движется в положительном направлении оси  $\theta$ , а положительный импульс – в отрицательном направлении. Это означает, что импульсы начинают сближаться, не взаимодействуя друг с другом. При этом М-нелинейность не искажает их форму. Искажение на этом этапе происходит лишь вследствие релаксационных процессов, проявляющихся как линейное поглощение и образование дисперсионных фазовых сдвигов между гармониками.

В результате столкновения положительного и отрицательного импульсов образуется связанное состояние с общим ударным фронтом (кривая 2). В этот момент “включается” нелинейное затухание (сравните кривые 2 и 3), которое продолжается до тех пор, пока отрицательный импульс не исчез-

нет. Таким образом, происходит взаимное поглощение сигналов разной полярности. Сформированный положительный импульс задержан по фазе и имеет меньшую амплитуду по сравнению с исходным. В дальнейшем он распространяется без изменения формы (сравните кривые 6 и 7).

Взаимное поглощение имеет место при различной амплитуде одинаковых по форме и длительности импульсов или, в более общем случае, при различной площади под кривыми  $V_{\pm}(\theta)$ . Если площади одинаковы, в результате взаимного поглощения может наступить аннигиляция, т.е. полное взаимное уничтожение сигналов.

Процесс аннигиляции изображен на рис. 2. Исходная форма волны (кривая 1) дается двумя разнесенными полупериодами синусоиды (10), но с одинаковыми амплитудами. Как и на рис. 1, до столкновения импульсов (кривая 2) их нелинейного поглощения не происходит. С увеличением расстояния взаимное поглощение усиливается, и однополярные импульсы исчезают полностью.

Таким образом, взаимодействие уединенных волн в М-среде обнаруживает свойства, отличные от наблюдаемых при упругих столкновениях обычных солитонов и неупругих слияниях ударных волн. Имеется аналогия с взаимодействием сгустков химически реагирующих веществ, например, горючего и окислителя. В результате реакции один (меньший) компонент исчезает, а масса второго (большого) уменьшается.

### СТОЛКНОВЕНИЯ МОДУЛЬНЫХ СОЛИТОНОВ

Недавно был исследован другой тип уединенных волн, названный нами “модульные солитоны” [22]. Эти волны обнаружили новые физические свойства. В средах с высокочастотной дисперсией и модульной нелинейностью эволюция волн описывается модифицированным уравнением Кортевега–де Вриза (это уравнение (1) при значении диссипативного параметра  $\Gamma = 0$ ):

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta} |V| = D \frac{\partial^3 V}{\partial \theta^3}. \quad (12)$$

Аналитическое выражение для одного из стационарных солитонных решений

$$V = V(T = \theta + \beta z) \quad (13)$$

имеет вид:

$$\begin{aligned}
 V_- &= -\frac{C}{2(1+\beta)} \left\{ 1 - \exp \left[ \sqrt{\frac{1+\beta}{D}} (-|T| + T_*) \right] \right\}, \\
 &\quad |T| \geq T_*, \\
 V_+ &= \frac{C}{2(1-\beta)} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{2}{1+\beta}} \cos \left( T \sqrt{\frac{1-\beta}{D}} \right) \right\}, \\
 &\quad |T| \leq T_*.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь  $C > 0$ ,  $0 < \beta < 1$  – константы. В двух точках  $\pm T_*$  отрицательная  $V_-$  и положительная  $V_+$  ветви решения непрерывно сшиваются, причем непрерывной оказывается и первая производная. Принято обозначение:

$$T_* = \sqrt{\frac{D}{1-\beta}} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \sqrt{\frac{1+\beta}{2}} \right). \tag{15}$$

Заметим, что модульный солитон (14) не может распространяться по невозмущенной среде, т.е. иметь профиль, для которого  $V(\theta) \rightarrow 0$ ,  $|\theta| \rightarrow \infty$ . Причиной является тот факт, что солитоны формируются в результате конкуренции между нелинейным “укручением” и дисперсионным “расплыванием” волны, а в М-модели один из конкурирующих факторов (нелинейность) для возмущения, сохраняющего знак, отсутствует. В этом основное отличие (14) от солитонных решений обычного уравнения КдВ; отличие связано с исчезновением одной из симметрий для М-уравнения (12).

Как следует из решения (14), солитон является возмущением относительно уровня

$$V_- (|\theta| \rightarrow \infty) = -\frac{C}{2(1+\beta)}. \tag{16}$$

Если имеются два солитона, возмущающие один и тот же уровень (16), должно выполняться условие

$$\frac{C_1}{(1+\beta_1)} = \frac{C_2}{(1+\beta_2)}. \tag{17}$$

Амплитуды этих солитонов, как следует из (14) при  $T = 0$ , равны соответственно:

$$A_{1,2} = (V_+)_{\max} = \frac{C_{1,2}}{2(1-\beta_{1,2})} \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{1+\beta_{1,2}}} \right). \tag{18}$$

Из последних двух формул получим

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\sqrt{1+\beta_2} (\sqrt{2} - \sqrt{1+\beta_1})}{\sqrt{1+\beta_1} (\sqrt{2} - \sqrt{1+\beta_2})}. \tag{19}$$

Как нетрудно видеть, при  $A_2 > A_1$  должно быть  $\beta_2 > \beta_1$ , т.е. импульс с большей амплитудой должен двигаться с большей скоростью. При этом столкновение импульсов возможно, если боль-

ший импульс будет находиться позади меньшего и сможет его “догнать”.

Рассмотрим в качестве примера взаимодействие двух разных солитонов. Пусть эти солитоны, находясь на значительном удалении друг от друга, бегут по одному и тому же “невозмущенному уровню” (16):

$$V_- (|T| \rightarrow \infty) = -\frac{C}{2(1+\beta)} \equiv -V_0. \tag{20}$$

Введем для удобства функцию  $U = V + V_0$ , которая обращается в ноль  $U (|T| \rightarrow \infty) = 0$  на бесконечности. Это означает, что  $U$ -солитоны возмущают нулевое значение параметра, описывающего состояние среды. Выражения для этих солитонов, соответствующие формулам (14), имеют вид:

$$\begin{aligned}
 U_-(2) &= \frac{C_2}{2(1+\beta_2)} \exp \left[ \sqrt{\frac{1+\beta_2}{D}} (-|T| + T_2) \right], \\
 &\quad |T| \geq T_2, \\
 U_+(2) &= \frac{C_2}{1-\beta_2^2} + \frac{C_2}{2(1-\beta_2)} \sqrt{\frac{2}{1+\beta_2}} \cos \left( T \sqrt{\frac{1-\beta_2}{D}} \right), \\
 &\quad |T| \leq T_2, \\
 T_2 &= \sqrt{\frac{D}{1-\beta_2}} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \sqrt{\frac{1+\beta_2}{2}} \right).
 \end{aligned} \tag{21}$$

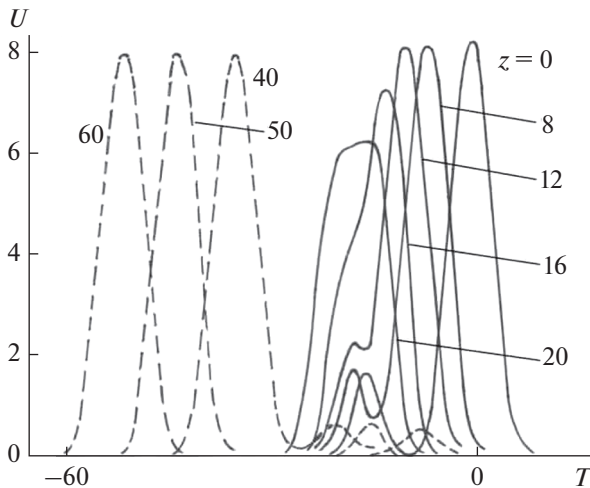
$$\begin{aligned}
 U_-(1) &= \frac{C_1}{2(1+\beta_1)} \exp \left[ \sqrt{\frac{1+\beta_1}{D}} (-|T + T_0| + T_1) \right], \\
 &\quad |T + T_0| \geq T_1, \\
 U_+(1) &= \frac{C_1}{1-\beta_1^2} + \frac{C_1}{2(1-\beta_1)} \times \\
 &\quad \times \sqrt{\frac{2}{1+\beta_1}} \cos \left( (T + T_0) \sqrt{\frac{1-\beta_1}{D}} \right), \quad |T + T_0| \leq T_1, \\
 T_1 &= \sqrt{\frac{D}{1-\beta_1}} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \sqrt{\frac{1+\beta_1}{2}} \right).
 \end{aligned} \tag{22}$$

В этих обозначениях постановка задачи такова. Нужно проанализировать процесс столкновения, т.е. рассчитать  $U(z, T)$  для различных расстояний  $z$ . Фактически требуется проинтегрировать уравнение (12), записав его в следующем виде:

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \beta \frac{\partial U}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial T} \left( U - \frac{C}{2(1+\beta)} \right) = \frac{\partial^3 U}{\partial T^3}. \tag{23}$$

Область по переменной  $T$  должна включать оба солитона. Для  $z = 0$  начальная конфигурация есть  $U(z = 0, \theta = T) = U(2) + U(1)$ , где  $U(2)$ ,  $U(1)$  даются формулами (21) и (22).

При численном анализе задачи положим значения констант равными  $\beta_2 = 0.8$ ,  $\beta_1 = 0.2$ . При этом, в соответствии с (19) и (17)  $A_2/A_1 = 5.4$ ,



**Рис. 3.** Столкновение двух модульных солитонов. Значения параметров  $D = 1, T_0 = 15$ . При каждой кривой указано соответствующее ей расстояние  $z = 0, 8, 12, 16, 20, 40, 50, 60$ .

$C_2/C_1 = 1.5$ . Возьмем также  $C_2 = 1.5, C_1 = 1, D = 1, T_0 = 15$ .

На рис. 3 видно, что солитоны в исходной точке  $z = 0$  разнесены и начинают сближаться. Передний (маленький) солитон “перетекает” во второй (большой), находящийся позади него. Образуется связанное состояние, процесс формирования которого иллюстрирован кривыми для  $z = 8, 12, 16, 20$ . Затем это состояние распадается на два новых солитона, показанных штриховыми кривыми для  $z = 40, 50, 60$ . Теперь уже большой солитон находится впереди маленького, и с увеличением пройденного волной расстояния  $z$  они все сильнее удаляются друг от друга.

Однако, в отличие от обычного уравнения КдВ с квадратичной нелинейностью, здесь наблюдаются отклонения от абсолютного упругого столкновения. Как видно на рис. 3, малый солитон имеет заметно меньшую амплитуду после столкновения, чем до него.

Возникает вопрос: сохраняется ли суммарная площадь под кривыми на рис. 3 (количество движения) в процессе соударения? Ответ на него не столь очевиден, как это кажется на первый взгляд.

Изучим вопрос о сохранении полной площади под кривой, описывающей одиночный импульсный сигнал (14). Перейдем в уравнении (12) к переменным  $z_1 = z, T = \theta + \beta z$ . Оно примет вид:

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} + \beta \frac{\partial V}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial T} |V| = D \frac{\partial^3 V}{\partial T^3}. \quad (24)$$

Проинтегрируем это уравнение по переменной  $T$  в бесконечных пределах:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} V dT + \beta V|_{-\infty}^{\infty} - |V|_{-\infty}^{\infty} = D \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \Big|_{-\infty}^{\infty}. \quad (25)$$

Для солитона (14) имеем (20)

$$V_-(|T| \rightarrow \infty) = -\frac{C}{2(1+\beta)} = -V_0, \quad (26)$$

$$|V_-|(|T| \rightarrow \infty) = V_0, \quad \frac{\partial^2 V_-}{\partial T^2}(|T| \rightarrow \infty) = 0.$$

С учетом (26) из интеграла (25) следует закон сохранения:

$$\frac{dS}{dz} = \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} V dT = 0, \quad S = \int_{-\infty}^{\infty} V dT = \text{const}. \quad (27)$$

Однако при выводе формулы (27) не учтено, что в точках  $T = \pm T_*$  могут существовать особенности второй производной. Поэтому правую часть интеграла (25) следует записать так:

$$D \left[ \frac{\partial^2 V_-}{\partial T^2} \Big|_{-\infty}^{-T_*} + \frac{\partial^2 V_+}{\partial T^2} \Big|_{-T_*}^{T_*} + \frac{\partial^2 V_-}{\partial T^2} \Big|_{T_*}^{\infty} \right]. \quad (28)$$

Поскольку (см. (16))

$$\lim_{|T| \rightarrow \infty} V = -\frac{C}{2(1+\beta)}, \quad \lim_{|T| \rightarrow \infty} \frac{d^2 V}{dT^2} = 0, \quad (29)$$

соотношение (25) для площади  $S$  примет вид:

$$\frac{dS}{dz} = D \left[ \frac{\partial^2 V_-}{\partial T^2} \Big|_{-\infty}^{-T_*} + \frac{\partial^2 V_+}{\partial T^2} \Big|_{-T_*}^{T_*} + \frac{\partial^2 V_-}{\partial T^2} \Big|_{T_*}^{\infty} \right]. \quad (30)$$

Заметим еще раз, что в обеих точках “сшивания”  $T = \pm T_*$  как сама функция  $V$  (14), так и ее первая производная непрерывны. Зато вторая производная при переходе через эти точки испытывает скачок. Как показывают несложные вычисления на основе решения (14), вторые производные справа и слева в точках  $T = \pm T_*$  равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_-}{\partial T^2} \Big|_{-T_*} &= \frac{\partial^2 V_-}{\partial T^2} \Big|_{T_*} = \frac{C}{2D}, \\ \frac{\partial^2 V_+}{\partial T^2} \Big|_{-T_*} &= \frac{\partial^2 V_+}{\partial T^2} \Big|_{T_*} = -\frac{C}{2D}. \end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом, правая часть в соотношении (29) все же равна нулю. Это означает, что “площадь” солитона  $S$  (или его количество движения) при распространении не изменяется. Не изменяется и энергия, т.е. для модульного солитона система оказывается консервативной. Однако консервативность может не иметь места для более сложных сигналов.

В общем случае волны произвольной формы этот вопрос весьма сложен, и ответ на него нам пока не ясен. Для процесса столкновения двух со-

литонов, показанного на рис. 3, величина площади  $S(z)$  рассчитывалась численно. Оказалось, что она сохраняется с точностью до третьего знака. По-видимому, затухание малого солитона в процессе столкновения сопровождается ростом “хвоста”, формирующегося позади него (см. рис. 3).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ процессов столкновения одиночных импульсных сигналов, результаты которого описаны выше, должен быть продолжен, поскольку многие особенности взаимодействий волн на модульной нелинейности до конца не выяснены. С точки зрения физики интересно продолжить изучение корпускулярных аналогий. Остаются, конечно, вопросы, требующие математических исследований, связанных с использованными нелинейными уравнениями.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (РНФ) № 19-12-00098.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // *Phys. Rev. Lett.* 1965. V. 15. P. 240.
2. *Руденко О.В., Хохлова В.А.* Кинетический подход к описанию одномерной акустической турбулентности // *Акуст. журн.* 1988. Т. 34. № 3. С. 500–506.
3. *Руденко О.В., Хохлова В.А.* Кинетика одномерных пилообразных волн // *Акуст. журн.* 1991. Т. 37. № 1. С. 182–188.
4. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* *Fluid Mechanics.* New York: Elsevier, 2018.
5. *Polyakova A.L., Soluyan S.I., Khokhlov R.V.* Propagation of finite disturbances in a relaxing medium // *Sov. Phys. Acoustics.* 1962. V. 8. № 1. P. 78–82.
6. *Rudenko O.V., Soluyan S.I.* The scattering of sound by sound // *Sov. Phys. Acoustics.* 1973. V. 18. № 3. P. 352–355.
7. *Перепечко И.И.* *Акустические методы исследования полимеров.* М.: Химия, 1973.
8. *Rudenko O.V.* Nonlinear integro-differential models for intense waves in media like biological tissues and geostuctures with complex internal relaxation-type dynamics // *Acoust. Phys.* 2014. V. 60. № 4. P. 398–404.
9. *Vinogradova M.B., Rudenko O.V., Sukhorukov A.P.* *Theory of Waves* (3rd Edition). Moscow: Lenand, 2015 [in Russian].
10. *Physical Principles of Medical Ultrasound* (2nd Edition, Editors *Hill C.R., Bamber J.C., ter Haar G.R.*). New York: John Wiley&Sons, 2004.
11. *Vasilyeva O.A., Lapshin E.A., Rudenko O.V.* Intense pulses in relaxing media with limited “memory time”, power-law and nonanalytic nonlinearities // *Acoust. Phys.* 2019. V. 65. № 1. P. 23–29.
12. *Rudenko O.V., Gurbatov S.N., Hedberg C.M.* *Nonlinear Acoustics through Problems and Examples.* Victoria, Canada: Trafford, 2011.
13. *Назаров В.Е., Кияшко С.Б., Радостин А.В.* Волновые процессы в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией // *Известия ВУЗов. Радиофизика.* 2016. Т. 59. № 3. С. 275–285.
14. *Radostin A.V., Nazarov V.E., Kiyashko S.B.* Propagation of nonlinear acoustic waves in bimodular media with linear dissipation // *Wave Motion.* 2013. V. 50. № 2. P. 191–196.
15. *Назаров В.Е., Кияшко С.Б., Радостин А.В.* Самоподобные волны в средах с разномодульной упругой нелинейностью и релаксацией // *Нелинейная динамика.* 2015. Т. 11. № 2. С. 209–218.
16. *Rudenko O.V.* Equation admitting linearization and describing waves in dissipative media with modular, quadratic, and quadratically cubic nonlinearities // *Doklady Mathematics.* 2016. V. 94. №3. P. 703–707.
17. *Gray A.L., Rudenko O.V.* An intense wave in defective media containing both quadratic and modular nonlinearities: shock waves, harmonics and nondestructive testing // *Acoust. Phys.* 2018. V. 64. № 4. P. 402–407.
18. *Амбарцумян С.А.* *Разномодульная теория упругости.* М.: Наука, 1982. 318 с.
19. *Korobov A.I., Kokshaiskii A.I., Prokhorov V.M., Evdokimov I.A., Perfilov S.A., Volkov A.D.* Mechanical and nonlinear elastic characteristics of polycrystalline AMg6 aluminum alloy and *n*-AMg6/C<sub>60</sub> nanocomposite // *Phys. of Solid State.* 2016. V. 58. № 12. P. 2472–2480.
20. *Mikhailov S.G., Rudenko O.V.* A simple bimodular nonlinear element // *Acoust. Phys.* 2018. V. 64. № 3. P. 293–298.
21. *Hedberg C.M., Rudenko O.V.* Collisions, mutual losses and annihilation of pulses in a modular nonlinear medium // *Nonlinear Dynamics.* 2017. V. 90. № 3. P. 2083–2091. <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11071-017-3785-6>
22. *Rudenko O.V.* Modular solitons // *Doklady Mathematics.* 2016. V. 94. № 3. P. 708–711.



УДК 534.1

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ДИНАМИЧЕСКИ-САМОПОДОБНЫХ СТРУКТУРАХ (ДИНАМИЧЕСКИХ ФРАКТАЛАХ)

© 2020 г. Л. Я. Банах\*

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова  
Российской академии наук, Малый Харитоньевский пер. 4, Москва, 101990 Россия

\*e-mail: banl@inbox.ru

Поступила в редакцию 19.04.2018 г.

После доработки 21.10.2019 г.

Принята к публикации 29.10.2019 г.

Введено понятие динамически-самоподобной структуры (динамического фрактала), заключающееся в подобии динамических параметров образующих ячеек. Исследуется распространение упругих волн в неразветвленных динамически-самоподобных структурах. Показано, что такие структуры эквивалентны по частотам периодической структуре с дополнительным закреплением, однако характер распространения волн в них существенно различен. В динамическом фрактале возможны как затухающие волны, так и нарастающие вдоль длины структуры, а интенсивность затухания волн сильнее, чем в периодической структуре.

*Ключевые слова:* динамическое самоподобие, динамический фрактал, распространение волн, парциальные частоты, полоса пропускания

**DOI:** 10.31857/S032079192002001X

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время повышается интерес к волновым свойствам периодических структур, состоящих из сложных ячеек. К таким структурам относятся, в частности, метаматериалы, которые обладают необычными волновыми свойствами, не встречающимися в природе, например акустической невидимостью [1, 2]. Поэтому первостепенное значение приобретает изучение распространения волн в таких средах.

Однако класс периодических структур может быть существенно расширен и дополнен классом самоподобных фрактальных структур. Согласно Б. Мандельброту [3], отличительными чертами фракталов являются “самоподобие, инвариантность относительно изменения масштаба или скейлинга, инвариантность при мультипликативных изменениях масштаба. Кратко говоря, самоподобный объект выглядит неизменным и после увеличения и после уменьшения его размеров”.

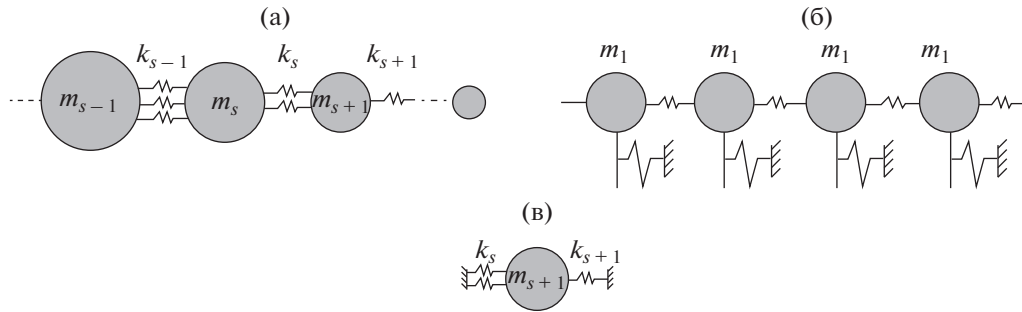
Хорошо известные геометрические фракталы Мандельброта [3, 4] описывают структуры, подобные по геометрическим параметрам. Их отличительной чертой является нецелая размерность. Фракталы вообще можно рассматривать как системную связь локального и глобального порядка. Именно такой класс структур преобладает в при-

роде и технике. Изучению волновых и акустических свойств фрактальных структур посвящены работы Л.М. Лямшева, В.В. Зосимова, И.А. Урусовского [5–7]. В этих работах исследованы упругие колебания и волны в материалах с геометрически-фрактальной структурой, найдены их дисперсионные уравнения. Исследуются также колебания фрактальных кластеров, для которых характерна зависимость упругих свойств от масштаба деформации.

Тем не менее, динамические свойства системы определяют ее упруго-инерционные параметры. Поэтому представляет интерес изучить волновые свойства структур, состоящих из ячеек, подобных по динамическим параметрам, а не по геометрическим. Для этого необходимо ввести понятие динамического фрактала, в отличие от геометрического фрактала Мандельброта. С этой целью логично потребовать масштабирования параметров системы, определяющих ее динамические свойства, т.е. упругих и инерционных параметров [8, 9].

### САМОПОДОБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ СТРУКТУРЫ В МЕХАНИКЕ. ДИНАМИЧЕСКИЙ ФРАКТАЛ

Рассмотрим вначале наиболее простую дискретную неразветвленную одномерную структу-



**Рис. 1.** (а) – Динамически-самоподобная стержневая структура с сосредоточенными массами, (б) – эквивалентная периодическая структура, имеющая такие же собственные частоты, (в) – частичная подсистема динамически-самоподобной структуры.

ру, состоящую из масс, соединенных упругими элементами.

**Определение.** Динамически–самоподобными (динамическим фракталом) назовем такие структуры, в которых упругие и инерционные параметры меняются с одинаковым масштабом  $\gamma$  для каждой ячейки структуры (или подсистемы):

$$K_s = \gamma K_{s-1}, \quad J_s = \gamma J_{s-1}, \quad (1)$$

$K_s$  – жесткость,  $J_s$  – инерционный параметр  $s$ -й ячейки. Это определение динамического фрактала справедливо и для структур, в которых число степеней свободы образующих ячеек больше единицы. При этом для каждой координаты могут быть свои коэффициенты масштабирования (п.5).

Необходимым следствием условий (1) является равенство парциальных частот для всех образующих ячеек:

$$v_s^2 = (K_s + K_{s-1})/J_s = v_{s+1}^2 = (K_{s+1} + K_s)/J_{s+1} = \text{const} = v^2 \quad (s = 1 \dots N). \quad (2)$$

Условие равенства парциальных частот (2) – это условие *динамического* самоподобия структуры (динамического фрактала).

Рассмотрим теперь бесконечную дискретную одномерную цепочку, в которой  $s$ -я ячейка состоит из сосредоточенной массы  $m_s$  и пружинки с жесткостью  $k_s$ . Пусть упругие и инерционные параметры меняются с одинаковым масштабом  $\gamma$  от ячейки к ячейке (рис. 1а). Тогда жесткость и масса для элемента  $s + 1$ :

$$k_{s+1} = \gamma k_s, \quad m_{s+1} = \gamma m_s. \quad (3)$$

Следовательно, такая структура представляет собой динамический фрактал.

Коэффициенты упругости, необходимые для определения парциальных частот образующей ячейки, находятся при закрепленных границах ячейки (рис. 1в). (Если в уравнениях используются коэффициенты податливости, то парциальные частоты определяются при свободных границах ячейки.) Для этой цепочки

$$v_s^2 = (k_{s-1} + k_s)/m_s.$$

Условие (2) равенства парциальных частот для каждой ячейки выполнено:

$$v_s^2 = (k_{s-1} + k_s)/m_s = v_{s+1}^2 = (k_s + k_{s+1})/m_{s+1} = v^2 = \text{const}.$$

**Замечание.** Отметим, что условия (2) для динамического фрактала не всегда совпадают с условиями геометрического подобия (scaling), используемого в геометрических фракталах Мандельброта. Действительно, пусть упругие элементы моделируют продольную жесткость стержня, равную  $EF_s/l_s$ , а инерционный элемент представлен в виде жесткого шара радиуса  $R$  (рис. 1а), т.е.  $m_s = 4\pi R_s^3/3$  (здесь  $F_s$  – площадь поперечного сечения  $s$ -й ячейки,  $l_s$  – ее длина). Условия геометрического скейлинга имеют вид:  $F_{s+1} = \gamma^2 F_s$ ,  $l_s = \gamma l_s$ ,  $R_s = \gamma R_s$ . Очевидно, что при этом условия (2) для динамического фрактала не выполняются:

$$v_{s+1}^2 = \frac{3 EF_s \gamma^{2s}}{4 \rho \gamma^{4s} l_s R_s^3} = \frac{v_s^2}{\gamma^2} \neq \text{const}.$$

Верно и обратное: условия (1), (2) могут быть выполнены без геометрического подобия *всех* элементов, а лишь только некоторых из них. Пусть, например,

$$F_{s+1} = \gamma^2 F_s, \quad l_{s+1} = \gamma l_s, \quad R_{s+1} = \gamma^{1/3} R_s.$$

Несмотря на то, что радиус шара меняется с другим коэффициентом подобия,  $\gamma^{1/3}$ , условия (2) выполнены:

$$v_{s+1}^2 = \frac{EF_{s+1}}{\rho l_{s+1} 4\pi R_{s+1}^3/3} = \frac{3 EF_s \gamma^2}{4 \rho l_s \gamma (\gamma^{s/3} R_s)^3} = v_s^2 = \text{const}.$$

Таким образом, выполнение условий (1), (2) для динамического фрактала требует различного масштабирования геометрических параметров, что является определенным обобщением геометрического фрактала.

**ЧАСТОТНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ  
ДИНАМИЧЕСКИ-САМОПОДОБНЫХ  
И ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР.  
ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ**

Уравнение динамически-самоподобной дискретной структуры, представленной на рис. 1а, можно записать в виде уравнений в конечных разностях. Так, уравнение для  $s + 1$ -й ячейки:

$$-k_s x_s + (-m_{s+1} \omega^2 + k_s(1 + \gamma))x_{s+1} - \gamma k_s x_{s+2} = 0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{X}^T = [x_1, x_2, x_3 \dots x_n]$ ,  $x_{s+1}$  – смещение  $s + 1$ -й массы,  $\omega$  – частота собственных колебаний.

Уравнение (4) – это общий вид уравнения дискретной динамически-самоподобной цепной структуры (рис. 1). При  $\gamma < 1$  получим структуру с убывающими по длине параметрами, а при  $\gamma > 1$  – с возрастающими.

Сделаем теперь в (4) замену переменных:

$$x_s = \tilde{x}_s / (\sqrt{\gamma})^s. \quad (5)$$

В результате найдем уравнение для  $s + 1$ -й ячейки в новых переменных:

$$-k_s \tilde{x}_s / \sqrt{\gamma} + \left( -m_s \omega^2 + \frac{k_s(1 + \gamma)}{\gamma} \right) \tilde{x}_{s+1} - k_s \tilde{x}_{s+2} / \sqrt{\gamma} = 0.$$

Полагая  $k_s = k_1 \gamma^s$ ,  $m_s = m_1 \gamma^s$ , видим, что это уравнение справедливо для любого номера  $s$ , так как отношение его коэффициентов от  $s$  не зависит. Его удобно записать в виде, описывающем  $s$ -ую ячейку

$$-k_1 \tilde{x}_{s-1} / \sqrt{\gamma} + \left( -m_1 \omega^2 + \frac{k_1(1 + \gamma)}{\gamma} \right) \tilde{x}_s - k_1 \tilde{x}_{s+1} / \sqrt{\gamma} = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) описывает периодическую структуру на рис. 1б. Парциальные частоты каждой массы  $v_s^2 = (k_{s-1} + k_s) / m_s$  одинаковы в силу условия (3), жесткость между массами равна  $k_1 / \sqrt{\gamma}$ , но при этом имеется дополнительное закрепление масс  $k^* = \frac{k_1(1 + \gamma)}{\gamma} - \frac{2k_1}{\sqrt{\gamma}} = \frac{k_1(1 - \sqrt{\gamma})^2}{\gamma}$ . Следовательно, величина упругих элементов в структуре на рис. 1б одинакова для каждой ячейки и опреде-

ляется только коэффициентом подобия.<sup>1</sup> В интервале  $0.16 < \gamma < 6.76$  жесткость дополнительного закрепления меньше жесткости, соединяющей массы:  $k^* < k_1 / \sqrt{\gamma}$ .

Частное решение уравнения (6) имеет вид [10, 11]:

$$\tilde{x}_s = C \exp(i(\mu s - \omega t)), \quad (7)$$

$\omega$  – собственная частота,  $\mu$  – волновой параметр, характеризующий изменение фазы при переходе от элемента  $s$  к  $s + 1$ . Здесь  $\mu = \kappa l$ , где  $\kappa$  – волновое число,  $l$  – длина ячейки.

Подставляя (7) в (6), находим дисперсионное уравнение для периодической структуры на рис. 1б:

$$\begin{aligned} & \text{– для действительных } \mu: -m_1 \omega^2 + \frac{k_1(1 + \gamma)}{\gamma} - \\ & - 2 \frac{k_1}{\sqrt{\gamma}} \cos \mu = 0, \quad m_1 / k_1 = m_s / k_s = v^2 = \text{const}; \\ & \text{– для чисто мнимых } \mu = i\mu': -m_1 \omega^2 + \frac{k_1(1 + \gamma)}{\gamma} - \\ & - 2 \frac{k_1}{\sqrt{\gamma}} \text{ch } \mu' = 0. \end{aligned}$$

Дисперсионная кривая для  $\gamma = 0.5$  ( $\omega_0 = 0.41v$ ,  $\omega^* = 2.41v$ ) изображена на рис. 2а, дисперсионная поверхность в зависимости от параметра  $\gamma$  представлена на рис. 2б.

Линейное преобразование координат (5) не меняет частотных свойств, поэтому динамический фрактал на рис. 1а и периодическая структура на рис. 1б имеют одинаковые частоты. Периодическая структура представляет собой механический полосовой частотный фильтр с полосой пропускания гармонического сигнала:  $\omega_0 < \omega < \omega^*$  (рис. 2а), где:

$$\omega_0^2 = v^2 \frac{(1 - \sqrt{\gamma})^2}{\gamma}, \quad \omega^{*2} = v^2 \frac{(1 + \sqrt{\gamma})^2}{\gamma}. \quad (8)$$

Полоса пропускания  $\Delta\omega = \omega^* - \omega_0$ . При этом:

– для уменьшающейся по длине цепочки, как следует из (8),  $\Delta\omega = 2v$ , т.е. ширина полосы пропускания не зависит от параметра  $\gamma$  и совпадает с шириной полосы пропускания периодической структуры без дополнительного закрепления. Тем не менее, сами граничные частоты, а, следовательно, и расположение полосы пропускания зависят от  $\gamma$ ;

– для увеличивающейся по длине цепочки  $\Delta\omega = \omega^* - |\omega_0| = 2v / \sqrt{\gamma}$ , т.е. ширина полосы пропускания обратно пропорциональна  $\sqrt{\gamma}$ , при этом  $\omega^* + \omega_0 = 2v$ . При достаточно большом  $\gamma$  полоса

<sup>1</sup> Вообще говоря, получается семейство эквивалентных периодических структур с пропорциональными параметрами и одинаковым частотным спектром

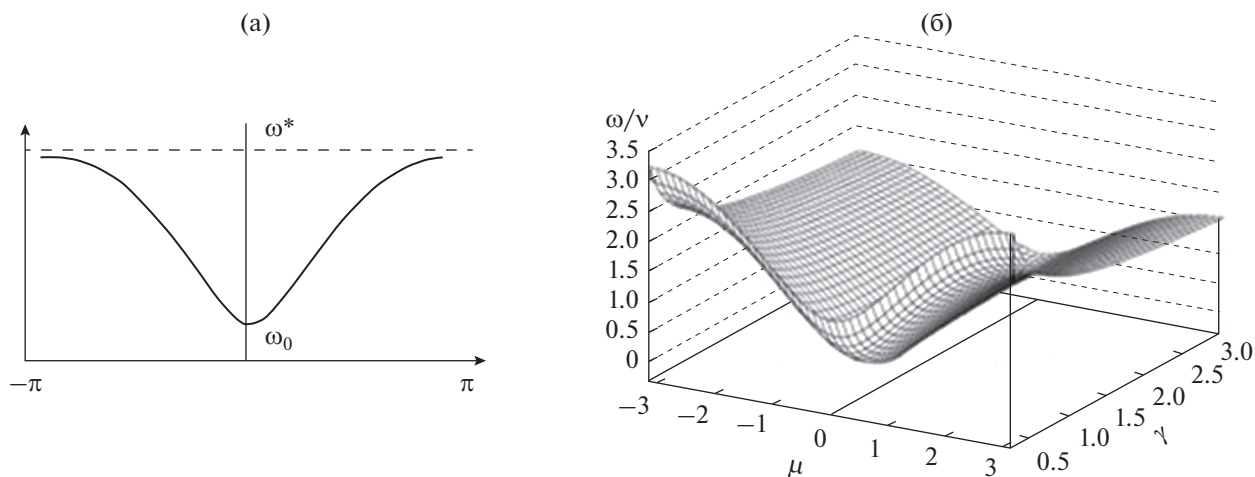


Рис. 2. (а) – Дисперсионная кривая для  $\gamma = 0.5$ :  $\omega_0 = 0.41\nu$ ,  $\omega^* = 2.41\nu$ , (б) – дисперсионная поверхность в зависимости от коэффициента подобия.

пропускания в пределе становится очень узкой, расположенной вблизи парциальной частоты  $\nu$ , т.е. тогда система настроена только на одну определенную частоту.

Эти результаты подтверждает и табл. 1, в которой представлены граничные частоты полосы пропускания в зависимости от коэффициента  $\gamma$ . Из таблицы следует, что в уменьшающейся по длине цепочке ( $\gamma < 1$ ) нижняя граница полосы пропускания снижается с увеличением  $\gamma$  и стремится к 0, как в периодической цепочке без закрепления. В увеличивающейся цепочке ( $\gamma > 1$ ), напротив, при увеличении  $\gamma$  нижняя граница полосы пропускания повышается.

Однако разность квадратов граничных частот не зависит от вида цепочки

$$\Delta\omega_2 = \omega^{*2} - \omega_0^2 = \frac{4k_1}{m_1\sqrt{\gamma}} = \nu^2 \frac{4}{\sqrt{\gamma}},$$

где  $\Delta\omega_2$  пропорционально разности кинетической энергии системы в полосе пропускания.

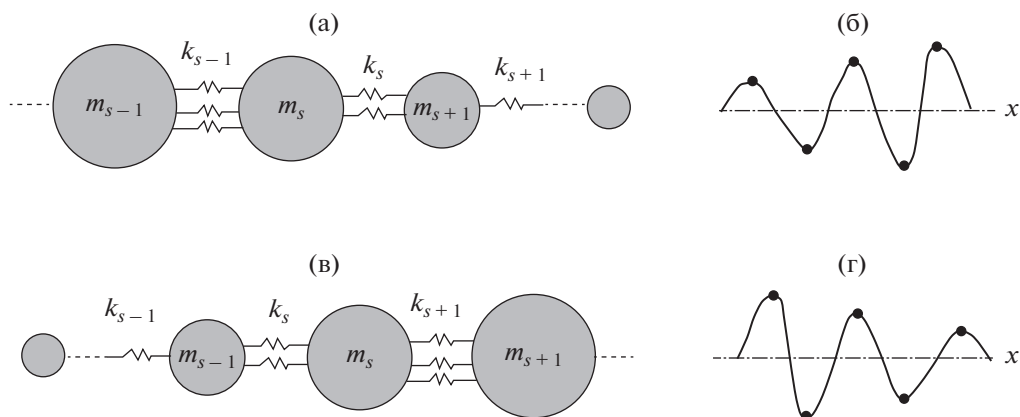
Преобразование координат (5) – это преобразование квадратичных форм, описывающих потенциальную и кинетическую энергию:  $\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} = \tilde{\dot{\mathbf{x}}}^T \tilde{\mathbf{M}} \tilde{\dot{\mathbf{x}}}$ . Следовательно, динамический фрактал и соответствующая периодическая структура эквивалентны по энергии.

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ДИНАМИЧЕСКИ-САМОПОДОБНЫХ СТРУКТУРАХ

Характер распространения волн в периодической и динамически-самоподобной структурах (динамическом фрактале) существенно различен. Поэтому представляет интерес изучить волновое поведение динамического фрактала в полосе пропускания, а также и вне ее. Волна в такой структуре, как видно из преобразования координат (5), получается из соответствующей волны в периодической структуре на рис. 1б путем пропорционального изменения амплитуды колебаний каждого участка в  $1/\sqrt{\gamma}$  раз. На рис. 3 представлены высшие формы колебаний динамического фрактала при закрепленных концах. Для периодической структуры на рис. 1б это, как известно, синусоида, в которой соседние массы находятся в противофазе. В динамическом фрактале (рис. 1а) амплитуда колебаний получается путем увеличения (при  $\gamma < 1$ ) соответствующей амплитуды периодической структуры в  $1/\sqrt{\gamma}$  раз (или уменьшения амплитуды при  $\gamma > 1$ ). Поэтому получаем волну с постоянно увеличивающимися (уменьшающимися) амплитудами (рис. 3а, 3б). Огибающая этой волны – экспонента. Таким образом, в динамическом фрактале с увеличивающимися по длине

Таблица 1. Граничные частоты полос пропускания при различных коэффициентах  $\gamma$

	$\gamma > 1$				$\gamma < 1$			$\gamma = 1$ (периодическая цепочка)
$\gamma$	1.2	1.5	2.0	4.0	0.2	0.5	0.8	1
$\omega_0/\nu$	0.1	0.17	0.3	0.5	1.24	0.41	0.1	0
$\omega_0^*/\nu$	1.91	1.82	1.70	1.5	3.24	2.41	2.11	2



**Рис. 3.** Формы колебаний динамически-самоподобной структуры при  $\omega_0 < \omega < \omega^*$ : (а), (б) – цепочка с уменьшающимися по длине параметрами,  $\gamma < 1$ ; (в), (г) – цепочка с увеличивающимися по длине параметрами,  $\gamma > 1$ .

параметрами в полосе пропускания происходит снижение уровня колебаний, а во фрактале с уменьшающимися параметрами, наоборот, можно добиться существенного усиления входного сигнала.

Неожиданные волновые свойства приобретают динамические фракталы в полосе непропускания. Для периодической структуры ( $\gamma = 1$ ) в этих полосах, как известно, происходит экспоненциальное затухание гармонического сигнала вдоль цепочки [11]:

$$X_s = A(-1)^s e^{-\mu s}, \quad \text{ch}\mu = (1 - \omega^2/2v^2).$$

Однако, в динамических фракталах возможно не только затухание, но и усиление гармонического сигнала и даже превращение полосы непропускания в полосу прозрачности. Действительно, решение для динамического фрактала, учитывающее преобразование координат (5), имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_s &= C \exp(i(\mu s - \omega t)) / (\sqrt{\gamma})^s = \\ &= C \exp(i(\mu + i\alpha)s - \omega t), \quad i\alpha = -\frac{1}{2} \ln \gamma. \end{aligned}$$

Следовательно, волновое число – комплексное и волна неоднородная. Рис. 2б можно рассматривать как дисперсионную поверхность в комплексной плоскости, полагая  $\gamma = \exp(2\alpha)$ . В этом случае фазовая скорость становится комплексной величиной  $c_\phi = \omega/k = \omega/l(\mu + i\alpha)$ .

Для динамического фрактала с увеличивающимися параметрами ( $\gamma > 1$ ) (рис. 3б), как в полосе пропускания периодической структуры, так и вне ее, возможно только увеличение скорости затухания, равной  $\mu + i\alpha$ :  $X_s^* = A(-1)^s \exp(-(\mu + i\alpha)s)$ .

Однако, динамический фрактал с уменьшающимися параметрами обладает следующими особенностями, а именно: в такой системе  $\gamma < 1$ ,

поэтому  $\alpha < 0$ , что означает, по существу, отрицательное демпфирование. При этом возникают три различные ситуации:

- если  $|\alpha| > \mu$ , то полоса непропускания исчезает и в ней возникают волны, амплитуда которых нарастает вдоль цепочки со скоростью  $\exp((|\alpha| - \mu)s)$ ,
- если  $|\alpha| < \mu$ , то возникают затухающие волны, скорость затухания:  $X_s^* = A(-1)^s \exp(-(\mu - |\alpha|)s)$ ,
- если  $|\alpha| = \mu > 1$ , то возникает частота  $\Omega$  прозрачности гармонического сигнала.

В табл. 2 приведены значения  $\Omega$  для цепочки с убывающими параметрами в полосах непропускания при различных коэффициентах масштаба  $\gamma = 0.2, 0.5, 0.8$ .

Как показывают расчеты, в первой полосе непропускания  $0 < \omega < \omega_0$  при всех значениях  $\gamma$  выполнено неравенство  $|\alpha| > \mu$ . Следовательно, эта полоса непропускания для динамического фрактала исчезает и в ней происходит увеличение амплитуды колебаний пропорционально  $\exp(|\alpha| - \mu)$ , при этом  $\mu$  уменьшается при приближении к граничной частоте интервала  $\omega_0$ .

Во второй полосе непропускания ( $\omega > \omega^*$ ) существует частота возбуждения  $\Omega$ , своя для каждого значения  $\gamma$ , при которой  $|\alpha| = \mu > 1$ . Это частота прохождения гармонического сигнала. Тогда при

**Таблица 2.** Значения частоты прозрачности гармонического сигнала  $\Omega$  во 2-й полосе непропускания ( $\omega > \omega^*$ )

$\gamma$	0.2	0.5	0.8
$ \alpha $	0.8	0.35	0.1
$\omega^{*2}/v^2$	10.47	5.83	4.49
$(\Omega^2/v^2)_{\alpha=\mu}$	12.0	6.3	4.9

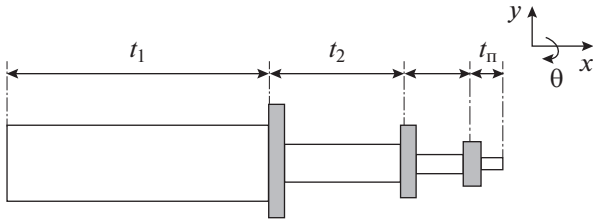


Рис. 4. Динамически-самоподобная балка ступенчатого сечения.

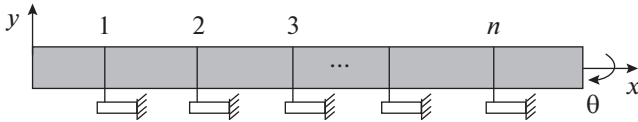


Рис. 5. Эквивалентная регулярная структура для динамически-самоподобной балки.

$\omega^* < \omega < \Omega$  коэффициент  $|\alpha| > \mu$ . В этой области полоса непропускания также исчезает и возникают волны, нарастающие по длине структуры с интенсивностью  $\exp(|\alpha| - \mu)$ . Но, как следует из табл. 2, эта область очень мала, частоты  $\Omega$  расположены достаточно близко к границе областей непропускания, и эта область уменьшается с увеличением  $\gamma < 1$ . При  $\omega > \Omega$  остается полоса непропускания, но интенсивность затухания в ней равна  $\exp(\mu - |\alpha|)$ , что меньше, чем в периодической системе  $\gamma = 1$ .

**Уравнение Вебстера.** Отметим определенную аналогию с распространением акустических волн в волноводах переменного сечения, которые описываются уравнением Вебстера [12]

$$\frac{1}{S(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( S(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (9)$$

Пусть площадь сечения меняется по экспоненциальному закону  $S(x) = S_0 \exp(\beta x)$ . В зависимости от знака  $\beta$  получим уменьшающуюся или увеличивающуюся по длине структуру. Из (9) найдем

$$\beta \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Таким образом, получили диссипативное уравнение. Дисперсионное уравнение

$$\omega^2 - 2i\beta = \kappa^2 c^2.$$

Фазовая скорость при этом зависит от частоты и, кроме того, оказывается комплексной [13]. В зависимости от знака  $\beta$  будут либо затухающие, либо нарастающие колебания:

$$c_\phi = \frac{\omega}{\kappa} = c \left( 1 + 2i \frac{\beta}{\omega} \right)^{-1/2}.$$

Распространение акустических волн в более сложных системах с переменной акустической проводимостью стенки исследованы в [14, 15]. Доказано, что скорость волны может замедляться и даже обращаться в нуль, не доходя до края трубы. Волновое уравнение в этом случае — это обобщенное уравнение Вебстера.

### ДИНАМИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ С МНОГОМЕРНЫМИ ЯЧЕЙКАМИ

В предыдущих разделах рассматривались одномерные цепные структуры, ячейки которых имеют только одну степень свободы. Но совершенно аналогично можно исследовать неразветвленные структуры с многомерными ячейками. В качестве примера рассмотрим распространение изгибных волн в динамически-самоподобной балке ступенчатого сечения с насаженными дисками (рис. 4). Будем исследовать волны в вертикальной плоскости с учетом инерции поворота поперечного сечения. Полагаем участки балок невесомыми, инерционные элементы дисков: масса  $m_s$ , момент инерции  $J_s$ . Перемещение  $s$ -го узла описывается двумерным вектором  $\mathbf{X}_s$  с координатами  $[y, \theta]$ , где  $y$  — перемещение узла,  $\theta$  — угол поворота. Примем конечно-элементную модель балки; при этом каждый элемент балочной системы будем представлять в виде одного конечного элемента. Такая идеализация допустима для низкочастотного диапазона, если длина участка не превосходит  $1/4$  длины волны [8].

Матрица жесткости плоского балочного конечного элемента имеет вид [8, 16]:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21}^T = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{K}_{11} \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{K}_{ij}$  — блоки матриц жесткости и инерции конечного элемента для 1-го и 2-го концов балки соответственно. Уравнение для  $s$ -го узла балки переменного сечения:

$$\mathbf{K}_{12} \mathbf{x}_{s-1} + (\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22}) \mathbf{x}_s + \mathbf{K}_{21} \mathbf{x}_{s+1} = \mathbf{P}. \quad (11)$$

Пусть для каждого участка изгибная жесткость  $12EI_s/l_s^3$  меняется с коэффициентом подобия  $\gamma$ . Этому условию удовлетворяет фрактальная балка с геометрическим самоподобием, если радиус участка и его длина меняются в одинаковом отношении  $\gamma$ . Действительно, тогда  $12EI_s/l_s^3 = 12EI_{s-1}\gamma^4/\gamma^3l_{s-1}^3 = \gamma 12EI_{s-1}/l_{s-1}^3$ ,  $4EI_s/l_s = \gamma^3 4EI_{s-1}/l_{s-1}$ .

Каждый блок матрицы жесткости  $\mathbf{K}_s$  для участка  $s$  можно записать в виде:

$$\mathbf{K}_{ij,s} = \Gamma^{s/2} \mathbf{K}_{i,j,1} \Gamma^{s/2} (i, j = 1, 2), \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma & \\ & \gamma^3 \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{K}_{i,j,s}$  – соответствующие блоки матриц  $s$ -го элемента.

Для удовлетворения условиям динамического фрактала необходимо потребовать, чтобы инерционные элементы диска – масса  $m_s$  и момент инерции  $J_s$  – менялись с таким же масштабом, т.е.

$$m_s = \gamma m_{s-1}, \quad J_s = \gamma^3 J_{s-1}.$$

Таким образом, в отличие от одномерной ячейки здесь каждая степень свободы может иметь свой коэффициент подобия, и поэтому теперь необходимо вводить в рассмотрение матрицу подобия  $\Gamma$ . Тогда уравнение (11) для фрактальной балки в матричном виде:

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(s-1)/2} \mathbf{K}_{21,s-1} \Gamma^{(s-1)/2} \mathbf{x}_{s-1} + \\ & + (-\omega^2 \mathbf{M}_s + \Gamma^{(s-1)/2} \mathbf{K}_{22,s-1} \Gamma^{(s-1)/2} + \\ & + \Gamma^{s/2} \mathbf{K}_{11,s} \Gamma^{s/2}) \mathbf{x}_s + \Gamma^{s/2} \mathbf{K}_{12,s} \Gamma^{s/2} \mathbf{x}_{s+1} = 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} m_s & \\ & J_s \end{bmatrix}$ .

Это уравнение в конечных разностях с переменными, зависящими от  $s$  коэффициентами. Применяем, как и выше, преобразование координат  $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_s^* \Gamma^{-s/2}$ . Тогда в новых координатах найдем для  $s$ -го узла балки:

$$\begin{aligned} & \Gamma^{-1/2} \mathbf{K}_{21} \mathbf{x}_{s-1}^* + (-\mathbf{M}_s \omega^2 + \Gamma^{-1/2} \mathbf{K}_{22} \Gamma^{-1/2} + \\ & + \mathbf{K}_{11}) \mathbf{x}_s^* + \mathbf{K}_{12} \Gamma^{-1/2} \mathbf{x}_{s+1}^* = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, получили уравнение в конечных разностях с коэффициентами, не зависящими от номера ячейки, т.е. уравнение периодической структуры. Для физической интерпретации упругой части уравнения (12) представим выражение, стоящее в скобках, в виде:

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_{11} + \Gamma^{-1/2} \mathbf{K}_{22} \Gamma^{-1/2} = \Gamma^{-1/2} (\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22}) \Gamma^{-1/2} + \Delta \mathbf{K}, \\ & \Delta \mathbf{K} = \mathbf{K}_{11} - \Gamma^{-1/2} \mathbf{K}_{11} \Gamma^{-1/2}. \end{aligned}$$

Тогда замечаем, что уравнение (12) описывает регулярную структуру, состоящую из одинаковых

балочных элементов вида (10), но имеющих в каждом узле дополнительное закрепление  $\Delta \mathbf{K}$ . Это дополнительное закрепление представляет собой балку, жесткость которой пропорциональна разности между жесткостями балок первого и второго участков.

В заключение отметим, что рассмотренные выше динамические фракталы можно рассматривать как элементы метаматериала. Их применение может оказаться успешным в силу их компактности, а также увеличения интенсивности затухания (или усиления) входного сигнала.

### ВЫВОДЫ

1. Введено понятие динамически-самоподобной структуры (динамического фрактала), заключающееся в подобии динамических параметров образующих ячеек.

2. Доказана частотная эквивалентность динамического фрактала и периодической структуры с дополнительным закреплением масс.

3. В динамических фракталах с увеличивающимися по длине параметрами происходит более интенсивное снижение уровня колебаний по сравнению с периодическими структурами, что важно для систем виброизоляции.

4. В динамических фракталах с уменьшающимися по длине параметрами:

– возникают неоднородные волны с усилением входного сигнала, что отличает динамический фрактал от периодической структуры, в которой не происходит усиления сигнала;

– частота пропускания гармонического сигнала динамического фрактала находится в области непропускания периодической структуры, но достаточно близко к ее границе.

5. В многомерных неразветвленных цепочках каждая степень свободы может иметь свой коэффициент подобия, поэтому необходимо рассмотреть матрицу подобия.

Автор благодарит проф. Ю.И. Бобровницкого за обсуждение работы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Acoustic metamaterials and phononic crystals / Ed. Deumier P.A. Berlin: Springer-Verlag. 2013. 378 p.
2. Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М. Поглощение звука и метаматериалы (Обзор) // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 5. С. 517–525.
3. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
4. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
5. Зосимов В.В., Лямшев Л.М. Фракталы и скейлинг в акустике (обзор) // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 5. С. 709–737.

6. *Копыл Е.А., Лысанов Ю.П., Лямшев Л.М.* Рассеяние звука случайными фрактальными неоднородностями в океане // Акуст. журн. 2012. Т. 48. С. 517–522.
7. *Лямшев Л.М., Урусовский И.А.* Дифракция звука на ковре Серпинского // Акуст. журн. 2003. Т. 49. С. 820–823.
8. *Vanakh L.Ya., Kempner M.L.* Vibrations of mechanical systems with regular structure. Springer, 2010. 262 p.
9. *Банах Л.Я., Бармина О.В.* Колебания самоподобных структур в механике // Проблемы машиностроения и надежность машин. 2013. № 2. С. 3–9.
10. *Карман Т., Био М.* Математические методы в инженерном деле. М.: Гостехиздат, 1948. 424 с.
11. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
12. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 502 с.
13. *Карлов Н.В., Кириченко Н.А.* Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит, 2008. 496 с.
14. *Миронов М.А.* Распространение изгибающей волны в пластине, толщина которой плавно уменьшается до нуля на конечном интервале // Акуст. журн. 1988. № 3. С. 546–547.
15. *Миронов М.А., Писляков В.В.* Одномерные волны в замедляющих структурах со скоростью распространения, стремящейся к нулю // Акуст. журн. 2002. № 3. С. 400–405.
16. *Постнов В.А., Хархурим И.А.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 341 с.



УДК 534.06.15

## КОЛЛИМАЦИЯ АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ДВУМЕРНЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ С НУЛЕВЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

© 2020 г. В. И. Голованов<sup>а</sup>, К. Ф. Шипилов<sup>а, \*</sup>

<sup>а</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, Москва, Россия

\*e-mail: kfship@kapella.gpi.ru

Поступила в редакцию 04.03.2019 г.

После доработки 04.09.2019 г.

Принята к публикации 05.09.2019 г.

Приведены результаты экспериментального исследования формирования акустического излучения периодическими структурами с нулевым показателем преломления. Частотные зависимости показателей преломления структур в акустическом диапазоне частот построены на основании ранее полученных данных в СВЧ диапазоне. Измерения показали, что в частотной области, где показатель преломления структуры меняет знак, генерируется плоская волна, нормальная к поверхности структуры, акустическое излучение которой концентрируется и обладает узкой диаграммой направленности. Отмечены направления исследований, где такие структуры могут найти приложения.

*Ключевые слова:* двумерная периодическая структура, нулевой показатель преломления, спиральные катушки, фононный кристалл, плоский волновой фронт

DOI: 10.31857/S0320791920010050

Пятьдесят лет тому назад В.Г. Веселаго [1] проанализировал особенности поведения необычных сред, обладающих одновременно отрицательными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей и отрицательным показателем преломления, и показал, что для таких сред характерна необычная реализация ряда явлений электродинамики и оптики: закона Снеллиуса, эффектов Доплера и Черенкова, формул Френеля, принципа Ферма и других.

Появление новых научных представлений, полученных в исследованиях физики фотонных кристаллов и метаматериалов с отрицательным и нулевым эффективными показателями преломления, вызывает необходимость решения конкретных научных проблем. В работе [2] рассмотрена возможность существования в акустике сред, аналогичных по ряду эффектов электродинамическим левым средам. Показано, что механическими аналогами отрицательных диэлектрической и магнитной проницаемостей являются плотность и сжимаемость среды. Использование уникальных свойств периодических структур с нулевым значением эффективного показателя преломления позволит формировать излучение с большой длиной волны и нулевым значением набега фазы на активной длине структуры, управлять пространственным распределением и расхо-

димостью акустического излучения, а также найти пути формирования так называемых экранирующих плащей-невидимок.

В материале с нулевым показателем преломления волна “раздвигается” настолько, что по всей своей длине в каждый момент времени обладает одним и тем же значением фазы. Волна осциллирует только во времени, но не в пространстве.

Последние несколько лет активно исследуются особенности поведения акустических метаматериалов с почти нулевым показателем преломления [3–6]. Так, в [3] сообщено о первой экспериментальной реализации согласования акустических импедансов с помощью метаматериала с дважды нулевым показателем преломления в частотном диапазоне конуса Дирака в центре зоны Бриллюэна. Это осуществлено в двумерном волноводе из метаматериала, который образован периодической структурой цилиндрических воздушных каналов. Изменяя высоту и диаметр воздушных каналов, можно управлять акустической дисперсией волноводной моды первого порядка. В работе [4] исследовано прохождение акустической волны через волновод из материала с нулевым показателем преломления, в котором имеется дефект среды. Экспериментально показано, что полную передачу и полное отражение акустического сигнала можно осуществить, меняя параметры введенного де-

фекта. В работе [5] теоретически исследовано пропускание волноводной структуры с нулевым показателем преломления, в которую введен прямоугольный дефект. Показано, что, вводя соответствующий прямоугольный дефект, можно добиться полного пропускания или отражения данной структурой. Кроме того, проведено компьютерное моделирование пропускания лабиринтоподобного метаматериала, плотность эффективной массы и эффективная сжимаемость которого одновременно близки к нулевому значению. Показано, что с помощью соответствующего прямоугольного дефекта можно изменять коэффициент пропускания такой структуры от 0 до 1. В работе [6] показано, что с помощью метаматериала с почти нулевым модулем всестороннего сжатия можно осуществить суперсвязь между рассогласованными акустическими каналами. Предложенный авторами метаматериал образован периодической структурой из микрорезонаторов Гельмгольца внутри узкого канала. Теоретические и экспериментальные исследования продемонстрировали, что этот метаматериал может обеспечить максимальное пропускание даже при сильном геометрическом рассогласовании звуковых каналов, а также значительную концентрацию энергии в узком канале на некоторых частотах. Показано, что механизм согласования импедансов обусловлен нулевым модулем всестороннего сжатия, а также резонансом Фабри–Перо.

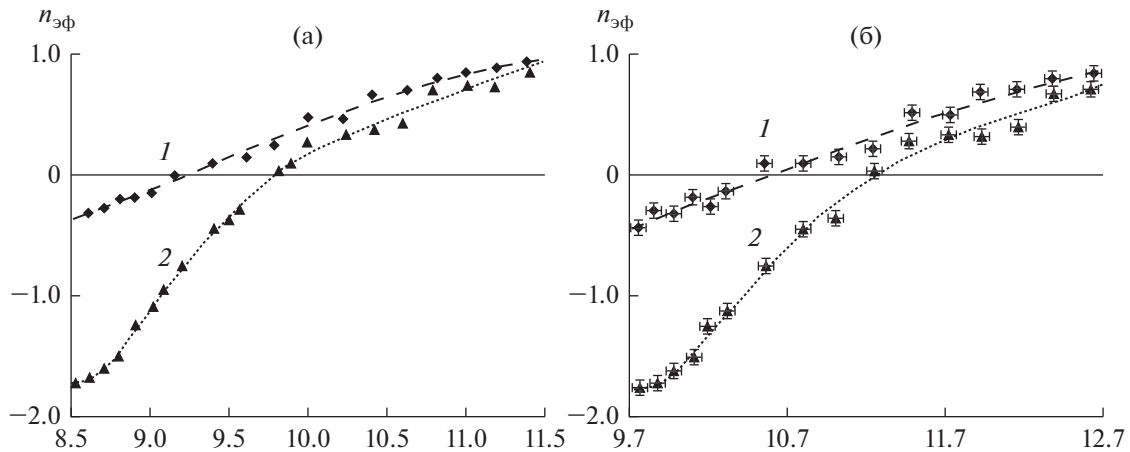
В последнее время активно исследуются особенности поведения и возможные практические приложения сплошных сред с близким к нулю значением диэлектрической проницаемости и, как следствие, с близким к нулю показателем преломления в электромагнитном диапазоне. Мы исследовали в этом диапазоне дискретные периодические структуры. Для них можно ввести эффективный показатель преломления, который позволяет описать поведение излучения, распространяющегося в периодической среде как в кристалле, характеристические параметры которого (постоянная кристаллической решетки, размеры элементов решетки) сравнимы с длиной волны излучения. Волновые свойства периодических структур обычно исследуются только для одного типа волн и соответствующего диапазона частот — электромагнитном или акустическом. Но одна и та же структура, при выполнении некоторых условий на параметры структуры и возбуждающее излучение, может, как показали наши исследования [7, 8], успешно работать в обоих диапазонах. В настоящей работе мы провели исследование двух периодических структур, специально разработанных для электромагнитного диапазона, и в акустическом диапазоне.

Одна периодическая 2D структура была образована из цилиндрических спиральных катушек (соленидов), имеющих 30 витков из медной про-

волоки диаметром 2.5 мм. Внешний диаметр катушек — 20 мм, шаг намотки — 5 мм, высота — 150 мм. Катушки закручены в одну сторону, закреплены соосно и образуют в поперечном сечении двумерную треугольную периодическую структуру класса  $p_3$  — кристалл в виде плоскопараллельной пластины с внешними размерами  $90 \times 170 \times 150$  мм. Постоянная треугольной структуры здесь  $a = 30$  мм. Измерения частотной зависимости [8] эффективного показателя преломления в СВЧ-диапазоне от 8.5 до 12 ГГц проведены с помощью двухлучевого гибридного интерферометра по двум направлениям  $[110]$  и  $[\bar{1}\bar{1}0]$ . Они показали, что при частоте излучения  $\sim 9.3$  ГГц для направления  $[\bar{1}\bar{1}0]$  и  $\sim 9.8$  ГГц для направления  $[110]$  эффективный показатель преломления периодической структуры меняет знак и при меньших значениях частоты излучения становится отрицательным, рис. 1а. Проведенные измерения показали, что в этом диапазоне частот, когда средняя длина волны излучения ( $\lambda = 3$  см) много больше шага намотки катушек и диаметра медной проволоки, а медь имеет малую глубину скин-слоя, цилиндрические спиральные катушки работают как медные цилиндры с высоким коэффициентом отражения.

Проведено исследование формирования излучения периодической структурой, образованной катушками, в той области частот, где значение эффективного показателя преломления приближается к нулю. Если эффективный показатель преломления периодической структуры достаточно мал, то, согласно закону преломления Снеллиуса, поле излучения от структуры будет сосредотачиваться вокруг направления, перпендикулярного к ее границе. Следовательно, будет генерироваться плоская волна, нормальная к поверхности структуры, Действительно,  $\sin\phi/\sin\psi = n_2/n_1$ , где  $\phi$  — угол падения волны из среды,  $\psi$  — угол преломления,  $n_1$  и  $n_2$  — показатели преломления среды и воздуха. В качестве источника излучения использован полуволновый вибратор, помещенный в середину структуры, между катушками. Выходящее из структуры излучение с частотой 9.45 ГГц, где эффективный показатель преломления структуры близок к нулевому значению ( $n_{эф} \approx 0.09$ ), концентрировалось в узкий лепесток с полной шириной диаграммы направленности  $\sim 9^\circ$  на половине интенсивности. С другой стороны, полная ширина диаграммы направленности излучения с частотой 9.0 ГГц ( $n_{эф} \approx -0.8$ ) составляла около  $50^\circ$  и излучения с частотой 10.2 ГГц ( $n_{эф} \approx 0.4$ ) — около  $30^\circ$  [8].

Несмотря на разную природу формирования электромагнитных и акустических волн, закономерности, которые определяют их распространение, имеют между собой много общего. Поэтому было проведено исследование этой же периодической структуры в акустическом диапазоне частот от 9.7 до 13.8 кГц. В этом диапазоне частот



**Рис. 1.** Частотные зависимости эффективного показателя преломления кристалла из спиралей: 1 – направление  $[\bar{1}10]$ , 2 – направление  $[110]$ ; (а) – в СВЧ диапазоне 8.5–11.5 ГГц; (б) – в акустическом диапазоне 9.7–12.7 кГц при  $T = 18^\circ\text{C}$ ,  $h = 85\%$ .

длина волны акустического излучения в воздухе изменяется от приблизительно 2.5 до 4 см, как и в случае электромагнитного излучения СВЧ диапазона. Здесь также средняя длина волны излучения ( $\lambda = 3$  см) много больше шага намотки катушек и диаметра медной проволоки, цилиндрические спиральные катушки работают как медные цилиндры с высоким характеристическим импедансом по сравнению с характеристическим импедансом окружающей их воздушной среды и коэффициент проникновения акустической волны в медные цилиндры менее чем  $10^{-5}$ . Поэтому эффективные граничные условия в обоих диапазонах будут аналогичны, и можно предположить, что как электромагнитная, так и акустическая волны будут распространяться в этой периодической структуре одинаковым образом в соответствии с общими волновыми законами. Следовательно, эффективный показатель преломления периодической структуры, измеренный в электромагнитном диапазоне, будет справедлив и для акустических волн с теми же длинами волн.

Проведено исследование формирования акустического излучения периодической структурой, образованной катушками, в той области частот, где значение эффективного показателя преломления приближается к нулю. Эти экспериментальные измерения мы проводили в осенний период, когда существенно изменялись температура  $T$ , влажность  $h$  и давление воздуха в лабораторном помещении. Данное обстоятельство требует учета немонотонности, характерной для зависимости скорости звука в воздухе от его температуры и влажности. Для оценки скорости звука во влажном воздухе при разных температурах и давлениях были использованы данные из работ [9, 10]. С учетом этих оценок были пересчитаны и пере-

несены в акустический диапазон частотные зависимости эффективного показателя преломления периодической структуры в двух направлениях  $[110]$  и  $[\bar{1}10]$ , измеренные в микроволновом диапазоне. При частоте акустического излучения  $\sim 10.5$  кГц для направления  $[\bar{1}10]$  и  $\sim 11.2$  кГц для направления  $[110]$  эффективный показатель преломления меняет знак, рис. 1б.

Вблизи этих частот, где значение эффективного показателя преломления приближается к нулю, проведено исследование формирования излучения периодической структурой, образованной катушками. Для измерения диаграммы направленности излучения, выходящего из кристалла в направлении  $[\bar{1}10]$ , излучатель (низкопрофильный компактный динамик 28сR08FB) помещали внутри 2D кристалла, а приемник излучения (конденсаторный электретный односторонне направленный микрофон МКЭ-9) устанавливали в дальней зоне на расстоянии 250 см от образца. Сигнал с приемника излучения подавали на усилитель Selective Nanovoltmeter type 237 Unipan. На рис. 2а представлены диаграммы направленности излучения с частотой 10.4 кГц ( $n_{эф} \leq 0.1$ ), с частотой 11.5 кГц ( $n_{эф} \approx 0.5$ ) и с частотой 9.5 кГц ( $n_{эф} \approx -0.3$ ). Как можно видеть, излучение концентрировалось в узкий лепесток с полной шириной диаграммы направленности  $\sim 10^\circ$  на половине интенсивности. Проведено также измерение диаграммы направленности излучения, выходящего из кристалла в направлении  $[110]$ , но теперь излучатель располагали снаружи кристалла. Излучение с частотой 11.3 кГц, где эффективный показатель преломления структуры близок к нулевому значению ( $n_{эф} \leq 0.1$ ), концентрировалось в узкий лепесток с полной шириной диаграммы направленности  $\sim 10^\circ$  на половине интенсивности, рис. 2б.

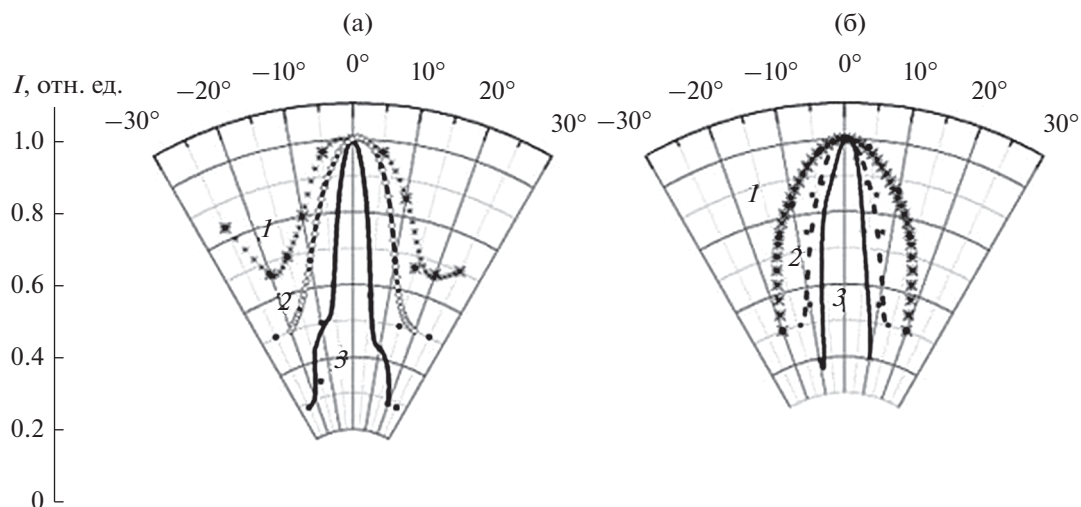


Рис. 2. Диаграмма направленности акустического излучения кристалла из спиралей: (а) – направление  $[1\bar{1}0]$ : 1 – 11.5, 2 – 9.5, 3 – 10.4 кГц; (б) – направление  $[110]$ : 1 – 12, 2 – 10, 3 – 11.3 кГц

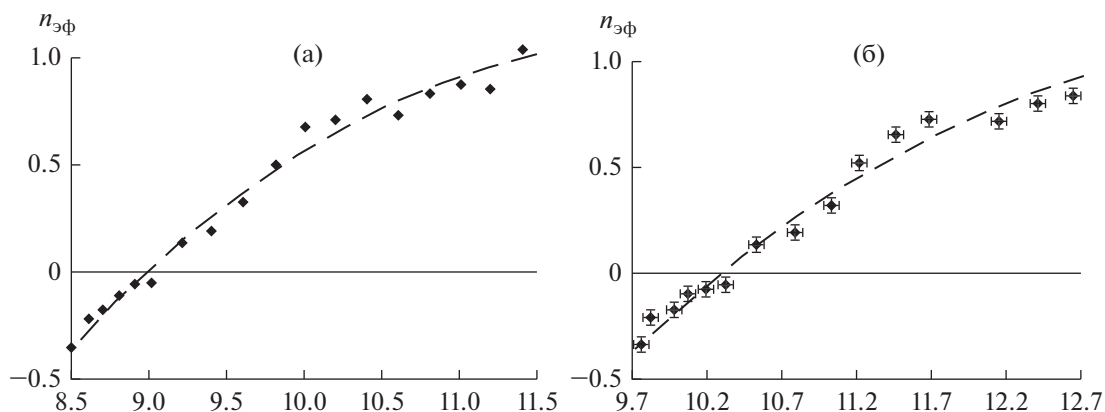


Рис. 3. Частотные зависимости эффективного показателя преломления кристалла из цилиндров в направлении  $[110]$ : (а) – в СВЧ диапазоне 8.5–11.5 ГГц, (б) – в акустическом диапазоне 9.7–12.7 кГц при  $T = 19^\circ\text{C}$ ,  $h = 90\%$ .

Представлялось чрезвычайно важным обеспечить минимальные потери звука в периодической структуре. Это условие легко выполнимо для воздуха при длине волны  $\lambda \sim 3$  см, когда длина затухания волны составляет  $\sim 250$  м. Потери в стальных стержнях также невелики, тем более что коэффициент отражения от них чрезвычайно близок к единице из-за огромной разницы акустического импеданса стали и воздуха. Поэтому другая двурядная периодическая структура была образована стальными цилиндрическими стержнями диаметром 16 мм и длиной 220 мм. Она имела треугольную периодическую структуру класса  $p_3$ , с постоянной  $a = 30$  мм. Проведены измерения частотной зависимости эффективного показателя преломления этой структуры в направлении  $[110]$ , рис. 3а. Затем эти данные были пересчитаны по описанной выше методике в акустический

диапазон и представлены на рис. 3б. Проведены измерения диаграммы направленности точечного источника излучения, формируемого 2D структурой в области частот, где эффективный показатель преломления близок к нулевому значению. Результаты измерений представлены на рис. 4. Как видно, и в этом случае излучение с частотой 10.3 кГц концентрировалось в узкий лепесток с полной шириной диаграммы направленности  $\sim 12^\circ$  на половине интенсивности.

Полученные экспериментальные результаты могут быть использованы в дальнейшем для теоретического рассмотрения, описания и сопоставления волновых процессов взаимодействия обоих видов излучения с подобными периодическими структурами и формирования с их помощью полей излучений с необходимой диаграммой направленности.

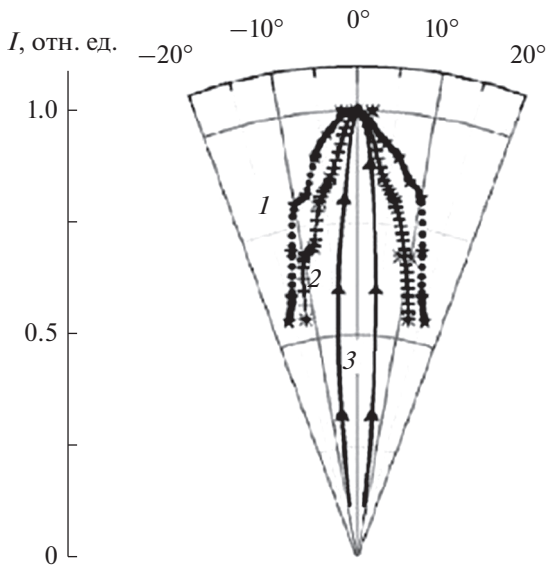


Рис. 4. Диаграмма направленности акустического излучения кристалла из цилиндров в направлении [110]: 1 – 11.7, 2 – 10, 3 – 10.3 кГц.

Таким образом, структура с нулевым эффективным показателем преломления позволяет управлять пространственным распределением и расходимостью акустического излучения, проходящего через структуру. Несомненно, что эта особенность структур – формирование полей излучения с плоским волновым фронтом – может найти разнообразные применения, например, в методе радиоакустического дистанционного зондирования атмосферы в акустическом диапазоне частот [11]. Метод основан на зависимости скорости распространения звука от температуры, давления, влажности и скорости движения среды. Для определения скорости звука используется явление частичного отражения радиоволн от движущейся в атмосфере пространственной решетки неоднородностей плотности воздуха, создаваемой относительно мощным источником звука. Путем доплеровской радиолокации цуга акустических волн можно дистанционно, с поверхности Земли, измерить вертикальные профили таких метеорологических параметров, как температура, влажность воздуха и скорость ветра. Другое возможное приложение структура может найти в методе резонансного распределенного отражения пучка электромагнитного излучения от прошедшего через границу раздела вода–воздух акустического пучка [12]. Здесь тоже существенное влияние на эффективность регистрации имеет кривизна волнового профиля акустического излучения.

В дальнейшем мы предполагаем исследовать нелинейные взаимодействия в периодических структурах с нулевым показателем преломления, помещенных в жидкие среды.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме “Оптические и акустические методы исследования многофазных конденсированных сред и воздействия на их структуру” (номер государственной регистрации АААА-А18-118021390190-1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Веселаго В.Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями  $\epsilon$  и  $\mu$  // Успехи физ. наук. 1967. Т. 92. Вып. 3. С. 517–526.
2. *Буров В.А., Дмитриев К.В., Сергеев С.Н.* Акустические “дважды отрицательные” среды // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 3. С. 292 – 306.
3. *Wei Zh., Yuting Y., Zhi T., Zhi H.H.* Tunable transmission and deterministic interface states in double-zero-index acoustic metamaterials // Scientific Reports. 2018. V. 8. P. 1–9. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-24773-6>
4. *Wang Z., Yang F., Liu L.B., Kang M., Liu F.* Total transmission and total reflection of acoustic wave by zero index metamaterials loaded with general solid defects // J. Applied Physics. 2013. V. 114(19). P. 2–12.
5. *Ji W.-Q., Wei Q., Zhu X.-F.* Manipulation of acoustic transmission by zero-index metamaterial with rectangular defect // J. Applied Physics. 2017. V. 122(21). P. 215103–215133. <https://doi.org/10.1063/1.4997801>
6. *Zhang X., He Z., Wang G.* Extraordinary sound transmission through geometrical mismatched channels based on near zero bulk modulus and Fabry–Pérot resonance // J. Phys. D: Appl. Phys. 2019. V. 52. 055301 (7pp).
7. *Виноградов Е.А., Бабинцев В.А., Веселаго В.Г., Голованов В.И., Шипилов К.Ф.* // О сверхразрешении плоских линз на основе фононных и фотонных кристаллов // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2011. № 8. С. 3–10.
8. *Golovanov V.I., Martynov A.P., Shipilov K.F.* // 2D periodic structure for acoustic and electromagnetic radiation // Phys. Wave Phenomena. 2018. V. 26. № 4. P. 323–326.
9. Handbook of the speed of sound in real gases. V.3. Speed of sound in air. Ed. by *Zuckerwar A.J.* San Diego, USA: Academic Press, 2002. 290 p.
10. *Shipilov K.F.* Calculation of humidity dependence on speed of sound in air using Kramers–Kronig relations // Phys. Wave Phenomena. 2004. V. 12. № 4. P. 228–232.
11. *Калистратова М.М., Кон А.И.* Радиоакустическое зондирование атмосферы. М.: Наука, 1985. 222 с.
12. *Ассман В.А., Бункин Ф.В., Виноградов Е.А., Голованов В.И., Ляхов Г.А., Суязов Н.В., Шипилов К.Ф.* Распределенное отражение электромагнитного излучения от бегущей акустической решетки в двухслойной среде // ЖТФ. 1991. Т. 15. № 5. С. 72–76.

УДК 534.6

## ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИЙ РЕЗОНАТОР ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СОНОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ

© 2020 г. Р. В. Козабаранов<sup>а</sup>, В. А. Борисенко<sup>а, \*</sup>, И. Н. Диденкулов<sup>б, с</sup>, А. С. Буркацкий<sup>а</sup>,  
А. С. Егоров<sup>а</sup>, Д. А. Литвинов<sup>а</sup>, В. В. Чернов<sup>б</sup>

<sup>а</sup>Саровский физико-технический институт НИЯУ МИФИ,  
ул. Духова 6, Саров, Нижегородской обл., 607182 Россия

<sup>б</sup>Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук,  
ул. Ульянова 46, Нижний Новгород, 603155 Россия

<sup>с</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,  
пр. Гагарина 23, Нижний Новгород, 603022 Россия

\*e-mail: VABorisenok@mephi.ru

Поступила в редакцию 03.06.2019 г.

После доработки 09.10.2019 г.

Принята к публикации 29.10.2019 г.

Приведены результаты численного моделирования и экспериментального исследования цилиндрического резонатора для получения сонолюминесценции, изготовленного целиком из пьезокерамики. Представлены данные о получении и исследовании одно- и многопузырьковой сонолюминесценции в системе вода–воздух. Показано, что условия для возникновения сонолюминесценции создаются в пьезокерамическом резонаторе при электрических напряжениях, значения которых меньше на порядок величины, чем в резонаторах других типов.

*Ключевые слова:* пьезокерамический резонатор, сонолюминесценция

**DOI:** 10.31857/S0320791920020045

### ВВЕДЕНИЕ

Сонолюминесценция (СЛ) – явление импульсного излучения света пузырьками газа (пара, паровой смеси) в жидкости под действием акустического поля [1–3]. Согласно литературным данным [1–3], получение и исследование СЛ, в основном, проводят с помощью сферических или цилиндрических резонаторов. Резонаторы изготавливают из стекла, заполняют рабочей жидкостью с растворенным в ней газом. Волновой процесс в жидкости возбуждают двумя или большим количеством пьезоэлектрических элементов, закрепленных попарно в диаметрально противоположных точках экватора сферического резонатора или на торцевых крышках цилиндрического резонатора. Для последнего, в ряде случаев, используют небольшой кольцевой пьезоэлемент [4]. Для получения необходимой амплитуды акустического поля при возбуждении таких резонаторов приходится прикладывать высокое напряжение к пьезокерамическим элементам. Кроме того, наличие дополнительных масс в виде пьезокерамических элементов на стенках колбы искажает сферически-симметричные моды колебаний.

В настоящей работе приведены результаты исследования цилиндрического резонатора, изготовленного целиком из пьезокерамики. Особенностью такого резонатора является то, что акустические волны в жидкости возбуждаются движением всей поверхности стенки, что может привести к созданию своеобразной волновой картины. Вследствие большой площади поверхности пьезокерамики в таком резонаторе легче возбудить акустические волны необходимой амплитуды при существенно меньших прикладываемых электрических напряжениях. Кроме того, в таком резонаторе по сравнению с классической схемой стеклянного резонатора с приклеенными небольшими пьезокерамическими элементами легче возбудить симметричные моды колебаний, необходимые для наблюдения СЛ.

Исследован резонатор, изготовленный из пьезокерамики системы цирконата-титаната бария-свинца марки ЦТБС-3 со следующими размерами: внутренний диаметр – 65.5 мм, толщина стенки – 4.7 мм, высота – 49.8 мм. Цилиндрические поверхности покрыты электродами из воздушного серебра толщиной ~10 мкм. Пьезокерамика поляризована по радиусу. Электрическая емкость резонатора 49 нФ (на частоте  $f = 1$  кГц). Нижний торец резонатора закрыт крышкой из силикатного стекла толщиной 4 мм.

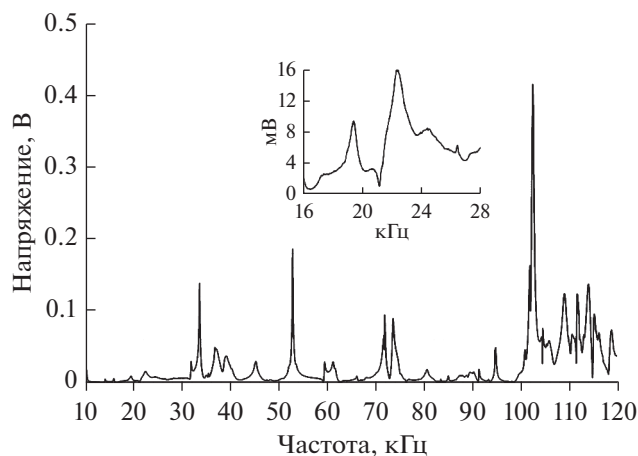


Рис. 1. Частотная характеристика резонатора.

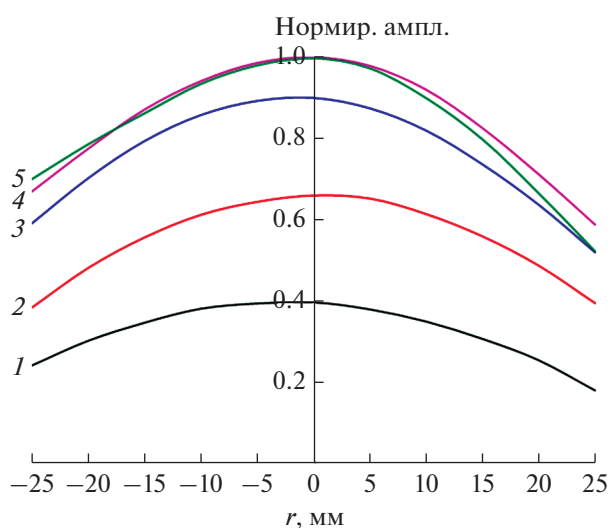


Рис. 2. Нормированные радиальные профили амплитуды давления в цилиндрическом резонаторе на частоте 19.08 кГц на глубинах от поверхности воды: 1 – 5, 2 – 10, 3 – 15, 4 – 20, 5 – 25 мм.

Проведено численное моделирование работы резонатора, измерен ряд его характеристик, проведены эксперименты по получению и измерению некоторых характеристик однопузырьковой (ОПСЛ) и многопузырьковой (МПСЛ) сонолюминесценции в системе вода–воздух.

## 1. ИЗМЕРЕНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РЕЗОНАТОРА

Измерена частотная характеристика резонатора и распределение акустического давления по его объему. Для проведения исследований использована экспериментальная установка, в состав которой входили: генератор Tektronix AFG 3102C; усилитель мощности AR350AH1 со спек-

тральным диапазоном 10 Гц–1 МГц; пьезокерамический резонатор, заполненный жидкостью, высота столба которой 40 мм; игольчатый гидрофон фирмы Precision Acoustics, с размером рабочей части  $\varnothing 1.0 \times 30$  мм и спектральным диапазоном 10 кГц–60 МГц; цифровой осциллограф Le Croy WR625Zi с полосой пропускания 2.5 ГГц.

Опыты по измерению частотной характеристики проведены с дегазированной дистиллированной водой в диапазоне частот 0–120 кГц. Для всех экспериментов воду дегазировали до концентрации растворенного кислорода ~20% от его концентрации при нормальных условиях. Для дегазации использовали установку, состоящую из форвакуумного насоса, соединенного с герметичным сосудом. Мерой дегазации служила концентрация кислорода, измеренная кислородомером АТЕ-3012. После дегазации вода охлаждалась до температуры 5–7°C. Измерительный гидрофон размещался вертикально по оси цилиндра, его чувствительный элемент находился на глубине 20 мм. На резонатор подавалось напряжение синусоидальной формы амплитудой ~10 В. Результаты измерений частотной характеристики приведены на рис. 1.

На частотной характеристике во всем диапазоне частот видно множество резонансов. На вкладке более подробно представлен диапазон 16–28 кГц. Было установлено, что на частоте 19.08 кГц имеется резонанс, при котором обеспечивается один максимум в центре резонатора. Этот резонанс соответствует основной радиальной моде. Дальнейшая работа проводилась на этой резонансной частоте, так как данная мода создает условия для левитации и сонолюминесценции одиночного пузырька в центре нашего резонатора. Более высокочастотные резонансы соответствуют более высоким радиальным, азимутальным и глубинным модам.

Измерения распределения амплитуды (профиля) давления в резонаторе проводили на выбранной резонансной частоте 19.08 кГц. В опытах гидрофон перемещали вдоль диаметральной линии с помощью специального устройства с шагом 5 мм. Результаты измерений приведены на рис. 2.

Численное моделирование акустического поля в резонаторе проводилось методом конечных элементов с помощью программного комплекса Comsol, ver 5.2a, с использованием модулей Multiphysics, Solid mechanics, Acoustics, MEMS (микроэлектромеханические структуры, керамика). Расчет велся на осесимметричной модели, тип расчета – гармонический анализ (Frequency domain). Шаг сетки 3 мм, сетка треугольная. Расчет проводился для резонатора с реальными размерами для параметров пьезокерамики ЦТБС-3.

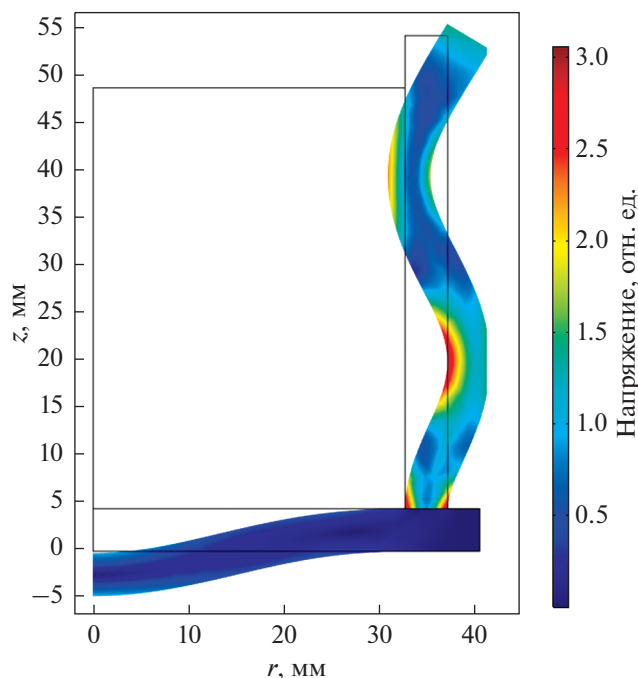


Рис. 3. Вид расчетных колебаний стенок и дна резонатора на частоте 19.88 кГц.

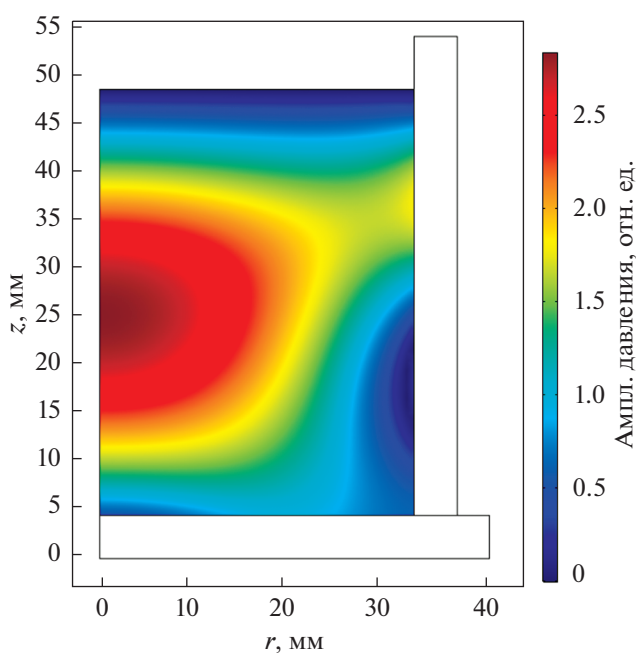


Рис. 4. Структура поля акустического давления в резонаторе на частоте 19.88 кГц.

В рамках расчета основной резонанс получился на частоте 19880 Гц, что немного отличается от экспериментально найденного резонанса на частоте 19080 Гц. Вид колебаний стенок резонатора на этой частоте приведен на рис. 3. Из рисунка можно сделать вывод о том, что цилиндрическая пьезокерамическая стенка резонатора совершает изгибные колебания, соответствующие второй моде, при этом стеклянное дно колеблется на первой моде. Связь этих мод осуществляется посредством слоя воды, заполняющего резонатор.

Структура поля давления в водном слое на этой резонансной частоте показана на рис. 4, из которого следует, что примерно в центре водного слоя формируется максимум амплитуды акустического поля. Акустическое поле убывает как при приближении к цилиндрической стенке, так и при приближении к поверхности и дну водного слоя.

На рис. 5 приведены рассчитанные радиальные профили амплитуды акустического поля в диаметральной плоскости резонатора на глубинах от 5 до 25 мм с шагом 5 мм, которые качественно соответствуют экспериментальным профилям на рис. 2.

Численное моделирование показало, что в акустическом резонаторе на основной резонансной частоте за счет связанных сложных колебаний пьезокерамической стенки и стеклянного дна формируется акустическое поле, имеющее максимум в центре водного слоя. В таком акустическом поле на маленький пузырек, резонансная

частота которого выше частоты акустического поля, действует сила радиационного давления, втягивающая его в центр резонатора и удерживающая его там. Таким образом, в резонаторе существуют условия для наблюдения сонолюминесценции одиночного пузырька.

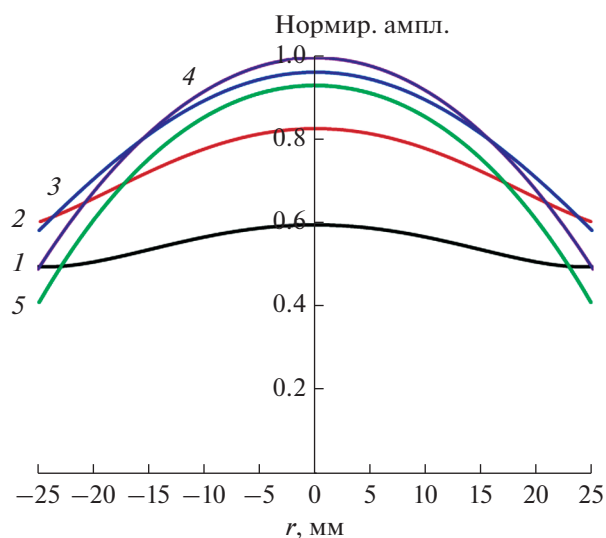


Рис. 5. Нормированные радиальные профили амплитуды давления в цилиндрическом резонаторе на частоте 19.08 кГц на глубинах от поверхности воды: 1 – 5, 2 – 10, 3 – 15, 4 – 20, 5 – 25 мм.





Рис. 6. Фотография светящегося пузырька.

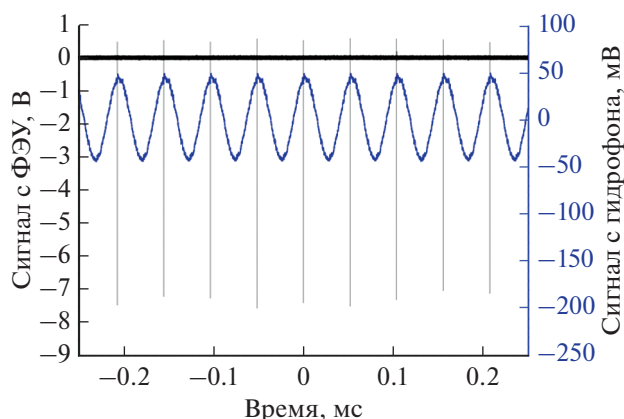


Рис. 7. Результат измерений сигналов с гидрофона и ФЭУ (ОПСЛ).

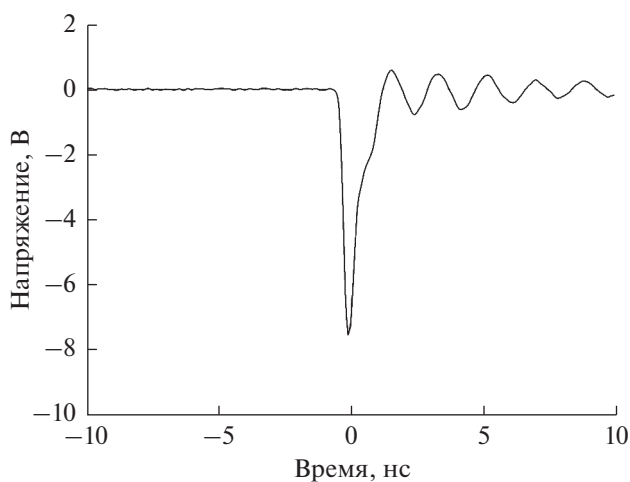


Рис. 8. Форма импульса с ФЭУ.

### 3. ПОЛУЧЕНИЕ И НАБЛЮДЕНИЕ ОДНОПУЗЫРЬКОВОЙ СОНОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ

В исследуемом резонаторе получена как однопузырьковая (ОПСЛ), так и многопузырьковая (МПСЛ) сонолюминесценция.

Для получения ОПСЛ использовали дистиллированную воду с удельным сопротивлением  $\sim 350$  кОм см при нормальных условиях. Пузырек формировали следующим образом. На резонатор подавали синусоидальное напряжение резонансной частоты  $\sim 19$  кГц амплитудой 5 В. Далее возмущали поверхность воды падением капли. При этом образовывались несколько пузырьков, которые устремлялись к центру резонатора и объединялись в один стабильный пузырек. Путем увеличения амплитуды возбуждающего сигнала до 50 В и тонкой подстройки частоты получали режим сонолюминесценции. Фотография светящегося пузырька приведена на рис. 6. Пузырек голубого цвета хорошо виден невооруженным глазом в затемненном помещении.

Для возбуждения резонатора использовали генератор Tektronix AFG 3102С, усилитель мощности AR 350АН1А и трансформатор IT1003 фирмы Amplifier Research. В течение всего опыта акустическое давление в жидкости мониторировали гидрофоном. Импульсы излучения регистрировали ФЭУ ТНФТ25-02 (спектральный диапазон 200–800 нм, временное разрешение  $\sim 1$  нс, диаметр фотокатода 25 мм), установленным у открытого верхнего торца резонатора, и осциллографом Le Croy 625Zi. Результат измерений приведен на рис. 7. Форма импульса с ФЭУ дана на рис. 8.

Осциллограммы сигналов (рис. 7) показывают, что в пьезокерамическом резонаторе получена стабильная однопузырьковая сонолюминесценция. Вспышка света генерируется в каждом акустическом цикле в момент времени, практически совпадающий с моментом максимума давления. В данном опыте амплитуда сигнала с ФЭУ составляет  $\sim 7$  В. Осциллограмма формы сигнала (рис. 8) указывает на то, что временное разрешение измерительного канала недостаточно для регистрации импульса излучения без искажения. Отметим, что для получения ОПСЛ в пьезокерамическом резонаторе на его обкладки нужно подать напряжение  $\sim 50$  В, что значительно меньше, чем в случае стеклянных резонаторов. В последнем случае на пьезоэлементы подают напряжение  $\sim 700$  В.

Спектр излучения измерялся спектрометром Ocean Optics QE Pro (спектральный диапазон 200–800 нм). Излучение транслировалось по оптическому каналу, состоящему из кварцевой линзы диаметром 25 мм и кварцевого волокна диаметром 0.6 мм и длиной 1 м. Канал был протестирован с использованием дейтериевой лампы Ocean

Optics P-2000 и “точечного” источника света: фотодиод и малое отверстие. Юстировка оптической системы проводилась с помощью лазера, включенного в оптический канал со стороны спектрометра. Результаты измерений приведены на рис. 9.

Серия измерений спектров, показанных на рис. 9, проведена с одним и тем же пузырьком в течение времени  $\sim 5$  мин. Максимальная интенсивность получена в первом измерении. Во время эксперимента температура воды постепенно увеличивалась, что, по нашему мнению, привело к уменьшению интенсивности излучения. Измеренный спектр по форме отличается от аналогичных измерений в работах [5, 6]. В [5] измерения проведены при акустических давлениях, близких к верхнему порогу области стабильности пузырька для получения максимальной яркости источника. Зарегистрированный в работе [5] спектр представляет собой гладкую кривую, растущую с уменьшением длины волны  $\lambda$  вплоть до  $\lambda = 200$  нм. В работе [6] при амплитудах акустического давления, близких к нижнему порогу области стабильности, авторы наблюдали в спектре системы вода–воздух линии ОН и ряд других линий, природа которых в [5] не определена. Возможно, в нашем случае получено некоторое промежуточное состояние системы, о чем свидетельствуют наличие в спектре слабой линии гидроксил-радикала ( $\lambda = 310$  нм) и другой линии ( $\lambda = 320$  нм).

Для определения влияния чистоты используемой воды на измерение спектра СЛ с помощью спектрофлуориметра СМ2203 (фирма Солар, Беларусь, спектральный диапазон 220–1100 нм) был определен коэффициент ее пропускания. Эти данные приведены на рис. 10.

Результаты измерений коэффициента оптического пропускания воды относительно воздуха, приведенные на рис. 10, демонстрируют, что эта характеристика воды практически не приводит к искажению спектра излучения СЛ.

#### 4. ПОЛУЧЕНИЕ И НАБЛЮДЕНИЕ МНОГОПУЗЫРЬКОВОЙ СОНОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ

Многопузырьковая сонолюминесценция наблюдалась в этом же резонаторе. При постепенном увеличении возбуждающего напряжения по достижении в резонаторе давлений, превышающих порог кавитации, в ней образовывались пузырьки, которые начинали излучать свет, т.е. реализовывалось явление многопузырьковой сонолюминесценции. В этих опытах использовалась недегазированная дистиллированная вода при температуре  $5.3^\circ\text{C}$ . Частота акустического поля составляла 33 кГц. На этой частоте, соответствующей другому, более сильному резонансу акустического поля, легко обеспечивался режим кавита-

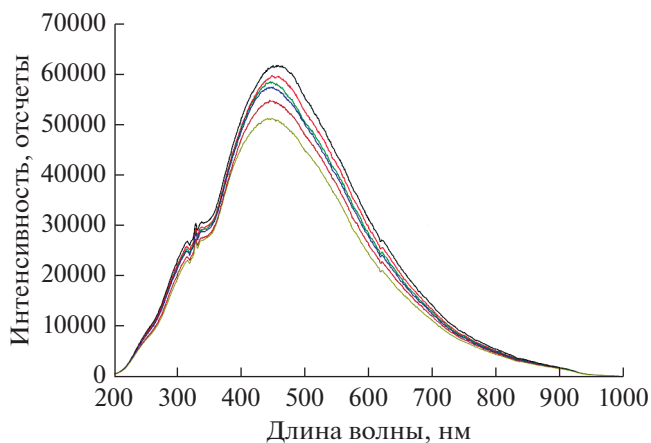


Рис. 9. Спектр однопузырьковой сонолюминесценции.

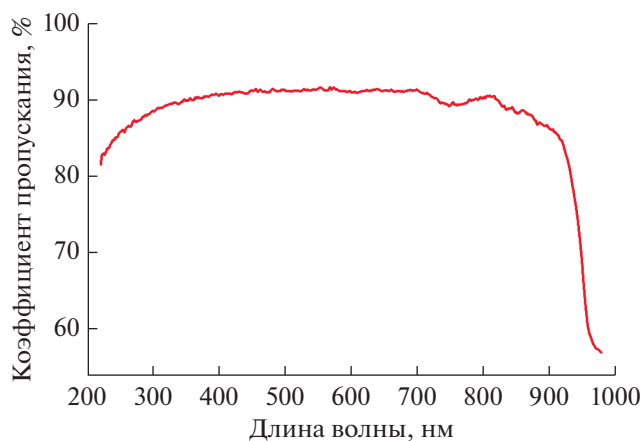
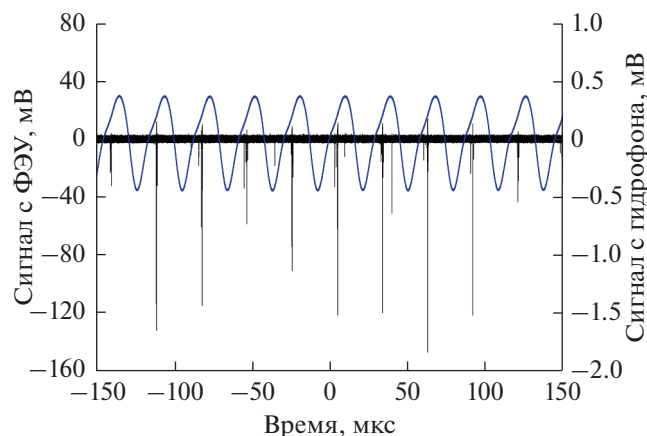


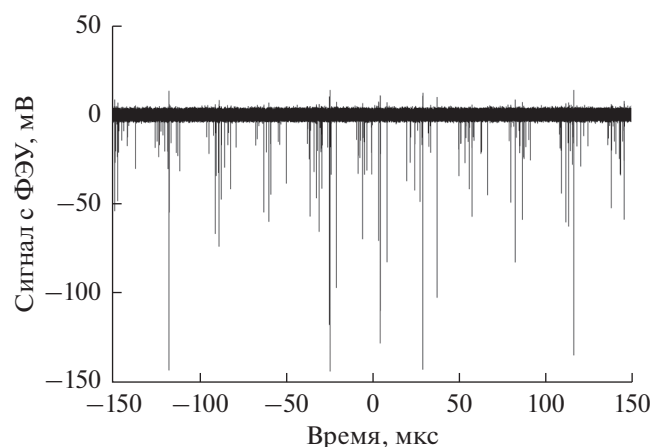
Рис. 10. Коэффициент пропускания воды относительно воздуха.

ции. Импульсы излучения МПСЛ регистрировались с помощью того же метода, что и ОПСЛ. Результаты измерений при двух значениях напряжения на резонаторе приведены на рис. 11 и 12. В опыте, соответствующем рис. 12, гидрофон не использовали из-за опасности его кавитационного повреждения. Отметим, что при кавитационном процессе часть пузырьков появляется вблизи стенок резонатора. В этом случае характер их колебаний может отличаться от монополярных [7], хотя в данных экспериментах детально наблюдать форму колебаний пузырьков не удалось.

Анализ осциллограмм показывает, что в экспериментах получена стабильная МПСЛ в недегазированной воде. Отметим, что амплитуды сигналов с ФЭУ не превышают 150 мВ. Это значительно меньше, чем в случае ОПСЛ. Недегазированная вода была выбрана из-за более низкого порога кавитации. Импульсы сонолюминесценции возникают при схлопывании пузырьков, а количество



**Рис. 11.** Оциллограмма сигналов с гидрофона и с ФЭУ при наблюдении МПСЛ. Напряжение на резонаторе 84 В.



**Рис. 12.** Оциллограмма сигналов с ФЭУ при наблюдении МПСЛ. Напряжение на резонаторе 95 В.

коллапсирующих пузырьков растет с ростом электрического напряжения на резонаторе.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе приведены результаты наблюдения однопузырьковой и многопузырьковой сонолюминесценции в цилиндрическом резонаторе из пьезокерамики. Показано, что в таком резона-

торе при сравнительно низких электрических напряжениях порядка нескольких десятков вольт создаются условия для возникновения сонолюминесценции. Наблюдение ОПСЛ проводилось на основной радиальной моде резонатора на частоте около 19 кГц. Численное моделирование акустического поля в резонаторе показало, что основная мода представляет собой изгибные колебания цилиндрической пьезокерамической стенки, при которой формируется максимум поля давления примерно в середине водного слоя. Синхронные измерения акустического поля в резонаторе и оптических импульсов проводилось как для ОПСЛ, так и для МПСЛ. МПСЛ наблюдалась при превышении порога кавитации при напряжении около 80 В. Таким образом, результаты работы показывают, что использование пьезокерамических резонаторов дает возможность сравнительно просто получить условия для возникновения и исследования сонолюминесценции, в особенности одиночного пузырька.

Работа частично выполнена в рамках госзадания ИФФ РАН 0035-2019-0009 (ИНД) и 0035-2019-0011 (ВВЧ).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brenner V.P., Hilgenfeld S., Lohse D.* Single-bubble sonoluminescence // *Rev. Mod. Phys.* 2002. V. 74. № 2. P. 425–484.
2. *Lauterborn W., Kurz T.* Physics of bubble oscillation // *Rep. Prog. Phys.* 2010. V. 73. P. 106501.
3. *Борисенко В.А.* Сонолюминесценция: эксперименты и модели (обзор) // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61. № 3. С. 333–360.
4. *Shapira D., Saltmarsh M.* Nuclear fusion in collapsing bubbles – it is there? An attempt to repeat the observation of nuclear emissions from sonoluminescence // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 89. № 10. P. 10302.
5. *Физические величины. Справочник.* Под редакцией Григорьева И.С. и Мейлихова Е.З. М.: Энергоатомиздат, 1991.
6. *Moran M., Sweider G.* Measurements of sonoluminescence temporal pulse shape // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80. № 22. P. 4987–4990.
7. *Максимов А.О., Половинка Ю.А.* Акустические проявления газового включения, расположенного вблизи межфазной границы // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 1. С. 22–32.

УДК 534.08;535.341;538.958

## ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ ПОСРЕДСТВОМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ЭКСТИНКЦИИ СВЕТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛАЗЕРНОГО ОПТИКО-АКУСТИЧЕСКОГО МЕТОДА

© 2020 г. Ю. Г. Соколовская<sup>a, \*</sup>, Н. Б. Подымова<sup>a</sup>, А. А. Карабутов<sup>b, c, d</sup>

<sup>a</sup>МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, ГСП-1,  
Ленинские горы 1, стр. 2, Москва, 119991 Россия

<sup>b</sup>МГУ имени М.В. Ломоносова, Международный учебно-научный лазерный центр,  
ГСП-1, Ленинские горы 1, стр. 62, Москва, 119991 Россия

<sup>c</sup>Национальный исследовательский технологический университет “МИСиС”,  
Ленинский пр-т 4, Москва, 119991 Россия

<sup>d</sup>ИПЛИТ РАН – филиал ФНИЦ “Кристаллография и фотоника” РАН,  
ул. Бутлерова 17А, Москва, 117342 Россия

\*e-mail: [yu.sokolovskaya@mail.ru](mailto:yu.sokolovskaya@mail.ru)

Поступила в редакцию 19.10.2019 г.

После доработки 12.12.2019 г.

Принята к публикации 24.12.2019 г.

Экспериментально реализован метод исследования структурной неоднородности и оптических свойств коллоидных сред. Представленный метод основан на зависимости временного профиля возбуждаемого в исследуемой среде оптико-акустического сигнала от коэффициента поглощения и рассеяния света в данной среде. В качестве исследуемых коллоидных растворов были взяты магнитные жидкости на основе воды и керосина с объемной концентрацией магнетита от 0.35 до 3.5%. Показано, что в магнитных жидкостях наблюдается увеличение коэффициента экстинкции света с глубиной, причем его относительное изменение зависит от концентрации частиц магнетита, от свойств несущей жидкости и от типа акустической границы. Наличие связи между концентрацией частиц и оптическими свойствами магнитной жидкости дает возможность использовать данный метод для определения объемного содержания магнетита в жидкости.

**Ключевые слова:** оптико-акустический эффект, лазерная оптико-акустическая диагностика, коэффициент экстинкции света, магнитные жидкости, коллоидные растворы, концентрация

**DOI:** 10.31857/S0320791920030065

### ВВЕДЕНИЕ

Магнитные жидкости благодаря своей особенной структуре и физическим свойствам находят широкое применение в науке и технике [1–3]. Они представляют собой сложную коллоидную систему, состоящую из частиц магнетита, несущей жидкости и стабилизатора [1, 2]. Исследование структуры и свойств магнитных жидкостей имеет фундаментальное научное и прикладное значение. Такие жидкости используются при создании герметизаторов, гидростатических сепараторов, демпферов, центростремительных датчиков и датчиков углов наклона, акселерометров [1, 4–7]. Отдельную группу составляют устройства, основанные на действии магнитооптических эффектов [1, 8, 9]. При наложении магнитного поля

структура магнитной жидкости меняется, образуя агрегаты частиц, что приводит к изменению ее оптических свойств – коэффициентов поглощения и преломления, возникновению оптической анизотропии [1]. Так, в работе оптических модуляторов и оптических затворов на основе магнитных жидкостей используется принцип регулирования интенсивности пропущенного света с помощью внешнего магнитного поля [8, 9]. Магнитные жидкости также могут использоваться и для создания оптических фильтров с управляемым коэффициентом пропускания света [9]. В настоящее время ведутся разработки и по применению магнитных жидкостей в медицине, например, для доставки лекарств и в качестве контрастного средства при диагностических исследованиях [1].

Интересна также возможность применения магнитных жидкостей в ультразвуковом неразрушающем контроле материалов. В традиционной ультразвуковой диагностике с использованием пьезоэлектрических источников ультразвука магнитные жидкости могут применяться в качестве иммерсионной жидкости [1]. Преимущество такого метода заключается в том, что в случае использования преобразователя с встроенным в корпус постоянным магнитом при перемещении самого преобразователя вдоль исследуемого объекта вместе с магнитом будет перемещаться и жидкость, сохраняя стабильность акустического контакта. При использовании же термооптического механизма возбуждения ультразвука магнитная жидкость может являться одновременно и оптико-акустическим (ОА) источником, и иммерсионной жидкостью. Такие ОА-преобразователи с магнитным удержанием жидкости могут применяться для контроля изделий со сложным рельефом поверхности. Зависимость параметров возбуждаемого ОА-сигнала от оптических свойств источника дает возможность управлять амплитудой и спектральными характеристиками получаемого ультразвукового сигнала путем изменения концентрации магнитной жидкости, и, соответственно, коэффициента поглощения и рассеяния света [10].

При применении магнитных жидкостей как в оптических устройствах (модуляторы, затворы, фильтры), так и в ОА-дефектоскопии может быть актуальна проблема исследования оптических свойств этих жидкостей и их структурных особенностей, в частности, неоднородностей пространственного распределения частиц и наличия граничных эффектов. Кроме того, следует отметить, что проблема исследования состава, пространственной неоднородности структуры и оптических свойств актуальна и для многих других коллоидных сред, в том числе биологических.

Анализ состава коллоидных сред можно проводить, например, на основе измерения их акустических параметров, связанных с концентрацией различных веществ в исследуемой среде. Так, в работах [11–15] путем измерения коэффициента затухания и скорости ультразвуковых волн исследовались: суспензии нефтепродуктов, представляющие собой смеси асфальтенов в толуоле; состав сыворотки крови человека; коллоидные суспензии нанотрубок в этиленгликоле; жидкокристаллические эмульсии; взвеси крахмала. В [16] для исследования микроструктурированных дисперсных систем был предложен иной способ, основанный на использовании акустоэлектронной методики, позволяющий проводить оценку концентрации исследованных суспензий по зависимостям амплитудных и фазовых откликов акустоэлектронных сенсоров от проводимости и вязкости среды. Представленные в рассмот-

ренных работах методы могут быть использованы и для исследования магнитных жидкостей. Однако описанные методики позволяют провести оценки только среднего по объему содержания исследуемых компонент среды, без учета возможностей пространственного распределения частиц, которое, вообще говоря, может быть неоднородным в случае коллоидных сред.

В настоящей работе для исследования оптических свойств коллоидных сред и их структуры предлагается использовать оптико-акустический метод. ОА-методы диагностики основаны на термооптическом возбуждении акустических волн в исследуемой среде при поглощении в ней лазерного излучения [10]. Такие методы могут использоваться как для исследования акустических, так и оптических свойств различных сред. Если в рассматриваемой среде происходит поглощение лазерного импульса, длительность которого много меньше времени пробега акустической волны по области тепловыделения, то профиль давления возбуждаемого ОА сигнала будет повторять пространственное распределение источников тепла в этой среде [17, 18]. В приближении плоской световой волны для однородно-поглощающей и рассеивающей свет среды распределение тепловых источников в ней соответствует пространственному распределению интенсивности света, которое определяется коэффициентами поглощения и рассеяния света, а также соотношением показателей преломления исследуемой и прозрачной среды, из которой приходит лазерное излучение. Таким образом, временной профиль возбуждаемого ОА-импульса определяется коэффициентами поглощения и рассеяния света, тогда как его амплитуда пропорциональна только коэффициенту поглощения и интенсивности падающего света. Преимущество данного метода состоит в том, что информация об оптических характеристиках исследуемой среды доставляется акустическими волнами, относительно слабо затухающими в поглощающих и рассеивающих средах (например, в биологических тканях или в некоторых концентрированных коллоидных растворах) по сравнению с волнами оптического диапазона.

Основная часть работ, посвященных ОА-исследованию связи концентрации компонентов исследуемой среды и ее оптических свойств, проводилась для однородно-поглощающих и рассеивающих сред: так, например, в работе [18] ОА-метод применялся для измерения коэффициента экстинкции света во взвеси частиц оксида титана в воде в зависимости от объемной концентрации частиц. Аналогичные исследования проводились в [20–22] для растворов ферроина и хромата калия различной концентрации, а также для модельных образцов, изготовленных из суспензий пластиголя на основе поливинилхлорида с добавкой красителей. Кроме того, подобный метод

можно применять и для оценки толщины исследуемых образцов – например, в работе [23] было предложено использовать измеренное значение коэффициента поглощения света в слое углеродных нанотрубок для оценки толщины этого слоя. Так как коллоидные среды могут быть неоднородными по своей структуре и оптическим свойствам, то с практической точки зрения актуальной является задача восстановления распределения оптико-акустических источников и пространственной зависимости коэффициента экстинкции света в таких средах.

Целью настоящей работы является демонстрация возможности применения ОА-метода для исследования пространственной неоднородности распределения коэффициента экстинкции света в коллоидных средах на примере магнитных жидкостей. Для анализа влияния несущей среды на оптические свойства магнитной жидкости были рассмотрены жидкости двух типов: на основе воды и на основе керосина. В данной работе впервые проведено исследование распределения коэффициента экстинкции света по глубине в магнитных жидкостях в зависимости от их концентрации и типа акустической границы. Основная идея работы заключается в том, что использование ОА-метода позволяет проводить диагностики оптических свойств магнитной жидкости с высоким пространственным разрешением, что дает возможность обнаружения неоднородности распределения частиц в приповерхностном слое жидкости толщиной в десятки-сотни микрон.

### МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ЭКСТИНЦИИ

При поглощении в среде короткого лазерного импульса ( $\mu_{\text{eff}}c_0\tau_L \ll 1$ , где  $\mu_{\text{eff}}$  – коэффициент экстинкции света в исследуемой среде, определяемый коэффициентами поглощения и рассеяния,  $c_0$  – скорость звука в этой среде,  $\tau_L$  – длительность лазерного импульса) передний фронт давления ОА-сигнала  $p(\tau < 0)$  повторяет пространственное распределение интенсивности света в этой среде, и его временной профиль определяется коэффициентом экстинкции света  $\mu_{\text{eff}}$  [10, 18]. Здесь  $\tau = t - z/c_0$  – время в системе координат, бегущей со скоростью распространения акустической волны в исследуемой среде. При использовании схемы с прямой регистрацией ОА-сигналов в исследуемой среде время  $\tau = 0$  соответствует моменту прихода на приемник сигнала, возбуждаемого на поверхности исследуемой среды  $z = 0$  [18]. Временной и пространственный масштабы связаны как  $z = -c_0\tau$  (ось  $z$  направлена вглубь исследуемой среды). Подробное описание теории ОА-эффекта для поглощающих и рассеивающих сред изложено в работе [18]. Для сред с простран-

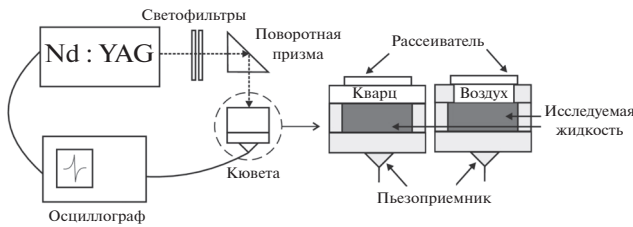
ственно-однородным поглощением и рассеянием зависимость переднего фронта ОА-сигнала от времени имеет экспоненциальную форму:  $p(\tau < 0) \sim \exp(\mu_{\text{eff}}c_0\tau)$ . Таким образом, аппроксимируя экспоненциальной функцией фронт зарегистрированного сигнала, можно определить коэффициент экстинкции света  $\mu_{\text{eff}}$  в исследуемой среде. Если же в среде присутствует пространственная неоднородность коэффициента экстинкции, он будет зависеть от координаты внутри исследуемой среды. Если характерный радиус лазерного пучка  $a$  много больше глубины проникновения света в среду  $z_L \approx \mu_{\text{eff}}^{-1}$ , то можно считать лазерный пучок коллимированным, что позволяет ограничиться одномерной задачей термооптического возбуждения звука [10, 18]. Тогда можно рассматривать распределение экстинкции только по глубине  $z$  исследуемой среды и формула для переднего фронта ОА-сигнала выглядит следующим образом:

$$p(\tau) \sim \mu_{\text{eff}}(-c_0\tau) \exp\left(-\int_0^{-c_0\tau} \mu_{\text{eff}}(\xi) d\xi\right). \quad (1)$$

Отсюда можно определить пространственное распределение коэффициента экстинкции света  $\mu_{\text{eff}}(z)$  в исследуемой среде:

$$\frac{\partial \ln p(\tau)}{c_0 \partial \tau} = \mu_{\text{eff}}(-c_0\tau) = \mu_{\text{eff}}(z). \quad (2)$$

Для исследования оптических свойств магнитных жидкостей использовалась экспериментальная установка с прямой схемой регистрации ОА-сигнала, показанная на рис. 1. Для возбуждения ОА-сигналов использовалось излучение импульсного Nd:YAG лазера с модуляцией добротности. Длина волны излучения 1064 нм, характеристическая длительность импульса 10 нс, энергия в импульсе 10–12 мДж, частота повторения импульсов 10 Гц. Величина энергии лазерного импульса могла варьироваться с помощью нейтральных светофильтров. Поворотной призмой излучение направлялось на кювету с исследуемой средой, диаметр кюветы 2 см, высота слоя жидкости 6 мм. Для создания гладкого распределения интенсивности света в падающем пучке использовался стеклянный светорассеиватель. Кювета с магнитной жидкостью могла закрываться сверху кварцевой пластиной для получения акустически жесткой границы жидкость-кварц (акустический импеданс кварца много больше импеданса магнитной жидкости:  $\rho_q c_q \gg \rho_{\text{mag}} c_{\text{mag}}$ ,  $\rho_q, \rho_{\text{mag}}$  и  $c_q, c_{\text{mag}}$  – плотности и скорости звука для кварца и магнитной жидкости соответственно). При отсутствии пластины реализуется акустически свободная граница между воздухом и магнитной жидкостью ( $\rho_{\text{air}} c_{\text{air}} \ll \rho_{\text{mag}} c_{\text{mag}}$ ). Оптическое излучение, пройдя кварцевую пластину/воздух, попадает в исследуе-



**Рис. 1.** Экспериментальная установка. Слева представлена полная блок-схема установки, справа – изображение кюветы с исследуемой жидкостью.

мую жидкость и возбуждает в ней ОА-сигнал, который регистрируется широкополосным пьезоприемником, встроенным в дно ячейки и находящимся в акустическом контакте с кюветой. Приемник изготовлен на основе ПВДФ пленки толщиной 30 мкм и имеет рабочую полосу частот 0.1–30 МГц. Электрические сигналы с пьезоприемника передавались на цифровой двухканальный запоминающий осциллограф Tektronix с аналоговой полосой частот 200 МГц и максимальной чувствительностью 2 мВ/дел, а затем обрабатывались на персональном компьютере. Максимальный коэффициент экстинкции света, который возможно измерить по данной методике, определяется длительностью лазерного импульса  $\tau_L$ . На основе теории термооптического возбуждения звука в слаботеплопроводящих и нетеплопроводящих жидкостях, детально описанной в [10], форму возбуждаемого в жидкости ОА-импульса при произвольной длительности лазерного импульса при акустически жесткой границе можно описать интегралом, который аналитически выражается через функцию ошибок (где  $E_0$  – плотность энергии лазерного излучения,  $\alpha$  – коэффициент поглощения света жидкостью):

$$p_r(\tau) = \frac{\alpha c_0^2 \beta E_0}{2c_p} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\mu_{\text{eff}}^2 c_0^2 \tau_L^2}{4}\right) \times \left\{ e^{\mu_{\text{eff}} c_0 \tau} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\tau}{\tau_L} + \frac{\mu_{\text{eff}} c_0 \tau_L}{2}\right) \right] + e^{-\mu_{\text{eff}} c_0 \tau} \left[ 1 + \Phi\left(\frac{\tau}{\tau_L} - \frac{\mu_{\text{eff}} c_0 \tau_L}{2}\right) \right] \right\}, \quad (3)$$

а форма импульса при свободной границе связана с ним соотношением:

$$p_f(\tau) = \frac{1}{\mu_{\text{eff}} c_0} \frac{d}{d\tau} p_r(\tau). \quad (4)$$

При построении данной теории в [10] было введено допущение, что на частотах  $\omega > \mu_{\text{eff}}^2 \chi$ ,  $\chi a^2$  (где  $\chi$  – температуропроводность жидкости,  $\mu_{\text{eff}}^{-1}$ ,  $a$  – размеры области тепловыделения) теплопроводность в жидкости не существенна, что выполняется для большинства жидкостей (за исключение

ртути и расплавленных металлов) во всем ультразвуковом диапазоне частот. Анализ изменения формы фронта ОА-сигнала (3), (4) при постоянной плотности поглощенной энергии при увеличении  $\mu_{\text{eff}} c_0 \tau_L$  показывает, что для измерения коэффициента экстинкции по вышеприведенным формулам необходимо, чтобы выполнялось условие  $\mu_{\text{eff}} < 0.5/c_0 \tau_L$ . Для малых значений  $\mu_{\text{eff}}$  ограничения возникают из-за сильного падения амплитуды регистрируемого сигнала, близкой к уровню шумов, а также из-за дифракции низкочастотных компонент спектра акустического сигнала. Для жидкостей с  $c_0 \approx 1400$  м/с в условиях данных экспериментов диапазон измеряемых значений коэффициента экстинкции составляет от 5 до 350  $\text{см}^{-1}$ .

Распределение коэффициента экстинкции по глубине исследуемой среды  $\mu_{\text{eff}}(z)$  определялось по временному профилю зарегистрированного ОА-сигнала с использованием формулы (2). Расчет производных осуществлялся с помощью стандартных программных средств.

### ИССЛЕДУЕМЫЕ СРЕДЫ

Магнитные жидкости состоят из диспергированных в несущей среде однодоменных магнитных частиц нанометрового размера (5–20 нм), покрытых поверхностно-активным органическим веществом (ПАВ), необходимым для стабилизации дисперсной системы [1, 2, 7]. Как правило, для их получения используется технология химического осаждения щелочью наночастиц магнетита, образующихся из смеси компонент FeO и Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, имеющих одинаковую молярную концентрацию (см., например, [24]). После добавления в смесь компонент щелочи, промывания водой и осаждения образовавшихся однодоменных наночастиц в осадок добавляют растворитель и стабилизатор в необходимом количестве и диспергируют частицы в несущей жидкости. В качестве стабилизатора чаще всего используется олеиновая кислота. Между магнитными коллоидными частицами действуют три типа сил – магнитные силы диполь-дипольного притяжения, вандерваальсовские силы притяжения и стерические силы отталкивания [1]. Последние обусловлены взаимодействием молекул ПАВ-стабилизатора, покрывающих поверхность частиц и препятствующих их агрегации.

В настоящей работе были исследованы окисные магнитные жидкости с различной концентрацией частиц магнетита Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>, изготовленные на основе двух различных несущих жидкостей – воды и керосина. Для измерения коэффициента экстинкции света по предложенной методике, как было сказано выше, необходимо  $\mu_{\text{eff}} c_0 \tau_L < 0.5$ , поэтому для заведомого выполнения этого условия в качестве начальной исследуемой концен-

**Таблица 1.** Состав исследуемых магнитных жидкостей

Тип жидкости	Несущая жидкость, %	Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub> , %	Стабилизатор, %
На основе воды, стабилизированная	61	27	12
На основе керосина, стабилизированная	80	18	2
На основе воды, разбавленная	95	3.5	1.5
На основе керосина, разбавленная	96	3.5	0.5

трации были взяты не исходные стабилизированные жидкости, а разбавленные до объемной концентрации магнетита 3.5%. Процентный состав компонентов в исходных стабилизированных и разбавленных жидкостях приведен в табл. 1. Для исследования зависимости  $\mu_{\text{eff}}$  от концентрации частиц магнетита эти разбавленные магнитные жидкости дополнительно разводили несущей жидкостью в необходимых пропорциях. В полученных растворах объемная концентрация магнетита варьировалась от 0.35 до 3.5% с шагом 0.35%. Вообще говоря, через некоторое время (от нескольких часов до нескольких суток) после разбавления магнитной жидкости начинается процесс агрегации частиц магнетита. В данном эксперименте измерения начинались сразу же после разбавления, время проведения эксперимента с каждым образцом составляло около минуты, что означает отсутствие влияния агрегации частиц на оптические свойства жидкости.

При взаимодействии лазерного излучения на используемой длине волны 1064 нм с магнитной жидкостью в ней одновременно происходит поглощение и рассеяние света частицами магнетита. Рассеянный свет также дополнительно поглощается на этих частицах. Кроме того, в несущей жидкости также присутствует некоторое поглощение света. Таким образом, форма ОА-сигнала зависит от суммарного поглощения падающего и рассеянного излучения и определяется коэффициентом экстинкции света в исследуемой жидкости.

Температурное поле в исследуемой среде характеризуется временем релаксации температуры светопоглощающих частиц  $\tau_p$  и временем выравнивания температуры в окружающей частицу среде  $\tau_0$ , где  $\tau_p = R_p^2/4\chi_p$ ,  $\tau_0 = d^2/4\chi$  ( $R_p$  – радиус частицы магнетита,  $d$  – расстояние между частицами,  $\chi_p$  и  $\chi$  – коэффициенты температуропроводности для частиц и несущей жидкости соответственно) (см., например, [25]). При наличии в среде светопоглощающих частиц их влияние на форму ОА-сигнала зависит от соотношения этих характерных временных масштабов и длительности лазерного импульса  $\tau_L$ . Кроме того, необходимо учесть время релаксации напряжений в среде  $\tau_a = d/2c_0$ . При выполнении условия

$$\tau_L \leq (\tau_p, \tau_a) \ll \tau_0$$

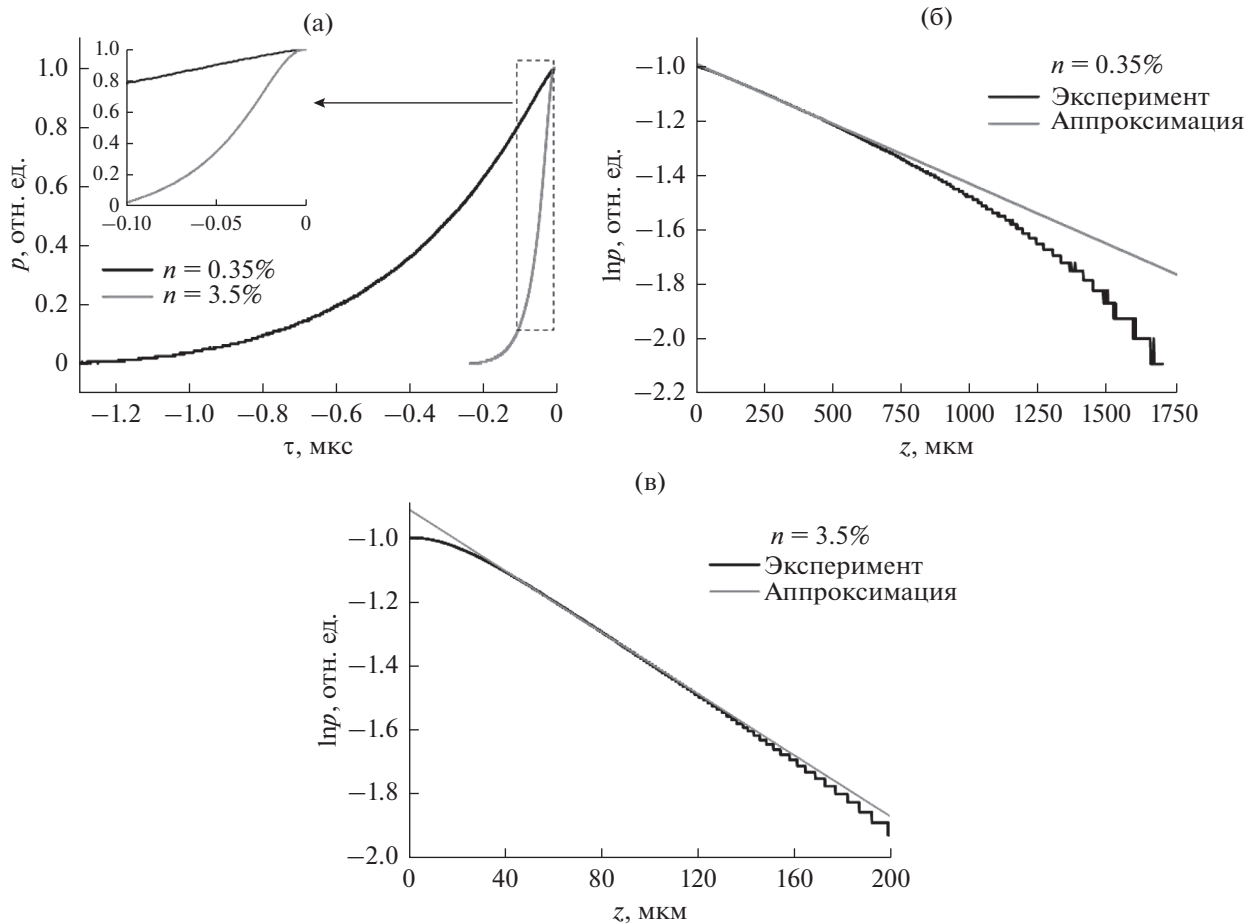
на профиле возбуждаемого в среде ОА-сигнала можно различить сигналы от отдельных светопоглощающих неоднородностей. Для исследуемых в данной работе магнитных жидкостей  $\tau_0 > \tau_L$ , но  $(\tau_p, \tau_a) \ll \tau_L$ . Тогда за время действия лазерного импульса нагрев частиц можно считать однородным, а напряжения, порождаемые в среде вокруг частиц, “перекрываются” между собой, поэтому возбуждаемые ими акустические импульсы не могут быть зарегистрированы по отдельности. Таким образом, в данном случае отдельные поглощающие неоднородности будут неразличимы, а пространственное изменение коэффициента экстинкции (и неоднородность распределения частиц) в приповерхностном слое жидкости проявляется только в виде отклонения формы переднего фронта ОА-сигнала от экспоненциальной.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 2а показаны примеры временных профилей передних фронтов ОА-сигналов (нормированных по амплитуде) для жидкостей с максимальной и минимальной объемными концентрациями магнетита ( $n = 3.5$  и  $n = 0.35\%$ ) при акустически жесткой границе, а на рис. 2б и 2в – координатные зависимости логарифмов этих фронтов (в диапазоне от нуля до максимальной глубины зондирования). Переход от временного представления к координатному осуществляется через соотношение  $z = -c_0\tau$  (где  $z$  соответствует глубине зондирования исследуемой среды). Линейная аппроксимация, приведенная на рис. 2б и 2в, соответствует зависимости  $\ln p(z)$ , которая наблюдалась бы в случае среды с пространственно-однородными поглощением и рассеянием ( $\mu_{\text{eff}}(z) = \text{const}$ ). В случае магнитной жидкости наблюдаемая зависимость  $\ln p(z)$  не является линейной, причем для  $n = 0.35\%$  отклонение от линейности с увеличением глубины гораздо сильнее, чем для  $n = 3.5\%$ . Таким образом, в исследуемой жидкости присутствует неоднородность пространственного распределения коэффициента экстинкции света, зависящая от ее концентрации.

Максимальная глубина зондирования при исследовании магнитной жидкости зависит от величины коэффициента экстинкции света и динамического диапазона акустической системы





**Рис. 2.** Передние фронты ОА-сигналов при акустически жесткой границе для (а) –  $n = 0.35\%$  и  $n = 3.5\%$  и их логарифмы для (б) –  $n = 0.35\%$  и (в) –  $n = 3.5\%$  (линейная аппроксимация соответствует логарифму фронта для однородно-поглощающей и рассеивающей среды).

регистрации. Восстановление пространственного распределения  $\mu_{\text{eff}}$  возможно до глубины проникновения света  $z$ , определяемой формулой:

$$\int_0^z \mu_{\text{eff}}(\xi) d\xi \approx \ln D, \quad (5)$$

где  $D$  – динамический диапазон системы регистрации акустических сигналов. Для применяемой в данной работе системы динамический диапазон позволяет измерять экстинкцию света в приповерхностном слое жидкости до глубины  $z_{\text{max}} \approx 3\mu_{\text{eff}}^{-1}$ . На рис. 2б и 2в это соответствует  $z_{\text{max}} \approx 1700$  мкм для  $n = 0.35\%$  и  $z_{\text{max}} \approx 200$  мкм для  $n = 3.5\%$ . Минимальная глубина для восстановления распределения  $\mu_{\text{eff}}$  будет также зависеть от его величины, и, соответственно, концентрации исследуемой жидкости. Это связано с тем, что величина  $\mu_{\text{eff}}c_0\tau_L$  оказывает влияние на форму возбуждаемого в среде ОА-сигнала, и ее увеличение выражается в появлении сглаженности вершины сигнала [10].

Для малых глубин зондирования возникает изменение формы фронта, не связанное с реальной неоднородностью коэффициента экстинкции (см. рис. 2а и 2в). Таким образом, проводить процедуру восстановления распределения коэффициента  $\mu_{\text{eff}}$  по формуле (2) следует только на том участке фронта, где нет влияния этой сглаженности. На рис. 2б и 2в это соответствует  $z_{\text{min}} \approx 20$  мкм для  $n = 0.35\%$  и  $z_{\text{min}} \approx 40$  мкм для  $n = 3.5\%$ .

Восстановленные пространственные распределения коэффициента экстинкции света по глубине зондирования  $\mu_{\text{eff}}(z)$  (и их аппроксимации гладкими функциями) для шести выбранных объемных концентраций (0.35, 0.7, 1.05, 1.4, 2.45, 3.5%) магнитных жидкостей в случае акустически жесткой границы представлены на рис. 3. Погрешности измерения  $\mu_{\text{eff}}$  определяются точностью метода расчета производной, а также точностью измерения скорости звука, и составляют около 5%. На рис. 4 приведено сравнение пространственных распределений  $\mu_{\text{eff}}(z)$  для  $n = 0.35$  и  $n = 1.4\%$  для обоих типов жидкостей в случаях аку-

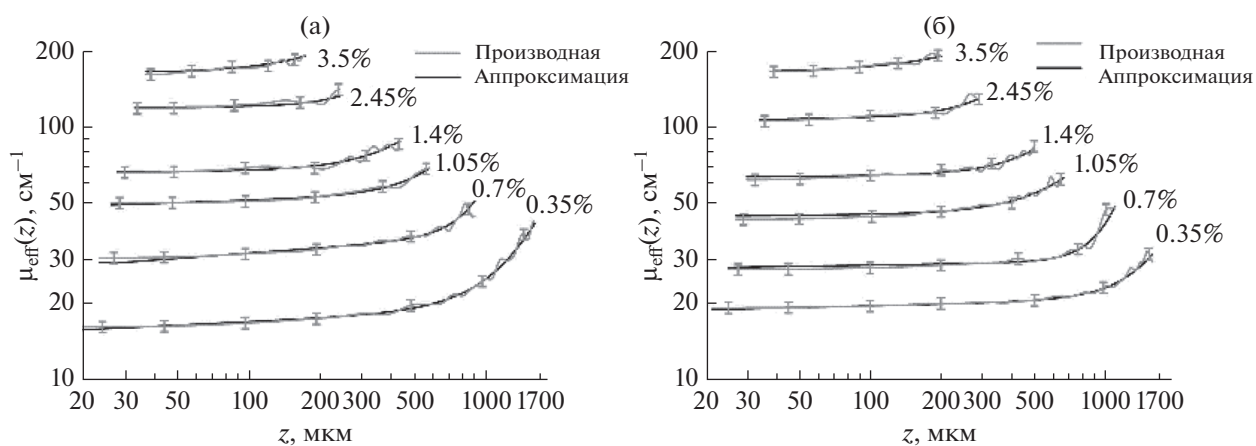


Рис. 3. Распределение коэффициента экстинкции света по глубине для магнитных жидкостей на основе (а) — воды и (б) — керосина при акустически жесткой границе.

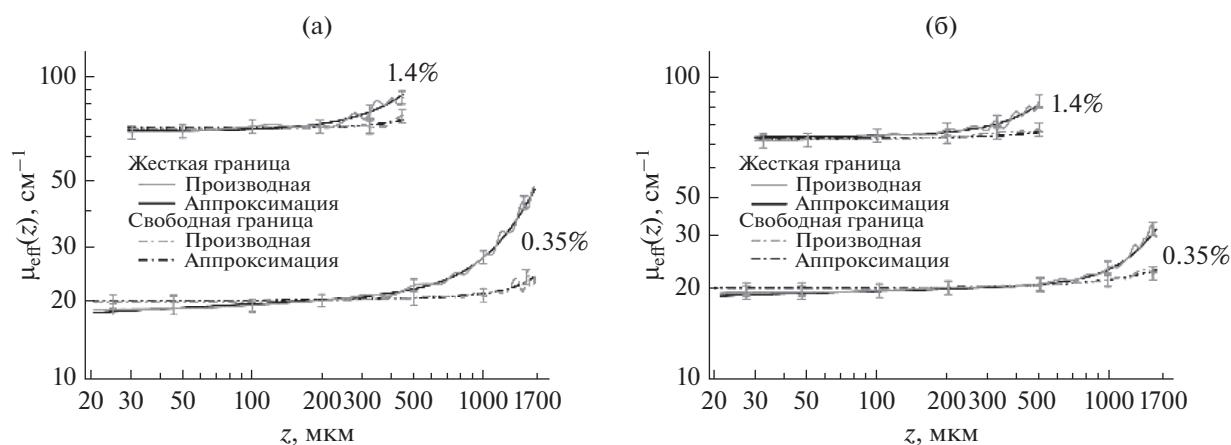


Рис. 4. Сравнение распределения коэффициента экстинкции света по глубине в случае жесткой и свободной границ для магнитных жидкостей на основе (а) — воды и (б) — керосина.

стически жесткой и свободной границ. Из полученных зависимостей следует, что коэффициент экстинкции света в исследованных магнитных жидкостях увеличивается с глубиной, причем при одинаковой концентрации в случае жесткой границы он возрастает гораздо сильнее, чем в случае свободной. Таким образом, тип акустической границы оказывает значительное влияние на пространственное распределение частиц магнетита, и, соответственно, величины  $\mu_{\text{eff}}$  в жидкости.

Для получения связи между объемной концентрацией магнетита и изменением коэффициента экстинкции с глубиной было проанализировано его относительное изменение  $\Delta\mu_{\text{eff}}/\mu_{\text{eff}}^{\text{max}} = (\mu_{\text{eff}}^{\text{max}} - \mu_{\text{eff}}^{\text{min}})/\mu_{\text{eff}}^{\text{max}}$ , где  $\mu_{\text{eff}}^{\text{min}}$  и  $\mu_{\text{eff}}^{\text{max}}$  — минимальная и максимальная величины коэффициента экстинкции в исследуемом диапазоне глубин для данной концентрации. Рассчитанные зависи-

мости  $\Delta\mu_{\text{eff}}/\mu_{\text{eff}}^{\text{max}}(n)$  для двух типов жидкости в случаях жесткой и свободной границ приведены на рис. 5. Погрешность величины  $\Delta\mu_{\text{eff}}/\mu_{\text{eff}}^{\text{max}}$  определяется точностью измерений минимального и максимального коэффициентов экстинкции. Видно, что при жесткой границе для обоих типов жидкостей возрастание  $\mu_{\text{eff}}$  с глубиной наблюдается во всем исследуемом диапазоне концентраций, причем для малых концентраций (0.35–1.4%) этот эффект проявляется сильнее, чем для высоких концентраций. Это означает, что объемная концентрация магнетита в жидкости также существенно влияет на пространственное изменение  $\mu_{\text{eff}}$  в случае жесткой границы. В случае свободной границы для обоих типов жидкостей для концентраций  $>1\%$  изменение величины  $\mu_{\text{eff}}$  с глубиной незначительно ( $\mu_{\text{eff}}(z) \approx \text{const}$ ), а для концентраций  $<1\%$  наблюдается некоторое его возрастание

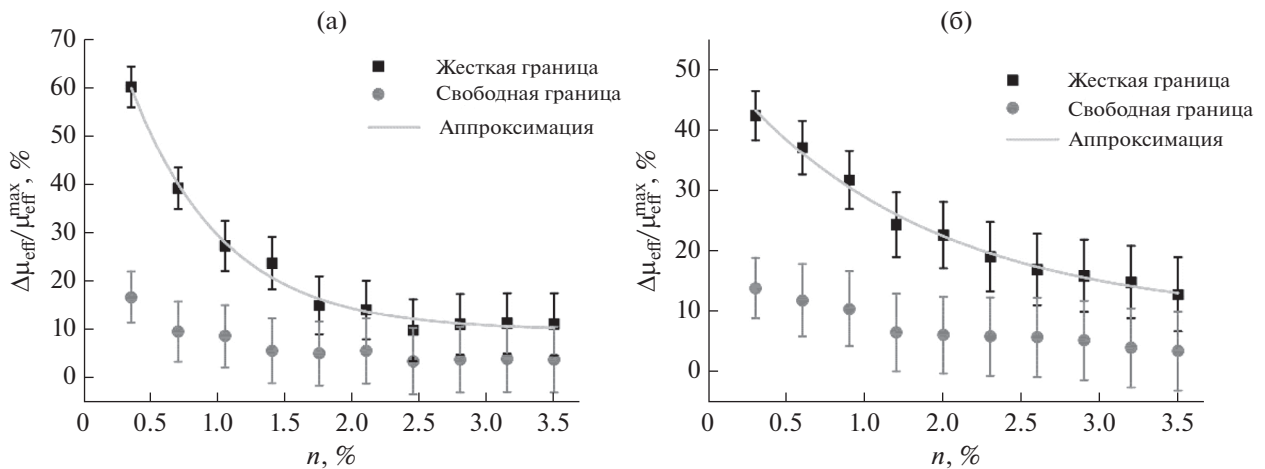


Рис. 5. Зависимости относительного изменения коэффициента экстинкции света от объемной концентрации магнетита в магнитных жидкостях на основе (а) – воды и (б) – керосина.

с глубиной, но относительная величина  $\Delta\mu_{\text{eff}}/\mu_{\text{eff}}^{\text{max}}$  в 3–4 раза меньше, чем для тех же концентраций в случае жесткой границы. Таким образом, при свободной границе влияние концентрации магнетита на пространственное изменение  $\mu_{\text{eff}}$  менее существенно, чем при жесткой границе.

Полученные зависимости  $\Delta\mu_{\text{eff}}/\mu_{\text{eff}}^{\text{max}}(n)$  для обоих типов жидкостей при жесткой границе могут быть аппроксимированы по методу наименьших квадратов убывающей экспоненциальной функцией:

$$y = 9.7 + 83.3 \exp(-1.45x) \quad (6)$$

для жидкости на основе воды и

$$y = 8.9 + 43.4 \exp(-0.66x) \quad (7)$$

для жидкости на основе керосина. Значение независимой переменной  $x$  соответствует концентрации магнитной жидкости, выраженной в процентах, а значение  $y$  соответствует относительному изменению коэффициента экстинкции с глубиной  $\Delta\mu_{\text{eff}}/\mu_{\text{eff}}^{\text{max}}$ , также выраженный в процентах. Полученные эмпирические соотношения (6) и (7) могут быть использованы для определения неизвестной концентрации магнитной жидкости по измеренному пространственному распределению  $\mu_{\text{eff}}$ . При акустически свободной границы, как было сказано выше, для  $n > 1\%$   $\mu_{\text{eff}}(z) \approx \text{const}$ , поэтому в данном случае проводить аналогичную аппроксимацию зависимости  $\Delta\mu_{\text{eff}}/\mu_{\text{eff}}^{\text{max}}(n)$  нецелесообразно, и оценка неизвестной концентрации жидкости возможна по зависимости минимального значения  $\mu_{\text{eff}}$  в исследованном диапазоне глубин от концентрации жидкости. Зависимости  $\mu_{\text{eff}}^{\text{min}}(n)$  близки к линейным и могут быть аппроксимированы функциями  $y = 46.5x + 8.2$  и  $y = 46.8x + 5.1$  для

магнитных жидкостей на основе воды и керосина соответственно, где значение  $y$  соответствует величине  $\mu_{\text{eff}}^{\text{min}}$ . Относительная погрешность определения параметров аппроксимации для всех полученных соотношений не превышает 20%.

Из представленных результатов также видно, что для минимальной концентрации магнетита ( $n = 0.35\%$ ) при жесткой границе присутствует значительное различие между величинами относительных изменений  $\mu_{\text{eff}}$  для двух типов жидкостей: величина  $\Delta\mu_{\text{eff}}/\mu_{\text{eff}}^{\text{max}}$  для жидкости на водной основе на 17% больше, чем для жидкости на основе керосина. В остальном диапазоне концентраций эти величины практически совпадают в пределах погрешностей измерения. В случае свободной границы для обоих типов жидкостей  $\Delta\mu_{\text{eff}}/\mu_{\text{eff}}^{\text{max}}$  совпадают в пределах погрешностей во всем исследуемом диапазоне концентраций. Следовательно, тип несущей жидкости также может оказывать влияние на пространственное распределение коэффициента экстинкции света в магнитной жидкости.

## ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из полученных результатов следует, что пространственное распределение частиц магнетита, и, соответственно, коэффициента экстинкции света  $\mu_{\text{eff}}(z)$  в магнитной жидкости определяется тремя основными факторами. Во-первых, наиболее существенное влияние оказывает тип акустической границы. Во-вторых, наблюдается влияние объемной концентрации частиц магнетита в исследуемой жидкости. Наконец, относительное изменение  $\mu_{\text{eff}}$  с глубиной также зависит от типа несущей жидкости.

Влияние типа акустической границы, по-видимому, связано с тем, что при разбавлении магнитной жидкости происходит десорбция стабилизатора с поверхности частиц магнетита (см., например, [26]). Образующийся при этом свободное ПАВ может адсорбироваться на кварцевой пластине в случае жесткой границы. Как следствие, в приповерхностном слое возле границы раздела пластина-жидкость происходит перераспределение частиц магнетита, что приводит к увеличению их концентрации в последующих слоях, и, соответственно, увеличению  $\mu_{\text{eff}}$  с глубиной. Таким образом, возникает искусственная анизотропия структуры магнитной жидкости. Толщина приповерхностного слоя с пространственной неоднородностью составляет порядка сотен микрон.

Влияние концентрации частиц магнетита на ее структурную неоднородность может объясняться тем, что стабильность магнитной жидкости зависит от соотношения концентраций магнетита и стабилизатора, которое изменяется при разбавлении [27–29]. Соответственно, чем сильнее разбавлена жидкость, тем интенсивнее будет десорбция ПАВ с поверхности частиц, ведущая к их перераспределению (см. выше). Исходная жидкость с  $n = 3.5\%$  уже не является стабилизированной, поэтому при жесткой границе эффект увеличения  $\mu_{\text{eff}}$  с глубиной наблюдается для всего исследованного диапазона концентраций. Наконец, влияние типа несущей жидкости, по-видимому, является следствием того, что интенсивность десорбции ПАВ при разбавлении жидкости также зависит от соотношения диэлектрических проницаемостей несущей жидкости и стабилизатора [26], что приводит к различию относительного изменения  $\mu_{\text{eff}}$  для жидкостей на основе воды и керосина в случае наименьшей концентрации (см. рис. 5).

Таким образом, использование ОА-метода позволяет выявлять неоднородность распределения частиц в приповерхностном слое магнитной жидкости, вызванное тремя вышеперечисленными факторами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный в данной работе лазерный оптико-акустический метод позволяет восстанавливать одномерное пространственное распределение оптических свойств коллоидных сред с неоднородной структурой. В качестве примера коллоидного раствора использовались магнитные жидкости на основе воды и керосина с различной концентрацией магнетита. Влияние коэффициента поглощения и рассеяния света в жидкости на временной профиль давления возбуждаемого в ней ОА-сигнала дает возможность

исследовать ОА-методом распределение коэффициента экстинкции света по глубине магнитной жидкости, и, соответственно, неоднородности распределения частиц магнетита в ее приповерхностном слое с высоким пространственным разрешением.

Анализ полученных одномерных пространственных распределений коэффициента экстинкции  $\mu_{\text{eff}}(z)$  позволяет отметить три фактора, оказывающих влияние на структурную неоднородность магнитной жидкости: влияние объемной концентрации магнетита, тип акустической границы и влияние свойств несущей жидкости. Влияние границы выражается в том, что при акустически жесткой границе наблюдается наведенная анизотропия оптических свойств магнитной жидкости. Это явление возникает из-за пространственного перераспределения частиц магнетита в приповерхностном слое жидкости, что приводит к увеличению коэффициента экстинкции с глубиной. Показано существование зависимости относительного изменения коэффициента экстинкции света  $\Delta\mu_{\text{eff}}/\mu_{\text{eff}}^{\text{max}}$  с глубиной от концентрации магнетита в жидкости. Полученные эмпирические соотношения между этими величинами могут быть использованы для определения объемного содержания магнетита в пробе магнитной жидкости с неизвестным соотношением компонент по экспериментально измеренному коэффициенту экстинкции. Предлагаемый метод также может использоваться для исследования динамики процессов структурных изменений магнитной жидкости, приводящих к изменению ее оптических свойств со временем. Кроме того, метод возможно применять и для анализа структуры и оптических свойств других коллоидных сред, в том числе биологических.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Такетоми С., Тикадзуми С.* Магнитные жидкости. Пер. с японск. М.: Мир, 1993. 272 с.
2. *Sokolov V.V.* Wave propagation in magnetic nanofluids (a Review) // *Acoust. Phys.* 2010. V. 56. № 6. P. 972–988.
3. *Карпова Г.В., Кутуев А.Н., Полунин В.М., Ряполов П.А.* Об одной колебательной системе с магнитожидкостным инерционным элементом // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 2. С. 197–203.
4. *Parekh K., Patel J., Upadhyay R.V.* Ultrasonic propagation: A technique to reveal field induced structures in magnetic nanofluids // *Ultrasonics.* 2015. V. 60. P. 126–132.
5. *Li Y., Zhang H., Yang Z., Yuan B., Yuan Z., Xue H.* Incident-power-dependent optical transmission properties of magnetic fluid films // *Optik.* 2018. V. 172. P. 730–735.
6. *Zhao Y., Lv R., Zhang Yu., Wang Q.* Novel optical devices based on the transmission properties of magnetic flu-

- id and their characteristics // *Optics and lasers in engineering*. 2012. V. 50. P. 1177–1184.
7. *Fang X., Xuan J., Li Q.* Measurement of the extinction coefficients of magnetic fluids // *Nanoscale Research Letters*. 2011. V. 6. P. 237–241.
  8. *Yang X., Liu Y., Zheng Y., Li S., Yuan L., Yuan T., Tong C.* A capillary optical fiber modulator derivates from magnetic fields // *Optics Communications*. 2013. V. 304. P. 83–86.
  9. *Zhao Y., Zhang Y., Lv R., Wang Q.* Novel optical devices based on the tunable refractive index of magnetic fluid and their characteristics // *J. Mag. Mag. Mater.* 2011. V. 323. P. 2987–2996.
  10. *Гусев В.Э., Карабутов А.А.* Лазерная оптоакустика. М.: Наука, 1991. 304 с.
  11. *Ахметов Б.Р., Вахин А.В.* О некоторых характеристиках затухания ультразвука в суспензиях высокомолекулярных комплексов нефти // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 5. С. 566–571.
  12. *Гурбатов С.Н., Демин И.Ю., Клемина А.А., Клемин В.А.* Акустический анализ состава сыворотки крови человека // *Акуст. журн.* 2009. Т. 55. № 4–5. С. 496–505.
  13. *Мансфельд А.Д., Санин А.Г., Санина О.А., Каверин Б.С., Обьедков А.М., Егоров В.А.* Поглощение ультразвука в суспензиях углеродных нанотрубок // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 2. С. 204–205.
  14. *Максимочкин Г.И., Пасечник С.В., Максимочкин А.Г.* Ультразвуковые исследования структурных превращений и фазовых переходов в жидкокристаллических эмульсиях // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 2. С. 272–278.
  15. *Кольцова И.С., Хомутова А.С.* Поглощение ультразвуковых волн при динамических процессах в дисперсных системах // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 6. С. 668–674.
  16. *Анисимкин В.И., Покусаев Б.Г., Складиев Д.А., Сорокин В.В., Тюпа Д.В.* Применение акустоэлектронной методики для исследования упорядоченных микроструктурированных дисперсных систем с биологическими объектами, включенными в гидрогели // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 6. С. 738–743.
  17. *Хохлова Т.Д., Пеливанов И.М., Карабутов А.А.* Методы оптико-акустической диагностики биотканей // *Акуст. журн.* 2009. Т. 55. № 4–5. С. 672–683.
  18. *Карабутов А.А., Пеливанов И.М., Подымова Н.Б., Скипетров С.Е.* Измерение оптических характеристик рассеивающих сред лазерным оптико-акустическим методом // *Квантовая электроника*. 1999. Т. 29. № 3. С. 215–220.
  19. *Пеливанов И.М., Белов С.А., Соломатин В.С., Хохлова Т.Д., Карабутов А.А.* Прямое измерение пространственного распределения интенсивности лазерного излучения в биологических средах in-vitro лазерным оптико-акустическим методом // *Квантовая электроника*. 2006. Т. 36. № 12. С. 1089–1096.
  20. *Filimonova T.A., Volkov D.S., Proskurnin M.A., Pelivanov I.M.* Optoacoustic spectroscopy for real-time monitoring of strongly light-absorbing solutions in applications to analytical chemistry // *Photoacoustics*. 2013. V. 1. P. 54–61.
  21. *Karabutov A.A., Savateeva E.V., Podymova N.B., Oraevsky A.A.* Backward mode detection of laser-induced wide-band ultrasonic transients with optoacoustic transducer // *J. Appl. Phys.* 2000. V. 87. № 4. P. 2003–2014.
  22. *Spirov G.M., Oraevsky A.A., Vitkin I.A., Whelan W.M.* Optical and acoustic properties at 1064 nm of polyvinyl chloride-plastisol for use as a tissue phantom in biomedical optoacoustics // *Phys. Med. Biol.* 2005. V. 50. P. 141–153.
  23. *Груздинская И.С., Косаковская З.Я., Овчинников О.Б., Чабан И.А.* Оптоакустический эффект в плотных слоях ориентированных углеродных нанотрубок: использование его для измерения коэффициента поглощения света и толщин пленок // *Акуст. журн.* 2006. Т. 52. № 3. С. 330–334.
  24. *Жерновой А.И., Дьяченко С.В.* Сравнение размеров и магнитных моментов наночастиц магнетита в порошке и в коллоидном растворе, изготовленных методом химической конденсации // *Научное приборостроение*. 2016. Т. 26. № 1 С. 54–57.
  25. *Егерева С.В., Пашин А.Е.* Оптоакустическая диагностика микронеоднородных сред // *Акуст. журн.* 1993. Т. 39. № 1. С. 86–91.
  26. *Болотов А.Н., Новиков В.В., Новикова О.О.* О зависимости коллоидной устойчивости магнитных жидкостей от диэлектрической проницаемости стабилизатора и дисперсионной среды // *Изв. вузов. Химия и хим. технология*. 2017. Т. 60. № 4. С. 7–81.
  27. *Ерин К.В.* Об изменении распределения частиц и агрегатов по размерам при разбавлении магнитной жидкости // *Коллоидный журнал*. 2017. Т. 79. № 1. С. 32–37.
  28. *Лактина Е.В., Пишеничников А.Ф.* О влиянии коагулянта и свободного стабилизатора на образование агрегатов в магнитных жидкостях // *Коллоидный журнал*. 2010. Т. 72. № 2. С. 231–237.
  29. *Cunha F.R., Rosa A.P., Dias N.J.* Rheology of very dilute magnetic suspension with micro-structures of nanoparticles // *J. Mag. Mag. Mater.* 2016. V. 397. P. 266–274.

## ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ВЕКТОРНО-СКАЛЯРНАЯ СТРУКТУРА НИЗКОЧАСТОТНЫХ ПОЛЕЙ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ЗОНАХ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ МАКСИМУМОВ

© 2020 г. Г. Н. Кузнецов<sup>a, \*</sup>, А. Н. Степанов<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН,  
ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия

<sup>b</sup>Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
Московское шоссе 34, Самара, 443086 Россия

\*e-mail: skbmortex@mail.ru

Поступила в редакцию 20.02.2019 г.

После доработки 09.12.2019 г.

Принята к публикации 24.12.2019 г.

Для низкочастотных мультипольных источников различного порядка, находящихся в волноводе Пекериса, получены и исследуются зависимости, определяющие изменение структуры и величины интерференционных максимумов векторно-скалярных составляющих сигналов при вариации частоты, глубин волновода, приемников и источников, а также расстояния между ними. Найдены аппроксимирующие выражения, которые для разных глубин волновода и расположения источников и приемников согласуются с точными законами спадаения указанных составляющих поля в этих зонах. Показано, что зависимости полей всех мультиполей по характеристикам амплитудно-фазовой структуры разделяются на две большие группы.

*Ключевые слова:* волновод Пекериса, пространственная структура интерференционных максимумов, аппроксимация законов спадаения, мультиполи, расстояние и глубина

**DOI:** 10.31857/S0320791920030041

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Основы анализа пространственной структуры и методов приближенной аппроксимации законов спадаения усредненной – регулярной составляющей поля звукового давления (ЗД), создаваемого монопольным излучателем в волноводе, заложены Л.М. Бреховских в [1]. Позднее в разл. [2] для низкочастотных сигналов эта задача применительно к волноводу Пекериса рассматривалась в целом ряде работ, обзор и анализ которых, а также обобщение законов спадаения на векторно-скалярную структуру звуковых полей, но для мультипольных источников выполнены в [2]. Вместе с тем из простого физического анализа следует, что кроме затухания усредненного поля представляют интерес пространственная структура и законы спадаения звуковой энергии в зонах интерференционных максимумов (ИМА) – особенно для дискретных составляющих, на которых интерференция проявляется наиболее ярко. В этих зонах имеется наибольшее отношение сигнал/помеха [3], а при расположении приемной или излучающей антенны в зонах ИМА наблюдаются сравнительно гладкие и предсказуемые градиенты фазы [4, 5], что позволяет накапливать

звуковую энергию на апертуре антенны и повысить помехоустойчивость обнаружения [6]. Одновременно из-за “гладкости” и предсказуемости градиентов фазы в зонах ИМА в результате фазирования сигналов на апертуре антенны имеется возможность достаточно точного пеленгования источников звуковых сигналов [6, 7].

Большой интерес к зонам ИМА связан также с особыми свойствами интерференционной пространственной структуры звукового поля [8]. В частности, с возможностью построения и анализа динамических инвариантов [9, 10]. С использованием этих “особых” характеристик интерференционной структуры связывают возможность исследования влияния динамики внутренних волн и других неоднородностей [11, 12], возможность устойчивого пеленгования широкополосных сигналов [6, 7], а также ставится и решается задача эффективного обнаружения слабых сигналов на фоне помех [13–15]. Не меньший интерес представляет возможность обнаружения и одновременно оценки расстояния до источника и радиальной скорости его движения [15, 16].

Задача оценки скорости спадаения сигналов в зонах ИМА монополя поставлена и частично ре-

шена в [17]. В частности, в этой работе показано, что в волноводе Пекериса для источника и приемника, которые находятся в средней части волновода (точнее на середине его эквивалентной толщины  $H$ ) квадрат потенциала поля звукового давления  $|\bar{\psi}(r, z_0, z)|^2$  ограничен сверху функцией  $G_1(r, z_0, z)$ , для которой справедлива оценка

$$G_1(r, z_0, z) = \frac{kH^3}{2h^2\gamma r^2} (1 + O(\sqrt{\delta r})), \quad (1)$$

где  $r$  – расстояние между источником и приемником,  $z_0$  и  $z$  – глубины источника и приемника соответственно,  $k = \omega/c_0$  – волновое число,  $\omega$  – круговая частота источника звука,  $c_0$  – скорость звука в волноводе,  $h$  – толщина волновода,  $\gamma = \beta \tilde{m} \tilde{n}_0^2 / v_0^3$  (для совместимости с приводимыми далее результатами, параметр  $\gamma$  в отличие от [17] взят без коэффициента 2),  $\beta \geq 0$  – коэффициент поглощения звука в грунте,  $\tilde{m} = \rho_1/\rho_0$ ,  $\rho_0$  – плотность среды в волноводе,  $\rho_1$  – плотность среды в подстилающемся полупространстве,  $v^2 = 1 - \tilde{n}^2$ ,  $\tilde{n} = n_0(1 + i\beta)$ ,  $n_0 = c_0/c_1 < 1$ ,  $c_1$  – скорость звука в подстилающемся полупространстве,  $i$  – мнимая единица,  $\delta = \gamma \pi^2 / (k^2 H^3)$ ,  $H = h + \tilde{m}/kv_0$  – эквивалентная толщина волновода Пекериса. Для источника, находящегося у поверхности, и приемника на середине эквивалентной толщины волновода аналогичная оценка имеет вид:

$$G_2(r, z_0, z) = \frac{kH^4}{2\pi h^2 \gamma^2} \frac{(kz_0)^2}{r^3} (1 + O(\sqrt{\delta r})). \quad (2)$$

И, наконец, когда и источник, и приемник находятся в приповерхностной или придонной зонах волновода, ограничивающая квадрат потенциала оценка приобретает вид:

$$G_3(r, z_0, z) = \frac{kH^5}{2h^2 \gamma^3} \frac{(kz_0)^2 (kz)^2}{r^4} (1 + O(\sqrt{\delta r})). \quad (3)$$

Однако в [17] анализ выполнен только для звукового давления (ЗД), в ограниченном интервале расстояний и только в предельных случаях – для приемников или источников, расположенных непосредственно в середине волновода или вблизи поверхности раздела – у свободной поверхности или у дна. Несмотря на указанные ограничения, в [17] для этих трех зон ИМА выявлено существенное различие законов ослабления интенсивности звука (что представляется интересным и практически важным результатом). При этом обнаружена и общая закономерность – во всех случаях уменьшение или увеличение интенсивности в зонах ИМА происходит при изменении расстояния приблизительно в  $\sqrt{r}$  быстрее,

чем изменение величины регулярной составляющей в сопоставимых условиях.

В [18] выполнено обобщение результатов, изложенных в [17], на произвольные глубины и расстояния, а также выведены аналитические соотношения и проведено численное исследование характеристик полей не только для ЗД, но и для горизонтальной и вертикальной проекций колебательной скорости (ГПКС и ВПКС). Эти аппроксимирующие зависимости упрощают расчеты векторно-скалярной структуры полей, но авторам [18], несмотря на простую аппроксимацию, не удалось получить в явном – “прозрачном” виде аналитические зависимости ЗД, ГПКС и ВПКС от частоты звука, глубин волновода, глубин и расстояний между источником и приемником. Эта задача потребовала дополнительного исследования, результаты которого приведены ниже. Представленные далее результаты позволяют без выполнения численного моделирования получить количественные зависимости ЗД, ГПКС и ВПКС от целого ряда параметров, характеризующих волновод и геометрию эксперимента. Отметим, что эти зависимости можно считать справедливыми для низких частот и умеренных удалений от источника.

Следует также отметить, что в [1, 3–18] анализ выполнен только для монополюсного источника, в то время как реальные объемные движущиеся низкочастотные источники характеризуются излучением, направленным в горизонтальной и вертикальной плоскости [3, 19, 20]. Известно, что для надводных и подводных источников различных типов характерно направленное звукоизлучение, поле которого может быть аппроксимировано полем эквивалентного источника – эквивалентным в том смысле, что поля реального источника и искусственного мультиполюсного источника в дальней зоне должны иметь близкую амплитудно-фазовую структуру. Как следует из литературы, на частотах оборотов вала и лопастных частотах, т.е. на низких частотах, корпус заменяется однородной оболочкой с “размазанными” ребрами или консолью и источниками преимущественно мультиполюсного характера. Гребной винт образует распределенные вдоль лопастей силовые источники, излучение которых представляет суперпозицию вращающихся диполей [21]. Турбулентная зона, примыкающая к гребному винту, согласно теории Лайтхилла, формирует квадрупольные источники. Суперпозиция этих источников образует группу мультиполей, которые на низких частотах с известными ограничениями могут быть представлены точечным мультиполюсным источником. Можно отметить, что дифракция звуковой волны на корпусе источника также формирует неоднородное – не осесимметричное излучение, которое на низких частотах может быть представлено полем эквивалентного

сосредоточенного мультипольного источника [19, 20].

Одновременно при работе на низких частотах уменьшается влияние вертикального профиля скорости звука, что позволяет на умеренных расстояниях (на расстояниях до 10–20 км) и низких частотах (ниже 30–50 Гц) использовать модель Пекериса [1–3]. Отметим также, что численное исследование векторно-скалярной структуры акустических полей мультиполей в зонах ИМА, сформированных в плоско-слоистом волноводе, выполнено в [22]. Но аналитические аппроксимирующие зависимости поля мультиполей от глубин и расстояния не получены. Ниже в зонах ИМА исследуются аппроксимирующие зависимости, из которых для мультиполей различного типа в явном виде следуют зависимости ЗД, ГПКС и ВПКС от  $r, H, \omega, z$  и  $z_0$ . Очевидно, что на более высоких частотах протяженный (объемный) источник лучше заменять разнесенной вдоль корпуса системой источников и при моделировании или обработке экспериментальных данных учитывать реальные профили скорости звука [23].

Представляет интерес обобщить полученные в [17, 18, 22] результаты и получить аппроксимирующие зависимости при произвольных частотах, глубинах волновода  $H$ , источника  $z_0$  и приемника  $z$  и горизонтальных расстояниях  $r$  между источником и приемником – и не только для ЗД, но и для горизонтальных и вертикальных проекций вектора колебательной скорости. Численное и аналитическое исследование необходимо выполнить для различных мультиполей при расположении приемников в зонах ИМА. Полученные аппроксимирующие зависимости необходимо сравнить с результатами точных расчетов для оценки возможности их использования при анализе указанных выше зависимостей для ЗД, ГПКС и ВПКС, а при необходимости – и проекций вектора потока мощности.

**2. ПОВЕРХНОСТИ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ МАКСИМУМОВ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ В ВОЛНОВОДЕ ПЕКЕРИСА**

Соотношения, необходимые для анализа поля мультиполей в зонах ИМА, получены в развитие предложенного Л.М. Бреховских способа [1] приближенного аналитического решения дисперсионного уравнения для волновода Пекериса  $\text{ctg}x = \frac{i}{\tilde{m}x} \sqrt{x^2 - (khv)^2}$ . Приближенные значения корней этого уравнения  $x_l \approx l\pi h/H, l = 1, 2, \dots, N$  далее используются для записи модового пред-

ставления потенциала звукового поля в волноводе Пекериса [19, 20, 22]:

$$\Psi(r, z_0, z) = \frac{2\pi}{kh} \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n \sum_{l=1}^N A_{nml} H_m^{(1)}(\xi_l r) e^{im\varphi}, \quad (4)$$

где

$$A_{nml} = \frac{\mu_{nm} D_{nm} x_l \sin \alpha'_{l0} \sin \alpha_l P_n^{lm}(x_l/kh)}{\sin^2 x_l \text{tg} x_l / \tilde{m}^2 + \sin x_l \cos x_l - x_l},$$

$$\mu_{nm} = \exp\left(\frac{i\pi(1 - \chi_{nm})}{4}\right), \quad D_{nm} = C_{nm} \exp\left(\frac{i\pi(n - m)}{2}\right),$$

$$\chi_{nm} = (-1)^{n+|m|}, \quad \alpha'_{l0} = \pi(1 - \chi_{nm})/4 + \alpha_{l0},$$

$$\alpha_{l0} = x_l z_0/h, \quad \alpha_l = x_l z/h,$$

$H_m^{(1)}(\xi_l r)$  – функции Ханкеля первого рода порядка  $m, \xi_l = k\sqrt{1 - x_l^2/(kh)^2}$  – горизонтальные волновые числа нормальных волн,  $L$  – порядок мультипольности модели,  $N$  – количество нормальных волн,  $C_{nm}$  – комплексные мультипольные моменты,  $P_n^{lm}$  – присоединенные полиномы Лежандра.

Пренебрегая в знаменателе выражения для коэффициентов  $A_{nml}$  всеми слагаемыми по сравнению со значением корней  $x_l$ , получим  $A_{nml} \approx -\mu_{nm} D_{nm} P_{nml}$ , где  $P_{nml} = \sin \alpha'_{l0} \sin \alpha_l P(x_l/kh)$ . Тогда представление (4) может быть записано в более удобном для дальнейшего анализа виде

$$\Psi(r, z_0, z) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n C_{nm} \Psi_{nm}(r, z_0, z),$$

$\Psi_{nm}$  – потенциал поля отдельного мультиполя с единичным мультипольным моментом

$$\Psi_{nm}(r, z_0, z) = \frac{2\pi}{kh} \sum_{l=1}^N P_{nml} H_m^{(1)}(\xi_l r) e^{i\gamma_{nm}}.$$

Здесь  $\gamma_{nm} = m\varphi + \pi + \pi(1 - \chi_{nm})/4 + \pi(n - m)/2$ . Корни дисперсионного уравнения  $x_l$  входят в рассматриваемые выражения в основном в виде комбинации параметров  $x_l/kh$ . С учетом того, что эти корни приближенно равны  $x_l \approx l\pi h/H$ , можно записать равенства:  $x_l/kh = ld, \alpha_{l0} = x_l z_0/h \approx l\pi z_0/H = ldkz_0$  и  $\alpha_l = x_l z/h \approx l\pi z/H = ldkz$ , в которых  $d = \pi/kH = \lambda/2H$  – безразмерный параметр, равный отношению длины волны к удвоенной эффективной толщине волновода, и имеющий смысл величины, обратной количеству полуволен в эффективной толщине волновода.



Используя далее асимптотическое представление функции Ханкеля

$$H_m^{(1)}(\xi_l r) \approx \sqrt{2/(\pi k r)} \exp(-\delta r l^2 + i(k_l r + \pi m/2 - \pi/4)),$$

умножая полученное выражение на комплексно сопряженное и переходя от потенциала к ЗД, получим для отдельного мультиполя квадрат модуля амплитуды ЗД в волноводе Пекериса:

$$|P_{nm}(r, z_0, z)|^2 = \frac{A^p}{r} \left[ \sum_{l=1}^N p_{nml}^2 e^{-2\delta r l^2} + \sum_{l=1}^N \sum_{l' \neq l}^N p_{nml} p_{nml'} e^{-\delta r(l^2 + l'^2)} \cos(\Delta k_{ll'} r) \right], \quad (5)$$

где  $A^p = 8\pi\omega^2 \rho_0^2 / k^3 h^2$ ,  $\Delta k_{ll'} = k_l - k_{l'}$  – разность между волновыми числами соответствующих нормальных волн. Здесь и далее связанные со звуковым давлением аналогичные  $A^p$  величины обозначаются надстрочным символом  $p$ .

Анализируя (5), несложно увидеть, что второе слагаемое, представляющее собой интерференционную часть сигнала, спадает – уменьшается с увеличением расстояния – быстрее, чем первое слагаемое – его регулярная составляющая. Однако представляет интерес не только качественная, но и количественная оценка скорости спада интерференционной части выражения (5). Такую оценку можно получить, полагая, как и в [17, 18], функции  $\cos(\Delta k_{ll'} r)$  для всех  $l$  и  $l'$  равными единице и используя вместо коэффициентов  $p_{nml}$  их модули. В результате для звукового давления получим функции:

$$G_{nm}^p(r, z_0, z) = \frac{A^p}{r} \left( \sum_{l=1}^N \left| \sin \alpha'_{l0} \sin \alpha_l P_n^{|m|}(ld) \right| e^{-\delta r l^2} \right)^2, \quad (6)$$

которые определяют для амплитуд давления отдельных мультиполей поверхности интерференционных максимумов (ПИМ), т.е. поверхности, которые для любых расстояний  $r$  и глубин  $z_0$  и  $z$  ограничивают сверху любую интерференционную кривую  $|P_{nm}(r, z_0, z)|^2 \leq G_{nm}^p(r, z_0, z)$ . Очевидно, что некоторые максимумы этих кривых, образованные в результате когерентного суммирования наиболее энергонесущих мод, выходят на поверхность, а некоторые – частные максимумы к ней приближаются, но не достигают.

В [24] получены выражения для полей ГПКС и ВПКС мультипольного источника в волноводе Пекериса в виде сумм, аналогичных сумме нор-

мальных волн поля давления отдельных мультиполей

$$V_r = \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n C_{nm} V_{nm;r} \quad \text{и} \quad V_z = \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n C_{nm} V_{nm;z},$$

где  $A_{nml}^i = x_l A_{nml} \text{ctg} \alpha_l / h$ ;

$$V_{nm;r} = \frac{2\pi}{h} \sum_{l=1}^N p_{nml} \sqrt{1-l^2 d^2} \times \left( H_{m+1}^{(1)}(\xi_l r) - m H_m^{(1)}(\xi_l r) / (\xi_l r) \right) e^{i\gamma_{nm}},$$

$$V_{nm;z} = \frac{2\pi d}{h} \sum_{l=1}^N l p_{nml} \text{ctg} \alpha_l H_m^{(1)}(\xi_l r) e^{i\gamma_{nm}}.$$

Применяя описанный выше подход, получим выражения

$$G_{nm}^{Vr}(r, z_0, z) = \frac{A^V g_m}{r} \times \left( \sum_{l=1}^N \sqrt{1-l^2 d^2} \left| \sin \alpha'_{l0} \sin \alpha_l P_n^{|m|}(ld) \right| e^{-\delta r l^2} \right)^2, \quad (7)$$

$$G_{nm}^{Vz}(r, z_0, z) = d^2 \frac{A^V}{r} \times \left( \sum_{l=1}^N l \left| \sin \alpha'_{l0} \cos \alpha_l P_n^{|m|}(ld) \right| e^{-\delta r l^2} \right)^2, \quad (8)$$

где  $A^V = 8\pi/kh^2$ ,  $g_m = 1 + m^2/k^2 r^2$ . Они определяют ПИМ горизонтальной и вертикальной проекций векторов колебательных скоростей отдельных мультиполей. Для них, как и для ЗД, при любых значениях аргументов выполняются неравенства  $|V_{nm;r}(r, z_0, z)|^2 \leq G_{nm}^{Vr}(r, z_0, z)$  и  $|V_{nm;z}(r, z_0, z)|^2 \leq G_{nm}^{Vz}(r, z_0, z)$ .

Вычислительный эксперимент показал, что для всех мультиполей форма ПИМ ГПКС полностью совпадает с формой ПИМ ЗД, в то время как форма ПИМ ВПКС имеет существенные отличия от формы ПИМ давления. Кроме того, расчеты показали, что все мультиполи можно разделить на две группы с одинаковой общей структурой сечений поверхностей интерференционных максимумов сигналов в вертикальной плоскости, которые проведены параллельно оси глубин системы координат. Это разделение базируется на тех же самых характеристиках элементарных мультипольных источников, с которыми связано описанное в [24] уточнение принципа взаимности. В первую группу входят мультиполи, для которых сумма индексов  $n + |m|$  четна и, следовательно, коэффициенты  $p_{nml}$  в выражениях для полей ЗД и ГПКС пропорциональны  $\sin ldkz_0 \sin ldkz$ , а для полей ВПКС они пропорциональны  $\sin ldkz_0 \cos ldkz$ .

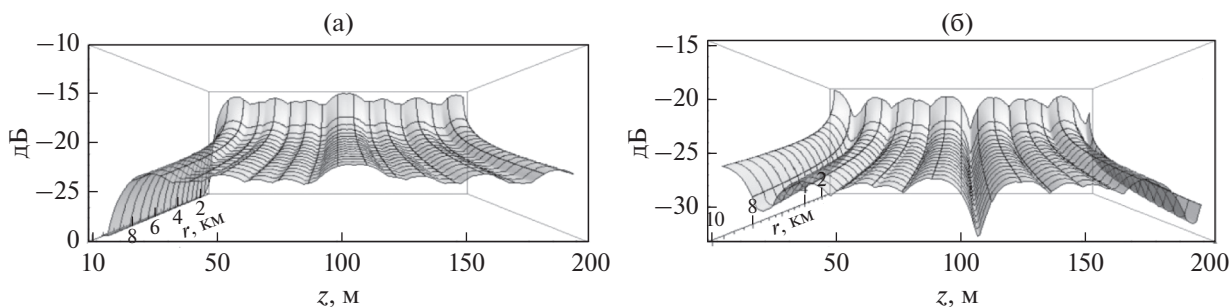


Рис. 1. Типичные формы ПИМ для сигналов I группы: (а) – ЗД и ГПКС, (б) – ВПКС.

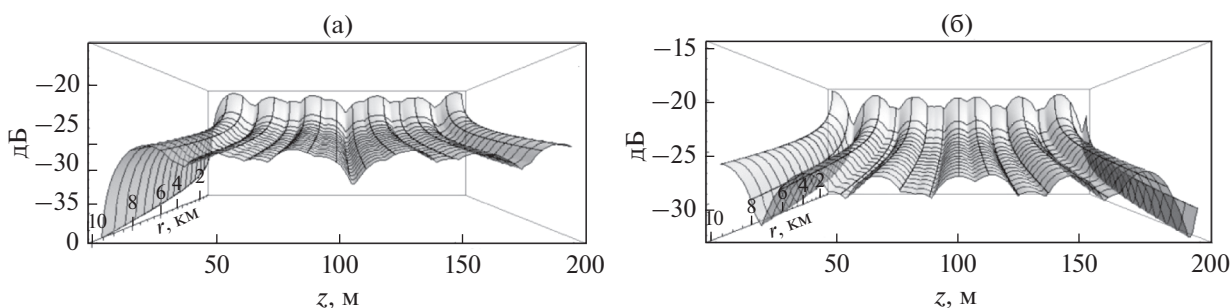


Рис. 2. Типичные формы ПИМ для сигналов II группы: (а) – ЗД и ГПКС, (б) – ВПКС.

Эта группа включает монополь, горизонтальный диполь, квадруполь с двумя горизонтальными или двумя вертикальными осями и т.д. Во вторую группу входят мультиполю, у которых сумма индексов  $n + |m|$  нечетна, поэтому коэффициенты  $p_{nm}$  в выражениях для полей ЗД пропорциональны  $\cos ldkz_0 \sin ldkz$ , а для полей ВПКС они пропорциональны  $\cos ldkz_0 \cos ldkz$ . Это вертикальный диполь, квадруполь с одной горизонтальной и одной вертикальной осью и т.д. [22, 24].

Указанные тригонометрические зависимости коэффициентов  $p_{nm}$  от глубин источника  $z_0$  и приемника  $z$  определяют отмеченные выше общие особенности ПИМ, а также различие форм вертикальных сечений ПИМ для мультиполей первой и второй групп. Слева на рис. 1а показана форма разреза ПИМ для ЗД и ГПКС, а справа на рис. 1б – форма разреза ПИМ ВПКС. Характерным для первой группы является наличие зоны максимума у ЗД и ГПКС и зоны минимума у ВПКС на середине эквивалентной глубины волновода. Типичные формы ПИМ для мультиполей второй группы представлены на рис. 2. Характерным для этой группы сигналов является наличие на середине эквивалентной толщины волновода зоны локального минимума у ЗД и ГПКС и подъема у ВПКС. Для обеих групп наблюдается также принципиальное различие зависимостей вблизи поверхностей раздела. При уменьшении или

увеличении глубины источника или приемника размах колебаний поверхностей сглаживается, но общие особенности их форм сохраняются.

Расчеты ПИМ, изображенных на рис. 1 и 2, произведены для волновода толщиной  $h = 200$  м, скорости звука в воде 1500 м/с, параметров дна  $\tilde{m} = 2.7$ ,  $\tilde{n} = 0.83$  и коэффициента поглощения 0.01. Частота источника 50 Гц, а его глубина выбрана равной 111 м, что примерно соответствует середине эффективной толщины волновода. Горизонтальное расстояние между источником и приемником изменяется от 100 м до 10 км.

### 3. АППРОКСИМИРУЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ МАКСИМУМОВ

Для практических целей целесообразно иметь удобные приближенные аналитические соотношения, которыми по аналогии с оценками для спада регулярных составляющих [2, 18] можно аппроксимировать выражения (6)–(8) для функций, определяющих ПИМ давления и проекций колебательной скорости различных мультиполей. Отметим, что в [2] при аппроксимации соотношений, описывающих регулярные составляющие квадратов модулей амплитуд давления, суммы приближенно заменялись интегралами. Однако напрямую использовать этот способ для

аппроксимации функций, описывающих структуру ПИМ нельзя, так как наличие модуля произведения тригонометрических функций под знаком интеграла приводит к невозможности вычислить его аналитически. Кроме того, форма поверхностей ИМА на малых глубинах изменяется очень резко. Поэтому авторам не удалось найти общую аппроксимацию для всех глубин источника и приемника.

В связи с указанными обстоятельствами область изменения глубин  $0 \leq z, z_0 \leq h$  разбивается на три подобласти, в каждой из которых можно индивидуальными способами освободиться от знака модуля и/или подобрать подходящую аппроксимацию. Такими подобластями могут быть интервалы приповерхностных, придонных и средних глубин. В дальнейшем для краткости будем называть “приграничными” приповерхностные глубины источника и излучателя, которые удовлетворяют условиям  $0 \leq z, z_0 \leq H_1$ ,  $H_1 = H/N$ , а также – с учетом симметрии относительно середины эффективной толщины  $H/2$  аргументов у функции, описывающей ПИМ, – и придонные глубины  $H_2 \leq z, z_0 \leq h$ ,  $H_2 = H - H/N$ . Глубины, не удовлетворяющие этим условиям, т.е. относящиеся к средней части волновода  $H_1 \leq z, z_0 \leq H_2$ , условно назовем “средними”. Исследование выполним для низких частот на расстояниях  $r$ , когда в (6)–(8) следует учитывать экспоненциальный множитель  $\exp(-\delta r l^2)$ , т.е. учитывать затухание нормальных волн.

### 3.1. Монопольный источник

В качестве базового примера построения аппроксимирующих соотношений рассмотрим монопольный излучатель, которому в выражениях (6)–(8) соответствуют индексы  $n = 0$  и  $m = 0$ . Следовательно, для этого излучателя коэффициент  $g_0 = 1$ , аргумент  $\alpha'_{i0} = \alpha_{i0}$ , а полином Лежандра равен единице  $P_0^0(ld) = 1$ .

Подставляя в (6) эти параметры, для функции ПИМ 3Д монополя получим:

$$G_{00}^p = \frac{A^p}{r} \left( \sum_{l=1}^N |\sin \alpha_{l0} \sin \alpha_l| e^{-\delta r l^2} \right)^2. \quad (9)$$

Для краткости здесь и далее список аргументов  $(r, z_0, z)$  у функций ПИМ и их аппроксимаций опускается. Для приграничных глубин аргументы  $\alpha_{l0} = l\pi z_0/H$  и  $\alpha_l = l\pi z/H$  входящих в (9) тригонометрических функций для любых нормальных волн не превосходят  $\pi$ :  $\alpha_{l0} \leq \pi$  и  $\alpha_l \leq \pi$ ,  $\forall l \leq N$ , следовательно,  $\sin \alpha_{l0} \geq 0$  и  $\sin \alpha_l \geq 0$  и знак модуля в (9) можно опустить. Для получения искомой аппроксимации сумму в этом выражении предлага-

ется считать приближенно равной аналитически вычисляемому интегралу [25]. Тогда для приграничных глубин аппроксимирующую зависимость запишем в виде:

$$G_{00}^p \approx \frac{A^p \pi}{16\delta r^2} \times \left( \exp\left(-\frac{\pi^2(z_0 - z)^2}{4H^2\delta r}\right) - \exp\left(-\frac{\pi^2(z_0 + z)^2}{4H^2\delta r}\right) \right)^2. \quad (10)$$

Раскладывая экспоненты выражения (10) в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки  $r$  и удерживая только члены первого порядка, получим оценку  $G_{00}^p \sim \frac{H^5}{2kh^2\gamma^3} \frac{(kz_0)^2(kz)^2}{r^4}$ , которая с точностью до константы  $1/k^2$  совпадает с (3).

В случае, когда приграничным является источник  $0 \leq z_0 \leq H_1$  или  $H_2 \leq z_0 \leq h$ , а глубина приемника находится в диапазоне  $H_1 < z < H_2$ , в соотношении (9) из под знака модуля можно вынести только первый положительный множитель  $\sin \alpha_{l0}$ . А знакопеременный множитель  $\sin \alpha_l$  в сумме (9) заменяется средним по полупериоду значением:  $|\sin \alpha_l| \approx 2/\pi$ . Тогда можно считать, что

$$G_{00}^p \approx \frac{4A^p}{\pi^2 r} \left( \sum_{l=1}^N \sin \alpha_{l0} e^{-\delta r l^2} \right)^2 \text{ и далее приближенно}$$

$$G_{00}^p \approx \frac{4A^p}{\pi^2 \delta r^2} \text{Dason}^2 \left( \frac{\pi z_0}{2H\sqrt{\delta r}} \right), \quad (11)$$

где  $\text{Dason}(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$  – функция Доусона [24]. Разложение в ряд Тейлора в окрестности бесконечно удаленной точки  $r$  позволяет в этом случае получить оценку  $G_{00}^p \sim \frac{8H^4}{\pi^3 kh^2\gamma^2} \frac{(kz_0)^2}{r^3}$ , которая отличается от (2) постоянным множителем  $16/(k\pi)^2$ .

Аналогичные результаты можно получить и в случае, когда условию “приграничности” удовлетворяет глубина приемника  $0 \leq z \leq H_1$  или  $H_2 \leq z \leq h$ , а источник находится на средних глубинах  $H_1 < z_0 < H_2$ . В этом случае в соотношении (6) из под знака модуля можно вынести положительный множитель  $\sin \alpha_l$ , а знакопеременным является множитель  $\sin \alpha_{l0}$ , который заменяется средним по полупериоду гармонической функции значением  $2/\pi$ . Таким образом, аппроксимирующая зависимость имеет такой же как (11) вид

$$G_{00}^p \approx \frac{4A^p}{\pi^2 \delta r^2} \text{Dason}^2 \left( \frac{\pi z}{2H\sqrt{\delta r}} \right) \quad (12)$$

**Таблица 1.** Аппроксимирующие соотношения функции ПИМ ЗД монополя

Ограничения на $z_0$	Ограничения на $z$	Аппроксимирующее соотношение	Оценка
$0 \leq z_0 \leq H_1$ или $H_2 \leq z_0 \leq h$	$0 \leq z \leq H_1$ или $H_2 \leq z \leq h$	$G_{00}^p \approx \frac{A^p \pi}{16\delta r^2} \left( \exp\left(-\frac{b_1^2}{4\delta r}\right) - \exp\left(-\frac{b_2^2}{4\delta r}\right) \right)^2$	$G_{00}^p \sim \frac{H^5}{2kh^2\gamma^3} \frac{(kz_0)^2(kz)^2}{r^4}$
$0 \leq z_0 \leq H_1$ или $H_2 \leq z_0 \leq h$	$H_1 < z < H_2$	$G_{00}^p \approx \frac{4A^p}{\pi^2\delta r^2} \text{Dason}^2\left(\frac{\pi z_0}{2H\sqrt{\delta r}}\right)$	$G_{00}^p \sim \frac{8H^4}{\pi^3 kh^2\gamma^2} \frac{(kz_0)^2}{r^3}$
$H_1 < z_0 < H_2$	$0 \leq z \leq H_1$ или $H_2 \leq z \leq h$	$G_{00}^p \approx \frac{4A^p}{\pi^2\delta r^2} \text{Dason}^2\left(\frac{\pi z}{2H\sqrt{\delta r}}\right)$	$G_{00}^p \sim \frac{8H^4}{\pi^3 kh^2\gamma^2} \frac{(kz)^2}{r^3}$
$H_1 < z_0 < H_2$	$H_1 < z < H_2$	$G_{00}^p \approx \frac{4A^p}{\pi^3\delta r^2} \text{erf}^2(N\sqrt{\delta r})$	$G_{00}^p \sim \frac{32H^3}{\pi^4 kh^2\gamma r^2}$

Примечание:  $b_1 = \pi(z_0 - z)/H$ ,  $b_2 = \pi(z_0 + z)/H$ .

и полностью аналогичную оценку  $G_{00}^p \sim (8H^4/\pi^3 kh^2\gamma^2)[(kz)^2/r^3]$ .

Подобласть средних глубин характеризуется тем, что обе глубины  $z_0$  и  $z$  не удовлетворяют условиям приграничности:  $H_1 < z$ ,  $z_0 < H_2$ . Поэтому в сумме (9) оба тригонометрических сомножителя являются знакопеременными, и для получения приближенных зависимостей предлагается заменить их средними по полупериоду гармонической функции значениями:  $|\sin \alpha_{i0}| \approx 2/\pi$  и  $|\sin \alpha_i| \approx 2/\pi$ . После чего сумма в (9) приобретает вид  $\sum_{l=1}^N |\sin \alpha_{i0} \sin \alpha_i| e^{-\delta r l^2} \approx \frac{4}{\pi^2} \sum_{l=1}^N e^{-\delta r l^2}$ , которую предлагается считать приближенно равной интегралу  $\sum_{l=1}^N e^{-\delta r l^2} \approx (1/2)\sqrt{\pi/\delta r} \text{erf}(N\sqrt{\delta r})$  [25]. В этом случае получим выражение

$$G_{00}^p \approx \frac{4A^p}{\pi^3\delta r^2} \text{erf}^2(N\sqrt{\delta r}), \quad (13)$$

и его разложение в ряд Тейлора в окрестности бесконечно удаленной точки  $r$  дает оценку

$$G_{00}^p \sim \frac{32H^3}{\pi^4 kh^2\gamma r^2},$$

которая с точностью до константы  $64/(k^2\pi^4)$  совпадает с оценкой (1). Аппроксимирующие функции ПИМ монополя и их асимптотические оценки сведены в табл. 1.

Подставляя в (7) значения параметров, которыми характеризуется монополюсный излучатель, получим выражение для функции ПИМ ГПКС этого излучателя в виде:

$$G_{00}^{Vr} = \frac{A^V}{r} \left( \sum_{l=1}^N \sqrt{1-l^2 d^2} |\sin \alpha_{i0} \sin \alpha_l| e^{-\delta r l^2} \right)^2. \quad (14)$$

Видно, что выражение (14) для функции  $G_{00}^{Vr}$ , которая ограничивает интерференционную поверхность ГПКС, отличается от выражения (9)

для функции  $G_{00}^p$ , ограничивающей интерференционную поверхность ЗД, только наличием у каждого слагаемого сомножителя  $\sqrt{1-l^2 d^2}$ . Учитывая, что для любых номеров нормальных волн справедливо неравенство  $ld < 1$ , можно утверждать, что для любого  $l \sqrt{1-l^2 d^2} \leq \sqrt{1-d^2}$  и вынести корень из под знака суммы. Следовательно, например, для приграничных глубин функции  $G_{00}^{Vr}$  можно аппроксимировать выражением

$$G_{00}^{Vr} \approx \frac{A^V \pi(1-d^2)}{16\delta r^2} \times \left( \exp\left(-\frac{\pi^2(z_0-z)^2}{4H^2\delta r}\right) - \exp\left(-\frac{\pi^2(z_0+z)^2}{4H^2\delta r}\right) \right)^2.$$

Аналогично умножением соотношений (10)–(13) на двучлен  $1-d^2$  определяются аппроксимации функции ПИМ ГПКС (14) для всех остальных глубин.

Если значения характеризующих монополь параметров подставить в (8), то получим выражение для функции ПИМ ВПКС этого излучателя

$$G_{00}^{Vz} = d^2 \frac{A^V}{r} \left( \sum_{l=1}^N l |\sin \alpha_{i0} \cos \alpha_l| e^{-\delta r l^2} \right)^2. \quad (15)$$

В этом выражении функция  $\cos \alpha_l = \cos(l\pi z/H)$  остается положительной для любых номеров  $l$ , если удовлетворяется неравенство  $\pi z(N/H) \leq \pi/2$ . Это значит, что для ВПКС “приграничными” следует считать приповерхностные  $0 \leq z \leq H'_1$ ,  $H'_1 = 0.5H/N$

**Таблица 2.** Аппроксимирующие соотношения функции ПИМ ВПКС монополя

Ограничения на $z_0$	Ограничения на $z$	Аппроксимирующее соотношение	Оценка
$0 \leq z_0 \leq H_1$ или $H_2 \leq z_0 \leq h$	$0 \leq z \leq H'_1$ или $H'_2 \leq z \leq h$	$G_{00}^{Vz} \approx d^2 \frac{A^V \pi}{64\delta^3 r^4} \times$ $\times \left( b_1 \exp\left(-\frac{b_1^2}{4\delta r}\right) + b_2 \exp\left(-\frac{b_2^2}{4\delta r}\right) \right)^2$	$G_{00}^{Vz} \sim d^2 \frac{k^3 H^7}{2\pi^2 h^2 \gamma^3} \frac{(kz_0)^2}{r^4}$
$0 \leq z_0 \leq H_1$ или $H_2 \leq z_0 \leq h$	$H'_1 \leq z \leq H'_2$	$G_{00}^{Vz} \approx d^2 \frac{A^V \pi}{4H^2 \delta^3 r^4} \frac{z_0^2}{r^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 z_0^2}{2H^2 \delta r}\right)$	$G_{00}^{Vz} \sim d^2 \frac{2k^3 H^7}{\pi^4 h^2 \gamma^3} \frac{(kz_0)^2}{r^4}$
$H_1 < z_0 < H_2$	$0 \leq z \leq H'_1$ или $H'_2 \leq z \leq h$	$G_{00}^{Vz} \approx d^2 \frac{A^V}{\pi^2 \delta^2 r^3} \left( 1 - \frac{\pi z}{H\sqrt{\delta r}} \text{Dason}\left(\frac{\pi z}{2H\sqrt{\delta r}}\right) \right)^2$	$G_{00}^{Vz} \sim d^2 \frac{8k^3 H^6}{\pi^5 h^2 \gamma^2} \frac{1}{r^3}$
$H_1 < z_0 < H_2$	$H'_1 \leq z \leq H'_2$	$G_{00}^{Vz} \approx d^2 \frac{4A^V}{\pi^4 \delta^2 r^3} \left( 1 - e^{-\delta r N^2} \right)^2$	$G_{00}^{Vz} \sim d^2 \frac{32k^3 H^6}{\pi^7 h^2 \gamma^2} \frac{1}{r^3}$

Примечание:  $b_1 = \pi(z_0 - z)/H$ ,  $b_2 = \pi(z_0 + z)/H$ .

и придонные  $H'_2 \leq z \leq h$ ,  $H'_2 = H - H'_1$  глубины. Соответственно изменится и понятие “средней” глубины приемника:  $H'_1 \leq z \leq H'_2$ . Аппроксимирующие соотношения для функции ПИМ ВПКС монополя (15) и их асимптотические оценки приведены в табл. 2.

### 3.2. Горизонтальные диполи

В выражениях (6)–(8) горизонтальным диполям с различной ориентацией осей соответствуют индексы  $n = 1$  и  $m = \pm 1$ . Все характеристики этих диполей одинаковы, так как зависят от  $|m|$ , поэтому здесь и далее для квадрупольей для краткости рассматриваются только мультиполи, соответствующие положительным значениям  $m$ . Для указанных индексов коэффициент  $g_1 = 1 + 1/k^2 r^2$ ,  $\alpha'_{10} = \alpha_{10} = ldz_0$ , а присоединенные полиномы Лежандра равны  $P_1^1(ld) = \sqrt{1 - l^2 d^2}$ . Запишем функции ПИМ для горизонтального диполя:

$$G_{11}^p = \frac{A^p}{r} \left( \sum_{l=1}^N \sqrt{1 - l^2 d^2} |\sin \alpha_{10} \sin \alpha_l| e^{-\delta r l^2} \right)^2,$$

$$G_{11}^{Vr} = \frac{A^V g_1}{r} \left( \sum_{l=1}^N (1 - l^2 d^2) |\sin \alpha_{10} \sin \alpha_l| e^{-\delta r l^2} \right)^2, \quad (16)$$

$$G_{11}^{Vz} = d^2 \frac{A^V}{r} \left( \sum_{l=1}^N l \sqrt{1 - l^2 d^2} |\sin \alpha_{10} \cos \alpha_l| e^{-\delta r l^2} \right)^2.$$

Сравнивая выражения (16) для функций ПИМ горизонтального диполя с выражениями (9), (14), (15) для функций ПИМ монополя, несложно за-

метить, что они отличаются только наличием у слагаемых дополнительного множителя  $\sqrt{1 - l^2 d^2}$ . Поэтому рассуждая, как и в п. 3.1 при определении верхних оценок для ПИМ горизонтальных компонент колебательной скорости, получим, что для горизонтального диполя можно использовать умноженные на двучлен  $1 - d^2$  аппроксимации из табл. 1 и 2 функций ПИМ монополя.

### 3.3. Вертикальный диполь

В выражениях (6)–(8) вертикальной диполь представлен индексами  $n = 1$  и  $m = 0$ . По определению присоединенных полиномов Лежандра  $P_1^0(ld) = ld$ . Для этого диполя  $g_0 = 1$ ,  $\chi_{10} = -1$  и  $\sin \alpha'_{10} = \cos \alpha_{10}$ . Поэтому функция ПИМ ЗД этого диполя записывается в виде:

$$G_{10}^p = d^2 \frac{A^p}{r} \left( \sum_{l=1}^N l |\cos \alpha_{10} \sin \alpha_l| e^{-\delta r l^2} \right)^2. \quad (17)$$

Зона приграничных глубин для ЗД этого источника определяется по-другому — это приповерхностные  $0 \leq z_0 \leq H'_1$  и придонные  $H'_2 \leq z_0 \leq h$  глубины источника, и приповерхностные  $0 \leq z \leq H_1$  и придонные  $H_2 \leq z \leq h$  глубины приемника. Полученные с учетом указанной особенности аппроксимирующие соотношения для функции ПИМ ЗД вертикального диполя (17) и их асимптотические оценки приведены в табл. 3. Функция ПИМ ГПКС вертикального диполя

**Таблица 3.** Аппроксимирующие соотношения функции ПИМ ЗД вертикального диполя

Ограничения на $z_0$	Ограничения на $z$	Аппроксимирующее соотношение	Оценка
$0 \leq z_0 \leq H'_1$ , или $H'_2 \leq z_0 \leq h$	$0 \leq z \leq H_1$ , или $H_2 \leq z \leq h$	$G_{10}^p \approx d^2 \frac{A^p \pi}{64\delta^3 r^4} \times$ $\times \left( b_2 \exp\left(-\frac{b_2^2}{4\delta r}\right) - b_1 \exp\left(-\frac{b_1^2}{4\delta r}\right) \right)^2$	$G_{10}^p \sim d^2 \frac{kH^7}{2\pi^2 h^2 \gamma^3} \frac{(kz)^2}{r^4}$
$0 \leq z_0 \leq H'_1$ , или $H'_2 \leq z_0 \leq h$	$H_1 \leq z \leq H_2$	$G_{10}^p \approx d^2 \frac{A^p}{\pi^2 \delta^2 r^3} \left( 1 - \frac{\pi z_0}{H\sqrt{\delta r}} \text{Dason}\left(\frac{\pi z_0}{2H\sqrt{\delta r}}\right) \right)^2$	$G_{10}^p \sim d^2 \frac{8kH^6}{\pi^5 h^2 \gamma^2} \frac{1}{r^3}$
$H'_1 \leq z_0 \leq H'_2$	$0 \leq z \leq H_1$ , или $H_2 \leq z \leq h$	$G_{10}^p \approx d^2 \frac{A^p \pi}{4H^2 \delta^3 r^4} \frac{z^2}{r^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 z^2}{2H^2 \delta r}\right)$	$G_{10}^p \sim d^2 \frac{2kH^7}{\pi^4 h^2 \gamma^3} \frac{(kz)^2}{r^4}$
$H'_1 \leq z_0 \leq H'_2$	$H_1 \leq z \leq H_2$	$G_{10}^p \approx d^2 \frac{4A^p}{\pi^4 \delta^2 r^3} \left( 1 - e^{-\delta r N^2} \right)^2$	$G_{10}^p \sim d^2 \frac{32kH^6}{\pi^7 h^2 \gamma^2} \frac{1}{r^3}$

Примечание:  $b_1 = \pi(z_0 - z)/H$ ,  $b_2 = \pi(z_0 + z)/H$ .

**Таблица 4.** Аппроксимирующие соотношения функции ПИМ ВПКС вертикального диполя

Ограничения на $z_0$	Ограничения на $z$	Аппроксимирующее соотношение	Оценка
$0 \leq z_0 \leq H'_1$ или $H'_2 \leq z_0 \leq h$	$0 \leq z_0 \leq H'_1$ или $H'_2 \leq z \leq h$	$G_{10}^{Vz} \approx d^4 \frac{A^V \pi}{256\delta^5 r^6} \times$ $\times \left( c_1 \exp\left(-\frac{b_1^2}{4\delta r}\right) + c_2 \exp\left(-\frac{b_2^2}{4\delta r}\right) \right)^2$ $c_1 = 2\delta r - b_1^2, c_2 = 2\delta r - b_2^2$	$G_{10}^{Vz} \sim d^4 \frac{k^5 H^9}{2\pi^4 h^2 \gamma^3} \frac{1}{r^4}$
$0 \leq z_0 \leq H'_1$ или $H'_2 \leq z_0 \leq h$	$H'_1 \leq z \leq H'_2$	$G_{10}^{Vz} \approx d^4 \frac{A^V}{4\pi\delta^3 r^4} \times$ $\times \left( 1 - \frac{\pi^2 z_0^2}{2H^2 \delta r} \right)^2 \exp\left(-\frac{\pi^2 z_0^2}{2H^2 \delta r}\right)$	$G_{10}^{Vz} \sim d^4 \frac{2k^5 H^9}{\pi^6 h^2 \gamma^3} \frac{1}{r^4}$
$H'_1 \leq z_0 \leq H'_2$	$0 \leq z \leq H'_1$ или $H'_2 \leq z \leq h$	$G_{10}^{Vz} \approx d^4 \frac{A^V}{4\pi\delta^3 r^4} \left( 1 - \frac{\pi^2 z^2}{2H^2 \delta r} \right)^2 \exp\left(-\frac{\pi^2 z^2}{2H^2 \delta r}\right)$	$G_{10}^{Vz} \sim d^4 \frac{2k^5 H^9}{\pi^6 h^2 \gamma^3} \frac{1}{r^4}$
$H'_1 \leq z_0 \leq H'_2$	$H'_1 < z < H'_2$	$G_{10}^{Vz} \approx d^4 \frac{A^V}{\pi^3 \delta^3 r^4} \left( \text{erf}(N\sqrt{\delta r}) - 2N\sqrt{\frac{\delta r}{\pi}} e^{-\delta r N^2} \right)^2$	$G_{10}^{Vz} \sim d^4 \frac{8k^5 H^9}{\pi^8 h^2 \gamma^3} \frac{1}{r^4}$

Примечание:  $b_1 = \pi(z_0 - z)/H$ ,  $b_2 = \pi(z_0 + z)/H$ .

$$G_{10}^{Vr} = d^2 \frac{A^V}{r} \left( \sum_{l=1}^N l \sqrt{1 - l^2 d^2} |\cos \alpha_{l0} \sin \alpha_l| e^{-\delta r l^2} \right)^2 \quad (18)$$

отличается от функции ПИМ его ЗД только наличием у слагаемых дополнительного множителя  $\sqrt{1 - l^2 d^2}$ . Поэтому все предложенные в табл. 3 для функции ПИМ ЗД вертикального диполя аппроксимации после умножения на двучлен  $1 - d^2$  можно применять и для функции ПИМ ГПКС

вертикального диполя (18). Но функция ПИМ ВПКС вертикального диполя существенно отличается от всех рассмотренных выше

$$G_{10}^{Vz} = d^4 \frac{A^V}{r} \left( \sum_{l=1}^N l^2 |\cos \alpha_{l0} \cos \alpha_l| e^{-\delta r l^2} \right)^2. \quad (19)$$

Отметим, что для построения аппроксимации функции ПИМ ВПКС вертикального диполя следует считать “приграничными” приповерх-

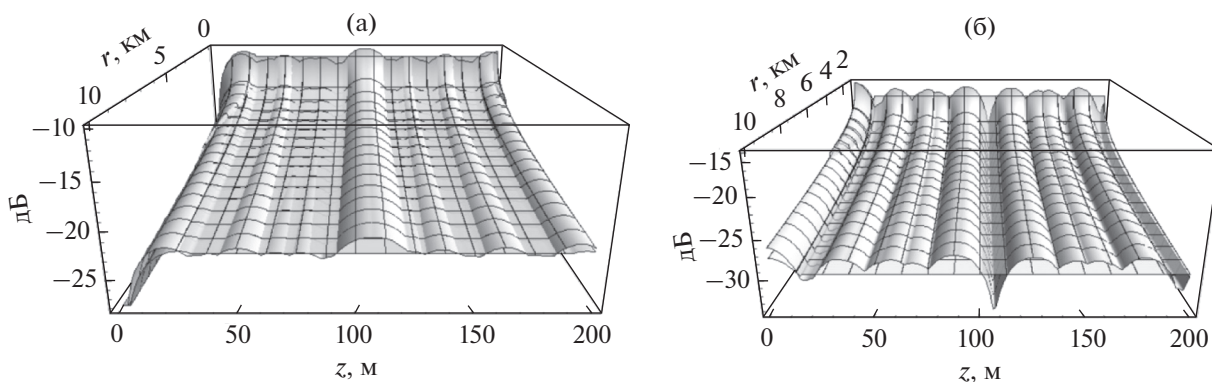


Рис. 3. ПИМ и аппроксимирующие поверхности (а) – для давления и (б) – для ВПКС монополя.

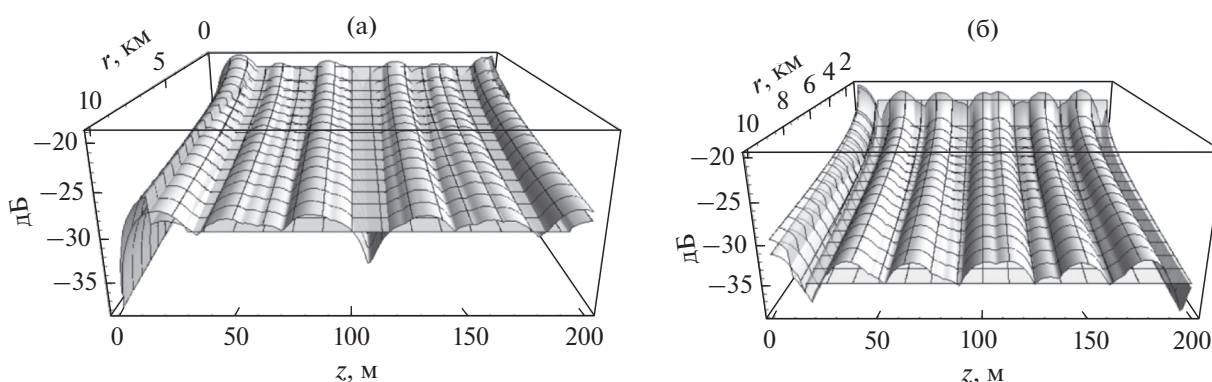


Рис. 4. ПИМ и аппроксимирующие поверхности (а) – для давления и (б) – для ВПКС вертикального диполя.

ностные глубины  $0 \leq z_0, z \leq H_1'$  и придонные глубины  $H_2' \leq z_0, z \leq h$ . Кроме того, под знаком суммы находится  $l^2$ , а не  $l$ , что приводит к существенным изменениям. Полученные аппроксимирующие соотношения для функции ПИМ ВПКС вертикального диполя (19) и их асимптотические оценки приведены в табл. 4.

### 3.4. Квадруполи

Для квадруполей с двумя горизонтальными осями  $g_2 = 1 + 4/k^2 r^2, \chi_{22} = 1, \alpha'_{l0} = \alpha_{l0}$ , а полиномы Лежандра равны  $P_2^2(ld) = 3(1 - l^2 d^2)$ . Поэтому для функций ПИМ ЗД и ГПКС этих квадруполей могут быть использованы аппроксимации из табл. 1, а для функций ПИМ ВПКС – аппроксимации функций ПИМ монополя, приведенные в табл. 2 после их умножения на коэффициент  $9(1 - d^2)^2$ . Для функций ПИМ ГПКС необходимо дополнительное умножение на коэффициент  $g_2$ .

Для квадруполей с горизонтальной и вертикальной осями  $g_1 = 1 + 1/k^2 r^2, \chi_{21} = -1$ , а полино-

мы Лежандра равны  $P_2^1(ld) = 3ld\sqrt{1 - l^2 d^2}$ . Следовательно, для функций ПИМ ЗД и ГПКС этих квадруполей могут быть использованы аппроксимации вертикального диполя из табл. 3, а для функций ПИМ ВПКС – приведенные в табл. 4 аппроксимации функций ПИМ ВПКС вертикального диполя, после их умножения на коэффициент  $9(1 - d^2)$ . Для функций ПИМ ГПКС необходимо дополнительное умножение на коэффициент  $g_1$ .

У квадруполя с двумя вертикальными осями  $g_0 = 1, \chi_{20} = 1$ , а полиномы Лежандра равны  $P_2^0(ld) = (3l^2 d^2 - 1)/2$ . Поэтому вновь можно использовать аппроксимации функций ПИМ монополя из табл. 1 и 2 после их умножения на коэффициент  $(3d^2 - 1)^2/4$ .

На рис. 3 показаны ПИМ и полученные с помощью соотношений из табл. 1 и 2 аппроксимирующие поверхности для ЗД и ВПКС монополя – характерного представителя мультиполей первой группы. Расчеты также выполнены для источника с частотой 50 Гц, находящегося на глубине 110 м в волноводе с указанными выше параметрами.

Таблица 5. Сводная таблица оценок функций ПИМ для двух групп мультиполей

	Обе глубины приграничные	$z_0$ – приграничная, $z$ – средняя	$z$ – приграничная, $z_0$ – средняя	Обе глубины средние
ЗД I группа	$(kz_0)^2(kz)^2 \frac{A}{r^4}$	$\frac{16\gamma(kz_0)^2 A}{\pi^3 H r^3}$	$\frac{16\gamma(kz)^2 A}{\pi^3 H r^3}$	$\frac{64\gamma^2 A}{\pi^4 H^2 r^2}$
ВПКС I группа	$d^2(kz_0)^2 \frac{B}{r^4}$	$d^2(kz_0)^2 \frac{4 B}{\pi^2 r^4}$	$d^2 \frac{16\gamma B}{\pi^3 H r^3}$	$d^2 \frac{64\gamma B}{\pi^5 H r^3}$
ЗД II группа	$\frac{d^2(kz)^2 B}{k^2 r^4}$	$d^2 \frac{16\gamma B}{\pi^3 k^2 H r^3}$	$d^2(kz)^2 \frac{4 B}{k^2 \pi^2 r^4}$	$d^2 \frac{64\gamma B}{\pi^5 k^2 H r^3}$
ВПКС II группа	$d^4 \frac{D}{r^4}$	$d^4 \frac{4D}{\pi^2 r^4} \approx 0.4d^4 \frac{D}{r^4}$	$d^4 \frac{4D}{\pi^2 r^4} \approx 0.4d^4 \frac{D}{r^4}$	$d^4 \frac{16D}{\pi^4 r^4} \approx 0.16d^4 \frac{D}{r^4}$

Примечание:  $A = H^5/2kh^2\gamma^3$ ,  $B = k^3H^7/2\pi^2h^2\gamma^3$ ,  $D = k^5H^9/2\pi^4h^2\gamma^3$ .

На рис. 4 показаны полученные для тех же условий и соотношений из табл. 3 и 4 ПИМ и аппроксимирующие поверхности для ЗД и ВПКС вертикального диполя – характерного представителя мультиполей второй группы. Максимальные неточности аппроксимации наблюдаются только у поверхностей раздела и в середине эквивалентного волновода – 1.7 дБ для ЗД и 5.5 дБ для ВПКС (рис. 3), 3.9 дБ для ЗД и 5.1 дБ для ВПКС (рис. 4). Это является результатом “сглаживания” огибающих интерференционных максимумов.

### 3.5. Обобщенный анализ функций ПИМ для двух групп мультиполей

В табл. 5 приведены асимптотические оценки функций ПИМ для ЗД (соответственно, и ГПКС) и ВПКС для двух групп мультиполей и различных зон размещения приемников и излучателей. Видно, что для различных типов мультиполей наблюдается существенное различие зависимостей этих характеристик от расстояния, частоты звука (волнового числа), глубины волновода и глубин расположения приемников и излучателей. В частности, при расположении корреспондирующих точек в приграничных зонах величины ЗД или ГПКС быстро уменьшаются при приближении к поверхностям раздела, а ВПКС в этих же условиях стремится к постоянным, зависящим от частоты и глубины волновода, значениям.

При расположении излучателей и приемников в зоне середины волновода зависимость всех характеристик гидроакустического поля от глубины практически отсутствует, а зависимости ЗД и ВПКС при размещении приемников или излучателей в середине волновода для первой и второй группы изменяют свои характеристики зеркально – с точностью до критерия подобия (показано стрелками в табл. 5). Следует также отметить ускоренное ослабление ВПКС по сравнению с ЗД

при увеличении расстояния как для первой, так и второй групп мультиполей (последняя строка в табл. 5), а также практически независимость значений ВПКС от глубин и зон размещения приемников и излучателей для второй группы мультиполей.

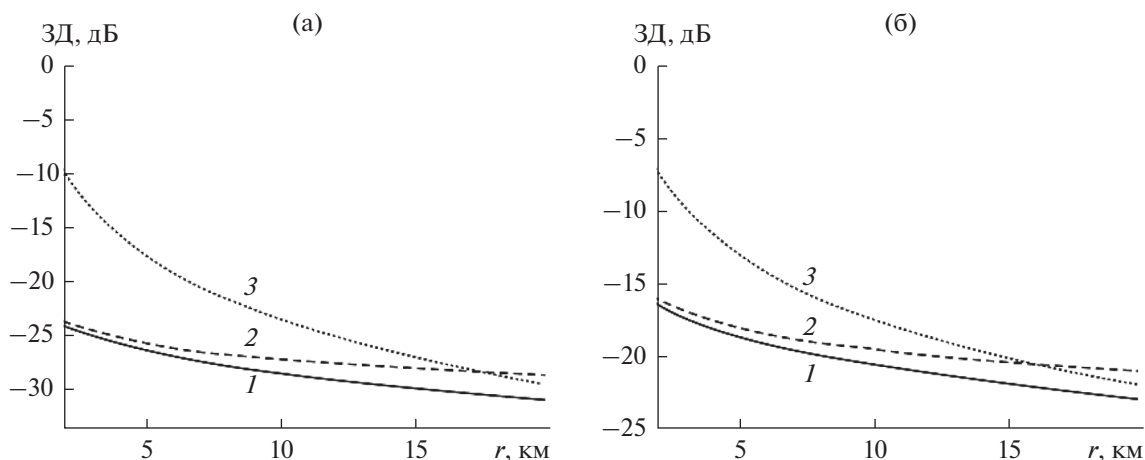
Перечисленные аналитические зависимости хорошо согласуются с результатами точных расчетов вертикальной структуры ПИМ для всех мультиполей.

В табл. 5 предпринимается попытка дополнительно обобщить зависимости от расстояния всех типов составляющих поля, объединенных для двух групп мультиполей. Обобщение выполняется с учетом влияющих факторов: глубин источников, приемников и волновода, частоты звука и типа (группы) мультиполей. Очевидно, что такое обобщение может иметь право на существование только для асимптотических характеристик поля.

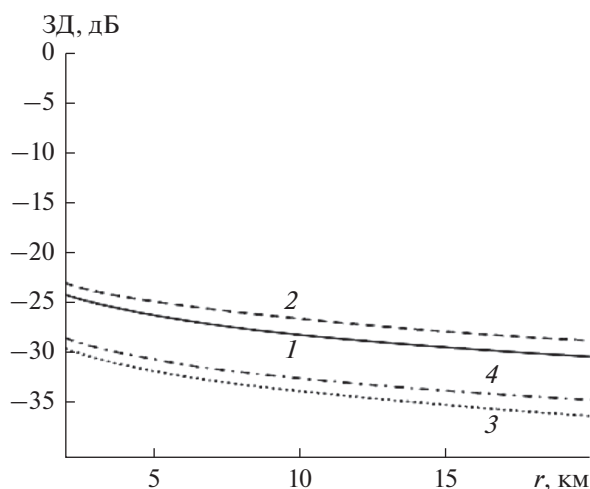
Из формул, приведенных в табл. 1–4, в явном виде следуют аппроксимирующие зависимости от расстояния ЗД, ГПКС и ВПКС для мультиполей различного типа. Из табл. 5 можно получить асимптотические зависимости. Полученные формулы позволяют прогнозировать ослабление различных составляющих поля при изменении расстояния с учетом влияющих факторов: глубин волновода, источника и приемника, частоты звука и т.д.

На рис. 5–7 сравниваются закономерности ослабления различных компонент поля для разных мультиполей, полученные путем компьютерного моделирования поля в волноводе с указанными выше параметрами для глубины приемника  $z = 200$  м и источника с частотой 30 Гц, который находится на глубинах  $z_0 = 3$  и 100 м. На рисунках приведены сечения поверхностей ИМА сигналов (точные значения), аппроксимирующие соотношения и асимптотические оценки. Видно, что точные и аппроксимирующие зависимости хоро-

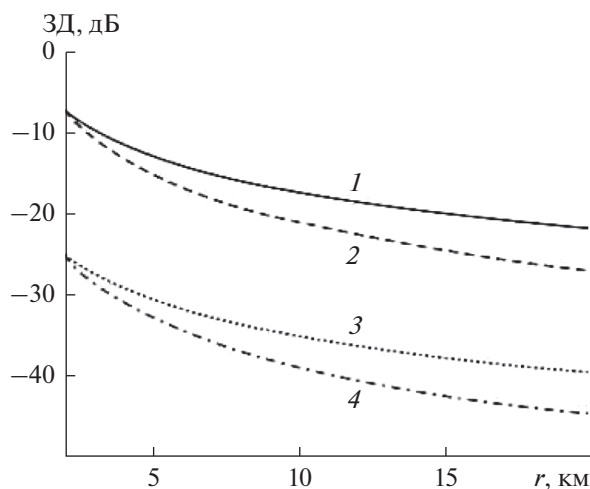




**Рис. 5.** Сечения ПИМ ЗД монополя: 1 – точные значения ЗД в сечении ПИМ; 2 – аппроксимирующие сечения; 3 – асимптотические оценки функций ПИМ. Глубины источника (а) –  $z_0 = 3$  м, (б) –  $z_0 = 100$  м.



**Рис. 6.** Сечения ПИМ ВПКС: 1 – монополя; 2 – квадруполь с двумя горизонтальными осями; 3 – вертикального диполя; 4 – квадруполь с двумя ортогональными осями.



**Рис. 7.** Асимптотические оценки (см. табл. 5): ПИМ ЗД первой (кривая 1) и второй (кривая 2) групп мультиполей; ПИМ ВПКС первой (кривая 3) и второй (кривая 4) групп мультиполей.

шо согласуются на всех расстояниях даже для низкой частоты 30 Гц (при малом числе нормальных волн), а асимптотической зависимостью можно пользоваться только на больших расстояниях. Можно показать, что при увеличении частоты из-за увеличения числа нормальных волн сходимость всех зависимостей улучшается.

Из рис. 6 следует, что ВПКС всех групп мультиполей ослабевают быстрее, чем остальные зависимости. Особенно интенсивное ослабление наблюдается для компонент поля, образованных вертикальным диполем или квадруполем с ортогональными осями. Из рис. 7 можно увидеть, что независимо от типа (группы) мультиполей асимптотические значения ВПКС уменьшаются значительно быстрее, чем для ЗД.

Из табл. 1–5 и рис. 1–7 следует, что для всех типов мультиполей наблюдается существенное различие зависимостей ЗД, ГПКС или ВПКС от различных влияющих факторов. Видно также значимое влияние частоты звука и глубины волновода, особенно на характеристики ВПКС, которые спадают при увеличении расстояния заметно быстрее и имеют отличительные особенности вблизи границ волновода.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введение функций ПИМ позволяет дать укрупненное описание пространственно-частотной структуры поля в зонах ИМА при изменении глубин, расстояния и частоты звука. Согласие зависимостей от глубин, расстояния или частоты характеристик ПИМ для ЗД и ГПКС свидетельствует о высокой корреляции огибающих этих характеристик. Корреляция между ВПКС и ЗД или ГПКС существенно меньше. Ослабление ВПКС во всех зонах и для всех расстояний происходит существенно быстрее, чем ЗД или ГПКС.

Характеристики всех составляющих звукового поля — ЗД, ГПКС и ВПКС существенно различаются в зависимости от типа мультиполей, особенно при анализе структуры вертикального сечения поля. Наибольшие отличия наблюдаются при расположении источников или приемников вблизи поверхностей раздела или в зоне середины эквивалентного волновода. При их расположении у поверхностей раздела все составляющие звукового поля убывают при увеличении расстояния значительно быстрее, чем при расположении приемников и излучателей в середине волновода — это хорошо видно из анализа полученных аппроксимирующих зависимостей. Зависимости ЗД и КС в зонах ИМА от расстояния для малых и больших расстояний также различаются. При размещении корреспондирующих точек в зонах ИМА ослабление всех составляющих поля для всех типов мультиполей происходит приблизительно в  $\sqrt{r}$  раз быстрее, чем для регулярных составляющих или при их расположении в произвольных точках. Иными словами, ускоренный спад в зонах ИМА распространяется на все глубины и расстояния и характерен не только для ЗД, но и для проекций КС.

По вертикальным структурам поля всех мультиполей могут быть разбиты на две укрупненные группы, соответствующие двум типам мультиполей: 1) монополи, горизонтальные диполи, квадруполь с двумя горизонтальными или двумя вертикальными осями и т.д. и 2) вертикальные диполи и квадруполь с одной вертикальной осью (группы I и II).

Аппроксимирующие зависимости для низкочастотных сигналов и выбранных расстояний и глубин дают наглядный и достаточно точный прогноз вырождения интерференционной структуры поля в зонах ИМА, как для ЗД, так и для проекций КС. Это позволяет выполнять численные оценки законов спада характеристик всех составляющих поля, не прибегая к сложным расчетам полей. Полученные зависимости позволяют просто и в явном виде прогнозировать зависимости от расстояния, частоты звука, глубины волновода, координат источника и приемника и характеристик грунта.

Аппроксимирующие соотношения для вертикальных диполей и квадруполей для функций ПИМ давления и колебательной скорости существенно отличаются от зависимостей, полученных для монополя и горизонтальных проекций диполей и квадруполей, из чего следует необходимость при решении практических задач учитывать реальную пространственную структуру излучаемого поля. Особенно это важно для малых расстояний при решении измерительных или контрольных задач. На больших расстояниях влияние вертикальных проекций существенно уменьшается. Полученные простые соотноше-

ния позволяют для малых и больших расстояний наглядно и достаточно точно проследить зависимости ЗД и КС от параметров среды и условий эксперимента, а также характеристик сигнала. Результаты могут использоваться при прогнозе характеристик излучаемого поля, выборе и обосновании алгоритмов обнаружения и оценки параметров, например, измерения в ближней зоне шумности источников, учитывающих интерференцию звукового поля.

Авторы выражают благодарность В.Г. Петникову за полезный совет.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Акустика мелкого моря, нелинейная акустическая диагностика, нелинейная динамика волн” (номер гос. регистрации АААА-А18-118021390174-1) и программы РФФИ (проект № 19-08-00941).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 502 с.
2. *Кузнецов Г.Н., Степанов А.Н.* Аппроксимирующие модели регулярной составляющей инфразвукового поля мультипольных источников в плоском волноводе // *Акуст. журн.* 2013. Т. 59. № 3. С. 378–390.
3. *Урик Р.Дж.* Основы гидроакустики. Л.: Судостроение, 1978.
4. *Грачев Г.А., Кузнецов Г.Н.* О средней скорости изменения фазы акустического поля вдоль плоского волновода // *Акуст. журн.* 1985. Т. 31. № 2. С. 266–268.
5. *Kuznetsov G.N., Stepanov A.N.* Interference and phase structure of the low-frequency vector-scalar field in shallow water for variable reception or transmission depths // *Phys. Wave Phenom.* 2015. V. 23. № 4. P. 279–291.
6. *Kuznetsov G.N., Lebedev O.V.* The use of effective phase velocity to decrease the direction finding error for a low-frequency signal in a waveguide // *Phys. Wave Phenom.* 2012. V. 20. № 1. P. 58–66.
7. *Кузнецов Г.Н., Степанов А.Н.* Амплитудно-фазовая структура векторно-скалярного низкочастотного поля в мелком море // *Гидроакустика.* 2016. Вып. 27. № 3. С. 23–37.
8. *Орлов Е.Ф., Шаронов Г.А.* Интерференция звуковых волн в океане. Владивосток: Дальнаука, 1998. 196 с.
9. *Чупров С.Д.* Интерференционная структура звукового поля в слоистом океане // *Акустика океана. Современное состояние.* М.: Наука, 1982. С. 71–82.
10. *Касаткин Б.А.* Инвариантные характеристики звукового поля в слоистом океане // *Докл. АН СССР.* 1986. Т. 291. № 6. С. 1483–1487.
11. *Кузькин В.М., Лин Й.-Т., Луньков А.А., Линч Дж.Ф., Петников В.Г.* Частотные смещения интерференционной структуры звукового поля в летний период времени на океанском шельфе // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 3. С. 387–397.

12. *Kuz'kin V.M., Lyakhov G.A., Pereselkov S.A.* Method for measuring the frequency shifts of interference maxima in monitoring of dispersion media: theory, implementation, and prospects // *Phys. Wave Phenom.* 2010. V. 18. № 3. P. 196–222.
13. *Каришнев Н.С., Кузнецов Г.Н., Луников А.А.* Анализ надводной обстановки с использованием векторно-скалярной цилиндрической антенны // *Гидроакустика.* 2015. Т. 23. № 3. С. 27–40.
14. *Казначеев И.В., Кузнецов Г.Н., Кузькин В.М., Переселков С.А.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 1. С. 33–45.
15. *Кузнецов Г.Н., Кузькин В.М., Переселков С.А.* Обнаружение и оценка скорости быстро движущейся цели с использованием интерференционной структуры звукового поля // *Гидроакустика.* 2017. Т. 29. № 1. С. 18–32.
16. *Кузнецов Г.Н., Кузькин В.М., Переселков С.А., Провосецкий Д.Ю.* Помехоустойчивость интерферометрического метода оценки скорости источника звука в мелком море // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 5. С. 556–572.
17. *Грачев Г.А., Кузнецов Г.Н.* Ослабление интерференционных максимумов акустического поля в мелком море // *Акуст. журн.* 1985. Т. 31. № 5. С. 675–678.
18. *Кузнецов Г.Н., Степанов А.Н.* Закономерности ослабления векторно-скалярных звуковых полей в зонах интерференционных максимумов // *Акуст. журн.* 2019. Т. 65. № 2. С. 203–213.
19. *Быковцев Г.И., Кузнецов Г.Н., Степанов А.Н.* Акустическое поле направленного источника в океанических волноводах // *ДАН СССР.* 1985. Т. 280. № 1. С. 57–59.
20. *Кузнецов Г.Н., Степанов А.Н.* Поле эквивалентного мультипольного составного излучателя в волноводе // *Акуст. журн.* 2007. Т. 53. № 3. С. 377–385.
21. *Миниович И.Я., Перник А.Д., Петровский В.С.* Гидродинамические источники звука. Л.: Судостроение, 1972. 482 с.
22. *Kuznetsov G.N., Stepanov A.N.* Attenuation of vector-scalar fields of multipole sources in interference maxima regions // *Phys. Wave Phenom.* 2018. V. 26. № 4. P. 334–341.
23. *Сазонтов А.Г., Малеханов А.И.* Согласованная пространственная обработка сигналов в подводных звуковых каналах (обзор) // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61. № 2. С. 233–253.
24. *Кузнецов Г.Н., Степанов А.Н.* О возможности применения принципа взаимности в векторно-скалярных полях мультипольных источников в волноводе Пекериса // *Акуст. журн.* 2017. Т. 67. № 3. С. 296–305.
25. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

УДК 534.874.1

## СРАВНЕНИЕ НАПРАВЛЕННОСТИ ШУМА НЕСУЩЕГО ВЕРТОЛЕТНОГО ВИНТА ДЛЯ РЕЖИМОВ ПОЛЕТА И ВИСЕНИЯ

© 2020 г. В. И. Воронцов<sup>а, \*</sup>, Г. А. Фараносов<sup>а</sup>, С. А. Карабасов<sup>а</sup>, М. Ю. Зайцев<sup>а</sup>

<sup>а</sup>ФГУП ЦАГИ, Научно-исследовательский Московский комплекс ЦАГИ,  
ул. Радио 17, Москва, 105005 Россия

\*e-mail: [aeroacoustics@tsagi.ru](mailto:aeroacoustics@tsagi.ru)

Поступила в редакцию 23.12.2019 г.

После доработки 23.12.2019 г.

Принята к публикации 24.12.2019 г.

Проведено численное исследование шума несущего вертолетного винта на режиме висения и горизонтального полета. Для расчета акустических характеристик, обусловленных нестационарной нагрузкой на лопастях, используется программный комплекс, провалидированный с помощью экспериментальных данных на режиме висения. Применяется гибридный метод расчета, согласно которому вначале рассчитывается ближнее поле, а затем находятся акустические характеристики в дальнем поле. В ближнем поле находятся значения параметров поля около вращающейся лопасти из прямого расчета решения нестационарных уравнений Эйлера в неинерциальной системе координат. Для расчета дальнего поля применяется интегральный метод Фокса Вильямса–Хоукинса с использованием проницаемых контрольных поверхностей, охватывающих лопасть.

*Ключевые слова:* шум несущего винта вертолета, поверхность ФВХ, акустические измерения в дальнем поле

DOI: 10.31857/S0320791920030089

### ВВЕДЕНИЕ

Основным источником шума вертолета на местности является его несущий винт. Моделирование акустических характеристик несущего вертолетного винта представляет собой крайне актуальную и востребованную задачу. Вместе с тем ее решение требует от программы численного расчета возможности моделировать сложное трехмерное движение вертолетных лопастей и, соответственно, генерируемый ими шум. Однако, из-за сильного различия масштабов гидродинамических и акустических возмущений решение задачи требует больших вычислений и, соответственно, временных затрат. Одним из актуальных решений этой проблемы является использование гибридных методов расчета акустики, сочетающих использование прямого расчета уравнений механики сплошной среды и интегрального метода расчета звукового сигнала в дальнем поле.

Помимо чисто вычислительных трудностей, существует также проблема валидации (отладки программы путем сравнения ее с экспериментальными данными) численных результатов по акустике вертолета, особенно на режиме косоугольного обдува лопасти (поступательное движение). Для

валидации расчетов на этих режимах обычно используются результаты модельных экспериментов в аэродинамических трубах (АДТ) с заглушенной рабочей частью [1, 2]. Однако на данный момент в России нет такой установки, в которой можно было бы проводить акустические измерения шума крупномасштабных моделей несущих винтов в заглушенных условиях. Экспериментальные базы данных по акустическим характеристикам несущих вертолетных винтов, полученные в зарубежных АДТ с заглушенной рабочей частью, также являются труднодоступными.

Частично эту проблему удастся решить за счет проведения акустических испытаний модельных винтов на открытом стенде, где обеспечить условия свободного поля легче, чем в обычной АДТ. Это позволяет сравнивать результаты расчета и эксперимента на режиме висения. Вместе с тем проведение экспериментальных акустических исследований в условиях открытого стенда сопряжено с необходимостью учета влияния отражений от различных конструктивных элементов стенда (например, бетонного покрытия, стойки винтового прибора, элементов ограждения и др.), влиянием атмосферной турбулентности на уровень шума винта и т.д. Эти вопросы подробно

рассмотрены в [3], где для различных лопастей и конфигураций винтов получена база данных по их акустическим и аэродинамическим характеристикам, пересчитанным в свободное поле (для методически допустимых углов наблюдения). Результаты сравнения в условиях открытого стенда позволяют рассчитывать, что валидированные по этим данным программы расчета позволят в дальнейшем оценивать шум винта и в условиях горизонтального полета.

В предыдущей работе [3] была проведена валидация программного комплекса численного расчета акустического поля тональных компонент излучения несущего вертолетного винта для режима висения. Сравнение экспериментальных данных тонального шума винта с расчетом показало хорошее соответствие по уровню основной гармоники, соответствующей частоте следования лопастей. Настоящая работа является логическим продолжением вышеописанной работы и включает в себя исследование акустики несущего вертолетного винта при наличии набегающего потока.

Для нахождения дальнего акустического поля данные аэродинамического расчета ближнего поля пересчитываются с помощью интегрального метода Фокса Вильямса–Хоукинга (ФВХ) [4–6]. В данной работе представлена обновленная часть программного комплекса, отвечающая за расчет шума в дальнем поле с помощью метода ФВХ. В ее основе лежат более универсальные методы пересчета сигнала в дальнее поле в присутствии набегающего потока, а также применены программные оптимизации, ускоряющие расчет сигнала в большом количестве точек наблюдения одновременно.

## 1. СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Процесс получения акустических характеристик можно разделить на два этапа. Первый этап – расчет ближнего поля вокруг одной вертолетной лопасти (рис. 1а). На данном этапе моделируется сложное трехмерное движение лопасти, и на контрольной ФВХ-поверхности накапливаются данные для последующего расчета акустических характеристик. На втором этапе накопленные данные обрабатываются для получения временного сигнала в заданной точке дальнего поля (рис. 1б, слева). В силу того, что расчет ближнего поля проводится для одной лопасти, для получения сигнала от вертолетного винта в целом сигнал от одной лопасти размножается необходимое число раз (в соответствии с количеством лопастей),

смещается по фазе и суммируется. Полученный суммарный сигнал преобразуется в узкополосный спектр звукового давления (рис. 1б, справа), в котором доминирует составляющая на частоте следования лопастей (BPF), и также присутствуют ее гармоники, убывающие по амплитуде.

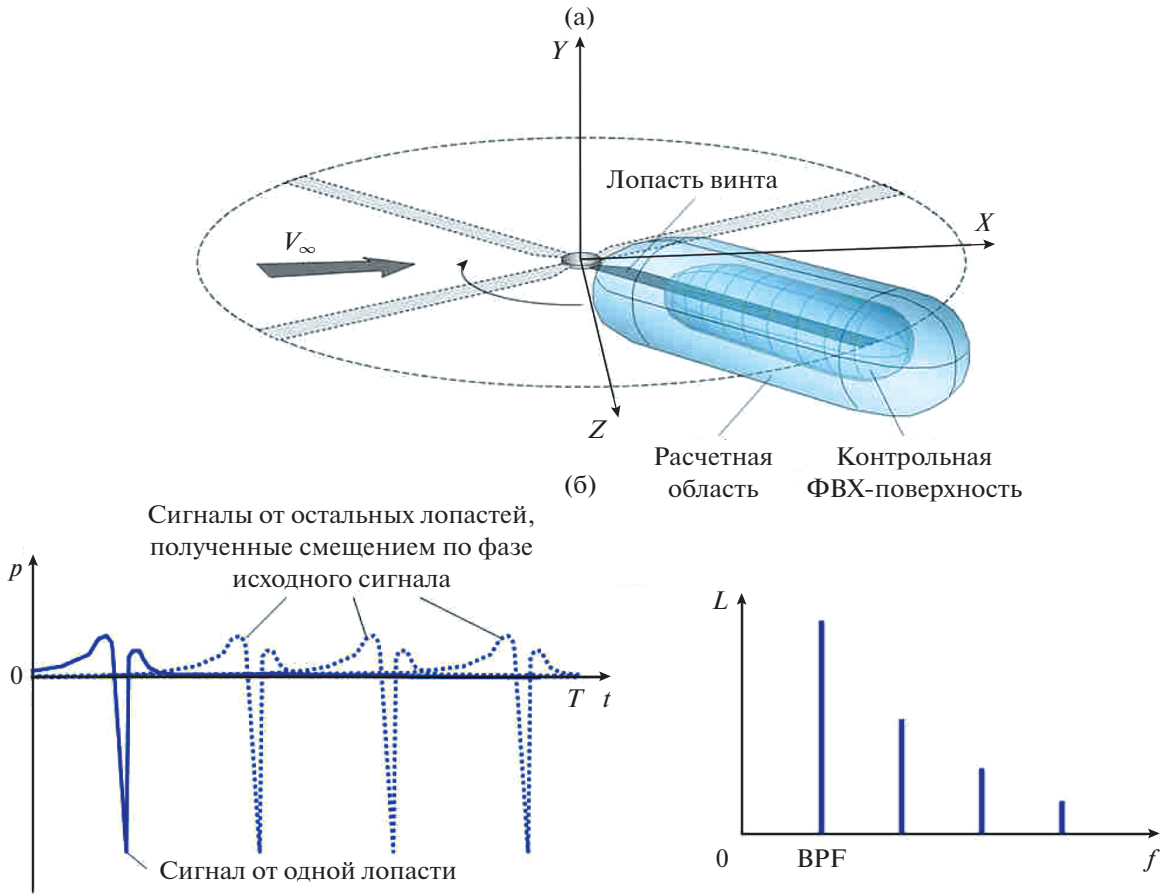
При таком подходе не учитывается взаимодействие лопастей друг с другом, тем не менее, для не слишком малых углов установки лопастей, когда такое взаимодействие можно считать относительно слабым, на режиме висения было получено удовлетворительное согласие с экспериментом по тяге, крутящему моменту и уровню основной тональной компоненты шума винта [3].

Важно отметить, что на режиме горизонтального полета (когда на винт набегающий поток со скоростью  $V_\infty$ , рис. 1а) основными источниками шума, определяющими акустические характеристики вертолета, являются шум нагрузки и шум вытеснения, а при наличии сверхзвуковых зон на лопастях к ним добавляется так называемый импульсный шум. Данные виды шума вдали от источника описываются в основном первой гармоникой узкополосного спектра звукового давления, поэтому далее, как и в работе [3], для всех исследованных режимов будут анализироваться именно свойства первой гармоники.

## 2. РАСЧЕТ ШУМА В ДАЛЬНОМ ПОЛЕ

Обновленная программная часть базируется на работе [4], в которой описывается способ расчета звукового сигнала в дальнем поле с помощью метода Фокса Вильямса–Хоукинга с конвективной функцией Грина. Основным отличием описанного в работе [4] способа от использовавшегося ранее [3] является рассмотрение наблюдателя в системе координат, связанной с летательным аппаратом (вертолетом). Данный подход позволяет в более простой форме рассчитывать сигнал в дальнем поле при наличии набегающего потока и удобен для анализа характеристик излучаемого шума, кроме того он может использоваться при сравнении с экспериментами, проводимыми в аэродинамических трубах. При реализации метода [4] была также проведена оптимизация, позволяющая с большей скоростью рассчитывать сигнал в дальнем поле для большого количества точек с целью построения подробных карт направленности шума.

Для проверки корректной работы программы использовалось аналитическое решение для задачи с вращающимся точечным источником в однородном потоке. Рассматривался стационарный источник массы амплитуды  $A$ , движущийся по



**Рис. 1.** Принципиальная схема расчета шума вертолетного винта: (а) – расчет ближнего поля для одной лопасти 4-лопастного винта, (б) – расчет шума в дальнем поле.

окружности радиуса  $r_0$  вокруг оси  $Y$  с частотой  $\omega$  (рис. 2), на который набегаёт поток со скоростью  $V_\infty$ , направленной вдоль оси  $X$ . Возмущения потенциала скорости  $\varphi$  описываются конвективным волновым уравнением

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{D^2}{Dt^2} - \Delta\right) \varphi = A \frac{\delta(r - r_0)}{r_0} \delta(\psi - \omega t) \delta(y), \quad (1)$$

где  $c$  – скорость звука,  $D/Dt = \partial/\partial t + V_\infty \partial/\partial x$ ,  $A$  – амплитуда источника.

Решение уравнения (1) можно найти, используя функцию Грина для однородного потока [7]

$$\varphi = \frac{A}{4\pi} \int \frac{\delta(t - \tau - R/c)}{R^*} d\tau, \quad (2)$$

где  $R^* = \sqrt{(x - x_s)^2 + \beta^2((y - y_s)^2 + (z - z_s)^2)}$ ,  $R = (-M_\infty(x - x_s) + R^*)/\beta^2$ ,  $\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$ ,  $M_\infty = V_\infty/c$ ,  $(x, y, z)$  и  $(x_s, y_s, z_s)$  – координаты соответственно наблюдателя и источника в декартовой системе координат. Подобные задачи в качестве тестов для алгоритмов ФВХ, предназначенных для вы-

числения шума винтов, используются довольно часто [8, 9]. Аналитическое решение при этом выражается в виде ряда и имеет довольно громоздкий вид. В настоящей работе получены простые выражения как для акустического сигнала в дальнем поле, так и для возмущений давления и скорости на поверхности ФВХ.

В том случае, когда частота вращения источника невелика, так что длина звуковой волны оказывается существенно больше радиуса  $r_0$ , выражение (2) в приближении дальнего поля можно привести к следующему простому виду

$$p' \approx \frac{A \rho_0 r_0 \omega^2}{4\pi c R_0} [(1 - M_\infty \cos \chi_0 \cos \psi_0) \times \cos \chi_0 \cos(\psi_0 - \omega \tau_e) - M_\infty \cos(\omega \tau_e)], \quad (3)$$

где

$$\tau_e \approx t - \left( \sqrt{\beta^2 + M_\infty^2 \cos^2 \chi_0 \cos^2 \psi_0} - M_\infty \cos \chi_0 \cos \psi_0 \right) R_0 / (\beta^2 c),$$

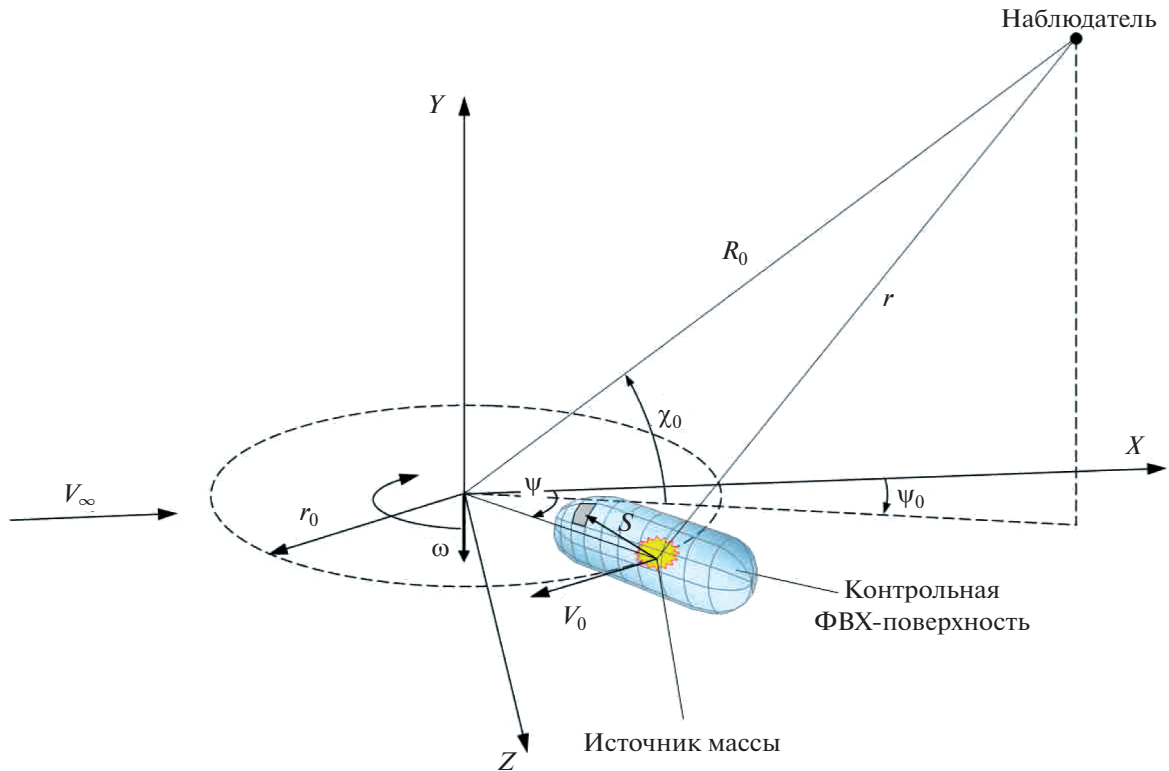


Рис. 2. Модельная задача о вращающемся источнике в потоке.

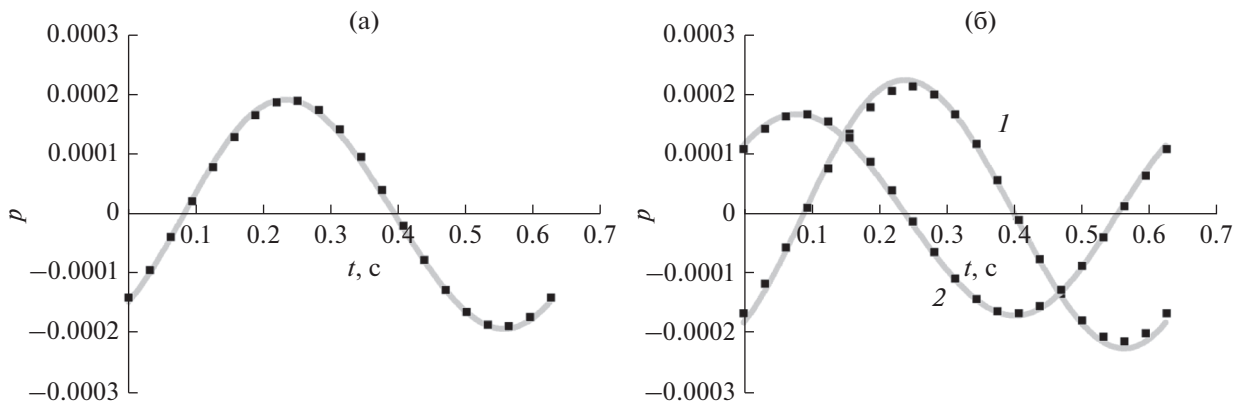


Рис. 3. Сравнение сигнала в дальнем поле, полученного с помощью ФВХ-расчета и аналитического решения. Сплошные линии – расчет по методу ФВХ, точки – расчет по формуле (3). (а) –  $M_\infty = 0$ , наблюдатель в точке  $(-R_0, 0, R_0)$ ; (б) –  $M_\infty = 0.1$ , 1 – наблюдатель в точке  $(-R_0, 0, R_0)$ , 2 – наблюдатель в точке  $(R_0, 0, R_0)$ .

$\rho_0$  – средняя плотность среды, а положение наблюдателя относительно центра вращения характеризуется расстоянием  $R_0$  и углами  $\psi_0$  и  $\chi_0$  (рис. 2).

Для расчета дальнего поля с помощью программы ФВХ были построены контрольные поверхности сферической формы радиуса 0.5 м с центром в точке расположения источника с различным разрешением (от 25 до 1 млн ячеек), на которых записывалось ближнее поле для вращающегося монополя с шагом по времени от 25 до

3200 шагов на период. В случае, когда размер контрольной поверхности много меньше длины звуковой волны, возмущения давления  $p'$  и скорости  $\mathbf{v}'$  в каждой ячейке поверхности можно найти из (2) в несжимаемом приближении ( $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ):

$$p' \approx \frac{A\rho_0}{4\pi s^2} \left( V_\Sigma \cos \theta - \frac{A}{8\pi s^2} \right), \quad \mathbf{v}' \approx \frac{A}{4\pi s^2} \frac{\mathbf{s}}{s}, \quad (4)$$

где  $s$  – расстояние от источника до центра ячейки ФВХ-поверхности,  $V_\Sigma$  – модуль вектора  $\mathbf{V}_\Sigma$ , рав-

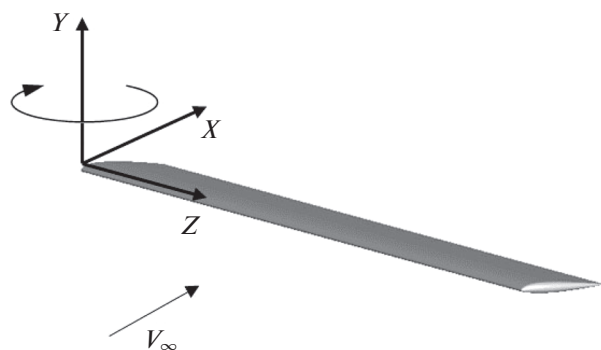


Рис. 4. Пример вращения лопасти вокруг оси  $Y$  (направление поворота отмечено штриховой стрелкой) при наличии набегающего потока с скоростью  $V_\infty$ .

ного сумме скорости набегающего потока и скорости вращения ячейки ФВХ-поверхности вокруг оси  $Y$ ,  $\theta$  – угол между вектором скорости  $V_\Sigma$  и вектором  $s$  (рис. 2).

Для численных оценок были взяты значения  $r_0 = 1$ ,  $A = 100$ ,  $\omega = 10$ . Наблюдатель был расположен на удалении  $R_0 = r_0 \times 10^4$  от начала координат. Рассматривались два случая: режим без потока ( $M_\infty = 0$  – аналог режима висения) и режим с потоком  $M_\infty = 0.1$  (аналог режима полета). На рис. 3 представлено сравнение сигнала, полученного с помощью ФВХ-пересчета ближнего поля (4) в дальнейшем, с сигналом, полученным аналитически по формуле (3). Видно хорошее совпадение двух сигналов по фазе и по амплитуде, как в случае покоящейся среды, так и в случае набегающего потока, что говорит о корректной работе акустического постпроцессора. Решение для  $M_\infty = 0$  симметрично относительно оси вращения источника, поэтому на рис. 3а приведены данные только для одной точки наблюдения. Для случая потока  $M_\infty = 0.1$  проявляется известный эффект конвективного усиления, который заключается в увеличении интенсивности звука в направлении против потока и в снижении интенсивности в на-

Таблица 1. Основные технические характеристики несущего винта

Диаметр винта, $D$	2.76 м
Хорда лопасти, $b$	130 мм
Количество лопастей	2
Коэффициент заполнения	0.06
Крутка лопастей	$0^\circ$



Рис. 5. Распределение расчетных ячеек на поверхности лопасти для сетки 160 тыс. ячеек.

правлении по потоку. Для иллюстрации этого эффекта на рис. 3б приведены данные для двух точек наблюдения – в передней и в задней полусферах. Как показали расчеты, для указанной задачи достаточным является разрешение 2000 ячеек на поверхности сферы, а также 200 шагов по времени на период.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА АКУСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕСУЩЕГО ВЕРТОЛЕТНОГО ВИНТА НА РЕЖИМЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ПОЛЕТА

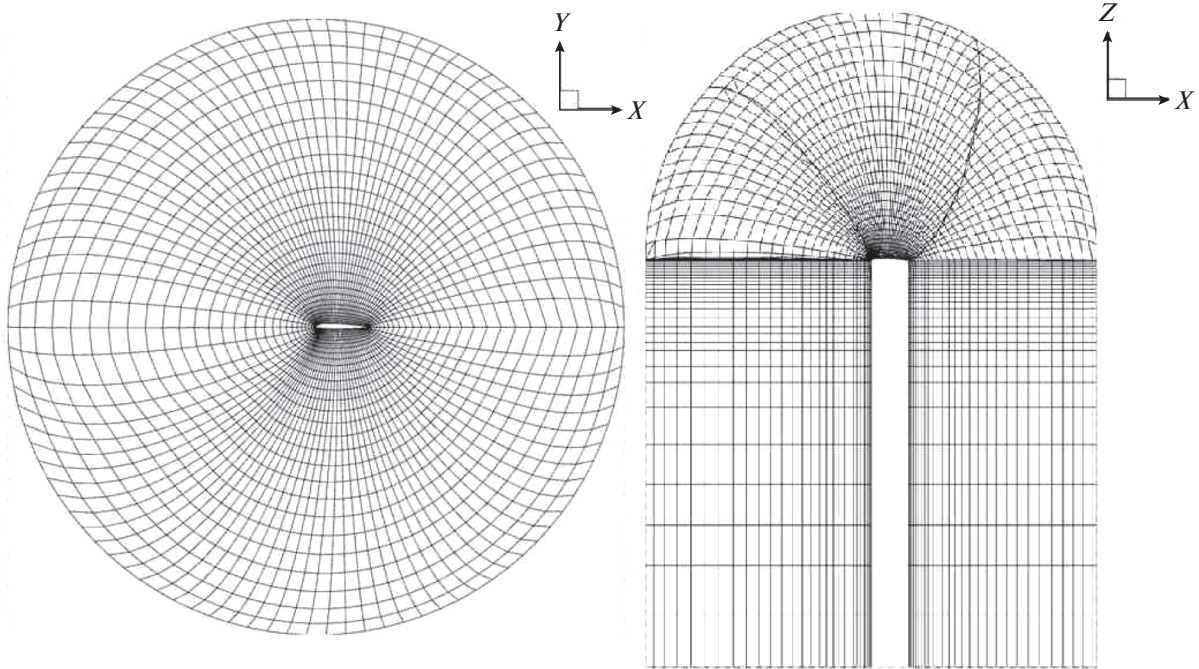
В данном разделе приводятся акустические данные численного расчета, а именно направленность первой гармоники узкополосного спектра звукового давления. В расчете рассматривался модельный несущий винт, работающий на режиме висения, имеющий прямоугольные в плане лопасти, скомпонованные из несимметричного профиля  $NACA230-12$ . Для рассмотрения была выбрана компоновка несущего винта с двумя лопастями. Основные технические характеристики приведены в таблице.

Численный расчет проводился для трех скоростей вращения лопасти ( $M = 0.35, 0.45, 0.55$ ) и для трех скоростей набегающего потока ( $M_\infty = 0, 0.1, 0.2$ ). Угол установки лопасти (угол наклона сечения лопасти к плоскости вращения винта) был постоянным для всех режимов и составлял  $4^\circ$ . Интенсивность звукового поля вычислялась на сферической поверхности диаметром 100 м.

Численное решение уравнений Эйлера было получено для двух сеток: 130 и 160 тыс. ячеек. На рис. 5 представлено распределение расчетных ячеек на поверхности лопасти для второго варианта сетки. Как видно, было проведено сгущение сетки в зоне у внешней части лопасти, поскольку данная часть лопасти движется с большей скоростью, и ее вклад в суммарный шум вертолетного винта наиболее значителен.

На рис. 6 приведены примеры сечения расчетной сетки в различных плоскостях. На рис. 7 и 8 приведено сравнение коэффициента давления для двух расчетных сеток для режима  $M = 0.55$ ,



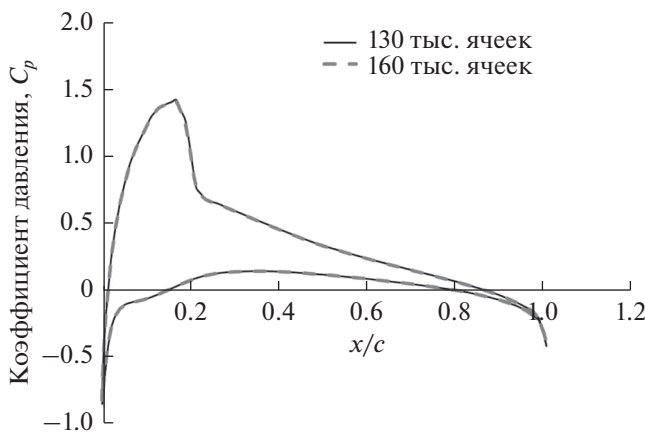


**Рис. 6.** Сечение расчетной сетки: (а) –  $XY$ -плоскость, координата вдоль размаха лопасти  $r = 0.94R$ , где  $R$  – радиус винта, (б) –  $XZ$ -плоскость.

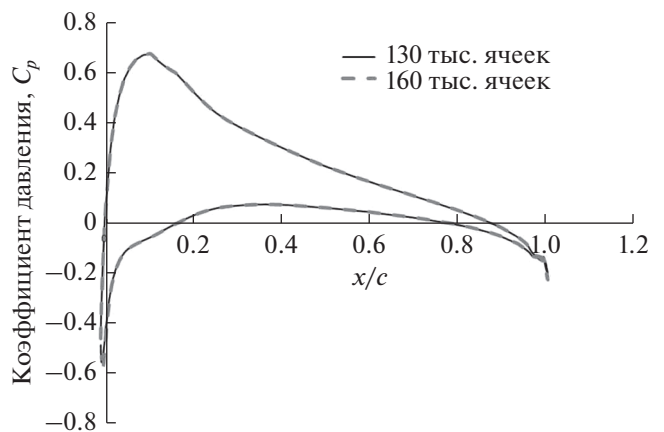
$M_\infty = 0.2$  для углов поворота лопасти  $90^\circ$  и  $270^\circ$ . Как видно, результаты расчетов совпадают. Данное совпадение наблюдается на всех режимах обтекания и на всех углах поворота лопасти.

На рис. 9 приведено сравнение направленности первой гармоники звукового давления, измеренной в плоскости вращения винта, для двух расчетных сеток для режима  $M = 0.55$ ,  $M_\infty = 0.2$ . Результаты расчетов идентичны. Совпадение характерно для всех режимов обтекания.

Для более детального изучения акустического поля первой гармоники использовались диаграммы направленности, сформированные на полусфере (рис. 10). Для наглядности трехмерная полусфера проецировалась на двумерный круг. Поскольку аэродинамические и акустические характеристики для расчетов на сетках размером 130 и 160 тыс. ячеек, как было показано, практически идентичны, ниже приведены соот-



**Рис. 7.** Коэффициент давления на поверхности лопасти в сечении  $r = 0.94R$  для режима  $M = 0.55$ ,  $M_\infty = 0.2$  для двух расчетных сеток, угол поворота лопасти  $90^\circ$ .



**Рис. 8.** Коэффициент давления на поверхности лопасти в сечении  $r = 0.94R$  для режима  $M = 0.55$ ,  $M_\infty = 0.2$  для двух расчетных сеток, угол поворота лопасти  $270^\circ$ .

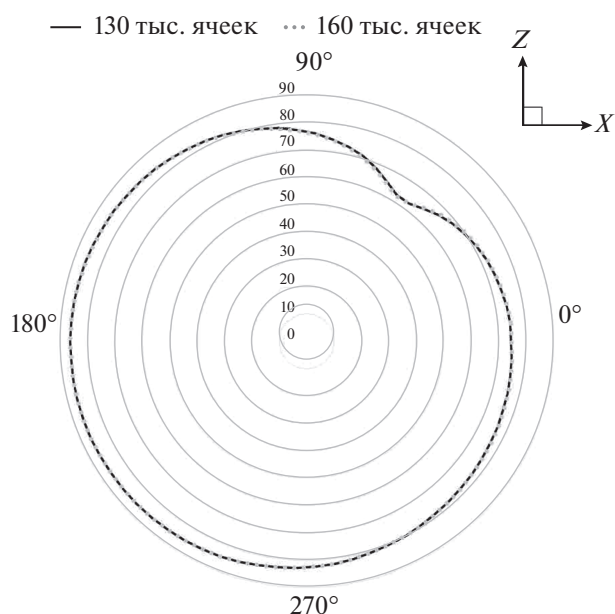


Рис. 9. Диаграмма направленности первой гармоники звукового давления в плоскости вращения винта.

ветствующие диаграммы направленности для сетки размером 160 тыс. ячеек.

Как и ожидалось, диаграмма направленности при нулевой скорости набегающего потока (рис. 11) симметрична относительно оси вращения винта, уровень первой гармоники увеличивается с ростом скорости вращения лопастей. Максимальные значения первой гармоники звукового давления соответствуют плоскости вращения винта. Данный режим соответствует режиму висения, на котором была проведена валидация программного комплекса [3].

Добавление набегающего потока значительно меняет диаграмму направленности (рис. 12–13). Наблюдается смещение пикового излучения в переднюю часть полусферы, кроме того появляется некоторая асимметричность направленности: излучение более интенсивно со стороны наступающей лопасти. Подобная асимметрия наблюдалась в исследованиях других авторов [9, 10].

Наибольшая асимметрия звукового поля наблюдается для режимов полета, отвечающих максимальному отношению поступательной скорости винта к вращательной скорости, поскольку для таких режимов наиболее заметна разница между звуком, излучаемым лопастью при ее движении против потока (в области углов  $\psi \sim 90^\circ$ ) и по направлению потока (в области углов  $\psi \sim 270^\circ$ ). Так, при числе Маха набегающего потока  $M_\infty = 0.1$  диаграмма направленности для ре-

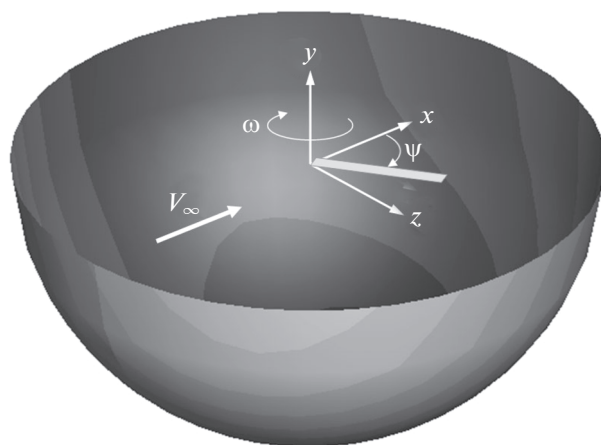


Рис. 10. К построению направленности шума в нижней полусфере.

жима  $M = 0.35$  наиболее асимметрична (рис. 12а), в то время как для режима  $M = 0.55$  разница между звуком, излучаемым лопастью, движущейся против и по направлению потока, становится менее заметной и направленность становится более симметричной (рис. 12в), хотя она остается несколько повернутой относительно скорости набегающего потока. Как следует из теоретических оценок для модельной задачи с вращающимся источником, а также более реалистичных оценок, приведенных, например, в [10], подобный «поворот» направленности связан в значительной мере с некомпактностью источника шума, которая при наличии сносящего потока приводит к сложной совокупности эффектов запаздывания сигнала в точках наблюдателя на удаленной сфере. Так, для параметров, исследованных в настоящей работе, длина волны излучения была сравнима с радиусом лопасти, и параметр  $kD/2$ , где  $k$  – волновое число, лежал в диапазоне  $0.7 \dots 1$ . При увеличении скорости вращения лопасти наблюдается также некоторое растяжение зоны максимального уровня шума.

Дальнейшее увеличение скорости набегающего потока до  $M_\infty = 0.2$  приводит к тому, что при возвратном движении значительная часть ее радиуса попадает в зону с обратным обтеканием, при этом изменяется и время запаздывания звукового сигнала. В результате зона максимального шума на сфере наблюдателя смещается ближе к продольной оси (рис. 13). Как и в случае с  $M_\infty = 0.1$ , при увеличении скорости вращения винта зона максимального шума несколько растягивается в направлении вращения, направленность наиболее симметрична для режима максимальной скорости вращения  $M = 0.55$  (рис. 13в).

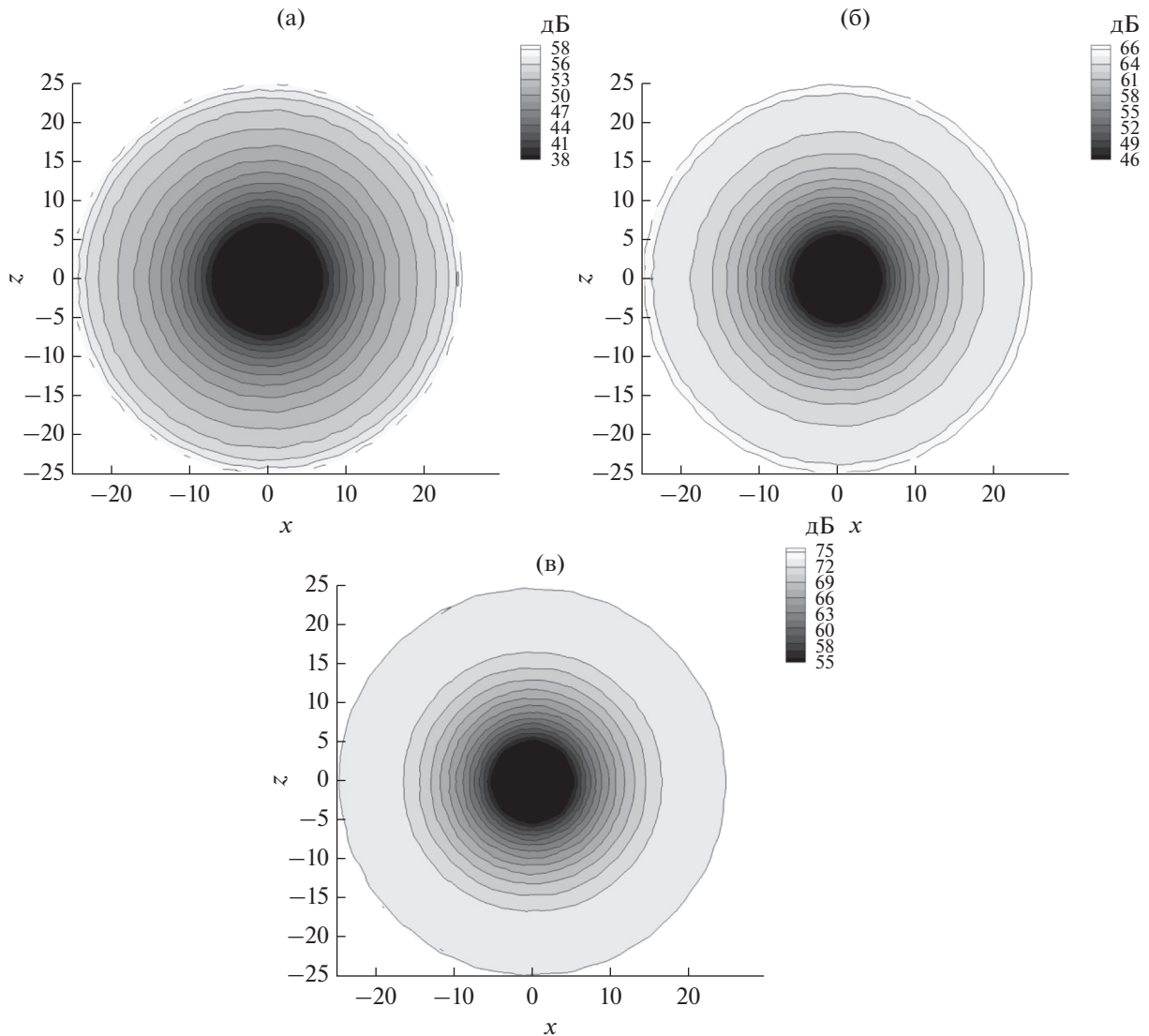


Рис. 11. Диаграмма направленности первой гармоники звукового давления: (а) –  $M = 0.35$ ,  $M_\infty = 0$ ; (б) –  $M = 0.45$ ,  $M_\infty = 0$ ; (в) –  $M = 0.55$ ,  $M_\infty = 0$ .

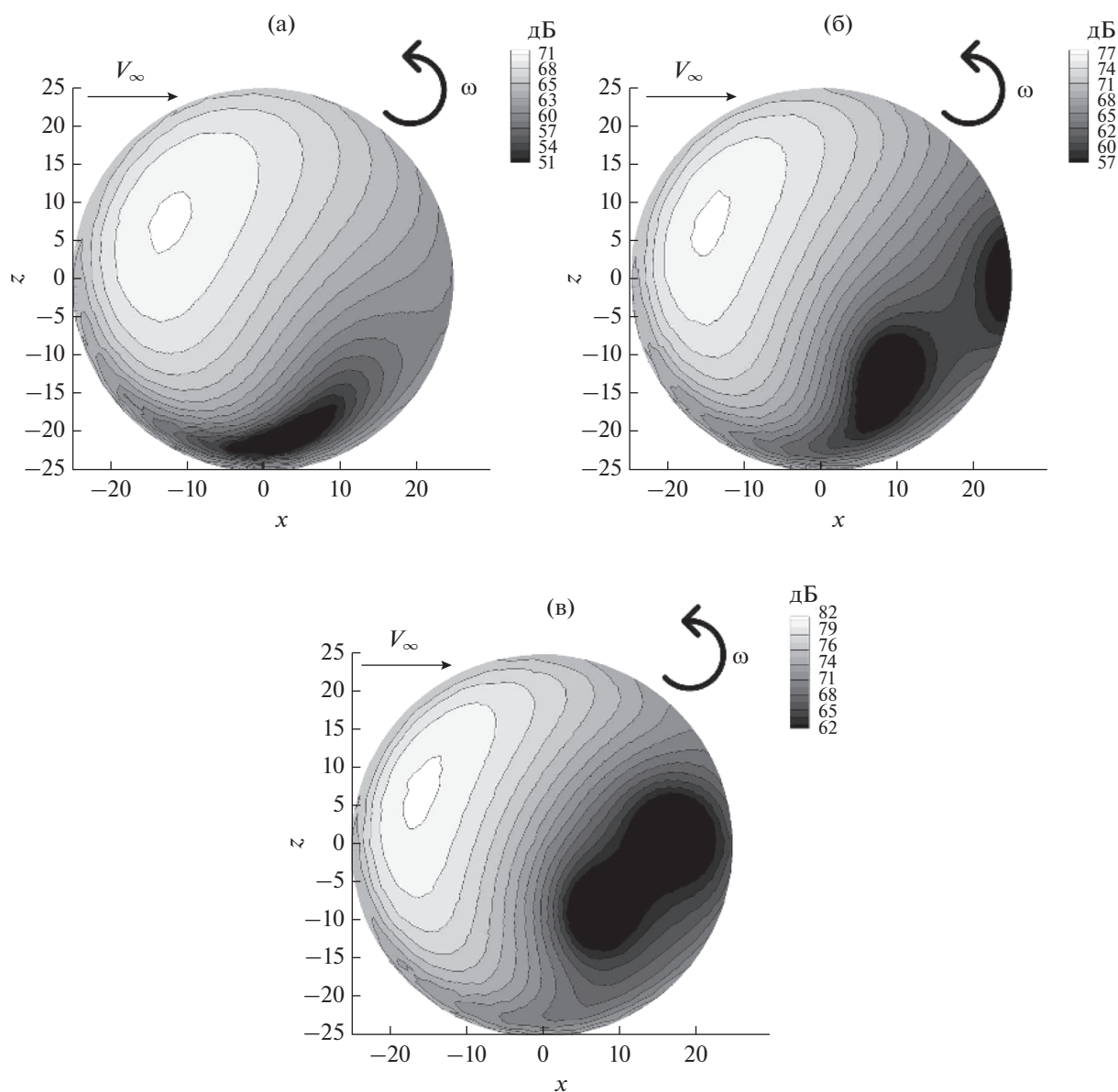
## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача о моделировании шума вертолетного винта на режиме висения и горизонтального полета. Для расчета акустических характеристик использован программный комплекс на основе решения уравнений Эйлера в неинерциальной системе координат движущейся лопасти винта и метода Фокса Вильямса–Хоукинса для расчета шума дальнего поля. Комплекс ранее был валидирован для режима висения с помощью экспериментальных данных для двухлопастного винта.

Блок ФВХ-расчета шума в дальнем поле обновлен и реализован на базе конвективной функции Грина, что позволяет в более простой форме

рассчитывать сигнал в дальнем поле при наличии набегающего потока и удобен для анализа характеристик излучаемого шума, когда наблюдатель неподвижен относительно летательного аппарата. Проведена детальная верификация новой реализации метода ФВХ для модельных задач вращения точечного монополюсного источника как с учетом набегающего потока (режим полета), так и без него (режим висения). Показано, что полученные в обоих случаях численные решения для акустического сигнала в дальнем поле находятся в хорошем согласии с аналитическим решением как по амплитуде, так и по фазе.

Для модельного двухлопастного винта проведено исследование влияния скорости вращения винта и скорости его поступательного движения



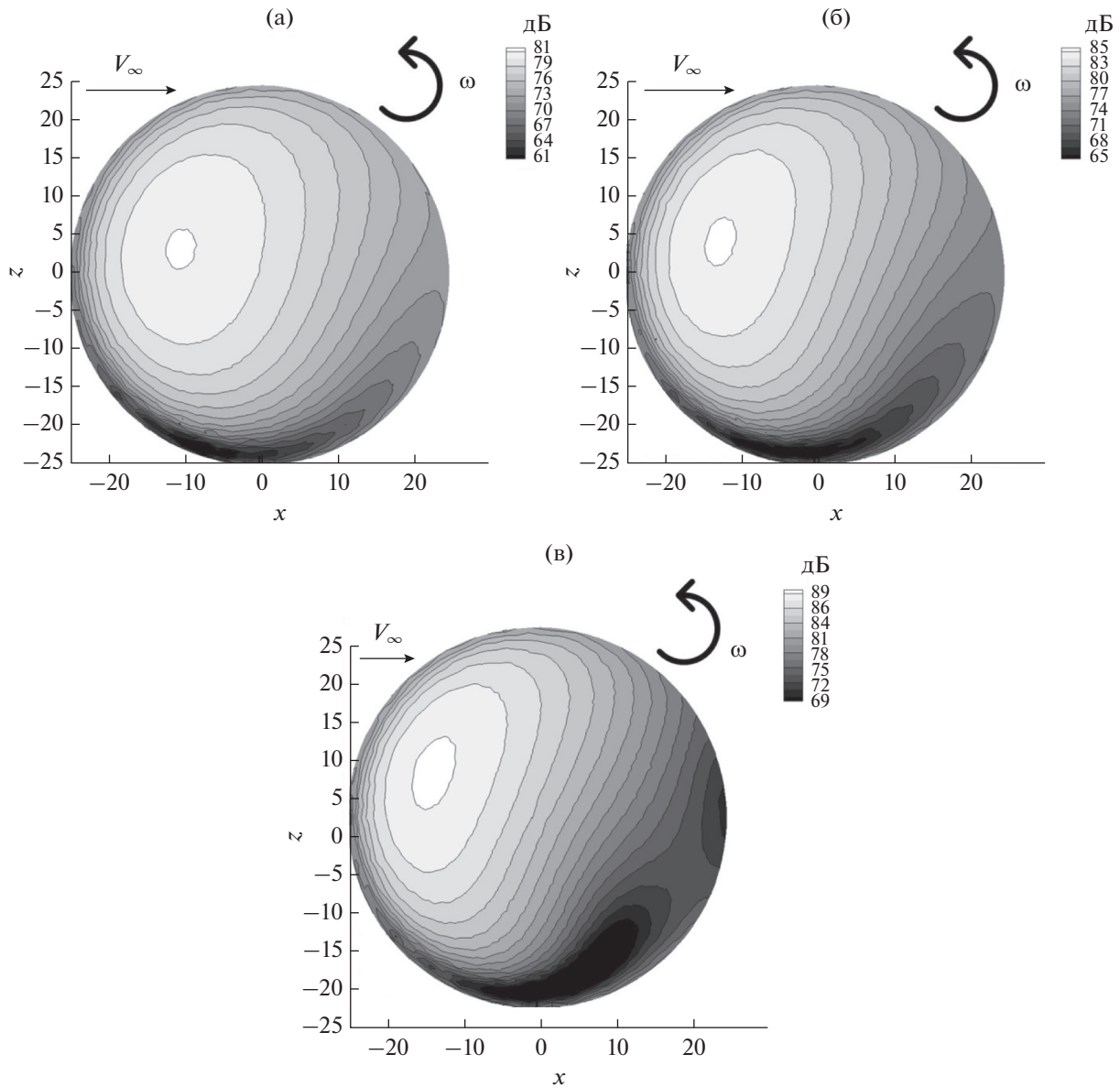
**Рис. 12.** Диаграмма направленности первой гармоники звукового давления: (а) –  $M = 0.35$ ,  $M_\infty = 0.1$ ; (б) –  $M = 0.45$ ,  $M_\infty = 0.1$ ; (в) –  $M = 0.55$ ,  $M_\infty = 0.1$ .

на положение максимума уровня звука в нижней полусфере в дальнем поле.

Для режима висения показано, что в полученном численном решении направленность акустического излучения практически идеально симметрична относительно оси вращения лопасти, что говорит об отсутствии каких-либо численных артефактов, связанных с ограниченностью временного сигнала или ошибок при учете эффекта нескольких лопастей винта. Зона максимального излучения акустического сигнала в этом случае равномерно распределена по всей периферии

сферы источника, отвечающей максимальной скорости вращения лопасти.

Показано, что добавление набегающего потока приводит к существенному изменению диаграммы направленности. Наблюдается предсказуемое смещение максимума излучения в переднюю часть полусферы, что связано главным образом с эффектом конвективного усиления звука при наличии набегающего потока. При этом лопасть, движущаяся навстречу потоку, излучает звуковое поле с большей интенсивностью, чем движущаяся по потоку, что приводит к асимметрии диаграммы направленности. Результиру-



**Рис. 13.** Диаграмма направленности первой гармоники звукового давления: (а) –  $M = 0.35$ ,  $M_\infty = 0.2$ ; (б) –  $M = 0.45$ ,  $M_\infty = 0.2$ ; (в) –  $M = 0.55$ ,  $M_\infty = 0.2$ .

ющая диаграмма направленности формируется в результате совокупного действия таких факторов как запаздывание сигнала, конвективный снос звуковых волн набегающим потоком, а также эффект некомпактности источника звука. Разработанный метод позволяет исследовать особенности тонального шума, излучаемого вертолетным винтом в условиях полета, с учетом указанных эффектов и может использоваться для сравнительной оценки различных винтов по их акустическим характеристикам. В последующих работах планируется более детальное исследование физических механизмов, ответственных за формиро-

вание направленности излучения, а также усовершенствование метода расчета шума с целью учета аэродинамического взаимодействия лопастей винта друг с другом.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РФ № 075-11-2018-234, уникальный идентификатор RFMEFI 62718X0004.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Holst T.L.* Viscous transonic airfoil workshop compendium of results // *J. Aircraft.* 1988. V. 25. № 12. P. 1073–1087.

2. *McDevitt J.B., Okuno A.F.* Static and Dynamic Pressure Measurements on a NACA0012 Airfoil in the Ames High Reynolds Number Facility // NASA Technical Paper 2485, 1985. 78 p.
3. *Копьев В.Ф., Зайцев М.Ю., Воронцов В.И., Карабасов С.А., Аникин В.А.* Расчет шума несущего винта вертолета и его экспериментальная проверка на режиме висения // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 6. С. 651–664.
4. *Najafi-Yazdi A., Brès G.A., Mongeau L.* An acoustic analogy formulation for moving source sinuniformly moving media // Proc. Royal Society. 2010. V. 467. № 2125. P. 144–165.
5. *Копьев В.Ф., Шур М.Л., Травин А.К., Беляев И.В., Замтфорт Б.С., Медведев Ю.В.* Оценка шума на местности для среднемагистрального самолета с двигателями типа “открытый ротор” на основе численного моделирования // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 6. С. 670–678.
6. *Титарев В.А., Фараносов Г.А., Чернышев С.А., Батраков А.С.* Численное моделирование влияния взаимного расположения винта и пилона на шум турбовинтового самолета // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 6. С. 722–736.
7. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981.
8. *Ghorbaniasl G., Lacor C.* A moving medium formulation for prediction of propeller noise at incidence // J. Sound Vib. 2012. V. 331. № 1. P. 117–137.
9. *Huang Z., Siozos-Rousoulis L., De Troyer T., Ghorbaniasl G.* Helicopter rotor noise prediction using a convected FW-H equation in the frequency domain // Applied Acoustics. 2018. V. 140. P. 122–131.
10. *Dahan C., Gratieux E.* Helicopter rotor thickness noise // J. Aircraft. 1981. V 18. № 6. P. 487–494.

АКУСТИЧЕСКАЯ ЭКОЛОГИЯ.  
ШУМЫ И ВИБРАЦИЯ

УДК 534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ЛОКАЛИЗАЦИИ НЕСКОЛЬКИХ  
ИСТОЧНИКОВ ВИБРАЦИИ В МЕХАНОАКУСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ  
С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

© 2020 г. Н. А. Кутузов<sup>а, \*</sup>, А. А. Родионов<sup>а</sup>, А. В. Стуленков<sup>а</sup>, А. С. Суворов<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Институт прикладной физики РАН, ул. Ульянова 46, Нижний Новгород, 603950 Россия

\*e-mail: nik-kutuzov@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.10.2019 г.

После доработки 21.10.2019 г.

Принята к публикации 24.12.2019 г.

Реализованы алгоритмы локализации источников виброактивности в сложных механоакустических системах с использованием конечно-элементного моделирования. Для случая одного источника использован метод локализации в виде метода наименьших квадратов, применяемого к первому собственному вектору выборочной корреляционной матрицы. Показано, что суммирование по частоте позволяет значительно увеличить точность локализации в этом случае. Значительное внимание уделено вопросу оценки числа одновременно работающих виброисточников и возможности их правильной локализации. Сравнивалась эффективность работы двух методов локализации источников: метода максимума правдоподобия, рассчитанного на единственный источник, и модифицированного специально для данной задачи метода MUSIC (Multiple Signal Classification). Показано, что модифицированный метод MUSIC обладает большей эффективностью при решении задачи локализации с двумя источниками в сравнении с методом максимума правдоподобия, рассчитанного на единственный источник. Отмечено, что применение метода максимального правдоподобия, рассчитанного на 2 и более источников, для рассматриваемой задачи невозможно из-за слишком высокой вычислительной сложности.

*Ключевые слова:* конечно-элементное моделирование, вибродиагностика, разрешение источников, локализация источников, механоакустическая система

DOI: 10.31857/S032079192003003X

## ВВЕДЕНИЕ

Задача локализации источника повышенной вибрационной активности часто возникает при диагностике и обслуживании конструкций и механизмов. С успешным решением данной задачи напрямую связано решение важных проблем снижения шумности и устранения неисправностей механизмов. Как правило, локализация вибрационного источника, находящегося в механоакустической конструкции, производится на основе данных измерения вибрационного или акустического поля в ряде контрольных точек (в общем случае, не совпадающих с месторасположением источника). Таким образом, задача локализации представляет собой вариант обратной задачи, целью которой является поиск пространственного положения виброисточника.

С задачей поиска вибрационного источника связана задача поиска дефекта в конструкции, поскольку часто дефект можно рассматривать как источник вторичного вибрационного поля, возникающего в результате рассеяния первичного

поля на возникшей неоднородности. Таким образом, методы локализации источника можно применить и к задаче локализации дефекта.

Методам оценки параметров виброисточника, расположенного на некоторой конструкции, посвящено значительное число публикаций. Общепринятым является подход, основанный на сравнении модельных и измеренных экспериментально динамических характеристик (ускорение, перемещение) вибрационного поля конструкции. Параметры источника (положение, мощность, ориентация и т.д.), обеспечивающие наименьшее различие между модельными и экспериментальными данными, считаются истинными. Например, в работе [1] авторы используют для локализации виброисточника методы согласованной с полем обработки MFP (Matched-field processing), применяемые в акустике для определения положения источника звука в сложной среде подводного волновода. Рассматривалась ситуация, когда на закрепленном с двух концов стержне в ряде точек установлены датчики перемещения, в неизвест-

ной точке расположен источник, воздействие которого можно представить ориентированной определенной образом гармонической силой. Далее различными методами (оценитель Бартлетта и др.) производилось сравнение модельных данных вибрации, создаваемых установленным в определенной точке источником, и данных вибродатчиков. Точка наиболее вероятного расположения источника определялась исходя из минимума рассогласования между модельными и реальными данными.

В упомянутой работе модельные данные получены аналитически. В случае более сложных конструкций аналитическое решение невозможно. В этом случае динамические характеристики конструкции рассчитываются численно, например, с помощью конечно-элементного моделирования [2]. В исследовании [3] путем модального анализа конечно-элементной модели, состоящей из ограниченного числа узлов и расположенных между ними элементов, рассчитываются коэффициенты передачи (функции Грина) между степенями свободы приложенной в определенном узле силы и степенями свободы узлов, где установлены акселерометры. Методом наименьших квадратов с регуляризацией Тихонова авторы производят сравнение модельного и экспериментального откликов в контрольных точках, таким образом определяя положение источника. В работе [4] успешно применяется похожий подход для локализации источника и дефекта в сложной механоакустической конструкции.

Стоит отметить и другие разнообразные техники локализации виброисточника [5–8]. К примеру, в исследовании [5] для поиска виброисточника применяется машинное обучение. Обучение многослойной нейронной сети (многослойный перцептрон) происходило по методу обратного распространения ошибки, обучающими данными являлись результаты экспериментов с заранее известным положением источника. Далее обученная нейронная сеть использовалась для локализации источника с неизвестным положением. В работе [6] используется вейвлет-преобразование сигналов, получаемых на пьезоэлектрических датчиках, для определения времен прихода упругих волн, которые используются в дальнейшем для локализации источника.

Таким образом, тематика локализации источника виброактивности является весьма актуальной. Отметим, однако, что в имеющихся публикациях практически не рассматривается ситуация, когда в конструкции одновременно расположены несколько виброисточников. В работе [9] изучается вопрос о локализации двух источников, однако исследуемая конструкция предельно проста и состоит из 17 узлов. Принципиальным ограничением большинства используемых в работах ал-

горитмов является требование единственности источника.

В рамках настоящей работы, помимо исследования задачи локализации одного источника, разработан и экспериментально апробирован метод локализации двух (или более) одновременно работающих виброисточников в сложной механоакустической конструкции (с большим числом степеней свободы). Предложенный алгоритм основан на модификации известного метода спектрального разрешения MUSIC [10], успешно используемого в задачах оценки DOA (Direction of arrival estimation) [11], локализации акустических источников [12].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем считать, что имеется некоторая сложная механоакустическая система (конструкция), для которой построена конечно-элементная модель (КЭМ), состоящая из определенного числа узлов. Считаем также, что в некотором узле расположен виброисточник. Этот виброисточник ориентирован определенным образом в пространстве, а сигнал, возбуждающий виброисточник, является широкополосным белым гауссовским шумом. В данном исследовании в качестве виброисточника использовался пьезоэлектрический возбудитель. Будем считать, что в каждой узкой частотной полосе амплитудно-частотная характеристика виброисточника близка к константе, а сигнал, соответственно, является белым шумом. В  $K$  точках конструкции находятся вибродатчики (акселерометры), а принимаемый сигнал подвергается узкополосной фильтрации на частоте  $f_0$ . Модель принимаемого сигнала на частоте  $f_0$  в момент времени с номером  $j$  можно записать как следующий  $K \times 1$  вектор:

$$\mathbf{v}_j = p_j \mathbf{A}(x_i, y_i, z_i) \mathbf{F} + \xi_j, \quad j = 1 \dots J, \quad (1)$$

где  $p_j$  – временная форма узкополосного сигнала (комплексный белый гауссовский шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_s^2$ , определяющей интенсивность вибрационного источника),  $\mathbf{F}$  – вектор  $3 \times 1$  нормированных комплексных составляющих силы ( $\mathbf{F}^H \mathbf{F} = 1$ ),  $\xi_j$  – временные отсчеты аддитивного белого гауссова шума с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_0^2$ ,  $\mathbf{A}(x_i, y_i, z_i)$  –  $K \times 3$  матрица комплексных коэффициентов передачи из узла с координатами  $x_i, y_i, z_i$  (координаты виброисточника) в узлы, соответствующие контрольным точкам (в которых находятся вибродатчики). Относительно размерности  $\mathbf{A}$  следует сделать небольшое пояснение. Считается, что каждый из  $K$  датчиков виброускорения ориентирован по одной из осей  $x, y, z$ . В таком случае, каждая из строчек матрицы  $\mathbf{A}$  содержит три комплексных коэф-



фициента передачи (например,  $(a_{xx}, a_{xy}, a_{xz})$ ) от степеней свободы источника в единственную степень свободы ( $x, y$  или  $z$ ), соответствующую каждому из  $K$  датчиков ускорения.

Матрица  $\mathbf{A}$  получается путем численного моделирования с использованием КЭМ конструкции. Для уменьшения разницы между модельной и реальной матрицами  $\mathbf{A}$  предварительно проводится процедура доводки ряда характеристик модели (см., например, [13]). Доводка производится в три этапа и в определенном частотном диапазоне. На первом этапе производится расчет собственных частот и собственных форм колебаний модели. На втором этапе проводится эксперимент с реальной конструкцией с целью определения собственных частот и форм колебаний конструкции. На последнем этапе производится корректировка КЭМ (в том числе изменение модулей Юнга элементов). Корректировка проводится до тех пор, пока собственные частоты и формы колебаний КЭМ и конструкции не совпадут. При высоком отношении сигнал/шум именно от качества доводки зависит качество результата локализации. Понятно, что большое рассогласование (разница между модельной и реальной матрицами  $\mathbf{A}$ ) может привести к высокой ошибке при поиске местонахождения источника. В качестве примера на рис. 1 приведен результат доводки. Показаны экспериментальные и расчетные (до доводки и после) коэффициенты передачи из точки возбуждения конструкции в одну из контрольных точек в зависимости от частоты. Видно, что после доводки расчетная зависимость заметно приблизилась к экспериментальной. Стоит отметить, что при этом все-таки сохраняется некоторое рассогласование между модельными и реальными данными.

### МЕТОДЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ЕДИНСТВЕННОГО ВИБРОИСТОЧНИКА

Для модели (1) в случае отсутствия рассогласования оптимальным является метод максимального правдоподобия (МП). Метод максимального правдоподобия [14] заключается в максимизации функции правдоподобия (ФП)  $w$ , логарифм которой для модели (1) записывается следующим образом:

$$\ln w = -J [\ln \det(\sigma_s^2 \mathbf{A} \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{A}^H + \sigma_0^2 \mathbf{I}) + \text{tr}((\sigma_s^2 \mathbf{A} \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{A}^H + \sigma_0^2 \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{K}})], \quad (2)$$

где  $\hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^H$  – выборочная корреляционная матрица принятого сигнала. Неизвестными параметрами здесь являются  $(x, y, z)$ ,  $\sigma_0^2$ ,  $\sigma_s^2$ ,  $\mathbf{F}$ . Для дальнейших преобразований удобно сделать

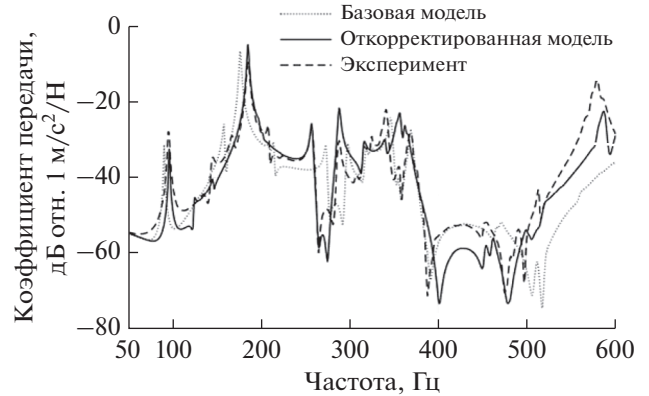


Рис. 1. Экспериментальные и расчетные коэффициенты передачи из точки установки вибровозбудителя в одну из контрольных точек. Расчетные коэффициенты приведены для модели до доводки и после доводки.

замену переменных  $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{g} = \sigma_s \mathbf{F} / \sigma_0$ ,  $\sigma_0^2 \rightarrow \hat{\sigma}_0^2$ . После этого логарифм ФП можно записать как

$$\ln w = -J [K \ln \hat{\sigma}_0^2 + \ln(1 + \mathbf{g}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{g}) + \hat{\sigma}_0^{-2} \text{tr}((\mathbf{A} \mathbf{g} \mathbf{g}^H \mathbf{A}^H + \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{K}})]. \quad (3)$$

Далее легко найти частный максимум (3) по параметру  $\hat{\sigma}_0^2$  путем решения уравнения  $\frac{\partial \ln w}{\partial \hat{\sigma}_0^2} = 0$ . Решение этого уравнения записывается следующим образом

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{K} \left( \text{tr} \hat{\mathbf{K}} - \frac{\mathbf{g}^H \mathbf{A}^H \hat{\mathbf{K}} \mathbf{A} \mathbf{g}}{1 + \mathbf{g}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{g}} \right). \quad (4)$$

Подставим (4) в ФП (3) и получим ФП  $w_1 = w(\hat{\sigma}_0^2)$ , не зависящую от  $\hat{\sigma}_0^2$ :

$$\ln w_1 = -J \left[ K \ln \left( \text{tr} \hat{\mathbf{K}} - \frac{\mathbf{g}^H \mathbf{A}^H \hat{\mathbf{K}} \mathbf{A} \mathbf{g}}{1 + \mathbf{g}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{g}} \right) + \ln(1 + \mathbf{g}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{g}) + K - K \ln K \right]. \quad (5)$$

Далее будем искать экстремум (5) по  $\mathbf{g}$  путем решения уравнения  $\frac{\partial \ln w_1}{\partial \mathbf{g}^H} = 0$ . После некоторых преобразований это уравнение можно записать следующим образом:

$$(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \hat{\mathbf{K}} \mathbf{A} \mathbf{g} = \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{g}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= K \mathbf{g}^H \mathbf{A}^H \hat{\mathbf{K}} \mathbf{A} \mathbf{g} + \\ &+ (1 + \mathbf{g}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{g}) \text{tr}((\mathbf{A} \mathbf{g} \mathbf{g}^H \mathbf{A}^H + \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{K}}), \\ \beta &= K(1 + \mathbf{g}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{g}). \end{aligned}$$

Уравнение (6) представляет собой уравнение на собственный вектор матрицы  $(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \hat{\mathbf{K}} \mathbf{A}$ . Решение уравнения (6) определено с точностью до произвольного множителя. Поэтому будем искать его в виде  $\hat{\mathbf{g}} = \gamma \boldsymbol{\omega}$ , где  $\boldsymbol{\omega}$  – нормированный собственный вектор матрицы  $(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \hat{\mathbf{K}} \mathbf{A}$ ,  $\gamma$  – неопределенный множитель. После подстановки этого решения в (6) получится выражение для  $\gamma$ :

$$\hat{\gamma} = \left( \frac{1}{\boldsymbol{\omega}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}} \frac{K\lambda - \text{tr} \hat{\mathbf{K}}}{\text{tr} \hat{\mathbf{K}} - \lambda} \right)^{1/2}, \quad (7)$$

где  $\lambda$  – максимальное собственное число матрицы  $(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \hat{\mathbf{K}} \mathbf{A}$ . В результате получится полное решение  $\hat{\mathbf{g}} = \hat{\gamma} \boldsymbol{\omega}$ . Подстановка этого решения в (5) приведет к ФП, зависящей только от координат вибрационного источника  $(x, y, z)$ . В результате процедура поиска координат источника приобретает следующий вид:

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \arg \max_{x,y,z} S_{ML}(x, y, z); \quad (8)$$

$$S_{ML}(x, y, z) = -(K - 1) \ln(\text{tr} \hat{\mathbf{K}} - \lambda) - \ln \lambda.$$

Оценка положения источника производится в данном случае в одной частотной полосе. В случае широкополосного сигнала целесообразно суммировать значения целевой функции (8), полученные для разных частот.

При этом МП-метод обладает достаточно высокой вычислительной сложностью. Вместо него можно использовать другой подход. Он заключается в том, что вначале находится собственный вектор  $\mathbf{V}$  выборочной корреляционной матрицы принятого сигнала, соответствующий максимальному собственному числу. Этот вектор является максимально правдоподобной оценкой сигнального вектора (первого слагаемого в (1)) в предположении его полной неизвестности. Далее для определения неизвестных параметров источника используется метод наименьших квадратов. В нем в качестве модели используется вектор  $\bar{\mathbf{F}} = \psi \mathbf{F}$ , где  $\psi$  – масштабный коэффициент. Этот коэффициент вводится из-за того, что в обработке используется нормированный собственный вектор, т.е.  $\mathbf{V}^H \mathbf{V} = 1$ . Такой подход обладает чуть меньшей эффективностью по сравнению со строгой МП-оценкой. Эта разница, однако, практически нивелируется при наличии рассогласования между реальной и модельной матрицами  $\mathbf{A}$ , которое и определяет, в конечном счете, точность локализации. При этом упрощенный метод обладает значительной меньшей вычислительной сложностью. Целевая функция метода наименьших квадратов в рассматриваемой ситуации записывается следующим образом:

$$S(x, y, z, \bar{\mathbf{F}}) = (\mathbf{A} \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{V})^H (\mathbf{A} \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{V}) \rightarrow \min_{x,y,z,\bar{\mathbf{F}}}. \quad (9)$$

Для нахождения минимума (9) приравняем к нулю ее частные производные по  $\bar{\mathbf{F}}$ . В результате решения уравнения  $\frac{\partial S}{\partial \bar{\mathbf{F}}} = 0$  находим оценку неизвестных компонент действующей силы:  $\hat{\bar{\mathbf{F}}} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{V}$ . Далее это выражение подставляется в (9), в результате чего получается целевая функция, не зависящая от  $\bar{\mathbf{F}}$ :

$$S_1(x, y, z) = \mathbf{V}^H \mathbf{V} - \mathbf{V}^H \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{V} \rightarrow \min_{x,y,z}. \quad (10)$$

Учитывая, что  $\mathbf{V}^H \mathbf{V} = 1$ , перейдем к следующему выражению целевой функции, которая, по сути, является коэффициентом корреляции между модельными данными и экспериментом:

$$S_2(x, y, z) = \mathbf{V}^H \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{V} \rightarrow \max_{x,y,z}. \quad (11)$$

Таким образом, в соответствии с (11) узел с наибольшим коэффициентом корреляции является местом наиболее вероятного расположения источника. Как и в случае с функцией (8), целесообразно суммировать значения функции (11), полученные для разных частотных полос.

Характерным свойством функции (11) является то, что ее значения лежат в диапазоне от 0 до 1. Вообще говоря, можно и не применять данную нормировку ( $\mathbf{V}^H \mathbf{V}$  в знаменателе). Однако, наибольшее рассогласование конечно-элементной модели и реальной конструкции наиболее велико в частотных полосах, близких к собственным частотам (модам) конструкции. Нормировка целевой функции позволяет избежать при суммировании по частотам сильного негативного влияния “плохих” (с большим рассогласованием) частотных полос. По сути дела, такая нормировка позволяет совершать выбор частот для оценки произвольно, не заботясь о возможной близости выбранной частоты к одной из мод. Вопрос же о том, как выбрать частотные полосы для оценки наилучшим образом, отбросив все “плохие” частоты, является предметом будущих исследований<sup>1</sup>.

Выражения (8) и (11) получены в предположении единственного источника. Известно, что в некоторых случаях<sup>2</sup> с их помощью можно локализовать и несколько источников. Однако такая ситуация является скорее исключением, а поиск строгого решения задачи с несколькими источниками представляет собой весьма непростую проблему. Дело в том, что для строгого решения задачи с  $M$  источниками по методу наименьших квадратов нужен полный перебор, по меньшей

<sup>1</sup> При этом может оказаться, что существенного улучшения здесь достичь не получится.

<sup>2</sup> Например, когда источники создают слабо коррелированное пространственное распределение на вибродатчиках.

мере, в  $3M$ -мерном пространстве, что неприемлемо с вычислительной точки зрения и поэтому необходимо принципиально другое решение.

### МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА MUSIC ДЛЯ ПОИСКА НЕСКОЛЬКИХ ВИБРОИСТОЧНИКОВ

Метод сверхразрешения MUSIC (Multiple Signal Classification), возникший при решении задач спектрального оценивания, часто используется в задачах пеленгации (direction-of-arrival estimation) для разрешения близких друг к другу источников. Такая ситуация может возникнуть, когда, к примеру, источники волнового поля расположены в дальней зоне линейной антенной решетки в пределах главного лепестка диаграммы направленности. Общепринятое выражение для целевой функции метода MUSIC в таких задачах выглядит так [10]:

$$F_{\text{music}}(x, y, z) = \frac{\mathbf{A}_{\text{st}}(\boldsymbol{\theta})^H \mathbf{A}_{\text{st}}(\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{A}_{\text{st}}(\boldsymbol{\theta})^H \mathbf{U} \mathbf{U}^H \mathbf{A}_{\text{st}}(\boldsymbol{\theta})}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{A}_{\text{st}}(\boldsymbol{\theta})$  – вектор направлений (steering vector), функция Грина для данной задачи,  $\mathbf{U} \mathbf{U}^H = \sum_{l=L+1}^K \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^H$ ,  $\mathbf{u}_l$  – собственные вектора выборочной корреляционной матрицы процесса  $\hat{\mathbf{K}}$ ,  $L$  – параметр метода MUSIC (должен быть больше общего числа источников).

Можно считать, что в условиях нашей задачи аналогом вектора направлений  $\mathbf{A}_{\text{st}}(\boldsymbol{\theta})$  является вектор  $\mathbf{A}(x, y, z) \mathbf{F}$ , который является функцией Грина для задачи локализации виброисточника. Учитывая это, запишем выражение для модификации целевой функции метода MUSIC для данной задачи:

$$F_{\text{music+}}(x, y, z) = \frac{\mathbf{F}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{F}}{\mathbf{F}^H \mathbf{A}^H \mathbf{U} \mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{F}}. \quad (13)$$

Следуя общей логике метода MUSIC, для поиска неизвестных параметров необходимо максимизировать выражение (13) по этим параметрам. Для параметра  $\mathbf{F}$  это легко сделать путем решения уравнения  $\frac{\partial F_{\text{music+}}}{\partial \mathbf{F}} = 0$ . После подстановки найденного решения в (13) получим новую целевую функцию:

$$F_{\text{MUS+}}(x, y, z) = \lambda_{\text{MUS}}^{-1}, \quad (14)$$

где  $\lambda_{\text{MUS}}$  – минимальное собственное число матрицы  $(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{U} \mathbf{U}^H \mathbf{A}$ . Параметр метода  $L$  должен быть больше числа источников  $M$ .

Алгоритм (14) обладает гораздо меньшей вычислительной сложностью, чем алгоритм полного перебора по методу наименьших квадратов для

нескольких источников. Размерность матрицы  $(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{U} \mathbf{U}^H \mathbf{A} - 3 \times 3$ , и время решения обратной задачи для  $M$  источников сопоставимо со временем решения обратной задачи по методу наименьших квадратов для одного источника. Кроме того, целевые функции (14) для разных частот, также как и функции метода наименьших квадратов можно суммировать для улучшения качества итогового результата<sup>3</sup>.

Остановимся теперь на вопросе определения числа источников  $M$ . Известно, что спектр собственных чисел корреляционной матрицы случайного процесса для рассматриваемой модели можно условно разделить на так называемые «сигнальные» и «шумовые». Количество «сигнальных» собственных чисел равно количеству полезных источников, а их абсолютные значения выше абсолютных значений шумовых чисел (при достаточно большом отношении сигнал/шум). При этом не составляет труда найти сильно выделяющиеся по абсолютным значениям собственные числа корреляционной матрицы; их количество равно количеству источников  $M$ . Таким образом, в данном случае задача определения параметра метода MUSIC легко решается (для этого можно использовать, например, пороговую технику).

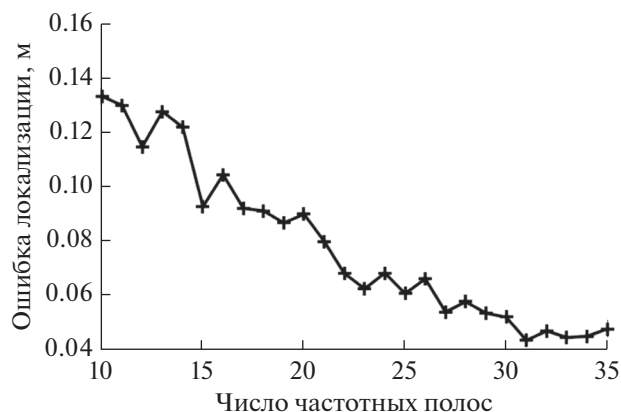
### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ АПРОБАЦИЯ АЛГОРИТМОВ

Для исследования эффективности предложенных алгоритмов был проведен эксперимент с реальной конструкцией. Характерный размер конструкции составлял 1 м, число узлов составляло более  $10^5$ , число элементов КЭМ было более 30000. Предварительно была произведена доводка КЭМ данной конструкции [13], а потом выполнен численный расчет матрицы  $\mathbf{A}$ . Эксперимент проводился как с одним (для подтверждения эффективности использования метода наименьших квадратов), так и с двумя широкополосными источниками (для сравнения эффективности метода максимума правдоподобия в предположении единственности источника и модифицированного метода MUSIC).

### ЭКСПЕРИМЕНТ С ОДНИМ ИСТОЧНИКОМ

Широкополосный источник (пьезовозбудитель) устанавливался в различных точках конструкции. Возбуждение источника производилось широкополосным белым гауссовским шумом в диапазоне частот 0–2400 Гц. В контрольных точ-

<sup>3</sup> При этом вопрос об оптимальном способе суммирования также остается открытым.



**Рис. 2.** Средняя ошибка локализации с помощью метода МНК в зависимости от числа частотных полос при использовании 56 акселерометров, установленных в контрольных точках.

ках экспериментального стенда устанавливались пьезоакселерометры, регистрирующие виброускорение в узлах, каждый из которых был ориентирован по одной из осей  $x$ ,  $y$  или  $z$ . Для каждой частотной полосы строилась функция (11) метода наименьших квадратов, далее целевые функции каждой из частотных полос суммировались. Узел с наибольшим итоговым значением суммарной функции считался местом наиболее вероятного расположения источника. Ширина полосы обработки составляла 0.9 Гц. На рис. 2 для одного из местоположений источника представлен график зависимости средней ошибки локализации от числа частотных полос. Каждая точка графика – это средняя ошибка локализации (отклонение оцененного положения источника от реального)

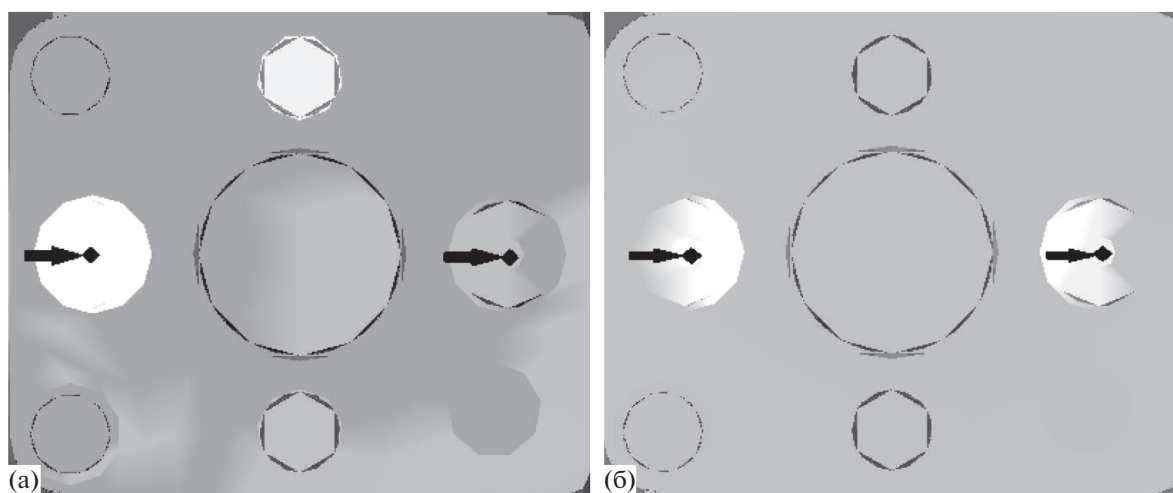
при заданном количестве полос  $n_{fr}$ . Для расчета значения средней ошибки локализации бралось 150 наборов по  $n_{fr}$  произвольно выбранных полос в диапазоне от 100 до 600 Гц, для каждого набора  $n_{fr}$  значений целевой функции суммировались, после чего производился расчет средней по всем наборам ошибки локализации.

Учитывая характерные масштабы конструкции в сравнении со средней ошибкой локализации, можно считать, что алгоритм поиска единственного виброисточника по методу наименьших квадратов является достаточно точным.

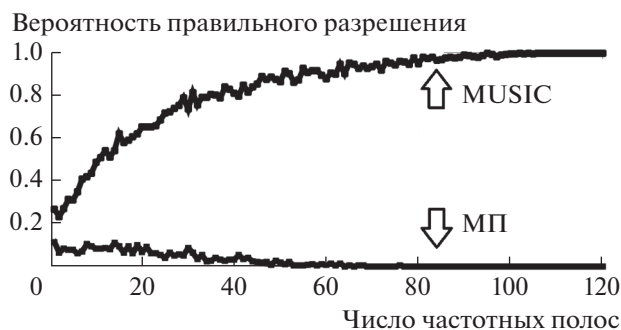
### ЭКСПЕРИМЕНТ С ДВУМЯ ИСТОЧНИКАМИ

В данном эксперименте виброисточники устанавливались в двух точках конструкции. Возбуждение также производилось широкополосным белым гауссовским шумом в диапазоне частот 0–2400 Гц. Акселерометры были установлены в 61 контрольной точке. Сравнялась эффективность предложенной модификации метода MUSIC (14) и метода максимума правдоподобия (8). На рис. 3 приведен характерный случай распределения функций обоих методов на фрагменте КЭМ для одного из вариантов расположения двух источников. Слева показан результат для метода максимума правдоподобия (8), справа для MUSIC (14). Распределения приведены для частотной полосы 348 Гц, ширина полосы – 0.9 Гц.

Для того же самого расположения источников на рис. 4 приведен график зависимости вероятности правильного разрешения  $P_i$  источников в зависимости от числа частотных полос  $n_{fr}$ , по которым суммировались функции (14) и (8). Для каждого



**Рис. 3.** Сравнение методов локализации ((а) – МП и (б) – MUSIC) двух шумовых широкополосных источников виброактивности. Черными стрелками указано расположение источников. Расстояние между источниками составляло около 0.35 м. Частота – 348 Гц.



**Рис. 4.** Вероятность правильного разрешения в зависимости от числа частот для расположения двух источников, показанного на рис. 3. Верхняя кривая — метод MUSIC, нижняя — метод максимума правдоподобия (8).

значения числа полос  $n_f$  при расчете значения  $P_t$  бралось 1000 наборов по  $n_f$  произвольно выбранных полос в диапазоне от 100 до 600 Гц. Отметим, что значения целевой функции метода MUSIC (14) для каждой частотной полосы перед суммированием были нормированы на максимальное значение (14) в данной полосе. Для дальнейшей обработки около узлов, соответствующих положениям источников, выделялась область близлежащих узлов (находящихся в радиусе 5 см от источника). Если глобальный максимум суммарной целевой функции набора расположен в области одного из источников, а при исключении данной области глобальный максимум располагается в области другого источника, то считалось, что источники разрешены правильно. Таким образом, для каждого  $n_f$  возможно оценить вероятность правильного разрешения  $P_t$ .

Число источников  $M$  (следовательно, и параметр метода MUSIC) оценивалось по спектру выборочной корреляционной матрицы. В данном эксперименте в спектрах собственных чисел корреляционных матриц разных частот сразу можно было выделить два главных собственных числа, примерно в 1000 раз больших остальных (“шумовых”) собственных чисел. Таким образом, оценка числа источников выполнялась в каждом случае абсолютно надежно.

Из рис. 4 видно, что суммирование целевых функций метода MUSIC (14) приводит к правильному разрешению источников (при суммировании целевых функций в более чем 100 частотных полосах источники разрешаются всегда), между тем, аналогичная процедура для функций метода максимума правдоподобия (8) не позволяет правильно разрешить источники.

Следует сказать и об эффективности алгоритмов при оценке в одной частотной полосе. Как и ожидалось, алгоритм MUSIC (14) показал здесь

лучшие результаты по сравнению с методом (8). При численном моделировании алгоритм (14) правильно разрешал источники во всех частотных полосах, в отличие от метода наименьших квадратов. Этот результат подтвержден экспериментально. Так, для варианта расположения, отображенного на рис. 3, алгоритм (14) сумел правильно разрешить источники во всех 120 частотных полосах при моделировании, а в эксперименте в 28 из 120 полос. При этом метод максимума правдоподобия разрешил правильно источники в 41 из 120 полос (при моделировании) и в 16 из 120 (в эксперименте).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена задача локализации одного и двух виброисточников в механоакустической системе с большим числом степеней. В случае с одним широкополосным виброисточником показана эффективность использования обработки по методу наименьших квадратов. Для случая с двумя виброисточниками на основе метода MUSIC разработан алгоритм, позволяющий с высокой вероятностью разрешить два источника и определить их положение. Данный алгоритм обладает приемлемой для практического применения вычислительной сложностью и доказал свою эффективность на экспериментальных данных. Продемонстрирована также эффективность определения числа источников по спектру выборочной корреляционной матрицы.

Стоит отметить, что предложенный алгоритм для поиска  $M > 1$  источников может применяться в задачах, связанных со снижением шумности, поиском неисправностей и дефектов в сложных конструкциях.

Работа выполнена в рамках госзадания по теме 0035-2014-0010 “Разработка физических основ акустических систем нового поколения”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Turek G., Kuperman W. Applications of matched-field processing to structural vibration problems // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 101. № 3. P. 1430–1440.
2. Petyt M. Introduction to Finite Element Vibration Analysis. Cambridge University Press, 2010
3. Li Q., Lu Q. Force localization and reconstruction using a two-step iterative approach // J. Vib. Contr. 2018. V. 24. № 17. P. 3830–3841.
4. Артельный П.В., Коротин П.И., Соков А.М., Соков Е.М., Суворов А.С. Экспериментальная реализация метода поиска источников виброактивности и эксплуатационных дефектов в сложных конструкциях // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 1. С. 13–23.
5. Staszewski W., Worden K. Impact location and quantification on a composite panel using neural networks // Strain. 2000. V. 36. № 2. P. 61–68.

6. *Gaul L., Hurlebaus S.* Identification of the impact location on a plate using wavelets // *Mech. Syst. Signal Pr.* 1998. V. 12 № 6. P. 783–795.
7. *Yen C.S., Wu E.* On the inverse problem of rectangular plates subjected to elastic impact. Part I. Method development and numerical verification // *J. Appl. Mech.* 1995. V. 62. № 3. P. 692–705.
8. *Choi K., Chang F.K.* Identification of impact force and location using distributed sensors // *AIAA J.* 1996. V.34. №1 P. 136–142.
9. *Maia N.M.M., Lage Y.E., Neves M.M.* Recent advances on force identification in structural dynamics / *Advances in Vibration Engineering and Structural Dynamics*. Ed. *Beltran-Carbajal F.* 2012. P. 103–133.
10. *Krim H., Viberg M.* Two decades of array signal processing research: the parametric approach // *IEEE Signal Processing Magazine*. 1996. V. 13. № 4. P. 67–94.
11. *Vallet P., Mestre X., Loubaton P.* Performance Analysis of an Improved MUSIC DoA Estimator // *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2015. V. 63. № 23. P. 6407–6422.
12. *Сазонтов А.Г., Смирнов И.П.* Локализация источника в акустическом волноводе с неточно известными параметрами с использованием согласованной обработки в модовом пространстве // *Акуст. журн.* 2019. Т. 65. № 4. С. 540–550.
13. *Суворов А.С., Соков Е.М., Вьюшкина И.А.* Регулярный алгоритм автоматической корректировки спектральных характеристик акустических конечно-элементных моделей // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 5. С. 592–599.
14. *Турчин В.И.* Введение в современную теорию оценки параметров сигналов. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005.

## МАКСИМАЛЬНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ ЗВУКА МОНОПОЛЕМ В ПОМЕЩЕНИИ НА НИЗКИХ ЧАСТОТАХ

© 2020 г. Н. Г. Канев<sup>a, b, \*</sup>

<sup>a</sup>Акустический институт им. акад. Н.Н. Андреева, ул. Шверника 4, Москва, 117036 Россия

<sup>b</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005 Россия

\*e-mail: nikolay.kaney@mail.ru

Поступила в редакцию 14.08.2019 г.

После доработки 02.10.2019 г.

Принята к публикации 29.10.2019 г.

Рассмотрена задача о поглощении звука монополем в прямоугольном помещении с абсолютно жесткими стенками. Найден импеданс излучения монополя, реализованного в виде поршня, встроенного в одну из стенок помещения. Вычислен импеданс монополя, при котором обеспечивается максимальный коэффициент затухания первого собственного колебания помещения. Показано, что в общем случае монополь с подобранным определенным образом импедансом поглощает звук эффективнее резонатора Гельмгольца. Предложенный подход может использоваться для проектирования активных систем поглощения звука для малых помещений.

*Ключевые слова:* архитектурная акустика, собственные моды помещения, резонатор Гельмгольца

DOI: 10.31857/S0320791920020021

Малые рассеиватели при определенных условиях являются эффективными поглотителями звука. В свободном пространстве газовый пузырек в жидкости или резонатор Гельмгольца при оптимальном трении имеют максимально возможное поглощение, которое может быть достигнуто рассеивателем монопольного типа [1]. Параметры резонатора Гельмгольца, при которых поглощение звука, характеризуемое коэффициентами затухания собственных колебаний помещения, максимально, найдены в работе [2]. Коэффициенты затухания первых мод помещения с резонатором зависят от его массы: чем она меньше, тем больше коэффициенты затухания. Но даже при нулевой длине горла резонатора его масса ненулевая и определяется присоединенной массой отверстия. Поэтому резонатор Гельмгольца в помещении не обеспечивает максимальное поглощение, достижимое монопольным рассеивателем.

Вместе с тем, задача о максимальном поглощении звука на первых резонансах помещения актуальна для акустики малых помещений: для выравнивания частотной характеристики помещений часто используются активные методы гашения звука [3, 4]. Активные методы [5–8] позволяют реализовать любой импеданс локального рассеивателя, а следовательно, достичь максимального демпфирования собственных мод помещения. В связи с этим в настоящей работе решена задача о максимальном поглощении звука

монополем в помещении с абсолютно жесткими стенками. В качестве характеристики поглощения выбран коэффициент затухания свободных колебаний системы “помещение–монополь”. Монополь представляет собой встроенный в стенку поршень, малый по сравнению с размерами помещения. В первую очередь вычисляется его импеданс излучения [9, 10], а затем определяются собственные частоты системы “помещение–монополь” [2].

Рассмотрим прямоугольное помещение с размерами  $L$ ,  $D$ ,  $H$  с абсолютно жесткими стенками (рис. 1). Среда в помещении характеризуется плотностью  $\rho$  и скоростью звука  $c$ . В стенке, находящейся в плоскости  $x = 0$ , установлен квадратный поршень со стороной  $a$ , положение поршня задается координатами одной из его вершин  $(y_0, z_0)$ . Пусть поршень колеблется по гармоническому закону с частотой  $\omega$  и амплитудой скорости  $V$ .

Звуковое поле в помещении может быть найдено стандартным методом Фурье. Звуковое давление записывается в виде суммы

$$p = i\omega\rho \sum_{n,m} V_{nm} \frac{\cos[\xi_{nm}(x-L)]}{\xi_{nm} \sin \xi_{nm} L} \cos \eta_n y \cos \zeta_m z, \quad (1)$$

$$V_{nm} = \frac{4V}{DH\varepsilon_n \varepsilon_m} \alpha_n \beta_m, \quad (2)$$

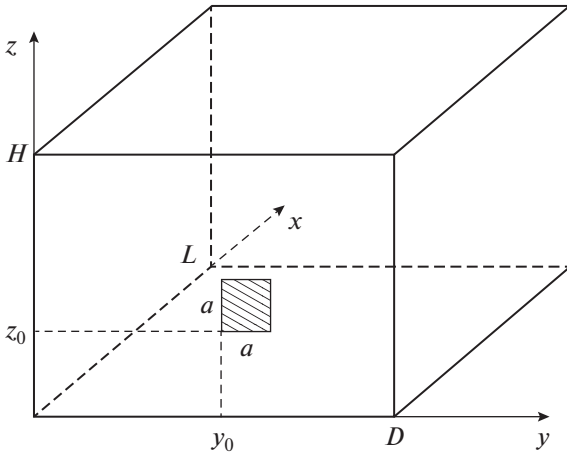


Рис. 1. Прямоугольное помещение с монополем.

где  $n, m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\eta_n = \pi n / D$ ,  $\zeta_m = \pi m / H$ ,  
 $\xi_{nm} = \sqrt{k^2 - \eta_n^2 - \zeta_m^2}$ ,  $k = \omega / c$ ,  $\epsilon_0 = 2$ ,  $\epsilon_{n \geq 1} = 1$ ,  
 $\alpha_0 = \beta_0 = a$ ,

$$\alpha_{n \geq 1} = \frac{\sin \eta_n (y_0 + a) - \sin \eta_n y_0}{\eta_n},$$

$$\beta_{m \geq 1} = \frac{\sin \zeta_m (z_0 + a) - \sin \zeta_m z_0}{\zeta_m}.$$

(3)

Сила, действующая на поршень со стороны среды, определяется выражением

$$F = \int_S p|_{x=0} dS,$$

(4)

где  $S$  – площадь поверхности поршня. Из (1) и (4) находим импеданс поршня

$$Z_r = \frac{F}{V} = i \frac{4\omega\rho}{DH} \sum_{n,m} \frac{\text{ctg} \xi_{nm} L}{\epsilon_n \epsilon_m \xi_{nm}} \alpha_n^2 \beta_m^2.$$

(5)

Коэффициенты  $\alpha_n$  и  $\beta_m$  описывают влияние положения поршня на стенке на его импеданс. Если поршень расположен в углу, т.е. если  $y_0 = z_0 = 0$ , то его колебания возбуждают все моды помещения. Если поршень расположен в центре стенки, т.е. если  $y_0 = (D - a)/2$  и  $z_0 = (H - a)/2$ , то его колебания возбуждают только нулевую и четные по  $n$  и  $m$  моды.

Для расчетов рассмотрим два вида помещений: кубическое ( $L : D : H = 1 : 1 : 1$ ) и вытянутое ( $L : D : H = 1 : 0.2 : 0.2$ ). Введем безразмерные импеданс и частоту

$$Z'_r = \frac{Z_r}{\rho c a^2},$$

(6)

$$\omega' = \frac{\omega}{\omega_1},$$

(7)

где  $\omega_1 = \pi c / L$  – первая резонансная частота помещения без монополя. Далее штрихи у величин  $Z'_r$  и  $\omega'$  будем опускать.

На рис. 2 приведен расчет импеданса поршня  $Z_r$  в углу помещения и в центре стенки для двух помещений в зависимости от частоты. На собственных частотах возбуждаемых мод импеданс обращается в бесконечность. В вытянутом помещении импеданс слабо зависит от положения поршня на стенке, что также имеет место в одномодовых волноводах [11].

Пусть импеданс монополя имеет произвольное комплексное значение  $Z$ , которое, как и им-

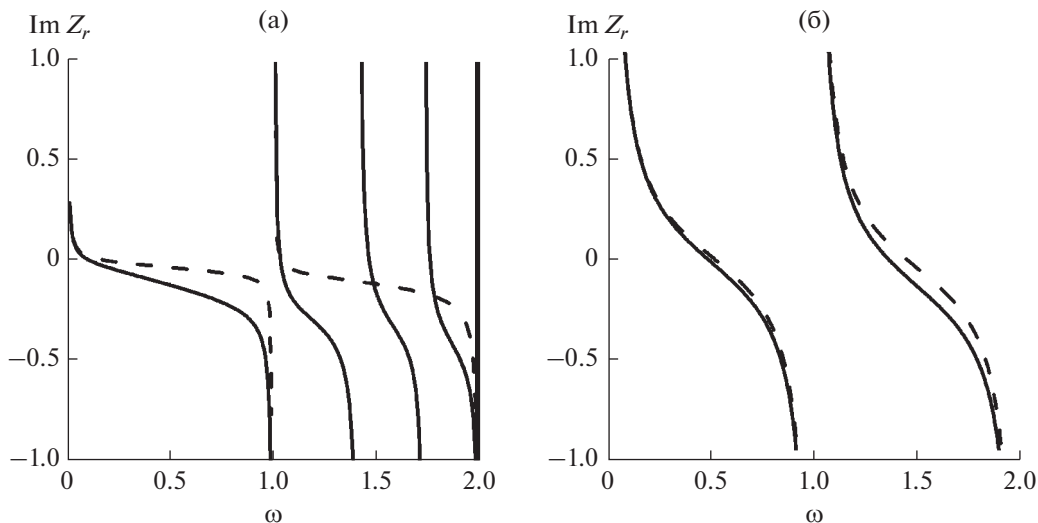


Рис. 2. Импеданс излучения поршня в углу помещения (сплошные линии) и в центре помещения (пунктирные линии): (а) – кубическое помещение, (б) – вытянутое помещение.



педанс излучения (6), приведем к безразмерному виду  $Z' = \frac{Z}{\rho c a^2}$ , опуская при этом штрих у величины  $Z'$ . Тогда собственные частоты системы “помещение—монополюль” определяются уравнением [6]

$$Z + Z_r = 0. \tag{7}$$

В первую очередь рассмотрим влияние вещественной части импеданса на значение корней (7) для кубического помещения с монополюлем в углу. На рис. 3 приведены первые три корня уравнения (7), найденные численно, для двух значений мнимой части импеданса  $Z$ . Если рассматриваемая система бездиссипативна, т.е.  $\text{Re } Z = 0$ , то корни вещественны, обозначим их  $\Omega_n$  и отметим на комплексной плоскости на рис. 3 проколотыми точками. Частоты  $\omega_n$  — собственные частоты помещения без поршня. Наименьшая собственная частота помещения согласно (7) равна  $\omega_1 = 1$ , вторая —  $\omega_2 = \sqrt{2}$ .

Нумерация  $\Omega_n$  начинается с  $n = 0$ , поскольку помещение с поршнем имеет дополнительную степень свободы и собственную частоту. На этой частоте звуковое давление во всем объеме помещения постоянно, что становится возможным в помещении с источником или стоком объемной скорости.

При  $\text{Im } Z = 0.2$  все частоты  $\Omega_n$  оказываются выше  $\omega_n$ , при этом  $\Omega_0$  оказывается ниже  $\omega_1$ . При  $\text{Im } Z = 0.3$  частота  $\Omega_0$  оказывается между  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , т.е. частота собственного колебания, связанного с дополнительной степенью свободы, обусловленной движением поршня, увеличивается с увеличением значения  $\text{Im } Z$ .

Далее будем увеличивать значение действительной части импеданса поршня от нулевого значения до бесконечности и отслеживать, как изменяются собственные частоты. При ненулевом значении  $\text{Re } Z$  собственные частоты становятся комплексными, а соответствующие им моды затухающими. С увеличением  $\text{Re } Z$  мнимые части собственных частот уменьшаются, достигают минимального значения (за исключением нулевой моды), а затем стремятся к нулю. Мнимая часть нулевой собственной частоты не имеет экстремума, поэтому соответствующее собственное колебание системы становится все более затухающим. Таким образом, в пределе  $\text{Re } Z \rightarrow \infty$  собственные частоты стремятся к собственным частотам помещения без поршня  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , т.е. сильно затупированный поршень не оказывает влияния на звуковое поле в помещении.

Между значениями  $\text{Im } Z = 0.2$  и  $\text{Im } Z = 0.3$  существует значение  $\text{Im } Z$ , при котором поведение корней (7) принципиально отличается. На рис. 4

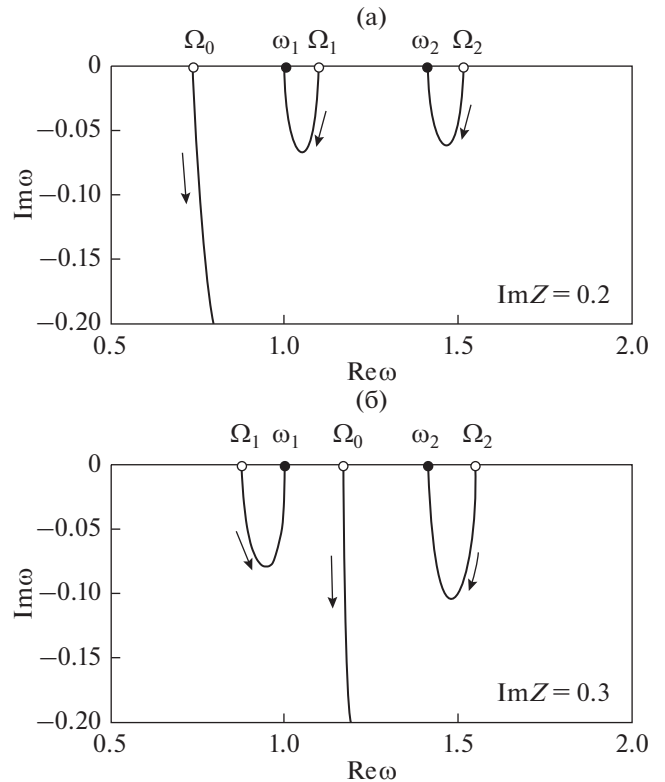


Рис. 3. Собственные частоты системы “помещение—поршень” при изменении  $\text{Re } Z$  от 0 до  $\infty$ . Стрелки указывают направление движения корней по кривой при увеличении  $\text{Re } Z$ .

приведены собственные частоты системы “помещение—поршень” для  $\text{Im } Z = 0.26$  при изменении  $\text{Re } Z$  от 0 до  $\infty$ . Ветви корней, соответствующие нулевой и первой моде, имеют общую точку  $\tilde{\omega}_{01}$ . Как показано в работе [2] на примере резонатора Гельмгольца, максимальное поглощение звука на двух первых модах происходит на кратной собственной частоте. Можно также подобрать такое значение импеданса поршня, при котором одинаковую собственную частоту будут иметь нулевая и вторая моды, т.е. максимальное поглощение будет достигнуто в окрестности второй моды.

Далее вычислим коэффициент затухания первого собственного колебания системы. В окрестности первой резонансной частоты помещения  $\omega_1$  будет два собственных колебания, имеющих в случае бездиссипативного поршня собственные частоты  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$ . Обозначим два первых корня уравнения (7)  $\tilde{\omega}_1$  и  $\tilde{\omega}_2$ . Скорости затухания этих мод определяются величинами  $\text{Im } \tilde{\omega}_1$  и  $\text{Im } \tilde{\omega}_2$ . Длительность затухания колебаний системы “помещение—поршень” в окрестности частоты  $\omega_1$  будет, очевидно, определяться меньшим из двух ко-

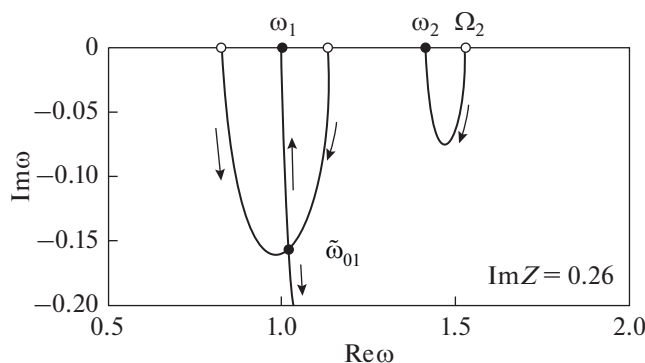


Рис. 4. Кратная собственная частота  $\tilde{\omega}_{01}$ .

эффицентом затухания. Введем коэффициент затухания колебания системы следующим образом

$$\delta = \min(-\text{Im } \tilde{\omega}_1, -\text{Im } \tilde{\omega}_2). \quad (8)$$

Коэффициент затухания  $\delta$  является функцией импеданса  $Z$ . На рис. 5 приведена зависимость коэффициента затухания от комплексного импеданса  $Z$  в виде линий равных значений  $\delta$ , рассчитанных согласно (8). Функция  $\delta(Z)$  имеет максимальное значение  $\delta_m = 0.15$  при  $Z_m = 0.12 + 0.26i$ .

Аналогичным образом можно найти оптимальный импеданс поршня  $Z_m$  и максимальный коэффициент затухания первого собственного колебания помещения  $\delta_m$  для вытянутого помещения и для поршня, расположенного в центре стенки. Результаты расчетов приведены в таблице. Импедансы излучения поршня  $Z_r$  для этих случаев приведены на рис. 2.

Как следует из расчетов, в вытянутом помещении коэффициент затухания значительно выше, чем в кубическом, из-за меньшего влияния резонансов помещения с ненулевыми номерами  $n$  и  $m$  на движение поршня. Большее поглощение обеспечивается также при расположении поршня в центре стенки, поскольку нечетные по  $n$  и  $m$  моды помещения не возбуждаются.

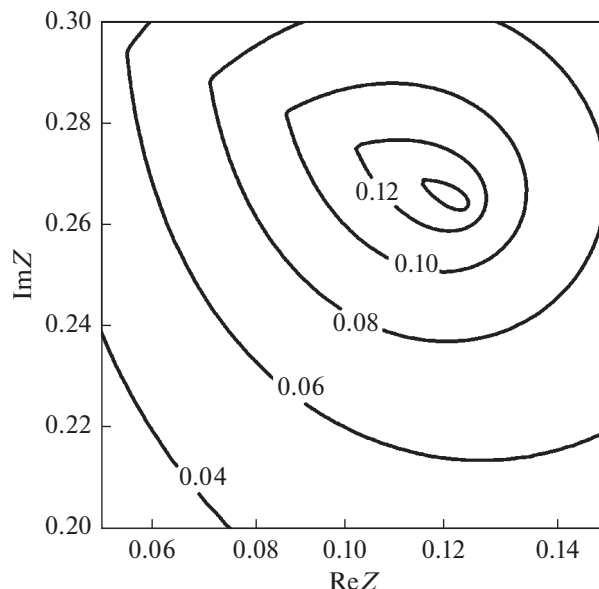


Рис. 5. Коэффициент затухания системы “помещение–поршень”  $\delta$  в окрестности первой резонансной частоты помещения в зависимости от импеданса поршня  $Z$ .

Найденные коэффициенты затухания также значительно выше, чем характерные коэффициенты затухания, обеспечиваемые резонатором Гельмгольца. В соразмерном помещении с поглощающим резонатором Гельмгольца [2] коэффициент затухания первого собственного колебания помещения составляет около 0.05, в то время как в кубическом помещении с монополем с оптимальным импедансом он в 3–4 раза выше.

Таким образом, найден импеданс монополя, при котором обеспечивается максимальное поглощение звука в помещении с жесткими стенками на его первой резонансной частоте. Такой монополь может быть реализован в виде поршня, встроенного в одну из стенок помещения, а требуемый импеданс может быть обеспечен с помощью активных методов управления импедансом локальных излучателей [6–8]. Рассмотренный в

Таблица 1. Оптимальный импеданс поршня для максимального поглощения звука

Расположение поршня	Кубическое помещение $L : D : H = 1 : 1 : 1$		Вытянутое помещение $L : D : H = 1 : 0.2 : 0.2$	
	$Z_m$	$\delta_m$	$Z_m$	$\delta_m$
В углу помещения $y_0 = z_0 = 0$	$0.12 + 0.26i$	0.15	$0.33 + 0.11i$	0.53
По центру стенки $y_0 = (D - a)/2,$ $z_0 = (H - a)/2$	$0.03 + 0.07i$	0.19	$0.29 + 0.06i$	0.64

статье подход может быть использован для практических расчетов активных систем и подбора оптимального импеданса для демпфирования нескольких первых собственных колебаний помещения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
2. *Канев Н.Г.* О максимальном поглощении звука резонатором Гельмгольца в помещении на низких частотах // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 6. С. 752–755.
3. *Heuchel F.M., Fernandez-Grande E., Agerkvist F.T., Shabalina E.* Active room compensation for sound reinforcement using sound field separation techniques // J. Acoust. Soc. Am. 2018. 143(3). P. 1346–1354.
4. *Celestinos A., Nielsen S.B.* Controlled acoustic bass system (CABS) a method to achieve uniform sound field distribution at low frequencies in rectangular rooms // J. Audio Eng. Soc. 2008. 56(11). P. 915–931.
5. *Lissek H., Boulandet R., Fleury R.* Electroacoustic absorbers: Bridging the gap between shunt loudspeakers and active sound absorption // J. Acoust. Soc. Am. 2011. 129(5). P. 2968–2978.
6. *Boulandet R., Rivet E., Lissek H.* Sensorless electroacoustic absorbers through synthesized impedance control for damping low-frequency modes in cavities // Acta Acustica united with Acustica. 2016. V. 102. № 4. С. 696–704.
7. *Канев Н.Г., Миронов М.А.* Активные резонаторы для гашения звука в узких трубах // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 3. С. 505–512.
8. *Бобровницкий Ю.И., Морозов К.Д., Томилина Т.М.* Импедансный подход к проектированию эффективных поглотителей колебательной энергии // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 2. С. 137–144.
9. *Лалин А.Д.* Импеданс излучения поршня в волноводе // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 3. С. 427–429.
10. *Комкин А.И., Миронов М.А.* Импеданс излучения поршня на стенке прямоугольного канала // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 3. С. 296–300.
11. *Канев Н.Г.* Присоединенная масса монополя и диполя в узкой трубе // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 5. С. 632–636.

---

---

**ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
ТЕХНИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ**

---

---

УДК 534.83

**ЛАБОРАТОРНАЯ УСТАНОВКА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ  
ЗВУКОПОГЛОЩАЮЩИХ ПОКРЫТИЙ ИЗ МЕТАМАТЕРИАЛОВ  
ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА И ВЛИЯНИЕ  
ТИПА ИСТОЧНИКА НА ИХ ЭФФЕКТИВНОСТЬ**

© 2020 г. Ю. И. Бобровницкий<sup>a, \*</sup>, Т. М. Томилина<sup>a</sup>, Б. Н. Бахтин<sup>a</sup>, А. С. Гребенников<sup>a</sup>,  
Ш. А. Асфандияров<sup>a, b</sup>, И. А. Карпов<sup>a, b</sup>, А. А. Ким<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,  
Малый Харитоньевский пер. 4, Москва, 101990 Россия

<sup>b</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет,  
Ленинские горы 1, стр. 2, Москва, 119234 Россия

\*e-mail: yuri@imash.ac.ru

Поступила в редакцию 07.11.2019 г.

После доработки 07.11.2019 г.

Принята к публикации 24.12.2019 г.

Дано описание установки для исследования и тестирования звукопоглощающих покрытий из акустических метаматериалов, предназначенных для снижения шума, создаваемого источником в конечном волноводе. Основное внимание уделено особенностям формирования акустического поля в волноводе и его излучения из открытых торцов. Центральное место в статье отведено результатам исследования влияния различных параметров установки на эффективность покрытий. Впервые выявлено и исследовано большое влияние на эффективность покрытия параметра, названного “типом источника”. Ему дано строгое определение и описан физический механизм его воздействия на эффективность. Сформулированы условия, при которых эффективность ЗП-покрытия, измеренная на установке, будет равна или близка к его эффективности, измеренной на реальном объекте. Показано, что одним из наиболее важных условий является совпадение типов акустических источников, используемого в установке и реального. Полученные результаты полезны при проектировании эффективных ЗП-покрытий, а также при создании экспериментальных установок для их отработки и тестирования.

*Ключевые слова:* акустический источник в волноводе, тип источника, звукопоглощающее покрытие из метаматериалов, установка для исследования и тестирования ЗП-покрытий

**DOI:** 10.31857/S0320791920030016

## ВВЕДЕНИЕ

Многие промышленные источники воздушного шума представляют собой акустические волноводы, излучающие звук из открытых торцов. Таковы выхлопные трубы двигателей внутреннего сгорания, вентиляционные установки, турбореактивные авиационные двигатели, входные и выходные устройства компрессорных установок и многие другие. Из-за повсеместного использования и сравнительно большой мощности этих источников проблема подавления шума при его распространении в волноводах была сформулирована и начала решаться еще в 30-х годах прошлого века. Уже первые исследования [1–3] выявили особенности и трудности, связанные со “скользящим” вдоль стенок распространением звука и невозможностью решить проблему известными тогда методами и средствами строи-

тельной и архитектурной акустики. В частности, было показано, что облицовка внутренних стенок волновода материалом, идеально поглощающим нормально падающий звук, не гарантирует эффективного поглощения в волноводе при скользящем распространении.

В настоящее время теоретические и прикладные результаты по этой проблеме составляют одну из наиболее развитых областей акустики, насчитывающую десятки монографий и справочников и больше тысячи журнальных статей. Большая часть работ решает проблему для относительно длинных волноводов (с длиной, значительно превышающей поперечные размеры). С физическими особенностями распространения и затухания нормальных волн в акустических волноводах с импедансными стенками интересующийся читатель может ознакомиться в учебниках и моногра-

фиях, например, [4–6], в многочисленных журнальных статьях и обзорах, например, [7–11], а в справочнике [12] можно найти практически все основные типы звукопоглощающих (ЗП) облицовок для волноводов и конструкции глушителей, разработанные ко времени выхода справочника, а также соответствующие литературные ссылки. Полученные результаты позволяют заключить, что проблема подавления шума в акустических волноводах принципиально решена в ряде отраслей промышленности: для выхлопных труб автомобильных двигателей, для вентиляционных установок и для некоторых других волноводов с относительно большой протяженностью, необходимой для размещения звукопоглощающих и отражающих устройств.

Существует, однако, ряд “волноводных” источников шума, для которых проблема снижения остается актуальной и в настоящее время. Ярким примером являются современные турбовентиляторные авиационные двигатели, вносящие существенный вклад в шум на местности, создаваемый воздушными судами на приаэродромных территориях. Так, воздухозаборник такого двигателя представляет собой короткий волновод круглого сечения, который с точки зрения акустического моделирования близок скорее к компактному объему, открытому на торце и с источником (вентилятором) внутри. Расчет такой конструкции чрезвычайно сложен, так как помимо самого волновода с ЗП-облицовкой должны учитываться свойства источника и внешней среды, в которую происходит излучение. Проектирование эффективных ЗП-облицовок здесь усложняется отсутствием надежных моделей источника (вентилятора) и наличием скоростного потока. Существенно также отсутствие стандартизованных или общепринятых методов измерения поглощающей способности ЗП-материалов и структур при скользящем падении звука<sup>1</sup>. В таких условиях важнейшее значение приобретают специализированные стенды и экспериментальные установки, которые имитируют основные аспекты работы реальных объектов. В литературе можно найти немало ссылок на подобные установки. Они имеются, по-видимому, во всех крупных авиационных фирмах — см., например, [15–18]. Широкое распространение получила экспериментальная установка, представляющая собой волновод прямоугольного сечения, соединяющий две реверберационные камеры — источниковую и приемную, в котором

предусмотрен также высокотемпературный поток воздуха. Ее теоретическое обоснование дано в работе [19]. Несмотря на указанные трудности, к настоящему времени удалось разработать ряд ЗП-конструкций (ЗПК) с приемлемой эффективностью [18, 20]. Разработки велись в основном на базе обширного экспериментального материала, стендового и натурального, с привлечением полуэмпирических расчетных моделей.

В последнее время, однако, ситуация в этой области меняется. Благодаря переходу гражданской авиации на двигатели с большой степенью двухконтурности, их шум становится все более низкочастотным и традиционные средства его подавления, в частности, применяемые ЗПК, перестают соответствовать изменившимся условиям. В связи с этим, а также из-за постоянного ужесточения международных требований по шуму на местности, возникла острая необходимость в разработке новых ЗПК для двигателей — более легких и компактных, более эффективных в низкочастотной области [21].

По мнению авторов настоящей статьи решение этой проблемы лежит на пути создания поглощающих покрытий из акустических метаматериалов (АММ). АММ — это материалы-структуры ячеистого типа, которые, в зависимости от устройства ячеек, демонстрируют более широкий диапазон рассеивающих, поглощающих и других волновых свойств, чем известные композиционные материалы. Конструирование АММ с заданными свойствами — это пока малоразработанная область, готовых решений практических задач здесь пока нет, хотя их интенсивные исследования сейчас ведутся во всем мире и уже первые результаты, полученные во многих лабораториях мира, демонстрируют огромный потенциал повышения эффективности звукопоглощения при экономии используемых объемов и масс [22]. Разработка новых структурных схем АММ с требуемыми физическими свойствами является, таким образом, самостоятельным этапом решения проблемы новых ЗПК как для авиадвигателей, так и для других объектов. И для его выполнения требуется комплексный подход, включающий, помимо создания теоретических и расчетных моделей, проведение экспериментальных работ по проверке и отработке физических свойств АММ. Эксперименты на этом этапе можно проводить на упрощенных установках лабораторного типа, имитирующих, в отличие от специализированных установок, не все реальные условия работы ЗПК, а лишь те из них, которые в наибольшей степени определяют поглощающие и другие волновые свойства АММ. Примеры подобных установок, ориентированных на решение конкретных задач, есть в литературе, например, [23, 24].

<sup>1</sup> В настоящее время существует только два международных стандарта, согласно которым поглощающая способность ЗП-материалов характеризуется коэффициентом поглощения (отношением поглощенной и падающей мощностей), измеряемым в импедансных трубах при нормальном падении звука [13] и в реверберационных камерах в условиях диффузного поля [14], когда звук падает под всеми углами одновременно.

В данной статье описана одна из таких упрощенных лабораторных установок, созданная в Институте машиноведения им. А.А. Благонравова (ИМАШ) для исследования и тестирования АММ структур, предназначенных для разработки новых эффективных ЗП-покрытий, работающих в коротких волноводах в условиях скользящего распространения звука. Основным мотивом для публикации отдельной статьи явился новый физический результат, полученный авторами на этой установке при ее предварительном исследовании. Результат состоит в обнаружении сильной зависимости эффективности ЗП-покрытий от параметра источника, который авторы назвали *типом источника*: экспериментально на установке было показано, что при прочих равных условиях эффективность одного и того же покрытия существенно зависит от того, является источник кинематического, силового, энергетического или другого типа. Ранее этот эффект не обсуждался в литературе. Поэтому в статье параметру “тип источника” отведено центральное место: дано строгое определение, подробно изучен его физический смысл, а в самой установке предусмотрено определение эффективности ЗП-покрытий при возбуждении звукового поля источниками разных типов, чего нет, насколько известно авторам, в других установках.

Ниже приведено краткое описание упрощенной установки ИМАШ, методик формирования возбуждения, измерения и обработки данных, дано определение эффективности звукопоглощающих покрытий. Основное внимание, однако, уделено выявлению физических особенностей формирования звуковых полей в коротких волноводах, их излучению из открытых торцов и влиянию различных параметров на излучаемую мощность. Показано, что тип источника является одним из важнейших параметров, определяющих величину мощности излучения из торцов волновода.

## ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Основные технические характеристики установки ИМАШ следующие: рабочий диапазон частот — 80...1500 Гц; работает при комнатных температурах без скоростного потока воздуха; поле давления в волноводе не превышает 140 дБ и описывается линейными уравнениями акустики.

Принципиальная схема установки показана на рис. 1а, фото установки приведено на рис. 1б. Главная часть установки — волновод квадратного сечения с внутренними размерами сечения  $200 \times 200$  мм и отношением длина/поперечный размер, равным 2.48. Волновод имеет твердые стенки. У правого (открытого) торца он содержит две секции длиной 200 мм каждая, в которых стенки состоят из открытых ячеек. В эти ячейки вставляются съемные кассеты — твердые или выполненные из

материала покрытия (рис. 1в) — каждая размером  $200 \times 200$  мм, по четыре кассеты на секцию. Толщина кассеты может быть 50 мм или меньше. Звуковое поле в волноводе создается электродинамическим преобразователем (динамиком) на левом торце, который возбуждается гармоническими или случайными сигналами, формируемыми на компьютере.

Измерительная часть установки содержит 8 датчиков: акселерометр  $a$ , две интенсивметрические пары микрофонов  $p_{1,2}$  и  $p_{3,4}$  и три микрофона  $q_{1-3}$  (показаны на рис. 1а), 8-канальный цифровой преобразователь NI PXIe-4492, компьютер и необходимые согласующие устройства (усилители, вольтметры, осциллографы и другие) — на схеме не показаны. Акселерометр  $a$  установлен на диффузоре динамика для измерения ускорения; интенсивметрические пары микрофонов  $p_{1,2}$  и  $p_{3,4}$  установлены в волноводе соответственно у динамика и на открытом торце для измерения интенсивностей  $I_{in}$ ,  $I_{rad}$  и импедансов; микрофоны  $q_{1-3}$  установлены в полузаглушенном зале размером  $12 \times 6 \times 3.3$  м для измерения поля давления. Сигналы всех датчиков поступают на 8-канальное входное устройство NI PXIe-4492 и далее в компьютер, где синхронно записываются для последующей обработки. Основными характеристиками, которые рассчитываются по записанным временным сигналам, являются собственные и взаимные спектральные плотности мощности, а также их комбинации — коэффициенты передачи, импедансы, интенсивность и другие нужные для анализа физические величины.

В целях интерпретации полученных результатов и прогнозирования новых предусмотрен полный аналитический и численный расчет поля давления установки. В аналитическом расчете волновод моделируется в рабочем диапазоне частот одномерной структурой, в которой существует только одна нулевая (плоская) нормальная волна. При этом учитываются потери на стенках волновода, обусловленные вязким трением и теплопроводностью (см., например, [5]), а АММ-покрытие характеризуется его эффективным поверхностным импедансом. В численном расчете установки используется метод конечных элементов и программный пакет COMSOL Multiphysics. Волновод рассматривается как трехмерная структура, при этом ЗП-покрытие является ее составной частью. Применяются сетки разных масштабов.

## АКУСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ УСТАНОВКИ

Согласно общей теории [4], любой акустический волновод полностью характеризуется набором нормальных волн (мод), то есть таких волновых движений, которые могут существовать свободно без

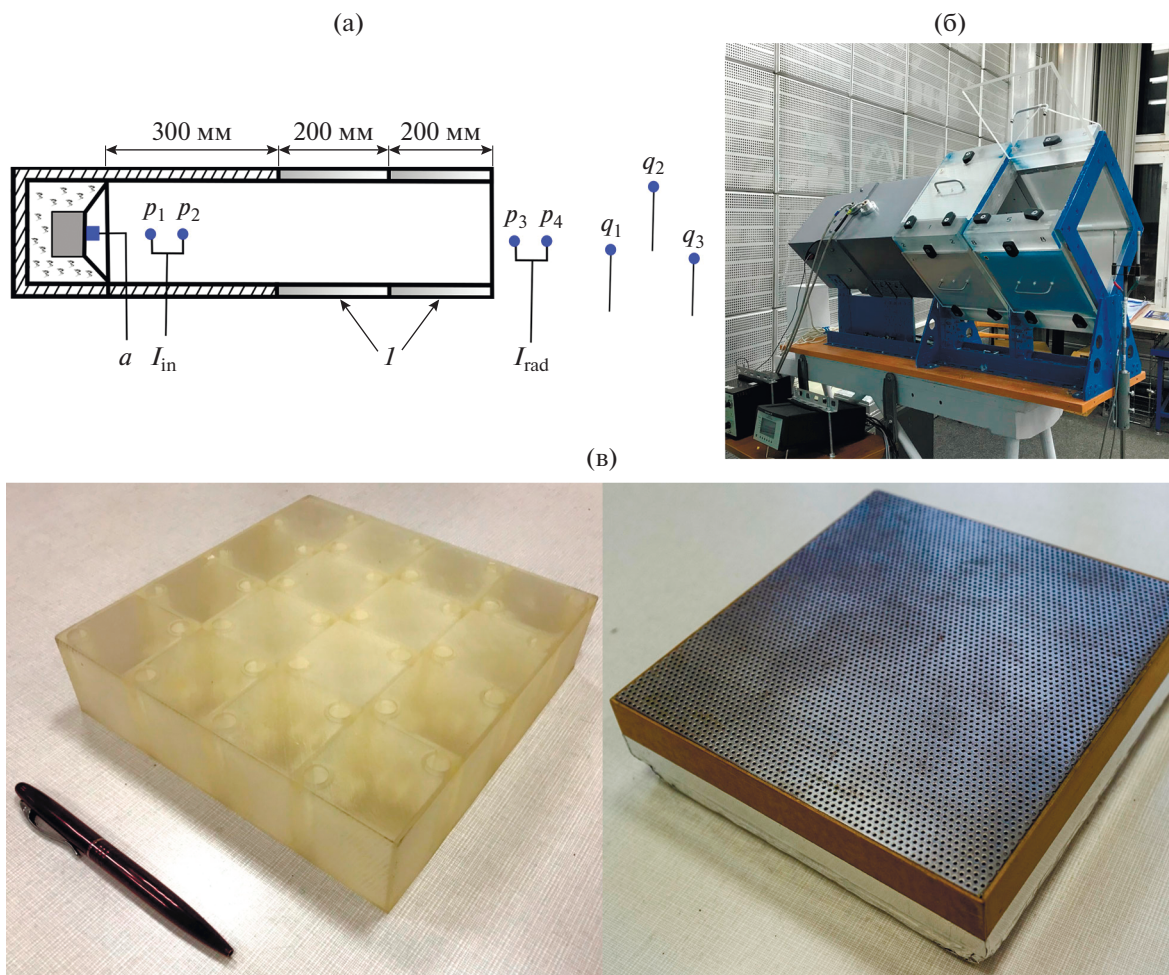


Рис. 1. (а) – Схема и (б) – фото лабораторной установки ИМАШ; (в) *I* – съемные кассеты.

внешнего воздействия. Любое поле давления волновода – бесконечного или конечной протяженности – представляет собой комбинацию его нормальных волн. Число нормальных волн бесконечно. Каждая из них удовлетворяет граничным условиям на стенках и отличается от всех остальных формой распределения давления по сечению и скоростью распространения (или волновым числом). Если в среде и на стенках волновода нет потерь энергии, то на любой частоте число распространяющихся без затухания нормальных волн конечно, а остальные волны являются неоднородными, их амплитуды экспоненциально убывают с расстоянием. У каждой нормальной волны порядкового номера  $n$  есть критическая частота  $f_n$ : на частотах ниже  $f_n$  она неоднородная, а на частотах выше  $f_n$  – распространяющаяся.

Волновод с твердыми стенками рассматриваемой здесь установки имеет две плоскости зеркальной симметрии, проходящие через ось волновода и параллельные боковым граням. Поэтому все его нормальные волны можно разделить на

три независимые группы: симметричные относительно обеих плоскостей симметрии, антисимметричные относительно этих плоскостей и смешанные, то есть симметричные относительно одной плоскости и антисимметричные относительно другой. Расчет критических частот [4] дает для них следующее выражение

$$f_{m,n} = \frac{c}{2a} \sqrt{m^2 + n^2}, \tag{1}$$

где  $m, n$  – целые неотрицательные числа,  $c$  – скорость звука,  $a = 0.2$  м – длина стороны квадратного сечения. Для симметричных нормальных волн  $m$  и  $n$  являются четными, для антисимметричных они нечетные и для смешанных волн одно четное, другое нечетное. Так как динамик и ЗП-покрытие также симметричны относительно указанных двух плоскостей, а динамик колеблется только по симметричной форме, то в волноводе должны возбуждаться только симметричные нормальные волны, имеющие согласно (1) критические частоты 0, 1700, 2400 Гц и выше. Это объясняет выбор

рабочего диапазона частот 80–1500 Гц: в нем может существовать только одна “нулевая” или плоская распространяющаяся со скоростью  $c$  нормальная волна с равномерным по сечению распределением давления, в которой волновой вектор и вектор скорости частиц среды направлены по оси волновода, реализуя таким образом чисто скользящее распространение звука. Все остальные нормальные волны не являются скользящими, так как представляются комбинациями плоских волн с волновыми векторами, имеющими отличные от нуля углы с осью волновода, причем этот угол тем больше, чем выше порядковый номер нормальной волны.

Важнейшими акустическими характеристиками ограниченного по длине волновода являются его собственные частоты и формы колебаний, точнее те из них, которые являются резонансными для данного вида возбуждения. Они формируются нулевой нормальной волной и определяются граничными условиями на торцах волновода.

На правом (открытом) торце задается граничное условие импедансного типа с импедансом излучения из волновода в зал. Из-за сложности зала во всех расчетах использовался его импеданс, экспериментально измеренный парой микрофонов  $p_3$  и  $p_4$  (см. рис. 1а). Действительная и мнимая части этого импеданса, нормированные на  $\rho c S$ , где  $S$  – площадь сечения, приведены на рис. 2. Как видно на графиках, мнимая часть имеет инерционный характер (она отрицательна и на низких частотах линейно зависит от частоты) и определяется “присоединенной” массой воздуха, примыкающего к открытому торцу волновода. Действительная часть импеданса на всех частотах положительна и определяется потерями энергии на излучение из волновода в зал. На низких частотах она пропорциональна квадрату частоты.

На левом торце волновода находится источник (динамик) и граничные условия, необходимые для расчета резонансных частот, зависят здесь от его возбуждения. В следующем пункте статьи показано, что возбуждение динамика может быть подобрано таким образом, чтобы амплитуда скорости колебаний диффузора  $v$  и, следовательно, скорости частиц воздуха на левом торце волновода при любой нагрузке равнялась заданной функции частоты во всем рабочем диапазоне. Очевидно, что при таком *кинематическом* возбуждении резонансными будут те частоты и формы собственных колебаний волновода, которые соответствуют неподвижному левому торцу ( $v = 0$ ). Аналогично, возбуждение динамика может быть подобрано так, чтобы была заданной амплитуда давления  $p$  у левого торца волновода. При таком возбуждении (оно названо *силовым*) резонансы установки имеют место на частотах и формах собственных колебаний волновода с открытым левым торцом ( $p = 0$ ).

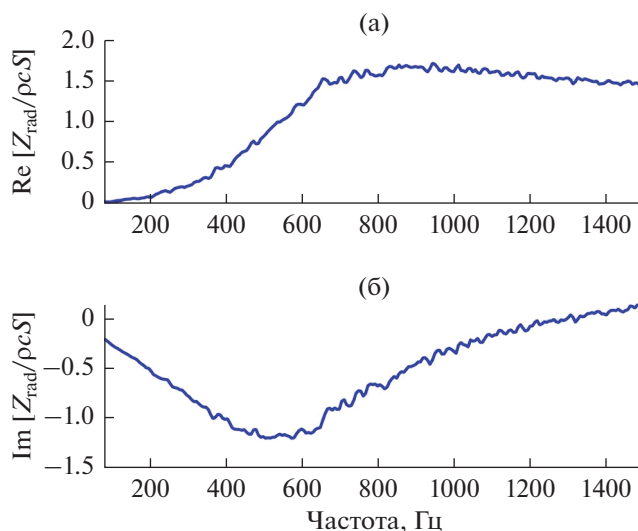
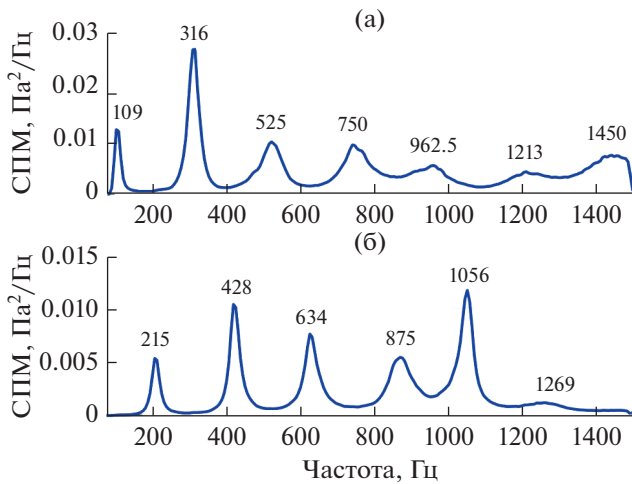


Рис. 2. (а) – Действительная и (б) – мнимая части экспериментально измеренного импеданса излучения звука из открытого торца волновода в зал,  $S$  – площадь сечения волновода.

На рис. 3 приведены частотные зависимости спектральной плотности мощности (СПМ) давления, экспериментально измеренного микрофоном  $p_3$  на правом торце волновода с твердыми стенками, т.е. без ЗП-облицовки, при кинематическом (рис. 3а) и силовом (рис. 3б) возбуждениях случайными сигналами. В первом случае на всех частотах поддерживалась постоянная амплитуда скорости диффузора, измеряемая акселерометром  $a$ , а во втором – амплитуда давления, измеряемого микрофоном  $p_1$  (см. схему на рис. 1а). Как видно из рис. 3, резонансные частоты при этих двух возбуждениях существенно различаются. Более того, резонансные частоты при кинематическом возбуждении являются антирезонансными для силового возбуждения и наоборот. В таблице приведены рассчитанные аналитически собственные частоты установки, которые соответствуют закрытому левому торцу волновода ( $v = 0$ ) и открытому торцу ( $p = 0$ ). Эти частоты комплексны, так как рассчитаны с учетом потерь на стенках волновода и излучения из правого открытого торца. Как и ожидалось, резонансные частоты установки при кинематическом возбуждении на рис. 3а близки к собственным частотам волновода с закрытым левым торцом, а при силовом возбуждении – с открытым торцом.

Таким образом, было экспериментально подтверждено, что разные типы источников с равномерным спектром возбуждают в одной и той же структуре различные собственные частоты и формы, т.е. вызывают принципиально различные отклики установки с разными резонансами и антирезонансами. Этот результат имеет важное значение для проектирования и тестирования ЗП-покрытий. Из





**Рис. 3.** Спектральная плотность мощности (СПМ) давления  $p_3$  у открытого торца волновода: (а) – при постоянной скорости диффузора,  $|v(\omega)| = 1$  см/с, (б) – при постоянном давлении,  $|p_1(\omega)| = 1$  Па.

него, в частности, следует, что тип источника, используемого во время тестирования на стенде или установке, должен совпадать с типом реального источника, для которого проектируется покрытие. В противном случае хорошо спроектированная и отработанная на стенде ЗП-облицовка может оказаться неэффективной для реального источника. Ниже будет приведен пример простой резонансной ЗП-облицовки, которая имеет высокую эффективность для источника одного типа и низкую эффективность для источников других типов. Однако сначала следует более строго определить понятие типа источника, чему и посвящен следующий пункт статьи.

### ТИП ИСТОЧНИКА

Любой акустический источник шума и/или вибраций, в том числе аэродинамический, может быть описан с помощью модели “черного ящика”, состоящей из вектора сил  $\mathbf{f}_0$  и матрицы внутренних импедансов  $Z_i$ , определенных на поверхности источника – см., например, [25–28]. В простейшем одномерном случае, к которому относится и рассматриваемая здесь установка, модельными параметрами источника являются две скалярные функции частоты  $\{f_0, Z_i\}$ . Если такой источник нагружен импедансом  $Z$ , то скорость частиц воздуха  $v$  и давление  $p$  на интерфейсной поверхности  $S$  источника и нагрузки равны

$$v = \frac{f_0}{Z_i + Z}, \quad p = \frac{f_0}{S} \frac{Z}{Z_i + Z}. \quad (2)$$

Источником *кинематического типа* принято называть источник, у которого скорость  $v$  не зависит от нагрузки  $Z$ . Это эквивалентно тому, что

внутренний импеданс источника намного превосходит импеданс нагрузки

$$|Z_i| \gg |Z|.$$

Идеальный кинематический источник имеет бесконечный внутренний импеданс  $Z_i \rightarrow \infty$ . Скорость на поверхности такого источника определяется только параметрами самого источника. Поэтому кинематический источник можно определить также как источник с заданной нормальной скоростью  $v(\omega)$  на его поверхности.

В другом предельном случае, когда, наоборот, импеданс нагрузки намного превосходит внутренний импеданс

$$|Z_i| \ll |Z|,$$

можно считать, что сила  $f_0$  приложена непосредственно к нагрузке, так что на поверхности источника давление  $p = f_0/S$  оказывается независимым от нагрузки. Такой источник естественно назвать источником *силового типа*. Идеальный силовой источник имеет нулевой внутренний импеданс,  $Z_i = 0$ , и он является, таким образом, источником заданного давления  $p(\omega)$  на его поверхности. В этих двух крайних случаях источник характеризуется только одним параметром – скоростью кинематического источника или силой (давлением) силового источника. В общем же случае возбуждаемое источником поле зависит от обоих параметров.

Отметим, что кинематические и силовые модели довольно широко используются в акустике при исследовании источников шума и вибраций. Так, элементарные источники акустических полей – монополь, диполь и другие мультиполи, а также тела с заданной нормальной поверхностной скоростью – являются источниками кинематического типа. Силовые модели используются чаще всего в виброакустике, где вынужденные колебания упругих структур, как правило, рассматриваются как результат действия независимых от свойств структуры внешних сил, т.е. источников силового типа.

Модели “волноводных” источников шума исследовались в основном при изучении выхлопных шумов двигателей внутреннего сгорания (ДВС) и шума воздушных машин. Так, прямое измерение на реальном ДВС показало [29], что на низких и средних частотах как мнимая, так и действительная части внутреннего импеданса  $Z_i$  меняются в широких пределах: в одних участках спектра двигатель является источником объемной скорости (т.е. кинематическим источником), в других – источником давления (т.е. силовым), а на высоких частотах (выше 1 кГц) внутренний импеданс стремится к постоянному действительному значению  $\rho c S$ , и ДВС является, по терминологии ав-

**Таблица 1.** Частоты собственных колебаний установки (расчет)

Граничное условие на левом торце	Собственные частоты, Гц						
	$\nu = 0$	104- <i>i</i> 1.6	314- <i>i</i> 14	534- <i>i</i> 24.4	762- <i>i</i> 39.3	999- <i>i</i> 53.5	1232- <i>i</i> 60.5
$p = 0$	208- <i>i</i> 7.5	422- <i>i</i> 18.8	646.5- <i>i</i> 30.3	881- <i>i</i> 47.1	1116- <i>i</i> 58	1359- <i>i</i> 61.6	

торов, источником неотражающего типа. Что касается вентиляторов в волноводах, то, несмотря на обширную литературу, их внутренние импедансы никем, насколько нам известно, не измерялись. Долгое время считалось, вероятно, под влиянием работы [19], что вентилятор является источником мощности, т.е. источником энергетического типа, благодаря чему многие установки для исследования ЗПК авиационных двигателей использовали в качестве источников реверберационные камеры. Однако, в ряде работ было отмечено, что вентилятор является скорее источником давления. Например, авторы работ [10, 30], проводя эксперименты с центробежным вентилятором небольшой мощности, показали, что изменение акустической нагрузки в виде воздуховодов разной геометрии не изменяет величину давления у вентилятора, что частично подтверждает его силовую модель. Однако результатов прямых измерений внутренних импедансов или других данных, необходимых для определения типа вентиляторных источников звука, в частности, авиационных двигателей, авторам настоящей статьи не удалось найти в литературе.

В описываемой здесь установке ИМАШ предусмотрена имитация источника практически любого типа. Это достигается путем формирования определенного амплитудно-фазового спектра электрических сигналов возбуждения вибратора в рабочем диапазоне частот. Покажем это в явном виде, приняв во внимание, что в модели (2)  $f_0$  – это сила Лоренца, приложенная к диффузору и пропорциональная электрическому току во входной цепи и катушке динамика,  $Z_i$  – это входной механический импеданс динамика со стороны диффузора и  $Z$  – это входной акустический импеданс волновода на левом примыкающем к диффузору торце. Оба импеданса,  $Z_i$  и  $Z$ , доступны измерению стандартным способом и считаются известными. Как следует из первого соотношения (2), чтобы динамик работал как кинематический источник, т.е. чтобы во всем диапазоне частот диффузор колебался с заданной скоростью  $\nu(\omega)$  независимо от того, какие ЗП-структуры установлены в волноводе, нужно возбудить динамик электрическим током, пропорциональным  $(Z_i + Z)\nu(\omega)$ . Аналогично, если ток возбуждения сделать пропорциональным  $(1 + Z_i/Z)p(\omega)$ , то на левом торце волновода во всем рабочем диапазоне частот будет поддерживаться заданное давле-

ние  $p(\omega)$  и динамик будет работать как источник силового типа. Если же ток будет пропорционален  $|Z_i + Z|[\operatorname{Re}(Z)F(\omega)]^{1/2}$ , то это будет источник энергетического типа с заданным потоком мощности  $F(\omega)$  и т.д. В принципе, на установке можно имитировать любые источники, включая источники, тип которых различен в разных участках рабочего диапазона частот.

### ПОКАЗАТЕЛЬ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЗП-ПОКРЫТИЯ

В качестве основных показателей эффективности ЗП-покрытий, нанесенных на внутренние стенки волновода, в литературе обычно применяют две величины – поглощенную покрытием мощность (английский термин transmission loss или TL) и уменьшение излученной мощности или снижение акустического поля на выходе волновода в результате применения покрытия (insertion loss или IL). Первый показатель записывается как отношение в децибелах потока мощности  $F$ , измеренного на входе и на выходе участка волновода с покрытием:

$$TL = 10 \lg \frac{F_{in}}{F_{out}}. \quad (3)$$

Мощность измеряется интенсиметрами, а на стендах с двумя реверберационными камерами ее заменяют средним квадратом давления в камерах [19]. Показатель (3) характеризует только поглощающую способность покрытия. Однако, как следует из теории (см., например, [9]) и ряда экспериментов (например, [31]), важны также отражающие свойства покрытия. Второй показатель эффективности учитывает оба эти эффекта и определяется как

$$IL = 10 \lg \frac{F_{out}^{ref}}{F_{out}}. \quad (4)$$

Здесь  $F_{out}^{ref}$  – это мощность излучения из “опорного” волновода, относительно которого измеряется эффективность исследуемого волновода. В качестве опорного используется волновод, у которого стенки акустически твердые или облицованы каким-либо хорошо изученным покрытием. На практике этот показатель является наиболее полезным, т.к. позволяет оценивать и сравнивать ЗП-покрытия по конечному результату их

работы. Его недостатком является необходимость проводить измерения фактически на двух разных структурах, в разное время и в других условиях. Это неизбежно приводит к дополнительным ошибкам в определении эффективности, для снижения которых ужесточаются требования к методике измерений и аппаратуре, выбору “стандартного дня” для проведения эксперимента и т.п. Кроме того, измерения обычно производятся в 1/3- или 1/2-октавных полосах частот, что сглаживает часть случайных ошибок. Однако, усреднение по частоте сглаживает также и “мелкие” детали спектра и связанные с ними физические эффекты, информация о которых важна при проектировании ЗП-покрытий. Таковы, например, эффекты смещения собственных частот и форм волновода, вызванные нанесением покрытия и др. По этой причине в данной работе для оценки эффективности проектируемых покрытий в качестве показателя используется график с двумя непрерывными кривыми спектральной плотности мощности звука, излученного из волновода с ЗП-покрытием и без него. Такой показатель содержит наиболее полную информацию о работе ЗП-покрытия, а при необходимости из него простым интегрированием по частоте можно получить показатель (4) в полосах частот.

### ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ УСТАНОВКИ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЗП-ПОКРЫТИЯ

В идеале, к которому следует стремиться, эффективность ЗП-покрытия, измеряемая на установке, должна совпадать с эффективностью, измеряемой на реальном волноводном источнике, для которого разработано покрытие. Однако эффективность зависит не только от параметров самого покрытия, но и в значительной мере от параметров акустической обстановки. Поэтому в данной работе было проведено исследование влияния различных параметров установки и источника на величину эффективности с целью определения тех из них, которые определяют соответствие стендовой и реальной эффективности ЗП-покрытий.

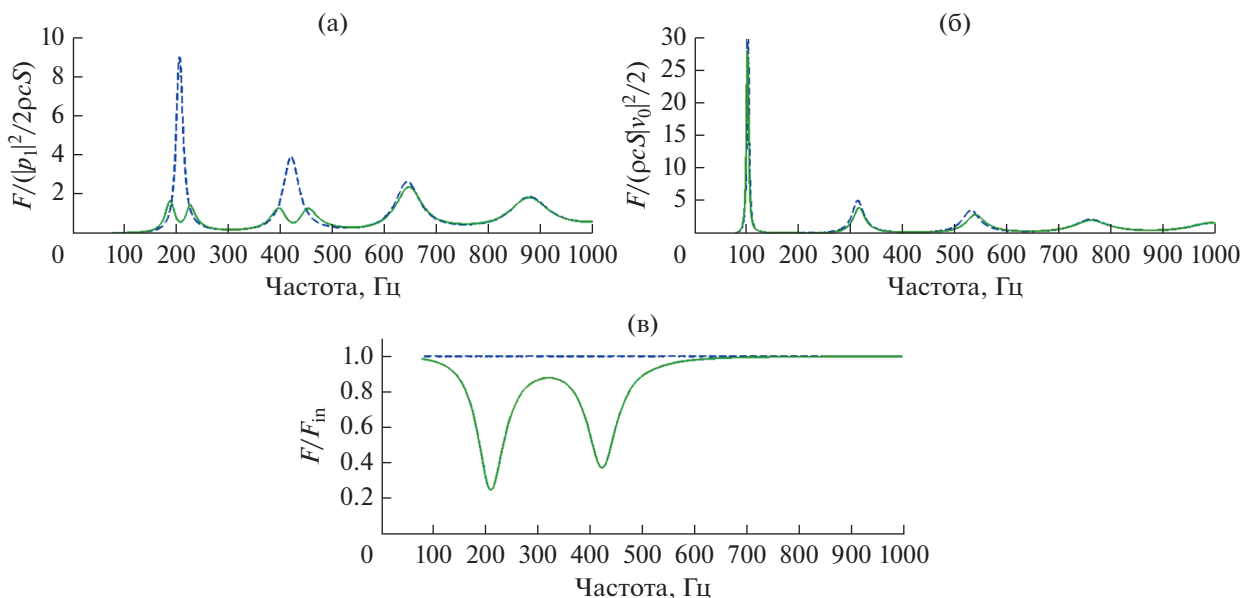
Как показало исследование, основными параметрами установки, которые сильнее других влияют на эффективность ЗП-покрытий, является набор частот и форм собственных колебаний волновода, а также спектр и тип источника шума. Как следует из рис. 3, часть собственных частот волновода является резонансной, они усиливают мощность излучения звука из волновода и вместе со спектром источника определяют уровни внешнего шума. Поэтому желательно, чтобы первые наиболее активные резонансные частоты установки совпадали с резонансными частотами реального объекта.

Тип источника шума установки является вторым по степени влияния на эффективность ЗП-покрытий. Именно тип источника определяет набор собственных частот установки, которые возбуждаются как резонансные. Из-за его сильного влияния необходимо, чтобы тип источника установки или стенда совпадал с типом реального источника.

Для иллюстрации влияния типа источника на эффективность на рис. 4 представлена рассчитанная аналитически эффективность ЗП-покрытия из АММ, состоящего из нескольких резонаторов Гельмгольца, настроенных на две первые частоты установки: 210 и 420 Гц, которые являются наиболее “активными” резонансными частотами при возбуждении источником силового типа. На рис. 4 показана эффективность этого покрытия соответственно для трех типов источника — силового, кинематического и энергетического с равномерными спектрами в рабочем диапазоне частот. Так как покрытие рассчитывалось для силового источника, то и эффективность покрытия максимальна именно для него (рис. 4а). В то же время, как видно из рис. 4б, применение этого покрытия к источнику кинематического типа практически не приводит к снижению излучения из волновода. Причина в том, что частоты, на которые настроены резонаторы Гельмгольца покрытия, являются антирезонансными для кинематического источника, на которых уровни излучения, и без того минимальные, не нуждаются в дальнейшем снижении. Интересен график эффективности покрытия в применении к энергетическому источнику. Из рис. 4в видно, что покрытие достаточно эффективно и в этом случае, но уступает эффективности на рис. 4а, так как учитывает только поглощенную покрытием мощность. В применении к источнику энергетического типа используемый в работе показатель эффективности эквивалентен показателю эффективности (3).

Из других параметров установки, оказывающих заметное влияние на эффективность исследуемых покрытий, можно выделить места установки покрытия на стенках волновода, а также импеданс излучения в окружающую среду. Эти параметры также тесно связаны с частотами и формами собственных колебаний установки: поглотители звука лучше всего работают при установке в пучностях собственных форм, где давление максимально, а импеданс излучения в окружающую среду заметно влияет на частоты резонансов и их добротность.

Отметим также влияние величины демпфирования ЗП-покрытия на эффективность. Как следует из теории и доказано экспериментально (см., например, [22, 32, 33]), для каждого поглотителя звука или вибраций существует оптимальное количество демпфирования, при котором поглощенная им мощность максимальна. Этот опти-



**Рис. 4.** Эффективность резонансного ЗП-покрытия, настроенного на частоты 210 и 420 Гц, при возбуждении установки источниками трех типов: (а) – силового, (б) – кинематического и (в) – энергетического. Сплошные линии соответствуют установке с покрытием, пунктир – без покрытия.  $F$  – мощность излучения из волновода,  $F_{in}$  – входная мощность.

мум практически трудно контролируем, так как зависит от акустической обстановки, но играет важную роль в работе поглотителя: эксперименты показывают, что даже небольшое отклонение количества демпфирования в какую-либо сторону от оптимального значения может существенно изменять амплитуду резонансных колебаний и, следовательно, мощность излучения звука из волновода.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье описана лабораторная установка для разработки и тестирования структур акустических метаматериалов с повышенными звукопоглощающими свойствами, служащих основой при создании эффективных ЗП-покрытий нового типа для снижения уровней шума, порождаемого источниками в волноводе. Волновод предполагается сравнительно коротким, звук распространяется по нему в виде “скользящих” вдоль стенок волн и излучается в окружающую среду из открытых торцов. В работе изучены особенности формирования акустического поля в волноводе и его излучения в окружающую среду, а также влияние различных параметров установки и источника на излученную мощность. Показано, что основными параметрами установки, влияющими на эффективность ЗП-покрытия, являются частоты и формы собственных колебаний волновода, а также спектр и тип источника. Эффект сильного влияния на эффективность типа источника обна-

ружен впервые и подтвержден экспериментально, ему в статье отведено центральное место: параметру “тип источника” дано строгое определение, установлен его физический смысл, описан физический механизм его влияния на эффективность.

Авторы выражают благодарность сотруднику Института машиноведения В.А. Пантюшину за качественное выполнение механических работ по созданию установки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев Н.Н.* О скольжении звука вдоль поглощающих границ // Известия АН СССР. Серия физическая. 1936. № 5. С. 625–632.
2. *Morse P.M.* The transmission of sound inside pipes // J. Acoust. Soc. Am. 1939. V. 11. № 2. P. 205–210.
3. *Beraneck L.L.* Sound absorption in rectangular ducts // J. Acoust. Soc. Am. 1940. V. 12. № 2. P. 228–231.
4. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука. Гл. редакция физ.-мат. лит., 1973. 496 с.
5. *Morse P.M., Ingard K.U.* Theoretical acoustics. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1986. 928 p.
6. *Munjal M.L.* Acoustics of ducts and mufflers. NY: Wiley, 1977. 430 p.
7. *Cremer L.* Theorie der Luftschall-Dämpfung im Rechteckkanal mit schluckender Wand und das sich dabei ergebende höchste Dämpfungsmass // Akustische Beihefte. 1953. Bd. 3. Heft 2. S. 249–263.
8. *Tester B.G.* The optimization of modal sound attenuation in ducts, in the absence of mean flow // J. Sound Vibr. 1973. V. 27. № 4. P. 477–513; *Tester B.G.* The

- propagation and attenuation of sound in lined ducts containing uniform or "plug" flow // *J. Sound Vibr.* 1973. V. 28. № 2. P. 151–203.
9. *Ланин А.Д.* Звукоизоляция в волноводах (обзор) // *Акуст. журн.* 1975. Т. 21. № 3. С. 337–350.
  10. *Баженов Д.В., Баженова Л.А., Римский-Корсаков А.В.* Эффективность работы реактивных глушителей шума в воздуховодах конечных размеров // *Акуст. журн.* 1995. Т. 41. № 1. С. 22–26.
  11. *Шендеров Е.Л.* О собственных функциях плоского волновода с импедансными стенками // *Акуст. журн.* 1999. Т. 45. № 5. С. 661–669.
  12. *Formulas of acoustics / Ed. by Mechel F.P.* Berlin: Springer-Verlag, 2008. 1275 p.
  13. *ISO 10534-2: Acoustics – Determination of sound absorption coefficient and impedance in impedance tubes*, 1998.
  14. *ISO 354: Acoustics – Measurement of sound absorption in a reverberation room*, 1985.
  15. *Mangiarotty R.A.* Acoustic lining concepts and materials for engine ducts // *J. Acoust. Soc. Am.* 1970. V. 48. № 3 (Part 3). P. 783–794.
  16. *Rademaker E., Idzenga S., Huisman H., Nijboer R., Sarin S.* A new facility for hot stream acoustic liner testing // *Proc. ICSV10*. Stockholm, Sweden, 2003.
  17. *Sugimoto R., Astley R.J., Kempton A.J.* Prediction of multimode propagation and aircraft engine bypass ducts // *Proc. ICSV 11*. St. Petersburg, 2004.
  18. *Khaletskiy Y., Povarkov V., Shipov R., Shul G.* Experimental study of the aircraft engine duct combined liners // *Proc. ICSV 14*. Cairns, Australia, 2007.
  19. *Melling T.H., Doak P.E.* Basic design considerations and theoretical analysis of double-reverberant clamber duct lining test facilities // *J. Sound Vib.* 1971. V. 14. № 1. P. 23–35.
  20. *Антошин А.Н., Захаров А.Г., Городкова Н.А., Чурсин В.А.* Расчетно-экспериментальные исследования резонансных звукопоглощающих конструкций // *Вестник ПНИПУ, Механика*. 2015. №1. С. 5–20.
  21. *Остриков Н.Н.* Актуальные направления исследований в области разработки эффективных ЗПК для перспективных авиадвигателей / *Акустика среды обитания: сборник трудов 3-ей Всероссийской конференции молодых ученых и специалистов (АСО-2018)*. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. 274 с.
  22. *Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М.* Поглощение звука и акустические метаматериалы (обзор) // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 5. С. 517–525.
  23. *Wang X., Mak G.-M.* Wave propagation in a duct with a periodic Helmholtz resonators array // *J. Acoust. Soc. Am.* 2012. V. 131. № 2. P. 1172–1182.
  24. *Auregan Y., Farooqui M., Groby J.-P.* Low frequency sound attenuation in a flow duct using a thin slow sound material // *J. Acoust. Soc. Am.* 2016. V. 139. № 5. P. EL149–EL153.
  25. *Cremer L.* The treatment of fans as black boxes // *J. Sound Vibr.* 1971. V. 16. № 1. P. 1–15.
  26. *Jones A.D.* Modelling the exhaust noise radiated from reciprocating internal combustion engines – a literature review // *Noise control engineering*. 1984. V. 23. P. 12–31.
  27. *Boden H., Abom M.* Modelling of fluid machines as sources of sound in ducts and pipes systems // *Acta Acustica*. 1995. V. 3. P. 549–560.
  28. *Bobrovnikskii Y.I., Pavic G.* Modelling and characterization of airborne noise sources // *J. Sound Vibr.* 2003. V. 261. P. 527–555.
  29. *Ross D.F., Crocker M.J.* Measurement of the acoustic internal source impedance of an internal combustion engine // *J. Acoust. Soc. Am.* 1983. V. 74. № 1. P. 18–27.
  30. *Римский-Корсаков А.В., Баженов Д.В., Баженова Л.А.* Физические основы образования звука в воздуховодных машинах. М.: Наука, 1988. 173 с.
  31. *Халецкий Ю.Д.* Эффективность комбинированных глушителей шума авиационных двигателей // *Акуст. журн.* 2012. Т. 58. № 4. С. 556–562.
  32. *Бобровницкий Ю.И., Морозов К.Д., Томилина Т.М.* Импедансный подход к проектированию эффективных поглотителей колебательной энергии // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 2. С. 137–144.
  33. *Бобровницкий Ю.И., Морозов К.Д., Томилина Т.М.* Оптимальный поглотитель колебательной энергии // *Докл. Акад. наук*. 2018. Т. 479. № 5. С. 509–513.

УДК 001.92;002.6;004.91

## ПРОЦЕСС СТАРЕНИЯ СТАТЕЙ ПО АКУСТИКЕ. ВЗГЛЯД СО СТОРОНЫ “АКУСТИЧЕСКОГО ЖУРНАЛА”

© 2020 г. В. Г. Шамаев<sup>а</sup>, \*, А. Б. Горшков<sup>б</sup>

<sup>а</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет,  
Ленинские горы, Москва, 119992, ГСП-1 Россия

<sup>б</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
Государственный астрономический ин-т им. П.К. Штернберга, Москва, 119992 Россия

\*e-mail: shamaev08@gmail.com

Поступила в редакцию 23.10.2019 г.

После доработки 23.10.2019 г.

Принята к публикации 29.10.2019 г.

Анализируя пристатейные списки литературы, можно получить интересную информацию о том, какие исследования выполняются, какие существуют подходы, сведения об ученых, работающих в интересующей нас области, учреждениях, где выполняются такие исследования, журналах, отражающих данную информацию. Обсуждаются вопросы цитирования в статьях “Акустического журнала”. Анализ пристатейной литературы показал, что с появлением Интернета глубина цитирования возросла, так же как и приведенный полупериод жизни статей. Привлекается внимание к ссылкам на сам “Акустический журнал”. Проводится аналогия с высказыванием академика В.Л. Гинзбурга о том, что наши ученые не получают нобелевские премии “в первую очередь по вине своих коллег – советских физиков”, которые, как выясняется, не очень-то выдвигают своих соотечественников. Это же можно отнести и к неадекватному импакт-фактору “Акустического журнала”, который занижается самими авторами журнала. Обсуждаются вопросы информационного обеспечения в области русскоязычной акустики.

**Ключевые слова:** информационное обеспечение акустики, “Акустический журнал”, пристатейная литература, время жизни статей

**DOI:** 10.31857/S0320791920020082

### ВВЕДЕНИЕ

Каждое добросовестно выполняемое новое исследование начинается с изучения работ предшественников. Эти работы впоследствии входят в список использованной литературы. От того, насколько глубоко мы погружаемся в историю интересующей нас проблемы, от нашей тщательности или, лучше сказать, въедливости, зависит широта и глубина поиска. Ранее такой поиск ограничивался печатными изданиями, хранящимися в научной библиотеке, фондами которой мы пользовались. Теперь же, с появлением Интернета и информационно-поисковых систем, поиск ничем не ограничен и зависит только от нашего желания, научной добросовестности и ответственности. Все это выливается в пристатейные списки литературы. Анализируя эти списки, можно получить интересную информацию об ученых, работающих в данной области, учреждениях, где выполняются такие исследования, журналах, отражающих нужную информацию. Можно получить и такую специфическую, но важную информацию, как время жизни статей. Процесс старения статей, с одной

стороны, можно рассматривать и как утрату их информационной полезности для потребителя, а с другой стороны, и как отсутствие интереса к серьезному поиску, т.е. научной добросовестности. Есть еще и другие причины – как, например, борьба научных школ (одна школа “замалчивает” работы другой) или вкусовые предпочтения автора статьи.

### ДИНАМИКА ЦИТИРОВАНИЯ – ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Определение темпов старения цитированной литературы – процесс неоднозначный. Можно вычислить, например, так называемый “полупериод жизни публикаций”. Если определить возраст цитируемой статьи как разницу между годом ссылки на нее и годом ее выхода, ранжировать цитируемые работы по возрасту и отобрать ровно половину самых “молодых” из них, то максимальный возраст работ из этой выборки и определит “полупериод жизни публикаций”. Но практическая значимость изучения пристатейных

списков литературы не ограничивается только выявлением процесса старения. Она может отражать: связи одной тематической области с другими; популярность изданий, а значит, и опубликованных в них статей; анализ временных и этапных периодов развития научных направлений, а желательны и прогнозирование их развития. Прогноз очень важен, но методика его получения пока находится на зачаточном уровне. Квазинаучное прогнозирование активно используют в своих целях только научные работники, пишущие об инновациях, государственных приоритетах, в том числе и в сфере науки, системе индикаторов развития науки (см., например, [1–4]).

Второй путь вычисления темпов старения заключается в определении так называемого “периода полураспада”, пришедшего к нам из атомной физики. Сформулируем это так: будем рассматривать все цитированные публикации как ансамбль независимых частиц. В течение одного периода полураспада количество используемых публикаций–“ровесников” уменьшается примерно в 2 раза. Это применимо в случае экспоненциального уменьшения количества цитируемых публикаций с их возрастом. Мы далее убедимся, что это так и есть. В общем виде доля цитируемых публикаций зависит от возраста следующим образом:

$$N(t)/N_0 \approx p(t) = 2^{-t/T_{1/2}},$$

где  $N_0$  – количество ссылок на публикации “нулевого” возраста,  $T_{1/2}$  – период полураспада, т.е. возраст статей, при котором количество ссылок на них составляет  $N_0/2$ ,  $t$  – время,  $p$  – вероятность выживания для цитированной статьи.

При этом надо отметить, что рост или уменьшение количества цитированной литературы, а также темпы ее старения не следует приравнивать к росту или падению новых научных идей. Количество цитирований зависит от многих факторов. К числу их можно отнести бурный рост числа новых журналов, возникших как грибы после дождя с появлением технологических новаций в подготовке как печатной, так и электронной научной продукции, а также в связи с запросами по далекому от науки поведению. Не в последнюю очередь повышение количества цитирований стимулируется принятой оценкой качества работы научных сотрудников – по их индексу цитирования и индексу Хирша.

Интересно, но, пожалуй, закономерно, что за экспоненциальным повышением количества научной продукции следует лишь линейный рост ее научной ценности. Это следует из интересного исследования группы авторов [5]. Они провели сравнение в период 1900–2017 гг. ежегодного выпуска научных статей, проиндексированных в базе данных Web of Sciences (WoS) и роста идей, охватываемых этими статьями. Была отмечена извест-

ная тенденция об экспоненциальном росте количества научных статей со средним периодом удвоения количества научных статей 15 лет. В то же время, масштабный анализ текста с использованием фраз, извлеченных из названий и рефератов для измерения познавательной ценности научной литературы, показал, что концептуальное поле науки расширяется со временем линейно. Таким образом, среднее количество публикаций, приходящихся на одну научную идею, постоянно растет.

Значение цитирования трудно переоценить. Так, по хорошо составленным ссылкам можно проследить историю рассматриваемых в публикации вопросов. Благодаря тем же ссылкам на статью можно увидеть, какое развитие эти вопросы получили в дальнейшем. Получается целая цепочка: рассматриваемая статья, ее список цитированной литературы, список цитирования в цитируемой литературе и т.д.

Другое дело, что поиск статей, которые следует внести в список цитированной литературы, может быть неполным из-за небрежного подхода к этому процессу или отсутствия таких статей в информационно-поисковой системе, которой пользовался автор. Каковы же другие причины, по которым необходимо вести работу по составлению списка цитированных и цитирующих публикаций? Их несколько. Во-первых, понять, за счет каких статей (как цитирующих, так и цитируемых) формируются импакт-факторы журналов. Например, считается, что обзорные публикации имеют высокий рейтинг цитирования. Так ли это? Какие еще публикации хорошо цитируются? Как сообщается в [6], Information Science Institute (ISI), на данные которого ориентируется наше руководство, не раскрывает эти данные. Во-вторых, для российских журналов вычисляется классический импакт-фактор только по данным Научной электронной библиотеки (РИНЦ), что, по нашему мнению, не вполне объективно, и требуется создание государственной наукометрической системы для объективной оценки научной работы как учреждений, так и отдельных научных коллективов и их сотрудников [7, 8]. И, в-третьих, далеко не все ссылки из вполне достойных журналов попадают в рассмотрение. Тут есть и вина самих авторов, небрежно относящихся к выверке цитируемых ими публикаций, но есть и ошибки вносящих информацию в информационные базы данных.

Причины последнего могут быть в следующем.

1. Почти все известные российские физические журналы переводятся на английский язык и, следовательно, имеют две библиографии. Все ли они учитываются, например, WoS или РИНЦ при определении индекса цитирования статьи?

**Таблица 1.** Полупериод жизни и время полураспада публикаций по десятилетним интервалам (по ссылкам на любые источники)

“Акустический журнал” – год анализа	Полупериод жизни публикаций (гг.)	Время “полураспада публикаций” (гг.)
2018	13	12.6
2008	15	14.9
1998	10	10.0
1988	7	7.4
1978	6	6.5
1968	6	6.6

2. Нередко авторы статей допускают ошибки при подготовке списков цитируемой литературы, а редакторы не всегда их обнаруживают. См., например, выпуск № 6 АкЖ за 2016 год. Почти в каждой статье есть ошибки в библиографии. В данном случае связано это с тем, что произошла смена научного редактора и в возникшей ситуации не добрались до тщательной проверки списка пристатейной литературы. В дальнейшем положение нормализовалось.

3. Еще проблема в том, что оформляются ссылки в различных источниках совершенно по-разному. Необходимо создать единую базу данных всех ссылок. Итогом создания такой базы данных цитируемой и цитирующей литературы станет их выверка и создание системы поиска публикаций по различным параметрам. Результатом поиска будет не только искомая публикация, но и список цитируемых и цитирующих ее работ. Это еще один аспект развития информационно-поисковых систем.

4. Значение имеет доступность журналов, и здесь мы, в который раз, отмечаем необходимость полноценного присутствия журналов в Интернете. В связи с этим мы призываем открыть доступ ко всем российским журналам. Кстати, многие из ведомственных журналов, а также журналы вузов в Интернете присутствуют. Есть среди них и высокорейтинговые журналы: УФН, “Акустический журнал”, журналы издательства Сибирского отделения РАН, ЖЭТФ, и некоторые другие.

#### ДИНАМИКА ЦИТИРОВАНИЯ ПО “АКУСТИЧЕСКОМУ ЖУРНАЛУ” (ССЫЛКИ НА ВСЕ ИСТОЧНИКИ)

Для изучения процесса цитирования в “Акустическом журнале” мы взяли в качестве репрезентативных несколько годовых выпусков с 10-летним промежутком между ними: 1968, 1978, 1988, 1998, 2008 и 2018 гг. По всем этим годам ссылки были нанесены на шкалу возрастов и затем проанализированы. Результаты, полученные по ссылкам на любые источники, приведены в табл. 1 и на

рис. 1. Мы видим, что имеется явно выраженный результат повышения глубины цитирования с появлением Интернета (в широком доступе). Цифры для полупериода жизни и полураспада публикаций совпадают.

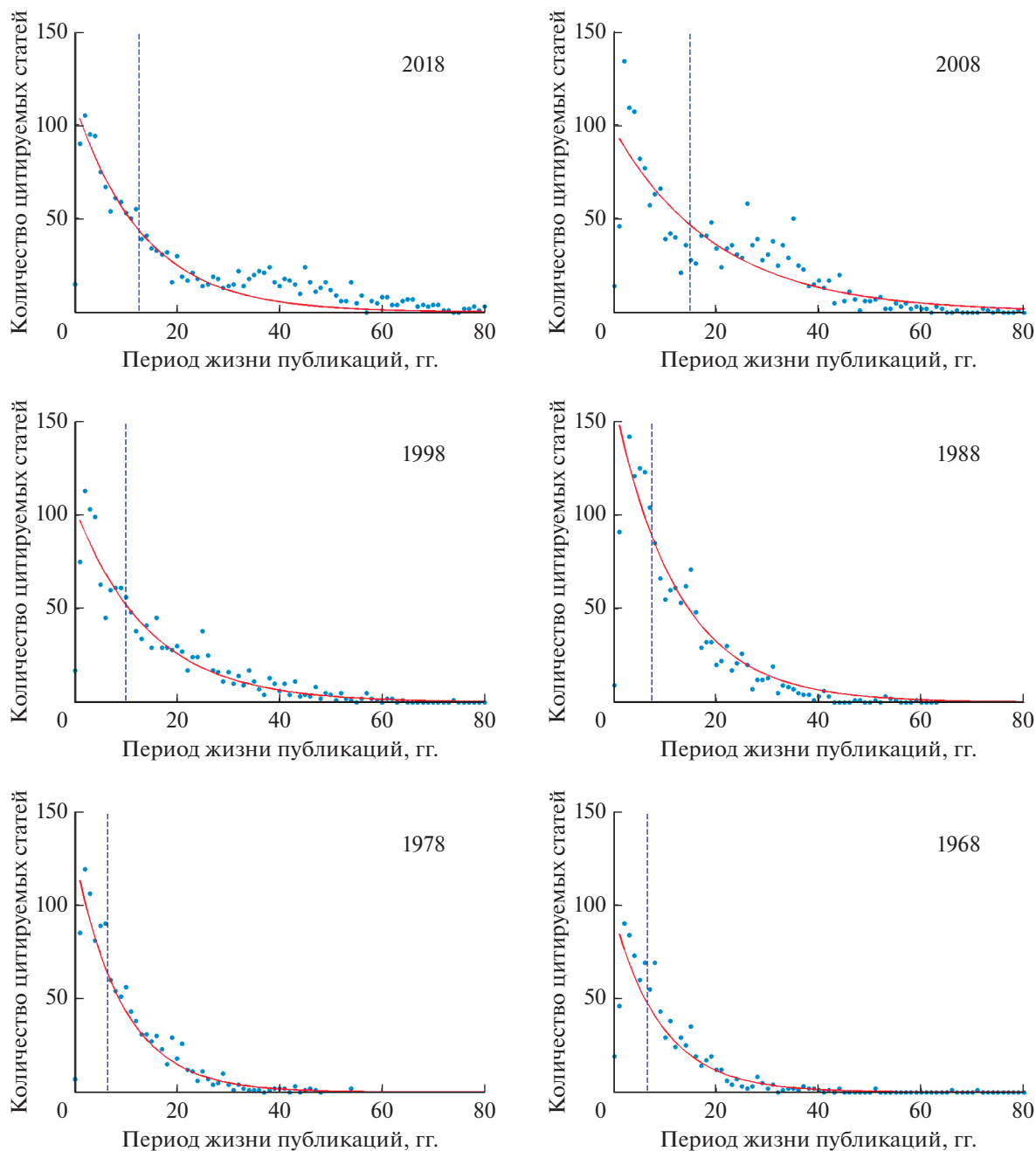
#### ДИНАМИКА ЦИТИРОВАНИЯ ПО “АКУСТИЧЕСКОМУ ЖУРНАЛУ” (ССЫЛКИ ТОЛЬКО НА “АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ”)

Результаты по полупериоду жизни и полураспаду публикаций по ссылкам в “Акустическом журнале” на статьи из него же приведены в табл. 2 и на рис. 2.

Мы видим, что в самом “Акустическом журнале” ссылок на сам журнал не так уж много. Более того, подавляющее количество ссылок дается на The Journal of the Acoustical Society of America. Если кому-нибудь предложить угадать на основании списка литературы, в каком журнале опубликована данная статья из АкЖ, то, скорее всего, будет назван именно этот американский журнал. Приведем примеры: статья [9] (АкЖ, 2018, № 3), из 18 ссылок 12 даются на J. Acoust. Soc. Am. В этом же номере в статье [10] из 39 ссылок 16 – на этот же американский журнал и т.д.

Это нехорошо для “Акустического журнала”, не соответствует его уровню и, на наш взгляд, говорит лишь о том, что его авторы не заботятся о репутации журнала. По АкЖ 2019 года мы насчитали не так уж много ссылок на последние два года, которые и важны для подсчета импакт-фактора журнала (IF). Редколлегия тоже проявляет терпимость и не принимает достаточных мер к исправлению ситуации. Только в последние пару месяцев, как нам кажется, что-то, возможно, меняется, но пока на уровне деклараций. В то же время информационная активность в обеспечении научных работников в области акустики за последние годы растет: появился в Интернете полный архив “Акустического журнала”, начала выходить “Сигнальная информация по акустике”. Это должно отразиться на повышении IF журнала, т.к. именно





**Рис. 1.** Графики “полураспада публикаций” по “Акустическому журналу” (по ссылкам на любые источники). Точки показывают количество цитируемых статей с годичным интервалом от года публикации цитирующей статьи, кривая показывает экспоненциальное убывание цитируемых публикаций, штриховая линия пересекает временную шкалу в точке, характеризующей период полураспада.

существование журнала послужило отправной точкой для создания других информационных продуктов, связанных с ним [11]. Новые продукты не только раздвигают информационные свойства журнала, но и служат лучшему информационному обеспечению всех работающих в области акустики. Эти интернет-продукты дают новые возможности другим акустическим изданиям и не только для ссылки на АкЖ, а служат, как мы

надеемся, пониманию авторами своего места в русскоязычном информационном поле акустики. Авторы получают возможность для более широкого охвата работ, ведущихся в их области, которые следует изучать и на которые следует ссылаться, если ты добросовестный исследователь.

Пассивность в ссылках авторов, видимо, обусловлена не только плохим знакомством с работами предшественников, но и, видимо, нежела-

**Таблица 2.** Полупериод жизни и время полураспада публикаций по десятилетним интервалам (по ссылкам на АкЖ).

“Акустический журнал” – год анализа	Полупериод жизни публикаций (гг.)	Время “полураспада публикаций” по ссылкам на АкЖ (гг.)
2018	6.5	5.6
2008	6.0	5.6
1998	4.7	4.5
1988	3.6	3.6
1978	4.4	3.8
1968	3.6	5.6

нием ссылаться на работы коллег, повышать им рейтинг и конкурентоспособность. Желательно, чтобы в целях повышения импакт-фактора журнала и приближения его к адекватному уровню, авторы ссылались хотя бы на себя. Правда, ссылки на себя не всегда достаточно продуктивны и, в особо “бойких” случаях, выявляются на уровне определения публикационной активности автора.

С другой стороны, качество “Акустического журнала” не вызывает сомнения в научных кругах, печататься в нем престижно, что видно хотя бы по письмам авторов, обиженных отклонением их статей.

В связи с этим вот такое предложение для Редколлегии. В журнале есть статьи, в том числе и в последние годы, посвященные общеакустическим вопросам. Это и печатавшаяся ранее информация по новым книгам, которая только недавно была возрождена, и статьи по информационным интернет-продуктам, на которые могли бы ссылаться все авторы независимо от тематики и своего отношения к коллегам. Так, например, каждый, кто воспользовался интернет-архивом, мог бы давать ссылку на статью в журнале, описывающую этот проект, именно на статью в журнале, а не на сайт! Это относится также и к статье о Сигнальной информации. Мы же видим по статистике посещений страниц этих сайтов, что продуктами активно пользуются акустики, но считают, что это свалилось с неба, как манна небесная, а не продукт целенаправленной работы. Вроде как “наука второго сорта” или вообще не наука. Такого информационного обеспечения нет в других областях физики, а по Козьме Пруткову – “Поощрение столь же необходимо гениальному писателю, сколь необходима канифоль смычку виртуоза”.

Кстати, заметим, что по опыту нескольких наших авторов, регулярно публикующихся в высокорейтинговых западных журналах, при отсутствии или малом числе ссылок на эти журналы поступившая статья отклоняется без рассмотрения по существу.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате анализа пристатейных списков литературы нами выявлено значительное количество ошибок, опечаток, неполнота в приводимой библиографической информации, неправомерное редактирование оригинальных названий статей, нарушения унификации в названиях журналов. Это в первую очередь сказывается на репутации нашего журнала как строгого научного издания, во-вторых, из-за потери информации приводит к уменьшению индексов цитирования конкретных авторов, в-третьих, снижает импакт-факторы журналов из-за неправильных ссылок (как на сам “Акустический журнал”, так и на другие цитированные издания). В конце концов, этим мы сильно затрудняем поиск цитированных статей для наших читателей, в том числе и при попытке использовать поиск в информационно-поисковых системах. Почему эти недостатки не замечены авторами, а также редакторами – видимо, из-за пренебрежения этой “несущественной” частью статьи. При помещении в список литературы статьи из “Акустического журнала” рекомендуем проводить проверку по сайту журнала (<http://www.akzh.ru/>) [12], а другие русскоязычные источники неплохо бы проверять на сайте информационной системы “Акустика” (<http://akdata.ru/>) [13]. В работе [8] сообщается, что “мы приводим скан страницы компании Clarivate Analytics по “Акустическому журналу” (Acoustical Physics) с информацией по импакт-фактору журнала на 2018 год. Сделаем мы с вами на 25 ссылок больше, и импакт-фактор стал бы более единицы”. “Акустический журнал” давно перерос фиксируемый на сегодня его индекс цитирования (0.880). Даже по РИНЦ на 2017 г. он равен 1.588. Мы призываем авторов и редакторов АкЖ тщательнее относиться к работам, помещаемым в список литературы.

Что касается малого числа ссылок авторами АкЖ на сам журнал, что мы продемонстрировали в статье, то приведем дополнительно рассуждения Нобелевского лауреата академика В.Л. Гинзбурга [14]. В своем комментарии к статье Соловьева Ю.И. [15], в которой автор объявляет, что

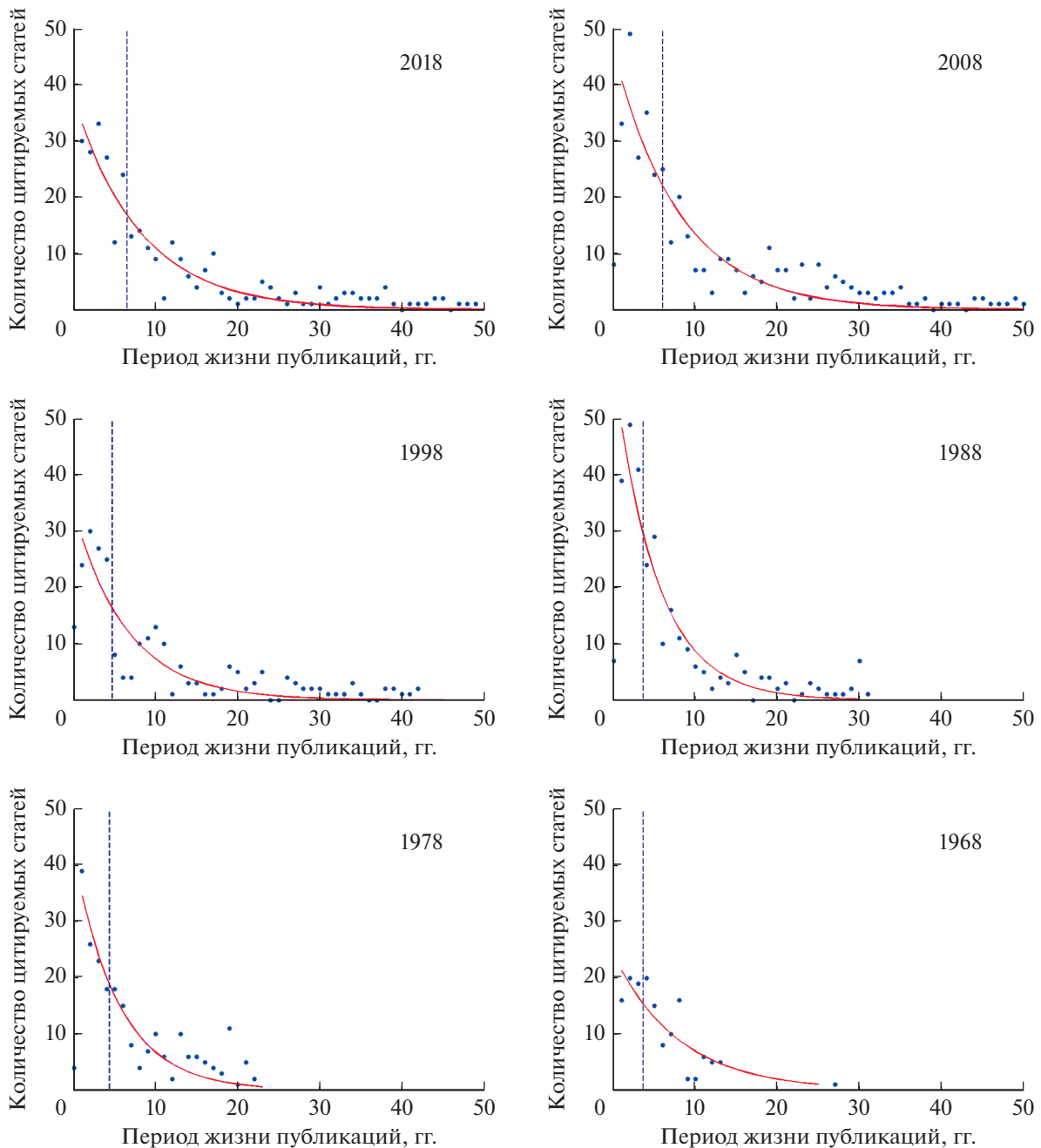


Рис. 2. График “полураспада публикаций” по “Акустическому журналу”. Обозначения те же, что и на рис. 1.

при выборе лауреатов премии “все решили политические пристрастия”, Виталий Лазаревич пишет, что справедливее искать причину в себе: “Ландсберг и Мандельштам не разделили премию с Раманом в первую очередь по вине своих коллег – советских физиков”, которые, как выясняется, не очень-то выдвигают своих же соотечественников. Вышесказанное можно, как нам кажется, применить и к некоторым авторам АкЖ, которые не очень-то цитируют публикующий их

журнал. Кстати, отметим, что В.Л. Гинзбург опубликовал свою работу в первом номере только начавшего выходить “Акустического журнала” [16], а последняя его публикация вышла в нашем журнале в 2005 году [17], незадолго до смерти.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куракова Н.Г., Зинов В.Г., Цветкова Л.А. Выбор научно-технологических приоритетов с потенциалом создания новых индустрий: Система измерения

- емых индикаторов // Приоритеты научно-технологического развития. 2017. Т. 3. № 3. С. 154–169.
2. *Жилякова Е.В., Ларин С.Н.* Инструментарий обоснования приоритетных направлений научных исследований // Вестник Чувашского университета. 2010. № 2. С. 340–344.
  3. Выявление приоритетных научных направлений: междисциплинарный подход / Отв. ред.: Кобринская И.Я., Тищенко В.И. М.: ИМЭМО РАН, 2016. 181 с.
  4. *Киселев В.Н., Нечаева Е.К.* Инновационные цели современных государственных приоритетов в сфере науки: краткий обзор зарубежного опыта // Инновации. 2015. № 7. С. 45–53.
  5. *Fortunato S., Bergstrom C.T., Börner K., Evans J.A., Helbing D., Milojević S., Petersen A.M., Radicchi F., Sinatra R., Uzzi B., Vespignani A., Waltman L., Wang D., Barabási A-L.* Science of science // Science. 2018. V. 359. № 6379. <https://doi.org/10.1126/science.aao0185>
  6. *Жижченко А.Б., Изаак А.Д.* Информационная система Math-Net.Ru. Современное состояние и перспективы развития. Импакт-факторы российских математических журналов // Успехи мат. наук. 2009. Т. 64. № 4. С. 195–204.
  7. *Гиляревский Р.С., Мельникова Е.В.* О разработке концепции государственной наукометрической системы и методики ее функционирования // НТИ. Сер. 1. Организация и методика информ. работы. 2018. № 9. С. 7–12.
  8. *Шамаев В.Г., Горшков А.Б.* Русскоязычное направление работы российских информационных служб // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 1. С. 132–144.
  9. *Комкин А.И., Быков А.И., Миронов М.А.* Инерционная присоединенная длина отверстия при высоких уровнях звукового давления // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 3. С. 296–301.
  10. *Луньков А.А.* Реверберация широкополосных сигналов в мелком море при использовании фокусировки звука // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 3. С. 359–368.
  11. *Шамаев В.Г.* Концепция и реализация интегральной информационной системы по русскоязычной акустике // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 6. С. 783–788.
  12. *Шамаев В.Г., Горшков А.Б., Якименко В.И.* Полнотекстовый архив “Акустического журнала” в Интернете (<http://www.akzh.ru>). Опыт первых пяти лет // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 5. С. 573–580.
  13. *Шамаев В.Г., Горшков А.Б.* Открытая система информационного обеспечения акустики // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 4. С. 449–458.
  14. *Гинзбург В.Л.* Почему советские ученые не всегда получали заслуженные ими нобелевские премии? // Вестник РАН. 1998. Т. 68. № 1. С. 51–54.
  15. *Соловьев Ю.И.* Почему академик В.Н. Ипатьев не стал Нобелевским лауреатом? // Вестник РАН. 1997. Т. 67. № 7. С. 627.
  16. *Гинзбург В.Л.* Об общей связи между поглощением и дисперсией звуковых волн // Акуст. журн. 1955. Т. 1. № 1. С. 31–39.
  17. *Гинзбург В.Л.* Излучение равномерно движущихся источников (эффект Вавилова–Черенкова, переходное излучение и некоторые другие явления) // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 1. С. 24–36.