

СОДЕРЖАНИЕ

Том 506, 2022

МАТЕМАТИКА

- Классические вопросы дробно-рационального приближения
А. Р. Алимов, И. Г. Царьков 5
- О параболическом и гиперболическом 2-го порядка возмущениях гиперболической системы 1-го порядка
А. А. Злотник, Б. Н. Четверушкин 9
- Бинарные пространства Орлича
С. В. Асташкин 16
- Применения преобразования Звонкина к стационарным уравнениям Колмогорова
В. И. Богачев, М. Рёкнер, С. В. Шапошников 20
- Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств
А. А. Бондарев, И. Н. Сергеев 25
- О стабилизации явной схемы решения нелинейного уравнения параболического типа
Б. Н. Четверушкин, О. Г. Ольховская, В. А. Гасилов 30
- О стационарных неравновесных мерах для системы “поле—кристалл”
Т. В. Дудникова 37
- Об эквивалентности вырожденных и некорректных задач. P -фактор метод регуляризации
Ю. Г. Евтушенко, Е. Беднарчук, А. Прусинска, А. А. Третьяков 41
- Множества с нечетными расстояниями и равноудаленные вправо последовательности в чебышёвской и манхеттенской метриках
А. И. Голованов, А. Б. Кунавский, А. А. Сагдеев 45
- Квазинормальные формы в задаче о колебаниях пешеходных мостов
С. А. Кащенко 49
- Двухцветные раскраски нормированных пространств без длинных одноцветных арифметических прогрессий
В. О. Кирова, А. А. Сагдеев 54
- Об уплотнениях на σ -компактные пространства
А. Е. Липин, А. В. Осипов 57
- О совместном моделировании волновых явлений сеточно-характеристическим методом и разрывным методом Галеркина
И. Б. Петров, А. В. Фаворская 62
- Об ограниченности и компактности двумерного прямоугольного оператора Харди
В. Д. Степанов, Е. П. Ушакова 68
- Собственные симметрии трехмерных цепных дробей
И. А. Тлюстангелов 73
- О предельных характеристиках для систем обслуживания с исчезающими возмущениями
А. И. Зейфман, В. Ю. Королев, Р. В. Разумчик, Я. А. Сатин, И. А. Ковалев 83

О построении регуляризованных уравнений движения смеси
вязких несжимаемых жидкостей

А. А. Злотник

89

Арифметические свойства значений обобщенных гипергеометрических рядов
с полиадическими трансцендентными параметрами

В. Г. Чирский

95

МЕХАНИКА

О нетипичной прочностной анизотропии слабосцементированных песчаников

Д. М. Климов, В. И. Карев, Ю. Ф. Коваленко, К. Б. Устинов

108

CONTENTS

Volume 506, 2022

MATHEMATICS

Classical Problems of Rational Approximation <i>A. R. Alimov and I. G. Tsar'kov</i>	5
On Parabolic and Hyperbolic 2nd Order Perturbations of a Symmetric Hyperbolic 1st Order System <i>A. A. Zlotnik and B. N. Chetverushkin</i>	9
Binary Orlicz Spaces <i>S. V. Astashkin</i>	16
Applications of Zvonkin's Transform to Stationary Kolmogorov Equations <i>V. I. Bogachev, M. Röckner, and S. V. Shaposhnikov</i>	20
Examples of Differential Systems with Contrasting Combinations of Lyapunov, Perron and Upper-Limit Properties <i>A. A. Bondarev and I. N. Sergeev</i>	25
About Regulation of an Explicit Difference Scheme for Non-Linear Parabolic-Type Equation <i>B. N. Chetverushkin, O. G. Olkhovskaya, and V. A. Gasilov</i>	30
On the Stationary Non-Equilibrium Measures for the "Field–Crystal" System <i>T. V. Dudnikova</i>	37
On the Equivalence of Singular and Ill-Posed Problems. P-Factor Regularization Method <i>Yu. G. Evtushenko, E. Bednarczuk, A. Prusinska, and A. A. Tret'yakov</i>	41
Odd-Distance and Right-Equidistant Sets in the Maximum and Manhattan Metrics <i>A. I. Golovanov, A. B. Kupavskii, and A. A. Sagdeev</i>	45
Quasinormal Forms in the Problem of Vibration of Pedestrian Bridges <i>S. A. Kashchenko</i>	49
Two-colorings of the Normed Spaces with No Long Monochromatic Unit Arithmetic Progressions <i>V. O. Kirova and A. A. Sagdeev</i>	54
On Condensations onto σ -Compact Spaces <i>A. E. Lipin and A. V. Osipov</i>	57
On Joint Modeling of Wave Phenomena by the Grid-Characteristic Method and the Discontinuous Galerkin Method <i>I. B. Petrov and A. V. Favorskaya</i>	62
On the Boundedness and Compactness of the Two-Dimensional Rectangular Hardy Operator <i>V. D. Stepanov and E. P. Ushakov</i>	68
Proper Symmetries of 3-Dimensional Continued Fractions <i>I. A. Tlyustangelov</i>	73
Limiting Characteristics of Queueing Systems with Vanishing Perturbations <i>A. I. Zeifman, V. Y. Korolev, R. V. Razumchik, Y. A. Satin, and I. A. Kovalev</i>	83
On the Construction of Regularized Equations of Motion for a Mixture of Viscous Incompressible Fluids <i>A. A. Zlotnik</i>	89

Arithmetic Properties of the Values of Generalized Hypergeometric Series
with Polyadic Transcendental Parameters

V. G. Chirskii

95

CONTROL THEORY

On the Atypical Strength Anisotropy of Weakly Cemented Sandstones

D. M. Klimov, V. I. Karev, Yu. F. Kovalenko, and K. B. Ustinov

108

КЛАССИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

© 2022 г. А. Р. Алимов^{1,*}, И. Г. Царьков^{1,2,**}

Представлено академиком РАН В.И. Бердышевым

Поступило 08.04.2022 г.

После доработки 12.08.2022 г.

Принято к публикации 15.08.2022 г.

Изучаются классические вопросы обобщенного дробно-рационального приближения: существование, единственность и устойчивость элементов наилучшего приближения, характеристика элементов наилучшего приближения.

Ключевые слова: существование наилучшего приближения, обобщенные дробно-рациональные функции, алгебраически полное множество

DOI: 10.31857/S2686954322050022

Под классическими вопросами теории приближений мы понимаем вопросы существования, единственности, устойчивости и солнечности. Понятие солнечности — это, на самом деле, геометрическая переформулировка известного критерия Колмогорова элемента наилучшего приближения. Ниже X — действительное линейное нормированное пространство. Множество M называется множеством *существования*, если для каждой точки x множество $P_M x := \{y \in M \mid \|x - y\| = \rho(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|\}$ ее ближайших элементов непусто. Множество $M \subset X$ называется *строгим протосолнцем*, если из условия $x \in X \setminus M$, $y \in P_M x$ вытекает, что $y \in P_M((1 - \lambda)y + \lambda x)$ для всех $\lambda \geq 0$. Строгие протосолнца (а также солнца и строгие солнца, см. [1], [2]) являются наиболее естественными объектами, для которых выполнен обобщенный критерий Колмогорова элемента наилучшего приближения (см. [2], [1, § 3.1]) и для них выполнены те или иные свойства отделимости. Важность исследования вопросов существования и солнечности (характеризацией эле-

ментов наилучшего приближения) обобщенных дробно-рациональных функций связана с их многочисленными приложениями в теории приближений и вычислительной математике (см., например, [3, 4]).

Рассмотрим следующее классическое семейство рациональных функций в $C[a, b]$: $R_{n,m} = R_{n,m}[a, b] := \{p/q \mid p \in P_n, q \in P_m, q \neq 0\}$, где P_n — подпространство алгебраических многочленов степени не выше n . Хорошо известно, что $R_{n,m}$ — чебышёвское солнце в $C[a, b]$. Однако в $L^p[a, b]$, $1 < p < \infty$, Н.В. Ефимовым и С.Б. Стечкиным из общих теорем геометрической теории приближений было установлено, что $R_{n,m}$, $m \geq 1$, является множеством существования, но не единственности. В случае $L^1[a, b]$ ими же было показано отсутствие единственности наилучшего приближения классом $R_{0,2}$. И.Г. Царьков, используя общие теоремы геометрической теории приближений, доказал отсутствие единственности наилучшего приближения в $L^1[a, b]$ для всех классов дробей $R_{n,m}$, $m \geq 1$. Рассмотрим более общий класс рациональных функций: $R_W^V := \{r = v/w \mid v \in V, w \in W\}$, здесь Q — метрический компакт, $V, W \subset C(Q)$ — выпуклые множества, причем W состоит из положительных функций. Известно, что множество R_W^V является строгим протосолнцем в $C(Q)$.

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*E-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru

**E-mail: igtsarkov@yandex.ru

Изучим следующее обобщение классов $R_{n,m}$ и $R_{n,m}^V$. Пусть $V, W \subset C(Q)$ и пусть $U \subset V \times W$ – непустое выпуклое множество. Определим следующий класс обобщенных дробно-рациональных функций

$$R_U := \{r \in C(Q) \mid rw = v, w > 0, (v, w) \in U\}. \quad (1)$$

Теорема 1. *Множество обобщенных дробно-рациональных функций R_U является строгим протосолнцем в $C(Q)$.*

Теорема 1 означает, что дроби наилучшего приближения из класса R_U характеризуются в терминах критерия Колмогорова элемента наилучшего приближения, что позволяет строить алгоритмы нахождения наилучших дробей (см., например, [3, 5]).

Устойчивость элементов (почти) наилучшего приближения традиционно связана со свойствами аппроксимативной компактности множества или существования непрерывных ε -выборок. Пусть $\varepsilon > 0$, $M \subset X$. отображение $\varphi: X \rightarrow M$ называется *аддитивной* (соответственно *мультипликативной*) ε -выборкой, если для всех $x \in X$ выполняется неравенство $\|\varphi(x) - x\| \leq \rho(x, M) + \varepsilon$ (соответственно $\|\varphi(x) - x\| \leq (1 + \varepsilon)\rho(x, M)$). Хорошо известно, что в невырожденных случаях (т.е. при $m \geq 1$) метрическая проекция на (чебышёвское) множество $R_{n,m}$ имеет точки разрыва в $C[a, b]$, но при этом, как, в частности, доказал С.В. Конягин [6], для любого $\varepsilon > 0$ на $R_{n,m}$ существует непрерывная ε -выборка. Следующий результат обобщает и расширяет результат С.В. Конягина (см. также К.С. Рютин [7, 8]).

Теорема 2. *Множество обобщенных рациональных дробей R_U (при выпуклом U ; см. (1)) является устойчиво монотонно линейно связным множеством (см. [9]) в $C(Q)$, и, следовательно, на это множество существует непрерывная аддитивная ε -выборка для любого $\varepsilon > 0$. В случае замкнутости R_U для каждого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная мультипликативная ε -выборка на R_U . Кроме того, R_U имеет стягиваемые пересечения с замкнутыми и открытыми шарами в $C(Q)$.*

Изучение вопросов существования наилучшего приближения обобщенными рациональными функциями было начато в работах Э. Чини, Х.Л. Лоеба, Г.Ш. Рубинштейна, Б. Бёма, Ч. Данхема и др. (см. [1, § 11.1]). В отличие от классического случая приближения классом $R_{n,m}$ в $C[a, b]$, существование (и единственность) элементов обобщенного рационального приближения в пространстве непрерывных функций, вообще говоря, не имеет места.

Пусть Q – хаусдорфов компакт и пусть $U \subset V \times W$. Будем говорить, что множество $R_U :=$

$\{r \in C(Q) \mid rw = v, w \neq 0, (v, w) \in U\}$ *алгебраически полно*, если условия: (а) $(v_k, w_k) \rightarrow (v, w)$ в $C(Q) \times C(Q)$, где $(v_k, w_k) \in U$, $w_k \neq 0$, и (б) существует функция $r \in C(Q)$ такая, что $r(t) = v(t)/w(t)$ для всех $t \in Q \setminus Z(w)$, где $Z(w)$ – множество нулей функции w , эквиваленты тому, что $(v, w) \in U$.

Направленность (x_δ) Δ -сходится к $x \in C(Q)$ ($x_\delta \xrightarrow{\Delta} x$), если найдется плотное подмножество $Q_0 \subset Q$: $x_\delta(t) \rightarrow x(t) \forall t \in Q_0$ (см. [10]). Подмножество $M \subset C(Q)$ называется *ограниченно Δ -компактным*, если любая ограниченная направленность из M содержит поднаправленность, Δ -сходящуюся к точке из M (см. [1, 10]).

Пусть далее Q – компакт, $V, W \subset C(Q)$ – ограниченно компактные множества, и пусть $U \subset V \times W$ – непустое множество. Рассмотрим класс обобщенных дробно-рациональных функций $R_U := \{r \in C(Q) \mid rw = v, w \neq 0, (v, w) \in U\}$.

Теорема 3. *Пусть множество R_U алгебраически полно и для любой ненулевой функции из W дополнение ее множества нулей в Q всюду плотно. Тогда множество R_U ограничено Δ -компактно в пространстве $C(Q)$ и, как следствие, является множеством существования в $C(Q)$.*

Утверждение теоремы 3 также верно в пространстве $L^\infty(Q, \mu)$, где μ – σ -аддитивная борелевская мера на Q , где Q – единица σ -алгебры борелевских множеств.

Пусть D – компактная область в \mathbb{R}^n , $V, W \subset C(D)$ – непустые ограниченно компактные множества, состоящие из вещественно-аналитических функций, и пусть $U \subset V \times W$ – непустое множество. Рассмотрим класс обобщенных дробно-рациональных функций $R_U(D) := \{r \in C(D) \mid rw = v, w \neq 0, (v, w) \in U\}$.

Следствие 1. *Если множество $R_U(D)$ алгебраически полно, то оно ограничено Δ -компактно в пространстве $C(D)$. Как следствие, $R_U(D)$ является множеством существования в пространстве $C(D)$ и множество $P_{R_U}x$ Δ -компактно для любого $x \in C(D)$.*

Из теоремы 3 вытекает один из результатов Ф. Дойча [10], именно: множество $R_V^W := \{r \in C[a, b] \mid rw = v, w \in W, w \neq 0, v \in V\}$ является множеством существования в $C[a, b]$, где V, W – конечномерные подпространства пространства $C[a, b]$, состоящие из вещественно-аналитических функций.

Случай, рассмотренный в следствии 1, включает в себя случай многомерных алгебраических дробно-рациональных функций R_U при условии

их алгебраической полноты. Из теоремы 3 мы также получаем следующий классический результат (в котором проксиминальность множества $R_{n,m}$ доказана независимо Н.И. Ахиезером и Дж. Уолшем): множество дробно-рациональных функций $R_{n,m}$ ограничено Δ -компактно в $C[a, b]$. В частности, $R_{n,m}$ – множество существования и множество $P_{R_{n,m}}x$ Δ -компактно для любого $x \in C[a, b]$.

Рассмотрим вопрос существования наилучшего дробно-рационального приближения в $L^p = L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $1 \leq p < \infty$. Хорошо известно (см., например, [1, § 11.3], [2]), что множество $R_{n,m}$ аппроксимативно компактно в $L^p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, и, следовательно, является множеством существования. Пусть Σ – σ -алгебра на Ω , μ – σ -конечная мера на Σ . Будем говорить, что последовательность функций (x_n) (где $x_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$) аес-сходится к функции $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, если для любого множества $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \infty$, найдется подпоследовательность номеров (n_k) такая, что (x_{n_k}) сходится почти всюду на A к функции x (здесь “аес” – сокращение от англ. “almost everywhere convergence of a subsequence”). Множество M аес-компактно, если из любой последовательности $(x_n) \subset M$ можно выделить подпоследовательность, аес-сходящуюся к элементу $x \in M$. Множество M ограничено аес-компактно, если пересечение M с любым замкнутым шаром аес-компактно.

Пусть μ – σ -конечная мера на пространстве Ω , $L^p = L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $1 \leq p < \infty$. Пусть $V \subset L^1, W \subset L^q$ – конечномерные подпространства ($1/p + 1/q = 1$, $1 < p, q < \infty$; если $p = 1$, то $q = \infty$), и пусть $U \subset V \times W$ – непустое множество. Будем говорить, что множество $R_U(\Omega) := \{r \in L^p \mid rw = v, w \neq 0, (v, w) \in U\}$ алгебраически полно, если условия: $(v_k, w_k) \rightarrow (v, w)$ в $L^1 \times L^q$, где $(v_k, w_k) \in U$, $w \neq 0$, существует функция $r \in L^p$ такая, что $r(t) = v(t)/w(t)$ для всех $t \in \Omega \setminus Z(w)$, где $Z(w)$ – множество нулей функции w , эквивалентны тому, что $(v, w) \in U$.

Теорема 4. Пусть множество $R_U(\Omega)$ алгебраически полно и для любой ненулевой функции из W множество ее нулей в Ω имеет меру нуль. Тогда множество $R_U(\Omega)$ ограничено аес-компактно и аппроксимативно компактно в $L^p(\Omega)$ при любом $1 \leq p < \infty$. Как следствие, $R_U(\Omega)$ – множество существования.

Пусть D – ограниченная область в \mathbb{R}^n , граница которой имеет нулевую меру Лебега, пусть μ – мера Лебега на D , $L^p = L^p(D, \mu)$, $1 \leq p < \infty$. Пусть

$V \subset L^1, W \subset L^q$ – конечномерные подпространства, состоящие из вещественно-аналитических функций ($1/p + 1/q = 1$, $1 < p, q < \infty$; если $p = 1$, то $q = \infty$), и пусть $U \subset V \times W$ – непустое множество. Рассмотрим класс обобщенных дробно-рациональных функций $R_U(D) := \{r \in L^p(D) \mid rw = v, w \neq 0, (v, w) \in U\}$.

Следствие 2. Пусть множество $R_U(D)$ алгебраически полно. Тогда $R_U(D)$ ограничено аес-компактно. Как следствие, $R_U(D)$ аппроксимативно компактно и является множеством существования в $L^p(D)$ при любом $1 \leq p < \infty$.

Отметим, что если $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$, то класс рациональных функций $R_U(D)$ с $D = [a, b]$ совпадает с классом $R_U^0[a, b] := \{r \in C[a, b] \mid rw = v, w \neq 0, (v, w) \in U\}$. С учетом этого из следствия 2 вытекает следующий известный результат Ф. Дойча–Р. Э. Хаффа [10]: множество $R_V^W[a, b]$ аппроксимативно компактно в $L^p[a, b]$ при любом $1 \leq p < \infty$ и, как следствие, является множеством существования; здесь V, W – конечномерные подпространства пространства $L^p[a, b]$, состоящие из вещественно-аналитических функций.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в МГУ имени М.В. Ломоносова при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-11-00129).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Geometric Approximation Theory. Springer. Cham. 2021. 508 p.
2. Алимов А.Р., Царьков И.Г. Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения. УМН. 2016. Т. 71. № 1 (427). С. 3–84. <https://doi.org/10.4213/rm9698>
3. Бердышев В.И., Петрак Л.В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения Екатеринбург: УрО РАН. 1999. 299 с.
4. Peiris V., Sharon N., Sukhorukova N., Ugon J. Generalised rational approximation and its application to improve deep learning classifiers // Appl. Math. Comp. 2021. V. 389. P. 125560. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125560>
5. Millán R.D., Sukhorukova N., Ugon J. An algorithm for best generalised rational approximation of continuous functions // Set-Valued and Variational Analysis. 2022. V. 30. P. 923–941. <https://doi.org/10.1007/s11228-021-00625-w>
6. Конягин С.В. О непрерывных операторах обобщенного рационального приближения, Матем. заметки. 1988. Т. 44. № 3. С. 404.

7. *Рютин К.С.* Аппроксимативные свойства обобщенных рациональных функций. Дисс. канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 2002.
8. *Рютин К.С.* О равномерно непрерывных операторах почти наилучшего обобщенного рационального приближения // Матем. заметки. 2010 Т. 87. № 1. С. 147–150.
<https://doi.org/10.4213/mzm345>
9. *Царьков И.Г.* Солнечность и связность множеств в пространстве $C[a, b]$ и конечномерных полиэдральных пространствах. Матем. сб. 2022. Т. 213. № 2. С. 149–166.
<https://doi.org/10.4213/sm9554>
10. *Deutsch F.* Existence of best approximations // J. Approx. Theory. 1980. V. 28. P. 132–154.
[https://doi.org/10.1016/0021-9045\(80\)90085-4](https://doi.org/10.1016/0021-9045(80)90085-4)

CLASSICAL PROBLEMS OF RATIONAL APPROXIMATION

A. R. Alimov^a and I. G. Tsar'kov^{a,b}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

^b *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.I. Berdushev

Classical problems of rational approximation are studied: existence, uniqueness, and stability and characterization of best approximants.

Keywords: existence of best approximation, generalized rational fractions, algebraically complete set

О ПАРАБОЛИЧЕСКОМ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ 2-ГО ПОРЯДКА ВОЗМУЩЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ 1-ГО ПОРЯДКА

© 2022 г. А. А. Злотник^{1,2,*}, академик РАН Б. Н. Четверушкин^{2,**}

Поступило 21.05.2022 г.

После доработки 14.06.2022 г.

Принято к публикации 18.08.2022 г.

Изучаются задачи Коши для симметричной гиперболической системы уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами и ее сингулярных возмущений — сильно параболической и гиперболической 2-го порядка систем уравнений с малым параметром $\tau > 0$ при вторых производных по x и t . Формулируются свойства решений всех трех систем и даются оценки разности решений исходной системы и систем с возмущениями порядка $O(\tau^{\alpha/2})$ при начальной функции w_0 гладкости α в смысле $L^2(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha \leq 2$. При $\alpha = 1/2$ охватывается широкий класс разрывных w_0 . Дается приложение к линеаризованной системе уравнений газовой динамики и параболической и гиперболической 2-го порядка квазигазодинамическим системам уравнений.

Ключевые слова: линейные системы уравнений в частных производных, малый параметр, оценки разности решений, квазигазодинамические системы уравнений

DOI: 10.31857/S2686954322050198

В данном сообщении изучаются задачи Коши для n -мерной симметричной гиперболической системы уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами и ее сингулярных возмущений — сильно параболической и гиперболической 2-го порядка систем уравнений с малым параметром $\tau > 0$ при вторых производных по x и t . Возмущения со вторыми производными по x имеют дивергентный вид и содержат матрицы с переменными коэффициентами. Подобные возмущения много лет применяются на практике при построении сеточных методов решения квазилинейной системы уравнений газовой динамики [1–3]. Существует много иных приложений анализа подобных возмущений, см. в том числе [4–6] и цитированную там литературу.

Формулируются результаты о слабых и сильных решениях исходной системы и систем с возмущениями, в том числе равномерные по τ оценки слабых решений последних систем. Они дополняют известные, и при их выводе используются в том

числе методы из [6–10]. Для разностей r_τ решений исходной системы и систем с возмущениями выносятся оценки порядка $O(\tau^{\alpha/2})$, $0 < \alpha \leq 2$, в том числе в норме $C(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$, при начальных данных w_0 и свободном члене f из соответствующих пространств Соболева и Никольского гладкости порядка α по x (для f также порядка $\alpha/2$ по t для гиперболического возмущения). При $\alpha = 1/2$ охватывается широкий класс разрывных функций w_0 , что важно для приложений.

Приводятся также оценки производных любого порядка по x для решений всех рассматриваемых систем и разностей r_τ порядка $O(\tau^{\alpha/2})$, $0 < \alpha \leq 2$ в случае, когда коэффициенты систем не зависят от x .

Описывается приложение результатов к линеаризованной на постоянном решении системе уравнений газовой динамики и ее возмущениям — параболической и гиперболической 2-го порядка квазигазодинамическим (КГД) системам уравнений [11, 12].

Введем гильбертовы пространство Лебега $L^2(\mathbb{R}^n) = H^0(\mathbb{R}^n)$ и Соболева $H^1(\mathbb{R}^n)$, $H^2(\mathbb{R}^n)$ (все пространства считаем вещественными) со скалярными произведениями $(v, w)_{H^l(\mathbb{R}^n)} = \sum_{0 \leq k \leq l} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^k v \cdot \nabla^k w dx$,

$l = 0, 1, 2$. Здесь $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, а $\nabla^2 = \{\partial_i \partial_j\}_{i, j=1}^n$ —

¹ Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

² Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: azlotnik@hse.ru

**E-mail: office@keldysh.ru

матрица вторых производных по x , $n \geq 1$, и символ \cdot обозначает скалярное произведение векторов или матриц (если не указано иное).

Будем использовать пространство Соболева $H^1(\Pi_T)$, $\Pi_T := \mathbb{R}^n \times (0, T)$ – слой, и обозначим через $L^{2,q}(\Pi_T)$ и $W_{2,q}^{l,1}(\Pi_T)$, $W_{2,q}^{l,1}(\Pi_T)$ с $1 \leq q \leq \infty$, $l = 1, 2$ анизотропные пространства Лебега и Соболева с нормами $\|v\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} = \left\| \|v(x, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \right\|_{L^2(0, T)}$ и

$$\|v\|_{W_{2,q}^{1,0}(\Pi_T)} = \|\{v, \nabla v\}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \equiv \|v\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} + \|\nabla v\|_{L^{2,q}(\Pi_T)},$$

$$\|v\|_{W_{2,q}^{2,0}(\Pi_T)} = \|\{v, \nabla v, \nabla^2 v\}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)},$$

$$\|v\|_{W_{2,q}^{l,1}(\Pi_T)} = \|v\|_{W_{2,q}^{l,0}(\Pi_T)} + \|\partial_t v\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}.$$

Пусть $V_2(\Pi_T)$ – пространство функций $v \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$ с $\nabla v \in L^2(\Pi_T)$ [8, 9], а $C(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ состоит из непрерывных функций $v: [0, T] \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\|v\|_{C(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))} = \max_{0 \leq t \leq T} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Введем произведения $(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} dx$, $(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\Pi_T} = \int_{\Pi_T} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} dx dt$ для вектор-функций \mathbf{v}, \mathbf{w} таких, что $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ или $L^1(\Pi_T)$ соответственно. Ниже все векторы и вектор-функции считаем столбцами, а операторы $\nabla^l, \partial_t^l, l = 1, 2$ применяются к вектор- и матрицам-функциям поэлементно. Если не указано противное, то лебеговы нормы вектор-функций $\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}$ и квадратных матриц-функций A вводятся как нормы в этих пространствах от евклидовых норм $|v|, (|\partial_1 v|^2 + \dots + |\partial_n v|^2)^{1/2}$ и спектральной нормы $\|A\|$. Далее, лебеговы нормы $\nabla^2 \mathbf{v}$ и $\nabla A, \nabla^2 A$ понимаются как суммы норм соответствующих частных производных \mathbf{v} и A . Для составных прямоугольных матриц-функций и их производных суммируются соответствующие нормы составляющих квадратных матриц.

Введем задачу Коши для симметричной гиперболической системы 1-го порядка

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\mathbf{w} := \partial_t \mathbf{w} + B_i \partial_i \mathbf{w} + C\mathbf{w} = \mathbf{f} \quad \text{в } \Pi_T, \\ \mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}_0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{w}(x, t), \mathbf{f}(x, t): \Pi_T \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{w}_0(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – искомая и заданные вектор-функции, а $B_i(x, t) = B_i^T(x, t)$, $i = \overline{1, n}$, $C(x, t)$ – коэффициенты-матрицы-функции порядка m . Предполагается суммирование по повторяющимся индексам $i, j = \overline{1, n}$.

Пусть выполнены условия

$$\begin{aligned} \mathbf{B}, \operatorname{div} \mathbf{B}, C \in L^\infty(\Pi_T), \quad \mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T), \\ \mathbf{w}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_n)$ – составная матрица старших коэффициентов размеров $m \times mn$ и $\operatorname{div} \mathbf{B} := \partial_i B_i$. Здесь и ниже принадлежность матриц- и вектор-функций какому-либо пространству означает, что всех их элементы принадлежат этому пространству. Для упрощения условия на коэффициенты и их производные формулируются в основном в терминах $L^\infty(\Pi_T)$.

Слабым решением задачи Коши (1) назовем функцию $\mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}, \mathcal{H}^* \boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} = \ell(\mathbf{w}_0, \mathbf{f}; \boldsymbol{\varphi}) := (\mathbf{w}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)_{\mathbb{R}^n} + (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} \\ \forall \boldsymbol{\varphi} \in W_{2,1}^{1,1}(\Pi_T), \quad \boldsymbol{\varphi}|_{t=T} = 0. \end{aligned}$$

Здесь и ниже $\mathcal{H}^* \boldsymbol{\varphi} = -\partial_t \boldsymbol{\varphi} - B_i \partial_i \boldsymbol{\varphi} - (\operatorname{div} \mathbf{B} - C^T) \boldsymbol{\varphi}$ определяет сопряженный по Лагранжу к \mathcal{H} оператор, а $\boldsymbol{\varphi}(x, t): \Pi_T \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $\boldsymbol{\varphi}_0 := \boldsymbol{\varphi}|_{t=0}$.

Сильным решением этой задачи Коши назовем функцию $\mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$, имеющую $\nabla \mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$, $\partial_t \mathbf{w} \in L^{2,1}(\Pi_T)$ и удовлетворяющую уравнению в (1) в $L^{2,1}(\Pi_T)$ и начальному условию $\mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}_0$ в $C(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$.

Ниже используются условия типа $\|\mathbf{B}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leq N$, где $N \geq 1$ – параметр, и для краткости в них всегда автоматически подразумевается, что $\mathbf{B} \in L^\infty(\Pi_T)$. Возникают постоянные $C(N, T) \geq 0$, $C_1(N, T) \geq 0$, ..., неубывающие по N, T , причем разные постоянные могут обозначаться одинаково. Пусть I_m – единичная матрица порядка m .

Теорема 1. 1. а) Пусть выполнены условия (2) и $0.5 \operatorname{div} \mathbf{B} - C \leq c_0 I_m$ почти всюду (п.в.) в Π_T с постоянной $c_0 \geq 0$ (например, $c_0 = \|0.5 \operatorname{div} \mathbf{B} - C\|_{L^\infty(\Pi_T)}$). Тогда существует слабое решение \mathbf{w} задачи Коши (1) и для него верна оценка

$$\|\mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} \leq e^{c_0 T} (\|\mathbf{w}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\|\mathbf{f}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}).$$

б) Более того, если $\nabla \mathbf{B} \in L^\infty(\Pi_T)$, $\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^T \|\Delta_\xi C\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} dt = 0$, где $\Delta_\xi C(x, t) := C(x + \xi, t) - C(x, t)$, то слабое решение единственно. Оно также обладает свойством $\mathbf{w} \in C(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ и поэтому в указанной оценке $\|\mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} = \|\mathbf{w}\|_{C(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))}$.

2. Пусть $\|\{\mathbf{B}, C, \nabla \mathbf{B}, \nabla C\}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leq N$ и $\mathbf{f}, \nabla \mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{w}_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда слабое решение \mathbf{w} является сильным решением, оно единственно и для него верна оценка

$$\|\nabla \mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} + \|\partial_t \mathbf{w}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} \leq C_1(N, T)(\|\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{1,0}(\Pi_T)}).$$

Если также $\mathbf{f} \in L^{2,q}(\Pi_T)$ при некотором $1 \leq q \leq \infty$, то $\partial_t \mathbf{w} \in L^{2,q}(\Pi_T)$ и

$$\|\partial_t \mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \leq C_2(N, T)(\|\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} + \|\nabla \mathbf{f}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}).$$

3. а) Пусть дополнительно $\|\nabla^2 \mathbf{B}, \nabla^2 C\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leq N$ и $\nabla^2 \mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{w}_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда для сильного решения \mathbf{w} существуют $\nabla^2 \mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$, $\partial_t \nabla \mathbf{w} \in L^{2,1}(\Pi_T)$ и

$$\|\nabla^2 \mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} + \|\partial_t \nabla \mathbf{w}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} \leq C_3(N, T)(\|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,0}(\Pi_T)}).$$

б) Если также $\|\{\partial_t \mathbf{B}, \partial_t C\}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leq N$ и \mathbf{f} , $\nabla \mathbf{f}, \partial_t \mathbf{f} \in L^{2,q}(\Pi_T)$ при некотором $1 \leq q \leq \infty$, то дополнительно существует $\partial_t^2 \mathbf{w} \in L^{2,q}(\Pi_T)$ и

$$\|\partial_t^2 \mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \leq C_4(N, T)(\|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,0}(\Pi_T)} + \|\mathbf{f}, \nabla \mathbf{f}, \partial_t \mathbf{f}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}).$$

Введем теперь задачу Коши для параболической системы уравнений 2-го порядка – возмущения системы в (1) с малым параметром $0 < \tau \leq \bar{\tau}$ при вторых производных по x :

$$\mathcal{P}_\tau \mathbf{y} := \mathcal{H} \mathbf{y} - \tau \partial_i (A_{ij} \partial_j \mathbf{y}) = \mathbf{f}_\tau + \tau \partial_i \mathbf{g}_{i\tau} \quad \text{в } \Pi_T, \quad (3)$$

$$\mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_{0\tau} \quad \text{в } \mathbb{R}^n.$$

Здесь $\mathbf{y}(x, t)$, $\mathbf{f}_\tau(x, t)$, $\mathbf{g}_{i\tau}(x, t)$: $\Pi_T \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}_{0\tau}(x)$: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – искомая и заданные вектор-функции, $A_{ij} \in L^\infty(\Pi_T)$ – коэффициенты-матрицы-функции порядка m , а $i, j = \overline{1, n}$.

Следуя [9, гл. V, § 1], будем предполагать, что выполнено условие

$$\nu \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 - \mu \|\mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq (A_{ij} \partial_j \mathbf{v}, \partial_i \mathbf{v})_{\mathbb{R}^n} \quad (4)$$

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{п.в. в } (0, T)$$

с некоторыми постоянными $\nu > 0$ и $\mu \geq 0$. Оно шире, чем алгебраическое условие $\nu |\mathbf{w}|^2 \leq (A(x, t) \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}$ для всех $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ п.в. в Π_T с блочной матрицей $A := \{A_{ij}\}_{i, j=1}^n$.

Пусть выполнены условия

$$B_i, C, A_{ij} \in L^\infty(\Pi_T), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (5)$$

$$\mathbf{f}_\tau \in L^{2,1}(\Pi_T), \quad \mathbf{y}_{0\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

и $\mathbf{g}_\tau := (\mathbf{g}_{1\tau}, \dots, \mathbf{g}_{n\tau}) \in L^2(\Pi_T)$. Слабым решением задачи Коши (3) назовем функцию $\mathbf{y} \in V_2(\Pi_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$-(\mathbf{y}, \partial_t \varphi)_{\Pi_T} + (B_i \partial_i \mathbf{y} + C \mathbf{y}, \varphi)_{\Pi_T} + \tau (A_{ij} \partial_j \mathbf{y}, \partial_i \varphi)_{\Pi_T} = \ell(\mathbf{y}_{0\tau}, \mathbf{f}_\tau; \varphi) - \tau (\mathbf{g}_{i\tau}, \partial_i \varphi)_{\Pi_T}$$

для любой $\varphi \in H^1(\Pi_T)$, $\varphi|_{t=T} = 0$. Положим $\bar{c}_0 = c_0 + \bar{\tau} \mu$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (4), (5), $\text{div} \mathbf{B} \in L^\infty(\Pi_T)$, $0.5 \text{div} \mathbf{B} - C \leq c_0 I_m$ п.в. в Π_T и $\mathbf{g}_\tau \in L^2(\Pi_T)$. Тогда существует единственное слабое решение $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\tau$ задачи Коши (3), причем $\mathbf{y}_\tau \in C(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ и верна его энергетическая оценка

$$\max\{\|\mathbf{y}_\tau\|_{C(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))}, \sqrt{\nu} \tau \|\nabla \mathbf{y}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}\} \leq e^{\bar{c}_0 T} (\|\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\|\mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} + \sqrt{\nu^{-1} \tau} \|\mathbf{g}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}).$$

Введем также задачу Коши для гиперболической системы уравнений 2-го порядка – возмущения исходной системы в (1) с параметром $0 < \tau \leq \bar{\tau}$ при старших производных

$$\mathcal{H}_\tau \mathbf{y} := \tau \partial_t^2 \mathbf{y} + \mathcal{H} \mathbf{y} - \tau \partial_i (A_{ij} \partial_j \mathbf{y}) = \mathbf{f}_\tau \quad \text{в } \Pi_T, \quad (6)$$

$$\mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_{0\tau}, \quad \partial_t \mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_{1\tau} \quad \text{в } \mathbb{R}^n,$$

где $\mathbf{y}(x, t)$, $\mathbf{f}_\tau(x, t)$: $\Pi_T \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}_{0\tau}(x)$, $\mathbf{y}_{1\tau}(x)$: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – искомая и заданные функции.

Пусть выполнены условия (5) и $\mathbf{y}_{1\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Слабым решением задачи Коши (6) назовем функцию $\mathbf{y} \in W_{2,\infty}^{1,1}(\Pi_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$-\tau (\partial_t \mathbf{y}, \partial_t \varphi)_{\Pi_T} + (\mathcal{H} \mathbf{y}, \varphi)_{\Pi_T} + \tau (A_{ij} \partial_j \mathbf{y}, \partial_i \varphi)_{\Pi_T} = \ell(\mathbf{y}_{1\tau}, \mathbf{f}_\tau; \varphi)$$

для любой $\varphi \in W_{2,1}^{1,1}(\Pi_T)$, $\varphi|_{t=T} = 0$ и начальному условию $\mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_{0\tau}$ в $C(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$.

Ниже потребуется следующее условие преобладания матрицы A старших коэффициентов системы 2-го порядка над матрицей \mathbf{B} старших коэффициентов системы 1-го порядка

$$\|\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq (1 - \delta)^2 [(A_{ij} \partial_j \mathbf{v}, \partial_i \mathbf{v})_{\mathbb{R}^n} + \mu_1 \|\mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2] \quad (7)$$

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

с некоторыми $0 \leq \delta < 1$, $\mu_1 \geq 0$, где $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} := B_i \partial_i \mathbf{v}$. Оно шире, чем более простое алгебраическое условие $|\mathbf{B}(x, t) \cdot \mathbf{w}|^2 \leq (1 - \delta)^2 (A_{ij}(x, t) \mathbf{w}_j) \cdot \mathbf{w}_i$ при всех $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in \mathbb{R}^m$ п.в. в Π_T , с тем же δ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{w} := B_i \mathbf{w}_i$. Подобные условия известны, см. в том числе [4].

Введем также условие $A \leq c_A I_{mn}$ п.в. в Π_T , т.е.

$$(A(x, t)\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} \leq c_A |\mathbf{w}|^2 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{mn} \quad \text{п.в. в } \Pi_T \quad (8)$$

с некоторым $c_A > 0$, например, $c_A = n \|A\|_{L^\infty(\Pi_T)}$, где $\|A\|_{L^\infty(\Pi_T)} := \max_{i,j=\overline{1,n}} \|A_{ij}\|_{L^\infty(\Pi_T)}$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (4), (5), (7), (8) и $\operatorname{div} \mathbf{B}, \partial_t A_{ij} \in L^\infty(\Pi_T)$, $A_{ij} = A_{ji}^T$, $i, j = \overline{1, n}$, $0.5 \operatorname{div} \mathbf{B} - C \leq c_0 I_m$ п.в. в Π_T , $\mathbf{y}_{0\tau} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{y}_{1\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $8\bar{\tau}^2 \mu \leq 1$. Тогда существует единственное слабое решение $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\tau$ задачи Коши (6) и верна оценка

$$\begin{aligned} & v_0 \max \{ \|\mathbf{y}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}, \|\nabla \mathbf{y}_\tau, \partial_t \mathbf{y}_\tau\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)}, \\ & \sqrt{\delta} \tau \|\partial_t \mathbf{y}_\tau, \nabla \mathbf{y}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \} \leq e^{\bar{c}_1 T} (\|\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \\ & + \tau \sqrt{2c_A} \|\nabla \mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\tau \|\mathbf{y}_{1\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 9\|\mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}), \end{aligned}$$

где $v_0 = \min\{\sqrt{v}/2, \sqrt{1/6}\}$, $\bar{c}_1 = \max\{4[c_0 + \bar{\tau}(\delta\mu + (1 - \delta)\mu_1) + \sqrt{3/2}\|C\|_{L^\infty(\Pi_T)}], (2v)^{-1}c_{A1}\}$, а $c_{A1} \geq 0$ таково, что $\partial_t A \leq c_{A1} I_{mn}$ п.в. в Π_T (например, $c_{A1} = n \|\partial_t A\|_{L^\infty(\Pi_T)}$, ср. с (8)).

Выведем оценки разности решений задач Коши для системы уравнений 1-го порядка и ее возмущений. Введем банаховы пространства, построенные с помощью $K_{\alpha,\infty}$ -метода вещественной интерполяции банаховых пространств, $0 < \alpha < 1$ (см., например, [13], гл. 3)

$$\mathcal{H}^\alpha := (L^2(\mathbb{R}^n), H^1(\mathbb{R}^n))_{\alpha,\infty}, \quad \mathcal{H}^1 = H^1(\mathbb{R}^n),$$

$$\mathcal{H}^{1+\alpha} := (H^1(\mathbb{R}^n), H^2(\mathbb{R}^n))_{\alpha,\infty},$$

$$\mathcal{W}_{2,1}^{\alpha,0} := (L^{2,1}(\Pi_T), W_{2,1}^{1,0}(\Pi_T))_{\alpha,\infty},$$

$$\mathcal{W}_{2,1}^{1+\alpha,0} := (W_{2,1}^{1,0}(\Pi_T), W_{2,1}^{2,0}(\Pi_T))_{\alpha,\infty}.$$

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия теоремы 1, пп. 1, 2 с $q = 1$ и теоремы 2 на матрицы-коэффициенты и $\|A\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leq N$. Для разности $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \mathbf{y}_\tau$ решений задач Коши (1) и (3) верна оценка

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau} \|\nabla \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leq \\ & \leq C(N, T) [\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} + \\ & + \sqrt{\tau} (\|\mathbf{g}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} + \|\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{1,0}(\Pi_T)})]. \end{aligned}$$

Здесь и ниже $C(N, T)$ не зависит от τ . В частности, при $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{g}_\tau = 0$, $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$ имеем

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau} \|\nabla \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leq \\ & \leq C(N, T) \sqrt{\tau} (\|\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{1,0}(\Pi_T)}), \\ & \|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \leq C(N, T) \tau^{\alpha/2} (\|\mathbf{w}_0\|_{\mathcal{H}^\alpha} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{\alpha,0}}), \end{aligned} \quad (9)$$

$$0 < \alpha < 1.$$

2. Пусть выполнены также условия теоремы 1, п. 3а на матрицы-коэффициенты, $\|\operatorname{div} A_j\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leq N$, $j = \overline{1, n}$ для $\operatorname{div} A_j := \partial_i A_{ij}$ и снова $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{g}_\tau = 0$, $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$. Для \mathbf{r}_τ верны также оценки

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau} \|\nabla \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leq \\ & \leq C(N, T) \tau (\|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,0}(\Pi_T)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau} \|\nabla \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leq \\ & \leq C(N, T) \tau^{\alpha/2} (\|\mathbf{w}_0\|_{\mathcal{H}^\alpha} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{\alpha,0}}), \end{aligned}$$

$$1 < \alpha < 2.$$

Введем усреднение по Стеклову $(\bar{\sigma}^{(\tau)} v)(x) := \frac{1}{\tau^n} \int_{(-\tau/2, \tau/2)^n} v(x + \xi) d\xi$ по x с шагом $\tau > 0$ и интерполяционные пространства $\mathcal{W}_{2,1}^{2,\alpha,\alpha} := (L^{2,1}(\Pi_T), W_{2,1}^{2,1}(\Pi_T))_{\alpha,\infty}$, $0 < \alpha \leq 1$.

Теорема 5. Пусть выполнены все условия теоремы 1 с $q = 1$ и теоремы 3 на матрицы-коэффициенты, а также $\|A\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leq N$, $\|\operatorname{div} A_j\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leq N$, $j = \overline{1, n}$. Для разности $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \mathbf{y}_\tau$ решений задач Коши (1) и (6) верна оценка

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \tau \|\nabla \mathbf{r}_\tau, \partial_t \mathbf{r}_\tau\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} + \\ & + \sqrt{\delta} \tau \|\nabla \mathbf{r}_\tau, \partial_t \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leq C(N, T) [\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \\ & + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} + \tau (\|\nabla \mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{y}_{1\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \\ & + \|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,1}(\Pi_T)})]. \end{aligned}$$

При $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{y}_{1\tau} = 0$, а также $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$ либо $\mathbf{y}_{0\tau} = \bar{\sigma}^{(\tau)} \mathbf{w}_0$, верны соответственно оценки

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \tau \|\nabla \mathbf{r}_\tau, \partial_t \mathbf{r}_\tau\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} + \\ & + \sqrt{\delta} \tau \|\nabla \mathbf{r}_\tau, \partial_t \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leq \\ & \leq C_2(N, T) \tau (\|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,1}(\Pi_T)}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \leq C(N, T) \tau^{\alpha/2} (\|\mathbf{w}_0\|_{\mathcal{H}^\alpha} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{\alpha,\alpha/2}}), \\ & 0 < \alpha \leq 2. \end{aligned}$$

В оценках теорем 4 и 5 автоматически предполагается, что данные \mathbf{w}_0 , $\mathbf{y}_{0\tau}$, $\mathbf{y}_{1\tau}$, \mathbf{f} , \mathbf{f}_τ , \mathbf{g}_τ принадлежат тем пространствам, в нормах которых они стоят. Оценки теоремы 5 родственны полученным в иных условиях и другим методом в [4].

При $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$ пространство $\mathcal{H}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пространством Никольского $H_2^\alpha(\mathbb{R}^n)$ (с точностью до эквивалентности норм) [13], раздел 6.2, [15]. Верны включения $H_{2,1}^{\alpha,0}(\Pi_T) \subset \mathcal{W}_{2,1}^{\alpha,0}$, $H_{2,1}^{\alpha,\alpha/2}(\Pi_T) \subset \mathcal{W}_{2,1}^{\alpha,\alpha/2}$, $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, и $WH_{2,1}^{1,1/2}(\Pi_T) :=$

$:= \{v \in H_{2,1}^{0,1/2}(\Pi_T), \nabla v \in L^{2,1}(\Pi_T)\} \subset \mathcal{W}_{2,1}^{1,1/2}$ (случай $\alpha = 1$).

Пространство $H_2^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ содержит $BV(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, где $BV(\mathbb{R}^n)$ – пространство функций ограниченной вариации на \mathbb{R}^n (см., например, [14, гл. 37, 38]). Аналогично, пространство $H_{2,1}^{1/2,1/4}(\Pi_T)$ заведомо содержит пространство $BV(\Pi_T) \cap L^\infty(\Pi_T)$. Это обеспечивает оценку $O(\tau^{1/4})$ в (9) и (10) при $\alpha = 1/2$ для широкого класса разрывных функций \mathbf{w}_0 и \mathbf{f} .

Ниже ограничимся случаем, когда матрицы $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A} \in L^\infty(0, T)$ не зависят от x и $-C \leq c_0 J_m$ п.в. на $(0, T)$. Это ограничение позволяет уточнить и заметно упростить формулировку результатов (которые вытекают из предыдущих теорем), хотя принципиальным оно не является. Введем производную по Соболеву любого порядка $\partial^{\mathbf{k}} = \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n}$ по x , $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$, $|\mathbf{k}|_1 = k_1 + \dots + k_n$.

Теорема 6. Пусть \mathbf{k} с $|\mathbf{k}|_1 \geq 1$ и $1 \leq q \leq \infty$ любые.

1. а) Пусть $\mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{w}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда для слабого решения \mathbf{w} задачи Коши (1) верна оценка

$$\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}\|_{C(0,T;L^q(\mathbb{R}^n))} \leq e^{c_0 T} (\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}). \quad (11)$$

Подробнее говоря, оценка (11) означает, что если дополнительно $\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, то существует $\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w} \in C(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ и верна указанная оценка. Для краткости формулировок все оценки в данной теореме и теоремах 7, 8 ниже понимаются аналогичным образом.

б) Пусть $m = 1, 2$. Если $\mathbf{f}, \nabla^m \mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{w}_0 \in H^m(\mathbb{R}^n)$, то для сильного решения \mathbf{w} задачи Коши (1) верны оценки

$$\|\partial^{\mathbf{k}} \nabla^m \mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} \leq c e^{c_0 T} (\|\partial^{\mathbf{k}} \nabla^m \mathbf{w}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}} \nabla^m \mathbf{f}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}).$$

Если также $\|\mathbf{B}, \mathbf{C}\|_{L^\infty(0,T)} \leq N$, то при $m = 1, 2$ соответственно верны оценки

$$\begin{aligned} & \|\partial_t \partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \leq \\ & \leq c N e^{c_0 T} T^{1/q} (\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{1,0}(\Pi_T)}) + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}, \\ & \|\partial_t \nabla \partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \leq \\ & \leq c N e^{c_0 T} T^{1/q} (\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,0}(\Pi_T)}) + \|\partial^{\mathbf{k}} \nabla \mathbf{f}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}. \end{aligned}$$

Если $m = 2$ и дополнительно $\|\partial_t \mathbf{B}, \partial_t \mathbf{C}\|_{L^\infty(0,T)} \leq N$, $\partial_t \mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, то верна оценка

$$\begin{aligned} & \|\partial_t^2 \partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \leq \\ & \leq c N^2 e^{c_0 T} T^{1/q} (\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,0}(\Pi_T)}) + \\ & + c N \|\partial^{\mathbf{k}} \{\mathbf{f}, \nabla \mathbf{f}, \partial_t \mathbf{f}\}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}. \end{aligned}$$

2. Пусть выполнены условия (4) с $\mu = 0$, $\mathbf{f}_\tau \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{g}_\tau \in L^2(\Pi_T)$, $\mathbf{y}_{0\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда для слабого решения $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\tau$ задачи Коши (3) верна оценка

$$\begin{aligned} & \max\{\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{y}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}, \sqrt{\nu} \tau \|\nabla \partial^{\mathbf{k}} \mathbf{y}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}\} \leq \\ & \leq e^{c_0 T} (\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} + \sqrt{\nu^{-1} \tau} \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{g}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}). \end{aligned}$$

3. Пусть выполнены условия (4) с $\mu = 0$, (7) с $\mu_1 = 0$, (8) и $\partial_t A_{ij} \in L^\infty(0, T)$, $A_{ij} = A_{ji}^T$, $i, j = \overline{1, n}$, а также $\mathbf{f}_\tau \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{y}_{0\tau} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{y}_{1\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда для слабого решения $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\tau$ задачи Коши (6) верна оценка

$$\begin{aligned} & \nu_1 \max\{\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{y}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}, \tau \|\partial^{\mathbf{k}} \{\nabla \mathbf{y}_\tau, \partial_t \mathbf{y}_\tau\}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)}, \\ & \sqrt{\delta} \tau \|\partial^{\mathbf{k}} \{\partial_t \mathbf{y}_\tau, \nabla \mathbf{y}_\tau\}\|_{L^2(\Pi_T)}\} \leq e^{c_1 T} (\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \\ & + \tau \sqrt{2c_A} \|\nabla \partial^{\mathbf{k}} \mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\tau \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{y}_{1\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\sqrt{2} \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}), \end{aligned}$$

где $\nu_1 = \min\{\sqrt{2\nu}, 1/\sqrt{2}\}$, $c_1 = \max\{2(c_0 + \sqrt{2}\|C\|_{L^\infty(0,T)}), (2\nu)^{-1}c_{A1}\}$, а $c_{A1} \geq 0$ прежнее.

Оценки последней теоремы верны и при $|\mathbf{k}|_1 = 0$, когда $\partial^{\mathbf{k}} v = v$.

Перейдем к оценкам производных разностей решений рассматриваемых систем. При $|\mathbf{k}|_1 = 0$ это будут те же оценки, что и выше, но с уточненными постоянными.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 6, пп. 1, 2, кроме условий на $\partial_t \mathbf{f}$ и $\partial_t \mathbf{B}, \partial_t \mathbf{C}$, и $\|\mathbf{A}\|_{L^\infty(0,T)} \leq N$. Пусть для краткости $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{g}_\tau = 0$, $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$ и $|\mathbf{k}|_1 \geq 0$. Тогда для разности $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \mathbf{y}_\tau$ решений задач Коши (1) и (3) верны оценки

$$\begin{aligned} & \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau} \|\nabla \partial^{\mathbf{k}} \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leq \\ & \leq c N e^{2c_0 T} \sqrt{T} \tau (\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,0}(\Pi_T)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau} \|\nabla \partial^{\mathbf{k}} \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leq \\ & \leq c N e^{2c_0 T} T \tau (\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,0}(\Pi_T)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \\ & \leq c N^\alpha e^{(1+\alpha)c_0 T} (T\tau)^{\alpha/2} (\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{\mathcal{W}^\alpha} + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{\alpha,0}}), \\ & 0 < \alpha < 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|\partial^k \mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau} \|\nabla \partial^k \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leq \\ & \leq c N e^{2c_0 T} (T\tau)^{\alpha/2} (\|\partial^k \mathbf{w}_0\|_{\mathcal{W}_2^{\alpha,0}} + \|\partial^k \mathbf{f}\|_{\mathcal{W}_2^{\alpha,0}}), \quad 1 < \alpha < 2. \end{aligned}$$

Теорема 8. Пусть выполнены все условия теоремы 6, п. 1 с $q = 1$ и п. 3, а также $\|A\|_{L^\infty(0,T)} \leq N$. Пусть $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{y}_{1\tau} = 0$ и $|\mathbf{k}_l| \geq 0$. Тогда для разности $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \mathbf{y}_\tau$ решений задач Коши (1) и (6) при $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$ либо $\mathbf{y}_{0\tau} = \bar{\sigma}^{(\tau)} \mathbf{w}_0$ верны соответственно оценки

$$\begin{aligned} & \|\partial^k \mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \tau \|\nabla \partial^k \mathbf{r}_\tau, \partial_t \partial^k \mathbf{r}_\tau\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} + \\ & + \sqrt{\delta} \tau \|\nabla \partial^k \mathbf{r}_\tau, \partial_t \partial^k \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leq \\ & \leq c N^2 e^{(c_0+c_1)T} (T+1) \tau (\|\partial^k \mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^k \mathbf{f}\|_{\mathcal{W}_2^{2,1}(\Pi_T)}), \\ & \|\partial^k \mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \\ & \leq c N^\alpha e^{(\alpha c_0/2+c_1)T} [(T+1)\tau]^{\alpha/2} (\|\partial^k \mathbf{w}_0\|_{\mathcal{W}_2^{\alpha,0}} + \|\partial^k \mathbf{f}\|_{\mathcal{W}_2^{\alpha,0/2}}), \\ & \quad 0 < \alpha \leq 2. \end{aligned}$$

Каждую из оценок в теоремах 6–8 можно просуммировать по всем \mathbf{k} с $|\mathbf{k}_l| = p$, что приводит к аналогичным оценкам с заменой ∂^k на ∇^p с любым $p \geq 1$. В частности, из таких оценок \mathbf{r}_τ при $p > n/2$ в силу теоремы вложения следуют оценки в норме $\sup_{\Pi_T} |\mathbf{r}_\tau(x, t)|$.

Обратимся к линеаризованным на постоянном решении КГД системам уравнений. Запишем их относительно нормированного (безразмерного) вектора малых возмущений $\tilde{\mathbf{z}}(x, t) := (\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\varepsilon})(x, t)$ плотности, скорости и удельной внутренней энергии газа, где $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$, $n = 1, 2, 3$. Они представляют собой систему дифференциальных уравнений $\ell + 1$ -го порядка по t и 2-го порядка по x с постоянными коэффициентами, где $\ell = 0$ для параболической и $\ell = 1$ для гиперболической КГД систем. В симметризованной матричной форме задача Коши для них примет вид

$$\ell \tau \partial_t^2 \tilde{\mathbf{z}} + \partial_t \tilde{\mathbf{z}} + c_* B^{(i)} \partial_i \tilde{\mathbf{z}} - \tau c_*^2 A^{(ij)} \partial_i \partial_j \tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{f}_\tau \quad \text{в } \Pi_T, \quad (12)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}|_{t=0} = \tilde{\mathbf{z}}_{0\tau}, \quad \partial_t \tilde{\mathbf{z}}|_{t=0} = \tilde{\mathbf{z}}_{1\tau} \quad (\text{при } \ell = 1) \quad \text{в } \mathbb{R}^n, \quad (13)$$

где $B^{(i)}$ и $A^{(ij)}$ – постоянные симметричные матрицы конвективных и вязких слагаемых порядка $m = n + 2$, $A^{(ij)} = A^{(ji)}$, ср. с [11, 12], $c_* > 0$ – фоновая скорость звука, $\tau > 0$ – параметр релаксации. Эти матрицы выписаны явно в [12] (в $A^{(kk)}$ в блоках (1,1), (3,3) у $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\gamma_*}$ следует убрать $\sqrt{\cdot}$). Свободный член \mathbf{f}_τ дописан формально для общности анализа.

При $\tau = 0$ эта задача переходит в задачу Коши для линеаризованной системы уравнений газовой динамики 1-го порядка

$$\partial_t \mathbf{w} + c_* B^{(i)} \partial_i \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad \text{в } \Pi_T, \quad \mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}_0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n. \quad (14)$$

Для $\tilde{\mathbf{z}} = (\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\varepsilon})$, $\mathbf{z} = (\rho, \mathbf{u}, \varepsilon) \in H^1(\mathbb{R}^n)$ введем билинейную форму

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) &= \frac{1}{\gamma} (\nabla \tilde{\rho}, \nabla \rho)_{\mathbb{R}^n} + (\mathbf{M} \nabla \tilde{\rho}, \mathbf{M} \nabla \rho)_{\mathbb{R}^n} + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\gamma}} ((\mathbf{M} \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \rho)_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{\sqrt{\gamma \gamma_*}} (\nabla \tilde{\varepsilon}, \nabla \rho)_{\mathbb{R}^n} + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\gamma}} (\mathbf{M} \nabla \tilde{\rho}, \operatorname{div} \mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} + \hat{\alpha}_s (\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} + \\ &+ (\hat{a}_0 + 1) (\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}, \operatorname{div} \mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} + ((\mathbf{M} \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, (\mathbf{M} \nabla) \mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}} (\mathbf{M} \nabla \tilde{\varepsilon}, \operatorname{div} \mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{\sqrt{\gamma \gamma_*}} (\nabla \tilde{\rho}, \nabla \varepsilon)_{\mathbb{R}^n} + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}} ((\mathbf{M} \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \varepsilon)_{\mathbb{R}^n} + \left(\hat{\alpha}_p + \frac{1}{\gamma_*} \right) (\nabla \tilde{\varepsilon}, \nabla \varepsilon)_{\mathbb{R}^n} + \\ &+ (\mathbf{M} \nabla \tilde{\varepsilon}, \mathbf{M} \nabla \varepsilon)_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_n)$ – нормированная на c_* фоновая скорость и поэтому $M = |\mathbf{M}|$ – фоновое число Маха, $\mathbf{M} \nabla = \mathbf{M} \cdot \nabla$, $\gamma_* = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$, $\hat{a}_0 = \frac{1}{3} \hat{\alpha}_s + \hat{\alpha}_{1s} \geq 0$, причем $\gamma > 1$ – показатель адиабаты в уравнении состояния газа, $\hat{\alpha}_s \geq 0$, $\hat{\alpha}_{1s} \geq 0$, $\hat{\alpha}_p \geq 0$ – постоянные КГД-параметры в искусственных коэффициентах вязкости и теплопроводности. Формально эта форма получается умножением $-A^{(ij)} \partial_i \partial_j \tilde{\mathbf{z}}$ на \mathbf{z} , интегрированием по \mathbb{R}^n и по частям.

Следующий результат родственен полученным недавно в [12, 16]. Пусть $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{z} = B^{(i)} \partial_i \mathbf{z}$.

Лемма 1. Верны свойства симметричности $\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}})$ и неотрицательной определенности

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) &= \hat{\alpha}_s \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \hat{a}_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \\ &+ \hat{\alpha}_p \|\nabla \varepsilon\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{z}\|_{\mathbb{R}^n}^2 \geq \|\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{z}\|_{\mathbb{R}^n}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) &\geq \max\{\delta_0 \|\nabla \rho\|_{\mathbb{R}^n}^2, \hat{\alpha}_s \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \\ &- \hat{a}_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \hat{\alpha}_p \|\nabla \varepsilon\|_{\mathbb{R}^n}^2\} \geq \delta_1 \|\nabla \mathbf{z}\|_{\mathbb{R}^n}^2 \end{aligned}$$

для любых $\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, с $\delta_0 := \frac{1}{3\gamma} \min\left\{1, \frac{\hat{\alpha}_s}{M^2}, \gamma_* \hat{\alpha}_p\right\}$,

$$\delta_1 := \frac{1}{2} \min\{\delta_0, \hat{\alpha}_s, \hat{\alpha}_p\}.$$

Все предыдущие теоремы применимы к задачам Коши для системы уравнений газовой динамики (14) и КГД систем (12), (13) в силу лем-

мы 1. Это непосредственно приводит к заключительному результату.

Теорема 9.1. Для задачи Коши для линейризованной системы уравнений газовой динамики (14) верны теоремы 1 и 6, п. 1 с $c_0 = 0$.

2. Пусть $\hat{\alpha}_s > 0$, $\hat{\alpha}_p > 0$. Для задач Коши для линейризованных КГД систем (12), (13) верны свойства (4) с $\nu = c_*^2 \delta_1$, $\mu = 0$ и (5) с $\delta = \mu_1 = 0$, и поэтому верны теоремы 2 и 6, п. 2 с $\bar{c}_0 = c_0 = 0$ при $\ell = 0$ либо теоремы 3 и 6, п. 3 с $\bar{c}_1 = c_1 = 0$ при $\ell = 1$.

Для разности $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{z}}$ решений задач Коши для линейризованных системы уравнений газовой динамики (14) и КГД систем (12), (13) верны оценки теорем 4 и 7 с $c_0 = 0$ при $\ell = 0$ либо теорем 5 и 8 с $c_0 = c_1 = 0$ при $\ell = 1$.

Указанное равенство постоянных c_k , \bar{c}_k нулю важно, т.к. означает ограниченность или степенной (вместо экспоненциального) рост по T постоянных в соответствующих оценках.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 22-11-00126.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.

2. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
3. Четверушкин Б.Н. // Матем. моделирование. 2018. Т. 30. № 2. С. 81–98.
4. Fattorini H. // J. Diff. Equat. 1987. V. 70. P. 1–41.
5. De Jager E.M., Furu J. The theory of singular perturbations. Amsterdam: Elsevier, 1996.
6. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. Новосибирск: Т. Рожковская, 2003.
7. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
8. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
9. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
10. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
11. Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. // ЖВМиМФ. 2008. Т. 48. № 3. С. 445–472.
12. Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. // Дифф. уравнения. 2020. Т. 56. № 7. С. 936–947.
13. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
14. Tartar L. An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces. Berlin: Springer, 2007.
15. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
16. Злотник А.А., Федченко А.С. // ДАН. Матем., информ., процессы управл. 2021. Т. 501. № 1. С. 31–37.

ON PARABOLIC AND HYPERBOLIC 2ND ORDER PERTURBATIONS OF A SYMMETRIC HYPERBOLIC 1ST ORDER SYSTEM

A. A. Zlotnik^{a,b} and Academician of the RAS B. N. Chetverushkin^b

^a Higher School of Economics University, Moscow, Russian Federation

^b Federal Research Center Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

We study the Cauchy problems for a symmetric hyperbolic system of equations of the 1st order with variable coefficients and its singular perturbations which are strongly parabolic and 2nd order hyperbolic systems of equations with a small parameter $\tau > 0$ in front of the second derivatives with respect to x and t . The properties of the solutions of all three systems are formulated, and estimates of the order $O(\tau^{\alpha/2})$ are given for the difference between solutions of the original system and systems with perturbations, for an initial function \mathbf{w}_0 of smoothness α in the sense of $L^2(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha \leq 2$. For $\alpha = 1/2$, a broad class of discontinuous \mathbf{w}_0 is covered. We give an application to the linearized system of gas dynamics equations and parabolic and 2nd order hyperbolic quasi-gasdynamic systems of equations.

Keywords: linear systems of partial differential equations, small parameter, estimates for the difference of solutions, quasi-gasdynamic systems of equations

БИНАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА

© 2022 г. С. В. Асташкин^{1,*}

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным

Поступило 13.05.2022 г.

После доработки 02.08.2022 г.

Принято к публикации 10.08.2022 г.

Подпространство H перестановочно-инвариантного пространства X сильно вложено в X , если на H сходимость в X -норме и по мере эквивалентны. Получены необходимые и достаточные условия на функцию Орлича M , при которых единичный шар любого подпространства, сильно вложенного в пространство Орлича L_M , имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M .

Ключевые слова: перестановочно-инвариантное пространство, сильно вложенное подпространство, функция Орлича, пространство Орлича, индексы Матушевской–Орлича

DOI: 10.31857/S2686954322050034

§ 1. Банахово пространство E измеримых на $[0, 1]$ функций называется перестановочно-инвариантным (кратко г.и.), или симметричным, если 1) из того, что x измерима, $|x(t)| \leq |y(t)|$ для всех $t \in [0, 1]$ и $y \in E$, следует $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$; 2) из равноизмеримости функций x и y (это означает, что

$$\text{mes}\{t: |x(t)| > \tau\} = \text{mes}\{t: |y(t)| > \tau\}$$

для каждого $\tau > 0$, где mes – мера Лебега на $[0, 1]$), и $y \in E$ следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$. В частности, всякая измеримая функция x равноизмерима со своей невозрастающей на $(0, 1]$ перестановкой $x^*(t) := \inf\{\tau \geq 0: \text{mes}\{s: |x(s)| > \tau\} \leq t\}$, $0 < t \leq 1$. Теория г.и. пространств изложена в монографиях [1–3].

Самый известный пример г.и. пространств – пространства L^p , $1 \leq p \leq \infty$. Их естественным обобщением являются пространства Орлича [4, 5]. Пусть M – непрерывная выпуклая возрастающая функция на $[0, \infty)$, $M(0) = 0$. Пространство Орлича L_M состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций, для которых конечна норма Люксембурга

$$\|x\|_{L_M} := \inf \left\{ \lambda: \lambda > 0, \int_0^1 M(|x(t)|/\lambda) dt \leq 1 \right\}.$$

Если $M(u) = u^p$, то $L_M = L^p$ изометрически. Пространство L_M сепарабельно тогда и только тогда, когда M удовлетворяет Δ_2 -условию в бесконечности ($M \in \Delta_2^\infty$), т.е. $M(2u) \leq CM(u)$ для некоторого $C > 0$ и всех достаточно больших u .

Для каждой функции Орлича M определим следующие непустые компактные подмножества пространства $C[0, 1]$:

$$E_{M,A}^\infty := \left\{ N(x) = \frac{M(xy)}{M(y)}: y > A \right\} \quad (A > 0),$$

$$E_M^\infty := \bigcap_{A>0} E_{M,A}^\infty, \quad C_M^\infty := \overline{\text{conv} E_M^\infty},$$

где $\text{conv} U$ – выпуклая оболочка множества U , а замыкание берется в $C[0, 1]$, а также индексы Матушевской–Орлича в бесконечности:

$$\alpha_M^\infty := \sup \left\{ p: \sup_{t,s \geq 1} \frac{M(t)s^p}{M(ts)} < \infty \right\},$$

$$\beta_M^\infty := \inf \left\{ p: \inf_{t,s \geq 1} \frac{M(t)s^p}{M(ts)} > 0 \right\}.$$

Множество C_M^∞ определяет структуру подпространств, порожденных последовательностями попарно дизъюнктивных функций в пространстве

¹ Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королёва, Самара, Россия

*E-mail: astash56@mail.ru

L_M [6] (измеримые функции x и y *дизъюнкты*, если $\text{mes}(\{t: x(t) \neq 0\} \cap \{t: y(t) \neq 0\}) = 0$). Легко проверить, что $1 \leq \alpha_M^\infty \leq \beta_M^\infty \leq \infty$.

Аналогично, если ψ – функция Орлича, то *пространство Орлича последовательностей* ℓ_ψ состоит из всех последовательностей $(a_k)_{k=1}^\infty$, для которых

$$\|(a_k)_{k=1}^\infty\|_{\ell_\psi} := \inf \left\{ u > 0 : \sum_{k=1}^\infty \psi(|a_k|/u) \leq 1 \right\} < \infty.$$

Если $1 \leq p < \infty$, φ – непрерывная возрастающая вогнутая на $[0, 1]$ функция, $\varphi(0) = 0$, то *пространство Лоренца* $\Lambda_p(\varphi)$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций, для которых $\|x\|_{\Lambda_p(\varphi)} :=$

$$:= \left(\int_0^1 x^*(t)^p d\varphi(t) \right)^{1/p} < \infty.$$

Говорят, что (замкнутое линейное) подпространство H г.и. пространства X *сильно вложено* в X , если сходимость в X -норме и по мере на H эквивалентны. В частности, в силу неравенства Хинчина [7, глава V, теорема 8.4] функции Радемахера $r_k(t) = \text{sign}(\sin 2^k \pi t)$, $k \in N$, $t \in [0, 1]$, порождают сильно вложенное подпространство в L_p для каждого $1 \leq p < \infty$.

Множество $K \subset X$ имеет *равностепенно непрерывные нормы* в г.и. пространстве X , если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{m(E) < \delta} \sup_{x \in K} \|x\chi_E\|_X = 0$. Нетрудно показать, что подпространство H сильно вложено в X , если его единичный шар $B_H := \{x \in X: \|x\|_X \leq 1\}$ имеет равностепенно непрерывные нормы в X .

Введенные понятия тесно связаны со свойствами величины

$$\eta_X(K) := \lim_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in K, x \neq 0} \frac{\|x^* \chi_{[0,t]}\|_X}{\|x\|_X},$$

где X – г.и. пространство, $K \subset X$, χ_E – характеристическая функция измеримого подмножества $E \subset [0, 1]$. Величина $\eta_X(K)$ в явном виде была введена Е.В. Токаревым в [8], хотя в случае $E = L_1$ она возникла гораздо раньше в классической работе М.И. Кадеца и А. Пелчинского [9]. Позднее эта величина изучалась в работах [10] и [11].

Ясно, что всегда $0 \leq \eta_X(K) \leq 1$. Если H – подпространство г.и. пространства X и $\eta_X(H) < 1$, то H сильно вложено в X . Кроме того, $\eta_X(H) = 0$ тогда и только тогда, когда единичный шар B_H имеет равностепенно непрерывные нормы в X .

Вслед за [11] назовем г.и. пространство X *бинарным*, если $\eta_X(H)$ принимает на его подпространствах H только два значения: 0 и 1. Как легко видеть, г.и. пространство X бинарно, если единичный шар B_H всякого сильно вложенного в X подпространства H имеет равностепенно непрерывные нормы в X .

Согласно известной теореме Х.П. Розенталя [12, теорема 13] пространство L^p бинарно, если $1 \leq p < 2$ (нетрудно показать, что последнее условие необходимо). В [11] (см. также [10]) этот результат (при таком же условии на p) был распространен на пространства Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$.

Будучи тесно связанной со свойствами подпространств, величина $\eta_X(K)$ является важной геометрической характеристикой г.и. пространства X . Как выяснено в настоящей работе, вопрос о бинарности г.и. пространства X определяется структурой подпространств X , порождаемых последовательностями попарно дизъюнктных функций в нем. Если в пространствах Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$ она достаточно проста (всякая такая нормированная последовательность содержит подпоследовательность, эквивалентную стандартному базису в l^p [13]), то в пространствах Орлича она гораздо сложнее. В работе получены необходимые и достаточные условия бинарности пространств Орлича.

§ 2. Всюду далее функция Орлича M удовлетворяет условию: $1 < \alpha_M^\infty \leq \beta_M^\infty < 2$.

В доказательстве следующего ключевого утверждения используются конструкции из работы [14].

Предложение 1. Если в пространстве Орлича L_M существует сильно вложенное подпространство, единичный шар которого имеет не равностепенно непрерывные нормы в L_M , то для некоторой $\psi \in C_M^\infty$ выполнено: $1/\psi^{-1} \in L_M$.

Применяя предложение 1 вместе с результатами работ [6] и [15], получаем

Теорема 1. *Предположим, что $1/\psi^{-1} \notin L_M$ для всякой функции $\psi \in C_M^\infty$. Тогда, если H – подпространство L_M , то следующие условия эквивалентны:*

(i) *H не содержит бесконечномерных подпространств, изоморфных подпространствам, порожденным в L_M попарно дизъюнктными функциями;*

(ii) H сильно вложено в L_M ;

(iii) единичный шар B_H имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M .

Следующее утверждение содержит легко проверяемые достаточные условия на функцию M , при которых $1/\psi^{-1} \notin L_M$ для каждой $\psi \in C_M^\infty$.

Предложение 2. Пусть M – функция Орлича, $1 < \alpha_M^\infty \leq \beta_M^\infty < 2$. Предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

(a) $M(uv) \leq C_1 M(u)M(v)$ для некоторого $C_1 > 0$ и всех $u, v \geq 1$;

(b) $t^{-1/\beta_M^\infty} \notin L_M$ и для некоторого $C_2 > 0$

$$M(uv) \leq C_2 u^{\beta_M^\infty} M(v), \quad u, v \geq 1. \quad (1)$$

Тогда $1/\psi^{-1} \notin L_M$ для каждой функции $\psi \in C_M^\infty$.

Как следствие, получаем вариант упоминавшейся теоремы Х.П. Розенталя о структуре подпространств L^p -пространств для пространств Орлича: если функция Орлича M удовлетворяет хотя бы одному из условий (a) или (b) предложения 2 и H – подпространство пространства Орлича L_M , то условия (i), (ii) и (iii) эквивалентны. Таким образом (см. § 1), в этом случае пространство L_M бинарно.

Напомним, что функция Орлича M , $M \in \Delta_2^\infty$, называется *правильно меняющейся на бесконечности порядка p* , если $\lim_{t \rightarrow \infty} M(tu)/M(t) = u^p$. Примером является функция $M(u) = u^p (\ln u)^{q_1} (\ln \ln u)^{q_2} \dots (\ln \dots \ln u)^{q_n}$, где $p \in (1, \infty)$, а вещественные числа q_1, \dots, q_n произвольны. Если M – правильно меняющаяся на бесконечности функция порядка p , то $C_M^\infty = \{t^p\}$. Поэтому в силу предложения 2 построенное по такой функции пространство Орлича L_M бинарно.

В следующей теореме приведено необходимое условие бинарности пространства Орлича, которое зачастую также и достаточно.

Теорема 2. Если пространство Орлича L_M бинарно, то $t^{-1/\beta_M^\infty} \notin L_M$. Если дополнительно выполнено (1), то верно также обратное: из того, что $t^{-1/\beta_M^\infty} \notin L_M$, вытекает бинарность L_M .

Для подпространств, изоморфных пространствам Орлича последовательностей, получен более точный результат.

Теорема 3. Для того, чтобы единичный шар B_H произвольного сильно вложенного подпространства H пространства Орлича L_M , изоморфного некоторому пространству Орлича последовательно-

стей, имел в L_M равностепенно непрерывные нормы, необходимо и достаточно, чтобы $t^{-1/\beta_M^\infty} \notin L_M$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2022-878.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces II. Function spaces. V. 97. В.: Springer-Verlag, 1979. 246 p.
2. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. Bennett C., Sharpley R. Interpolation of operators. London: Academic Press, 1988. 469 p.
4. Красносельский М.А., Рунцицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. 271 с.
5. Rao M.M., Ren Z.D. Theory of Orlicz spaces, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. V. 146. N.Y.: Marcel Dekker Inc., 1991. 445 p.
6. Lindenstrauss J., Tzafriri L. On Orlicz sequence spaces. III // Israel J. Math. 1973. V. 14. P. 368–389.
7. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. I. М.: Мир, 1965. 615 с. [перевод с английского Zygmund A. Trigonometric series. VI. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1959.]
8. Токарев Е.В. О подпространствах некоторых симметричных пространств // В сб. “Теория функций, функциональный анализ и их приложения”, вып. 24, Харьков, 1975, С. 156–161.
9. Kadec M.I., Pełczyński A. Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p // Studia Math. 1962. V. 21. P. 161–176.
10. Новиков С.Я., Семенов Е.М., Токарев Е.В. Структура подпространств пространств Λ_p // Докл. АН СССР. 1979. Т. 243. № 3. С. 252–254.
11. Новиков С.Я., Семенов Е.М., Токарев Е.В. О структуре подпространств пространств $\Lambda_p(\mu)$ // В сб. “Теория функций, функциональный анализ и их приложения”, вып. 42, Харьков, 1984. С. 91–97.
12. Rosenthal H.P. On subspaces of L^p // Annals of Math. 1973. V. 97. P. 344–373.
13. Figiel T., Johnson W. B., Tzafriri L. On Banach lattices and spaces having local unconditional structure with applications to Lorentz function spaces // J. Approx. Theory. 1975. V. 13. P. 395–412.
14. Astashkin S.V. $\Lambda(p)$ -spaces // J. Funct. Anal. 2014. V. 266. P. 5174–5198.
15. Astashkin S.V. On symmetric spaces containing isomorphic copies of Orlicz sequence spaces // Comment. Math. 2016. V. 56. № 1. P. 29–44.

BINARY ORLICZ SPACES**S. V. Astashkin***Samara National Research University, Samara, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin

A subspace H of a rearrangement invariant space X is strongly embedded in X if, on H , convergence in the X -norm is equivalent to convergence in measure. Necessary and sufficient conditions on an Orlicz function M are obtained, under which the unit ball of any subspace, strongly embedded in the Orlicz space L_M , has equi-absolutely continuous norms in L_M .

Keywords: rearrangement invariant space, strongly embedded subspace, Orlicz function, Orlicz space, Matuszewska–Orlicz indices

УДК 517.956

ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЗВОНКИНА К СТАЦИОНАРНЫМ УРАВНЕНИЯМ КОЛМОГОРОВА

© 2022 г. В. И. Богачев^{1,2,3,*}, М. Рёкнер⁴, С. В. Шапошников^{1,2,**}

Представлено академиком РАН А.Н. Ширяевым

Поступило 31.05.2022 г.

После доработки 19.06.2022 г.

Принято к публикации 15.07.2022 г.

В заметке развивается новая аналитическая версия преобразования Звонкина коэффициента сноса стационарного уравнения Колмогорова и это преобразование применяется к выводу неравенства Харнака для неотрицательных решений в случае, когда матрица диффузии не является локально соболевской. Получено также обобщение известной теоремы Хасьминского о существовании вероятностного решения стационарного уравнения Колмогорова.

Ключевые слова: стационарное уравнение Колмогорова, условие Дини, класс VMO, преобразование Звонкина

DOI: 10.31857/S2686954322050046

В заметке развивается новая аналитическая версия преобразования Звонкина [1] коэффициента сноса стационарного уравнения Колмогорова на \mathbb{R}^d и это преобразование применяется к выводу неравенства Харнака для неотрицательных решений при условии, что матрица диффузии A невырождена и удовлетворяет условию Дини средней осцилляции, а коэффициент сноса b локально интегрируем в некоторой степени $p > d$. Получено также обобщение известной теоремы Хасьминского о существовании вероятностного решения стационарного уравнения Колмогорова на случай, когда матрица A удовлетворяет условию Дини или принадлежит классу VMO.

Рассмотрим стационарное уравнение Колмогорова

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij} \varrho) - \partial_{x_i} (b^i \varrho) = 0 \quad (1)$$

на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, где коэффициенты a^{ij} и b^i – борелевские функции, а матрица

$A = (a^{ij})$ симметрична и положительно определена. Пусть

$$L\varphi = a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi + b^i \partial_{x_i} \varphi,$$

$$L^* \varphi = \partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij} \varphi) - \partial_{x_i} (b^i \varphi).$$

Тогда уравнение (1) можно записать в более коротком виде $L^* \varrho = 0$. Функция $\varrho \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ называется решением уравнения (1), если

$$a^{ij} \varrho, \quad b^i \varrho \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$$

и для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено равенство

$$\int_{\Omega} L\varphi(x) \varrho(x) dx = 0.$$

Неотрицательное решение ϱ уравнения Колмогорова (1) с единичным интегралом называется вероятностным решением. Уравнения типа (1) называют также уравнениями двойного дивергентного вида.

Важным стимулом для изучения таких уравнений является то, что они выполнены для инвариантных мер диффузионных процессов.

В случае локально липшицевых коэффициентов существование вероятностного решения дается классической теоремой Хасьминского [2] при условии существования функции Ляпунова. Эта теорема была обобщена в [3–5], где либо коэффициент диффузии невырожден и является локально соболевским с порядком интегрируемо-

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия

³ Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия

⁴ Университет Билефельда, Билефельд, Германия

*E-mail: vibogach@mail.ru

**E-mail: starticle@mail.ru

сти выше размерности вместе с такой же локальной интегрируемостью коэффициента сноса, либо коэффициенты диффузии и сноса непрерывны. Согласно [6], в первом случае решение является локально соболевским и его непрерывная версия локально отделена от нуля. В работах [7] и [8] было доказано, что в случае, когда матрица $A = (a^{ij})$ невырождена и удовлетворяет условию Дини и коэффициенты b^i ограничены, решение имеет непрерывную версию, а если коэффициенты a^{ij} гёльдеровы, то решение имеет гёльдерову версию. Эти результаты были обобщены в [9] на случай локально интегрируемых b^i . Аналогичные результаты были получены в [10] и [11] при предположении, что A удовлетворяет условию Дини средней осцилляции (см. определение ниже), которое слабее, чем классическое условие Дини. Напомним, что отображение удовлетворяет условию Дини, если для его модуля непрерывности ω имеем

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty.$$

Некоторые интересные контрпримеры были построены в [12] и [13], в частности, пример положительно определенной и непрерывной матрицы диффузии A , для которой уравнение $\partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij} \varrho) = 0$ имеет локально неограниченное решение. Неравенство Харнака для уравнений двойного дивергентного вида с матрицей A , принадлежащей классу Соболева с достаточно высоким порядком интегрируемости, является следствием неравенства Харнака для эллиптических уравнений дивергентного вида (см. [4, гл. 3]). В том случае, когда матрица A удовлетворяет условию Дини, неравенство Харнака было получено в [14] для $b = 0$; для ограниченного сноса b оно было установлено в [9], причем доказательство существенно использовало ограниченность b . Другой способ доказательства неравенства Харнака для $b = 0$ был предложен в [11]. В работах [6] и [9] (см. также [4, гл. 1]) интегрируемость решений исследовалась без условия Дини. В частности, было показано, что если $A \in VMO$ и коэффициент b локально интегрируем в некоторой степени $p > d$, то решение принадлежит всем $L^p_{loc}(\Omega)$.

Наша работа содержит следующие новые результаты: (i) неравенство Харнака для неотрицательных решений, если матрица A невырождена и удовлетворяет условию Дини средней осцилляции, а коэффициент b локально интегрируем в некоторой степени $p > d$, (ii) достаточные условия для локальной экспоненциальной интегрируемости ϱ , (iii) обобщение теоремы Хасьминского о существовании вероятностного решения ста-

ционарного уравнения Колмогорова на случай, когда матрица A удовлетворяет условию Дини, а снос не является локально ограниченным.

Эти результаты основаны на новом результате о преобразованиях типа Звонкина. Так называемое преобразование Звонкина, введенное в [1], является эффективным методом в теории диффузионных процессов для сглаживания коэффициента сноса. Мы применяем преобразование Звонкина не к диффузионным процессам, а к решениям уравнения Колмогорова, более того, мы не предполагаем какой-либо связи решений с диффузионными процессами. Нами показано, что с помощью подходящей замены координат интегрируемый снос может быть преобразован в непрерывно дифференцируемый снос, для которого новая матрица диффузии позволяет применять известные результаты о регулярности решений.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

Для удобства считаем, что коэффициенты a^{ij} определены на \mathbb{R}^d и для некоторого числа $\nu > 0$ и всех $x \in \mathbb{R}^d$ выполнены следующие неравенства:

$$\nu \cdot I \leq A(x) \leq \nu^{-1} \cdot I. \tag{H_a}$$

Кроме того, коэффициенты a^{ij} принадлежат классу VMO , т.е. существует такая непрерывная возрастающая функция ω на $[0, +\infty)$, что $\omega(0) = 0$ и

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^d} r^{-2d} \int_{B(z,r)} \int_{B(z,r)} |a^{ij}(x) - a^{ij}(y)| dx dy \leq \omega(r), \quad r > 0,$$

где $B(z, r)$ — шар радиуса r с центром z ,

$$b \in L^{d+}_{loc}(\Omega), \tag{H_b}$$

что означает, что для каждого шара $B \subset \Omega$ найдется такое число $p = p(B) > d$, что ограничение $|b|$ на B входит в $L^p(B)$.

Теперь построим преобразование Звонкина Φ .

Пусть $B(x_0, 4R) \subset \Omega$ и $\beta(x) = b(x)$, если $x \in B(x_0, 4R)$, $\beta(x) = 0$, если $x \notin B(x_0, 4R)$. Тогда $\beta \in L^p(\mathbb{R}^d)$ и $\|\beta\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|b\|_{L^p(B(x_0, 4R))}$. Пусть $1 \leq k \leq d$.

Рассмотрим на \mathbb{R}^d эллиптическое уравнение

$$\text{tr}(AD^2u) + \langle \beta, \nabla u \rangle - \lambda u = -\beta^k, \quad \lambda > 0. \tag{2}$$

Можно показать, что для каждого $\delta > 0$ существует такое $\lambda > 0$, что для всякого $k \leq d$ уравнение (2) имеет решение $u_k \in C^1(\mathbb{R}^d) \cap W^{p,2}(\mathbb{R}^d)$, для которого

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\nabla u_k(x)| \leq \delta, \quad \|u_k\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^d)} \leq M,$$

где постоянная M зависит только от d, ν, ω и $\|b\|_{L^p(B(x_0, 4R))}$. Пусть $u = (u^1, \dots, u^d)$ с упомянутыми выше решениями u^k уравнения (2). Ниже u' и Φ' обозначают матрицы Якоби отображений u и Φ . Возьмем достаточно малое δ так, что для всех $x \in \mathbb{R}^d$

$$\|u(x)\| \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq \det(I + u'(x)) \leq 2.$$

Положим

$$\Phi(x) = x + u(x).$$

Предложение 1. (i) Отображение Φ является диффеоморфизмом \mathbb{R}^d класса C^1 , более того, функции $\partial_{x_j} \Phi^k$ локально гёльдеровы. (ii) Верны неравенства

$$\frac{1}{2} \|x - y\| \leq \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq 2 \|x - y\|.$$

Напомним, что $B(x_0, 4R) \subset \Omega$. Пусть $\Psi = \Phi^{-1}$ и $y_0 = \Phi(x_0)$. Рассмотрим шар $B(y_0, 2R)$. Согласно неравенствам в (ii) выше, имеем

$$B(x_0, R) \subset \Psi(B(y_0, 2R)) \subset B(x_0, 4R).$$

Предложение 2. Пусть $\varrho \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ – решение уравнения (1). Тогда функция

$$\sigma(y) = |\det \Psi'(y)| \varrho(\Psi(y))$$

на $B(y_0, 2R)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}^* \sigma = 0$, где

$$\mathcal{L}f(y) = q^{km}(y) \partial_{y_k} \partial_{y_m} f(y) + h^k(y) \partial_{y_k} f(y)$$

и коэффициенты имеют вид

$$q^{km}(y) = a^{ij}(\Psi(y)) \partial_{x_i} \Phi^k(\Psi(y)) \partial_{x_j} \Phi^m(\Psi(y)),$$

$$h^k(y) = \lambda u^k(\Psi(y)).$$

Заметим, что векторное поле $h(y) = \lambda u(\Psi(y))$ непрерывно дифференцируемо на шаре $B(y_0, 2R)$. Кроме того, производная Φ также удовлетворяет условию Гёльдера. Следовательно, функция σ на $B(y_0, 2R)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}^* \sigma = 0$, в котором коэффициенты q^{mk} при производных второго порядка образуют невырожденную матрицу и принадлежат классу VMO , а коэффициенты h^k непрерывны на $B(y_0, 2R)$. Это позволяет применить результаты работ [7–9, 11] к функции σ и затем перенести их на ρ . Приведем пример, демонстрирующий простой вывод известного результата [9, теорема 3.1]) из случая хорошего сноса.

Пример 1. Если выполнены условия (H_a) и (H_b) и матрица A удовлетворяет условию Дини, то всякое решение $\varrho \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ уравнения (1) имеет непрерывную версию.

Доказательство. Проверим существование непрерывной версии функции ϱ на шаре $B(x_0, R/2) \subset B(x_0, 4R) \subset \Omega$. Пусть Φ – диффеоморфизм, построенный выше. В силу предложения 2 функция $\sigma(y) = \varrho(\Psi(y)) |\det \Psi'(y)|$ удовлетворяет на $B(y_0, 2R)$ уравнению с некоторыми коэффициентами, для которых выполнены предположения из [8, теорема 1], т.е. матрица (q^{mk}) невырождена и функции q^{mk}, h^k удовлетворяют условию Дини. Значит, σ имеет непрерывную версию на $B(y_0, R)$. Поскольку Φ – диффеоморфизм класса C^1 , отображения Φ и Ψ переводят множества меры нуль в множества меры нуль и модификация функции σ на множестве меры нуль приводит к изменению функции ρ на множестве меры нуль. Следовательно, функция ρ имеет непрерывную версию на $B(x_0, R/2)$.

Теперь приведем наши новые результаты о решениях стационарных уравнений Колмогорова, полученные с помощью преобразования Звонкина, построенного выше.

Следуя [10] и [11], будет говорить, что измеримая функция f на Ω удовлетворяет условию Дини средней осцилляции, если

$$\int_0^1 \frac{w(r)}{r} dr < \infty,$$

где

$$w(r) = \sup_{x \in \Omega} \frac{1}{|\Omega(x, r)|} \int_{\Omega(x, r)} |f(y) - f_\Omega(x, r)| dy,$$

$$f_\Omega(x, r) = \frac{1}{|\Omega(x, r)|} \int_{\Omega(x, r)} f(y) dy,$$

$$\Omega(x, r) = \Omega \cap B(x, r).$$

Классическое условие Дини влечет условие Дини средней осцилляции.

Следующее утверждение обобщает неравенство Харнака на случай, когда матрица диффузии удовлетворяет условию Дини средней осцилляции и коэффициент сноса локально неограничен (а лишь интегрируем в некоторой степени выше размерности). В известных результатах коэффициент сноса либо равен нулю, либо локально ограничен.

Теорема 1. *Предположим, что выполнено условие (H_a) , на каждом шаре матрица A удовлетворяет условию Дини средней осцилляции с некоторой функцией $\omega, b^i \in L^d_{\text{loc}}(\Omega)$. Предположим также, что $\varrho \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ – решение уравнения (1). Тогда функция ϱ имеет непрерывную версию. Более того, если $\varrho \geq 0$, то непрерывная версия функции ϱ удовлетворяет неравенству Харнака: для каждого ша-*

ра $B(x_0, R/2) \subset B(x_0, 4R) \subset \Omega$ существует такое число C , что

$$\sup_{x \in B(x_0, R/2)} \rho(x) \leq C \inf_{x \in B(x_0, R/2)} \varrho(x),$$

где C зависит от R, w, d, v, p и $\|b\|_{L^p(B(x_0, 4R))}$, но не зависит от ϱ . Модуль непрерывности функции ϱ на $B(x_0, R/2)$ зависит от тех же объектов.

Согласно [9, теорема 2.1], если a^{ij} и b^i удовлетворяют условиям (H_a) и (H_b) , причем $a^{ij} \in VMO$, то всякое решение $\rho \in L^1_{loc}(\Omega)$ локально интегрируемо во всякой степени $p \geq 1$. Если функции a^{ij} удовлетворяют условию Дини средней осцилляции, то решение локально ограничено и даже непрерывно. Рассмотрим промежуточный случай, когда A лежит в более узком классе, чем VMO , но не удовлетворяют условию Дини. Предположим, что a^{ij} и b^i удовлетворяют условиям (H_a) и (H_b) и

$$\|A(x) - A(y)\| \leq \omega(\|x - y\|),$$

где ω – возрастающая непрерывная функция на $[0, +\infty)$ с $\omega(0) = 0$. Предположим также, что для некоторого $C_\omega > 0$ и всех $t \geq 0$ мы имеем

$$\omega(t) \geq C_\omega t^{1-d/p}.$$

Например, подходит функция $\omega(t) = |\ln t|^{-1}$ около нуля, для которой условие Дини не выполнено.

Теорема 2. Пусть $\varrho \in L^1_{loc}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (1). Тогда для всякого замкнутого шара $B \subset \Omega$ верны следующие утверждения.

(i) Если $\lim_{t \rightarrow 0+} \omega(t) |\ln t| = 0$, то

$$\exp(\gamma_1 |\varrho|^{\gamma_2}) \in L^1(B) \quad \text{для всех } \gamma_1, \gamma_2 > 0.$$

(ii) Если функция $\omega(t) |\ln t|$ ограничена на $(0, 1]$, то существуют такие числа $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, что

$$\exp(\gamma_1 |\varrho|^{\gamma_2}) \in L^1(B).$$

(iii) Если для некоторого $\beta \in (0, 1)$ функция $\omega(t) |\ln t|^\beta$ ограничена на $(0, 1]$, то для некоторого $\gamma > 0$ имеем

$$\exp(\gamma |\ln(|\varrho| + 1)|^{1-\beta}) \in L^1(B).$$

Следующая теорема обобщает утверждение (i) теоремы 2.4.1 в книге [4] на случай, когда коэффициенты a^{ij} удовлетворяют условию Дини средней осцилляции. В цитированной теореме предполагалось, что функции a^{ij} принадлежат локально к классу Соболева $W^{p,1}$ с некоторым $p > d$.

Теорема 3. Предположим, что коэффициенты a^{ij} и b^i определены на \mathbb{R}^d , $b^i \in L^{d+}_{loc}$, причем для каждого шара B найдутся такие число $v_B > 0$ и непрерывная неотрицательная возрастающая функция w_B на $[0, 1]$, что $w_B(0) = 0$, функция $w_B(t)/t$ интегрируема на $[0, 1]$, $v_B \cdot I \leq A(x) \leq v_B^{-1} \cdot I$ для всех x , а также для всех $r \in (0, 1]$ имеем

$$\sup_{x \in B} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |a^{ij}(y) - a^{ij}_B(x, r)| dy \leq w_B(r).$$

Тогда существует непрерывное положительное решение ρ уравнения (1) на \mathbb{R}^d .

Этот результат дает следующее обобщение теоремы Хасьминского.

Следствие 1. Если в дополнение к предположениям теоремы 3 имеются функция V класса $W^{d,2}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ и числа $C > 0$ и $R > 0$, для которых

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty, \quad LV(x) \leq -C \quad \text{при } |x| \geq R,$$

то существует непрерывное положительное вероятностное решение ρ уравнения (1) на \mathbb{R}^d .

БЛАГОДАРНОСТИ

Благодарим А.Н. Ширяева за полезные обсуждения, а рецензента за ряд замечаний.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Это исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда 22-11-00015. С.В. Шапошников является победителем конкурса “Молодая математика России” и благодарит его жюри и спонсоров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Звонкин А.К. // Матем. сб. 1974. Т. 93. № 1. С. 129–149.
2. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., Наука, 1969.
3. Богачев В.И., Рёкнер М. // Теория вероятн. и ее примен. 2000. V. 45. № 3. С. 417–436.
4. Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V. Fokker–Planck–Kolmogorov equations. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2015.
5. Богачев В.И., Рёкнер М., Шапошников С.В. // Докл. АН. 2012. Т. 444. № 3. С. 245–249.
6. Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M. // Commun. Partial Differ. Equ. 2001. V. 26. № 11–12. P. 2037–2080.
7. Sjögren P. // Ark. Mat. 1973. V. 11. P. 153–165.
8. Sjögren P. // Ann. Inst. Фурье. 1975. V. 25. № 3–4. P. 509–518.

9. *Bogachev V.I., Shaposhnikov S.V.* // *Annali di Matematica*. 2017. V. 196. P. 1609–1635.
10. *Dong H., Kim S.* // *Comm. Partial Differ. Equ.* 2017. V. 42. № 3. P. 417–435.
11. *Dong H., Escauriaza L., Kim S.* // *Math. Ann.* 2018. B. 370. S. 447–489.
12. *Bauman P.* // *Ark. Mat.* 1984. V. 22. P. 153–173.
13. *Bauman P.* // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1984. V. 91. P. 64–68.
14. *Мамедов Ф.И.* // *Сиб. матем. ж.* 1992. Т. 33. № 5. С. 100–106.

APPLICATIONS OF ZVONKIN'S TRANSFORM TO STATIONARY KOLMOGOROV EQUATIONS

V. I. Bogachev^{a,b,c}, M. Röckner^d, and S. V. Shaposhnikov^{a,b}

^a *Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

^b *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*

^c *Saint-Tikhon's Orthodox University, Moscow, Russian Federation*

^d *Bielefeld University, Bielefeld, Germany*

Presented by Academician of the RAS A.N. Shiryaev

In this note we develop a new analytic version of Zvonkin's transform of the drift coefficient of a stationary Kolmogorov equation and apply this transform to derive the Harnack inequality for nonnegative solutions in the case where the diffusion matrix is not locally Sobolev. We also obtain a generalization of the known theorem of Hasminskii on existence of a probability solution to the stationary Kolmogorov equation.

Keywords: Keywords: stationary Kolmogorov equation, Dini's condition, class VMO, Zvonkin's transform

ПРИМЕРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С КОНТРАСТНЫМИ СОЧЕТАНИЯМИ ЛЯПУНОВСКИХ, ПЕРРОНОВСКИХ И ВЕРХНЕПРЕДЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ

© 2022 г. А. А. Бондарев^{1,*}, И. Н. Сергеев^{1,**}

Представлено академиком РАН В. В. Козловым

Поступило 17.05.2022 г.

После доработки 24.06.2022 г.

Принято к публикации 26.07.2022 г.

Приводится целый ряд примеров систем дифференциальных уравнений, обладающих в некотором смысле противоположными свойствами устойчивости или неустойчивости различного типа: ляпуновскими, перроновскими и верхнепредельными. Так, все ненулевые решения одной из этих систем стремятся к нулю (при неограниченном росте времени), удаляясь, тем не менее, от него хотя бы однажды на конкретное единое для них всех расстояние. К примеру, у другой системы все ненулевые решения, начинающиеся в фиксированной окрестности нуля, стремятся по норме к бесконечности, а все остальные — наоборот, к нулю.

Ключевые слова: дифференциальная система, устойчивость по Ляпунову, устойчивость по Перрону, верхнепредельная устойчивость, автономные системы, нелинейные системы, асимптотические свойства решений

DOI: 10.31857/S2686954322050058

ВВЕДЕНИЕ

В классическом примере Р.Э. Винограда [1, § 6.3] (или его упрощенной модификации А.Ф. Филиппова [2, § 18]) все решения конкретной двумерной автономной дифференциальной системы стремятся к нулю (здесь и всюду ниже — при неограниченном росте времени), но, тем не менее, нулевое решение этой системы является неустойчивым по Ляпунову.

Еще одним примером необычного сочетания свойств решений может послужить двумерная дифференциальная система [3, теорема 1], все ненулевые решения которой, начинающиеся достаточно близко к нулю, со временем навсегда удаляются от него на почтительное расстояние, что не мешает, однако, некоторому ее специальному решению стремиться к нулю.

В теоремах 1–5 настоящей работы (см. также работы [4, 5]) описан целый ряд усиленных вариантов этих сочетаний, также реализуемых на дифференциальных системах, а кроме того, представлены и некоторые их разновидности, допустимые

и при более жестких ограничениях на систему. Некоторые из этих сочетаний настолько экзотичны и контрастны, что на первый взгляд могут показаться даже внутренне противоречивыми.

Существенным подспорьем для настоящего исследования служат недавно введенные определения [5] перроновских и верхнепредельных свойств устойчивости и неустойчивости, развивающие и варьирующие известные ляпуновские понятия. Перроновские свойства связаны со знаками показателей Перрона [6, § 2] точно так же, как соответствующие ляпуновские свойства — со знаками показателей Ляпунова [6, § 1]. При этом перроновские свойства оказываются нижнепредельными, что позволяет рассматривать к тому же и их верхнепредельные аналоги, занимающие логически промежуточное положение между ляпуновскими и перроновскими свойствами.

ЛЯПУНОВСКИЕ, ПЕРРОНОВСКИЕ И ВЕРХНЕПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

Для числа $n \in \mathbb{N}$ и области G евклидова пространства \mathbb{R}^n (с нормой $|\cdot|$), содержащей начало координат, рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in G, \quad (1)$$

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: albondarev1998@yandex.ru

**E-mail: igniserg@gmail.com

с правой частью $f: \mathbb{R}_+ \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям

$$f, f_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

а значит, обеспечивающей существование и единственность решений задач Коши и допускающей нулевое решение. Обозначим через $\mathcal{S}_*(f)$ множество всех непродолжаемых ненулевых решений системы (1), а через $\mathcal{S}_\delta(f)$ и $\mathcal{S}^\delta(f)$ — его подмножества, состоящие из тех решений x , которые удовлетворяют начальному условию $|x(0)| < \delta$ и $|x(0)| > \delta$ соответственно.

Определение 1 [5]. Будем говорить, что для системы (1) (точнее, для ее нулевого решения, о чем мы для краткости не будем далее упоминать) имеет место *верхнепредельная*:

1) *устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| < \varepsilon \quad (2)$$

и *неустойчивость* — в противном случае;

2) *полная неустойчивость*, если для некоторых $\varepsilon, \delta > 0$ ни одно решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (2);

3) *глобальная неустойчивость*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ ни одно решение $x \in \mathcal{S}_*(f)$ не удовлетворяет требованию (2), и *частная устойчивость* — в противном случае;

4) *глобальная устойчивость*, если все решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$ удовлетворяют требованию

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0; \quad (3)$$

5) *массивная частная устойчивость*, если существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}^\delta(f)$ удовлетворяет требованию (3).

Определение 2 [5]. Со всеми введенными в определении 1 верхнепредельными свойствами системы (1) сопоставим одноименные свойства перроновского типа, которые получаются из верхнепредельных механической заменой во всех пунктах 1–5 определения 1 требований (2) и (3) требованиям

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| < \varepsilon, \quad (4)$$

и, соответственно,

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0. \quad (5)$$

Определение 3 [7, гл. IV]. С введенными в пп. 1–4 определений 1 и 2 верхнепредельными и перроновскими свойствами системы (1) сопоставим одноименные свойства ляпуновского типа, которые получаются из верхнепредельных заме-

ной в пунктах 1–3 определения 1 требования (2) требованием

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)| < \varepsilon, \quad (6)$$

а в п. 4 определения 1 — добавлением требования ляпуновской устойчивости системы (1).

Подчеркнем, что требования (2)–(6) в определениях 1–3 считаются невыполненными для решения x , в частности, уже тогда, когда оно попросту определено не на всей полуоси \mathbb{R}_+ , т.е. когда соответствующая ему фазовая кривая за конечное время выходит к границе области G (согласно теореме о продолжаемости решений; см., например, [8, § 22]).

Мы не привели здесь такие (не менее интересные [5], но не фигурирующие в нашей работе) разновидности верхнепредельных, перроновских и ляпуновских свойств, как *асимптотическая устойчивость* (неустойчивость), *частичная устойчивость* или *частная неустойчивость*. Одни из них являются *массивными* прямо по определению, а другие — *точечными*, но допускают усиление до массивных (что и было применено по отношению к частной устойчивости в определениях 1 и 2). Представляют интерес также и сочетания *орбитальных* [7, гл. IV, § 19] вариантов всех перечисленных свойств применительно, скажем, к предельному циклу.

Если система (1) автономна, то ее ляпуновская и верхнепредельная устойчивости могут ассоциироваться с *устойчивостью по Лагранжу* [9, гл. IV, §§ 4, 5], означающей предкомпактность фазовой траектории, выходящей из данной точки (что, кстати, в случае ее неподвижности выполнено автоматически). Понятия же устойчивости и неустойчивости по Перрону весьма отдаленно напоминают, соответственно, *устойчивость по Пуассону* и *блуждаемость* [9, гл. IV, §§ 4, 5], первую из которых, состоящую в сколь угодно позднем возвращении траектории в любую наперед заданную окрестность своей начальной точки, зачастую искусственно отождествляют с устойчивостью по Перрону, не делая различия между окрестностями начальной точки и исследуемой неподвижной точки (см., например, [10]).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

А. Прежде всего, сформулируем явно, в терминах определений 1–3, следующий факт, вытекающий из упомянутого выше примера [1, 2] двумерной автономной системы.

Утверждение А. *Ни перроновская, ни даже верхнепредельная глобальная устойчивость двумерной автономной системы (1) не влечет за собой ляпуновскую устойчивость.*

Первый результат настоящей работы состоит в том, что если в утверждении А снять с системы требование ее автономности, то может случиться, что у нее:

– с одной стороны, сразу все решения при неограниченном росте времени стремятся к нулю, следовательно, она обладает *и перроновской, и верхнепределной глобальной устойчивостью*;

– с другой стороны, абсолютно каждое ненулевое решение хотя бы однажды покидает некоторую фиксированную трубку нулевого решения, т.е. эта же система обладает *ляпуновской не просто неустойчивостью, а глобальной неустойчивостью*.

Теорема 1. При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существует такая система (1), что ее правая часть удовлетворяет условию

$$f'_x(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (7)$$

и все решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$ сразу:

- 1) удовлетворяют равенству (3);
- 2) не удовлетворяют неравенству (6) при $\varepsilon = 1$.

В. Далее, подчеркнем особо некоторые логические связи, действующие между полной и глобальной неустойчивостью какого-либо одного типа.

Утверждение В. Для системы (1):

- а) *ляпуновская полная неустойчивость эквивалентна ляпуновской глобальной неустойчивости*;
- б) [3] *ни ляпуновская, ни верхнепределная, ни даже перроновская полная неустойчивость не влечет за собой ни верхнепределную, ни перроновскую глобальную неустойчивость*.

Следующий результат настоящей работы разбивает заключительную часть утверждения В и представляет систему, у которой при неограниченном росте времени:

- все ненулевые решения, начинающиеся в некоторой окрестности нуля (и отчасти на ее границе), стремятся по норме к бесконечности, следовательно, имеет место как *перроновская, так и верхнепределная полная неустойчивость* (и стало быть, *ляпуновская глобальная неустойчивость*);
- однако все остальные решения стремятся к нулю, т.е. имеет место *и перроновская, и верхнепределная частная устойчивость*, причем не просто частная, а даже *массивная*.

Теорема 2 [4]. При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существует такая система (1), что ее правая часть удовлетворяет условию (7) и при $\delta = 1$ верны следующие два утверждения:

- 1) все решения $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$, а также все решения $x \equiv (x_1, x_2)^T \in \mathcal{S}_*(f)$ с начальными условиями

$$|x(0)| = 1, \quad \text{где} \quad x_1(0) \leq 0, \quad x_2(0) \neq -1,$$

удовлетворяют равенству

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty;$$

- 2) все решения $x \in \mathcal{S}^\delta(f)$, а также все решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$ с начальными условиями

$$|x(0)| = 1, \quad \text{где} \quad x_1(0) \geq 0, \quad x_2(0) \neq 1,$$

удовлетворяют равенству (3).

С. Заметим, что описанные в теоремах 1 и 2 системы неавтономны, и это не случайно, поскольку в автономном случае полные и глобальные неустойчивости всех типов сразу логически неразличимы.

Утверждение С [5]. Если система (1) автономна и обладает хотя бы одним из шести следующих свойств: *ляпуновской, перроновской или верхнепределной полной или глобальной неустойчивостью*, – то она обладает и остальными пятью свойствами.

Итак, системы, существование которых утверждается в теоремах 1 и 2, не могут быть сделаны еще и автономными. Тем не менее несколько упрощенные примеры таких автономных систем предлагают ниже теоремы 3 и 4 соответственно.

Во-первых, существует двумерная автономная система, у которой:

– каждое ненулевое решение хотя бы по некоторой неограниченной последовательности моментов времени стремится к нулю, следовательно, система обладает *перроновской глобальной устойчивостью*;

– каждое же решение, за исключением тех, что начинаются на конкретной окружности (проходящей через начало координат), по некоторой другой неограниченной последовательности моментов времени выходит за пределы фиксированной трубки нулевого решения, т.е. система обладает *и ляпуновской, и верхнепределной неустойчивостью*, которая при этом, так сказать, даже *почти глобальна* (глобальной она не может быть в силу утверждения С).

Теорема 3 [5]. При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1)^T\}$ существует такая автономная система (1), что каждое решение $x \equiv (x_1, x_2)^T \in \mathcal{S}_*(f)$:

- 1) удовлетворяет равенству (5);
- 2) не удовлетворяет ни одному из неравенств (2) и (6) при $\varepsilon = 1$ и при выполнении начального условия

$$x_1^2(0) + (x_2(0) - 1)^2 \neq 1.$$

Во-вторых, существует двумерная автономная система, у которой:

– все решения, начинающиеся вне некоторой окрестности нуля, при неограниченном росте времени стремятся к нулю, следовательно, систе-

ма обладает *и перроновской, и верхнепредельной массивной частной устойчивостью*;

– однако сколь угодно близко к нулю начинаются такие решения, которые с некоторого момента (вообще говоря, своего для каждого решения) навсегда выходят за пределы фиксированной трубки нулевого решения, т.е. система обладает *и ляпуновской, и верхнепредельной, и перроновской неустойчивостью* (заведомо не полной, в силу утверждения С).

Теорема 4 [5]. При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существует такая автономная система (1), что верны следующие два утверждения:

1) при $\delta = 1$ все ее решения $x \in \mathcal{S}^\delta(f)$ удовлетворяют равенству (3);

2) для каждого $\delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет неравенству (4) при $\varepsilon = 1$.

Д. В заключение заметим, что описанные в теоремах 1, 2 и 4 системы не одномерны и нелинейны, и это также не случайно, поскольку в линейном (однородном) и одномерном случаях некоторые (к примеру, любые одноименные верхнепредельные и ляпуновские) свойства логически неразличимы.

Утверждение Д [3]. Если система (1) – одномерна или линейна, то она:

а) обладает каким-либо верхнепредельным свойством тогда и только тогда, когда она обладает одноименным ляпуновским свойством;

б) обладает полной неустойчивостью какого-либо типа тогда и только тогда, когда она обладает глобальной неустойчивостью того же типа;

с) обладает массивной частной устойчивостью какого-либо типа тогда и только тогда, когда она обладает устойчивостью того же типа.

Зато результат теоремы 3 как раз в неавтономном случае допускает конкретное усиление, состоящее в существовании *линейной* однородной ограниченной дифференциальной системы произвольной размерности (в том числе и *одномерной*) и, так сказать, *скалярного* типа, у которой при неограниченном росте времени все ненулевые решения сразу:

– по некоторой одной последовательности моментов стремятся к нулю, а значит, имеет место *перроновская глобальная устойчивость*;

– по некоторой другой последовательности моментов стремятся по норме к бесконечности; таким образом, имеет место как *ляпуновская*, так и *верхнепредельная глобальная неустойчивость*.

Теорема 5 [3]. При любом $n \in \mathbb{N}$ и $G = \mathbb{R}^n$ существует такая линейная система (1), что ее правая часть удовлетворяет условию

$$f(t, x) = a(t)x, \quad a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\|a\| \equiv \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |a(t)| < +\infty,$$

и все решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$ удовлетворяют:

1) равенству (5);

2) равенству

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty.$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа А.А. Бондарева выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект 21-8-2-4-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
2. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.
3. Сергеев И.Н. Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646.
4. Бондарев А.А. Пример дифференциальной системы с перроновской и верхнепредельной полной неустойчивостью, но массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 2. С. 147–152.
5. Сергеев И.Н. Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. 2020. Т. 56. № 2. С. 63–78.
6. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова // Минск: БГУ. 2006.
7. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
9. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.–Л.: ГИТТЛ, 1947.
10. Лапин К.С. Ограниченность в пределе по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и функции Ляпунова // Матем. заметки. 2018. Т. 103. № 2. С. 223–235.

EXAMPLES OF DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH CONTRASTING COMBINATIONS OF LYAPUNOV, PERRON AND UPPER-LIMIT PROPERTIES

A. A. Bondarev^a and I. N. Sergeev^a

^a Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

A number of examples of systems of differential equations are given that have, in a sense, opposite properties of stability or instability of various types: Lyapunov, Perron, and upper-limit. So, all non-zero solutions of one of these systems tend to zero (with an unlimited growth of time), nevertheless moving away from it at least once at a specific distance common for all of them. For example, in another system, all non-zero solutions starting in a fixed neighborhood of zero tend to infinity in norm, and all the rest, on the contrary, tend to zero.

Keywords: differential system, Lyapunov stability, Perron stability, upper limit stability, autonomous systems, nonlinear systems, asymptotic properties of solutions

УДК 519.6

О СТАБИЛИЗАЦИИ ЯВНОЙ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© 2022 г. Академик РАН Б. Н. Четверушкин¹, О. Г. Ольховская^{1,*}, В. А. Гасилов¹

Поступило 10.06.2022 г.

После доработки 12.07.2022 г.

Принято к публикации 25.07.2022 г.

Разработан метод численного решения нелинейного уравнения, описывающего диффузионный перенос энергии излучения. Метод основан на введении в параболическое уравнение второй производной по времени с малым параметром и явной разностной схеме. Явная аппроксимация исходного уравнения позволяет реализовать на ее основе алгоритм, эффективно адаптированный к архитектуре высокопроизводительных вычислительных систем. Новая схема обеспечивает разрешение нелинейности со вторым порядком по времени с приемлемым временным шагом. Предложен эвристический алгоритм выбора параметров трехслойной разностной схемы. Перспективной областью приложений метода могут быть задачи астрофизики, например, такие, как расчет выхода сильноизлучающей ударной волны к поверхности звезды в стадии ее эволюции, известной как “вспышка сверхновой”.

Ключевые слова: лучистый теплообмен, модель диффузии излучения, нелинейное параболическое уравнение, явная разностная схема, высокопроизводительные вычисления

DOI: 10.31857/S268695432205006X

1. ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование является одним из важнейших методов теоретической астрофизики, а моделирование процессов переноса излучения, механизмов излучения электромагнитных волн и его взаимодействия с веществом образует самостоятельное направление в круге вычислительных астрофизических задач. Результаты расчетов процессов взаимодействия излучения с веществом при сопоставлении с информацией, поступающей от звезд и галактик в виде электромагнитного излучения, позволяют определить температуру и химический состав звездных атмосфер, размеры и массы звезд. Тем самым создается основа для предсказаний эволюции астрофизических объектов и вселенной в целом.

В астрофизических исследованиях находят применение различные модели переноса энергии излучением. Задача расчета поля излучения, распространяющегося в космосе, весьма сложна. В общем виде она решается в многогрупповой по спектру модели радиационной плазмодинамики и включает учет релятивистских факторов — охлаждения электронной компоненты плазмы за счет

обратного комптон-эффекта, влияния эффекта Доплера, абберации и т.д. [1, 2]. В тех случаях, когда можно использовать приближение оптически толстой среды, лучистый поток энергии можно рассчитывать по упрощенным моделям — диффузии излучения либо лучистой теплопроводности. В таких моделях можно выделить задачу для параболического уравнения с коэффициентом, нелинейно зависящим от температуры (энергии) излучения. Часто необходимо также учитывать нелинейные граничные условия, например, условия на поверхности излучающего тела (задачи с внешней нелинейностью).

Для постановок задач радиационной гидродинамики, возникающих при анализе взрывов сверхновых, характерна существенная пространственно-временная разномасштабность. Пространственные сетки для аппроксимации таких задач в трехмерной постановке могут состоять из десятков миллиардов узлов. Для решения этих задач за приемлемое время необходимо использовать вычислительные мощности современных суперкомпьютеров с большим числом независимых вычислителей (процессоров, ядер, тредов).

Моделирование на вычислительных системах высокой и сверхвысокой производительности требует разработки эффективных и надежных численных методов и алгоритмов, масштабируемых на современные и перспективные компью-

¹Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: olkhovsk@gmail.com

терные архитектуры. Неявные схемы для уравнений диффузионного типа обладают абсолютной устойчивостью и позволяют вести расчет на подробных пространственных сетках с приемлемым шагом по времени. Однако для нахождения решения на их основе необходимо прибегать к тем или иным итерационным процессам, которые связаны с логическими процедурами и плохо адаптируются на архитектуру систем с экстремальным параллелизмом. Эффективность параллельной обработки падает при одновременном использовании большого числа вычислителей. Особенно чувствительны оказываются перспективные гетерогенные системы, использующие в качестве ускорителей графические платы (GP GPU). В нелинейных задачах итерационные процедуры усложняются, что приводит к резкому увеличению объема вычислений. Использование локально-адаптивных сеток, в частности сеток древовидной структуры с дроблением/слиянием ячеек позволяет аккуратно воспроизводить тонкие пространственные структуры. Однако при этом ухудшается обусловленность системы линейных уравнений на верхнем слое, тем самым также увеличивая число итераций. Вычислительные затраты такого рода можно сократить, заметно уменьшив шаг по времени. Тем самым теряется преимущество неявных схем – возможность вести расчеты с “гидродинамическим” шагом по времени.

Явные схемы идеальны для параллельной обработки. Однако для их устойчивости требуется жесткое ограничение на шаг по времени τ : $\tau \leq h^2/2\kappa$ (h – характерный размер пространственной сетки, κ – эффективный коэффициент диффузии). Как правило, величина κ резко возрастает с ростом температуры, что еще больше ограничивает τ .

Таким образом, численное решение нелинейного параболического уравнения на подробных пространственных сетках, для которого собственноразрешимо и нужны высокопроизводительные системы с экстремальным параллелизмом, реально затруднено. Ранее нами была предложена гиперболическая модель для лучистой теплопроводности [3], позволяющая применять для расчетов на многопроцессорных системах явную схему с более мягким условием устойчивости. Подобный подход представляется эффективным и для других задач, описываемых нелинейным параболическим уравнением, в частности для моделирования переноса излучения.

2. НЕЛИНЕЙНОЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ

Рассмотрим квазилинейное параболическое уравнение

$$C(t, u) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa(t, u) \cdot \operatorname{grad} u) + Q(t, u) \quad (1)$$

Например, для лучистой теплопроводности $\kappa = \frac{16\sigma T^3 l(T, \rho)}{3}$ (T – температура среды, ρ – плотность, σ – постоянная Стефана-Больцмана, l – длина свободного пробега фотона, осредненная по Росселанду), при этом для многих сред $l \sim T^\gamma$. Для электронной теплопроводности в горячей плазме $\kappa \sim T^{5/2}$. При расчетах необходимо учитывать особенности поверхностного излучения для твердых тел и объемного излучения для излучающих и поглощающих газов. Граничное условие на излучающей поверхности (закон Стефана-Больцмана) есть $\frac{\partial T}{\partial n} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4$, где $0 < \varepsilon \leq 1$ – степень черноты (0 – излучение отсутствует, 1 – излучение абсолютно черного тела).

По аналогии с гиперболической моделью теплопроводности [3] вместо уравнения (1) предлагается рассматривать уравнение (2) с малым параметром ω :

$$C \frac{\partial u}{\partial t} + \omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(\kappa \cdot \operatorname{grad} u) + Q \quad (2)$$

Трехслойная разностная схема уравнения (2) для сеточной функции $\{U_n\}$ с постоянным шагом по времени Δt строится следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\rightarrow \frac{U_n^{m+1} - U_n^{m-1}}{2\tau}, \\ \omega \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &\rightarrow \omega \frac{U_n^{m+1} - 2U_n^m + U_n^{m-1}}{\tau^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\nabla(\kappa \nabla U) \rightarrow \langle \nabla(\kappa \nabla U) \rangle_n^m, \quad Q \rightarrow Q(U_n^m)$$

Здесь n – обобщенный индекс пространственной ячейки, m – номер шага по времени. Пространственный член, включающий нелинейный по температуре коэффициент, аппроксимируется на m -м слое по времени с использованием известного значения U^m . Итерации не нужны, в этом преимущество предложенной схемы. Схема (3) обеспечивает второй порядок точности по времени.

Гиперболизированное уравнение может использоваться также и в лагранжевых схемах.

Рассмотрим уравнение в форме:

$$C \frac{\partial u}{\partial t} + \omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + w_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \operatorname{div} \kappa \operatorname{grad} U \quad (4)$$

В лагранжевых координатах реализуется уравнение (4) без второй производной по времени

$$C \frac{\partial u}{\partial t} + w_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \operatorname{div} \kappa \operatorname{grad} u \quad (5)$$

Как вписать в лагранжеву схему член $\omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$?

Его исходная разностная аппроксимация в эйлеровых координатах приведена в формуле (3):

$$\omega \frac{U_n^{m+1} - 2U_n^m + U_n^{m-1}}{\tau^2}$$

В лагранжевых координатах аппроксимация будет иметь вид:

$$\omega \frac{U_{n'}^{m+1} - 2U_n^m + U_{n''}^{m-1}}{\tau^2} \quad (6)$$

Здесь точки n' и n'' смещены за счет газодинамического переноса.

Определим с учетом этого переноса величины $U_{n'}$ и $U_{n''}$.

$$\begin{aligned} U_{n'}^{m+1} &= U_n^{m+1} + w_i \cdot \tau \cdot \frac{\partial U^m}{\partial x_i} + \frac{\mathbf{w}^2 \cdot \tau^2}{2} \cdot \Delta U^m \\ U_{n''}^{m-1} &= U_n^{m-1} - w_i \cdot \tau \cdot \frac{\partial U^m}{\partial x_i} + \frac{\mathbf{w}^2 \cdot \tau^2}{2} \cdot \Delta U^m \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом (7) выражение (6) для лагранжевой аппроксимации второй производной по времени можно представить в виде:

$$\omega \cdot \frac{U_n^{m+1} - 2U_n^m + U_n^{m-1}}{\tau^2} + \omega \cdot \mathbf{w}^2 \Delta U^m \quad (8)$$

Таким образом, лагранжева аппроксимация (6) отличается от исходной эйлеровой аппроксимации (3) дополнительным членом $\omega \cdot \mathbf{w}^2 \Delta U^m$, который надо вычесть из члена $\nabla(\kappa \nabla U)$ в уравнении (4):

$$\nabla(\kappa \nabla U) - \omega \cdot \mathbf{w}^2 \Delta U^m \quad (9)$$

Ввиду малости ω ($\omega \leq h/|V_{xap}|$, V_{xap} – характерная скорость процесса, см. [4]) и большого коэффициента теплопроводности κ в выражении (9) последним членом $\omega \cdot \mathbf{w}^2 \Delta U^m$, имеющим ту же функциональную структуру, что и член $\nabla(\kappa \nabla U)$, можно пренебречь.

Поэтому для уравнения (4) можно использовать лагранжеву аппроксимацию (5) с добавлением регуляризатора в той же форме, как и в схеме (3)

$$\omega \frac{U_n^{m+1} - 2U_n^m + U_n^{m-1}}{\tau^2},$$

где U_n^{m+1} и U_n^{m-1} заменяют сдвинутые за счет газодинамического движения значения $U_{n'}^{m+1}$ и $U_{n''}^{m-1}$.

Такой подход может быть полезен для астрофизических расчетов, где вещество движется с огромными скоростями и решение уравнений переноса излучения осуществляется в лабораторной системе отсчета [5].

3. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ТРЕХСЛОЙНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

В ряде работ [4, 6–9], выполненных в ИПМ РАН, был проведен анализ гиперболического уравнения теплопроводности и трехслойной разностной схемы для его численного решения. Оценки, полученные из математической теории, включая разницу между решениями уравнения (1) и уравнения (2), ограничение величины малого параметра ω и ограничение шага по времени для явной схемы (3), относятся в основном к линейному уравнению и одномерной по пространству разностной схеме. В работе [10] представлены результаты тестовых расчетов задачи о мгновенном источнике тепла в линейной постановке, на которой в полной мере проявляется отличие гиперболизованной теплопроводности от классической. Вычислительные эксперименты [3, 11] показали применимость этих оценок для нелинейного уравнения со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры и для разностных схем на трехмерных сетках регулярной и нерегулярной структуры. На основании этих исследований предложен эвристический алгоритм выбора параметров разностной схемы.

3.1. Диссипация и дисперсия сеточного решения

Рассмотрим одномерное линейное гиперболическое уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \omega \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial U}{\partial x} \right) \quad (10)$$

Здесь κ – коэффициент температуропроводности, ω – малый параметр, имеющий размерность времени и много меньший характерного времени процесса.

Трехслойная потоковая схема, аппроксимирующая уравнение (10) на равномерной пространственной сетке с постоянным шагом по времени:

$$\begin{aligned} \frac{U_m^{n+1} - U_m^{n-1}}{2\tau} + \omega \frac{U_m^{n+1} - 2U_m^n + U_m^{n-1}}{\tau^2} &= \\ = \frac{1}{h^2} \left(\kappa^+ (U_{m+1}^n - U_m^n) - \kappa^- (U_m^n - U_{m-1}^n) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь τ – шаг интегрирования по времени, n – номер шага по времени, h – шаг пространственной сетки, m – номер узла пространственной сетки, $\kappa^+ = \kappa_{m+1/2}$ относится к точке $x_{m+1/2} = h \cdot m + h/2$, $\kappa^- = \kappa_{m-1/2}$ – к точке $x_{m-1/2} = h \cdot m - h/2$.

Подставляя в схему (11) решение в виде

$$U_m^n = U_0 \exp(i(\nu \tau n - khm)),$$

где $i^2 = -1$, построим дисперсионное соотношение:

$$\frac{1}{\tau} i \sin(v\tau) - \frac{4\omega}{\tau^2} \sin^2\left(\frac{v\tau}{2}\right) = -\frac{1}{h^2} 2(\kappa^+ + \kappa^-) \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) - \frac{1}{h^2} (\kappa^+ - \kappa^-) i \sin(kh) \quad (12)$$

Анализ дисперсионного уравнения (12) показывает, что дисперсия в схеме присутствует при всех $\omega > 0$, однако при $\omega < \frac{2h}{(\kappa^+ + \kappa^-)k}$ флуктуации

затухают. Здесь $\frac{(\kappa^+ + \kappa^-)}{2}k$ соответствует скорости распространения волны с волновым числом k .

Величину флуктуаций можно оценить как разницу решений параболического и гиперболического уравнений, поскольку для классического параболического уравнения дисперсия отсутствует. Оценка этой разницы δ была выполнена в работе [6].

В интегральной норме:

$$\|\delta(\bar{x}, t)\|_{L_2(D \times (0, T))} \leq \omega T^2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L_2(D \times (0, T))} \quad (13)$$

Здесь D – расчетная область, T – полное время решения.

В равномерной норме для одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами:

$$|\delta(\bar{x}, t)| \leq M \omega \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \left(8\sqrt{2}\omega + \frac{4\sqrt{2\pi^2} T}{2} \right),$$

$$M = \max \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi, \theta) \right| \quad 0 \leq \theta \leq t \quad (14)$$

$$x - (t - \theta)/\sqrt{\omega} \leq \xi \leq x + (t - \theta)/\sqrt{\omega}$$

Здесь также T – полное время решения.

Аналогичные оценки для разностных схем были получены в работе [7]. Из этих оценок следует, что, поскольку в разностной задаче вариации по времени связаны с коротковолновыми изменениями по пространству, всегда ограниченными размером ячейки сетки, возмущение, которое вносит малый параметр в численное решение, можно считать регулярным.

3.2. Условие устойчивости и выбор малого параметра ω

Анализ устойчивости трехслойной схемы для линейного уравнения был проведен в статье [5]. В этой работе показано, что при $\omega = h/V$ для обеспечения устойчивости трехслойной схемы (3) необходимо выполнение условия

$$\tau \leq ah^{3/2}; \quad a \sim \frac{1}{\sqrt{V\kappa}}. \quad (15)$$

Здесь h – шаг пространственной сетки; V – характерная скорость процесса, описываемого уравнением (10), например, скорость света в случае распространения излучения в вакууме или скорость волны в среде; κ – коэффициент диффузии.

В практических задачах характерная скорость распространения тепловой волны часто бывает заранее неизвестна.

В книге [12] предлагается следующая оценка скорости распространения тепла для нелинейной теплопроводности вида $C_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\alpha T^n) \text{grad } T$:

$$\text{Координата фронта волны } x_0 \sim \left(\frac{Q}{C_v \rho} \right)^{\frac{n}{n+2}} (\alpha t)^{\frac{1}{n+2}}$$

Скорость перемещения границы x_0

$$v_0 \sim \frac{x_0}{t} \sim \left(\frac{Q}{C_v \rho} \right)^{\frac{n}{n+2}} (\alpha)^{\frac{1}{n+2}} t^{-\frac{n+1}{n+2}} \quad (16)$$

Здесь Q [Дж/м²] – количество теплоты, выделяемое источником на границе $x = 0$.

В задаче о нагреве лазерной мишени, описанной в статье [11], оценка скорости тепловой волны при лучистой теплопроводности была сделана на основании предварительного одномерного расчета.

При нарушении критерия

$$\omega \leq h/V \quad (17)$$

из-за сеточной дисперсии на фронте температурной волны развиваются незатухающие нефизические осцилляции.

3.3. Алгоритм выбора параметров схемы

Таким образом, предлагается следующий подход к выбору параметров трехслойной разностной схемы (3) для гиперболизированного нелинейного уравнения (2).

1) Построить пространственную разностную сетку, исходя из необходимой точности решения и имеющихся вычислительных мощностей, оценить характерный линейный размер сетки h .

2) Оценить характерную скорость процесса V , исходя из размерностной оценки (16), на основании физических данных или с помощью предварительного одномерного расчета.

3) Задать малый параметр в соответствии с критерием (17): $\omega = qh/V$, $0 < q < 1$.

4) Оценить допустимый шаг интегрирования по времени τ из условия устойчивости (15):

$$\tau \leq \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} = \frac{h^{3/2}}{\sqrt{V\kappa}}$$

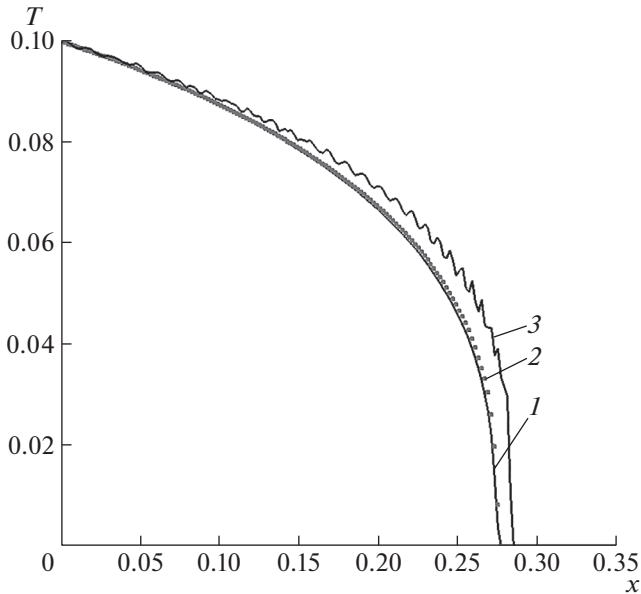


Рис. 1. Решение нелинейного уравнения теплопроводности.

4. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

С целью численной проверки алгоритма 3.3 решалось одномерное нелинейное уравнение теплопроводности в форме

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T^\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (18)$$

со следующими параметрами: $\alpha = 3,0$; начальные условия $T(t=0, x) = 10^{-4}$; граничное условие $T(x=0, t) = 0.1$; время решения $t_{\max} = 100$.

В этом случае максимальное значение коэффициента теплопроводности $\kappa_{\max} = 10^{-3}$. Оценка скорости распространения тепловой волны была получена в результате численного решения параболического уравнения теплопроводности по классической схеме, $V = 2.75 \times 10^{-4}$. Для расчетов использовалась равномерная пространственная сетка из 200 узлов, $h = 0.002$. Таким образом, максимальное допустимое значение параметра ω : $\omega_{\max} = h/V = 7.27$.

Численное решение уравнения (18) на момент времени $t = t_{\max} = 100$ представлено на рис. 1.

Кривая 1 – решение параболического уравнения, $\omega = 0$ в (18). Двухслойная явная схема, расчет с максимальным допустимым шагом по времени $\tau = h^2/(2\kappa) = 0.002$.

Кривая 2 (серые точки) – решение гиперболического уравнения (18) с $\omega = 1 < \omega_{\max}$. Трехслойная явная схема. Найденный максимально допустимый шаг по времени $\tau = 0.038$ в 19 раз больше, чем для параболического уравнения. Оценка ша-

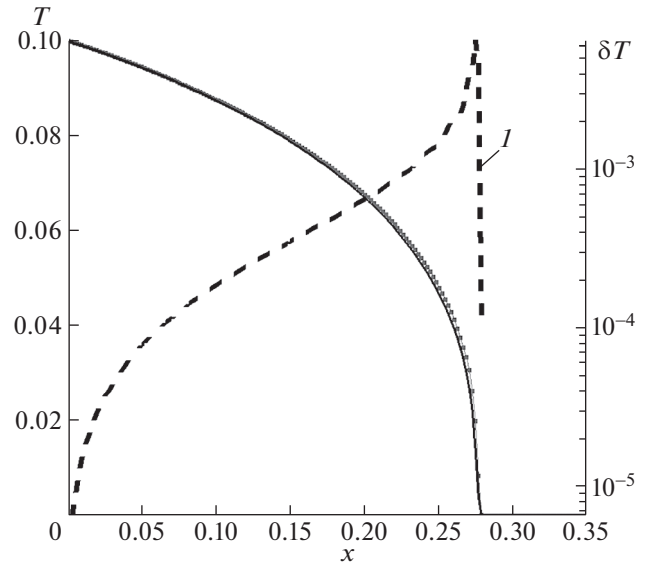


Рис. 2. Разность решений параболического и гиперболического уравнений теплопроводности.

га по времени, полученная из линейной теории:

$\tau \leq \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} h = 0.0632$, немного выше фактически достигнутого значения.

Кривая 3 – решение гиперболического уравнения (18) при нарушении критерия $\omega \leq h/V$. Трехслойная явная схема, $\omega = 10 > \omega_{\max}$. Численная дисперсия приводит к нефизическим осцилляциям даже при очень маленьком шаге по времени $\tau = 0.001$ (меньше, чем для параболического уравнения).

На рис. 2 сплошная кривая и точки соответствуют тем же численным решениям параболического и гиперболического уравнений теплопроводности, а кривая 1 (штриховая) показывает их разность $\delta T = |T_{\text{пар}} - T_{\text{гип}}|$. Относительная разница решений в норме L^2 составила 1.66×10^{-5} .

Таким образом, показано, что при выборе малого параметра и шага по времени в соответствии с предложенным алгоритмом 3.3 трехслойная разностная схема (3) аппроксимирует нелинейное уравнение (1) и позволяет вести расчет с шагом по времени, существенно большим, чем допускается для явной схемы без регуляризации.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Регуляризация нелинейного параболического уравнения введением второй производной по времени с малым параметром ω является полезным инструментом численного решения таких уравнений с использованием явной по времени разностной схемы. Эти преимущества особенно ярко проявляются по сравнению с параболиче-

ской моделью, когда использование подробных пространственных сеток поддерживается высокопроизводительными системами с гибридной архитектурой. Одной из перспективных областей приложения разработанной численной методики является моделирование переноса излучения в актуальных задачах астрофизики.

Явная трехслойная схема позволяет точно моделировать быстрые процессы с сильно нелинейным коэффициентом диффузии. Предложен и протестирован эвристический алгоритм выбора параметров схемы, основанный на априорной оценке скорости распространения тепла. Показано, что выполнение критерия $\omega \leq h/V$ обеспечивает как близость к классическому параболическому решению, так и заметную вычислительную эффективность при использовании явных схем.

Явные схемы хорошо вписываются в архитектуру высокопроизводительных вычислительных систем, включая многоуровневый параллелизм с использованием MPI/OpenMP/Cuda для кластеров CPU-GPU. Нами уже накоплен богатый опыт пространственной аппроксимации диффузионных операторов на разного рода неструктурированных пространственных сетках и сетках типа “восьмеричное дерево” с локальной адаптацией. В этих случаях неявная схема приводит к системе линейных алгебраических уравнений с распределенной разреженной матрицей сложной структуры. Итерационная процедура решения такой системы требует дополнительных обменов данными, и ее сходимость не всегда может быть очевидной. Сильная нелинейность, характерная для астрофизических моделей, в свою очередь требует очень мелкого шага интегрирования по времени или дополнительных итераций. Поэтому предложенная явная схема предпочтительнее, особенно для численного исследования тонких структур и/или быстрых процессов.

Созданные алгоритмы и программное обеспечение предназначаются для вычислительных экспериментов в астрофизике и лабораторной астрофизике [13], для моделирования технологических процессов, связанных с использованием плотной лазерной плазмы, для исследований в области управляемого термоядерного синтеза.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (суперкомпьютеры К-60, К-100).

Авторы благодарят коллег И.П. Цыгвинцева и А.А. Бая за помощь в тестировании разностных схем.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, Соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2022-283.

Работа В.А. Гасилова в части разработки астрофизических приложений выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00362, <https://rscf.ru/project/21-11-00362/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mihalas D., Mihalas B.W.* Foundations of Radiation Hydrodynamics. Oxford Univ. Press, New York, 1984. 741 p.
2. *Tolstov A.G., Blinnikov S.I., Nadyozhin D.K.* Coupling of matter and radiation at supernova shock breakout // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2013. V. 429. Issue 4. P. 3181–3199. <https://doi.org/10.1093/mnras/sts577>
3. *Четверушкин Б.Н., Ольховская О.Г.* Моделирование процесса лучистой теплопроводности на высокопроизводительных вычислительных системах // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. № 1. С. 111–114. *Chetverushkin B.N. and Olkhovskaya O.G.* Modeling of Radiative Heat Conduction on High-Performance Computing Systems // Doklady Mathematics, 2020. V. 101. № 2, P. 172–175. <https://doi.org/10.1134/S1064562420020088> <https://doi.org/10.31857/S2686954320020083>
4. *Четверушкин Б.Н., Гулин А.В.* Явные схемы и моделирование на вычислительных системах сверхвысокой производительности // Доклады Академии наук. 2012. Т. 446. № 5. С. 501–503. *Chetverushkin B.N. and Gulina A.V.* Explicit schemes and numerical simulation using ultrahigh-performance computer systems // Doklady Mathematics 2012. V. 86. № 2. P. 681–683. <https://doi.org/10.1134/S1064562412050213>
5. *Mihalas D., Auer L.* On laboratory-frame radiation hydrodynamics // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2001, V. 71. № 1. P. 61–97. [https://doi.org/10.1016/S0022-4073\(01\)00013-9](https://doi.org/10.1016/S0022-4073(01)00013-9)
6. *Мышецкая Е.Е., Тишкин В.Ф.* Оценки влияния гиперболизации для уравнения теплопроводности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55. № 8. С. 1299. *Myshetskaya E.E., Tishkin V.F.* Estimates of the hyperbolization effect on the heat equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. V. 55. P. 1270–1275. <https://doi.org/10.1134/S0965542515080138> <https://doi.org/10.7868/S004446691508013X>
7. *Репин С.И., Четверушкин Б.Н.* Оценки разности приближенных решений задач Коши для параболического диффузионного уравнения и гиперболического уравнения с малым параметром // Доклады Академии наук. 2013. Т. 451. № 3. С. 255. *Repin S.I. and Chetverushkin B.N.* Estimates of the difference between approximate solutions of the Cauchy problems for the parabolic diffusion equation and a hyperbolic equation with a small parameter // Doklady

- Mathematics. 2013. V. 88. № 1. P. 417–420.
<https://doi.org/10.1134/S1064562413040157>
<https://doi.org/10.7868/S0869565213210056>
8. Сурначёв М.Д., Тишкин В.Ф., Четверушкин Б.Н. О законах сохранения для гиперболизированных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 7. С. 859. *Surnachev M.D., Tishkin V.F., Chetverushkin B.N.* On conservation laws for hyperbolized equations // *Differential Equations*, 2016, V. 52. P. 817–823.
<https://doi.org/10.1134/S0012266116070016>
<https://doi.org/10.1134/S0374064116070013>
 9. *Chetverushkin B.N. and Zlotnik A.A.* On a hyperbolic perturbation of a parabolic initial–boundary value problem // *Applied Mathematics Letters*. 2018. V. 83. P. 116–122.
<https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.03.027>
 10. *Chetverushkin B.N., Olkhovskaya O.G., Tsigvintsev I.P.* Numerical solution of high-temperature gas dynamics problems on high-performance computing systems // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2021. V. 390. P. 113374.
<https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113374>
 11. Глотов В.Ю., Головизнин В.М., Четверушкин Б.Н. Балансно-характеристические разностные схемы для уравнений параболического типа // Математическое моделирование. 2020. Т. 32. № 4. С. 94–106. *Glotov V.Y., Goloviznin V.M. and Chetverushkin B.N.* Balance and Characteristic Finite Difference Schemes for Equations of the Parabolic Type // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2020. V. 12. P. 981–989.
<https://doi.org/10.1134/S2070048220060095>
 12. Крайнов В.П. Качественные методы в физической кинетике и гидрогазодинамике. М.: Высшая школа, 1989. 224 с. *Krainov V.P.* Qualitative Methods in Physical Kinetics and Hydrodynamics. American Institute of Physics, 1992. 203 p.
 13. *Lebedev S.V., Frank A., Ryutov D.D.* Exploring astrophysics-relevant magneto-hydrodynamics with pulsed-power laboratory facilities // *Reviews of Modern Physics*. 2019. V. 91 (2). 025002(46).
<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.91.025002>

ABOUT REGULATION OF AN EXPLICIT DIFFERENCE SCHEME FOR NON-LINEAR PARABOLIC-TYPE EQUATION

Academician of the RAS B. N. Chetverushkin^a, O. G. Olkhovskaya^a, and V. A. Gasilov^a

^a *Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

We developed a technique for the numerical solution of a nonlinear equation describing the diffusion transfer of radiation energy. The method is based on the introduction of the second time derivative with a small parameter into the parabolic equation and an explicit difference scheme. Explicit approximation of the original equation makes it possible to implement on its basis an algorithm that is effectively adapted to the architecture of high-performance computing systems. The new scheme provides resolution of second-order nonlinearity in time with an acceptable time step. A heuristic algorithm for choosing the parameters of a three-layer difference scheme is proposed. Perspective applications of the method are the problems of astrophysics, for example, such as simulation of the exit of a strongly radiating shock wave breakout at the surface of a star at the stage of its evolution known as a “supernova explosion”.

Keywords: radiative heat exchange, radiation diffusion model, non-linear parabolic equation, explicit difference scheme, high-performance computing

УДК 517.9

О СТАЦИОНАРНЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ МЕРАХ ДЛЯ СИСТЕМЫ “ПОЛЕ–КРИСТАЛЛ”

© 2022 г. Т. В. Дудникова^{1,*}

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным

Поступило 18.02.2022 г.

После доработки 16.03.2022 г.

Принято к публикации 12.08.2022 г.

В работе рассматривается задача Коши для гамильтоновой системы, состоящей из поля Клейна–Гордона и бесконечного гармонического кристалла. Предполагается, что начальные данные задачи являются случайной функцией, и изучается сходимость распределений решений к некоторой предельной гауссовой мере при больших временах. При условии, что начальная случайная функция в “левой” и “правой” частях пространства имеет гиббсовское распределение с различными температурами, найдены стационарные состояния системы, в которых предельная плотность потока энергии не обращается в нуль. Таким образом, для данной системы построен класс стационарных неравновесных состояний.

Ключевые слова: поле Клейна–Гордона, взаимодействующее с кристаллом, задача Коши, преобразование Зака, случайные начальные данные, слабая сходимость мер, гауссовские и гиббсовские меры, плотность потока энергии, стационарные неравновесные состояния

DOI: 10.31857/S2686954322050083

1. МОДЕЛЬ

В работе изучается линейная гамильтонова система, состоящая из поля Клейна–Гордона $\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, и кристаллической решетки, описываемой отклонениями $u(k) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}^d$, $d, n \geq 1$, частиц (атомов, молекул, ионов и т.п.) от их положения равновесия. Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H(\psi, u, \pi, v) = H_F(\psi, \pi) + H_L(u, v) + H_I(\psi, u), \quad (1)$$

где $H_F(\psi, \pi)$ обозначает гамильтониан поля Клейна–Гордона, $H_L(u, v)$ – гамильтониан решетки, $H_I(\psi, u)$ – член взаимодействия между полем и решеткой:

$$H_F(\psi, \pi) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (|\nabla \psi(x)|^2 + m_0^2 |\psi(x)|^2 + |\pi(x)|^2) dx,$$

$$H_L(u, v) :=$$

$$:= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{j=1}^d |u(k + e_j) - u(k)|^2 + v_0^2 |u(k)|^2 + |v(k)|^2 \right),$$

$$H_I(\psi, u) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} R(x - k) \cdot u(k) \psi(x) dx.$$

Здесь $m_0, v_0 > 0$, функция взаимодействия $R(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ – гладкая векторнозначная функция, экспоненциально убывающая на бесконечности, “ \cdot ” обозначает скалярное произведение в \mathbb{R}^n , $e_j \in \mathbb{Z}^d$ – вектор с координатами $e_j^i = \delta_j^i$. Вычисляя вариационные производные от гамильтониана (1), получаем следующую систему динамических уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}(x, t) = \pi(x, t), & x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \dot{\pi}(x, t) = (\Delta - m_0^2)\psi(x, t) - \sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} R(x - k') \cdot u(k'), \\ \dot{u}(k, t) = v(k, t), & k \in \mathbb{Z}^d, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \dot{v}(k, t) = (\Delta_L - v_0^2)u(k, t) - \int_{\mathbb{R}^d} R(x' - k) \psi(x') dx'. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь Δ_L обозначает дискретный оператор Лапласа на решетке \mathbb{Z}^d , $\Delta_L u(k) := \sum_{e \in \mathbb{Z}^d: |e|=1} (u(k + e) - u(k))$.

Заметим, что в случае $n = d$ и $R(x) = -\nabla \rho(x)$ слагаемое H_I в гамильтониане (1) является линеаризованной аппроксимацией Паули–Фирца трансляционно-инвариантного взаимодействия вида

¹ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: tdudnikov@mail.ru

$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int \rho(x - k - u(k)) \psi(x) dx$ (здесь и ниже мы опускаем обозначение \mathbb{R}^d в нижнем пределе интеграла). Поэтому система (2) может служить моделью для описания движения *блоховских* электронов в периодической среде, порожденной ионными ядрами (т.е. $\psi(x, t)$ описывает движение электронного облака, а $u(k, t)$ – малые отклонения ионных ядер от их положения равновесия). Понимание этого движения является одной из центральных проблем физики твердого тела, см., например, [1, главы 8, 22]. Отметим также, что в литературе большое развитие получила и квазиклассическая модель твердого тела, например, квазиклассическая динамика блоховских электронов изучается в [2, 3].

Для системы (2) мы изучаем задачу Коши с начальными данными

$$\begin{cases} \psi(x, 0) = \psi_0(x), & \pi(x, 0) = \pi_0(x), & x \in \mathbb{R}^d, \\ u(k, 0) = u_0(k), & v(k, 0) = v_0(k), & k \in \mathbb{Z}^d. \end{cases} \quad (3)$$

Введем фазовое пространство начальных данных $Y_0 = (\psi_0, u_0, \pi_0, v_0)$. Для этого сначала через $H_\alpha^s \equiv H_\alpha^s(\mathbb{R}^d)$, $s, \alpha \in \mathbb{R}$, обозначим весовые пространства Соболева, т.е. гильбертовы пространства распределений $\psi \in S'(\mathbb{R}^d)$ с конечной нормой $\|\psi\|_{s, \alpha} = \|\langle x \rangle^\alpha \Lambda^s \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \infty$, где $\langle x \rangle := \sqrt{|x|^2 + 1}$, $\Lambda^s \psi := F_{\xi \rightarrow x}^{-1}(\langle \xi \rangle^s \hat{\psi}(\xi))$, $\hat{\psi} := F(\psi)$ обозначает преобразование Фурье обобщенной функции умеренного роста ψ . Если $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, то $\hat{\psi}(\xi) = \int e^{i x \cdot \xi} \psi(x) dx$. Через $\ell_\alpha^2 \equiv \ell_\alpha^2(\mathbb{Z}^d)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, обозначим гильбертово пространство векторнозначных последовательностей $u(k) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}^d$, с конечной нормой $\|u\|_\alpha := \|\langle k \rangle^\alpha u(k)\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} < \infty$. Наконец, через $E_\alpha^s := H_\alpha^s \oplus \ell_\alpha^2$ обозначим гильбертово пространство функций $Y^0 = (\psi(x), u(k))$ с нормой $\|Y^0\|_{s, \alpha}^2 := \|\psi\|_{s, \alpha}^2 + \|u\|_\alpha^2 < \infty$.

Определение. Фазовое пространство $\mathcal{E}_\alpha^s := E_\alpha^{s+1} \oplus E_\alpha^s$ ($s, \alpha \in \mathbb{R}$) – это гильбертово пространство векторов $Y = (Y^0, Y^1)$, где $Y^0 \equiv (\psi, u)$, $Y^1 \equiv (\pi, v)$, с конечной нормой $\|Y\|_{s, \alpha}^2 := \|\psi\|_{s+1, \alpha}^2 + \|u\|_\alpha^2 + \|\pi\|_{s, \alpha}^2 + \|v\|_\alpha^2 < \infty$.

Обозначим решение системы (2) через $Y(t) = (Y^0(t), Y^1(t))$, где $Y^0(t) = (\psi(x, t), u(k, t))$, $Y^1(t) = (\pi(x, t), v(k, t))$, и $Y_0 = (Y_0^0, Y_0^1)$, где $Y_0^0 = (\psi_0, u_0)$, $Y_0^1 = (\pi_0, v_0)$. Таким образом, $Y_0^0(\cdot)$ и $Y_0^1(\cdot)$ являются функциями на пространстве $\mathbb{P}^d := \mathbb{R}^d \cup \mathbb{Z}^d$. На-

пример, $Y_0^0(p) = \psi_0(x)$, если $p = x \in \mathbb{R}^d$, и $Y_0^0(p) = u_0(k)$, если $p = k \in \mathbb{Z}^d$. Аналогично определяются функции $Y(p, t) \equiv Y(t)$ и $Y^j(p, t) \equiv Y^j(t)$, $j = 0, 1$, $p \in \mathbb{P}^d$. Тогда задача (2)–(3) принимает вид

$$\dot{Y}(t) = \mathcal{A}(Y(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad Y(0) = Y_0, \quad (4)$$

где $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mathcal{H} & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{H} := \begin{pmatrix} -\Delta + m_0^2 & S \\ S^* & -\Delta_L + v_0^2 \end{pmatrix}$, $(Su)(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} R(x - k) \cdot u(k)$, $(S^*\psi)(k) := \int R(x - k) \psi(x) dx$.

Заметим, что динамика задачи (4) инвариантна относительно сдвигов в \mathbb{Z}^d . Поэтому удобнее переписать ее, используя преобразование Блоха–Флоке–Зака.

Определение. Через $\tilde{u}(\theta)$ обозначим дискретное преобразование Фурье, $\tilde{u}(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{i k \cdot \theta} u(k)$, $\theta \in \mathbb{T}^d \equiv \mathbb{R}^d / 2\pi\mathbb{Z}^d$. Представим $x \in \mathbb{R}^d$ в виде $x = l + y$, $l = [x] \in \mathbb{Z}^d$, $y \in [0, 1]^d$, и введем преобразование Блоха–Флоке–Зака функции $\psi(x)$ следующим образом: $\mathcal{L}\psi \equiv \tilde{\psi}_e(\theta, y) = e^{i y \cdot \theta} \tilde{\psi}(\theta, y) = e^{i y \cdot \theta} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} e^{i l \cdot \theta} \psi(l + y)$, $\theta \in K^d := [0, 2\pi]^d$ (ниже для краткости будем называть это преобразованием Зака, см. [4]). Заметим, что $\tilde{\psi}_e(\theta, y)$ является периодической функцией по $y \in \mathbb{T}_1^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ и квазипериодической по $\theta \in K^d$, т.е. $\tilde{\psi}_e(\theta, y + l) = \tilde{\psi}_e(\theta, y)$ при $l \in \mathbb{Z}^d$ и $\tilde{\psi}_e(\theta + 2\pi e_j, y) = e^{i 2\pi y_j} \tilde{\psi}_e(\theta, y)$ при $j = 1, \dots, d$.

Применим преобразование Зака к решению $Y(\cdot, t)$ задачи (4) и обозначим $\tilde{Y}_e(\theta, t) := \mathcal{L}Y(\cdot, t) = (\tilde{\psi}_e(\theta, y, t), \tilde{u}(\theta, t), \tilde{\pi}_e(\theta, y, t), \tilde{v}(\theta, t))$, где $\tilde{Y}_e(\theta, t) \equiv \tilde{Y}_e(\theta, r, t)$, $r \in \mathcal{T}_1^d \equiv \mathbb{T}_1^d \cup \{0\}$. Тогда задача (4) сводится к задаче Блоха на торе \mathbb{T}_1^d с параметром $\theta \in K^d$:

$$\dot{\tilde{Y}}_e(\theta, t) = \tilde{\mathcal{A}}(\theta) \tilde{Y}_e(\theta, t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{Y}_e(\theta, t)|_{t=0} = \tilde{Y}_{0,e}(\theta).$$

Здесь $\tilde{Y}_{0,e}(\theta) \equiv \tilde{Y}_{0,e}(\theta, r)$ – преобразование Зака начальных данных Y_0 , $\tilde{\mathcal{A}}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{\mathcal{H}}(\theta) & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathcal{H}}(\theta) := \mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{L}^{-1}$ – (самосопряженный) оператор “Шредингера–Блоха” на торе вида $\tilde{\mathcal{H}}(\theta) = \begin{pmatrix} (i\nabla_y + \theta)^2 + m_0^2 & \tilde{S}(\theta) \\ \tilde{S}^*(\theta) & \omega_*^2(\theta) \end{pmatrix}$, где $(\tilde{S}(\theta)\tilde{u})(\theta, y) =$

$$= \tilde{R}_\varepsilon(\theta, y) \cdot \tilde{u}(\theta), (\tilde{S}^*(\theta)\tilde{\psi}_\varepsilon)(\theta) = \int_{\mathbb{T}^d} \tilde{R}_\varepsilon(-\theta, y)\tilde{\psi}_\varepsilon(\theta, y)dy,$$

$$\omega_*^2(\theta) = \sum_{j=1}^d (2 - 2 \cos \theta_j) + \nu_0^2. \text{ Предполагается, что}$$

$\tilde{\mathcal{H}}(\theta) > 0$ для всех $\theta \in K^d$, что соответствует гиперболичности задачи (2). Следовательно, оператор $\tilde{\mathcal{H}}(\theta)$ имеет дискретный, положительный спектр $\omega_l^2(\theta), l = 1, 2, \dots$.

Л е м м а. Для любых начальных данных $Y_0 \in \mathcal{E}_\alpha^s, s, \alpha \in \mathbb{R}$, существует, и притом единственное, решение задачи (4) $Y(t) = W_t Y_0 \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E}_\alpha^s)$.

Ниже полагаем, что $s, \alpha < -d/2$.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Введем сначала гиббсовские меры для модели (1). Формально гиббсовские меры определяются следующим образом, $g_\beta(dY) = (Z_\beta)^{-1} \exp\{-\beta H(Y)\} \prod_{p \in \mathbb{P}^d} dY(p)$, где Z_β – нормирующий множитель, $H(Y)$ – гамильтониан, $\beta = T^{-1}$, T – соответствующая абсолютная температура, $T > 0$. Так как гамильтониан, определенный в (1), квадратичен, то мы можем определить гиббсовские меры g_β как гауссовские борелевские вероятностные меры $g_\beta(dY) = g_\beta^0(dY^0) \times g_\beta^1(dY^1)$ на пространстве $\mathcal{E}_\alpha^s = E_\alpha^{s+1} \oplus E_\alpha^s$, где меры g_β^0 и g_β^1 имеют характеристические функционалы вида

$$\hat{g}_\beta^0(Z) \equiv \int \exp\{i \langle Y^0, Z \rangle\} g_\beta^0(dY^0) = \exp\left\{-\frac{1}{2\beta} \langle \mathcal{H}^{-1} Z, Z \rangle\right\},$$

$$\hat{g}_\beta^1(Z) \equiv \int \exp\{i \langle Y^1, Z \rangle\} g_\beta^1(dY^1) = \exp\left\{-\frac{1}{2\beta} \langle Z, Z \rangle\right\},$$

$$Z \in D_F \oplus D_L,$$

$D_F := C_0^\infty(\mathbb{R}^d), D_L := [C_0(\mathbb{Z}^d)]^n$. Меры g_β существуют на \mathcal{E}_α^s для любых $s, \alpha < -d/2$ в силу теоремы Минлоса. Кроме того, корреляционная матрица меры g_β имеет вид $Q_\beta(p, p') = (Q_\beta^{ij}(p, p'))_{i,j=0}^1, p, p' \in \mathbb{P}^d$, где $Q_\beta^{ij}(p, p') := \int (Y^i(p) \otimes Y^j(p')) g_\beta(dY)$, причем $Q_\beta^{ij}(p, p') = 0$ при $i \neq j$, а при $i = j$ матрицы Q_β^{ij} удовлетворяют условию $Q_\beta^{ij}(k+r, k'+r') = q_\beta^{ij}(k-k', r, r') \forall k, k' \in \mathbb{Z}^d$. Более того, матрицы $q_\beta^{ij}, j = 0, 1$, в преобразовании Зака имеют вид $\tilde{q}_\beta^{00}(\theta) = \beta^{-1} \mathcal{H}^{-1}(\theta), \tilde{q}_\beta^{11}(\theta) = \beta^{-1} I, \theta \in K^d$, где через $\tilde{q}_\beta^{ij}(\theta)$ обозначается

интегральный оператор с ядром $\tilde{q}_\beta^{ij}(\theta, r, r') := e^{i(r-r')\theta} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{ik\theta} q_\beta^{ij}(k, r, r'), r, r' \in \mathcal{T}_1^d$.

Предполагается, что начальные данные $Y_0(p), p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{P}^d$, – это случайная функция вида $Y_0(p) = \sum_{\pm} \zeta_{\pm}(p_1) Y_{\pm}(p)$, где “срезающие” неотрицательные функции ζ_{\pm} равны $\zeta_{\pm}(p_1) = 1$ при $\pm p_1 > a$ и $\zeta_{\pm}(p_1) = 0$ при $\pm p_1 < -a$ с некоторым $a > 0$, причем случайные функции $Y_{\pm}(p)$ имеют гиббсовские распределения $g_{\pm} \equiv g_{\beta_{\pm}} (\beta_{\pm} = T_{\pm}^{-1})$ с температурами T_{\pm} и корреляционными матрицами $Q_{\pm} := Q_{\beta_{\pm}}$, определенными выше. Обозначим через μ_0 вероятностную борелевскую меру на \mathcal{E}_α^s , которая является распределением функции Y_0 , а через $Q_0(p, p') = (Q_0^{ij}(p, p'))_{i,j=0}^1$ – ее корреляционную матрицу, где $Q_0^{ij}(p, p') := \int (Y^i(p) \otimes Y^j(p')) \mu_0(dY), i, j = 0, 1$. Тогда $Q_0(p, p') = Q_-(p, p')$ при $p_1, p'_1 < -a$ и $Q_0(p, p') = Q_+(p, p')$ при $p_1, p'_1 > a$. Таким образом, начальная мера μ_0 не является, вообще говоря, трансляционно-инвариантной относительно сдвигов в \mathbb{Z}^d . Через $\mu_t, t \in \mathbb{R}$, обозначим вероятностную борелевскую меру на пространстве \mathcal{E}_α^s , которая является распределением решений $Y(t)$ задачи (4), т.е. $\mu_t(B) = \mu_0(W_t^{-1} B)$ для любого борелевского множества $B \subset \mathcal{E}_\alpha^s$. Основным результатом является следующая теорема.

Т е о р е м а. (1) Корреляционные функции мер μ_t сходятся к пределу при $t \rightarrow \infty$. (2) Меры μ_t слабо сходятся при $t \rightarrow \infty$ на пространстве \mathcal{E}_α^s , т.е. для всякой ограниченной непрерывной функции f на \mathcal{E}_α^s справедлива сходимость $\int f(Y) \mu_t(dY) \rightarrow \int f(Y) \mu_\infty(dY)$ при $t \rightarrow \infty$. При этом предельная мера μ_∞ является гауссовой мерой, трансляционно-инвариантной относительно сдвигов в \mathbb{Z}^d . Характеристический функционал меры μ_∞ имеет вид $\hat{\mu}_\infty(Z) \equiv \int \exp\{i \langle Y, Z \rangle\} \mu_\infty(dY) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathcal{Q}_\infty(Z, Z)\right\}, Z \in \mathcal{D} \equiv [D_F \oplus D_L]^2$, где $\mathcal{Q}_\infty(Z, Z)$ – действительная неотрицательная квадратичная форма на пространстве \mathcal{D} , равная $\mathcal{Q}_\infty(Z, Z) = \int \langle Y, Z \rangle^2 \mu_\infty(dY) = \langle Q_\infty(p, p'), Z(p) \otimes Z(p') \rangle, Q_\infty(p, p') = \int (Y(p) \otimes Y(p')) \mu_\infty(dY)$. Предельная корреляционная матрица $Q_\infty(p, p') = (Q_\infty^{ij}(p, p'))_{i,j=0}^1$ является трансляционно-инвариантной относительно сдви-

гов в \mathbb{Z}^d , т.е. $Q_\infty(p, p') = Q_\infty(p + k, p' + k) \forall k \in \mathbb{Z}^d$, а функции $q_\infty^{ij}(k - k', r, r') := Q_\infty(k + r, k' + r')$, $i, j = 0, 1$, имеют вид (в преобразовании Зака)

$$\begin{aligned} \tilde{q}_\infty^{11}(\theta) &= \tilde{\mathcal{H}}(\theta) \tilde{q}_\infty^{00}(\theta) = \frac{1}{2}(T_+ + T_-)I, \\ \tilde{q}_\infty^{01}(\theta) &= -\tilde{q}_\infty^{10}(\theta) = \\ &= \frac{i}{2}(T_+ - T_-) \sum_{\sigma=1}^{\infty} \omega_\sigma^{-1}(\theta) \operatorname{sign} \left(\frac{\partial \omega_\sigma(\theta)}{\partial \theta_1} \right) \Pi_\sigma(\theta), \end{aligned}$$

где $\Pi_\sigma(\theta)$ – проектор на собственное подпространство, соответствующее собственному значению

$\omega_\sigma(\theta)$ оператора $\sqrt{\tilde{\mathcal{H}}(\theta)}$, $\sigma = 1, 2, \dots$.

Заметим, что наша модель может быть рассмотрена как “открытая система, взаимодействующая с двумя тепловыми резервуарами”, где “резервуары” – это две части модели, состоящие из решений $Y(p, t)$ с $p_1 < -a$ и $p_1 > a$, а “открытая система” – остальная ее часть. В начальный момент времени “резервуары” находятся в тепловом равновесии с температурами T_- и T_+ (т.е. имеют гиббсовские распределения g_\pm). Используя явные формулы для предельных корреляционных функций, вычисляем предельную среднюю плотность потока энергии J и при дополнительных условиях на функцию взаимодействия R получаем

$$J = c(T_- - T_+, 0, \dots, 0), \quad c > 0, \quad (5)$$

что соответствует Второму закону термодинамики, т.е. тепло передается от “горячего” резервуара к “холодному”. Таким образом, доказано, что существуют стационарные неравновесные состояния, при которых в изучаемой модели имеется ненулевой поток тепла.

Сходимость мер μ_t была доказана в [5] в частном случае, когда начальные меры являются трансляционно-инвариантными относительно сдвигов в \mathbb{Z}^d вероятностными мерами на пространстве \mathcal{E}_α^0 . Формулы, аналогичные (5), были получены для поля Клейна–Гордона в [6, 7] и для гармонического кристалла в [8, 9]. Обзор открытых проблем и результатов, касающихся неравновесных систем, см., например, в статье [10], в которой также содержится обзор численных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ашкрофт Н., Мермин Н. Физика твердого тела. Т. 1, 2. М.: Мир, 1976 [перевод с англ.: *N.W. Ashcroft, N.D. Mermin. Solid State Physics. New York: Saunders, 1976*].
2. Panati G., Spohn H., Teufel S. // Commun. Math. Phys. 2003. V. 242. P. 547–578.
3. Panati G., Spohn H., Teufel S. // In: Analysis, Modeling and Simulation of Multiscale Problems, ed. A. Mielke, pp. 595–617. (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006).
4. Zak J. // Phys. Rev. 1968. V. 168. P. 685–695.
5. Dudnikova T.V., Komech A.I. // Rus. J. Math. Phys. 2005. V. 12. № 3. P. 301–325.
6. Дудникова Т.В., Комеч А.И. // Теор. вероятн. и ее примен. 2006. V. 50. № 4. С. 582–611.
7. Дудникова Т.В. // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85. № 5. С. 110–131.
8. Dudnikova T., Komech A., Mauser N. // J. Stat. Phys. 2004. V. 114. P. 1035–1083.
9. Dudnikova T.V. // Rus. J. Math. Phys. 2019. V. 26. № 4. P. 429–453.
10. Lepri S., Livi R., Politi A. // Phys. Rep. 2003. V. 377. P. 1–80.

ON THE STATIONARY NON-EQUILIBRIUM MEASURES FOR THE “FIELD–CRYSTAL” SYSTEM

T. V. Dudnikova

Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

In the paper, we consider the Cauchy problem for a Hamiltonian system consisting of a Klein–Gordon field and an infinite harmonic crystal. We assume that the initial data of the problem are a random function and study the convergence of the distributions of the solutions to a limiting measure for large times. Under the condition that the initial random function in the “left” and “right” parts of the space has the Gibbs distribution with different temperatures, we find the stationary states of the system in which the limiting energy current density does not vanish. Thus, for this system, a class of stationary non-equilibrium states is constructed.

Keywords: Klein–Gordon field coupled to a crystal, Cauchy problem, Zak transform, random initial data, weak convergence of measures, Gaussian and Gibbs measures, energy current density, stationary nonequilibrium states

УДК 519.615

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВЫРОЖДЕННЫХ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ. P-ФАКТОР МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

© 2022 г. Академик РАН Ю. Г. Евтушенко^{1,2,*}, Е. Беднарчук⁴, А. Прусинска³, А. А. Третьяков^{1,3,4,**}

Поступило 25.05.2022 г.

После доработки 18.08.2022 г.

Принято к публикации 20.08.2022 г.

В статье показывается локальная эквивалентность вырожденных и некорректных задач в классе достаточно гладких отображений, что обосновывает целесообразность применения так называемого p -фактор метода регуляризации для их решения. Описываются основные конструкции теории p -регулярности, необходимые для устойчивого решения приближенных задач и доказываются теоремы об оценках для регуляризирующих алгоритмов.

Ключевые слова: вырожденные и некорректные задачи, p -фактор метод

DOI: 10.31857/S2686954322050095

Рассмотрим задачу (уравнение)

$$F(x) = 0, \quad (1)$$

где $F : X \rightarrow Y$, X, Y – банаховы пространства, F – достаточно гладкое отображение, $X_* = \{x^* \in X \mid F(x^*) = 0\}$ – множество решений уравнения (1). Наряду с (1) будем рассматривать приближенное уравнение

$$F_\varepsilon(x) = 0, \quad (2)$$

где $F_\varepsilon(x) \rightarrow F(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. F_ε – приближение отображения F . Пусть $U(x^*)$ – некоторая окрестность точки x^* , а $F_0(x) \triangleq F(x)$. Введем

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что задача (1) некорректна в точке x^* , если существуют отображения $F_\varepsilon(x) \in C^1(X)$ такие, что для $\varepsilon > 0$ достаточно малых будет

$$\|F_\varepsilon(x) - F(x)\| \rightarrow 0, \quad \|F'_\varepsilon(x) - F'(x)\| \rightarrow 0, \quad (3)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0, \quad x \in U(x^*)$

– так называемое условие аппроксимации, но для множеств $X(\varepsilon) = \{x(\varepsilon) \in X \mid F_\varepsilon(x(\varepsilon)) = 0\}$ решений

уравнения (2) существует последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ такая, что либо

$$U(x^*) \cap X(\varepsilon_k) = \emptyset,$$

либо

$$\rho(X(\varepsilon_k), X_*) \geq \Delta > 0, \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Задачу (1) мы будем называть идеальной, а задачу (2) ε -возмущенной (или ε -приближенной). Отображением F аналогично называем идеальным, а отображение F_ε – ε -возмущенным (или ε -приближенным) отображением.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что задача (1) вырождена в точке x^* , если $F'(x^*)$ – вырождена, т.е. $\text{Im } F'(x^*) \neq Y$.

Наряду с определением 1 введем понятие слабо некорректной задачи (1).

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что задача (1) является слабо некорректной в точке x^* , если существует отображение $\bar{F}(x) \in C^1(X)$ такое, что

$$\|F(x) - \bar{F}(x)\| = o(\|x - x^*\|) \quad (4)$$

и задача $\bar{F}(x) = 0$ – некорректна.

Очевидно, что определению 3 удовлетворяет существенно более широкий класс отображений, чем определению 1. Отметим, что определение 1 некорректности фактически совпадает с классическим определением некорректности (см., например, [7]), за исключением добавленного здесь условия гладкости отображений и условия аппроксимации на производные $F'_\varepsilon(x)$ и $F'(x)$. Также рассматриваемый в статье класс задач суще-

¹ Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия

² Московский физико-технический институт, Московская область, г. Долгопрудный, Россия

³ Siedlce University, Faculty of Sciences, Siedlce, Poland

⁴ System Res. Inst., Polish Acad. Sciences, Warsaw, Poland

*E-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru

**E-mail: prof.tretyakov@gmail.com

ственно шире классического класса условно-корректных задач [7].

В реальной ситуации отображение F часто не известно, но известна его аппроксимация F_ε , поэтому такие проблемы мы называем обратными. Однако подразумевается, что идеальное отображение F существует (иначе нельзя говорить о решаемой задаче). Взаимосвязь между приближенными и вырожденными задачами в классе достаточно гладких отображений устанавливает следующий результат.

Теорема 1. Пусть $F \in C^2(X)$ и $F(x^*) = 0$. Тогда задача (1) слабо некорректна в точке x^* тогда и только тогда, когда задача (1) вырождена в точке x^* .

Доказательство. Пусть задача (1) некорректна. Покажем, что отображение $F(\cdot)$ вырождено в точке x^* . Действительно, если $F'(x^*)$ не вырождена, то по теореме о неявной функции [1] применительно к отображениям $F(x, \varepsilon) \triangleq F_\varepsilon(x)$, получаем существование $x(\varepsilon) \in U(x^*)$ такого, что $F(x(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ и $\rho(x(\varepsilon), x^*) \leq K \|F(x^*, \varepsilon)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по всем $F_\varepsilon(x)$, удовлетворяющих условию аппроксимации (3). Это, в свою очередь, означает корректность задачи (1).

Предположим теперь, что $F'(x^*)$ вырождена. Тогда существует $\xi \in Y$ и $\xi \notin \text{Im } F'(x^*)$, $\|\xi\| = 1$. Покажем, что задача (1) слабо некорректна. Рассмотрим отображения $\bar{F}(x) = F(x^*) + F'(x^*)(x - x^*)$ и $\bar{F}_\varepsilon(x) = \bar{F}(x) + \varepsilon\xi$. Очевидно, что $\|F(x) - \bar{F}(x)\| = o(\|x - x^*\|)$, но уравнение (2) $\bar{F}_\varepsilon(x) = 0$ не имеет решения при $x \in U(x^*)$, так как $\varepsilon\xi \notin \text{Im } F'(x^*)$, а $F'(x^*)(x - x^*) \in \text{Im } F'(x^*)$. То есть задача $\bar{F}(x) = 0$ не корректна, что означает слабую некорректность исходной задачи (1).

Следствие 1. Пусть F – линейное отображение $F \in C^1(X)$. Тогда задача (1) некорректна в точке x^* тогда и только тогда, когда задача (1) вырождена в точке x^* .

Причем, если отображение F некорректно в точке x^* , то $F'(x^*)$ – вырожденно, а линейность нужна только при обратной импликации.

Таким образом, при решении приближенных задач целесообразно использовать методы, адаптированные для вырожденных задач, описание и основные конструкции которых предложены в теории p -регулярности (см., например, [2–4]).

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ p -РЕГУЛЯРНОСТИ

Будем рассматривать уравнение (1), причем отображение F вырождено в точке решения x^* .

Пусть

$$Y = Y_1 \oplus \dots \oplus Y_p, \tag{5}$$

где $Y_1 = \text{Cl}(\text{Im } F'(x^*))$ и $Z_1 = Y$. Через Z_2 обозначим замкнутое дополнение Y_1 до Y (если такое существует) и $P_{Z_2} : Y \rightarrow Z_2$ – оператор проектирования на Z_2 параллельно Y_1 . Тогда Y_2 – замыкание линейной оболочки образа квадратичной формы $P_{Z_2} F''(x^*)[\cdot]^2$. И далее индуктивно

$$Y_i = \text{Cl}(\text{span Im } P_{Z_i} F^{(i)}(x^*)[\cdot]^i) \subset Z_i, \tag{6}$$

$$i = 2, \dots, p - 1,$$

где Z_i – замкнутое дополнение $Y_1 \oplus \dots \oplus Y_{i-1}$ до Y и $P_{Z_{-i}} : Y \rightarrow Z_i$ – операторы проектирования на Z_i параллельно $Y_1 \oplus \dots \oplus Y_{i-1}$, $i = 1, \dots, p$. Окончательно, $Y_p = Z_p$. При этом порядок p выбирается как минимальное число (если такое существует), для которого выполнено представление (5).

Определим следующие отображения:

$$F_i : X \rightarrow Y_i, \quad F_i(x) = P_{Y_i} F(x), \quad i = 1, \dots, p, \tag{6}$$

где $P_{Y_i} : Y \rightarrow Y_i$ оператор проектирования на Y_i параллельно $Y_1 \oplus \dots \oplus Y_{i-1} \oplus Y_{i+1} \oplus \dots \oplus Y_p$. Тогда отображение F может быть представлено как

$$F(x) = F_1(x) + \dots + F_p(x)$$

или в векторном виде

$$F(x) = (F_1(x), \dots, F_p(x)).$$

Определение 4. Линейный оператор $\Psi_p = \Psi_p(h) : X \rightarrow Y$

$$\Psi_p(h) = F_1'(x^*) + F_2''(x^*)[h] + \dots + F_p^{(p)}(x^*)[h]^{p-1} \tag{7}$$

называется p -фактор оператором, определенным элементом h , или просто p -фактор оператором, если это ясно из контекста.

Введем в рассмотрение нелинейный оператор $\Psi_p[\cdot]^p$ так, что

$$\Psi_p[x]^p = F_1'(x^*)[x] + F_2''(x^*)[x]^2 + \dots + F_p^{(p)}(x^*)[x]^p.$$

Заметим, что $\Psi_p[x]^p = \Psi_p(x)[x]$.

Определение 5. p -ядро оператора Ψ_p есть множество

$$H_p(x^*) = \text{Ker}^p \Psi_p = \{z \in X \mid F_1'(x^*)[z] + F_2''(x^*)[z]^2 + \dots + F_p^{(p)}(x^*)[z]^p = 0\}.$$

Заметим, что $\text{Ker}^p \Psi_p = \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}^k F_k^{(k)}(x^*)$, где $\text{Ker}^k F_k^{(k)}(\cdot) = \{z \in X \mid F^{(k)}(\cdot)[z]^k = 0\}$ – k -ядро отображения $F^{(k)}(\cdot)[\cdot]^k$.

О п р е д е л е н и е 6. Отображение F называется p -регулярным в точке x^* на элементе h , если $\text{Im } \Psi_p(h) = Y$.

О п р е д е л е н и е 7. Отображение F называется p -регулярным в точке x^* , если оно p -регулярно на каждом элементе $h \in H_p(x^*) \setminus \{0\}$ или $H_p(x^*) = \{0\}$.

**2. p -ФАКТОР МЕТОД РЕШЕНИЯ
ВЫРОЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ**

Рассмотрим уравнение (1) при $X = \mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}^n$ в случае вырождения $F'(x^*)$ в решении x^* . Тогда принципиальная схема p -фактор метода будет следующая:

$$x_{k+1} = x_k - \{F'(x_k) + P_2 F''(x_k)h + \dots + P_p F^{(p)}(x_k)h^{p-1}\}^{-1} \cdot (F(x_k) + P_2 F'(x_k)h + \dots + P_p F^{(p-1)}(x_k)h^{p-1}), \quad (8)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $P_i = P_{Y_i}$, $i = 1, \dots, p$ и элемент h , $\|h\| = 1$ выбирается таким образом, что p -фактор оператор $\Psi_p(h) = F'(x^*) + P_2 F''(x^*)h + \dots + P_p F^{(p)}(x^*)h^{p-1}$ был невырожденным, что означает p -регулярность отображения F в точке x^* на элементе h .

Для p -фактор метода (8) будет справедлива следующая

Т е о р е м а 2. Пусть $F \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ и существует элемент h , $\|h\| = 1$ такой, что p -фактор оператор $\Psi_p(h)$ не вырожден. Тогда для $x_0 \in U_\varepsilon(x^*)$ ($\varepsilon > 0$ – достаточно малое), последовательность $\{x_k\}$, определенная схемой (8), сходится к решению x^* и верна оценка скорости сходимости

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq C \|x_k - x^*\|^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где $C > 0$ – независимая константа.

**3. p -ФАКТОР МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
(p -ФАКТОР РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ)**

Пусть x^* является решением идеальной задачи (уравнения) (1). При этом регулярность (не вырожденность) F в точке x^* не предполагается. Одновременно рассматриваем приближенное уравнение

$$\tilde{F}(x) = 0, \quad (10)$$

$\|\tilde{F}(x) - F(x)\| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое и $x \in U(x^*)$. При этом считаем $\tilde{F} \in C^{p+1}(X)$. Основная идея p -фактор регуляризации состоит в следующем. Нужно заменить уравнение (1) другим уравнением, которое гарантированно имело бы

x^* своим решением и было бы невырождено в точке x^* . Здесь предлагается реализация данной идеи, основанной на конструкции p -регулярности. Базовым результатом является

Т е о р е м а 3. Пусть X, Y – банаховы пространства, $F, \tilde{F} \in C^{p+1}(X, Y)$, $F(x^*) = 0$ и $F - p$ -регулярно на элементе $h \in X, h \neq 0$, причем

$$\|\tilde{F}^{(k)}(x) - F^{(k)}(x)\| \leq \varepsilon, \quad k = 0, 1, \dots, p + 1,$$

$\forall x \in U(x^*)$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое, а $U(x^*)$ – некоторая окрестность точки x^* .

Тогда отображение $\Phi_{\tilde{F}}(x)$

$$\Phi_{\tilde{F}}(x) = \tilde{F}(x) + P_2 \tilde{F}'(x)h + \dots + P_p \tilde{F}^{(p-1)}(x)h^{p-1}$$

является p -фактор регуляризирующим для приближенного уравнения (10), т.е.

$$\Phi_{\tilde{F}}^{-1}(0) \neq \emptyset \quad (11)$$

и

$$\rho(x^*, \Phi_{\tilde{F}}^{-1}(0)) \leq \|\tilde{F}(x^*) + P_2 \tilde{F}'(x^*)h + \dots + P_p \tilde{F}^{(p-1)}(x^*)h^{p-1}\| \leq C \cdot \varepsilon \quad (12)$$

Здесь через $\Phi_{\tilde{F}}^{-1}(0)$ обозначим прообраз точки $y = 0$ для отображения $\Phi_{\tilde{F}}(x)$, т.е. $\Phi_{\tilde{F}}^{-1}(0) = \{x \in X \mid \Phi_{\tilde{F}}(x) = 0\}$.

З а м е ч а н и е 1. Если p -фактор оператор $F'(x^*) + P_2 F''(x^*)h + \dots + P_p F^{(p)}(x^*)h^{p-1}$ биективен, то существует локально единственное решение уравнения (10): $\tilde{F}(x) = 0$ в окрестности $U(x^*)$, которое мы обозначим через \tilde{x} . Тогда основной результат выглядит следующим образом

$$\Phi_{\tilde{F}}(\tilde{x}) = 0 \quad (13)$$

и

$$\rho(x^*, \tilde{x}) \leq C \cdot \varepsilon. \quad (14)$$

Например, условие биекции заведомо будем выполнено, если X, Y – конечномерные евклидовы пространства одинаковой размерности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\Phi(\tilde{F}, x) = \Phi_{\tilde{F}}(x)$. Тогда, применяя классическую теорему о неявной функции [1] к отображению $\Phi(\tilde{F}, x)$ в точке $\tilde{F} = F$ и $x = x^*$, получаем, что оператор $\Phi'_x(F, x^*)$ не вырожден в этой точке (F, x^*) и, следовательно, существует функция $x = x(\tilde{F})$, которая является локальным решением уравнения $\Phi(\tilde{F}, x(\tilde{F})) = \Phi_{\tilde{F}}(x(\tilde{F})) = 0$ и справедливы оцен-

ки (12) и (14), т.к. $\|x(\tilde{F}) - x^*\| \leq C\|\Phi(\tilde{F}, x^*)\|$ для $C > 0$ — независимой константы.

Использование в конструкции отображения $\Phi(\cdot)$ точных операторов P_k , $k = 1, \dots, p-1$ сделано заведомо специально, так как этот аспект не является главным в идеологии предложенного подхода, а скорее техническим в практической реализации метода. Тем более, что уже существуют способы построения операторов P_k , $k = 1, \dots, p-1$ на основе приближенной информации (см., например, [5, 6]). В общем случае построение операторов P_k или их приближений с нужными свойствами требует использования специфики рассматриваемой задачи (см. [2]).

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-30005) и научной темы № 165/0015 Министерства образования и науки Польши.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
2. *Измаилов А.Ф., Третьяков А.А.* 2-регулярные решения нелинейных задач. Теория и численные методы. М.: Физико-математическая литература, 1999.
3. *Измаилов А.Ф., Третьяков А.А.* Фактор-анализ нелинейных отображений. М.: Наука, 1994.
4. *Tret'yakov A., Marsden J.E.* Factor analysis of nonlinear mappings: p-regularity theory // Communications on Pure & Applied Analysis. 2003. V. 2. № 4. P. 425–445.
5. *Брежнева О.А., Третьяков А.А.* Методы решения существенно нелинейных задач. М.: ВЦ РАН, 2000.
6. *Szczepanik E., Tret'yakov A.* Teoria P-regularności i metody rozwiązywania nieliniowych problemów optymalizacji. Siedlce: Uniwersytet Przyrodniczo Humanistyczny w Siedlcach, 2020. (на польском языке)
7. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Из-во СО РАН, 2018.

ON THE EQUIVALENCE OF SINGULAR AND ILL-POSED PROBLEMS. P-FACTOR REGULARIZATION METHOD

Academician of the RAS Yu. G. Evtushenko^{a,b}, E. Bednarczuk^d, A. Prusinska^c, and A. A. Tret'yakov^{a,c,d}

^a Federal Research Center "Informatics and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

^b Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow region, g. Dolgoprudny, Russian Federation

^c Siedlce University, Faculty of Sciences, Siedlce, Poland

^d System Res. Inst., Polish Acad. Sciences, Warsaw, Poland

In this paper it is shown the equivalence of singular and ill-posed problems from the points of view of approach to their solution. Justifies the use of the so-called p -factor method for approximate problems and a construction is proposed that makes it possible to regularize the approximate equation even in the case of degeneracy in the solution. A theorem on convergence of the proposed method of the p -factor regularization is proved and an estimate for the approximate solution is obtained.

Keywords: degenerate, ill-posed, p -regular, factor method

УДК 514.177.2

МНОЖЕСТВА С НЕЧЕТНЫМИ РАССТОЯНИЯМИ И РАВНОУДАЛЕННЫЕ ВПРАВО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ЧЕБЫШЁВСКОЙ И МАНХЕТТЕНСКОЙ МЕТРИКАХ

© 2022 г. А. И. Голованов^{1,*}, А. Б. Кулавский^{1,2,**}, А. А. Сагдеев^{1,***}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 17.05.2022 г.

После доработки 25.06.2022 г.

Принято к публикации 27.07.2022 г.

Мы рассматриваем две связанные задачи экстремальной геометрии в n -мерном пространстве \mathbb{R}_∞^n с максимальной метрикой. В первой задаче мы показываем, что максимальный размер *равноудаленной вправо* последовательности точек в \mathbb{R}_∞^n есть $2^{n+1} - 1$. Здесь последовательность называется *равноудаленной вправо*, если каждая точка равноудалена от всех последующих. Во второй задаче мы доказываем, что наибольшее число точек в \mathbb{R}_∞^n с попарно нечетными расстояниями есть 2^n . Также получены частичные результаты для обеих задач в \mathbb{R}_1^n .

Ключевые слова: чебышёвская метрика, манхеттенская метрика, равносторонняя размерность, множество с нечетными расстояниями, равноудаленная вправо последовательность

DOI: 10.31857/S2686954322050101

1. ВВЕДЕНИЕ

Для метрического пространства \mathbb{M} назовем его *равносторонней размерностью* наибольшее число равноудаленных друг от друга точек в \mathbb{M} и обозначим это число через $e(\mathbb{M})$. Эта величина активно изучалась для пространств \mathbb{R}_p^n при $1 < p < \infty$. Напомним, что ℓ_p -расстояние между двумя точками $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ определяется по формуле

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p = (|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_n - y_n|^p)^{1/p}$$

для любого вещественного $p \geq 1$, а в случае $p = \infty$ — по формуле

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty = \max_i |x_i - y_i|$$

Нетрудно проверить (см. [12]), что в евклидовом случае $e(\mathbb{R}_2^n) = n + 1$, а в случае максимальной нормы $e(\mathbb{R}_\infty^n) = 2^n$. Нижние оценки представляются соответственно вершинами правильного тетраэдра и гиперкуба. Однако про $e(\mathbb{R}_p^n)$ известно намного меньше, когда $p \neq 2, \infty$. Например, для Манхеттенской метрики ℓ_1 Алон и Пудлак [1] показали, что $e(\mathbb{R}_1^n) < cn \log n$ для некоторой положительной константы c , в то время, как наилучшая известная нижняя оценка $e(\mathbb{R}_1^n) \geq 2n$ получается из рассмотрения вершин стандартного кроссполитоба (т.е. точек, у которых все координаты нулевые, кроме одной, равной ± 1). Каснер [9] выдвинул гипотезу о том, что нижняя оценка точна. Эта гипотеза была подтверждена лишь для $n = 3$ [2] и для $n = 4$ [10]. Лучшие известные оценки для других значений p на данный момент можно найти в [1, 14, 16, 17].

В настоящей работе мы рассматриваем две задачи, связанные с равносторонней размерностью. В первой задаче рассматриваются *равноудаленные вправо* последовательности. Последовательность

¹ Московский физико-технический институт, Москва, Россия

² G-SCOP, Université Grenoble-Alpes, CNRS, Франция

*E-mail: Golovanov@phystech.edu

**E-mail: kupavskii@ya.ru

***E-mail: sagdeev.aa@phystech.edu

$\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)} \in \mathbb{R}_p^n$ назовем *равноудаленной вправо*, если $\|\mathbf{x}^{(j_1)} - \mathbf{x}^{(i)}\|_p = \|\mathbf{x}^{(j_2)} - \mathbf{x}^{(i)}\|_p$ для всех $1 \leq i < j_1 \leq j_2 \leq m$. Неформально говоря, каждая точка равноудалена от всех последующих.

В работе [11, Следствие 14] была доказана следующая общая теорема:

Теорема 1. *Во всяком нормированном пространстве размерности n размер наибольшей равноудаленной вправо последовательности не превосходит $O(6^n n^2 \log^2 n)$.*

Позднее Полянский [13] улучшил эту оценку до $O(3^n n)$. Этот результат можно применить, в частности, для доказательства верхней оценки на размер множества с k различными расстояниями.

Нетрудно видеть, что максимальный размер равноудаленной вправо последовательности в евклидовом пространстве \mathbb{R}_2^n равен $n + 2$. В качестве примера можно привести центр правильного тетраэдра, после которого идут вершины тетраэдра в произвольном порядке¹. Иные результаты для других ℓ_p пока неизвестны.

В настоящей работе мы получаем оценки для равноудаленных вправо последовательностей с метриками ℓ_∞ и ℓ_1 .

Теорема 2. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ максимальный размер равноудаленной вправо последовательности точек из \mathbb{R}_∞^n равен $2^{n+1} - 1$.*

Теорема 3. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует равноудаленная вправо последовательность из $4n - 1$ точки в \mathbb{R}_1^n .*

Вторая задача, которую мы рассматриваем, происходит из работы [8]. Для данных $n \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, \infty)$ можно построить $e(\mathbb{R}_p^n)$ точек в \mathbb{R}_p^n с попарно единичными расстояниями. В частности, наибольшее число точек в \mathbb{R}_p^n с попарно нечетными расстояниями не меньше $e(\mathbb{R}_p^n)$. В работе [8] показано, что эта тривиальная нижняя оценка в сущности оптимальна в евклидовом случае. В частности, авторы работы доказали следующее.

Теорема 4 ([8]). *Наибольшее число точек в \mathbb{R}_2^n с попарно нечетными расстояниями равно $n + 2$, если $n \equiv 14 \pmod{16}$, и $n + 1$ в противном случае.*

¹ Этот пример не единственен. Более того, существует континуально много попарно неизометричных последовательностей максимального размера.

Мы доказываем следующий аналогичный результат для максимальной нормы. В частности, это показывает, что естественная конфигурация, заданная вершинами единичного гиперкуба, оптимальна в любой размерности.

Теорема 5. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ наибольшее число точек в \mathbb{R}_∞^n с попарно нечетными расстояниями есть 2^n .*

Случай с Манхеттенской метрикой не так прозрачен. Для всех $n \in \mathbb{N}$ мы нашли явную конструкцию из $7n$ точек в \mathbb{R}_1^{3n} с попарно нечетными расстояниями. Из этого следует, что вершины стандартного кроссполитопа не представляют оптимальную конструкцию. С другой стороны, лучшая верхняя оценка, которую мы получаем, растет асимптотически как $n!$

Теорема 6. *Число точек \mathbb{R}_1^n с попарно нечетными расстояниями не превосходит $n! \cdot n \cdot \ln n \cdot (4 + o(1))$ при $n \rightarrow \infty$.*

Вообще говоря, найденная нами верхняя оценка также является верхней оценкой *хроматического числа* пространства \mathbb{R}_1^n с запрещенными нечетными расстояниями. Интересно, что для евклидовой плоскости неизвестно, конечно ли ее хроматическое число с запрещенными нечетными расстояниями (см. [7]).

2. ИДЕИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ВЕРХНИХ ОЦЕНОК

При работе с метрикой ℓ_∞ в обоих результатах используется следующий инструмент. Напомним, что *частично упорядоченным множеством* (сокращенно *чум*) называется пара $\mathcal{P} = (S, \preceq)$, где S есть множество, а \preceq — рефлексивное антисимметричное транзитивное отношение на его элементах. Назовем $x, y \in S$ *сравнимыми*, если $x \preceq y$ или $y \preceq x$. В противном случае будем называть их *несравнимыми*. Множество попарно сравнимых элементов будем называть *цепью*, а попарно несравнимых — *антицепью*.

Теорема Дилворта [4] утверждает, что размер наибольшей антицепи во всяком чуме равен наименьшему количеству цепей, в объединении дающих все множество. Для доказательства наших результатов в метрике ℓ_∞ мы строим чумы, в котором нет больших цепей, а антицепями служат конструкции меньшей размерности. В частности, мы говорим, что $x \preceq y$, если $x = y$ или если $|x_n - y_n| > |x_i - y_i|$ для всех $i < n$ и при этом $x_n < y_n$.

Например, в случае множеств с нечетными расстояниями при таком построении всякая антицепь есть пример для размерности $n - 1$, а все цепи имеют размеры не более 2. В таком случае теорема Дилворта дает рекуррентное соотношение $f(n) \leq 2f(n - 1)$ на искомую оценку, что эквивалентно $f(n) \leq 2^n$. В случае равноудаленных вправо последовательностей может найтись одна цепь длины 3, после удаления которой все цепи имеют длины не более 2, что приводит к похожему соотношению $f(n) \leq 2f(n - 1) + 1$, которое эквивалентно $f(n) \leq 2^{n+1} - 1$.

Для доказательства верхней оценки случая нечетных расстояний в ℓ_1 рассматривается решетка Λ , порожденная векторами $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_n, 2\mathbf{e}_n$, где \mathbf{e}_i есть i -й базисный вектор. В каждой точке этой решетки устанавливается копия уменьшенного кроссполитопа $C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \|\mathbf{x}\|_1 < 1/2\}$. Оказывается, что никакие две точки объединения копий этого тела не находятся на нечетном расстоянии друг от друга. Также оказывается, что асимптотически достаточно $\frac{\det(\Lambda)}{\text{vol}(C)} \cdot (2 + o(1))n \ln n$ копий этого объединения, чтобы покрыть все пространство, см. [5]. Из этого наблюдения и получается верхняя оценка.

3. ПОСТРОЕНИЕ КОНФИГУРАЦИИ, ДАЮЩЕЙ НИЖНЮЮ ОЦЕНКУ

Для того, чтобы построить пример равноудаленной вправо последовательности в \mathbb{R}_∞^n или в \mathbb{R}_∞^n , достаточно рассмотреть вершины соответственно правильного гиперкуба или кроссполитопа. Если у этого многогранника m вершин, то последовательность размера $2m - 1$ можно построить, зафиксировав вершину \mathbf{x} , которая будет последней, и затем в некотором порядке для каждой из остальных вершин \mathbf{y} добавлять в последовательность $\lambda\mathbf{y}$ и $2\lambda\mathbf{y}$, постоянно уменьшая λ . Порядок выбора вершин задается отдельно в каждом случае. Оказывается, что при достаточном уменьшении λ (например, на каждом шаге в 2 раза) полученная последовательность действительно оказывается равноудаленной вправо в данной метрике.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят Илью Богданова за упрощение оригинального доказательства теоремы 2.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Настоящая работа выполнена при поддержке гранта RSF N 22-21-00368.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alon N., Pudlák P. Equilateral Sets in l_p^n , Geom. Funct. Anal. 2003. V. 13. № 3. P. 467–482.
2. Bandelt H.-J., Chepoi V., Laurent M. Embedding into rectilinear spaces, Discrete Comput. Geom. 1998. V. 19. № 4. P. 595–604.
3. Blokhuis A., Wilbrink H.A. Alternative proof of Sine's theorem on the size of a regular polygon in \mathbb{R}^n with the ℓ_∞ -metric, Discrete Comput. Geom. 1992. V. 7. № 4. P. 433–434.
4. Dilworth R.P. A decomposition theorem for partially ordered sets, Ann. of Math. 1950. V. 51. № 2. P. 161–166.
5. Erdős P., Rogers C.A. Covering space with convex bodies, Acta Arith. 1962. V. 7. № 3. P. 281–285.
6. Frankl N., Kupavskii A., Sagdeev A. Max-norm Ramsey Theory, arXiv preprint 2111.08949, 2021.
7. Ardal H., Mañuch J., Rosenfeld M., Shelah S., Stacho L. The Odd-Distance Plane Graph, Discrete Comput. Geom. 2009. V. 42. P. 132–141.
8. Graham R.L., Rothschild B.L., Straus E.G. Are there $n + 2$ points in E^n with odd integral distances? Amer. Math. Monthly. 1974. V. 81. № 1. P. 21–25.
9. Guy R. editor, Unsolved Problems: An Olla-Podrida of Open Problems, Often Oddly Posed, Amer. Math. Monthly. 1983. V. 90. № 3. P. 196–200.
10. Koolen J., Laurent M., Schrijver A. Equilateral dimension of the rectilinear space, Des. Codes Cryptogr. 2000. V. 21. № 1. P. 149–164.
11. Naszódi M., Pach J., Swanepoel K. Arrangements of homothets of a convex body, Mathematika. 2017. V. 63. № 2. P. 696–710.
12. Petty C.M. Equilateral sets in Minkowski spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 29. № 2. P. 369–374.
13. Polyanskii A. Pairwise intersecting homothets of a convex body, Discrete Math. 2017. V. 340. № 8. P. 1950–1956.
14. Smyth C. Equilateral sets in l_p^d , Thirty Essays on Geometric Graph Theory, ed. J. Pach, Springer, New York, 2013. P. 483–488.
15. Swanepoel K.J. Cardinalities of k -distance sets in Minkowski spaces, Discrete Mathematics. 1999. V. 197. P. 759–767.
16. Swanepoel K.J. A problem of Kusner on equilateral sets, Arch. Math. 2004. V. 83. № 2. P. 164–170.
17. Swanepoel K.J., Villa R. Maximal equilateral sets, Discrete Comput. Geom. 2013. V. 50. № 2. P. 354–373.

ODD-DISTANCE AND RIGHT-EQUIDISTANT SETS IN THE MAXIMUM AND MANHATTAN METRICS

A. I. Golovanov^a, A. B. Kupavskii^{a,b}, and A. A. Sagdeev^a

^a *Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russian Federation*

^b *G-SCOP, Université Grenoble-Alpes, CNRS, France*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

We solve two related extremal-geometric questions in the n -dimensional space \mathbb{R}_∞^n equipped with the maximum metric. First, we prove that the maximum size of a *right-equidistant* sequence of points in \mathbb{R}_∞^n equals $2^{n+1} - 1$. A sequence is *right-equidistant* if each of the points is at the same distance from all the succeeding points. Second, we prove that the maximum number of points in \mathbb{R}_∞^n with pairwise odd distances equals 2^n . We also obtain partial results for both questions in the n -dimensional space \mathbb{R}_1^n with the Manhattan distance.

Keywords: maximum metric, Manhattan metric, equilateral dimension, odd-distance sets, right-equidistant sequences

КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ ПЕШЕХОДНЫХ МОСТОВ

© 2022 г. С. А. Кашенко^{1,2,*}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 18.05.2022 г.

После доработки 27.06.2022 г.

Принято к публикации 07.07.2022 г.

От дискретной модели, описывающей колебания пешеходного моста, осуществлен переход к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, непрерывно зависящей от временной и пространственной переменных. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости стационара. Исследована локальная динамика полученной модели, опирающаяся на формализм метода нормальных форм. Как следствие бесконечномерности критических случаев показано, что роль нормальной формы играет специальная эволюционная краевая задача. Построены семейства простейших ступенчатых периодических по времени решений этой краевой задачи.

Ключевые слова: бифуркации, устойчивость, квазинормальные формы, асимптотика, разрывные периодические решения

DOI: 10.31857/S2686954322050113

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе [1] в связи с изучением вопросов устойчивости пешеходных висячих мостов была предложена модель, учитывающая влияние пешеходов на колебания конструкций

$$\begin{aligned} \ddot{u}_j + \lambda(\dot{u}_j^2 + u_j^2 - \varepsilon)\dot{u}_j + \omega^2 u_j &= -\ddot{y}, \\ \ddot{y} + 2h\dot{y} + \Omega^2 y &= -\frac{r}{N} \sum_{i=1}^N \ddot{u}_i, \end{aligned} \quad (1)$$

где $j = 1, \dots, N$. Здесь величина u_j определяет отклонение “пешехода” относительно моста, а y задает отклонение моста. Все параметры этой модели “шагоход–мост” положительны. Они описаны в [1] и [2]. Ряд интересных результатов о динамических свойствах такого типа моделей, базирующихся на исследованиях явлений синхронизации, приведены в [3–12].

В настоящей работе приведены несколько аналитических результатов о коллективном поведении цепочки связанных осцилляторов (1).

Значения $u_j(t)$ можно ассоциировать со значениями функций двух переменных $u(t, x_j)$. Здесь $x_j \in [0, 1]$ – равномерно распределенные на некоторой окружности точки с угловой координатой $x_j = 2\pi N^{-1}j$. При таком определении точек x_j естественным образом возникают периодические краевые условия по переменной x . Отметим, что можно было бы рассмотреть и равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$ точки x_j . Тогда более естественно использовать краевые условия типа Неймана. Поскольку этот случай отрезка существенно не отличается от случая окружности, то ограничимся рассмотрением случая периодических краевых условий.

Основных предположений, которые открывают путь к применению аналитических методов, два. Во-первых, предполагаем, что количество осцилляторов (пешеходов) в (1) достаточно велико, т.е. $N \gg 1$. Это дает основание перейти от дискретной системы относительно $u(t, x_j)$, $y(t)$ к непрерывной пространственно-распределенной краевой задаче для величин $u(t, x)$, $y(t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \lambda \left(u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \varepsilon \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \omega^2 u = -\frac{d^2 y}{dt^2}, \quad (2)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2h \frac{dy}{dt} + \Omega^2 y = -r \int_0^1 \frac{\partial^2 u(t, s)}{\partial t^2} ds,$$

$$u(t, x + 1) \equiv u(t, x). \quad (3)$$

¹ Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

² Региональный научно-образовательный математический центр “Центр интегрируемых систем”, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

*E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Второе ограничение состоит в том, что параметр ε является достаточно малым:

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (4)$$

Отметим, что при этом условии уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{u} + \lambda[\dot{u}^2 + u^2 - \varepsilon]\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

имеет устойчивый цикл $u_0(t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \rho_0 \cos(\omega t(1 + O(\varepsilon))) + O(\varepsilon^{3/2})$ с периодом $2\pi(\omega + O(\varepsilon))^{-1}$, где $\rho_0 = (3\omega^2 + 1)^{-1/2}$.

При условии (4) рассмотрим вопрос о поведении всех решений краевой задачи (2), (3) с начальными условиями из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия.

Введем обозначение. Пусть

$$M(v(x)) = \int_0^1 v(x) dx.$$

Положим в (2), (3)

$$u(t, x) = u_0(t) + u_1(t, x), \quad M(u_1) = 0.$$

В результате приходим к системе

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \lambda M \left(\left(u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \\ - \lambda \varepsilon \frac{du_0}{dt} + \omega^2 u_0 = - \frac{d^2 y}{dt^2}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2h \frac{dy}{dt} + \Omega^2 y = -r \frac{d^2 u_0}{dt^2},$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \lambda \left[\left(u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) \frac{\partial u}{\partial t} - \right. \\ & \left. - M \left(\left(u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] - \lambda \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} + \omega^2 u_1 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом краевых условий (3) имеем равенства

$$u_1(t, x+1) \equiv u_1(t, x). \quad (7)$$

При изучении локальной динамики решений важную роль играет поведение решений при $\varepsilon = 0$ линеаризованных систем, линейных относительно u_0, u_1 и y :

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_0}{dt^2} + \omega^2 u_0 = - \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + 2h \frac{dy}{dt} + \Omega^2 y = -r \frac{d^2 u_0}{dt^2}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega^2 u_1 = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим отдельно два случая, когда параметр r является малым, и когда он не является малым.

2. ПЕРВЫЙ СЛУЧАЙ

Пусть параметр r является малым, т.е. для некоторого фиксированного значения r_1 имеем равенство

$$r = \varepsilon r_1. \quad (10)$$

В краевой задаче (7)–(9) реализуется критический случай бесконечного множества пар чисто мнимых корней $\pm i\omega$. Им соответствуют периодические решения

$$u_k(t, x) = \exp(i\omega t + ikx), \quad y_k(t, x) = 0 \quad (11)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Используем методику построения квазинормальных форм, разработанную в [13, 14]. Будем искать асимптотику решений краевой задачи (5)–(7), базирующихся на решении (11). Для этого используем формальное асимптотическое представление

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \varepsilon^{1/2} (\xi(\tau, x) \exp(i\omega t) + \\ &+ \bar{\xi}(\tau, x) \exp(-i\omega t)) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau, x) + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

$$y(t) = \varepsilon^{3/2} y_3(t, \tau) + \dots$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$ – медленное время, от x зависимость 1-периодическая, $\xi(\tau, x)$ – неизвестные амплитуды, функции u_3 и $y_3 - 2\pi/\omega$ -периодичны по t .

Подставим (12) в (5), (6) и будем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε . При $\varepsilon^{1/2}$ получаем верное равенство, а собирая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, приходим к системе уравнений для u_3, y_3 . Условие разрешимости этой системы в указанном классе функций состоит в выполнении равенства

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \lambda \xi + \gamma \int_0^1 \xi(\tau, s) ds + b \xi |\xi|^2 \quad (13)$$

и краевых условий

$$\xi(\tau, x+1) \equiv \xi(\tau, x). \quad (14)$$

Для коэффициентов γ и b имеем выражения

$$\gamma = r_1 \omega^2 [2(\Omega^2 - \omega^2 + 2i\omega h)]^{-1},$$

$$b = -\frac{1}{2} \lambda (3\omega^2 + 1).$$

Следующее утверждение является центральным. Оно говорит о том, что краевая задача (13)–(14) является квазинормальной формой.

Теорема 2.1. Пусть выполнено условие (10) и краевая задача (13)–(14) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty, x \in [0, 1]$ решение $\xi(\tau, x)$. Тогда 2π -периодические по x функции

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}(\xi(\tau, x) \exp(i\omega t) + \bar{\xi}(\tau, x) \exp(-i\omega t)) + \varepsilon^{3/2} \frac{\lambda i}{8} (1 - \omega^2)(\xi^3(\tau, x) \exp(3i\omega t) - \bar{\xi}^3(\tau, x) \exp(-3i\omega t)), \quad (15)$$

$$y(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{3/2} r \omega^2 M([\Omega^2 - \omega^2 + 2i\hbar\omega]^{-1} \xi(\tau, x) \exp(i\omega t) + [\Omega^2 - \omega^2 - 2i\hbar\omega]^{-1} \bar{\xi}(\tau, x) \exp(-i\omega t))$$

удовлетворяет исходной системе (2) с точностью до $o(\varepsilon^{3/2})$.

Рассмотрим вопрос о построении точных решений краевой задачи (13), (14). Положим $\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_1 + i\gamma_2)\lambda$, $b_0 = 3\omega^2 + 1$ ($b_0 > 0$).

При условии $\frac{\lambda}{2} + \gamma_1 > 0$ имеем бесконечно много периодических решений

$$\begin{aligned} \xi_0(\tau, x) &= ((1 + \gamma_1)b_0^{-1})^{1/2} \exp\left(i\gamma_2 \frac{1}{2} \lambda \tau\right), \\ \xi_k(\tau, x) &= b_0^{-1/2} \exp(i2\pi kx), \\ (k &= \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

Более интересно построить периодические по τ и кусочно-постоянные по пространственной переменной решения. Например, фиксируем произвольное (конечное) количество интервалов из отрезка $[0, 1]$ суммарной длиной $1/2$ и положим на них $\xi(\tau, x) = ((1 + \gamma_1)b_0^{-1})^{1/2} \exp(i\gamma_2 \lambda \tau/2)$, а для остальных значений x из $[0, 1]$ положим $\xi(\tau, x) = -((1 + \gamma_1)b_0^{-1})^{1/2} \exp(i\gamma_2 \lambda \tau/2)$.

Можно сконструировать семейства $4\pi(\lambda\gamma_2)^{-1}$ -периодические по τ и 1-периодические и кусочно-непрерывные по x решения $\xi(\tau, x, \alpha, k_1, k_2) = \rho(x, \alpha, k_1, k_2) \exp(i\gamma_2 \lambda \tau/2)$, где

$$\rho(x, \alpha, k_1, k_2) = \begin{cases} ((1 + \gamma_1)b_0^{-1})^{1/2} \exp(i2\pi\alpha^{-1}k_1x), & x \in (0, \alpha), \quad k_1 = \pm 1, \pm 2, \dots, \\ ((1 + \gamma_1)b_0^{-1})^{1/2} \exp(i2\pi(-\alpha)^{-1}k_2x), & x \in (\alpha, 1), \quad k_2 = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Более интересны циклы, состоящие из двух различных по “амплитуде” ступенек на отрезке $[0, 1]$. Для их построения фиксируем произвольно параметры $\alpha \in (0, 1)$ и $\varphi_{1,2} \in [0, 2\pi]$. Положим

$$\begin{aligned} \xi_0(\tau, x) &= \rho(x) \exp(i\delta\tau), \\ \rho(x) &= \begin{cases} \rho_1 \exp(i\varphi_1), & x \in [0, \alpha], \\ \rho_2 \exp(i\varphi_2), & x \in [\alpha, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Подставим это выражение в (13). Тогда получим систему четырех алгебраических уравнений отно-

сительно пяти вещественных переменных $\rho_1, \rho_2, \delta, \alpha$ и $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \in [0, 2\pi]$

$$B \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} \alpha\gamma_2 & -(1-\alpha)(\gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi) \\ -\alpha\gamma_1 \sin \varphi + \alpha\gamma_2 \cos \varphi & (1-\alpha)\gamma_2 \end{pmatrix},$$

$$b_0 \rho_1^3 = (1 + \alpha\gamma_1)\rho_1 + (1 - \alpha)(\gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi)\rho_2, \quad (18)$$

$$b_0 \rho_2^3 = (1 + (1 - \alpha)\gamma_1)\rho_2 + \alpha(\gamma_1 \cos \varphi + \gamma_2 \sin \varphi)\rho_1. \quad (19)$$

Условие вещественности собственных значений δ_+ и δ_- и отвечающих им собственных векторов в (17) состоит в выполнении неравенства

$$4\alpha(1 - \alpha) \sin^2 \varphi \leq \gamma_2^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-1}. \quad (20)$$

Тогда

$$\delta_{\pm} = \frac{1}{2} \gamma_2 \pm [\gamma_2^2 - 4\alpha(1 - \alpha) \sin^2 \varphi \cdot (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)]^{1/2}$$

и

$$\rho_2^{\pm} = c_{\pm} \rho_1^{\pm}, \quad \text{где } c_{\pm} = (\delta_{\pm} - \alpha\gamma_2) \times [(1 - \alpha)(\gamma_2 \cos \varphi + \gamma_1 \sin \varphi)]^{-1}. \quad (21)$$

С учетом (20) и (21) выражения (18) и (19) принимают вид

$$b_0(\rho_1^{\pm})^2 = R_1^{\pm}, \quad \text{где } R_1^{\pm} = 1 + \alpha\gamma_1 + (1 - \alpha)c_{\pm}(\gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi), \quad (22)$$

$$b_0(\rho_1^{\pm})^2 = R_2^{\pm}, \quad \text{где } R_2^{\pm} = [(1 + (1 - \alpha)\gamma_1)c_{\pm} + \alpha(\gamma_1 \cos \varphi + \gamma_2 \sin \varphi)]c_{\pm}^{-3}. \quad (23)$$

Фиксируем произвольно параметр $\varphi \in [0, 2\pi]$. Через $\Phi_{\pm}(\varphi)$ обозначим множество всех таких значений $\alpha \in [0, 1]$, для которых выполнены неравенства (20) и $R_j^{\pm} \geq 0$ ($j = 1, 2$). Приравнявая правые части в (22) и (23), приходим к равенству

$$R_1^{\pm} = R_2^{\pm}, \quad (24)$$

которое рассматриваем как уравнение относительно $\alpha_{\pm} = \alpha_{\pm}(\varphi)$. В том случае, когда корень $\alpha_{\pm}(\varphi)$ этого уравнения существует и принадлежит соответственно множеству $\Phi_{\pm}(\varphi)$, определяем все элементы ступенчатого периодического решения $\rho(x) \exp(i\delta\tau)$ краевой задачи (13), (14).

Численные эксперименты позволили установить, что при определенных значениях коэффициентов в (13) существуют однопараметрические семейства таких ступенчатых периодических решений.

3. ВТОРОЙ СЛУЧАЙ

Здесь рассматриваем ситуацию, когда параметр $r \neq 0$ и как-то фиксирован. Предполагаем, что все корни характеристического уравнения

$$(\lambda^2 + \omega^2)(\lambda^2 + 2h\lambda + \Omega^2) - r\lambda^4 = 0$$

для линейной системы (8) имеют отрицательные вещественные части. Тогда краевая задача (9), (7) имеет бесконечно много периодических решений (11), где индекс k принимает значения $\pm 1, \pm 2, \dots$. В силу того, что $k \neq 0$, в выражении (12) появляется дополнительное условие

$$M(\xi(\tau, x)) = 0. \quad (25)$$

Подставляя (12) в (2), (3) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем систему уравнений относительно $2\pi/\omega$ -периодических по t функций u_3 и y_3 . Из условия разрешимости этой системы приходим к уравнению

$$2 \frac{d\xi}{d\tau} = \lambda\xi - \lambda(1 + 3\omega^2)(\xi|\xi|^2 - M(\xi|\xi|^2)) \quad (26)$$

с условиями

$$\xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x), \quad M(\xi(\tau, x)) = 0. \quad (27)$$

Теорема 3.1. Пусть выполнено условие $r \neq 0$ и краевая задача (26), (27) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty, x \in [0, 1]$ решение $\xi(\tau, x)$. Тогда 2π -периодические по x функции (15) и $y(t, x, \varepsilon) = 0$ удовлетворяют исходной системе (2) с точностью до $o(\varepsilon^{3/2})$.

Тем самым полученная краевая задача является квазинормальной формой в рассматриваемой ситуации.

Периодическими решениями (26), (27) являются, например, функции $(1 + 3\omega^2)^{-1/2} \exp(i2\pi kx)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Состояниями равновесия для (26), (27) является зависящее от параметра $\alpha \in (0, 1)$ семейство ступенчатых функций

$$\xi(x) = \begin{cases} (1 - \alpha)(\alpha(1 + 3\omega^2)^{1/2})^{-1}, & x \in [0, \alpha], \\ (1 + 3\omega^2)^{-1/2}, & x \in (\alpha, 1]. \end{cases} \quad (28)$$

З а м е ч а н и е 3.1. Построенные выше ступенчатые решения допускают асимптотическое исследование их устойчивости. Здесь на этом не останавливаемся. Отметим лишь, что некоторые результаты об устойчивости решений вида (28) приведены в [15].

З а м е ч а н и е 3.2. В более общем случае, когда в исходной системе (2) в левой части первого уравнения присутствует, например, слагаемое γu^3 , приходим к квазинормальной форме, которая отличается от (26) только наличием еще одного чисто мнимого слагаемого $3i\lambda\gamma\xi|\xi|^2$. Это приво-

дит к тому, что вместо семейства состояний равновесия в (26), (27) появляются континуальные семейства периодических по τ решений с различными периодами.

З а м е ч а н и е 3.3. При рассмотрении вопроса о построении трех, четырех и т.д. ступенчатых на отрезке $[0, 1]$ решений с различными амплитудами возникают многопараметрические семейства таких решений.

В качестве важного вывода отметим, что динамические свойства краевых задач (13), (14) и (26), (27) являются достаточно богатыми.

В порядке обсуждения результатов отметим, что на том же пути рассматривается квазилинейный случай, когда первое уравнение в (2) заменяется на

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega^2 u + \varepsilon f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = -\frac{d^2 y}{dt^2}.$$

В этом случае аналогичная (13) квазинормальная форма имеет вид

$$2i\omega \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = g(\xi) - M(g(\xi)),$$

$$g(\xi) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(\xi \exp(i\omega t) + \bar{\xi} \exp(-i\omega t), i\omega \xi \exp(i\omega t) - i\omega \bar{\xi} \exp(-i\omega t)) \exp(-i\omega t) dt, \quad (29)$$

и для $u(t, \tau, x)$, $y(t, \tau)$ имеют место асимптотические представления

$$u(t, \tau, x) = \xi(\tau, x) \exp(i\omega t) + \bar{\xi}(\tau, x) \exp(-i\omega t) + \varepsilon u_1(t, \tau, x) + \dots,$$

$$y(t, \tau) = \varepsilon y_1(t, \tau) + \dots$$

Можно так подобрать функцию f , например, в виде многочлена по u и $\partial u/\partial t$ степени 5, чтобы колебания носили кластерный характер: краевая задача (29), (27) имела такие ступенчатые решения, что различные “ступени” колебались с различными периодами по t .

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 21-71-30011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belykh I., Jeter R., Belykh V. Foot force models of crowd dynamics on a wobbly bridge // Sci. Adv. 2017. V. 3. e1701512.
2. Bennett M., Schatz M.F., Rockwood H., Wiesenfeld K. Huygens's clocks // Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci. 2002. V. 458. P. 563–579.
3. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge Univ. Press, 2003. V. 12.

4. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G., Valladares D.L., Zhou C.S.* The synchronization of chaotic systems. *Phys. Rep.* 2002. V. 366. P. 1–101.
5. *Belykh V.N., Belykh I.V., Hasler M.* Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems. *Physica D.* 2004. V. 195. P. 159–187.
6. *Belykh I.V., Porfiri M.* Introduction: Collective dynamics of mechanical oscillators and beyond. *Chaos* 26. 2016. 116101.
7. *Strogatz S.H., Abrams D.M., McRobie A., Eckhardt B., Ott E.* Theoretical mechanics: Crowd synchrony on the Millennium Bridge // *Nature.* 2005. V. 438. P. 43–44.
8. *Eckhardt B., Ott E., Strogatz S.H., Abrams D.M., McRobie A.* Modeling walker synchronization on the Millennium Bridge // *Phys. Rev. E* 75. 2007. 021110.
9. *Abdulrehem M.M., Ott E.* Low dimensional description of pedestrian-induced oscillation of the Millennium Bridge // *Chaos.* 2009. V. 19. 013129.
10. *Bocian M., Macdonald J.H.G., Burn J.F.* Biomechanically inspired modelling of pedestrian-induced forces on laterally oscillating structures // *J. Sound Vib.* 2012. V. 331. P. 3914–3929.
11. *Barker C.* Some observations on the nature of the mechanism that drives the self-excited lateral response of footbridges // *Proceedings of the International Conference on the Design and Dynamic Behaviour of Footbridges, 20 to 22 November (2002).*
12. *Acebron J.A., Bonilla L.L., Vicente C.J.P., Ritort F., Spigler R.* The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Rev. Mod. Phys.* 2005. V. 77. P. 137.
13. *Кащенко С.А.* Бифуркации в пространственно распределенных цепочках двумерных систем уравнений // *Успехи математических наук.* 2020. Т. 75, 6(456). С. 171–172.
14. *Кащенко С.А.* Локальная динамика цепочек связанных систем Ван-дер-Поля // *Математические заметки.* 2020. Т. 108. № 6. С. 936–940.
15. *Grigorieva E.V., Kashchenko S.A.* Rectangular structures in the model of an optoelectronic oscillator with delay // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 2021. V. 417. P. 132818.

QUASINORMAL FORMS IN THE PROBLEM OF VIBRATION OF PEDESTRIAN BRIDGES

S. A. Kashchenko

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

From a discrete model describing the oscillations of a pedestrian bridge, a transition was made to a system of nonlinear integro-differential equations that continuously depends on time and space variables. Critical cases are singled out in the problem of stationary stability. The local dynamics of the resulting model based on the formalism of the method of normal forms is investigated. As a consequence of the infinite-dimensionality of the critical cases, it is shown that the role of the normal form is played by a special evolutionary boundary value problem. Families of the simplest stepwise time-periodic solutions of this boundary value problem are constructed.

Keywords: bifurcation, stability, quasnormal forms, asymptotic, discontinuous periodic solutions

УДК 519.1

ДВУХЦВЕТНЫЕ РАСКРАСКИ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ БЕЗ ДЛИННЫХ ОДНОЦВЕТНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЙ

© 2022 г. В. О. Кирова^{1,*}, А. А. Сагдеев^{2,**}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 18.05.2022 г.

После доработки 24.06.2022 г.

Принято к публикации 16.07.2022 г.

Для каждого $1 \leq p \leq \infty$ и каждого натурального n доказано существование двухцветной раскраски точек n -мерного пространства \mathbb{R}_p^n с нормой ℓ_p такой, что все достаточно длинные арифметические прогрессии содержат точки обоих цветов.

Ключевые слова: раскраска, хроматическое число, арифметическая прогрессия

DOI: 10.31857/S2686954322050125

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача Нельсона о хроматическом числе плоскости является одной из центральных проблем современной комбинаторной геометрии. Одна из наиболее общих ее постановок звучит следующим образом. Для n -мерного нормированного пространства \mathbb{R}_N^n требуется найти его *хроматическое число* $\chi(\mathbb{R}_N^n)$, определяемое как наименьшее r , для которого существует раскраска точек \mathbb{R}_N^n в r цветов, так называемая *r -раскраска*, при которой никакая пара точек на единичном расстоянии не оказалась бы покрашена в один и тот же цвет. Наиболее активно эта проблема изучалась для ℓ_p -пространств \mathbb{R}_p^n . Напомним, что ℓ_p -норма точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ определяется равенством $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p}$ при всех действительных $p \geq 1$, а при $p = \infty$ – равенством $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$. Известно, что при всех $1 \leq p \leq \infty$ величина $\chi(\mathbb{R}_p^n)$ растет экспоненциально с ростом n . Подробнее об этой и родственных задачах см. [1–11].

В качестве еще более далеко идущего обобщения Пол Эрдеш и соавт. в работах [12–14] предложили запрещать одноцветность более сложных

конфигураций. Для подмножества $M \subset \mathbb{R}_N^n$, его *N -изометричной копией* называется такое подмножество $M' \subset \mathbb{R}^n$, что существует биекция $f: M \rightarrow M'$ такая, что $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_N = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|_N$ при всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$. *Хроматическим числом* $\chi(\mathbb{R}_N^n, M)$ пространства \mathbb{R}_N^n с запрещенным одноцветным множеством M называют наименьшее r , для которого существует r -раскраска \mathbb{R}_N^n , при которой ни одна N -изометричная копия M не оказалась бы полностью одноцветной. Систематическому изучению данной задачи посвящены статьи [15–25].

Одними из наиболее естественных для рассмотрения в данной задаче в качестве запрета M множеств являются арифметические прогрессии $\mathcal{B}_k = \{0, 1, \dots, k\}$. В [12] было показано, что для евклидова пространства уже при $k = 2$ величина $\chi(\mathbb{R}_2^n, \mathcal{B}_2)$ не только не стремится к бесконечности экспоненциально быстро с ростом n , но и не стремится к ней вовсе, так как во всех размерностях справедливо неравенство $\chi(\mathbb{R}_2^n, \mathcal{B}_2) \leq 4$. Более того, верно, что $\chi(\mathbb{R}_2^n, \mathcal{B}_k) = 2$ при всех $k \geq 5$ и при всех натуральных n . Отметим, что открытым остается вопрос об оптимальности констант 4 и 5 в последних двух утверждениях, см. [19].

Целью настоящего исследования являлось обобщение последних неравенств со случая евклидова пространства на случай ℓ_p -пространств при $p \neq 2$. Основным полученным нами результатом является следующий.

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Московский физико-технический институт, Москва, Россия

*E-mail: kirova_vo@mail.ru

**E-mail: sagdeev.aa@phystech.edu

Теорема 1. Для любого $1 \leq p \leq \infty$ и любого натурального n , существует достаточно большое $k = k(p, n)$ такое, что $\chi(\mathbb{R}_p^n, \mathcal{B}_k) = 2$.

2. ЭСКИЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ

Для случая $p = \infty$ доказательство проводится с использованием явной, но технически сложной двухцветной раскраски, состоящей из одинаковых расположенных друг над другом слоев-‘змеек’, цвета которых мы чередуем. Показывается, что данная раскраска пространства \mathbb{R}^n не содержит одноцветных ℓ_∞ -изометричных копий прогрессий \mathcal{B}_k при $k \geq 5^n$.

Предположим теперь, что $1 < p < \infty$. Известно, что единичный шар ℓ_p нормы в этом случае является строго выпуклым. А значит, всякая ℓ_p -изометричная копия множества \mathcal{B}_k лежит на некоторой прямой. Как следствие, она является арифметической прогрессией в пространстве \mathbb{R}_∞^n , длину звена (а значит — и диаметр) которой можно контролировать в терминах n и p . Здесь мы используем тот факт, что ℓ_p - и ℓ_∞ -нормы на \mathbb{R}^n ‘эквивалентны’ друг другу, т.е. при некоторых положительных $c = c(n, p)$ и $C = C(n, p)$ верно, что $c\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq C\|x\|_\infty$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. А значит, из отсутствия в некоторой раскраске пространства \mathbb{R}^n с нормой ℓ_∞ достаточно длинных одноцветных арифметических прогрессий действительно следует и отсутствие в ней одноцветных ℓ_p -изометричных копий множеств \mathcal{B}_k при всех достаточно больших значениях k .

Наконец, мы рассмотрим случай $p = 1$. Эта ситуация в некотором смысле диаметрально противоположна предыдущей, так как единичным шаром ℓ_1 -нормы является выпуклый центрально симметричный многогранник (точнее — гипероктаэдр или кросс-политоп). Известно, что всякий такой многогранник с f парами противоположных граней является центральным сечением f -мерного гиперкуба некоторой гиперплоскостью. А значит, пространство \mathbb{R}_1^n может быть изометрично вложено в \mathbb{R}_∞^m при $m = 2^{n-1}$. Следовательно, для построения искомой двухцветной раскраски пространства \mathbb{R}_1^n достаточно рассмотреть такую раскраску \mathbb{R}_∞^m , а затем просто индуцировать ее на соответствующее подпространство.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наше доказательство оставляет открытым вопрос об асимптотическом поведении оптималь-

ной константы $k(p, n)$ из теоремы 1. Наилучшие оценки для $p = \infty$, которых нам удалось добиться в рамках известных методов, таковы: $n/\ln(2) \leq k(\infty, n) \leq 3^n$. При каждом фиксированном $1 < p < \infty$ можно показать, что $k(p, n) = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$, однако не ясно, стремится ли эта величина к бесконечности с ростом n . Напомним, что в евклидовом случае это стремление отсутствует, так как из вышеупомянутых результатов Эрдёша следует, что $k(2, n) \leq 5$ при всех $n \in \mathbb{N}$. С учетом возросшего в последние годы интереса специалистов к так называемым полихроматическим раскраскам, уместным было бы рассмотреть следующее обобщение исходной задачи. Доказать, что для любого $1 \leq p \leq \infty$ и любых натуральных n и t , существует достаточно большое натуральное $k = k(p, n, t)$ и раскраска пространства \mathbb{R}^n в t цветов такая, что всякая ℓ_p -изометричная копия прогрессии \mathcal{B}_k в \mathbb{R}^n содержит точки всех t цветов. Отметим, что даже для евклидова случая вопрос об асимптотическом поведении величины $k(2, n, t)$ остается открытым.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Настоящая работа частично выполнена за счет средств гранта поддержки ведущих научных школ № Н.Ш.-775.2022.1.1, а также гранта РФФИ № 20-31-90009. Второй автор также является победителем конкурса ‘Молодая Математика России’ и благодарит его спонсоров и жюри.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *de Grey A.D.N.J.* The chromatic number of the plane is at least 5, *Geombinatorics*. 2018. V. 28. P. 18–31.
2. *Golovanov A., Kupavskii A., Sagdeev A.* Odd-distance and right-equidistant sets in the maximum and Manhattan metrics. *European Journal of Combinatorics*, 2023, V. 107, 103603.
3. *Kozhevnikov V.S., Raigorodskii A.M., Zhukovskii M.E.* Large cycles in random generalized Johnson graphs, *Discrete Math.* 2022. V. 345. № 3, P. 112721.
4. *Kupavskiy A.* On the chromatic number of R^n with an arbitrary norm, *Discrete Math.* 2011. V. 311. № 6. P. 437–440.
5. *Prosanov R.* A new proof of the Larman–Rogers upper bound for the chromatic number of the Euclidean space, *Discrete Appl. Math.* 2020. V. 276. P. 115–120.
6. *Пушняков П.А., Райгородский А.М.* Оценка числа ребер в подграфах графа Джонсона, *Доклады РАН*. 2021. V. 499. № 1. P. 40–43.
7. *Raigorodskii A.M.* On the Chromatic Number of a Space, *Russian Math. Surveys*. 2000. V. 55. P. 351–352.
8. *Raigorodskii A.M.* On the Chromatic Number of a Space with the Metric ℓ_p , *Russian Math. Surveys*. 2004. V. 59. P. 973–975.

9. *Raigorodskii A.M.* The Borsuk problem and the chromatic numbers of some metric spaces, *Russian Math. Surveys*. 2001. V. 56. P. 103–139.
10. *Raigorodskii A.M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters, *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, New York, Springer, 2013. P. 429–460.
11. *Райгородский А.М., Карась В.С.* Асимптотика числа независимости случайного подграфа графа $G(n, r, < s)$, *Матем. Заметки*. 2022. V. 111. № 1. P. 107–116.
12. *Erdős P., Graham R.L., Montgomery P., Rothschild B.L., Spencer J., Straus E.G.* Euclidean Ramsey theorems I, *J. Combin. Theory Ser. A*. 1973. V. 14. № 3. P. 341–363.
13. *Erdős P., Graham R.L., Montgomery P., Rothschild B.L., Spencer J., Straus E.G.* Euclidean Ramsey theorems II, *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, Infinite and Finite Sets*, Keszthely, Hungary and North-Holland, Amsterdam, 1973. V. 10. P. 520–557.
14. *Erdős P., Graham R.L., Montgomery P., Rothschild B.L., Spencer J., Straus E.G.* Euclidean Ramsey theorems III, *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, Infinite and Finite Sets*, Keszthely, Hungary and North-Holland, Amsterdam, 1973. V. 10. P. 559–583.
15. *Conlon D., Fox J.* Lines in Euclidean Ramsey theory, *Disc. Comput. Geom.* 2019. V. 61. № 1. P. 218–225.
16. *Frankl N., Kupavskii A., Sagdeev A.* Max-norm Ramsey Theory, *arXiv preprint 2111.08949*. 2021.
17. *Frankl N., Kupavskii A., Sagdeev A.* Solution to a conjecture of Schmidt and Tuller on linear packings and coverings, *arXiv preprint 2203.03873*. 2022.
18. *Frankl P., Rödl V.* A partition property of simplices in Euclidean space, *J. Amer. Math. Soc.* 1990. V. 3. № 1. P. 1–7.
19. *Graham R.L.* Euclidean Ramsey theory, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, Chapman and Hall/CRC, 2017. P. 281–297.
20. *Křž I.* Permutation groups in euclidean Ramsey theory, *Proc. Amer. Math. Soc.* 1991. V. 112. № 3. P. 899–907.
21. *Кунавский А.Б., Сагдеев А.А.* Теория Рамсея в пространстве с чебышёвской метрикой, *Успехи математических наук*. 2020. V. 75. № 5. P. 191–192.
22. *Kupavskii A., Sagdeev A.* All finite sets are Ramsey in the maximum norm, *Forum Math. Sigma*. 2021. V. 9. № e55. 12 pp.
23. *Naslund E.* Monochromatic Equilateral Triangles in the Unit Distance Graph, *Bull. Lond. Math. Soc.* 2020. V. 52. № 4. P. 687–692.
24. *Просанов П.И.* Верхние оценки хроматических чисел евклидовых пространств с запрещенными рамсеевскими множествами, *Матем. Заметки*. 2018. V. 103. № 2. P. 248–257.
25. *Сагдеев А.А.* Экспоненциально рамсеевские множества, *Проблемы передачи информации*. 2018. V. 54. № 4. P. 82–109.

TWO-COLORINGS OF THE NORMED SPACES WITH NO LONG MONOCHROMATIC UNIT ARITHMETIC PROGRESSIONS

V. O. Kirova^a and A. A. Sagdeev^b

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

^b *Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

Given $1 \leq p \leq \infty$ and $n \in \mathbb{N}$, we construct the two-coloring of the n -dimensional space \mathbb{R}_p^n equipped with the ℓ_p norm such that all sufficiently long unit arithmetic progressions contain points of both colors.

Keywords: coloring, chromatic number, arithmetic progression

ОБ УПЛОТНЕНИЯХ НА σ -КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА© 2022 г. А. Е. Липин^{1,2,*}, А. В. Осипов^{1,2,**}

Представлено академиком РАН С.В. Матвеевым

Поступило 15.04.2022 г.

После доработки 16.05.2022 г.

Принято к публикации 10.08.2022 г.

В работе доказывается следующий результат. Пусть полное метрическое пространство X веса $w(X)$ и множество $H \subseteq X$ таковы, что $w(X) < |H| < \mathfrak{c}$. Тогда не существует непрерывной биекции подпространства $X \setminus H$ на σ -компактное пространство. Как следствие, не существует непрерывной биекции подпространства $X \setminus H$ на польское пространство. Таким образом, доказано, что метрические компакты не являются a_τ -пространствами ни для какого несчетного кардинального числа τ . Этот результат является ответом на вопрос, поставленный Е.Г. Пыткеевым в работе (*О свойствах подклассов слабо диадических компактов*, Сиб. мат. журнал.).

Ключевые слова: уплотнение, польское пространство, компакт, σ -компактное пространство, a_τ -пространство

DOI: 10.31857/S2686954322050149

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [6] И.Л. Раухваргер доказала, что для всякого метрического компакта X и любого счетного множества $H \subseteq X$ существует уплотнение (т.е. непрерывная биекция) подпространства $X \setminus H$ на метрический компакт.

Пусть τ – кардинальное число.

- Компактное пространство X называют a_τ -пространством, если для любого $H \in [X]^{\leq \tau}$ существует уплотнение пространства $X \setminus H$ на компакт [3]. В частности, a_ω -пространство называется a -пространством.

- Компактное пространство X называют строгим a_τ -пространством, если для любого $H \in [X]^{\leq \tau}$ существует уплотнение пространства $X \setminus H$ на компакт, которое продолжается до непрерывного отображения на X [3]. В частности, строгое a_ω -пространство называется строгим a -пространством.

Любой метрический компакт является строгим a -пространством [6]. Различные свойства a_τ -пространств и строгих a_τ -пространств можно найти в работах [1–4].

В работе [1] был предложен следующий вопрос.

Вопрос 1. Предположим, что X – метрический компакт. Для каких τ , $\omega < \tau < \mathfrak{c}$, X – (строгое) a_τ -пространство?

Основной результат работы – доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть X – полное метрическое пространство и для множества $H \subseteq X$ выполняется $w(X) < |H| < \mathfrak{c}$. Тогда подпространство $X \setminus H$ невозможно уплотнить на σ -компактное пространство.

Отметим, что в предположении континуум-гипотезы посылка теоремы 1 несовместна, так что в этом случае теорема тривиальна (как, впрочем, и вопрос 1).

Е.Г. Пыткеев доказал, что любое сепарабельное метрическое пространство мощности \mathfrak{c} можно разбить на два множества мощности \mathfrak{c} , каждое из которых не уплотняется на полное пространство ([8], Предложение 2). Таким образом, по теореме 1 и результату Пыткеева, мы получаем ответ на вопрос 1: метрические компакты не являются a_τ -пространствами ни для какого несчетного кардинального числа τ .

¹ Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

² Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

*E-mail: tony.lipin@yandex.ru

**E-mail: oab@list.ru

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Под пространствами понимаются хаусдорфовы топологические пространства. В работе используются следующие обозначения и термины:

- ω – первый бесконечный ординал и первый бесконечный кардинал;
- \mathfrak{c} – кардинал континуум;
- κ^+ – следующий за κ кардинал;
- для всяких множества A и кардинала τ через $[A]^\tau$ ($[A]^{<\tau}$, $[A]^{<\tau}$, $[A]^{>\tau}$) обозначается семейство всех подмножеств множества A мощности ровно (не большей, строго меньшей, строго большей) τ ;
- \sqcup – *дизъюнктное объединение*, т.е. объединение, аргументы которого не пересекаются;
- $2^{<\omega}$ – множество всех конечных последовательностей над множеством $\{0, 1\}$;
- 2^ω – множество всех последовательностей порядкового типа ω над множеством $\{0, 1\}$;
- если $u \in 2^{<\omega}$ и $s \in \{0, 1\}$, то us обозначается конечная последовательность, получаемая из u добавлением в конец элемента s ;
- если $u \in 2^{<\omega}$ и $s \in 2^\omega$, то запись $u < s$ означает, что u есть начало s ;
- *уплотнение* – непрерывная биекция;
- *сумма* пространств понимается, как в [11] (раздел 2.2);
- *польское пространство* – пространство счетного веса, обладающее полной метрикой;
- *абсолютно борелевское пространство* – пространство, гомеоморфное борелевскому подмножеству некоторого полного метрического пространства;
- *ядро* пространства X , $\text{Ker}(X)$ – объединение всех плотных в себе подмножеств пространства X ;
- $w(X)$ – вес пространства X .

В работе нам несколько раз пригодится следующий, вероятно известный, результат.

Предложение 1. Для всякого пространства X его ядро $\text{Ker}(X)$ замкнуто и плотно в себе, а также $|X \setminus \text{Ker}(X)| \leq w(X)$.

Доказательство. Для всякого пространства Y обозначим $\text{Iso}(Y)$ множество изолированных точек Y . Для каждого ординала α определим множество $X_\alpha \subseteq X$ следующим образом: $X_0 := X$; если $\alpha = \beta + 1$, то $X_\alpha := X_\beta \setminus \text{Iso}(X_\beta)$; и если α предельный, то $X_\alpha := \bigcap_{\beta < \alpha} X_\beta$. Так как при $\alpha < \beta$ выполняется $X_\alpha \supseteq X_\beta$, то для некоторого ординала γ верно $X_\gamma = X_{\gamma+1}$. Будем считать, что γ – наименьший ординал с этим свойством.

Легко видеть, что $X_\gamma = \text{Ker}(X)$, и это множество замкнуто и плотно в себе. Для всякой точки $x \in X \setminus X_\gamma$ обозначим $r(x)$ тот ординал α , при котором $x \in \text{Iso}(X_\alpha)$. Очевидно, что при любом выборе базы пространства X всякой точке $x \in X \setminus X_\gamma$ можно сопоставить базисную окрестность $O(x)$ такую, что для всех точек $y \in O(x)$, не равных x , верно $r(y) < r(x)$. Тогда все выбранные $O(x)$ попарно различны, откуда $|X \setminus \text{Ker}(X)| \leq w(X)$. \square

3. ЛЕММА О НЕСЧЕТНОМ ИНЪЕКТИВНОМ БИНАРНОМ ОТНОШЕНИИ НА ПОЛНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ МАЛОГО ВЕСА

Цель этого раздела состоит в доказательстве следующей леммы.

Лемма 1. Пусть X – полное метрическое пространство, $w(X) < \mathfrak{c}$, $A \in [X]^{>w(X)}$ и функция $f : A \rightarrow X$ инъективна. Тогда существуют континуальное множество $C \subseteq X$ и инъекция $g : C \rightarrow X$ такие, что график функции g содержится в замыкании графика f в пространстве $X \times X$.

Если при этом функция f не имеет неподвижных точек, то C и g можно выбрать так, что g также не будет обладать неподвижными точками.

Обозначим (*) условие “ X – полное метрическое пространство, $w(X) < \mathfrak{c}$, $A \in [X]^{>w(X)}$ и функция $f : A \rightarrow X$ инъективна”.

Центральную роль в доказательстве леммы 1 сыграет следующее понятие.

Определение 1. Пусть (*). Для всяких множеств $M, N \subseteq X$ обозначим $A_f(M, N) := \{x \in A : x \in M, f(x) \in N\}$ и $B_f(M, N) := \{f(x) : x \in A_f(M, N)\}$.

Пару (K, L) замкнутых плотных в себе подмножеств X будем называть *f-существенной*, если $|A_f(K, L)| > w(X)$.

Из предложения 1 вытекает следующее

Предложение 2. Если (*), то пара $(\text{Ker}(X), \text{Ker}(X))$ *f-существенна*.

Напомним, что во всяком полном метрическом пространстве X для любого замкнутого множества $C \subseteq X$ выполняется или $|C| \leq w(X)$ (если C разрежено; это следует из предложения 1), или $|C| \geq \mathfrak{c}$ (если C содержит плотное в себе подмножество) (Теорема 6 в [10]).

Для всяких $A \subseteq X$ и $x \in X$ обозначим $\Delta(A, x)$ минимум мощностей $|O(x) \cap A|$ по всем окрестностям $O(x)$ точки x (так называемый *дисперсионный характер подпространства* $A \cup \{x\}$ в точке x). Для всякого кар-

динала τ обозначим $A^{\text{от}} := \{x \in X : \Delta(A, x) \geq \tau\}$. Следующее предложение, вероятно, известно.

Предложение 3. Если X – пространство и $A \in [X]^{>w(X)}$, то $|A^{\text{от}(X)}| \geq c$.

Доказательство. Обозначим $U := X \setminus A^{\text{от}(X)}$. Всякой точке $x \in U$ сопоставим произвольную ее окрестность $O(x)$ такую, что $|O(x) \cap A| \leq w(X)$. Очевидно, что $\bigcup_{x \in U} O(x) = U$, и так как из семейства всех $O(x)$ можно выделить подпокрытие множества U мощности не более $w(X)$, то $|U \cap A| \leq w(X) < |A|$. Тогда $|A^{\text{от}(X)}| > w(X)$. Так как множество $A^{\text{от}(X)}$ замкнуто, получаем $|A^{\text{от}(X)}| \geq c$. \square

Предложение 4. Пусть $(*)$, пара (K, L) f -существенна и $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся такие множества $K_0 \sqcup K_1 \subseteq K$ и $L_0 \sqcup L_1 \subseteq L$, что пары (K_0, L_0) и (K_1, L_1) f -существенны, а диаметр множеств K_0, K_1, L_0, L_1 меньше ε .

Доказательство. Выберем в K любые две точки множества $A_f(K, L)^{\text{от}(X)}$ и отделим их замкнутыми окрестностями K_0, K_1 диаметра меньше ε . Очевидно, пары (K_0, L) и (K_1, L) f -существенны. Теперь выберем в L любые две точки множества $B_f(K_0, L)^{\text{от}(X)}$ и отделим их замкнутыми окрестностями M, N диаметра меньше ε и лежащими на положительном расстоянии друг от друга. Наконец, выберем в L любую точку множества $B_f(K_1, L)^{\text{от}(X)}$ и обозначим L_1 любую ее настолько малую замкнутую окрестность, что L_1 не может пересекать одновременно M и N , а диаметр L_1 меньше ε . Обозначим L_0 то из множеств M, N , которое не пересекается с L_1 . Легко видеть, что K_0, K_1, L_0, L_1 искомые. \square

Доказательство леммы 1. По предложению 2 существует хотя бы одна f -существенная пара. Итерированно применяя предложение 4, выберем для всех $u \in 2^{<\omega}$ f -существенные пары (K_u, L_u) так, что $K_{u0} \sqcup K_{u1} \subseteq K_u$, $L_{u0} \sqcup L_{u1} \subseteq L_u$ и диаметры множеств K_u и L_u меньше $\frac{1}{|u|}$.

Заметим, что для всякой последовательности $s \in 2^\omega$ множества $\bigcap_{u < s} K_u$ и $\bigcap_{u < s} L_u$ одноэлементны в силу стремящихся к нулю диаметров K_u и L_u при $|u| \rightarrow \infty$ и полноты метрики. Единственную точку множества $\bigcap_{u < s} K_u$ обозначим y_s , соберем $C := \{y_s : s \in 2^\omega\}$ и для каждой y_s обозначим $g(y_s)$

единственную точку множества $\bigcap_{u < s} L_u$. Легко видеть, что C и g искомые.

Теперь пусть f не имеет неподвижных точек. Для каждого $n \in \omega$ обозначим A_n множество таких $x \in A$, что расстояние между x и $f(x)$ больше $\frac{1}{n}$.

Поскольку $\bigcup_{n \in \omega} A_n = A$ и $|A| > w(X)$, то найдется такое $n \in \omega$, что $|A_n| > w(X)$. Применим к паре A_n, f уже доказанное первое утверждение леммы и получим некоторые C и g . Покажем, что эти C и g искомые, т.е. что инъекция g не имеет неподвижных точек. От противного: для некоторой точки $y \in C$ оказалось, что $g(y) = y$. Обозначим $O(y)$ любую окрестность точки y диаметра менее $\frac{1}{n}$. Очевидно, такая окрестность не может одновременно содержать x и $f(x)$ ни для какого $x \in A_n$, откуда точка $(y, g(y))$ пространства $X \times X$ не принадлежит замыканию графика функции f . Противоречие. \square

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Обозначим $(**)$ условие “ X – пространство, $X = Y \sqcup H$ и φ есть уплотнение подпространства Y на пространство Z ”.

Основным инструментом доказательства станет следующая конструкция.

Определение 2. Пусть $(**)$. Обозначим:

- (1) Π_X^φ множество пар $(z, p) \in Z \times H$ таких, что при любом выборе окрестности $O(p)$ точки p точка z предельна для множества $\varphi[O(p) \cap Y]$;
- (2) Δ_φ множество $\{(\varphi(x), x) : x \in Y\}$;
- (3) $P_z := \{p \in H : (z, p) \in \Pi_X^\varphi\}$ для каждой $z \in Z$.

Лемма 2. Если $(**)$, то множество $\Pi_X^\varphi \cup \Delta_\varphi$ замкнуто в пространстве $Z \times X$.

Доказательство. Пусть точка $(z, a) \in Z \times X$ предельна для $\Pi_X^\varphi \cup \Delta_\varphi$. Возможны два случая:

- (1) $a = p$ для некоторой $p \in H$. Возьмем любую окрестность U точки p и положим $V := U \cap Y$, $W := \varphi[V]$;
- (2) $a = x$ для некоторой $x \in Y$. Возьмем любую окрестность W точки $\varphi(x)$ и положим $V := \varphi^{-1}[W]$. Обозначим U произвольное открытое в X множество такое, что $U \cap Y = V$.

В обоих случаях множество U открыто в X , $a \in U$, $V = U \cap Y$ и $W = \varphi[V]$.

Обозначим A множество тех $w \in Z$, для которых существует точка $b \in U$ такая, что $(w, b) \in \Pi_X^\varphi \cup \Delta_\varphi$. Из определения Π_X^φ легко следует,

что $A \subseteq \overline{W}$. При этом z предельна для A . Значит, точка z предельна для W .

Тогда в случае (1) получаем по определению $(z, p) \in \Pi_X^\Phi$, а в случае (2) точки z и $\varphi(x)$ не отделимы в Z , откуда $z = \varphi(x)$ и $(z, x) \in \Delta_\Phi$. \square

Следствие 1. Пусть (**) и $z \in Z$. Тогда множество $P_z \cup \{z\}$ замкнуто.

Определение 3. Пусть (**). Обозначим H_s множество тех $p \in H$, для которых существует хотя бы одна точка $z \in Z$ такая, что $(z, p) \in \Pi_X^\Phi$. Обозначим $H_f := H \setminus H_s$.

Предложение 5. Пусть (**), $|H_s| > w(X)$ и $|H| < c$. Тогда существуют множество $A \in [Z]^{\succ w(X)}$ и инъекция $f : A \rightarrow H$ такие, что $f \subseteq \Pi_X^\Phi$.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого множества $S \in [X]^{\leq w(X)}$ и инъекции $h : S \rightarrow X$, $h \subseteq \Pi_X^\Phi$, найдутся точки $z \notin S$ и $p \notin h[S]$ такие, что $(z, p) \in \Pi_X^\Phi$.

По следствию 1 множество $P_w \cup \{w\}$ замкнуто в X для каждого $w \in Z$. Тогда или $|P_w| \leq w(X)$, или $|P_w| \geq c$. При этом $P_w \subseteq H$ и $|H| < c$, откуда $|P_w| \leq w(X)$. Тогда и $|\bigcup_{w \in S} P_w| \leq w(X)$. Значит, найдется точка $p \in H_s$ такая, что ни для какого $w \in S$ не выполняется $(w, p) \in \Pi_X^\Phi$, и в частности $p \notin h[S]$. Наконец, по определению H_s существует точка $z \in Z$, для которой $(z, p) \in \Pi_X^\Phi$. \square

Лемма 3. Пусть (**), пространство X обладает полной метрикой и $|H| < c$. Тогда $|H_s| \leq w(X)$.

Доказательство. От противного: пусть $|H_s| > w(X)$. Из предложения 5 следует существование множества $A \in [Y]^{\succ w(X)}$ и инъекции $f : A \rightarrow H$ таких, что $\{(\varphi(x), f(x)) : x \in A\} \subseteq \Pi_X^\Phi$. Отметим, что инъекция f не имеет неподвижных точек, так как ее области определения и значений не пересекаются. Тогда по лемме 1 найдутся континуальное множество $C \subseteq X$ и инъекция $g : C \rightarrow X$ такие, что g не имеет неподвижных точек и график функции g содержится в замыкании графика f . По лемме 2 для каждой $y \in C \cap Y$ выполняется $(\varphi(y), g(y)) \in \Pi_X^\Phi$. Но тогда множество H содержит континуальное подмножество $g[C \cap Y]$, что противоречит условию $|H| < c$. \square

Предложение 6. Если (**), $|H| < c$, X обладает полной метрикой и Z — компакт, то $H_f \cap \text{Ker}(X) = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $p \in H \cap \text{Ker}(X)$. Так как всякое плотное в себе полное метриче-

ское пространство имеет мощность не менее c , то и любая окрестность $O(p)$ точки p содержит не менее c точек. Тогда, так как $|H| < c$, то множество $O(p) \cap Y$ непусто. Значит, можно выбрать последовательность S элементов множества Y , сходящуюся к точке p . Так как Z — компакт, то последовательность $\varphi[S]$ обладает хотя бы одной предельной точкой z . Легко видеть, что по определению $(z, p) \in \Pi_X^\Phi$, т.е. $p \in H_s$. \square

Лемма 4. Пусть X — полное метрическое пространство и для множества $H \subseteq X$ выполняется $w(X) < |H| < c$. Тогда подпространство $X \setminus H$ невозможно уплотнить на компакт.

Доказательство. Пусть (**), $|H| < c$, пространство X обладает полной метрикой и Z — компакт. По предложению 6 множество H_f содержится в $X \setminus \text{Ker}(X)$, откуда $|H_f| \leq w(X)$. По лемме 3 также $|H_s| \leq w(X)$, и отсюда $|H| \leq w(X)$. \square

Доказательство теоремы 1. От противного: подпространство $Y := X \setminus H$ уплотняется на пространство $Z = \bigcup_{n \in \omega} K_n$, где все множества K_n компактны. Для всякого $n \in \omega$ обозначим X_n замыкание множества $f^{-1}(K_n)$ в пространстве X и положим $M := \bigcup_{n \in \omega} X_n$. Очевидно, $M \supseteq Y$. Из леммы 4 следует, что для каждого $n \in \omega$ имеет место $|H \cap X_n| \leq w(X_n) \leq w(X)$. Тогда $|M \cap H| \leq w(X) < |H|$, и отсюда $|X \setminus M| = |H|$. Но $X \setminus M$ — борелевское множество в X , и тогда по теореме 6 в работе [10] неравенство $w(X) < |X \setminus M| < c$ невозможно. Противоречие. \square

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теорема 1 вместе с результатом Е.Г. Пыткеева порождает следующее

Следствие 2. Пусть X — полное метрическое пространство и для множества $H \subseteq X$ выполняется $w(X) < |H| < c$. Тогда подпространство $X \setminus H$ невозможно уплотнить на сепарабельное абсолютно борелевское пространство.

Доказательство. В работе [9] Е.Г. Пыткеев доказал, что всякое сепарабельное абсолютно борелевское не σ -компактное пространство уплотняется на компакт. Тогда если бы подпространство $X \setminus H$ уплотнялось на сепарабельное абсолютно борелевское пространство, то уплотнялось бы и на σ -компактное пространство.

Заметим, что в работе [7] А.С. Пархоменко построил пример (польского) σ -компактного метрического пространства, которое не уплотняется на компакт.

Укажем также одну переформулировку теоремы 1 для сепарабельных пространств.

Следствие 3. *Предположим, что сепарабельное метрическое пространство Y уплотняется на сепарабельное абсолютно борелевское пространство. Тогда либо Y польское, либо для всякого пополнения X пространства Y выполняется $|X \setminus Y| = \mathfrak{c}$.*

Отметим, что свойство метрической полноты пространства X в теореме 1 существенно.

Предложение 7. Для всякого τ , такого, что $\omega < \tau < \mathfrak{c}$, существуют метрическое сепарабельное пространство X и множество $H \subseteq X$ мощности τ такие, что X и $X \setminus H$ гомеоморфны и уплотняются на метрический компакт.

Доказательство. Пусть $I = [0, 1]$, $A \in [I]^\tau$ и $Q \in [I]^\omega$. Положим $B := (I \times I) \setminus (A \times Q)$. Зафиксируем на множествах A и B их естественную топологию как подпространств прямой и плоскости соответственно. Обозначим X сумму пространства B и счетного числа копий A_n , $n \in \omega$ пространства A . Легко видеть, что X — метрическое сепарабельное пространство, которое уплотняется на компакт $I \times I$, и для $H = A_0$ подпространство $X \setminus H$ гомеоморфно X . \square

Вопрос 2. Существуют ли полное метрическое пространство X и множество $H \subseteq X$ такие, что $w(X) < |H| < \mathfrak{c}$ и подпространство $X \setminus H$ уплотняется на полное метрическое пространство?

Вопрос 3. Существуют ли абсолютно борелевское пространство X и множество $H \subseteq X$ такие, что $w(X) < |H| < \mathfrak{c}$ и подпространство $X \setminus H$

уплотняется на абсолютно борелевское пространство? В частности, может ли такое X быть польским?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белугин В.И., Осипов А.В., Пыткеев Е.Г. О свойствах подклассов слабо диадических компактов, Сиб. мат. журнал. 2022 (принята в печать).
2. Белугин В.И., Осипов А.В., Пыткеев Е.Г. О некоторых свойствах субкомпактных пространств, Матем. Заметки. 2022. V. 111. № 2. P. 188–201.
3. Белугин В.И., Осипов А.В., Пыткеев Е.Г. О классах субкомпактных пространств, Матем. Заметки. 2021. V. 109. № 6. P. 810–820.
4. Belugin V.I., Osipov A.V., Pytkeev E.G. Compact condensations of Hausdorff spaces, Acta Math. Hungarica. 2021. V. 164. № 1. P. 15–27.
5. Куратовский К. Топология, Том 1, Изд. “МИР” Москва, 1966.
6. Раухваргер И.Л. Об уплотнениях в компакты, Докл. АН СССР. 1949. V. 66. № 13. P. 13–15.
7. Пархоменко А.С. Об уплотнениях в компактные пространства, Изв. АН СССР. Сер. матем. 1941. V. 5. № 3. P. 225–232.
8. Пыткеев Е.Г. К теории уплотнений на компакты, Докл. АН СССР. 1977. V. 233. № 6. P. 1046–1048.
9. Пыткеев Е.Г. О верхних гранях топологий, Матем. Заметки. 1976. V. 20. № 4. P. 489–500.
10. Stone A.H. Non-separable Borel sets, Rozpr. Math. 1962. V. 28. P. 3–40.
11. Энгелькинг Р. Общая топология, Изд. “МИР” Москва, 1986.

ON CONDENSATIONS ONTO σ -COMPACT SPACES

A. E. Lipin^{a,b} and A. V. Osipov^{a,b}

^a N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation

^b Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS S.V. Matveev

In this paper, we prove the following result. Let the full metric space X of weight $w(X)$ and the set $H \subseteq X$ are such that $w(X) < |H| < \mathfrak{c}$. Then there is no continuous bijection of the subspace $X \setminus H$ onto σ -compact space. As a result, there is no continuous bijection of the subspace $X \setminus H$ onto the Polish space. Thus, it has been proved that metric compacta are not a_τ -spaces for any uncountable cardinal numbers τ . This result is the answer to the question delivered by E.G. Pytkeev in his work (*On the properties subclasses of weakly dyadic compact sets, Sib. mat. journal.*).

Keywords: compactness, Polish space, compact space, σ -compact space, a_τ -space

О СОВМЕСТНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ И РАЗРЫВНЫМ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

© 2022 г. Член-корреспондент РАН И. Б. Петров^{1,*}, А. В. Фаворская^{1,**}

Поступило 23.09.2021 г.

После доработки 13.07.2022 г.

Принято к публикации 03.08.2022 г.

Целью работы являлась разработка гибридного численного метода, объединяющего сеточно-характеристический метод на структурированных регулярных сетках с разрывным методом Галеркина на неструктурированных тетраэдральных сетках. Предложенный метод позволяет описывать сложную форму границ и контактных границ области интегрирования, в том числе, выполнять расчет сейсмических полей с учетом топографии поверхности Земли, и при этом экономить вычислительные ресурсы. Данная модификация численных методов в трехмерной постановке впервые предложена в данной работе. Приведены примеры использования разработанного метода для расчета возникающих при сейсмической разведке упругих волновых явлений. Для тестирования было проведено сравнение с расчетом сеточно-характеристическим методом на структурированных криволинейных сетках. Предложенный гибридный численный метод может применяться не только для задач сейсмической разведки, но и для расчета волновых явлений в других объектах сложной формы.

Ключевые слова: математическое моделирование, сеточно-характеристический метод, разрывный метод Галеркина, сейсморазведка, тетраэдральные сетки, комбинирование численных методов, учет топографии поверхности, криволинейные структурированные сетки

DOI: 10.31857/S2686954322050150

В наши дни поиск и уточнение запасов углеводородов требуют применения вычислительных методов для обработки данных сейсмической разведки [1, 2]. В том числе необходима разработка высокоточных методов прямого численного моделирования волновых явлений в геологических средах.

Наиболее часто употребляемыми современными методами моделирования распространения упругих волн являются различные модификации конечно-разностных методов [3, 4], метод спектральных элементов [5, 6] и разрывный метод Галеркина [7, 8]. Сеточно-характеристический метод также успешно применим для моделирования упругих волн в геологических породах [9, 10]. Кроме того, разрабатывают и гибридные подходы [11–13].

В данной работе предложено использовать сеточно-характеристический метод на структурированных расчетных сетках с постоянными шага-

ми интегрирования по координатам [10] совместно с разрывным методом Галеркина на тетраэдральных сетках. Где это возможно, используются структурированные расчетные сетки и сеточно-характеристический метод, а рядом с границами и контактными границами криволинейной формы применяется тетраэдральная сетка и используется разрывный метод Галеркина.

Для моделирования распространения сейсмических волн в геологических породах ищется решение следующей начально-краевой задачи упругого волнового уравнения:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t))^T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t) = (\rho c_p^2 - 2\rho c_s^2)(\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t))\mathbf{I} + \rho c_s^2(\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + (\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}, t))^T). \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ – скорость (производная смещения), $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t)$ – симметричный тензор напряжений Коши, \mathbf{r} – радиус-вектор, t – время, ∇ – вектор-градиент, ρ – плотность, c_p , c_s – скорости продольных и поперечных волн соответственно, \mathbf{I} –

¹ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

*E-mail: petrov@mipt.ru

**E-mail: favorskaya@phystech.edu

единичный тензор второго ранга, \otimes – тензорное произведение векторов, $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$.

На поверхности Земли ставилось условие свободной границы, на всех остальных внешних границах области интегрирования – неотражающие граничные условия. В качестве источника сейсмических волн рассматривались точечный источник и импульс Риккера с частотой 20 Гц.

Рассмотрим подробнее расчет решения системы (1), (2) в точках между на границах между подобластями, в которых используются сеточно-характеристический метод и разрывный метод Галеркина.

При использовании сеточно-характеристического метода вначале выполняется расщепление по пространственным координатам. Затем выполняют переход к инвариантам Римана каждой из трех полученных одномерных гиперболических систем уравнений, используя следующие выражения:

$$\omega_{1,2} = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v} \mp \frac{1}{c_p \rho} \mathbf{N}_{00} \div \boldsymbol{\sigma}$$

$$\omega_{3,4} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v} \mp \frac{1}{c_s \rho} \mathbf{N}_{01} \div \boldsymbol{\sigma}$$

$$\omega_{5,6} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{v} \mp \frac{1}{c_s \rho} \mathbf{N}_{02} \div \boldsymbol{\sigma}$$

$$\omega_7 = \mathbf{N}_{12} \div \boldsymbol{\sigma}$$

$$\omega_8 = (\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22}) \div \boldsymbol{\sigma}$$

$$\omega_9 = \left(\mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{22} - 2 \left(1 - 2 \frac{c_s^2}{c_p^2} \right) \mathbf{N}_{00} \right) \div \boldsymbol{\sigma}.$$

Здесь \mathbf{n}_0 – единичный вектор, направленный вдоль рассматриваемой оси координат, $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ образуют с ним правый базис, $\mathbf{N}_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j + \mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_i)$,

$$(\mathbf{A} \div \mathbf{B})_{ij} = \sum_{p,q} A_{ip} B_{jq}.$$

Затем решают полученные уравнения переноса с набором коэффициентов $\{c_p, -c_p, c_s, -c_s, c_s, -c_s, 0, 0, 0\}$ с использованием их характеристических свойств, и выполняют обратный переход к неизвестным функциям $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t)$, используя следующие выражения:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{1}{2} ((\omega_1 + \omega_2) \mathbf{n}_0 + (\omega_3 + \omega_4) \mathbf{n}_1 + (\omega_5 + \omega_6) \mathbf{n}_2) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{2} \left\{ c_p \rho (\omega_2 - \omega_1) \left(2 \frac{c_s^2}{c_p^2} \mathbf{N}_{00} + \left(1 - 2 \frac{c_s^2}{c_p^2} \right) \mathbf{I} \right) + \right. \\ &\quad + 2c_s \rho (\omega_4 - \omega_3) \mathbf{N}_{01} + 2c_s \rho (\omega_6 - \omega_5) \mathbf{N}_{02} + \\ &\quad \left. + 4\omega_7 \mathbf{N}_{12} + \omega_8 (\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22}) + \omega_9 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_{00}) \right\} \end{aligned}$$

При использовании разрывного метода Галеркина функции неизвестных раскладывают по выбранному базису ортогональных функций $\Phi_l(\xi, \eta, \zeta)$ в единичном тетраэдре T_E

$$\begin{aligned} u_k^m(x, y, z, t) &= \\ &= \sum_{l=1}^{10} u_{kl}^m(t) \cdot \Phi_l(\xi^m(x, y, z), \eta^m(x, y, z), \zeta^m(x, y, z)) \end{aligned} \quad (3)$$

и получают полудискретную форму записи системы (1), (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{pl}^{(m)}}{\partial t} |J| \int_{T_E} \Phi_l \Phi_k d\Omega + \sum_{j=1}^4 F_{pl}^{h,j,-} |S_j| \int_{(\partial T_E)_j} \Phi_l \Phi_k ds + \\ + \sum_{j=1}^4 F_{pl}^{h,j,+} |S_j| \int_{(\partial T_E)_j} \Phi_l \Phi_k ds - \\ - A_{pq}^* u_{pl}^{(m)} |J| \int_{T_E} \Phi_l \frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi} d\Omega - \\ - B_{pq}^* u_{pl}^{(m)} |J| \int_{T_E} \Phi_l \frac{\partial \Phi_k}{\partial \eta} d\Omega - \\ - C_{pq}^* u_{pl}^{(m)} |J| \int_{T_E} \Phi_l \frac{\partial \Phi_k}{\partial \zeta} d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $u_{pl}^{(m)}$ – коэффициенты в разложении решения по базису ортогональных функций в тетраэдре m , причем первый индекс соответствует компоненте вектора неизвестных, $|J|$ – якобиан из координат узлов рассматриваемого тетраэдра, $F_{pl}^{h,j,-}$ и $F_{pl}^{h,j,+}$ – выходящий и входящий потоки, $|S_j|$ – площадь j -й грани тетраэдра $(\partial T_E)_j$, матрицы A_{pq}^* , B_{pq}^* и C_{pq}^* выражаются через коэффициенты решаемой гиперболической системы уравнений (1), (2) и координаты рассматриваемого тетраэдра. В уравнении (4) интегралы вычисляются аналитически и заранее, так как набор ортогональных базисных функций известен, а итоговую систему решают итерационным методом по времени, например, методами Рунге–Кутты.

Ниже приведем метод вычисления решения вблизи границы между подобластями, в которых используются разрывный метод Галеркина на тетраэдральных сетках и сеточно-характеристический метод на регулярных сетках.

В предположении об одинаковой ориентации тетраэдров вдоль данной границы с регулярной сеткой можно получить следующее упрощенное выражение для входящих потоков граничных тетраэдров:

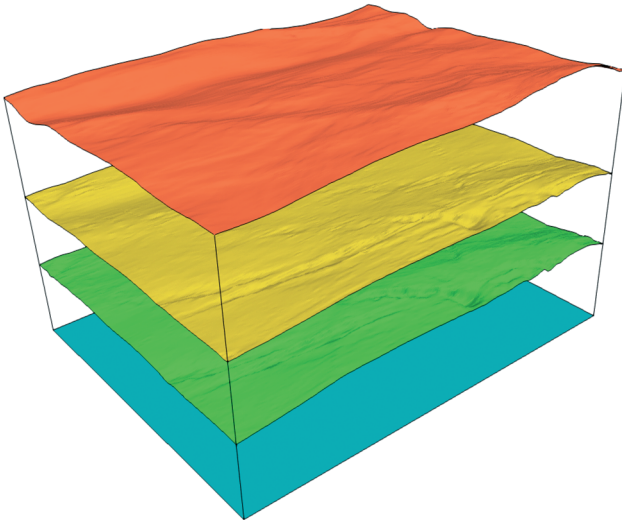


Рис. 1. Геологическая модель, границы раздела геологических пород.

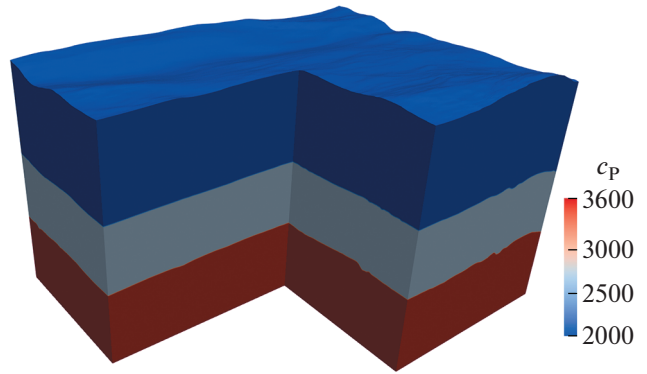


Рис. 2. Геологическая модель, распределение скорости продольных волн.

$$\begin{aligned}
 & F_{pl}^{h,1,+} |S_1| \int_{(\partial T_E)_1} \Phi_l \Phi_k ds = \\
 & = |S_1| G_{pa}^{1,+} (\mathbf{u}_{d_x, d_y})_a \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} \Phi_k(\xi, \eta, 0) d\eta \pm \\
 & \pm |S_1| G_{pa}^{1,+} ((\mathbf{u}_{d_x \pm 1, d_y})_a - (\mathbf{u}_{d_x, d_y})_a) \times \\
 & \times \int_0^1 \xi d\xi \int_0^{1-\xi} \Phi_k(\xi, \eta, 0) d\eta \pm \\
 & \pm |S_1| G_{pa}^{1,+} ((\mathbf{u}_{d_x, d_y \pm 1})_a - (\mathbf{u}_{d_x, d_y})_a) \times \\
 & \times \int_0^1 \eta d\eta \int_0^{1-\eta} \Phi_k(\xi, \eta, 0) d\xi \\
 & G_{pa}^{1,+} = T_{pq}^{m_j} \frac{1}{2} R_{qb} (\Lambda_{br} - |\Lambda_{br}|) R_{rs}^{-1} (T_{sa}^{m_i})^{-1}
 \end{aligned}$$

Здесь $T_{pq}^{m_j}$ – матрица поворота j -й грани, R_{qb} – матрица, составленная из собственных векторов рассматриваемой гиперболической системы (1), (2), $\Lambda_{br} = \text{diag}\{-c_p, -c_s, -c_s, 0, 0, 0, c_s, c_s, c_p\}$, $(\mathbf{u}_{d_x, d_y})_a$ – a -я компонента вектора неизвестных \mathbf{u} в точке регулярной сетки с индексами d_x, d_y по осям Ox, Oy соответственно. Причем точки $\{d_x, d_y\}, \{d_x \pm 1, d_y\}, \{d_x, d_y \pm 1\}$ совпадают с точками горизонтальной грани тетраэдра.

А для расчета неизвестных функций $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t)$ сеточно-характеристическим методом необходимо знать их значения вдоль характеристик, попадающих в зону тетраэдральной сетки. Эти значения вдоль характеристик восстанавливаются по формуле (3) в граничном тетраэдре, в который попадает рассматриваемая характеристика.

Далее мы приводим результаты тестовых расчетов. На рис. 1, 2 изображена трехмерная геологическая модель, с использованием которой проводились тестовые расчеты. На рис. 1 изображены границы раздела геологических пород, а на рис. 2 приведено распределение скорости продольных волн. Соответствующие распределения остальных упругих параметров можно найти в табл. 1.

На рис. 3 изображены тетраэдральные расчетные сетки, прилегающие к поверхности Земли и криволинейным границам раздела геологических пород, и регулярные расчетные сетки. Шаг сетки вдоль направлений Ox и Oy брался равным 12.5 м, вдоль Oz – 10 м в регулярных сетках и приблизительно 10 м в криволинейных структурированных сетках. Шаг по времени брался равным 0.4 мс, было выполнено 2800 шагов по времени в обоих расчетах.

На рис. 4, 5 представлен результат визуализации волновых полей модуля скорости (волновые картины [14]). Результаты на рис. 4 получены с помощью комбинированного метода, а результаты на рис. 5 – с помощью сеточно-характеристического метода на криволинейных структурированных сетках [9].

В табл. 2, 3 приведены результаты исследования на сходимость предложенного в настоящей работе комбинированного метода и сеточно-ха-

Таблица 1. Отдельные расчетные сетки, типы рассматриваемых сред, упругие параметры каждого слоя геологической породы

Слой	Скорость продольных волн, м/с	Скорость поперечных волн, м/с	Плотность, кг/м ³
1	2000	1000	2000
2	2700	1300	2200
3	3600	1700	2500

Таблица 2. Результаты исследования сходимости сеточно-характеристического метода на криволинейных структурированных расчетных сетках [9]

Шаг по координате, м	Ошибка по норме L_1	Ошибка по норме L_∞	Порядок сходимости по норме L_1	Порядок сходимости по норме L_∞
25	4927	0.249	—	—
12.5	1460	0.076	1.755	1.720
6.25	440	0.023	1.730	1.713
3.125	132	0.007	1.733	1.712

Таблица 3. Результаты исследования сходимости предложенного в работе комбинированного метода

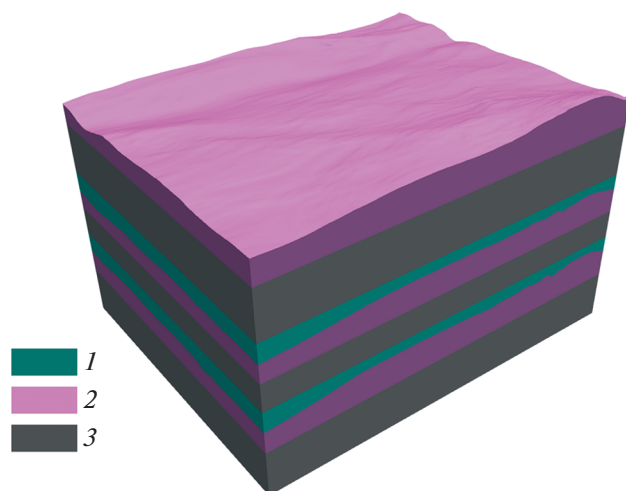
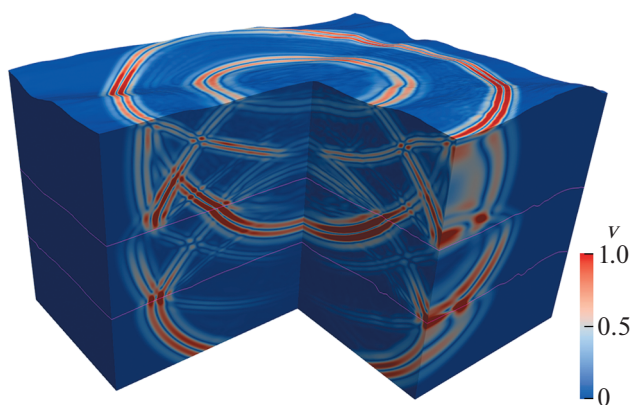
Шаг по координате, м	Ошибка по норме L_1	Ошибка по норме L_∞	Порядок сходимости по норме L_1	Порядок сходимости по норме L_∞
25	5145	0.280	—	—
12.5	1258	0.067	2.032	2.070
6.25	339	0.019	1.890	1.807
3.125	92	0.005	1.879	1.809

Таблица 4. Сравнение затрат вычислительных ресурсов

Шаг по координате, м	Сеточно-характеристический метод на структурированных криволинейных сетках [9]		Предложенный в работе комбинированный метод	
	Затраты оперативной памяти, Гб	Затраты времени на вычисления	Затраты оперативной памяти, Гб	Затраты времени на вычисления
25	0.56	11 мин	1.808	41 мин
12.5	4.16	2 ч 43 мин	7.616	5 ч
6.25	33.8	1 день 19 ч	27.9	1 день 11 ч
3.125	241.7	30 дней 6 ч	170.5	20 дней 15 ч

рактеристического метода на криволинейных структурированных расчетных сетках, а в табл. 4 — соответствующие затраты оперативной памяти и времени на вычисления. Под шагом по коорди-

нате мы понимали шаг в регулярных расчетных сетках для комбинированного метода и шаг вдоль осей OX и OY для метода на криволинейных структурированных сетках (так как в рассматриваемой постановке задачи он брался фиксированным). Тестирование проводилось для числа

**Рис. 3.** Тетраэдральные (1, 2) и структурированные регулярные (3) расчетные сетки при использовании комбинированного метода.**Рис. 4.** Волновая картина модуля скорости, расчет с помощью совместного использования сеточно-характеристического метода на регулярных сетках и разрывного метода Галеркина на тетраэдральных сетках.

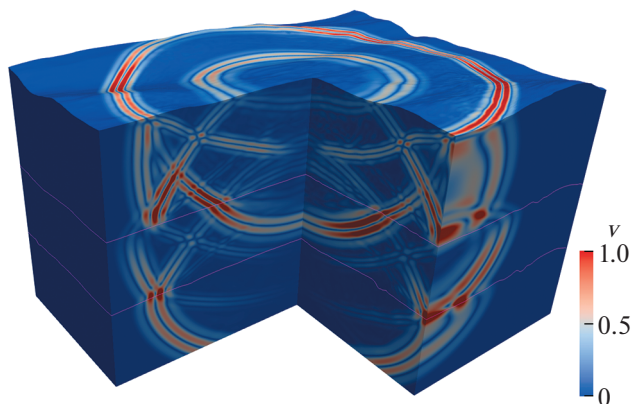


Рис. 5. Волновая картина модуля скорости, расчет с помощью сеточно-характеристического метода на криволинейных структурированных сетках.

Куранта 0.4. Можно видеть, что при достаточно крупном шаге интегрирования предложенный комбинированный метод еще не дает выигрыша по затратам вычислительных ресурсов, но при дальнейшем измельчении расчетной сетки доля объема вблизи криволинейных границ, разбиваемого на тетраэдры, уменьшается, и затраты становятся меньше. Также предложенный комбинированный метод обладает более высоким порядком сходимости по обеим нормам.

Полученные результаты численных экспериментов позволяют сделать вывод о перспективах применения разработанного численного метода для высокоточного решения трехмерных задач сейсмической разведки углеводородов и других полезных ископаемых. Разработанный гибридный метод позволяет одновременно описывать границы сложной формы за счет построения тетраэдральных сеток вблизи них и использования разрывного метода Галеркина, и экономить вычислительные ресурсы за счет применения сеточно-характеристического метода на структурированных регулярных сетках в остальной подобласти интегрирования. Также заметим, что предложенный в работе гибридный метод применим для моделирования волновых явлений в других объектах сложной формы.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-71-10028).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fang J., Chen H., Zhou H., Rao Y., Sun P., Zhang J. Elastic full-waveform inversion based on GPU accelerated temporal fourth-order finite-difference approximation. *Computers & Geosciences*. 2020. Т. 135. Номер статьи 104381.

<https://doi.org/10.1016/j.cageo.2019.104381>

2. Решетова Г.В., Роменский Е.И. Моделирование волновых полей в пористых средах диффузно-интерфейсным подходом. Доклады Российской академии наук. Науки о Земле. 2021. Т. 497. № 2. С. 161–164. <https://doi.org/10.31857/S2686739721040137>
3. Takekawa J., Mikada H. A mesh-free finite-difference method for elastic wave propagation in the frequency-domain. *Computers & Geosciences*. 2018. Т. 118. С. 65–78. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2018.05.011>
4. Liu J., Yong W. A., Liu J., Guo Z. Stable finite-difference methods for elastic wave modeling with characteristic boundary conditions. *Mathematics*. 2020. Т. 8. № 6. Номер статьи 1039. <https://doi.org/10.3390/math8061039>
5. Li Y., Brossier R., Métivier L. D frequency-domain elastic wave modeling with the spectral element method using a massively parallel direct solver. *Geophysics*. 2020. Т. 85. № 2. С. T71–T88. <https://doi.org/10.1190/GEO2019-0172.1>
6. Ponomarenko R., Sabitov D., Charara M. Spectral element simulation of elastic wave propagation through fractures using linear slip model: microfracture detection for CO2 storage. 2020. *Geophysical Journal International*. Т. 223. № 3. С. 1794–1804. <https://doi.org/10.1093/gji/ggaa399>
7. Duru K., Rannabauer L., Gabriel A. A., Igel H. A new discontinuous Galerkin method for elastic waves with physically motivated numerical fluxes. *Journal of Scientific Computing*. 2021. Т. 88. № 3. С. 1–32. <https://doi.org/10.1007/s10915-021-01565-1>
8. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. Комбинированная схема разрывного метода Галёркина, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн. 2019. Доклады Академии наук. Т. 489. № 2. С. 119–124. <https://doi.org/10.31857/S0869-56524892119-124>
9. Khokhlov N., Favorskaya A., Stetsyuk V., Mitskovets I. Grid-characteristic method using Chimera meshes for simulation of elastic waves scattering on geological fractured zones. 2021. *Journal of Computational Physics*. Т. 446. Номер статьи 110637. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110637>
10. Фаворская А.В., Петров И.Б. О численном моделировании пространственных динамических волновых эффектов в скальных массивах. Доклады Академии наук. 2017. Т. 474. № 4. С. 418–422. <https://doi.org/10.7868/S0869565217040041>
11. Gao L., Keyes D. Combining finite element and finite difference methods for isotropic elastic wave simulations in an energy-conserving manner. *Journal of Computational Physics*. 2019. Т. 378. С. 665–685. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.11.031>
12. Lisitsa V., Tcheverda V., Botter C. Combination of the discontinuous Galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation. *Journal of Computational Physics*. 2016. Т. 311. С. 142–157. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.02.005>

13. *Петров И.Б., Фаворская А.В., Шевцов А.В., Васюков А.В., Потапов А.П., Ермаков А.С.* О комбинированном методе для численного решения динамических пространственных упругопластических задач. Доклады Академии наук. 2015. Т. 460. № 4. С. 389. <https://doi.org/10.7868/S0869565215040052>
14. *Favorskaya A., Petrov I.* A novel method for investigation of acoustic and elastic wave phenomena using numerical experiments. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. 2020. Т. 10. № 5. С. 307–314. <https://doi.org/10.1016/j.taml.2020.01.040>

ON JOINT MODELING OF WAVE PHENOMENA BY THE GRID-CHARACTERISTIC METHOD AND THE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD

Corresponding Member of the RAS **I. B. Petrov^a** and **A. V. Favorskaya^a**

^a *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

The aim of the work is to develop a hybrid computational method that combines the grid-characteristic numerical method on structured regular grids with the discontinuous Galerkin method on unstructured tetrahedral grids. The proposed method makes it possible to describe the complex shape of the boundaries and contact boundaries of the integration domain, including the calculation of seismic fields taking into account the topography of the Earth's surface, and to save computational resources. This modification of the computational method in the three-dimensional case is first proposed in this paper. Examples of using the developed method for calculating elastic wave phenomena arising during seismic prospecting are given. For testing, a comparison was made with the calculation by the grid-characteristic method on structured curvilinear grids. The proposed hybrid computational method can be used not only for seismic prospecting problems, but also for calculating wave phenomena in other objects of complex shape.

Keywords: mathematical modeling, grid-characteristic method, discontinuous Galerkin method, seismic exploration, tetrahedral grids, combination of numerical methods, taking into account surface topography, curved regular grids

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ И КОМПАКТНОСТИ ДВУМЕРНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ХАРДИ

© 2022 г. Член-корреспондент РАН В. Д. Степанов^{1,*}, Е. П. Ушакова^{2,**}

Поступило 13.05.2022 г.

После доработки 12.08.2022 г.

Принято к публикации 15.08.2022 г.

В терминах весовых функций v и w на \mathbb{R}_+^2 получены критерии ограниченности и компактности двумерного прямоугольного оператора интегрирования, действующего из весового пространства Лебега $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ в $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$, когда $1 < p, q < \infty$. При $p < q$ критерий ограниченности значительно усиливает классический результат Е. Сойера (см. введение) для $p \leq q$. Случай $q < p$ также рассмотрен.

Ключевые слова: весовое пространство Лебега, неравенство Харди, двумерный прямоугольный оператор интегрирования, ограниченность, компактность

DOI: 10.31857/S2686954322050162

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}_+^n := (0, \infty)^n$ функций $f(y_1, \dots, y_n)$ n -мерный прямоугольный оператор интегрирования I_n задан формулой

$$I_n f(x_1, \dots, x_n) := \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n \quad (1)$$

$(x_1, \dots, x_n > 0)$.

Двойственное к I_n преобразование I_n^* имеет вид

$$I_n^* f(x_1, \dots, x_n) := \int_{x_1}^{\infty} \dots \int_{x_n}^{\infty} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$$

$(x_1, \dots, x_n > 0)$.

Пусть $1 < p, q < \infty$ и $v, w \geq 0$ весовые функции на \mathbb{R}_+^n . Весовое пространство Лебега $L_v^p(\mathbb{R}_+^n)$ состоит из всех измеримых на \mathbb{R}_+^n функций f таких, что $\|f\|_{p,v} := \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f|^p v < \infty$. Далее будем иметь дело с интегральным неравенством Харди

$$\|I_n f\|_{q,w} \leq C_n \|f\|_{p,v} \quad (2)$$

на конусе неотрицательных функций f из $L_v^p(\mathbb{R}_+^n)$. Константа $C_n > 0$ в (2) предполагается наименьшей из возможных и не зависит от f .

Задача характеристики неравенства (2) хорошо известна. Она равносильна нахождению критериев ограниченности I_n из $L_v^p(\mathbb{R}_+^n)$ в $L_w^q(\mathbb{R}_+^n)$ и рассматривалась многими авторами (см. [1–4] и ссылки на литературу там же). Одномерный случай этого неравенства полностью изучен (см. [5–7]). Однако при $n > 1$ возникают трудности, препятствующие характеристике (2) без дополнительных ограничений на v и w . Тем не менее хорошо известен результат Е. Сойера для произвольных v и w в случае $1 < p \leq q < \infty$. Обозначим $p' := p/(p-1)$ и $\sigma := v^{1-p'}$.

Теорема 1 [1, Theorem 1A]. Пусть $n = 2$ и $1 < p \leq q < \infty$. Неравенство (2) выполнено для всех неотрицательных f на \mathbb{R}_+^2 тогда и только тогда, когда одновременно выполнены три условия

$$A_1 := \sup_{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2} A_1[(s,t); \sigma, w] :=$$

$$:= \sup_{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2} [I_2^* w(s,t)]^{\frac{1}{q}} [I_2 \sigma(s,t)]^{\frac{1}{p'}} < \infty, \quad (3)$$

$$A_2 := \sup_{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2} A_2[(s,t); \sigma, w] :=$$

$$:= \sup_{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2} \left(\int_0^s \int_0^t (I_2 \sigma)^q w \right)^{\frac{1}{q}} [I_2 \sigma(s,t)]^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad (4)$$

¹ Вычислительный Центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровск, Россия

² Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: stepanov@mi-ras.ru

**E-mail: elenau@inbox.ru

$$A_3 := \sup_{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2} A_3[(s,t); \sigma, w] :=$$

$$:= \sup_{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2} \left(\int_s^\infty \int_t^\infty (I_2^* w)^{p'} \sigma \right)^{\frac{1}{p'}} [I_2^* w(s,t)]^{\frac{1}{q'}} < \infty, \quad (5)$$

причем $C_2 \approx A_1 + A_2 + A_3$ с константами эквивалентности, зависящими только от параметров p и q .

Отметим, что в одномерном случае аналоги условий (3)–(5) эквивалентны друг другу [8]. При $n = 2$ это, вообще говоря, неверно. Более того, как показано в [1, § 4] для $p = q = 2$, никакие два условия из (3)–(5) не гарантируют выполнение (2). Однако конструкция второго контрпримера из [1, § 4] не переносится на случай $p < q$.

Цель настоящей работы – получить новые критерии выполнения неравенства Харди (2) при $n = 2$ и $1 < p \neq q < \infty$, а также исследовать компактность $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ для всех $p, q > 1$. Решение первой задачи содержится в теоремах 2 и 3 (см. § 1). В теореме 4 найдены альтернативные достаточные условия на v и w для выполнения (2) в случае $n = 2$ и $1 < q < p < \infty$. Напомним, что критерий Е. Сойера ограниченности I_2 из $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ в $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ при $1 < p \leq q < \infty$ выражается конечностью трех независимых функционалов (см. теорему 1). В теореме 2 показано, что при $p < q$ неравенство (2) характеризуется конечностью только одного функционала. С некоторым ограничением на v и w аналогичное утверждение получено и для $q < p$ (см. теорему 3). В § 2 представлены условия компактности оператора I_2 из $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ в $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$, а также характеризуется мера некомпактности $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ в случае $1 < p \leq q < \infty$.

Аналоги теорем 2 и 3 также справедливы для двойственного оператора I_2^* и смешанных операторов Харди, относительно деталей см. [1, Remark 1].

Билинейные весовые неравенства с прямоугольными операторами интегрирования изучены в [9]. Также некоторые аспекты многомерных неравенств рассматривались в работах [10–13].

На протяжении всей работы запись вида $\Phi \lesssim \Psi$ означает $\Phi \leq c\Psi$ с некоторой константой $c > 0$, зависящей только от параметров суммирования p и q . Мы пишем $\Phi \approx \Psi$ в случае $\Phi \lesssim \Psi \lesssim \Phi$. Символ χ_E обозначает характеристическую функцию множества E . Значки $:=$ и \equiv применяются для определения новых величин.

1. УСЛОВИЯ ОГРАНИЧЕННОСТИ

Обозначим

$$\alpha(p, q) := \frac{p^2(q-1)}{q-p}, \quad p < q;$$

$$\beta(p, q, c) := 3 \max \left\{ \frac{3^{3q+1}}{4}, \frac{3^{\frac{q+2q}{p}}}{2^p} \right\},$$

$$\frac{3^{\frac{2q-\frac{q}{p}+2-c}{p}}}{4c} \left[\frac{2 \cdot 3^{3c}}{1-c} - 3^{c-2} \right], \quad q < p,$$

где $1/r := 1/q - 1/p$ и $0 < q/p \leq c < 1$. Положим $\sigma := v^{1-p'}$ и

$$B := \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} d_y [I_2 \sigma(x, y)]^{\frac{r}{p'}} d_x (-[I_2^* w(x, y)]^{\frac{r}{q}}) \right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} [I_2 \sigma(x, y)]^{\frac{r}{p'}} d_x d_y [I_2^* w(x, y)]^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} [I_2^* w(x, y)]^{\frac{r}{q}} d_x d_y [I_2 \sigma(x, y)]^{\frac{r}{p'}} \right)^{\frac{1}{r}},$$

где последние два равенства получаются интегрированием по частям.

Введем обозначения

$$C_{t,s} := 3^{3q} \left[4 \left(\frac{2}{3} \right)^q \max \left\{ t, 2q(q')^{\frac{q}{p'}} \right\} \left(\frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1} \right)^{\frac{q}{p}} + \right.$$

$$\left. + 3^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{3^{q-1}}{3^{q-1}-1} \right)^{\frac{1}{q'}} \right],$$

$$C_{t,s} := 3^{3q} \left[2^q 3^{-q} \max \left\{ t, 2q(p')^{q-1} \left(\frac{q}{r} \right)^{\frac{q}{r}} \right\} \left(\frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1} \right)^{\frac{q}{p}} + \right.$$

$$\left. + 3 s^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{3^{q-1}}{3^{q-1}-1} \right)^{\frac{1}{q'}} \right].$$

Усилением теоремы 1 для $p < q$ является следующее утверждение.

Теорема 2 [14]. Пусть $1 < p < q < \infty$. Неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+^2} (I_2 f)^q w \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_2 \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} f^p v \right)^{\frac{1}{p}} \quad (6)$$

выполнено тогда и только тогда, когда $A_1 < \infty$, при этом

$$A_1 \leq C_2 \leq C_{\alpha, \alpha^*} A_1,$$

где $\alpha := \alpha(p, q)$ и $\alpha^* := \alpha(q', p')$.

Напомним, что в случае $p \leq q$ наилучшая константа C_2 двумерного неравенства (6) эквивалентна на $\sum_{i=1}^3 A_i$ (см. теорему 1). Однако для $p < q$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} A_1 \leq C_2 &\leq C_{1,1}[A_1 + A_2 + A_3] \leq \\ &\leq C_{1,1}[1 + \alpha(p, q)^{\frac{1}{q}} + \alpha(q', p')^{\frac{1}{p'}}]A_1. \end{aligned} \quad (7)$$

При этом $\lim_{p \rightarrow q-0} [\alpha(p, q) + \alpha(q', p')] = \infty$. Таким образом, правое неравенство в (7) и оценка сверху в теореме 2 при $p \rightarrow q - 0$ имеют blow-up эффект.

Новый результат в случае $q < p$ формулирует следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $1 < q < p < \infty$. Предположим, что весовая функция v удовлетворяет условию:

$$\begin{aligned} &\text{существует } \gamma \in [q/p, 1) \\ &\text{такое, что } \frac{\partial^2 ([I_2 \sigma(x, y)]^\gamma)}{\partial x \partial y} \geq 0 \quad (8) \\ &\text{для п.в. } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2. \end{aligned}$$

Кроме этого, для веса w выполнено условие:

$$\begin{aligned} &\text{существует } \gamma^* \in [p'/q', 1) \\ &\text{такое, что } \frac{\partial^2 ([I_2^* w(x, y)]^{\gamma^*})}{\partial x \partial y} \geq 0 \quad (9) \\ &\text{для п.в. } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2. \end{aligned}$$

Тогда неравенство (6) выполнено тогда и только тогда, когда $B < \infty$, при этом

$$2^{-\frac{1}{p'}} \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p'}{r}\right)^{\frac{1}{p'}} B \leq C_2 \leq C_{\beta, \beta^*} B, \quad (10)$$

где $\beta := \beta(p, q, \gamma)$ и $\beta^* := \beta(q', p', \gamma^*)$.

З а м е ч а н и е 1. Оценка снизу в (10) справедлива без требований (8) и (9) на весовые функции v и w . В качестве весов, удовлетворяющих (8) и (9), подходят, к примеру, $\sigma(x, y) = (x + y)^\tau$, $\tau > 0$, и $w(x, y) = (x + y)^{-\rho}$, $\rho > 2$.

В завершение параграфа представим альтернативные достаточные условия выполнения неравенства (6) без дополнительных ограничений на v и w .

Теорема 4. Пусть $1 < q < p < \infty$. Неравенство (6) выполнено, если

$$B_v := \left[\int_{\mathbb{R}_+^2} \sigma(u, z) \left(\iint_{u, z} (I_2 \sigma)^{q-1} w \right)^{\frac{r}{q}} dudz \right]^{\frac{1}{r}} < \infty, \quad (11)$$

причем $C_2 \lesssim B_v$.

Верна также двойственная формулировка последней теоремы с функционалом

$$B_w := \left[\int_{\mathbb{R}_+^2} w(u, z) \left(\iint_{0,0}^{u, z} (I_2^* w)^{p'-1} \sigma \right)^{\frac{r}{p'}} dudz \right]^{\frac{1}{r}}$$

вместо B_v .

З а м е ч а н и е 2. Если веса v и w факторизуемы, т.е. представляются в виде произведения одномерных функций, то условие $B_v < \infty$ (или $B_w < \infty$) необходимо и достаточно для выполнения (6) в случае $1 < q < p < \infty$, при этом $C_2 \approx B_v \approx B_w$ [4].

2. КОМПАКТНОСТЬ И МЕРА НЕКОМПАКТНОСТИ

Предположим, что $1 < p, q < \infty$ и оператор I_2 ограничен из $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ в $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$.

Пусть $a, b, c, d \in (0, \infty)$ такие, что $a < c$ и $b < d$. Обозначим

$$\begin{aligned} \Omega_0 &:= \Omega_0(a, b) := \{(0, a) \times (0, \infty)\} \cup \{[a, \infty) \times (0, b)\}, \\ \Omega_\infty &:= \Omega_\infty(a, b, c, d) := \\ &:= \{[a, \infty) \times (d, \infty)\} \cup \{(c, \infty) \times [b, d]\}. \end{aligned}$$

Для формулировки критерия компактности $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ в случае $p \leq q$ нам понадобятся следующие условия:

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{a \rightarrow 0, b \rightarrow 0 \\ c \rightarrow \infty, d \rightarrow \infty}} \left[\sup_{(u, z) \in \Omega_0} A_1[(u, z); \sigma, w] + \right. \\ &\left. + \sup_{(u, z) \in \Omega_\infty} A_1[(u, z); \sigma, w] \right] = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{a \rightarrow 0, b \rightarrow 0 \\ c \rightarrow \infty, d \rightarrow \infty}} \left[\sup_{(u, z) \in \Omega_0} A_2[(u, z); \sigma, w] + \right. \\ &\left. + \sup_{(u, z) \in \Omega_\infty} A_2[(u, z); \sigma \chi_{\Omega_\infty}, w \chi_{\Omega_\infty}] \right] = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{a \rightarrow 0, b \rightarrow 0 \\ c \rightarrow \infty, d \rightarrow \infty}} \left[\sup_{(u, z) \in \Omega_0} A_3[(u, z); \sigma \chi_{\Omega_0}, w \chi_{\Omega_0}] + \right. \\ &\left. + \sup_{(u, z) \in \Omega_\infty} A_3[(u, z); \sigma, w] \right] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Теорема 5. Пусть $1 < p \leq q < \infty$. Если $p < q$, то $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ компактен тогда и только тогда, когда $A_1 < \infty$ и выполнено (12).

В случае $p = q$ оператор $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^p(\mathbb{R}_+^2)$ компактен, если и только если $\sum_{i=1,2,3} A_i < \infty$ и выполнены условия (12)–(14).

Для $q < p$ достаточное условие и необходимое условие компактности $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ представлены в следующей теореме.

Теорема 6. Пусть $1 < q < p < \infty$. Оператор $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ компактен, если выполнено (11). Если $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ компактен, то $B < \infty$.

З а м е ч а н и е 3. С условиями (8) и (9) на весовые функции v и w , соответственно, оператор $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ компактен, если и только если $B < \infty$.

Далее, определим

$$\alpha(T) := \inf \|T - P\|,$$

где инфимум берется по всем ограниченным линейным отображениям $P : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ конечного ранга. Величина $\alpha(T)$ совпадает с так называемым множеством меры некомпактности оператора T , действующего ограниченно из $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ в $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ (см. [15, § 2] и [16, Proposition 3.1]).

Так как для $1 < q < p$ оператор I_2 из $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ в $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ компактен тогда и только тогда, когда он ограничен (см. [17, 18, § 5.3]), то в таком случае $\alpha(I_2) = 0$. Это следует из аппроксимационного свойства пространства $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ [19, § 10.2.3/1]. Для пространств Y , обладающих таким свойством, известно, что $\alpha(T) = 0$ тогда и только тогда, когда $T : X \rightarrow Y$ компактен [19, § 10.1.3].

Рассмотрим ситуацию, когда $1 < p \leq q < \infty$. Положим

$$\begin{aligned} A_1(\Omega_0) &:= \sup_{(u,z) \in \Omega_0} A_1[(u,z); \sigma, w], \\ A_1(\Omega_\infty) &:= \sup_{(u,z) \in \Omega_\infty} A_1[(u,z); \sigma, w]; \\ A_2(\Omega_0) &:= \sup_{(u,z) \in \Omega_0} A_2[(u,z); \sigma, w], \\ A_2(\Omega_\infty) &:= \sup_{(u,z) \in \Omega_\infty} A_2[(u,z); \sigma \chi_{\Omega_\infty}, w \chi_{\Omega_\infty}]; \\ A_3(\Omega_0) &:= \sup_{(u,z) \in \Omega_0} A_3[(u,z); \sigma \chi_{\Omega_0}, w \chi_{\Omega_0}], \\ A_3(\Omega_\infty) &:= \sup_{(u,z) \in \Omega_\infty} A_3[(u,z); \sigma, w]. \end{aligned}$$

Пусть

$$J(\Omega_0) := A_1(\Omega_0) \quad \text{и} \quad J(\Omega_\infty) := A_1(\Omega_\infty) \quad (15)$$

в случае $1 < p < q < \infty$; для $p = q$ мы полагаем

$$J(\Omega_0) := \sum_{i=1}^3 A_i(\Omega_0) \quad \text{и} \quad J(\Omega_\infty) := \sum_{i=1}^3 A_i(\Omega_\infty). \quad (16)$$

Для $1 < p \leq q < \infty$ мера некомпактности $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ охарактеризована в следующем утверждении.

Теорема 7. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и I_2 ограничен из $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ в $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$. Тогда

$$\alpha(I_2) \approx \lim_{\substack{a \rightarrow 0, b \rightarrow 0 \\ c \rightarrow \infty, d \rightarrow \infty}} [J(\Omega_0) + J(\Omega_\infty)].$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в Вычислительном центре ДВО РАН при поддержке гранта РФФИ (проект № 22-21-00579, <https://rscf.ru/project/22-21-00579/>).

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sawyer E. Weighted inequalities for two-dimensional Hardy operator // Studia Math. 1985. V. 82. № 1. P. 1–16.
2. Kokilashvili V., Meskhi A., Persson L.-E. Weighted norm inequalities for integral transforms with product kernels // New-York: Nova Science Publishers, 2009. 342 pp.
3. Meskhi A. A note on two-weight inequalities for multiple Hardy-type operators // J. Funct. Spaces Appl. 2005. V. 3. № 3. P. 223–237.
4. Persson L.-E., Ushakova E.P. Some multi-dimensional Hardy type integral inequalities // J. Math. Inequal. 2007. V. 1. № 3. 301–319.
5. Bradley J.S. Hardy inequalities with mixed norms // Canad. Math. Bull. 1978. V. 21. № 4. P. 405–408.
6. Прохоров В.Д., Степанов В.Д., Ушакова Е.П. Интегральные операторы Харди–Стеклова // Совр. пробл. матем. 2016. Т. 22. 186 с.
7. Sinnaton G., Stepanov V.D. The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // J. London Math. Soc. 1992. V. 2. № 2. P. 232–242.
8. Gogatishvili A., Kufner A., Persson L.-E., Wedestig A. An equivalence theorem for integral conditions related to Hardy’s inequality // Real Anal. Exchange. 2003/04. V. 29. № 2. P. 867–880.
9. Степанов В.Д., Шамбилова Г.Э. О двумерных билинейных неравенствах с прямоугольными операторами Харди в весовых пространствах Лебега // Труды МИАН. 2021. Т. 312. С. 251–258.
10. Wedestig A. Weighted inequalities for the Sawyer two-dimensional Hardy operator and its limiting geometric mean operator // J. Inequal. Appl. 2005. V. 4. P. 387–394.
11. Barza S., Kamińska A., Persson L.-E., Soria J. Mixed norm and multidimensional Lorentz spaces // Positivity. 2006. V. 10. № 3. P. 539–554.
12. Forzani L., Martí-Reyes F.J., Ombrosi S. Weighted inequalities for the two-dimensional one-sided Hardy–Littlewood maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. 2011. V. 363. № 4. P. 1699–1719.

13. *Kumar S.* A Hardy-type inequality in two dimensions // *Indag. Math. (N.S.)* 2009. V. 20. № 2. P. 247–260.
14. *Stepanov V.D., Ushakova E.P.* On weighted Hardy inequality with two-dimensional rectangular operator – extension of the E. Sawyer theorem // *Math. Ineq. & Appl.* 2021. V. 24. № 3. P. 617–634.
15. *Edmunds D.E., Stepanov V.D.* The measure of non-compactness and approximation numbers of certain Volterra integral operators // *Math. Ann.* 1994. V. 298. P. 41–66.
16. *Canavati J.A., Galaz-Fontes F.* Compactness of imbeddings between Banach spaces and applications to Sobolev spaces // *J. Lond. Math. Soc., II Ser.* 1990. V. 41. № 2. P. 511–525.
17. *Ando T.* On compactness of integral operators // *Indag. Math. (New Series)*. 1962. V. 24. P. 235–239.
18. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций // М.: Наука, 1966. 500 с.
19. *Пич А.* Операторные идеалы. М.: Мир, 1982. 536 с.

ON THE BOUNDEDNESS AND COMPACTNESS OF THE TWO-DIMENSIONAL RECTANGULAR HARDY OPERATOR

Corresponding member of the RAS **V. D. Stepanov^a** and **E. P. Ushakova^b**

^a *Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russian Federation*

^b *V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Criteria in terms of weight functions v and w on \mathbb{R}_+^2 are obtained for the two-dimensional rectangular integration operator to be bounded and compact from a weighted Lebesgue space $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ to $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ if $1 < p, q < \infty$. For $p < q$ the boundedness criterion significantly enhances the classical result by E. Sawyer (see Introduction) given for $p \leq q$. The case $q < p$ is also discussed.

Keywords: weighted Lebesgue space, Hardy inequality, two-dimensional rectangular integration operator, boundedness, compactness

СОБСТВЕННЫЕ СИММЕТРИИ ТРЕХМЕРНЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

© 2022 г. И. А. Тлюстангелов^{1,2,*}

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 31.05.2022 г.

После доработки 19.07.2022 г.

Принято к публикации 21.07.2022 г.

В данной работе доказываются критерии наличия у алгебраической цепной дроби собственной палиндромической симметрии в размерности 4. В качестве многомерного обобщения цепных дробей рассматриваются полиэдры Клейна.

Ключевые слова: полиэдры Клейна, алгебраические решетки

DOI: 10.31857/S2686954322050174

1. ВВЕДЕНИЕ

Обыкновенная цепная дробь действительного числа имеет весьма изящную геометрическую интерпретацию, позволяющую перейти от классического случая к многомерному (см. [1] и, например, [2–4]). Для описания такого обобщения рассмотрим l_1, \dots, l_n – одномерные подпространства пространства \mathbb{R}^n , линейная оболочка которых совпадает со всем \mathbb{R}^n . Гиперпространства, натянутые на всевозможные $(n - 1)$ -наборы из этих подпространств, разбивают \mathbb{R}^n на 2^n симплицальных конусов. Будем обозначать множество этих конусов через

$$\mathcal{C}(l_1, \dots, l_n).$$

Симплицальный конус с вершиной в начале координат $\mathbf{0}$ будем называть *иррациональным*, если линейная оболочка любой его гиперграни не содержит целых точек, кроме начала координат $\mathbf{0}$.

Определение 1. Пусть C – иррациональный конус, $C \in \mathcal{C}(l_1, \dots, l_n)$. Выпуклая оболочка $\mathcal{H}(C) = \text{conv}(C \cap \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$ и его граница $\partial(\mathcal{H}(C))$ называются соответственно *полиэдром Клейна* и *парусом Клейна*, соответствующими конусу C . Объединение же всех 2^n парусов

$$\text{CF}(l_1, \dots, l_n) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}(l_1, \dots, l_n)} \partial(\mathcal{H}(C))$$

называется $(n - 1)$ -мерной цепной дробью.

Особенный интерес представляет так называемый алгебраический случай. Напомним, что оператор из $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ с вещественными собственными значениями, характеристический многочлен которого неприводим над \mathbb{Q} , называется *гиперболическим*. Справедливо следующее утверждение о связи гиперболических операторов с алгебраическими числами в случае произвольного n (подробности см., например, в [5]).

Предложение 1. Числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ образуют базис некоторого вполне вещественного расширения K поля \mathbb{Q} тогда и только тогда, когда вектор $(1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ является собственным для некоторого гиперболического оператора $A \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$. При этом вектора $(1, \sigma_i(\alpha_1), \dots, \sigma_i(\alpha_{n-1}))$, $i = 1, \dots, n$, где $\sigma_1 (= \text{id}), \sigma_2, \dots, \sigma_n$ – все вложения K в \mathbb{R} , образуют собственный базис оператора A .

В случае $n = 2$ предложение 1 позволяет геометрически проинтерпретировать классическую теорему Лагранжа о периодичности обыкновенной цепной дроби. Геометрически теорема Лагранжа означает, что последовательность целочисленных длин и углов паруса одномерной цепной дроби $\text{CF}(l_1, l_2)$ периодична тогда и только тогда, когда направления l_1 и l_2 являются собственными для некоторого $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ оператора с различными вещественными собственными значениями (см., например [6]).

Определение 2. Пусть l_1, \dots, l_n – собственные подпространства некоторого гиперболического оператора $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$. Тогда $(n - 1)$ -мерная цепная дробь $\text{CF}(l_1, \dots, l_n)$ называется *алгебраической*. Мы будем также говорить, что эта дробь *ассоцииро-*

¹ Механико-математический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*E-mail: ibragim-tls@yandex.ru

вана с оператором A и писать $CF(A) = CF(l_1, \dots, l_n)$. Множество всех $(n-1)$ -мерных алгебраических цепных дробей будем обозначать \mathfrak{A}_{n-1} .

Будем называть *группой симметрий* алгебраической цепной дроби $CF(A) = CF(l_1, \dots, l_n)$ множество

$$\begin{aligned} \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(CF(A)) = \\ = \{G \in \text{GL}_n(\mathbb{Z}) \mid G(CF(A)) = CF(A)\}. \end{aligned}$$

Из соображений непрерывности ясно, что для каждого $G \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(CF(A))$ однозначно определена перестановка σ_G , такая что

$$G(l_i) = l_{\sigma_G(i)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

И обратно, если для $G \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ существует такая перестановка σ_G , что выполняются соотношения (1.1), то $G \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(CF(A))$.

Благодаря теореме Дирихле об алгебраических единицах существует изоморфная \mathbb{Z}^{n-1} подгруппа группы $\text{Sym}_{\mathbb{Z}}(CF(A))$ (см., например, [5]). Относительно действия этой подгруппы на любом из 2^n парусов возникает фундаментальная область, которую можно отождествить с $(n-1)$ -мерным тором (см. [2]). Для каждого элемента G , принадлежащего этой подгруппе, $\sigma_G = \text{id}$. Однако в $\text{Sym}_{\mathbb{Z}}(CF(A))$, вообще говоря, могут существовать такие элементы G , для которых $\sigma_G \neq \text{id}$.

О п р е д е л е н и е 3. Оператор $G \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(CF(A))$ такой, что $\sigma_G = \text{id}$, будем называть *симметрией Дирихле* дроби $CF(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$.

О п р е д е л е н и е 4. Оператор $G \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(CF(A))$, не являющийся симметрией Дирихле, будем называть *палиндромической симметрией* дроби $CF(A)$. Если множество палиндромических симметрий цепной дроби непусто, то такую цепную дробь будем называть *палиндромической*.

О п р е д е л е н и е 5. Палиндромическая симметрия $G \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(CF(A))$ называется *собственной*, если у оператора G существует неподвижная точка на некотором парусе цепной дроби $CF(A)$. Палиндромическая симметрия $G \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(CF(A))$, не являющаяся собственной, называется *несобственной*.

В данной работе нас будут интересовать собственные палиндромические симметрии $CF(A)$ в размерности $n = 4$. А именно, мы докажем критерий наличия такого рода симметрий у цепной дроби $CF(A)$. Для размерностей $n = 2$ и $n = 3$ аналогичные критерии уже существуют.

Для $n = 2$, т.е. для одномерных цепных дробей, палиндромичность напрямую связана с симметричностью периодов обыкновенных цепных дробей квадратичных иррациональностей. Критерий

симметричности периода цепной дроби квадратичной иррациональности восходит к результатам Галуа [7], Лежандра [8], Пερрона [9] и Крайтчика [10]. В работе [6] дано геометрическое доказательство этого критерия. Аналог этого критерия для $n = 3$ был получен в работе [5]. Упомянутые критерии выглядят следующим образом:

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть $CF(l_1, l_2) \in \mathfrak{A}_1$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha)$. Тогда $CF(l_1, l_2)$ имеет собственную симметрию в том и только в том случае, если существует такое алгебраическое число ω степени 2 со своим сопряженным ω' , что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(a) (1, \alpha) \sim (1, \omega): \text{Tr}(\omega) = \omega + \omega' = 0;$$

$$(б) (1, \alpha) \sim (1, \omega): \text{Tr}(\omega) = \omega + \omega' = 1.$$

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть $CF(l_1, l_2, l_3) \in \mathfrak{A}_2$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha, \beta)$. Тогда $CF(l_1, l_2, l_3)$ имеет собственную симметрию в том и только в том случае, если существует такое алгебраическое число ω степени 3 со своими сопряженными ω' и ω'' , что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(a) (1, \alpha, \beta) \sim (1, \omega, \omega'): \text{Tr}(\omega) = \omega + \omega' + \omega'' = 0;$$

$$(б) (1, \alpha, \beta) \sim (1, \omega, \omega'): \text{Tr}(\omega) = \omega + \omega' + \omega'' = 1.$$

При выполнении утверждения (а) или (б) кубическое расширение $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ будет нормальным.

В этих формулировках $v_1 \sim v_2$ для векторов из \mathbb{R}^n означает существование такого оператора $X \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ и такого ненулевого $\mu \in \mathbb{R}$, что $Xv_1 = \mu v_2$.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Основным результатом данной работы является следующая

Т е о р е м а 1. Пусть $CF(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и пусть подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha, \beta, \gamma)$. Пусть $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ и $\sigma_1 (= \text{id}), \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ – все вложения поля K в \mathbb{R} (см. предложение 1). Тогда $CF(l_1, l_2, l_3, l_4)$ имеет собственную палиндромическую симметрию в том и только в том случае, если (с точностью до перестановки индексов) выполняется

$$\sigma_3(K) = K, \quad \sigma_4(K) = \sigma_2(K),$$

$$\sigma_3^2 = \sigma_1 = \text{id}, \quad \sigma_4 = \sigma_2\sigma_3$$

и существуют такие алгебраические числа ω и ψ степени 4, принадлежащие полю K , что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(1) (1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \omega'): \psi + \psi' = -(\omega + \omega');$$

$$(2) (1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \omega'): \psi + \psi' = 1 - (\omega + \omega');$$

$$(3) (1, \alpha, \beta, \gamma) \sim (1, \omega, \psi, \omega'): \psi + \psi' = 2 - (\omega + \omega');$$

$$(4) (1, \alpha, \beta, \gamma) \sim \left(1, \omega, \psi, \frac{\omega + \omega'}{2}\right): \psi + \psi' = -(\omega + \omega');$$

$$(5) (1, \alpha, \beta, \gamma) \sim \left(1, \omega, \psi, \frac{\omega + \omega'}{2}\right): \psi + \psi' = 2 - (\omega + \omega');$$

$$(6) (1, \alpha, \beta, \gamma) \sim \left(1, \omega, \psi, \frac{\omega + \omega' + 1}{2}\right): \psi + \psi' = -(\omega + \omega');$$

$$(7) (1, \alpha, \beta, \gamma) \sim \left(1, \omega, \psi, \frac{\omega + \omega' + 1}{2}\right): \psi + \psi' = 2 - (\omega + \omega');$$

$$(8) (1, \alpha, \beta, \gamma) \sim \left(1, \omega, \psi, \frac{\omega + \omega'}{2}\right): \psi + \psi' = 1 - \frac{\omega + \omega'}{2};$$

$$(9) (1, \alpha, \beta, \gamma) \sim \left(1, \omega, \psi, \frac{\omega + \omega'}{2}\right): \psi + \psi' = 2 - \frac{\omega + \omega'}{2};$$

$$(10) (1, \alpha, \beta, \gamma) \sim \left(1, \omega, \psi, \frac{\omega' - \omega}{4}\right): \psi + \psi' = 2 - \frac{\omega + \omega'}{2},$$

где $\omega' = \sigma_3(\omega)$, $\psi' = \sigma_3(\psi)$.

В работе [11] исследуются *циклические* симметрии, т.е. такие симметрии $CF(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$, которые циклически переставляют направления l_1, l_2, l_3, l_4 . А именно, в этой работе доказывается, что цепная дробь $CF(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ имеет собственную циклическую симметрию тогда и только тогда, когда K – циклическое расширение Галуа, $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \langle \sigma_2 \rangle$ и выполняется один из пунктов (1)–(7) теоремы 1 для $\psi = \sigma_2(\omega)$. Следующее утверждение показывает, что не всякая палиндромичная цепная дробь обладает собственными циклическими симметриями:

Предложение 4. Существуют такие вещественные числа α, β, γ , что подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha, \beta, \gamma)$, вполне вещественное расширение $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ поля \mathbb{Q} не является нормальным и $CF(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ – палиндромичная цепная дробь, не обладающая собственными циклическими симметриями.

Любопытно, что критерий наличия собственных циклических симметрий не следует непосредственно из теоремы 1. В связи с этим возникает естественный

Вопрос. Верно ли, что существует такая палиндромичная алгебраическая цепная дробь $CF(l_1, l_2, l_3, l_4)$, для которой поле K является циклическим расширением Галуа и у которой не существует собственных циклических палиндромических симметрий?

Оставшаяся часть статьи имеет следующую структуру: в параграфе 3 мы анализируем то, как у собственных симметрий трехмерных цепных дробей устроены собственные подпространства и перестановки из соотношения (1.1); в параграфе 4

мы изучаем геометрию трехмерных цепных дробей, обладающих собственными симметриями; в параграфе 5 мы устанавливаем связь между определенными классами цепных дробей и матрицами их собственных симметрий; параграф 6 посвящен доказательству теоремы 1; наконец, в параграфе 7 мы доказываем предложение 4.

3. СОБСТВЕННЫЕ СИММЕТРИИ И СОБСТВЕННЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Если задана дробь $CF(l_1, \dots, l_n) = CF(A) \in \mathfrak{A}_{n-1}$, будем считать, что подпространство l_1 порождается вектором $\mathbf{l}_1 = (1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ (данное допущение корректно в силу предложения 1). Тогда из предложения 1 следует, что числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ над \mathbb{Q} и каждое l_i порождается вектором $\mathbf{l}_i = (1, \sigma_i(\alpha_1), \dots, \sigma_i(\alpha_{n-1}))$, где $\sigma_1 (= \text{id}), \sigma_2, \dots, \sigma_n$ – все вложения K в \mathbb{R} . Заметим, что верна следующая

Лемма 3.1. Пусть $G \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(CF(A))$ и $CF(A) = CF(l_1, \dots, l_n)$. Пусть $G \neq \pm I_n$ и $G(\mathbf{l}_1) = \lambda \mathbf{l}_1$. Тогда $\lambda \notin \mathbb{Q}$.

Доказательство. Предположим, что $\lambda \in \mathbb{Q}$. Поскольку $G \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ и $G \neq \pm I_n$, то $\text{rank}(G - \lambda I_n) > 0$. Так как $(G - \lambda I_n)(\mathbf{l}_1) = \mathbf{0}$, то какие-то числа из набора $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ выражаются через оставшиеся числа этого набора в виде некоторой линейной комбинации с коэффициентами из \mathbb{Q} . В силу предложения 1 получаем противоречие. \square

Отныне будем считать, что $n = 4$, т.е. будем рассматривать трехмерные цепные дроби. Напомним также, что для каждого $G \in \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(CF(A))$ соотношением (1.1) определена перестановка σ_G .

Лемма 3.2. Пусть G – палиндромическая симметрия $CF(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$, ассоциированной с (гиперболическим) оператором A . Тогда существует такая нумерация подпространств l_1, l_2, l_3, l_4 , что $\sigma_G = (1, 2)(3, 4)$ или $\sigma_G = (1, 2, 3, 4)$.

Доказательство. Случай $\sigma_G = \text{id}$ невозможен в силу того, что оператор G не является симметрией Дирихле $CF(A)$.

Предположим, существует такая нумерация подпространств l_1, l_2, l_3, l_4 , что $\sigma_G = (1)(2, 3, 4)$. Таким образом, существуют такие вещественные числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, что матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристический многочлен оператора G имеет вид

$$\begin{aligned} \chi_G(x) &= (x - \mu_1)(x^3 - \mu_2\mu_3\mu_4) = \\ &= x^4 - \mu_1x^3 - \mu_2\mu_3\mu_4x \pm 1 \in \mathbb{Z}[x]. \end{aligned}$$

Следовательно, μ_1 – целое число, и при этом μ_1 – корень уравнения $\chi_G(x) = 0$, т.е. $\mu_1 = \pm 1$. Стало быть, l_1 – собственное подпространство оператора G , соответствующее собственному значению $\mu_1 = \pm 1$. То есть l_1 рационально, что противоречит гиперболичности оператора A .

Предположим, существует такая нумерация подпространств l_1, l_2, l_3, l_4 , что $\sigma_G = (1)(2)(3, 4)$. Таким образом, существуют такие вещественные числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, что матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & 0 & \mu_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристический многочлен оператора G , коэффициенты которого целочисленны, имеет вид

$$\begin{aligned} (x - \mu_1)(x - \mu_2)(x^2 - \mu_3\mu_4) &= \\ = x^4 - (\mu_1 + \mu_2)x^3 + (\mu_1\mu_2 - \mu_3\mu_4)x^2 + \\ + (\mu_1 + \mu_2)\mu_3\mu_4x - \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4. \end{aligned}$$

Так как $\mu_1 + \mu_2 \in \mathbb{Z}$, то $\mu_3\mu_4 \in \mathbb{Q}$. Тогда существуют такие взаимно-простые целые числа $p \geq 1$ и $q \geq 1$, что $|\mu_3\mu_4| = \frac{p}{q}$, $|\mu_1\mu_2| = \frac{q}{p}$, а значит

$$|\mu_1\mu_2 - \mu_3\mu_4| = \frac{\pm p^2 \pm q^2}{pq}.$$

Итак, p^2 делится на q и q^2 делится на p , т.е. $p = q = 1$ и $\mu_3\mu_4 = \pm 1$. Таким образом, матрица оператора G^2 в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Из леммы 3.1 следует, что $G^2 = I_4$, т.е. $\mu_1 = \pm 1$. Вновь применяя лемму 3.1, получаем, что $G = \pm I_4$, чего не может быть.

Таким образом, существует такая нумерация подпространств l_1, l_2, l_3, l_4 , что $\sigma_G = (1, 2)(3, 4)$ или $\sigma_G = (1, 2, 3, 4)$. \square

Следствие 1. Пусть G – палиндромическая симметрия $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Пусть $G' = G^2$, если $\text{ord}(\sigma_G) = 4$, и $G' = G$, если $\text{ord}(\sigma_G) = 2$. Тогда G' – палиндромическая симметрия $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{G'}) = 2$.

Пусть G – палиндромическая симметрия $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, l_4 , в силу леммы 3.2 можно рассмотреть такие вещественные числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, что матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

или вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Пусть G – палиндромическая симметрия $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ имеет вид (3.1). В работе [11] доказывалось, что G является собственной симметрией $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ тогда и только тогда, когда $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1$ (см. следствие 1 в [11]). Для палиндромических симметрий вида (3.2) справедливо аналогичное утверждение:

Лемма 3.3. Пусть G – палиндромическая симметрия $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и матрица оператора G в базисе $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$ имеет вид (3.2). Тогда G является собственной симметрией дроби $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ в том и только том случае, если $\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = 1$.

Доказательство. Пусть G является собственной симметрией цепной дроби $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Тогда существуют такие числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ из множества $\{-1, 1\}$, что

$G(\varepsilon_1\mathbf{l}_1, \varepsilon_2\mathbf{l}_2, \varepsilon_3\mathbf{l}_3, \varepsilon_4\mathbf{l}_4) = (\mu_3\varepsilon_1\mathbf{l}_3, \mu_4\varepsilon_2\mathbf{l}_4, \mu_1\varepsilon_3\mathbf{l}_1, \mu_2\varepsilon_4\mathbf{l}_2)$, и выполняются неравенства

$$\mu_1 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} > 0, \quad \mu_2 \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_2} > 0, \quad \mu_3 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} > 0, \quad \mu_4 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4} > 0.$$

Стало быть, $\mu_1\mu_3 > 0$ и $\mu_2\mu_4 > 0$. Так как у оператора G существует неподвижная точка на некотором парусе, то у оператора G существует одномерное собственное подпространство, соответствующее собственному значению 1. Теперь, поскольку характеристический многочлен оператора G имеет вид $(x^2 - \mu_1\mu_3)(x^2 - \mu_2\mu_4)$, то $\mu_1\mu_3 = 1$ или $\mu_2\mu_4 = 1$. Тогда $\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = 1$.

Если $\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = 1$, то, опять же, характеристический многочлен оператора G имеет вид $x^4 - 2x^2 + 1$. Стало быть, у оператора G существует целочисленный собственный вектор, соответствующий собственному значению 1. Этот вектор лежит внутри некоторого конуса $C \in \mathcal{C}(l_1, l_2, l_3, l_4)$, поскольку цепная дробь $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ является алгебраической. \square

Следствие 2. Пусть G – палиндромическая симметрия $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Тогда G является собственной симметрией в том и только том случае, если G' (см. следствие 1) является собственной симметрией.

Доказательство. Если G является собственной симметрией $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$, то, очевидно, оператор G' также является собственной симметрией цепной дроби $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$.

Обратно, предположим G' – собственная симметрия $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Если $\text{ord}(\sigma_G) = 4$, то, изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, l_4 , можно считать, что матрица оператора G в базисе $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_4$ имеет вид (3.2). Тогда матрица оператора $G' = G^2$ в базисе $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_1\mu_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2\mu_1 \\ \mu_3\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_4\mu_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стало быть, в силу леммы 3.3 $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 1$, а значит G – собственная симметрия цепной дроби $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ (см. следствие 1 в [11]). \square

Лемма 3.4. Пусть G – собственная симметрия $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и $\text{ord}(\sigma_G) = 2$. Тогда существуют такие одномерные рациональные подпространства l_+^1, l_+^2, l_-^1 и l_-^2 , что $Gl_+^1 = l_+^1$, $Gl_+^2 = l_+^2$, $Gl_-^1 = l_-^1$, $Gl_-^2 = l_-^2$ и $l_+^1 + l_+^2 + l_-^1 + l_-^2 = \mathbb{R}^4$. При этом подпространства l_+^1 и l_+^2 соответствуют собственному значению 1, а подпространства l_-^1 и l_-^2 соответствуют собственному значению -1 .

Доказательство. Изменив при необходимости нумерацию подпространств l_1, l_2, l_3, l_4 , в силу леммы 3.3 можно считать, что существуют

такие вещественные числа μ_1 и μ_2 , что матрица оператора G в базисе $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ \frac{1}{\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\chi_G(x) = (x-1)^2(x+1)^2$, то у оператора G есть двумерное инвариантное подпространство L_+ , соответствующее собственному значению 1, и двумерное инвариантное подпространство L_- , соответствующее собственному значению -1 . Покажем рациональность подпространств L_+ и L_- , из чего будет следовать утверждение леммы.

Поскольку подпространство L_+ совпадает с решением системы линейных уравнений

$$(G - I_4)\mathbf{x}^\top = \mathbf{0},$$

то фундаментальная система решений данной системы линейных уравнений имеет размерность 2. Рассмотрев в качестве значений свободных переменных наборы $(0, 1)$ и $(1, 0)$, мы определим два линейно-независимых рациональных решения данной системы, из чего следует рациональность L_+ . Рациональность подпространства L_- доказывается аналогичным способом. \square

4. ГЕОМЕТРИЯ СОБСТВЕННЫХ СИММЕТРИЙ

Лемма 4.1. Пусть G – собственная симметрия дроби $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$. Пусть $F = G'$ (см. следствие 1) – собственная симметрия $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ (см. следствие 2). Тогда существуют $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4 \in \mathbb{Z}^4$, такие что

$$\begin{aligned} F(\mathbf{z}_1) &= \mathbf{z}_3, & F(\mathbf{z}_2) &= \mathbf{z}_4, \\ F(\mathbf{z}_3) &= \mathbf{z}_1, & F(\mathbf{z}_4) &= \mathbf{z}_2 \end{aligned}$$

и выполняется хотя бы одно из следующих одиннадцати утверждений:

- (1) вектора $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \frac{1}{4}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4)$ образуют базис решетки \mathbb{Z}^4 ;
- (2) вектора $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$ образуют базис решетки \mathbb{Z}^4 ;
- (3) вектора $\mathbf{z}_1, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2), \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3), \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_4)$ образуют базис решетки \mathbb{Z}^4 ;

(4) вектора $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3), \frac{1}{4}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4)$ образуют базис решетки \mathbb{Z}^4 ;

(5) вектора $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3), \frac{1}{2}(\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_4)$ образуют базис решетки \mathbb{Z}^4 ;

(6) вектора $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_2)$ образуют базис решетки \mathbb{Z}^4 ;

(7) вектора $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) + \frac{1}{4}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2)$ образуют базис решетки \mathbb{Z}^4 ;

(8) вектора $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_4)$ образуют базис решетки \mathbb{Z}^4 ;

(9) вектора $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3), \frac{1}{4}\mathbf{z}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{z}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{z}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{z}_4$ образуют базис решетки \mathbb{Z}^4 ;

(10) вектора $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3), \frac{1}{2}\mathbf{z}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{z}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{z}_4$ образуют базис решетки \mathbb{Z}^4 ;

(11) вектора $\mathbf{z}_1, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2), \mathbf{z}_3, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_2)$ образуют базис решетки \mathbb{Z}^4 .

Доказательство. Будем называть плоскость *рациональной*, если множество содержащихся в нем целых точек является (аффинной) решеткой ранга, равного размерности этой плоскости.

Рассмотрим для собственной симметрии F подпространства l_+^1, l_+^2, l_-^1 и l_-^2 из леммы 3.4 и положим $S = l_+^2 + l_-^1 + l_-^2$. Обозначим через S_1 ближайшую к S рациональную гиперплоскость, параллельную S и не совпадающую с S (любую из двух). Тогда $G(S_1) = S_1$. Также обозначим через \mathbf{p} точку пересечения гиперплоскости S_1 и l_+^1 , а через l и π прямую и плоскость, проходящие через точку \mathbf{p} и параллельные l_+^2 и $L_- = l_-^1 + l_-^2$ соответственно. При этом $F(l) = l$, $F(\pi) = \pi$ и $F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$.

Плоскость π разделяет гиперплоскость S_1 на два множества S_1^+ и S_1^- . Пусть Q и R – рациональные плоскости, ближайšie к π , параллельные π и не совпадающие с π , принадлежащие множествам S_1^+ и S_1^- соответственно. Отметим, что, вообще говоря, расстояния от π до Q и от π до R не обязательно равны. Положим $\mathbf{p}^Q = Q \cap l$ и $\mathbf{p}^R = R \cap l$.

Пусть $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ – такая пара точек решетки \mathbb{Z}^4 , что $\mathbf{z}_1 \in Q$, $\mathbf{z}_2 \in R$, вектора $\mathbf{z}_1 - \mathbf{p}^Q$ и $\mathbf{z}_2 - \mathbf{p}^R$ неколлинеарны. Тогда можно построить точки

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_3 &= F(\mathbf{z}_1) \in \mathbb{Z}^4 \cap Q, & \mathbf{z}_4 &= F(\mathbf{z}_2) \in \mathbb{Z}^4 \cap R, \\ \mathbf{z}_3^R &= \mathbf{z}_1 + (\mathbf{p}^R - \mathbf{p}^Q), & \mathbf{z}_3^Q &= \mathbf{z}_3 + (\mathbf{p}^R - \mathbf{p}^Q), \\ \mathbf{z}_2^Q &= \mathbf{z}_2 + (\mathbf{p}^Q - \mathbf{p}^R), & \mathbf{z}_4^Q &= \mathbf{z}_4 + (\mathbf{p}^Q - \mathbf{p}^R), \\ \mathbf{z}_1^\pi &= \mathbf{z}_1 + (\mathbf{p} - \mathbf{p}^Q), & \mathbf{z}_3^\pi &= \mathbf{z}_3 + (\mathbf{p} - \mathbf{p}^Q), \\ \mathbf{z}_2^\pi &= \mathbf{z}_2 + (\mathbf{p} - \mathbf{p}^R), & \mathbf{z}_4^\pi &= \mathbf{z}_4 + (\mathbf{p} - \mathbf{p}^R). \end{aligned}$$

Рассмотренные точки определяют тройку параллелограммов $(\Delta^\pi, \Delta^Q, \Delta^R)$, где

$$\Delta^\pi = \text{conv}(\mathbf{z}_1^\pi, \mathbf{z}_2^\pi, \mathbf{z}_3^\pi, \mathbf{z}_4^\pi) \subset \pi,$$

$$\Delta^Q = \text{conv}(\mathbf{z}_1^Q, \mathbf{z}_2^Q, \mathbf{z}_3^Q, \mathbf{z}_4^Q) \subset Q,$$

$$\Delta^R = \text{conv}(\mathbf{z}_1^R, \mathbf{z}_2^R, \mathbf{z}_3^R, \mathbf{z}_4^R) \subset R.$$

При помощи метода спуска можно построить такую пару $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$, что (см. рис. 1)

$$\Delta^Q \cap \mathbb{Z}^4 \subseteq \left\{ \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2^Q, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4^Q, \mathbf{p}^Q, \frac{\mathbf{z}_2^Q + \mathbf{p}^Q}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^Q + \mathbf{p}^Q}{2} \right\},$$

$$\Delta^R \cap \mathbb{Z}^4 \subseteq \left\{ \mathbf{z}_1^R, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3^R, \mathbf{z}_4, \mathbf{p}^R, \frac{\mathbf{z}_1^R + \mathbf{p}^R}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^R + \mathbf{p}^R}{2} \right\},$$

и $\Delta^\pi \cap \mathbb{Z}^4$ является подмножеством множества

$$\left\{ \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2^\pi, \mathbf{z}_3^\pi, \mathbf{z}_4^\pi, \mathbf{p}, \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{z}_2^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_2^\pi + \mathbf{z}_3^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{z}_4^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{z}_1^\pi}{2}, \frac{\mathbf{z}_1^\pi + \mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{z}_2^\pi + \mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{z}_3^\pi + \mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{z}_4^\pi + \mathbf{p}}{2} \right\}.$$

Аккуратно перебирая возможные расположения точек решетки \mathbb{Z}^4 в тройке параллелограммов $(\Delta^\pi, \Delta^Q, \Delta^R)$, мы попадаем в одну из одиннадцати ситуаций, соответствующей одному из утверждений (1)–(11).

5. МАТРИЦЫ СОБСТВЕННЫХ СИММЕТРИЙ

Напомним, что если задана дробь $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) = \text{CF}(A) \in \mathfrak{A}_3$, будем считать, что подпространство l_1 порождается вектором $\mathbf{l}_1 = (1, \alpha, \beta, \gamma)$. Тогда из предложения 1 следует, что числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ над \mathbb{Q} и каждое l_i порождается вектором $\mathbf{l}_i = (1, \sigma_i(\alpha), \sigma_i(\beta), \sigma_i(\gamma))$, где $\sigma_1 (= \text{id}), \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ – все вложения K в \mathbb{R} . То есть, если через $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4)$ обозначить матрицу со столбцами $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$, получим

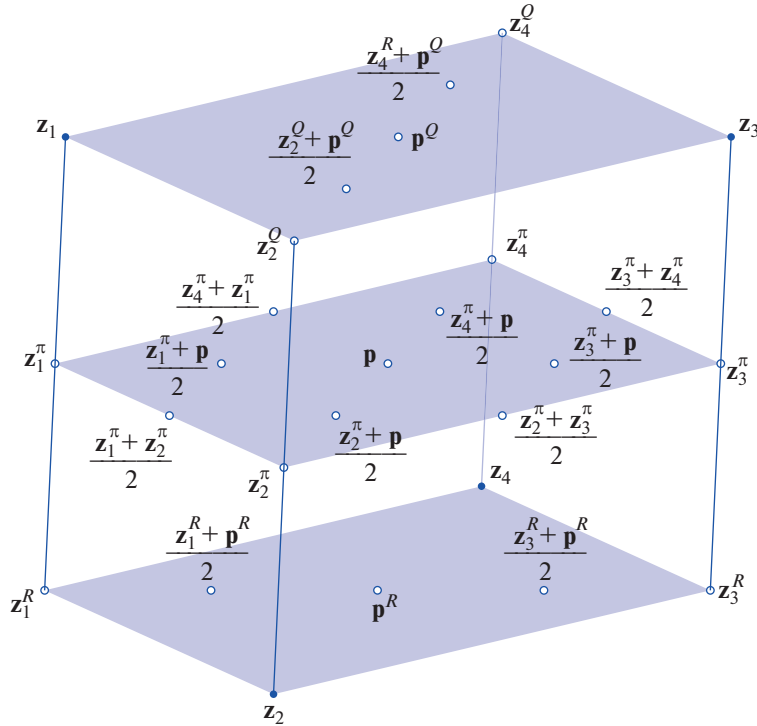


Рис. 1. Возможное расположение точек решетки \mathbb{Z}^4 в параллелограммах из построенной тройки $(\Delta^\pi, \Delta^Q, \Delta^R)$.

$$(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \sigma_2(\alpha) & \sigma_3(\alpha) & \sigma_4(\alpha) \\ \beta & \sigma_2(\beta) & \sigma_3(\beta) & \sigma_4(\beta) \\ \gamma & \sigma_2(\gamma) & \sigma_3(\gamma) & \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Мы будем обозначать через $\widetilde{\mathfrak{A}}_3$ множество всех трехмерных алгебраических цепных дробей, для которых

$$\sigma_3(K) = K, \quad \sigma_4(K) = \sigma_2(K), \\ \sigma_3^2 = \text{id}, \quad \sigma_4 = \sigma_2\sigma_3.$$

Для каждого $i = 1, 2, \dots, 10$ определим \mathbf{CF}_i как класс дробей из $\widetilde{\mathfrak{A}}_3$, удовлетворяющих паре соотношений \mathfrak{R}_i , где

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1: \beta + \sigma_3(\beta) &= -(\alpha + \sigma_3(\alpha)), \gamma = \sigma_3(\alpha); \\ \mathfrak{R}_2: \beta + \sigma_3(\beta) &= 1 - (\alpha + \sigma_3(\alpha)), \gamma = \sigma_3(\alpha); \\ \mathfrak{R}_3: \beta + \sigma_3(\beta) &= 2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha)), \gamma = \sigma_3(\alpha); \\ \mathfrak{R}_4: \beta + \sigma_3(\beta) &= -(\alpha + \sigma_3(\alpha)), \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}; \\ \mathfrak{R}_5: \beta + \sigma_3(\beta) &= 2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha)), \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_6: \beta + \sigma_3(\beta) &= -(\alpha + \sigma_3(\alpha)), \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha) + 1}{2}; \\ \mathfrak{R}_7: \beta + \sigma_3(\beta) &= 2 - (\alpha + \sigma_3(\alpha)), \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha) + 1}{2}; \\ \mathfrak{R}_8: \beta + \sigma_3(\beta) &= 1 - \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}, \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}; \\ \mathfrak{R}_9: \beta + \sigma_3(\beta) &= 2 - \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}, \gamma = \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}; \\ \mathfrak{R}_{10}: \beta + \sigma_3(\beta) &= 2 - \frac{\alpha + \sigma_3(\alpha)}{2}, \gamma = \frac{\sigma_3(\alpha) - \alpha}{4}. \end{aligned}$$

Покажем, что все дроби из классов \mathbf{CF}_i , палиндромичны для каждого $i = 1, 2, \dots, 10$. Положим G_1, G_2, \dots, G_{10} равными соответственно матрицам

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 5.1. Пусть $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ и $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Тогда цепная дробь $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ принадлежит классу \mathbf{CF}_i в том и только в том случае, если G_i – ее собственная симметрия и $\text{ord}(\sigma_{G_i}) = 2$.

Доказательство. Покажем, что $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ принадлежит классу \mathbf{CF}_1 в том и только в том случае, если G_1 – ее собственная симметрия и $\text{ord}(\sigma_{G_1}) = 2$.

В силу леммы 3.3 оператор $G \in \text{GL}_4(\mathbb{Z})$ является собственной симметрией дроби $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_G) = 2$ тогда и только тогда, когда с точностью до перестановки индексов существуют такие действительные числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, что $G(l_1, l_2, l_3, l_4) = (\mu_3 l_3, \mu_4 l_4, \mu_1 l_1, \mu_2 l_2)$ и $\mu_1 \mu_3 = \mu_2 \mu_4 = 1$.

Пусть $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}_1$. Заметим, что $\sigma_2 = \sigma_2 \sigma_3^2 = \sigma_4 \sigma_3$, $\sigma_2(\gamma) = \sigma_2 \sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3(\gamma) = \sigma_3^2(\alpha) = \alpha$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_4 \sigma_3(\alpha) = \sigma_2(\alpha)$, $\sigma_2(\beta) + \sigma_2 \sigma_3(\beta) = \sigma_2(\beta + \sigma_3(\beta)) = \sigma_2(-(\alpha + \sigma_3(\alpha))) = -(\sigma_2(\alpha) + \sigma_2 \sigma_3(\alpha))$ и $\sigma_4(\beta) = \sigma_2 \sigma_3(\beta)$. Тогда

$$G_1 l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ -\beta - (\alpha + \sigma_3(\alpha)) \\ \alpha \end{pmatrix},$$

$$G_1 l_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2 \sigma_3(\alpha) \\ -\sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2 \sigma_3(\alpha)) \\ \sigma_2(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$G_1 l_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -\sigma_3(\beta) - (\sigma_3(\alpha) + \alpha) \\ \sigma_3(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$G_1 l_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\alpha) \\ -\sigma_2 \sigma_3(\beta) - (\sigma_2 \sigma_3(\alpha) + \sigma_2(\alpha)) \\ \sigma_2 \sigma_3(\alpha) \end{pmatrix},$$

то есть $G_1(l_1, l_2, l_3, l_4) = (l_3, l_4, l_1, l_2)$. Следовательно, G_1 – собственная симметрия $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{G_1}) = 2$. Обратно, предположим, G_1 – собственная симметрия $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ и $\text{ord}(\sigma_{G_1}) = 2$. Тогда существует μ_3 такое, что с точностью до перестановки индексов

$$G_1 l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ -\beta - (\alpha + \gamma) \\ \alpha \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_3(\alpha) \\ \sigma_3(\beta) \\ \sigma_3(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_3 = 1$, $\gamma = \sigma_3(\alpha)$, $\sigma_3^2(\alpha) = \sigma_3(\gamma) = \alpha$, $\sigma_3^2(\gamma) = \sigma_3(\alpha) = \gamma$, $\beta + \sigma_3(\beta) = -(\alpha + \sigma_3(\alpha))$, $\sigma_3^2(\beta) = -\sigma_3(\beta) - (\sigma_3(\alpha) + \sigma_3^2(\alpha)) = -\sigma_3(\beta) - (\alpha + \sigma_3(\alpha)) = -\beta$. Существует μ_4 такое, что

$$G_1 l_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2(\gamma) \\ -\sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2(\gamma)) \\ \sigma_2(\alpha) \end{pmatrix} = \mu_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_4(\alpha) \\ \sigma_4(\beta) \\ \sigma_4(\gamma) \end{pmatrix},$$

откуда $\mu_4 = 1$, $\sigma_4(\alpha) = \sigma_2(\gamma) = \sigma_2 \sigma_3(\alpha)$, $\sigma_4(\gamma) = \sigma_2(\alpha) = \sigma_2 \sigma_3(\gamma)$, $\sigma_4(\beta) = -\sigma_2(\beta) - (\sigma_2(\alpha) + \sigma_2(\gamma)) = \sigma_2(-\beta - (\alpha + \gamma)) = \sigma_2 \sigma_3(\beta)$. Следовательно, $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbf{CF}_1$, так как числа $1, \alpha, \beta, \gamma$ образуют базис поля $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Для $i = 2, \dots, 10$ рассуждения аналогичны. \square

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Обозначим для каждого $i = 1, \dots, 10$ через $\overline{\mathbf{CF}}_i$ образ \mathbf{CF}_i при действии группы $\text{GL}_4(\mathbb{Z})$:

$$\overline{\mathbf{CF}}_i = \{\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3 \mid \exists X \in \text{GL}_4(\mathbb{Z}) : X(\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \mathbf{CF}_i\}.$$

Лемма 6.1. Для дроби $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ выполняется условие (i) теоремы 1 тогда и только тогда, когда $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ принадлежит классу $\overline{\mathbf{CF}}_i$, где $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

Доказательство. Для любого $X \in \text{GL}_4(\mathbb{Z})$ гиперболичность оператора $A \in \text{GL}_4(\mathbb{Z})$ равносильна гиперболичности оператора XAX^{-1} . При этом собственные подпространства гиперболического оператора однозначно восстанавливаются по любому его собственному вектору. Остается воспользоваться определением эквивалентности из параграфа 1. \square

Теорему 1 при помощи леммы 6.1 можно переформулировать следующим образом: дробь $\text{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ имеет собственную симметрию G

тогда и только тогда, когда она принадлежит одному из классов $\overline{\mathbf{CF}}_i$, где $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

Доказательство теоремы 1. Если $\mathbf{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ принадлежит какому-то $\overline{\mathbf{CF}}_i$, то по лемме 5.1 она имеет собственную симметрию G , ибо действие оператора из $\mathbf{GL}_4(\mathbb{Z})$ сохраняет свойство существования у алгебраической цепной дроби собственной симметрии.

Обратно, пусть дробь $\mathbf{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$ имеет собственную симметрию G . Положим $F = G'$ и рассмотрим точки $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$ из леммы 4.1. Обозначим также через $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ стандартный базис \mathbb{R}^4 . Для точек $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$ выполняется хотя бы одно из утверждений (1)–(11) леммы 4.1.

Пусть выполняется утверждение (1) леммы 4.1. Рассмотрим такой оператор $X_1 \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$\begin{aligned} X_1 \left(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \frac{1}{4}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4) \right) &= \\ &= (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1). \end{aligned}$$

Тогда $X_1(\mathbf{z}_4) = X_1 \left(4 \cdot \frac{1}{4}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4) - \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3 \right) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ и $X_1 G X_1^{-1} = G_1$, так как по лемме 4.1

$$\begin{aligned} X_1 G X_1^{-1} (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) &= \\ &= (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4). \end{aligned}$$

Стало быть, $X_1(\mathbf{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \mathbf{CF}_1$, т.е. $\mathbf{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\mathbf{CF}}_1$.

Рассуждения аналогичны для случаев, когда выполняется утверждение (i) леммы 4.1, где $i = 2, \dots, 10$.

Если выполняется утверждение (11) леммы 4.1, то, как и при выполнении утверждения (2) леммы 4.1, вновь $\mathbf{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\mathbf{CF}}_2$. Действительно, пусть выполняется утверждение (11) леммы 4.1. Рассмотрим такой оператор $X_{11} \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{Z})$, что

$$\begin{aligned} X_{11} \left(\mathbf{z}_1, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2), \mathbf{z}_3, \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4) \right) &= \\ &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4). \end{aligned}$$

Тогда $X_{11}(\mathbf{z}_2) = X_{11} \left(2 \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) - \mathbf{z}_1 \right) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_4$,

$X_{11}(\mathbf{z}_4) = X_{11} \left(2 \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4) - \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3 \right) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ и $X_{11} G X_{11}^{-1} = G_2$, так как по лемме 4.1

$$\begin{aligned} X_{11} G X_{11}^{-1} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) &= \\ &= (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_4). \end{aligned}$$

Стало быть, $X_{11}(\mathbf{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)) \in \mathbf{CF}_2$, т.е. $\mathbf{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \overline{\mathbf{CF}}_2$. \square

7. ПРИМЕР ПАЛИНДРОМИЧНОЙ ЦЕПНОЙ ДРОБИ, НЕ ОБЛАДАЮЩЕЙ СОБСТВЕННЫМИ ЦИКЛИЧЕСКИМИ СИММЕТРИЯМИ

Рассмотрим вещественные числа $\theta_1 = \sqrt{4 + \sqrt{2}}$ и $\theta_2 = \sqrt{4 - \sqrt{2}}$. Заметим, что $\theta_1^2 = 4 + \sqrt{2}$, а значит θ_1 является корнем уравнения $x^4 - 8x^2 + 14 = 0$. В силу критерия Эйзенштейна для $p = 2$ многочлен $f(x) = x^4 - 8x^2 + 14$ неприводим над \mathbb{Q} . Таким образом, $f(x)$ – минимальный многочлен для θ_1 и

$$f(x) = (x - \theta_1)(x - \theta_2)(x + \theta_1)(x + \theta_2).$$

Рассмотрим такие вложения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ вполне вещественного поля $\mathbb{Q}(\theta_1)$, что $\sigma_1(\theta_1) = \theta_1, \sigma_2(\theta_1) = \theta_2, \sigma_3(\theta_1) = -\theta_1, \sigma_4(\theta_1) = -\theta_2$. Пусть $K_1 = \mathbb{Q}(\theta_1), K_2 = \mathbb{Q}(\theta_2), K_3 = \mathbb{Q}(-\theta_1), K_4 = \mathbb{Q}(-\theta_2)$ – сопряженные поля над \mathbb{Q} . Ясно, что $K_1 = K_3, K_2 = K_4$ и $\sigma_3^2 = \text{id}, \sigma_4 = \sigma_2\sigma_3$.

Предположим, что $K_1 = K_2$. Поскольку $(x - \theta_1)(x + \theta_1) = x^2 - 4 - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$, то K_1 – нормальное расширение степени 2 поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. При этом $(x - \theta_2)(x + \theta_2) = x^2 - 4 + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$. Пусть $\phi \in \text{Gal}(K_1/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$. Тогда $\phi(\theta_1\theta_2) = (-\theta_1)(-\theta_2) = \theta_1\theta_2$, а значит $\theta_1\theta_2 = \sqrt{14} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, чего не может быть. Таким образом, $K_1 \neq K_2$.

Поскольку $\theta = \theta_1$ – примитивный элемент расширения K_1 , то набор чисел $1, \theta, \theta^2, \theta^3$ является базисом K_1 . Положим $\omega = \theta + \theta^2$ и $\psi = -\theta^2 + \frac{1}{2}\theta^3$. Тогда $\omega'' = \sigma_3(\omega) = -\theta + \theta^2, \psi'' = \sigma_3(\psi) = -\theta^2 - \frac{1}{2}\theta^3$.

Заметим, что $\psi + \psi'' = -2\theta^2 = -(\omega + \omega'')$ и набор чисел $1, \omega, \psi, \omega''$ является базисом K_1 , поскольку

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \psi \\ \omega'' \end{pmatrix}.$$

Теперь, полагая, что $\alpha = \omega, \beta = \psi, \gamma = \omega''$, с помощью предложения 1 можно построить алгебраическую цепную дробь $\mathbf{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathfrak{A}_3$, где подпространство l_1 порождено вектором $(1, \alpha, \beta, \gamma)$. Поскольку выполняется утверждение (1) теоремы 1, то $\mathbf{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ – палиндромичная цепная дробь. При этом, поскольку $K_1 \neq K_2$, то $\mathbf{CF}(l_1, l_2, l_3, l_4)$ не обладает циклическими симметриями (см. работу [11]).

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит О.Н. Германа за внимание к работе и полезные обсуждения результатов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00079.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Klein F.* Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung // *Nachr. Ges. Wiss., Gottingen.* 1895. V. 3. P. 357–359.
2. *Коркина Е.И.* Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры // *Тр. МИАН.* 1995. Т. 209. С. 143–166.
3. *German O.N.* Klein polyhedra and lattices with positive norm minima // *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux.* 2007. V. 19. P. 157–190.
4. *Karpenkov O.N.* *Geometry of Continued Fractions.* Springer-Verlag, Algorithms and Computation in Mathematics, 2013. V. 26.
5. *Герман О.Н., Тлюстангелов И.А.* Симметрии двумерной цепной дроби // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2021. Т. 85. № 4. С. 53–68.
6. *German O.N., Tlyustangelov I.A.* Palindromes and periodic continued fractions // *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory.* 2016. V. 6. № 2–3. P. 354–373.
7. *Galois É.* Demonstration d'un theoreme sur les fractions continues periodiques *Annales de Mathematiques.* 1828. V. 19. P. 294–301.
8. *Legendre A.M.* *Theorie des nombres.* (3 ed.) Paris 1830.
9. *Perron O.* *Die Lehre von den Kettenbrüchen.* Band I. (3 Aufl.) Teubner, 1954.
10. *Kraitchik M.* *Theorie des nombres.* Tome II. Paris. 1926.
11. *Тлюстангелов И.А.* Собственные циклические симметрии многомерных цепных дробей // *Матем. сб.* 2022. Т. 213. № 9. С. 138–166.

PROPER SYMMETRIES OF 3-DIMENSIONAL CONTINUED FRACTIONS

I. A. Tlyustangelov^{a,b}

^a *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, Russian Federation*

^b *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

In this work we prove a criterion for an algebraic continued fraction to have a proper palindromic symmetry in dimension 4. As a multidimensional generalization of continued fractions, we consider Klein polyhedra.

Keywords: Klein polyhedra, algebraic lattices

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ИСЧЕЗАЮЩИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© 2022 г. А. И. Зейфман^{1,2,3,*}, В. Ю. Королев^{1,4,5,**}, Р. В. Разумчик^{1,***},
Я. А. Сатин^{2,****}, И. А. Ковалев^{2,4,*****}

Представлено академиком РАН И.А. Соколовым

Поступило 20.01.2022 г.

После доработки 23.05.2022 г.

Принято к публикации 01.07.2022 г.

Рассматриваются неоднородные марковские цепи с непрерывным временем и исчезающими возмущениями. Доказывается, что при некоторых естественных условиях предельные режимы исходной и возмущенной цепей совпадают, получена явная оценка для построения предельного режима возмущенной цепи, а также рассмотрено применение полученных результатов для нескольких классов систем массового обслуживания.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, устойчивость, исчезающие возмущения

DOI: 10.31857/S2686954322050186

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы будем рассматривать неоднородные марковские цепи, интенсивности которых при $t \rightarrow \infty$ стремятся к некоторым заранее заданным. Точнее, мы будем предполагать, что инфинитезимальная матрица $\bar{Q}(t)$ представима в виде $\bar{Q}(t) = Q(t) + \hat{Q}(t)$, где $\hat{Q}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Так что если назвать цепь с матрицей интенсивностей $Q(t)$ исходной, а цепь с матрицей интенсивностей $\bar{Q}(t)$ – возмущенной, то мы будем изучать так называемую ситуацию с исчезающими возмущениями. Такие модели возникают прежде всего в ситуации, когда интенсивности обслуживания и/или поступления требований асимптотически прибли-

жаются к некоторым “оптимальным”. Подобным цепям посвящено достаточно много работ, начиная с 1970-х годов. Однако круг нерешенных вопросов по-прежнему остается широким (см., например, работы [1–5], результаты которых носят качественный характер). Здесь мы докажем, что при некоторых естественных условиях предельные режимы исходной и возмущенной цепей совпадают, в отличие от предыдущих работ получим явную оценку для построения предельного режима возмущенной цепи, а также рассмотрим применение полученных результатов для нескольких классов систем массового обслуживания.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть $X(t)$, $t \geq 0$, – вообще говоря, неоднородная марковская цепь с непрерывным временем и не более чем счетным пространством состояний $\{0, 1, \dots, S\}$, $0 < S \leq \infty$. Переходные вероятности для $X(t)$ будем обозначать $p_{ij}(s, t) = \Pr\{X(t) = j | X(s) = i\}$, $0 \leq i, j \leq S, 0 \leq s \leq t$. Пусть $p_i(t) = \Pr\{X(t) = i\}$ – вероятность соответствующего состояния цепи, а $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_S(t))^T$ – вектор вероятностей состояний. Предполагается, что

$$\Pr\{X(t+h) = j | X(t) = i\} = \begin{cases} q_{ij}(t)h + \alpha_{ij}(t, h), & \text{при } j \neq i \\ 1 - \sum_{k \neq i} q_{ik}(t)h + \alpha_i(t, h), & \text{при } j = i, \end{cases} \quad (1)$$

¹ Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия

² Вологодский государственный университет, Вологда, Вологодская область, Россия

³ Вологодский научный центр, Вологда, Россия

⁴ Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Московский государственный университет, Москва, Россия

⁵ Факультет ВМК, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: a_zeifman@mail.ru

**E-mail: victoryukorolev@yandex.ru

***E-mail: rrazumchik@ipiran.ru

****E-mail: yacovi@mail.ru

*****E-mail: kovalev.iv96@yandex.ru

где $q_{ij}(t)$ – локально интегрируемые на полуоси $[0, \infty)$ функции (интенсивности переходов), h – “малое” приращение времени, а все $\alpha_i(t, h)$ есть $o(h)$ равномерно по i , т.е. $\sup_i |\alpha_i(t, h)| = o(h)$.

Положим $a_{ij}(t) = q_{ji}(t)$ при $j \neq i$, $a_{ii}(t) = -\sum_{j \neq i} a_{ji}(t) = -\sum_{j \neq i} q_{ij}(t)$ и введем в рассмотрение матрицу $A(t) = (a_{ij}(t))$, составленную из функций $a_{ij}(t)$. Предполагая, что

$$|a_{ii}(t)| \leq L < \infty$$

почти при всех $t \geq 0$ (т.е. за исключением множества нулевой меры), справедлива прямая система дифференциальных уравнений Колмогорова, которая может быть записана в виде одного векторного уравнения

$$\frac{d}{dt} p(t) = A(t) p(t), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Заметим, что $A(t) = Q^T(t)$ – транспонированная инфинитезимальная матрица марковской цепи $X(t)$.

$$B(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) - a_{10}(t) & a_{12}(t) - a_{10}(t) & \cdots & a_{1S}(t) - a_{10}(t) \\ a_{21}(t) - a_{20}(t) & a_{22}(t) - a_{20}(t) & \cdots & a_{2S}(t) - a_{20}(t) \\ a_{31}(t) - a_{30}(t) & a_{32}(t) - a_{30}(t) & \cdots & a_{3S}(t) - a_{30}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{S1}(t) - a_{S0}(t) & a_{S2}(t) - a_{S0}(t) & \cdots & a_{SS}(t) - a_{S0}(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $\bar{X}(t)$ – “возмущенная” марковская цепь с тем же пространством состояний, что и $X(t)$, вероятностями состояний $\bar{p}_i(t)$ и транспонированной инфинитезимальной матрицей $\bar{A}(t) = (\bar{a}_{ij}(t))$. Отклонения возмущенных характеристик от исходных условий обозначать соответственно $\hat{a}_{ij}(t)$ и $\hat{A}(t)$.

Напомним, что марковская цепь $X(t)$ слабо эргодична, если для любой пары векторов $p^*(t)$, $p^{**}(t)$ – решений (2) с различными начальными условиями имеет место $\|p^*(t) - p^{**}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Пусть $p^*(t)$ и $p^{**}(t)$ – решения (2). Тогда из определения вектора $z(t)$ следуют неравенства

$$\|z^*(t) - z^{**}(t)\| \leq \|p^*(t) - p^{**}(t)\| \leq 2\|z^*(t) - z^{**}(t)\|,$$

где $z^*(t)$ и $z^{**}(t)$ – векторы, соответствующие $p^*(t)$ и $p^{**}(t)$.

Условимся далее через $\|\cdot\|$ (или $\|\cdot\|_1$) обозначать обычную l_1 -норму, т.е. $\|x\| = \sum_i |x_i|$ для любого вектора x , а $\|B(t)\| = \sup_j \sum_i |b_{ij}(t)|$, если $B(t) = (b_{ij}(t))$.

Пусть $\Omega = \{x : x_i \geq 0, \|x\| = 1\}$, т.е. множество всех векторов с неотрицательными координатами и единичной l_1 -нормой. Поскольку

$$\|A(t)\| = 2 \sup_i |a_{ii}(t)| \leq 2L$$

почти при всех $t \geq 0$, то можно использовать соответствующую теорию (см., например, [6]), рассматривая (2) как уравнение в пространстве l_1 . В частности, задача Коши для уравнения (2) имеет единственное решение при любом начальном условии, а если $p(s) \in \Omega$, то $p(t) \in \Omega$ при любом $0 \leq s \leq t$ и любом начальном условии $p(s)$. Обозначая $z(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_S(t))^T$, из (2) получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} z(t) = B(t) z(t) + f(t), \quad (3)$$

где $f(t) = (a_{10}(t), a_{20}(t), \dots, a_{S0}(t))^T$,

Далее мы будем рассматривать уравнение (3) не только в пространстве l_1 , но и в содержащемся в нем подпространстве

$$\{z(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_S(t))^T : \|Dz(t)\|_1 < \infty\}$$

(при подходящем линейном операторе D ; более подробно см. далее в разделе 3), которое будем обозначать l_{1D} , а норму в нем – через $\|\cdot\|_{1D}$. Тогда, если при некоторых $M > 0$, $a > 0$ и любых начальных условиях $p^*(s)$, $p^{**}(s) \in l_1$ неравенство

$$\|p^*(t) - p^{**}(t)\|_{1D} \leq Me^{-a(t-s)} \|p^*(s) - p^{**}(s)\|_{1D} \quad (4)$$

выполняется для всех $t \geq s \geq 0$, то такую марковскую цепь $X(t)$ будем называть $1D$ -экспоненциально эргодичной (см. [7]). Заметим, что если при этом у цепи $X(t)$ есть стационарный (т.е. не зависящий от времени) режим, то она является $1D$ -экспоненциально эргодичной. Условия эргодичности, соответствующие оценки скорости сходимости, и связь их с оценками устойчивости изучалась многими авторами (см., например, [5, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22]).

3. ОБЩИЕ ОЦЕНКИ

Стандартные подходы для исследования марковских цепей с непрерывным временем описаны в работе [7]. Однако применить их непосредственно в ситуации с исчезающими возмущениями не удастся. В этом разделе впервые приводится оценка решений уравнения (3), которая делает дальнейшие исследования возможными. При этом для большей наглядности получаемые результаты сформулированы в явном виде после проведенных оценок.

Рассмотрим соответствующее (3) уравнение для возмущенной цепи

$$\frac{d}{dt} \bar{z}(t) = \bar{B}(t) \bar{z}(t) + \bar{f}(t), \quad (5)$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \bar{z}(t) = B(t) \bar{z}(t) + f(t) + \hat{B}(t) \bar{z}(t) + \hat{f}(t). \quad (6)$$

Если обозначить через $V(t, s)$ оператор Коши уравнения (3), то решения уравнений (3) и (6) могут быть записаны в виде:

$$z(t) = V(t) z(0) + \int_0^t V(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

и

$$\begin{aligned} \bar{z}(t) &= V(t) \bar{z}(0) + \int_0^t V(t, \tau) f(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t V(t, \tau) \hat{B}(\tau) \bar{z}(\tau) d\tau + \int_0^t V(t, \tau) \hat{f}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Предполагая $1D$ -экспоненциальную эргодичность, получаем $\|V(t, s)\|_{1D} \leq Me^{-a(t-s)}$. Вводя обозначение $\hat{z}(t) = \bar{z}(t) - z(t)$, имеем в норме l_{1D} следующую оценку сверху:

$$\begin{aligned} \|\hat{z}(t)\| &\leq Me^{-at} \|\hat{z}(0)\| + \\ &+ \int_0^t Me^{-a(t-\tau)} \|\hat{B}(\tau)\| \|\bar{z}(\tau)\| d\tau + \int_0^t Me^{-a(t-\tau)} \|\hat{f}(\tau)\| d\tau. \quad (7) \end{aligned}$$

Первое слагаемое, очевидно, стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Для оценки второго и третьего слагаемых будем предполагать выполненными следующие условия:

(А) $\|\hat{B}(t)\|_{1D} \leq \chi(t)$, где “возмущение” $\chi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, причем без ограничения общности можно предполагать, что функция χ непрерывна, ограничена и убывает монотонно;

(В) $\|\hat{f}(t)\|_{1D} \leq \chi(t)$.

З а м е ч а н и е. Отметим, что при сделанном дополнительном предположении о монотонности возмущений сходимость интеграла от нормы

возмущения по промежутку от нуля до бесконечности (этот случай изучался, например, в работах [5, 8]) является более сильным условием, чем стремление к нулю.

Положим для сокращения записи $\chi(0) = \epsilon_0$. Отметим, что без ограничения общности можно считать, что $\epsilon_0 < a$, в противном случае можно взять начальный момент времени $t_0 > 0$.

Для оценки нормы решения возмущенного уравнения обозначим оператор Коши этого уравнения через $\bar{V}(t, s)$. Тогда в норме $1D$ имеют место неравенства

$$\|\bar{V}(t, s)\| \leq Me^{-(a-\epsilon_0)(t-s)}.$$

Далее, записывая решение уравнения (6) в виде

$$\bar{z}(t) = \bar{V}(t) \bar{z}(0) + \int_0^t \bar{V}(t, \tau) \bar{f}(\tau) d\tau,$$

и предполагая, что $\|f(t)\|_{1D} \leq F$ (при некотором $0 < F < \infty$) почти при всех $t \geq 0$, получаем в норме $1D$ неравенство

$$\|\bar{z}(t)\| \leq Me^{-(a-\epsilon_0)t} \|\bar{z}(0)\| + \frac{M(F + \epsilon_0)}{a - \epsilon_0}. \quad (8)$$

Выберем произвольно $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ и момент времени t_* так, чтобы $\chi(t_*) = \epsilon$. Поскольку

$$\int_0^t e^{-a(t-\tau)} \chi(\tau) d\tau \leq e^{-a(t-t_*)} \frac{\epsilon_0}{a} + \frac{\epsilon}{a},$$

то из (7) и (8) следует искомая оценка:

$$\begin{aligned} \|\hat{z}(t)\| &\leq Me^{-at} \|\hat{z}(0)\| + \\ &+ M \left(e^{-a(t-t_*)} \frac{\epsilon_0}{a} + \frac{\epsilon}{a} \right) \left(1 + M \|\bar{z}(0)\| + \frac{M(F + \epsilon_0)}{a - \epsilon_0} \right). \quad (9) \end{aligned}$$

Неравенство (9), с учетом произвольности ϵ , гарантирует стремление к нулю нормы возмущения при $t \rightarrow \infty$ и дает оценку скорости этого стремления.

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. Пусть марковская цепь $X(t)$ является $1D$ -экспоненциально эргодичной в некотором подпространстве $l_{1D} \subset l_1$, а для возмущенной цепи $\bar{X}(t)$ норма возмущения стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ так, что выполнены условия (А) и (В). Тогда цепь $\bar{X}(t)$ слабо эргодична, имеет тот же предельный режим и справедлива оценка (9).

С л е д с т в и е 1. Пусть при выполнении условий Теоремы 1 интенсивности исходной цепи $X(t)$ являются 1 -периодическими. Тогда предельный режим возмущенной цепи $\bar{X}(t)$ также 1 -периодичен.

Следствие 2. Пусть при выполнении условий Теоремы 1 интенсивности исходной цепи $X(t)$ являются пропорциональными, т.е. все $q_{ij}(t) = \vartheta(t)q_{ij}$. Тогда и невозмущенная цепь $X(t)$ и возмущенная цепь $\bar{X}(t)$ сильно эргодичны и имеют одинаковые стационарные распределения.

4. ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК ДЛЯ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

При анализе моделей систем массового обслуживания для получения конкретных значений, входящих в оценку (9), основную роль играет неравенство (4). Здесь сравнительно простым и весьма удобным методом является метод, основанный на логарифмической норме линейной операторной функции (см. [6, 9, 10]). Если матрица линейной системы $K(t) = (k_{i,j}(t))$ является существенно неотрицательной (т.е. неотрицательны все ее внедиагональные элементы), то ее логарифмическая норма $\gamma(K(t))$ вычисляется по формуле $\gamma(K(t)) = \sup_j \sum_i k_{i,j}(t)$. При этом для соответствующего оператора Коши справедлива

$$\|V(t, s)\| \leq e^{\int_s^t \gamma(K(\tau)) d\tau}.$$

Если же матрица $K(t)$ не является существенно неотрицательной, то чаще всего действовать приходится следующим образом. Рассмотрим матрицу вида

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & \cdots & d_1 & \cdots \\ 0 & d_2 & d_2 & \cdots & d_2 & \cdots \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & d_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (11)$$

и соответствующую (3) однородную систему

$$\frac{d}{dt} z(t) = B(t) z(t). \quad (12)$$

Полагая $w(t) = Dz(t)$, приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt} w(t) = B^*(t) w(t), \quad (13)$$

где $B^*(t) = DB(t)D^{-1}$, в отличие от $B(t)$, для широкого класса моделей систем массового обслуживания уже можно сделать существенно неотрицательной за счет подбора отделенной от нуля “весовой” последовательности $\{d_i, i \geq 1\}$ (что гарантирует выполнение условия $l_{1D} \subset l_1$). Отметим, что если $B^*(t)$ может быть сделана существенно неотрицательной, то дальше основная сложность оказывается

связанной с выбором такой “весовой” последовательности, что дает точные оценки скорости сходимости (см. [10]). Заметим, что именно точные оценки скорости сходимости соответствуют наиболее точным оценкам устойчивости [22].

Опишем теперь соответствующие построения для некоторых классических моделей.

Начнем с модели Эрланга, описывающей систему с потерями $M_t/M_t/N/N$, см. [1, 2, 5, 7, 10]. В этом случае число требований $X(t)$ в системе описывается процессом рождения и гибели с конечным числом состояний, т.е. интенсивности переходов имеют вид: $q_{ij}(t) = 0$ при всех $t \geq 0$, если $|i - j| > 1$, а $q_{i,i+1}(t) = \lambda(t)$ и $q_{i+1,i}(t) = i\mu(t)$, $i = 0, \dots, N - 1$. Как известно, для слабой эргодичности процесса $X(t)$ необходимо и достаточно,

чтобы $\int_0^\infty (\lambda(t) + \mu(t)) dt = +\infty$. Рассмотрим для определенности случай существенной интенсивности обслуживания. Матрица преобразования в этом случае конечна. Положим $d_i = 1$, $i \geq 1$. Тогда соответствующая логарифмическая норма оказывается

равной $-\mu(t)$ и, значит, $\|V(t, s)\|_{1D} \leq e^{-\int_s^t \mu(\tau) d\tau}$. Если, в частности, интенсивность обслуживания $\mu(t)$ является 1-периодической функцией времени, то фигурирующие в оценке (4) параметры оцениваются следующим образом: $a = \int_0^1 \mu(t) dt$; $M \leq e^a$.

Рассмотрим теперь нестационарную модель обслуживания с неограниченным числом мест ожидания и S серверами $M_t/M_t/S$, (см., например, [12, 16]) с интенсивностями поступления требований $\lambda_k(t) = \lambda(t)$ и обслуживания $\mu_k(t) = \mu(t) \min(k, S)$. Как известно (см. [16]), процесс, описывающий число требований $X(t)$ в системе, является слабо эргодичным, если найдется $d > 1$ такое, что

$\int_0^\infty (S\mu(t) - d\lambda(t)) dt = +\infty$. Пусть $S = 2$ (этот случай, в отличие от случая $S = 1$, является более сложным; см., например, [9]). Положим в (11) $d_i = d^{i-1}$, $i \geq 1$, где $d \in (1, 2]$, получаем для логарифмической нормы $\gamma(B^*(t))$ оценку $\gamma(B^*(t)) \leq \left(1 - \frac{1}{d}\right)(2\mu(t) - d\lambda(t))$.

В случае 1-периодических интенсивностей оценка (4) выполнена при $a = \left(1 - \frac{1}{d}\right) \int_0^1 (2\mu(t) - d\lambda(t)) dt$, и соответствующем значении M .

Интересно отметить, что такая же “весовая” последовательность $\{d_i = d^{i-1}, i \geq 1\}$ позволяет ис-

следовать совершенно другую модель системы с неординарным входящим потоком, управляющим размером очереди (см., например, [15, 17,

23]). Несмотря на сложную структуру инфинитесимальной матрицы интенсивностей, имеющей вид

$$Q(t) = \begin{pmatrix} -\lambda(t) & \lambda(t)b_1 & \lambda(t)b_2 & \cdots \\ \mu(t) - \left(\lambda(t) \sum_{i=2}^{\infty} b_i + \mu(t) \right) & \lambda(t)b_2 & \cdots \\ 0 & \mu(t) & - \left(\lambda(t) \sum_{i=3}^{\infty} b_i + \mu(t) \right) & \cdots \\ 0 & 0 & \mu(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

при экспоненциальном убывании вероятностей b_i поступления группы требований размера i (т.е. при $b_i \leq Cq^i$) слабая эргодичность гарантируется с оценкой логарифмической нормы $\gamma(B^*(t)) \leq \left(1 - \frac{1}{d}\right)\mu(t)$ для $d \in \left(1, \frac{1}{q}\right)$. Тогда при 1-периодической интенсивности обслуживания оценка (4) выполнена при $a = \left(1 - \frac{1}{d}\right) \int_0^1 \mu(t) dt$ и соответствующем значении M .

Отметим, что с помощью аналогичных преобразований (с существенно более сложным выбором весовой последовательности) и метода логарифмической нормы удастся получить явные оценки скорости сходимости, а следовательно, и оценки в случае исчезающих возмущений для других классов марковских нестационарных систем обслуживания, в том числе для моделей типа $M_i^x/M_i^x/1$ (см. [7, 20]), систем обслуживания с катастрофами (см. [9]), систем с поглощением в нуле (см. [13]), систем с групповым поступлением и обслуживанием требований и управлением, зависящим от состояния (см. [9, 14]).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке проекта № 075-15-2020-799 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gnedenko D.B. On a Generalization of Erlang Formulae // Zastosow. Mat. 1971. V. 12. P. 239–242.
2. Gnedenko B., Soloviev A. On the conditions of the existence of final probabilities for a Markov process // Math. Operationsforsch. Statist. 1973. P. 379–390.
3. Liu J., Pare P.E., Nedic A., Tang C.Y., Beck C.L., Basar T. Analysis and control of a continuous-time bi-virus model // IEEE Transactions on Automatic Control. 2019. V. 64. № 12. P. 4891–4906.
4. Pare P.E., Liu J., Beck C.L., Nedic A., Basar T. Multi-competitive viruses over time-varying networks with mutations and human awareness // Automatica. 2021. V. 123. Art. ID 109330.
5. Zeifman A.I., Isaacson D.L. On strong ergodicity for nonhomogeneous continuous-time Markov chains // Stochastic processes and their applications. 1994. V. 50. № 2. P. 263–273.
6. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
7. Zeifman A., Korolev V., Satin Y. Two approaches to the construction of perturbation bounds for continuous-time Markov chains // Mathematics. 2020. V. 8. № 2. Art. ID 253.
8. Abramov V., Liptser R. On existence of limiting distribution for time-nonhomogeneous countable Markov process // Queueing Syst. 2004. V. 46. № 3. P. 353–361.
9. Zeifman A., Satin Y., Kovalev I., Razumchik R., Korolev V. Facilitating numerical solutions of inhomogeneous continuous time Markov chains using ergodicity bounds obtained with logarithmic norm method. Mathematics 2021. V. 9(1). P. 42. <https://doi.org/10.3390/math9010042>
10. Ван Доорн Э., Зейфман А.И., Панфилова Т.Л. “Оценки и асимптотика скорости сходимости для процессов рождения и гибели”, Теория вероятн. и ее примен. 2009. Т. 54. С. 1.
11. Fricker C., Robert P., Tibi D. On the rates of convergence of Erlang’s model. J. Appl. Probab. 1999. V. 36. P. 1167–1184.
12. Агаларов Я.М. Оптимальное пороговое управление доступом в системе $M/M/s$ с неоднородными приборами и общим накопителем // Информатика и ее применения. 2021. Т. 15. № 1. С. 57–64.
13. Caswell H. Perturbation analysis of continuous-time absorbing Markov chains // Numerical Linear Algebra with Applications. 2011. V. 18. № 6. P. 901–917.
14. Chen A., Wu X., Zhang J. Markovian bulk-arrival and bulk-service queues with general state-dependent control. Queueing Syst. 2020. V. 95. P. 331–378. <https://doi.org/10.1007/s11134-020-09660-0>

15. *Zeifman A.I., Razumchik R.V., Satin Y.A., Kovalev I.A.* Ergodicity bounds for the Markovian queue with time-varying transition intensities, batch arrivals and one queue skipping policy. *Applied Mathematics and Computation*. 2021. V. 395, 125846.
16. *Zeifman A.I.* Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes. *Stochastic processes and their applications*. 1995. V. 59 (1). P. 157–173.
17. *Marin A., Rossi S.* A queueing model that works only on the biggest jobs. In *European Workshop on Performance Engineering*. Springer, Cham, 2019. P. 118–132.
18. *Веретенников А.Ю., Веретенникова М.А.* О скорости сходимости для однородных цепей Маркова. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. V. 490 (1). P. 16–19.
19. *Heidergott B., Leahu H., Löpker A., Pflug G.* Perturbation analysis of inhomogeneous finite Markov chains. *Advances in Applied Probability*. 2016. V. 48. № 1. P. 255–273.
20. *Nelson R., Towsley D., Tantawi A.N.* Performance analysis of parallel processing systems. *IEEE Transactions on software engineering*. 1988. V. 14 (4). P. 532–540.
21. *Mitrophanov A.Y.* Sensitivity and convergence of uniformly ergodic Markov chains. *Journal of Applied Probability*. 2005. V. 42 (4). P. 1003–1014.
22. *Mitrophanov A.Y.* Connection between the rate of convergence to stationarity and stability to perturbations for stochastic and deterministic systems. In *Proceedings of the 38th International Conference Dynamics Days Europe (DDE 2018)*, Loughborough, UK, 2018. P. 3–7.
23. *Матюшенко С.И., Разумчик Р.В.* Стационарные характеристики системы Geo/G/1 с неординарным входящим потоком, управляющим размером очереди, Информ. и ее примен. 2020. Т. 14:4. С. 25–32.

LIMITING CHARACTERISTICS OF QUEUEING SYSTEMS WITH VANISHING PERTURBATIONS

A. I. Zeifman^{a,b,c}, V. Y. Korolev^{a,d,e}, R. V. Razumchik^a, Y. A. Satin^c, and I. A. Kovalev^{c,d}

^a *Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b *Vologda State University, Vologda, Vologda region, Russian Federation*

^c *Vologda science center, Vologda, Russian Federation*

^d *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, MSU, Moscow, Russian Federation*

^e *Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS I.A. Sokolov

We consider inhomogeneous continuous-time Markov chains with vanishing perturbations. It is proved that under some natural conditions limiting regimes of the initial and perturbed chains coincide. We obtain explicit estimates, which allow construction of the limiting regime of the perturbed chain, and show how these results may be useful in the analysis of several known classes of queueing systems.

Keywords: queueing systems, perturbations, vanishing perturbations

УДК 517.958:531.32

О ПОСТРОЕНИИ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СМЕСИ ВЯЗКИХ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

© 2022 г. А. А. Злотник^{1,2,*}

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным

Поступило 12.05.2022 г.

После доработки 27.06.2022 г.

Принято к публикации 16.08.2022 г.

Выполняются регуляризация двух типов и агрегирование системы уравнений движения многоскоростной смеси вязких несжимаемых жидкостей и строятся новые многоскоростные и односкоростные системы. Для всех них выводятся эллиптические уравнения для давления и диссипативные уравнения баланса полной энергии смеси (суммы кинетической и потенциальной энергий смеси).

Ключевые слова: уравнения движения смеси вязких несжимаемых жидкостей, регуляризация, агрегирование, уравнение для давления, уравнение баланса полной энергии

DOI: 10.31857/S2686954322050204

Задачи динамики несжимаемых смесей имеют многочисленные и разнообразные научные и технические приложения, и для их описания разработаны различные системы уравнений движения несжимаемых смесей, см., в частности, [1, 2], в том числе с регуляризацией [3]. Регуляризованные квазигазодинамические (КГД) и квазигидродинамические (КГидД) системы уравнений вначале были построены для однокомпонентных газов и жидкостей [4–6], а для сжимаемых смесей они строились и применялись для численного решения в [5, 7–10] и др. работах, для несжимаемых смесей – недавно в [11].

В этом сообщении выполняются КГД и КГидД регуляризация и агрегирование [9] системы уравнений движения многоскоростной смеси вязких несжимаемых жидкостей из [2, 3] и последовательно строятся новые многоскоростные и односкоростные системы, причем последние – как со многими, так и общей регуляризуемыми скоростями. Для всех них выводятся уравнения баланса полной массы, эллиптические уравнения для давления и диссипативные уравнения баланса полной энергии смеси с учетом потенциального внешнего сил, причем это делается единообразно для регуляризаций обоих типов.

Система уравнений движения многоскоростной смеси вязких несжимаемых жидкостей в [2, 3] состоит из уравнений баланса массы и импульса компонент

$$\partial_t(\rho_k \alpha_k) + \operatorname{div}(\rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k) = 0, \quad (1)$$

$$1 \leq k \leq K, \quad \langle \alpha_k \rangle := \alpha_1 + \dots + \alpha_K = 1,$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_k \alpha_k u_k) + \operatorname{div}(\rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \alpha_k \nabla p = \\ = \operatorname{div}(\alpha_k \Pi_k^{NS}) + \alpha_k \mathbf{f}_k, \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (2)$$

В них основные искомые функции $0 < \alpha_k < 1$, $\mathbf{u}_k = (u_{k1}, \dots, u_{kn})$ – это объемные концентрации и скорости k -й компоненты смеси, а также общее давление p (определенное с точностью до аддитивной функции времени), зависящие от $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, где Ω – область в \mathbb{R}^n , и $t \geq 0$, причем $K \geq 2$ и $n = 2, 3$. Постоянные плотности компонент $\rho_k > 0$ и плотности внешних сил $\mathbf{f}_k(x, t)$ заданы, $1 \leq k \leq K$. Операторы div и $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ берутся по x , а $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Символы \otimes и \cdot обозначают тензорное и скалярное произведения векторов, а дивергенция тензора берется по его первому индексу.

Тензор вязкости Навье–Стокса k -й компоненты смеси имеет стандартный вид

$$\Pi_k^{NS} = \mu_k \left[\nabla \mathbf{u}_k + (\nabla \mathbf{u}_k)^T - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \mathbf{u}_k) \mathbb{I} \right] + \lambda_k (\operatorname{div} \mathbf{u}_k) \mathbb{I},$$

$$\nabla \mathbf{u}_k = \{\partial_i u_{kj}\}_{i,j=1}^n$$

с коэффициентами вязкости $\mu_k > 0$ и $\lambda_k \geq 0$. Здесь \mathbb{I} – единичный тензор порядка n .

¹ Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

² Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: azlotnik@hse.ru

Деление первых уравнений (1) на ρ_k приводит к эквивалентным уравнениям баланса объемных концентраций

$$\partial_t \alpha_k + \operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u}_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (3)$$

Так как $\langle \alpha_k \rangle = 1$, то применение к ним операции $\langle \cdot \rangle$ (т.е. суммирование по $1 \leq k \leq K$) дает важное уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \langle \alpha_k \mathbf{u}_k \rangle = 0. \quad (4)$$

Введем плотность смеси $\rho := \langle \rho_k \alpha_k \rangle > 0$, являющуюся функцией $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ (и поэтому (x, t)). Применение операции $\langle \cdot \rangle$ к первому уравнению (1) приводит к уравнению баланса полной массы

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u} := \rho^{-1} \langle \rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k \rangle, \quad (5)$$

по форме аналогичному соответствующему уравнению для сжимаемого газа, где \mathbf{u} – средняя “массовая” (т.е. с учетом плотностей компонент) скорость смеси.

Применение операции $\left\langle \frac{1}{\rho_k} \cdot \right\rangle$ к уравнению (2) дает уравнение

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \alpha_k \mathbf{u}_k \rangle + \operatorname{div} \langle \alpha_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k \rangle + \left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \right\rangle \nabla p &= \\ = \operatorname{div} \left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \Pi_k^{NS} \right\rangle + \left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \mathbf{f}_k \right\rangle. \end{aligned}$$

Применение div к нему с учетом уравнения (4) приводит к уравнению для p

$$\operatorname{div} \left(\left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \right\rangle \nabla p - \mathbf{P} \right) = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{P} := \operatorname{div} \left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \Pi_k^{NS} \right\rangle - \operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \mathbf{f}_k \right\rangle.$$

Оно равномерно эллиптическое в Ω (с параметром t), поскольку

$$0 < \frac{1}{\rho_{\max}} \leq \left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \right\rangle \leq \frac{1}{\rho_{\min}}, \quad \text{с} \quad \rho_{\min} := \min_{1 \leq k \leq K} \rho_k, \\ \rho_{\max} := \max_{1 \leq k \leq K} \rho_k.$$

Первоначальную регуляризацию первых уравнений (1) и уравнений (2) выполним, применив предложенный в [12] формализм, посредством следующих замен в них

$$\begin{aligned} \rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k &\rightarrow \rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k + \tau \partial_t (\rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k), \\ \rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k &\rightarrow \rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k + \tau \partial_t (\rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k), \\ \alpha_k (\nabla p - \mathbf{f}_k) &\rightarrow (\alpha_k + \tau \partial_t \alpha_k) (\nabla p - \mathbf{f}_k), \end{aligned}$$

где $\tau > 0$ – малый параметр (он может зависеть от искомым функций); при этом здесь функция p замене не подвергается. Воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) &= \partial_t (\rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k) \otimes \mathbf{u}_k + \rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k \otimes \partial_t \mathbf{u}_k = \\ &= \partial_t (\rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k) \otimes \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_k \otimes [\partial_t (\rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k) - \rho_k (\partial_t \alpha_k) \mathbf{u}_k]. \end{aligned}$$

Далее имеем $\partial_t \alpha_k = -\operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u}_k)$ согласно уравнению (3). Запишем также приближенно

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k) &\approx -[\operatorname{div}(\rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \alpha_k (\nabla p - \mathbf{f}_k)] \\ \text{согласно уравнению (2), опустив в нем слагаемое} \\ \operatorname{div}(\alpha_k \Pi_k^{NS}) \text{ (считая вязкость малой).} \end{aligned}$$

Эта процедура приводит к регуляризованной КГД типа системе уравнений многоскоростной смеси вязких несжимаемых жидкостей вида

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_k + \operatorname{div}[\alpha_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{w}^{(k)})] &= 0, \\ 1 \leq k \leq K, \quad \langle \alpha_k \rangle &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k) + \operatorname{div}[\rho_k \alpha_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{w}^{(k)}) \otimes \mathbf{u}_k] + \\ + [\alpha_k - \tau \operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u}_k)] (\nabla p - \mathbf{f}_k) &= \\ = \operatorname{div}(\alpha_k \Pi_k^{NS} + \mathbf{u}_k \otimes \rho_k \alpha_k \mathbf{w}_0^{(k)}), \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (7)$$

В них основные искомые функции те же, а возникшие регуляризующие скорости таковы

$$\mathbf{w}^{(k)} \equiv \mathbf{w}_1^{(k)} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\tau}{\rho_k \alpha_k} [\operatorname{div}(\rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \alpha_k (\nabla p - \mathbf{f}_k)] = \\ &= \tau \left[\frac{1}{\alpha_k} \operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \frac{1}{\rho_k} (\nabla p - \mathbf{f}_k) \right] = \\ &= \frac{\tau}{\alpha_k} \operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u}_k) \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_0^{(k)}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{w}_0^{(k)} = \tau \left[(\mathbf{u}_k \cdot \nabla) \mathbf{u}_k + \frac{1}{\rho_k} (\nabla p - \mathbf{f}_k) \right]. \quad (9)$$

Хорошо известное КГидД типа упрощение построенной регуляризованной системы уравнений выполняется посредством замены в ней $\mathbf{w}^{(k)}$ на $\mathbf{w}_0^{(k)}$ и отбрасывания слагаемого $\tau \operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u}_k)$ слева в уравнении баланса импульса (7). Положив $\ell = 1$ для первой системы и $\ell = 0$ для второй, обе системы можно записать единообразно с параметром ℓ

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_k + \operatorname{div}[\alpha_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)})] &= 0, \\ 1 \leq k \leq K, \quad \langle \alpha_k \rangle &= 1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k) + \operatorname{div}[\rho_k \alpha_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)}) \otimes \mathbf{u}_k] + \\ + [\alpha_k - \ell \tau \operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u}_k)] (\nabla p - \mathbf{f}_k) &= \\ = \operatorname{div}(\alpha_k \Pi_k^{NS} + \mathbf{u}_k \otimes \rho_k \alpha_k \mathbf{w}_0^{(k)}), \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (11)$$

Применение операций $\langle \cdot \rangle$ и $\langle \rho_k \cdot \rangle$ к первым уравнениям (10) приводит к уравнению неразрывности и уравнению баланса полной массы

$$\operatorname{div} \langle \alpha_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)}) \rangle = 0. \quad (12)$$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_{\ell*})] = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\ell*} := & \frac{1}{\rho} \langle \rho_k \alpha_k \mathbf{w}_\ell^{(k)} \rangle = \tau \frac{1}{\rho} [\ell \operatorname{div} \langle \rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k \rangle + \\ & + (1 - \ell) \langle \rho_k \alpha_k (\mathbf{u}_k \cdot \nabla) \mathbf{u}_k \rangle + \nabla p - \langle \alpha_k \mathbf{f}_k \rangle], \end{aligned}$$

где по-прежнему $\mathbf{u} = \rho^{-1} \langle \rho_k \alpha_k \mathbf{u}_k \rangle$, а $\mathbf{w}_{\ell*}$ – средняя “массовая” регуляризирующая скорость смеси. Средняя регуляризирующая скорость смеси такова

$$\begin{aligned} \langle \alpha_k \mathbf{w}_\ell^{(k)} \rangle = & \tau \left[\ell \operatorname{div} \langle \alpha_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k \rangle + \right. \\ & \left. + (1 - \ell) \langle \alpha_k (\mathbf{u}_k \cdot \nabla) \mathbf{u}_k \rangle + \left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \right\rangle \nabla p - \left\langle \frac{\alpha_k \mathbf{f}_k}{\rho_k} \right\rangle \right], \end{aligned}$$

и уравнение (12) можно переписать как важное эллиптическое уравнение для p

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\tau \left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \right\rangle \nabla p - \mathbf{P}_\tau \right) = 0, \\ \mathbf{P}_\tau := \langle \alpha_k \mathbf{u}_k \rangle - \tau \ell \operatorname{div} \langle \alpha_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k \rangle + \\ + (1 - \ell) \langle \alpha_k (\mathbf{u}_k \cdot \nabla) \mathbf{u}_k \rangle + \tau \left\langle \frac{\alpha_k \mathbf{f}_k}{\rho_k} \right\rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

При $\ell = 1$ и $\tau = \operatorname{const}$ после деления на τ оно отличается от уравнения (6) только заменой в \mathbf{P} первого слагаемого намного более простым $\tau^{-1} \langle \alpha_k \mathbf{u}_k \rangle$ без вторых производных по x . При этом, например, краевое условие $\langle \alpha_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)}) \rangle_n = g$ на $\partial\Omega$ эквивалентно краевому условию $\left(\tau \left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \right\rangle \nabla p - \mathbf{P}_\tau \right)_n = -g$ на $\partial\Omega$, где \mathbf{n} означает взятие нормальной компоненты. Ниже для других регуляризованных систем ситуация с краевым условием аналогичная.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{f}_k = \nabla F_k + \mathbf{h}_k$, где $F_k = F_k(x)$. Для системы уравнений (10), (11) и (8), (9) при $\ell = 0, 1$ верно уравнение баланса полной энергии смеси $\mathcal{E} = \langle \mathcal{E}_k \rangle$, где $\mathcal{E}_k = 0.5 \rho_k \alpha_k |\mathbf{u}_k|^2 - \alpha_k F_k$ – полная энергия k -й компоненты:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{E} + \operatorname{div} \langle (\mathcal{E}_k + \alpha_k p) (\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)}) - \\ - \alpha_k [\Pi_k^{NS} \mathbf{u}_k + \rho_k (\mathbf{w}_0^{(k)} \cdot \mathbf{u}_k) \mathbf{u}_k] \rangle + \\ + \mathcal{P}^{NS} + \mathcal{P}^\tau = \langle \alpha_k \mathbf{h}_k \cdot (\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)}) \rangle \end{aligned} \quad (15)$$

с диссипацией $\mathcal{P}^{NS} + \mathcal{P}^\tau \geq 0$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{NS} := & \left\langle \alpha_k \left[\frac{\mu_k}{2} |\nabla \mathbf{u}_k + (\nabla \mathbf{u}_k)^T|^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\lambda_k - \frac{2}{3} \mu_k \right) (\operatorname{div} \mathbf{u}_k)^2 \right] \right\rangle \geq 0, \\ \mathcal{P}^\tau := & \frac{1}{\tau} \langle \rho_k \alpha_k |\mathbf{w}_0^{(k)}|^2 \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

В самом деле, пусть $1 \leq k \leq K$. В силу первого уравнения (10) имеем

$$\begin{aligned} -\partial_t (\alpha_k F_k) = & \{ \operatorname{div} [\alpha_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)})] \} F_k = \\ = & \operatorname{div} [\alpha_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)}) F_k] - \alpha_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)}) \cdot \nabla F_k. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение баланса импульса (11) умножим скалярно на \mathbf{u}_k . Воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} [\partial_t (r\mathbf{v})] \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div} (r\mathbf{y} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = & \partial_t (0.5r|\mathbf{v}|^2) + \\ & + \operatorname{div} (0.5r|\mathbf{v}|^2 \mathbf{y}) + 0.5 [\partial_t r + \operatorname{div} (r\mathbf{y})] |\mathbf{v}|^2, \end{aligned} \quad (17)$$

где r – скалярная функция, а \mathbf{v}, \mathbf{y} – вектор-функции со значениями в \mathbb{R}^n . Тогда с помощью первого уравнения (10), умноженного на ρ_k (т.е. уравнения баланса массы k -й компоненты), получим

$$\begin{aligned} 0.5 \partial_t (\rho_k \alpha_k |\mathbf{u}_k|^2) + 0.5 \operatorname{div} [\rho_k \alpha_k |\mathbf{u}_k|^2 (\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)})] + \\ + [\alpha_k \mathbf{u}_k - \ell \tau \operatorname{div} (\alpha_k \mathbf{u}_k) \mathbf{u}_k] \cdot (\nabla p - \mathbf{f}_k) = \\ = \operatorname{div} (\alpha_k \Pi_k^{NS}) \cdot \mathbf{u}_k + \operatorname{div} (\mathbf{u}_k \otimes \rho_k \alpha_k \mathbf{w}_0^{(k)}) \cdot \mathbf{u}_k. \end{aligned} \quad (18)$$

Сложим равенства (16) и (18). Выполним преобразование с учетом определения $\mathbf{w}_0^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\mathbf{u}_k \otimes \rho_k \alpha_k \mathbf{w}_0^{(k)}) \cdot \mathbf{u}_k = \\ = \operatorname{div} [\rho_k \alpha_k (\mathbf{w}_0^{(k)} \cdot \mathbf{u}_k) \mathbf{u}_k] - \rho_k \alpha_k \mathbf{w}_0^{(k)} \cdot (\mathbf{u}_k \cdot \nabla) \mathbf{u}_k = \\ = \operatorname{div} [\rho_k \alpha_k (\mathbf{w}_0^{(k)} \cdot \mathbf{u}_k) \mathbf{u}_k] - \\ - \tau^{-1} \rho_k \alpha_k |\mathbf{w}_0^{(k)}|^2 + \alpha_k \mathbf{w}_0^{(k)} \cdot (\nabla p - \mathbf{f}_k), \end{aligned} \quad (19)$$

при $\ell = 1$ учтем, что $\alpha_k \mathbf{w}_0^{(k)} + \tau \operatorname{div} (\alpha_k \mathbf{u}_k) \mathbf{u}_k = \alpha_k \mathbf{w}_1^{(k)}$ в слагаемом с $\nabla p - \mathbf{f}_k$ и получим

$$\begin{aligned} \partial_t (0.5 \rho_k \alpha_k |\mathbf{u}_k|^2 - \alpha_k F_k) + \operatorname{div} [(0.5 \rho_k \alpha_k |\mathbf{u}_k|^2 - \\ - \alpha_k F_k) (\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)}) - \rho_k \alpha_k (\mathbf{w}_0^{(k)} \cdot \mathbf{u}_k) \mathbf{u}_k] + \\ + (\alpha_k \mathbf{u}_k - \alpha_k \mathbf{w}_\ell^{(k)}) \cdot (\nabla p - \mathbf{h}_k) + \\ + \tau^{-1} \rho_k \alpha_k |\mathbf{w}_0^{(k)}|^2 = \operatorname{div} (\alpha_k \Pi_k^{NS}) \cdot \mathbf{u}_k. \end{aligned}$$

Применим к результату операцию $\langle \cdot \rangle$, воспользуемся также формулами

$$\begin{aligned} (\alpha_k \mathbf{u}_k - \alpha_k \mathbf{w}_\ell^{(k)}) \cdot \nabla p = \\ = \operatorname{div} [p \alpha_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)})] - p \operatorname{div} [\alpha_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{w}_\ell^{(k)})], \\ \operatorname{div} (\alpha_k \Pi_k^{NS}) \cdot \mathbf{u}_k = \operatorname{div} (\alpha_k \Pi_k^{NS} \mathbf{u}_k) - \\ - \alpha_k \Pi_k^{NS} : \nabla \mathbf{u}_k = \operatorname{div} (\alpha_k \Pi_k^{NS} \mathbf{u}_k) - \\ - \alpha_k \left[\frac{\mu_k}{2} |\nabla \mathbf{u}_k + (\nabla \mathbf{u}_k)^T|^2 + \left(\lambda_k - \frac{2}{3} \mu_k \right) (\operatorname{div} \mathbf{u}_k)^2 \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где $:$ означает скалярное произведение тензоров, и с учетом уравнения (12) выведем (15).

Теорема сохраняет силу при $\tau = 0$, когда следует обнулить $\mathbf{w}_\ell^{(k)}, \mathbf{w}_0^{(k)}$ и \mathcal{P}^τ , и тогда она относится к исходной системе уравнений (1), (2).

Перейдем к агрегированным регуляризованным системам уравнений односкоростной вязкой

несжимаемой смеси. Для этого аналогично [9, раздел 2] применим операцию $\langle \cdot \rangle$ к уравнению баланса импульса (11), в результате и остальных уравнениях (10) и (8), (9) положим $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}$, $1 \leq k \leq K$ и выведем следующую систему с параметром $\ell = 0, 1$

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_k + \operatorname{div}[\alpha_k(\mathbf{u} - \mathbf{w}_{\ell k})] &= 0, \\ 1 \leq k \leq K, \quad \langle \alpha_k \rangle &= 1, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_\ell) \otimes \mathbf{u}] + (1 - \ell \tau \operatorname{div} \mathbf{u}) \nabla p &= \\ = \operatorname{div}(\Pi^{NS} + \mathbf{u} \otimes \rho \mathbf{w}_0) + \langle [\alpha_k - \ell \tau \operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u})] \mathbf{f}_k \rangle. \end{aligned} \tag{22}$$

Основными искомыми функциями теперь являются $\alpha_1, \dots, \alpha_K, \mathbf{u}, p$. Снова $\rho = \langle \rho_k \alpha_k \rangle$.

Возникший средний тензор вязкости Навье–Стокса имеет стандартный вид

$$\begin{aligned} \Pi^{NS} &= \mu[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T - \frac{2}{3}(\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{I}] + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{I}, \\ \mu &= \langle \mu_k \alpha_k \rangle, \quad \lambda = \langle \lambda_k \alpha_k \rangle, \end{aligned}$$

где средние коэффициенты вязкости μ и λ являются функциями $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ (и поэтому (x, t)), даже если μ_k (или λ_k) – постоянные, не все равные друг другу.

Регуляризующие скорости $\mathbf{w}_1^{(k)}$ и $\mathbf{w}_0^{(k)}$ при $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}$, $1 \leq k \leq K$ переходят в следующие

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{1k} &= \frac{\tau}{\rho_k \alpha_k} [\operatorname{div}(\rho_k \alpha_k \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \alpha_k (\nabla p - \mathbf{f}_k)] = \\ &= \tau \left[\frac{1}{\alpha_k} \operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho_k} (\nabla p - \mathbf{f}_k) \right] = \\ &= \frac{\tau}{\alpha_k} \operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u}) \mathbf{u} + \mathbf{w}_{0k}, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\mathbf{w}_{0k} = \tau \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_k} (\nabla p - \mathbf{f}_k) \right]. \tag{24}$$

Средние “массовые” регуляризующие скорости, возникшие в уравнении (22), таковы

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \frac{1}{\rho} \langle \rho_k \alpha_k \mathbf{w}_{1k} \rangle = \\ &= \frac{\tau}{\rho} [\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \langle \alpha_k \mathbf{f}_k \rangle] = \\ &= \frac{\tau}{\rho} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} + \mathbf{w}_0, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0 &= \frac{1}{\rho} \langle \rho_k \alpha_k \mathbf{w}_{0k} \rangle = \\ &= \tau \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} (\nabla p - \langle \alpha_k \mathbf{f}_k \rangle) \right]. \end{aligned} \tag{26}$$

Выписанная система уравнений при $\ell = 0$ формально возникает из той же системы при $\ell = 1$, ес-

ли упростить \mathbf{w}_{1k} до \mathbf{w}_{0k} , \mathbf{w}_1 до \mathbf{w}_0 и отбросить $\tau \operatorname{div} \mathbf{u}$ и $\tau \operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u})$ в (22).

Применение операций $\langle \cdot \rangle$ и $\langle \rho_k \cdot \rangle$ к первым уравнениям (21) приводит к уравнениям неразрывности и баланса полной массы вида

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} - \langle \alpha_k \mathbf{w}_{\ell k} \rangle) = 0, \tag{27}$$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_\ell)] = 0. \tag{28}$$

Из формул (23), (24) вытекает выражение для средней регуляризующей скорости

$$\begin{aligned} \langle \alpha_k \mathbf{w}_{\ell k} \rangle &= \tau \left[\ell \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + (1 - \ell)(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \right\rangle \nabla p - \left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \mathbf{f}_k \right\rangle \right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Поэтому уравнение неразрывности (27) эквивалентно уравнению для p вида (14) с

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\tau &= \mathbf{u} - \tau[\ell \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + (1 - \ell)(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] + \\ &\quad + \tau \left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \mathbf{f}_k \right\rangle. \end{aligned}$$

Уравнение (28) и последнее уравнение для p аналогичны (13) и (14) и формально получаются из них при $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}$, $1 \leq k \leq K$.

Для сравнения укажем, что процедура агрегирования в применении к исходным уравнениям (3) и (2) приводит к следующей системе уравнений

$$\partial_t \alpha_k + \operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u}) = 0, \quad 1 \leq k \leq K, \quad \langle \alpha_k \rangle = 1, \tag{30}$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \Pi_0^{NS} + \langle \alpha_k \mathbf{f}_k \rangle, \tag{31}$$

$$\Pi_0^{NS} = \mu[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T].$$

Она же возникает из системы (21), (22) при $\tau = 0$ (в том числе обнулении $\mathbf{w}_{\ell k}$, \mathbf{w}_ℓ , \mathbf{w}_0). Для нее уравнение неразрывности (самого стандартного вида) и уравнения для ρ и p таковы

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \quad \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \operatorname{div}(\rho^{-1} \nabla p) &= \operatorname{div}[\rho^{-1} \operatorname{div} \Pi_0^{NS} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \rho^{-1} \langle \alpha_k \mathbf{f}_k \rangle]. \end{aligned} \tag{32}$$

Выше в выражении для Π_0^{NS} уже учтено уравнение $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Уравнение для p получается использованием в уравнении (31) вытекающей из второго уравнения (32) формулы $\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho[\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]$ и применения $\operatorname{div}(\rho^{-1} \cdot)$ к результату.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{f}_k = \rho_k \nabla G + \mathbf{h}_k$, где $G = G(x)$. Для системы уравнений (21)–(26) при $\ell = 0, 1$ верно уравнение баланса полной энергии смеси $\overline{\mathcal{E}} = 0.5\rho|\mathbf{u}|^2 - \rho G$:

$$\begin{aligned} & \partial_t \bar{\mathcal{E}} + \operatorname{div}[\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{u} - \mathbf{w}_\ell) + p(\mathbf{u} - \langle \alpha_k \mathbf{w}_{\ell k} \rangle) - \\ & - \Pi^{NS} \mathbf{u} - \rho(\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}] + \bar{\mathcal{P}}^{NS} + \bar{\mathcal{P}}^\tau = \\ & = \langle \alpha_k \mathbf{h}_k \rangle \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{w}_0) - \ell \tau (\operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u}) \mathbf{h}_k) \cdot \mathbf{u} + \\ & + \tau \left(\left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \mathbf{h}_k \right\rangle - \frac{1}{\rho} \langle \alpha_k \mathbf{h}_k \rangle \right) \cdot \nabla p \end{aligned} \quad (33)$$

с диссипацией $\bar{\mathcal{P}}^{NS} + \bar{\mathcal{P}}^\tau \geq 0$, где

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}}^{NS} & := \frac{\mu}{2} |\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T|^2 + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \geq 0, \\ \bar{\mathcal{P}}^\tau & := \frac{1}{\tau} \rho |\mathbf{w}_0|^2 + \tau \left(\left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \right\rangle - \frac{1}{\rho} \right) |\nabla p|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Действительно, в силу уравнения баланса полной массы (28) имеем

$$-\partial_t (\rho G) = \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_\ell)G] - \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_\ell) \cdot \nabla G.$$

Уравнение баланса импульса (22) умножим скалярно на \mathbf{u} и с помощью формулы (17) и уравнения (28) для ρ выведем

$$\begin{aligned} & 0.5 \partial_t (\rho |\mathbf{u}|^2) + 0.5 \operatorname{div}[\rho |\mathbf{u}|^2 (\mathbf{u} - \mathbf{w}_\ell)] + \\ & + (1 - \ell \tau \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \nabla p = \operatorname{div} \Pi^{NS} \cdot \mathbf{u} + \\ & + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \rho \mathbf{w}_0) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\langle \alpha_k \mathbf{f}_k \rangle - \ell \tau (\operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u}) \mathbf{f}_k)). \end{aligned}$$

Сложим последние два равенства, выполним преобразования типа (19)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \rho \mathbf{w}_0) \cdot \mathbf{u} & = \operatorname{div}[\rho(\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}] - \rho \mathbf{w}_0 \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \\ & = \operatorname{div}[\rho(\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}] - \tau^{-1} \rho |\mathbf{w}_0|^2 + \mathbf{w}_0 \cdot (\nabla p - \langle \alpha_k \mathbf{f}_k \rangle) \end{aligned}$$

с учетом определения \mathbf{w}_0 , см. (26), и выведем

$$\begin{aligned} & \partial_t \bar{\mathcal{E}} + \operatorname{div}[\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{u} - \mathbf{w}_\ell) - \rho(\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}] + \\ & + [\mathbf{u} - \ell \tau (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u} - \mathbf{w}_0] \cdot \nabla p + \tau^{-1} \rho |\mathbf{w}_0|^2 = \\ & = \operatorname{div} \Pi^{NS} \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{u} - \mathbf{w}_0) \cdot \langle \alpha_k \mathbf{f}_k \rangle - \\ & - \ell \mathbf{u} \cdot \tau (\operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u}) \mathbf{f}_k) - \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_\ell) \cdot \nabla G. \end{aligned} \quad (34)$$

Преобразуем слагаемое с ∇p . Заметим сначала, что в силу формул (26) и (29) имеем

$$\begin{aligned} & \langle \alpha_k \mathbf{w}_{\ell k} \rangle - \ell \tau (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u} - \mathbf{w}_0 = \\ & = \tau \left(\left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \right\rangle - \frac{1}{\rho} \right) \nabla p - \tau \left(\left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \mathbf{f}_k \right\rangle - \frac{1}{\rho} \langle \alpha_k \mathbf{f}_k \rangle \right) = \\ & = \tau \left(\left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \right\rangle - \frac{1}{\rho} \right) \nabla p - \tau \left(\left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \mathbf{h}_k \right\rangle - \frac{1}{\rho} \langle \alpha_k \mathbf{h}_k \rangle \right). \end{aligned}$$

Последняя формула позволяет записать

$$\begin{aligned} & [\mathbf{u} - \ell \tau (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u} - \mathbf{w}_0] \cdot \nabla p = (\mathbf{u} - \langle \alpha_k \mathbf{w}_{\ell k} \rangle) \cdot \nabla p + \\ & + \tau \left(\left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \right\rangle - \frac{1}{\rho} \right) |\nabla p|^2 - \tau \left(\left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \mathbf{h}_k \right\rangle - \frac{1}{\rho} \langle \alpha_k \mathbf{h}_k \rangle \right) \cdot \nabla p, \end{aligned}$$

и далее в силу уравнения неразрывности (27) имеем также

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u} - \langle \alpha_k \mathbf{w}_{\ell k} \rangle) \cdot \nabla p = \operatorname{div}[p(\mathbf{u} - \langle \alpha_k \mathbf{w}_{\ell k} \rangle)] - \\ & - p \operatorname{div}(\mathbf{u} - \langle \alpha_k \mathbf{w}_{\ell k} \rangle) = \operatorname{div}[p(\mathbf{u} - \langle \alpha_k \mathbf{w}_{\ell k} \rangle)]. \end{aligned}$$

Наконец, воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} \Pi^{NS} \cdot \mathbf{u} = \operatorname{div}(\Pi^{NS} \mathbf{u}) - \\ & - \left[\frac{\mu}{2} |\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T|^2 + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \right], \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{u} - \mathbf{w}_0) \cdot \langle \alpha_k \mathbf{f}_k \rangle - \ell \mathbf{u} \cdot \tau (\operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u}) \mathbf{f}_k)]|_{\Gamma_k = \rho_k \nabla G} = \\ & = [\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_0) - \ell \tau \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \mathbf{u}] \cdot \nabla G = \\ & = \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_\ell) \cdot \nabla G \end{aligned}$$

и выведем уравнение баланса полной энергии (33). В нем $\bar{\mathcal{P}}^\tau \geq 0$ в силу неравенства Коши

$$1 = \langle \alpha_k \rangle^2 = \left\langle \sqrt{\rho_k} \alpha_k \sqrt{\frac{1}{\rho_k}} \right\rangle^2 \leq \langle \rho_k \alpha_k \rangle \left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \right\rangle = \rho \left\langle \frac{\alpha_k}{\rho_k} \right\rangle.$$

Уравнение (33) сохраняет силу и при $\tau = 0$, в том числе при обнулении $\mathbf{w}_{\ell k}$, \mathbf{w}_ℓ , \mathbf{w}_0 и $\bar{\mathcal{P}}^\tau$, и тогда оно относится к системе уравнений (30), (31).

Рассмотрим также семейство систем уравнений с общей регуляризующей скоростью

$$\begin{aligned} & \partial_t \alpha_k + \operatorname{div}[\alpha_k (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}})] = 0, \\ & 1 \leq k \leq K, \quad \langle \alpha_k \rangle = 1, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}}) \otimes \mathbf{u}] + (1 - \tau \rho^{-1} \langle \rho_k d_k \rangle) \nabla p = \\ & = \operatorname{div}(\Pi^{NS} + \mathbf{u} \otimes \rho \mathbf{w}_0) + \langle (\alpha_k - \tau d_k) \mathbf{f}_k \rangle, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_0 + \tau \rho^{-1} \langle \rho_k d_k \rangle \mathbf{u}, \quad (38)$$

где \mathbf{w}_0 дается формулой (26), а d_1, \dots, d_K — произвольные функции (их размерность должна быть сек⁻¹). При $d_1 = \dots = d_K = 0$ система принимает самый простой вид

$$\begin{aligned} & \partial_t \alpha_k + \operatorname{div}[\alpha_k (\mathbf{u} - \mathbf{w}_0)] = 0, \\ & 1 \leq k \leq K, \quad \langle \alpha_k \rangle = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_0) \otimes \mathbf{u}] + \nabla p = \\ & = \operatorname{div}(\Pi^{NS} + \mathbf{u} \otimes \rho \mathbf{w}_0) + \langle \alpha_k \mathbf{f}_k \rangle. \end{aligned}$$

При $d_k = \operatorname{div}(\alpha_k \mathbf{u})$ имеем $\rho^{-1} \langle \rho_k d_k \rangle = \rho^{-1} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})$ и $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_1$, см. (25). При $d_k = \rho \operatorname{div} \left(\frac{\alpha_k}{\rho_k} \mathbf{u} \right)$ имеем $\rho^{-1} \langle \rho_k d_k \rangle = \operatorname{div} \mathbf{u}$ и $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_0 + \tau (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u} = \tau \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \rho^{-1} (\nabla p - \langle \alpha_k \mathbf{f}_k \rangle)$.

Применение операций $\langle \cdot \rangle$ и $\langle \rho_k \cdot \rangle$ к первым уравнениям (36) с учетом (38) и (26) приводит к уравнениям неразрывности и баланса полной массы и затем уравнению для p

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}}) = 0, \quad (39)$$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}})] = 0, \quad (40)$$

$$\operatorname{div}(\tau \rho^{-1} \nabla p) =$$

$$= \operatorname{div}\{\mathbf{u} - \tau[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \rho^{-1}\langle \rho_k d_k \rangle \mathbf{u} - \rho^{-1}\langle \alpha_k \mathbf{f}_k \rangle]\}.$$

В первых двух уравнениях теперь стоит одна и та же регуляризирующая скорость $\tilde{\mathbf{w}}$ в отличие от предыдущих систем.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{f}_k = \rho_k \nabla G + \mathbf{h}_k$, где $G = G(x)$. Для системы уравнений (36)–(38) и (26) верно уравнение баланса полной энергии смеси

$$\partial_t \bar{\mathcal{E}} + \operatorname{div}[(\bar{\mathcal{E}} + p)(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}}) - \Pi^{NS} \mathbf{u} - \rho(\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}] +$$

$$+ \bar{\mathcal{P}}^{NS} + \tilde{\mathcal{P}}^\tau = \langle \alpha_k \mathbf{h}_k \rangle \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{w}_0) - \tau \langle d_k \mathbf{h}_k \rangle \cdot \mathbf{u}$$

$$c \tilde{\mathcal{P}}^\tau = \tau^{-1} \rho |\mathbf{w}_0|^2 \geq 0 \text{ и диссипацией } \bar{\mathcal{P}}^{NS} + \tilde{\mathcal{P}}^\tau \geq 0.$$

Схема вывода указанного уравнения прежняя. В силу уравнений (40) и (37) для последней системы уравнений равенство типа (34) приобретает вид

$$\partial_t \bar{\mathcal{E}} + \operatorname{div}[\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}}) - \rho(\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}] +$$

$$+ [\mathbf{u} - \tau \rho^{-1}\langle \rho_k d_k \rangle \mathbf{u} - \mathbf{w}_0] \cdot \nabla p + \tau^{-1} \rho |\mathbf{w}_0|^2 =$$

$$= \operatorname{div} \Pi^{NS} \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{u} - \mathbf{w}_0) \cdot \langle \alpha_k \mathbf{f}_k \rangle -$$

$$- \mathbf{u} \cdot \tau \langle d_k \mathbf{f}_k \rangle - \rho(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}}) \cdot \nabla G.$$

Далее с помощью уравнений (38) и (39) имеем

$$[\mathbf{u} - \tau \rho^{-1}\langle \rho_k d_k \rangle \mathbf{u} - \mathbf{w}_0] \cdot \nabla p =$$

$$= (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}}) \cdot \nabla p = \operatorname{div}[p(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}})],$$

$$[(\mathbf{u} - \mathbf{w}_0) \cdot \langle \alpha_k \mathbf{f}_k \rangle - \mathbf{u} \cdot \tau \langle d_k \mathbf{f}_k \rangle] |_{f_k = \rho_k \nabla G} = \rho(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}}) \cdot \nabla G.$$

Эти формулы вместе с (35) завершают вывод.

Отметим, что в данном кратком сообщении исходное уравнение (2) было взято не в самом общем виде (в том числе опущены обменные слага-

емые). Более общие варианты планируется рассмотреть в дальнейшем.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 22-11-00126.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
2. Ishii M., Hibiki T. Thermo-fluid dynamics of two-phase flow. 2nd ed. N.Y.: Springer, 2011.
3. Vreman A.W. // J. Comput. Phys. 2011. V. 230. P. 1639–1651.
4. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
5. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
6. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.–Ижевск: РХД, 2009.
7. Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. // ДАН. 2014. Т. 459. № 4. С. 395–399.
8. Балашов В.А., Савенков Е.Б. // Прикл. мех. техн. физ. 2018. Т. 59. № 3. С. 57–68.
9. Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Шильников Е.В. // ЖВМиМФ. 2019. Т. 59. № 11. С. 1899–1914.
10. Balashov V., Zlotnik A. // J. Sci. Comput. 2021. V. 86. Article 33. P. 1–29.
11. Иванов А.В., Крапошин М.В., Елизарова Т.Г. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 61. С. 1–27.
12. Злотник А.А. // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 4. С. 65–79.

ON THE CONSTRUCTION OF REGULARIZED EQUATIONS OF MOTION FOR A MIXTURE OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUIDS

A. A. Zlotnik^{a,b}

^a Higher School of Economics University, Moscow, Russian Federation

^b Federal Research Center Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

A regularization of two types and aggregation are performed for the system of equations of motion for a multi-velocity mixture of viscous incompressible fluids, and new multi-velocity and single-velocity systems are constructed. For all of them, elliptic equations for the pressure and dissipative equations for the balance of the total energy of the mixture (the sum of its kinetic and potential energies) are derived.

Keywords: equations of motion for a mixture of viscous incompressible fluids, regularization, aggregation, pressure equation, total energy balance equation

УДК 511.36

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЗНАЧЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С ПОЛИАДИЧЕСКИМИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2022 г. В. Г. Чирский^{1,*}

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 10.07.2022 г.

После доработки 18.08.2022 г.

Принято к публикации 20.08.2022 г.

Доказаны теоремы о бесконечной линейной независимости значений обобщенных гипергеометрических рядов вида $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_{m-1})_n z^n$, среди параметров которых трансцендентные полиадические числа Лиувилля.

Ключевые слова: бесконечная линейная независимость, полиадические числа Лиувилля, аппроксимации Эрмита-Паде

DOI: 10.31857/S2686954322050071

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье доказываются теоремы, сформулированные в статье [1]. В них установлена арифметическая природа значений обобщенных гипергеометрических рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_{m-1})_n z^n, \quad (1)$$

где символ Похгаммера γ_n определяется равенствами $\gamma_0 = 1$ и $\gamma_n = \gamma(\gamma + 1) \dots (\gamma + n - 1)$ при $n \geq 1$.

Частные случаи этой задачи, относящиеся к рядам

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n z^n, \quad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n z^n$$

рассмотрены в работах [1–3].

Во всех этих работах существенно использованы аппроксимации Эрмита-Паде из работы Ю.В. Нестеренко [4].

Дадим необходимые для дальнейшего определения. Символ $\text{ord}_p a$ обозначает степень, в которой простое число p входит в разложение рационального числа a на множители. p -адическая норма числа a определяется равенством $|a|_p =$

$= p^{-\text{ord}_p a}$. Поле p -адических чисел \mathbb{Q}_p представляет собой пополнение поля рациональных чисел по p -адической норме. Кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых p -адических чисел по всем простым числам p . Теория полиадических чисел изложена в книге [5]. Элементы θ кольца целых полиадических чисел можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых в соответствующем поле p -адических чисел \mathbb{Q}_p обозначаем $\theta^{(p)}$. Бесконечная линейная независимость полиадических чисел $\theta_1, \dots, \theta_m$ означает, что для любой ненулевой линейной формы $h_1 x_1 + \dots + h_m x_m$ с целыми коэффициентами h_1, \dots, h_m существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле \mathbb{Q}_p выполняется неравенство $h_1 \theta_1^{(p)} + \dots + h_m \theta_m^{(p)} \neq 0$.

Вместе с тем представляют интерес задачи, в которых рассматриваются простые числа только из некоторых собственных подмножеств множества простых чисел. Будем говорить в таком случае о бесконечной линейной независимости с ограничениями на указанное множество. Ограничения на подмножества простых чисел получены при рассмотрении простых чисел из совокупностей арифметических прогрессий. Этот подход был использован в работах В.В. Зудилина, Т. Матала-ахо, А.-М. Эрнвалл-Хитонен, Т. Сеппала [6,

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: vgchirskii@yandex.ru

7], относящихся к так называемому ряду Эйлера

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(-z)^n.$$

Каноническое представление элемента θ кольца целых полиадических чисел имеет вид ряда

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, \quad a_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq a_n \leq n.$$

Разумеется, ряд, члены которого – целые числа, сходящийся во всех полях p – адических чисел, представляет собой целое полиадическое число.

Будем называть полиадическое число θ *полиадическим числом Лиувилля* (или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$, выполнено неравенство $|\theta - A|_p < A^{-n}$. Легко доказать, что полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля p – адических чисел.

Дадим краткое описание места рассматриваемой задачи в общем направлении исследования арифметической природы значений обобщенных гипергеометрических рядов, т.е. рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n} z^n.$$

Если такие ряды имеют рациональные параметры, то они сводятся к E - или G -функциям Зигеля или к F -рядам. Это позволяет применить к ним метод Зигеля-Шидловского в теории трансцендентных чисел и его модификации, см. [8–15]. Если среди параметров содержатся алгебраические иррациональные числа, то к исследованию арифметических свойств рядов применимы аппроксимации Эрмита-Паде, см. [16–18]. Этот краткий обзор не претендует на полноту, но позволяет получить представление о характере основных результатов.

Еще раз отметим, что цель работы – исследование арифметических свойств значений рядов (1), среди параметров которых – трансцендентные полиадические числа Лиувилля. Значения рассматриваемых рядов вычисляются в точке ξ , являющейся натуральным числом, либо в точке Ξ , которая представляет собой полиадическое число Лиувилля.

2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть λ_0 – произвольное натуральное число. Положим

$$s_0 = [\exp \lambda_0] + 1.$$

Здесь и далее символ $[a]$ обозначает целую часть числа a . Пусть $\text{ord}_p a$ обозначает степень, в которой простое число p входит в разложение целого числа a на простые множители.

Пусть λ_1 – произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p \leq s_0 + C_1 \lambda_0^2$ выполняется неравенство $\text{ord}_p \lambda_1 \geq m s_0 \ln s_0$ и пусть $s_1 = [\exp \lambda_1] + 1$. Здесь и всюду далее символами $C_r, r = 1, 2, \dots$ обозначены некоторые положительные абсолютные постоянные.

При $k \geq 2$ пусть λ_k – произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p \leq s_{k-1} + C_1 \lambda_{k-1}^2$ выполняется неравенство

$$\text{ord}_p \lambda_k \geq m s_{k-1} \ln s_{k-1} \tag{2}$$

и пусть

$$s_k = [\exp \lambda_k] + 1. \tag{3}$$

Пусть $\mu_{i,0}, i = 1, \dots, m-1$ – натуральные числа. Пусть для любых $i = 1, \dots, m-1, k \geq 1$ числа $\mu_{i,k}$ – неотрицательные целые и удовлетворяют неравенству

$$\mu_{i,k} \leq \lambda_k. \tag{4}$$

Пусть

$$\alpha_{i,k} = \sum_{l=0}^k \mu_{i,l} \lambda_l, \quad i = 1, \dots, m-1, \tag{5}$$

$$\alpha_i = \sum_{l=0}^{\infty} \mu_{i,l} \lambda_l, \quad i = 1, \dots, m-1. \tag{6}$$

Далее числа $K_i, i = 1, 2, \dots$ – натуральные. Для всех $k \geq K_1$ ввиду (2)–(5) выполняется неравенство

$$1 \leq \alpha_{i,k} = \sum_{l=0}^k \mu_{i,l} \lambda_l \leq 1.1 \lambda_k^2, \quad i = 1, \dots, m-1. \tag{7}$$

Если для всех $l \geq K_2$ выполняются равенства $\mu_{i,l} = 0$, то α_i – натуральное число.

Докажем, что в противном случае ряд, определенный равенством (6), представляет собой полиадическое число Лиувилля. Этот ряд сходится в любом поле \mathbb{Q}_p согласно (2), (3) и его сумма в этом поле представляет собой целое p – адическое число.

Более того, наложенные условия означают, что для любых натуральных чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$, выполнено неравенство $|\theta - A|_p < A^{-n}$. Действительно, для всех простых чисел p , удовлетворяющих нера-

венству $p \leq s_k + C_1 \lambda_k^2$, при $k \geq K_3$, ввиду (2)–(7), имеем

$$|\alpha_i - \alpha_{i,k}|_p \leq \left| \sum_{l=k+1}^{\infty} \mu_{i,l} \lambda_l \right|_p \leq |\lambda_{k+1}|_p \leq p^{-ms_k \ln s_k} \leq s_k^{-ms_k} \leq \alpha_{i,k}^{-ms_k}.$$

При всех k положим

$$f_{0,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{1,k})_n \dots (\alpha_{m-1,k})_n z^n, \tag{8}$$

$$f_{m-1,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{1,k} + 1)_n \dots (\alpha_{m-1,k} + 1)_n z^n,$$

а при $i = 1, \dots, m - 2$

$$f_{i,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{1,k} + 1)_n \dots (\alpha_{i,k} + 1)_n \times (\alpha_{i+1,k})_n \dots (\alpha_{m-1,k})_n z^n. \tag{9}$$

Кроме того, будем рассматривать (имеющие вид (1)) ряды

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_{m-1})_n z^n, \tag{10}$$

$$f_{m-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_{m-1} + 1)_n z^n,$$

а при $i = 1, \dots, m - 2$

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_i + 1)_n (\alpha_{i+1})_n \dots (\alpha_{m-1})_n z^n. \tag{11}$$

Коэффициенты рядов (8), (9) – натуральные числа, поэтому в любом поле \mathbb{Q}_p они сходятся при

$|z|_p < p^{\frac{m-1}{p-1}}$. Поскольку $\alpha_i, i = 1, \dots, m - 1$ можно рассматривать как целые p – адические числа, выполняется неравенство

$$|(\alpha_i)_n|_p \leq p^{\left(\frac{-n}{p-1} + (p-1) \log_p n\right)}.$$

Действительно, пусть ω – целое p – адическое число. Представим его в виде

$$\omega = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + r_{n+1} = A_n + r_{n+1},$$

где $a_i \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$, $i = 0, 1, \dots, n$, а число r_{n+1} – целое p – адическое и $|r_{n+1}|_p < p^{-n-1}$. Тогда величина $(\omega)_n$ может быть представлена в виде суммы величины $(A_n)_n$ и конечного числа слагаемых, каждое из которых имеет p – адическую норму не больше, чем p^{-n-1} . Так как A_n – натуральное число,

$|(A_n)_n|_p \leq p^{\left(\frac{-n}{p-1} + C \ln n\right)}$ с некоторой постоянной C .

Следовательно, $|(\omega)_n|_p \leq p^{\left(\frac{-n}{p-1} + C \ln n\right)}$. Это неравенство доказывает сформулированное утверждение. Поэтому ряды (10), (11) также сходятся при $|z|_p < p^{\frac{m-1}{p-1}}$.

Отметим важное для дальнейшего тождество, которое легко следует из определений (8):

$$f_{0,k}(z) = 1 + \alpha_{1,k} \dots \alpha_{m-1,k} z f_{m-1,k}(z). \tag{12}$$

Сформулируем основные результаты работы. Пусть M – натуральное число. Рассмотрим приведенную систему вычетов по $\text{mod}(M)$. Как обычно, число элементов этой системы обозначается $\varphi(M)$, где $\varphi(M)$ – функция Эйлера. Пусть произвольным образом выбраны p различных элементов a_1, \dots, a_p этой приведенной системы вычетов. Будем обозначать $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ множества натуральных значений, принимаемых прогрессиями $a_i + Mk$, $k \in \mathbb{Z}$. Используя стандартное обозначение \mathbb{P} для множества простых чисел, будем обозначать $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$ множество простых чисел, входящих в объединение множеств $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$.

Теорема 1. Пусть $m \geq 3, M, p$ – натуральные числа. Пусть

$$\varphi(M) > m, \quad pt > \varphi(M)(m - 1).$$

Тогда для любых целых чисел h_0, \dots, h_{m-1} , не равных нулю одновременно и любого натурального числа ξ существует бесконечное множество простых чисел p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$ таких, что в поле \mathbb{Q}_p выполняется неравенство

$$|L(\xi)|_p = |h_0 f_0(\xi) + \dots + h_{m-1} f_{m-1}(\xi)|_p > 0. \tag{13}$$

Пусть натуральные числа ϑ_k удовлетворяют при любом k неравенству

$$\vartheta_k \leq \lambda_k. \tag{14}$$

Пусть

$$\Xi = \sum_{l=0}^{\infty} \vartheta_l \lambda_l. \tag{15}$$

Теорема 2. Пусть $m \geq 3, M, p$ – натуральные числа. Пусть

$$\varphi(M) > m, \quad pt > \varphi(M)(m - 1).$$

Тогда для любых целых чисел h_0, \dots, h_{m-1} , не равных нулю одновременно и числа Ξ , определенного равенством (15) и условиями (14), существует бесконечное множество простых чисел p из множества

$\mathbb{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$ таких, что в поле \mathbb{Q}_p выполняется неравенство

$$|L(\Xi)|_p = |h_0 f_0(\Xi) + \dots + h_{m-1} f_{m-1}(\Xi)|_p > 0. \quad (16)$$

Отметим, что в неравенствах (13) и (16) символы $f_0(\xi), \dots, f_{m-1}(\xi), f_0(\Xi), \dots, f_{m-1}(\Xi)$ означают суммы этих рядов в поле \mathbb{Q}_p .

3. АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА-ПАДЕ

Приведенные выше формулировки теорем отличаются от формулировок из статьи [1] тем, что здесь используется обозначение $m - 1$ для числа, обозначенного m в работе [1]. Это связано с тем, что в доказательстве существенно использованы результаты и сохранены соответствующие обозначения из работы Ю.В. Нестеренко [4].

При каждом натуральном k рассмотрим числа (5) и обозначим $\alpha_{m,k} = 1$. Для любого $N = ms + r$, где $1 \leq r \leq m$, полагаем

$$\alpha_{N,k} = \alpha_{r,k} + s. \quad (17)$$

Число t определим равенством $t = \left\lfloor \frac{N-1}{m-1} \right\rfloor$. Используя обычное обозначение

$${}_m F_0(\alpha_1, \dots, \alpha_m, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_m)_n}{n!} z^n,$$

положим

$$f_{N,k}(z) = {}_m F_0(\alpha_{N+1,k}, \dots, \alpha_{N+m,k}, z). \quad (18)$$

Обозначим

$$u_{N,k}(z) = \alpha_{1,k} \dots \alpha_{N,k} z^t f_{N,k}(z). \quad (19)$$

Л е м м а 1. Для любого N существуют многочлены $P_{N,i,k}(z), i = 0, 1, \dots, m - 1$ такие, что выполняется равенство

$$u_{N,k}(z) = P_{N,0,k}(z)u_{0,k}(z) + \dots + P_{N,m-1,k}(z)u_{m-1,k}(z). \quad (20)$$

При этом степени многочленов $P_{N,i,k}(z), i = 0, 1, \dots, m - 1$ не превосходят числа $t - s$, ряды $f_{0,k}(z), \dots, f_{m-1,k}(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ и выполняются рекуррентные соотношения:

$$u_{N+m,k}(z) = u_{N+1,k}(z) - \alpha_{N+1,k} u_{N,k}(z), \quad (21)$$

если $N = 0$ или $N \geq 1$ и число N не делится на число $m - 1$,

$$u_{N+m,k}(z) = u_{N+1,k}(z) - \alpha_{N+1,k} z u_{N,k}(z), \quad (22)$$

если $N \geq 1$ и число N делится на число $m - 1$, и для любого $i = 0, 1, \dots, m - 1$

$$P_{N+m,i,k}(z) = P_{N+1,i,k}(z) - \alpha_{N+1,k} P_{N,i,k}(z), \quad (23)$$

если $N = 0$ или $N \geq 1$ и число N не делится на число $m - 1$,

$$P_{N+m,i,k}(z) = P_{N+1,i,k}(z) - \alpha_{N+1,k} z P_{N,i,k}(z), \quad (24)$$

если $N \geq 1$ и число N делится на число $m - 1$.

При этом для всех неотрицательных целых значений N имеет место равенство

$$\Delta_{N,k}(z) = (-1)^{mN} \alpha_{1,k} \dots \alpha_{N,k} z^t, \quad (25)$$

где

$$\Delta_{N,k}(z) = |P_{N+j,i,k}(z)|_{i,j=0,1,\dots,m-1}. \quad (26)$$

Эта лемма доказана в работе [18]. Она является непосредственным следствием результатов работы [4]. Точнее говоря, все равенства (20)–(26) могут быть получены способом, указанным в работе [18] из части утверждений, доказанных в [4] (лемма 1, следствие 2, теорема 2, лемма 2).

Отметим, что из равенства (20) следуют равенства

$$\begin{aligned} P_{0,0,k}(z) &= 1, & P_{0,1,k}(z) &= 0, \dots, P_{0,m-1,k}(z) = 0, \\ P_{1,0,k}(z) &= 0, & P_{1,1,k}(z) &= 1, \dots, P_{1,m-1,k}(z) = 0, \\ & & \dots & \\ P_{m-1,0,k}(z) &= 0, & P_{m-1,1,k}(z) &= 0, \dots, P_{m-1,m-1,k}(z) = 1. \end{aligned} \quad (27)$$

4. ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИБЛИЖАЮЩИХ ФОРМ

Рассмотрим при каждом k величину $\max(\alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{m,k})$. Из (5) и (7) следует, что

$$2 \leq \max(\alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{m,k}) + 1 \leq c_0(k) = C_2 (\ln s_k)^2 \quad (28)$$

с независимой от числа k постоянной C_2 .

По определению, высотой $H(P(z))$ многочлена $P(z)$ с целыми коэффициентами называется максимум абсолютных величин его коэффициентов.

Л е м м а 2. Пусть $k \in \mathbb{N}, k \geq K_4, s \in \mathbb{N}, s = s_k$, где число s_k определено равенством (3). Пусть $N = ms_k + r, 1 \leq r \leq m$. Тогда высота $H(P_{N,i,k}(z))$ многочлена $P_{N,i,k}(z), i = 0, 1, \dots, m - 1$ не превосходит числа

$$\exp(s_k \ln s_k + C_3 s_k \ln \ln s_k). \quad (29)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод математической индукции и докажем сначала, что

$$H(P_{N,i,k}(z)) \leq c_0^N (c_0 + 1) \dots (c_0 + s). \quad (30)$$

Основание индукции сразу следует из равенств (27) при $r = 1, \dots, m - 1$. При $r = m$ получаем, ввиду (23)

$$N = m, \quad P_{m,i,k}(z) = P_{1,i,k}(z) - \alpha_{1,k} P_{N,k}(z)$$

и справедливость утверждения следует из неравенства (28).

Индуктивное предположение – пусть при некотором $s, s \geq 1$ и всех $i, i = 0, \dots, m-1$ и всех $r, r = 1, \dots, m$ справедливы неравенства

$$H(P_{m(s-1)+r,i,k}(z)) \leq c_0^{m(s-1)+r} (c_0 + 1) \dots (c_0 + s - 1). \quad (31)$$

При каждом $i, i = 0, 1, \dots, m-1$ выполняется одно из равенств

$$H(P_{ms+r,i,k}(z)) = H(P_{m(s-1)+r+1,i,k}(z) - \alpha_{m(s-1)+r+1,k} P_{m(s-1)+r,i,k}(z)), \quad (32)$$

$$H(P_{ms+r,i,k}(z)) = H(P_{m(s-1)+r+1,i,k}(z) - \alpha_{m(s-1)+r+1,k} z P_{m(s-1)+r,i,k}(z)). \quad (33)$$

Из (17), (28) получаем

$$\alpha_{m(s-1)+r+1,k} = \alpha_{r+1,k} + s - 1 \leq c_0 + s. \quad (34)$$

Если $r \leq m-1$, то и в случае (32) и в случае (33) получаем

$$H(P_{ms+r,i,k}(z)) \leq H(P_{m(s-1)+r+1,i,k}(z)) + \alpha_{m(s-1)+r+1,k} H(P_{m(s-1)+r,i,k}(z)). \quad (35)$$

Используя (31), (34), (35), получаем, поскольку $2c_0 \leq c_0^m$,

$$\begin{aligned} H(P_{ms+r,i,k}(z)) &\leq c_0^{m(s-1)+r+1} (c_0 + 1) \dots (c_0 + s - 1) + \\ &+ c_0^{m(s-1)+r} (c_0 + 1) \dots (c_0 + s) = \\ &= c_0^{m(s-1)+r} (c_0 + 1) \dots (c_0 + s - 1) (2c_0 + s) \leq \\ &\leq 2c_0^{m(s-1)+r} (c_0 + 1) \dots (c_0 + s) \leq \\ &\leq c_0^{ms+r} (c_0 + 1) \dots (c_0 + s). \end{aligned} \quad (36)$$

Рассмотрим случай $r = m$. При каждом $i, i = 0, 1, \dots, m-1$ выполняется одно из равенств

$$H(P_{m(s+1),i,k}(z)) = H(P_{ms+1,i,k}(z) - \alpha_{ms+1,k} P_{ms,i,k}(z)), \quad (37)$$

$$\begin{aligned} H(P_{m(s+1),i,k}(z)) &= \\ &= H(P_{ms+1,i,k}(z) - \alpha_{ms+1,k} z P_{ms,i,k}(z)). \end{aligned} \quad (38)$$

Из (17), (28) получаем

$$\alpha_{ms+1,k} = \alpha_{1,k} + s \leq c_0 + s. \quad (39)$$

Как в случае (37), так и в случае (38) получаем

$$\begin{aligned} H(P_{m(s+1),i,k}(z)) &\leq \\ &\leq H(P_{ms+1,i,k}(z)) + \alpha_{ms+1,k} H(P_{ms,i,k}(z)). \end{aligned} \quad (40)$$

По уже доказанному, имеем

$$H(P_{ms+1,i,k}(z)) \leq c_0^{ms+1} (c_0 + 1) \dots (c_0 + s) \quad (41)$$

По предположению индукции,

$$\begin{aligned} H(P_{ms,i,k}(z)) &= H(P_{m(s-1)+m,i,k}(z)) \leq \\ &\leq c_0^{ms} (c_0 + 1) \dots (c_0 + s - 1). \end{aligned} \quad (42)$$

Из соотношений (39)–(42) получаем

$$\begin{aligned} H(P_{m(s+1),i,k}(z)) &\leq c_0^{ms+1} (c_0 + 1) \dots (c_0 + s) + \\ &+ (c_0 + s) c_0^{ms} (c_0 + 1) \dots (c_0 + s - 1) = \\ &= c_0^{ms} (c_0 + 1) \dots (c_0 + s) (c_0 + 1) \leq \\ &\leq 2c_0^{ms+1} (c_0 + 1) \dots (c_0 + s) \leq \\ &\leq c_0^{m(s+1)} (c_0 + 1) \dots (c_0 + s), \end{aligned} \quad (43)$$

поскольку $2 \leq c_0 \leq c_0^m$.

Индукция проведена и неравенство (30) доказано.

Величина $(c_0 + 1) \dots (c_0 + s)$ выражается через значения гамма-функции Эйлера равенством

$$(c_0 + 1) \dots (c_0 + s) = \frac{\Gamma(c_0 + s + 1)}{\Gamma(c_0 + 1)}. \quad (44)$$

Известно, что для любой постоянной величины a и любого $\delta > 0$ при $|s| \rightarrow +\infty$ равномерно при $-\pi + \delta \leq \arg s \leq \pi - \delta$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(s + a) &= \\ &= \left(s + a - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \frac{1}{2} \pi \ln 2 + O\left(\frac{1}{|s|}\right). \end{aligned} \quad (45)$$

Из (44), (45) сразу следует, что при $s = s_k \rightarrow \infty$, (что равносильно условию: при $k \rightarrow \infty$), имеем

$$(c_0 + 1) \dots (c_0 + s_k) = \exp(s_k \ln s_k + O(s_k)). \quad (46)$$

Величина $c_0^{m(s_k+1)}$ с учетом (28) имеет при $k \geq K_4$ оценку сверху $\exp(C_4 s_k \ln \ln s_k)$.

Вместе с равенством (46) и неравенствами (43) и (36) это доказывает оценку (29) и утверждение леммы.

Следствие 1. Пусть $\xi \in \mathbb{N}$. При условиях леммы при всех $k \geq K_5$ выполняется неравенство

$$|P_{N,i,k}(\xi)| \leq \exp(s_k \ln s_k + C_5 s_k \ln \ln s_k). \quad (47)$$

Следствие 2. Пусть Ξ определено равенством

$$(15). \text{ Пусть } \Xi_k = \sum_{l=0}^k \vartheta_l \lambda_l. \text{ При условиях леммы при всех}$$

$k \geq K_6$ выполняется неравенство

$$|P_{N,i,k}(\Xi_k)| \leq \exp(s_k \ln s_k + C_6 s_k \ln \ln s_k). \quad (48)$$

Доказательства этих следствий практически аналогичны. В следствии 1 точка ξ – фиксированное натуральное число. По лемме 1 степень многочлена $P_{N,i,k}(z)$ равна $t - s$, т.е. не превосходит числа $C_7 s_k$, поэтому, при $k \geq K_5$

$$\begin{aligned} |P_{N,i,k}(\xi)| &\leq C_7 s_k \xi^{C_7 s_k} \exp(s_k \ln s_k + C_3 s_k \ln \ln s_k) \leq \\ &\leq \exp(s_k \ln s_k + C_5 s_k \ln \ln s_k). \end{aligned}$$

В следствии 2 число Ξ_k удовлетворяет неравенству $\Xi_k \leq C_8 (\ln s_k)^2$, поэтому при $k \geq K_6$

$$|P_{N,i,k}(\Xi_k)| \leq C_7 s_k \Xi_k^{C_7 s_k} \exp(s_k \ln s_k + C_3 s_k \ln \ln s_k) \leq \exp(s_k \ln s_k + C_6 s_k \ln \ln s_k).$$

5. ОЦЕНКИ ДЛЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Вместе с формой $L(\xi)$, определенной формулой (13), рассмотрим форму

$$L_k(\xi) = h_0 f_{0,k}(\xi) + \dots + h_{m-1} f_{m-1,k}(\xi) \quad (49)$$

и связанную с ней форму

$$l_k(\xi) = \alpha_{1,k} \dots \alpha_{m-1,k} L_k(\xi) = H_0 u_{0,k}(\xi) + \dots + H_{m-1} u_{m-1,k}(\xi), \quad (50)$$

где функции $u_{N,k}(z)$ определены равенством (19). По условию, не все из целых чисел h_0, \dots, h_{m-1} равны нулю. Пусть $h = \max(h_0, \dots, h_{m-1})$. Тогда

$$H = \max(H_0, \dots, H_{m-1}) \leq \alpha_{1,k} \dots \alpha_{m-1,k} h.$$

Ввиду неравенств (28),

$$H \leq C_2^{m-1} (\ln s_k)^{2m-2}. \quad (51)$$

По лемме 1, равенство (25) означает, что определитель (26), составленный из вычисленных в точке ξ коэффициентов линейных форм $u_{N,k}(\xi), \dots, u_{N+m,k}(\xi)$, определенных равенством (19), отличен от 0. Поэтому среди этих форм найдутся $m-1$ форм, линейно независимых с формой $l_k(\xi)$, определенной в (50). Пусть это – формы

$$u_{N_1,k}(\xi), \dots, u_{N_{m-1},k}(\xi),$$

где

$$\{N_1, \dots, N_{m-1}\} \subset \{N, N+1, \dots, N+m-1\}. \quad (52)$$

Рассмотрим определитель полученной системы форм

$$\Delta_{l,N,k}(\xi) = \begin{vmatrix} H_0 & \dots & H_{m-1} \\ P_{N_1,0,k}(\xi) & \dots & P_{N_1,m-1,k}(\xi) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N_{m-1},0,k}(\xi) & \dots & P_{N_{m-1},m-1,k}(\xi) \end{vmatrix}, \quad (53)$$

представляющий собой, согласно сказанному выше, отличное от 0 целое число.

Рассмотрим формы (49) и (50) в точке $\Xi_k = \sum_{l=0}^k \vartheta_l \lambda_l$. Для формы $l_k(\Xi_k)$ тоже существуют $m-1$ линейных форм среди форм $u_{N,k}(\Xi_k), \dots, u_{N+m,k}(\Xi_k)$ линейно независимых с ней. Пусть это – формы

$$u_{N_1,k}(\Xi_k), \dots, u_{N_{m-1},k}(\Xi_k)$$

где

$$\{N_1, \dots, N_{m-1}\} \subset \{N, N+1, \dots, N+m-1\}.$$

Отметим, что теперь выбор чисел N_1, \dots, N_{m-1} может быть отличен от того выбора (52), что ранее соответствовал определителю (53). Тем не менее мы сохраним для определителя вновь полученной системы из m линейно независимых форм прежнее обозначение $\Delta_{l,N,k}(\Xi_k)$.

Далее числа K_i зависят от числа h , постоянного для рассматриваемой формы $L_k(\xi)$.

Л е м м а 3. Для любого $k \geq K_7$ выполняются неравенства

$$|\Delta_{l,N,k}(\xi)| \leq \exp((m-1)s_k \ln s_k + C_9 s_k \ln \ln s_k), \quad (54)$$

$$|\Delta_{l,N,k}(\Xi_k)| \leq \exp((m-1)s_k \ln s_k + C_{10} s_k \ln \ln s_k). \quad (55)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По следствию 1 леммы 2, (неравенство (47)), при $k \geq K_5$,

$$\begin{aligned} |\Delta_{l,N,k}(\xi)| &\leq m! H \max |P_{N,i,k}(\xi)| \leq \\ &\leq m! H \exp((m-1)s_k \ln s_k + C_5 s_k \ln \ln s_k) \leq \\ &\leq H \exp((m-1)s_k \ln s_k + C_{11} s_k \ln \ln s_k). \end{aligned} \quad (56)$$

Из неравенств (51) и (56) сразу следует (54).

Доказательство неравенства (55) дословно совпадает с доказательством неравенства (54). Единственное различие состоит в использовании следствия 2 леммы 2 (неравенства (48)). При этом K_7 – наибольшее из чисел K_5 и K_6 .

6. ОЦЕНКИ СВЕРХУ ПРОИЗВЕДЕНИЯ НОРМ ПРИБЛИЖАЮЩИХ ФОРМ

Лемма 4. Пусть $k \in \mathbb{N}, k \geq K_8$, где K_8 – эффективная постоянная, $s \in \mathbb{N}$, причем $s = s_k$. Пусть M, ρ – натуральные числа. Пусть $\rho > \frac{\varphi(M)(m-1)}{m}$.

Тогда для любого $N_i \in \{N, N+1 < \dots, N+m-1\}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \prod_p \max_i |u_{N_i,k}(\xi)|_p &\leq \\ &\leq \exp\left(-\frac{\rho m}{\varphi(M)} s_k \ln s_k + C_{12} s_k \sqrt{\ln s_k}\right), \end{aligned} \quad (57)$$

где произведение в левой части этого неравенства взято по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\rho)$, удовлетворяющим неравенствам

$$\exp \sqrt{\ln s_k} \leq p \leq s_k + C_1 (\ln s_k)^2. \quad (58)$$

Л е м м а 5. Пусть $k \in \mathbb{N}, k \geq K_9$, где K_9 – эффективная постоянная, $s \in \mathbb{N}$, причем $s = s_k$. Пусть

M, ρ – натуральные числа. Пусть $\rho > \frac{\varphi(M)(m-1)}{m}$. Тогда для любого $N_i \in \{N, N+1 < \dots, N+m-1\}$ справедливы неравенства

$$\prod_p \max_i |u_{N_i,k}(\Xi_k)|_p \leq \frac{s_k - S_{\alpha_{i,k}+s_k} + S_{\alpha_{i,k}-1} + 1}{p-1}, \quad (65)$$

$$\leq \exp\left(-\frac{\rho m}{\varphi(M)} s_k \ln s_k + C_{13} s_k \sqrt{\ln s_k}\right), \quad (59)$$

где произведение в левой части этого неравенства взято по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$, удовлетворяющим неравенствам (58).

Доказательство леммы 4. Из равенств (18), (19) следует, что

$$u_{N_i,k}(\xi) = \alpha_{1,k} \dots \alpha_{N_i,k} F(\alpha_{N_i,k} + 1, \dots, \alpha_{N_i,k} + m, \xi).$$

Так как для любого простого числа p величина $F(\alpha_{N_i,k} + 1, \dots, \alpha_{N_i,k} + m, \xi)$ представляет собой целое p -адическое число, то

$$\max_i |u_{N_i,k}(\xi)|_p \leq |\alpha_{1,k} \dots \alpha_{N_i,k}|_p \leq |\alpha_{1,k} \dots \alpha_{N,k}|_p,$$

поскольку все $\alpha_{l,k}$ — целые числа и, ввиду (52), $N_i \geq N$. Следовательно,

$$\prod_p \max_i |u_{N_i,k}(\xi)|_p \leq \prod_p |\alpha_{1,k} \dots \alpha_{N,k}|_p, \quad (60)$$

где произведения взяты по любому множеству простых чисел p .

Согласно (17),

$$\begin{aligned} \alpha_{1,k} \dots \alpha_{N,k} &= \alpha_{1,k}(\alpha_{1,k} + 1) \dots (\alpha_{1,k} + s_k) \dots \\ &\quad \alpha_{r,k}(\alpha_{r,k} + 1) \dots (\alpha_{r,k} + s_k) \dots \\ &\quad \alpha_{r+1,k}(\alpha_{r+1,k} + 1) \dots (\alpha_{r+1,k} + s_k - 1) \dots \\ &\quad \alpha_{m,k}(\alpha_{m,k} + 1) \dots (\alpha_{m,k} + s_k - 1). \end{aligned} \quad (61)$$

В разложение величины $\alpha_{1,k} \dots \alpha_{N,k}$ на простые множители, согласно (28), (3), входят только простые числа p с условием

$$p \leq s_k + C_1 \lambda_k^2 \leq s_k + C_1 (\ln s_k)^2. \quad (62)$$

Оценим сверху величину произведения

$$\prod_p |\alpha_{1,k} \dots \alpha_{N,k}|_p, \quad (63)$$

взятого по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$, удовлетворяющим неравенствам (62).

Рассмотрим произведение

$$\alpha_{i,k}(\alpha_{i,k} + 1) \dots (\alpha_{i,k} + s_k) = \frac{(\alpha_{i,k} + s_k)!}{(\alpha_{i,k} - 1)!}, \quad (64)$$

$i = 1, \dots, r.$

Простое число p входит в произведение (64) в степени

$$\begin{aligned} \text{ord}_p(\alpha_{i,k}(\alpha_{i,k} + 1) \dots (\alpha_{i,k} + s_k)) &= \\ &= \frac{\alpha_{i,k} + s_k - S_{\alpha_{i,k}+s_k}}{p-1} - \frac{\alpha_{i,k} - 1 - S_{\alpha_{i,k}-1}}{p-1} = \end{aligned}$$

где символом S_x для натурального числа x обозначена сумма цифр разложения этого числа по степеням p и, следовательно,

$$\begin{aligned} 1 \leq S_x &\leq (p-1)([\log_p x] + 1) \leq \\ &\leq (p-1)(\log_p x + 1). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{s_k + 2}{p-1} - \log_p(\alpha_{i,k} + s_k) - 1 &\leq \\ &\leq \frac{s_k - S_{\alpha_{i,k}+s_k} + S_{\alpha_{i,k}-1} + 1}{p-1} \leq \frac{s_k}{p-1} + \log_p(\alpha_{i,k} - 1). \end{aligned}$$

Поэтому степень (65), с учетом неравенств (28), при $k \geq K_{10}$ лежит в пределах

$$\begin{aligned} \frac{s_k}{p-1} - C_{14} \log_p s_k &\leq \\ &\leq \text{ord}_p(\alpha_{i,k}(\alpha_{i,k} + 1) \dots (\alpha_{i,k} + s_k)) \leq \\ &\leq \frac{s_k}{p-1} + C_{15} \log_p \ln s_k. \end{aligned} \quad (66)$$

Рассмотрим произведение

$$\alpha_{i,k}(\alpha_{i,k} + 1) \dots (\alpha_{i,k} + s_k - 1) = \frac{(\alpha_{i,k} + s_k - 1)!}{(\alpha_{i,k} - 1)!}, \quad (67)$$

$i = r + 1, \dots, m.$

Для каждого из произведений (67) аналогично (66) получаем, что простое число p при $k \geq K_{11}$ входит в это произведение в степени, удовлетворяющей неравенствам

$$\begin{aligned} \frac{s_k}{p-1} - C_{16} \log_p s_k &\leq \\ &\leq \text{ord}_p(\alpha_{i,k}(\alpha_{i,k} + 1) \dots (\alpha_{i,k} + s_k - 1)) \leq \\ &\leq \frac{s_k}{p-1} + C_{17} \log_p \ln s_k. \end{aligned} \quad (68)$$

Таким образом, из неравенств (66), (68) и равенства (61) следует, что для всех рассматриваемых простых чисел p при $k \geq K_{12}$ выполняется неравенство

$$|\alpha_{1,k} \dots \alpha_{N,k}|_p \leq \exp\left(-\frac{\ln p}{p-1} m s_k + C_{18} \ln s_k\right). \quad (69)$$

Неравенство (69) означает, что имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \prod_p |\alpha_{1,k} \dots \alpha_{N,k}|_p &\leq \\ &\leq \exp\left(\sum_p \left(-\frac{\ln p}{p-1} m s_k + C_{18} \ln s_k\right)\right), \end{aligned} \quad (70)$$

где произведение и сумма взяты по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$, удовлетворяющим неравенствам (62). Для этих значений p имеем оценку

$$C_{18} \sum_p \ln s_k \leq C_{19} s_k. \tag{71}$$

Используем равенство

$$\sum_p \frac{\ln p}{p-1} = \sum_p \frac{\ln p}{p} + \sum_p \frac{\ln p}{p(p-1)} = \sum_p \frac{\ln p}{p} + C_{20}, \tag{72}$$

а также известную оценку (см. [19], стр. 129)

$$\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} = \frac{1}{\varphi(M)} \ln x + O(1), \quad x \rightarrow +\infty,$$

где суммирование ведется по всем простым числам $p \leq x$, принадлежащим множеству \mathbf{a} , значе- ний любой из рассматриваемых арифметических прогрессий. Следовательно, ввиду (62) и (72), для таких p при $k \geq K_{13}$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_p \frac{\ln p}{p-1} &= \frac{1}{\varphi(M)} \ln(s_k + C_1 (\ln s_k)^2) m s_k + \\ &+ C_{21} s_k \geq \frac{1}{\varphi(M)} m s_k \ln s_k + C_{22} s_k \end{aligned}$$

и, следовательно, ввиду (70) и (71),

$$\prod_p |\alpha_{1,k} \dots \alpha_{N,k}|_p \leq \exp\left(-\frac{mp}{\varphi(M)} s_k \ln s_k + C_{23} s_k\right), \tag{73}$$

где произведение взято по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$, удовлетворяющим неравенствам (62).

Оценим снизу произведение (63), взятое по всем простым числам p , удовлетворяющим неравенству

$$p \leq \exp \sqrt{\ln s_k}. \tag{74}$$

Ввиду неравенств (66), (68) для этого произведе- ния имеем оценку снизу

$$\begin{aligned} &\prod_p |\alpha_{1,k} \dots \alpha_{N,k}|_p \geq \\ &\geq \exp\left(\sum_p \left(-\frac{\ln p}{p-1} m s_k - C_{24} \ln s_k\right)\right), \end{aligned} \tag{75}$$

где произведение и сумма взяты по всем простым числам p , удовлетворяющим неравенству (74). Используя равенство (72) и следующую из (74) оценку

$$\sum_p \ln s_k \leq C_{25} \sqrt{\ln s_k} \exp \sqrt{\ln s_k},$$

оценим сумму

$$\begin{aligned} \sum_p \left(\frac{\ln p}{p-1} m s_k + C_{24} \ln s_k\right) &\leq m s_k \sum_p \frac{\ln p}{p} + \\ &+ C_{20} m s_k + C_{25} \sqrt{\ln s_k} \exp \sqrt{\ln s_k}. \end{aligned} \tag{76}$$

Известно, что

$$\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1), \quad x \rightarrow +\infty,$$

где суммирование ведется по всем простым чис- лам $p \leq x$. Поэтому при $k \geq K_{14}$ выполнено нера- венство

$$m s_k \sum_p \frac{\ln p}{p} \leq m s_k \sqrt{\ln s_k} + C_{26} s_k. \tag{77}$$

Поэтому, ввиду неравенств (74)–(77), при $k \geq K_{15}$ имеем

$$\sum_p \left(\frac{\ln p}{p-1} m s_k + C_{24} \ln s_k\right) \leq m s_k \sqrt{\ln s_k} + C_{27} s_k. \tag{78}$$

Из неравенств (75) и (78) сразу следует, что

$$\prod_p |\alpha_{1,k} \dots \alpha_{N,k}|_p \geq \exp(-m s_k \sqrt{\ln s_k} - C_{27} s_k), \tag{79}$$

где произведение и сумма взяты по всем простым числам p , удовлетворяющим неравенству (74).

Неравенства (73) и (79) дают справедливое при $k \geq K_{16}$ неравенство

$$\begin{aligned} &\prod_p |\alpha_{1,k} \dots \alpha_{N,k}|_p \leq \\ &\leq \exp\left(-\frac{mp}{\varphi(M)} s_k \ln s_k + C_{23} s_k + m s_k \sqrt{\ln s_k} + C_{27} s_k\right) \leq \\ &\leq \exp\left(-\frac{mp}{\varphi(M)} s_k \ln s_k + C_{28} s_k \sqrt{\ln s_k}\right), \end{aligned}$$

где произведение взято по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$, удовлетворяющим не- равенствам (58).

Но тогда из неравенства (60) следует, что при условиях, что K_8 – наибольшее из чисел K_1, K_2, \dots, K_{16} и $k \geq K_8$, а $C_{12} = C_{28}$, выполнено нера- венство (57), т.е.

$$\begin{aligned} &\prod_p \max_i |u_{N_i,k}(\xi)|_p \leq \\ &\leq \exp\left(-\frac{\rho m}{\varphi(M)} s_k \ln s_k + C_{12} s_k \sqrt{\ln s_k}\right), \end{aligned}$$

где произведение взято по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$, удовлетворяющим не- равенствам (58). Лемма 4 доказана.

Доказательство неравенства (59) леммы 5 до- словно повторяет доказательство леммы 4.

8. ОЦЕНКИ СНИЗУ ВЕЛИЧИН

$$|l_k(\xi)|_p, |l_k(\Xi_k)|_p, |L_k(\xi)|_p, |L_k(\Xi_k)|_p$$

Продолжаем с определителем (53) такие преобразования: умножим его первый столбец на величину $u_{0,k}(\xi)$ и прибавим к полученному первому столбцу остальные столбцы определителя, умноженные на соответствующие $u_{j,k}(\xi), j = 1, \dots, m - 1$. С учетом равенств (20) и (50) получаем

$$\Delta_{l,N,k}(\xi)u_{0,k}(\xi) = \begin{vmatrix} l_k(\xi) & \dots & H_{m-1} \\ u_{N_{1,k}}(\xi) & \dots & P_{N_{1,m-1,k}}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{N_{m-1,k}}(\xi) & \dots & P_{N_{m-1,m-1,k}}(\xi) \end{vmatrix}. \quad (80)$$

Аналогично, умножим последний столбец определителя (53) на величину $u_{m-1,k}(\xi)$ и прибавим к полученному последнему столбцу остальные столбцы определителя, умноженные на соответствующие $u_{j,k}(\xi), j = 0, \dots, m - 2$. С учетом равенств (20) и (50), получаем

$$\Delta_{l,N,k}(\xi)u_{m-1,k}(\xi) = \begin{vmatrix} H_0 & \dots & l_k(\xi) \\ P_{N_{1,0,k}}(\xi) & \dots & u_{N_{1,k}}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{N_{m-1,0,k}}(\xi) & \dots & u_{N_{m-1,k}}(\xi) \end{vmatrix}. \quad (81)$$

Из равенств (12) и (19) следует, что

$$u_{0,k}(\xi) = 1 + \xi u_{m-1,k}(\xi). \quad (82)$$

Обозначая $\delta_{0,i,j}$ алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении строки с номером i и столбца с номером j определителя (80) и $\delta_{m-1,i,j}$ алгебраическое дополнение соответствующего элемента определителя (81), соответственно, получаем

$$\Delta_{l,N,k}(\xi)u_{0,k}(\xi) = l_k(\xi)\delta_{0,1,1} + \sum_{i=2}^m \delta_{0,i,1}u_{N_{i-1,k}}(\xi), \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{l,N,k}(\xi)u_{m-1,k}(\xi) &= \\ &= l_k(\xi)\delta_{m-1,1,m} + \sum_{i=2}^m \delta_{m-1,i,m}u_{N_{i-1,k}}(\xi). \end{aligned} \quad (84)$$

Из равенств (82), (83), (84) следует

$$\begin{aligned} \Delta_{l,N,k}(\xi) &= l_k(\xi)(\delta_{0,1,1} + \xi\delta_{m-1,1,m}) + \\ &+ \sum_{i=2}^m (\delta_{0,i,1} + \xi\delta_{m-1,i,m})u_{N_{i-1,k}}(\xi). \end{aligned} \quad (85)$$

Лемма 6. Пусть $k \in \mathbb{N}, k \geq K_{17}$. Тогда существует простое число p_k , удовлетворяющее неравенствам (58), для которого справедливы оценки

$$|l_k(\xi)|_{p_k} \geq \exp(-(m-1)s_k \ln s_k - C_{29}s_k \sqrt{\ln s_k}), \quad (86)$$

$$|L_k(\xi)|_{p_k} \geq \exp(-(m-1)s_k \ln s_k - C_{30}s_k \sqrt{\ln s_k}). \quad (87)$$

Доказательство. Докажем сначала, что существует простое число p_k , удовлетворяющее неравенствам (58), для которого выполнено неравенство (86). Предположим противное, т.е. что для всех простых чисел p , удовлетворяющее неравенствам (58), имеем неравенство

$$|l_k(\xi)|_p < \exp(-(m-1)s_k \ln s_k - C_{29}s_k \sqrt{\ln s_k}). \quad (88)$$

В равенстве (85) коэффициент при форме $l_k(\xi)$ – целое число. Определитель (53) отличен от нуля. Для отличных от нуля целых чисел A выполнено неравенство

$$|A|_p \geq \frac{1}{|A|},$$

из которого, с учетом (54) следует, что для всех рассматриваемых простых чисел p выполнено неравенство

$$|\Delta_{l,N,k}(\xi)|_p \geq \exp(-(m-1)s_k \ln s_k - C_9s_k \ln \ln s_k),$$

что, вместе с (88) при $k \geq K_{18}$ дает

$$|l_k(\xi)|_p < |\Delta_{l,N,k}(\xi)|_p. \quad (89)$$

Тогда равенства (85) и неравенство (89) означают, согласно известным свойствам p – адического нормирования, что для всех рассматриваемых простых чисел p выполнено равенство

$$|\Delta_{l,N,k}(\xi)|_p = \left| \sum_{i=2}^m (\delta_{0,i,1} + \xi\delta_{m-1,i,m})u_{N_{i-1,k}}(\xi) \right|_p. \quad (90)$$

Так как числа $(\delta_{0,j,1} + \xi\delta_{m-1,j,m-1})$ – целые, получаем справедливые для всех рассматриваемых простых чисел p неравенства

$$|\delta_{0,j,1} + \xi\delta_{m-1,j,m-1}|_p \leq 1$$

и из равенства (90) следует

$$\left| \sum_{i=2}^m (\delta_{0,i,1} + \xi\delta_{m-1,i,m})u_{N_{i-1,k}}(\xi) \right|_p \leq \max_j |u_{N_{j,k}}(\xi)|_p.$$

Поэтому

$$|\Delta_{l,N,k}(\xi)|_p \leq \max_j |u_{N_{j,k}}(\xi)|_p. \quad (91)$$

Из (91) следует, что для любого подмножества \mathbb{P}_0 множества простых чисел \mathbb{P} имеет место неравенство

$$\prod_{p \in \mathbb{P}_0} |\Delta_{l,N,k}(\xi)|_p \leq \prod_{p \in \mathbb{P}_0} \max_j |u_{N_{j,k}}(\xi)|_p. \quad (92)$$

По лемме 4, неравенство (57),

$$\begin{aligned} &\prod_p \max_i |u_{N_{i,k}}(\xi)|_p \leq \\ &\leq \exp\left(-\frac{\rho m}{\varphi(M)} s_k \ln s_k + C_{12}s_k \sqrt{\ln s_k}\right), \end{aligned}$$

где произведение в левой части этого неравенства взято по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$, удовлетворяющим неравенствам (58).

Известна формула произведения: для рационального числа $A \neq 0$

$$\prod_p |A|_p = \frac{1}{|A|}.$$

Поэтому из неравенства (54) следует неравенство

$$\prod_p |\Delta_{l,N,k}(\xi)|_p \geq \exp(-(m-1)s_k \ln s_k - C_9 s_k \ln \ln s_k), \tag{93}$$

где произведение в левой части этого неравенства взято по всем простым числам p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$, удовлетворяющим неравенствам (58).

Полученные оценки (92), (57), (93) противоречат друг другу при $k \geq K_{19}$ ввиду неравенства

$$\frac{\rho m}{\varphi(M)} > m - 1. \text{ При } K_{17} = \max(K_{18}, K_{19}) \text{ это опровергает}$$

сделанное предположение и доказывает справедливость неравенства (86) при некотором p_k , удовлетворяющем неравенствам (58). Поскольку $l_k(\xi)$, определенная равенством (50), отличается от $L_k(\xi)$, определенной равенством (49), лишь множителем $\alpha_{1,k} \dots \alpha_{m-1,k}$, из неравенств (86), (51) следует неравенство (81) и лемма 6 доказана.

Лемма 7. Пусть $k \in \mathbb{N}, k \geq K_{20}$. Тогда существует простое число p_k , удовлетворяющее неравенствам (58), для которого справедливы оценки

$$|l_k(\Xi_k)|_{p_k} \geq \exp(-(m-1)s_k \ln s_k - C_{31} s_k \sqrt{\ln s_k}), \tag{94}$$

$$|L_k(\Xi_k)|_{p_k} \geq \exp(-(m-1)s_k \ln s_k - C_{32} s_k \sqrt{\ln s_k}). \tag{95}$$

Доказательство неравенств (94), (95) дословно повторяет доказательство леммы 6. Единственное отличие состоит в использовании неравенства (59) вместо неравенства (57) и неравенства (55) вместо неравенства (54).

6. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМ 1 И 2

Рассматриваем простое число p_k , удовлетворяющее неравенствам (58).

Рассмотрим линейную форму

$$L(\xi) = h_0 f_0(\xi) + \dots + h_{m-1} f_{m-1}(\xi).$$

Как отмечено выше, она представляет собой целое p_k -адическое число, поэтому разность форм

$$L(\xi) - L_k(\xi) = h_0 f_0(\xi) + \dots + h_{m-1} f_{m-1}(\xi) - (h_0 f_{0,k}(\xi) + \dots + h_{m-1} f_{m-1,k}(\xi)) \tag{96}$$

тоже представляет собой целое p_k -адическое число. Согласно равенствам (5), (6), (8), (10)

$$f_0(\xi) - f_{0,k}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} ((\alpha_1)_n \dots (\alpha_{m-1})_n - (\alpha_{1,k})_n \dots (\alpha_{m-1,k})_n) \xi^n, \tag{97}$$

$$f_{m-1}(\xi) - f_{m-1,k}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} ((\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_{m-1} + 1)_n - (\alpha_{1,k} + 1)_n \dots (\alpha_{m-1,k} + 1)_n) \xi^n \tag{98}$$

и при $i = 1, \dots, m-2$, ввиду (9) и (11),

$$f_i(\xi) - f_{i,k}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} ((\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_i + 1)_n (\alpha_{i+1})_n \dots (\alpha_{m-1})_n \xi^n - (\alpha_{1,k} + 1)_n \dots (\alpha_{i,k} + 1)_n (\alpha_{i+1,k})_n \dots (\alpha_{m-1,k})_n \xi^n) = \sum_{n=0}^{\infty} ((\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_i + 1)_n (\alpha_{i+1})_n \dots (\alpha_{m-1})_n - (\alpha_{1,k} + 1)_n \dots (\alpha_{i,k} + 1)_n (\alpha_{i+1,k})_n \dots (\alpha_{m-1,k})_n) \xi^n. \tag{99}$$

Рассмотрим величины

$$(\alpha_1)_n \dots (\alpha_{m-1})_n - (\alpha_{1,k})_n \dots (\alpha_{m-1,k})_n, \tag{100}$$

$$(\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_{m-1} + 1)_n - (\alpha_{1,k} + 1)_n \dots (\alpha_{m-1,k} + 1)_n \tag{101}$$

и, при $i = 1, \dots, m-2$,

$$(\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_i + 1)_n (\alpha_{i+1})_n \dots (\alpha_{m-1})_n - (\alpha_{1,k} + 1)_n \dots (\alpha_{i,k} + 1)_n (\alpha_{i+1,k})_n \dots (\alpha_{m-1,k})_n. \tag{102}$$

При $n = 0$ все разности (100)–(102) равны 0.

При $n \geq 1$ представим разность (100) в виде

$$(\alpha_1)_n \dots (\alpha_{m-1})_n - (\alpha_{1,k})_n \dots (\alpha_{m-1,k})_n = (\alpha_1)_n \dots (\alpha_{m-1})_n - (\alpha_{1,k})_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_{m-1})_n + (\alpha_{1,k})_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_{m-1})_n - (\alpha_{1,k})_n (\alpha_{2,k})_n \dots (\alpha_{m-1})_n + \dots + (\alpha_{1,k})_n (\alpha_{2,k})_n \dots (\alpha_{m-2,k})_n (\alpha_{m-1})_n - (\alpha_{1,k})_n \dots (\alpha_{m-1,k})_n. \tag{103}$$

Рассмотрим входящие в (103) величины

$$(\alpha_{1,k})_n (\alpha_{2,k})_n \dots (\alpha_{j-1,k})_n (\alpha_{j,k})_n (\alpha_{j+1})_n \dots (\alpha_{m-1})_n - (\alpha_{1,k})_n (\alpha_{2,k})_n \dots (\alpha_{j-1,k})_n (\alpha_j)_n (\alpha_{j+1})_n \dots (\alpha_{m-1})_n = ((\alpha_{j,k})_n - (\alpha_j)_n) (\alpha_{1,k})_n (\alpha_{2,k})_n \dots (\alpha_{j-1,k})_n (\alpha_{j+1})_n \dots (\alpha_{m-1})_n. \tag{104}$$

Величину

$$(\alpha_{j,k})_n - (\alpha_j)_n = \alpha_{j,k} (\alpha_{j,k} + 1) \dots (\alpha_{j,k} + n - 1) - \alpha_j (\alpha_j + 1) \dots (\alpha_j + n - 1) \tag{105}$$

можно рассматривать, как разность значений многочлена $x(x+1)\dots(x+n-1)$ в точках $\alpha_{j,k}$ и α_j . Так как, согласно (5) и (6),

$$\alpha_{j,k} - \alpha_j = - \sum_{l=k+1}^{\infty} \mu_{j,l} \lambda_l,$$

из неравенства (2) следует, что для любого $j = 1, \dots, m-1$ выполняется неравенство

$$|\alpha_{j,k} - \alpha_j|_{p_k} \leq p_k^{-ms_k \ln s_k}.$$

Следовательно, для определенной равенством (105) величины выполнено неравенство

$$|(\alpha_{j,k})_n - (\alpha_j)_n|_{p_k} \leq p_k^{-ms_k \ln s_k}. \quad (106)$$

Так как $(\alpha_{1,k})_n (\alpha_{2,k})_n \dots (\alpha_{j-1,k})_n (\alpha_{j+1})_n \dots (\alpha_{m-1})_n$ — целое p_k — адическое число, из (106) следует, что p_k — адическая норма величины (104) не превосходит числа

$$p_k^{-ms_k \ln s_k}. \quad (107)$$

Поэтому представленная в виде суммы (103) величина (100) удовлетворяет неравенству

$$|(\alpha_1)_n \dots (\alpha_{m-1})_n - (\alpha_{1,k})_n \dots (\alpha_{m-1,k})_n|_{p_k} \leq p_k^{-ms_k \ln s_k}. \quad (108)$$

Легко видеть, что для разности (101) выполняется такая же оценка. Это означает, что все члены сходящихся p_k — адических рядов (97) и (98) оцениваются сверху величиной (107). Поэтому

$$\begin{aligned} |f_0(\xi) - f_{0,k}(\xi)|_{p_k} &\leq p_k^{-ms_k \ln s_k}, \\ |f_{m-1}(\xi) - f_{m-1,k}(\xi)|_{p_k} &\leq p_k^{-ms_k \ln s_k}. \end{aligned} \quad (109)$$

Представим разность (100) в виде, аналогичном (101), и заметим, что

$$|(\alpha_{j,k} + 1) - (\alpha_j + 1)|_{p_k} = |\alpha_{j,k} - \alpha_j|_{p_k} \leq p_k^{-ms_k \ln s_k}.$$

Проводя аналогичные приведенным выше выкладки (103)–(109), находим, что для любого $i = 1, \dots, m-2$ выполняется неравенство

$$|f_i(\xi) - f_{i,k}(\xi)|_{p_k} \leq p_k^{-ms_k \ln s_k}. \quad (110)$$

Из равенства (96) следует, что

$$\begin{aligned} L(\xi) - L_k(\xi) &= h_0(f_0(\xi) - f_{0,k}(\xi)) + \\ &+ \dots + h_{m-1}(f_{m-1}(\xi) - f_{m-1,k}(\xi)), \end{aligned} \quad (111)$$

поэтому неравенства (109) и (110) дают

$$|L(\xi) - L_k(\xi)|_{p_k} \leq p_k^{-ms_k \ln s_k}. \quad (112)$$

В лемме 6 доказано, что для любого $k \geq K_{17}$ выполнено неравенство (87), т.е.

$$|L_k(\xi)|_{p_k} \geq \exp(-(m-1)s_k \ln s_k - C_{30}s_k \sqrt{\ln s_k}).$$

Вместе с неравенством (110) это дает

$$\begin{aligned} |L(\xi)|_{p_k} &= |L_k(\xi)|_{p_k} \geq \\ &\geq \exp(-(m-1)s_k \ln s_k - C_{30}s_k \sqrt{\ln s_k}) > 0. \end{aligned} \quad (113)$$

Неравенство (113) и является доказываемым неравенством (13).

Рассмотрим линейную форму

$$L(\Xi) = h_0 f_0(\Xi) + \dots + h_{m-1} f_{m-1}(\Xi).$$

Как отмечено выше, она представляет собой целое p_k — адическое число.

Рассмотрим разность

$$L(\Xi) - L_k(\Xi_k) = L(\Xi) - L_k(\Xi) + L_k(\Xi) - L_k(\Xi_k). \quad (114)$$

Рассмотрим величину $L(\Xi) - L_k(\Xi)$ и повторим для нее рассуждения из предыдущего пункта, проведенные для разности (111). Хотя ξ — натуральное число, а Ξ — полиадическое число, при получении оценки (112) использовалось лишь то, что ξ — целое p_k — адическое число, поэтому замена ξ на Ξ не повлияет на справедливость полученной оценки, иными словами, имеет место неравенство

$$|L(\Xi) - L_k(\Xi)|_{p_k} \leq p_k^{-ms_k \ln s_k}. \quad (115)$$

Рассмотрим величину $L_k(\Xi) - L_k(\Xi_k)$. Она имеет вид

$$L_k(\Xi) - L_k(\Xi_k) = \sum_{i=0}^{m-1} h_i (f_{i,k}(\Xi) - f_{i,k}(\Xi_k)). \quad (116)$$

Каждую из разностей $f_{i,k}(\Xi) - f_{i,k}(\Xi_k)$ представим в виде

$$f_{i,k}(\Xi) - f_{i,k}(\Xi_k) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{1,k} + 1)_n \dots \quad (117)$$

$$\dots (\alpha_{i,k} + 1)_n (\alpha_{i+1,k})_n \dots (\alpha_{m-1,k})_n (\Xi^n - \Xi_k^n)$$

и заметим, что величина $\Xi^n - \Xi_k^n$ равна произведению числа $\Xi - \Xi_k$ на целое p_k — адическое число, поэтому, согласно (2) и (15)

$$|\Xi^n - \Xi_k^n|_{p_k} \leq |\Xi - \Xi_k|_{p_k} \leq p_k^{-ms_k \ln s_k}. \quad (118)$$

Равенства (116), (117) и неравенство (118) означают, что

$$|L_k(\Xi) - L_k(\Xi_k)|_{p_k} \leq p_k^{-ms_k \ln s_k}. \quad (119)$$

Равенство (114) и неравенства (115) и (119) дают неравенство

$$|L(\Xi) - L_k(\Xi_k)|_{p_k} \leq p_k^{-ms_k \ln s_k}. \quad (120)$$

Неравенства (95) леммы 7 и (120) показывают, что при $k \geq K_{21}$ выполняются соотношения

$$|L(\Xi)|_{p_k} = |L_k(\Xi_k)|_{p_k} > 0,$$

иными словами, доказано неравенство (16).

Для завершения доказательства теорем осталось проверить, что при $k \geq K_{22}$ справедливо не-

равенство $p_k < p_{k+1}$. Для этого, ввиду (58), достаточно доказать, что при $k \geq K_{22}$ выполняется неравенство

$$s_k + C_2 (\ln s_k)^2 < \exp \sqrt{\ln s_{k+1}}.$$

Согласно (2) и (3), $s_{k+1} \geq \exp \lambda_{k+1}$ и

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} &\geq \prod_{p \leq s_k + 2(\ln s_k)^2} \exp(\ln p (ms_k \ln s_k)) = \\ &= \exp \left(\sum_{p \leq s_k + 2(\ln s_k)^2} \ln p (ms_k \ln s_k) \right) \geq \exp s_k^2. \end{aligned}$$

Здесь была использована грубая оценка

$$\sum_{p \leq s_k + 2(\ln s_k)^2} \ln p \geq \frac{s_k}{2 \ln s_k}.$$

Таким образом, ввиду (3),

$$\begin{aligned} s_{k+1} &\geq \exp \lambda_{k+1}, \quad \ln s_{k+1} \geq \lambda_{k+1} \geq \exp s_k^2, \\ \sqrt{\ln s_{k+1}} &\geq \exp \frac{1}{2} s_k^2, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\exp \sqrt{\ln s_{k+1}} \geq \exp \left(\exp \frac{1}{2} s_k^2 \right) > s_k + C_2 (\ln s_k)^2,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, доказано, что для любых линейных форм $L(\xi)$ и $L(\Xi)$ существуют бесконечные множества чисел k и простых чисел p_k , для которых $|L(\xi)|_{p_k} > 0$ и $|L(\Xi)|_{p_k} > 0$, что и утверждалось в теоремах.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Из доказанных теорем не следует линейная независимость p -адических чисел $f_0(\xi), \dots, f_{m-1}(\xi)$ и, соответственно, $f_0(\Xi), \dots, f_{m-1}(\Xi)$, для заданного простого числа p .

Можно высказать гипотезу о том, что для любого простого числа p эти p -адические числа $f_0(\xi), \dots, f_{m-1}(\xi)$ и, соответственно, $f_0(\Xi), \dots, f_{m-1}(\Xi)$, линейно независимы и даже алгебраически независимы при определенных условиях на параметры этих рядов.

Однако задачи доказательства этих утверждений весьма трудны и для их решения требуются принципиально новые подходы.

Вместе с тем теорию F -рядов [14, 15] обобщенного метода Зигеля–Шидловского можно усилить и получить общие теоремы о бесконечной алгебраической независимости значений рядов из более широкого класса, содержащего ряды с некоторыми трансцендентными параметрами. Использование подходов работ [9–11] позволит

доказать бесконечную алгебраическую независимость значений рассмотренных рядов вида (1).

Еще одно интересное направление исследований — исследование статистических свойств цифр натуральных чисел, представляющих собой частичные суммы полиадических рядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чирский В.Г.* Новые задачи теории трансцендентных полиадических чисел // ДАН. 2022. Т. 505. С. 63–65. <https://doi.org/10.31857/S2686954322040075>
2. *Chirskii V.G.* Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouvillean Parameter // Russ. J. Math. Phys. 2021. V. 28. № 3. P. 294–302. <https://doi.org/10.1134/S1061920819030051>
3. *Чирский В.Г.* Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллеовой точке рядов с полиадическим лиувиллевым параметром // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 2. С. 156–167. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-304-312>
4. *Нестеренко Ю.В.* Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 3. С. 39–72.
5. *Постников А.Г.* Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука. 1971. 416 с.
6. *Ernvall-Hytönen A.-M., Matala-aho T., Seppälä L.* Euler's divergent series in arithmetic progressions // J. Integer Sequences. 2019. V. 22. Article 19.2.2. 10 p.
7. *Matala-aho T., Zudilin W.* Euler factorial series and global relations // J. Number Theory. 2018. V. 186. P. 202–210. <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2017.09.026>
8. *Шидловский А.Б.* Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987. 448 с.
9. *Салихов В.Х.* Критерий алгебраической независимости одного класса гипергеометрических E -функций // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 2. С. 189–211.
10. *Салихов В.Х.* Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E -функций // Acta Arithm. 1990. V. 53. P. 453–471.
11. *Beukers F., Brownawell W.D., Heckman G.* Siegel normality // Ann. Math. 1988. Ser. 127. P. 279–308.
12. *Bombieri E.* On G -functions // Recent Progress in Analytic Number Theory. V. 2. London: Academic Press. 1981. P. 1–68.
13. *Галочкин А.И.* Об алгебраической независимости значений E -функций в некоторых трансцендентных точках // Вестник МГУ. Сер. 1, матем., механ. 1970. № 5. С. 58–63.
14. *Bertrand D., Chirskii V., Yebbou J.* Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. V. 13. № 2. P. 241–260.
15. *Chirskii V.G.* Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers // Russ. J. Math. Phys. 2019. V. 26. № 3. P. 286–305. <https://doi.org/10.1134/S1061920821030031>

16. *Chudnovsky G.V.* On application of Diophantine approximations // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1985. V. 81. P. 7261–7265.
17. *Иванков П.Л.* О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 1. С. 53–62.
18. *Чирский В.Г.* Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78. № 6. С. 193–210. <https://doi.org/10.4213/im8169>
19. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967. 512 с.

ARITHMETIC PROPERTIES OF THE VALUES OF GENERALIZED HYPERGEOMETRIC SERIES WITH POLYADIC TRANSCENDENTAL PARAMETERS

V. G. Chirskii

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

Theorems on the infinite linear independence of the values of generalized hypergeometric series of the form

$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_{m-1})_n z^n$ are proved, among the parameters of which are transcendental polyadic Liouville numbers.

Keywords: infinite linear independence, polyadic Liouville numbers, Hermite-Pade approximations

УДК 539.42

О НЕТИПИЧНОЙ ПРОЧНОСТНОЙ АНИЗОТРОПИИ СЛАБОСЦЕМЕНТИРОВАННЫХ ПЕСЧАНИКОВ

© 2022 г. Академик РАН Д. М. Климов¹, В. И. Карев^{1,*}, Ю. Ф. Коваленко¹, К. Б. Устинов¹

Поступило 17.05.2022 г.

После доработки 18.07.2022 г.

Принято к публикации 21.07.2022 г.

В нескольких сериях независимых испытаний образцов сеноманских песчаников на установке истинно трехосного нагружения обнаружена прочностная анизотропия нетипичного вида, проявляющаяся в монотонном уменьшении прочности с уменьшением угла между максимальными сжимающими напряжениями и плоскостью, соответствующей напластованию. При анизотропии данного вида равнокомпонентное поле напряжений в массиве может вызвать вывалы на стенках скважин в двух противоположных направлениях. Подобные вывалы наблюдались при прямом физическом моделировании в образцах с отверстиями под действием равнокомпонентного сжатия. При анализе каротажных измерений наличие подобных вывалов в скважинах, как правило, интерпретируется как вызванное наличием неравнокомпонентного поля напряжений в массиве. Приведенные данные говорят о возможности иных интерпретаций.

Ключевые слова: анизотропия прочности, критерии разрушения, истинно трехосные испытания, интерпретация данных каротажа, вывалы в скважинах, измерения напряжений в массиве горных пород

DOI: 10.31857/S2686954322050137

1. ВВЕДЕНИЕ

Осадочные горные породы представляют собой гетерогенную среду, часто обладающую слоистой структурой, эффективные свойства которой описываются в приближении трансверсально изотропного континуума с плоскостью изотропии, параллельной напластованию. Обычно анизотропию прочности связывают с наличием площадок ослабления, параллельных слоистости [1–4]. При этом зависимость прочности при сжатии от угла между максимальными сжимающими напряжениями и плоскостью изотропии имеет минимум, соответствующий примерно 30 градусам, и два максимума, соответствующие максимальным сжимающим напряжениям, приложенным по нормали и вдоль данной плоскости, первый из которых обычно более ярко выражен [5, 4].

Учет прочностной анизотропии необходим при прогнозировании устойчивости скважин [6], а также используется при анализе данных о вывалах в скважинах в ходе их проводки и эксплуатации для оценки величин действующих в массиве напряжений [3, 7]. Однако, помимо этого, с обра-

зованием вывалов породы на стенках скважин связано проявление массивированного пескопроявления в газовых скважинах и скважинах подземных хранилищ газа, пробуренных в слабосцементированных песчаниках. Поэтому, чтобы минимизировать риск пескопроявлений и их интенсивность, необходимо разобраться в механизме появления вывалов в скважинах и понять, какие условия залегания и деформационно-прочностные свойства горных пород оказывают основное влияние на их возникновение.

2. ЭКСПЕРИМЕНТЫ: ПРИБОРЫ, МАТЕРИАЛЫ, ИЗМЕРЕНИЯ

Эксперименты проводились на Испытательной системе трехосного независимого нагружения Института проблем механики РАН (ИСТНН) [8, 4]. Исследовались породы сеноманского горизонта пласта ПК1 газового и газоконденсатного месторождений Арктического шельфа России. Кернаый материал представлял собой высокопроницаемый высокопористый песчаник со слабо выраженной структурой напластования. КERN был отобран из трех интервалов, в пределах каждого интервала свойства материала были однородными, свойства пород каждого из интервалов были также близки. Из керна для испытаний с высокой точностью вырезались кубические образцы с реб-

¹ Институт проблем механики Российской академии наук им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия

*E-mail: wikarev@ipmnet.ru

ром 40 мм, непараллельность граней не превышала 20 мкм. Для каждой серии опытов образцы по возможности изготавливались из одного куска керна.

Было проведено три типа испытаний. Первым типом были так называемые трехосные испытания, каждое из которых состояло из трех циклов. В данных опытах сначала к образцу прикладывалась равная по всем граням нагрузка, далее нагрузка по двум осям образца поддерживалась постоянной, а по третьей оси s_3 увеличивалась до уровня начала неупругого деформирования s_3^* , после чего напряжение по данной оси снижалось до исходного уровня. На втором цикле нагрузка по всем осям увеличивалась до следующего значения, далее шли нагружение по третьей оси до перехода к неупругому деформированию и разгрузка по ней до уровня равномерного обжатия. Аналогичным образом осуществлялось нагружение на третьем цикле, но уже при большем обжатии. Напряжение обжатия на циклах составляло 2, 10 и 20 МПа, либо 1, 5 и 10 МПа. В ходе опытов измерялись критические значения напряжения сжатия s_3^* по третьей оси для трех величин всестороннего обжатия, также определялись упругие характеристики. Опыты данного типа проводились для трех направлений максимального напряжения s_3 относительно плоскости залегания породы: вдоль нее, по нормали и под углом 45° .

Второй тип испытаний соответствовал воссозданию в образцах напряженного состояния на контуре горизонтальной скважины. В данном типе опытов на первом этапе образец доводился до состояния всестороннего сжатия, соответствующего исходному напряжению от горного давления, действующему на грунтовый скелет. На втором этапе по одной из осей напряжение (s_2) продолжало увеличиваться, по другой (s_3) — уменьшаться на ту же величину, по третьей (s_1) — сохранялось постоянным: образец приводился в состояние, когда скважина пробурена и давление в ней равно пластовому. На третьем этапе моделировалось уменьшение давления на забое скважины путем роста компоненты напряжений s_2 , соответствующей кольцевому напряжению. Образцы вырезались и нагружались так, чтобы угол между максимальным сжимающим напряжением и нормалью к залеганию породы составлял для различных образцов 0° , 30° , 45° и 90° (что соответствовало состоянию в точках контура горизонтальной скважины, отстоящих от вертикальной оси на соответствующий угол). Подробно данный тип испытаний и программы нагружения описаны в [4]. В ходе этих опытов определялась величина давления на забое скважины, при которой в данной точке контура горизонтальной скважины начиналось разрушение.

Третий тип испытаний состоял в прямом моделировании вывалов в скважинах. Для этого в каждом образце, параллельно плоскости залегания породы, просверливалось центральное сквозное отверстие диаметром 10 мм. Во время испытаний поток воздуха с избыточным давлением 0.01–0.02 МПа подавался в отверстие в образце через коаксиальный канал диаметром 9 мм в нагружающей плите. Поток воздуха выводился через аналогичный канал в противоположной нагружающей плите. Нагружение осуществлялось согласно одному из трех вариантов. В первом варианте прикладывалась одинаковая нагрузка по всем трем осям. Второй вариант состоял в воспроизведении условий, близких к условиям плоской деформации: образцы нагружали, как в предыдущем варианте, до напряжений, приблизительно соответствующих горному давлению, затем напряжения вдоль сторон, параллельных оси отверстия, увеличивались, а на гранях, нормальных оси отверстия, сохранялись постоянными. Третий вариант соответствовал условию плоского напряженного состояния: нагрузка прикладывалась к боковым граням образца, а грань с отверстием оставалась свободной, что позволяло осуществлять видеозапись процесса образования вывала. Поток воздуха в образец в этом случае не подавался, таким образом, исключался фактор влияния потока на форму образующегося вывала. Во всех вариантах, во избежание возникновения касательных напряжений, способных привести к изменению конфигурации вывалов, образцы разгружались одновременно по всем осям.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ОБСУЖДЕНИЕ

Было испытано 40 образцов: 12 образцов по программе трехосных испытаний; 20 образцов по программе, моделирующей напряженное состояние в различных точках контура горизонтальной скважины при уменьшении давления на ее забое; на 8 образцах осуществлялось прямое моделирование вывалов.

Основные результаты испытаний двух серий из трех образцов по программе трехосных опытов представлены в табл. 1. Образцы были вырезаны из двух кусков керна, отобранных из интервалов 1 и 2 соответственно. Значения максимальных сжимающих напряжений в зависимости от угла их приложения относительно залегания в серии опытов второго типа представлены в табл. 2. Представленные в табл. 2 результаты получены на образцах, вырезанных из одного куска керна интервала 2.

При прямом моделировании вывалов в горизонтальной скважине во всех случаях наблюдалось образование вывалов, ориентированных вдоль оси керна, т.е. перпендикулярно плоскости

Таблица 1. Результаты трехосных испытаний

	Интервал 1				Интервал 2			
	цикл	$s_1 = s_2$ МПа	s_3 МПа	$E \cdot 10^{-3}$ МПа	цикл	$s_1 = s_2$ МПа	s_3 МПа	$E \cdot 10^{-3}$ МПа
0°	1	1	18.2	1.9	1	1	14	1.6
	2	5	29	3.3	2	5	26	2.7
	3	10	38.2	4.1	3	10	36	4.0
90°	1	1	20	2.1	1	1	22	2.4
	2	5	30	4.1	2	5	34	4.0
	3	10	42	5.4	3	10	45	4.4
45°	1	1	24	2.4	1	1	23	2.3
	2	5	38	4.1	2	5	33	3.8
	3	10	49	5.3	3	10	44	4.3

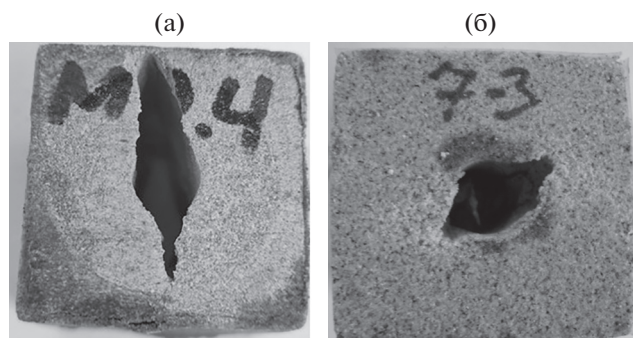
Таблица 2. Результаты испытаний по программе, моделирующей напряженное состояние на контуре горизонтальной скважины

Угол между максимальными напряжениями и плоскостью залегания, град	0	30	45	90
Предельное максимальное напряжение s_2 , МПа	29.5	34.2	34.7	40.1

залегания. Типичный результат представлен на фото рис. 1а. Отличий в форме вывалов в случае всестороннего трехосного сжатия и двухосного нагружения в условиях, близких к условиям плоской деформации, не выявлено. Опыты в условиях плоского напряженного состояния продемонстрировали образование вывалов при более низких значениях напряжений, а также появление сквозных трещин, параллельных свободной границе, наряду с вывалами, наблюдаемыми в других испытаниях. Отметим, что подобные формы вывалов в условиях равнокомпонентного нагружения образцов наблюдались в экспериментах, проводимых на ИСТНН и ранее. Так, на рис. 1б представлена фотография образца песчаника, отобранного из юрских отложений, после проведения подобного теста. Интересно отметить, что в этом образце отверстие было ориентировано

вдоль оси керна (по нормали к плоскости залегания) и ориентация вывала не связана с направлением напластования. Подобные формы разрушения вблизи отверстий при сходных условиях нагружения наблюдались ранее также в образцах угля [9].

Две независимых серии экспериментов, а именно моделирование напряженного состояния в различных точках контура горизонтальной скважины и трехосные испытания, продемонстрировали наличие анизотропии прочности исследуемых пород, проявляемой в монотонном изменении предельных напряжений при изменении угла между направлением приложения максимальных сжимающих напряжений и плоскостью залегания породы. При этом максимум соответствовал сжатию, приложенному по нормали к данной плоскости, а минимум соответ-

**Рис. 1.** Отверстия с вывалами после испытания образцов из месторождения: (а) сеноманский песчаник, отверстие вдоль плоскости залегания; (б) юрский песчаник, отверстие по нормали к плоскости залегания.

ствовал сжатию вдоль данной плоскости. В опытах по прямому моделированию разрушения вокруг цилиндрического отверстия разрушения наблюдались именно в точках, соответствующих минимальной прочности.

Полученный результат, состоящий в монотонном изменении прочности породы при изменении угла между направлением действия максимальных сжимающих напряжений и плоскостью залегания, достаточно неожиданен. Дело в том, что проявление анизотропии прочности горных пород обычно связывают исключительно с наличием в породе плоскостей ослабления, обусловленных обычно наличием напластования в плоскостях залегания [2, 3]. В этом случае наименьшая прочность должна отвечать точкам, где преобладают напряжения сдвига вдоль плоскостей ослабления, что соответствует, в зависимости от коэффициента внутреннего трения, углам около 30° . В описанных выше опытах подобного не наблюдалось.

Возможность проявления обнаруженного типа прочностной анизотропии в породах необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации скважин для предотвращения разрушения и пескопроявлений, а также при анализе скважинных измерений, поскольку наличие несимметричных вывалов, подобно наблюдаемым в описанных экспериментах, как правило, трактуется как вызванное наличием неравнокомпонентного поля напряжений [7], подобная интерпретация может быть не всегда верной.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При испытаниях образцов слабосцементированных песчаников обнаружена прочностная анизотропия нетипичного вида, проявляющаяся в монотонном уменьшении прочности с уменьшением угла между максимальными сжимающими напряжениями и плоскостью залегания породы. Для сеноманских песчаников данный феномен наблюдался в нескольких сериях независимых опытов с использованием различных программ нагружения.

Анизотропия данного вида способна вызывать вывалы в скважинах, направленные в двух противоположных направлениях, под действием равнокомпонентного поля напряжений в массиве. Появление подобных вывалов наблюдалось при прямом физическом моделировании на образцах с отверстиями под действием равнокомпонентного сжатия как исследуемых сеноманских песчаников, так и других пород.

Поскольку появление подобных вывалов в скважинах и их направление при анализе коротажных измерений, как правило, интерпретируется как вызванное наличием неравнокомпо-

нентного поля напряжений в массиве и используется для определения их ориентации и величины, полученные данные заставляют по-иному взглянуть на проблему интерпретации скважинных измерений: по крайней мере, заставляют учитывать возможность иных интерпретаций, кроме различия в величинах действующих напряжений.

Наличие прочностной анизотропии, особенно данного типа, необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации скважин с целью снижения риска разрушения и предотвращения или минимизации пескопроявлений, вызванных разрушением породы. В особенности это относится к слабосцементированным высокопроницаемым породам коллекторов газовых, газоконденсатных месторождений, пластов-объектов хранения газа ПХГ.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 22-11-00273.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Goodman R.E.* Introduction to rocks mechanics. New York, John Wiley and Sons, 1980. 478 p.
2. *Germanovich L.N., Galybin A.N., Dyskin A.V., Mokhel A.N., Dunayevsky V.* Borehole stability in laminated rock. In G. Barla (Ed.) // Prediction and Performance in Rock Mechanics and Rock Engineering, CRC Press/Balkema. Torino, Italy ed, 1996. V. 2. P. 767–776.
3. *Zoback M.D.* Reservoir Geomechanics. Cambridge, Cambridge University Press, 2007. 443 p. ISBN-978-0-521-77069-9. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511586477>
4. *Karev V., Kovalenko Y., Ustinov K.* Geomechanics of Oil and Gas Wells Springer. 2020. 184 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-26608-0>
5. *Singh M., Samadhiya N.K., Kumar A., Kumar V., Singh B.* A nonlinear criterion for triaxial strength of inherently anisotropic rocks // Rock Mech. and Rock Eng. 2015. V. 48 (4). P. 1387–1405.
6. *Karev V.I., Klimov D.M., Kovalenko Y.F., Ustinov K.B.* Mechanic almathematical and experimental modeling of well stability in anisotropic media // Mechanics of Solids. 2013. V. 48 (4). P. 357–363. <https://doi.org/10.3103/S0025654413040018>
7. *Zang A., Stephansson O.* Stress field of the earth's crust. Dordrecht, Springer, 2010. 322 p.
8. *Karev V.I., Kovalenko Yu.F.* Triaxial loading system as a tool for solving geotechnical problems of oil and gas production, True Triaxial Testing of Rocks, Leiden, CRC Press. Balkema. 2013. P. 301–310.
9. *Kaiser P.K., Guenot A., Morgenstern N.R.* Deformation of small tunnels. IV. Behaviour during failure // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr. 1985. V. 22: 141–152.

ON THE ATYPICAL STRENGTH ANISOTROPY OF WEAKLY CEMENTED SANDSTONES

Academician of the RAS **D. M. Klimov^a, V. I. Karev^a, Yu. F. Kovalenko^a, and K. B. Ustinov^a**

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

An atypical strength anisotropy manifesting itself in a monotonous decrease in strength with a decrease in the angle between the maximum compressive stresses and the plane corresponding to the bedding was found in several series of independent tests of samples of Cenomanian sandstones on a true triaxial loading facility. An equal component stress field in the massif can cause breakouts on wells walls in two opposite directions. Such breakouts were observed in direct physical modeling in samples with holes under the action of equal component compression. Such breakouts in wells is usually interpreted in the analysis of logging measurements, as caused by the presence of an unequal component stress field in the rock mass. The data given indicate the possibility of other interpretations.

Keywords: strength anisotropy, failure criteria, true triaxial tests, interpretation of logging data, borehole breakouts, stress measurements in rock mass