

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 67, номер 4, 2021

---

---

## Классические проблемы линейной акустики и теории волн

Дифракция плоской волны на сильно вытянутом трехосном эллипсоиде

*И. В. Андронов, Н. И. Андронов* 351

Изгибные кромочные волны Коненкова в слоисто-изотропных и функционально-градиентных пластинах

*Д. Д. Захаров* 361

Определение упругих свойств твердотельного шара по результатам рассеяния на нем акустического пучка

*Л. М. Котельникова, Д. А. Николаев, С. А. Цысарь, О. А. Сапожников* 371

---

## Нелинейная акустика

Исследования упругих свойств полимера PLA статическими и ультразвуковыми методами

*А. И. Коробов, А. И. Кокшайский, Е. С. Михалев, Н. И. Одина, Н. В. Ширгина* 387

---

## Акустика океана. Гидроакустика

Сравнительный анализ помехоустойчивости алгоритмов реконструкции геоакустических параметров морского дна методом когерентного зондирования

*В. И. Калинина, И. П. Смирнов, А. И. Хилько, А. И. Малеханов* 395

Применение метода дискретного представления переменных для формирования амплитудно-фазовых распределений поля на вертикальной антенной решетке в волноводе

*Д. В. Макаров* 413

---

## Атмосферная и аэроакустика

Управление волнами неустойчивости в невозбужденной турбулентной струе с помощью плазменных актуаторов в узкой полосе частот

*В. Ф. Копьев, О. П. Бычков, В. А. Копьев, Г. А. Фараносов, И. А. Моралев, П. Н. Казанский* 431

---

## Физические основы технической акустики

Уравнения для расчета амплитудно- и фазочастотных характеристик векторно-скалярного приемника типа "триполь" с временной задержкой сигнала монополя

*Г. Н. Кузнецов, А. А. Пудовкин, А. О. Субботкин* 440

---

**Акустика живых систем.  
Биомедицинская акустика**

Регистрация сигналов дыхания человека с височных областей головы

*В. И. Миргородский, В. В. Герасимов, А. В. Герус, С. В. Пешин, С. М. Жучкова* 450

Анализ гармоник свистящих звуков в шумах форсированного выдоха человека

*М. А. Сафронова, А. Д. Ширяев, В. И. Коренбаум* 454

---

---

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ  
И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА СИЛЬНО ВЫТЯНУТОМ  
ТРЕХОСНОМ ЭЛЛИПСОИДЕ

© 2021 г. И. В. Андронов<sup>а, \*</sup>, Н. И. Андронов<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, НИИФ,  
Ульяновская 1/1, Петродворец, 198504 Россия

\*e-mail: iva—@list.ru

Поступила в редакцию 12.03.2021 г.

После доработки 14.04.2021 г.

Принята к публикации 20.04.2021 г.

Рассмотрена задача высокочастотной дифракции плоской волны на трехосном сильно вытянутом эллипсоиде. Методом параболического уравнения в эллипсоидальных координатах построен старший член асимптотики поля в пограничном слое у поверхности. Поле выражается в квадратурах через решения конфлюэнтного уравнения Гойна. Рассчитаны значения поля на поверхности идеально жесткого эллипсоида и скорости на поверхности идеально мягкого. Обсуждаются эффекты высокочастотной дифракции.

*Ключевые слова:* дифракция, сильно вытянутый эллипсоид, высокочастотная асимптотика, метод параболического уравнения, функции Гойна

DOI: 10.31857/S032079192104002X

ВВЕДЕНИЕ

В задаче дифракции на гладком выпуклом теле В.А. Фоком [1] были получены асимптотические разложения для поля в полутени. В этих разложениях зависимость от поперечной координаты представлена лишь через зависимость от нее радиуса кривизны поверхности. При дифракции на цилиндрической поверхности формулы Фока дают весьма точное описание волнового поля уже при  $kr \approx 3$ , где  $k$  – волновое число,  $r$  – радиус цилиндра. Однако, при дифракции на сфере, где также отсутствует зависимость радиуса кривизны от поперечной координаты, асимптотическое приближение начинает работать лишь при  $kr \approx 15$ , а для дифракции на вытянутом сфероиде нижняя граница допустимых частот еще больше увеличивается [2]. Идея учета поправочных членов, вновь использованная в [3] при рассмотрении задачи дифракции на умеренно вытянутом теле вращения, не приводит к улучшению ситуации. Построению более пригодных асимптотических и численных представлений для поля в задачах дифракции на вытянутых телах в последнее время уделяется большое внимание. Перечислим лишь некоторые работы [4–8]. Однако, во всех этих статьях зависимость параметров поверхности от поперечной координаты отсутствует. Здесь мы обобщаем процедуру построения высокочастотной асимптотики в задаче дифракции на сильно вытянутом теле [6] на поверхность, свой-

ства которой зависят от поперечной координаты. Мы рассматриваем задачу дифракции на трехосном сильно вытянутом эллипсоиде.

Как известно, уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных в общих эллипсоидальных координатах [9]. Такое решение было построено в [10] в терминах волновых функций Ламэ, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению с 5 особыми точками, точнее его конфлюэнтному случаю, когда две особые точки слились и образовали иррегулярную особую точку. Уравнение записывается в виде:

$$\left[ \sqrt{f(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} \sqrt{f(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} + \frac{h - l\zeta + k^2\zeta^2}{4} \right] w = 0,$$

где  $f(\zeta) = (\zeta - a_1)(\zeta - a_2)(\zeta - a_3)$ , величины  $a_1, a_2, a_3$  задают эллипсоид, а  $h$  и  $l$  – параметры разделения переменных. Переход к используемому в работе методу параболического уравнения сводит задачу к решаемой в терминах конфлюэнтных функций Гойна. Другими словами, подобно тому как при рассмотрении задач дифракции на сфероиде осуществлялся переход от сфероидальных функций (функций класса Гойна), в которых задача решается точно, к вырожденным гипергеометрическим функциям Уиттекера, здесь мы имеем переход от конфлюэнтного варианта уравнения с пятью особыми точками к конфлюэнтно-

му уравнению класса Гойна (т.е. класса уравнений с четырьмя особыми точками).

Полученные асимптотические представления позволяют провести верификацию численных программ расчета волновых полей подобно тому, как это было сделано в [11] для случая дифракции на сфероиде.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы рассматриваем задачу высокочастотной дифракции на сильно вытянутом трехосном эллипсоиде. Зададим эллипсоид стандартным уравнением

$$\left(\frac{x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_z}\right)^2 = 1. \quad (1)$$

Здесь  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$  – полуоси эллипсоида. Без ограничения общности будем считать, что  $a_x < a_y$ . Акустическое поле во внешности эллипсоида удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0. \quad (2)$$

Здесь  $k = \omega/c$  – волновое число, зависимость от частоты  $\omega$  принята в виде  $e^{-i\omega t}$ ,  $c$  – скорость распространения волн, которую мы считаем постоянной.

Пусть поле возбуждается плоской волной, падающей на эллипсоид вдоль оси  $Oz$

$$u_{inc} = \exp(ikz). \quad (3)$$

Будем одновременно рассматривать две задачи: в случае идеально мягкой поверхности зададим условия Дирихле, а в случае идеально жесткой – условия Неймана. На бесконечности для рассеянного поля  $u_{sc} = u - u_{inc}$  ставятся условия излучения.

Частоту считаем высокой, так что волновые размеры сфероида велики, т.е.  $ka_x \gg 1$ ,  $ka_y \gg 1$  и  $ka_z \gg 1$ . Кроме того, эллипсоид будем считать сильно вытянутым [17], что записывается в виде соотношений

$$\sqrt{ka_z} \frac{a_x}{a_z} = O(1), \quad \sqrt{ka_z} \frac{a_y}{a_z} = O(1). \quad (4)$$

С учетом симметрии задачи, рассмотрения можно проводить лишь в четверти пространства  $x > 0$ ,  $y > 0$ . Это позволяет ввести эллипсоидальные координаты  $(\eta, \nu, \mu)$  при помощи формул [12]

$$\begin{aligned} x &= p \sqrt{\frac{(\mu - a)(\nu - a)(\eta^2 - a)}{a(a - 1)}}, \\ y &= p \sqrt{\frac{(\mu - 1)(\nu - 1)(\eta^2 - 1)}{1 - a}}, \quad z = p \sqrt{\frac{\mu\nu}{a}} \eta. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $0 < \eta < 1 < \nu < a < \mu < \infty$ , параметр  $p$  имеет смысл половины фокусного расстояния, параметр  $a = (a_z^2 - a_x^2)/p^2$  характеризует степень вытянутости по отношению к меньшей из полуосей. Поверхность эллипсоида в этой системе координат является координатной. Пусть она задается уравнением

$$\mu = \mu_0.$$

Полуоси такого эллипсоида вычисляются по формулам

$$a_x = p\sqrt{\mu_0 - a}, \quad a_y = p\sqrt{\mu_0 - 1}, \quad a_z = p\sqrt{\mu_0}, \quad (6)$$

откуда с учетом (4) следует, что  $\mu_0$ , а значит и параметр  $a$  должны быть близки к единице. Тогда близка к единице и координата  $\nu$ . Введем вместо  $\mu$  и  $\nu$  растянутые координаты  $(t, s)$  по формулам

$$a = 1 + \frac{\chi}{kp}, \quad \mu = 1 + \frac{\chi}{kp} t, \quad \nu = 1 + \frac{\chi}{kp} s. \quad (7)$$

Координата  $s$  меняется в пределах  $0 < s < 1$ , а координата  $t > 1$ . Пусть

$$\mu_0 = 1 + \frac{\chi}{kp} t_0.$$

Параметры  $t_0$  и  $\chi$  определяются через полуоси эллипсоида. В старшем по  $kp$  порядке имеем

$$\chi = \frac{k(a_y^2 - a_x^2)}{a_z}, \quad t_0 = \frac{a_y^2}{a_y^2 - a_x^2}. \quad (8)$$

### ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Как известно [9], уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных в эллипсоидальных координатах, а решение выражается через волновые функции Ламэ. Однако, в случае высоких частот такое решение, как и многие другие точные решения задач дифракции, оказывается непригодным. Поэтому будем строить асимптотическое решение, считая  $kp \gg 1$ . Используя метод параболического уравнения, представим решение в виде

$$u = e^{ikp\eta} \sum_{j=0}^{\infty} U_j(s, t, \eta)(kp)^{-j}. \quad (9)$$

Функции  $U_j$ , входящие в асимптотический ряд, будем предполагать независимыми от  $kp$ . Подставляя представление (9) в уравнение Гельмгольца (2), которое следует переписать в координатах  $(\eta, s, t)$ , и приравнявая члены при  $(kp)^1$  (члены при

$(kp)^2$  сокращаются), получим параболическое уравнение

$$4s(1-s)U_{ss} + (2-4s)U_s + 4t(t-1)U_{tt} + (4t-2)U_t + 2i\chi(t-s)(1-\eta^2)U_\eta + \chi(t-s)(\chi(s+t-1)-2i\eta)U = 0. \quad (10)$$

Здесь мы опустили индекс 0 у функции  $U_0$ , а нижними индексами  $s$ ,  $t$  и  $\eta$  обозначили производные по соответствующим переменным. Уравнение (10) допускает разделение переменных в виде

$$U(s, t, \eta) = S(s)T(t)R(\eta).$$

Для функции  $R(\eta)$  получается дифференциальное уравнение первого порядка

$$R'(\eta) = \frac{\eta - 2i\lambda}{1 - \eta^2} R(\eta),$$

которое решается в элементарных функциях

$$R = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \left( \frac{1-\eta}{1+\eta} \right)^{i\lambda}. \quad (11)$$

Для функций  $S$  и  $T$  получаются обыкновенные дифференциальные уравнения

$$LS(\zeta) = 0, \quad LT(\zeta) = 0 \quad (12)$$

с одним и тем же оператором

$$L = \zeta(1-\zeta) \frac{d^2}{d\zeta^2} + \left( \frac{1}{2} - \zeta \right) \frac{d}{d\zeta} + \left( \frac{\chi^2}{4} \zeta(1-\zeta) + \chi\lambda \left( \frac{1}{2} - \zeta \right) + \alpha \right). \quad (13)$$

Первое уравнение в (12) будем называть угловым, а второе – радиальным. Параметры  $\lambda$  и  $\alpha$  в (11) и (12) являются параметрами разделения переменных.

Решение (11) является ядром интегрального преобразования [13]

$$\hat{F}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1-\eta}{1+\eta} \right)^{i\lambda} F(\lambda) d\lambda, \quad (14)$$

$$F(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left( \frac{1+\eta}{1-\eta} \right)^{i\lambda} \hat{F}(\eta) \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}.$$

Поэтому общее решение параболического уравнения (10) будем искать в виде интеграла по  $\lambda$  по вещественной оси.

Дифференциальные уравнения (12) должны быть дополнены краевыми условиями. По переменной  $s$  рассматривается конечный интервал  $[0, 1]$ , однако концы этого интервала являются особыми точками дифференциального оператора. Согласно аналитической теории линейных дифференциальных уравнений [14] уравнение (12) имеет регулярные особые точки  $\zeta = 0$  и  $\zeta = 1$  и ир-

регулярную особую точку на бесконечности. Это уравнение сводится к вырожденному (конфлюэнтному) уравнению Гойна [15]. В окрестности особой точки  $\zeta = 0$  решение уравнения (12) имеет вид

$$S(\zeta) = S_{00}(\zeta) + \sqrt{\zeta} S_{01}(\zeta), \quad (15)$$

где  $S_{00}$  и  $S_{01}$  – голоморфные в окрестности  $\zeta = 0$  функции. Аналогично, в окрестности точки  $\zeta = 1$  имеют место представления

$$S(\zeta) = S_{10}(1-\zeta) + \sqrt{1-\zeta} S_{11}(1-\zeta). \quad (16)$$

Из (5) и (7) следует, что при фиксированных значениях  $\eta$  и  $t$  координата  $s$  пропорциональна  $y^2$  при малых  $y$ , а  $1-s$  пропорциональна  $x^2$  при малых  $x$ . Поэтому решение  $S_{00}$  соответствует четному продолжению поля  $u$  на отрицательные значения координаты  $y$ , а решение  $\sqrt{\zeta} S_{01}(\zeta)$  – нечетному. Аналогично, решение  $S_{10}$  соответствует четному продолжению поля на отрицательные значения координаты  $x$ , а решение  $\sqrt{1-\zeta} S_{11}(\zeta)$  – нечетному. Поскольку падающее поле является четным по  $x$  и  $y$ , эта четность переносится и на полное поле. Таким образом, нас интересуют такие решения углового уравнения (12), которые одновременно голоморфны и в окрестности  $\zeta = 0$ , и в окрестности  $\zeta = 1$ . Такая сингулярная задача Штурма–Лиувилля может рассматриваться как возмущение задачи, получающейся при  $\chi = 0$ , и имеющей полиномиальные решения

$$S_n^\circ(\zeta) = T_n(2\zeta - 1), \quad \alpha_n^\circ = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

выражающиеся через полиномы Чебышева первого рода  $T_n$ . С точки зрения рассматриваемой задачи дифракции переход к  $\chi = 0$  соответствует стремлению  $a_x \rightarrow a_y$ , то есть к задачам, когда эллипсоид является почти телом вращения.

Известно [15], что сингулярная задача Штурма–Лиувилля для углового уравнения (12) имеет простой, дискретный, ограниченный снизу спектр. Пусть  $\alpha_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  – собственные числа. Естественно, они зависят от параметров  $\chi$  и  $\lambda$  (при необходимости подчеркнуть эту зависимость будем писать  $\alpha_n(\chi, \lambda)$ ), причем

$$\alpha_n(\chi, \lambda) = \alpha_n(\chi, -\lambda) \quad \text{и} \quad \alpha_n(0, \lambda) = n^2.$$

Ниже зависимость от параметра  $\chi$ , который является фиксированным, для краткости указывать не будем. Пусть  $F_n(\zeta) = F_n(\lambda, \zeta)$  – собственные функции, отвечающие собственным числам  $\alpha_n$ . Поскольку оператор в уравнении (12) является симметричным в  $L_2$  с весом  $\rho = 1/\sqrt{\zeta(1-\zeta)}$ , функции

$F_n$  образуют полную ортогональную систему. Нормируем их таким образом, что

$$\int_0^1 \frac{F_n(\zeta)F_m(\zeta)}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} d\zeta = \delta_n^m, \tag{18}$$

где  $\delta_n^m$  – символ Кронекера.

Обратимся теперь к решениям радиального уравнения (12) относительно  $T(\zeta)$ . Кроме решения  $F_n(\zeta)$ , являющегося аналитическим продолжением собственных функций с отрезка  $[0, 1]$ , нам понадобится также решение, фиксированное поведением на бесконечности. Как известно [15], имеются два решения, фиксированные своим поведением на бесконечности

$$G^+(\zeta) = \exp\left(\frac{i\chi}{2}\zeta\right)\zeta^{-\frac{1}{2}+i\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{c_j^+}{\zeta^j} \tag{19}$$

и

$$G^-(\zeta) = \exp\left(-\frac{i\chi}{2}\zeta\right)\zeta^{-\frac{1}{2}-i\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{c_j^-}{\zeta^j}. \tag{20}$$

Функции (19) и (20) называются решениями Томе. Ряды в (19) и (20) не сходятся, а дают лишь асимптотическое приближение в секторе, содержащем положительную полуось  $\zeta$ .

Поскольку параметр  $\chi$  положителен, решение  $G^+(\zeta)$  имеет фазу, растущую на бесконечности, и, тем самым, отвечает волне, уходящей на бесконечность, в то время как решение  $G^-(\zeta)$  отвечает приходящей из бесконечности волне. Таким образом, в представлении рассеянного поля могут присутствовать решения  $G^+(\zeta)$  и не могут присутствовать решения  $G^-(\zeta)$ .

### ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ОСЛАБЛЕНИЯ

На основании результатов предыдущего параграфа будем искать старший член асимптотики функции ослабления в следующем виде

$$U(s, t, \eta) = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{i\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\lambda, s) \times \{A_n(\lambda)F_n(\lambda, t) + B_n(\lambda)G_n^+(\lambda, t)\} d\lambda. \tag{21}$$

Здесь  $G_n^+(\lambda, \zeta)$  – решение радиального уравнения (12) с параметром  $\alpha = \alpha_n$ , фиксированное поведением (19) при  $t \rightarrow +\infty$ .

В фигурных скобках записано общее решение радиального уравнения при фиксированных значениях параметров  $\lambda$  и  $\alpha = \alpha_n$ . Это решение можно было бы записать и через другие частные ре-

шения радиального уравнения. Выбранная в представлении (21) форма удобна тем, что, если в ней положить  $B_n \equiv 0$ , то полученная функция  $U$  будет допускать четное продолжение во все полу-пространство  $x < 0$ . Ранее мы рассматривали лишь внешность эллипсоида и вопрос о четном/нечетном продолжении поля затрагивал зависимость лишь от координаты  $s$ . При рассмотрении представления (21) внутри эллипсоида, то есть при  $t < t_0$ , следует обратить внимание на то, что значению  $t = 1$  отвечает предельный эллиптический диск в плоскости  $x = 0$ . Продолжение в область  $x < 0$  через этот диск происходит в соответствии с зависимостью поля от координаты  $t$ . При фиксированных  $\eta$  и  $s$  величина  $t - 1$  пропорциональна  $x^2$  при малых  $x$ . Поэтому функция  $F_n(t)$ , которая является голоморфной в окрестности  $t = 1$ , может быть записана как некоторая функция от  $x^2$ , и ввиду этого отвечающее ей поле будет зависеть от  $x$  четным образом. Если же в представлении (21) положить  $A_n \equiv 0$ , то полученное решение будет представлять собой комбинацию волн, уходящих по переменной  $t$  на бесконечность. Поэтому это решение будет удовлетворять условиям излучения. На основании этих свойств можно утверждать, что первое слагаемое  $A_n F_n(t)$  порождает функцию ослабления  $U_{inc}$  для падающего поля, а слагаемое  $B_n G_n^+(t)$  порождает функцию ослабления для рассеянного поля.

Удобно положить

$$B_n = A_n R_n.$$

Тогда коэффициенты  $R_n$  можно рассматривать как парциальные коэффициенты отражения от поверхности. Требуя выполнения краевых условий при  $t = t_0$  тождественно под знаком интеграла, получим в задаче Дирихле

$$R_n = -\frac{F_n(\lambda, t_0)}{G_n^+(\lambda, t_0)} \tag{22}$$

и в задаче Неймана

$$R_n = -\frac{\frac{d}{dt} F_n(\lambda, t_0)}{\frac{d}{dt} G_n^+(\lambda, t_0)}. \tag{23}$$

Для завершения построения асимптотического представления в старшем порядке осталось опре-

делить коэффициенты  $A_n(\lambda)$ . Для этого рассмотрим представление падающего поля

$$U_{inc} = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1-\eta}{1+\eta} \right)^{i\lambda} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda) F_n(\lambda, s) F_n(\lambda, t) d\lambda. \quad (24)$$

В этом представлении слева стоит старший член асимптотического ряда для функции ослабления падающей волны. Перейдем в (3) к координатам пограничного слоя. Имеем

$$z = p \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{\chi t}{kp}\right) \left(1 + \frac{\chi s}{kp}\right)}{1 + \frac{\chi}{kp}}} \eta = \\ = p\eta + \frac{\chi}{2k} (t + s - 1) + O(p^{-1}). \quad (25)$$

Тогда для  $U_{inc}$  получим выражение

$$U_{inc}(s, t, \eta) = \exp\left(\frac{i\chi}{2} (t + s - 1)\eta\right). \quad (26)$$

Прямой подстановкой проверяется, что функция  $U_{inc}$  удовлетворяет параболическому уравнению, а значит, может быть представлена в виде правой части (24) точно.

Применим к (24) обратное преобразование (14)

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda) F_n(\lambda, s) F_n(\lambda, t) = K(\lambda, s, t), \quad (27)$$

где

$$K(\lambda, s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left( \frac{1+\eta}{1-\eta} \right)^{i\lambda} \frac{\exp\left(\frac{i\chi}{2} (s+t-1)\eta\right)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta. \quad (28)$$

Сравнивая интеграл в (28) с интегральным представлением для функции Уиттекера  $M$  [16], окончательно получим

$$K(\lambda, s, t) = \frac{1}{(\pi\lambda)} \frac{M_{-i\lambda, 0}(i\chi(s+t-1))}{\sqrt{i\chi(s+t-1)}}. \quad (29)$$

Отметим, что функция  $K(\lambda, s, t)$  не имеет особенностей (квадратный корень в знаменателе компенсируется соответствующим ветвлением функции Уиттекера).

Теперь воспользуемся свойством ортогональности собственных функций  $F_n(s)$ . Домножим тождество (27) на  $F_m(s)$  и проинтегрируем с весом

$\rho(s)$  по отрезку  $s \in [0, 1]$ . В левой части ввиду (18) останется лишь слагаемое с  $n = m$ . Таким образом,

$$A_n(\lambda) = \frac{1}{(\pi\lambda)} \frac{1}{F_n(\lambda, t)} \times \\ \times \int_0^1 \frac{M_{-i\lambda, 0}(i\chi(s+t-1))}{\sqrt{i\chi(s+t-1)}} \frac{F_n(\lambda, s)}{\sqrt{s(1-s)}} ds. \quad (30)$$

Отметим, что коэффициенты  $A_n(\lambda)$  не зависят от  $t$ , в то время как параметр  $t$  присутствует в правой части выражения (30). Формулу (30) следует рассматривать при таких значениях параметра  $t$ , при которых сходится интеграл в правой части и которые не являются нулями  $F_n(t)$ . Наличие параметра  $t$  позволяет дополнительно контролировать точность вычислений функций  $F_n(\lambda, \zeta)$ .

В теории функций класса Гойна соотношения, подобные (30), известны как интегральные соотношения или интегральные уравнения для функций класса Гойна [15].

## ЧИСЛЕННАЯ ПРОЦЕДУРА И РЕЗУЛЬТАТЫ

Для обсуждения дифракционных эффектов в задаче дифракции на жестком эллипсоиде будем вычислять полное поле на его поверхности. Приводя выражение, взятое в фигурных скобках в (21), к общему знаменателю, получим формулу для поля в следующем виде

$$U(s, t_0, \eta) = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1-\eta}{1+\eta} \right)^{i\lambda} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda) F_n(\lambda, s) \frac{W[F_n, G_n^+](t_0)}{\dot{G}_n^+(\lambda, t_0)} d\lambda. \quad (31)$$

Здесь точкой обозначена производная функции  $G_n^+$  по ее аргументу  $t$ ,  $W[F_n, G_n^+] = F_n \dot{G}_n^+ - \dot{F}_n G_n^+$  – определитель Вронского функций  $F_n$  и  $G_n^+$ , который, как известно, зависит от  $t_0$  посредством множителя  $1/\sqrt{t_0(t_0-1)}$ .

В задаче дифракции на идеально мягкой поверхности будем вычислять нормальную производную поля на поверхности. При этом учтем, что

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{2\sqrt{kp}}{p\sqrt{\chi}} \sqrt{\frac{t(t-1)}{(t-s)(1-\eta^2)}} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (32)$$

В результате получаем

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{2\sqrt{kp} e^{ikp\eta}}{p\sqrt{\chi}(1-\eta^2)} \sqrt{\frac{t_0^2 - t_0}{t_0 - s}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1-\eta}{1+\eta} \right)^{i\lambda} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda) F_n(\lambda, s) \frac{W[F_n, G_n^+](t_0)}{G_n^+(\lambda, t_0)} d\lambda. \quad (33)$$

Для проведения расчетов по формулам (31), (33) необходимо решить задачу Штурма—Лиувилля для углового уравнения (12) и найти значения спектрального параметра  $\alpha_n(\lambda)$  и собственные функции  $F_n(\lambda, s)$ . Отметим, что в [18] использована замена переменных, которая позволяет устранить одновременно обе особые точки. Однако, при этом получаются уравнения с неполиномиальными коэффициентами. С нашей точки зрения удобнее сделать более простые замены независимой переменной

$$F(s) = \frac{\Phi(\tau)}{\sqrt[4]{1-s}} = \frac{\Psi(\sigma)}{\sqrt[4]{s}}, \quad \tau = \sqrt{s}, \quad \sigma = \sqrt{1-s}. \quad (34)$$

Первую замену выполним для  $s \in [0, 1/2]$ , вторую для  $s \in [1/2, 1]$ . Для функций  $\Phi$  и  $\Psi$  получим уравнения

$$\begin{aligned} \Phi''(\zeta) + Q(\lambda, \zeta)\Phi(\zeta) &= 0, \\ \Psi''(\zeta) + Q(-\lambda, \zeta)\Psi(\zeta) &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$Q(\lambda, \zeta) = \chi^2 \zeta^2 + 4\chi\lambda + \frac{4\alpha - 2\chi\lambda - \frac{1}{4}}{1 - \zeta^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{(1 - \zeta^2)^2}. \quad (36)$$

Отсутствие первой производной в (36) позволяет применить численную схему Нумерова. Введем равномерную сетку  $\{\zeta_j\}_{j=0,1,\dots,N}$  с шагом  $h$  на интервале  $[0, \sqrt{2}/2]$  и вектор неизвестных  $\mathbf{F} = (\Phi(0), \Phi(\zeta_1), \dots, \Phi(\zeta_{N-1}), \Phi(\sqrt{2}/2), \Psi(\zeta_{N-1}), \dots, \Psi(\zeta_1), \Psi(0))^T$ . Уравнения метода Нумерова записываются в виде

$$A\mathbf{F} = 0$$

с трехдиагональной матрицей

$$A_{0,0} = -1 + \frac{1}{3}Q(\lambda, 0)h^2, \quad A_{0,1} = 1 + \frac{1}{6}Q(\lambda, h)h^2,$$

$$A_{j,j-1} = 1 + \frac{1}{12}Q(\lambda, (j-1)h)h^2,$$

$$A_{j,j} = -2 + \frac{5}{6}Q(\lambda, jh)h^2,$$

$$A_{j,j+1} = 1 + \frac{1}{12}Q(\lambda, (j+1)h)h^2,$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$A_{N,n-1} = -1 - \frac{1}{6}Q(\lambda, (N-1)h)h^2,$$

$$A_{N,N} = 2 + \sqrt{2}h - \frac{1}{3}(Q(\lambda, Nh) + Q(\lambda, Nh)),$$

$$A_{N,N+1} = -1 - \frac{1}{6}Q(-\lambda, (N-1)h)h^2,$$

$$A_{j,j-1} = 1 + \frac{1}{12}Q(-\lambda, (2N-j+1)h)h^2,$$

$$A_{j,j} = -2 + \frac{5}{6}Q(-\lambda, (2N-j)h)h^2,$$

$$A_{j,j+1} = 1 + \frac{1}{12}Q(-\lambda, (2N-j-1)h)h^2,$$

$$j = N+1, N+2, \dots, 2N-1,$$

$$A_{2N,2N-1} = 1 + \frac{1}{6}Q(-\lambda, h)h^2,$$

$$A_{2N,2N} = -1 + \frac{1}{3}Q(-\lambda, 0)h^2.$$

Нахождение собственных чисел производилось методом стрельбы, т.е. выбирая  $\Phi(0) = 1$ , что влияет лишь на нормировку, и, последовательно используя  $2N-1$  уравнение системы, определялись компоненты вектора  $\mathbf{F}$ . Параметр  $\alpha$ , играющий роль пристрелочного параметра, находился из требования, чтобы выполнялось последнее уравнение системы.

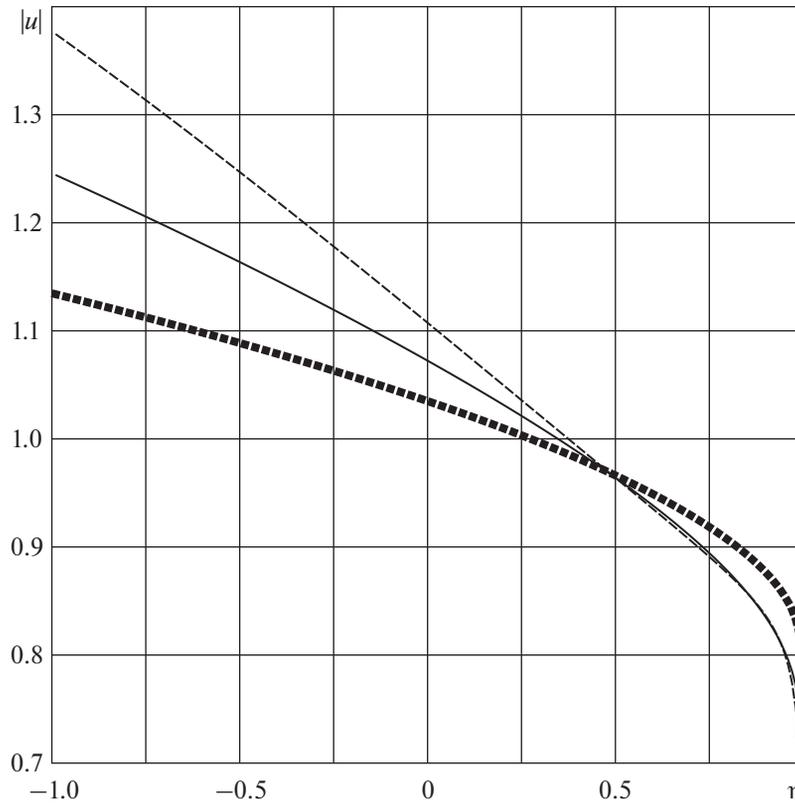
Нормировочные интегралы (18) и интегралы в формулах (30) для коэффициентов  $A_n(\lambda)$  вычислялись по составным квадратурным формулам трапеций. Проверка условий ортогональности (18) и независимости правых частей (30) от  $t$  дают возможность дополнительной проверки точности вычислений.

После того как собственные числа  $\alpha_n$  найдены, необходимо решить радиальные уравнения (12) и найти функции  $G_n^+(\lambda, t)$ . Функции  $G_n^+(\lambda, t)$  фиксируются своим поведением на бесконечности. Поэтому радиальное уравнение решалось в отрицательном направлении независимой переменной. Для того чтобы задать начальные данные для задачи Коши, можно воспользоваться решениями Томе (19). Несложно установить, что коэффициенты  $c_j^+$  асимптотического ряда удовлетворяют трехчленным рекуррентным уравнениям

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= \frac{i}{\chi(n+2)}(n+1-i\lambda)\left(n+\frac{1}{2}-i\lambda\right)c_n - \\ &- \frac{i}{\chi(n+2)}\left[\left(n+\frac{3}{2}-i\lambda\right)^2 + i\chi\left(n+\frac{5}{4}-i\lambda\right) - \alpha\right]c_{n+1}, \end{aligned} \quad (37)$$

в которых надо положить  $c_{-1} = 0$ .

Ряд в (19), как уже отмечалось выше, расходится и может использоваться лишь как асимптотический. Поэтому будем рассматривать конечный отрезок ряда и использовать его при достаточно большом значении  $\zeta^*$ , которое и будет начальным значением независимой переменной в задаче Коши для  $G_n^+(\zeta)$ . Отметим, что ввиду наличия множителей  $\chi^{-1}$  в формулах (37) значение  $\zeta^*$  приходится брать тем большим, чем меньше значе-



**Рис. 1.** Амплитуда поля в сечении  $x = 0$  на жестком сфероиде с полуосями  $200k^{-1}$  и  $10k^{-1}$  (сплошная линия) и на эллипсоидах с полуосями  $200k^{-1}$ ,  $10k^{-1}$  и  $20k^{-1}$  (штриховая линия) и  $200k^{-1}$ ,  $10k^{-1}$  и  $5k^{-1}$  (пунктир).

ние параметра  $\chi$ . При приближении к сингулярной точке  $\zeta = 1$  для повышения точности вычислений и исключения особенности в  $\zeta = 0$  можно произвести замену независимой переменной

$$G^+(\zeta) = \frac{\Upsilon(\tau)}{\sqrt[4]{t}}, \quad \tau = \sqrt{\zeta - 1}, \quad (38)$$

которая приводит к уравнению

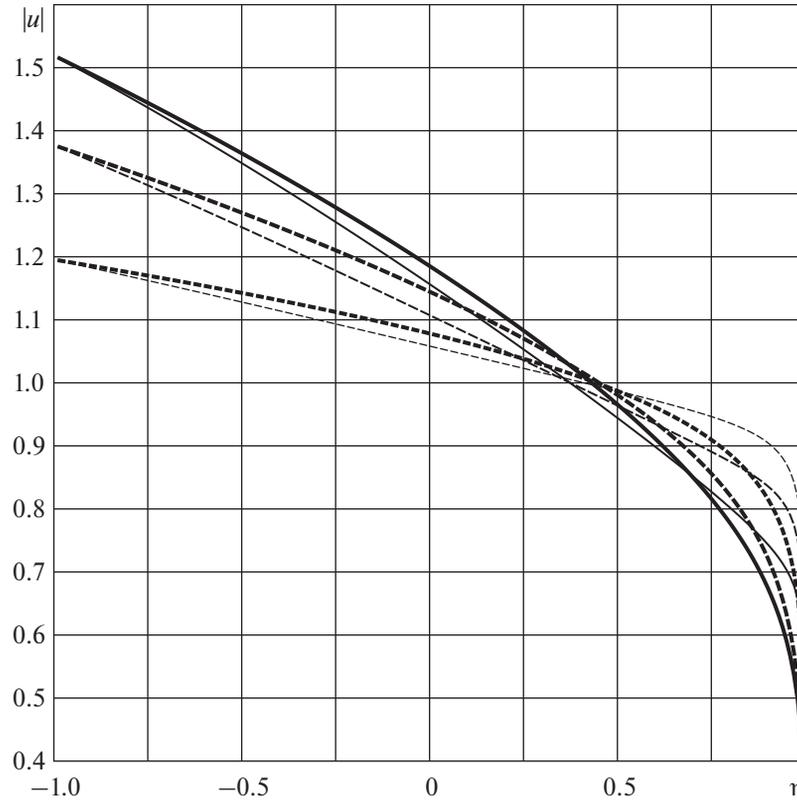
$$\Upsilon'''(\tau) + \left[ \chi^2 \tau^2 + 4\chi\lambda + \frac{\frac{1}{4} - 4\alpha - 2\chi\lambda}{1 + \tau^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{(1 + \tau^2)^2} \right] \Upsilon(\tau) = 0. \quad (39)$$

Как показывает численный счет, подынтегральные выражения в (31) и (33) быстро убывают при  $\lambda \rightarrow \pm\infty$ , а заметный вклад в сумму дают лишь слагаемые с  $n = 0$  и  $n = 1$ .

С точки зрения физики процесса дифракции вызывает интерес изучение поперечной структуры дифракционного поля. Как уже отмечалось выше, приближение Фока имеет двумерный характер и на границе свет-тень на поверхности жесткого тела дает значение амплитуды полного поля, равное 1.399. Таким образом, согласно это-

му приближению зависимости от поперечной координаты нет. В реальности, такая зависимость присутствует и полученные здесь асимптотические представления позволяют ее выявить. Рассмотрим сечение  $x = 0$  и будем сравнивать распределение поля в этом сечении с распределением поля на поверхности сфероида, которое может быть рассчитано по асимптотическим формулам, полученным в [6]. На рис. 1 это распределение показано сплошной линией. Для эллипсоида с меньшей поперечной кривизной распределение поля показано штриховой линией, а для эллипсоида с большей кривизной — пунктиром. Расчеты показывают, что поперечная кривизна влияет на распределение поля двояким образом. Во-первых, при увеличении поперечной кривизны эллипсоид становится более плоским, что приводит к уменьшению амплитуды рассеянного поля (на жестком эллиптическом диске, являющемся предельным случаем эллипсоида, рассеянное поле отсутствует). Во-вторых, большая поперечная кривизна снижает скорость затухания поля в тени, что выражается меньшим наклоном у пунктирной кривой и большим у штриховой.

Сравнивая поля в сечениях  $x = 0$  и  $y = 0$  (см. рис. 2) можно сделать вывод о том, что ам-



**Рис. 2.** Амплитуда поля в сечениях  $x = 0$  (жирные линии) и  $y = 0$  (тонкие линии) на эллипсоидах с полуосями  $200k^{-1}$ ,  $20k^{-1}$  и  $15k^{-1}$  (сплошная линия),  $200k^{-1}$ ,  $20k^{-1}$  и  $10k^{-1}$  (штриховая линия),  $200k^{-1}$ ,  $20k^{-1}$  и  $5k^{-1}$  (пунктир).

плитуда поля в более вытянутом сечении оказывается меньше, чем в менее вытянутом.

При дифракции на идеально мягкой поверхности удобно ввести величину

$$v = \sqrt{\frac{p}{k}} \sqrt{1 - \eta^2} \frac{\partial u}{\partial n},$$

которая в старшем порядке не зависит от асимптотического параметра  $kp$ . Расчеты по формуле

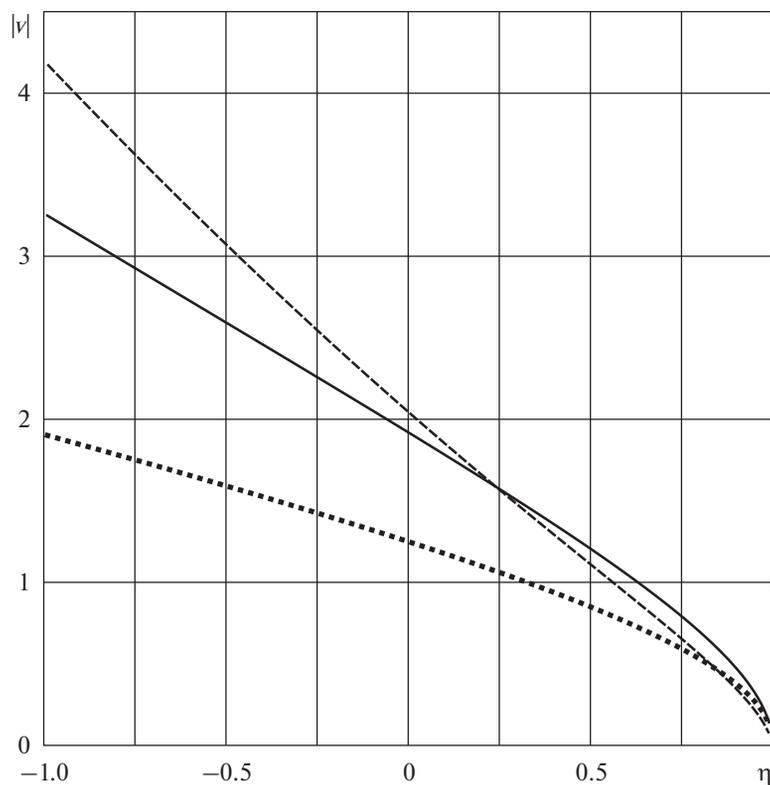
**Таблица 1.** Значения  $|v|$  на эллипсоидах, длины двух полуосей которых имеют фиксированные значения  $200k^{-1}$  и  $20k^{-1}$ , а длина третьей ( $a_x$ ) меняется

Полуось ( $k^{-1}$ )	$ v(0, t_0, 0) $	$ v(1, t_0, 0) $
15	1.2625695	1.6000447
10	1.1161410	2.0459228
5	0.9662729	3.4741242
1	0.8487356	15.1752945
0.2	0.8258801	73.6736424
0.02	0.8207700	731.9964218
0.002	0.8202608	7315.2478423

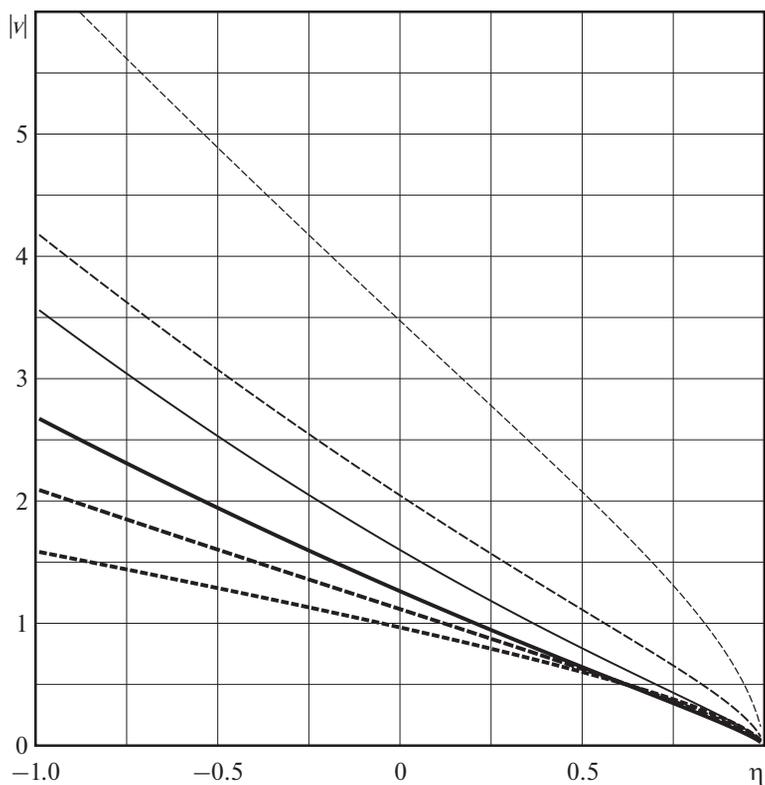
(33) представлены на рис. 3. Влияние поперечной кривизны на распределение поля оказывается сходным. Однако (см. рис. 4), по сравнению с задачей дифракции на жесткой поверхности амплитуда  $v$  оказывается больше в более вытянутом сечении, чем в менее вытянутом. Кроме того, влияние поперечной кривизны проявляется сильнее, чем в случае жесткой поверхности. Этот факт в некотором смысле неожиданный, так как при использовании стандартного метода параболического уравнения поправка на поперечную кривизну для дифракции на идеально мягкой поверхности появляется лишь в третьем члене асимптотики [3], в то время как в случае жесткой поверхности уже во втором [19].

Особый интерес вызывает исследование предела при превращении эллипсоида в сильно вытянутый эллиптический диск. В случае жесткого диска рассеянное поле отсутствует, а в случае мягкого наблюдается усиление поля на кромке диска. Рассчитанные значения величины  $|v|$  на границе свет–тень в сечениях  $x = 0$  и  $y = 0$  приведены в табл. 1.

При уменьшении толщины эллипсоида величина  $v$  в сечении  $y = 0$  стремится к пределу



**Рис. 3.** Амплитуда  $|v|$  в сечении  $x = 0$  на мягком сфероиде с полуосями  $200k^{-1}$  и  $10k^{-1}$  (сплошная линия) и на эллипсоидах с полуосями  $200k^{-1}$ ,  $10k^{-1}$  и  $20k^{-1}$  (штриховая линия) и  $200k^{-1}$ ,  $10k^{-1}$  и  $5k^{-1}$  (пунктир).



**Рис. 4.** Амплитуда  $|v|$  в сечениях  $x = 0$  (жирные линии) и  $y = 0$  (тонкие линии) на эллипсоидах с полуосями  $200k^{-1}$ ,  $20k^{-1}$  и  $15k^{-1}$  (сплошная линия),  $200k^{-1}$ ,  $20k^{-1}$  и  $10k^{-1}$  (штриховая линия),  $200k^{-1}$ ,  $20k^{-1}$  и  $5k^{-1}$  (пунктир).

$v_0 \approx 0.82$ , а в сечении  $x = 0$  неограниченно возрастает примерно пропорционально отношению  $a_y/a_x$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье мы построили и исследовали высокочастотную асимптотику поля дифракции на сильно вытянутом трехосном эллипсоиде для случая падения плоской волны вдоль большой полуоси эллипсоида. При этом учитывалось лишь поле прямой волны, описываемой в приближении модифицированного метода параболического уравнения. Подобно тому, как это было сделано в случае дифракции на сильно вытянутом сфероиде, в дальнейшем предполагается распространить результаты анализа на падение под углом, на другие виды падающих полей, а также включить в рассмотрение “обратную” волну, формирующуюся вследствие огибания рассеянным полем теневого конца эллипсоида. Общая идея указанных обобщений повторяет случай сфероида, однако на пути их реализации ожидаются определенные трудности. Во-первых, усложнение интеграла (28) приводит к проблеме сведения его к известным специальным функциям. Во-вторых, нет явных выражений для асимптотик функций класса Гойна, использование которых необходимо при получении амплитуды “обратной” волны.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фок В.А. Новые методы в теории дифракции // Вестник Ленинградского университета. 1947. № 4. С. 5–11.
2. Белкина М.Г. Характеристики излучения вытянутого эллипсоида вращения // Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения, М.: Советское радио, 1957. С. 126–147.
3. Кирпичникова Н.Я., Попов М.М. Метод параболического уравнения Леонтовича–Фока в задаче дифракции на вытянутых телах // Зап. научн. семинаров ПОМИ. 2012. Т. 409. № 42. С. 55–79.
4. Корольков А.И., Шанин А.В., Белоус А.А. Дифракция на вытянутом теле вращения с импедансными границами. Метод граничного интегрального параболического уравнения // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 3. С. 440–447.
5. Клеев А.И., Кюркчан А.Г. Использование метода диаграммных уравнений в сфероидальных координатах для решения задач дифракции на сильно вытянутых рассеивателях // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 1. С. 21–29.
6. Андронов И.В. Дифракция на сильно вытянутом теле вращения // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 2. С. 147–152.
7. Андронов И.В. Дифракция плоской волны, падающей под малым углом к оси вращения сильно вытянутого сфероида // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 5. С. 571–579.
8. Andronov I.V. High-frequency acoustic scattering from prolate spheroids with high aspect ratio // J. Acoust. Soc. Am. 2013. V. 134. № 6. P. 4307–4316.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967. 300 с.
10. Федорюк М.В. Дифракция звуковых волн на трехосном эллипсоиде // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 1. С. 160–164.
11. Chernokozhin E.V., Andronov I.V., Boag A. Mutual Validation of a Fast Solver Based on the Multilevel Non-uniform Grid Approach and an Asymptotic Approximation for High-frequency Scattering by Strongly Elongated Spheroids // 2020 XXXIIIrd General Assembly and Scientific Symposium of the International Union of Radio Science. <https://doi.org/10.23919/URSIGASS49373.2020.9231997>
12. Морс Ф.М., Фейсбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: ИЛ, 1958. 931 с.
13. Петров В.Э. Обобщенное сингулярное уравнение Трикоми как уравнение свертки // Доклады Акад. наук. 2006. Т. 411(2). С. 1–5.
14. Федорюк М.В. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
15. Славянов С.Ю., Лай В. Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей. С.-Петербург: Невский Диалект, 2002. 312 с.
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
17. Andronov I.V., Vouche D. Asymptotic of creeping waves on a strongly prolate body // Ann. Télécommun. 1994. V. 49. № 3–4. P. 205–210.
18. Абрамов А.А., Дышко А.Л., Конюхова Н.Б., Левитина Т.В. О численно-аналитическом исследовании задач дифракции плоской звуковой волны на идеальных вытянутых сфероидах и трехосных эллипсоидах // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 1995. Т. 35. № 9. С. 1374–1400.
19. Hong S. Asymptotic theory of electromagnetic and acoustic diffraction by smooth convex surfaces of variable curvature // J. Math. Physics. 1967. V. 8. P. 1223–1232.

## КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 539.3;534.1;534.16

### ИЗГИБНЫЕ КРОМОЧНЫЕ ВОЛНЫ КОНЕНКОВА В СЛОИСТО-ИЗОТРОПНЫХ И ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПЛАСТИНАХ

© 2021 г. Д. Д. Захаров\*

Российский университет транспорта (РУТ-МИИТ), ул. Образцова 9, стр. 9, Москва, 127994 Россия

\*e-mail: dd\_zakh@mail.ru

Поступила в редакцию 08.11.2020 г.

После доработки 15.03.2021 г.

Принята к публикации 23.04.2021 г.

Рассматриваются изгибные кромочные волны в тонких пластинах из изотропных (трансверсально-изотропных) слоев с возможной несимметричной укладкой или из функционально-градиентного материала, чьи характеристики непрерывно изменяются по толщине. Лицевые поверхности пластины предполагаются свободными от напряжений. Таким образом, получается связанная задача динамического изгиба и квазистатического плоского напряженного состояния пластины. В отличие от рассмотренных ранее общих ситуаций с анизотропными материалами, за счет выбора системы координат здесь можно реализовать разделение уравнений изгиба и плоской задачи и минимизировать связность краевых условий. Кроме того, часть характеристических корней операторов будут кратными. Дисперсионное уравнение получается в явном виде и, кроме известной составляющей, полученной Коненковым, оно содержит поправочную часть, зависящую от безразмерных мембранно-изгибных жесткостей. Получено его решение, проанализировано влияние параметров. Приводятся примеры расчета дисперсионных кривых.

*Ключевые слова:* волны Коненкова, слоистые пластины, функционально-градиентные материалы, дисперсионные кривые

DOI: 10.31857/S0320791921040134

#### ВВЕДЕНИЕ

Начало исследований изгибных волн кромочного типа в тонких телах (в частности, в тонких пластинах) традиционно отсчитывают с работы [1] с последующим обращением к той же теме в статьях [2–4]. На этом этапе использовались длинноволновые низкочастотные теории пластин типа Кирхгофа–Лява. Далее было показано, что подобные кромочные волны могут быть также топографического характера [5] или распространяться вдоль контактной кромки [6–8].

Усложнение свойств в виде анизотропии упругих материалов и/или использование пакета слоев не обладает “запирающим” эффектом, но приводит к существенному усложнению дисперсионных свойств кромочной волны [9–17].

Продвижение в область более высоких частот потребовало для анализа дисперсионных свойств привлечения теорий типа Тимошенко–Рейсснера [18, 19], итерационно-асимптотических подходов [20], прямых численных методов [20–24] или проекционных методов решения трехмерных краевых задач [25]. Полученные результаты ока-

зались хорошо согласованными как между собой, так и с первыми экспериментальными исследованиями изгибных кромочных волн [26].

Именно численными методами были впервые выявлены кромочные волны высших порядков — не “фундаментальные”, т.е. такие, что существуют не при любых частотах, начиная с нулевой, а только выше некоторой конечной критической частоты [24]. Более регулярное исследование кромочных волн высших порядков представлено в [27].

Среди работ последних лет можно отметить анализ кромочных волн в изотропной пластине на упругом (винклеровском) основании [28–30], а также локализованных волн в пластине с кромкой, усиленной другой пластиной в виде широкой полосы из иного упругого материала [31, 32].

В данной работе приводятся результаты исследования фундаментальных изгибных кромочных волн в пластине из упругих или трансверсально-упругих слоев с несимметричной укладкой по толщине. С одной стороны, это менее общая ситуация, чем в случае анизотропии материалов бо-

лее общего вида [13, 14], но с другой – она позволяет получить основные результаты в замкнутом виде и выделить наиболее существенные параметры. Кроме того, аналогичный метод удастся применить и к пластине из функционально-градиентного материала с непрерывной изменемостью свойств по толщине пластины. В этом и состоит новизна исследования. Распространение волн в телах из функционально-градиентных материалов с плоской или цилиндрической геометрией исследовалось в работах [33–36]. Работы по краевым волнам в таких структурах в литературе, по-видимому, пока отсутствуют.

### УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ИЗОТРОПНО-СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН

Рассмотрим тонкий пакет несимметричного строения, составленный из слоев с упругими постоянными общего вида. Межслойный контакт предполагается идеальным. Обозначим полную толщину пакета  $H = 2h$ ; введем продольные декартовы координаты  $x_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$  ( $\mathbf{x} = \mathbf{i}_\alpha x_\alpha$ ) и поперечную координату  $x_3 = z$ . В постоянных матрицах жесткостей слоев  $\mathbf{G}_j = \|g_{mn}\|_j$  ( $m, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6; j$  – номер слоя) с ненулевыми элементами соответствие индексов отвечает следующим подстановкам  $1, 2, 3, 4, 5, 6 \leftrightarrow 11, 22, 33, 23, 13, 12$ . Далее примем, что внутреннее напряженно-деформированное состояние слоистого пакета является длинноволновым. Асимптотически точные математические модели движения таких пакетов были получены в [37–39] и обладают преемственностью по отношению к классическим соотношениям теории пластин Кирхгофа–Лява. Нормальный прогиб  $w$  и вектор продольных перемещений  $\mathbf{u}$  при этом имеют вид

$$w = w(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) - z \nabla w, \quad (1)$$

$$(\nabla \equiv \mathbf{i}_\alpha \partial_\alpha; \alpha = 1, 2).$$

Продольные напряжения в  $j$ -м слое  $z_j \leq z \leq z_{j+1}$  выражаются формулой ( $\alpha, \beta = 1, 2$ )

$$\sigma_{\alpha\beta}^j = \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{\Gamma}_j)(\mathbf{u}_0 - z \nabla w),$$

$$\begin{bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{12} \\ \chi_{22} \end{bmatrix}(\mathbf{\Gamma}_j) \equiv \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{16} & \gamma_{12} \\ \gamma_{16} & \gamma_{66} & \gamma_{26} \\ \gamma_{12} & \gamma_{26} & \gamma_{22} \end{bmatrix}_j \times \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 \\ \partial_2 & \partial_1 \\ 0 & \partial_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{\Gamma}_j \equiv \|\gamma_{pq}\|_j$  ( $p, q = 1, 6, 2$ ) – матрица эффективных жесткостей в слое  $j$ . Ее элементы равны отношению определителей миноров исходной матрицы  $\mathbf{G}$ :  $\gamma_{pq} \equiv \det \mathbf{G}_q^p / \det \mathbf{G}_0$ ,  $\mathbf{G}_0 \equiv \mathbf{G} \begin{pmatrix} 345 \\ 345 \end{pmatrix}$ , минор  $\mathbf{G}_q^p$  получается окаймлением  $p$ -й строкой и  $q$ -м

столбцом минора  $\mathbf{G}_0$  снизу и справа, соответственно.

Продольные усилия  $Q_{\alpha\beta}$  и изгибающие моменты  $M_{\alpha\beta}$  получаются интегрированием по толщине напряжений (2) с соответствующим весом

$$Q_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_1)\mathbf{u}_0 - \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2)\nabla w,$$

$$M_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2)\mathbf{u}_0 - \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_3)\nabla w, \quad (3)$$

$$\mathbf{D}_k \equiv k^{-1} \sum_j (z_{j+1}^k - z_j^k) \mathbf{\Gamma}_j,$$

а поперечные усилия выражаются привычным образом  $Q_{\alpha z} = \partial_\beta M_{\alpha\beta}$ . Мембранные жесткости  $\mathbf{D}_1$  отвечают задаче о плоском напряженном состоянии, изгибные жесткости  $\mathbf{D}_3$  – задаче изгиба пластины, а ненулевые мембранно-изгибные жесткости  $\mathbf{D}_2$  приводят к связанности обоих процессов. В отсутствие нагрузок на лицевых поверхностях пакета уравнения движения принимают вид [10] ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ):

$$\partial_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_1)\mathbf{u}_0 - \partial_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2) \nabla w = 0,$$

$$-\partial_{\alpha\beta}^2 \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2)\mathbf{u}_0 + [\partial_{\alpha\beta}^2 \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_3) \nabla + \rho \partial_t^2] w = 0, \quad (4)$$

где  $\rho$  обозначает эффективную плотность пакета по толщине:

$$\rho = \sum_j \rho_j (z_{j+1} - z_j). \quad (5)$$

При симметричном расположении слоев относительно нейтральной плоскости  $\mathbf{D}_2 = 0$ , и квазистатическая задача о плоском напряженном состоянии полностью отделяется, а последнее из уравнений (4) совпадает с классическим уравнением изгиба [34, 35]. Краевые условия на торце пластины формулируются в перемещениях, углах поворота сечений  $\theta_\alpha = -\partial_\alpha w$ , продольных усилиях и/или изгибающих моментах (3) и перерезывающих усилиях Кирхгофа  $N_{\alpha z} = Q_{\alpha z} + \partial_\beta M_{\alpha\beta}$  (суммирование по повторяющимся индексам в последней формуле не проводится).

Пусть теперь пластина совершает гармонические колебания с циклической частотой  $\omega$ , занимает в плане область  $-\infty < x_1 < \infty$ ,  $x_2 \geq 0$  и ее кромка  $x_2 = 0$  свободна от напряжений. Изгибные волны Коненкова распространяются вдоль края и экспоненциально затухают с удалением от него вглубь пластины (см. рис. 1), т.е. образуются парциальными волнами вида

$$w = Ae^{i(\omega t - k_1 x_1) - k_1 \xi x_2}, \quad \mathbf{u}_0 = Be^{i(\omega t - k_1 x_1) - k_1 \xi x_2}, \quad (6)$$

$$(k_1, \xi \geq 0).$$

Амплитуды парциальных волн  $w^*$ ,  $u_\alpha^*$  сначала будем предполагать постоянными. Искомое решение (6) должно удовлетворять системе уравнений (4) и условию свободного края  $x_2 = 0$ :

$$Q_{12} = Q_{22} = 0, \quad M_{22} = 0, \quad N_{2z} = 0. \quad (7)$$

В такой постановке для анизотропии материалов слоев общего вида кромочные волны были изучены в работах [3, 14]. Заметим, что получаемые для общего случая результаты опираются на предварительный анализ характеристических корней операторов [13] или матричный анализ по методу Стро [14], что затрудняет получение дисперсионных уравнений в замкнутом виде.

Ниже рассмотрим более простую ситуацию для изотропных слоев, несимметрично расположенных по толщине пластины. Отметим, что для этого случая среди характеристических корней операторов, вообще говоря, есть кратные корни.

Выражения для осредненных жесткостей в слое упрощаются следующим образом (в очевидных случаях номер слоя опускаем):

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{12} + 2\gamma_{66} &= \frac{E}{1-\nu^2}, \\ \gamma_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad \gamma_{66} &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \\ \gamma_{16} = \gamma_{26} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала. Это также означает, что если система координат по вертикали расположена так, что выполнено условие

$$\frac{1}{2} \sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j (z_{j+1}^2 - z_j^2) = 0, \quad (9)$$

то  $\partial_{\beta} \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2) \nabla \equiv 0$ ,  $\partial_{\alpha\beta}^2 \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2) \equiv 0$  и уравнения движения (4) полностью разделяются на изгибное уравнение и систему уравнений для обобщенного плоского напряженного состояния. Условие (9) всегда выполнимо, т.к. при заданных толщинах слоев  $h_j = z_{j+1} - z_j$  сводится, например, к уравнению для координаты нижней лицевой поверхности (всегда отрицательной)

$$\begin{aligned} z_1 \sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j h_j + \sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j h_j \times \\ \times \left( h_1 + \dots + h_{j-1} + \frac{h_j}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда система из трех уравнений (4) упрощается. Первое уравнение – уравнение динамического изгиба принимает вид  $(\Delta \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2)$

$$d_3 \Delta^2 w + \rho d_7^2 w = 0, \quad (11)$$

с параметрами

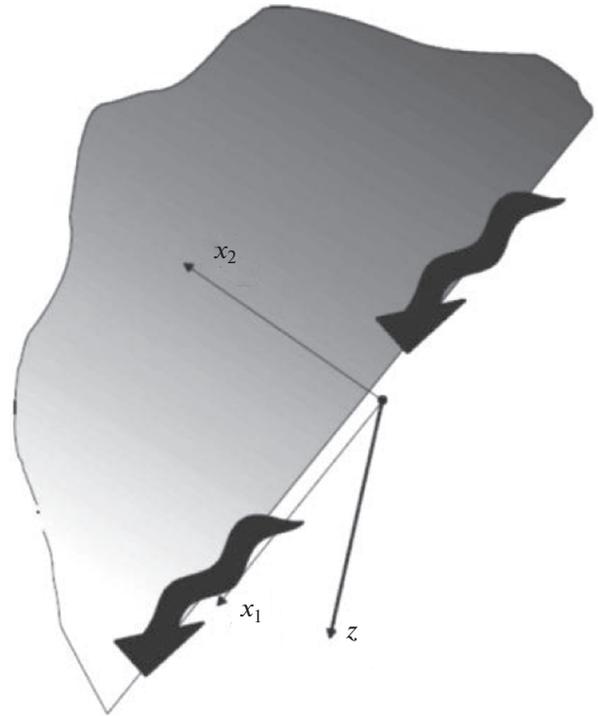


Рис. 1. Изгибная кромочная волна.

$$\begin{aligned} d_3 &= \frac{1}{3} \sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j (z_{j+1}^3 - z_j^3), \\ \nu_3 &= \frac{1}{3d_3} \sum_j \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right)_j (z_{j+1}^3 - z_j^3) \end{aligned} \quad (12)$$

и дополняется вторым и третьим из уравнений (4) – квазистатическими уравнениями плоской задачи

$$\begin{aligned} d_1 \left\{ \left( \partial_1^2 + \frac{1-\nu_1}{2} \partial_2^2 \right) u_1 + \frac{1+\nu_1}{2} \partial_{12}^2 u_2 \right\} = 0, \\ d_1 \left\{ \frac{1+\nu_1}{2} \partial_{12}^2 u_1 + \left( \partial_2^2 + \frac{1-\nu_1}{2} \partial_1^2 \right) u_2 \right\} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

с параметрами

$$\begin{aligned} d_1 &= \sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j (z_{j+1} - z_j), \\ \nu_1 &= \frac{1}{d_1} \sum_j \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right)_j (z_{j+1} - z_j). \end{aligned}$$

Получающийся общий множитель  $d_1$  в уравнениях (13) может быть сокращен.

Матрица  $\mathbf{D}_2$  мембранно-изгибных жесткостей содержит, вообще говоря, два ненулевых элемента

$$\begin{aligned} d_{12}^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum_j \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right)_j (z_{j+1}^2 - z_j^2), \\ d_{66}^{(2)} &= \frac{1}{4} \sum_j \left( \frac{E}{1+\nu} \right)_j (z_{j+1}^2 - z_j^2). \end{aligned} \quad (14)$$

В силу условия (9)  $d_{12}^{(2)} + 2d_{66}^{(2)} = 0$  и далее полагаем

$$d_2 = d_{12}^{(2)}, \quad d_{66}^{(2)} = -\frac{1}{2}d_2. \quad (15)$$

Краевые условия на торце  $x_2 = 0$  для разделившихся уравнений остаются связанными:

$$\begin{aligned} Q_{12} &\equiv d_1(1 - \nu_1)\varepsilon_{12} - d_2\theta_{12} = 0, \\ Q_{22} &\equiv d_1(\nu_1\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + d_2\theta_{11} = 0, \\ M_{22} &\equiv d_2\varepsilon_{11} + d_3(\nu_3\theta_{11} + \theta_{22}) = 0, \\ N_{2z} &\equiv \partial_2\{d_2\varepsilon_{11} + d_3(\nu_3\theta_{11} + \theta_{22})\} + \\ &+ 2\partial_1\{-d_2\varepsilon_{12} + d_3(1 - \nu_3)\theta_{12}\} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha)$ ,  $\theta_{\alpha\beta} = -\partial_{\alpha\beta} w$ .

### ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО АНАЛИЗ

Подстановка соотношений (6) в уравнение изгиба (11) приводит к тем же соотношениям, что и в работе [1]

$$s^4 \equiv (1 - \xi^2)^2 = \frac{\rho \omega^2}{d_3 k_1^4} = \frac{\rho}{\omega^2 d_3} \left(\frac{\omega}{k_1}\right)^4. \quad (17)$$

Параметр  $s$  есть безразмерная фазовая скорость искомой кромочной волны, нормированная на скорость изгибной волны Кирхгофа–Лява

$$s = \frac{V}{V_B}, \quad V = \frac{\omega}{k_1}, \quad V_B = \left(\frac{\omega^2 d_3}{\rho}\right)^{1/4}. \quad (18)$$

Соответственно, для параметра затухания и парциальных волн получаем выражения:

$$\xi_{1,2} = (1 \pm s^2)^{1/2}, \quad (19)$$

$$w = (A_1 e^{-k_1 \xi_1 x_2} + A_2 e^{-k_1 \xi_2 x_2}) e^{i(\omega t - k_1 x_1)}. \quad (20)$$

Далее начинаются различия. За счет полного разделения уравнений изгиба и плоской задачи и за счет квазистатической природы плоского напряженного состояния в таком масштабе времени, подстановка продольных перемещений (6) в уравнения (13) дает равенство

$$(1 - \xi^2)^2 = 0, \quad (21)$$

и кромочной волне соответствует корень  $\xi = 1$  кратности 2. Тогда соответствующие перемещения приводятся к виду

$$\begin{aligned} u_1 &= (k_1 x_2 B + D) e^{i(\omega t - k_1 x_1) - k_1 x_2}, \\ u_2 &= i \left( -k_1 x_2 B - \frac{3 - \nu_1}{1 + \nu_1} B - D \right) e^{i(\omega t - k_1 x_1) - k_1 x_2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Краевые условия (16) для поля перемещений (20), (22) дают следующее матричное уравнение

$$\mathbf{M} \times \mathbf{C} = 0, \quad (23)$$

$$\mathbf{C} = \left[ A_1 \quad A_2 \quad \frac{iB}{(1 + \nu_1)k_1} \quad \frac{iD}{k_1} \right]^T, \quad (24)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{d_2 \xi_1}{d_1} & \frac{d_2 \xi_2}{d_1} & (1 - \nu_1)^2 & 1 - \nu_1 \\ \frac{d_2}{d_1} & \frac{d_2}{d_1} & 2(1 - \nu_1) & 1 - \nu_1 \\ \nu_3 - \xi_1^2 & \nu_3 - \xi_2^2 & 0 & \frac{d_2}{d_3} \\ (\nu_3 - \xi_2^2)\xi_1 & (\nu_3 - \xi_1^2)\xi_2 & \frac{(3 - \nu_1)d_2}{d_3} & \frac{d_2}{d_3} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Приравнивание к нулю определителя матрицы (25) дает дисперсионное уравнение

$$f(s^2) \equiv K(s^2, \nu_3) + g(s^2, \nu_1, \nu_3, a) = 0. \quad (26)$$

Первая компонента в уравнении (26) совпадает с известным выражением для изгиба [1], зависящим от приведенного коэффициента Пуассона  $\nu_3$

$$K(s^2, \nu_3) \equiv (\nu_3 - \xi_2^2)^2 \xi_1 - (\nu_3 - \xi_1^2)^2 \xi_2 \quad (27)$$

с соответствующим корнем  $s_0: K(s_0^2, \nu_3) = 0$ ,

$$\begin{aligned} s_0 &= \left\{ (1 - \nu_3) \left( 3\nu_3 - 1 + 2\sqrt{1 - 2\nu_3 + 2\nu_3^2} \right) \right\}^{1/4} = \\ &= 1 - \frac{\nu_3^4}{16} - \frac{\nu_3^5}{8} - \frac{5\nu_3^6}{32} + O(\nu_3^7). \end{aligned} \quad (28)$$

Вторая компонента появляется за счет связности краевых условий (16). Эта компонента зависит от двух приведенных коэффициентов Пуассона  $\nu_3$  и  $\nu_1$  для изгибной и плоской задачи, соответственно, и, что более существенно, от отношения мембранно-изгибной жесткости  $d_2$  к изгибной и мембранной жесткостям

$$\begin{aligned} g(s^2, \nu_1, \nu_3, a) &= 4s^2 a \left\{ \xi_1 \xi_2 - \frac{1 - \nu_1}{2} (\xi_1 + \xi_2) + 1 \right\} + \\ &+ 2a (\xi_1 - \xi_2) (1 - \nu_1) (1 - \nu_3) - \\ &- a^2 (\xi_1 - \xi_2) (3 - \nu_1) (1 + \nu_1), \end{aligned} \quad (29)$$

$$a = \frac{(d_2)^2}{d_1 d_3 (1 - \nu_1^2)}. \quad (30)$$

При  $d_2 = 0$  ( $a = 0$ ) получим уравнение для классической волны Коненкова  $K(s^2, \nu_3) = 0$ .

Непосредственной подстановкой можно показать, что функция  $f(s^2)$  обладает следующими свойствами

$$f(0) = 0, \quad f(1) \frac{\partial f(s^2)}{\partial s^2} \Big|_{s=0} < 0, \quad (31)$$

т.е. ее значение в окрестности точки  $s = 0$  противоположно по знаку значению при  $s = 1$ . Отсюда,

в силу непрерывности функции, уравнение (26) всегда имеет корень  $s \in (0, 1)$ .

В случае малых значений параметра  $a \ll 1$  для этого корня можно получить приближенное выражение

$$s^2 = s_0^2 (1 + Ca + O(a^2)), \quad (32)$$

$$C = \frac{2 \left\{ \xi_1 \xi_2 - \frac{1-v_1}{2} (\xi_1 + \xi_2) + 1 \right\} + \frac{\xi_1 - \xi_2}{s_0^2} (1-v_1)(1-v_3)}{\left( v_3 - \xi_2^2 \right) \xi_1 + \frac{(v_3 - \xi_2^2)^2}{4\xi_1} - (v_3 - \xi_1^2) \xi_2 + \frac{(v_3 - \xi_1^2)^2}{4\xi_2}} \Big|_{s=s_0}. \quad (33)$$

**ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ  
ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ  
МАТЕРИАЛОВ**

Предположим теперь, что в пластине плотность  $\rho(z)$  и параметры упругости  $E(z)$ ,  $\nu(z)$  непрерывно зависят от поперечной координаты  $z$ :  $z_- \leq z \leq z_+$ ,  $H = z_+ - z_-$ . Рассматривая эту ситуацию как предельный переход от пластины с растущим числом слоев исчезающе малой толщины и полагая  $\Delta z_j = z_{j+1} - z_j$ , получаем для плотности и жесткостей

$$\rho = \sum_j \rho_j \Delta z_j \rightarrow \int_{z_-}^{z_+} \rho(z) dz, \quad (34)$$

$$d_1 = \sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j \Delta z_j \rightarrow \int_{z_-}^{z_+} \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} dz, \quad (35)$$

$$\nu_1 = \frac{1}{d_1} \sum_j \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right)_j \Delta z_j \rightarrow \frac{1}{d_1} \int_{z_-}^{z_+} \frac{\nu(z) E(z)}{1-\nu^2(z)} dz,$$

$$d_3 = \frac{1}{3} \sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j (z_{j+1}^3 - z_j^3) = \sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j \Delta z_j \left( \frac{\Delta z_j^2}{3} + z_{j+1} z_j \right) \rightarrow \int_{z_-}^{z_+} \frac{E(z) z^2}{1-\nu^2(z)} dz, \quad (36)$$

$$\nu_3 = \frac{1}{3d_3} \sum_j \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right)_j (z_{j+1}^3 - z_j^3) \rightarrow \frac{1}{d_3} \int_{z_-}^{z_+} \frac{\nu(z) E(z) z^2}{1-\nu^2(z)} dz. \quad (37)$$

$$d_2 = \sum_j \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right)_j \Delta z_j \left( \frac{z_{j+1} + z_j}{2} \right) \rightarrow \int_{z_-}^{z_+} \frac{\nu(z) E(z) z}{1-\nu^2(z)} dz, \quad (38)$$

$$d_2 = d_{12}^{(2)}, \quad d_{66}^{(2)} = -\frac{1}{2} d_2.$$

Уравнение (9) для выбора координаты нижней лицевой поверхности  $z_-$ , соответственно, примет вид

$$\sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j \Delta z_j \left( \frac{z_{j+1} + z_j}{2} \right) \rightarrow \int_{z_-}^{z_+H} \frac{E(z) z}{1-\nu^2(z)} dz = 0. \quad (39)$$

Вывод и анализ дисперсионного уравнения краевой изгибной волны далее может быть проведен так же, как и в предыдущем параграфе, изменяется лишь способ нахождения коэффициентов. Такими же прозрачными предельными переходами можно получить (при необходимости) формулы напряжений более высокого асимптотического порядка малости  $\sigma_{\alpha z}^j$  и  $\sigma_{zz}^j$  из полученных в [37–39] для слоистой пластины. Здесь они примут следующий вид

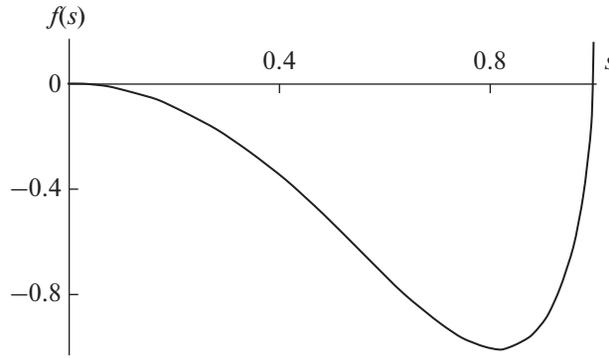


Рис. 2. Пример поведения функции  $f(s)$ .

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta z} &= \frac{\tau_{\beta}^+ + \tau_{\beta}^-}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \int_z^{z_+} - \int_z^- \right\} \partial_{\beta} \chi_{\alpha\beta}(\Gamma) \times \\ &\times (\mathbf{u}_0 - z \nabla w) dz + z \partial_{\beta} \chi_{\alpha\beta}(\Gamma) \mathbf{u}_0 - \\ &- \frac{z}{2} \partial_{\beta} \chi_{\alpha\beta}(\Gamma) \nabla w, \quad \sigma_{zz} = \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ (z_+ - z) \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^+ + (z_- - z) \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^- \right\} - \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \int_z^{z_+} - \int_z^- \right\} \rho(z) dz \cdot \partial_r^2 w, \end{aligned} \quad (40)$$

при дополнительном требовании отсутствия нормальных напряжений  $\sigma^{\pm} = 0$  и касательных напряжений  $\boldsymbol{\tau}^{\pm} = (\tau_1, \tau_2)^{\pm} = 0$  на лицевых поверхностях пластины при  $z = z_{\pm}$ . Заметим, что в напряжении  $\sigma_{zz}$  при этом останется только инерционная составляющая.

**ОБОБЩЕНИЯ МОДЕЛИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ СЛОЕВ**

Пусть теперь материал каждого слоя трансверсально изотропен с направлением анизотропии поперек пластины. Предположим, что в плоскости изотропии  $x_1, x_2$  материал слоя имеет модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ , а в любой поперечной плоскости (содержащей ось  $z = x_3$ ) эти параметры равны  $E', \nu'$  и дополнены независимым модулем сдвига  $\mu'$ . Как следствие, получаем, что эффективные жесткости  $\gamma_{pq} \equiv \det \mathbf{G}_q^p / \det \mathbf{G}_0$  ( $pq = 11, 12, 22, 66$ ) в слое выражаются в тех же обозначениях и теми же формулами (8) и не зависят от  $E', \nu', \mu'$ . Соответственно, результаты как для слоистой пластины, так и для пластины из функционально-градиентного материала с зависимостью упругих и инерционных параметров от

координаты  $z$  будут полностью аналогичными предыдущим.

**ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ**

Рассмотрим двухслойную пластину из материала 1 с плотностью  $\rho_1 = 2700 \text{ кг/м}^3$ , постоянными Ламе  $\lambda_1 = 56.618 \text{ ГПа}, \mu_1 = 25.613 \text{ ГПа}$  и материала 2 с параметрами  $\rho_2 = 1060 \text{ кг/м}^3, \lambda_2 = 30.501 \text{ ГПа}, \mu_2 = 14.018 \text{ ГПа}$ . Как легко видеть, материал 2 “низкоскоростной” со скоростями продольных и поперечных волн почти втрое ниже, чем у материала 1.

Толщину слоя 1 примем равной  $h_1 = 2 \text{ см}$ , а толщину слоя 2 будем варьировать следующим образом  $h_2 = 2; 5; 40 \text{ см}$  для вариантов 1, 2, 3 соответственно.

Искомый корень  $s$  уравнения (26) во всех случаях оказывается близок к 1. Пример поведения функции  $f(s)$  для варианта 3 показан на рис. 2. Полученные в результате решения уравнения (26) нормированные значения скорости изгибной кромочной волны приведены на рис. 3а. Здесь величины  $c_2^{(1)}, c_2^{(2)}$  обозначают скорости сдвиговых волн в слоях 1 и 2. По горизонтали отложено безразмерное значение частоты  $\omega \left( \frac{h_1}{c_2^{(1)}} + \frac{h_2}{c_2^{(2)}} \right)$ .

Пусть теперь толщина всей пластины равна  $H = 2 \text{ см}$  и ее упругие и инерционные параметры изменяются в пределах от значений для материала 1 до значений для материала 2. Вариант 1 предполагает линейный закон изменения по толщине для всех параметров  $(\lambda(z), \lambda_{\alpha} \leftrightarrow \mu(z), \mu_{\alpha}; \rho(z), \rho_{\alpha})$ :

$$\lambda(z) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{z - z_-}{H}. \quad (41)$$

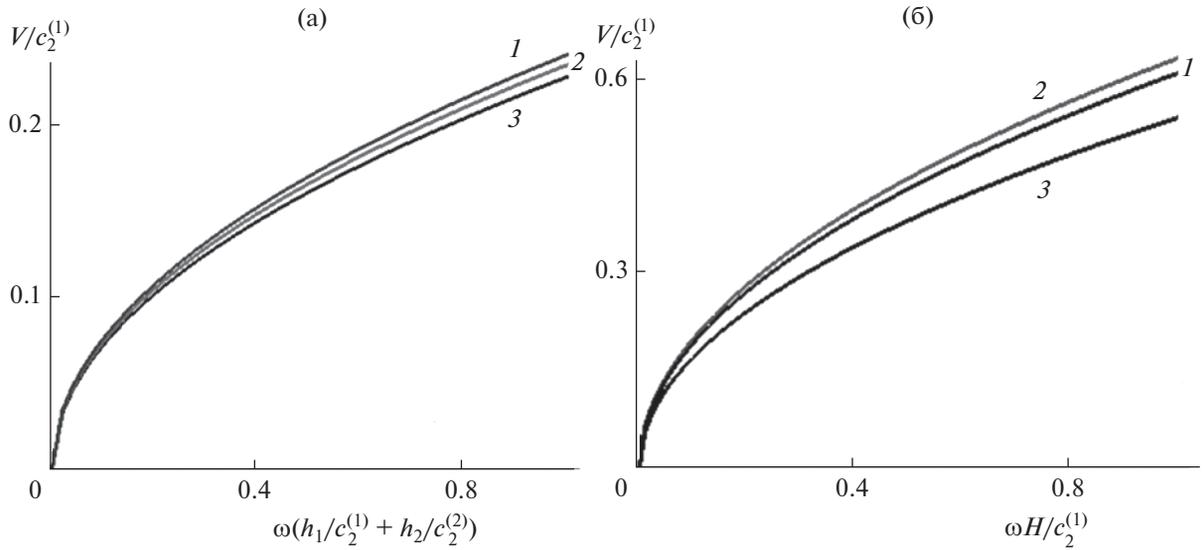


Рис. 3. Примеры дисперсионных кривых для вариантов 1, 2, 3 в случае (а) слоистой пластины и (б) пластины из функционально-градиентного материала.

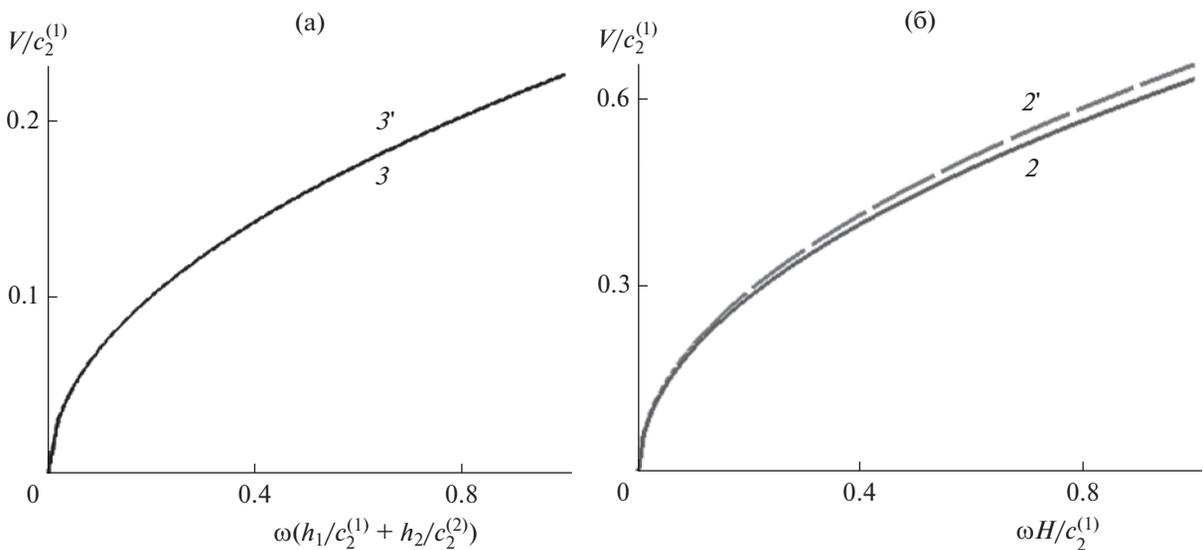


Рис. 4. Изгибная кромочная волна. (а) – Слоистая пластина в варианте 3:  $a = 0$  (штриховая кривая),  $a \neq 0$  (сплошная кривая). (б) – Слоистая пластина в варианте 2:  $a = 0$  (штриховая кривая),  $a \neq 0$  (сплошная кривая).

Для варианта 2 закон изменения по толщине для всех параметров примем квадратичным

$$\lambda(z) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \left( \frac{z - z_-}{H} \right)^2, \quad (42)$$

и для варианта 3 закон изменения для всех параметров примем экспоненциальным

$$\lambda(z) = \lambda_1 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{z_- - z}{H}}. \quad (43)$$

Пересчет осредненных параметров для уравнений пластины по формулам (34)–(38) и решение дисперсионного уравнения дают дисперсионные кривые, показанные на рис. 3б. Предварительно находится оптимальное расположение системы координат из решения уравнения (39).

Отметим, что наиболее существенное влияние на результат оказывает величина параметра  $a$  (30) и распределение параметров материала по толщине пластины. Например, для слоистой пластины в варианте 3 решение уравнения (26) практически не отличается от решения Коненкова (28)

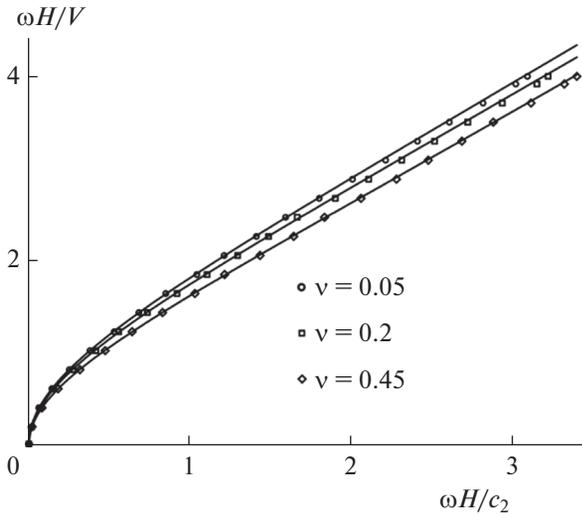


Рис. 5. Изгибная кромочная волна. Расчет по итерационной формуле (46) (сплошные линии), конечно-элементный расчет (кружки, квадраты, ромбы).

при  $a = 0$ . Соответствующая дисперсионная кривая показана пунктиром и помечена номером со штрихом на рис. 4а, а сплошной кривой показано решение полного уравнения (26) при  $a \neq 0$ . Здесь они практически неразличимы.

Для пластины из функционально-градиентного материала (вариант 2) отличие решения Коненкова, не учитывающего связность изгиба и плоского напряженного состояния, от решения для полного уравнения более существенно. Соответствующие дисперсионные кривые показаны на рис. 4б с аналогичными обозначениями.

## ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный подход позволяет получить основные соотношения для кромочной волны в замкнутом виде для случая пластины:

1) из изотропных и трансверсально-изотропных слоев с произвольной несимметричной укладкой;

2) из функционально-градиентных материалов такого же типа, со свойствами, непрерывно зависящими от поперечной координаты.

Полученные в явном виде результаты достаточно просты для параметрического анализа и для расчета дисперсионных кривых. В частности, сразу обнаруживается вид поправки к известному уравнению Коненкова, зависящей от приведенных коэффициентов Пуассона изгибной и плоской задачи и от отношения коэффициентов жесткости для этих задач к мембранно-изгибной жесткости. Влияние этой поправки на дисперси-

онные кривые может быть существенным. Сами уравнения движения для каждой из задач разделяются за счет оптимизации расположения системы отсчета по толщине, хотя связность краевых условий в этих задачах остается.

Заметим, что полученные результаты справедливы для низких частот и длинных волн, т.е. для “фундаментальных” дисперсионных кривых изгибных кромочных волн с относительной погрешностью  $O(\varepsilon^2)$  для главных членов разложения нормального прогиба и вектора продольных перемещений в асимптотический ряд ( $L$  – длина волны)

$$\begin{aligned} w &= L\varepsilon^{-3}(w_0 + \varepsilon w_1 + \dots), \\ \mathbf{u} &= L\varepsilon^{-2}(\mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{u}_1 + \dots), \quad (\varepsilon = h/L). \end{aligned} \quad (44)$$

Для более коротких волн требуется учет более сложных компонент следующих асимптотических порядков. Согласно [40], для однослойной изотропной пластины соответствующее изменение основного оператора (уравнений движения) с погрешностью  $O(\varepsilon^8)$  имеет вид

$$\begin{aligned} &d_3 \Delta^2 w + 2\rho h \times \\ &\times \left\{ 1 + a_0 h^2 \Delta + a_1 \frac{h^2}{c_2^2} \partial_t^2 + a_2 \frac{h^4}{c_2^2} \partial_t^2 \Delta \right\} \partial_t^2 w = 0, \\ &a_0 = \frac{7\nu - 17}{15(1 - \nu)}, \quad a_1 = \frac{422 - 424\nu - 33\nu^2}{1050(1 - \nu)}, \\ &a_2 = \frac{32 - 96\nu + 261\nu^2 - 197\nu^3}{15750(1 - \nu)}. \end{aligned} \quad (45)$$

Как было показано в [20], для кромочной изгибной волны именно операторная поправка оказывается главным фактором, а коррекция краевых условий – второстепенным. Тогда дисперсионную кривую можно уточнять итерационным способом, начиная с результата с погрешностью  $O(\varepsilon^2)$  в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\omega H}{c_2} \left\{ \sum_{k=0}^n B_k \left( \frac{\omega H}{2c_2} \right)^k \right\}^{-1/2} = \\ &= \left\{ \frac{6}{-1 + 3\nu + 2\sqrt{1 - 2\nu + 2\nu^2}} \right\}^{1/2} \left( \frac{V}{c_2} \right)^2, \\ &B_0 = 1, \quad B_1 = \sqrt{\frac{3(1 - \nu)}{2}} \frac{17 - 7\nu}{15(1 - \nu)}, \\ &B_2 = \frac{1179 - 818\nu + 409\nu^2}{2100(1 - \nu)}, \\ &B_3 = \sqrt{\frac{3(1 - \nu)}{2}} \frac{5951 - 2603\nu + 9953\nu^2 - 4901\nu^3}{126000(1 - \nu)^2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Итерационная формула (46) хорошо согласуется с другими известными результатами, например, с конечно-элементным расчетом [24] (показан на рис. 5 кружками, квадратами и ромбами), сопоставлением с экспериментальными измерениями (см. [20, 26]) или с численным расчетом проекционным методом (погрешность порядка 1% на высоких частотах, см. [20, 25]).

По-видимому, подобный итерационно-асимптотический подход может быть применен и к приведенной выше постановке для продвижения в область более высоких частот в качестве приближенной альтернативы более общих методов расчета, основанных на применении матрицантов и/или формализме Коши [41–43] с последующим использованием в динамических расчетах элементов тонкостенных конструкций [44].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коненков Ю.К. Об изгибной волне “рэлеевского” типа // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 1. С. 124–126.
2. Thurston R.N., McKenna J. Flexural acoustic waves along the edge of a plate // IEEE Trans. Sonics Ultrason. 1974. V. 21. P. 296–297.
3. Sinha B.K. Some remarks on propagation characteristics of ridge guide for acoustic waves at low frequencies // J. Acoust. Soc. Am. 1974. V. 56. P. 16–18.
4. Kauffmann C. A new bending wave solution for the classical plate equation // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 104. P. 2220–2222.
5. Крылов В.В. Об условиях применимости приближения геометрической акустики для волн в остроугольном твердом клине // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 2. С. 294–301.
6. Зильбергейт А.С., Суслова И.Б. Контактные волны изгиба в тонких пластинах // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 2. С. 186–191.
7. Коузов Д.П., Кравцова Т.С., Яковлева В.Г. О рассеянии вибрационных волн на узловом сочленении пластин // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 4. С. 678–684.
8. Коузов Д.П., Кравцова Т.С. О волнах, распространяющихся вдоль ребра жесткости, подкрепляющего тонкую пластину // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 1. С. 125–127.
9. Захаров Д.Д. Волны Коненкова в анизотропных слоистых пластинах // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 2. С. 205–210.
10. Zakharov D.D., Becker W. Rayleigh type bending waves in anisotropic media // J. Sound Vibr. 2003. V. 261. P. 805–818.
11. Thompson I., Abrahams I.D., Norris A.N. On the existence of flexural edge waves on thin orthotropic plates // J. Acoust. Soc. Am. 2002. V. 112. P. 1756–1765.
12. Fu Y.B. Existence and uniqueness of edge waves in a generally anisotropic elastic plate // Q. J. Mech. Appl. Math. 2003. V. 56. P. 605–616.
13. Захаров Д.Д. Изгибные кромочные волны в слоистых анизотропных средах // Изв. АН. МТТ. 2006. № 2. С. 36–47.
14. Fu Y.B., Brookes D.W. Edge waves in asymmetrically laminated plates // J. Mech. Phys. Solids. 2006. V. 54. P. 1–21.
15. Lu P., Chen H.B., Lee H.P., Lu C. Further studies on edge waves in anisotropic elastic plates // Int. J. Solids and Structures. 2007. V. 44. P. 2192–2208.
16. Piliposian G.T., Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B. Localized bending waves in a transversely isotropic plate // J. Sound Vibr. 2010. V. 329. P. 3596–3605.
17. Белубекян М.В., Енгибарян И.А. Волны, локализованные вдоль свободной кромки пластины с кубической симметрией // Изв. АН. МТТ. 1996. № 6. С. 139–143.
18. Norris A.N. Flexural edge waves // J. Sound Vibr. 1994. V. 174. № 4. P. 571–573.
19. Norris A.N., Krylov V.V., Abrahams I.D. Flexural edge waves and Comments on ‘A new bending wave solution for the classical plate equation’ // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107. P. 1781–1784.
20. Zakharov D.D. Analysis of the acoustical edge flexural mode in a plate using refined asymptotics // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V. 116. P. 872–878.
21. Burridge R., Sabina F.J. Theoretical computations on ridge acoustic surface waves using the finite element method // Electron Lett. 1971. V. 7. P. 720–722.
22. Burridge R., Sabina F.J. The propagation of elastic surface waves guided by ridges // Proc. Roy. Soc. London A. 1972. V. 330. P. 417–441.
23. Lagasse P.E. High-order finite-element analysis of topographic guides supporting elastic surface waves // J. Acoust. Soc. Am. 1973. V. 53. P. 1116–1122.
24. Liu G.R., Tani J., Ohyoshi T., Watanabe K. Characteristics of surface wave propagation along the edge of an anisotropic laminated semi-infinite plate // Wave Motion. 1991. V. 13. P. 243–251.
25. Krushinska A.A. Flexural edge waves in semi-infinite elastic plates // J. Sound Vibr. 2011. V. 330. P. 1964–1976.
26. Lagasse P.E., Oliner A.A. Acoustic flexural mode on a ridge of semi-infinite height // Electron Lett. 1976. V. 12. P. 11–13.
27. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: Физматлит, 2010. 280 с.
28. Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Rogerson G.A., Lashab M.I. The edge wave on an elastically supported Kirchhoff plate // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V. 136(4). P. 1487–1490.
29. Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Rogerson G.A. Edge bending wave of a thin elastic plate resting on a Winkler foundation // Proc. Roy. Soc. A. 2016. V. 472. P. 20160178.
30. Kaplunov J., Nobili A. The edge waves on a Kirchhoff plate bilaterally supported by a two-parameter elastic foundation // J. Vib. Control. 2017. V. 23(12). P. 2014–2022.
31. Alzaidi A.S., Kaplunov J., Prikazchikova L. Elastic bending wave on the edge of a semi-infinite plate rein-

- forced by a strip plate // *Math. and Mechanics of Solids*. 2019. V. 24(10). P. 3319–3330.
32. *Alzaidi A.S., Kaplunov J., Prikazchikova L.* The edge bending wave on a plate reinforced by a beam (L) // *J. Acoust. Soc. Am.* 2019. V. 146(2). P. 1061–1064.
33. *Глушков Е.В., Глушкова И.В., Фоменко С.И., Жанг Ч.* Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями // *Акуст. журн.* 2012. Т. 58. № 3. С. 370–385.
34. *Белянкова Т.И., Калинин В.В.* Особенности локализации волнового поля в преднапряженном функционально-градиентном слое // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 3. С. 219–234.
35. *Ватульян А.О., Юров В.О.* Анализ вынужденных колебаний в функционально-градиентном цилиндрическом волноводе // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 6. С. 649–656.
36. *Ватульян А.О., Юров В.О.* Об оценке законов радиальной неоднородности в цилиндрическом волноводе // *Акуст. журн.* 2020. Т. 66. № 2. С. 119–127.
37. *Захаров Д.Д.* Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений упругости для тонкой слоистой анизотропной пластины произвольной структуры // *ПММ.* 1992. Т. 59. Вып. 5. С. 637–644.
38. *Zakharov D.D.* Asymptotic integration of 3D dynamic equations for thin multilayered anisotropic plates // *Comptes Rendus de l'Academie des Scences, Paris II.* 1992. V. 315. № 8. P. 915–920.
39. *Zakharov D.D., Becker W.* 2-D problems of thin asymmetric laminates // *Zeitschrift fur Angewandte Matematik und Physik.* 2000. V. 51. № 4. P. 49–66.
40. *Goldenveizer A.L., Kaplunov J.D., Nolde E.V.* On Timoshenko-Reissner type theories of plates and shells // *Int. J. Solids and Structures.* 1993. V. 30. P. 675–694.
41. *Shuvalov A.L., Poncelet O., Kiselev A.P.* Shear horizontal waves in transversely inhomogeneous plates // *Wave Motion.* 2008. V. 45(5). P. 605–615.
42. *Kuznetsov S.V.* Closed form analytical solution for dispersion of Lamb waves in FG plates // *Wave Motion.* 2019. V. 84. P. 1–7.
43. *Kuznetsov S.V.* Similarity and discrepancy of Lamb wave propagation in functionally graded, stratified, and homogeneous media // *Int. J. Dynamics and Control.* 2020. V. 8. P. 717–722.
44. *Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д., Маслов В.П., Римский-Корсаков А.В.* Распространение волн в конструкциях из тонких стержней и пластин. М.: Наука, 1974. 102с.

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ  
И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ШАРА  
ПО РЕЗУЛЬТАТАМ РАССЕЯНИЯ НА НЕМ АКУСТИЧЕСКОГО ПУЧКА

© 2021 г. Л. М. Котельникова<sup>а</sup>, \*, Д. А. Николаев<sup>а</sup>, С. А. Цысарь<sup>а</sup>, О. А. Сапожников<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет,  
Ленинские горы, Москва, 119991 Россия

\*e-mail: kotelnikova.lm16@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 26.12.2020 г.

После доработки 16.04.2021 г.

Принята к публикации 23.04.2021 г.

При использовании упругих сферических рассеивателей в задачах акустики необходимо знать их основные упругие параметры, характеризующие внутренние резонансы. В настоящей работе показано, что скорости продольных и поперечных волн в твердотельном шаре могут быть определены из характеристик рассеяния ультразвукового пучка. В качестве рассеивателей рассмотрены шары из стали, стекла и нейлона миллиметровых размеров, погруженные в воду. При проведении экспериментов акустическое поле создавалось плоским пьезоэлектрическим излучателем мегагерцового диапазона частот, работающим в импульсном режиме. Путем сравнения экспериментальных данных и численных расчетов для амплитуды рассеянного поля были определены скорости и оценены коэффициенты поглощения упругих волн в материале шаров.

*Ключевые слова:* рассеяние акустических волн, упругий рассеиватель, эксперимент

DOI: 10.31857/S0320791921040079

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При взаимодействии волнового поля с телом конечного размера характеристики рассеянной волны определяются не только размерами и формой этого тела, но и его акустическими параметрами [1–5]. На практике эти параметры часто бывают неизвестными или заданными с невысокой точностью, что не позволяет количественно анализировать явления, зависящие от пространственно-временных характеристик рассеянных волн. К таким явлениям относится, например, эффект акустической радиационной силы [6].

Теоретический анализ акустической радиационной силы, действующей на упругое тело, базируется на решении задачи рассеяния, для чего важно знать основные параметры используемого в экспериментах рассеивателя, характеризующие внутренние резонансы, такие как размер, плотность, скорости продольных и сдвиговых волн. При рассмотрении упругого рассеивателя его геометрические характеристики можно непосредственно измерить, плотность – вычислить, зная объем и найденную взвешиванием массу, в то время как скорости упругих волн в рассеивателе малого размера не могут быть измерены простым образом. Эти скорости зависят не только от химического состава, но и от внутреннего строения, определяемого способом производства и процес-

сами обработки, поэтому эти значения могут варьироваться для объектов одного и того же состава, но разных партий [7, 8]. В результате указанные производителем величины упругих модулей (которые и определяют скорости волн) могут не соответствовать реальным значениям.

Упругие объекты являются в той или иной степени проницаемыми для звука. В частности, падающие на сферический рассеиватель (шар) акустические волны возбуждают в нем внутренние колебания, которые вносят заметный вклад в вид рассеянного поля, что можно видеть в угловом распределении амплитуды и суммарной рассеянной энергии [9, 10]. Данные колебания связаны с резонансными явлениями внутри рассеивателя, обусловленными как объемными, так и поверхностными волнами (волнами Франца, Рэлея и модами шепчущей галереи) [11–20]. Поскольку эти явления зависят от физических свойств рассеивателя, то изучение особенностей рассеяния может быть использовано для экспериментального определения неизвестных упругих скоростей.

Существует множество методов расчета акустического рассеяния на упругом шаре. В приближении падения на непоглощающий шар плоской бегущей волны имеется точное решение задачи в виде бесконечного ряда расходящихся от

рассеивателя волн, описываемых сферическими гармониками. Особенности решения при таком описании были исследованы и подтверждены экспериментально в ряде работ [9, 10, 16, 21]. Такой подход может быть применен для расчета рассеяния на сферических объектах относительно небольших размеров, для  $ka < 100$ , где  $k$  – волновое число,  $a$  – радиус сферы. Поскольку при больших значениях  $ka$  становятся значительными ошибки округления при вычислении специальных функций, а необходимое количество членов соответствующих рядов становится большим, то уменьшается точность и заметно возрастает время, затрачиваемое на расчеты. Кроме того, хотя этот подход позволяет достаточно легко описать рассеяние, он не дает физической интерпретации особенностей полученного рассеянного поля. Такую интерпретацию дают другие методы расчета, например, подход, основанный на преобразовании Ватсона–Зоммерфельда, который позволяет рассчитывать рассеяние волн при  $ka > 30$  [12, 22], или методика, основанная на теории резонансного акустического рассеяния [11, 13, 15].

Ранее были предложены методы определения неизвестных скоростей упругих волн в шарах, погруженных в жидкость, по результатам измерения рассеяния назад плоской волны [8, 23–27]. В основном эти методы были рассчитаны на определение упругих параметров шаров, используемых для калибровки гидроакустического оборудования, поэтому в приведенных работах их диаметры составляли от 20 до 90 мм для частот до 300 кГц. Шар помещался в дальнее поле излучателя, а расчеты проводились в приближении падения на рассеиватель плоской волны. Использование этого приближения указывалось как одна из причин некоторых отклонений по амплитуде эксперимента от теории. Измеренный сигнал рассеянного поля намного превышал уровень шума, что давало возможность проанализировать тонкие детали спектра рассеянной волны. Но при уменьшении размеров рассеивателя сигнал рассеянного поля неизбежно станет слабее, поэтому для шаров миллиметровых размеров, представляющих практический интерес, такие способы могут оказаться неточными.

В работе [28] была показана возможность исследования рассеянного поля в направлении распространения падающей волны, что было решено использовать в настоящей работе для определения скоростей упругих волн внутри рассеивателя. Использование такого метода является удобным для указанных целей в силу относительно несложных манипуляций с точки зрения юстировки (для размещения рассеивателя на акустической оси излучателя) и возможности измерения акустического поля недалеко от рассеивателя без внедрения искажений в структуру падающей волны.

Как было отмечено выше, расчет параметров в приближении плоской падающей волны уменьшает точность нахождения скоростей упругих волн в материале рассеивателя. Это вызвано тем, что при использовании реальных излучателей падающее на рассеиватель акустическое поле в большинстве случаев заметно отличается от плоской волны. Для повышения точности расчетов необходимо учитывать неоднородную пространственную структуру падающей волны, что можно сделать либо исходя из модельных предположений о структуре колебаний поверхности используемого излучателя (например, в предположении поршневого характера колебаний источника), что также ограничивает точность, либо, если такая возможность имеется, применив метод акустической голографии [29].

В настоящей работе предложен метод определения скоростей и коэффициентов затухания продольных и сдвиговых волн в твердотельных сферических объектах миллиметрового размера на основе измерения характеристик рассеяния ультразвукового пучка: частотной зависимости амплитуды рассеяния вперед и углового распределения рассеянного поля. Описана экспериментальная установка для наблюдения рассеяния на шарах. Путем сопоставления экспериментальных результатов и численного моделирования, максимально приближенного к условиям эксперимента, определены неизвестные скорости и коэффициенты затухания.

## 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

### 2.1. Описание рассеяния плоской волны на упругом шаре

Прежде чем переходить к случаю сложной реальной структуры поля падающей на рассеиватель волны, рассмотрим описание процесса рассеяния идеализированной плоской акустической волны. В качестве рассеивателя рассмотрим погруженный в идеальную жидкость изотропный упругий шар, внутри которого в общем случае возбуждаются и продольные, и сдвиговые волны. Впервые решение такой задачи было приведено в работе [9]. Кратко приведем здесь постановку и необходимые для дальнейшего рассмотрения результаты решения задачи рассеяния, используя обозначения, введенные в работе [30].

Пусть на упругий шар радиуса  $a$  падает монохроматическая плоская волна:

$$p_i = p_0 e^{ikz} = p_0 e^{ikr \cos \theta}, \quad (1)$$

где  $p_0$  – комплексная амплитуда падающей волны,  $k = \omega/c = 2\pi f/c$  – волновое число,  $c$  – скорость звука в иммерсионной жидкости,  $z$  – расстояние вдоль направления распространения падающей волны,  $r, \theta, \varphi$  – сферические координаты (в силу

симметрии задачи нет зависимости от азимутального угла  $\varphi$ ), начало координат совмещено с центром шара, угол  $\theta = 0^\circ$  соответствует направлению распространения волны,  $z = r \cos \theta$  (рис. 1).

Для описания волнового поля на поверхности рассеивателя задаются соответствующие граничные условия: 1) давление в жидкости, взятое с обратным знаком, равно нормальной компоненте напряжения в рассеивателе; 2) тангенциальные компоненты сдвиговых напряжений в рассеивателе равны нулю; 3) нормальная компонента колебательной скорости при переходе через границу не меняется.

Учитывая, что падающая плоская волна представляется в виде разложения в бесконечный ряд при разделении функций угловой и радиальной переменных [31]:

$$p_i = p_0 e^{ikr \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} p_0 i^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad (2)$$

решение поставленной задачи для акустического давления рассеянного поля удобно также искать в виде аналогичного разложения. Выбор сферической функции, описывающей зависимость решения от расстояния, определяется условием излучения при выделении только расходящихся от рассеивателя волн:

$$p_s = \sum_{n=0}^{\infty} p_0 i^n (2n+1) c_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta). \quad (3)$$

Здесь  $P_n(\cos \theta)$  – полиномы Лежандра,  $h_n^{(1)}(\xi) = j_n(\xi) + i n_n(\xi)$  – сферическая функция Ханкеля 1-го рода, где  $j_n(\xi)$  и  $n_n(\xi)$  – сферические функции Бесселя и Неймана, соответственно. Коэффициенты при членах ряда, найденные из указанных выше граничных условий, выражаются следующим образом:

$$c_n = -\frac{\Gamma_n j_n(ka) - ka j_n'(ka)}{\Gamma_n h_n^{(1)}(ka) - ka h_n^{(1)'}(ka)}, \quad (4)$$

где штрих означает производную по полному аргументу соответствующих функций. Величины  $c_n$  характеризуют рассеяние и зависят от известных свойств иммерсионной жидкости и материала шара, а именно от скорости звука  $c$  и плотности жидкости, плотности материала шара, а также комбинаций  $k_1 a$ ,  $k_2 a$ , где  $k_1 = \omega/c_1$ ,  $k_2 = \omega/c_2$ ,  $c_1$  и  $c_2$  – скорости продольных и поперечных волн в рассеивателе соответственно. Коэффициенты  $\Gamma_n$  зависят только от комбинаций  $k_1 a$ ,  $k_2 a$ , плотностей шара  $\rho_*$  и жидкости  $\rho$ :

$$\Gamma_n = \frac{\rho k_1^2 a^2 \alpha_n \delta_n + \beta_n \chi_n}{2\rho_* \alpha_n \eta_n + \beta_n \varepsilon_n}, \quad (5)$$

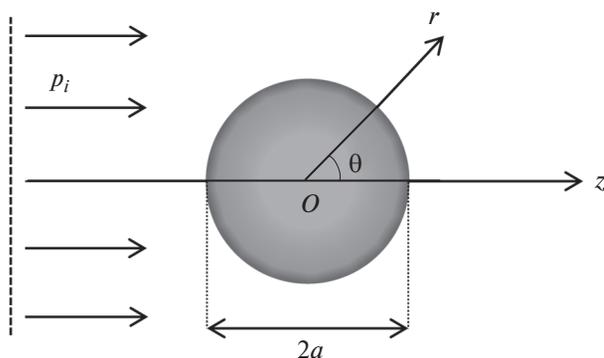


Рис. 1. Падение плоской волны на сферу. Система координат.

где  $\alpha_n = j_n(k_1 a) - k_1 a j_n'(k_1 a)$ ,  $\delta_n = 2n(n+1) j_n(k_1 a)$ ,  $\beta_n = (n^2 + n - 2) j_n(k_1 a) + k_1^2 a^2 j_n''(k_1 a)$ ,  $\chi_n = k_1 a j_n'(k_1 a)$ ,  $\eta_n = 2n(n+1) [j_n(k_1 a) - k_1 a j_n'(k_1 a)]$ ,  $\varepsilon_n = k_1^2 a^2 \times [j_n(k_1 a) \sigma / (1 - 2\sigma) - j_n''(k_1 a)]$ .

Важной характеристикой рассеяния является сечение рассеяния, определяемое как  $\Sigma_s = W_s / I_i$ , где  $W_s$  – мощность рассеянной волны,  $I_i$  – интенсивность падающей волны. Учитывая асимптотику сферической функции Ханкеля при больших значениях аргумента  $h_n^{(1)}(z) \approx (-i)^{n+1} e^{iz} / z$ , используя оптическую теорему [21] и принимая в расчет выражение для рассеянного поля (3), можно получить следующее выражение для сечения рассеяния, нормированного на площадь поперечного сечения  $\pi a^2$ :

$$\frac{\Sigma_s}{\pi a^2} = -\frac{4}{k^2 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \text{Re}(c_n). \quad (6)$$

Зависимость сечения рассеяния от частоты  $f = \omega / (2\pi)$  или от параметра  $ka = 2\pi f a / c$  отражает общий характер поведения рассеянного поля с увеличением частоты, а наличие в зависимости пиков и провалов говорит о резонансных явлениях внутри шара, влияющих на вид рассеянного поля. Сечение рассеяния зависит от плотности материала шара, скорости звука в воде, скоростей продольных  $c_l$  и сдвиговых  $c_t$  волн.

Численные расчеты рассеянного поля и сечения рассеяния для оценок используемых в экспериментах рассеивателей по формулам (3)–(6) проводились в среде MATLAB, которая содержит большое количество встроенных функций, в частности, рассчитывающих полиномы Лежандра, функции Бесселя и Неймана. Сферические функции Бесселя  $j_n(\xi)$  и Неймана  $n_n(\xi)$  вычисля-

лись по определению  $j_n(\xi) = \sqrt{\pi/(2\xi)} J_{n+1/2}(\xi)$ ,  $n_n(\xi) = \sqrt{\pi/(2\xi)} N_{n+1/2}(\xi)$ , где  $J_n(\xi)$ ,  $N_n(\xi)$  – функции Бесселя и Неймана, соответственно. Количество членов бесконечного ряда, используемое при расчетах по формулам (3) и (6), составляло  $N_{\max} = (3...5)ka$  и было достаточным для сходимости [32].

## 2.2. Учет поглощения в материале рассеивателя

Известно, что при рассеянии акустических волн на металлических сферах поглощение на низких частотах пренебрежимо мало, поэтому в расчетах его можно не учитывать. Однако для других материалов это не всегда так. Учет поглощения в материале рассеивателя удобно проводить введением мнимой части в волновые числа для продольных и поперечных волн [33–35]:

$$\begin{aligned} k_l &= \frac{\omega}{c_l} + i\alpha_l = \frac{\omega}{c_l}(1 + itg\delta_l), \\ k_t &= \frac{\omega}{c_t} + i\alpha_t = \frac{\omega}{c_t}(1 + itg\delta_t), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\alpha_l$ ,  $\alpha_t$  – коэффициенты поглощения,  $tg\delta_l$ ,  $tg\delta_t$  – тангенсы угла потерь для продольных и сдвиговых волн, соответственно.

Волновые числа  $k_l$  и  $k_t$  входят в состав аргументов сферических функций Бесселя и их производных, фигурирующих в определении коэффициентов  $G_n$ . При вышеприведенной модификации волновых чисел указанные аргументы становятся комплексными. Так как MATLAB позволяет находить значения функций Бесселя (через которые выражаются сферические функции Бесселя) для комплексных аргументов, то не составляет труда проводить расчет рассеяния с учетом поглощения.

## 2.3. Рассеяние ультразвукового пучка на углу шаре

Не существует бесконечно протяженных источников звука, способных обеспечить формирование плоской волны. Все физически реализуемые акустические источники создают ограниченные звуковые пучки. Поэтому на практике амплитуда падающей на поверхность рассеивателя волны в разных точках поверхности будет разной, а волновой фронт отличен от плоского. Если падающая на рассеиватель волна мало отличается от плоской, то можно с определенными оговорками продолжать использовать теорию плоской волны для расчета рассеянного поля, но при увеличении неоднородности волны это приближение работает все хуже, что приводит к потере части сведений о параметрах рассеивателя, которые можно было бы определить по измеренной ам-

плитуде. В связи с этим возникает необходимость для повышения точности определения неизвестных параметров рассеивателя в теоретических расчетах учитывать пространственную структуру падающего на рассеиватель пучка.

Численный расчет рассеянного поля, вызванного падением акустического пучка на упругий шар, в настоящей работе проводился на основании теоретического подхода, описанного в статье [30].

Пусть на упругий шар радиуса  $a$  падает монохроматический волновой пучок. Так как любой волновой пучок может быть представлен в виде суперпозиции плоских волн разных направлений, а для каждой из этих плоских волн решение задачи рассеяния известно, то решение для рассеянной волны в общем случае представляется в виде суперпозиции выражений вида (3). Указанное решение преобразуется к более компактному виду при использовании теоремы сложения для сферических гармоник, что позволяет представить комплексную амплитуду акустического давления в рассеянном поле в виде следующего разложения в ряд по сферическим гармоникам [30]:

$$P_s = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n s_{nm} t_n^{(1)}(kr) Y_{nm}(\theta, \varphi). \quad (8)$$

Здесь  $Y_{nm}(\theta, \varphi)$  – сферические гармоники. Коэффициенты разложения  $s_{nm}$  представляются в виде  $s_{nm} = i^n c_n H_{nm} / \pi$ , где выражение для коэффициентов  $c_n$  было определено ранее (формула (4)), а  $H_{nm} = \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2} dk_x dk_y S(k_x, k_y) Y_{nm}^*(\theta_k, \varphi_k)$  – коэффициенты, которые полностью задают падающее поле, характеризующееся угловым спектром  $S(k_x, k_y)$ . Выражения для углов  $\theta_k$ ,  $\varphi_k$  приводятся в работе [30]. Угловой спектр пучка можно найти по формуле:

$$S(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy P(x, y, z_H) e^{-ik_x x - ik_y y}, \quad (9)$$

где  $P(x, y, z_H)$  – комплексная амплитуда акустического давления в поперечной плоскости, проходящей через центр шара, на расстоянии  $z_H$  от излучателя. Это распределение может быть найдено экспериментально или рассчитано с помощью интеграла Рэлея при известном характере колебаний поверхности излучателя [29]:

$$P(\mathbf{r}) = -\frac{ikc\rho}{2\pi} \int \frac{V_n(x', y', 0) e^{ikR}}{R} dx' dy', \quad (10)$$

где  $V_n(x', y', 0)$  – колебательная скорость на поверхности излучателя,  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ,  $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$ , интегрирование ведется по поверхности излучателя. В случае круглого поршневого излучателя

$V_n(\mathbf{r}') \equiv V_0 = \text{const}$  при  $x'^2 + y'^2 \leq a_{\text{изл}}^2$ ,  $V_n(\mathbf{r}') \equiv 0$  при  $x'^2 + y'^2 > a_{\text{изл}}^2$ ,  $a_{\text{изл}}$  – радиус излучателя.

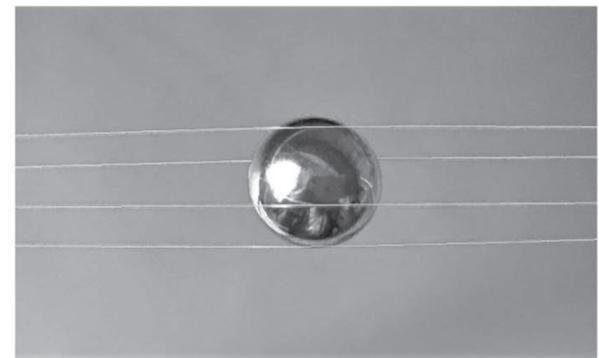
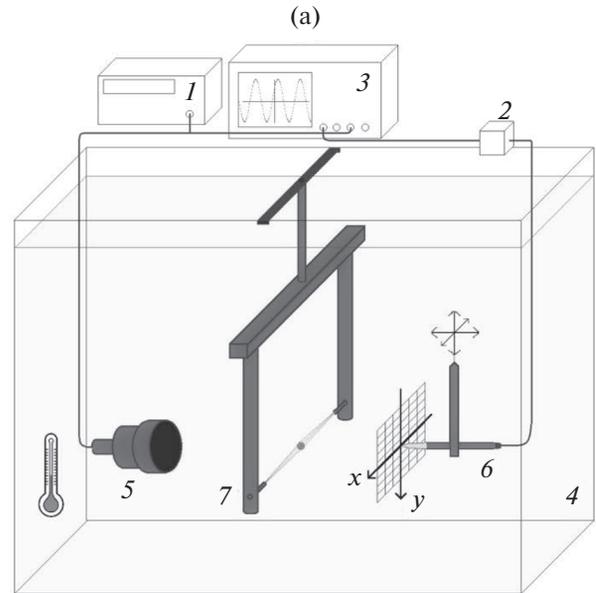
### 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

#### 3.1. Экспериментальная установка

На рис. 2а схематично изображена экспериментальная установка. В бассейн с дегазированной водой помещался плоский пьезокерамический широкополосный излучатель диаметром 38 мм (V392, Olympus, USA) с центральной частотой 1 МГц. На излучатель с генератора подавался импульсный сигнал, состоящий из трех периодов синусоидального сигнала. Центральные частоты используемых в экспериментах импульсов для разных рассеивателей указаны в табл. 1. Благодаря малой длительности излучаемого сигнала, имелась возможность исследовать рассеянное поле в достаточно широкой полосе частот. Измерение акустического сигнала осуществлялось с помощью гидрофона капсульного типа (Onda HGL-0200, USA) с диаметром чувствительного элемента 200 мкм. Во время сканирования акустического поля гидрофон перемещался с помощью системы микропозиционирования (UMS-3, Precision Acoustics, UK) вдоль трех взаимно перпендикулярных осей. Рассеиватель крепился с использованием системы натянутых рыболовных лесок, которые во время измерений фиксировали шар на определенном расстоянии от излучателя (рис. 2б), а малый диаметр лесок (35.7 мкм) позволял не учитывать их влияние на акустическое поле. Использовались лески Berkley NanoFil (Pure Fishing, Inc., США), представляющие собой гибрид плетеного шнура и монофильной лески.

В экспериментах использовались шары из нержавеющей стали марки 95X18-III диаметрами  $d = 2.8\text{--}6$  мм, стекла (натриево-кальциево-силикатное стекло – кристаллическое стекло) диаметрами  $d = 4\text{--}8$  мм и нейлона (полиамид 6.6) диаметрами  $d = 4\text{--}8$  мм, которые размещались на расстоянии 350 мм от излучателя на его акустической оси. Диаметры измерялись микрометром с ценой деления 0.01 мм. Масса шарика измерялась на электронных весах с точностью 0.001 г. Зная массу и диаметр шара, была вычислена его плотность. Погрешность измерения плотности в итоге составляла 0.2–1.8% (см. табл. 1). Вариация плотностей в пределах указанных погрешностей не влияла на величину рассеянного поля. Также в таблице 1 приведены значения плотностей стали, стекла и нейлона на основе справочных данных [36–39].

Металлическая рамка представляла собой П-образную конструкцию из двух вертикальных стержней круглого поперечного сечения



**Рис. 2.** (а) – Схема экспериментальной установки: 1 – генератор, 2 – предусилитель, 3 – осциллограф, 4 – бассейн с водой, 5 – излучатель, 6 – гидрофон, 7 – металлическая рамка с натянутыми лесками; (б) – крепление рассеивателя с помощью системы натянутых лесок.

длиной 20 см, отстоящих друг от друга на 20 см и прикрепленных верхними торцами к горизонтально расположенному прямоугольному стержню (см. рис. 2а). Вблизи нижних концов стержней были просверлены отверстия, в которые помещались небольшие вставки, содержащие отверстия меньшего диаметра для продевания и закрепления лесок. Использовались четыре лески, которые натягивались в промежутке между стержнями. Лески разводились так, чтобы за счет созданного натяжения между ними можно было устойчиво закрепить шарик (см. рис. 2б).

При рассеянии волн на шарике, закрепленном между лесками, металлическая рамка оказывалась вне области зондирующего акустического пучка, что позволяло избежать паразитного рассеяния падающего поля на рамке.

**Таблица 1.** Характеристики рассеивателей и входные параметры

Материал шара	Диаметр шара $d$ , мм	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Плотность из справочных данных, кг/м <sup>3</sup>	Расстояние от центра шара до гидрофона $x$ , мм	Центральная частота импульса, МГц
Сталь	$2.763 \pm 0.005$	$7480 \pm 60$	7500–8200	20.2	1.0
	$4.744 \pm 0.005$	$7490 \pm 24$		35.3	0.85
	$5.989 \pm 0.005$	$7710 \pm 18$		59.7	1.1
Стекло	$3.967 \pm 0.006$	$2552 \pm 23$	2240–2800	23.1	1.0
	$6.10 \pm 0.02$	$2653 \pm 26$		34.4	0.9
	$7.981 \pm 0.006$	$2477 \pm 6$		49.2	1.1
Нейлон	$3.945 \pm 0.005$	$1104 \pm 20$	1020–1130	19.5	1.1
	$5.930 \pm 0.007$	$1088 \pm 7$		39.1	1.0
	$5.958 \pm 0.007$	$1074 \pm 6$		39.1	1.0
	$7.990 \pm 0.007$	$1119 \pm 6$		58.69	1.0

На определенном расстоянии от центра шара, на котором, согласно расчетам, рассеянное поле по величине было сравнимо с падающим, измерялись профили акустического давления вдоль вертикальной оси  $y$ , проходящей через акустическую ось, из которых были найдены амплитуда и фаза. Выбор расстояния производился так, чтобы сигнал от рассеянного поля был достаточно сильным для минимизации влияния шумов. Расстояние от центра шара до гидрофона в центральной точке измерений, лежащей на акустической оси излучателя, а также другие параметры приведены в табл. 1. В течение эксперимента с помощью термометра измерялась температура воды, которая составляла  $22.0 \pm 0.1^\circ\text{C}$  и не менялась в ходе измерений.

### 3.2. Методика измерений и обработки экспериментальных данных

Обработка экспериментальных данных и численные расчеты рассеянного поля проводились в среде MATLAB.

Для используемых в эксперименте шаров по формуле (6) были рассчитаны сечения рассеяния в зависимости от частоты, при этом были взяты следующие значения скоростей продольных  $c_l$  и сдвиговых  $c_t$  волн в рассеивателе: для стали  $c_l = 5900$  м/с,  $c_t = 3340$  м/с, для стекла  $c_l = 5920$  м/с,  $c_t = 3420$  м/с, для нейлона  $c_l = 2620$  м/с,  $c_t = 1080$  м/с (данные значения были представлены производителем шаров RGPBALLS SRL, Италия). Для уточнения указанных значений  $c_l$  и  $c_t$ , ориентируясь на полученные частотные зависимости сечения рассеяния, для каждого шара был выбран диапазон частот, содержащий резонансные области, чувствительные к малым изменениям упругих скоростей. Для проведения эксперимента ис-

пользовался импульс малой длительности, спектр которого покрывал выбранный для данного шара диапазон частот, а несущая частота импульса соответствовала центральной точке диапазона (см. табл. 1).

На расстоянии 350 мм от излучателя с помощью сканирования поля в поперечной плоскости находилась центральная точка зарегистрированного аксиально-симметричного двумерного распределения амплитуды волны. Она считалась точкой акустической оси, в которую следовало поместить центр исследуемого рассеивателя. Для этого после окончания сканирования гидрофон сначала перемещался на найденную осевую точку участка сканирования, а затем отодвигался на несколько миллиметров в направлении от излучателя. Далее в бассейн опускалась рамка с укрепленным между натянутых лесок шариком так, чтобы центр шарика оказывался непосредственно перед чувствительным участком гидрофона. Таким способом достигалось размещение шара на акустической оси излучателя на заданном расстоянии от излучателя с точностью менее 1 мм. Как следует из расчетов, амплитуда рассеянного поля при смещении шара на 1 мм в поперечном направлении от акустической оси изменяется по величине в точке максимума не более чем на 2% (в зависимости от выбранного шара и частоты) относительно амплитуды при симметричном расположении шара в поле излучателя. Также можно считать, что на положение характерных минимумов и максимумов в частотной характеристике такое смещение не влияет. В данном случае точность размещения рассеивателя на акустической оси была лучше, чем 1 мм, поэтому можно считать, что небольшое возможное отклонение шара от оси не влияло на результат измерений.

Расстояние от шара до излучателя  $x_1$  находилось по измерению времени, за которое сигнал

проходил путь от излучателя до шара и обратно после отражения от поверхности шара, ближней к излучателю.

После того как шар был зафиксирован в нужном положении, в присутствии шара на некотором расстоянии от его центра, где планировалось измерять рассеянное поле, с помощью сканирования поля в поперечной плоскости находилась точка с максимальной амплитудой (эта точка при симметричном расположении рассеивателя в поле излучателя лежит на акустической оси). Найденная точка становилась центральной точкой в последующих измерениях рассеянного поля на оси  $y$ . Расстояние от этой точки до излучателя  $x_2$  определялось позже, после удаления шарика, путем измерения времени задержки прихода излучаемого сигнала на гидрофон. Расстояние от центра шара до гидрофона  $x$  находилось по формуле  $x = x_2 - x_1 - d/2$  (см. табл. 1).

Для каждого шара на фиксированном расстоянии  $x_2$  от излучателя вдоль вертикальной оси  $y$  (поперек акустической оси излучателя) было измерено акустическое поле при наличии шара (полное поле) и при его отсутствии (падающее поле). Путем вычитания комплексных амплитуд полного и падающего полей находилась комплексная амплитуда рассеянной волны, которая после нормировки на амплитуду падающего поля в центре шара использовалась для теоретического анализа. Амплитуду падающего поля в центре шара, с одной стороны, можно измерить гидрофоном. С другой стороны, зная амплитуду падающего поля в центральной точке измерений (для удобства), частоту, соответствующую данной амплитуде, и диаметр излучателя, можно рассчитать амплитуду поля излучателя на месте расположения шарика, используя интеграл Рэлея. Сравнение рассчитанных таким способом амплитуд на месте шарика с экспериментально измеренными показывает хорошее совпадение. Относительное расхождение на рассматриваемых частотах не превысило 1%; следовательно, такой способ нахождения амплитуды поля на месте шарика можно использовать с целью сокращения количества измерений и времени проведения эксперимента, что важно для гарантии неизменности внешних условий эксперимента.

Чтобы проверить влияние температурных вариаций во время проведения измерений, сигналы падающего поля измерялись в одной и той же точке в разные моменты времени, разделенные временным интервалом в 10–15 мин, что соответствовало времени между последовательными измерениями полного и падающего полей. Сдвига фаз сигналов в течение этого времени не происходило, что указывало на неизменность скорости звука в воде с течением времени и, следовательно, на постоянство температуры.

Отдельно было проверено, что крепление не влияет на полученное рассеянное поле. Были проведены измерения падающего поля излучателя при наличии металлической рамки и системы лесок без шарика и при отсутствии рамки. Показано, что вышеприведенные сигналы, а также их спектральные амплитуды и фазы совпадают, то есть рамка и лески не вносят вклада в рассеянное поле и их присутствием можно пренебречь. Другой эффект, который мог быть вызван креплениями, — это демпфирование колебаний рассеивателя (затухание поверхностных волн) в точке контакта шаров и крепежных лесок, что могло бы вызвать изменение формы экспериментальных резонансных кривых по сравнению с рассчитанными в теории. Но подобного влияния лесок при анализе результатов рассеяния замечено не было, т.е. они были достаточно тонкими и поэтому имели слишком малую площадь контакта с рассеивателем, чтобы ощутимо на него воздействовать.

Период дискретизации сигналов гидрофона составлял 8 нс, ширина временного окна — 100 мкс. Проверялось отсутствие в измерениях волн, переотраженных от стенок резервуара или излучателя, путем увеличения частоты следования импульсов до тех пор, пока на экране осциллографа не начинали появляться переотраженные сигналы, после чего частота следования импульсов уменьшалась для исключения подобных наложений. При обработке в рамках упомянутого 100 мкс окна выделялось более узкое окно для локализации основного импульса. Это позволило исключить вклад от переотражений между шаром и гидрофоном и внутри гидрофона, а также уменьшить шумы, возникающие при измерениях. В то же время окно выбиралось достаточно протяженным, чтобы как можно дольше регистрировать сигнал рассеянного поля, “хвост” которого тянется за основным сигналом некоторое время и содержит в себе вклады от переизлучаемых в жидкость волн, возбуждаемых в рассеивателе. Этот “хвост” рассеянного сигнала важен для проявления в спектре рассеянного сигнала резонансных провалов и пиков, определяющих характеристики рассеивателя. Описанное уменьшение ширины исходного временного окна при обработке уменьшает фактическое разрешение по частоте, отбрасывая часть рассеянных слабых сигналов, и поэтому сглаживает реальные резонансные особенности. В связи с этим в теоретических расчетах также вводилось временное окно, используемое при обработке экспериментальных данных, для приближения результатов теоретических расчетов к условиям получения экспериментальных кривых.

Для выделенной части сигнала с помощью преобразования Фурье вычислялся спектр сигнала. Частотный диапазон, используемый для анализа, был ограничен частотами, на которых модуль спектральной амплитуды падающего поля спадал

в 10 раз от максимального значения для данного импульса.

Измерения на оси  $u$  дали угловое распределение амплитуды рассеянного поля; отдельно для анализа было взято измерение в центральной точке этого распределения, лежащей на акустической оси, с целью получения частотной зависимости амплитуды рассеяния вперед. При анализе рассеяния было выяснено, что частотная зависимость амплитуды рассеяния вперед по сравнению с угловым распределением более чувствительна к изменениям  $c_l$  и  $c_t$ , поэтому именно она использовалась для нахождения неизвестных скоростей. Кроме того, характерными особенностями в угловом распределении являются минимумы рассеянного поля, положение которых определяется с большей погрешностью из-за спада сигнала на этих углах практически до нуля и возрастания роли шумов, вносящих погрешности в их определение.

Для определения скоростей продольных  $c_l$  и сдвиговых  $c_t$  волн использовался следующий функционал:

$$\chi^2(c_l, c_t) = \sum_{n=1}^N \left( \left| \left( P_s^{\text{exp}} \right)_n \right| - \left| \left( P_s(c_l, c_t) \right)_n \right| \right)^2. \quad (11)$$

Здесь  $P_s^{\text{exp}}$  – экспериментально измеренная амплитуда,  $P_s(c_l, c_t)$  – численно рассчитанная по формуле (8) (или по формуле (3) в приближении падения на шар плоской волны),  $N$  – количество разных частот, на которых рассматривалось рассеяние вперед, или количество различных пространственных точек, в которых измерялось угловое распределение рассеянного поля. Варьируя значения  $c_l$ ,  $c_t$  и минимизируя функционал (11), были определены указанные скорости. Возможно рассмотрение других совокупностей аргументов функционала: например, зависимости только от одной переменной  $\chi^2(c_t)$ .

Если по результатам измерений было видно, что заметную роль играло поглощение (в случае нейлоновых шаров), то предварительно по степени сглаженности экспериментальной зависимости амплитуды рассеяния вперед оценивались тангенсы углов потерь, введенные согласно формуле (7), учитывая, что продольные волны поглощаются намного слабее сдвиговых.

Были оценены погрешности найденных скоростей продольных и сдвиговых волн, обусловленные предложенным методом и некоторой несферичностью шаров.

Для косвенной проверки полученных значений были сравнены результаты экспериментальных измерений на оси  $u$  с численными расчетами. Наилучшее совпадение двух кривых происходило при подстановке определенных выше скоростей.

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ

### 4.1. Анализ влияния различных параметров шаров на характеристики рассеянного поля

Для теоретического исследования влияния различных параметров на рассеянное поле проводился расчет сечения рассеяния для шаров из стали, стекла и нейлона, используемых в экспериментах. Интерес представляло изучение степени и характера влияния каждого из параметров на сечение рассеяния. Согласно расчетам, изменение плотности материала шара на 5% (это больше максимальной погрешности измерения плотности в данной работе) влияет на сечение настолько слабо, что его можно считать не зависящим от плотности шара в пределах допустимой погрешности. Влияние скорости звука на сечение рассеяния оказалось более заметным: сдвигаются положения пиков и провалов, изменяется их форма и максимальные значения. Для более точных расчетов также важно измерять скорость звука в воде в момент проведения экспериментов.

В отличие от плотности шара и скорости звука в воде, влияние скоростей продольных  $c_l$  и сдвиговых  $c_t$  волн на частотную зависимость сечения рассеяния оказалось достаточно сильным. На рис. 3 показаны зависимости нормированного сечения рассеяния от безразмерного параметра  $ka$  при вариации значений скоростей сдвиговых  $c_t$  (рис. 3а) и продольных  $c_l$  (рис. 3б) волн для нейлонового шара. Видно, что положение и форма пиков и провалов сильно зависят от значений упругих скоростей. Однако на низких частотах резонансы определяются главным образом сдвиговыми волнами: вариация значений скорости продольных волн вызывает лишь малые изменения по частоте и амплитуде, не заметные по сравнению с аналогичными изменениями, вносимыми вариацией скорости поперечных волн. На более высоких частотах появляется зависимость сечения рассеяния от скорости продольных волн.

Аналогичные частотные зависимости можно построить для амплитуды рассеяния в направлении вперед и получить качественно такие же результаты. Таким образом, в частотных диапазонах, содержащих резонансные пики или провалы, рассеянное поле оказывается чувствительным к малым изменениям скоростей продольных и сдвиговых волн. В то же время рассеянное поле слабо меняется при изменении остальных параметров, определяющих рассеяние. Это дает возможность использовать частотные или угловые зависимости амплитуды рассеянного поля в этих частотных диапазонах для определения скоростей упругих волн.

Наряду со скоростями волн и плотностью, важным параметром являются тангенсы углов потерь для различных типов волн в рассеивателе. На

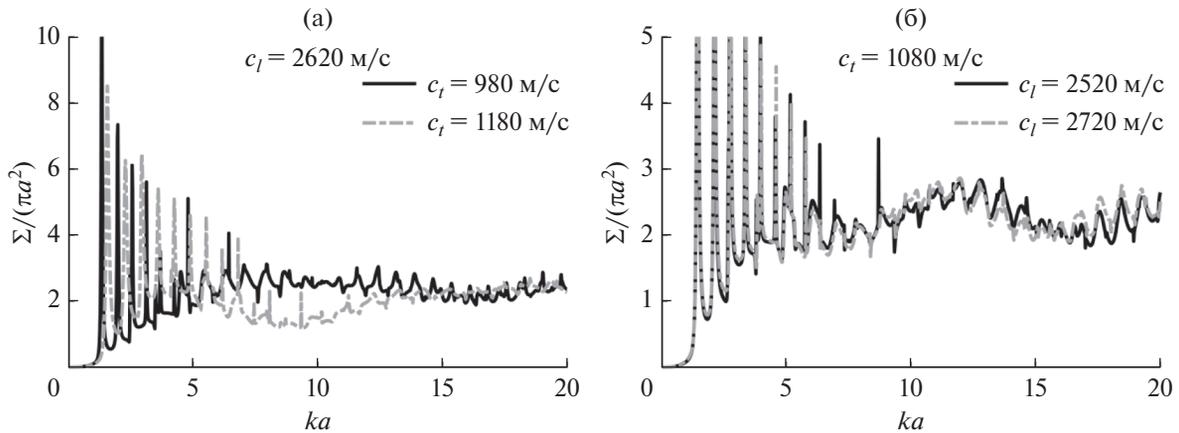


Рис. 3. Сечение рассеяния, нормированное на площадь поперечного сечения шара, в зависимости от безразмерного параметра  $ka$  при вариации величин (а) скоростей сдвиговых волн  $c_t$  и (б) продольных волн  $c_l$  для нейлонового шара.

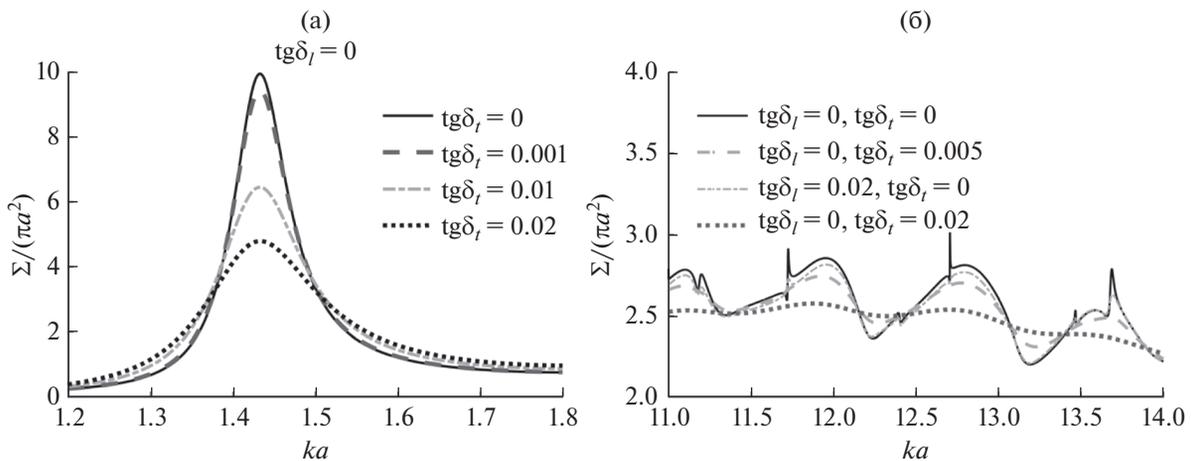


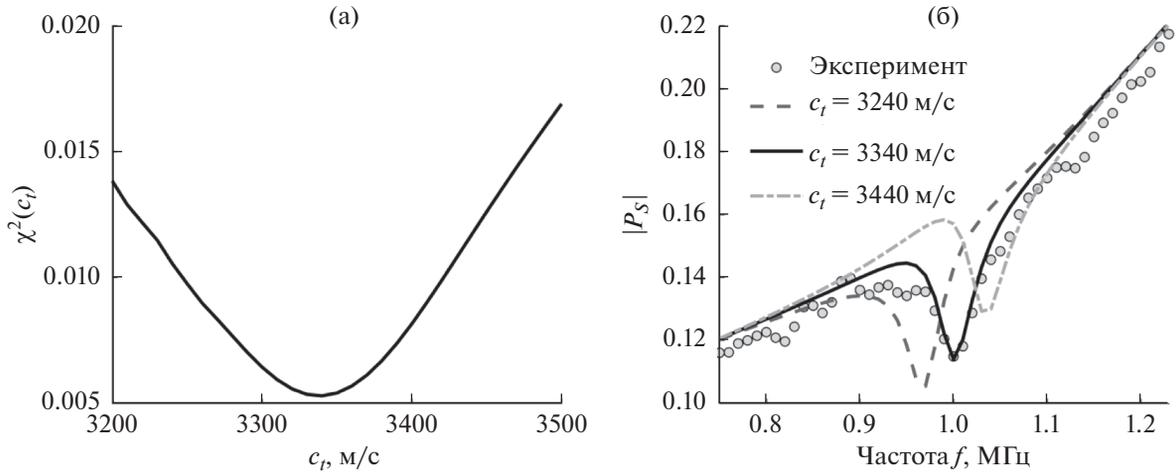
Рис. 4. Сечение рассеяния, нормированное на площадь поперечного сечения шара, в зависимости от параметра  $ka$  при вариации тангенса угла потерь продольных  $tg \delta_l$  и сдвиговых  $tg \delta_t$  волн в разных диапазонах по  $ka$ .

рис. 4 изображены частотные зависимости нормированного сечения рассеяния при появлении в расчетах ненулевых тангенсов углов потерь. Так как низкочастотные резонансы обусловлены в большей степени сдвиговыми волнами, то уширения такого резонанса при увеличении тангенса угла потерь продольных волн не происходит. При увеличении тангенса угла потерь сдвиговых волн  $tg \delta_t$ , амплитуда резонанса уменьшается, а ширина увеличивается (рис. 4а). Таким образом, резонансная кривая, обусловленная сдвиговыми волнами, уширяется при появлении в материале рассеивателя эффекта поглощения сдвиговых волн. Высокочастотные резонансы обусловлены обоими типами упругих волн, но степень зависимости от скорости сдвиговых волн все равно больше. На рис. 4б показано сглаживание резонансов при увеличении тангенса угла потерь как продольных, так и сдвиговых волн. Зависимость резонансов преимущественно от скорости сдвиговых

волн проявляется в более сильном уширении резонансов при увеличении  $tg \delta_t$ . Уширение резонансных кривых при увеличении  $tg \delta_t$  также происходит, но гораздо медленнее. Таким образом, основной вклад учета поглощения заключается в сглаживании резонансных кривых, при этом на некоторых частотах, например, между резонансными пиками, амплитуда может даже увеличиваться по сравнению со случаем без поглощения.

#### 4.2. Определение неизвестных параметров твердых шаров на основе экспериментального исследования характеристик рассеяния

**4.2.1. Исследование свойств стальных шаров.** Эксперименты проводились для трех стальных шаров разных размеров (см. табл. 1). В стали поглощение звука на рассматриваемых частотах мало и им можно пренебречь. Наименьший среди



**Рис. 5.** Результаты для стального шара диаметром 2.8 мм. (а) – Сумма квадратов отклонений точек экспериментальной и численно рассчитанной частотных зависимостей амплитуд рассеяния вперед в зависимости от величины скорости сдвиговых волн  $\chi^2(c_t)$ . Минимум этой зависимости соответствует искомой скорости сдвиговых волн в рассеивателе. (б) – Амплитуда рассеяния вперед в зависимости от частоты: точки – экспериментально измеренные значения, сплошные кривые – численно рассчитанные для указанных скоростей сдвиговых волн  $c_t$ . Амплитуда рассеянной волны нормирована на амплитуду падающего поля в центре шара.

представленных стальных шаров имеет диаметр 2.8 мм. Было выяснено, что на рассматриваемых частотах расхождение амплитуд рассеянного поля, вычисленных для случаев падения на этот шар ультразвукового пучка и плоской волны, составляет меньше 1%. Поэтому для определения неизвестных параметров рассеивателя достаточно использовать приближение плоской волны.

Для данного шара при расчете рассеяния в мегагерцовом диапазоне частот резонансы, чувствительные к величине скорости продольных волн, не обнаруживаются. Поэтому в этом диапазоне частот можно определить только скорость сдвиговых волн. Сравнивая экспериментальную зависимость амплитуды рассеяния вперед от частоты с численно рассчитанной по формуле (3) и минимизируя сумму квадратов отклонений точек этих зависимостей друг от друга путем варьирования скоростей сдвиговых волн  $c_t$  при  $c_t = \text{const}$  (рис. 5а), была определена неизвестная скорость  $c_t = 3340 \pm 15$  м/с. На рис. 5б изображена экспериментальная зависимость амплитуды рассеяния вперед, а также представлены численно рассчитанные зависимости для трех скоростей сдвиговых волн, одна из которых ( $c_t = 3340$  м/с) хорошо приближает численные расчеты к экспериментальной зависимости. Отсутствие гладкости в экспериментальной зависимости может быть связано с попаданием в регистрируемый сигнал переотраженных сигналов между шаром и гидрофоном вследствие небольшого расстояния между ними, которое пришлось использовать для уменьшения влияния шумов, так как рассеяние

от малого объекта слабое, а рассеянное поле быстро убывает с расстоянием от рассеивателя.

Так как для стальных шаров диаметрами 4.75 и 6 мм становится заметным спадание падающего поля на краях шара, то численный расчет следует проводить с учетом пространственной структуры пучка. Комплексная амплитуда акустического давления, созданного излучателем, в поперечной плоскости, проходящей через центр шара, рассчитывалась с помощью интеграла Рэлея. Далее с помощью двумерного преобразования Фурье (9) находился угловой спектр  $S(k_x, k_y)$ , использующийся в расчетах коэффициентов, определяющих рассеяние.

Для стального шара диаметром 4.75 мм ситуация аналогична приведенной выше: в выбранном диапазоне частот сечение рассеяния практически не изменяется при изменении скорости продольных волн в пределах допустимых значений, вследствие чего возможно определить только скорость сдвиговых волн (см. табл. 2). Результаты экспериментальных измерений и численных расчетов изображены на рис. 6 (верхний ряд).

Слабая зависимость сечения рассеяния от  $c_t$  говорит о слабом влиянии этой физической величины на рассеяние в данном диапазоне частот для данного шара. Значит, можно считать, что все параметры, обуславливающие характер рассеяния и связанные с ним явления, были определены.

Сечение рассеяния стального шара диаметром 6 мм в мегагерцовом диапазоне частот зависит от скоростей как продольных, так и поперечных волн, поэтому обе скорости могут быть определены.

**Таблица 2.** Определение параметров стальных шаров.

Результаты экспериментов				Справочные данные [36, 37]
диаметр $d$ , мм	обозначение, мм	$c_t$ , м/с	$c_l$ , м/с	
$2.763 \pm 0.005$	2.8	$3340 \pm 15$	—	$c_t = 3180\text{--}3340$ м/с $c_l = 5680\text{--}6100$ м/с
$4.744 \pm 0.005$	4.75	$3190 \pm 15$	—	
$5.989 \pm 0.005$	6	$3245 \pm 10$	$5930 \pm 50$	

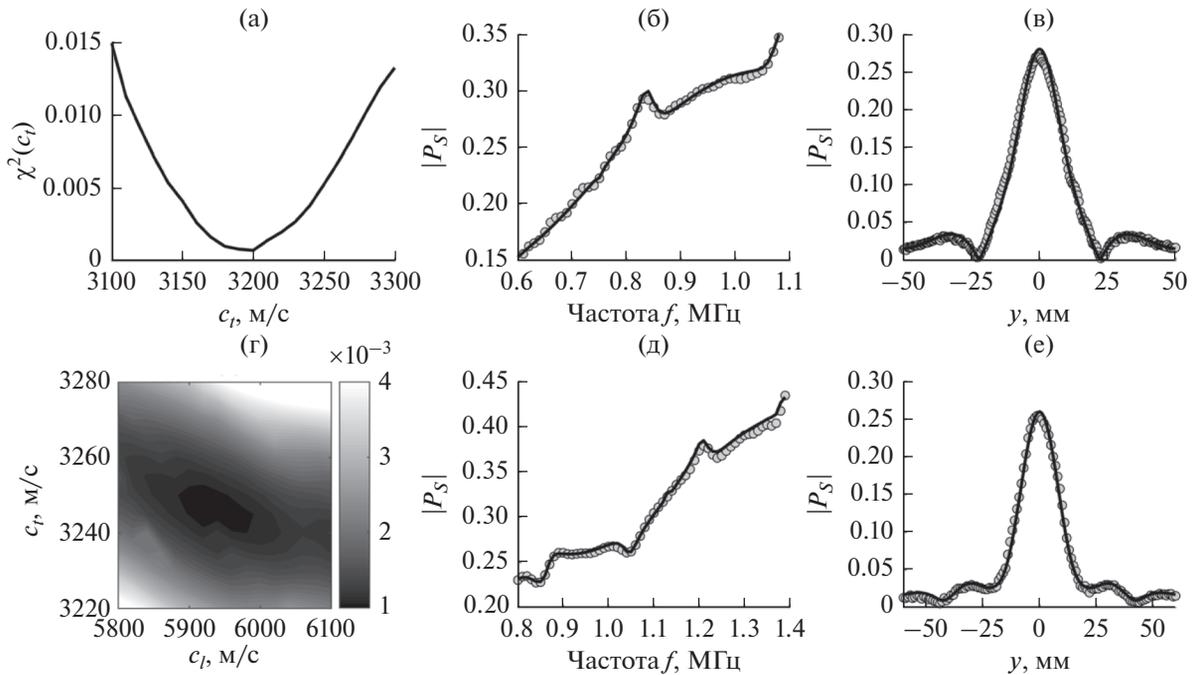
ны по результатам измерений рассеянного поля. Варьируя скорости продольных и сдвиговых волн (рис. 6г) и минимизируя отклонение экспериментальной частотной зависимости амплитуды рассеяния вперед от численно рассчитанной, были определены скорости продольных и поперечных волн (см. рис. 6, нижнюю часть, и табл. 2).

Были сопоставлены результаты экспериментальных измерений с численными расчетами для найденных упругих скоростей. На рис. 6б, 6д изображены экспериментальные и численно рассчитанные кривые, соответствующие частотным зависимостям амплитуды рассеяния вперед, для которых была приведена минимизация. На рис. 6в, 6е приведены результаты экспериментальных изме-

рений на оси  $y$  и численные расчеты; минимизация для данных экспериментальных точек не проводилась в силу меньшей чувствительности распределения на оси  $y$  к изменениям упругих скоростей.

Для скоростей  $c_l$ , которые определить не удалось вследствие слабой зависимости от них рассеянного поля, для расчетов использовались значения, указанные производителем, причем вариация значений скоростей в пределах справочных значений (табл. 2) не влияла на результат расчетов.

Заметим, что для жестких материалов изначально можно выделять частотные диапазоны, рассеяние в которых зависит только от скорости



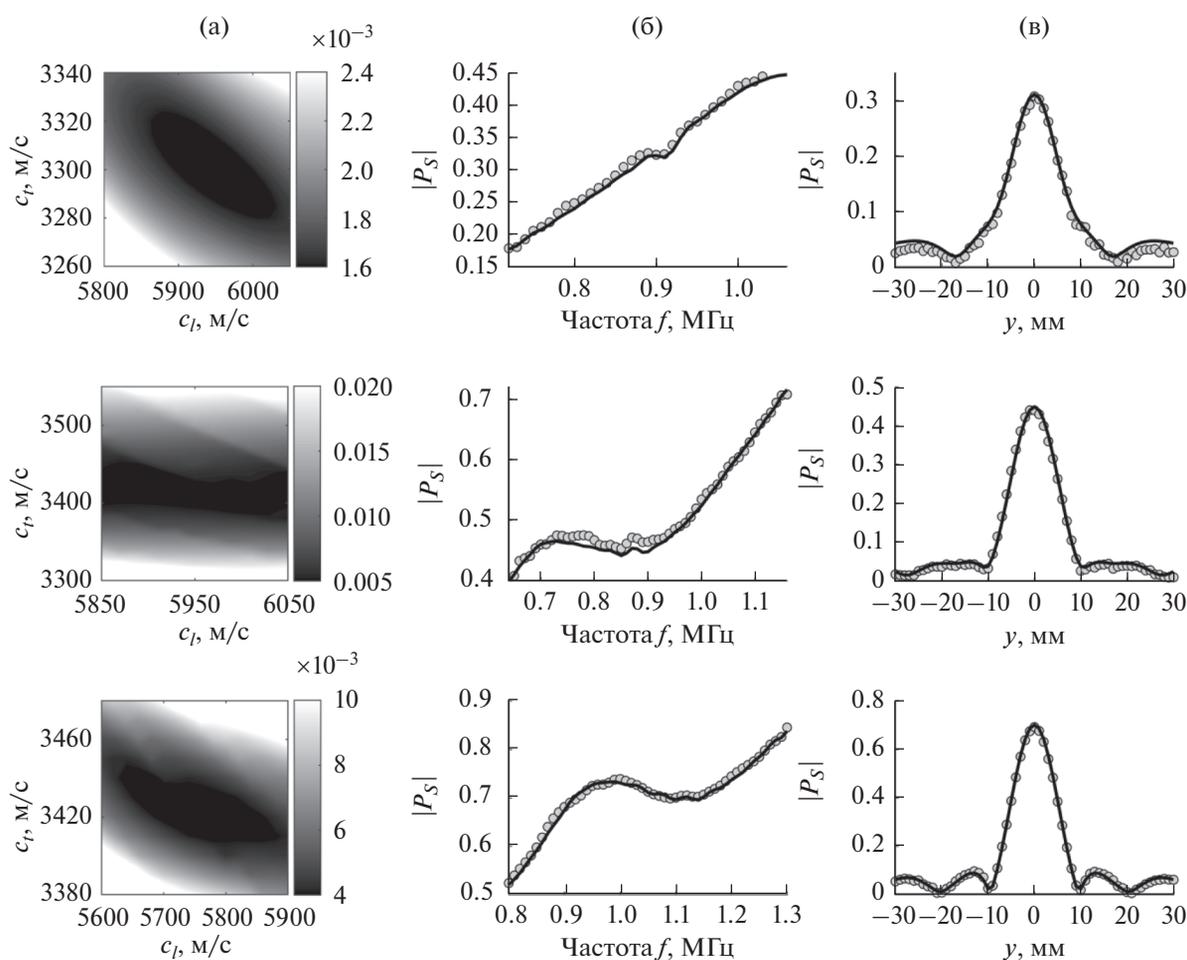
**Рис. 6.** Результаты для стальных шаров диаметрами 4.75 мм (верхний ряд) и 6 мм (нижний ряд). Сумма квадратов отклонений точек экспериментальной и численно рассчитанной частотных зависимостей амплитуд рассеяния вперед для (а) шара 4.75 мм в зависимости от скорости сдвиговых  $c_t$  волн  $\chi^2(c_t)$  и (г) для шара 6 мм в зависимости от значений скоростей сдвиговых  $c_t$  и продольных  $c_l$  волн  $\chi^2(c_t, c_l)$ ; (б, д) амплитуда рассеяния вперед в зависимости от частоты; (в, е) амплитуда рассеянного поля в зависимости от координаты  $y$  на частотах 0.83 МГц (сверху) и 1.04 МГц (снизу). Точки – экспериментально измеренные значения, кривые – численно рассчитанные для найденных значений  $c_t$  и  $c_l$  (указаны в табл. 2). Амплитуда рассеянной волны нормирована на амплитуду падающего поля в центре шара.

**Таблица 3.** Определение параметров стеклянных шаров

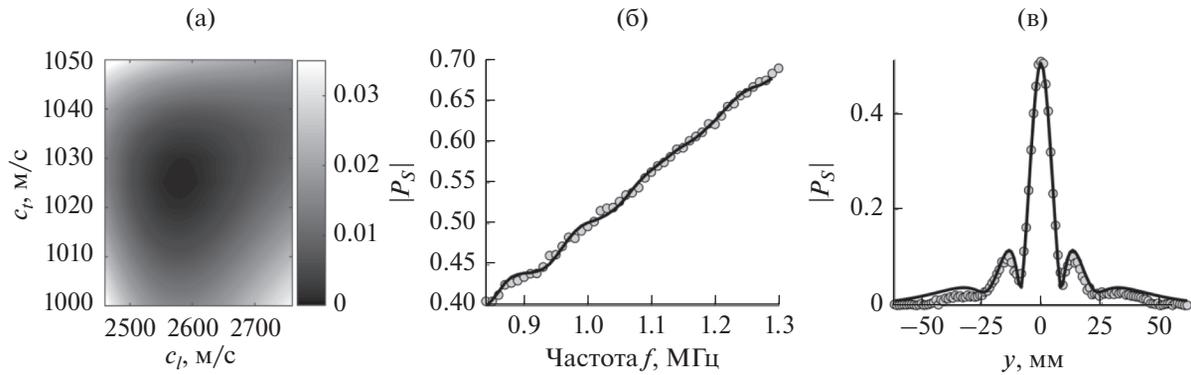
Результаты экспериментов				Справочные данные [36–38]
диаметр $d$ , мм	обозначение, мм	$c_t$ , м/с	$c_l$ , м/с	
$3.967 \pm 0.006$	4	$3300 \pm 15$	$5950 \pm 50$	$c_t = 3400\text{--}3740$ м/с $c_l = 5570\text{--}6000$ м/с
$6.104 \pm 0.019$	6.1	$3420 \pm 30$	–	
$7.981 \pm 0.006$	8	$3425 \pm 15$	$5740 \pm 100$	

сдвиговых волн  $c_t$ , и исходя из экспериментальных данных в этом диапазоне определять  $c_t$ . Затем проводить измерения в той области частот, где есть зависимость от скорости продольных волн  $c_l$  и, зная скорость  $c_t$ , определенную из предыдущей итерации, находить  $c_l$ .

**4.2.2. Исследование свойств стеклянных шаров.** В случае стеклянных шаров при анализе рассеяния не было выявлено заметных эффектов поглощения звука в материале шара, поэтому была использована вышеприведенная методика, описанная для стальных шаров, с учетом про-



**Рис. 7.** Результаты для стеклянных шаров диаметрами 4, 6.1 и 8 мм (сверху вниз). (а) — Сумма квадратов отклонений точек экспериментальной и численно рассчитанной частотных зависимостей амплитуд рассеяния вперед в зависимости от скорости сдвиговых  $c_t$  и продольных  $c_l$  волн ( $\chi^2(c_t, c_l)$ ); (б) — амплитуда рассеяния вперед в зависимости от частоты; (в) — амплитуда рассеянного поля в зависимости от координаты  $y$  на частотах 0.91, 0.9 и 1.1 МГц (сверху вниз). Точки — экспериментально измеренные значения, сплошные кривые — численно рассчитанные для найденных значений  $c_t$  и  $c_l$  (указаны в табл. 3). Амплитуда рассеянной волны нормирована на амплитуду падающего поля в центре шара.



**Рис. 8.** Результаты для нейлонового шара диаметром 4 мм. (а) – Сумма квадратов отклонений точек экспериментальной и численно рассчитанной частотных зависимостей амплитуд рассеяния вперед в зависимости от скорости сдвиговых  $c_t$  и продольных  $c_l$  волн ( $\chi^2(c_t, c_l)$ ); (б) – амплитуда рассеяния вперед в зависимости от частоты; (в) – амплитуда рассеянного поля в зависимости от координаты  $y$  на частоте 1 МГц. Точки – экспериментально измеренные значения, сплошные кривые – численно рассчитанные для найденных значений  $c_t$  и  $c_l$  (указаны в табл. 4). Амплитуда рассеянной волны нормирована на амплитуду падающего поля в центре шара.

странственной структуры пучка. Определенные скорости приведены в табл. 3. Результаты измерений и численных расчетов изображены на рис. 7.

Так как величина рассеянного поля в данном диапазоне частот больше зависит от скорости сдвиговых волн, то погрешность их определения гораздо меньше, чем для величины скорости продольных волн. Для шара диаметром 6.1 мм величину  $c_l$  определить не удалось из-за ее слабого влияния на вид рассеянного поля (вторая строка на рис. 7), а для двух других шаров  $c_l$  определяется с большой погрешностью.

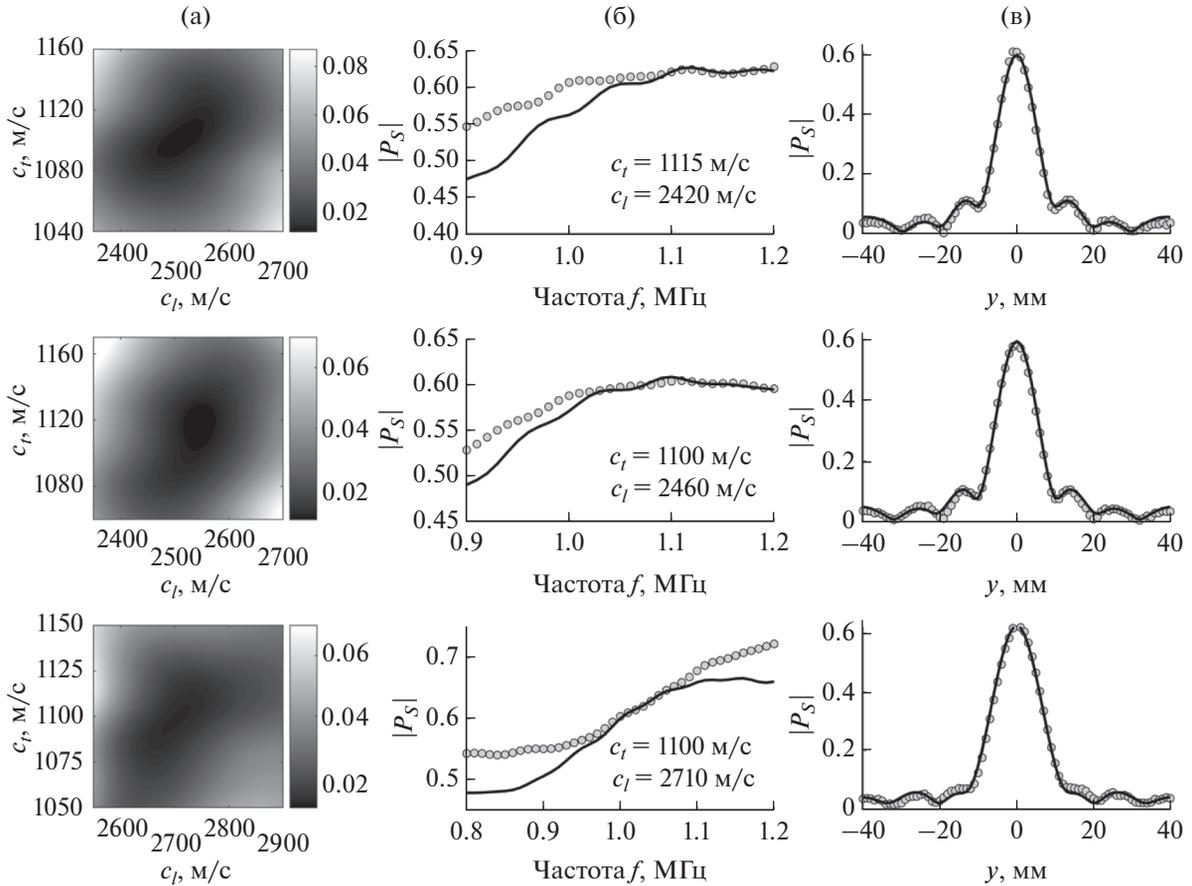
**4.2.3. Исследование свойств нейлоновых шаров.**

В отличие от стальных и стеклянных шаров, в которых поглощение звука настолько мало, что им можно пренебречь, в нейлоновых шарах наличие поглощения заметно и сильно видоизменяет рассеянное поле, поэтому его необходимо учитывать в расчетах. Чтобы оценить влияние поглощения, были проведены эксперименты с нейлоновыми шарами диаметрами 4, 6 и 8 мм.

Хороших результатов удалось достичь в эксперименте с шаром диаметром 4 мм. Предварительно по степени сглаженности экспериментальной зависимости амплитуды рассеяния вперед оценивались тангенсы углов потерь, введенные согласно формуле (7). Затем, используя полученные приблизительные значения тангенсов углов потерь, находились скорости упругих волн путем минимизации отклонения экспериментальной частотной зависимости амплитуды рассеяния от соответствующей теоретической зависимости. После этого были уточнены тангенсы углов потерь сдвиговых и продольных волн. Известно, что продольные волны в нейлоне поглощаются намного слабее сдвиговых. Вместе с тем резонансы в нейлоне зависят в большей степени от скорости сдвиговых волн. В результате точность определения тангенса угла потерь продольных волн гораздо ниже, но и сама определяемая величина на порядок меньше и влияет на рассеяние также слабо. Результаты приведены на рис. 8, значения определенных величин – в табл. 4.

**Таблица 4.** Определение параметров нейлоновых шаров

Результаты экспериментов					
диаметр $d$ , мм	обозначение, мм	$c_t$ , м/с	$c_l$ , м/с	$\text{tg } \delta_t$	$\text{tg } \delta_l$
$3.945 \pm 0.005$	4	$1025 \pm 5$	$2580 \pm 25$	$0.025 \pm 0.002$	$\sim 0.005 \pm 0.005$
$5.930 \pm 0.007$	6	$1100 \pm 15$	$2510 \pm 40$	$0.020 \pm 0.005$	–
$5.958 \pm 0.007$	6	$1120 \pm 15$	$2550 \pm 30$	$0.020 \pm 0.005$	–
$7.990 \pm 0.007$	8	$1100 \pm 15$	$2700 \pm 50$	$0.020 \pm 0.005$	–
Справочные данные [36–39] $c_t = 900\text{--}1100$ м/с			$c_l = 1800\text{--}2650$ м/с		



**Рис. 9.** Результаты для нейлоновых шаров диаметрами 6 мм (два верхних ряда) и 8 мм (нижний ряд). (а) – Сумма квадратов отклонений точек экспериментальной и численно рассчитанной угловых зависимостей амплитуд рассеянного поля в зависимости от скорости сдвиговых  $c_t$  и продольных  $c_l$  волн на частотах 1.12, 1.1 МГц для шаров 6 мм и 1.05 МГц для шара 8 мм (сверху вниз) ( $\chi^2(c_t, c_l)$ ); (б) – амплитуда рассеяния вперед в зависимости от частоты; (в) – амплитуда рассеянного поля в зависимости от координаты  $y$  на тех же частотах. Точки – экспериментально измеренные значения, сплошные кривые – численно рассчитанные: (б) – для указанных на графиках величин  $c_t$  и  $c_l$ , (в) – для найденных значений  $c_t$  и  $c_l$  (указаны в табл. 4). Амплитуда рассеянной волны нормирована на амплитуду падающего поля в центре шара.

При аналогичной обработке результатов эксперимента для нейлоновых шаров диаметрами 6 и 8 мм не было замечено такого набора скоростей упругих волн, при которых рассчитанные кривые частотных зависимостей амплитуд рассеяния вперед приближались бы к экспериментальным. Это несовпадение кривых может быть вызвано либо дефектами или неоднородностями в материале шара, либо неопределенностью его параметров, которые зависят от процесса производства. Для исключения случаев единичных дефектов материала были проведены эксперименты с несколькими шарами диаметрами 6 мм. Представлены результаты для двух из них. Было замечено, что в некоторых диапазонах частот численно рассчитанные частотные зависимости амплитуды рассеяния вперед накладываются на экспериментальные зависимости в окрестности

некоторых указанных на графиках значений  $c_t$  и  $c_l$  (см. рис. 9б). Ввиду этого на этих частотах для анализа было взято распределение рассеянного поля на оси  $y$ , и, минимизируя сумму квадратов отклонений точек экспериментально полученной и рассчитанной угловой зависимостей при варьировании значений  $c_t$  и  $c_l$ , были определены неизвестные скорости (см. рис. 9а, 9в; табл. 4).

В результате описанных выше измерений для нейлонового шара определялись несколько параметров: скорости продольных и сдвиговых волн, а также тангенсы углов потерь. Это можно сделать, так как разные параметры качественно по-разному влияют на рассеяние, а остальные физические величины, определяющие рассеяние, известны с необходимой точностью. Различный вклад в рассеянное поле от разных параметров приводит и к

неодинаковой относительной погрешности определения этих параметров.

Таким образом, для рассеивателей были уточнены скорости продольных и сдвиговых волн, а также оценены тангенсы углов потерь продольных и сдвиговых волн. Полученные величины лежат в диапазоне табличных значений скоростей для данных материалов.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование явлений, связанных с воздействием акустического поля на рассеиватели, требует знания характеристик рассеивателей с максимально возможной точностью. У имеющихся для проведения экспериментов рассеивателей не всегда точно известны упругие константы, так как их величина может варьироваться в зависимости от процесса производства. В результате упругие параметры шара — скорости продольных и сдвиговых волн — известны с большой погрешностью, а простых способов определения этих параметров нет.

В настоящей работе показана возможность использовать экспериментальные измерения рассеянного поля, а именно частотные зависимости амплитуд рассеяния вперед и углового распределения, для определения скоростей продольных и сдвиговых волн и оценки поглощения в упругих сферических рассеивателях миллиметрового размера.

Создана экспериментальная установка для наблюдения рассеяния на шарах миллиметровых размеров, не вносящая искажений в рассеянное поле. Разработана методика проведения эксперимента. Проведены эксперименты со стальными, стеклянными и нейлоновыми шарами диаметрами 2,8–8 мм. В расчетах рассеянного поля учитывалась пространственная структура пучка, что существенно улучшило совмещение экспериментальных и теоретических кривых. С помощью разработанной методики были уточнены скорости продольных и сдвиговых упругих волн в рассеивателях, а также оценены тангенсы углов потерь в случае нейлоновых шаров. Полученные величины лежат в диапазоне табличных значений для данных материалов.

По результатам экспериментальных измерений выяснено, что поглощение в стальных и стеклянных шарах пренебрежимо мало и не влияет на рассеяние, а в нейлоновых шарах сильно поглощаются поперечные волны, и это необходимо учитывать для соответствия теоретических расчетов экспериментальным данным.

Найденные погрешности полученных значений скоростей упругих волн лежат в диапазоне 0,3–1,9%. Погрешность метода можно уменьшить, если увеличить разрешение по частоте для

регистрации более узких пиков, которые более чувствительны к значениям упругих скоростей, определять скорости по нескольким резонансным особенностям, исследуя несколько разных диапазонов частот.

Исследования поддержаны грантом РФФИ №19-12-00148. Теоретическая часть работы выполнена при поддержке стипендии Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (Л.М. Котельникова).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 403 с.
2. Рождественский К.Н., Толоконников Л.А. О рассеянии звуковых волн на упругом сфероиде // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 5. С. 927–930.
3. Шендеров Е.Л. Дифракция звука на упругой или импедансной сфере, расположенной вблизи импедансной или упругой границы полупространства // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 5. С. 684–694.
4. Хашеминеджад С.М., Малеки М. Резонансное рассеяние звука погруженной анизотропной сферой // Акуст. журн. 2008. Т. 54 № 2. С. 205–218.
5. Буланов В.А., Бьорно Л. Рассеяние звука сферой с учетом поглощения энергии // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 2. С. 252–259.
6. Николаева А.В., Цысарь С.А., Сапожников О.А. Измерение радиационной силы меггерцевого ультразвука, действующей на твердотельный сферический рассеиватель // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 1. С. 29–37.
7. Мальцева Л.А., Гервасьев М.А., Кутыин А.Б. Материаловедение. Екатеринбург: УрФУ, 2012. 344 с.
8. MacLennan D.N., Dunn J.R. Estimation of sound velocities from resonance measurements on tungsten carbide calibration spheres // J. Sound Vib. 1984. V. 97. № 2. P. 321–331.
9. Faran J.J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Am. 1951. V. 23. № 4. P. 405–418.
10. Hickling R. Analysis of echoes from a solid elastic sphere in water // J. Acoust. Soc. Am. 1962. V. 34. № 10. P. 1582–1592.
11. Flax L., Überall H. Resonant scattering of elastic waves from spherical solid inclusions // J. Acoust. Soc. Am. 1980. V. 67. № 5. P. 1432–1442.
12. Überall H. Acoustic scattering from elastic cylinders and spheres: Surface waves (Watson transform) and transmitted waves // Traitement du Signal. 1985. V. 2. № 5. P. 353–357.
13. Gaunaurd G.C., Überall H. RST analysis of monostatic and bistatic acoustic echoes from an elastic sphere // J. Acoust. Soc. Am. 1983. V. 73. № 1. P. 1–12.
14. Gaunaurd G.C. Techniques for sonar target identification // IEEE J. Oceanic Eng. 1987. V. 12. № 2. P. 419–422.
15. Flax L., Dragonette L.R., Überall H. Theory of elastic resonance excitation by sound scattering // J. Acoust. Soc. Am. 1978. V. 63. № 2. P. 723–731.

16. *Рэлей Дж.В.* Теория звука. Т. 2. М.: Гостехтеориздат, 1955. 503 с.
17. *Strutt J.W.* The problem of whispering gallery gallery // *Phil. Mag.* 1910. V. 20. № 120. P. 1001–1004.
18. *Vogt R.H., Neubauer W.G.* Relationship between acoustic reflection and vibrational modes of elastic spheres // *J. Acoust. Soc. Am.* 1976. V. 60. № 1. P. 15–22.
19. *Sessarego J.P., Sageloli J., Guillermin R., and Überall H.* Scattering by an elastic sphere embedded in an elastic isotropic medium // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. V. 104. № 5. P. 2836–2844.
20. *Gaunaurd G.C., Werby M.F.* Similarities between various Lamb waves in submerged spherical shells, and Rayleigh waves in elastic spheres and flat half-spaces // *J. Acoust. Soc. Am.* 1991. V. 89. № 6. P. 2731–2739.
21. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
22. *Williams K.L., Marston P.L.* Backscattering from an elastic sphere: Sommerfeld–Watson transformation and experimental confirmation // *J. Acoust. Soc. Am.* 1985. V. 78. № 3. P. 1093–1102.
23. *Foote K.G.* Refined determination of the rigidity modulus by echo sounder measurement // *Ultras. Symp. Proc.*, IEEE. New York, 1981. P. 900–903.
24. *Hobæk H., Forland T.N.* Characterization of target spheres for broad-band calibration of acoustic systems // *Acta Acust. Acust.* 2013. V. 99. № 3. P. 465–476.
25. *Neubauer W.G., Vogt R.H., Dragonette L.R.* Acoustic reflection from elastic spheres. I. Steady-state signals // *J. Acoust. Soc. Am.* 1974. V. 55. № 6. P. 1123–1129.
26. *Dragonette L.R., Vogt R.H., Flax L., Neubauer W.G.* Acoustic reflection from elastic spheres and rigid spheres and spheroids. II. Transient analysis // *J. Acoust. Soc. Am.* 1974. V. 55. № 6. P. 1130–1137.
27. *Ayres V.M., Gaunaurd G.C.* Inverse acoustic scattering from an elastic sphere // *J. Acoust. Soc. Am.* 1987. V. 82. № 4. P. 1291–1302.
28. *Perdigão J.M., Ferreira A., Lefebvre J.E., Bruneel C.* Experimental determination of resonant forward scattering of solid inclusions in a fluid // *Ultrasonics.* 1988. V. 26. № 2. P. 102–106.
29. *Sapozhnikov O.A., Tsysar S.A., Khokhlova V.A., Kreider W.* Acoustic holography as a metrological tool for characterizing medical ultrasound sources and fields // *J. Acoust. Soc. Am.* 2015. V. 138. № 3. P. 1515–1532.
30. *Sapozhnikov O.A., Bailey M.R.* Radiation force of an arbitrary acoustic beam on an elastic sphere in a fluid // *J. Acoust. Soc. Am.* 2013. V. 133. № 2. P. 661–676.
31. *Морс Ф.М., Феушбах Г.* Методы теоретической физики: В 2-х т. Т.2. М.: ИИЛ, 1959. 897 с.
32. *Wiscombe W.J.* Improved Mie scattering algorithms // *Appl. Opt.* 1980. V. 19. № 9. P. 1505–1509.
33. *Strifors H.C., Gaunaurd G.C.* Wave propagation in isotropic linear viscoelastic media // *J. Acoust. Soc. Am.* 1989. V. 85. № 3. P. 995–1004.
34. *Vogt R.H., Flax L., Dragonette L.R., Neubauer W.G.* Monostatic reflection of a plane wave from an absorbing sphere // *J. Acoust. Soc. Am.* 1975. V. 57. № 3. P. 558–561.
35. *Ayres V.M., Gaunaurd G.C.* Acoustic resonance scattering by viscoelastic objects // *J. Acoust. Soc. Am.* 1987. V. 81. № 2. P. 301–311.
36. *Selfridge A.R.* Approximate material properties in isotropic materials // *IEEE Trans. Sonics Ultrason.* 1985. V. 32. № 3. P. 381–394.
37. *Физические величины: справочник.* Под ред. Григорьева И.С., Мейлихова Е.З. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
38. *Кикоин И.К.* Таблицы физических величин. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
39. *Козлов Н.А., Митрофанов А.Д.* Физика полимеров. Владимир: Владим. гос. ун-т, 2001. 345 с.

УДК 534.2

## ИССЛЕДОВАНИЯ УПРУГИХ СВОЙСТВ ПОЛИМЕРА PLA СТАТИЧЕСКИМИ И УЛЬТРАЗВУКОВЫМИ МЕТОДАМИ

© 2021 г. А. И. Коробов<sup>а</sup>\*, А. И. Кокшайский<sup>а</sup>, Е. С. Михалев<sup>а</sup>, Н. И. Одина<sup>а</sup>, Н. В. Ширгина<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, Москва, 119991 Россия

\*e-mail: aikor42@mail.ru

Поступила в редакцию 12.04.2021 г.

После доработки 12.04.2021 г.

Принята к публикации 23.04.2021 г.

Приведены результаты экспериментальных исследований упругих свойств полимера PLA (полилактида), широко применяющегося в технологии 3D печати. Измерены зависимости механического напряжения от величины статической деформации, обнаружена гистерезисная зависимость. Оценены значения модуля Юнга на линейных участках нагрузки и разгрузки образца. Установлено, что периодические нагрузки-разгрузки образца приводят к его упрочнению в области упругих деформаций. Получено уравнение, связывающее изменение скорости акустических волн в тонком стержне с величиной его статической деформации, пригодное для описания исследуемого образца PLA. Обнаружена линейная зависимость относительного изменения скорости упругих волн в образце от величины его статической деформации. По результатам измерений определены коэффициенты упругости третьего порядка и рассчитан нелинейный акустический параметр в полимере PLA.

*Ключевые слова:* скорость ультразвуковых волн, полимер PLA, коэффициент упругости третьего порядка, нелинейный упругий параметр

DOI: 10.31857/S0320791921040067

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие все более востребованной становится технология 3D печати различных объектов, которая находит широкое применение во многих областях науки и техники. 3D печать позволяет создавать композиционные образцы как из полимерных материалов [1–5], так и из различных металлических сплавов [6–8]. Трехмерная печать – потенциально передовая технология в различных отраслях промышленности, включая аэрокосмическую, биомедицинскую и автомобильную промышленность. 3D принтер представляет собой станок с числовым программным управлением, использующий метод послойной печати детали для быстрого прототипирования макетов моделей и объектов. Постепенное наращивание компонентов позволяет создавать детали сложной геометрии, выполнять тонкую настройку конечного продукта.

В качестве материала для печати часто выступают полимерные материалы – термопласты, способные обратимо переходить при нагревании в эластичное состояние. Выбор материала варьируется в зависимости как от необходимой температуры плавления, так и от прочностных характе-

ристик конечного продукта. Одним из перспективных материалов для 3D печати является полимер PLA (polylactic acid, полимолочная кислота (полилактид)). Это биоразлагаемый, биосовместимый полимер, который может производиться из растительного сырья. PLA – линейный алифатический полиэфир, его мономером является молочная кислота (2-гидроксипропионовая кислота), которая может существовать в виде оптически активных D- или L-энантиомеров [9]. Разложение PLA происходит путем гидролиза с последующим биоразложением бактериями [10]. В настоящее время PLA уже используется для производства изделий для пищевой промышленности, а также в биомедицинских целях. Обзор влияния химического состава, способов производства и модификации материала на физические (в том числе механические) свойства полимеров на основе PLA приведен в [11]. В последнее десятилетие в русле тенденции замены синтетических материалов натуральными PLA рассматривается также как основа ряда биокompозитных материалов [12].

Механические свойства PLA и материалов на его основе исследовались ранее в основном ста-

тическими методами. В работе [13] были произведены испытания на разрыв и усталостную долговечность чистого и модифицированного образцов PLA. Было установлено, что PLA имеет достаточно высокую жесткость и высокую прочность по сравнению со многими синтетическими полимерами, при этом модифицирование может улучшать его механические свойства. В работе [14] было проведено исследование механических свойств тонких пленок PLA, изготовленных путем горячего прессования, при их растяжении. Было также исследовано влияние скорости деформации на механические свойства PLA. В работе [15] рассмотрено влияние ударной нагрузки на упругие свойства образцов полимера PLA. Было замечено, что прочность на сдвиг возрастает с увеличением ударного напряжения. Акустические методы применялись ранее для исследования процесса стеклования полимеров PLA и PLGA (polylactic-co-glycolic acid) в интервале температур  $0^{\circ}$ – $70^{\circ}$ C [16], а также для мониторинга процесса деградации трех биоразлагаемых полимеров на основе PLA [17]. Для модифицированной PLA в работе [18] было проведено исследование влияния комбинированной физической и термохимической обработки (введение модифицирующей примеси, низкотемпературное старение после закалки, ультрафиолетовое облучение в различных комбинациях) при изгибной деформации образцов на величину нелинейного акустического параметра третьего порядка, измеряемого методом генерации гармоник. Отмечено, что наибольший рост нелинейного параметра третьего порядка происходит либо при введении модифицирующей примеси, либо при совместном применении всех использовавшихся методов обработки.

В настоящей работе приводятся результаты экспериментальных исследований ультразвуковыми и статическими методами упругих свойств (как линейных, так и нелинейных) образца PLA при непрерывном изменении его внутренней структуры, вызванном периодическими циклами его механической нагрузки-разгрузки. Изучение упругих свойств проводилось импульсным методом путем исследования распространения упругих продольных волн в образце при одновременном приложении механической нагрузки растяжения.

Для исследования нелинейных упругих свойств твердых тел в данной работе применяется модифицированный метод Терстона–Браггера, или квазистатический метод, который заключается в измерении параметров распространения упругих волн в твердом теле при воздействии на него постоянных внешних сил. В работе [19] было

проанализировано распространение акустических волн малой амплитуды в твердых телах, подвергнутых действию одноосного сжатия, и получена система линейных уравнений, позволяющая определять все независимые компоненты тензора коэффициентов упругости третьего порядка по результатам измерений зависимости скорости упругих волн в твердом теле от величины приложенного к нему внешнего статического давления сжатия. Этот метод является одним из наиболее распространенных при изучении нелинейных упругих свойств твердых тел. В работе [20] авторами были экспериментально изучены образцы из сплава алюминия B95 и композита B95/наноалмаз с примесью в виде наночастиц алмаза. В этих материалах импульсным ультразвуковым методом были определены упругие константы второго порядка, а с помощью квазистатического метода Терстона–Браггера – упругие константы третьего порядка. Было выявлено значительное различие коэффициентов упругости третьего порядка в сплаве B95 и композите B95/наноалмаз при практическом совпадении значений коэффициентов упругости второго порядка. Это указывает на высокую чувствительность нелинейных акустических свойств исследуемых сплавов к химическому составу и структуре материала. В работе [21] был исследован сплав алюминия марки АМг6 и были определены методом Терстона–Браггера коэффициенты упругости третьего порядка по результатам экспериментальных измерений зависимости скорости сдвиговых и продольных упругих волн от величины сжатия. В [22] было проведено экспериментальное исследование влияния процессов нагрузки-разгрузки на механические, линейные и нелинейные упругие свойства сплава алюминия АМг6. Изучение нелинейных упругих свойств на различных участках нагрузочной кривой проводились также методом Терстона–Браггера.

В данной работе впервые применяется метод Терстона–Браггера для оценки линейных и нелинейных упругих свойств образца PLA марки eSun при его растяжении вплоть до деформаций 0.004.

#### ОБРАЗЕЦ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

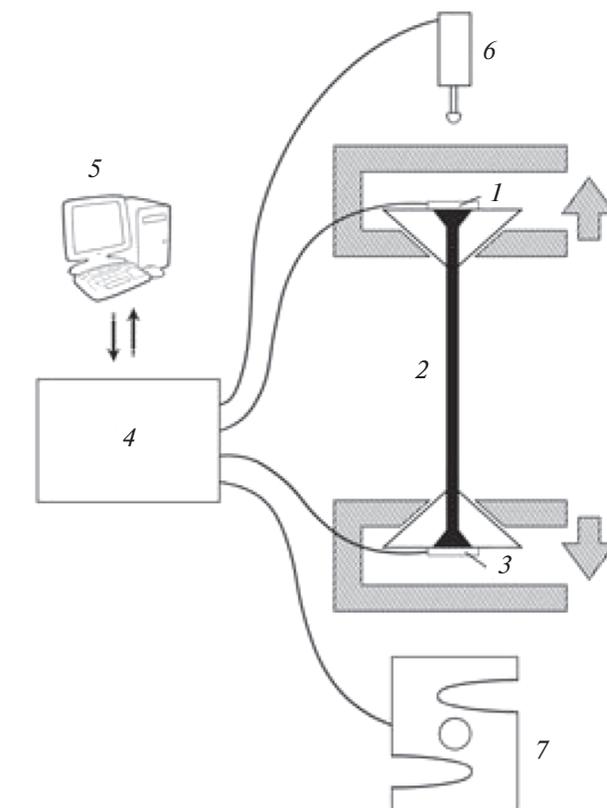
Для проведения исследований был использован образец из полимера PLA марки eSun (используемой при 3D печати), имеющий форму тонкой цилиндрической нити длиной  $L = 118$  мм и диаметром  $D = 1.8$  мм. Дополнительная термическая или иная обработка образца не производилась. Была измерена стержневая скорость звука в ма-

териале образца в недеформированном состоянии, которая составила  $V = 1630 \pm 20$  м/с, а также плотность  $\rho = 1.40 \pm 0.05$  г/см<sup>3</sup>. Рассчитанный по этим данным модуль Юнга составляет  $E = 3.3 \pm 0.1$  ГПа, что находится в хорошем соответствии с данными других авторов [15, 23].

Исследуемый образец PLA жестко закреплялся в пазах двух подвижных площадок, к которым при помощи винтового домкрата прикладывалась сила, создающая в образце деформацию растяжения. Образец закреплялся в специальном устройстве, которое позволяло преобразовать силу сжатия, создаваемую домкратом, в силу растяжения. Для генерации и приема упругих продольных волн в исследуемом образце использовались пьезокерамические преобразователи с резонансной частотой 300 кГц, которые прикреплялись подпружиненным зажимом к торцам образца. Для исключения паразитных высокочастотных компонент зондирующий сигнал проходил через фильтр нижних частот. Аналогичная методика проведения эксперимента ранее была использована для исследования механических и упругих свойств наноструктурного композита n-AMg6/C60 [24], а также для изучения особенностей распространения упругих продольных и крутильных волн в поликристаллической меди в области упругих и пластических деформаций [25], и показала себя как эффективный и надежный способ получения информации об упругих свойствах исследуемых материалов.

Для экспериментальных исследований упругих свойств полимера PLA использовалась автоматизированная ультразвуковая установка, которая была разработана на базе ультразвуковой автоматизированной системы Ritec RAM-5000. Блок-схема экспериментальной установки приведена на рис. 1. В ультразвуковой системе был реализован импульсный метод измерения.

Акустическая продольная волна возбуждалась верхним пьезоэлектрическим преобразователем 1, проходила через образец 2 и достигала нижнего пьезоэлектрического преобразователя 3, генерируя в нем электрический сигнал, пропорциональный амплитуде акустической волны, который впоследствии усиливался, поступал в ультразвуковой акустический комплекс 4, обрабатывался методом квадратурной обработки и регистрировался в персональном компьютере 5. Для наблюдения сигналов в реальном времени использовался четырехканальный цифровой осциллограф (на рисунке не показан). Информация об изменении длины образца и приложенной к нему силе регистрировалась при помощи аналоговых датчиков 6, 7. Результаты измерения датчиков оцифровывались с помощью АЦП и поступали в ПК для хранения и дальнейшего анализа. В ходе эксперимента образец подвергался нескольким периодическим циклам механической нагрузки-разгрузки.



**Рис. 1.** Принципиальная схема экспериментальной установки: 1 – излучающий пьезоэлектрический преобразователь, 2 – образец, 3 – принимающий пьезоэлектрический преобразователь, 4 – ультразвуковой автоматизированный комплекс Ritec RAM-5000, 5 – персональный компьютер, 6 – датчик удлинения образца, 7 – датчик силы.

вались с помощью АЦП и поступали в ПК для хранения и дальнейшего анализа. В ходе эксперимента образец подвергался нескольким периодическим циклам механической нагрузки-разгрузки.

Для управления ходом эксперимента с помощью персонального компьютера и обработки полученных данных использовался специально разработанный пакет программ с графическим интерфейсом. Интерфейс давал возможность одновременного проведения статических и ультразвуковых измерений с дальнейшим их архивированием и обработкой на персональном компьютере.

Разработанный измерительный комплекс позволил исследовать механические и упругие свойства образца PLA квазистатическим методом:

1. Статический метод использовался для измерения нагрузочной кривой “механическое напряжение  $\sigma$ –деформация  $\epsilon$ ” при приложении к исследуемому образцу нескольких циклов нагрузки-разгрузки.

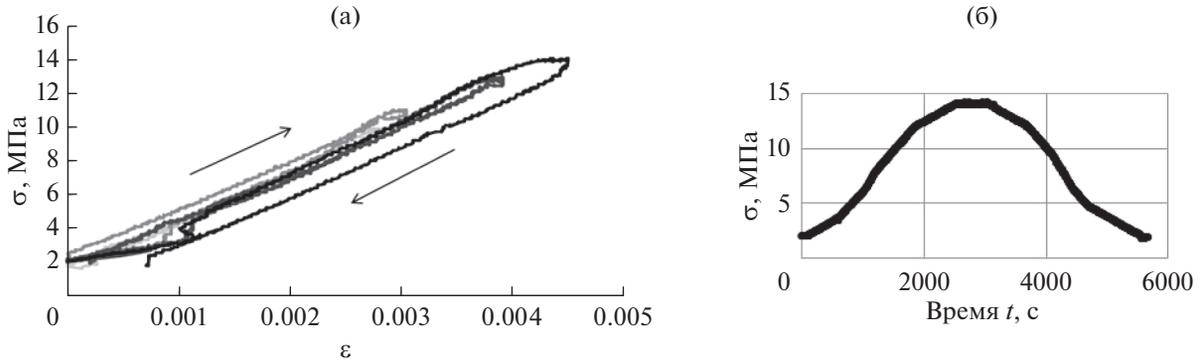


Рис. 2. (а) – Нагрузочная кривая  $\sigma(\varepsilon)$ , (б) – пример зависимости приложенного статического напряжения от времени для четвертого цикла.

2. Модифицированный квазистатический метод Терстона–Браггера служил для определения коэффициентов упругости третьего порядка. Метод основан на измерении зависимости скорости упругих волн в твердом теле от величины приложенного механического напряжения растяжения.

Распространение продольных упругих волн в твердотельных изотропных цилиндрах (стержнях) вида:

$$U = U_0 \sin(\omega t - kx) \quad (1)$$

описывается уравнениями движения и состояния:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\sigma = E\varepsilon + \frac{1}{2} E_N \varepsilon^2, \quad (3)$$

где  $U$  – вектор смещения,  $\sigma$  – механическое напряжение,  $\omega$  – частота упругой волны,  $k = \omega/V$  – волновой вектор,  $\varepsilon = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{\varepsilon_{ct}=0}$  – деформация, создаваемая акустической волной в исследуемом образце цилиндрической формы,  $E_N = \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varepsilon^2}\right)_{\varepsilon_{ct}=0}$  – коэффициент упругости третьего порядка, который в случае упругого стержня можно трактовать как модуль Юнга третьего порядка,  $E = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon_{ct}=0}$  – модуль Юнга. Из уравнений (1)–(3) можно получить следующее выражение:

$$\left(\frac{\Delta V}{V}\right)_{\varepsilon_{ct}=0} = \frac{E_N}{2E} \Delta \varepsilon_{ct}. \quad (4)$$

Выражение (4) является аналогом формулы Терстона–Браггера, используемой для определения коэффициентов упругости в трехмерных твердых телах, и позволяет определить коэффи-

циент упругости третьего порядка  $E_N$  по результатам измерения зависимости стержневой скорости  $V$  в одномерном твердотельном стержне от величины статической деформации растяжения стержня  $\varepsilon_{ct}$ .

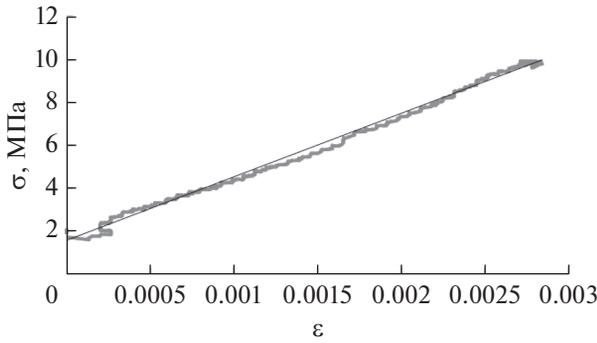
Для характеристики нелинейных упругих свойств тонкого цилиндрического образца в работе предлагается по аналогии с трехмерными твердыми телами использовать безразмерный акустический нелинейный параметр  $N$ :

$$N = \frac{E_N}{E}. \quad (5)$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА И ИХ АНАЛИЗ

В результате серии экспериментов была получена информация о линейных и нелинейных упругих свойствах исследуемого образца PLA марки eSun и влиянии на них периодических циклов механической нагрузки-разгрузки.

Результаты измерения зависимости напряжение–деформация  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  в исследуемом образце для четырех циклов периодического изменения приложенного к нему механического напряжения приведены на рис. 2а. Циклическое приложение силы к образцу PLA в режиме нагрузки-разгрузки происходило по схеме (0–9.9–0–11–0–12.9–0–14–0) МПа. Для каждого цикла нагрузки-разгрузки наблюдалась незначительная гистерезисная зависимость  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ . После четвертого цикла обнаружены остаточные деформации  $\varepsilon \sim 0.0008$ . Как можно видеть из зависимости приложенного к образцу напряжения от времени (рис. 2б), эксперимент проводился достаточно медленно, процесс был близок к квазистатическому, чтобы минимизировать влияние релаксационных процессов в образце.



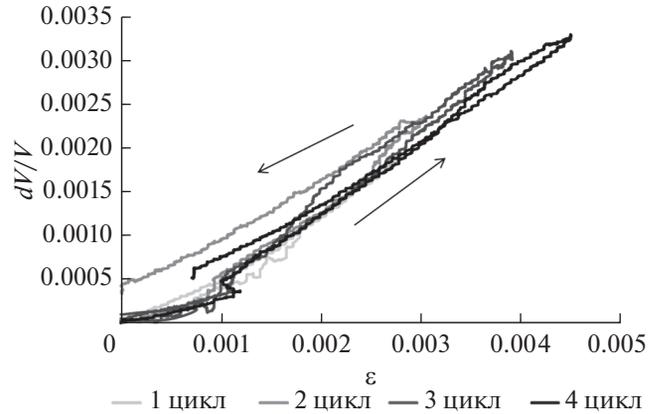
**Рис. 3.** Линейная аппроксимация нагрузочной кривой в области разгрузки методом наименьших квадратов для определения модуля Юнга.

Проведенные экспериментальные измерения зависимости напряжение–деформация позволили оценить значения модуля Юнга в исследуемом образце PLA на линейных участках нагрузки и разгрузки образца по методике, описанной в работе [21]. Пример аппроксимации линейной части цикла нагрузки-разгрузки методом наименьших квадратов (МНК) продемонстрирован на рис. 3. Рассчитанные по экспериментальным данным значения модуля Юнга представлены в табл. 1. Как видно из табл. 1, циклическое изменение нагрузки-разгрузки образца приводит к незначительному увеличению модуля Юнга  $E$ , т.е. происходит упрочнение исследуемого образца PLA.

В ходе эксперимента одновременно с измерением нагрузочной кривой  $\sigma(\epsilon)$  были измерены зависимости относительного изменения скорости продольной волны ( $\Delta V/V$ ) в образце от величины его статической деформации  $\epsilon_{ст}$  в процессе периодической нагрузки-разгрузки. Полученные зависимости представлены на рис. 4.

Обнаружено изменение скорости упругих волн в образце от величины его деформации, которое было аппроксимировано прямой линией (рис. 5). Отклонение от линейной зависимости изменения скорости при деформациях  $\epsilon < 0.0005$  связывается с особенностями крепления образца.

Для определения модуля Юнга третьего порядка с помощью формулы (4) методом наименьших квадратов был проведен анализ зависимо-



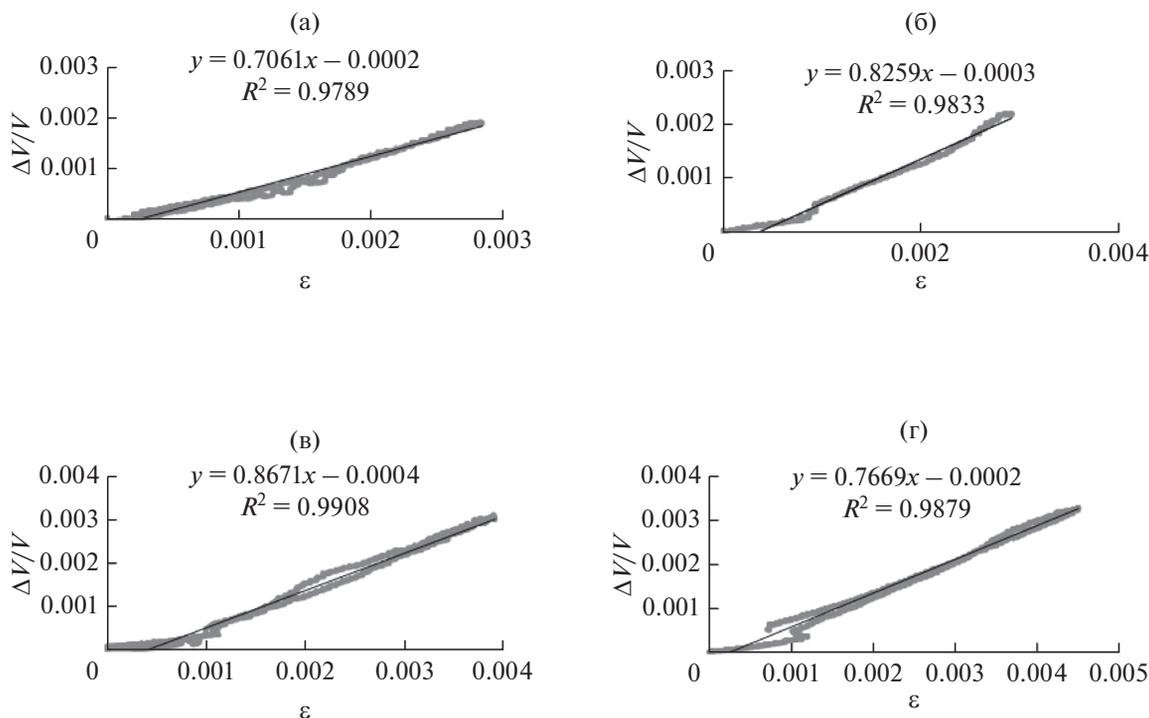
**Рис. 4.** Изменение скорости продольной волны в образце полимера PLA в зависимости от величины его статической деформации для четырех циклов механической нагрузки-разгрузки.

стей  $[\Delta V(\epsilon_{ст})/V]$  от  $\epsilon_{ст}$  в процессе периодической нагрузки-разгрузки. Значения коэффициентов упругости третьего порядка представлены в табл. 2.

Используя полученные значения модуля Юнга второго и третьего порядков, был определен акустический нелинейный параметр  $N$  по формуле (5), значения которого представлены в табл. 2. Обнаружено, что циклическое нагружение образца приводит сначала к увеличению нелинейного акустического параметра  $N$ , а потом к его уменьшению. В литературе данных об абсолютной величине нелинейного упругого параметра PLA нами не обнаружено. Нелинейный параметр второго порядка ряда широко используемых полимеров был измерен методом фокусированного ультразвука [26]. Типичные значения  $B/A$  для таких полимеров, как полистирол, акрил, полиэтилентерефталат, поливинилхлорид, поликарбонат составляют порядка 9–11. В работе [27] методом генерации второй гармоники был измерен нелинейный параметр второго порядка  $\beta_2 = -\frac{\partial V(\epsilon)}{\partial \epsilon} / V$  для чистого и армированного стекловолокном полипропилена при его растяжении. На начальном участке деформаций для чистого полипропилена величина этого параметра изменяется от 5 до 10.

**Таблица 1.** Значения модуля Юнга в исследуемом образце PLA на линейных участках нагрузки-разгрузки образца

	$E$ , ГПа, цикл 1	$E$ , ГПа, цикл 2	$E$ , ГПа, цикл 3	$E$ , ГПа, цикл 4
Область нагрузки	$2.91 \pm 0.01$	$3.36 \pm 0.01$	$3.09 \pm 0.01$	$3.16 \pm 0.01$
Область разгрузки	$2.71 \pm 0.01$	$2.83 \pm 0.01$	$2.82 \pm 0.01$	$2.98 \pm 0.01$



**Рис. 5.** Линейная аппроксимация зависимости относительного изменения скорости продольной волны в образце полимера PLA от величины его статической деформации для (а) – первого, (б) – второго, (в) – третьего и (г) – четвертого циклов нагрузки-разгрузки.

**Таблица 2.** Значения коэффициента упругости третьего порядка  $E_N$  и акустического нелинейного параметра  $N$  в исследуемом образце PLA

	Цикл 1	Цикл 2	Цикл 3	Цикл 4
$E_N$ , ГПа	$3.97 \pm 0.03$	$5.11 \pm 0.03$	$5.12 \pm 0.02$	$4.71 \pm 0.02$
$N$	$1.41 \pm 0.02$	$1.65 \pm 0.02$	$1.73 \pm 0.02$	$1.53 \pm 0.02$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Созданы и отработаны методики исследования упругих свойств нитей из образца промышленного полимера PLA марки eSun на базе ультразвуковой системы Ritec RAM-5000 статическими и ультразвуковыми методами.

Исследованы зависимости механического напряжения  $\sigma$  от величины статической деформации  $\epsilon$  в образце полимера PLA в процессе его циклической нагрузки-разгрузки вплоть до области деформаций 0.004. Обнаружена гистерезисная зависимость  $\sigma(\epsilon)$ .

По результатам измеренной зависимости  $\sigma(\epsilon)$  методом наименьших квадратов оценены значения модуля Юнга  $E$  на линейных участках нагруз-

ки и разгрузки образца. Было установлено, что периодические нагрузки-разгрузки образца приводят к его упрочнению в области упругих деформаций и, как следствие, к увеличению величины модуля Юнга  $E$ .

Проведен анализ распространения акустических волн в тонком стержне, подвергнутом статической деформации растяжения. Получено уравнение, связывающее относительное изменение скорости акустических волн в образце с величиной его статической растягивающей деформации. Это уравнение является аналогом формулы Терстона–Браггера и дает возможность определить коэффициент упругости третьего порядка  $E_N$  в тонких стержнях и нитевидных образцах.

Одновременно с измерением нагрузочной кривой  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  измерено относительное изменение скорости продольных волн в деформируемом образце полимера PLA в зависимости от величины его статической деформации растяжения. Обнаружено линейное изменение скорости упругих волн  $V(\epsilon_{ст})$  в образце от величины его статической деформации. По результатам этих измерений определены коэффициенты упругости третьего порядка  $E_N$  в полимере PLA.

В полимере PLA при различных значениях величины растягивающей нагрузки рассчитан нелинейный акустический параметр  $N = (E_N)/E$ .

Полученные результаты дают информацию о механических, линейных и нелинейных упругих свойствах полимера PLA и могут быть применены при создании композиционных образцов в технологии 3D печати.

Исследования выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-12-00098).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schumacher C., Bickel B., Rys J., Marschner S., Daraio C., Gross M. Microstructures to control elasticity in 3D printing // ACM Trans. Graph. 2015. V. 34. P. 136:1–136:13.
2. Cantrell J., Rohde S., Damiani D., Gurnani R., DiSandro L., Anton J., Young A., Jerez A., Steinbach D., Kroese C., Ifju P. Experimental characterization of the mechanical properties of 3D printed ABS and polycarbonate parts // Advancement of Optical Methods in Experimental Mechanics. 2017. V. 3. P. 89–105.
3. Kao Y., Zhang Y., Wang J., Tai B.L. Loading–unloading cycles of three-dimensional-printed built bimaterial structures with ceramic and elastomer // J. Manuf. Sci. Eng. 2016. V. 139. № 4. P. 041006–041006-6.
4. Zou R., Xia Y., Liu S., Hu P., Hou W., Hu Q., Shan C. Isotropic and anisotropic elasticity and yielding of 3D printed material // Compos. Part B Eng. 2016. V. 99. P. 506–513.
5. Бошняк В.А., Языков А.В. Оценка возможности применения изделий из пластмасс, созданных посредством послойной наплавки материала, в силовой оснастке лабораторных установок // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2016. С. 311–320.
6. Martin J.H., Yahata B.D., Hundley J.M., Mayer J.A., Schaedler T.A., Pollock T.M., 3D printing of high-strength aluminium alloys // Nature. 2017. V. 549. P. 365–369.
7. Ma C., Dong Y., Ye C. Improving surface finish of 3D-printed metals by ultrasonic nanocrystal surface modification // Procedia CIRP. 2016. V. 45. P. 319–322.
8. Schulze C., Weinmann M., Schweigel C., Keßler O., Bader R. Mechanical properties of a newly additive manufactured implant material based on Ti–42Nb // Materials (Basel). 2018. V. 11. P. 13–16.
9. Lim L.T., Auras R., Rubino M. Processing technologies for poly(lactic acid) // Prog. Polym. Sci. 2008. V. 33. P. 820–852.
10. Nakatsuka T. Polylactic acid-coated cable // Fujikura Tech. Rev. 2011. P. 39–46.
11. Farah S., Anderson D.G., Langer R. Reviews Physical and mechanical properties of PLA, and their functions in widespread applications – A comprehensive review // Advanced Drug Delivery. 2016. V. 107. P. 367–392.
12. La Mantia F.L., Morreale M. Green composites: A brief review. Composites, Part A // Appl. Sci. Manuf. 2011. V. 42. № 6. P. 579–588.
13. Averett R.D., Realff M.L., Jacob K., Cakmak M., Yalcin B. The mechanical behavior of poly(lactic acid) unreinforced and nanocomposite films subjected to monotonic and fatigue loading conditions // J. Composite Materials. 2011. V. 45(26) P. 2717–2726.
14. Mirkhalaf S.M., Fagerström M. The mechanical behavior of polylactic acid (PLA) films: fabrication, experiments and modelling // Mech. Time-Depend Mater. 2019. <https://doi.org/10.1007/s11043-019-09429-w>
15. Agu H.O., Hameed A., Appleby-Thomas G.J., Wood D.C. The dynamic response of dense 3 dimensionally printed polylactic acid // J. Dynamic Behavior of Materials. 2019. V. 5. P. 377–386.
16. Parker N., Mather M.L., Morgan S.P., Povey M.J. Longitudinal acoustic properties of poly(lactic acid) and poly(lactic-co-glycolic acid) // Biomedical Materials. 2010. V. 5. P. 055004.
17. Wua H.-C., Shenb F.-W., Honga X., Changa W.V., Winet H. Monitoring the degradation process of biopolymers by ultrasonic longitudinal wave pulse-echo technique // Biomaterials. 2003. V. 24. P. 3871–3876.
18. Zhao G., Gomes F.P. C., Marway H., Thompson M.R., Zhu Zh. Physical aging as the driving force for brittle–ductile transition of polylactic acid // Macromol. Chem. Phys. 2020. V. 221. P. 1900475.
19. Brugger K., Thurston R.N. Third-order elastic constants and the velocity of small amplitude elastic waves in homogeneously stressed media // Phys. Rev. 1964. V. 133. № 6A. P. A1604–A1610.
20. Коробов А.И., Прохоров В.М. Нелинейные акустические свойства алюминиевого сплава В95 и композита В95/наноалмаз // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 6. С. 661–667.
21. Волков А.Д., Кокшайский А.И., Коробов А.И., Прохоров В.М. Коэффициенты упругости второго и третьего порядков в поликристаллическом сплаве алюминия марки АМг6 // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 6. С. 685–691.
22. Коробов А.И., Ширгина Н.В., Кокшайский, А.И. Прохоров В.М. Влияние статической реверсивной нагрузки на механические и упругие свойства поликристаллического сплава алюминия АМг6 // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 4. С. 424–431.

23. *Hassan A., Balakrishnan H., Akbari A.* Poly(lactic Acid) Based Blends, Composites and Nanocomposites, *Advances. Natural Polymers*. Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2013. P. 361–396.
24. *Коробов А.И., Ширгина Н.В., Кокшайский А.И., Прохоров В.М.* Упругие и механические параметры нанокомпозита p-AMg6/C60 в процессе циклической реверсивной статической нагрузки // *Акуст. журн.* 2019. Т. 65. № 2. С. 158–165.
25. *Коробов А.И., Бражкин Ю.А., Ван Нин.* Экспериментальные исследования упругой нелинейности в структурно-неоднородных материалах // *Акуст. журн.* 2005. Т. 51. № 5. С. 663–671.
26. *Saito S.* Nonlinearity parameter measurement for polymer plates using focused ultrasound // *AIP Conference Proceeding*. 2008. V. 1022. P. 561–564.
27. *Solodov I., Pfleiderer K., Gerhard H., Busse G.* Nonlinear acoustic approach to material characterization of polymers and composites in tensile tests // *Ultrasonics*. 2004. V. 42. P. 1011–1015.

УДК 550.83,534.64

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ АЛГОРИТМОВ РЕКОНСТРУКЦИИ ГЕОАКУСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МОРСКОГО ДНА МЕТОДОМ КОГЕРЕНТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

© 2021 г. В. И. Калинина<sup>a, b, \*</sup>, И. П. Смирнов<sup>a, b</sup>, А. И. Хилько<sup>a, b</sup>, А. И. Малеханов<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>Институт прикладной физики РАН, ул. Ульянова 46, Нижний Новгород, 603950 Россия

<sup>b</sup>Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,  
пр. Гагарина 23, Нижний Новгород, 603950 Россия

\*e-mail: v.kalinina@ipfran.ru

Поступила в редакцию 09.04.2021 г.

После доработки 16.04.2021 г.

Принята к публикации 23.04.2021 г.

На основе разработанной ранее численной модели проводится сравнительный анализ эффективности алгоритмов реконструкции геоакустических параметров слоистой структуры морского дна при использовании зондирующих сигналов в виде синхронизированной последовательности взаимно-когерентных сложных сигналов. Алгоритмы отличаются способом построения многопараметрической целевой функции, нахождение экстремума которой обеспечивает оценку искомых параметров. В качестве таких функций используются среднеквадратичная норма невязки, функционалы обобщенных методов MUSIC и нейроноподобной свертки. Методом стохастического моделирования исследуется устойчивость полученных оценок (в терминах среднего смещения и дисперсии отклонений от истинного значения) в зависимости от величины отношения сигнал/шум на входе приемников. Показано, что рассмотренные алгоритмы обнаруживают существенно различную помехоустойчивость, которая, в свою очередь, оказывается зависящей от того, какой именно параметр подлежит оценке.

**Ключевые слова:** слоисто-неоднородное морское дно, геоакустические параметры, сейсмоакустическое зондирование, когерентные сигналы, оценка параметров, целевая функция, алгоритмы оценивания, стохастическое моделирование

DOI: 10.31857/S0320791921040031

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Типичной схемой выполнения работ по диагностике морского дна и морской сейсморазведке является та, при которой в водной толще исследуемой акватории буксируется приемно-излучающая система, состоящая из гидроакустического излучателя и горизонтальной антенной решетки (АР) приемных гидрофонов (сейсмокосы) или нескольких таких АР. В качестве излучателя используются импульсные источники различного типа и, соответственно, излучаемые ими зондирующие сигналы имеют различные спектральные и временные характеристики. От этих характеристик зависят характеристики самой диагностики — прежде всего, глубина проникновения и разрешающая способность реконструкции вертикального разреза донных пород, т.е. оценивания горизонтов границ раздела донных слоев (сейсмопрофилеирования). В работах [1, 2] обсуждались и экспериментально демонстрировались преимущества, связанные с использованием зондирующих сиг-

налов в виде синхронизированной последовательности взаимно-когерентных сложно-модулированных сигналов с большой базой (сложных сигналов). Показано, что использование таких сигналов в качестве “инструментов” зондирования морского дна позволяет реализовать достаточно высокую разрешающую способность и глубину проникновения при относительно низких, в сравнении со стандартным подходом на основе источников ударного типа, уровнях излучения и в более высоком частотном диапазоне.

В общей постановке задача диагностики морского дна не ограничивается профилированием структуры донных слоев, но включает также оценивание ряда геоакустических параметров составляющих их пород (например, [3–10]) и рассматривается еще более широко в контексте обратных задач акустической диагностики океана (см. обзор [11] и цитированную там литературу). К таким параметрам относятся плотность пород, скорости продольных и поперечных волн, декре-

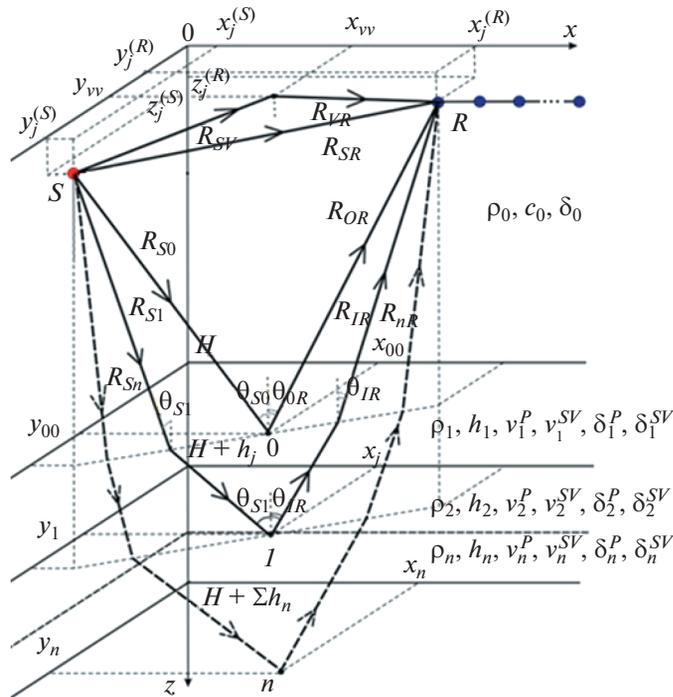


Рис. 1. Модель формирования принимаемой последовательности импульсов, отраженных от границ раздела в рамках модели слоисто-неоднородного дна.

менты их затухания. От совокупности этих параметров зависят амплитудные и фазовые соотношения сигналов, отраженных от границ раздела донных слоев и поступающих на вход приемной АР (полезных сигналов), следовательно, обработка таких сигналов имеет потенциал реконструкции этих параметров наравне с оценкой горизонтов границ раздела. Прием полезных сигналов осуществляется, однако, на фоне помех различного происхождения (шумов моря и буксирующего судна, помех реверберации), которые в совокупности маскируют полезные сигналы и, очевидно, влияют на качество оценки параметров донных слоев. В силу этого актуальной является задача сравнительного анализа эффективности различных алгоритмов оценивания, которые отличаются друг от друга статистической устойчивостью получаемых оценок в таких условиях, особенно при низких значениях отношений сигнал/шум (ОСШ) на входе приемников.

В настоящей работе численно исследуется помехоустойчивость ряда алгоритмов реконструкции геоакустических параметров донных пород в акваториях морского шельфа. В качестве источника зондирующих сигналов предполагается излучатель, работающий в режиме излучения синхронизированной последовательности повторяемых импульсов с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ). Численная модель формирования полезных сигналов на входе приемной АР в рамках

предположения о слоисто-неоднородной структуре донных пород следует работе [10] и кратко изложена в разделе 2. Здесь же обсуждаются методы обработки сигналов, которые реализуют преимущества такого режима излучения путем когерентного накопления принимаемых импульсов в частотной и пространственной областях и которые “участвуют” затем в моделировании алгоритмов оценивания параметров. В разделе 3 представлены модели помех донной и поверхностной реверберации и результаты расчетов, позволяющие сопоставить их уровень с полезными сигналами в рамках конкретной модели слоистой структуры дна с заданными параметрами. Алгоритмы оценивания параметров (раздел 4) стандартно формулируются нами в терминах решения вариационной задачи поиска экстремума многопараметрической целевой функции, построение которой может быть различным. Мы рассматриваем три подхода к построению таких функций и, соответственно, три алгоритма оценивания. Для количественного сравнения их эффективности проведены расчеты смещения и дисперсии отклонений оценок параметров донных слоев от их истинных (заданных в рамках модели) значений при различных значениях входного ОСШ, результаты которых обсуждаются в разделе 5 и в заключении.

## 2. МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЛЕЗНЫХ СИГНАЛОВ

В качестве модели формирования сигналов, отраженных от границ раздела в морском дне, мы используем достаточно общую физическую модель дна в виде совокупности горизонтальных однородных жидких или упругих слоев с границами раздела, кратные отражения от которых приводят к появлению последовательности полезных сигналов при излучении в водную среду зондирующего импульса. Общий вид такой донной структуры с указанием ее параметров и расположение технических средств (излучателя и приемников) показаны на рис. 1.

Используемая нами численная модель расчета импульсной последовательности принимаемых сигналов, в которой учитываются вклады поперечных волн, а также обменные эффекты, связанные с трансформацией различных типов волн на границах раздела упругих донных слоев, основана на результатах работы [10]. Каждый из общего числа  $N$  слоев, лежащих на подстилающем полупространстве (толщина которого  $h_{N+1}$  считается бесконечной), может быть корректно описан набором шести геоакустических параметров (рис. 1): толщина (мощность) слоя  $h_n$ , плотность породы  $\rho_n$ , скорости продольных  $v_n^P$  и поперечных  $v_n^{SV}$  волн, декременты затухания продольных  $\delta_n^P$  и поперечных  $\delta_n^{SV}$  волн ( $n = 1, \dots, N$ ). Соответственно, полная размерность пространства донных параметров равна  $M = 6(N + 1)$ , и для каждого слоя совокупность его параметров представляет собой вектор-строку  $\Phi_n = \{h_n, \rho_n, v_n^P, v_n^{SV}, \delta_n^P, \delta_n^{SV}\}$ .

Водный слой, в котором расположена приемно-излучающая система, считается однородным, занимающим интервал глубин  $0 < z < H$ ; его параметры – плотность  $\rho_0$ , скорость звука  $c_0$  и декремент затухания  $\delta_0$ . Система зондирования состоит из ненаправленного излучателя звука  $S$ , помещенного в точке  $\mathbf{r}^S$ , и приемной АР, состоящей из  $K_R$  ненаправленных гидрофонов  $R_j$ , расположенных в точках множества  $\{\mathbf{r}_j^{(R)}, j = 1 \dots K_R\}$ . Излучателем возбуждается импульсный сигнал  $g(\omega) = C(\omega)g_S(\omega)$ , где  $g_S(\omega)$  – спектральная плотность импульса,  $C(\omega)$  – комплексная амплитуда возбуждения излучателя.

Для расчетов мы используем геометро-акустическое приближение, предполагая, что все неоднородности среды (водной толщи и дна) имеют характерные размеры много больше характерной длины волн зондирующего сигнала. Еще одно предположение касается слабого влияния кратных отражений на границах раздела донных слоев –

они входят в модель, но практически не учитываются в последующих численных расчетах (раздел 5).

Спектральная амплитуда импульсной последовательности в точках приема  $R_j$ , расположенных на горизонтальном расстоянии  $r_{SR}$  от источника  $S$ , представляется суммой волн, отраженных от границ раздела донных слоев:  $g_{R_j}(\omega) = \sum_{n=1}^N g_n(\omega)$ , где  $g_n(\omega)$  – сумма волн, отраженных от нижней границы слоя с номером  $n = 1, \dots, N$ :  $g_n(\omega) = \sum_{k=0}^{2^n-1} g_n^{(k)}(\omega)$  [8–10]. Каждый из приходов  $g_n^{(k)}(\omega)$  дополнительно к номеру слоя отмечается индексом  $k$ , который записан в двоичном коде  $k = (s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)$ , где  $s_m, z_m \in \{0, 1\}$ ,  $m = 1, \dots, n$  – индексы, отвечающие типу волны при ее прохождении через слой  $m$  на пути к слою  $n$  и затем обратно: значение 0 отвечает продольной волне, 1 – поперечной, при этом первые  $n$  индексов  $(s_1, \dots, s_n)$  отвечает волнам, которые распространяются вниз, следующие  $n$  индексов  $(z_n, \dots, z_1)$  – волнам, которые распространяются вверх. Лучевая схема формирования совокупности сигналов, принимаемых отдельным элементом АР, поясняется на рис. 2. Вследствие того, что при падении на границу раздела двух упругих сред продольной или поперечной волн образуются отраженные продольная и поперечная волны, а также преломленные продольная и поперечная волны (рис. 2а), на каждом из приемников формируются множественные сигнальные приходы (рис. 2б). В результате на входе каждого гидрофона образуется большой набор монотипных и обменных волновых компонент, полное число которых быстро растет с ростом числа  $N$  слоев:  $K_V = \sum_{n=1}^N 4^n$ .

Таким образом, формирование волновых приходов  $g_n^{(k)}(\omega)$  для каждого слоя  $n$  происходит в результате “накопления” указанных эффектов во всех вышележащих слоях (с номерами  $m$ ). В малоугловом приближении имеем для них выражение [10]:

$$g_n^{(k)}(\omega) = g_n^{(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)}(\omega) = g_S(\omega) \frac{e^{-i\Phi_n^{(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)} - \Delta_n^{(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)}}}{R_n^{(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)_2}} \prod_{m=0}^{n-1} W_{m,m+1}^{(s_m s_{m+1})} \times \prod_{m=n}^1 W_{m,m-1}^{(z_m z_{m-1})} (\theta_{mn}^{(z_m)}), \quad (1)$$

где

$$R_n^{(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)} = R_{S_n} + \sum_{m=1}^n R_{mn}^{(s_m)} + \sum_{m=n}^1 R_{mn}^{(z_m)} + R_{nR}$$

– полное расстояние, которое проходит волна,

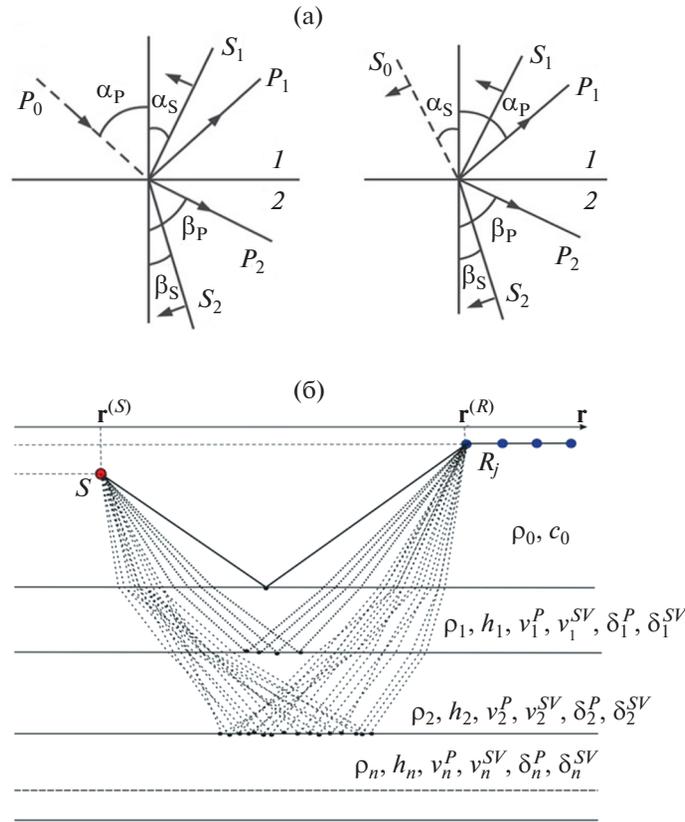


Рис. 2. Схемы формирования продольных и поперечных волн при отражении и преломлении на границе раздела двух упругих слоев (слева) и множественных сигнальных приходов на каждый из приемников (справа)

$$\varphi_n^{(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)}(\omega) = k_0 (R_{Sn} + R_{nR}) + \sum_{m=1}^n k_m^{(s_m)} R_{mn}^{(s_m)} + \sum_{m=n}^1 k_m^{(z_m)} R_{mn}^{(z_m)}$$

– полный фазовый набег волны на этом расстоянии,

$$\Delta_n^{(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)}(\omega) = (R_{Sn} + R_{nR}) \delta_0(\omega) + \sum_{m=1}^n R_{mn}^{(s_m)} \delta_m^{(s_m)}(\omega) + \sum_{m=n}^1 R_{mn}^{(z_m)} \delta_m^{(z_m)}(\omega)$$

– полный коэффициент затухания;  $W_{m,m+1}^{(s_m s_{m+1})}(\theta)$  – коэффициент преломления волны типа  $s_m$  в волну типа  $s_{m+1}$  при переходе ее из слоя  $m$  в нижележащий слой  $m + 1$  под углом падения  $\theta$  на нижнюю границу слоя  $m$ ,  $W_{m,m-1}^{(z_m z_{m-1})}(\theta)$  – коэффициент преломления волны типа  $z_m$  в волну типа  $z_{m-1}$  при переходе ее из слоя  $m$  в вышележащий слой  $m - 1$  под углом падения  $\theta$ ,  $V_n^{(s_n z_n)}(\theta)$  – коэффициент отражения волны типа  $s_n$  в волну типа  $z_n$  от нижней границы слоя  $n$  под углом падения на нее  $\theta$  (рис. 2). Первое произведение в выражении (1) относится к волнам, идущим вниз к нижней границе слоя  $n$ ,

второе – к волнам, идущим от этой границы вверх. Коэффициенты отражения и преломления на границах раздела для волн всех типов определяются известными формулами Цёппритца [3, 10].

Для волны типа  $(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)$  начальный угол падения на донную поверхность приблизительно равен

$$\theta^{(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)} = r_{SR} \left( 2H - z_R - z_S + \frac{1}{c_0} \sum_{m=1}^n v_m^{(s_m)} h_m + \frac{1}{c_0} \sum_{m=n}^1 v_m^{(z_m)} h_m \right)^{-1}.$$

Угол падения  $\theta_{mn}^{(s_m, z_m)}$  на верхнюю границу слоя  $m$  рассчитывается по начальному углу падения  $\theta^{(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)}$  с помощью закона преломления Снеллиуса, а расстояние, которое волна проходит в этом слое, равно  $R_{mn}^{(s_m, z_m)} = h_m \sqrt{1 + \left( \frac{v_m^{(s_m, z_m)}}{c_0} \theta_{mn}^{(s_m, z_m)} \right)^2}$ .

Спектральная амплитуда принимаемого сигнала в точке приема  $R_j$  получается суммированием волновых компонент (1) для всех слоев и рассчитывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 g_{R_j}(\omega) &= \sum_{n=1}^N g_n(\omega) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^{2^n-1} g_n^{(k)}(\omega) = \\
 &= \sum_{n=1}^N \sum_{s_1=0}^1 \dots \sum_{s_n=0}^1 \sum_{z_n=0}^1 \dots \sum_{z_1=0}^1 g_n^{(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)}(\omega) = \\
 &= \sum_{n=1}^N \sum_{s_1=0}^1 \dots \sum_{z_1=0}^1 A_n^{(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)} g_S(\omega) e^{-i\omega \tau_n^{(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)}}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

При этом принимаемый импульсный сигнал будет определяться выражением:

$$\begin{aligned}
 g_{R_j}(\Phi, t) &= \\
 &= \sum_{n=1}^N \sum_{s_1=0}^1 \dots \sum_{z_1=0}^1 A_n^{(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)} g_S(t - \tau_n^{(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)}),
 \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\tau_n^{(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)} = \frac{R_{Sn} + R_{nR}}{V_0} + \sum_{m=1}^n \frac{R_{mn}^{(s_m)}}{V_m^{(s_m)}} + \sum_{m=n}^1 \frac{R_{mn}^{(z_m)}}{V_m^{(z_m)}}$$

– время распространения волны от источника к приемнику  $R_j$  [10],  $\Phi = \{\Phi_n\}$ ,  $n = 1 \dots N$  – полный вектор-строка параметров всех учитываемых донных слоев.

В дальнейшем мы исходим из того, что зондирование дна осуществляется последовательно сложных импульсных сигналов с ЛЧМ. Сложность сигнала определяется нами стандартно как величина произведения длительности импульса на ширину его спектра (базы сигнала). Согласованная фильтрация сложных сигналов с большой базой, как хорошо известно, дает возможность значительного повышения, в сравнении с простыми сигналами той же длительности, временного разрешения импульсных приходов и достижения более высоких значений выходного ОСШ. Если такие сигналы являются хорошо воспроизводимыми и с высокой точностью синхронизированными, т.е. взаимно когерентными, то дополнительно к этому появляется принципиальная возможность дальнейшего увеличения ОСШ путем когерентного накопления “сжатых” импульсов в пределах интервала их взаимной когерентности. Эти общие соображения мотивировали наши исследования когерентных методов сейсмоакустической диагностики для полевых [12] и затем морских [1, 2] приложений.

Выходной сигнал согласованного фильтра принимаемого сигнала  $g_R(t)$ , имеющего некоторую задержку относительно излученного (опорного) сигнала  $g_S(t)$  на интервал времени  $\tau$ , определяется хорошо известным выражением интегральной свертки этих двух сигналов:

$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_R(t) g_S^*(t - \tau) dt. \tag{4}$$

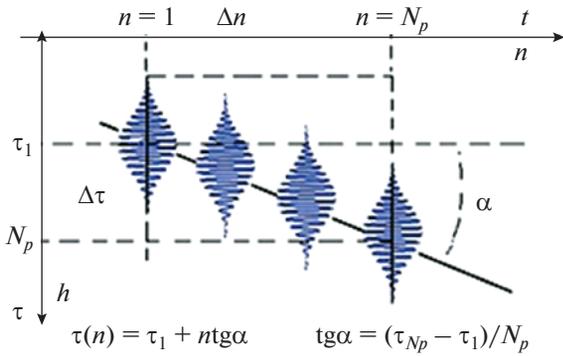
С учетом введенных выше обозначений, имеем следующее расчетное выражение для сигнала на выходе согласованного фильтра в приемном канале  $R_j$ :

$$\begin{aligned}
 G_{R_j}(\Phi, \tau) &= \sum_{n=1}^N \sum_{s_1=0}^1 \dots \sum_{z_1=0}^1 A_n^{(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)} \times \\
 &\times F_S(\tau - \tau_n^{(s_1 \dots s_n z_n \dots z_1)}),
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $F_S(\tau)$  – функция неопределенности опорного сигнала, имеющая вид:  $F_S(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_S(t) g_S^*(t - \tau) dt$ .

В рамках нашего подхода, основанного на применении взаимно-когерентных сложных сигналов, считаем, что когерентность отраженных от донных границ раздела сигналов сохраняется в пределах определенного временного интервала, что позволяет осуществить их когерентное накопление в приемной системе не только в частотной области (согласованным фильтром), но и по времени. С учетом движения приемно-излучающей системы, временное накопление дает возможность пространственного накопления полезных сигналов вдоль отдельных слоев, “попадающих” в определенные узкие диапазоны времен задержки импульсных приходов относительно излученного сигнала. Такое накопление вдоль слоя, обусловленное движением излучателя и приемников, мы называем когерентным траекторным накоплением (КТН) [1, 2]. В целях увеличения длительности когерентной импульсной последовательности и эффективности такой процедуры, необходимо учитывать возможные (ожидаемые) изменения горизонтов расположения отдельных донных слоев, используя для этого дополнительную процедуру коррекции временных задержек соответствующих принимаемых сигналов, которые используются для “настройки” согласованных фильтров в приемных каналах.

Процедура коррекции горизонтальной неоднородности донных слоев вдоль трассы поясняется на рис. 3 и сводится к следующей последовательности операций. Сначала осуществляется предварительный поиск горизонтов отражающих границ донных слоев по оси временных задержек прихода импульсов путем согласованной фильтрации и затем когерентного накопления серии импульсов. Для каждой границы временная задержка будет определенная и отличная от других; набор таких задержек реализует вертикальное профилирование донных слоев в виде временной развертки (согласованная фильтрация сложно-модулированных сигналов с большой базой обеспечивают возможность высокого временного



**Рис. 3.** Коррекция времени задержки отраженных сигнальных импульсов с учетом линейного наклона отражающей границы слоя (показана сплошной линией) при когерентном траекторном накоплении сигналов (пояснения в тексте).

разрешения отдельных импульсных приходов). Однако, при искривлении границы некоторого слоя, имеющей “свое” время задержки, движение приемников вдоль трассы буксировки системы приводит к постепенной “расстройке” согласованного фильтра и связанной с этим потере эффективности КТН. Простейшей гипотезой относительно горизонтальной изменчивости границы является предположение о линейном ее наклоне на некоторый угол (угол  $\alpha$  на рис. 3). С учетом такой гипотезы осуществляется коррекция временных интервалов задержки принимаемых импульсов, которая также линейно растет (или уменьшается, в зависимости от знака угла наклона) вдоль трассы — времена задержки приобретают линейную зависимость от номера импульса, что показано на рис. 3. Такую процедуру можно назвать адаптивным КТН, поскольку заранее угол наклона не известен, он подбирается (оценивается) отдельно для каждого из слоев и становится дополнительным его параметром. Очевидно, что эффективность процедуры, которая выражается в дополнительном росте числа взаимно-когерентных принимаемых импульсов, зависит от соответствия выбранной линейной аппроксимации реальной горизонтальной изменчивости донной структуры. Для увеличения эффективности аналогичным образом должны быть использованы более сложные (криволинейные) аппроксимации.

Таким образом, при выполнении последующего численного моделирования мы используем приведенные выше расчетные выражения (1)–(5) для полезных сигналов, поступающих на вход приемной АР, в каналах которой осуществляется последовательность процедур когерентной обработки: согласованная фильтрация с использованием опорной реплики излученного сигнала со сканированием по времени задержки (частотное

накопление), пространственное накопление по элементам АР и затем КТН в пределах некоторого числа импульсов, которое является дополнительным параметром обработки, имитирующим реальную длину последовательности взаимно-когерентных сигналов на входе АР. Последовательный выигрыш по величине ОСШ в результате применения указанных процедур обработки в зависимости от задаваемых параметров определяется известными выражениями в предположении, что аддитивные шумы не обладают взаимной когерентностью и накапливаются только по мощности (раздел 5).

### 3. МОДЕЛИ ПОМЕХ РЕВЕРБЕРАЦИИ

Во всем диапазоне частот и временных задержек полезные сигналы маскируются помехами реверберации, которые возникают вследствие рассеяния зондирующих импульсов на граничных и объемных неоднородностях водной среды. Наибольший вклад в такие помехи вносит, как правило, рассеяние зондирующего сигнала на неровной границе дна (донная реверберация) и на взволнованной свободной границе (поверхностная реверберация).

Спектральная плотность мощности помехи может быть найдена интегрированием углового спектра по полному телесному углу  $\Omega_R$  лучей, приходящих на отдельный гидрофон  $R$  приемной антенны:

$$|p(\omega)|^2 = \iint_{\Omega_R} N(\mathbf{e}_R, \omega) d\Omega(\mathbf{e}_R).$$

Для углового спектра донной реверберации будем использовать метод касательной плоскости Бреховских–Исаковича [13]:

$$N(\mathbf{e}_R, \omega) = \frac{1}{R_{QR}^2} |\Delta_0(\mathbf{e}_R)|^2 \frac{1}{|\mathbf{e}_1, \mathbf{n}|} m(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) I^{(S)}(Q, \omega),$$

$$I^{(S)}(Q, \omega) \equiv W \frac{|\hat{g}_S(\omega)|^2}{R_{SQ}^2},$$

$$\Delta_0(\mathbf{e}_R) \equiv \exp(-\delta_0(R_{SQ} + R_{QR})),$$

где  $W$  — мощность источника,  $\Delta_0(\mathbf{e}_R)$  — коэффициент затухания звука в воде,  $R_{SQ}, R_{QR}$  — расстояния от точки рассеяния до точек расположения источника  $S$  и приемника  $R$ , соответственно,  $m(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  — коэффициент рассеяния звука в точке донной границы  $Q = Q(\mathbf{e}_R)$ , описываемый формулами:

$$m_b(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \frac{(V\tilde{F})^2}{2\pi\delta^2} \exp\left(-\frac{k^2}{2\delta^2 q^2}\right),$$

$$\tilde{F} \equiv \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k^2}{q^2} \right), \quad q^2 = (e_{1z} - e_{2z})^2,$$

$$k^2 = (e_{1x} - e_{2x})^2 + (e_{1y} - e_{2y})^2,$$

где  $\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_{SQ}$ ,  $\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_{RQ}$  – векторы направлений падающей и рассеянной волн в точке  $Q$ , соответственно,  $\delta$  – среднеквадратичный локальный наклон донной поверхности. Коэффициент отражения от донной поверхности описывается формулой Френеля:

$$V = \frac{m \cos \theta_R - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_R}}{m \cos \theta_R + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_R}},$$

где  $m = \rho_1 / \rho_0$ ,  $n = c_0 / c_1^{(0)}$ .

Суммарную помеху донной реверберации излучаемого импульсного сигнала  $g_S(t)$  моделируем в виде интеграла по всем направлениям, выходящим из точки приема:

$$p(t) = \iint_{\Omega_R} d\Omega(\mathbf{e}^{(R)}) \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{e}_1, \mathbf{n}|}} |\Delta_0(\mathbf{e}^{(R)})| \times \\ \times \sqrt{m_b(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} \xi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \frac{\sqrt{W}}{R_{SQ} R_{RQ}} g_S(t - \tau(\mathbf{e}^{(R)})),$$

где  $\sqrt{W m_b(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} \xi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  – случайные амплитуды рассеянных импульсов реверберации (статистически независимые величины, имеющие нормальное распределение, нулевые средние значения и единичные дисперсии),  $\tau(\mathbf{e}^{(R)}) \equiv (R_{SQ} + R_{RQ}) / c_0$  – время прихода (задержки) этих импульсов. Для расчета помехи на выходе согласованного фильтра имеем выражение:

$$P(\tau) = \sqrt{W} \iint_{\Omega_R} d\Omega(\mathbf{e}^{(R)}) \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{e}_1, \mathbf{n}|}} |\Delta_0(\mathbf{e}^{(R)})| \sqrt{m_b(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} \times \\ \times \xi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \frac{1}{R_{SQ} R_{RQ}} F_S(\tau - \tau(\mathbf{e}^{(R)})).$$

Среднее значение  $P(\tau) = 0$ , а интенсивность помехи реверберации равна:

$$I_{rev} = |P(\tau)|^2 = W \iint_{\Omega_R} d\Omega(\mathbf{e}^{(R)}) \frac{1}{|\mathbf{e}_1, \mathbf{n}|} |\Delta_0(\mathbf{e}^{(R)})|^2 \times \\ \times m_b(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \frac{1}{R_{SQ}^2 R_{RQ}^2} |F_S(\tau - \tau(\mathbf{e}^{(R)}))|^2.$$

Расчет этой величины зависит от совокупности параметров, которые определяются свойствами донной поверхности. В случае плоской и горизонтальной поверхности имеем:

$$R_{SQ}(\theta_R, \varphi_R) = \sqrt{h_S^2 + (x_Q - x_S)^2 + (y_Q - y_S)^2},$$

$$R_{RQ}(\theta_R) = h_R / \cos \theta_R,$$

$$h_R = H - z_R, \quad h_S = H - z_S,$$

$$q^2 = (e_{1z} - e_{2z})^2 = (\cos \theta_R + h_S / R_{SQ})^2,$$

$$x_Q = x_R + h_R \operatorname{tg} \theta_R \cos \varphi_R =$$

$$= x_R + R_{RQ}(\theta_R) \sin \theta_R \cos \varphi_R, \quad (6)$$

$$y_Q = y_R + h_R \operatorname{tg} \theta_R \sin \varphi_R =$$

$$= y_R + R_{RQ}(\theta_R) \sin \theta_R \sin \varphi_R,$$

$$\kappa^2 = (e_{1x} - e_{2x})^2 + (e_{1y} - e_{2y})^2 =$$

$$= (\sin \theta_R \cos \varphi_R - (x_S - x_Q) / R_{SQ})^2 +$$

$$+ (\sin \theta_R \sin \varphi_R - (y_S - y_Q) / R_{SQ})^2.$$

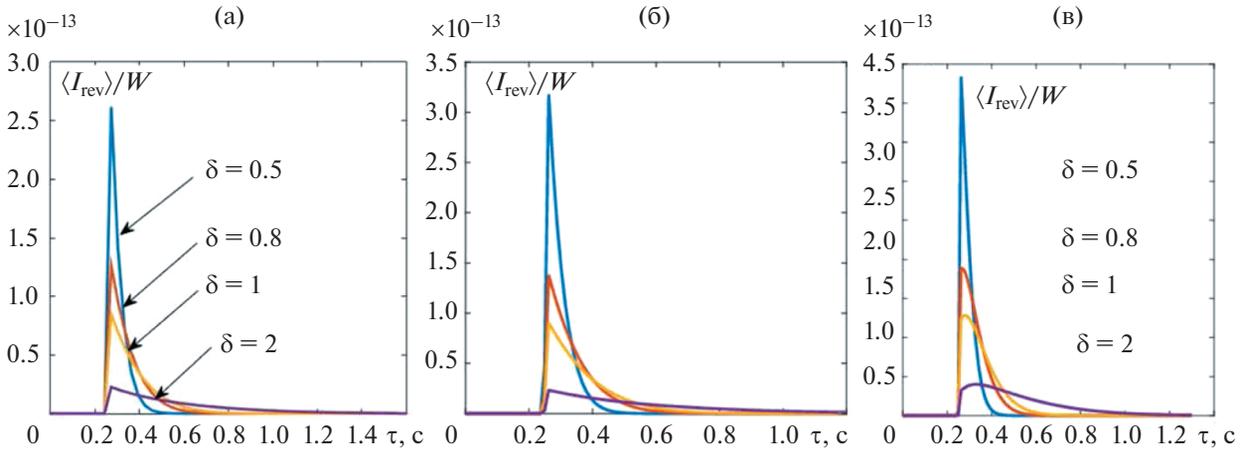
Для расчета помехи реверберации в случае наклонного дна применим следующий математический прием. Пусть дно есть плоскость, проходящая через точку  $(0, 0, H)$  и перпендикулярная вектору  $\mathbf{n} = (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha, \cos \alpha)$  (случай  $\alpha = 0$  соответствует исходному горизонтальному дну). Тогда для расчета можно использовать те же формулы (6), в которых следует сделать замены

$$h_S \rightarrow h'_S = (H - z_S) \cos \alpha,$$

$$h_R \rightarrow h'_R = |x_R \sin \alpha \cos \beta + (z_R - H) \cos \alpha|,$$

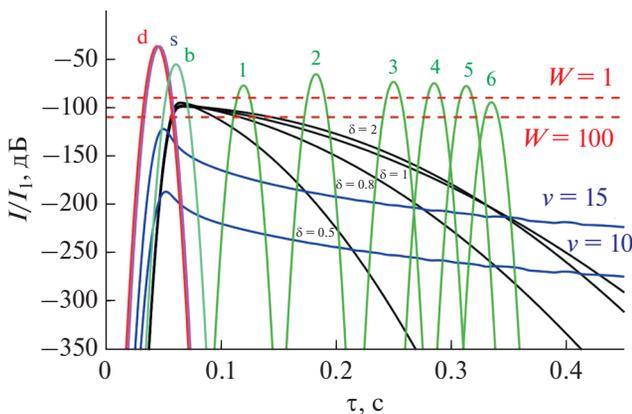
$$x_R \rightarrow x'_R = \sqrt{x_R^2 + (z - H_R)^2 - (h'_R)^2} + (H - z_S) \sin \alpha.$$

На рис. 4 приведены расчеты средней интенсивности донной реверберации на выходе согласованного фильтра отдельного гидрофона как функции задержки  $\tau$  для различных углов наклона  $\alpha, \beta$  и среднеквадратичных наклонов  $\delta$  донной поверхности, величина которых определена здесь через тангенс локального угла наклона (меньшим значениям  $\delta$  отвечает более плоская в среднем поверхность). Параметры расчетов:  $H = 200$  м – глубина водного слоя,  $z_S = 30$  м,  $z_R = 3$  м – глубины расположения источника и приемника, соответственно,  $x_R = 60$  м – расстояние между источником и приемником,  $F_{\text{pulse}} = 200$  Гц – нижняя частота излучения,  $\Delta F_{\text{pulse}} = 100$  Гц – полосу ЛЧМ,  $T_{\text{pulse}} = 0.125$  с – длительность импульса,  $c_0 = 1475$  м/с – скорость звука в морской воде,  $\rho_0 = 1040$  кг/м<sup>3</sup> – плотность воды. Видно, что поскольку помеха реверберации формируется импульсами, соответствующими зеркальным направлениям от источника к приемнику. Вклад удаленных участков донной поверхности в суммарный сигнал возможен только при наличии достаточно крутых неровностей, т.е. при больших значениях  $\delta$ , в то время как при малых  $\delta$  реверберация формируется в пределах малого участка



**Рис. 4.** Модельный расчет интенсивности донной реверберации на выходе согласованного фильтра в отдельном канале АР как функция задержки  $\tau$  для различных углов  $\alpha, \beta$  среднего наклона и величины среднеквадратичных наклонов  $\delta$  случайного рельефа дна:  $\alpha = \beta = 0$  (а);  $\alpha = \pi/4, \beta = 0$  (б);  $\alpha = 0, \beta = \pi/2$  (в).

донной поверхности, лежащего вблизи середины отрезка, соединяющего источник и приемник (приведенные значения  $\delta$  отвечают изменению среднеквадратичных углов наклона от  $\sim 20^\circ$  до  $\sim 60^\circ$ ). Важно, однако, что амплитуды рассеянных импульсов при этом оказываются относительно большими, так как соответствующие диаграммы рассеяния являются более узкими. С увеличением  $\delta$  область формирования помехи реверберации расширяется, пропорционально растут времена задержки отдельных импульсов, но значительно уменьшаются их амплитуды.



**Рис. 5.** Нормированные интенсивности полезных сигналов (отраженных от донных слоев) и помех реверберации как функции времени их задержки при различных значениях среднеквадратичных наклонов рельефа дна (как на рис. 4) и скоростях ветра 10 и 15 м/с в сравнении с уровнем аддитивного шума (пунктирные линии) при мощности источника 1 и 100 Вт (пояснения в тексте).

Минимальное время прихода импульса донной реверберации находится из уравнения:

$$\tau_{\min} = \frac{1}{c_0} \min_x \left\{ \sqrt{x^2 + (H - z_S)^2} + \sqrt{(x - x_R)^2 + (H - z_R)^2} \right\}.$$

Уравнение эллипса, от границы которого отражаются импульсы, имеющие времена прихода  $\tau$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{(x - x(R))^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1, \\ a^2 &= R^2 \left( (1 - y_1 - y_2)^2 - 4y_1y_2 \right) / 4, \\ b^2 &= (1 - x_R^2 / R^2) a^2, \quad R = c_0 \tau, \\ x(R) &= (1 + y_1 - y_2) x_R / 2, \\ y_1 &= (H - z_S)^2 / (R^2 - x_R^2), \\ y_2 &= (H - z_R)^2 / R^2 - x_R^2. \end{aligned}$$

Для расчета помехи реверберации на взволнованной морской поверхности будем использовать формулу Неймана–Пирсона для коэффициента рассеяния звука на ветровом волнении [13]:

$$\begin{aligned} m_s(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= \frac{\sqrt{2} |v| C}{g^3} \left( \frac{k}{|\mathbf{k}|} \right)^4 \times \\ &\times \exp \left( - \frac{2g}{|\mathbf{k}| |v|^2} \right) K(\mathbf{v}, \mathbf{k}) |\mathbf{e}_1 \mathbf{n}|^2 |\mathbf{e}_2 \mathbf{n}|^2, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{e}_{1,2}$  – как и выше, векторы направлений падающей и рассеянной волн в точке  $Q$ ,  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности в этой точке,  $\mathbf{v}$  – вектор скорости ветра, функция  $K(\mathbf{v}, \mathbf{k}) = \cos^2 \alpha$ , где  $\alpha$  – угол меж-

Таблица 1. Параметры моделирования для расчетов рис. 5

Приемно-излучающая система					
$z_S, \text{ м}$	$z_R, \text{ м}$	$x_R, \text{ м}$	$F_{\text{pulse}}, \text{ Гц}$	$\Delta F_{\text{pulse}}, \text{ Гц}$	$T_{\text{imp}}, \text{ с}$
30	3	60	200	50	0.125
Водный слой					
$H, \text{ м}$	$c_{\text{вода}}, \text{ м/с}$	$\rho_{\text{вода}}, \text{ кг/м}^3$	$\delta_0, \text{ дБ/м}$	$c_{\text{воздух}}, \text{ м/с}$	$\rho_{\text{воздух}}, \text{ кг/м}^3$
200	1475	1040	0	330	1.29
Донные слои					
$h_i, \text{ м}$	$\delta_i, \text{ дБ/м}$	$c_i, \text{ м/с}$	$\rho_i, \text{ кг/м}^3$		
50	0.005	1490	1400		
$h_2, \text{ м}$	$\delta_2, \text{ дБ/м}$	$c_2, \text{ м/с}$	$\rho_2, \text{ кг/м}^3$		
50	0.006	1525	1440		
$h_3, \text{ м}$	$\delta_3, \text{ дБ/м}$	$c_3, \text{ м/с}$	$\rho_3, \text{ кг/м}^3$		
50	0.005	1459	900		
$h_4, \text{ м}$	$\delta_4, \text{ дБ/м}$	$c_4, \text{ м/с}$	$\rho_4, \text{ кг/м}^3$		
50	0.007	2700	2100		
$h_5, \text{ м}$	$\delta_5, \text{ дБ/м}$	$c_5, \text{ м/с}$	$\rho_5, \text{ кг/м}^3$		
50	0.008	2250	2250		
$h_6, \text{ м}$	$\delta_6, \text{ дБ/м}$	$c_6, \text{ м/с}$	$\rho_6, \text{ кг/м}^3$		
50	0.009	4500	2400		

ду направлениями ветра и распространения поверхностной волны,  $g$  – ускорение силы тяжести.

На рис. 5 представлены расчеты нормированных интенсивностей  $I/I_1$  полезных сигналов и помех реверберации как функций их временной задержки  $\tau$ : для прямого сигнала (d), отраженного от свободной поверхности сигнала (s), отраженного от донной поверхности сигнала (b), совокупности сигналов, отраженных от шести донных слоев (индексы 1–6), сигналов поверхностной реверберации для различных скоростей ветра и тех же значений параметра  $\delta$ , соответственно. Для нормировки зависимостей используется величина  $I_1 = W/4\pi$  – интенсивность поля, создаваемая источником мощности  $W$  на расстоянии 1 метр. Параметры моделирования приведены в табл. 1.

Положение пунктирной прямой  $\beta = \beta_a$ , соответствующей некоторому заданному уровню аддитивных шумов, зависит от мощности источника  $W$ . Действительно, поскольку здесь приведены относительные величины  $\beta = 10\lg(I/I_1)$ , то для интенсивности и давления в поле зондирующей волны имеем соотношения:

$$I = I_1 \times 10^{\beta/10}, \quad p = \sqrt{2\rho c_0 I} = 10^{\beta/20} \sqrt{\rho c_0 W / 2\pi}.$$

Отсюда, задавая величину давления аддитивного шума  $p_a$ , несложно рассчитать мощность источника  $W$ , необходимую для того, чтобы интенсивности отраженных сигналов в своих максимумах были равны интенсивности шума или превосходили ее на определенную величину. Например, если давление шума составляет величину  $p_a \approx 15$  мПа, то для уровня шума  $\beta_a = -90$  дБ получаем мощность источника  $W \approx 1$  Вт, а для  $\beta_a = -110$  дБ – мощность  $W \approx 100$  Вт (см. рис. 5). С ростом излучаемой мощности уровни полезных сигналов и помех реверберации на рис. 5 будут оставаться неизменными, а линия уровня аддитивного шума – опускаться. Таким образом, для корректного нанесения на рис. 5 линии уровня шума  $\beta_a$  и сопоставления с ним уровня отраженных сигналов, нужно знать (в эксперименте) или задать (при моделировании) обе величины: интенсивность  $I_a$  (давление  $p_a$ ) шумового поля и мощность источника  $W$ :

$$\beta_a = 10\lg(4\pi I_a / W) = 10\lg(2\pi p_a^2 / \rho c_0 W).$$

Анализ представленных на рис. 5 модельных зависимостей позволяет сделать качественный вывод о том, что максимальная интенсивность отраженных донными слоями сигналов слабее падает с увеличением номера слоя и соответствующим ростом интервала задержки, чем интенсивность помех реверберации, даже при достаточно больших значениях среднеквадратичных уклонов донной поверхности и скоростях ветра. Это означает, что при оценке параметров отдельного донного слоя реверберация играет тем меньшую роль, чем глубже он расположен.

#### 4. ЦЕЛЕВЫЕ ФУНКЦИИ И АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Оценивание геоакустических параметров донных слоев на основе обработки сейсмоакустических данных является характерным примером обратных задач, методы решения которых основаны на теории статистической проверки гипотез (например, [4, 5, 11]). В качестве гипотез  $\tilde{\Phi}$  в данной постановке выступают некоторые наперед заданные значения параметров слоистой структуры дна в рамках сформулированной выше модели.

Гипотеза  $\tilde{\Phi}$ , при которой достигается экстремум заданной целевой функции, определенным образом зависящей от невязки (расхождения) гипотезы с истинными значениями параметров, “входящих” в принимаемые сигналы, является решением обратной задачи и дает оценку этих параметров. Качество полученных оценок характеризуется, прежде всего, их средним отклонением (смещением) и дисперсией отклонений от истинных значений. Выбор целевой функции (или функционала невязки в широком смысле) и отвечающего ей алгоритма оценивания может быть различным, при этом различным оказывается и качество полученных оценок искомых параметров сигналов, принимаемых на фоне шумов и помех.

В данной работе мы исследуем помехоустойчивость ряда алгоритмов оценивания, которые отличаются способом построения целевой функции и различной степенью использования процедур когерентной обработки принимаемых сигналов. Подобный сравнительный анализ позволяет оптимизировать выбор целевой функции при решении задач морской сейсмоакустики с учетом конкретных условий проведения эксперимента.

Прежде чем перейти непосредственно к рассмотрению целевых функций и алгоритмов на их основе, приведем выражения, которые нам понадобятся для определения тех сигналов, которые “участвуют” в решении обратной задачи оценивания параметров. С учетом представленных выше моделей формирования сигналов на входе АР, необходимо принять во внимание, что полезные сигналы  $g_{R_j}(\Phi, t)$ ,  $j = 1, \dots, K_R$  (3) принимаются на

фоне аддитивных шумов и помех реверберации, сигнал которых в совокупности обозначим как  $g_{R_j}^{\text{Noise}}(t)$ . Тогда полная реплика принимаемого сигнала имеет вид:

$$g_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, t) = g_{R_j}(\Phi, t) + g_{R_j}^{\text{Noise}}(t).$$

На выходе согласованного фильтра, используя реплику опорного сигнала, имеем аналогично (4):

$$G_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, t) g_S^*(t - \tau) dt. \quad (7)$$

Модельный принимаемый сигнал, который рассчитывается в предположении гипотезы  $\tilde{\Phi}$  относительно значений параметров донных слоев, обозначим как  $\tilde{g}_{R_j}(\tilde{\Phi}, t)$ . Тогда для модельного сигнала на выходе согласованного фильтра имеем:

$$\tilde{G}_{R_j}(\tilde{\Phi}, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_{R_j}(\tilde{\Phi}, t) g_S^*(t - \tau) dt. \quad (8)$$

Варьирование параметров модели слоистого дна приводит, очевидно, к варьированию модельного принимаемого сигнала и возможности поиска экстремума целевых функций, связывающих тем или иным образом реплики непосредственно входных сигналов или реплики “сжатых” сигналов (7) и (8). В данной работе мы рассматриваем оба этих варианта в качестве возможных при построении целевой функции.

**$L_p$ -норма с когерентным пространственно-частотным накоплением.** Наиболее распространенной целевой функцией при решении разного рода обратных задач является степенная  $L_p$ -норма функционала невязки принимаемого (реального) и модельного сигналов [14], которая в нашей постановке имеет вид:

$$W_{L_p}(\tilde{\Phi}) = \left( \sum_{t_k \in T} \sum_{R_j} |g_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, t_k) - \tilde{g}_{R_j}(\tilde{\Phi}, t_k)|^p \right)^{1/p}. \quad (9)$$

Здесь первое суммирование относится к накоплению сигналов в течение определенного интервала времени  $T$ , второе суммирование – к накоплению по элементам АР. В случае  $p = 2$  выражение (7) определяет стандартную среднеквадратическую невязку, которая используется нами в дальнейшем. Соответствующий метод получения оценок  $\tilde{\Phi}$  представляет собой не что иное, как метод наименьших квадратов Гаусса, оптимальный при нормальном распределении аддитивных шумов [3].

С учетом описанных выше процедур когерентной обработки, в качестве “когерентного” функ-

ционала невязки будем использовать  $L_2$ -норму следующего вида:

$$W_{L_2}^{\text{Cог}}(\tilde{\Phi}) = \left( \sum_{K_V} \sum_{\tau_k} \sum_{R_j} |G_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, \tau_k) - \tilde{G}_{R_j}(\tilde{\Phi}, \tau_k)|^2 \right)^{1/2} \quad (10)$$

Здесь учтено, что в ходе обработки выполняются: корреляционная свертка принятых сигналов с опорными в приемных каналах решетки  $R_j$ ; когерентное пространственное накопление сигналов по элементам АР; когерентное накопление вдоль отдельных траекторий на плоскости  $(\tau, \mathbf{r})$  в пределах длины когерентности (процедура КТН); наконец, накопление по всем  $K_V$  волновым компонентам, учитываемым в рамках модели формирования сигналов (раздел 2).

**Целевая функция адаптивного процессора.** Другой подход к построению целевой функции основан на использовании адаптивных методов многоканальной обработки сигналов. Известно большое количество таких методов и их модификаций, одними из наиболее универсальных являются т.н. проекционные методы, которые основаны на анализе спектральных свойств (спектра собственных значений и базиса собственных векторов) матрицы пространственных корреляций сигналов, принимаемых АР.

Рассмотрим векторы спектральных амплитуд принимаемых АР сигналов на некоторой частоте излучаемого импульса. Предполагая отсутствие взаимных корреляций сигнальной и шумовой (в смеси с помехами) компонент, имеем следующее общее выражение для корреляционной матрицы (КМ):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{\text{Exp}}(\Phi, \omega) &= \langle g^{\text{Exp}}(\Phi, \omega) g^{\text{Exp}}(\Phi, \omega)^+ \rangle = \\ &= \mathbf{K}(\Phi, \omega) + \mathbf{K}^{\text{Noise}}(\omega), \\ \mathbf{K}(\Phi, \omega) &\equiv \langle g(\Phi, \omega) g(\Phi, \omega)^+ \rangle, \\ \mathbf{K}^{\text{Noise}}(\omega) &\equiv \langle g^{\text{Noise}}(\omega) g^{\text{Noise}}(\omega)^+ \rangle, \end{aligned}$$

где угловые скобки означают статистическое усреднение по реализациям входных сигналов, знак “+” означает эрмитово сопряжение комплексного вектора. На практике оперируют с состоятельными оценками КМ, которые строятся по достаточно большому числу  $L$  независимых временных реализаций входных сигналов:

$$\hat{\mathbf{K}}^{\text{Exp}}(\Phi, \omega) = \frac{1}{L} \sum_l g^{\text{Exp}}(\Phi, t_l) g^{\text{Exp}}(\Phi, t_l)^+ \quad (11)$$

Задача оптимальной обработки состоит в построении такого пространственно-временного фильтра входных сигналов, который позволяет, используя оценку КМ (11), наилучшим (в соот-

ветствии с заданным критерием) образом выделить полезный сигнал на фоне аддитивных шумов и помех и затем оценить его неизвестные параметры  $\Phi$ . Следуя той терминологии, которая принята в обработке сигналов, это означает реализовать максимальную мощность на выходе процессора (блока обработки) в каналах АР и найти такой вектор параметров  $\hat{\Phi}$  при варьировании  $\tilde{\Phi}$ , при котором этот максимум достигается. Мощность на выходе процессора играет при этом роль целевой функции, а обратная к ней величина, которая минимизируется, является аналогом функционала невязки и тоже становится целевой функцией.

Проекционные методы обработки сигналов в антенных решетках применительно к подводной акустике обсуждаются, в частности, в недавних обзорах [15, 16]. Все они основаны на известной процедуре спектрального разложения построенной оценки КМ (11):

$$\hat{\mathbf{K}}^{\text{Exp}}(\Phi, \omega) = \sum_{j=1}^N \hat{\lambda}_j \hat{\psi}_j \hat{\psi}_j^+,$$

где  $\hat{\lambda}_1 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_N$  – упорядоченные по убыванию собственные значения КМ,  $\hat{\psi}_j$  – ее взаимно ортогональные нормированные собственные векторы (собственный базис КМ). При достаточно большом отношении сигнал/шум (ОСШ) на входе АР основной вклад в эту сумму вносят ее первые (сигнальные) слагаемые (в асимптотике полностью когерентного сигнала и нулевого уровня шума единственное значение  $\hat{\lambda}_1 \neq 0$ , при этом  $\hat{\psi}_1$  равен нормированному сигнальному вектору). С уменьшением ОСШ растут число и величины “шумовых” собственных значений и размерность подпространства отвечающих им собственных векторов, вследствие чего возникает необходимость классификации “сигнальных” и “шумовых” компонент в базисе КМ.

Один из популярных проекционных методов, который изначально был предложен для решения задачи оценки пространственного (углового) спектра входных сигналов, известен как метод MUSIC (от англ. – multiple signal classification) [17]. Мощность реализующего его процессора определяется выражением:

$$P_{\text{MUSIC}}(\tilde{\Phi}) = 1 / \sum_{j=J+1}^N |\hat{\psi}_j^+ \mathbf{e}_0(\tilde{\Phi})|^2, \quad (12)$$

где  $J > 1$  – параметр метода (по сути, размерность “шумового” подпространства старших собственных векторов КМ), вектор  $\mathbf{e}_0(\tilde{\Phi})$  – т.н. направляющий вектор (вектор амплитудно-фазового распределения вдоль АР), обеспечивающий максимум углового отклика антенны в некотором сигналь-

ном направлении. Из (12) видно, что подбор параметров  $\tilde{\Phi}$ , при которых достигается минимальное значение суммы проекций направляющего вектора на все старшие собственные векторы КМ, обеспечивает резкий максимум выходной мощности (12), а сам этот вектор становится вектором “сигнального” подпространства.

Подчеркнем, что этот и другие проекционные методы были предложены и достаточно эффективны для условий приема сигналов, когда расчет направляющих векторов не сопровождается какой-либо априорной неопределенностью. Такая ситуация характерна, например, для оценки углового спектра удаленных источников в свободном однородном пространстве, когда сами сигналы и направляющий вектор представляют собой плоские волны (отсюда и термин – направляющий вектор). В нашей задаче направляющий вектор  $\mathbf{e}_0(\tilde{\Phi}) = g(\tilde{\Phi}, \omega) / g(\tilde{\Phi}, \omega)$  имеет другой физический смысл, нежели в [17], но его “назначение” остается тем же – обеспечить минимальную величину проекции на подпространство старших собственных векторов КМ. Достижение этого условия означает максимальное приближение пробной КМ  $\mathbf{K}(\tilde{\Phi}, \omega)$  к экспериментальной (наблюдаемой) матрице.

Таким образом, процедура алгоритма MUSIC в нашей постановке сводится к нахождению такого вектора донных параметров, при котором достигается максимум выходной мощности процессора вида (12) или, что эквивалентно, минимум невязки:

$$W_{\text{MUSIC}}(\tilde{\Phi}) = 1/P_{\text{MUSIC}}(\tilde{\Phi}).$$

В условиях априорной неопределенности относительно модели расчета направляющего вектора в зависимости от оцениваемых параметров, алгоритм MUSIC ожидаемо теряет свою эффективность. Применительно к задаче оценки координат удаленного источника в подводном звуковом канале, расчетная модель которого известна не точно (не полностью согласована с реальной средой распространения), авторами [18] предложен адаптивный вариант данного алгоритма – алгоритм AMUSIC (adaptive MUSIC), который обладает более высокой устойчивостью к “рассогласованию” модели канала. Для этого в алгоритм вводится некоторое контролируемое отклонение направляющего вектора от модельного вектора  $\mathbf{e}_0(\tilde{\Phi})$ , т.е. априори учитывается возможная ошибка в построении модели самих сигналов и направляющих векторов. В этом случае оценочный направляющий вектор находится из решения следующей вариационной задачи с дополнительными ограничениями [8, 9, 18]:

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}(\tilde{\Phi}, \varepsilon) = \\ & = \operatorname{argmin}_{\mathbf{e}} \left\{ \sum_{j=J+1}^N |\hat{\psi}_j^+ \mathbf{e}|^2 : \mathbf{e} - \mathbf{e}_0(\tilde{\Phi})^2 \leq \varepsilon, \mathbf{e}^2 = 1 \right\}, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon$  – допустимая величина квадратичной нормы отклонения направляющих векторов (является параметром метода), а целевой функционал невязки приобретает вид:

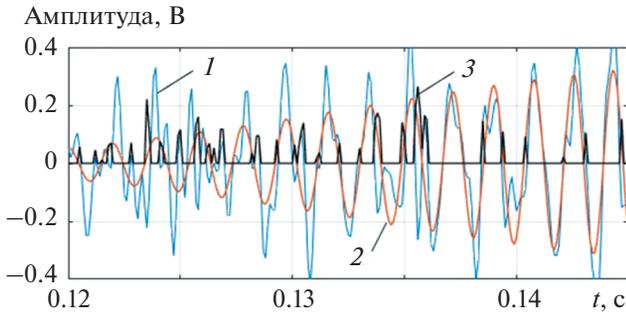
$$W_{\text{AMUSIC}}(\tilde{\Phi}) = \sum_{j=J+1}^N |\hat{\psi}_j^+ \mathbf{e}(\tilde{\Phi}, \varepsilon)|^2. \quad (13)$$

В тех случаях, когда целевая функция (13) зависит от некоторого числа контролируемых параметров  $\{p_i\}_{i=1}^P$ , можно использовать эти зависимости для улучшения качества адаптивного процессора. Важно выбрать при этом такие параметры, от которых модельные сигналы зависят существенно, но известным образом. Вычисляя для каждого из них величину “парциальной” невязки  $W_{\text{AMUSIC}}(\tilde{\Phi}, p_i)$ , следует построить обобщенный функционал невязки алгоритма AMUSIC в виде произведения таких целевых функций:

$$W_{\text{AMUSIC}P}(\tilde{\Phi}) = \prod_{i=1}^P W_{\text{AMUSIC}}(\tilde{\Phi}, p_i). \quad (14)$$

В этом случае искомые параметры оцениваются из условия достижения экстремума более сложного обобщенного функционала, но такое усложнение имеет свои преимущества. В работе [8] было показано, что при этом может быть достигнуто обострение глобального минимума невязки в пространстве оцениваемых параметров, причем эффект такого обострения (фактически, повышения разрешающей способности) растет с ростом числа сомножителей в (14). Одновременно с этим, локальные “паразитные” минимумы (своего рода, боковые лепестки обобщенной целевой функции (14)), напротив, теряют контраст (сглаживаются) в сравнении с расчетом функционала (13), что дополнительно повышает качество функционала. Таким образом, подобное обобщение адаптивного алгоритма указывает полезный способ “накопления” целевых функций с целью улучшения оценки искомых параметров донных слоев.

Например, при использовании широкополосного ЛЧМ-сигнала представляется естественным использование значений целевых функций, отвечающих набору отдельных частот, в результате чего на основе (14) строится обобщенный функционал  $W_{\text{AMUSIC}F}$ . Путем изменения по заданной схеме расстояний между излучателем и АР (при неизменной глубине ее погружения и ориентации), получаем аналогичное обобщение  $W_{\text{AMUSIC}R}$ . Оба этих варианта построения обобщенного функци-



**Рис. 6.** Модельный пример работы нейроноподобного фильтра на основе функционала невязки (16): 1 – принимаемый сигнал в смеси с шумом, 2 – модельный сигнал с ЛЧМ, 3 – выходной сигнал.

онала невязки для алгоритма AMUSIC используются нами при моделировании (раздел 5).

Изложенный здесь подход оперирует непосредственно с оценками входных КМ и не предполагает процедуры согласованной фильтрации принимаемых сигналов в каналах АР. Вследствие этого параметры всех донных слоев “участвуют” в формировании КМ на входе АР одновременно, что приводит к необходимости решать задачу поиска экстремума в пространстве высокой размерности. Можно, однако, и здесь использовать согласованную фильтрацию в качестве предварительной обработки и затем строить оценки модифицированной (в этом смысле) КМ с последующим построением целевой функции. Для этого введем общую для всех приемных каналов задержку  $\tau$  и сформируем комплексные векторы, относящиеся к выходным сигналам согласованных фильтров в каналах АР:  $G(\Phi, \tau)$ ,  $G^{\text{Noise}}(\tau)$  и  $G^{\text{Exp}}(\tau) = G(\Phi, \tau) + G^{\text{Noise}}(\tau)$ . Предполагая, как и ранее, отсутствие взаимных корреляций сигнальной и шумовой компонент, получаем следующее выражение для модифицированной таким образом КМ:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_G^{\text{Exp}}(\Phi, \tau) &= \langle G^{\text{Exp}}(\tau) G^{\text{Exp}}(\tau)^+ \rangle = \\ &= \mathbf{K}_G(\Phi, \tau) + \mathbf{K}_G^{\text{Noise}}(\tau), \\ \mathbf{K}_G(\Phi, \tau) &\equiv \langle G(\Phi, \tau) G(\Phi, \tau)^+ \rangle, \\ \mathbf{K}_G^{\text{Noise}}(\tau) &\equiv \langle G^{\text{Noise}}(\tau) G^{\text{Noise}}(\tau)^+ \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку реальная КМ  $\mathbf{K}_G^{\text{Exp}}(\Phi, \tau)$  так же неизвестна, как и для самих сигналов, то для дальнейшей обработки стандартно используем оценку КМ вида (11):

$$\hat{\mathbf{K}}_G^{\text{Exp}}(\Phi, \tau) = \frac{1}{L} \sum_T G_T^{\text{Exp}}(\Phi, \tau) G_T^{\text{Exp}}(\Phi, \tau)^+. \quad (15)$$

Конечно, практическая реализация оценки КМ (15) значительно сложнее, чем (11), так как свертка (4) формально требует интегрирования импульсов на бесконечном промежутке времени. Однако вычисление свертки достаточно произвести на конечном интервале в несколько длин импульса, что позволяет практически использовать модифицированные КМ вида (15).

Таким образом, при построении целевых функционалов в рамках проекционного подхода и его обобщений можно использовать состоятельные оценки КМ как для входных сигналов, так и для “сжатых” сигналов на выходе согласованных фильтров, подбирая различные значения задержки  $\tau$ .

**Целевая функция нейроноподобной свертки сигналов.** В работах [19, 20] для оценки параметров сложных сигналов был предложен метод, основанный на анализе работы нейроноподобных сетей. Важно, что выбор целевой функции в виде нейроноподобной свертки (по аналогии с корреляционной сверткой при согласованной фильтрации) дает высокую чувствительность к различию времен прихода сигналов. При этом эффективность данной процедуры слабо зависит от статистического распределения шумов, что выгодно отличает ее от других процедур построения целевой функции [20].

В применении к нашей задаче мы используем, модифицируя ранее полученные выражения [20], следующее выражение для нейроноподобной целевой функции:

$$\begin{aligned} W_{\text{NEURO}}(\tilde{\Phi}) &= \\ &= \sum_{R_j} 1 - 2 \frac{\left\| Q(G_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, \tau), \tilde{G}_{R_j}(\tilde{\Phi}, \tau)) \right\|}{\left\| G_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, \tau) \right\| + \left\| G_{R_j}(\tilde{\Phi}, \tau) \right\|}, \end{aligned} \quad (16)$$

где процедура сравнения сигналов (в числителе) описывается соотношениями:

$$\begin{aligned} Q(G_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, \tau), G_{R_j}(\tilde{\Phi}, \tau)) &= \max \left\{ \left| G_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, \tau) \right| \gamma_1(t), \left| G_{R_j}(\tilde{\Phi}, \tau) \right| \gamma_2(t) \right\}, \\ \gamma_1(t) &= \begin{cases} 0, & -\left| G_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, \tau) \right| \leq (G_{R_j}(\tilde{\Phi}, \tau) - G_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, \tau)) \text{sign}(G_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, \tau)) \\ 1, & -\left| G_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, \tau) \right| > (G_{R_j}(\tilde{\Phi}, \tau) - G_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, \tau)) \text{sign}(G_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, \tau)) \end{cases}, \\ \gamma_2(t) &= \begin{cases} 0, & -\left| G_{R_j}(\tilde{\Phi}, \tau) \right| \leq (G_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, \tau) - G_{R_j}(\tilde{\Phi}, \tau)) \text{sign}(G_{R_j}(\tilde{\Phi}, \tau)) \\ 1, & -\left| G_{R_j}(\tilde{\Phi}, \tau) \right| > (G_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, \tau) - G_{R_j}(\tilde{\Phi}, \tau)) \text{sign}(G_{R_j}(\tilde{\Phi}, \tau)) \end{cases}. \end{aligned}$$

Таблица 2. Параметры моделирования для расчетов рис. 7

Модель среды										
	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$v^P$ , м/с	$v^{SV}$ , м/с	$h$ , м	$\delta$ , дБ/м					
Водный слой	1040	1475	0	50	0					
Упругий слой	1600 ± 120	1800 ± 25	300 ± 75	20 ± 5	0.02					
Полупространство	1800	2000	400	∞	0.03					
Приемно-излучающая система										
$f$ , Гц	$W_S$ , Вт	$x^S$ , м	$y^S$ , м	$z^S$ , м	$T_{\text{imp}}$ , с	$F_d$ , Гц	$l_g$ , м	$x_1^{(R)}$ , м	$y_1^{(R)}$ , м	$z^{(R)}$ , м
200–1000	0.75	15 0	0	15	1	5000	2	10	0	10

Функция  $Q(G_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, \tau), G_{R_j}(\tilde{\Phi}, \tau))$  указывает правило, в соответствии с которым формируется выходной сигнал в данном алгоритме при сравнении экспериментального сигнала  $G_{R_j}^{\text{Exp}}(\Phi, \tau)$  на выходе согласованного фильтра с аналогичным модельным сигналом  $G_{R_j}(\tilde{\Phi}, \tau)$ . Расчет этой функции иллюстрируется на рис. 6, где показаны модельные реализации принятого сигнала в смеси с шумом (метка 1), непосредственного сигнала (метка 2) и сигнала на выходе нейроно-подобного фильтра (метка 3). Как и в других алгоритмах, при переборе параметров гипотезы  $\tilde{\Phi}$  находится экстремум (минимум) целевой функции (16), а отвечающий ему вектор параметров  $\hat{\Phi}$  становится их оценкой.

## 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ И СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ

В целях сравнительного анализа обсуждаемых алгоритмов оценивания выполнено их численное моделирование для заданной (достаточно простой) структуры осадочных пород морского дна.

Параметры моделирования приведены в табл. 2. Предполагается, что зондирующие ЛЧМ-импульсы излучаются в широкой полосе 200–1000 Гц, имеют длительность  $T_{\text{imp}}=1$  с (база сигнала равна 800) и мощность  $W_S=0.7515$  Вт, источник расположен на глубине 15 м ( $F_d=5$  кГц – частота дискретизации сигнала). Приемная АР предполагается горизонтальной и эквидистантной, расположенной на глубине 10 м и удаленной от излучателя на 10 м (по первому гидрофону), число гидрофонов  $K_R=15$ , расстояние между соседними гидрофонами  $l_g=2$  м. С помощью согласованной фильтрации в каналах решетки осуществляется корреляционное “сжатие” полезных сигналов (в число раз, равное базе) и оценка времени их приходов.

Расчеты проводились для модели дна в виде упругого слоя с параметрами, имитирующими

водонасыщенную гальку, расположенную на упругом подстилающем полупространстве, параметры которого близки к параметрам влажной глины. Задаваемые как истинные значения геоакустических параметров и интервалы их поиска также приведены в табл. 2. Оценивались следующие параметры слоя: плотность  $\rho_1$ , скорости продольных ( $v_1^P$ ) и поперечных ( $v_1^{SV}$ ) волн, толщина  $h_1$ . Затухание  $\delta_1$  учитывалось в виде некоторого среднего (по частоте) значения, но не оценивалось с учетом того, что при использовании широкополосного сигнала корректная процедура такой оценки требует учета частотной зависимости и дополнительного усложнения расчетов (этот вопрос будет исследован в дальнейшем).

В качестве целевых функций использовались:

а) среднеквадратичная  $L_2$ -норма невязки (10);

б) функционал невязки обобщенного адаптивного процессора  $W_{\text{AMUSICR}}$  (14) для двух расстояний между излучателем и АР (10 и 12 м). При этом каждая из двух парциальных функций вида (13) рассчитывается для спектральных амплитуд сигналов (имитирующего принятый и модельного) на центральной частоте ЛЧМ (600 Гц);

с) функционал невязки обобщенного адаптивного процессора  $W_{\text{AMUSICF}}$  (14) для двух различных частот из полосы ЛЧМ (400 и 800 Гц) и фиксированного расстояния (10 м);

д) функционал нейроноподобной свертки  $W_{\text{NEURO}}$  (16).

Для сравнительного исследования помехоустойчивости соответствующих алгоритмов реконструкции параметров дна были рассчитаны средние значения отклонений оценок от истинных значений – величины  $\Delta\rho_1$ ,  $\Delta v_1^P$ ,  $\Delta v_1^{SV}$ ,  $\Delta h_1$ , и дисперсии этих отклонений – величины  $\sigma\Delta\rho_1$ ,  $\sigma\Delta v_1^P$ ,  $\sigma\Delta v_1^{SV}$ ,  $\sigma\Delta h_1$  в зависимости от величины входного ОСШ. Расчеты проводились путем усреднения по  $10^3$  случайным реализациям шума в широком диапазоне значений входного ОСШ,

от  $-15$  до  $15$  дБ, с особым вниманием на области малых значений, которая в наибольшей степени отвечает практически важным ситуациям.

С учетом процедур когерентного накопления полезных сигналов (раздел 2), моделирование алгоритмов включало расчет выигрыша (коэффициента усиления по величине ОСШ) когерентной обработки полезных сигналов в предположении взаимно-некоррелированных реализаций шума. Выигрыш согласованной фильтрации (частотно-го накопления) сложного сигнала определяется известным соотношением:  $G^f = 10 \lg \sqrt{\Delta f T_{\text{imp}}}$ , где  $\Delta f$  – полоса сигнала,  $T_{\text{imp}}$  – его длительность. Выигрыш когерентного накопления по элементам АР (пространственного накопления):  $G^R = 10 \lg K_R$ . Выигрыш процедуры КТН (дополнительного пространственного накопления при движении АР) оценивается аналогично:  $G^T = 10 \lg I_{KTN}$ , где  $I_{KTN}$  – количество импульсов, сохраняющих взаимную когерентность при отражениях от разных участков донных слоев (задано величиной  $\sim 10$ , что является сильной оценкой снизу, если ориентироваться на экспериментальные данные [1]).

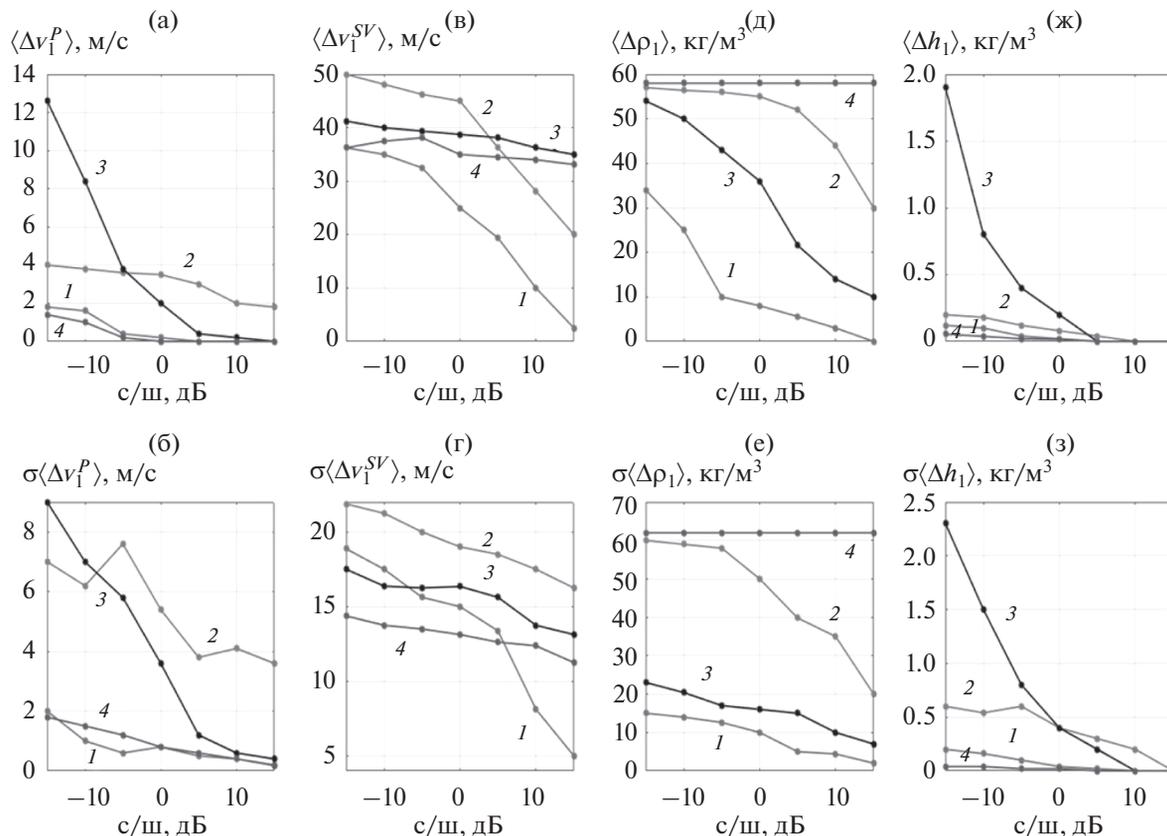
С учетом значений приведенных в табл. 2 параметров, имеем следующие оценки:  $G^f \sim 14$  дБ,  $G^R \sim 12$  дБ,  $G^T \sim 10$  дБ. Таким образом, для алгоритмов, использующих весь обозначенный “арсенал” когерентной обработки, результирующий выигрыш составляет значительную величину  $\sim 36$  дБ. В данном случае, это алгоритмы а) и д). Для алгоритмов б) и с) согласованные фильтры в каналах АР не моделировались, поэтому выигрыш составляет  $\sim 22$  дБ.

Анализ выражений для принимаемых сигналов, а также ранее полученные результаты [9, 10] показывают, что отличия от истинных значений величин плотности слоев  $\tilde{\rho}_n$  и поперечных скоростей  $\tilde{v}_n^{SV}$  значительно меньше влияют на реализации принимаемых сигналов и, соответственно, на изменчивость целевых функций, нежели отличия величин продольных скоростей  $\tilde{v}_n^P$  и толщин  $\tilde{h}_n$  донных слоев. Поскольку величины поисковых интервалов имеют важное значение с точки зрения общего времени процедуры оценивания параметров, это обстоятельство указывает на возможность избирательной оптимизации таких интервалов.

Результаты моделирования приведены на рис. 7. Видно, что наиболее устойчивые оценки достигаются при использовании алгоритма на основе минимизации  $L_2$ -нормы невязки с процедурой КТН (кривые 1) – смещение и дисперсия отклонений значений всех искомых параметров от их истинных значений минимальны в сравнении с други-

ми алгоритмами. Это объясняется эффективным использованием совокупности процедур когерентного накопления сигналов и значительным повышением выходного ОСШ. Достаточно устойчивые оценки продольной скорости (рис. 7а, 7б) и толщины слоя (рис. 7ж, 7з) получаются при использовании алгоритма на основе нейроподобной свертки (кривые 4). Вместе с тем, видно, что при оценке плотности породы (рис. 7д, 7е) и поперечной скорости (рис. 7в, 7г) такой алгоритм практически не работает. Это указывает на высокую чувствительность данной целевой функции к вариациям фазовых набегов принимаемых сигналов (они “откликаются” на продольную скорость и толщину слоя) и, напротив, об очень низкой чувствительности к вариациям амплитуд (зависящих от других двух параметров слоя). Целевая функция  $W_{\text{AMUSIC}}$  и ее обобщения зависят от свободного параметра  $\varepsilon$ , который фиксирует заданное отклонение модельного направляющего вектора от истинного (см. раздел 4). Расчеты показали, что эффективность алгоритмов б) и с) существенно зависит от этой величины, что является ожидаемым результатом – слишком малые значения  $\varepsilon$  понижают устойчивость алгоритмов (повышают дисперсии оценок), в то время как высокие значения “загрубляют” расчетную модель и не дают возможности получить малые смещения оценок, хотя при этом они оказываются более устойчивыми. Приведенные на рис. 7 зависимости (кривые 2 и 3) получены при фиксированном значении  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

С точки зрения сравнительной оценки эффективности рассмотренных алгоритмов, интерес представляет и другой аспект – сопоставление алгоритмов по величине требуемых объемов и времени вычислений. В рамках представленного здесь моделирования, такого количественного сопоставления нами не проводилось, поскольку в значительной степени эти характеристики зависят от выбранного метода поиска глобального экстремума целевой функции (заданного вида) в многопараметрическом пространстве, который может быть, в свою очередь, оптимизирован с этой точки зрения. Используемая модель донной структуры является достаточно простой, в силу чего подобная оптимизация нами не проводилась, а поиск глобальных экстремумов осуществлялся наиболее простым способом – перебором значений с определенным шагом в общем цикле расчета всех целевых функционалов. Качественно можно отметить, однако, что нейроподобный алгоритм представляет относительно более быстрым, поскольку он основан на операции простого сравнения (больше/меньше) двух сигналов (принимаемого в смеси с шумом и “чистого” опорного), в то время как проекционные алгоритмы включают в себя процедуры построе-



**Рис. 7.** Смещение средних значений (верхний ряд) и дисперсия отклонений (нижний ряд) оценок параметров осадочного слоя (слева направо: продольной и поперечной скорости, плотности, толщины) в зависимости от величины входного ОСШ: 1 – алгоритм на основе  $L_2$ -нормы невязки; 2 – алгоритм на основе обобщенной целевой функции  $W_{AMUSICR}$ ; 3 – алгоритм на основе обобщенной целевой функции  $W_{AMUSICF}$ ; 4 – алгоритм на основе нейроподобной свертки.

ния оценки КМ сигналов и ее спектрального разложения (в случае большого числа приемных элементов в АР эти процедуры становятся “затратными”). В более реалистичных условиях, сопряженных с учетом большего количества слоев донной структуры, отмеченный вычислительный аспект сравнительного анализа алгоритмов становится, очевидно, важным и требует дополнительного исследования.

Таким образом, рассмотренные алгоритмы оценивания, различные по способу построения целевой функции, обнаруживают существенно различную помехоустойчивость, которая, в свою очередь, оказывается сильно неравномерной по самим параметрам и зависит от того, какой именно параметр подлежит оценке. Следовательно, для предварительной оценки качества того или иного алгоритма с целью выбора наилучшего в конкретных условиях применения, целесообразно проводить подобное моделирование на основе имеющейся априорной информации относительно структуры донных слоев. Полезной представ-

ляется также возможность комбинированного подхода, когда различные геоакустические параметры дна оцениваются с использованием различных целевых функций.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках разработанной модели формирования сигналов и помех реверберации для постановки, отвечающей типичной схеме сейсмоакустического зондирования морского дна с буксируемой приемно-излучаемой системой, проведен сравнительный анализ эффективности алгоритмов реконструкции геоакустических параметров. Наравне со стандартным подходом, основанным на использовании среднеквадратичной нормы невязки в качестве целевой функции, рассмотрены два новых подхода, которые используют целевые функции на основе обобщения известного в обработке сигналов проекционного метода MUSIC и на основе нейроподобной свертки. Ключевой процедурой предварительной обработки принимаемых сигналов в каналах приемной АР являет-

ся их когерентное частотное и пространственное накопление, способное обеспечить значительное повышение ОСШ для тех сигналов, которые “участвуют” в построении целевых функций при оценивании параметров дна. Это указывает на реальную возможность получения подобных оценок для относительно глубоких слоев, отраженные сигналы от которых на фоне шумов оказываются слишком слабыми для решения поставленной задачи без использования такой процедуры.

Методом стохастического моделирования исследована устойчивость алгоритмов в терминах среднего смещения оценок и дисперсии их отклонений от истинных значений в зависимости от величины входного ОСШ. Наибольший интерес, очевидно, эти зависимости представляют в области малых (отрицательных) значений ОСШ, при которых оценка параметров практически невозможна без реализации дополнительного выигрыша путем когерентной обработки. Показано, что наилучшую помехоустойчивость в рамках данной постановки задачи моделирования обнаруживает алгоритм на основе стандартного функционала невязки в виде  $L_2$ -нормы, но при условии выполнения процедуры когерентного накопления “сжатых” импульсов на выходе согласованных фильтров по элементам АР и по траектории ее движения как целого. Целевые функции адаптивного алгоритма AMUSIC также показывают относительно малые смещения оценок, однако, дисперсия отклонений оценки при самых малых ОСШ оказывается относительно большой. Дополнительным ресурсом повышения эффективности таких алгоритмов является использование обобщений вида (14) при достаточно большом наборе парциальных целевых функций (в данном случае мы ограничились только двумя функциями, рассчитанными для двух различных частот и расстояний между источником и АР). При условии использования широкополосного сигнала выбор заметно большего числа частот представляется наиболее практичным подходом к построению обобщенного функционала невязки, который может рассматриваться как альтернатива частотному накоплению в других алгоритмах. Наконец, функционал невязки в виде нейроноподобной свертки демонстрирует неоднозначный результат: он обеспечивает малую дисперсию оценки скорости продольной волны и толщины слоя при низких значениях ОСШ, но при этом оценка такого важного, с точки зрения сейсморазведки, параметра как плотность, имеет относительно низкое качество даже при высоких значениях ОСШ.

В целом, полученные результаты указывают на то, что заранее сделать однозначный вывод относительно эффективности той или иной целевой функции и алгоритма оценивания не представляется возможным. Помимо различно-

го “устройства” самих функционалов невязки, принципиальное влияние оказывает также величина достигаемого выигрыша когерентной обработки принимаемых сигналов, которая может быть разной для разных алгоритмов. С точки зрения приложений, интерес представляет также вывод о целесообразности комбинированного подхода к решению задачи, в рамках которого геоакустические параметры оцениваются с использованием различных целевых функций, корректный выбор которых требует предварительного моделирования. Такое моделирование и сравнительная оценка эффективности алгоритмов могут быть реализованы на основе имеющейся априорной информации относительно структуры донных слоев, которая, как правило, известна с точностью до некоторых интервалов искомого значений, а сами эти интервалы “разумно” ограничивают область формирования гипотез относительно значений тех или иных параметров.

Исследование по разработке алгоритмов оценивания параметров и моделированию их помехоустойчивости (разделы 4, 5) выполнено в рамках базовой части государственного задания ННГУ (тема № 0729-2020-0037); разработка моделей сигналов и помех реверберации (разделы 2, 3) выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН (тема № 0030-2021-0009).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лазарев В.А., Малеханов А.И., Мерклин Л.Р., Романова В.И., Таланов В.И., Хилько А.И. Когерентное сейсмоакустическое профилирование морского дна с использованием широкополосных сигналов // *Океанология*. 2013. Т. 53. № 6. С. 843–850.
2. Калинина В.И., Смирнов И.П., Малеханов А.И., Хилько А.И. Когерентная морская сейсмоакустика: новые подходы к реконструкции структуры донных слоев в шельфовых акваториях // *Известия РАН. Сер. физ.* 2017. Т. 81. № 8. С. 1020–1027.
3. Сейсморазведка. Справочник геофизика / Под ред. Гурвича И.И., Номоконова В.П. М.: Недра, 1981. 464 с.
4. Ампилов Ю.П., Барков А.Ю., Яковлев И.В., Филиппова К.Е., Приезжев И.И. Почти все о сейсмической инверсии. Часть 1 // *Технологии сейсморазведки*. 2009. № 4. С. 3–16.
5. Яковлев И.В., Ампилов Ю.П., Филиппова К.Е. Почти все о сейсмической инверсии. Часть 2 // *Технологии сейсморазведки*. 2011. № 1. С. 5–15.
6. Jiang Y.-M., Chapman N.R., Gerstoft P. Short range travel time geoaoustic inversion with vertical line array // *J. Acoust. Soc. Am.* 2008. V. 124. № 3. Pt. 2. EL135–140.
7. Белов А.И., Кузнецов Г.Н. Оценка акустических параметров модели дна в мелком море с использованием априорной геолого-геофизической информации и преобразования Вигнера // *Акуст. журн.* 2014. Т. 60. № 2. С. 190–195.

8. *Смирнов И.П., Калинина В.И., Хилько А.И.* Восстановление параметров морского дна при когерентном сейсмоакустическом зондировании. I. Решающие правила // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 1. С. 46–55.
9. *Смирнов И.П., Калинина В.И., Хилько А.И.* Восстановление параметров морского дна при когерентном сейсмоакустическом зондировании. II. Анализ робастности // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 2. С. 207–216.
10. *Калинина В.И., Смирнов И.П., Хилько А.И., Хилько А.А.* Восстановление параметров морского дна при когерентном сейсмоакустическом зондировании. III. Накопление сигналов и подавление шумов // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 1. С. 10–21.
11. *Dosso S.E., Dettmer J.* Bayesian matched-field geoaoustic inversion // *Inverse Problems*. 2001. V. 27. P. 055009 (23p).
12. *Лебедев А.В., Малеханов А.И.* Когерентная сейсмоакустика // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. Т. 66. № 7. С. 579–597.
13. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007. 370 с.
14. *Rice J.K., White J.S.* Norms for smoothing and estimation // *SIAM Rev.* 1964. № 6. P. 243–256.
15. *Малышкин Г.С., Сидельников Г.Б.* Оптимальные и адаптивные методы обработки гидроакустических сигналов (обзор) // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 5. С. 526–545.
16. *Сазонтов А.Г., Малеханов А.И.* Согласованная пространственная обработка сигналов в подводных звуковых каналах (обзор) // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 233–253.
17. *Schmidt R.O.* Multiple emitter location and signal parameter estimation // *IEEE Trans. Antennas and Propagation*. 1986. V. 34. № 3. P. 276–280.
18. *Сазонтов А.Г., Смирнов И.П.* Локализация источника в акустическом волноводе с неточно известными параметрами с использованием согласованной обработки в модовом пространстве // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 4. С. 540–550.
19. *Khobotov A., Khilko A., Yakhno V.* Analysis of advantages of neuron-like systems in the procedure of signal comparison-measure calculation // *Optical Memory & Neural Networks (Information Optics)*. 2008. № 5. P. 892–898.
20. *Хоботов А.Г., Хилько А.И., Романова В.И.* Использование нейросетевых структур свободной динамики с контекстно-зависимыми параметрами для наблюдения в неоднородных нестационарных средах // Известия вузов. Радиофизика. 2013. Т. LVI. № 2. С. 104–124.

УДК 534.21

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИСКРЕТНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОЛЯ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКЕ В ВОЛНОВОДЕ

© 2021 г. Д. В. Макаров\*

*Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН,  
ул. Балтийская 43, Владивосток, 690041 Россия*

*\*e-mail: makarov@poi.dvo.ru*

Поступила в редакцию 08.07.2020 г.

После доработки 19.04.2021 г.

Принята к публикации 23.04.2021 г.

Рассматривается задача о возбуждении акустических полей с заданной пространственной конфигурацией в условиях мелкого моря. Предлагается новый теоретический подход, позволяющий напрямую связать амплитудно-фазовое распределение сигналов для излучателей вертикальной антенны с профилем создаваемого акустического поля. В основе предлагаемой теории лежит математический аппарат функций дискретного представления переменных, известный из квантовой теории. В случае эквидистантных антенн с достаточно высокой плотностью излучателей теория воспроизводит ранее известные результаты. С помощью предлагаемого подхода исследуется влияние плотности расположения излучателей на качество возбуждения требуемого акустического поля.

*Ключевые слова:* акустическая антенна, акустический волновод, акустический импульс, функции дискретного представления переменных

**DOI:** 10.31857/S0320791921040092

### ВВЕДЕНИЕ

Для решения различных научных и практических задач подводной акустики нередко требуется создание звуковых полей с заданной пространственной конфигурацией. К числу таких задач относится, например, акустическая засветка заданного участка волновода [1–4]. Кроме того, селективное возбуждение отдельных мод или узких лучевых пучков упрощает реконструкцию среды с помощью методов гидроакустической томографии [5–7], а также может быть использовано для создания так называемых слаборасходящихся пучков [8–12], представляющих значительный интерес в контексте подводной связи [13–15].

В этой работе рассматривается задача о возбуждении тональных и импульсных сигналов с помощью вертикальной антенны, представляющей собой цепочку ненаправленных излучателей (монополей). Проблеме расчета амплитудно-фазовых распределений (АФР) для монополей антенны посвящена обширная литература (см., например, [16–24]). В данной работе рассматривается новый подход к этой проблеме, основанный на использовании функций дискретного пред-

ставления переменных (ДПП). Эти функции являются связующим звеном между точечными значениями акустического поля и его непрерывным профилем. Функции ДПП активно используются в задачах квантовой физики (см., например, [25–29]).

Параллельно в работе рассматривается задача о влиянии числа монополей на эффективность возбуждения требуемого акустического поля. Следует отметить, что сооружение вертикальной антенны с высокой плотностью монополей является технически достаточно сложной задачей даже в условиях мелкого моря. Отсюда возникает потребность в упрощении антенны без существенных потерь в качестве возбуждения. Упрощение предполагает уменьшение числа излучателей и/или длины антенны. Специфической особенностью этой работы также является то, что для оценки эффективности возбуждения используется такая характеристика как воспроизводимость.

Статья построена следующим образом. В следующем параграфе представлена теория расчета амплитудно-фазового распределения антенны с помощью функций дискретного преобразования переменных. Затем вводится модель акустиче-

ского волновода в мелком море, которая будет впоследствии использована для численного моделирования. В последующих двух разделах рассматривается вопрос о влиянии плотности излучателей на эффективность возбуждения акустических мод с помощью эквидистантной антенны. Предпоследний раздел статьи посвящен применению теории, основанной на функциях ДПП, для случая неэквидистантной антенны. В заключении подводятся итоги работы и формулируются основные выводы.

### ВЫЧИСЛЕНИЕ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ АНТЕННЫ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ ДИСКРЕТНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Традиционный подход к синтезу звуковых полей основан на применении антенных решеток с соответствующими АФР [30, 31]. Обозначим АФР решетки с помощью вектора  $\mathbf{Y}$ , компоненты которого равны комплексным амплитудам поля, создаваемого каждым отдельным монополю (излучателем). Вычисление  $\mathbf{Y}$  сводится к решению матричных уравнений, связывающих коэффициенты возбуждения отдельных нормальных мод с комплексными амплитудами звукового поля на различных элементах решетки. В простейшем случае эта процедура сводится к приравниванию амплитуды и фазы каждого излучателя к амплитуде и фазе звукового поля в данной точке, т.е.

$$Y_j(f) = w\Psi(z_j, f), \quad (1)$$

где  $z_j$  – глубина  $j$ -го точечного излучателя (монополя),  $f$  – частота сигнала,  $w$  – нормировочный коэффициент. Формула (1) легко обобщается на случай импульсного сигнала путем перехода из пространства частот в пространство времен с помощью преобразования Фурье

$$\Phi(t) = \int \mathbf{Y}(\Omega)S(\Omega)e^{-i\Omega t} d\Omega, \quad (2)$$

где  $\Omega = 2\pi f$  – круговая частота,  $S(\Omega)$  – спектр Фурье сигнала, а вектор  $\Phi$  описывает АФР в импульсном режиме.

Вместе с тем, условия применимости формулы (1) вызывают некоторые вопросы. Во-первых, насколько высокой должна быть плотность монополей, чтобы обеспечивалось эффективное возбуждение требуемого акустического поля? Разумно предположить, что количество монополей должно превышать число распространяющихся мод. Однако в случае широкополосных импульсных сигналов последнее число не является однозначно определенным. Кроме того, влияние профиля скорости звука может предполагать неоднородную плотность монополей. Отсюда возникает

другой вопрос, который касается применимости формулы (1) для антенны с неэквидистантным расположением монополей. Очевидно, что в этом случае коэффициент  $w$  должен зависеть от номера монополя  $j$ . Каким образом вычисляется эта зависимость?

Предлагаемая в данной работе теория позволяет в той или иной степени ответить на поставленные вопросы. В ней АФР вертикальной антенны жестко привязано к непрерывному профилю создаваемого поля, а комплексная амплитуда  $j$ -го монополя определяется выражением

$$\Phi_j(t) = \int \Psi(t, z)\chi_j^*(z) dz, \quad (3)$$

где  $\Psi(t, z)$  – акустический импульс, который требуется излучить,  $\chi_j(z)$  – функция ДПП, соответствующая  $j$ -му монополю. Возможность использования функций ДПП в акустике океана была впервые продемонстрирована в работах [32, 33], где был предложен алгоритм для точной реконструкции профиля звукового поля по данным, полученным с помощью вертикальной приемной антенны. В настоящей работе аналогичный алгоритм используется для синтеза звуковых полей.

Функции ДПП могут быть найдены следующим образом. Рассмотрим в качестве примера подводный акустический волновод, состоящий из двух слоев, водного и осадочного. Снизу осадочный слой граничит со слоем твердых пород, который будем считать непроницаемым для звука. Для простоты будем считать волновод плоско-слоистым, тогда граничные условия выглядят следующим образом:

$$\Psi(z=0) = 0, \quad \frac{d\Psi}{dz}(z=L) = 0. \quad (4)$$

В качестве первого шага для определения функций ДПП необходимо найти набор вспомогательных базисных функций  $\phi_j(z)$ , которые, во-первых, удовлетворяли бы граничным условиям (4), а во-вторых – обеспечивали бы трехдиагональную форму матрицы  $\mathbf{Z}$ , элементы которой определяются выражением [33]

$$Z_{ij} = \int dz \phi_i^*(z)f(z)\phi_j(z), \quad (5)$$

где  $f(z)$  – некоторая обратимая функция. Если такой базис найден, то функции ДПП могут быть определены по формуле [27]

$$\chi_j(z) = \sum_{i=1}^J V_{ij}\phi_i(z), \quad (6)$$

где  $V_{ij}$  –  $i$ -ый элемент  $j$ -го собственного вектора матрицы  $\mathbf{Z}$ . Число  $J$  определяется из требования, что акустическое поле должно полностью описы-

ваться первыми  $J$  членами разложения по базису функций  $\phi_j(z)$ , т. е.

$$\Psi(z) = \sum_{j=1}^J a_j \phi_j(z), \quad (7)$$

где

$$a_j = \int_{z=0}^L \phi_j^*(z) \Psi(z) dz. \quad (8)$$

Данное требование можно также переформулировать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^J |a_j|^2 = \int_{z=0}^L |\Psi(z)|^2 dz. \quad (9)$$

Условия (7) и (9) подразумевают, что матрица  $\mathbf{Z}$  – квадратная матрица размера  $J \times J$ .

Трехдиагональность матрицы  $\mathbf{Z}$  обеспечивает ключевое свойство функций ДПП [25]. Его можно сформулировать следующим образом: при разложении акустического поля по функциям ДПП,

$$\Psi(z) = \sum_{j=1}^J b_j \chi_j(z), \quad (10)$$

амплитуды разложения определяются точечными значениями акустического поля по формуле

$$b_j \equiv \int \Psi(z) \chi_j^*(z) dz = w_j \Psi(z_j), \quad (11)$$

где глубины  $z_j$  задаются собственными значениями матрицы  $\mathbf{Z}$ ,

$$z_j = z(f_j). \quad (12)$$

Здесь  $z(f)$  – это обращенная зависимость  $f(z)$  (отсюда становится ясным, почему последняя должна быть обратимой), а весовые коэффициенты  $w_j$  определяются по формуле

$$w_j = \frac{V_{jj}^*}{\phi_j(z_j)}. \quad (13)$$

Таким образом, функции ДПП позволяют установить взаимно однозначную связь между точечными значениями акустического поля и его непрерывным профилем, если акустическое поле удовлетворяет условию (9). Размещая монополи на глубинах (12), мы можем сформировать поле  $\Psi(z)$  с помощью АФР следующего вида:

$$Y_j(f) = w_j \Psi(z_j, f), \quad (14)$$

где, в отличие от формулы (1), предполагается, что весовые коэффициенты могут зависеть от номера монополя. Такая ситуация реализуется в случае антенны с неэквидистантным расположением монополей.

Отметим, что базис функций ДПП является ортогональным, т. е.

$$\int_{z=0}^L \chi_i \chi_j dz = \delta_{ij}, \quad (15)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Весовые коэффициенты  $w_j$  в (14) зависят от вида вспомогательного базиса  $\phi_j(z)$ . Как отмечалось выше, этот базис должен удовлетворять граничным условиям в волноводе, а также обеспечивать трехдиагональность матрицы  $\mathbf{Z}$ . В работах [32, 33] был предложен вариант такого базиса, удовлетворяющий вышеупомянутым требованиям, в виде пространственных Фурье-гармоник

$$\phi_j = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{(2j-1)\pi z}{2L}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

при этом

$$f(z) = \cos \frac{\pi z}{L}, \quad 0 < z \leq L. \quad (17)$$

В этом случае собственные векторы и собственные значения матрицы  $\mathbf{Z}$  могут быть найдены аналитически. Собственные векторы описываются формулой

$$V_{ij} = \sqrt{\frac{2}{J+1}} \sin \left[ \frac{\left(i - \frac{1}{2}\right) j \pi}{J+1} \right]. \quad (18)$$

Подставляя (16) и (18) в (6), мы можем найти явный вид функций ДПП. Собственные значения определяются выражением

$$f_i = \cos \left( \frac{j \pi}{J+1/2} \right). \quad (19)$$

Учитывая (17) и (19), получаем, что вспомогательный базис (16) отвечает антенне с эквидистантным расположением элементов:

$$z_j = z(f_j) = j \Delta z, \quad (20)$$

где расстояние между соседними монополями

$$\Delta z = \frac{L}{J+1}. \quad (21)$$

Весовой коэффициент  $w_j$  определяется по формуле

$$w_j = \sqrt{\Delta z} \quad (22)$$

и не зависит от  $j$ . Таким образом, расчет АФР с использованием вспомогательного базиса (16) воспроизводит формулу (1). Из этого следует, что методы расчета АФР, основанные на формулах (1) и (3), эквивалентны друг другу, если выполняется условие (9), а глубины монополей удовлетворяют (20). Различия между двумя описанными выше подходами при одном и том же положении

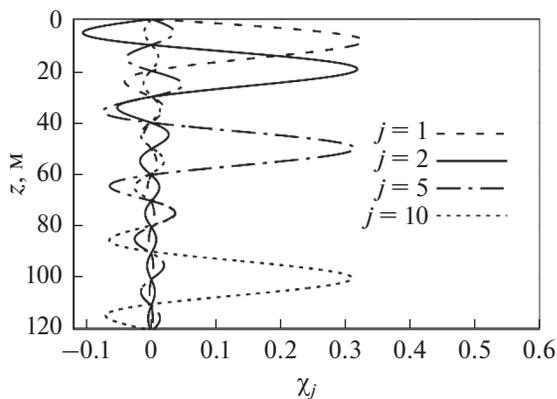


Рис. 1. Профили функций ДПП, соответствующих  $\Delta z = 10$  м.

монополей могут возникать лишь тогда, когда ограничение на пространственный спектр (9) выполняется недостаточно строго. Сравнительный анализ точности этих подходов приведен ниже, когда будет непосредственно рассматриваться вопрос о возбуждении модовых импульсов.

Функции ДПП являются хорошо локализованными по глубине. Примеры функций ДПП, соответствующих  $\Delta z = 10$  м, представлены на рис. 1. Если ввести оператор проекции звукового поля на базис (16)

$$\hat{P}_j \Psi = \sum_{j=1}^J a_j \phi_j, \quad (23)$$

то нетрудно убедиться, что каждая функция ДПП  $\chi_j(z)$  удовлетворяет условию

$$\chi_j(z) = w_j \hat{P}_j \delta(z - z_j), \quad (24)$$

где  $\delta(z)$  — дельта-функция. Другими словами, функция ДПП является результатом Фурье-фильтрации дельта-функции, в результате чего отбрасываются гармоники (16) с номерами, превышающими  $J$ . Из этого следует, что поле, создаваемое моноподем, помещенным на глубину  $z = z_j$ , эквивалентно  $j$ -ой функции ДПП, если звуковое поле полностью описывается суммой гармоник (16) с номерами, не превышающими  $J$ . В действительности поле монополя, моделируемое как дельта-функция, характеризуется бесконечным пространственным спектром Фурье. Однако уже на малых расстояниях от источника спектр кардинально трансформируется, обретая верхнюю границу  $k_{\max} = 4\pi/\lambda$ . На этом трансформация не заканчивается — спектр вертикальных волновых чисел еще более сужается вследствие затухания волноводных мод с большими номерами, которые активно поглощаются дном. Таким образом, мы приходим к выводу, что наиболее коротковолновая часть спектра излучения моно-

поля является несущественной с точки зрения распространения. Практически это означает, что Фурье-фильтрация, описываемая оператором  $\hat{P}_j$  с должным образом заданным значением  $J$ , не меняет свойств результирующего поля. Отсюда следует, что функцию ДПП можно рассматривать как *эффективный* вклад отдельного монополя в акустическое поле при условии расположения остальных монополей на глубинах, описываемых формулой (20). Генерируя каждым из монополей сигнал (3), мы можем сконструировать желаемое акустическое поле, используя ортогональность функций ДПП.

Необходимо подчеркнуть, что вид функции ДПП, связанной с отдельным моноподем, не является уникальным. Варьируя расстояние между соседними излучателями  $\Delta z$ , мы, по сути, меняем степень Фурье-фильтрации. Тем самым мы управляем размером области локализации для соответствующей функции ДПП. Ограничения на степень фильтрации диктуются исключительно требованием быстрого затухания отфильтрованной части спектра.

Можно задаться вопросом: а насколько свободно можно варьировать расстояние между монополями? Сначала рассмотрим случай эквидистантной антенны (неэквидистантные антенны будут рассмотрены позже). Согласно (21), значение  $\Delta z$  однозначно определяется положением нижней границы волновода  $L$  и числом гармоник  $J$ . Последнее может принимать только целые значения, соответственно, расстоянию  $\Delta z$  доступно только дискретное множество значений. Это ограничение легко преодолевается, если принять во внимание, что на практике нас интересуют чаще всего только низшие водные моды, способные распространяться на достаточно длинные дистанции. Эти моды практически не чувствительны к положению границы между осадочным слоем и слоем твердых пород. Более того, в натуральных экспериментах положение этой границы чаще всего не известно достоверно. Отсюда следует, что для расчета функций ДПП мы можем использовать фиктивную глубину осадочного слоя, значение которой может быть подобрано из условия

$$L' = (J + 1)\Delta z, \quad (25)$$

т.е. расстояние между соседними монополями  $\Delta z$  может выбираться согласно нашим пожеланиям. При использовании фиктивной глубины выражение (16) модифицируется следующим образом:

$$\phi_j = \sqrt{\frac{2}{L'}} \sin \frac{(2j-1)\pi z}{2L'}, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (26)$$

Естественно предположить, что уменьшение частоты сигнала дает больше свободы для Фурье-

фильтрации, позволяя использовать более разреженные антенны. Кроме того, существенно разреженные антенны могут использоваться, если стоит задача создать волновой пакет, распространяющийся почти горизонтально вдоль оси акустического волновода и практически не испытывающий вертикальных осцилляций. Указанные обстоятельства хорошо известны в теории вертикальных акустических антенн [31]. Степень фильтрации, которую мы можем себе позволить, также зависит и от длины трассы. В частности, она зависит от того, насколько быстро затухают высокие моды волновода, дающие основной вклад в коротковолновую часть спектра вертикальных волновых чисел. Таким образом, мы приходим к выводу, что с увеличением расстояния допустимая степень фильтрации может существенно возрастать.

### МОДЕЛЬ АКУСТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

Рассмотрим мелководный акустический волновод, состоящий из двух слоев: водного, соответствующего интервалу глубин

$$0 \leq z < h,$$

и осадочного, соответствующего

$$h \leq z < L.$$

Звуковое поле в волноводе описывается уравнением Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left[ \rho \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] + k_0^2 n^2 \Psi = 0, \quad (27)$$

где  $z$  – глубина,  $r$  – горизонтальная координата,  $\Psi(r, z)$  – звуковое поле,  $k_0$  – опорное волновое число, связанное с частотой звука  $f$  с помощью формулы  $k_0 = 2\pi f / c_0$ ,  $n(r, z)$  – показатель преломления звуковых волн.

Поглощение звука в водном слое является слабым, и мы им в данной работе пренебрегаем. Считая волновод горизонтально-однородным, мы можем представить показатель преломления в следующем виде:

$$n(z) = \frac{c_0}{c(z)} + 2i\alpha(f)\Theta(z - h), \quad (28)$$

где  $\Theta(z)$  – функция Хэвисайда. Профиль скорости звука соответствует придонному звуковому каналу и задается выражением

$$c(z) = \begin{cases} c_0 - \frac{\Delta_c}{2} \left( 1 + \operatorname{th} \frac{z - z_c}{\Delta_z} \right), & 0 \leq z < h, \\ c_b, & h \leq z \leq L, \end{cases} \quad (29)$$

где  $c_0 = 1500$  м/с,  $\Delta_c = 25$  м/с,  $z_c = 50$  м,  $\Delta_z = 10$  м,  $c_b = 1600$  м/с. Водная часть профиля представлена на рис. 2.

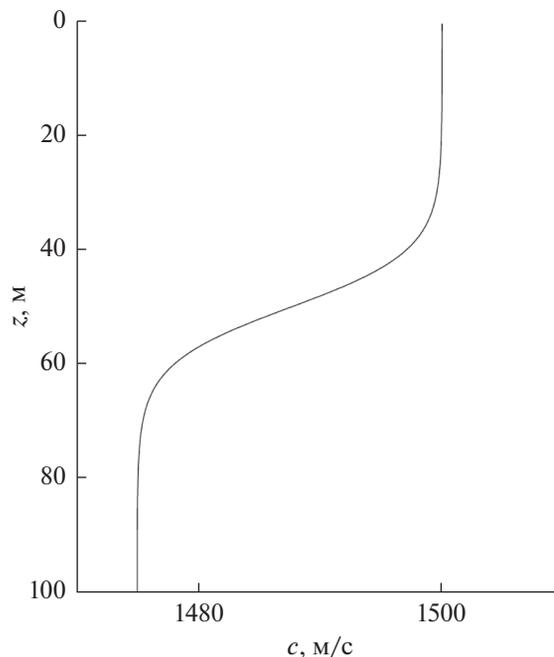


Рис. 2. Профиль скорости звука в водной толще.

Функция  $\alpha(f)$  определяет частотную зависимость затухания в осадочном слое. В настоящей работе мы используем акустическую модель осадочного слоя, соответствующую условиям Восточно-Китайского моря, где был получен закон  $\alpha(f) \approx 0.42 \times 10^{-6} f^2$  [34]. Поскольку, как отмечалось выше, поглощение звука в дне может существенно влиять на скорость фильтрации коротковолновой части спектра акустического поля, также будет рассмотрена модель с ослабленным затуханием, описываемым законом  $\alpha(f) \approx 0.1 \times 10^{-3} f$ .

Профиль плотности в нашей модели описывается формулой

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_{\text{wat}}, & 0 \leq z < h, \\ \rho_{\text{sed}}, & h \leq z \leq L, \end{cases} \quad (30)$$

где  $\rho_{\text{wat}} = 1$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho_{\text{sed}} = 1.7$  г/см<sup>3</sup>.

Звуковое поле может быть представлено в виде суперпозиции нормальных мод

$$\Psi(r, z) = \frac{i}{4\sqrt{2\pi r}} e^{-i\pi/4} \times \sum_{m=1}^M \frac{a_m}{\sqrt{k_{rm}}} e^{i(k_{rm} + i\alpha_m)r} \Psi_m(z) + \text{к.с.} \quad (31)$$

Нормальные моды и соответствующие им волновые числа являются решениями задачи Штурма–Лиувилля

$$\rho(z) \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{\rho(z)} \frac{d\Psi_m(z)}{dz} \right] + [k_0^2 n^2(z) - k_{rm}^2] \Psi_m(z) = 0 \quad (32)$$

с граничными условиями (4) и условием непрерывности на дне

$$\begin{aligned} \Psi|_{z=h-0} &= \Psi|_{z=h+0}, \\ \frac{1}{\rho_{\text{wat}}} \frac{d\Psi}{dz} \Big|_{z=h-0} &= \frac{1}{\rho_{\text{sed}}} \frac{d\Psi}{dz} \Big|_{z=h+0}. \end{aligned} \quad (33)$$

Для численного решения задачи Штурма–Лиувилля использовалась программа, написанная П.С. Петровым [35].

Поскольку мы рассматриваем горизонтально-однородный волновод, модовые амплитуды определяются начальным условием,

$$a_m = \int_{z=0}^L \frac{\Psi_m^*(z) \Psi(r=0, z)}{\rho(z)} dz. \quad (34)$$

В рассматриваемом нами случае источник представляет собой вертикальную цепочку монополей, расположенных в водной толще, поэтому формула (34) принимает вид

$$a_m = \sum_{j=1}^{J_w} \frac{\Psi_m(z_j)}{\rho(z_j)} = \frac{1}{\rho_{\text{wat}}} \sum_{j=1}^{J_w} \Psi_m(z_j), \quad (35)$$

где  $J_w$  – число монополей в водной толще, глубины  $z_j$  определяются выражением (20).

### ВОЗБУЖДЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ МОД ЭКВИДИСТАНТНОЙ АНТЕННОЙ В ТОНАЛЬНОМ РЕЖИМЕ

Рассмотрим задачу о возбуждении мод с помощью эквидистантной вертикальной антенны в тональном режиме. Это позволит более четко отследить физические механизмы, оказывающие влияние на эффективность антенны. Для оценки качества возбуждения будем использовать воспроизводимость, определяемую по формуле [36]

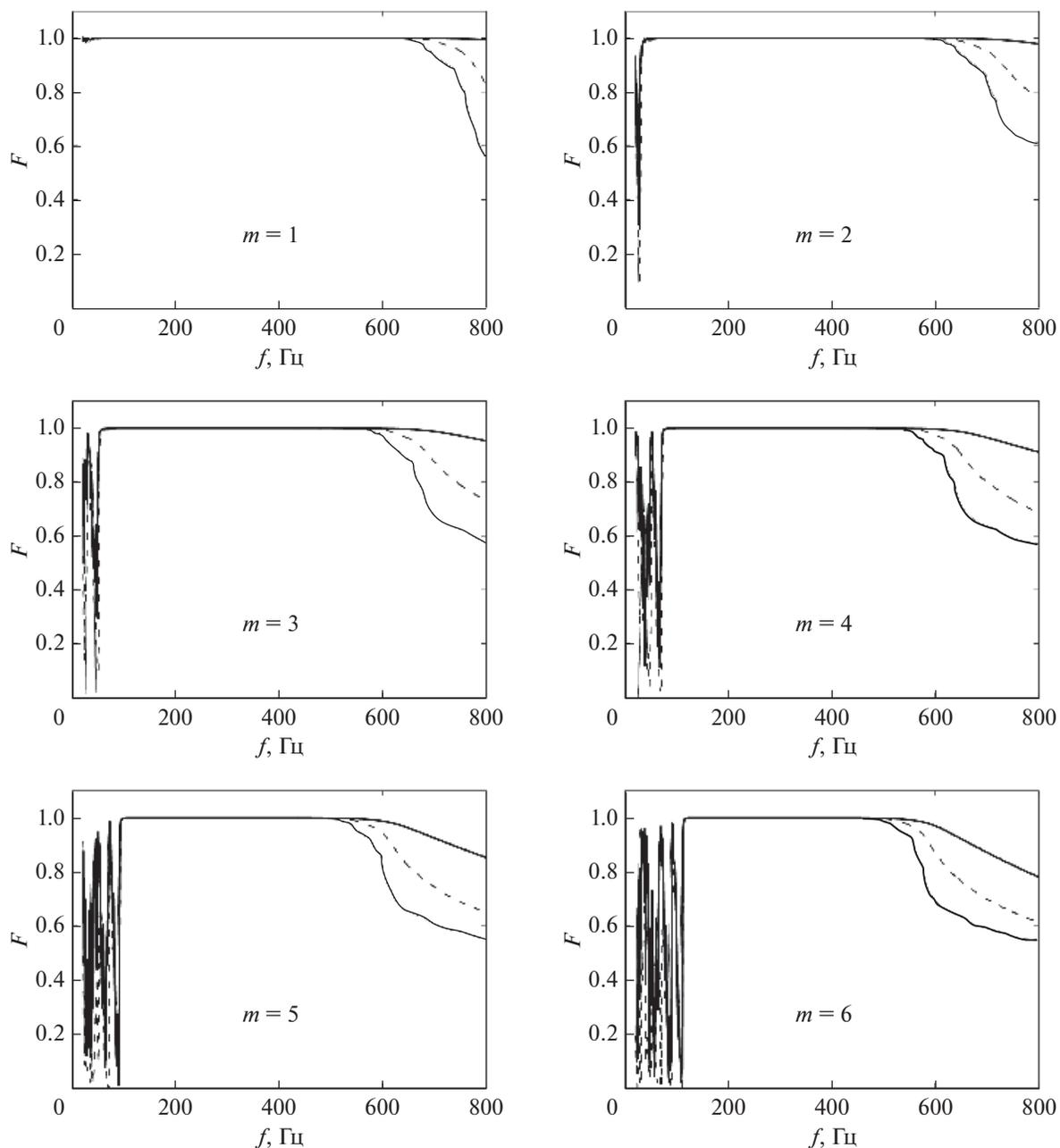
$$\begin{aligned} F(r, f, m, \Delta z) &= \\ &= \frac{\left| \int_{z=0}^h dz \Psi_m(z, f) \Psi^*(r, z, f; \Delta z) \right|^2}{\left( \int_{z=0}^h dz |\Psi_m(z, f)|^2 \right) \left( \int_{z=0}^h dz |\Psi(r, z, f; \Delta z)|^2 \right)}, \end{aligned} \quad (36)$$

где  $\Psi_m(z, f)$  – акустическая мода, которую мы хотим сформировать на расстоянии  $r$  от источника, а  $\Psi(r, z, f; \Delta z)$  – звуковое поле, в действительности возбуждаемое вертикальной антенной, у ко-

торой расстояние между соседними монополями равно  $\Delta z$ , и АФР рассчитывается по формуле (3). Для вычисления  $\Psi(r, z, f; \Delta z)$  используем формулы (31) и (35). Воспроизводимость можно рассматривать как меру схожести между желаемым и действительным звуковыми полями. Если они совпадают, то воспроизводимость равна своему максимальному значению – единице. По мере нарастания различий между  $\Psi(r, z, f; \Delta z)$  и  $\Psi_m(z, f)$  воспроизводимость стремится к нулю.

На рис. 3 и 4 представлены зависимости воспроизводимостей первых шести мод волновода от частоты сигнала. Данные, представленные на рис. 3, соответствуют вертикальной антенне с расстоянием между соседними монополями, равным 5 м. Мы видим, что все рассматриваемые моды могут практически точно возбуждаться такой антенной в широком частотном диапазоне, в котором  $F \approx 1$ . Впрочем, с ростом номера моды ширина этого диапазона несколько сокращается. Постепенное смещение его верхней границы влево связано с тем, что плотность расположения монополей оказывается недостаточной для разрешения структуры моды при высоких частотах сигнала. Тем не менее, верхняя граница достаточно медленно меняется с ростом номера моды. Существенные отклонения воспроизводимости от единицы наблюдаются в области высоких частот, при  $f > 600$  Гц. Именно в этом диапазоне воспроизводимость наиболее чувствительна к тому, насколько быстро поглощается коротковолновая составляющая звукового поля (речь здесь идет о вертикальной длине волны). Одним из следствий этого поглощения является значительный рост воспроизводимости по мере удаления точки наблюдения звукового поля от источника – воспроизводимость при  $r = 10$  км существенно выше, чем при  $r = 1$  км. Здесь, впрочем, необходимо учитывать, что мы рассматриваем идеализированную модель горизонтально-однородного волновода, которая не учитывает рассеяние звука на неоднородностях. Вследствие рассеяния часть акустической энергии может перекачиваться в более высокие моды, тем самым ухудшая качество возбуждения заданной моды. Вполне предсказуемо, что ослабление затухания в осадочном слое приводит к ухудшению воспроизводимости – это видно по поведению кривой, соответствующей  $\alpha(f) \approx 0.1 \times 10^{-3} f$ .

Доверительный частотный диапазон антенны, в котором  $F \approx 1$ , также сокращается и со стороны низких частот. Начиная со второй моды, в низкочастотной области возникают осцилляции воспроизводимости с ростом частоты. Они связаны с тем, что на низких частотах распространяющиеся



**Рис. 3.** Зависимость воспроизводимости тональных сигналов, соответствующих отдельным модам, от частоты. Случай передающей антенны с расстоянием между монополями 5 м. Номера мод указаны в нижних частях панелей. Жирная сплошная кривая соответствует расстоянию от источника 10 км, тонкая сплошная кривая – расстоянию 1 км. Штриховая соответствует волноводу с ослабленным затуханием звука в дне, описываемым законом  $\alpha(f) \approx 0.1 \times 10^{-3} f$ , расстояние от источника равно 10 км.

моды могут не являться чисто водными, и значительная их часть распространяется в дне. Такие моды не могут эффективно возбуждаться с помощью цепочки монополей, расположенных только в водной толще.

Увеличение расстояния между соседними монополями до 10 м значительно сокращает довери-

тельный частотный диапазон. Результаты моделирования, соответствующие данному случаю, представлены на рис. 3. Антенна обеспечивает относительно надежное возбуждение в диапазоне приблизительно от 100 до 300 Гц, при этом увеличение дистанции существенно улучшает качество возбуждения мод.

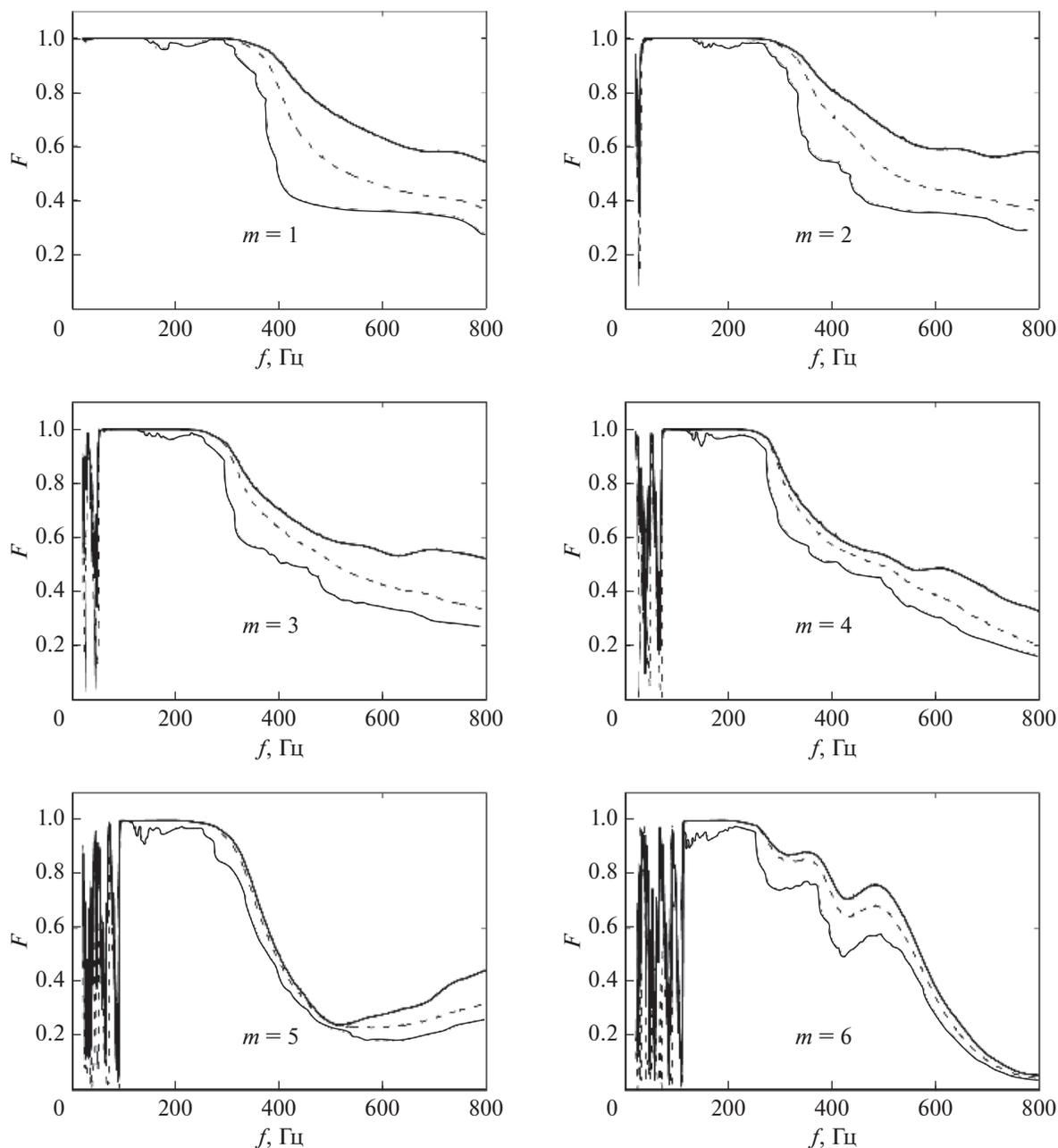


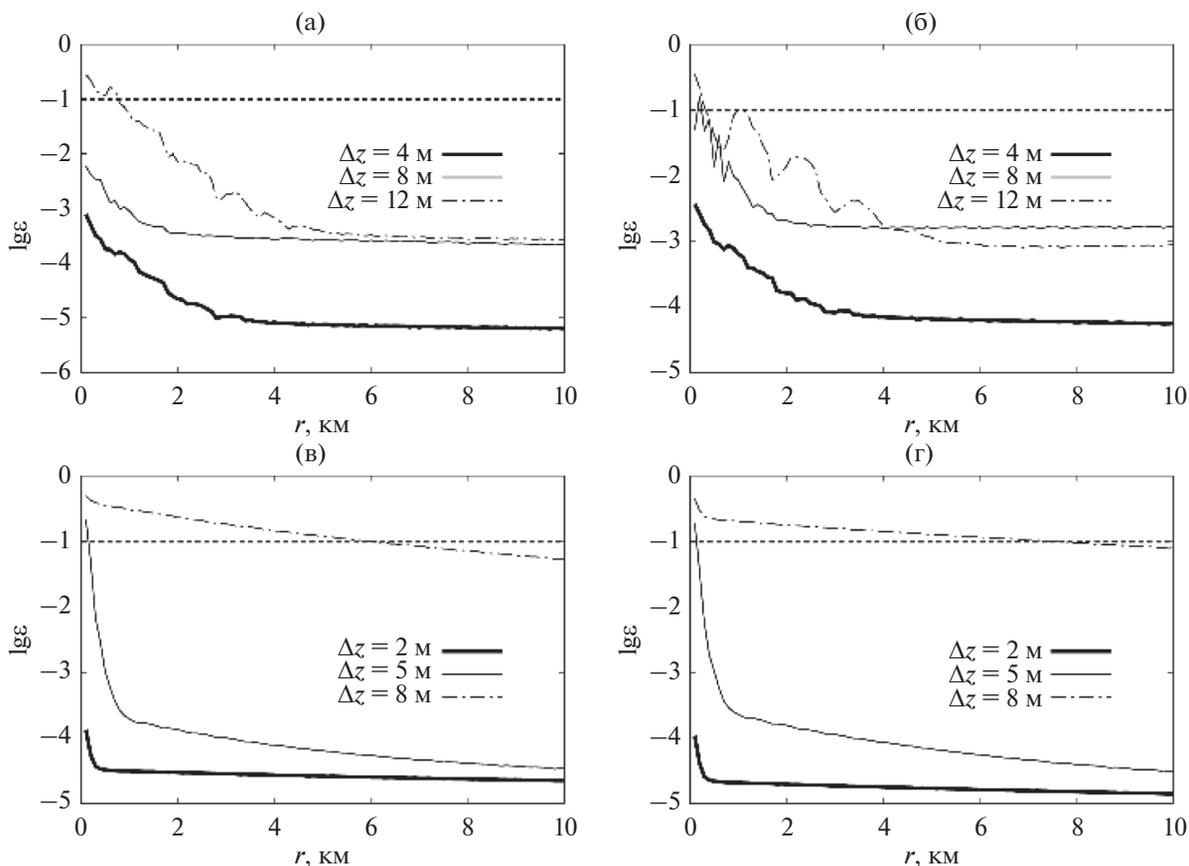
Рис. 4. То же самое, что и на рис. 2, но для более разреженной антенны с расстоянием между монополями 10 м.

Для того чтобы отследить процесс фильтрации коротковолновой компоненты поля, введем погрешность возбуждения моды

$$\varepsilon = 1 - F. \quad (37)$$

Рис. 5 демонстрирует зависимость  $\varepsilon$  от расстояния до точки наблюдения для частот 150 и 400 Гц. В качестве примеров выбраны третья и шестая моды. Во всех представленных случаях погрешность в среднем падает с увеличением расстояния, однако скорость и характер этого спада

качественно зависят от частоты сигнала. При частоте 400 Гц происходит резкий спад погрешности уже в течение первого километра дистанции, если плотность расположения монополей является достаточной для практически точного возбуждения моды. Если же присутствует дефицит плотности монополей, то точность нарастает медленно. Такое поведение обусловлено тем, что в первом случае спад погрешности определяется поглощением быстро затухающих паразитных мод, во втором



**Рис. 5.** Зависимость погрешности возбуждения моды в тональном режиме от расстояния. Частота сигнала: (а, б) 150 Гц, (в, г) 400 Гц. Рисунки (а) и (в) соответствуют третьей моде, (б) и (г) — шестой моде. Горизонтальная штриховая линия соответствует уровню  $\epsilon = 0.1$ , который можно условно считать границей доверительного интервала антенны.

вклад в погрешность также дают и моды со сравнительно медленным затуханием.

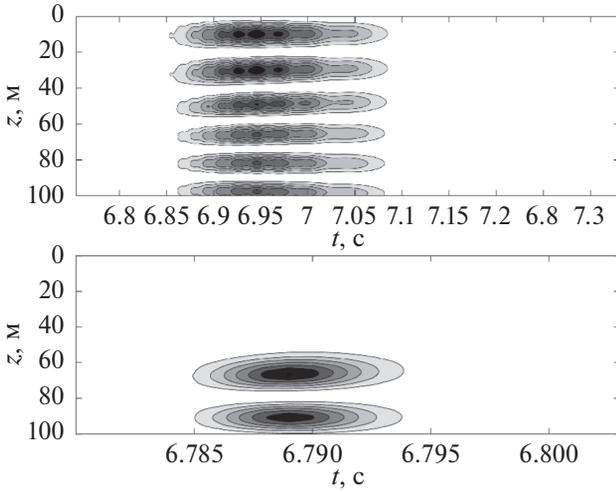
При частоте 150 Гц во всех случаях спад погрешности является достаточно медленным, поскольку медленным является и затухание паразитных мод — сказывается низкая частота сигнала. Интересной особенностью данных, соответствующих 150 Гц, является то, что более разреженная антенна с  $\Delta z = 12$  м демонстрирует на больших расстояниях меньшую погрешность при возбуждении шестой моды, чем антенна с  $\Delta z = 8$  м. Это, по всей видимости, связано с тем, что расположение монополей в случае  $\Delta z = 12$  м лучше подходит для разрешения экстремумов шестой моды.

Данные, представленные на рис. 5, имеют также значение в контексте возбуждения отдельных мод с использованием механизма обратной связи [18, 23]. Обратная связь реализуется с помощью дополнительной вертикальной приемной антенны, которая устанавливается вдоль направления распространения на небольшом расстоянии от излучающей антенны. Звуковое поле, регистрируемое дополнительной антенной, используется

для корректировки АФР излучающей антенны. Приведенные на рис. 5 результаты указывают на то, что эффективное функционирование излучающей системы с обратной связью возможно только тогда, когда дополнительная приемная антенна расположена за пределами области затухания паразитных мод, которая в случае низкочастотных сигналов может быть весьма обширной.

### ВОЗБУЖДЕНИЕ МОДОВЫХ ИМПУЛЬСОВ С ПОМОЩЬЮ ЭКВИДИСТАНТНОЙ АНТЕННЫ

В данной работе ключевым объектом исследования является возбуждение модовых импульсов — импульсных сигналов, пространственная структура которых состоит из единственной моды. Интерес к модовым импульсам связан с тем, что их можно отнести к волновым пакетам с повышенной когерентностью: они достаточно слабо расплываются во времени и имеют хорошо определенную геометрию распространения. Они могут не распадаться при прохождении через крупномасштабные неоднородности, испытывая лишь



**Рис. 6.** Пространственно-временное распределение интенсивности модовых импульсов  $|\Phi_m(t, z)|^2$ . Верхняя панель – импульс с центральной частотой 150 Гц, шестая мода. Нижняя панель – импульс с центральной частотой 400 Гц, вторая мода. Расстояние от излучающей антенны равно 10 км.

плавную трансформацию. Кроме того, низкочастотные моды слабо подвержены рассеянию на мелкомасштабных неоднородностях, вызывающих лучевой хаос [37]. Так называемые слаборасходящиеся модовые импульсы обладают преимуществами в контексте передачи информации посредством акустических сигналов [13, 14].

В общем случае структура модового импульса определяется формулой

$$\begin{aligned} \Phi_m(t, z; r) = \\ = \int d\Omega S(\Omega) a_m(r, \Omega) \Psi_m(r, z, \Omega) e^{-i(k_m - \Omega t) - \alpha_m r}, \end{aligned} \quad (38)$$

где  $S(\Omega)$  – спектр импульсного сигнала. В горизонтально-однородном волноводе модовые амплитуды  $a_m$  и сами моды  $\Psi_m$  не зависят от  $r$ . В данной работе рассматриваются импульсы со спектром следующего вида [38]

$$S(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta\Omega} \exp\left(-\frac{(\Omega - \Omega_c)^2}{2\Delta\Omega^2}\right), \quad (39)$$

где  $\Omega_c$  – центральная частота. Такой спектр соответствует сигналу, имеющему вид

$$s(t) = \exp\left(-i\Omega_c t - \frac{\Delta\Omega^2 t^2}{2}\right). \quad (40)$$

Спектральная ширина  $\delta\Omega$  и длительность  $\tau$  импульса оцениваются как

$$\delta\Omega = \sqrt{2\pi}\Delta\Omega, \quad (41)$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\delta\Omega}. \quad (42)$$

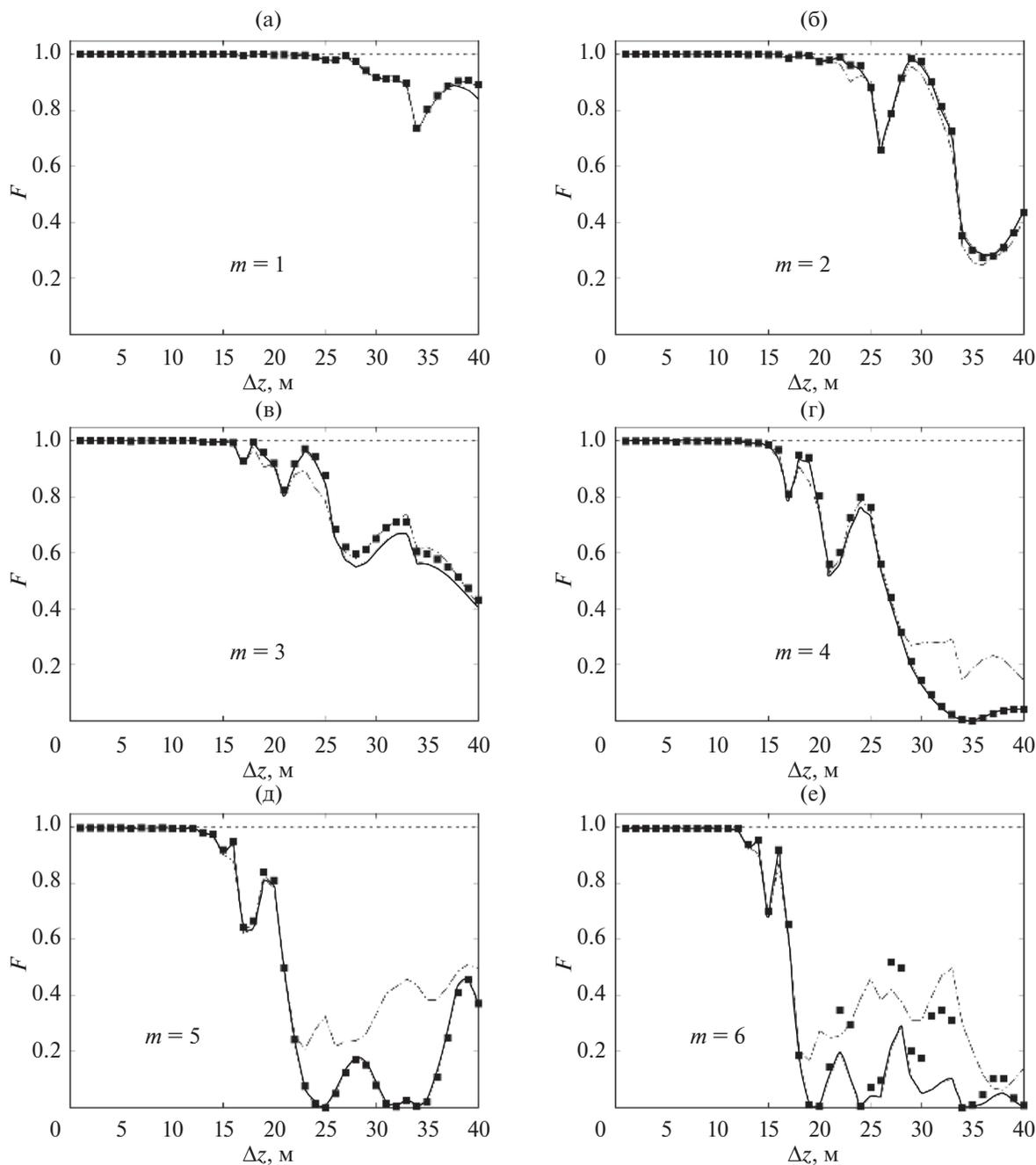
Мы рассматриваем широкополосные импульсы, для которых  $\delta\Omega = \Omega_c/2$ . Будут рассматриваться импульсы с центральными частотами  $\Omega_c$ , равными 150 и 400 Гц. Примеры получающихся в этом случае модовых импульсов представлены на рис. 6.

В случае импульсных сигналов можно воспользоваться определением воспроизводимости, аналогичным ранее введенному в работе [39],

$$\begin{aligned} F(r, m, \Delta z) = \\ = \frac{\left| \int dt \int dz \Phi(t, z; r, \Delta z) \Phi_m^*(t, z; r) \right|^2}{\left( \int dt \int dz |\Phi(t, z; r, \Delta z)|^2 \right) \left( \int dt \int dz |\Phi_m(t, z; r)|^2 \right)}, \end{aligned} \quad (43)$$

где  $\Phi_m(t, z; r)$  – требуемый модовый импульс, а  $\Phi(t, z; r, \Delta z)$  – звуковое поле, собственно создаваемое излучающей антенной на расстоянии  $r$ . Зависимость воспроизводимости от расстояния между монополями эквидистантной антенной решетки  $\Delta z$  представлена на рис. 7 и 8. Во всех случаях воспроизжимость удерживается вблизи единицы до некоторого значения  $\Delta z$ . При превышении этого значения начинает сказываться дефицит плотности монополей, и воспроизжимость падает, причем спад, как правило, является немонотонным. Исключение составляет первая мода, которая хорошо возбуждается даже очень разреженными антеннами. Это особенно явно проявляется в случае импульса с  $\Omega_c = 150$  Гц. Для более высоких мод воспроизжимость сильно разреженными антеннами главным образом зависит от расположения монополей относительно интерференционных пиков. Именно этим обстоятельством объясняются резкие всплески воспроизводимости при определенных значениях  $\Delta z$ .

Напомним, что мы рассматриваем модель придонного звукового канала, поэтому акустическая энергия преимущественно сосредоточена именно в придонной области. Отсюда одним из факторов, влияющих на эффективность антенны при наличии дефицита плотности монополей, является положение самого нижнего монополя – он должен находиться вблизи дна, поскольку именно там располагаются наиболее интенсивные интерференционные пики. Это хорошо прослеживается в случае низкочастотного импульса с центральной частотой 150 Гц (см. рис. 7). Так, антенна с  $\Delta z = 16$  м (нижний монополь находится на глубине 96 м) обеспечивает лучшую воспроизжимость импульсов пятой и шестой мод, чем антенна с  $\Delta z = 15$  м (нижний монополь располагается на глубине 90 м). В то же время антенна с  $\Delta z = 17$  м (нижний монополь расположен на глубине 85 м, т.е. на 15 м выше дна) существенно

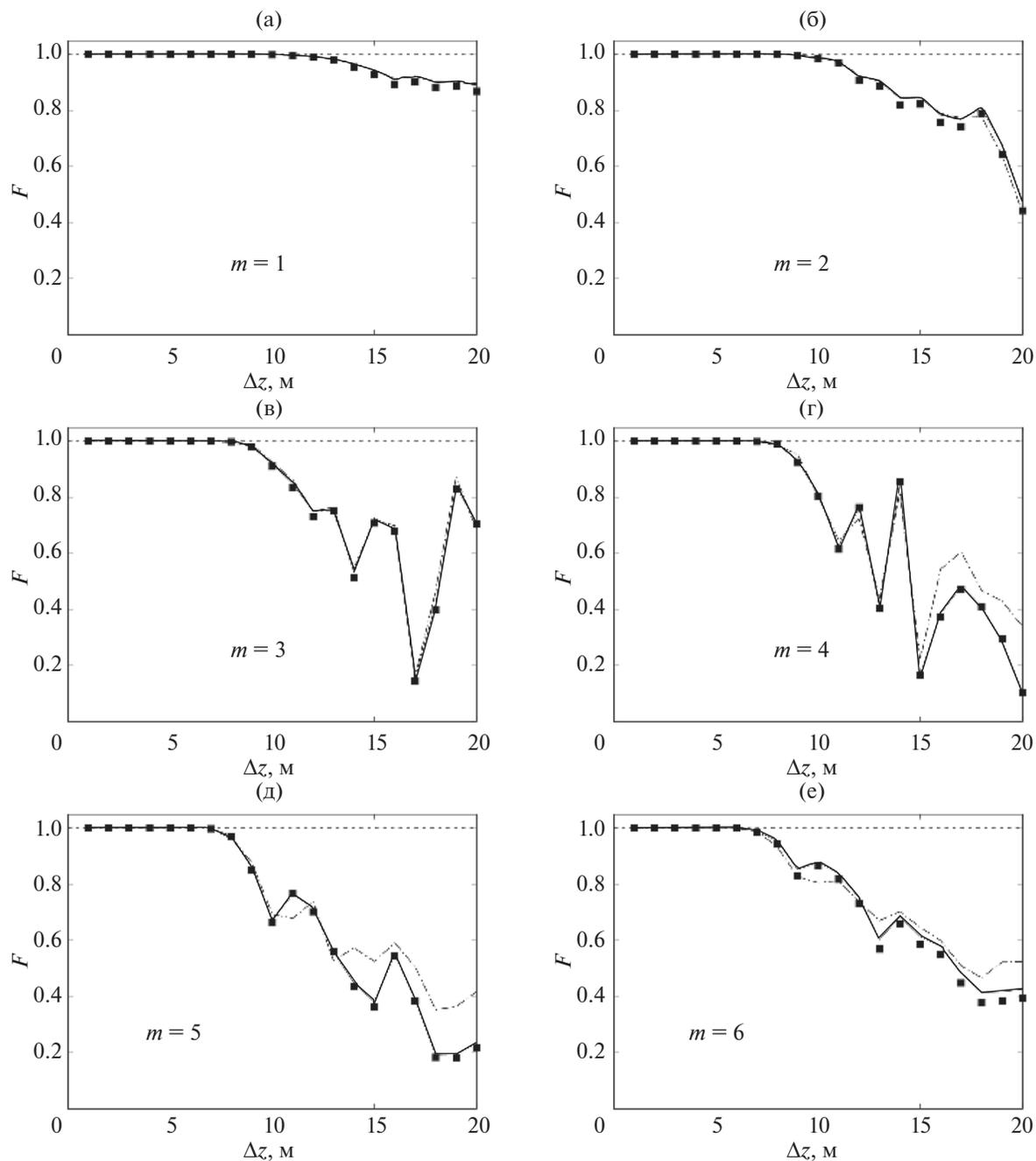


**Рис. 7.** Зависимость воспроизводимости импульса с центральной частотой 150 Гц от расстояния между соседними монополями. Сплошная линия соответствует АФР, рассчитанному с помощью функций ДПП, штрихпунктирная линия – расчету с помощью формул (1) и (2). Закрашенные квадратики соответствуют данным, полученным с помощью функций ДПП для волновода с ослабленным затуханием звука в осадочном слое.

уступает в эффективности обеим вышеупомянутым антеннам.

Глубина самого нижнего монополя, принадлежащего водной толще, при заданном значении  $\Delta z$  определяется формулой (20). Как уже отмечалось, вид этой формулы может меняться в зависимости от граничных условий. В частности, закон (20) отвечает верхнему граничному условию

$\Psi(z = 0) = 0$ . Если при построении базиса (16) мы воспользуемся не этим граничным условием, а некоторой его модификацией, пускай и не отвечающей реальным условиям, то формула (20) тоже изменит свой вид. Эти изменения, возможно, позволят оптимизировать расположение элементов антенны относительно интерференционных пиков. Ценой, которую мы за это заплатим, будет



**Рис. 8.** Зависимость воспроизводимости импульса с центральной частотой 400 Гц от расстояния между соседними монополями. Сплошная линия соответствует АФР, рассчитанному с помощью функций ДПП, штрихпунктирная линия – расчету с помощью формул (1) и (2). Закрашенные квадратики соответствуют данным, полученным с помощью функций ДПП для волновода с ослабленным затуханием звука в осадочном слое.

внесенная погрешность в приповерхностной части АФР, главным образом в самой верхней функции ДПП. Однако в случае преимущественно придонного распространения эта погрешность может оказаться несущественной. В настоящей работе не рассматривается расчет АФР с помощью функций ДПП, соответствующих модифицированному верхнему граничному условию. Тем

не менее, при необходимости такая возможность может быть использована.

Если судить по данным, представленным на рис. 7 и 8, ослабление затухания в осадочном слое мало влияет на эффективность возбуждения модовых импульсов, если плотность монополей является достаточно высокой, т.е. критерий (9) выполняется достаточно хорошо. Ослабление модо-

вой фильтрации и, как следствие, усиление паразитных мод начинает сказываться при дефиците монополей. Это приводит к заметному уменьшению воспроизводимости для модовых импульсов с центральной частотой 400 Гц. В случае же модовых импульсов с центральной частотой 150 Гц, эффект от ослабления затухания является незначительным. Более того, в последнем случае ослабление затухания может даже увеличивать воспроизводимость (см. рис. 7в и 7е). Правда, это происходит только при достаточно больших значениях  $\Delta z$ , когда воспроизводимость далека от единицы, что указывает на некорректность расчета АФР с помощью функций ДПП ввиду значимого нарушения критерия (9).

Надо сказать, что далеко за пределами области своей применимости метод расчета АФР с помощью формулы (3) существенно проигрывает в точности традиционному методу, основанному на уравнении (1). Следует еще раз подчеркнуть, что при выполнении формул (9) и (20) эти методы математически эквивалентны друг другу. В области умеренной погрешности, когда  $0.6 < F < 1$ , расчет с помощью функций ДПП, как правило, несколько выигрывает по сравнению с традиционным подходом. При большой погрешности более точным оказывается уже традиционный подход. Вообще говоря, расчет АФР с помощью уравнения (1) не ограничен конфигурацией с расположением монополей согласно формуле (20), диктующим расположение монополей при заданном значении  $\Delta z$ . С другой стороны, математическая эквивалентность этих двух подходов при выполнении критерия (9) указывает, что именно расположение монополей по формуле (20) обеспечивает наилучший результат. В противном случае может возникнуть вышеупомянутая проблема несогласованности с верхним граничным условием в волноводе и, как следствие, связанная с этим погрешность.

### РАСЧЕТ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ С НЕЭКВИДИСТАНТНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ

Выше было показано, что акустическое поле, создаваемое отдельным монополем в эквидистантной антенной решетке, описывается функцией ДПП. Функция ДПП может быть вычислена как результат Фурье-фильтрации дельта-функции по формуле (24). Вид функции ДПП зависит от расстояния между монополями, которое одновременно определяет и число Фурье-гармоник  $J$ , и соответствующие весовые коэффициенты  $w_j$  (в случае эквидистантной антенны эти коэффициенты равны друг другу). Суперпозиция полей, со-

здаваемая периодической цепочкой монополей, приводит к интерференционному гашению пространственных Фурье-гармоник с номерами  $j > J$ . С другой стороны, мы знаем, что функции ДПП являются хорошо локализованными по глубине. Это означает, что основной вклад в интерференционное гашение высоких Фурье-гармоник  $j$ -го монополя вносят соседние,  $(j - 1)$ -ый и  $(j + 1)$ -ый, монополи. Другими словами, именно расстояние до соседних монополей играет первостепенную роль в формировании эффективного поля, создаваемого отдельным монополем решетки. Данное обстоятельство подсказывает путь для обобщения теории ДПП на случай антенных решеток с неэквидистантным расположением монополей. Именно этому пути мы и будем следовать ниже.

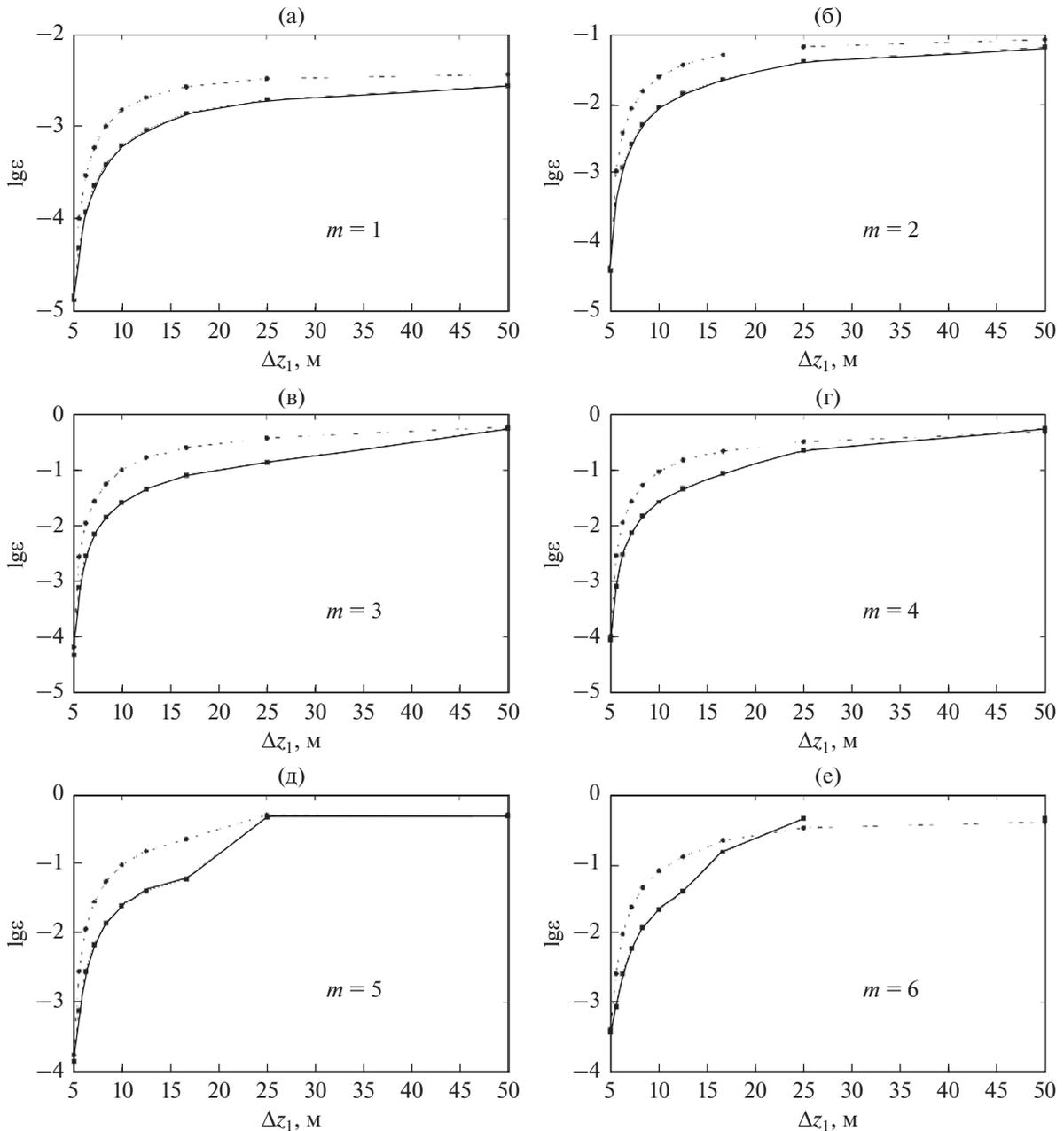
Рассмотрим в качестве примера антенную решетку, состоящую из двух подрешеток: верхней, перекрывающей интервал глубин  $0 \leq z \leq z_c$ , и нижней, перекрывающей интервал глубин  $z_c \leq z \leq h$ . Монополи верхней подрешетки расположены на глубинах

$$z_n^{(1)} = n\Delta z_1, \quad n = 1, 2, \dots, N_1, \quad \Delta z_1 = \frac{z_c}{N_1}. \quad (44)$$

Монополи нижней подрешетки расположены на глубинах

$$z_n^{(2)} = z_c + n\Delta z_2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_2, \quad \Delta z_2 = \frac{h - z_c}{N_2}. \quad (45)$$

Таким образом, обе подрешетки являются по отдельности эквидистантными, причем монополь на глубине  $z = z_c$  принадлежит им обеим, разграничивая их. Нас интересует случай  $\Delta z_1 \neq \Delta z_2$ , когда результирующая решетка является неэквидистантной. Каждая из подрешеток характеризуется своим собственным базисом функций ДПП, который может быть использован для расчета амплитудно-фазового распределения. Однако в случае пограничного монополя, расположенного на глубине  $z = z_c$ , возникает неоднозначность в определении соответствующей ему функции ДПП, поскольку он одновременно принадлежит двум разным подрешеткам с разными расстояниями  $\Delta z$ . Перед нами стоит задача найти эффективное поле, создаваемое пограничным монополем. Как отмечалось выше, это поле должно быть результатом интерференционного гашения высоких пространственных Фурье-гармоник. Асимметричность положения соседних монополей предполагает, что это гашение будет тоже асимметричным: выше пограничного монополя оно будет происходить за счет верхней подрешетки, а ниже — за счет нижней подрешетки. Это означает, что составляющие акустического поля, исходящие из пограничного монополя вверх и вниз,



**Рис. 9.** Зависимость погрешности возбуждения модовых импульсов от расстояния между монополями верхней подрешетки. Случай  $\Delta z_1 = 50$  м означает присутствие только нижней подрешетки. Сплошная линия – расчет по формуле (47), прерывистая линия – расчет по формуле (1).

будут в разной степени подвержены Фурье-фильтрации. Эти соображения приводят нас к следующему выражению для эффективного поля пограничного монополя:

$$\chi_c(z) = \begin{cases} \chi_c^{(1)}(z), & 0 < z < z_c, \\ \frac{\chi_c^{(1)}(z_c) + \chi_c^{(2)}(z_c)}{2}, & z = z_c, \\ \chi_c^{(2)}(z), & z_c < z < h, \end{cases} \quad (46)$$

где  $\chi_c^{(1)}(z)$  и  $\chi_c^{(2)}(z)$  – функции ДПП пограничного монополя, вычисленные с  $\Delta z = \Delta z_1$  и  $\Delta z = \Delta z_2$ , соответственно. Другими словами, эффективное поле, создаваемое пограничным монополем, описывается симбиозом функций ДПП для верхней и нижней подрешеток. Таким образом, если пронумеровать монополи сверху вниз, то требуемое амплитудно-фазовое распределение описывается формулой

$$Y_j(f) = \begin{cases} \int \Psi(z)\chi_j^{(1)*}(z)dz, & 1 \leq j \leq N_1, \\ \int \Psi(z)\chi_c^*(z)dz, & j = N_1, \\ \int \Psi(z)\chi_{j+N_1}^{(2)*}(z)dz, & N_1 < j \leq N_1 + N_2. \end{cases} \quad (47)$$

Если плотность монополей обеих подрешеток является достаточной для полного разрешения требуемого акустического поля, формула (47) принимает вид:

$$Y_j(f) = \begin{cases} \sqrt{\Delta z_1}\Psi(z_j), & 1 \leq j \leq N_1, \\ \int \Psi(z)\chi_c^*(z)dz, & j = N_1, \\ \sqrt{\Delta z_2}\Psi(z_j), & N_1 < j \leq N_1 + N_2. \end{cases} \quad (48)$$

Отметим, что в общем случае

$$\int_{z=0}^L \chi_i^{(1)}\chi_j^{(2)}dz \neq 0, \quad \int_{z=0}^L \int \chi_i^{(1)}\chi_c dz \neq 0, \quad \int_{z=0}^L \chi_i^{(2)}\chi_c dz \neq 0, \quad (49)$$

т.е. условие ортогональности функций ДПП может нарушаться. Следствием этого может являться погрешность в возбуждении заданного поля.

В качестве примера рассмотрим антенную решетку, у которой верхняя подрешетка занимает интервал глубин от поверхности моря до 50 м, а нижняя – от 50 до 100 м, т.е. до дна. Расстояние между монополями в нижней подрешетке равно 5 м. Рассматриваются импульсы первых шести мод с центральной частотой 150 Гц. Как следует из данных, представленных на рис. 7, эквидистантная антенна с  $\Delta z = 5$  м, перекрывающая всю водную толщу, обеспечивает точное возбуждение всех рассматриваемых импульсов. Вместе с тем, естественно предположить, что наибольшая часть энергии этих импульсов сосредоточена в придонном звуковом канале. Зададимся вопросом: насколько сильно эффективность такой решетки зависит от расстояния между монополями в верхней подрешетке? Насколько существенными будут потери качества при уменьшении количества излучателей в верхней подрешетке?

На рис. 9 представлена зависимость погрешности возбуждения модового импульса от расстояния между монополями верхней подрешетки. Результаты расчета АФР с помощью формулы (47) сравниваются с результатами, полученными с помощью формулы (1), т.е. в случае  $w_j = \text{const}$ . Согласно представленным данным, оба рассматриваемых алгоритма обеспечивают высокую точность возбуждения в случае импульсов первой моды, при этом формула (47) дает меньшую ошибку. Для более высоких мод удовлетвори-

тельная точность обеспечивается только тогда, когда верхняя подрешетка является умеренно разреженной: мы имеем погрешность на уровне 10% и ниже, если расстояние между монополями верхней подрешетки не превышает 10 м. Формула (47) выигрывает в точности по сравнению с (1) практически во всех случаях, кроме случаев чрезмерно разреженной верхней подрешетки с  $\Delta z_1 \geq 25$  м, когда дефицит излучателей сказывается очень сильно.

Проведенное дополнительное исследование показало, что формула (47) предсказывает практически оптимальную амплитуду сигнала, который должен быть подан на монополь, разграничивающий верхнюю и нижнюю подрешетки. Любопытно, что в некоторых случаях значение соответствующего весового коэффициента  $w_{N_1}$  (см. формулу (14)) оказывается отрицательным, т.е. сигнал, подаваемый на пограничный монополь, оказывается в противофазе с соответствующим значением акустического поля в данной точке. Это указывает на то, что оптимальное АФР для неэквидистантных антенн в значительной степени определяется поведением акустического поля в областях между монополями – в данном случае недостаточно учета только значений акустического поля в точках расположения монополей.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главным результатом данной работы является новый метод расчета амплитудно-фазовых распределений для вертикальных антенн. Метод основан на применении функций дискретного представления переменных. При выполнении условия (9) и эквидистантном расположении монополей этот метод математически эквивалентен традиционному подходу, основанному на уравнении (1). Эквивалентность устанавливается выражением (11). Можно сказать, что в некотором смысле предлагаемый метод расчета обеспечивает дополнительную математическую базу для традиционного подхода. Например, он предсказывает, что при достаточно большом количестве монополей их глубины должны удовлетворять уравнению (20), в противном случае может возникнуть погрешность, обусловленная несогласованностью с верхним граничным условием. При дефиците монополей эта погрешность может оказаться несущественной, тогда на первый план выходит расположение монополей относительно интерференционных пиков. В работе показано, что предлагаемый метод может быть модифицирован для расчета АФР неэквидистантных антенн, в этом случае он обеспечивает более высокую точность, чем формула (1).

Специфической особенностью предлагаемого метода является отсутствие прямой зависимости функций ДПП, на использовании которых он основан, от частоты сигнала и профиля скорости звука. Оба этих фактора учитываются неявно, т.к. от них зависит спектр вертикальных волновых чисел акустического поля и, соответственно, требуемое количество монополей. Отсутствие прямой зависимости от профиля скорости звука — это, скорее, положительное свойство с точки зрения экспериментальной реализации метода, поскольку гидрологические характеристики подвержены изменчивости как в пространстве, так и во времени.

Следует еще раз отметить, что предлагаемый метод может быть использован для возбуждения практически любых волновых пакетов, способных распространяться в волноводе на достаточно большие расстояния. Кроме того, представленный подход, вкуче с ранее предложенным алгоритмом реконструкции профиля акустического поля [32], может быть использован для экспериментального измерения пропагатора акустического поля. Пропагатор — это оператор, который устанавливает непосредственную связь между произвольным начальным и соответствующим ему конечным акустическими полями [9, 40–44]. Знание пропагатора означает наличие практически всей информации об акустических свойствах волновода, которая в принципе может быть получена с помощью двух антенн, одной излучающей и одной приемной. В работе [45] предложена схема для измерения пропагатора в тональном режиме. Данное направление работы является одним из наиболее многообещающих в контексте использования предложенного метода.

В представленной работе рассматривается вопрос о влиянии степени разреженности вертикальных акустических антенн на их способность селективно возбуждать модовые импульсы. Обнаружено, что затухание высоких мод, дающих основной вклад в коротковолновую часть спектра вертикальных волновых чисел, способствует повышению эффективности разреженных антенн. Это особенно актуально для импульсов с центральной частотой порядка нескольких сотен герц.

Проведенные в этой работе расчеты соответствуют модели горизонтально-однородного волновода. Включение горизонтальных неоднородностей приведет к взаимодействию между модами и, тем самым, повлияет на процесс фильтрации коротковолновой компоненты акустического поля. С одной стороны, этот процесс приведет к подкачке высоких мод волновода и, тем самым, ухудшит эффективность возбуждения требуемого

волнового пакета. С другой стороны, рассеяние на неоднородностях может увеличить число быстро затухающих мод за счет эффекта раскачки и высвечивания звуковых лучей из волновода [46–49]. Таким образом, вопрос об эффективности разреженных вертикальных антенн в горизонтально-неоднородных волноводах является достаточно нетривиальным и требует отдельного рассмотрения.

Автор признателен П.С. Петрову за предоставленную возможность использовать код [35]. Работа выполнена в рамках госбюджетной тематики ТОИ ДВО РАН “Моделирование разномасштабных динамических процессов в океане” (номер проекта 121021700341-2).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев Г.В., Комаров Е.Г.* Численное моделирование экстремальных задач теории излучения звука в плоском волноводе // Матем. Модел. 1991. Т. 3. № 12. С. 52–64.
2. *Вировлянский А.Л., Нефедова Д.В.* Формирование узкого волнового пучка в подводном звуковом канале с помощью вертикальной антенны // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 1. С. 63–69.
3. *Артельный В.В., Артельный П.В., Вировлянский А.Л., Коротин П.И., Наседкин А.В., Потапов О.А., Циберев А.В.* Фокусировка звукового пучка в подводном волноводе с помощью вертикальной антенны // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 3. С. 339–346.
4. *Артельный В.В., Артельный П.В., Вировлянский А.Л., Казарова А.Ю., Коротин П.И.* Фокусировка поля в гидроакустическом волноводе в заданный интервал глубин // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 4. С. 477–483.
5. *Лучинин А.Г., Хилько А.И.* Низкочастотная акустическая томография мелкого моря с использованием маломодовых импульсов // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 2. С. 228–241.
6. *Хилько А.И., Лучинин А.Г., Бурдуковская В.Г., Смирнов И.П.* Маломодовая томография неоднородностей мелкого моря // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 3. С. 437–450.
7. *Макаров Д.В., Коньков Л.Е., Петров П.С.* Влияние океанических синоптических вихрей на длительность модовых акустических импульсов // Изв. Вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59. № 7. С. 638–654.
8. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В., Дремучев С.А., Куртенов В.М., Селиванов В.Г., Чепурин Ю.А.* Эксперименты по дальнему распространению звука в Канарской котловине Атлантического океана // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 5. С. 824–831.
9. *Makarov D.V., Kon'kov L.E., Uleysky M.Yu., Petrov P.S.* Wave chaos in a randomly inhomogeneous waveguide: spectral analysis of the finite-range evolution operator // Phys. Rev. E. 2013. V. 87. № 1. 012911.
10. *Петухов Ю.В., Бурдуковская В.Г.* Пространственная расходимость многомодовых акустических пучков, формируемых вертикальной антенной в

- рефракционном океаническом волноводе // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 2. С. 174–185.
11. *Артельный П.В., Вировлянский А.Л., Казарова А.Ю., Коротин П.И., Любавин Л.Я., Стуленков А.В.* Наблюдение устойчивых компонент звуковых полей в Ладожском озере // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 2. С. 174–185.
  12. *Петухов Ю.В., Бурдуковская В.Г., Бородина Е.Л.* Каустические и слаборасходящиеся пучки в горизонтально неоднородных акустических волноводах // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 2. С. 181–197.
  13. *Brown M.G., Udovydchenkov I.A.* Underwater communication using weakly dispersive modal pulses // *Acoust. Phys.* 2013. V. 59. № 5. P. 533–538.
  14. *Udovydchenkov I.A.* Array design considerations for exploitation of stable weakly dispersive modal pulses in the deep ocean // *J. Sound Vibr.* 2017. V. 400. P. 402–416.
  15. *Волков М.В., Григорьев В.А., Луньков А.А., Петников В.Г.* О возможности применения вертикальных приемных антенн для звукоподводной связи на арктическом шельфе // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 3. С. 332–342.
  16. *Clay C.S., Huang K.* Single mode transmission and acoustic backscattering measurements in a laboratory waveguide // *J. Acoust. Soc. Am.* 1980. V. 67. № 3. P. 792–794.
  17. *Gazanhes C., Garnier J.L.* Experiments on signal mode excitation in shallow water propagation // *J. Acoust. Soc. Am.* 1981. V. 69. № 4. P. 963–969.
  18. *Buck J.R., Preisig J.C., Johnson M., Catipovic J.* Single-mode excitation in the shallow-water acoustic channel using feedback control // *IEEE J. Ocean. Engin.* 1997. V. 22. № 4. P. 281–291.
  19. *Елисеевнин В.А.* Концентрация энергии в одну нормальную волну, излучаемую в водном слое вертикальной линейной антенной // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 2. С. 275–279.
  20. *Голубева Е.В., Елисеевнин В.А.* Излучение одной нормальной волны вертикальной дискретной линейной антенной в водном слое // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 1. С. 62–68.
  21. *Голубева Е.В., Елисеевнин В.А.* Мощность, излучаемая вертикальной компенсированной линейной антенной в волноводе Пекериса // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 5. С. 767–773.
  22. *Голубева Е.В., Елисеевнин В.А.* Излучение одной нормальной волны вертикальной дискретной линейной антенной в волноводе Пекериса // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 1. С. 70–76.
  23. *Peng D., Gao T., Zeng J.* Study on single-mode excitation in time-variant shallow water environment // *J. Comput. Acoust.* 2014. № 1. 1440001.
  24. *Zeng J., Zhao W.Y., Peng D.Y., Li H.F., Gao T.F., Shang E.C.* Measurements of ocean bottom low-angle backscattering by single-mode reverberation // *J. Acoust. Soc. Am.* 2014. V. 136. № 6. P. 2976–2986.
  25. *Beck J., Jäckle A., Worth G., Meyer H.-D.* The multi-configuration time-dependent Hartree (MCTDF) method: a highly efficient algorithm for propagating wavepackets // *Physics Reports.* 2000. V. 324. P. 1–105.
  26. *Pitsevich G.A., Malevich A.E.* Comparison of the Fourier and discrete variable representation in optical lattices // *J. Appl. Spectroscopy.* 2016. V. 82. № 6. P. 893–900.
  27. *Yu Hua-Gen.* A coherent discrete variable representation method on a sphere // *J. Chem. Phys.* 2017. V. 147. № 9. 094101.
  28. *Shadmehri S., Saeidian S., Melezhik V.S.* 2D nondirect product discrete variable representation for Schrödinger equation with nonseparable angular variables // *J. Phys. B.: At. Mol. Opt. Phys.* 2020. V. 53. № 8. 085001.
  29. *Piserchia A., Banerjee S., Barone V.* General approach to coupled reactive Smoluchovsky equations: integration and application of discrete variable representation and generalized coordinate methods to diffusive problems // *J. Chem. Theory Comput.* 2017. V. 13. № 12. P. 5900–5910.
  30. *Таланов В.И.* О синтезе антенн в многомодовых волноводах // *Изв. Вузов. Радиофизика.* 1986. Т. 28. № 7. С. 872–829.
  31. *Городецкая Е.Ю., Малеханов А.И., Таланов В.И., Фикс И.Ш.* Синтез и анализ акустических полей в океане / В сборнике “Формирование акустических полей в океане”. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1991. С. 9–31.
  32. *Макаров Д.В.* Алгоритм реконструкции профиля акустического поля по данным точечных измерений // *Подводн. Исслед. Робототех.* 2019. № 2. С. 62–67.
  33. *Makarov D.V., Petrov P.S.* Full reconstruction of acoustic wavefields by means of pointwise measurements // e-print arXiv:2103.06014 [eess.SP].
  34. *Zhou J.-X., Zhang X.-Z., Knobles D.* Low-frequency geoacoustic model for the effective properties of sandy seabottoms // *J. Acoust. Soc. Am.* 2009. V. 125. № 5. P. 2847–2866.
  35. *Petrov P.S.* ac\_modes: simple matlab code for the computation of acoustical normal modes in the ocean. 2019. [https://github.com/kaustikos/ac\\_modes](https://github.com/kaustikos/ac_modes) (дата обращения 23.04.2021 г.)
  36. *Hegewisch K.C., Cerruti N.R., Tomsovic S.* Ocean acoustic wave propagation and ray method correspondence: Internal wave fine structure // *J. Acoust. Soc. Am.* 2005. V. 117. № 2. Pt. 2. P. 1582–1594.
  37. *Макаров Д.В., Коньков Л.Е., Улейский М.Ю.* Соответствие между лучевой и волновой картинами и подавление хаоса при дальнем распространении звука в океане // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 3. С. 565–573.
  38. *Makarov D., Prants S., Virovlyansky A., Zaslavsky G.* Ray and wave chaos in ocean acoustics: chaos in waveguides. Singapore: World Scientific, 2010. 388 p.
  39. *Макаров Д.В.* Об измерении углов прихода акустических импульсов с помощью вертикальной антенны // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 6. С. 637–645.
  40. *Вировлянский А.Л., Макаров Д.В., Пранц С.В.* Лучевой и волновой хаос в подводных акустических волноводах // *Успехи физ. наук.* 2012. Т. 182. № 1. С. 19–48.
  41. *Hegewisch K.C., Tomsovic S.* Random matrix theory for underwater sound propagation // *Europhys. Lett.* 2012. V. 97. № 3. 34002.

42. *Hegewisch K.C., Tomsovic S.* Constructing acoustic timefronts using random matrix theory // *J. Acoust. Soc. Am.* 2013. V. 134. № 4. P. 3174–3184.
43. *Makarov D.V.* Random matrix theory for low-frequency sound propagation in the ocean: a spectral statistics test // *J. Theor. Comput. Acoust.* 2018. V. 26. № 1. 1850002.
44. *Makarov D.V.* Random matrix theory for an adiabatically-varying oceanic acoustic waveguide // *Wave Motion.* 2019. V. 90. P. 205–217.
45. *Макаров Д.В., Аллилуев А.Д.* Об экспериментальном определении пропагатора акустического поля // *Подводн. Исслед. Робототех.* 2021. № 1. С. 80–83.
46. *Кинбер Б.Е., Комиссарова Н.Н., Кравцов Ю.А.* Лучевая теория распространения волн в неоднородных рефракционных волноводах: трансформация мод и раскачка ширины волновых каналов // *Изв. ВУЗов. Радиофизика.* 1979. Т. 22. № 4. С. 414–424.
47. *Абдуллаев С.С., Заславский Г.М.* Нелинейная динамика лучей в неоднородных средах // *Журн. эксп. теор. физ.* 1981. Т. 80. № 2. С. 524–536.
48. *Makarov D.V., Uleysky M.Yu., Prants S.V.* Ray chaos and ray clustering in an ocean waveguide // *Chaos.* 2004. V. 14. № 1. P. 79–95.
49. *Макаров Д.В., Улейский М.Ю.* Высвечивание лучей из горизонтально-неоднородного подводного звукового канала // *Акуст. журн.* 2007. Т. 53. № 4. С. 565–573.

УДК 532.59,534.23,534.6

## УПРАВЛЕНИЕ ВОЛНАМИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В НЕВОЗБУЖДЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУЕ С ПОМОЩЬЮ ПЛАЗМЕННЫХ АКТУАТОРОВ В УЗКОЙ ПОЛОСЕ ЧАСТОТ

© 2021 г. В. Ф. Копьев<sup>a, \*</sup>, О. П. Бычков<sup>a</sup>, В. А. Копьев<sup>a</sup>, Г. А. Фараносов<sup>a, b</sup>,  
И. А. Моралев<sup>c</sup>, П. Н. Казанский<sup>c</sup>

<sup>a</sup>ФГУП ЦАГИ, Научно-исследовательский Московский комплекс ЦАГИ, ул. Радио 17, Москва, 105005 Россия

<sup>b</sup>МФТИ, Институтский пер. 9, Долгопрудный, Московская обл., 141701 Россия

<sup>c</sup>ФГБУ ОИВТ РАН, ул. Ижорская 13 стр. 2, Москва, 125412 Россия

\*e-mail: vkopiev@mksagi.ru

Поступила в редакцию 16.03.2021 г.

После доработки 16.03.2021 г.

Принята к публикации 23.04.2021 г.

Волны неустойчивости, развивающиеся в слое смещения турбулентной струи, во многих случаях являются источниками шумообразования (высокоскоростные струи, струи вблизи крыла самолета и др.). В работе экспериментально исследована возможность активного управления волнами неустойчивости в невозбужденной дозвуковой турбулентной струе. Система управления с обратной связью состоит из микрофонов ближнего поля, с которых снимается опорный сигнал, плазменного актуатора на основе высокочастотного диэлектрического барьерного разряда, а также модуля обработки данных. Показано, что в зависимости от настроек системы возмущения давления в ближнем поле турбулентной струи, связанные с осесимметричными волнами неустойчивости, могут ослабляться или усиливаться в заданной узкой полосе частот.

*Ключевые слова:* турбулентная струя, волны неустойчивости, активное управление, управление шумом

DOI: 10.31857/S0320791921040055

### ВВЕДЕНИЕ

Развитие технологий снижения шума турбулентной струи, которые не требуют изменения геометрии сопла и не влияют на рабочие характеристики двигателя в крейсерских условиях, является актуальной научной проблемой, которая, несмотря на большие усилия, еще не решена. Одной из основных причин этого является недостаток знаний о механизмах генерации шума в турбулентных струях. Подходы к снижению шума струй можно разделить на пассивные и активные. При этом для пассивных методов и активных методов без обратной связи знание о механизмах генерации шума не является критическим, и можно эмпирически исследовать эффекты влияния модификации геометрии сопел (например, шевроны, лепестки и т.д.) [1–4] или изучать влияние на струю различных устройств-актуаторов (плазменных, микроструйных или подвижных механических) [5–11], создающих “управляющие” возмущения без обратной связи, и получать в целом положительные результаты. Подобный подход предполагает перебор множества вариантов, большая часть которых обычно приводит к усиле-

нию, а не к снижению шума, а получаемый в некоторых случаях положительный эффект часто сосредоточен в ограниченной области спектра и сопровождается неконтролируемым усилением шума вне ее пределов. Потенциально перспективными являются так называемые активные методы управления с обратной связью, основанные на непрерывном отслеживании с помощью системы сенсоров текущего состояния потока и создании с помощью системы актуаторов “направленного” управляющего воздействия с целью ослабления нежелательных возмущений в потоке [12]. Одновременно с этим, методы такого типа являются наиболее сложными для практической реализации, поскольку они требуют достаточно глубокого понимания динамических свойств системы (собственные моды системы, свойства актуаторов, реакция системы на воздействие и т.д.), по крайней мере, для тех возмущений, на которые оказывается воздействие. Это обстоятельство является основным препятствием на пути создания реально работающих систем для управления характеристиками развитых турбулентных течений.

Применительно к турбулентным струям наиболее подходящими физическими объектами для

активного управления с обратной связью являются крупномасштабные структуры – волны неустойчивости, развивающиеся в слое смещения струи за счет неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. В работах [13–17] были развиты подходы к аналитическому описанию эволюции волн неустойчивости в слое смещения, адекватность которых была подтверждена в экспериментах [16–19]. Таким образом, волны неустойчивости, как динамические объекты, достаточно хорошо изучены, и поэтому могут являться “целевыми” возмущениями для активной системы управления.

Как известно [14, 20], эффективность излучения шума волнами неустойчивости возрастает с увеличением скорости струи, так что для высокоскоростных струй, скорость истечения которых существенно превышает скорость звука в окружающей среде, шум смещения в значительной мере определяется именно ими [15, 16, 18]. Относительно роли волн неустойчивости в генерации шума свободными низкоскоростными струями единая точка зрения на настоящий момент отсутствует. Для таких струй существует большое разнообразие моделей источников шума, многие из которых не связаны с волнами неустойчивости [21–26]. Однако для так называемых “струй в компоновке”, истекающих из сопла, расположенного вблизи крыла самолета, волны неустойчивости оказываются источником существенного дополнительного шума, возникающего за счет их рассеяния на задней кромке крыла, даже для низкоскоростных струй [27, 28]. Таким образом, задача управления волнами неустойчивости является актуальной как для дозвуковых, так и для сверхзвуковых струй.

В работе [29] была предложена концепция активного управления, согласно которой для подавления волн неустойчивости, неизбежно присутствующих в слое смещения струи, вблизи кромки сопла располагается актуатор, создающий “управляющие” волны неустойчивости, которые в заданной узкой полосе частот имели бы ту же амплитуду, что и естественные волны неустойчивости (ЕВ), но находились бы в противофазе с ними. В таком случае в линейном приближении эти волны гасили бы друг друга, что, в свою очередь, приводило бы к снижению связанного с ними шума (свободной струи или струи в компоновке). Идея о создании управляющих волн на кромке сопла связана с тем, что именно окрестность кромки наиболее восприимчива к внешним возмущениям [30, 31]. В работе [32] данная концепция была обоснована теоретически в рамках двумерной модели, а затем проверена в экспериментах с искусственными волнами неустойчивости (ИВ), возбуждаемыми динамиком на фиксированной частоте, которые затем подавлялись управляющими волнами, создаваемыми независимыми источниками: динамиком [33]

или плазменными актуаторами различных типов [34]. Предполагалось, что при тональном возбуждении ИВ представляют собой усиленные на заданной частоте ЕВ, что облегчало их идентификацию в эксперименте и упрощало алгоритм управления, поскольку амплитуда и фаза ИВ были детерминированными величинами. Для ЕВ, рассматриваемых в узкой полосе частот, ситуация во многих отношениях аналогична ситуации с ИВ, что позволило в работе [19] разработать концепцию и алгоритм управления ЕВ и оценить принципиальную возможность их практической реализации на примере анализа характеристик реальных сигналов, измеренных в ближнем поле струи.

Насколько известно авторам, демонстрация возможности активного управления волнами неустойчивости в невозбужденных струях, характеризующихся широкополосным спектром, в реальном эксперименте ранее не проводилась. Настоящая работа посвящена реализации в эксперименте концепции управления ЕВ, изложенной в [19]. В системе управления используется плазменный актуатор на основе высокочастотного диэлектрического барьерного разряда (ВЧ ДБР). Отметим, что актуаторы подобного типа хорошо зарекомендовали себя в задачах управления течениями. Ранее они использовались для возбуждения сдвигового слоя струи [34], снижения шума струи и шума обтекания цилиндра в системе без обратной связи [8, 36, 37], управления ламинарно-турбулентным переходом в пограничном слое [38], а также управления отрывом при обтекании тела [39, 40]. Система обратной связи, реализованная в настоящем исследовании, в качестве входных данных использует сигналы с микрофонов, расположенных вблизи границы струи, и на основе линейного алгоритма генерирует управляющий сигнал на актуаторе. В работе представлены результаты измерений ближнего поля в отсутствие управления, а также для режимов подавления и усиления естественных возмущений в струе в узкой полосе частот.

## 1. СТРАТЕГИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Стратегия управления, реализованная в настоящем исследовании, была сформулирована в работе [19]. Основная идея базируется на предположении о том, что волны неустойчивости, генерируемые естественными возмущениями в потоке, и структуры, возбуждаемые внешним управляющим воздействием, взаимодействуют между собой линейным образом. Следовательно, если система управления на данной частоте отрегулирована так, что управляющие возмущения равны по амплитуде и находятся в противофазе к ЕВ, то последние могут быть подавлены. Данный подход проиллюстрирован на рис. 1.

В подобной системе управления актуатор расположен на внутренней поверхности сопла вблизи его среза, а опорный датчик, используемый для подстройки управляющего воздействия, расположен ниже по потоку (рис. 1). Таким образом, реализуется так называемое управление с обратной связью. В работе [35] было предложено использовать систему управления с прямой связью, в которой воздействие актуатором на течение происходит ниже по потоку от опорного датчика. Хотя управление с прямой связью может потенциально быть более эффективным, особенности использования плазменных актуаторов, которые технически сложно разместить на удалении от сопла, накладывают ограничения на использование такого подхода. Кроме того, следует отметить, что расположение актуатора на поверхности сопла вблизи его кромки позволяет возбуждать довольно сильные волновые пакеты при небольшой амплитуде воздействия. Это связано с тем, что в окрестности кромки сопла велика как восприимчивость сдвигового слоя к возбуждению [30, 31], так и инкремент неустойчивости, определяемый мнимой частью корня дисперсионного соотношения [17]. Таким образом, для создания сравнимых по амплитуде управляющих воздействий актуатор, расположенный непосредственно на кромке сопла, будет существенно более эффективен, чем актуатор, расположенный ниже по потоку. Относительно низкая мощность, необходимая для работы актуатора при его расположении на кромке сопла, может быть важна с точки зрения минимизации собственного шума актуатора, который является серьезным паразитным эффектом при использовании газовых разрядов для генерации управляющих возмущений [7–9]. В предыдущих исследованиях [34, 41] было показано, что актуатор на базе ВЧ ДБР может эффективно возбуждать сдвиговый слой при сравнительно низком собственном шуме. Такой тип актуатора успешно использовался в системах управления для подавления ИВ [32, 41]. Основными механизмами воздействия разряда на поток в этом случае являются электрогидродинамическая сила (ионный ветер) и периодический нагрев газа. В настоящей работе используется актуатор, аналогичный использованному в [41].

Алгоритм, реализованный в системе управления, в целом соответствует алгоритму, описанному в работе [19]. Он основан на фильтрации сигнала, получаемого опорными датчиками, в узкой полосе частот в режиме реального времени и подаче этого сигнала в систему управления актуатором с введением амплитудной и фазовой коррекций. Система, реализованная в настоящей работе, ориентирована на управление осесимметричными возмущениями. С одной стороны, осесимметричное воздействие может быть легко реализовано кольцевым актуатором, установленным внутри

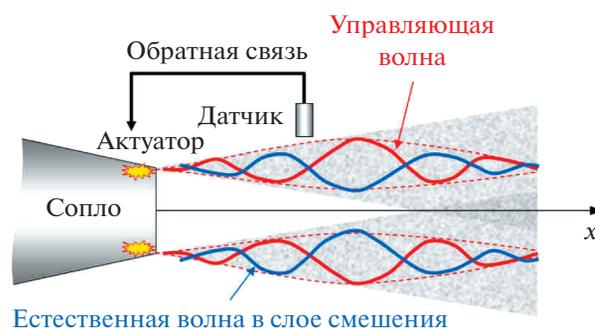


Рис. 1. Общая концепция управления волнами неустойчивости в слое смешения струи.

сопла, а с другой — именно осесимметричные волны неустойчивости вносят определяющий вклад в шум свободной высокоскоростной струи [16, 20] и в шум струи, расположенной вблизи крыла [27, 28].

## 2. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Для генерации волн неустойчивости использовался актуатор высокочастотного диэлектрического барьерного разряда (ВЧ ДБР), установленный на внутренней поверхности сопла. Конструкция актуатора и его интеграция в сопло были аналогичны используемым в работе [41]. В данной серии экспериментальных исследований были использованы металлические сопла диаметром 40 мм, покрытые алундовой керамикой толщиной 1 мм (рис. 2). Разряд создавался по краям металлического кольцевого электрода, наклеенного на внутреннюю поверхность сопла, а само сопло при этом служило вторым электродом (рис. 2б). Данная конфигурация позволяла устанавливать электрод достаточно близко к кромке сопла с тем, чтобы повысить эффективность генерации волн неустойчивости. Расстояние от кромки электрода до плоскости среза сопла находилось в пределах  $l = 3\text{--}5$  мм (рис. 2б). Предварительные параметрические исследования показали резкое снижение восприимчивости сдвигового слоя к возмущениям актуатора с увеличением этого расстояния. Высокое напряжение создавалось источником питания на основе транзисторных ключей с резонансным трансформатором в выходном каскаде. На актуатор подавалось синусоидальное напряжение с амплитудой 5–10 кВ и частотой  $\sim 130$  кГц. Типичная длина разряда составляла 3–6 мм. Мощность разряда оценивалась по площади вольт-амперных циклограмм [42] и составляла  $\sim 700$  Вт/м по длине электрода.

Эксперименты проводились в заглушенной камере АК-2 ЦАГИ. Число Маха истечения струи составляло  $M = 0.53$ , число Рейнольдса по диаметру сопла и скорости истечения —  $Re = 4.9 \times 10^5$ . В экс-

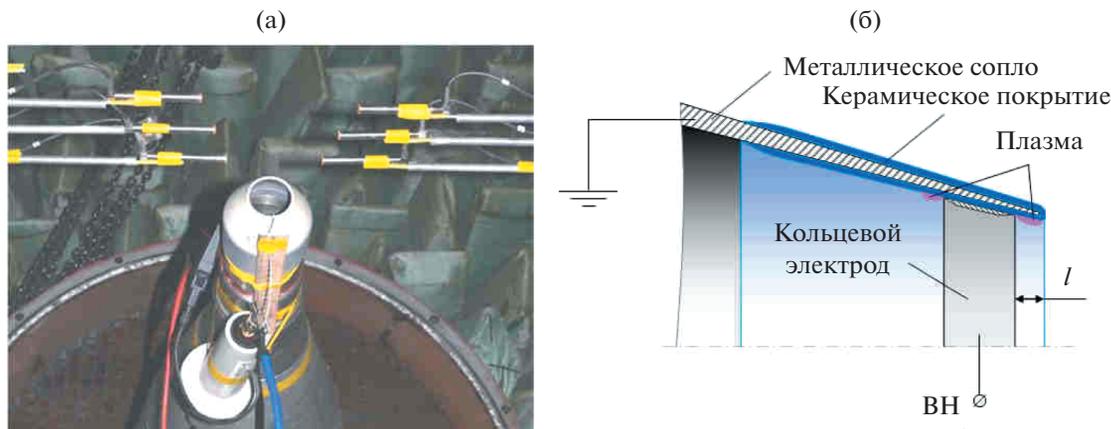


Рис. 2. Сопло с актуатором: (а) – фото; (б) – схема сопла в разрезе.

периментах измерялись пульсации давления в ближнем поле струи. Для измерений использовались шесть 1/4" микрофонов Briel&Kjaer (тип 4935), расположение которых показано на рис. 3. Микрофоны (обозначенные на рис. 3 как  $N1, \dots, N6$ ) были расположены в линейной области ближнего поля вблизи внешней границы слоя смешения струи, что позволяло регистрировать волны неустойчивости [17, 19]. Микрофоны были подключены к системе сбора и анализа данных PULSE 3560-С. Для вспомогательного контроля сигнала в дальнем поле использовались также 5 микрофонов, расположенных на дуге радиуса

$R = 2$  м под углами  $15^\circ, 30^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 90^\circ$  к оси струи (на рис. 3 не показаны).

Для выделения осесимметричной составляющей возмущений микрофоны были сгруппированы в три пары, расположенные симметрично относительно оси струи, как показано на рис. 3. Как было показано, например, в работе [19], в ближнем поле струи на низких и умеренных частотах доминируют только две первые азимутальные моды. Следовательно, двух микрофонов в каждом поперечном сечении струи достаточно для оценки уровней осесимметричной и первой азимутальной мод. Если  $s_1$  и  $s_2$  – сигналы, измеренные в симметричных противоположных точках в ближнем поле струи в некотором поперечном сечении  $x$ , то формулы

$$\begin{aligned} a_0(x, t) &= (s_1(x, t) + s_2(x, t))/2, \\ a_1(x, t) &= (s_1(x, t) - s_2(x, t))/2, \end{aligned} \quad (1)$$

дают сигналы, соответствующие осесимметричной  $a_0$  и первой  $a_1$  моде. Для пары  $N1-N2$  симметричные и антисимметричные компоненты пульсаций обозначим  $a_0(x_1, t)$  и  $a_1(x_1, t)$ , для пары  $N3-N4$  –  $a_0(x_2, t)$  и  $a_1(x_2, t)$ , а для пары  $N5-N6$  –  $a_0(x_3, t)$  и  $a_1(x_3, t)$ , соответственно.

Обработка сигнала реализована на базе модуля LCARD E14-440D (рис. 3), объединяющего аналого-цифровой преобразователь (АЦП), цифроаналоговый преобразователь (ЦАП) и цифровой сигнальный процессор (ЦСП) ADSP-2185M с тактовой частотой 48 МГц, микроконтроллер для управления модулем и передачи данных через порт USB. Возможности модуля позволяют подключать до 16 микрофонов с частотой дискретизации 25 кГц.

Поскольку разряд инициировался на кольцевом осесимметричном электроде, предполагалось, что актуатор генерирует в основном осесим-

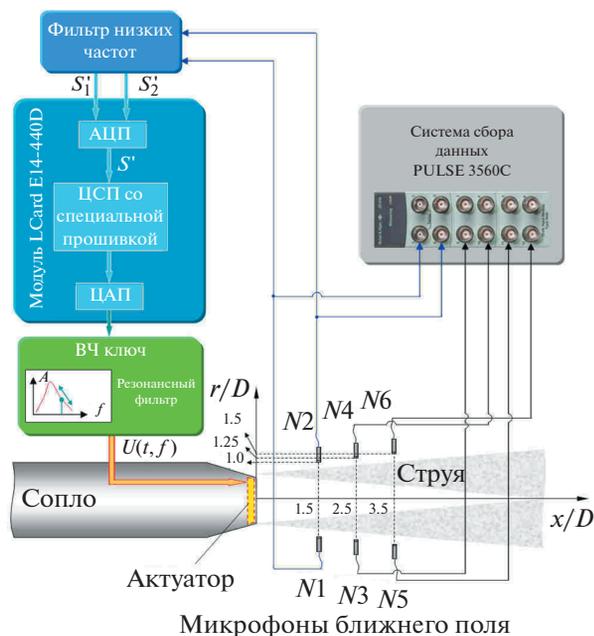
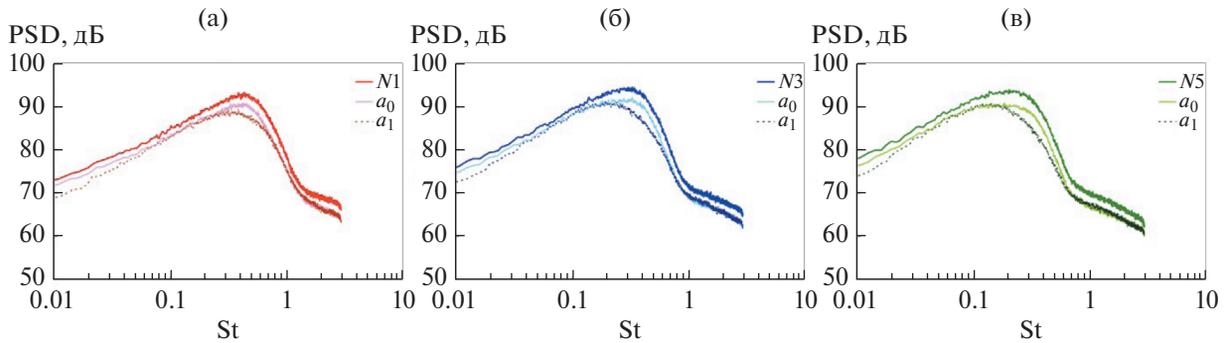


Рис. 3. Схема расположения микрофонов и схема системы управления.



**Рис. 4.** Спектры ближнего поля полного сигнала (микрофоны  $N1$ ,  $N3$ ,  $N5$ ) и его симметричной ( $a_0$ ) и антисимметричной ( $a_1$ ) составляющих для трех поперечных сечений струи: (а) –  $x/D = 1.5$ ; (б) –  $x/D = 2.5$ ; (в) –  $x/D = 3.5$ . Система управления отключена.

метричную волну неустойчивости. Поэтому в качестве опорного сигнала для системы управления использовался сигнал  $a_0(x_1)$  с пары микрофонов  $N1$ – $N2$ . Таким образом, сначала вычислялась полусумма сигналов с микрофонов  $N1$ – $N2$ , а затем она обрабатывалась при помощи ЦСП. Алгоритм обработки включал в себя фильтрацию сигнала с помощью фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтра)

$$Y_n = \sum_{k=0}^{N-1} b_k X_{n-k} \quad (2)$$

с коэффициентами

$$b_k = \frac{2}{N} K(k) \cos\left(\frac{2\pi k i}{N} + \varphi\right), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (3)$$

где  $K$  – прямоугольное окно либо окно Кайзера [43].

Фаза и амплитуда каждой гармоники могли задаваться отдельно. В данной работе использовалась одиночная гармоника (узкополосная фильтрация), и фазовый сдвиг выбирался исходя из требования общего сдвига фазы на  $\pi$  в центре полосы пропускания, чтобы обеспечить приход искусственных возмущений в точку измерения в противофазе с ЕВ.

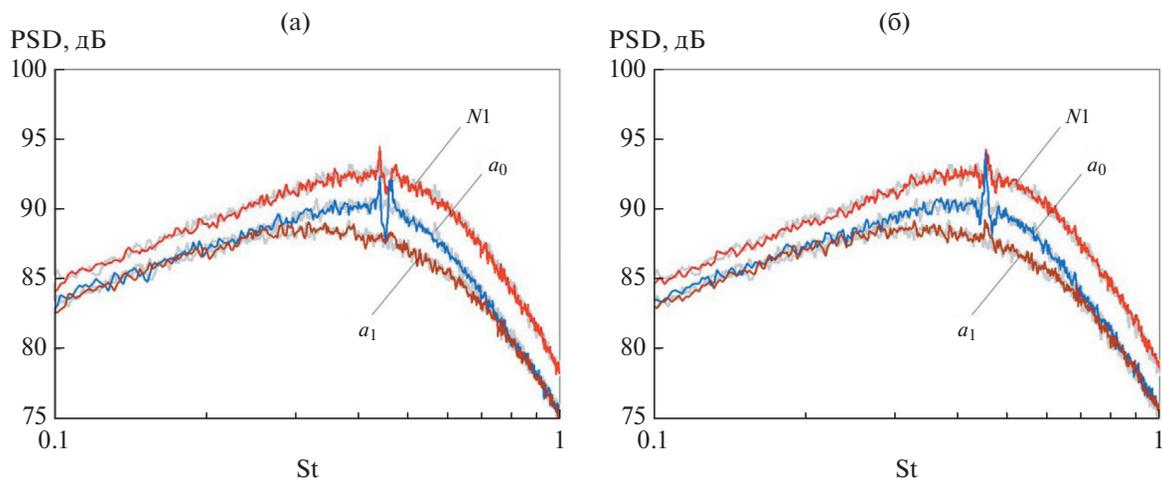
Сигналы с двух микрофонов  $N1$ – $N2$  снимались с частотой дискретизации 100 кГц, при этом фильтр использовал каждый 10-й отсчет АЦП. Выходной сигнал генерировался с помощью ЦАП и использовался для модуляции частоты питающего напряжения. В результате модуляции частоты на правой ветви резонансной кривой выходного трансформатора ВЧ генератора напряжение  $U$  питания разряда модулировалось пропорционально выходному сигналу модуля. Эта линейность сохраняется вплоть до момента, когда отклонение частоты становится сопоставимым с расстоянием от рабочей точки до максимума резонансной кривой. Принципиальная схема системы приведена на рис. 3.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Спектры ближнего поля струи с выключенной системой управления, измеренные микрофонами  $N1$ ,  $N3$ ,  $N5$ , показаны на рис. 4. Они также имеют типичную форму с низкочастотным максимумом, соответствующим гидродинамическим пульсациям давления [28]. На этом же рисунке показаны спектры симметричной  $a_0$  и антисимметричной  $a_1$  азимутальных компонент пульсаций, рассчитанные по формуле (1). Видно, что при числах Струхала  $0.3 < St < 0.6$  в общем сигнале доминирует осесимметричная мода. В связи с тем, что актуатор должен генерировать осесимметричные волны неустойчивости, для испытательной системы управления была выбрана частота из данного диапазона, что гарантировало достаточно точное выделение осесимметричной моды парой микрофонов.

Далее представлены результаты испытаний работы системы управления. Регулировка параметров системы для заданных условий работы струи и положения опорных микрофонов осуществлялась вручную. На первом этапе были выбраны параметры КИХ-фильтра (центральная частота  $f_c$ , соответствующая  $St = 0.46$ , количество выборок  $N$ , оконная функция), которые загружались в ЦСП. Для настоящей работы были выбраны  $f_c = 2.05$  кГц ( $St = 0.46$ ),  $N = 128$ ,  $K = 4$ .

Затем, чтобы получить желаемый эффект управления (ослабление или усиление сигнала в заданной полосе частот вблизи  $f_c$ ), необходимо было настроить коэффициент модуляции  $\beta$  и время задержки по времени  $\tau$ . Коэффициент  $\beta$  характеризует соотношение величины отфильтрованного сигнала  $a_0(x_1, t)$  и напряжения, приложенного к актуатору, и должен быть выбран так, чтобы амплитуда управляющего возмущения в месте расположения опорных датчиков была бы равна амплитуде естественных возмущений в этом же месте. Время задержки  $\tau$  для узкополос-



**Рис. 5.** Спектры полного сигнала (микрофон  $N1$ ) и его симметричные ( $a_0$ ) и антисимметричные ( $a_1$ ) компоненты для поперечного сечения  $x/D = 1.5$ : (а) – режим подавления возмущений; (б) – режим усиления. Серые кривые соответствуют спектрам струи без управления.

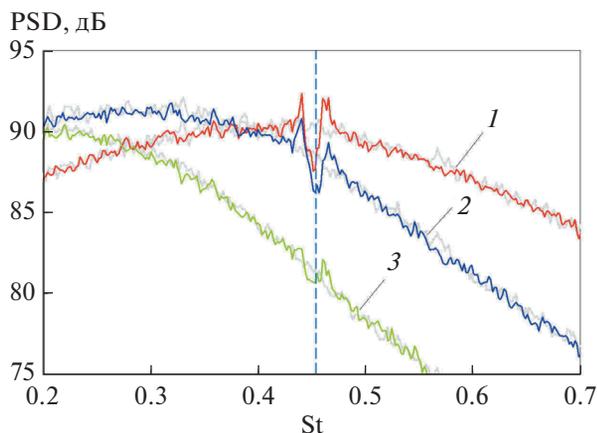
ных сигналов эквивалентно задержке по фазе и должно быть выбрано так, чтобы управляющие и естественные возмущения в месте расположения датчиков оказались в противофазе (для ослабления сигнала) или в фазе (для усиления). Параметры  $\beta$  и  $\tau$  определяются геометрией системы и средними параметрами потока и содержат в себе информацию о передаточной функции между напряжением, подаваемым на актуатор, и теми гидродинамическими возмущениями, которые актуатор инициирует в месте расположения опорных датчиков. Поиск оптимальной пары  $\beta$  и  $\tau$ , соответствующей максимальному ослаблению сигнала вокруг центральной частоты КИХ-фильтра, осуществлялся итерационно вручную. Когда такая пара была найдена, было выполнено несколько измерений с разными временными задержками (в течение одного типичного периода  $\Delta t \approx 1/f_c$  узкополосного сигнала), чтобы исследовать не только эффект подавления ЭВ, но и эффект их усиления.

На рис. 5 показаны спектры полного сигнала и спектры азимутальных мод для опорного сечения  $x/D = 1.5$  для двух режимов работы системы: режима подавления и режима усиления возмущений. Серые кривые на рис. 5 соответствуют спектрам свободной струи с выключенной системой управления и показаны для удобства оценки эффекта управления. Хорошо видно, что управляющее воздействие, как и ожидалось, локализовано именно в осесимметричной моде. Этот результат подтверждает исходное допущение о том, что актуатор генерирует преимущественно осесимметричные волны неустойчивости, а также то, что простое двухмикрофонное разложение полного сигнала (1) позволяет корректно выделить осесимметричную моду. Поэтому ниже анализируются

только осесимметричные возмущения ближнего поля. Видно, что в режиме подавления величина снижения возмущений осесимметричной моды на целевой частоте достигает 2.6 дБ, а в режиме усиления – интенсивность возмущений увеличивается на величину около 4 дБ. Это подтверждает работоспособность реализованной системы управления.

Для более детального анализа на рис. 6 приведены спектры симметричных мод во всех трех исследованных сечениях для режима подавления возмущений. Серые кривые соответствуют контрольным спектрам свободной струи. Видно, что эффект управления уменьшается при удалении от опорного сечения: в опорном сечении  $x/D = 1.5$  максимальная величина снижения составляет 2.8 дБ, в сечении  $x/D = 2.5$  – 2.4 дБ, в сечении  $x/D = 3.5$  – 0.8 дБ. Это можно объяснить тем, что при увеличении расстояния от опорного сечения величина когерентности между пульсациями в текущем и опорном сечениях уменьшается [28], что косвенно указывает на тот факт, что ЭВ в струе генерируются не только возмущениями на кромке сопла, но и возмущениями в объеме слоя смешения. Таким образом, масштаб когерентности ЭВ ограничивает область вблизи опорного сечения, в которой может быть достигнуто снижение пульсаций. Этот эффект необходимо учитывать, например, при создании системы снижения шума компоновки “струя–крыло” [41].

Нужно также отметить, что помимо ослабления возмущений вблизи центральной частоты наблюдается некоторое усиление сигнала вблизи краев полосы пропускания фильтра (рис. 5, 6), или, наоборот, для режима усиления можно видеть ослабление сигнала. Таким образом, имеет место своего рода “обратный эффект” управле-



**Рис. 6.** Спектры осесимметричной моды в трех сечениях струи: 1 –  $x/D = 1.5$ ; 2 –  $x/D = 2.5$ ; 3 –  $x/D = 3.5$ . Режим подавления. Серые кривые соответствуют спектрам струи без управления. Вертикальная линия обозначает положение центральной частоты фильтра  $f_c$ .

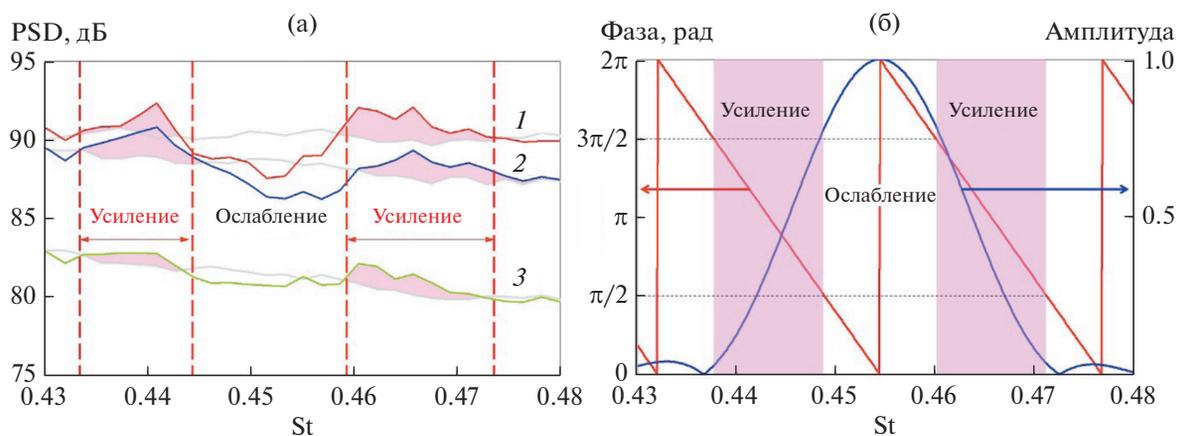
ния. Данный эффект более детально изображен на рис. 7а для системы, работающей в режиме подавления возмущений на заданной частоте. Как уже отмечалось, для эффективного ослабления ЭВ управляющая волна неустойчивости, созданная актуатором, должна иметь такую же амплитуду, что и ЭВ, и находиться в противофазе с ними. Тем не менее, для любого числового фильтра второе условие может быть выполнено только в некоторой полосе, определяемой наклоном фазовой характеристики системы в целом (рис. 7б). Вдали от этой полосы частот неизбежно будет иметь место некоторое усиление естественных возмущений. Действительно, фазово-частотная характеристика используемого фильтра является линейной, и сдвиг фазы  $\Delta$  уве-

личивается с увеличением сдвига  $|f - f_c|$  от центральной частоты. Следовательно, сигнал будет ослаблен для  $|\Delta| < \pm\pi/2 + 2\pi n$  и усилен для  $\pi/2 + 2\pi n < |\Delta| < 3\pi/2 + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Для режима усиления, наоборот, сигнал будет усиливаться для частот, соответствующих  $|\Delta| < \pm\pi/2 + 2\pi n$ , и ослабляться – для  $\pi/2 + 2\pi n < |\Delta| < 3\pi/2 + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Соответствующие зоны показаны на рис. 7б, и видно, что наблюдаемый в эксперименте обратный эффект проявляется в диапазонах частот, близких к расчетным значениям. Поскольку амплитудная характеристика фильтра спадает достаточно быстро при удалении от центральной частоты, величина обратного эффекта для плоского спектра ЭВ будет меньше прямого эффекта на центральной частоте (рис. 7а).

В заключение отметим, что для исследованной низкоскоростной струи на микрофонах в дальнем поле эффекта управления заметно не было. Для микрофонов в боковом направлении, где шум струи достаточно слаб, на частоте управления проявлялся собственный шум актуатора, а для микрофонов, близких к оси струи, спектр шума не изменялся при включении системы управления. Для наблюдения эффекта управления шумом струи в дальнем поле с помощью разработанной системы необходимо рассматривать более высокоскоростные струи, для которых волны неустойчивости являются значимыми источниками шума.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе продемонстрирована возможность реализации в эксперименте предложенной ранее в [19] концепции активного управления волнами



**Рис. 7.** Обратный эффект управления. (а) – Спектры осесимметричной моды в трех сечениях струи в режиме подавления ( $1 - x/D = 1.5$ ;  $2 - x/D = 2.5$ ;  $3 - x/D = 3.5$ ). Заливкой выделены зоны усиления сигнала, серые кривые соответствуют спектрам струи без управления. (б) – Амплитудная и фазовая частотные характеристики КИХ-фильтра, заливкой выделены зоны усиления сигнала.

неустойчивости в невозбужденной дозвуковой струе в узкой полосе частот. Для возбуждения управляющего воздействия использовался плазменный актуатор на основе ВЧ ДБР. Алгоритм управления был реализован с использованием стандартного модуля LCARD E14-440D, объединяющего АЦП, ЦАП и ЦСП. Скользящая фильтрация сигнала была реализована с помощью цифрового КИХ-фильтра. Результаты, представленные в работе, были получены для узкополосного фильтра шириной ~100 Гц с центральной частотой, соответствующей числу Струхала 0.46. Для обратной связи использовалась полусумма сигналов, измеряемых двумя симметрично расположенными относительно оси струи микрофонами. Это позволило обеспечить управление осесимметричными волнами неустойчивости.

Показано, что предлагаемая система управления способна ослаблять в опорном сечении пульсации давления, соответствующие осесимметричной моде, на целевой частоте на величину до 2.8 дБ. Также было продемонстрировано, что эффект управления уменьшается при смещении вниз по потоку от опорного сечения и составляет около 0.8 дБ для микрофонов, расположенных на расстоянии двух калибров от опорных.

В измерениях наблюдалось явление, заключающееся в инвертировании эффекта управления по обе стороны от центральной частоты, на которую настроена система управления. Показано, что данный “обратный” эффект обусловлен особенностями системы обратной связи и фазовой характеристикой КИХ-фильтра. Для получения положительного интегрального эффекта управления необходимо расширять полосу подавления так, чтобы она охватывала спектральный максимум с “вытеснением” обратного эффекта на боковые склоны спектра. Решению данной задачи будут посвящены будущие исследования.

Для исследованной низкоскоростной струи не было замечено снижения шума в дальнем поле при ослаблении пульсаций, связанных с волнами неустойчивости. Для получения прямого эффекта управления шумом струи с помощью предложенной системы необходимо рассматривать более высокоскоростные струи, для которых волны неустойчивости являются значимыми источниками шума. Кроме того, данная система управления должна приводить к снижению шума взаимодействия струи и крыла при условии ее настройки таким образом, чтобы ослаблялись пульсации в области расположения задней кромки крыла.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Москвы, проект 19-31-70005 (реализация концепции управления в эксперименте), а также Российского научного фон-

да, проект 19-71-10064 (методика идентификации волн неустойчивости в ближнем поле).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gliebe P.R., Brausch J.F., Majjigi R.K., Lee R.* Jet Noise Suppression. Aeroacoustics of flight vehicles. Theory and practice // Edited by *Hubbard H.* NASA Langley Research Center. 1991. V. 2. P. 207–270.
2. *Zaman K., Bridges J.E., Huff D.L.* Evolution from “tabs” to “chevron technology” – a review // *Int. J. Aeroacoustics.* 2011. V. 10. № 5–6. P. 685–709.
3. *Кузнецов В.М.* Эффективность методов снижения шума реактивных струй двигателей пассажирских самолетов // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 1 С. 91–102.
4. *Копьев В.Ф., Зайцев М.Ю., Остриков Н.Н.* Снижение шума дозвуковой струи за счет гофрированной формы сопла // *Акуст. журн.* 2013. Т. 59. № 2. С. 232–234.
5. *Samimy M., Kim J.H., Adamovich I., Utkin Y., Kastner J.* Toward noise mitigation in high speed and high Reynolds number jets using plasma actuators // *AIAA Paper.* 2006. 2006–2703.
6. *Kopiev V.F., Ostrikov N.N., Kopiev V.A., Belyaev I.V., Faranov G.A.* Instability wave control by plasma actuators: problems and prospects // *AIAA Paper.* 2011. 2011–973.
7. *Kearney-Fischer M., Kim J.H., Samimy M.* Noise control of a high Reynolds number high speed heated jet using plasma actuators // *Int. J. Aeroacoustics.* 2011. V. 10. № 5–6. P. 635–658.
8. *Копьев В.Ф., Битюрин В.А., Беляев И.В., Годин С.М., Зайцев М.Ю., Климов А.И., Копьев В.А., Моралев И.А., Остриков Н.Н.* Управление шумом струи с помощью плазменных актуаторов диэлектрического барьерного разряда // *Акуст. журн.* 2012. Т. 58. № 4. С. 473–482.
9. *Samimy M., Kearney-Fischer M., Kim J.H.* High-speed and high-Reynolds-number jet control using localized arc filament plasma actuators // *J. of Propulsion and Power.* 2012. V. 28. № 2. P. 269–280.
10. *Koenig M., Sasaki K., Cavalieri A.V.G., Jordan P., Gervais Y.* Jet-noise control by fluidic injection from a rotating plug: linear and nonlinear sound-source // *J. Fluid Mech.* 2016. V. 788. P. 358–380.
11. *Гиневский А.С., Власов Е.В., Каравосов Р.К.* Акустическое управление турбулентными струями. М.: Физматлит, 2001. 239 с.
12. *Brunton S.L., Noack B.R.* Closed-loop turbulence control: Progress and challenges // *Applied Mechanics Reviews.* 2015. V. 67 / 050801-1.
13. *Седельников Т.Х.* О частотном спектре шума сверхзвуковой струи. Физика аэродинамических шумов. М.: Наука, 1967. 83 с.
14. *Tam C.K.W., Morris P.J.* The radiation of sound by the instability waves of a compressible plane turbulent shear layer // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 98(2). P. 349–381.
15. *Tam C.K.W., Burton D.E.* Sound generated by instability waves of supersonic flows: Part 2. Axisymmetric jets // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 138. P. 273–295.

16. *Kopiev V.F., Chernyshev S.A., Zaitsev M.Yu., Kuznetsov V.M.* Experimental validation of instability wave theory for round supersonic jet // AIAA Paper. 2006. AIAA-2006-2595.
17. *Gudmundsson K.* Instability wave models of turbulent jets from round and serrated nozzles. PhD thesis. 2010. California Institute of Technology.
18. *Зайцев М.Ю., Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* Экспериментальное исследование роли волн неустойчивости в механизме излучения шума сверхзвуковой струей // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 4. С. 124–133.
19. *Беляев И.В., Бычков О.П., Зайцев М.Ю., Копьев В.А., Копьев В.Ф., Остриков Н.Н., Фараносов Г.А., Чернышев С.А.* Разработка стратегии активного управления волнами неустойчивости в невозбужденных турбулентных струях // Изв. РАН МЖГ. 2018. № 3. С. 14–27.
20. *Jordan P., Colonius T.* Wave packets and turbulent jet noise // Annual Review of Fluid Mechanics. 2013. V. 45. P. 173–195.
21. *Tam C., Aurialt L.* Jet mixing noise from fine-scale turbulence // AIAA Journal. 1999. V. 37. № 2. P. 145–153.
22. *Ewert R.* RPM – the fast Random Particle-Mesh method to realize unsteady turbulent sound sources and velocity fields for CAA applications // AIAA Paper. 2007. 2007–3506.
23. *Kopiev V., Zaitsev M., Chernyshev S., Ostrikov N.* Vortex ring input in subsonic jet noise // Int. J. Aeroacoustics. 2007. V. 6. № 4. P. 375–405.
24. *Бендерский Л.А., Крашенинников С.Ю.* Исследование шумообразования в турбулентных струях на основе вычислительного моделирования нестационарного течения в слое смешения // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 4. С. 149–162.
25. *Karabasov S.A., Afsar M.Z., Hynes T.P., Dowling A.P., McMullan W.A., Pokora C.D., Page G.J., McGuirk J.J.* Jet noise: acoustic analogy informed by large eddy simulation // AIAA Journal. 2010. V. 48. № 7. P. 1312–1325.
26. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* Новая корреляционная модель каскада турбулентных пульсаций как источник шума в струях // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 4. С. 482–497.
27. *Lyu B., Dowling A.P., Naqavi I.* Prediction of installed jet noise // J. Fluid Mech. 2017. V. 811. P. 234–268.
28. *Бычков О.П., Фараносов Г.А.* Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование шума взаимодействия струи и крыла самолета // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 4. С. 437–453.
29. *Kopiev V.F.* On the possibility and prospects of turbulent flow noise control // CD-ROM Proceedings FM11-12156 XXI ICTAM. 15–21 August 2004. Warsaw. Poland.
30. *Фараносов Г.А.* Теоретическое исследование эффективности внешнего возбуждения волн неустойчивости в двумерной модели кромки сопла // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 4. С. 549–555.
31. *Faranosov G.* Theoretical investigation of the effectiveness of artificial instability waves excitation in subsonic jets // AIAA Paper. 2012. 2012–2145.
32. *Копьев В.Ф., Фараносов Г.А.* Управление волной неустойчивости в двумерной задаче о кромке сопла // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 3. С. 371–379.
33. *Беляев И.В., Зайцев М.Ю., Копьев В.А., Копьев В.Ф., Фараносов Г.А.* Акустическое управление волнами неустойчивости в турбулентной струе // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 1. С. 19–30.
34. *Kopiev V.F., Akishev Y.S., Belyaev I.V., Berezhetskaya N.K., Bityurin V.A., Faranosov G.A., Grushin M.E., Klimov A.I., Kopiev V.A., Kossyi I.A., Moralev I.A., Ostrikov N.N., Taktakishvili M.I., Trushkin N.I., Zaitsev M.Yu.* Instability wave control in turbulent jet by plasma actuators // J. Phys. D: Appl. Phys. 2014. V. 47. P. 1–18.
35. *Sasaki K., Piantanida S., Cavalieri A.V., Jordan P.* Real-time modelling of wavepackets in turbulent jets // J. Fluid Mech. 2017. V. 821. P. 458–481.
36. *Thomas F.O., Kozlov A., Corke T.C.* Plasma actuators for cylinder flow control and noise reduction // AIAA J. 2008. V. 46. № 8. P. 1921–1931.
37. *Kopiev V.F., Kazansky P.N., Kopiev V.A., Moralev I.A., Zaitsev M.Yu.* HF DBD plasma actuators for reduction of cylinder noise in flow // J. Physics D: Applied Physics. 2017. V. 50 / 475204.
38. *Moralev I., Sherbakova V., Selivonin I., Bityurin V., Ustinov M.* Effect of the discharge constriction in DBD plasma actuator on the laminar boundary layer // Int. J. Heat Mass Transf. 2018. V. 116. P. 1326–1340.
39. *Baranov S., Moralev I.A., Sboev D.S., Tolkachev S.N., Ustinov M.* On effects of “killer mode” excitation by dielectric barrier discharge in a swept wing boundary layer // XIX Int. Conf. on the Methods of Aerophysical Research. August 13–19, 2018. Novosibirsk, Russia.
40. *Kazanskyi P.N., Klimov A.I., Moralev I.A.* High-frequency actuator control of air flow near a circular cylinder: Impact of the discharge parameters on the cylinder aerodynamic drag // High Temp. 2012. V. 50. № 3. P. 323–30.
41. *Kopiev V., Faranosov G., Bychkov O., Kopiev V.I., Moralev I., Kazansky P.* Active control of jet-plate interaction noise for excited jets by plasma actuators // J. Sound Vib. 2020. V. 484. P. 115515.
42. *Manley T.C.* The electric characteristics of the ozonator discharge // J. Electrochem. Soc. 1943. V. 84. P. 83–96.
43. *Хемминг П.В.* Цифровые фильтры. М.: Советское радио, 1980.

УДК 534.86

## УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА АМПЛИТУДНО- И ФАЗОЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕКТОРНО-СКАЛЯРНОГО ПРИЕМНИКА ТИПА “ТРИПОЛЬ” С ВРЕМЕННОЙ ЗАДЕРЖКОЙ СИГНАЛА МОНОПОЛЯ

© 2021 г. Г. Н. Кузнецов<sup>а</sup>, \*, А. А. Пудовкин<sup>а</sup>, \*\*, А. О. Субботкин<sup>а</sup>, \*\*\*

<sup>а</sup>Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук,  
ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия

\*e-mail: skbmortex@mail.ru

\*\*e-mail: alx.pdyk@mail.ru

\*\*\*e-mail: subov-an@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.11.2020 г.

После доработки 12.03.2021 г.

Принята к публикации 23.04.2021 г.

Получены общие уравнения для расчета амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик векторно-скалярного приемника типа “триполь” с временной задержкой сигнала монополя, образованного из ненаправленных приемников звукового давления с произвольными характеристиками. Выведены аналитические выражения для основных электроакустических характеристик триполя. Показано, что введение частотно-зависимого усиления в сигнал “диполя” позволяет расширить в 1.5 раза частотный диапазон эффективного однонаправленного приема триполя с характеристикой направленности, близкой к “кардиоиде”. Выполнен анализ предельных значений частотного диапазона эффективного однонаправленного приема. Расчетные характеристики направленности хорошо согласуются с экспериментальными.

**Ключевые слова:** акустика, векторно-скалярный приемник, триполь, однонаправленный прием, сравнение рассчитанной и экспериментально измеренной кардиоиды

**DOI:** 10.31857/S0320791921040080

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Реализация систем направленного приема звука является одной из важнейших прикладных задач во многих областях воздушной акустики и гидроакустики. Для ее решения могут применяться как многоэлементные приемные системы (антенны), так и комбинированные приемники, состоящие из нескольких приемников (обычно двух или трех), сигналы которых специальным образом преобразовываются и суммируются. Комбинированные приемники такого типа в литературе имеют разное название: векторно-скалярные приемники, векторно-фазовые приемники, электрически комбинированные приемники (т.к. приемники комбинируются на уровне своих электрических звеньев по классификации системного подхода академика А.А. Харкевича). Комбинированные приемники используются и в воздушной акустике, однако, сегодня наибольшее распространение такие системы все же приобрели в гидроакустике [17–19], где для них устоялось наименование векторно-скалярного приемника (ВСП).

Скалярные линейные акустические антенны обладают наибольшей разрешающей способностью и самым высоким коэффициентом осевой концентрации, но отличаются от планарных или объемных антенн с равным числом приемников тем, что не дают однозначной оценки пеленга, поскольку формируют “зеркальный лепесток” и не разделяют сигналы, принятые с противоположных направлений. Например, линейная буксируемая антенна не разделяет сигналы, принятые с левого и правого борта, стационарные донные антенны не разделяют сигналы, принятые из передней или задней полусферы [1]. В [2] показано, что в случае применения в этих антеннах не скалярных, а векторно-скалярных приемников такие антенны формируют однонаправленные характеристики направленности (ХН) и разделяют сигналы, принятые с противоположных направлений. При этом при приеме сигналов, например, слева, сигналы, принятые справа подавляются на величину до 20–25 дБ, и наоборот. В основе такой обработки лежит формирование в каждой одноточечной группе скалярных прием-

ников – “триполя” – характеристик направленности типа “кардиоида” или близких к ней.

Существуют разные способы формирования кардиодной характеристики направленности ВСП. Одним из таких способов, часто используемом в практике гидроакустики, является суммирование сигнала от “диполя” и задержанного сигнала от “монополя”. Именно он рассматривается в настоящей работе. Причем в зависимости от знака суммирования сигналов от монополя и диполя кардиоида может быть развернута “влево” или “вправо”. При одновременном суммировании сигналов в двух вариантах имеется возможность непрерывно принимать сигналы с двух противоположных направлений.

Применяются и другие способы преобразования сигналов для формирования кардиоиды ВСП. Например, суммирование сигнала “монополя” с интегрированным сигналом “диполя” или суммирование сигнала “диполя” с дифференцированным сигналом “монополя” (радиогидроакустические буи типа AN/SSQ-53D [14]). Следует отметить, что кардиоидные характеристики можно формировать и применять не только с использованием трипольной группы приемников, но и при суммировании сигналов от двух-трех компонентных векторных приемников инерциального типа и скалярного датчика (стандартного гидрофона) [15, 16].

Отметим, что ХН диполей или группы диполей изучены, например в [3]. Позднее было установлено, что при достаточно точном подборе чувствительностей и фазовых характеристик скалярных приемников, из которых образуются градиентные дипольные приемники, формируются ХН с коэффициентом деления не менее 20–25 дБ. Эксперимент также показал, что такие характеристики диполей могут быть получены в рабочей полосе частот декада и более [4].

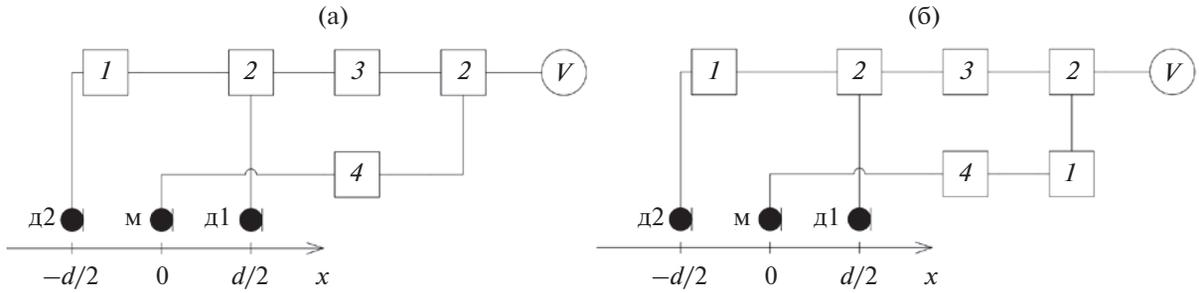
Характеристики триполей, формирующих кардиоиды, изучены значительно меньше, причем не только в гидроакустике, но и в воздушной акустике, хотя в воздушной акустике триполи и связанные с ними кардиоидные ХН используются достаточно давно [5–8]. В частности, не выполнено теоретическое и экспериментальное исследование предельных оценок рабочего диапазона частот, в которых формируются однонаправленные кардиоиды и, соответственно, однонаправленные векторно-скалярные антенны, образованные из триполей. Не сформулирована полная математическая модель триполя: уравнения частотной характеристики чувствительности или амплитудно-частотной характеристики (АЧХ)  $M$ , фазочастотной характеристики (ФЧХ)  $\varphi$ , а также всех следующих из АЧХ уравнений основных электроакустических характеристик: уровня неравномерности чувствительности  $\Delta N$ , харак-

теристики направленности  $R$ , уровня перепада чувствительности (коэффициента деления) “фронт–фланг”  $K_{\text{фф}}$  и “фронт–тыл”  $K_{\text{фт}}$  и т.д. Отсутствие данных уравнений затрудняет прогноз характеристик и проектирование ВСП и векторно-скалярных антенн с заданными параметрами, соответственно, затруднительно выполнить оптимизацию их характеристик под поставленные задачи.

Некоторые теоретические основы ВСП изложены в классических работах по электроакустике [5, 6] (на примере электрически комбинированных микрофонных систем, использованных в 30–40-х годах в сфере звукозаписи и звукоусиления), а также в более поздних работах [3, 7, 8]. Экспериментально установлено, что, комбинируя электрические звенья (суммируя выходные напряжения) ненаправленного приемника и приемника с ХН типа “восьмерка” (приемника давления и градиента давления), можно сформировать ХН приема типа кардиоида в некоторой ограниченной полосе частот (около 1 октавы). При этом появляется необходимость компенсации разности фаз между сигналами двух разных типов приемников (давления и градиента давления, по аналогии с кардиоидным излучателем из [9]), которое обычно решается путем введения компенсирующей временной задержки в электрический сигнал одного из приемников. Однако, представленные в [5–8] теоретические основы не формулируют уравнений (аналитических выражений) АЧХ и других электроакустических характеристик при такой реализации фазосдвигающей цепочки.

В [5–8] рассматриваются только приемные системы, состоящие из однотипных приемников с идентичными амплитудными и фазовыми характеристиками. В [3] для случая неидентичных характеристик приемников рассматриваются системы типа диполь, но не рассматриваются ВСП типа триполь.

В настоящей работе получено уравнение чувствительности ВСП типа триполь с временной задержкой сигнала монополя, состоящего из трех ненаправленных однотипных приемников звукового давления, при этом уравнение выведено для случаев идентичных и неидентичных амплитудных и фазовых характеристик всех составляющих приемников. Для ВСП с идентичными элементами получены уравнения всех основных электроакустических характеристик, проведен анализ предельных значений частотного диапазона эффективного однонаправленного приема (формирования однонаправленной характеристики направленности, близкой к кардиоиде) и предложен способ его расширения в 1.5 раза.



**Рис. 1.** Расположение приемников, образующих ВСП типа триполь, и принципиальная схема обработки их сигналов (а) без инвертирования сигнала монополя и (б) с инвертированием; 1 – инвертор; 2 – сумматор; 3 – усилитель; 4 – линия временной задержки.

**2. УРАВНЕНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ТРИПОЛЯ**

Пусть ВСП типа триполь состоит из трех приемников звукового давления, расположенных по одной оси на расстоянии  $d/2$  друг от друга. Расположение элементов ВСП и принципиальная схема обработки их сигналов показана на рис. 1. Центральный приемник расположен в начале координат (нулевой точке оси  $Ox$ ), назовем его монополем. Два крайних приемника соединены встречно (сигнал приемника  $d_2$  вычитается из сигнала  $d_1$ ) и образуют диполь с ХН типа восьмерка (приемник градиента звукового давления). Сигнал диполя усиливается и суммируется с сигналом монополя, предварительно пропущенным через линию временной задержки. При этом, если сигнал монополя не инвертируется (рис. 1а), то максимум чувствительности триполя будет направлен в положительном направлении оси  $Ox$ , а если инвертируется (рис. 1б) – в отрицательном.

Рассмотрим работу ВСП и формирование им ХН типа кардиоида в поле падающей под углом  $\theta$  плоской гармонической звуковой волны, в которой давление  $\dot{p}$  изменяется по закону  $\dot{p} = p_m e^{j\omega t}$ . Комплексный коэффициент передачи приемника определяется как отношение выходного напряжения к действующему звуковому давлению [6] и может быть записан в показательной форме:

$$\dot{S} = \frac{\dot{u}}{\dot{p}}, \quad \dot{S} = |\dot{S}| e^{j\varphi} = M e^{j\varphi}, \tag{1}$$

где  $\dot{u}$  – комплексное выходное напряжение на холостом ходу [мВ];  $M$  – амплитудно-частотная характеристика приемника, т.е. АЧХ [мВ/Па];  $\varphi$  – ФЧХ приемника [рад].

Согласно (1), комплексное напряжение  $\dot{u}$  на выходе каждого элемента ВСП описывается выражениями:

$$\begin{aligned} \dot{u}_m &= M_m p_m e^{j\omega t} e^{j\varphi_m}, \\ \dot{u}_{d1} &= M_{d1} p_m e^{j\omega t} e^{j\varphi_{d1}} e^{\frac{jkd}{2} \cos \theta}, \end{aligned}$$

$$\dot{u}_{d2} = M_{d2} p_m e^{j\omega t} e^{j\varphi_{d2}} e^{-\frac{jkd}{2} \cos \theta},$$

где  $M_m, M_{d1}, M_{d2}$  – АЧХ приемников  $m, d_1, d_2$  [мВ/Па];  $p_m$  – амплитуда давления падающей волны [Па];  $e^{j\omega t}$  – фазовый множитель волны в начальный момент времени  $t$ ;  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота [рад/с],  $f$  – частота [Гц];  $\varphi_m, \varphi_{d1}, \varphi_{d2}$  – ФЧХ приемников  $m, d_1, d_2$  [рад];  $d$  – расстояние между приемниками  $d_1$  и  $d_2$ , т.е. база диполя [м];  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число [рад/м],  $kd$  – волновой размер ВСП [рад];  $\theta$  – угол падения звуковой волны относительно оси  $Ox$  [град].

Теоретически ХН типа кардиоида записывается в виде  $R(\theta) = \alpha + \beta \cos \theta$  (“улитка Паскаля” [10]), где  $\alpha$  и  $\beta$  – коэффициенты, изменяющиеся в пределах от 0 до 1. При равенстве коэффициентов  $\alpha = \beta = 0.5$  для кардиоиды наблюдается снижение в 2 раза чувствительности  $M(90^\circ)$  с фланга при падении волны под углом  $\theta = 90^\circ$  и отсутствие приема  $M(180^\circ) = 0$  с тыла при падении  $\theta = 180^\circ$ . Для формирования таким триполем ХН типа кардиоида суммируемые сигналы монополя и диполя должны быть синфазны и равны по амплитуде. Однако, во-первых, диполь регистрирует градиент давления, который отстает по фазе от принимаемого монополем давления на угол  $\pi/2$ , а во-вторых, диполь и монополь имеют принципиально разные амплитудные характеристики, причем чувствительность диполя в рабочем диапазоне частот линейно уменьшается с понижением частоты.

Для компенсации разности чувствительности в сигнал диполя должно вводиться некоторое усиление  $K$ , свойства которого будут рассмотрены в следующем разделе.

Разницу фаз между сигналами монополя и диполя можно компенсировать разными способами. Наиболее предпочтительным представляется

применение преобразования Гилберта [11] к сигналу диполя, что позволяет компенсировать разницу фаз во всей рассматриваемой частотной области и расширить частотный диапазон направленного приема. Однако на практике это не всегда удобно, поэтому часто компенсация разности фаз реализуется введением дополнительной временной задержки  $\tau_m$  в сигнал монополя. Такой способ проще реализуется на практике, но полностью компенсирует разность фаз только на одной частоте, зависящей от величины задержки и волнового размера ВСП, т.е. идеальная кардиоида будет формироваться только на одной частоте, а направленный прием будет осуществляться в ограниченном диапазоне вокруг этой частоты формирования кардиоиды.

Пропустим сигнал монополя через линию временной задержки. Через время  $\tau_m$  [с] фаза сигнала  $\varphi$  элементов ВСП изменится на  $\varphi = \omega\tau_m$  [рад]. Таким образом, при введении задержки в сигнал монополя и усиления сигнала диполя, суммарное комплексное напряжение  $\dot{u}_{dm}$  на выходе триполя имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{dm} &= (\dot{u}_{d1} - \dot{u}_{d2})Ke^{-j\omega\tau_m} \pm \dot{u}_m = K\dot{u}_d e^{-j\omega\tau_m} \pm \dot{u}_m = \\ &= KM_{d1}p_m e^{j(\omega t + \varphi_{d1} + \frac{kd}{2} \cos\theta - \omega\tau_m)} - \\ &- KM_{d2}p_m e^{j(\omega t + \varphi_{d2} - \frac{kd}{2} \cos\theta - \omega\tau_m)} \pm M_m p_m e^{j(\omega t + \varphi_m)}. \end{aligned}$$

Вынесем  $p_m$  за скобки, нормируем на чувствительность монополя  $M_m$ , переписываем комплексное число из показательной в тригонометрическую форму с помощью формулы Эйлера, выполняем ряд тригонометрических операций и разделяем вещественную и мнимую части. В результате после простых алгебраических преобразований получаем суммарное комплексное напряжение на выходе триполя  $\dot{u}_{dm}$ :

$$\dot{u}_{dm} = M_m p_m (A + jB), \tag{2}$$

где

$$A = K \frac{M_{d1}}{M_m} \cos(X) - K \frac{M_{d2}}{M_m} \cos(Y) \pm \cos(Z),$$

$$B = K \frac{M_{d1}}{M_m} \sin(X) - K \frac{M_{d2}}{M_m} \sin(Y) \pm \sin(Z),$$

$$X = \omega t + \varphi_{d1} + \frac{kd}{2} \cos\theta - \omega\tau_m;$$

$$Y = \omega t + \varphi_{d2} - \frac{kd}{2} \cos\theta - \omega\tau_m; \quad Z = \omega t + \varphi_m.$$

Чувствительность любого приемника определяется [5, 6], как

$$M = \frac{u_{эф}}{p_{эф}} = \frac{u}{p} = \frac{|\dot{u}|}{|\dot{p}|} = \frac{|\dot{u}|}{p_m}, \tag{3}$$

где  $u_{эф}$  и  $p_{эф}$  – эффективные значения выходного напряжения приемника и звукового давления,  $u$  и  $p$  – действующие значения.

Найдем модуль комплексного выходного напряжения ВСП  $\dot{u}_{dm}$  (2) и, подставив его в (3), определим АЧХ ВСП  $M_{dm}$ :

$$\begin{aligned} M_{dm} &= \frac{M_m p_m \sqrt{A^2 + B^2}}{p_m} = \\ &= M_m \left[ \left( K \frac{M_{d1}}{M_m} \right)^2 + \left( K \frac{M_{d2}}{M_m} \right)^2 + 1 - 2K^2 \times \right. \\ &\times \frac{M_{d1}}{M_m} \frac{M_{d2}}{M_m} \cos(X - Y) \pm 2K \frac{M_{d1}}{M_m} \cos(X - Z) \mp \\ &\left. \mp 2K \frac{M_{d2}}{M_m} \cos(Y - Z) \right]^{0.5}. \end{aligned} \tag{4}$$

Уравнение (4) является уравнением АЧХ  $M_{dm}$  ВСП типа триполь для общего случая произвольных соотношений АЧХ и ФЧХ его элементов, в том числе при возможной неидентичности их характеристик. Если характеристики элементов ВСП идентичны, т.е.  $M_{d1} = M_{d2} = M_m$  и  $\varphi_{d1} = \varphi_{d2} = \varphi_m$ , то АЧХ  $M_{dm}$  ВСП можно записать в более простом виде:

$$M_{dm} = M_m \sqrt{1 + 4K \sin\left(\frac{kd}{2} \cos\theta\right) \left( K \sin\left(\frac{kd}{2} \cos\theta\right) \pm \sin(\omega\tau_m) \right)}. \tag{5}$$

Из (5) получим все основные электроакустические характеристики ВСП типа триполь с идентичными АЧХ и ФЧХ его элементов: уровень неравномерности чувствительности  $\Delta N$  (6), характеристику направленности  $R$  (7), уровень

перепада чувствительности (коэффициент деления) “фронт–фланг”  $K_{фф}$  (8) и “фронт–тыл”  $K_{фт}$  (9). Фазочастотную характеристику  $\varphi_{dm}$  (10) найдем из (2) как арктангенс отношения мнимой части к действительной.

$$\Delta N = \frac{M(\theta, kd)}{M(0^\circ, 1)} = \sqrt{\frac{1 + 4K \sin\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) \left(K \sin\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) \pm \sin(\omega\tau_m)\right)}{1 + 4K \sin\left(\frac{1}{2}\right) \left(K \sin\left(\frac{1}{2}\right) \pm \sin(\omega\tau_m)\right)}}, \quad (6)$$

$$R = \frac{M(\theta)}{M(0^\circ)} = \sqrt{\frac{1 + 4K \sin\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) \left(K \sin\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) \pm \sin(\omega\tau_m)\right)}{1 + 4K \sin\left(\frac{kd}{2}\right) \left(K \sin\left(\frac{kd}{2}\right) \pm \sin(\omega\tau_m)\right)}}, \quad (7)$$

$$K_{\text{фф}} = 20 \lg \frac{M(0^\circ)}{M(90^\circ)} = 20 \lg \sqrt{1 + 4K \sin\left(\frac{kd}{2}\right) \left(K \sin\left(\frac{kd}{2}\right) \pm \sin(\omega\tau_m)\right)}, \quad (8)$$

$$K_{\text{фт}} = 20 \lg \frac{M(0^\circ)}{M(180^\circ)} = 20 \lg \sqrt{\frac{1 + 4K \sin\left(\frac{kd}{2}\right) \left(K \sin\left(\frac{kd}{2}\right) \pm \sin(\omega\tau_m)\right)}{1 - 4K \sin\left(\frac{kd}{2}\right) \left(-K \sin\left(\frac{kd}{2}\right) \pm \sin(\omega\tau_m)\right)}}, \quad (9)$$

$$\Phi_{\text{дм}} = \frac{K \sin\left(\omega t + \frac{kd}{2} \cos \theta - \omega\tau_m\right) - K \sin\left(\omega t - \frac{kd}{2} \cos \theta - \omega\tau_m\right) \pm \sin(\omega t)}{K \cos\left(\omega t + \frac{kd}{2} \cos \theta - \omega\tau_m\right) - K \cos\left(\omega t - \frac{kd}{2} \cos \theta - \omega\tau_m\right) \pm \cos(\omega t)}. \quad (10)$$

Эти же электроакустические характеристики для ВСП с неидентичными АЧХ и ФЧХ элементов можно получить аналогичным образом из (2) и (4).

### 3. ЧАСТОТНЫЙ ДИАПАЗОН ЭФФЕКТИВНОГО ОДНОНАПРАВЛЕННОГО ПРИЕМА ТРИПОЛЯ

Рассмотрим направленные свойства ВСП типа триполь с идентичными приемниками. Как отмечалось выше, идеальная кардиоида может сформироваться только при суммировании синфазных сигналов с равными амплитудами. Очевидно, что, реализуя фазосдвигающую цепочку путем введения задержки  $\tau_m$ , получим синфазные сигналы только на некоторой частоте  $f_1$ , на которой будет компенсироваться разность фаз  $\pi/2$  между диполем и монополем (между градиентом давления и давлением). Назовем  $f_1$  частотой формирования кардиоиды:

$$k_1 d = \frac{\pi d}{2c_0 \tau_m} \quad \text{или} \quad f_1 = \frac{1}{4\tau_m}. \quad (11)$$

Однако, в некоторой частотной области вокруг частоты  $f_1$  триполь будет обладать однонаправленными свойствами, что позволяет решать целый ряд практически важных задач [4]. Введем понятие частотный диапазон эффективного однонаправленного приема и будем под ним понимать тот частотный диапазон, в котором выполняются условия  $K_{\text{фф}} \geq A$  и  $K_{\text{фт}} \geq B$ , где  $A$  и  $B$  – заданные в

дБ значения уровня перепада чувствительности (коэффициентов деления). Для определения частотного диапазона эффективного однонаправленного приема необходимо решить систему из неравенств  $K_{\text{фф}} \geq A$  и  $K_{\text{фт}} \geq B$ , подставив в них (8) и (9). Однако, в процессе упрощения этих неравенств появляются трансцендентные элементы типа  $(x \sin x)$ , что не позволяет определить частотный диапазон эффективного однонаправленного приема в общем виде для любых значений перепадов  $A$  и  $B$ . В табл. 1 приведены значения коэффициентов деления для типовых ХН [7]. Будем считать, что эффективный направленный прием осуществляется при формировании ХН по бокам не шире субкардиоиды и с задним лепестком чувствительности не более чем у гиперкардиоиды, что соответствует значениям перепадов чувствительности  $K_{\text{фф}} \geq 2.5$  и  $K_{\text{фт}} \geq 6$ .

Частотный диапазон эффективного направленного приема триполя в абсолютном исчислении зависит, прежде всего, от величины задержки  $\tau_m$ . По этой причине частотный диапазон удобно выражать в долях частоты формирования кардиоиды  $(kd/k_1 d)$ . Для формирования “кардиоиды” на частоте  $k_1 d$  необходимо выровнять амплитуды сигналов диполя и монополя. Это можно сделать путем усиления сигнала диполя, причем одним из двух способов (в одном из двух режимов): в режиме *частотно-независимого* усиления с коэффициентом  $K = (1/k_1 d) = \text{const}$ , где  $k_1 d$  определяется из (11), или же в режиме *частотно-зависимого* усиления

**Таблица 1.** Значения теоретически ожидаемых перепадов уровня чувствительности “фронт–фланг”  $K_{фф}$  и “фронт–тыл”  $K_{фт}$  для разных характеристик направленности.

Наименование ХН	Теоретически ожидаемый уровень перепада чувствительности (коэффициент деления) “фронт–фланг” $K_{фф}$ и “фронт–тыл” $K_{фт}$ , дБ	
	$K_{фф} = 20 \lg \frac{M(0^\circ)}{M(90^\circ)}$	$K_{фт} = 20 \lg \frac{M(0^\circ)}{M(180^\circ)}$
Ненаправленная	0	0
Субкардиоида	2.5	6
Кардиоида	6	$\infty$
Суперкардиоида	8.5	12
Гиперкардиоида	12	6
Восьмерка	$\infty$	0

ния  $K = (1/kd)$ , что позволит выровнять амплитуды сигналов во всем рабочем диапазоне частот диполя. Стоит отметить, что реализация усилителя с частотно-зависимым коэффициентом усиления  $K = (1/kd)$  и частотно-независимой ФЧХ  $\varphi = 0$  является нетривиальной задачей, решение которой возможно, но не рассматривается в рамках настоящей работы.

При заданных  $K_{фф} \geq 2.5$  и  $K_{фт} \geq 6$ , частотный диапазон эффективного направленного приема для случая частотно-независимого  $K = (1/k_d)$  и частотно-зависимого  $K = (1/kd)$  усиления сигнала диполя составят около 1.5 октав и почти 2 октав соответственно. В долях частоты формирования кардиоиды частотный диапазон будет определен неравенствами (12) и (13) соответственно:

$$0.5211 \leq \frac{kd}{k_d d} \leq 1.5446, \quad (12)$$

$$(0.4085 + 4n) \leq \frac{kd}{k_d d} \leq (1.5915 + 4n), \quad (13)$$

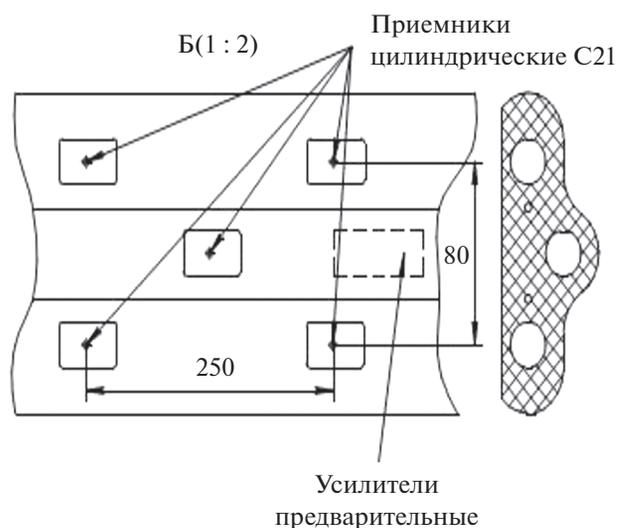
где  $n = 0, 1, 2, \dots$

Неравенства (12) и (13) справедливы при условии, что расчетный частотный диапазон эффективного однонаправленного приема триполю находится в границах рабочего диапазона диполя, т.е. при формировании диполем ХН, близкой к восьмерке [3]. Обратим внимание, что кардиоида в режиме частотно-зависимого усиления будет формироваться периодически с шагом  $4n$  радиан.

#### 4. ПРИМЕР РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕКТОРНО-СКАЛЯРНОГО ПРИЕМНИКА

Выполним сравнение характеристик направленности, полученных расчетным путем и экс-

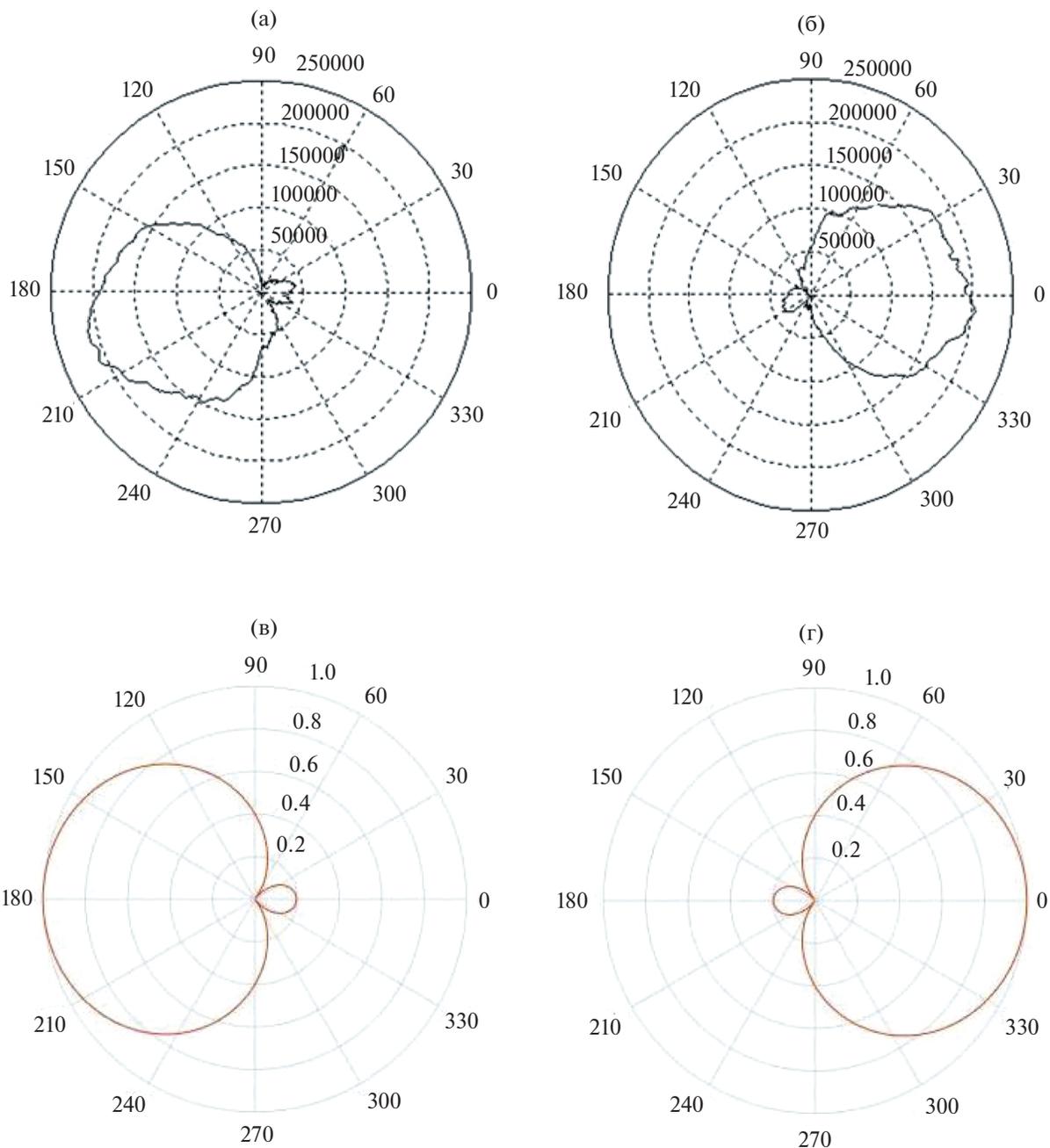
периментально. Расчеты проведены по приведенным выше формулам (7)–(9) и (12), (13). Для экспериментальной оценки использовались триполи, входящие в состав эластичной протяженной буксируемой 105-канальной гидроакустической векторно-скалярной антенны. Технические и акустические характеристики этой антенны и ВСП приведены в [2, 12, 13]. При выполнении натурных экспериментов установлено, что векторно-скалярная антенна обеспечивает подавление сигналов, пришедших с противоположного направления, на 20–24 дБ, что свидетельствует об однонаправленном приеме и раздельном выделении сигналов, принимаемых в режиме буксировки с “левого” и “правого” бортов. Эти оценки выполнены в диапазоне частот вблизи 1.5 кГц. Представляет интерес теоретическое прогнозирование возможных характеристик



**Рис. 2.** Планарная схема ВСП в составе гидроакустической антенны (слева). Справа приведено ортогональное сечение антенны.

**Таблица 2.** Верхняя граничная частота “диполя”  $f_{д-в}$  при разных значениях волнового размера базы диполя

Волновой размер $kd$ , рад м	Верхняя граничная частота $f_{д-в}$ , Гц
$\pi/2$	1400
$\pi$	2800
$1.2\pi$	3360



**Рис. 3.** ХН ВСП типа “триполь” на частоте 1.5 кГц: (а) – экспериментальная, сигнал монополя вычитается из сигнала диполя; (б) – экспериментальная, сигнал монополя складывается с сигналом диполя; (в) – расчетная, сигнал монополя вычитается из сигнала диполя; (г) – расчетная, сигнал монополя складывается с сигналом диполя.

**Таблица 3.** Сравнение экспериментальных и расчетных уровней перепада чувствительности “фронт–фланг” и “фронт–тыл”

Экспериментальные данные		Результаты расчета	
(а)	$K_{\text{фф}} = 20 \lg \left( \frac{170\,000}{60\,000} \right) = 9 \text{ дБ}$ $K_{\text{фрт}} = 20 \lg \left( \frac{170\,000}{35\,000} \right) = 13.7 \text{ дБ}$	$K_{\text{фф}} = 20 \lg \left( \frac{1}{0.4} \right) = 8 \text{ дБ}$ $K_{\text{фрт}} = 20 \lg \left( \frac{1}{0.2} \right) = 14 \text{ дБ}$	(в, г)
(б)	$K_{\text{фф}} = 20 \lg \left( \frac{210\,000}{80\,000} \right) = 8.4 \text{ дБ}$ $K_{\text{фрт}} = 20 \lg \left( \frac{210\,000}{40\,000} \right) = 14.4 \text{ дБ}$		

**Таблица 4.** Частотный диапазон эффективного направленного приема ВСП типа триполь с идентичными АЧХ и ФЧХ элементов при разных частотах формирования кардиоиды  $f_1$  для двух способов (режимов) усиления сигнала диполя.

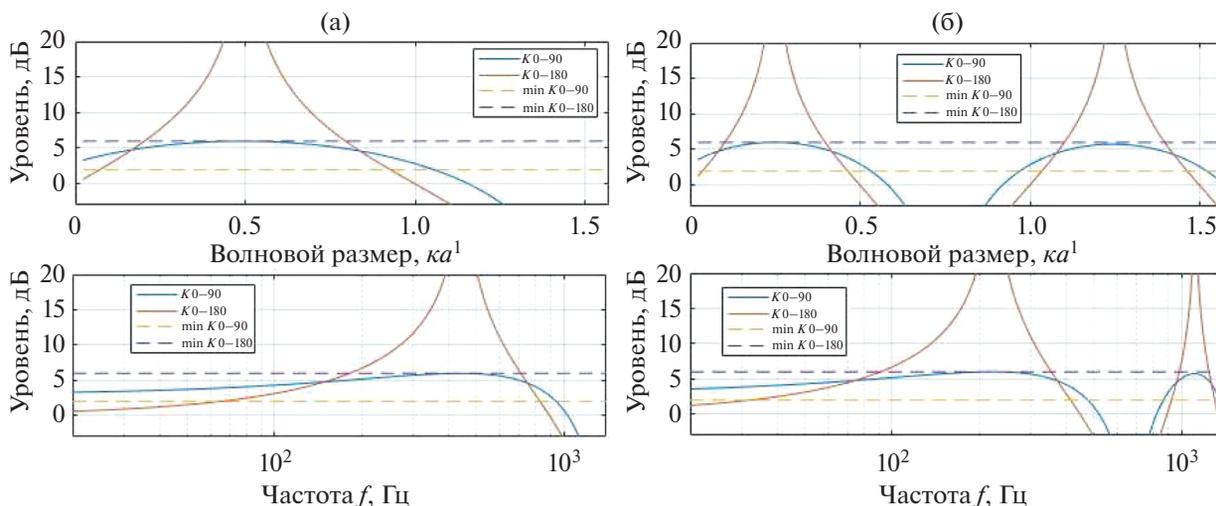
Частота формирования “кардиоиды”		Частотный диапазон, Гц, эффективного направленного приема ВСП типа “триполь” при разных режимах усиления сигнала “диполя”					
$k_1 d$ , рад м	$f_1$ , Гц	Режим 1. Частотно-независимое усиление $K = (1/k_1 d)$			Режим 2. Частотно-зависимое усиление $K = (1/k d)$		
		0.1	89	47	...	138	36
					394	...	499
					751	...	856
					1465	...	1570
0.25	223	116	...	345	91	...	355
					984	...	1248
					1876	...	2140
0.5	446	233	...	689	182	...	710
					1968	...	2496
1	893	465	...	1379	365	...	1421
1.7	1500	782	...	2317	613	...	2387
2	1785	930	...	2757	729	...	2841

ВСП с заданными свойствами в широком диапазоне частот. Полученные выше расчетные соотношения это позволяют.

Схема ВСП в составе гидроакустической векторно-скалярной антенны показана на рис. 2. Четыре приемника размещены под углом 45° и образуют две ортогональные дипольные группы. Пятый приемник (монополь) располагается на пересечении двух диагоналей – в фазовом центре ВСП. Длина диагонали по центрам приемников составляет  $d = 263$  мм (назовем это расстояние базой ВСП). Схема обработки соответствует рис. 1а, дополнительное усиление в электронной схеме

диполя отсутствует. Временная задержка (выполняется в компьютере при обработке сигналов) в сигнале монополя выбрана  $\tau_m = 0.17$  с, что соответствует частоте формирования “кардиоиды” равной  $f_1 = 1500$  Гц.

Каждая дипольная группа формирует ХН “восьмерка” в некотором диапазоне частот, назовем его рабочим частотным диапазоном диполя. Рабочий частотный диапазон дипольных групп определяется базой ВСП. При этом, в частотном диапазоне, соответствующем волновым размерам  $kd$  диполя от  $kd \approx \pi/2$  до  $kd \approx \pi$  (от  $d \approx \lambda/4$  до



**Рис. 4.** Перепады чувствительности (коэффициенты деления) “фронт–фланг”  $K_{\text{фф}}$  и “фронт–тыл”  $K_{\text{фт}}$  триполя (в зависимости от частоты  $f$  или волнового размера  $kd$ ) при частотно-зависимом режиме усиления сигнала диполя  $K = (1/kd)$  для частоты формирования кардиоиды: (а)  $f_1 = 446$  Гц;  $k_1d = 0.5$  рад м; (б)  $f_1 = 223$  Гц;  $k_1d = 0.25$  рад м.

$d \approx \lambda/2$ ), происходит расширение ХН, затем, начиная с частоты  $kd \approx 1.2\pi$  (или  $d \approx 0.6\lambda$ ), возникают небольшие “провалы” в направлении оси диполей ( $\theta = 0^\circ$ ), и к частоте  $kd \approx 1.7\pi$  ( $d \approx 0.85\lambda$ ) ХН “распадается” на четырехлепестковую, лепестки которой в каждом из квадрантов направлены под углами  $\pm 60^\circ$  относительно первоначального направления [3]. В зависимости от задачи, верхняя граничная частота  $f_{\text{д-в}}$  рабочего частотного диапазона диполя может определяться волновым размером в диапазоне  $kd = \pi/2 \dots 1.2\pi$ . В табл. 2 показаны частоты, соответствующие указанным волновым размерам для базы  $d = 263$  мм при скорости звука в воде  $c_0 = 1475$  м/с.

На рис. 3 показаны экспериментальная (рис. 3а, 3б) и расчетная (рис. 3в, 3г) ХН ВСП типа триполь на частоте 1.5 кГц. Видно, что совпадают и форма ХН, и уровни перепада чувствительности (табл. 3).

Видно, что во всех ХН наблюдаются задние лепестки, несмотря на то, что частота формирования кардиоиды  $f_1$  выбрана 1.5 кГц. Это объясняется тем, что в сигнал диполя не введено дополнительное усиление и при синфазности на данной частоте суммируемые сигналы диполя и монополя отличаются по уровню. Строго говоря, для систем без дополнительного усиления сигнала диполя идеальная кардиоида может быть сформирована только на частоте  $kd = 1$ .

В табл. 4 представлены результаты расчетов по (12) и (13) частотного диапазона эффективного однонаправленного приема для разных частот формирования кардиоиды  $f_1$ , т.е. предельные зна-

чения направленного приема системой “триполь” для разных режимов усиления сигнала диполя. Из таблицы следует, что для режима с частотно-зависимым усилением (система 2) кардиоида “периодически” образуется в разных частотных диапазонах. Отметим, что при этом изменяется направление максимума ХН.

На рис. 4 показаны графики АЧХ коэффициентов перепада чувствительности “фронт–фланг”  $K_{\text{фф}}$  и “фронт–тыл”  $K_{\text{фт}}$  при частотно-зависимом режиме усиления сигнала диполя  $K = (1/kd)$  в сравнении с минимальными уровнями перепада чувствительностями 2.5 дБ ( $\min K_{0-90}$ ) и 6 дБ ( $\min K_{0-180}$ ), при которых обеспечивается эффективный однонаправленный прием. Графики коэффициентов перепада чувствительности представлены в зависимости от частоты  $f$  и волнового размера  $kd$  и иллюстрируют некоторые данные из табл. 4 при частотно-зависимом усилении (режим 2) для частот формирования кардиоиды  $f_1 = 446$  Гц (волновой размер  $k_1d = 0.5$  рад м) и  $f_1 = 223$  Гц (волновой размер  $k_1d = 0.25$  рад м).

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе впервые сформулированы общие уравнения для расчета амплитудно-частотной (т.е. частотной характеристики чувствительности) и фазочастотной характеристик ВСП типа триполь, состоящего из одностипных ненаправленных приемников звукового давления с произвольными (не обязательно равными друг другу) амплитудно-фазовыми характеристиками. Выведены аналитические соотношения для всех ос-

новых электроакустических характеристик триполя.

Показана принципиальная возможность расширения в 1.5 раза (с 1.5 до 2 октав) частотного диапазона эффективного направленного приема системы триполь (формирования характеристики направленности, близкой к кардиоиде) путем специального частотно-зависимого усиления  $K = (1/kd)$  сигнала диполя.

С помощью сформулированных выражений проведен расчет электроакустических характеристик реального гидроакустического векторно-скалярного приемника. Показано, что результаты расчета хорошо согласуются с экспериментальными данными. Теоретически определены границы частотного диапазона эффективного направленного приема.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Urick R.J.* Principles of Underwater Sound. McGraw-Hill, 1975.
2. *Глебова Г.М., Аверьянов А.В., Кузнецов Г.Н.* Экспериментальное исследование характеристик направленности векторно-скалярной антенны // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 5. С. 681–694.
3. *Скребнев Г.К.* Комбинированные гидроакустические приемники. СПб.: Элмор, 1997.
4. *Белова Н.И., Кузнецов Г.Н.* Сравнение однонаправленного приема сигналов в волноводе с использованием линейных векторно-скалярных и комбинированных антенн // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 2. С. 255–267.
5. *Фурдуев В.В.* Акустические основы вещания. М.: Связьиздат, 1960.
6. *Вахитов Я.Ш.* Теоретические основы электроакустики и электроакустическая аппаратура. М.: Искусство, 1982.
7. *Вахитов Ш.Я., Вахитов Я.Ш.* Микрофоны. Телефоны. Гарнитур. Теория, расчет, проектирование, эксплуатация. СПб.: СПбГУКиТ, 2010.
8. *Kleiner M.* Electroacoustics. CRC Press, 2013.
9. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
10. *Вахитов Ш.Я.* Современные микрофоны. Теория, проектирование. СПб: СПбГУКиТ, 2003.
11. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., исправленное. М.: Наука, 1986.
12. *Корчак В.Ю., Кузнецов Г.Н., Малышев В.Н.* Построение гидроакустических систем с использованием векторно-скалярных модулей и антенн // Фундаментальная наука – военно-морскому флоту. 2018. Т. 3. С. 41–55.
13. *Каришнев Н.С., Полканов К.И., Белова Н.И., Кузнецов Г.Н.* Однозначное пеленгование целей протяженной антенной со скалярными и векторно-скалярными модулями // Гидроакустика. 2012. Вып. 15. С. 42–47.
14. *Брюхов А., Бородавкин А.* Авиационные радиогидроакустические буи // Зарубежное военное обозрение. 1987. Вып. 6. С. 53–57.
15. *Гордиенко В.А., Краснописцев Н.В., Некрасов В.Н., Торопов В.Н.* Локализации источников излучения на корпусе корабля при одновременном использовании комбинированного приемника и методов спектрального анализа с высоким разрешением // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 2. С. 179–191.
16. *Белов А.И., Кузнецов Г.Н.* Пеленгование и подавление векторно-скалярных звуковых сигналов в мелком море с учетом их корреляционной и модовой структуры // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 3. С. 308–317.
17. *Казначеев И.В., Кузнецов Г.Н., Кузькин В.М., Персёлков С.А.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 1. С. 33–45.
18. *Горелов А.А., Смаришев М.Д.* Моделирование алгоритмов обработки процессов на выходе каналов комбинированного приемника и комбинированной антенны // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 2. С. 250–256.
19. *Михайлов С.Г.* Пеленгование векторно-скалярным приемником в поле анизотропной помехи // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 2. С. 170–180.

## РЕГИСТРАЦИЯ СИГНАЛОВ ДЫХАНИЯ ЧЕЛОВЕКА С ВИСОЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ ГОЛОВЫ

© 2021 г. В. И. Миргородский<sup>а</sup>, \*, В. В. Герасимов<sup>а</sup>, А. В. Герус<sup>а</sup>, С. В. Пешин<sup>а</sup>, С. М. Жучкова<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Фрязинский филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук, пр. Введенского 1, Фрязино, Московская обл., 141190 Россия

\*e-mail: vim288@ms.ire.rssi.ru

Поступила в редакцию 19.12.2019 г.

После доработки 12.04.2021 г.

Принята к публикации 23.04.2021 г.

На основе использования широкополосных пьезоэлектрических датчиков, находящихся в контакте с висками испытуемых, обнаружены акустические сигналы, вызываемые дыханием человека. Данные сигналы обладают высокой интенсивностью и более широким спектром частот, чем обычно регистрируемые дыхательные шумы на грудной клетке человека. Это обеспечивает условия для относительно технически несложной методики регистрации шумов дыхания, что может представлять ценность для целей медицинской диагностики и контроля состояния операторов ответственных производственных процессов.

*Ключевые слова:* дыхательные шумы, височная область, дыхательный ритм

**DOI:** 10.31857/S0320791921040109

### ВВЕДЕНИЕ

Акустический канал получения информации о физиологическом состоянии человека является, как хорошо известно, одним из наиболее доступных для оценки состояния его здоровья, поскольку для его осуществления путем прослушивания нередко достаточно обычных стетоскопов. Это определило большое разнообразие типов акустических методов регистрации и анализа дыхательных звуков [1–8] и их распространенность для диагностических целей.

Обычно, и это наиболее естественно, для прослушивания параметров дыхания используется расположение акустических датчиков на грудной клетке человека [3]. Наиболее полный обзор используемых при этом методов в русскоязычной литературе содержится в работе [3], а в англоязычной литературе в работах [9–12]. В частности, в работе [9] исследовалась возможность контроля кардиосигналов и сигналов дыхания путем регистрации звука из канала уха человека при расположении там микрофона.

В процессе наших исследований обнаружилось, что акустические сигналы, связанные с дыханием, могут наблюдаться и на голове человека, в частности, из височных областей. Исследованию этих сигналов и посвящена данная статья.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕТОДИКА

Эксперименты проводились в лабораторных условиях с клинически здоровыми испытуемыми, располагавшимися лежа на кушетке с закрытыми глазами. При этом дыхание осуществлялось через нос. Испытуемые с признаками респираторных заболеваний, препятствующих дыханию через нос, в экспериментах не участвовали.

На висках испытуемых с помощью эластичного бинта закреплялись акустические датчики, а над носом на расстоянии около 1 см располагался, без контакта с телом испытуемого, измерительный микрофон типа МК 102 RFT (рис. 1).

Электрические сигналы с выходов акустических приемников и микрофона регистрировались в памяти компьютера. В качестве чувствительных элементов акустических приемников использовались пластины из пьезокерамики толщиной 0.6 см и диаметром 1 см с первой резонансной частотой около 160 кГц. Диапазон рабочих частот акустических приемников простирался от 10 Гц до 110 кГц, при этом достигалась высокая чувствительность, примерно на 10 дБ меньшая предельно достижимой [13].

Регистрация сигналов осуществлялась с помощью АЦП типа Е14-140, темп сбора данных составлял 50 кГц. Эксперименты, как и в работе [14], длились обычно 30 мин, первые 15 мин ис-



**Рис. 1.** Испытуемый с акустическими приемниками и микрофоном.

пытуемые мотивировались на умственную работу – произнесение про себя таблицы умножения, а вторые 15 мин испытуемые мотивировались на релаксацию вплоть до засыпания. Более подробное описание экспериментальной методики приведено в работе [14].

Перед началом экспериментов испытуемые были осведомлены о предмете и процедуре исследования и подтверждали свое добровольное участие подписанием Информированного согласия. Протоколы экспериментов одобрены этической комиссией Института Высшей Нервной Деятельности и Нейрофизиологии РАН.

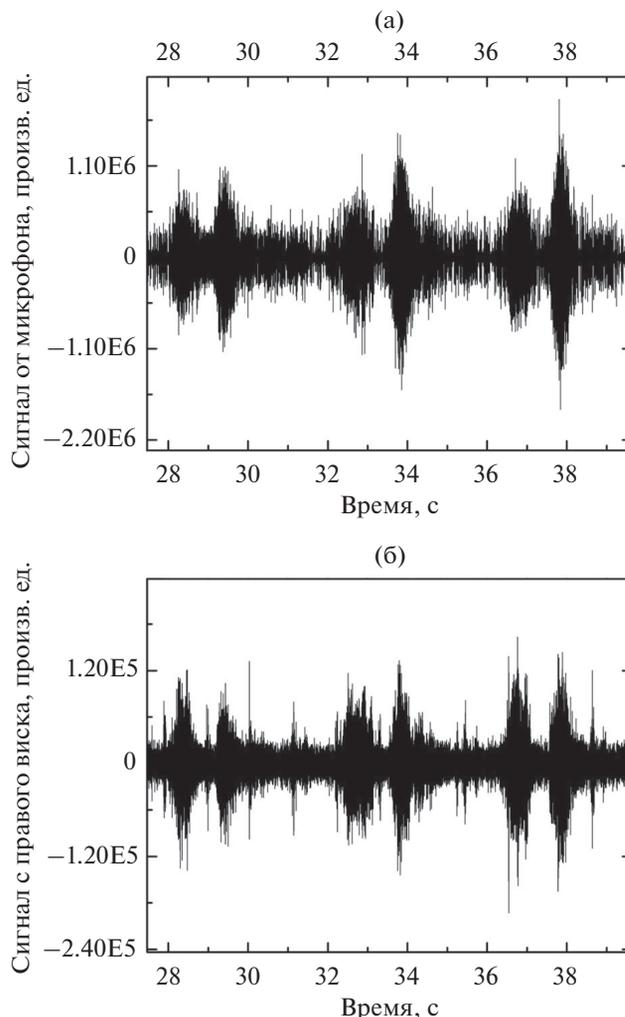
### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Было выполнено более 90 экспериментов. Типичный вид сигналов, получаемых при этом, представлен на рис. 2 и 3.

На рис. 2 наблюдаются синхронные области увеличения шума, следующие с периодом около 3–4 с, который характерен для дыхания человека. Визуальный анализ показал, что первая область повышенного шума соответствует вдоху, а вторая – выдоху. Видно, что зависимости, полученные от акустического приемника и микрофона, имеют подобный вид: на обеих зависимостях видны сигналы, соответствующие вдохам и выдохам испытуемого. Заметим, что на 29-й с амплитуда сигнала вдоха с акустического приемника была больше сигнала выдоха, в то время как вблизи 38-й с сигнал выдоха был либо равен, либо больше сигнала вдоха.

На рис. 3 представлены графики сигналов, полученных от акустических приемников, расположенных на висках испытуемого. Как видно, в этом случае наблюдаются сигналы, вид которых подобен представленному на рис. 2. Видны также и сигналы, связанные с пульсовой волной.

На графике рис. 4 содержится частотный спектр сигнала с левого виска, полученный в диапазоне 30 Гц–10 кГц. Поскольку сигналы справа



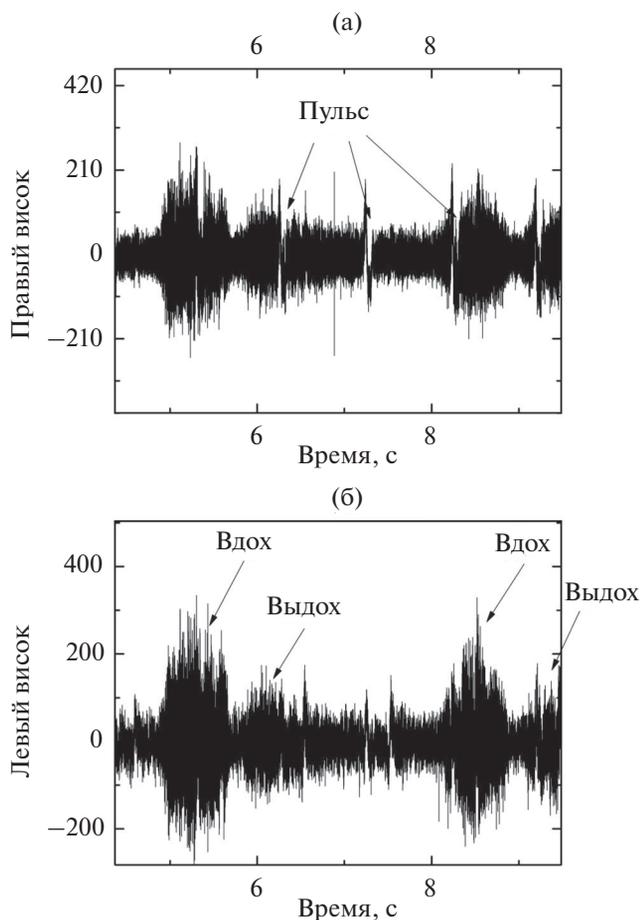
**Рис. 2.** Сигналы от акустического приемника (а) – от микрофона, (б) – правого виска. Произведена фильтрация исходных сигналов полосовым фильтром в полосе 700–2000 Гц.

и слева практически одинаковы, то приведены данные, относящиеся только к левому виску.

Как видно, спектр обладает сложной формой. Наибольшая частотная компонента имеет частоту около 2 кГц, имеются так же более слабые компоненты – на частотах около 200 Гц.

Интересная картина наблюдается при анализе огибающей дыхательных колебаний, полученных в процессе двухэтапного эксперимента (сначала счет 15 мин, затем релаксация 15 мин). Это иллюстрируется на графиках рис. 5, представляющих типичную ситуацию на левом виске.

Как видно из рис. 5а, наблюдается неравномерная картина дыхания – амплитуда регистрируемых звуков дыхания заметно изменяется во времени.

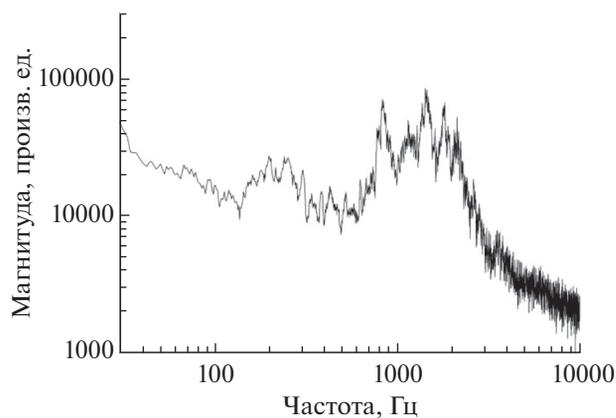


**Рис. 3.** Сигналы, полученные от приемников, расположенных на висках испытуемых. (а) – Сигнал от правого виска, (б) – сигнал от левого виска.

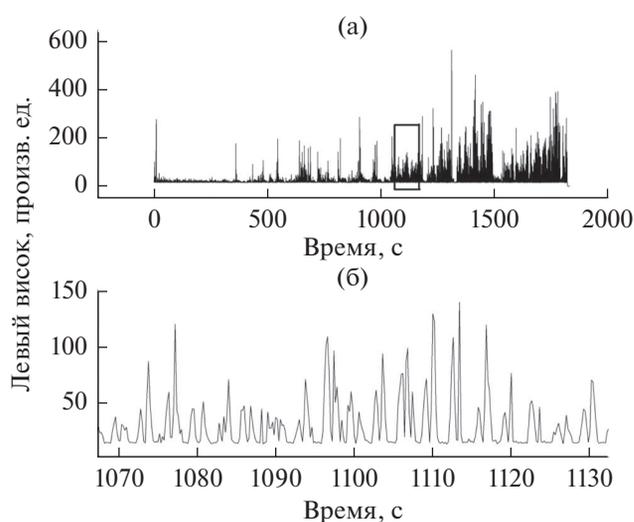
### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Выше представлены результаты регистрации акустических сигналов, связанных с жизнедеятельностью испытуемых, полученные при использовании в качестве зон съема висков. При этом на рис. 3 показано, что вызываемые дыханием акустические сигналы, снимаемые с левого и правого висков, подобны друг другу, что позволяет, по нашему мнению, на практике ограничиваться регистрацией сигналов от одной стороны.

Важным, по нашему мнению, обстоятельством является сложность наблюдаемых сигналов, связанных с дыханием. Как видно на графиках рис. 5, картина сигналов обладает заметной нерегулярностью актов дыхания. Это многообразие позволяет предполагать возможную диагностическую ценность такого способа регистрации параметров дыхания при оценке дыхательного ритма.



**Рис. 4.** Частотный спектр в диапазоне 30 Гц–10 кГц сигналов, приведенных на графиках рис. 3.



**Рис. 5.** Зависимость от времени огибающей сигнала, полученного от приемника, расположенного на левом виске. (а) – Общий вид сигнала в течение времени эксперимента 30 минут, (б) – фрагмент верхнего графика в более детальном масштабе и по времени и по амплитуде.

Таким образом, возможность регистрации звуков дыхания из височных областей головы человека может представлять практический интерес для непрерывного контроля параметров дыхания, в частности, у операторов в процессе выполнения ими их профессиональных обязанностей.

### ВЫВОДЫ

При использовании контактных пластинчатых акустических датчиков, расположенных на висках человека, обнаружены акустические сигналы, вызываемые дыханием человека.

Представляется, что такой прием акустических сигналов дыхания может представлять интерес как для целей медицинской диагностики, так и контроля состояния операторов ответственных производственных процессов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гринченко Н.Т., Макаренко А.А.* Специализированные пьезокерамические сенсоры для регистрации звуков жизнедеятельности человека // Акустичний Вісник. 2010. Т. 13. № 1. С. 11–16.
2. *Вовк И.В., Гринченко В.Т., Макаренко А.П.* Акустика дыхания и сердечной деятельности // Акуст. вестн. 2011. Т. 14. № 1. С. 3.
3. *Дьяченко А.И., Михайловская А.Н.* Респираторная акустика (Обзор) // Труды Института общей физики им. А.М. Прохорова. 2012. Т. 68. С. 136–181.
4. *Артемьев А.М., Макаренко А.П., Макаренко А.А.* Исследование эффективности электроакустических преобразователей электронных стетофонендоскопов // Акустичний Вісник. 2009. Т. 12. № 1. С. 3–10.
5. *Коренбаум В.И., Тагильцев А.А., Дьяченко А.И., Костин А.Е.* Сравнение характеристик акустических датчиков различных типов при регистрации дыхательных звуков на поверхности грудной клетки человека // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 4. С. 530–538.
6. *Аносов А.А., Ерофеев А.В., Пешков К.Ю., Щербатов М.И., Беляев Р.В., Мансфельд А.Д.* Совместное использование пассивной акустической и инфракрасной термометрии для контроля УВЧ-нагрева // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 6. С. 690–696.
7. *Аносов А.А., Ерофеев А.В., Мансфельд А.Д.* Использование акустотермометрии для определения температурного поля в предплечье человека // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 4. С. 551–556.
8. *Андреев В.Г., Грамович В.В., Выборов О.Н., Мартынюк Т.В., Родненков О.В., Руденко О.В.* Ударное возбуждение звука при схлопывании створок полулунных клапанов сердца // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 2. С. 232–240.
9. *Martin A., Voix J.* Ear audiowearable: Measurement of heart and breathing rates for health and safety monitoring // IEEE Trans. Biomed. Eng. 2018. V. 65. № 6. P. 1256–1263.
10. *Rao A., Ruiz J., Bao C., Roy S.* Acoustic methods for pulmonary diagnosis // IEEE Reviews in Biomedical Engineering. 2018. V. 12. P. 221–239. <https://doi.org/10.1109/RBME.2018.2874353>
11. *Pasterkamp H., Kraman S.S., Wodicka G.R.* Respiratory sounds: advances beyond the stethoscope // American journal of respiratory and critical care medicine. 1997. V. 156(3). P. 974.
12. *Dalmay F., Antonini M.T., Marquet P., Menier R.* Acoustic properties of normal chest // Eur. Respir. J. 1995. V. 8(10). P. 1761–1769.
13. *Миргородский В.И., Герус А.В., Герасимов В.В., Пешин С.В.* Чувствительность акустических приемников с пластинчатыми пьезопреобразователями звукового–ультразвукового диапазона // Успехи современной радиоэлектроники. 2015. № 12. С. 3.
14. *Миргородский В.И., Герасимов В.В., Пешин С.В.* Обнаружение новых акустических сигналов от головы человека // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 4. С. 437–442.

## АНАЛИЗ ГАРМОНИК СВИСТЯЩИХ ЗВУКОВ В ШУМАХ ФОРСИРОВАННОГО ВЫДОХА ЧЕЛОВЕКА

© 2021 г. М. А. Сафронова<sup>а</sup>, \*, А. Д. Ширяев<sup>а</sup>, В. И. Коренбаум<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН,  
ул. Балтийская 43, Владивосток, 690041 Россия

\*e-mail: safronova@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 08.07.2020 г.

После доработки 20.04.2021 г.

Принята к публикации 23.04.2021 г.

Спектральные гармоники свистящих звуков форсированного выдоха (СФВ), соответствующие целочисленному ряду, обнаружены над трахеей у 19 из 28 обследованных добровольцев. Проведен анализ состава, соотношения и распределения по поверхности грудной клетки спектральных гармоник СФВ, записанных 11-ю акустическими датчиками по поверхности грудной клетки, на выборках здоровых лиц ( $n = 9$ ) и больных респираторными заболеваниями ( $n = 10$ ). Наиболее вероятной причиной возникновения гармоник СФВ признана нелинейность в источнике их формирования, а предполагаемым механизмом – взаимодействие турбулентных вихрей воздушного потока с упругой стенкой центральных дыхательных путей бронхиального дерева человека.

*Ключевые слова:* шум, форсированный выдох, свистящие звуки, гармоники, статистический анализ, механизмы, нелинейность

DOI: 10.31857/S0320791921040122

### ВВЕДЕНИЕ

В медицинской функциональной диагностике для выявления нарушений вентиляции легких используют анализ потоко-объемных характеристик маневра форсированного выдоха [1]. В то же время при форсированном выдохе наблюдается и интенсивный шум, содержащий свистящие звуки – так называемые свисты форсированного выдоха (СФВ) [2].

По мнению многих исследователей, начиная с Р. Forgacs [3], СФВ потенциально применимы для диагностики бронхиальной обструкции, являющейся признаком таких распространенных заболеваний как бронхиальная астма и хроническая обструктивная болезнь легких. Однако до сих пор нет единого мнения о механизмах формирования СФВ, а также локализации их источников по уровням бронхиального дерева человека.

Известно несколько модельных представлений о механизмах формирования СФВ. Так, в серии работ Gavriely и Grotberg с соавторами [4–6] рассмотрены биомеханические аспекты формирования свистов. Выделяют 5 возможных моделей продуцирования свистов: 1) резонанс стенок дыхательных путей (ДП), возбуждаемых турбулентными пульсациями давления, 2) возбуждаемый турбулентным потоком резонатор Гельмгольца, 3) акустически стимулированный звук

вихрей, 4) резонанс стенок ДП, возбуждаемый срывающимися вихрями. 5) автоколебание стенок ДП [4]. Была разработана математическая модель флаттера [5, 6], в соответствии с которой при некоторой критической скорости в предварительно сплюсненной трубе наблюдается установление симметричных автоколебаний стенок. В отношении СФВ флаттер предположен основным механизмом [7, 8]. Для проверки этого предположения в работе [9] записывали трахеальные СФВ в газах с различной плотностью у пяти здоровых взрослых обследуемых. Было установлено, что плотность газа не влияет на частоту СФВ, и этот результат истолкован в качестве доказательства модели автоколебания стенок ДП. Тем не менее, авторы работ [4, 10, 11] полностью не исключают и механизм срыва вихрей в области пережатия просвета ДП в качестве возможного объяснения СФВ.

Конкурирующие модели формирования СФВ в результате срыва вихрей на бифуркациях бронхиального дерева выдвинули Schroter и Sudlow [12]. Эти авторы наблюдали турбулентные вихри на ветвлениях стеклянной модели бронхиального дерева (четыре генерации ветвления) в диапазоне чисел Рейнольдса от 50 до 4500. Позднее [13] турбулентные вихри на бифуркациях бронхиального дерева наблюдались на реалистичной модели и с

помощью технологии лазерной визуализации PIV. Hardin и Patterson [14] разработали теорию срыва вихрей на бифуркациях бронхиального дерева с числом Струхала около 0.3.

Был также предложен альтернативный кластер моделей срыва вихрей в окрестностях трахеи (трахея, главные и долевые бронхи). В работе [15] разработана численная модель, описывающая срыв вихрей на участке уменьшения просвета трубы с числами Струхала около 0.9. Срыв вихрей на пережатии просвета трахеи, вызванном функциональным экспираторным обжатием, предположен в работе [16] как механизм возникновения свистов. Здесь проведен модельный эксперимент в аэродинамической трубе с диафрагмой, моделирующей зону пережатия, однако СФВ зарегистрированы не были. В работе [17] предполагается срыв вихрей на голосовых складках. На основе физической модели участка дыхательных путей человека, образованных гортанью и непосредственно прилегающими к ней полостями преддверия гортани и трахеи, было показано, что аэродинамическое сопротивление диафрагмы, моделирующей голосовую щель, зависит от формы щели и ее размеров. В работе [18] предполагается возможность срыва вихрей на ребрах жесткости, обусловленных хрящевым скелетом трахеи.

Нами [19–21] развита эмпирическая модель, согласно которой часть СФВ (среднечастотные и ранние высокочастотные СФВ) формируются за счет потокозависимого механизма не самими вихрями, а колебаниями кромки сочленения ДП в местах ветвления, вызванными переменными силами, возникающими при сходе вихрей с числами Струхала порядка 0.2. Причем происходит это в достаточно широком диапазоне уровней бронхиального дерева — от нижней части трахеи до примерно 6-го уровня ветвления ДП. Напротив, поздние высокочастотные СФВ формируются за счет автоколебательных механизмов и в более глубоко расположенных уровнях бронхиального дерева.

Вышерассмотренные механизмы, в основном, характерны для здоровых обследуемых. У пациентов с респираторными заболеваниями свисты дополнительно могут образовываться за счет возбуждения вязкой или жидкой мокроты в просвете воздухоносных путей [22, 23], а также за счет автоколебательного возбуждения колебаний смыканий стенок слизистой оболочки дыхательных путей. Во втором случае свисты могут образовываться как за счет продольных колебаний со смыканием просвета ДП [3, 24], так и изгибных колебаний около положения равновесия без смыкания просвета ДП [25].

Таким образом, моделей разработано много, а достаточной ясности с механизмами формирования СФВ как у больных, так и у здоровых людей

не достигнуто. Столь же противоречивая ситуация и с локализацией источников СФВ. Согласно существующим моделям, они могут находиться и в трахее, и в крупных бронхах, и в бронхиальном дереве в широком диапазоне генераций ветвления.

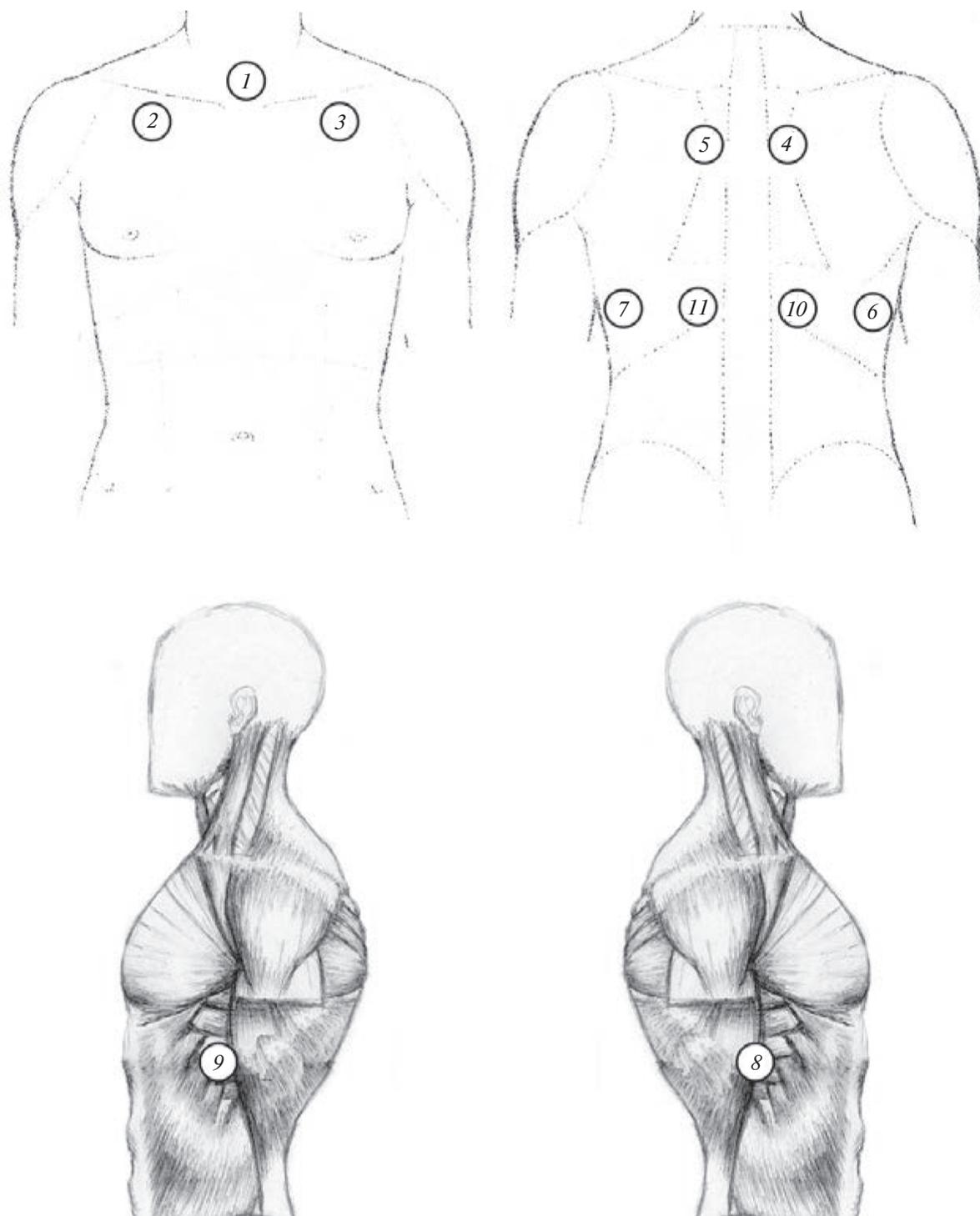
Нужно отметить, что в последние годы данная тематика преимущественно исследуется в работах нашей группы [2], что может быть связано со сложностью и спецификой набора экспериментальных данных, лежащих на стыке акустики, респираторной физиологии и функциональной диагностики дыхательной системы человека.

Ранее, при анализе спектрограмм трахеальных шумов форсированного выдоха как у больных, так и у здоровых добровольцев, нами было замечено, что спектрограмма СФВ содержит ряд выраженных максимумов (“дорожек” спектральных пиков) на частотах, примерно кратных основной частоте СФВ. Исследование этих составляющих, похожих на гармоники, вероятно, может служить одним из подходов к пониманию механизмов формирования СФВ. Поэтому цель настоящей работы заключалась в обнаружении гармоник СФВ, оценке их параметров и анализе возможных акустических механизмов.

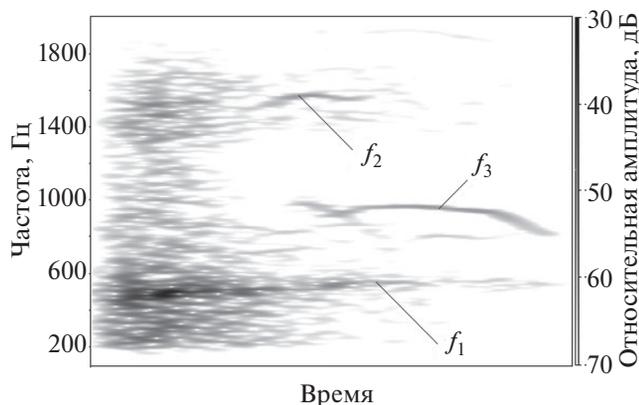
## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Экспериментальное оборудование состояло из 11 акустических датчиков, выполненных на базе акселерометров 333B52 (PCB Piezotronics) с динамическим диапазоном 80 дБ [26], подключенных к входам каналов аппаратно-программного комплекса на основе 16-канального электронного самописца PowerLab (ADInstruments) с 16-разрядным АЦП [27]. Частота дискретизации 10 кГц. Акустические датчики крепились к коже на двухсторонней липкой ленте, в точках поверхности грудной клетки, показанных на рис. 1. При этом датчики 1–5 расположены преимущественно над центральными (крупными) дыхательными путями бронхиального дерева, а датчики 6–11 размещены над удаленными (дистальными) дыхательными путями, лежащими в нижних долях легких.

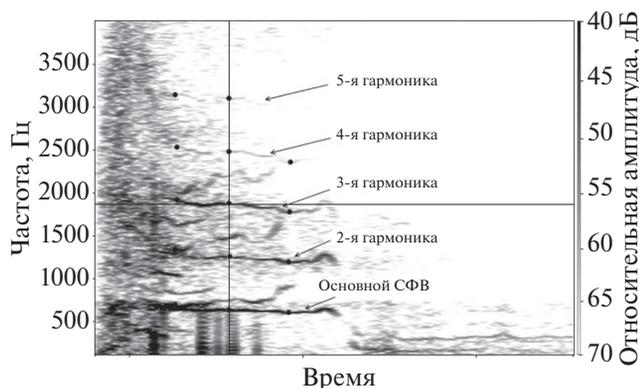
Исследуемая выборка состояла из 28 добровольцев обоего пола в возрасте от 20 до 77 лет, давших информированное согласие на проведение эксперимента. Выборка была поделена на две группы: 17 пациентов с заболеваниями (пневмония и хроническая обструктивная болезнь легких), 11 здоровых лиц. Каждый доброволец после тщательного инструктирования выполнял маневр форсированного выдоха (минимум 2–3 попытки). На нос накладывался зажим. Для анализа бралась одна наиболее качественная попытка записи шумов форсированного выдоха (сигнал без явных помех и без амплитудных ограничений).



**Рис. 1.** Схема расположения акустических датчиков (каналов) на поверхности грудной клетки: 1 – над средней частью трахеи; 2 – I межреберье по окологрудной линии справа; 3 – I межреберье по окологрудной линии слева; 4 – IV межреберье по околопозвоночной линии справа; 5 – IV межреберье по околопозвоночной линии слева; 6 – VIII межреберье между лопаточной и заднеподмышечной линиями справа; 7 – VIII межреберье между лопаточной и заднеподмышечной линиями слева; 8 – VIII межреберье между заднеподмышечной и среднеподмышечной линиями справа; 9 – VIII межреберье между заднеподмышечной и среднеподмышечной линиями слева; 10 – VIII межреберье между лопаточной и околопозвоночной линиями справа; 11 – VIII межреберье между лопаточной и околопозвоночной линиями слева.



**Рис. 2.** Типичные СФВ, наблюдаемые на спектрограмме трахеальных шумов форсированного выдоха:  $f_1$  – дорожка среднечастотных СФВ в полосе 400–600 Гц;  $f_2$  – дорожка высокочастотных СФВ (более 600 Гц) в первой половине маневра;  $f_3$  – дорожка высокочастотных СФВ (более 600 Гц) во второй половине маневра.



**Рис. 3.** Спектрограмма трахеальных (датчик 1, рис. 1) шумов форсированного выдоха одного из обследуемых (основной тон СФВ относится к среднечастотному типу).

Записанные самописцем акустические сигналы преобразовывались в двухканальные файлы wave-формата. Дальнейший анализ осуществлялся в пакете прикладных программ SpectraPLUS (Pioneer Hill Software) и отображался (рис. 2) в виде спектрограммы (алгоритм быстрого преобразования Фурье, 1024 отсчета по времени, 50% перекрытие временных выборок, окно Hanning, логарифмическая амплитуда, динамический диапазон 80 дБ от максимума сигнала). На спектрограмме визуально выделяли “дорожки” среднечастотных свистов (СЧ СФВ) с частотами 400–600 Гц, ранних высокочастотных свистов (ранние ВЧ СФВ) на частотах выше 600 Гц, наблюдаемых в первой половине форсированного выдоха, и поздних высокочастотных (поздние ВЧ СФВ) на частотах выше 600 Гц, наблюдаемых во второй половине форсированного выдоха.

В качестве гармоник рассматривались “дорожки” на спектрограмме, схожие по форме с “дорожкой” основного тона СФВ, но лежащие выше по частоте (рис. 3). Именно определяемое визуально опытным оператором соответствие формы дополнительных “дорожек” на спектрограммах (рис. 3) служило главным признаком выявления гармоник СФВ. На спектральной “дорожке” каждой гармонике СФВ фиксировалось три точки во времени: начало, середина, конец свиста (рис. 3), в каждой из них программными средствами измерялись пиковая частота и амплитуда максимума. Отмечалось, к какому из типов СФВ (среднечастотный, ранний или поздний высокочастотный) относится та или иная гармоника. Заметим, что основные частоты СФВ для одного и того же обследуемого в каждом из каналов, как правило, совпадали. Кроме того, у одного обследуемого могло быть несколько гармоник СФВ одного типа.

Для оценки статистической значимости различий между параметрами гармоник использовался непараметрический тест Манна–Уитни в программе Statistica (StatSoft Inc.). Для оценки статистической значимости различий частот встречаемости гармоник между центральными и более удаленными отделами легких, между больными и здоровыми, а также между сторонами грудной клетки (лево/право) использовался односторонний Difference test в программе Statistica (StatSoft Inc.).

## РЕЗУЛЬТАТЫ

### Групповые оценки СФВ над трахеей

В группе больных ( $n = 17$ ) у десятирех человек были обнаружены спектральные гармоники СФВ, а в группе здоровых ( $n = 11$ ) у девятирех. Таким образом, из всей выборки ( $n = 28$ ) у 19 (68%) испытуемых были обнаружены гармоники СФВ. У каждого из этих лиц присутствовала хотя бы одна гармоника СФВ над трахеей, а у некоторых из них гармоники с теми же частотами и временами, что и на трахее, наблюдались и над различными отделами легких по поверхности грудной клетки.

Интенсивность шумов форсированного выдоха, регистрируемых над трахеей (датчик 1, рис. 1), была сравнена в подгруппах обследуемых, у которых были найдены гармоники ( $n = 19$ ), и у которых они отсутствовали ( $n = 9$ ). Для этого в программе LabChart (ADInstruments) с помощью расширения DataPad измерены среднеквадратические значения (RMS) электрического напряжения шумового сигнала с выхода датчика 1 (рис. 1).

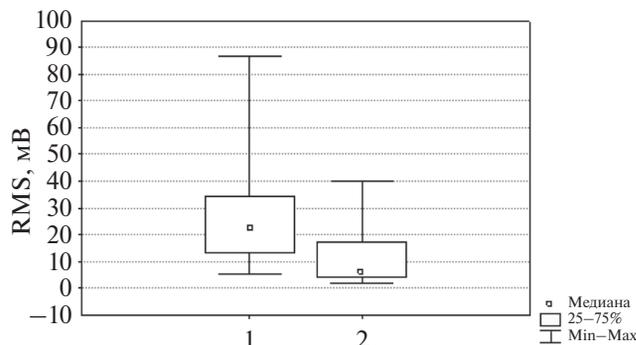
Значения RMS для каждого человека были усреднены по всем сделанным им качественным попыткам форсированного выдоха. С помощью

теста Манна–Уитни между этими подгруппами найдены значимые различия ( $p = 0.001$ ). Из диаграммы “ящик с усами” (рис. 4) следует, что интенсивность шумов форсированного выдоха на трахее в подгруппе, где есть гармоники СФВ, значимо выше, чем в подгруппе, где гармоник СФВ не было.

*Индивидуальные оценки над трахеей*

Над трахеей (канал 1, рис. 1) в каждой точке оценивалось отношение частот спектральных гармоник ( $F$ , разы) по отношению к основной частоте СФВ в синхронные моменты времени. Эти величины усреднены по трем точкам измерений. У некоторых добровольцев присутствовало по несколько свистов одного типа, поэтому полученные значения усреднены по каждому виду СФВ. Результаты (среднее  $\pm$  среднеквадратичное отклонение –  $M \pm SD$ ) представлены в табл. 1 и табл. 2. Как следует из этих таблиц, отношения частот  $F$  близки к номерам гармоник. Исключение составляет гармоника 4 раннего ВЧ СФВ у здорового добровольца № 7 (табл. 1, выделено жирным шрифтом). Максимальное число гармоник равно пяти. Для СЧ СФВ чаще встречаются 2-е и 3-е гармоники (56 и 44% соответственно), 4-е гармоники наблюдаются только у 2-х человек (22%), а 5-е и вовсе у одного (11%). Для ранних ВЧ СФВ по частоте встречаемости преобладают вторые гармоники (67%), тогда как 3-е встречаются в 2 раза реже (33%), 4-е наблюдаются у 2-х человек (11%). Для поздних ВЧ СФВ чаще встречаются 2-е гармоники (56%), 3-е наблюдаются у 3-х человек (33%), а 4-е только у одного (11%).

Что касается пациентов с респираторными заболеваниями (табл. 2), то отношения частот  $F$  также, в основном, близки к номерам гармоник.



**Рис. 4.** Усредненные по ансамблю значения RMS шумов ФВ над трахеей (канал 1): 1 – группа с гармониками СФВ ( $n = 19$ ), 2 – группа без гармоник СФВ ( $n = 9$ ).

Исключения составляют 4-е гармоники СЧ СФВ у больных № 7 и 8 (табл. 2, выделено жирным шрифтом). Максимальное число гармоник равно семи. Для СЧ СФВ чаще встречаются 2-е и 3-е гармоники (80 и 70% соответственно), 4-е гармоники также встречаются довольно часто (40%), тогда как 5-е, 6-е и 7-е гармоники встречаются только у 2-х человек (20%). Для ранних ВЧ СФВ по частоте встречаемости преобладают вторые гармоники (70%), тогда как 3-е наблюдаются у 2-х человек (20%). Гармоники поздних ВЧ СФВ встречаются лишь у 2-х человек и представлены 2-й и 3-й гармониками (по 20%).

Таким образом, как у больных, так и у здоровых по частоте встречаемости преобладают 2-е и 3-е гармоники. У здоровых распределение числа гармоник по всем видам свистов более равномерное, тогда как у больных явно преобладают гармоники СЧ СФВ. Причем, чем выше номер гармоники, тем реже они встречаются.

**Таблица 1.** Отношения частот спектральных гармоник СФВ к основной частоте СФВ, осредненные по трем точкам дорожки СФВ у здоровых

Доброволец	СЧ СФВ				Ранние ВЧ СФВ			Поздние ВЧ СФВ		
	Номера гармоник									
№	2	3	4	5	2	3	4	2	3	4
1	2.0 ± 0.06	3.0 ± 0.06	4.0 ± 0.15		1.8 ± 0.33			2.0 ± 0.01		
2					2.0 ± 0.002					
3					1.9 ± 0.05	2.9 ± 0.03	3.9 ± 0.07			
4	2.0 ± 0.02				2.0 ± 0.01					
5								2.0 ± 0.004	3.0 ± 0.004	
6	1.9 ± 0.04	3.5 ± 0.07						2.0 ± 0.03	3.0 ± 0.03	
7					2.0 ± 0.01	3.1 ± 0.01	<b>2.7 ± 2.31</b>			
8	2.0 ± 0.01	2.7 ± 0.01			2.2 ± 0.04	3.0 ± 0.07		2.0 ± 0.05		
9	2.0 ± 0.02	2.9 ± 0.05	4.0 ± 0.06	5.0 ± 0.03				2.0 ± 0.02	3.0 ± 0.02	4.0 ± 0.05
Частота встречаемости в группе, %	56	44	22	11	67	33	11	56	33	11

**Таблица 2.** Отношения частот спектральных гармоник, осредненные по трем точкам дорожки СФВ у больных

Доброволец	СЧ СФВ						Ранние ВЧ СФВ		Поздние ВЧ СФВ	
	Номера гармоник									
№	2	3	4	5	6	7	2	3	2	3
1	2.0 ± 0.07	3.0 ± 0.07	4.1 ± 0.03				2.0 ± 0.04			
2	1.9 ± 0.12	2.8 ± 0.44								
3	2.1 ± 0.12	2.9 ± 0.20	4.1 ± 0.34				2.0 ± 0.01			
4	2.0 ± 0.03	3.0 ± 0.07	4.0 ± 0.02	5.0 ± 0.03	6.0 ± 0.04	7.0 ± 0.03	2.0 ± 0.008	3.0 ± 0.02		
5							2.0 ± 0.02	2.8 ± 0.06		
6	2.1 ± 0.07						2.0 ± 0.01			
7	2.0 ± 0.007	3.3 ± 0.14	<b>4.9 ± 0.14</b>							
8	2.0 ± 0.04	3.0 ± 0.07	<b>4.5 ± 0.42</b>				1.8 ± 0.03			
9							2.0 ± 0.03		1.9 ± 0.16	3.0 ± 0.08
10	2.0 ± 0.03	3.0 ± 0.04	4.0 ± 0.10	5.1 ± 0.24	6.1 ± 0.28	6.9 ± 0.14			2.0 ± 0.004	3.0 ± 0.04
Частота встречаемости в группе, %	80	70	40	20	20	20	70	20	20	20

**Таблица 3.** Средние значения относительных уровней интенсивности гармоник СФВ (дБ) у здоровых

Доброволец	СЧ СФВ				Ранние ВЧ СФВ			Поздние ВЧ СФВ		
	Номера гармоник									
№	2	3	4	5	2	3	4	2	3	4
1	-10.6 ± 2.3	-12.1 ± 3.5	-13.6 ± 2.5		<b>3.8 ± 3.3</b>			<b>6.5 ± 1.2</b>		
2					-29.7 ± 6.2					
3					-8.3 ± 2.3	-15.0 ± 11.1	-19.8 ± 9.1			
4	-11.2 ± 2.9				-1.9 ± 5.9					
5								-7.8 ± 7.7	-25.5 ± 11.6	
6	-11.6 ± 8.0	-18.6 ± 7.9						-10.0 ± 10.8	-15.2 ± 1.6	
7					-6.9 ± 4.8	-18.3 ± 2.4	-25.7 ± 6.9			
8	-11.1 ± 3.4	-22.8 ± 1.9			-19.5 ± 3.6	-20.2 ± 4.4		-3.7 ± 4.8		
9	-0.7 ± 3.2	1.8 ± 3.0	4.7 ± 4.2	-17.2 ± 5.6				<b>0.3 ± 3.0</b>	-4.5 ± 1.9	-24.6 ± 11.5

Над трахеей (датчик 1, рис. 1) также оценивалась разность уровней спектральных гармоник (А, дБ) в сравнении с основным тоном. Для анализа брали по одному свисту каждого вида с наибольшей амплитудой основного тона (если были еще СФВ, но с меньшими амплитудами, они не учитывались). Затем в каждой из трех точек дорожек гармоник СФВ определялась разность уровней (дБ) при сравнении с основным тоном. Измеренные значения усреднялись по трем точкам. Полученные величины характеризуют относительные уровни интенсивности гармоник.

В табл. 3 и 4 приведены средние значения относительных уровней интенсивности гармоник СФВ по каждому обследуемому для здоровых и больных соответственно. У здоровых по всем видам свистов имеет место тенденция уменьшения относительных уровней интенсивности с ростом номера гармоники. Однако у обследуемого № 9 для СЧ СФВ эта тенденция нарушается, начиная

с 3-й гармоники (значения выделены курсивом), а максимальное значение относительного уровня интенсивности приходится на гармонику 4. Нужно заметить, что в некоторых случаях гармоники оказываются мощнее основного тона. Так, у добровольца № 1 интенсивней основного тона 2-е гармоники раннего и позднего СФВ (в табл. 3 выделены жирным шрифтом). У добровольца № 9 над основным тоном преобладают 3-я и 4-я гармоники СЧ СФВ, а также 2-я гармоника позднего СФВ. Следует отметить, что используемые в качестве акустических датчиков одинаковые акселерометры на исследуемых частотах выше 400 Гц характеризуются линейным спадом амплитудно-частотной характеристики 6 дБ/октава [27] в высокочастотную область, что частично может объяснять уменьшение уровня интенсивности гармоник с ростом их номера.

У больных по всем видам свистов наблюдается уменьшение относительных уровней интенсив-

**Таблица 4.** Средние значения относительных уровней интенсивности гармоник СФВ (дБ) у больных

Доброволец	СЧ СФВ						Ранние ВЧ СФВ		Поздние ВЧ СФВ	
	Номера гармоник									
№	2	3	4	5	6	7	2	3	2	3
1	-0.9 ± 1.1						-22.5 ± 3.5			
2	-7.7 ± 3.0									
3	-7.7 ± 5.9	-12.1 ± 12.7	-20.1 ± 1.5				-5.0 ± 0.4			
4	-11.0 ± 2.7	-16.9 ± 2.92	-23.1 ± 5.4				-4.2 ± 0.9	-20.1 ± 2.5		
5							-11.0 ± 10.9	-39.8 ± 2.0		
6	-5.2 ± 2.6						-4.5 ± 3.8			
7	-6.5 ± 1.1	-38.0 ± 4.3	-46.2 ± 8.4							
8	-8.3 ± 6.2	-33.4 ± 4.4					-21.1 ± 2.8			
9							<b>1.7 ± 15.8</b>		-19.8 ± 5.5	
10	<b>7.8 ± 14.9</b>	-9.0 ± 15.6	-25.7 ± 21.4	-11.7 ± 18.9	-14.2 ± 21.1	-8.7 ± 14.4			-8.8 ± 2.0	-16.7 ± 3.3

**Таблица 5.** Частоты встречаемости гармоник СФВ по поверхности грудной клетки (каналам), %

№ канала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Здоровые ( $n = 9$ )	100	78	78	78	22	33	44	56	67	44	33
Больные ( $n = 10$ )	100	80	60	60	60	20	30	20	20	20	0

ности СФВ с ростом номера гармоники, как и у здоровых. Только для пациента № 10 эта тенденция нарушается, начиная с 5-й гармоники (выделены курсивом). У двух пациентов 2-е гармоники мощнее основного тона (№ 10 – гармоника СЧ СФВ, и № 9 – гармоника раннего ВЧ СФВ).

#### *Индивидуальные оценки над поверхностью грудной клетки*

Были проанализированы гармоники свистов в каждом из 11 записанных каналов (датчиков, рис. 1) без разделения на типы СФВ. Свисты, зафиксированные над трахеей (канал 1), для которых наблюдались спектральные гармоники, искали в откликах остальных десяти каналов. При этом на спектральной дорожке каждого СФВ фиксировалась только одна точка, в которой измерялась пиковая частота.

Сначала для каждого канала была рассчитана частота встречаемости гармоник СФВ в группах без разделения на типы свистов (табл. 5). У больных наблюдается выраженное спадание частот встречаемости гармоник от трахеи (канал 1) к более удаленным (дистальным) ДП, лежащим в нижних отделах легких (периферически расположенные по грудной клетке каналы 6–11), тогда как у здоровых частота встречаемости гармоник СФВ распределена более равномерно. Кроме того, у здоровых, в целом, величины частот встречаемости гармоник в нижних отделах (с 6-го по 11-й канал) легких выше, чем в группе больных. Таким образом, разница между частотами встречаемости

гармоник в центральных (каналы с 1-го по 5-й) и более удаленных (нижних) ДП сильнее выражена у больных, где достигает статистической значимости ( $p < 0.05$ ). Так, у больных статистическая значимость по частоте встречаемости между центральными (1–5 каналы) и удаленными (6–11 каналы) ДП наблюдается всюду, кроме канала 7. У здоровых статистическая значимость по частоте встречаемости наблюдается между каналом 1 (трахея) и всеми периферически размещенными каналами, между центральными ДП (2–4 каналы) и удаленными ДП (6–11 каналы), а также между каналами 5 и 9.

Кроме того, была оценена статистическая значимость различий частот встречаемости гармоник между больными и здоровыми по отдельным каналам. Без разделения на типы свистов значимые различия в пользу здоровых (67% у здоровых против 20% у больных) присутствуют только в 9-м канале ( $p = 0.03$ ). Анализ распределения частот встречаемости гармоник по сторонам грудной клетки (лево-право) выявил статистически значимое различие только у здоровых и только между каналами 4 и 5 (78% против 22%,  $p = 0.015$ ).

Далее по всем 11 каналам в каждой точке установки датчиков (рис. 1) оценивалось отношение частот спектральных гармоник ( $F$ , разы) по отношению к основной частоте СФВ в синхронные моменты времени. По каждому номеру гармоники и по каждой точке приема (каналу) отношения частот усреднили по ансамблю и, где это было возможно, рассчитали стандартную девиацию. Результаты ( $M \pm SD$ ) представлены в табл. 6 и 7.

**Таблица 6.** Отношения частот спектральных гармоник СФВ по поверхности грудной клетки, осредненные по группе здоровых ( $n = 9$ )

№ гармоники	№ канала										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2.0 ± 0.1 $n = 21$	2.0 ± 0.2 $n = 17$	2.1 ± 0.2 $n = 13$	2.1 ± 0.2 $n = 10$	2.0 ± 0.3 $n = 4$	2.1 ± 0.3 $n = 3$	2.1 ± 0.2 $n = 4$	2.0 ± 0.3 $n = 3$	2.0 ± 0.3 $n = 4$	2.1 ± 0.1 $n = 3$	1.8 ± 0.3 $n = 4$
3	3.1 ± 0.3 $n = 13$	3.1 ± 0.4 $n = 10$	3.3 ± 0.5 $n = 6$	3.4 ± 0.8 $n = 4$	3.4 ± 1.1 $n = 3$	<b>3.7</b> $n = 1$	3.3 $n = 1$	<b>3.5 ± 0.8</b> $n = 4$	3.2 ± 0.8 $n = 6$	3.1 ± 0.1 $n = 2$	3.0 ± 0.1 $n = 2$
4	3.9 ± 0.1 $n = 5$	4.2 ± 0.9 $n = 5$	4.3 ± 0.9 $n = 4$	3.9 ± 0.1 $n = 3$	<b>3.2</b> $n = 1$	<b>4.6</b> $n = 1$	4.4 $n = 1$	–	3.9 ± 0.2 $n = 2$	4.1 ± 0.0 $n = 2$	4.0 $n = 1$
5	5.0 $n = 1$	4.7 ± 0.5 $n = 2$	5.4 $n = 1$	5.3 $n = 1$	–	–	5.5 $n = 1$	–	5.0 $n = 1$	5.2 $n = 1$	5.3 $n = 1$

Примечание.  $n$  – количество свистов (любого типа), соответствующих определенному номеру гармоники (например, в трахее (канал 1) у всех добровольцев наблюдается 21 свист, соответствующий 2-й гармонике).

**Таблица 7.** Отношения частот спектральных гармоник СФВ по поверхности грудной клетки, осредненные по группе больных ( $n = 10$ )

№ гармоники	№ канала										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2.0 ± 0.1 $n = 21$	2.0 ± 0.1 $n = 17$	2.0 ± 0.1 $n = 13$	2.0 ± 0.1 $n = 14$	1.9 ± 0.2 $n = 9$	1.9 ± 0.1 $n = 2$	1.9 ± 0.1 $n = 4$	2.0 ± 0.1 $n = 2$	2.0 ± 0.1 $n = 2$	1.9 ± 0.1 $n = 3$	–
3	2.9 ± 0.2 $n = 13$	3.0 ± 0.2 $n = 5$	2.9 ± 0.1 $n = 6$	2.9 ± 0.1 $n = 6$	2.8 ± 0.1 $n = 2$	–	–	–	–	2.7 $n = 1$	–
4	4.1 ± 0.4 $n = 7$	4.2 ± 0.7 $n = 4$	4.1 ± 0.2 $n = 3$	3.9 $n = 1$	–	–	–	–	–	–	–
5	4.9 ± 0.1 $n = 2$	4.9 $n = 1$	–	–	–	–	–	–	–	–	–
6	6.0 ± 0.1 $n = 2$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
7	6.9 ± 0.1 $n = 2$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Примечание.  $n$  – количество свистов (любого типа), соответствующих определенному номеру гармоники (например, в трахее (канал 1) у всех добровольцев наблюдается 21 свист, соответствующий 2-й гармонике).

У здоровых, в основном, отношения частот оказались близки к номерам гармоник. Максимальное число гармоник равно 5. Что касается количества гармоник, то больше всего наблюдается 2-х гармоник над трахеей (канал 1) и каналах 2–4, а также 3-х гармоник в каналах 1 и 2. Чем более периферически была расположена точка съема сигнала канала (соответственно удаленнее от центральных ДП), тем меньше гармоник СФВ в нем встречалось. Также уменьшалось количество гармоник свистов с ростом номера гармоники. У больных отношения частот всюду были близки к номерам гармоник. Максимальное число гармоник равно 7, а в 11-м канале гармоники отсутствовали. По количеству гармоник преобладали 2-е и 3-е гармоники над трахеей, а также 3-е гармоники в канале 2. Чем дальше от трахеи по грудной клетке были расположены точки съема (каналы), тем количество гармоник СФВ было меньше. Как и у здоровых, количество гармоник СФВ уменьшалось с ростом номера гармоники.

Дополнительно заметим, что у здоровых все гармоники (со 2-й по 5-ю) наблюдаются практически во всех каналах (т.е. и над центральными, и над удаленными ДП), тогда как у больных только 2-е гармоники встречаются во всех каналах (кроме 11-го), 3-е и 5-е гармоники встречаются только над центральными ДП, а 6-е и 7-е только над трахеей. Таким образом, у больных отмечается более отчетливая ассоциация гармоник СФВ с центральными ДП, чем у здоровых.

## ОБСУЖДЕНИЕ

Анализ отношений частот спектральных гармоник свистов форсированного выдоха с частотами основного тона над трахеей показал, что как у больных, так и у здоровых отношения частот, в основном, близки к номерам гармоник, а по встречаемости преобладают 2-е и 3-е гармоники свистов. У здоровых максимальное число гармоник равно 5-ти, тогда как у больных это число достигает 7-ми. У здоровых распределение числа

гармоник по всем видам свистов более равномерное, тогда как у больных явно преобладают гармоники среднечастотных свистов. При этом, чем выше номер гармоники, тем реже они встречаются.

Оценка относительных уровней интенсивностей гармоник свистящих звуков над трахеей показала, что как у здоровых, так и у больных в подавляющем большинстве случаев по всем видам свистов происходит уменьшение относительных уровней интенсивности с ростом номера гармоники. Как у больных, так и у здоровых по интенсивности преобладают вторые гармоники.

Анализ распределения гармоник свистов (без разделения по типам) по грудной клетке показал, что гармоники чаще встречаются над центральными дыхательными путями, чем над удаленными, лежащими в нижних отделах легких, для всех видов свистов, как у здоровых, так и, особенно, у больных.

Анализ отношений частот спектральных гармоник по всем 11 акустическим датчикам (каналам), распределенным по грудной клетке, показал, что как у больных, так и у здоровых во всех каналах отношения частот близки к номерам гармоник. По количеству преобладают 2-е и 3-е номера гармоник над центральными дыхательными путями. Чем удаленнее датчик (канал) от трахеи, тем меньше гармоник свистов в его отклике встречается. Также уменьшается количество гармоник с ростом их номера. У больных отмечается более отчетливая ассоциация гармоник с центральными дыхательными путями.

Закономерен вопрос, каково происхождение наблюдаемых гармоник свистящих звуков форсированного выдоха? Источниками гармоник, как известно, могут быть многомодовые колебательные системы или нелинейность колебательного процесса/системы.

Многомодовой колебательной системой, в принципе, является бронхиальное дерево человека, представляющее собой систему воздухонаполненных трубок. Известно, что цилиндрическую трубу с абсолютно жесткими стенками можно рассматривать как длинную линию, поскольку вдоль такой трубы может бежать одномерная волна любого профиля. Для звука с длиной волны  $\lambda$  труба круглого сечения будет “узкой” при радиусе  $a < 0.61\lambda$  (очень узкая  $a \ll 0.61\lambda$ ) [28].

По данным, например [29, 30], в диапазоне выше 400 Гц, соответствующему рассматриваемым свистам, скорость звука в просвете дыхательных путей близка к скорости звука в неограниченной воздушной среде. Отсюда следует, что стенки трубы, образованной дыхательными путями, ведут себя в исследуемом диапазоне частот как абсолютно жесткие. Известно, что в этом случае в узких трубах распространяется плоская звуковая волна.

Действительно, для частоты выше 400 Гц и скорости звука 330 м/с длина звуковой волны в воздухе составит  $\lambda = 82.5$  см. Так как наибольший диаметр дыхательных путей (в трахее) составляет около 2 см, то условие  $a \ll 0.61\lambda$  выполняется с запасом. Поэтому мы можем рассматривать трахеобронхиальное дерево как очень узкую в волновом смысле трубу. Заметим, что, несмотря на увеличение совокупного сечения бронхиального дерева после 5–7 генераций ветвления, сами трубки остаются узкими и поэтому приближение узкой трубы работает не только в районе крупных дыхательных путей, но и на всем протяжении бронхиального дерева.

В модели узкой трубы в зависимости от типа крышек на концах могут наблюдаться ряды волновых резонансов. Если обе крышки абсолютно жесткие или абсолютно мягкие, будет наблюдаться полуволновой целочисленный ряд гармоник. В трубе с одной абсолютно жесткой и другой абсолютно мягкой крышкой, на первой из них должна оказаться пучность, а на второй — узел давлений. Поэтому по длине такой трубы должно укладываться нечетное число четвертей длин волн. Открытый конец равносильен абсолютно мягкой крышке. Трахеобронхиальное дерево, как правило, представляют узкой трубой, у которой один конец, у рта, закрыт (сужение просвета), а другой открыт (резкое увеличение совокупного сечения просвета). В таком случае должны наблюдаться только нечетные четвертьволновые гармоники, что и было показано для гласных звуков голоса в [31]. Как видно, последнее противоречит наблюдаемой нами экспериментально картине, в которой имеет место целочисленный ряд гармоник.

В этом свете необходимо напомнить о том обстоятельстве, что гармоники выявлены нами не у всех обследуемых. У 9 из 28 добровольцев их нет ни в одном из каналов. При этом интенсивность шумов форсированного выдоха над трахеей у тех обследуемых, у которых есть гармоники, выше, чем у тех, у кого гармоник нет. Из всего вышесказанного следует, что более вероятным механизмом возникновения гармоник свистящих звуков в нашем случае является нелинейность, которая, как известно, характеризуется целочисленным рядом гармоник.

Однако, что же тогда является источником предполагаемых нелинейных эффектов? Поскольку динамический диапазон измерительных трактов (датчик—АЦП—спектральный анализатор) составлял не менее 80 дБ, маловероятно, чтобы наблюдаемая нелинейность была связана с ограничением регистрируемых сигналов в нем. Помимо измерительного тракта, нелинейность может возникать в источнике сигнала или в акустическом тракте его распространения к датчикам. Сходство

основных частот свистов и преимущественное распределение гармоник и, следовательно, нелинейных эффектов над центральными дыхательными путями бронхиального дерева (табл. 6, 7) свидетельствует, скорее, в пользу нелинейности в источнике. Вероятно, что источник нелинейности расположен в трахее и крупных бронхах. В этом случае нелинейные гармоники должны затухать (по частоте встречаемости, числу и/или интенсивности) при распространении вдаль от источника, что и наблюдается по результатам нашего эксперимента.

Каков же предполагаемый механизм возникновения нелинейности в источнике при продуцировании свистов? Претендентами, очевидно, могут быть собственно аэро-гидродинамические турбулентные вихри воздушного потока или их взаимодействие с упругой стенкой дыхательных путей. В первом случае можно ожидать существенного ослабления акустического излучения гармоник на границе стенки дыхательных путей (значительно превышающей по акустическому сопротивлению воздух в просвете дыхательных путей). Второй случай представляется более вероятным, т.к. здесь акустическое излучение генерируется уже в тканях легкого и далее распространяется в более однородной по акустическому сопротивлению среде.

Заметим, что из предполагаемых вариантов источников свистов, рассмотренных во введении, последняя картина качественно соответствует вибрациям, возникающим при сходе вихрей с кромки ветвления крупных дыхательных путей [12, 13], в том числе с коэффициентами Струхалея 0.2–0.3 [14, 19–21], срыву вихрей во внутригрудной части трахеи [15, 16, 18], автоколебанию стенок дыхательных путей [8]. Вопрос, насколько выявленные особенности позволяют уточнить механизмы функционирования источников свистов, требует дальнейшего исследования.

Из ограничений исследования следует упомянуть субъективное выделение “дорожек” свистящих звуков на спектрограммах. Надо отметить, что нами предпринимались попытки формализовать процедуру распознавания свистов, но в связи с нестационарностью процесса (частоты свистов и гармоник меняются произвольным образом в течение маневра форсированного выдоха), сделать этого не удалось. Поэтому свисты и их гармоники распознаются одним и тем же опытным экспертом. Ранее нами была показана высокая внутриэкспертная стабильность оценок параметров свистов [32].

Исследование поддержано Программой фундаментальных исследований Российской академии наук (номер государственной регистрации проекта АААА-А20-120031890011-8).

## ВЫВОДЫ

1. Гармоники СФВ, соответствующие целочисленному ряду, обнаружены над трахеей у 19 (68%) из 28 добровольцев группы, включающей здоровых и больных респираторными заболеваниями.

2. При оценке над трахеей: у больных респираторными заболеваниями ( $n = 10$ ) наблюдается до 7 гармоник СФВ, у здоровых ( $n = 9$ ) — до 5; в обеих группах имеется тенденция к снижению интенсивности и частоты встречаемости гармоники СФВ с ростом ее номера.

3. При оценке по поверхности грудной клетки: гармоники СФВ чаще встречаются над крупными центральными дыхательными путями бронхиального дерева, чем над дистальными дыхательными путями, расположенными в нижних отделах легких, и это более отчетливо выражено у больных, а осредненные значения отношений частот спектральных гармоник СФВ с частотами основного тона как у больных, так и у здоровых, в основном, соответствуют номерам гармоник.

4. Наиболее вероятной причиной возникновения гармоник СФВ представляется нелинейность в источнике их шумообразования, который может находиться в трахее и крупных бронхах, а предполагаемым механизмом возникновения нелинейности в источнике при генерации СФВ является взаимодействие турбулентных вихрей воздушного потока с упругой стенкой дыхательных путей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pride N.B.* Tests of forced expiration and inspiration // *Clinics in Chest Medicine*. 2001. V. 22(4). P. 599–622. [https://doi.org/10.1016/s0272-5231\(05\)70055-1](https://doi.org/10.1016/s0272-5231(05)70055-1)
2. *Korenbaum V.I., Pochekutova I.A., Kostiv A.E., Malaeva V.V., Safronova M.A., Kabantsova O.I., Shin S.N.* Human forced expiratory noise. Origin, apparatus and possible diagnostic applications // *J. Acoust. Soc. Am.* 2020. V. 148. № 6. P. 3385–3391.
3. *Forgacs P.* The functional basis of pulmonary sounds // *Chest*. 1978. V. 73. № 3. P. 399–405.
4. *Gavriely N., Palti Y., Alroy G., Grotberg J.B.* Measurement and theory of wheezing breath sounds // *J. Appl. Physiol.* 1984. V. 57. P. 481–492.
5. *Grotberg J.B., Davis S.H.* Fluid – dynamic flapping of collapsible channel: sound generation and flow limitation // *J. Biomechanics*. 1980. V. 13. P. 219–230.
6. *Grotberg J.B., Reiss E.L.* Subsonic flutter // *J. Sound Vibr.* 1984. V. 92. P. 349–361.
7. *Xu J., Chen Q., Min Y., Zhang Y.* A study on wheezes models // *ILSA Proceedings*. Helsinki, 1992. P. 60.
8. *Gavriely N., Kelly K.B., Groberg J.B., Loring S.H.* Forced expiratory wheezes are a manifestation of airway flow limitation // *J. Appl. Physiol.* 1987. V. 62. P. 2398–2403.

9. *Shabtai-Musih Y., Grotberg J.B., Gavriely N.* Spectral content of forced expiratory wheezes during air, He, and SF6 breathing in normal humans // *J. Appl. Physiol.* 1992. V. 72. P. 629–635.
10. *Gavriely N., Shee T.R., Cugell D.W., Grotberg J.B.* Flutter in flow-limited collapsible tubes: a mechanism for generation of wheezes // *J. Appl. Physiol.* 1989. V. 66. P. 2251–2261.
11. *Beck R., Rosenhouse G., Mahagnah M.R., Chow M., Cugell D.W., Gavriely N.* Measurements and theory of normal tracheal breath sounds // *Ann. of Biomed. Eng.* 2005. V. 33. P. 1344–1351.
12. *Schroter R.C., Sudlow M.F.* Flow patterns in models of the human bronchial airways // *Respir. Physiol.* 1969. V. 7. № 3. P. 341–355.
13. *Schröder F., Bordin S., Härtel S., Washausen M., Klaas M., Schröder W.* Comparison of steady and unsteady exhalation using multiplane-stereo PIV // 16th Int. Symp. on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics. Lisbon, Portugal, 09–12 July, 2012.
14. *Hardin J.C., Patterson J.L.* Monitoring the state of the human airways by analysis of respiratory sound // *Acta Astronautica.* 1979. V. 6. P. 1137–1151.
15. *Hardin J.C., Pope D.S.* Sound generation by a stenosis in a pipe // *AIAA Journal.* 1992. V. 30. P. 312–317.
16. *Любимов Г.А., Скобелева И.М., Дьяченко А.И., Стронгин М.М.* Оценка интенсивности трахеальных звуков форсированного выдоха // *Физиология человека.* 2013. Т. 39. № 1. С. 126–134.
17. *Вовк И.В., Вовк О.И.* О возможности физического моделирования шумов, генерируемых потоком воздуха в элементах дыхательных путей человека // *Акуст. вісник.* 1999. Т. 2. № 2. С. 11–25.
18. *Копьев В.Ф., Миронов М.А., Яковец М.А.* Шум потока в гофрированной трубке с точки зрения теории волн неустойчивости // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61. № 5. С. 547–551.
19. *Коренбаум В.И., Рассказова М.А., Почекутова И.А., Фершалов Ю.Я.* Механизмы шумообразования свистящих звуков, наблюдаемых при форсированном выдохе здорового человека // *Акуст. журн.* 2009. Т. 55. № 4–5. С. 516–525.
20. *Сафронова М.А., Почекутова И.А., Коренбаум В.И.* Пиковая частота свистов форсированного выдоха при бронходилатационной пробе // *Физиология человека.* 2014. Т. 40. № 6. С. 123–128.
21. *Коренбаум В.И., Почекутова И.А., Малаева В.В., Костив А.Е., Сафронова М.А., Шин С.Н.* Шумы форсированного выдоха и их диагностические приложения // Труды XIV Всероссийской конференции “Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики”. 2018. С. 625–627.
22. *Александрова Н.И., Бобков А.Г., Богданов Н.А.* Болезни органов дыхания: руководство для врачей: в 4 т. / Под общей редакцией Палеева Н.Р. М.: Медицина, 1989. Т. 1. 683 с.
23. *Редерман М.И.* Актуальные проблемы аускультации легких // *Терапевтический архив.* 1989. Т. 61. № 4. С. 113–116.
24. *Коренбаум В.И., Кулаков Ю.В., Тагильцев А.А.* Акустические эффекты в системе дыхания человека при форсированном выдохе // *Акуст. журн.* 1997. Т. 43. № 1. С. 78–86.
25. *Beck R., Odeh M., Oliven A., Gavriely N.* The acoustic properties of snores // *Eur. Resp. J.* 1995. V. 8. № 12. P. 2120–2128.
26. *Korenbaum V.I., Pochekutova I.A., Kostiv A.E., Tagiltsev A.A., Shubin S.B.* Technology of human pulmonary function testing by means of tracheal forced expiratory noises analysis // *IFMBE Proceedings.* 2013. V. 39. P. 2192–2195.
27. *Коренбаум В.И., Ширяев А.Д.* Особенности звукопроводения в легких человека в диапазонах частот 80–1000 Гц и 10–19 кГц // *Акуст. журн.* 2020. Т. 66. № 5. С. 563–574.
28. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
29. *Дьяченко А.И.* Математические модели механики легких с распределенными параметрами / автореф. дис. доктора техн. наук : 01.02.08. Москва, 2003. 38 с.
30. *Басовский В.Г., Вовк И.В., Вовк О.И.* Распространение звука в бронхиальном дереве человека. Анализ численных результатов // *Акуст. вісник.* 2000. Т. 3. № 4. С. 11–20.
31. *Lulich S.M., Alvan A., Arsikere H., Morton J.R., Sommers M.S.* Resonances and wave propagation velocity in subglottal airways // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. V. 130. № 4. P. 2108–2115.
32. *Коренбаум В.И., Сафронова М.А., Маркина В.В., Почекутова И.А., Дьяченко А.И.* Исследование механизмов формирования свистящих звуков форсированного выдоха здорового человека при дыхании газовыми смесями с разной плотностью // *Акуст. журн.* 2013. Т. 59. №. 2. С. 268–278.