СОДЕРЖАНИЕ

Новые технологии в машиностроении

Экспериментальная механика. Диагностика испытания

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2021, № 5, с. 3–13

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 531.8, 621.01

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕДАЧИ УСИЛИЯ В МЕХАНИЗМЕ ТИПА DELTA, С ЧЕТЫРЬМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

П. А. Ларюшкин

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
e-mail: pav.and.lar@gmail.com

Поступила в редакцию 05.05.2021 г.
После доработки 08.06.2021 г.
Принята к публикации 24.06.2021 г.

В статье рассмотрен эксперимент по определению критической внешней силы, действующей на выходное звено механизма параллельной структуры типа Delta с линейными приводами и четырьмя степенями свободы. Отмечено увеличение погрешности вычисления значения указанной силы теоретическим методом при приближении механизма к особому положению. Показано, что данная погрешность коррелирует с изменением жесткости механизма, что говорит о перераспределении усилий между кинематическими цепями механизма, приводящими к увеличению реального значения критической силы по сравнению с расчетным.

Ключевые слова: механизмы параллельной структуры, Delta-робот, особые положения

DOI: 10.31857/S0235711921050072

Робот Delta [1] с момента своего появления в конце 80-х годов прошлого века завоевал огромную популярность. Его вариации широко используются в различных отраслях производства, а также вызывают интерес в академической среде и вдохновляют исследователей на создание похожих механизмов [2–4]. Так, в настоящее время Delta-роботы в исполнении с линейными приводами широко применяются в любительской робототехнике. Подобную компоновку имеет множество моделей 3D-принтеров, представленных на рынке. С точки зрения теории механизмов параллельной структуры такой робот считается хорошо изученным, известны его сильные и слабые стороны. Широкая доступность компонентов: экструдированные алюминиевые профили, спроектированные под них каретки и колеса, шаговые двигатели невысокой мощности, элементы зубчатых ременных передач, а также их относительно невысокая цена способствовали широкому распространению устройств подобного типа. Таким образом, логично использовать в качестве объекта экспериментальных научных исследований механизм, близкий по своим характеристикам к описанным выше устройствам.

Одной из главных проблем механизмов параллельной структуры является наличие особых положений, при попадании в которые изменяется подвижность выходного звена, а при приближении к ним существенно ухудшаются эксплуатационные характеристики механизма (точность позиционирования, жесткость и т.д.). Delta-роботы также не лишены такого недостатка [5], однако, в большинстве случаев они проектируются так, чтобы их рабочая зона была конструктивно ограничена, и попадание выходного звена в особое положение было невозможно. Рассматриваемый в настоящей статье механизм не имеет особых положений при горизонтальной ориентации по-

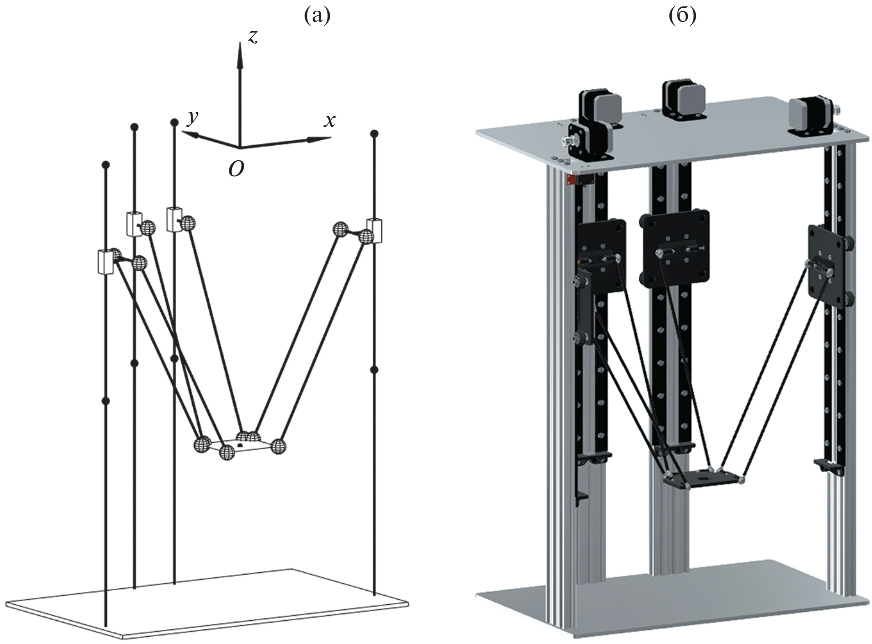


Рис. 1. Схема механизма – (а) и его CAD-модель – (б).

движной платформы, однако при ее наклоне в рабочей зоне появляются области, соответствующие таким положениям [6].

В настоящее время не существует какого-то одного универсального и принимаемого всеми исследователями в качестве “золотого стандарта” подхода к оценке близости к особым положениям. Поэтому ранее была предложена методика оценки близости к особым положениям на основе скоростных и силовых критериев [7]. Настоящая статья является логическим продолжением ранее опубликованных работ [6, 8], посвященных рассматриваемому механизму, а ее целью является экспериментальная проверка адекватности расчетной методики, упомянутой выше, на конкретном примере.

Характеристика исследуемого механизма. Схема механизма и его CAD-модель представлены на рис. 1.

Структурно механизм имеет четыре кинематических цепи. Две крайних цепи представляют собой классические цепи с параллелограммом, используемые в механизмах данного семейства, а две средних имеют простую структуру PSS (“P” – призматическая кинематическая пара, “S” – сферическая). Выходное звено имеет четыре степени свободы: три перемещения вдоль осей x, y и z, а также возможность поворота вокруг некоторой оси, параллельной оси y и проходящей через центр выходного звена. Во всех цепях приводной является призматическая пара.

Конструктивно, вертикальные направляюще выполнены из экструдированного алюминиевого профиля (60 × 20 мм) с закрепленными на нем рельсами типа Open-Rail. Перемещение кареток по направляющим осуществляется с помощью шаговых двигателей 17HS4401 (типоразмер NEMA 17) через передачу зубчатым ремнем типа GT2. Каретки, выходное звено, а также часть других деталей изготовлены из PLA-пластика методом 3D печати. В качестве штанг использованы углепластиковые трубки внешним диаметром 5 мм со сферическими шарнирами на концах. Верхнее и нижнее основание получены путем фрезерной обработки на станке с ЧПУ двух пластин из

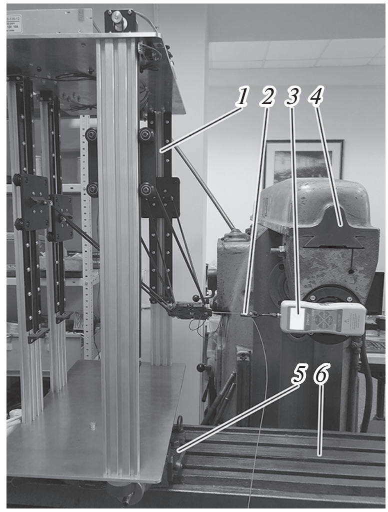


Рис. 2. Общий вид экспериментального стенда.

сплава АМг2 толщиной 6 мм. Для управления механизмом используется отладочная плата STM Nucleo-FR401RE и драйверы шагового двигателя A4988. Программирование осуществлялось в среде Mbed.

Габаритные размеры механизма: ширина – 500 мм, глубина – 320 мм, высота – 712 мм без учета высоты системы управления и ножек; длина штанг (межосевое расстояние для двух шаровых шарниров на концах) составляет 337 мм, а размеры подвижной платформы 110 × 85 мм. Таким образом, исследуемый механизм по своим размерам и конструкции близок к многочисленным 3D-принтерам, основанным на схеме Delta с тремя степенями свободы и доступным в настоящее время на рынке.

Описание экспериментальной установки и контроль направления приложения внешней силы. Проводимый эксперимент предполагает нагружение выходного звена силой в плоскости, параллельной Oxy в различных направлениях. Для этого механизм закрепляется винтами на поворотном столе, который в свою очередь установлен на горизонтально-фрезерном станке 6Н81Г (рис. 2).

На консоли станка *4* закреплен электронный динамометр *3*, соединенный с выходным звеном механизма *1* с помощью металлического троса *2*. Продольное перемещение стола станка *6* приводит к нагружению выходного звена внешней силой за счет натяжения указанного троса. Поперечное и вертикальное перемещение стола, а также вращение съемного поворотного стола *5* позволяют выставить механизм таким образом, чтобы направление возникающей силы совпадало с осью штока динамометра. Жесткость станка, поворотного стола, динамометра и троса (при растяжении) значительно выше жесткости исследуемого механизма, что позволяет считать, что перемещение стола станка компенсируется только за счет податливости элементов самого механизма. Это позволяет измерять перемещения непосредственно по лимбу стола (цена деления 0.05 мм), не внося при этом значимой погрешности.

Помимо точности измерения собственно значений прилагаемой силы и вызываемых ей перемещений, крайне важным является контроль направления приложения внешней нагрузки. Ранее было показано [7], что в каждой точке существует некоторое “наихудшее” направление приложения внешней силы $\mathbf{F}$, соответствующее максимально возможному (при неизменной норме $\|\mathbf{F}\|$) усилию (моменту или силе) e_{ai} в ак-

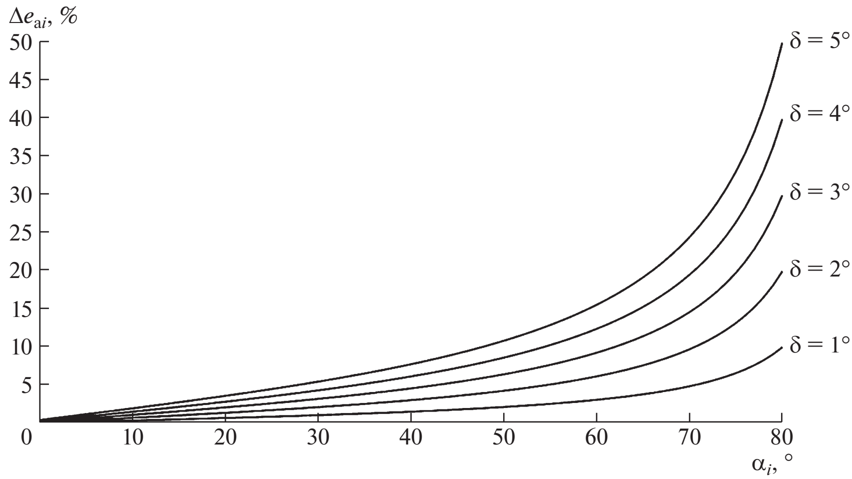


Рис. 3. Относительное отклонение расчетного значения усилия в приводе в зависимости от величины отклонения вектора внешней силы от заданного направления.

тивной паре i-й кинематической цепи. В общем случае для любого механизма значение данного усилия будет равно

$$e_{ai} = -\|\mathbf{F}\| \cdot \|\mathbf{j}_{\mathrm{T}i}\| \cdot \cos\alpha_i, \qquad (1)$$

где $\mathbf{j}_{\mathrm{T}i}$ – i-я строка транспонированной матрицы Якоби механизма, α_i – угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{j}_{\mathrm{T}i}$. Можно видеть, что упомянутое “наихудшее” направление вектора **F** является коллинеарным вектору $\mathbf{j}_{\mathrm{T}i}$.

Если в процессе эксперимента реальное направление силы **F** не совпадает с требуемым, то это означает изменение значения угла α_i. Тогда относительное отклонение величины усилия в i-м приводе, вызванное изменением этого угла

$$\Delta e_{ai} = \left|\frac{e_{ai} - e_{ai}^*}{e_{ai}}\right| \times 100\% = \left|\frac{\cos\alpha_i - \cos\alpha_i^*}{\cos\alpha_i}\right| \times 100\% = \left|1 - \frac{\cos\alpha_i^*}{\cos\alpha_i}\right| \times 100\%,$$

где звездочкой обозначены величины, изменившиеся за счет отклонения вектора **F** от заданного направления.

Чем сильнее угол α_i^* отличается от угла α_i, тем больше становится значение рассматриваемого отклонения. Пусть вектор **F** отклоняется от заданного направления на некоторый угол $\pm\delta$. Тогда максимально возможную величину относительного отклонения расчета усилия в приводе можно рассчитать по формуле

$$\Delta e_{ai} = \left|1 - \frac{\cos(\alpha_i \pm \delta)}{\cos\alpha_i}\right| \times 100\%.$$

Поскольку интерес представляет только абсолютная величина данного отклонения, достаточно рассмотреть только изменение угла α_i в интервале от 0° до 90° и отклонение $+\delta$ (рис. 3). Из графика (рис. 3) видно, что, например, ошибка направления приложения внешней силы в 5° при значении α_i немного большем, чем 45°, приводит к возникновению погрешности вычисления усилия в приводе, превышающей 10%.

Иными словами, чем больше направление внешней силы не совпадает с “наихудшим” для данного привода, тем важнее становится задача контроля за соблюдением

Таблица 1. Результаты измерения силы срыва кареток

№ каретки	Срыв вверх		Срыв вниз	
	μ, Н	σ, Н	μ, Н	σ, Н
1	30.19	0.56	25.3	0.65
2	35.20	1.13	31.39	0.28
3	33.11	0.69	29.79	0.25
4	30.10	0.95	24.48	0.35

этого направления в процессе эксперимента. Для решения этой проблемы в данном эксперименте металлический трос (диаметр 1.65 мм) при закреплении на выходном звене проходит через металлическую трубку, длиной 25 мм и внутренним диаметром 3.6 мм, ось которой совпадает с требуемым направлением приложения внешней силы. При таких размерах, если трос не касается трубки, величина угла δ не превышает 1.2°, а верхняя граница относительной погрешности вычисления усилия в приводе составит 5% при $\alpha_i = 67.18°$ и 10% при $\alpha_i = 78.15°$. Касание троса и трубки фиксируется с помощью вспомогательной электрической цепи, включающей элемент питания и устройство оповещения (светодиод или звуковой модуль).

Экспериментальное исследование. На первом этапе были экспериментально установлены силы срыва кареток, т.е. значения нагрузок, которые необходимо приложить непосредственно к кареткам для того, чтобы вызвать их перемещение при условии, что шаговые двигатели находятся в режиме удержания. Для этого каждая каретка нагружалась силой вдоль оси ее перемещения вверх и вниз. В каждом направлении выполнялось по 20 измерений. Выборки были проверены на нормальность по критерию Андерсона–Дарлинга с уровнем значимости 5%, после чего были рассчитаны значения математического ожидания μ и среднеквадратического отклонения σ (табл. 1).

Нумерация цепей по порядку справа налево (рис. 1).

Рассмотрим теперь связь сил, действующих на каретки, и внешней силы, приложенной к выходному звену. Для исследуемого механизма справедливо выражение

$$\begin{pmatrix} F_{a1} \\ F_{a2} \\ F_{a3} \\ F_{a4} \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_y \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где F_{ai} – сила на каретке i-й ($i = 1...4$) цепи; F_x, F_y, F_z – внешние силы, действующие параллельно соответствующим координатным осям; M_y – внешний момент, действующий в рамках вращательной степени свободы выходного звена; $\mathbf{J}$ – матрица Якоби механизма.

Принимая во внимание то, что эксперимент проводится только с нагружением внешней силой в горизонтальной плоскости, а также с учетом (2), выражение (1) для рассматриваемого механизма можно записать для любой i-й цепи в несколько видоизмененной форме

$$F_{ai} = -\langle \mathbf{j}_{\mathrm{T}i}, \mathbf{F}_{xy} \rangle = -\|\mathbf{F}_{xy}\| \cdot \langle \mathbf{j}_{\mathrm{T}i}, \mathbf{d}_F \rangle, \tag{3}$$

где $\mathbf{F}_{xy} = (F_x, F_y, 0\ 0)$ – вектор внешней силы, приложенной в плоскости, параллельной плоскости Oxy; $\mathbf{d}_F$ – единичный вектор направления внешней силы. Скалярное произведение в данном случае обозначено угловыми скобками во избежание путаницы с операцией умножения.

Пусть $F_{ai}^{кр}$ – значение критической силы срыва каретки в i-й кинематической цепи, а $\mathbf{F}_{xy}^{кр}$ – соответствующий ей вектор внешней силы. Тогда, подставив данные величины в (3), можно получить выражение для расчета величины внешней нагрузки

$$\left\|\mathbf{F}_{xy}^{кр}\right\| = \frac{-F_{ai}^{кр}}{\left\langle \mathbf{j}_{\mathrm{T}i}, \mathbf{d}_F \right\rangle}. \tag{4}$$

Значение силы $F_{ai}^{кр}$ может быть как положительным (сила действует вверх), так и отрицательным (сила действует вниз), поэтому направление действия этой силы определяется таким образом, чтобы при расчете значения $\left\|\mathbf{F}_{xy}^{кр}\right\|$ оно не оказалось отрицательным.

Таким образом, используя значения из табл. 1, можно по формуле (4) для каждой каретки рассчитать величину внешней силы, которую необходимо приложить к выходному звену в любом заданном направлении. Если после этого провести эксперимент, при котором сила будет прикладываться к выходному звену до срыва какой-либо каретки, то упомянутые расчетные значения $\left\|\mathbf{F}_{xy}^{кр}\right\|$ можно сравнить с экспериментальными, проверив тем самым адекватность расчетной методики. При этом сначала целесообразно проводить подобный эксперимент в точке, далекой от особых положений, дабы максимально снизить их возможное влияние.

Сначала измерения величины внешней критической силы производились при нахождении выходного звена точке с координатами $x = 0$ мм, $y = -100$ мм, $z = -400$ мм и при угле поворота подвижной платформы $\varphi_y = 0°$. В этой точке в горизонтальной плоскости к выходному звену прикладывалась внешняя сила в различных направлениях до момента срыва какой-либо каретки. Всего было исследовано восемь направлений приложения внешней силы с шагом, равным 45°, для каждого из которых было проведено по 20 измерений. Как и в предыдущем случае, выборки проверялись на нормальность и были вычислены параметры распределения. Результаты измерений, а также результаты расчетов по формуле (4) представлены в табл. 2. Направление 0° совпадает с направлением оси Oy, в дальнейшем углы откладываются против часовой стрелки. В скобках указан номер каретки, для которой приведено соответствующее расчетное значение μ или σ.

Из табл. 2 видно, что в трех случаях происходил срыв не той каретки, которая предсказывалась расчетами, однако, значения расчетной внешней критической силы для обеих кареток во всех случаях весьма близки. Поскольку адекватная оценка непосредственного значения критической внешней силы намного важнее точного предсказания того, какой именно привод окажется перегруженным, данное расхождение не играет существенной роли.

Таким образом, анализируя результаты эксперимента можно отметить хорошую согласованность расчетных и экспериментальных значений внешней критической силы. Различие между значениями составляет не более 7.1% для всех направлений, кроме направления 180°, для которого эта величина составляет 10.73%, что, однако, также является очень хорошим результатом. При этом дисперсия, особенно для экспериментальных значений, невелика. Исходя из этого, можно заключить, что при проведении эксперимента по нагружению выходного звена внешней силой при нахождении этого звена в точке, далекой от особых положений, продемонстрирована адекватность теоретических расчетных зависимостей. Это позволяет в дальнейшем использовать их без опасений внести дополнительную погрешность в результаты.

Результаты описанного эксперимента позволяют предположить, что заведомо невысокая жесткость механизма не оказывает существенного влияния на точность расчетов. Однако известно, что при приближении к особым положениям происходит

Таблица 2. Результаты измерения критической внешней силы и результаты расчетов

Направление внешней силы	Каретка и направление срыва		Внешняя критическая сила			
	расчет	эксперимент	расчет		эксперимент	
			μ, Н	σ, Н	μ, Н	σ, Н
0°	2, вниз	4, вниз	26.5 (2)	0.24 (2)	25.67	0.30
			26.57 (4)	0.38 (4)		
45°	4, вниз	4, вниз	22.25	0.32	28.83	0.23
90°	4, вниз	1, вниз	38.58 (4)	0.55 (4)	37.88	0.35
			39.93 (1)	1.02 (1)		
135°	1, вниз	1, вниз	23.03	0.59	22.24	0.29
180°	3, вниз	1, вниз	25.15 (3)	0.19 (3)	24.54	0.30
			27.49 (1)	0.7 (1)		
225°	3, вниз	3, вниз	23.16	0.19	24.49	0.28
270°	3, вниз	3, вниз	46.96	0.39	48.34	0.56
315°	2, вниз	2, вниз	24.41	0.22	25.75	0.35

уменьшение жесткости [9], поэтому целесообразным является экспериментальное исследование зависимости изменения величины критической внешней силы от жесткости механизма в направлении этой силы.

Данный этап экспериментального исследования проводился в девяти различных точках с постоянными координатами выходного звена $y = -100$ мм, $z = -400$ мм, $\varphi_y = 30°$ и координатой x, изменяемой на интервале от -100 м до 100 мм включительно с шагом 25 мм. Наклон выходного звена позволяет ввести в рабочую зону особые положения 2-го типа (рис. 4, нижний правый угол среза рабочей зоны) по классификации Х. Анжелеса и К. Госслена [10]. Изменение координаты x, удобное с практической точки зрения, позволяет приближать или отдалять выходное звено от особого положения.

Как и в предыдущем эксперименте, в указанных точках к выходному звену прикладывалась внешняя сила (20 измерений). Из соображений удобства проведения эксперимента направление этой силы всегда параллельно оси Oy (направление 270° по обозначениям в табл. 2). Учитывая полученные данные о критических силах срыва кареток (табл. 1), по формуле (4) можно рассчитать критические значения внешней силы $\left\|\mathbf{F}_y^{\text{кр}}\right\|$ после чего сравнить полученные значения с экспериментальными. Стоит отметить, что во всех девяти точках расчетами предсказывается срыв каретки второй кинематической цепи вниз. Также для каждой из точек была измерена жесткость механизма в направлении прилагаемой силы. Для этого в процессе нагружения с шагом 2.5 Н измерялось перемещение стола станка, после чего полученные данные были аппроксимированы методом наименьших квадратов и рассчитано собственно значение жесткости в рамках линейной модели. Результаты измерений представлены в табл. 3.

Как видно из результатов расчета, значение критической внешней силы изменяется от 41.97 Н при $x = -0.1$ м до 27.5 Н при $x = 0.1$ м, т.е. ожидаемо уменьшается при приближении к особому положению. В то же время разница между расчетными и экспериментальными значениями увеличивается. При этом экспериментальное значение оказывается больше расчетного, т.е. в реальности может выдержать большую нагрузку, чем предсказывается расчетом. Сама же величина относительного отклонения между расчетными и экспериментальными значениями достигает 40.04% при $x = 0.1$ м,

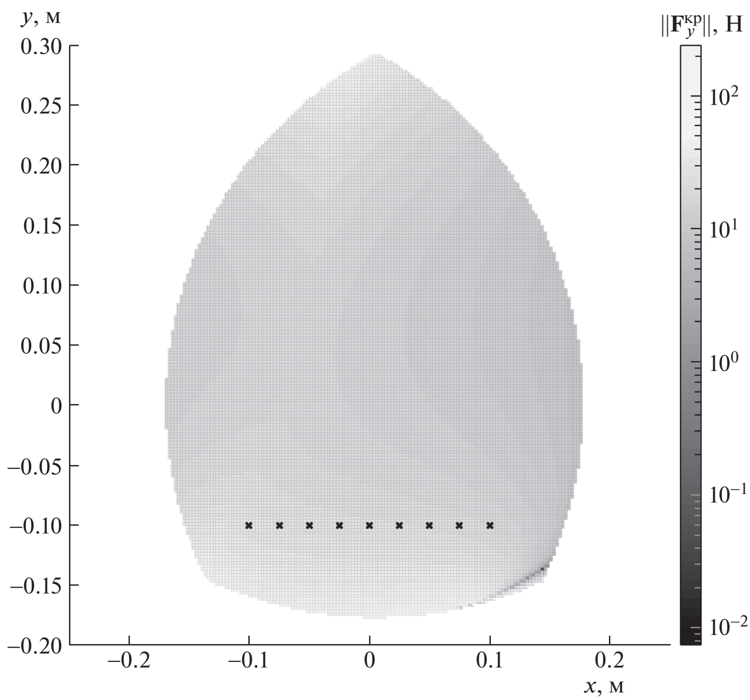


Рис. 4. Точки проведения эксперимента: расположение на срезе рабочей зоны.

что является весьма существенным. Кроме того, величина среднеквадратического отклонения не увеличивается при приближении к особому положению, а значит можно говорить о том, что точность измерения экспериментального значения внешней силы достаточна во всех точках. В то же время в предыдущем эксперименте была продемон-

Таблица 3. Результаты измерения критической внешней силы (срыв каретки № 2 вниз) и жесткости

x, мм	Внешняя критическая сила (μ, σ) и жесткость				
	расчет		эксперимент		
	μ, Н	σ, Н	μ, Н	σ, Н	жесткость, Н/мм
–100	41.97	0.38	40.12	0.62	6.3191
–75	38.86	0.35	39.82	0.54	6.3450
–50	36.88	0.33	38.30	0.72	5.7518
–25	35.49	0.32	38.48	0.83	6.1434
0	34.38	0.31	38.36	0.37	5.6867
25	33.31	0.30	37.60	0.91	5.9501
50	32.04	0.29	33.73	0.63	5.5074
75	30.25	0.27	32.77	0.66	4.6394
100	27.50	0.25	38.51	0.66	5.2133

стрирована адекватность результатов, получаемых расчетным путем. Достоверность как расчетных, так и экспериментальных значений критической внешней силы позволяет сделать вывод о том, что нарастающее при приближении к особому положению отклонение между этими величинами вызвано влиянием одного или нескольких факторов, в частности изменением жесткости механизма.

Используя полученные данные о значениях критической силы срыва и жесткости механизма в направлении действия этой силы можно перейти непосредственно к рассмотрению влияния жесткости на отклонение экспериментального и расчетного значений указанной силы. Пусть данное отклонение определяется как

$$\Delta F_y^{\text{кр}} = \frac{F_{y,\text{эксп}}^{\text{кр}} - F_{y,\text{расч}}^{\text{кр}}}{F_{y,\text{расч}}^{\text{кр.р}}} \times 100\%,$$

где “эксп” указывает на то, что значение получено в результате эксперимента, а “расч” — путем расчета. Положительное значение отклонения говорит о том, что реально выдерживаемая внешняя нагрузка больше расчетной, в то время как отрицательное свидетельствует о том, что расчет дает завышенное значение этой нагрузки.

При рассмотрении результатов эксперимента (табл. 3) можно уследить качественную связь между снижением жесткости механизма и увеличением отклонения значения экспериментально определенной критической силы от расчетного. Для количественной же оценки взаимозависимости данных величин можно рассчитать коэффициент корреляции (Пирсона). Однако поскольку эксперимент проводился всего в девяти точках, значение данного коэффициента, рассчитанного для двух выборок такого размера, может оказаться ниже, чем могло бы быть для более крупных выборок, а значит, уровень зависимости одной величины от другой может быть занижен.

При рассмотрении жесткости механизма параллельной структуры его промежуточных звеньев, как правило, представляются в виде балок [11]. Для этого составляются матрицы жесткости отдельных звеньев, которые затем объединяют в общую матрицу жесткости всего механизма. При этом компоненты матрицы перехода от локальных координат к глобальным зависят от последних. В общем случае зависимость какой-либо компоненты матрицы перехода от всех абсолютных координат можно представить полиномом степени, не большей, чем три. Зависимость же от какой-либо одной координаты в таком случае будет выражаться полиномом, степень которого максимально может быть равной двум. Исходя из этого, можно предположить, что зависимость жесткости рассматриваемого механизма от координаты x будет квадратичной, а значит, используя метод наименьших квадратов, целесообразно провести аппроксимацию имеющейся выборки значений жесткости механизма полиномом второй степени. Сделав допущение, что отклонение значений критической силы зависит от изменения жесткости механизма, такую же аппроксимацию можно выполнить и для выборки значений $\Delta F_y^{\text{кр}}$ (рис. 5).

После аппроксимации выборочных значений (точки на графике) полиномами второй степени (штриховые линии на графике) корреляция между исследуемыми величинами становится очевидной. Количественно, значение коэффициента корреляции между изначальными выборками оказалось равным — 0.439, а между аппроксимированными данными составило — 0.969.

Из полученных результатов следует явная корреляция между изменением жесткости механизма в некотором направлении при приближении к особым положениям и погрешностью вычислений теоретического значения критической внешней силы в этом же направлении. При этом видно, что реальное значение критической силы оказывается больше расчетного, т.е. используемая расчетная методика занижает это значение, а значит, позволяет рассчитать требуемые характеристики приводов с некоторым запасом. Это можно объяснить перераспределением нагрузки между цепями за

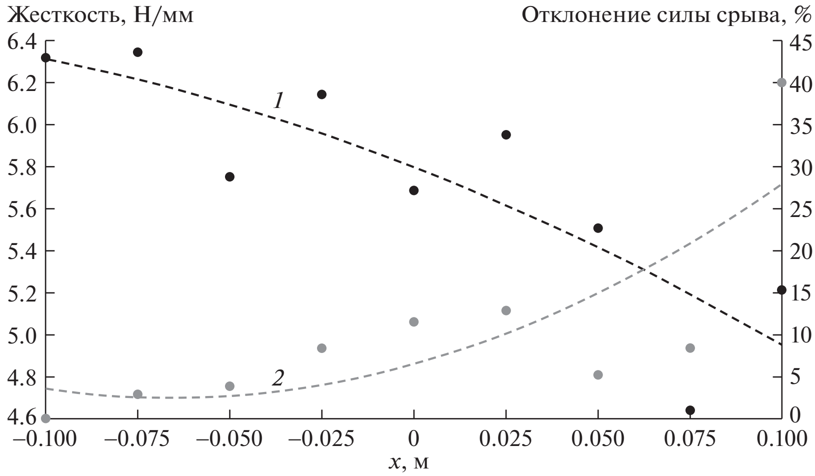


Рис. 5. Изменение жесткости – *1* и отклонения экспериментального и расчетного значений внешней критической силы – *2*.

счет неравномерного изменения их жесткости и, соответственно, вклада в общую жесткость механизма.

Заключение. В настоящей статье был рассмотрен двухэтапный эксперимент по проверке предложенного ранее способа расчета критической внешней нагрузки на выходное звено механизма параллельной структуре, приводящей к превышению максимального усилия, которое могут развить приводы механизма. В качестве объекта исследования был выбран механизм типа Delta с линейными приводами и четырьмя степенями свободы. На первом этапе была продемонстрирована достаточная точность расчетов в точке, удаленной от особых положений. Так, для всех точек, кроме одной, относительная погрешность расчетов при сравнении с данными эксперимента составила не более 7.1%, а в оставшейся точке имела значение 10.74%. На втором этапе было показано, что при приближении к особому положению указанная погрешность растет (в рассматриваемом эксперименте – до 40.04%). При этом установлена корреляция между увеличением погрешности и уменьшением жесткости механизма в направлении прикладываемой внешней нагрузки. После аппроксимации экспериментальных данных полиномами второй степени методом наименьших квадратов было получено значение коэффициента корреляции, равное – 0.969. При этом установлено, что расчетное значение критической силы оказывается больше экспериментального, что можно объяснить перераспределением нагрузки между кинематическими цепями, вызванным неравномерным изменением жесткости каждой отдельной цепи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Clavel R.* Device for the Movement and Positioning of an Element in Space. USA Patent 4976582, 1990.

2. *Briot S., Arakelian V., Glazunov V.* Design and analysis of the properties of the Delta inverse robot // Proceedings of the X. International Conference on the Theory of Machines and Mechanisms. Liberec, Czech Republic, 2008. P. 113.

3. *Глазунов В.А., Борисов В.А.* Разработка механизмов параллельной структуры с четырьмя степенями свободы и четырьмя кинематическими цепями // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 5. С. 3.

4. *Stamper R.E.* A Three Degree of Freedom Parallel Manipulator with Only Translational Degrees of Freedom // Ph.D. Thesis. University of Maryland, College Park. Md. 1997.
5. *Carricato M.* Singularity-Free Fully-Isotropic Translational Parallel Manipulators. University of Bologna, 2001. 67 p.
6. *Ларюшкин П.А., Эрастова К.Г., Кобылкевич К.А., Скворцов С.А.* Исследование особых положений механизма параллельной структуры семейства Delta с четырьмя степенями свободы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 6. С. 34.
7. *Laryushkin P., Glazunov V., Erastova K.* On the Maximization of Joint Velocities and Generalized Reactions in the Workspace and Singularity Analysis of Parallel Mechanisms // Robotica. 2019. V. 37. № 4. P. 675.
8. *Ларюшкин П.А., Эрастова К.Г., Филиппов Г.С., Хейло С.В.* К расчету механизмов типа Delta с линейными приводами и различным числом степеней свободы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 3. С. 19.
9. *Merlet J.-P.* Parallel Robots. 2-nd edition. Springer, 2006. P. 402.
10. *Gosselin C.M., Angeles J.* Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. IEEE Transactions on Robotics and Automatics. 1990. V. 6 (3). P. 281.
11. *Klimchik A., Pashkevich A., Chablat D.* Fundamentals of Manipulator Stiffness Modeling Using Matrix Structural Analysis // Mech. Mach. Theory. 2019. V. 133. № December. P. 365.

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 62-231.311.1

КРИВОШИПНО-ШАТУННЫЙ МЕХАНИЗМ С УПРУГИМИ ШАРНИРАМИ, ИМЕЮЩИМИ ЗАДАННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

А. Н. Зотов[1],*, А. С. Свиридов[1]

[1] *Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия*
**e-mail: anz21963@yandex.ru*

Поступила в редакцию 12.05.2021 г.
После доработки 06.06.2021 г.
Принята к публикации 24.06.2021 г.

Статья посвящена исследованию работы упругих шарниров с заданными зависимостями восстанавливающего момента от угла поворота в кривошипно-шатунном механизме. Принцип работы предлагаемых шарниров основан на перемещении упругого элемента между направляющими расчетной формы. Установка такого шарнира с расчетной характеристикой между стойкой и кривошипом позволяет получить постоянную угловую скорость кривошипа. При введении упругого шарнира между кривошипом и шатуном существенно уменьшается боковая сила, действующая на поршень в случае постоянной угловой скорости кривошипа. При добавлении должным образом противовеса, на шатуне возможно получить нулевую боковую силу в течение всего оборота кривошипа.

Ключевые слова: кривошипно-шатунный механизм, двигатель внутреннего сгорания, упругий шарнир, боковая сила, кривошип, шатун, неравномерность вращения кривошипа, трение

DOI: 10.31857/S023571192105014X

Проблеме уравновешивания и балансировки кривошипно-шатунного механизма (КШМ) посвящено множество работ [1–11]. Для снижения неравномерности вращения вала двигателя внутреннего сгорания (ДВС) предназначен маховик. Инерционность маховика может превышать 80% от инерционности всего ДВС [12]. Для транспортных средств снижение массы маховика уменьшит расход топлива, выбросы токсичных компонентов при разгоне и вибрацию всего механизма.

Для КШМ из однородных стержней известна зависимость момента от угла поворота кривошипа $M(\varphi)$, который необходимо к нему приложить для обеспечения его постоянной угловой скорости [13]. Эта зависимость является потенциальной, т.е. не требуется подвода энергии на одном повороте кривошипа ($\int_0^{2\pi} M(\varphi)d\varphi = 0$). Были поставлены следующие задачи. Разработать упругий шарнир, работающий без подвода энергии и создающий необходимый момент, приложенный к кривошипу для обеспечения его постоянной угловой скорости. Минимизировать боковую силу, действующую на поршень КШМ, путем установки упругого шарнира с заданной характеристикой между кривошипом и шатуном. Шарнир с заданной характеристикой представляет собой потенциальную систему, в которой упругий элемент (пружина или пневмопружина), перемещается между направляющими расчетной формы [14, 15]. Форма направляющих рассчитывается таким образом, чтобы момент создаваемый реакциями N был заданным (рис. 1). Радиус ролика, контактирующего с направляющи-

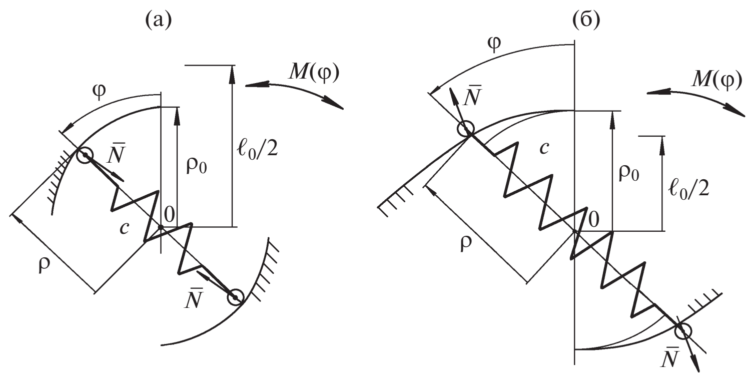


Рис. 1. Схема упругого шарнира: (а) – пружина сжимается; (б) – пружина растягивается.

ми, принят равным нулю. Трение не учитывается. Полярная координата, определяющая форму направляющих, рассчитывается из зависимости частной производной по углу поворота от потенциальной энергии пружины шарнира с моментом, создаваемым этим шарниром. Для определения боковой силы, действующей на поршень, использованы методы силового расчета КШМ, применяемые в теории машин и механизмов.

Определение параметров упругого шарнира для получения постоянной угловой скорости кривошипа. Для получения заданного момента, создаваемого предлагаемым шарниром, необходимо рассчитать форму его направляющих. Форму направляющих можно определить путем решения дифференциального уравнения

$$-M(\varphi) = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \tag{1}$$

где $\Pi = \frac{c\Delta\ell^2}{2}$ – потенциальная энергия пружины; c – коэффициент жесткости пружины; $\Delta\ell = 2\left(\frac{\ell_0}{2} - \rho\right)$, где ℓ_0 – длина ненапряженной пружины; ρ – полярная координата, определяющая форму направляющих (рис. 1).

С учетом зависимости $M(\varphi)$, приведенной в [13] и формулы (1), получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$4c(\ell_0 - 2\rho)d\rho = -\left(\frac{dI_{\text{пр.}}}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 + r(P_1 + P_2)\cos(\varphi)\right)d\varphi, \tag{2}$$

где $I_{\text{пр.}}$ – приведенный момент инерции КШМ [13]; $\lambda = r/\ell$; r – длина кривошипа; ℓ – длина шатуна; P_1, P_2, P_3 – веса кривошипа, шатуна и ползуна КШМ соответственно; $g = 9.82$ м/с^2 – ускорение свободного падения.

Начальные условия для этого дифференциального уравнения при постоянной угловой скорости $\dot{\varphi}$ следующие: при $\varphi = 0$, $\rho = \rho_0$. Опуская выкладки, получаем решение дифференциального уравнения (2)

$$\rho = \frac{\ell_0}{2} \mp \sqrt{\ell_0^2/4 - B}, \tag{3}$$

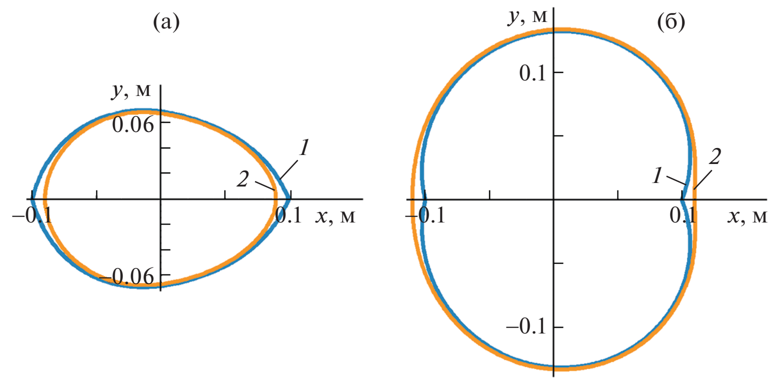


Рис. 2. Формы направляющих: (а) – пружина сжимается; (б) – пружина растягивается.

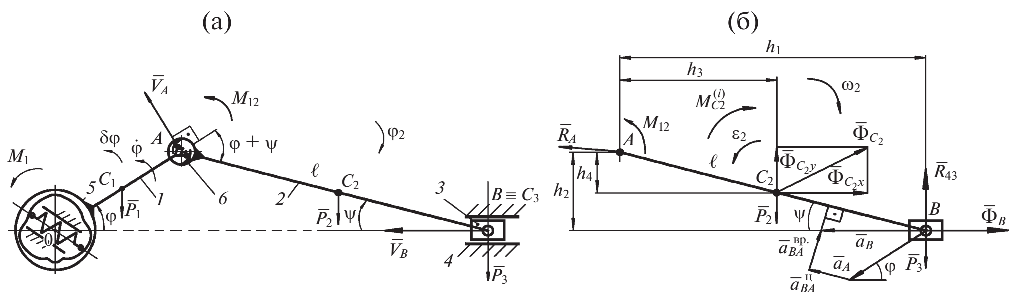


Рис. 3.

где $\mathrm{B} = -\dfrac{\dot{\varphi}^2 \mathrm{I}_{\text{пр.}}}{4c} - \dfrac{r\left(P_1 + P_2\right)\sin\left(\varphi\right)}{4c} + \ell_0\rho_0 - \rho_0^2 + \dfrac{\dot{\varphi}^2 \dfrac{r^2}{3g}\left(P_1 + P_2\right)}{4c}$.

На рис. 2 представлены зависимости $\rho\left(\varphi\right)$, полученные по формуле (3) при следующих данных: $c = 2\times 10^7$ Н/м; $r = 0.05$ м; $\ell_0 = 0.2$ м; $P_1 = 5$ Н; $P_2 = 6.5$ Н; $P_3 = 6$ Н; $\lambda = 0.3$; $\dot{\varphi} = 100$ с$^{-1}$. Направляющие *1* получены при условии, что пружина при $\varphi = 0$ не напряжена: $\rho_0 = \dfrac{\ell_0}{2}$. Направляющие *2* получены при $\rho_0 = 0.09$ м. На рис. 2а пружина сжимается (знак минус в уравнении (3)), на рис. 2б – растягивается (знак плюс). Центр пружины неподвижен и находится в центре вращения кривошипа, а направляющие жестко связаны с кривошипом.

Определение параметров упругого шарнира, расположенного между кривошипом и шатуном, для уменьшения боковой силы, действующей на поршень КШМ. Влиянию сил, действующих на поршень КШМ, посвящено много работ [17–22]. Большинство исследователей считает, что боковая сила, действующая на поршень, существенно влияет на его износ и потери на трение.

На рис. 3а представлен КШМ с упругим шарниром между кривошипом и шатуном. Угловую скорость кривошипа принимаем постоянной. На рис. 3б представлена группа Ассура 2-го класса, 2-го порядка, 2-го вида по классификации, принятой в теории машин и механизмов [1]. Определим момент M_{12}, возникающий в упругом шарнире *6*, при котором боковая сила R_{43}, действующая со стороны стойки *4* на поршень *3*, равна нулю. Сумма моментов всех активных сил, сил инерции и момента сил инерции шатуна, действующих на эту группу (рис. 3б), относительно точки A при $R_{43} = 0$ определяется по формуле

$$M_{12} - P_3 h_1 - \left(\frac{P_3}{g}\right)\ddot{x}_B h_2 - \mathrm{I}_{C2}^{(2)}\varepsilon_2 - \left(\frac{P_2}{g}\right)\ddot{y}_{C2} h_3 - (P_2/g)\,\ddot{x}_{C2} h_4 - P_2 h_3 = 0, \tag{4}$$

где $h_1 = \ell\cos(\psi)$; $\cos(\psi) \approx 1 - 0.25\lambda^2 + 0.25\lambda^2\cos(2\varphi)$; $\ddot{x}_B = -r\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2 - \lambda^2\ell\cos(2\varphi)\dot{\varphi}^2$; $h_2 = \ell\sin(\psi)$; $\sin(\psi) = \lambda\sin(\varphi)$ [13]; $I_{C2}^{(2)} = \dfrac{(P_2/g)\,\ell_2^2}{12}$ – момент инерции шатуна относительно его центра масс C_2;

$$\varepsilon_2 = \lambda\dot{\varphi}^2\sin(\varphi)\frac{1 - \left(\dfrac{\lambda\cos(\varphi)}{1 - 0.25\lambda^2 + 0.25\lambda^2\cos(2\varphi)}\right)^2}{\left(1 - 0.25\lambda^2 + 0.25\lambda^2\cos(2\varphi)\right)}; \quad \ddot{y}_{C2} = -0.5r\dot{\varphi}^2\sin(\varphi);$$

$$h_3 = 0.5\ell\left(1 - 0.25\lambda^2 + 0.25\lambda^2\cos(2\varphi)\right);$$

$$\ddot{x}_{C2} = -r\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2 - 0.5l\lambda^2\cos(2\varphi)\dot{\varphi}^2; \quad h_4 = 0.5r\sin(\varphi).$$

На рис. 4а представлены зависимости $M_{12}(\varphi)$, полученные по формуле (4), при следующих данных: $P_1 = 5$ Н, $P_2 = 6.5$ Н, $P_3 = 6$ Н, $r = 0.05$ м, $\lambda = 0.3$, *1* – $\dot{\varphi} = 100$ с$^{-1}$, *2* – $\dot{\varphi} = 300$ с$^{-1}$, *3* – $\dot{\varphi} = 500$ с$^{-1}$.

Проинтегрировав эти зависимости в диапазоне от 0 до 2π, получаем следующий результат: для всех трех зависимостей *1*, *2*, *3* – $\int_0^{2\pi} M_{12}d\varphi = 9.469$ Дж, т.е. этот интеграл не зависит от угловой скорости кривошипа. Для выделения потенциальной части ($\int_0^{2\pi} M_{12}^{\text{пот.}}d\varphi = 0$) зависимостей *1*, *2*, *3* использовано выражение

$$M_{12}^{\text{пот.}} = M_{12} - \int_0^{2\pi} M_{12}d\varphi/(2\pi), \tag{5}$$

где M_{12} определяется из (4).

Зависимости, полученные по формуле (5), (*1'* – $\dot{\varphi} = 100$ с$^{-1}$; *2'* – $\dot{\varphi} = 300$ с$^{-1}$; *3'* – $\dot{\varphi} = 500$ с$^{-1}$) при тех же данных также представлены на рис. 4а. Они слились с зависимостями, полученными по формуле (4). После установки упругого шарнира с силовой характеристикой по формуле (5) между кривошипом и шатуном сумма моментов относительно точки A определяется по формуле

$$\left(M_{12}(\varphi) - \int_0^{2\pi} M_{12}(\varphi)\,d\varphi/(2\pi)\right) + R_{43}^{*}\ell\cos(\psi) - P_3 h_1 + \Phi_B h_2 -$$

$$- M_{C2}^{(i)} + \Phi_{C2y} h_3 + \Phi_{C2x} h_4 - P_2 h_3 = 0.$$

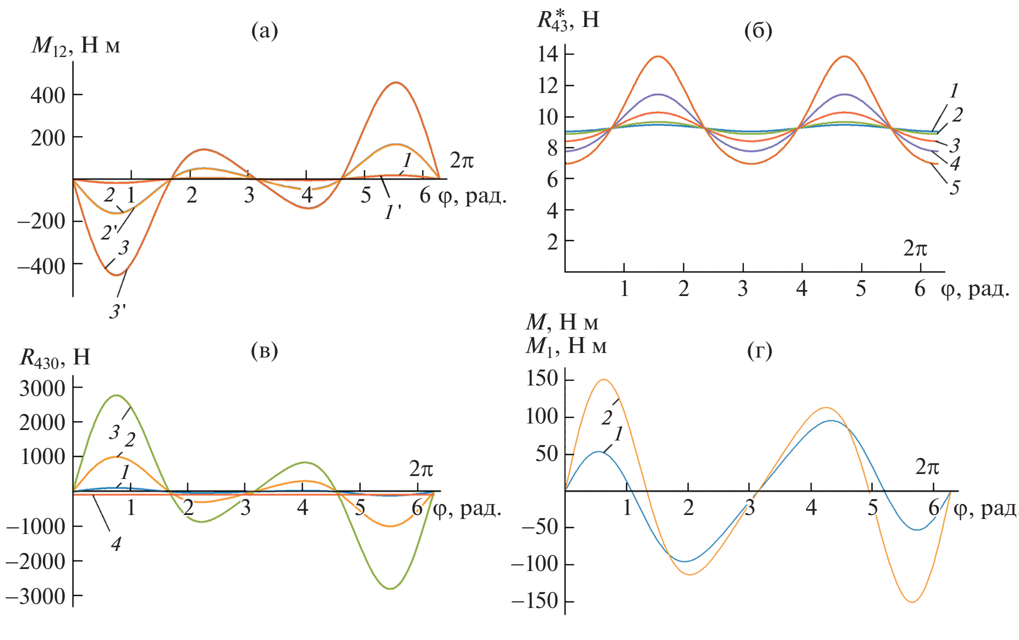


Рис. 4.

Отсюда боковая сила R_{43}^*, действующая на поршень после установления упругого шарнира между кривошипом и шатуном, который обеспечит потенциальную зависимость (5), определяется выражением

$$R_{43}^* = -\frac{\int\limits_0^{2\pi} M_{12} d\varphi}{2\pi\ell\left(1 - 0.25\lambda^2 + 0.25\lambda^2\cos(2\varphi)\right)}. \tag{6}$$

Боковая сила R_{430}, действующая на поршень без упругого шарнира между шарниром и шатуном, определяется выражением (7)

$$R_{430} = -\frac{M_{12}}{\ell\left(1 - 0.25\lambda^2 + 0.25\lambda^2\cos(2\varphi)\right)}. \tag{7}$$

На рис. 4б, в представлены зависимости, полученные по формулам (6) и (7).

Следует отметить, что зависимости $R_{43}^*(\varphi)$ не зависят от угловой скорости кривошипа, в отличие от зависимостей $R_{430}(\varphi)$. На рис. 4б зависимости $R_{43}^*(\varphi)$ получены при следующих значениях коэффициента λ: *1* – $\lambda = 0.3$; *2* – $\lambda = 0.4$; *3* – $\lambda = 0.6$; *4* – $\lambda = 0.8$; *5* – $\lambda = 1$. На рис. 4в: $\lambda = 0.3$; *1* – $\dot{\varphi} = 100$ с$^{-1}$; *2* – $\dot{\varphi} = 300$ с$^{-1}$; *3* – $\dot{\varphi} = 500$ с$^{-1}$; *4* – $10R_{43}^*$, ($\lambda = 0.3$).

Рассмотрим, каким должен быть момент M_1, приложенный к кривошипу, при наличии упругого шарнира между кривошипом и шатуном, чтобы его угловая скорость стала постоянной. Массой упругих шарниров пренебрегаем, тогда кинетическая энер-

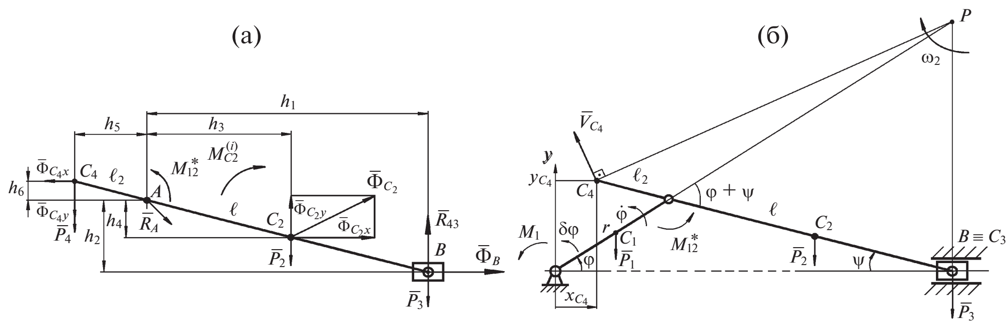


Рис. 5. Группа Ассура 2-го класса, 2-го порядка, 2-го вида – (а); кривошипно-шатунный механизм с противовесом на шатуне – (б).

гия КШМ не меняется. Опуская выкладки, запишем формулу для определения момента M_1

$$M_1 = 0.5\left(\frac{dI_{\text{пр.}}}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 + r\left(P_1 + P_2\right)\cos(\varphi)\, M_{12}^{\text{пот.}}\left(1 + \frac{\lambda\cos(\varphi)}{\sqrt{1 - \lambda^2\sin(\varphi)^2}}\right)\right). \tag{8}$$

Эта зависимость является потенциальной ($\int_0^{2\pi} M_1 d\varphi = 0$). То есть, можно создать упругий шарнир по схемам на рис. 1, характеристика которого будет определяться формулой (8). На рис. 4г представлены зависимости $M(\varphi)$, $M_1(\varphi)$, полученные по формулам (1) и (8) соответственно, при постоянной угловой скорости кривошипа $\dot{\varphi} = 300$ с$^{-1}$ (*1* – $M(\varphi)$; *2* – $M_1(\varphi)$; $P_1 = 5$ Н; $P_2 = 6.5$ Н; $P_3 = 6$ Н; $r = 0.05$ м; $\lambda = 0.3$).

Определение параметров упругих шарниров, в случае нулевой боковой силы. Для получения нулевой боковой силы при любом угле поворота кривошипа воспользуемся противовесом в точке C_4, расположенным на шатуне (рис. 5). Считаем стержень C_4A невесомым, а вес противовеса в точке C_4 равным P_4. Сумма моментов относительно точки A в этом случае (рис. 5а) определяем по формуле

$$M_{12}^* - P_3h_1 - \left(\frac{P_3}{g}\right)\ddot{x}_Bh_2 - I_{C2}^{(2)}\varepsilon_2 - \left(\frac{P_2}{g}\right)\ddot{y}_{C2}h_3 - \left(\frac{P_2}{g}\right)\ddot{x}_{C2}h_4 -$$

$$- P_2h_3 + P_4h_5 - \left(\frac{P_4}{g}\right)\ddot{x}_{C4}h_6 - \left(\frac{P_4}{g}\right)\ddot{y}_{C4}h_5 = 0,$$

где $h_5 = \ell_2\cos(\psi)$; $h_6 = \ell_2\sin(\psi)$; $\ddot{y}_{C4} = -(r + \ell_2\lambda)\dot{\varphi}^2\sin(\varphi)$; $\ddot{x}_{C4} = -r\dot{\varphi}^2\cos(\varphi) + \lambda^2\ell_2\dot{\varphi}^2\cos(2\varphi)$.

Отсюда запишем зависимость $M_{12}^*(\varphi)$.

$$\begin{gathered} M_{12}^* = P_3h_1 + \left(\frac{P_3}{g}\right)\ddot{x}_Bh_2 + I_{C2}^{(2)}\varepsilon_2 + \left(\frac{P_2}{g}\right)\ddot{y}_{C2}h_3 + \\ + \left(\frac{P_2}{g}\right)\ddot{x}_{C2}h_4 + P_2h_3 - P_4h_5 + \left(\frac{P_4}{g}\right)\ddot{x}_{C4}h_6 + \left(\frac{P_4}{g}\right)\ddot{y}_{C4}h_5. \end{gathered} \tag{9}$$

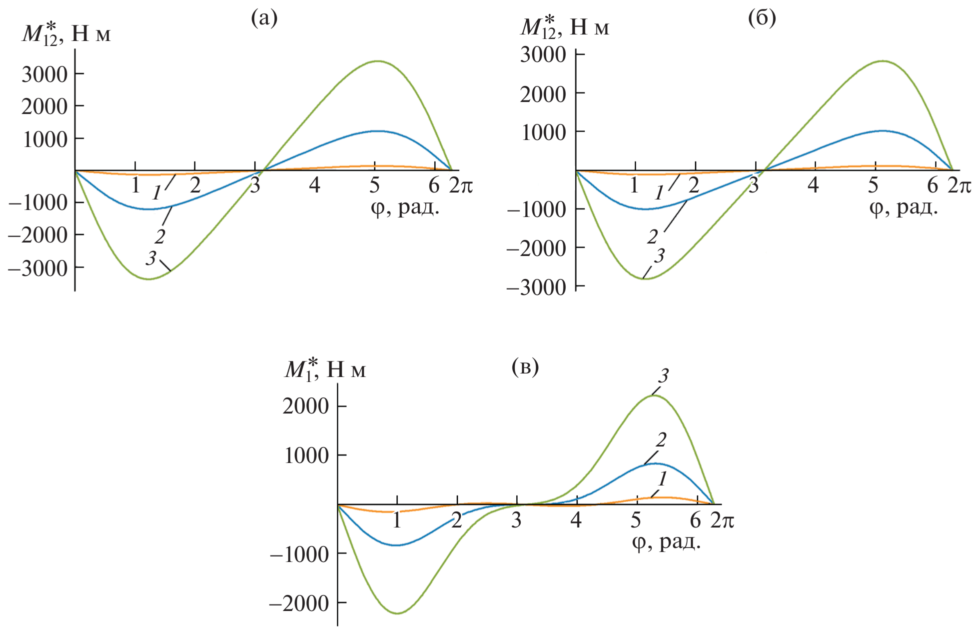


Рис. 6.

Следует так подобрать величины P_4 и ℓ_2, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^{2\pi} M^*_{12} d\varphi = 0. \tag{10}$$

Это оказалось возможным, например, при $\ell_2 = 0.05$ м и $P_4 = 30.833$ Н; при $\ell_2 = 0.1$ м и $P_4 = 15.4167$ Н; при $\ell_2 = 0.15$ м и $P_4 = 10.278$ Н. В этом случае зависимости $M^*_{12}(\varphi)$ становятся потенциальными и упругий шарнир с характеристикой по формуле (9) с выполнением условия (10) обеспечит нулевую боковую силу. На рис. 6а, б представлены зависимости, полученные по формуле (9) при следующих данных: $P_1 = 5$ Н; $P_2 = 6.5$ Н; $P_3 = 6$ Н; $r = 0.05$ м; $\lambda = 0.3$; $1 - \dot{\varphi} = 100$ с$^{-1}$; $2 - \dot{\varphi} = 300$ с$^{-1}$; $3 - \dot{\varphi} = 500$ с$^{-1}$. Для варианта (рис. 6а) – $\ell_2 = 0.1$ м, $P_4 = 15.4167$ Н; для варианта (рис. 6б) – $\ell_2 = 0.05$ м, $P_4 = 30.8330$ Н.

Момент M^*_1 на валу кривошипа, при котором его угловая скорость постоянна, при наличие противовеса C_4, определяется формулой

$$M^*_1 = 0.5\left(\frac{dI^*_{\text{пр.}}}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 + r(P_1 + P_2)\cos(\varphi) + M^*_{12}\left(1 + \frac{\lambda\cos(\varphi)}{\sqrt{1 - \lambda^2\sin(\varphi)^2}}\right)\right), \tag{11}$$

где M^*_{12} определяется по формуле (9).

Зависимость $\dfrac{dI^*_{\text{пр.}}}{d\varphi}$ здесь не приведена из-за ее громоздкости.

На рис. 6в представлены зависимости $M_1^*(\varphi)$, полученные по формуле (11) при следующих данных: *1* – $\dot{\varphi} = 100$ с$^{-1}$; *2* – $\dot{\varphi} = 300$ с$^{-1}$; *3* – $\dot{\varphi} = 500$ с$^{-1}$; $P_1 = 5$ Н; $P_2 = 6.5$ Н; $P_3 = 6$ Н; $r = 0.05$ м; $P_4 = 15.4167$ Н; $\ell_2 = 0.1$ м. Эта зависимость также является потенциальной ($\int_0^{2\pi} M_1^* d\varphi = 0$), т.е. возможно сделать упругий шарнир по вышеприведенному алгоритму.

Заключение. Для КШМ возможно создать упругий шарнир, не требующий подвода энергии с такой характеристикой, что при приложении момента, создаваемого этим шарниром, к кривошипу его угловая скорость будет постоянной. При расположении упругого шарнира с заданной характеристикой между кривошипом и шатуном возможно многократно снизить боковую силу, действующую на поршень. Получение нулевой боковой силы, действующей на поршень, возможно при присоединении противовеса расчетной массы к шатуну в заданной точке. Результаты данных исследований могут оказаться полезными при разработке ДВС, поршневых насосов, и других механизмов на основе КШМ.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артоболевский И.И.* Теория машин и механизмов. М.: Наука, 1968. 644 с.
2. *Berkof R.S.* Force balancing of a six-bar linkage // Proceedings of the Fifth World Congress on Theory of Machines and Mechanisms. 1979. P. 1082.
3. *Gheronimus Y.L.* An approximate method of calculating a counterweight for the balancing of vertical inertia forces // Mechanisms. 1968. V. 3 (4). P. 283.
4. *Arakawa M., Nishioka M., Morita N.* Torque compensation cam mechanism. Proc. Joint International Conf. on Advanced Science and Technology, Zhejiang University, Hangzhou, China, 1997. P. 302.
5. *Angeles J., Wu C.-J.* The optimum synthesis of en elastic torque-compensating cam mechanism // Mechanism and Machine Theory. 2001. V. 36. P. 245.
6. *Arakelian V.* Equilibrage dynamique complet des mécanismes // Mech. Mach. Theory. 1998. V. 33 (4). P. 425.
7. *Arakelian V.* Shaking moment cancellation of self-balanced slider-crank mechanical systems by means of optimum mass redistribution // Journal of Mechanics Research Communications. 2006. V. 33. P. 846.
8. *Arakelian V.* Complete shaking force and shaking moment balancing of RSS'R spatial linkages // Multi-body Dynamics Part K. 2007. V. 221. P. 303.
9. *Arakelian V., Briot S.* Simultaneous Inertia Force/Moment Balancing and Torque Compensation of Slider-Crank Mechanisms // Mechanics Research Communications, Elsevier. 2010. V. 37 (2). P. 265.
10. *Akbari S., Fallahi F., Pirbodaghi T.* Dynamic Analysis and Controller Design for a Slider – crank Mechanism with Piezoelectric Actuators // J. Comput. Des. Eng. 2016. V. 3. № 4. P. 312.
11. *Li Y., Chen G., Sun D., Gao Y., Wang K.* Dynamic analysis and optimization design of a planar slider–crank mechanism with flexible components and two clearance joints // Mech. Mach. Theory. 2016. V. 99. P. 37.
12. *Savastenko E.A., Nikishin I.A., Devyanin S.N.* Irregular ice torque and machines traction quality // Vestnik RUDN, seria Engineering researches. 2010. № 3. P. 100.
13. *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2. Динамика. М.: Наука, 1973. 663 с.
14. *Валеев А.Р., Зотов А.Н., Аптыкаев Г.А., Свиридов М.В., Вахитов Д.Р.* РФ. Патент 0002582629, 2016.

15. *Зотов А.Н.* Ударозащитные стержневые системы на базе упругих шарниров с заданными угловыми силовыми характеристиками // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20–24 августа 2015. С. 1516.
16. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Мерки и др.* Курс теоретической механики. В двух томах. Т. 1. Статика и кинематика. 3-е изд., стереотип. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 272 с.
17. *Furuhama S., Takiguchi M.* Measurement of piston frictional force in actual operating diesel engine // Int. Jahrb. Tribologie. 1981. P. 737.
18. *Parker D.A., Ettles C.H., Richmond J.W.* The AE conoguide low friction piston feature – analysis and further experience // Combust Engines – Reduct. Frict and Wear conf. London. 1985. № 18–19.
19. *Li D.E., Rohde S.V., Erzat H.A.* An automotive piston lubrication model // ASLE Tranction. 1982. V. 26. P. 151.
20. *Blaiz W.L., Houl D.P., Wond V.W.* The role of piston distortion on lubrication in a reciprocating engine // Trans ASME F. Eng. Gas Turbines and Power. 1990. № 3. P. 287.
21. *Kenneth J.P., Ronald G.N., John B.H.* Development and Evaluation of a Friction Model for Spark-Ignition Engines. MTI. 1989. P. 24.
22. *Kennedy M., Hoppe S., Esser J.* Piston ring coating reduces gasoline engine friction // MTZ. 2012. № 5. P. 41.

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 534.1

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В МНОГОСЕКЦИОННЫХ РОТОРНЫХ СИСТЕМАХ

Л. Я. Банах[1,*], О. В. Бармина[1], О. А. Волоховская[1]

[1] Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

**e-mail:banl@inbox.ru*

Поступила в редакцию 01.03.2021 г.
Принята к публикации 24.06.2021 г.

В настоящей статье исследуются крутильные колебания и волны в многосекционных многомассовых роторных системах. Выявлена структура спектра собственных частот. Установлено, что такие системы имеют полосы непропускания гармонического сигнала. Собственные частоты разделяются на N групп по количеству секций. Формы колебаний в каждой группе имеют одинаковую длину волны, но разные частоты, что обусловливает появление модулированных волн. Дисперсионная кривая разделяется на n участков, каждый из которых соответствует своей форме колебаний n-дисковой секции. Установлено, что максимальная частота при построении континуальной модели периодической системы равна парциальной частоте отдельного диска.

Ключевые слова: многосекционные роторные системы, крутильные колебания, периодические структуры, самоподобные модулированные волны, континуальная модель

DOI: 10.31857/S0235711921050060

Постановка задачи. В практике машиностроения нередко используются многосекционные роторные системы, состоящие из ряда секций, каждая из которых представляет собой многодисковую систему периодической структуры (рис. 1).

Примерами таких динамических систем могут служить, например, многоступенчатые погружные электрические центробежные насосы (ЭЦН) для нефтедобычи [1]. В зависимости от типа насоса в одной секции может размещаться до 20 дисков. Основным видом колебаний в подобных объектах являются изгибно-крутильные колебания под воздействием неуравновешенности рабочих колес. При этом в частотном спектре нередко присутствуют высшие частоты но, как правило, наибольшая вибрация наблюдается с оборотной частотой.

В настоящей статье предложен подход к анализу крутильных колебаний и волн в многосекционных многомассовых роторных системах.

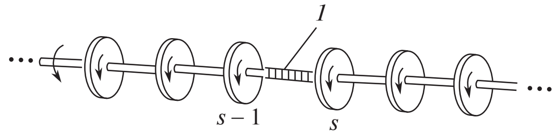


Рис. 1. Многосекционная роторная система; *1* – упругий элемент, соединяющий секции, имитирующий жесткость муфт и подшипников.

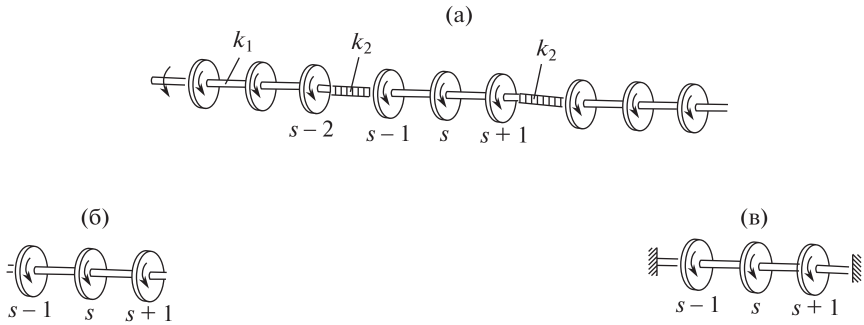


Рис. 2. Роторная система, состоящая из трехдисковых секций – (а); секция со свободными концами – (б); секция с закрепленными концами – (в); k_1 – величина жесткости между дисками; k_2 – величина жесткости между секциями.

При выборе расчетной модели многомассовых систем часто используется континуальная модель, т.е. расчетная модель с распределенными параметрами [2]. Однако при этом исчезает целый ряд свойств, присущих только дискретной структуре, например, таких как возникновение полос непропускания гармонического сигнала. Поэтому необходимо исследовать характер колебаний дискретной модели, определить спектр собственных частот. На основе этого в зависимости от скорости вращения и требуемой точности расчета можно определить возможность континуализации системы.

Уравнения движений многосекционной структуры. Дисперсионное уравнение. Рассмотрим многосекционную роторную систему, состоящую из N-секций, каждая из которых содержит n-дисков.

В качестве примера такой структуры, без нарушения общности подхода, рассмотрим систему, представленную на рис. 2, состоящую из трех секций, периодической структуры, содержащую три одинаковых диска. Секции соединены между собой упругими элементами, имитирующими жесткость участка вала, муфт и подшипников.

Параметры системы следующие: J – момент инерции каждого диска, k_1 – величина жесткости между $(i-1)$ и i-м дисками, k_2 – величина жесткости между $(s-1)$ и s-й секциями. Такого рода структуры можно назвать периодическими системами с неоднородной структурой.

Для составления уравнений колебаний для системы рис. 2а разделим переменные на три группы в соответствии с числом дисков в секции

$$\begin{gathered}
J\ddot{x}_{3s} + (k_1 + k_2)x_{3s} - k_2 x_{3s+1} - k_1 x_{3s-1} = 0, \quad 3s = 3, 6, \ldots; \\
J\ddot{x}_{3s-1} + 2k_1 x_{3s-1} - k_1 x_{3s} - k_1 x_{3s-2} = 0, \quad 3s-1 = 2, 5, \ldots; \\
J\ddot{x}_{3s-2} + (k_1 + k_2)x_{3s-2} - k_1 x_{3s-1} - k_2 x_{3s-3} = 0, \quad 3s-2 = 1.4, \ldots.
\end{gathered} \tag{1}$$

Полагая решение (1) в виде

$$x_{3s} = b_1 e^{i(\omega t - (3s)\mu)}, \quad x_{3s-1} = b_2 e^{i(\omega t - (3s-1)\mu)}, \quad x_{3s-2} = b_3 e^{i(\omega t - (3s-2)\mu)}, \tag{2}$$

где μ – постоянная распространения, а вид решения (2) определяется теоремой Флоке, найдем характеристическое уравнение

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} A & -k_1 e^{-i\mu} & -k_2 e^{i\mu} \\ -k_1 e^{i\mu} & B & -k_1 e^{-i\mu} \\ -k_2 e^{-i\mu} & -k_1 e^{i\mu} & A \end{bmatrix} = 0, \quad A = -J\omega^2 + (k_1 + k_2), \quad B = -J\omega^2 + 2k_1. \tag{3}$$

Раскрывая (3), получим

$$A^2B - k_1^2k_2\left(e^{i3\mu} + e^{-i3\mu}\right) - k_2^2B - 2k_1^2A = A^2B - 2k_1^2k_2\cos 3\mu - k_2^2B - 2k_1^2A = 0. \qquad (4)$$

Соотношение (4) – это дисперсионное уравнение. Оно периодическое с периодом $\pi/3$ и поэтому предельная длина волны $L_{\lim}$ соответствует $\mu = \pi/3$.Для каждой длины волны μ имеются три частоты ω и, следовательно, дисперсионная кривая состоит из трех отрезков, каждый из которых соответствует своей форме колебаний 3-х массовой секции.

Таким образом, прямые $\mu = 0$ (ось ординат) и $\mu = \pi/3$ являются предельными для дисперсионной кривой и для них из (4) найдем

$$A^2B \mp 2k_1^2k_2 - k_2^2B - 2k_1^2A = 0, \qquad (5)$$

где знак "–" соответствует $\mu = 0$, а "+"значению $\mu = \pi/3$. Уравнение (5) представляет собой определитель матрицы

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} A & -k_1 & \mp k_2 \\ -k_1 & B & -k_1 \\ \mp k_2 & -k_1 & A \end{bmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Чтобы выявить физический смысл полученного соотношения, преобразуем уравнение (6), используя преобразование координат, отражающее симметрию секции

$$x_1' = (x_1 + x_3)/2, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = (x_1 - x_3): \quad \mathbf{D}' = \mathbf{N}^{tr}\mathbf{D}\mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда найдем

$$\begin{bmatrix} 2A \mp 2k_2 & -2k_1 & 0 \\ -2k_1 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \pm 2k_2 \end{bmatrix} = 0. \qquad (7)$$

При $\mu = 0$ уравнение (7) распадается на два независимых уравнения

$$\begin{bmatrix} A - k_2 & -k_1 \\ -k_1 & B/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J\omega^2 + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & -J\omega^2/2 + k_1 \end{bmatrix} = 0, \quad A + k_2 = -J\omega^2 + 2k_2 + k_1 = 0. \qquad (8)$$

Первое уравнение описывает симметричные колебания секции со свободными концами (рис. 2б), и поэтому содержит нулевой корень ($\mu = 0$, $\omega_1 = 0$). Второе уравнение описывает кососимметричные колебания секции с закрепленными концами (рис. 2в). Здесь важно отметить, что для изолированной секции (но не системы в целом), ее граница проходит в середине упругого элемента k_2, соединяющего секции, и потому его жесткость равна $2k_2$. Из (8) находим для $\mu = 0$: $\omega_1 = 0$; $J\omega_2^2 = 3k_1$; $J\omega_3^2 = k_1 + 2k_2$.

При $\mu = \pi/3$ уравнение также распадается на два независимых

$$\begin{bmatrix} A + k_2 & -k_1 \\ -k_1 & B/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J\omega^2 + k_1 + 2k_2 & -k_1 \\ -k_1 & -J\omega^2/2 + k_1 \end{bmatrix} = 0, \quad A - k_2 = -J\omega^2 + k_1 = 0. \qquad (8а)$$

Первое уравнение (8а) описывает симметричные колебания секции с закрепленными в середине элемента k_2 концами. Второе уравнение (8а) описывает кососимметричные колебания секции со свободными концами. Таким образом, мы нашли все предельные точки дисперсионной кривой, не решая системы в целом, а лишь используя частоты колебаний изолированной секции при различных граничных условиях.

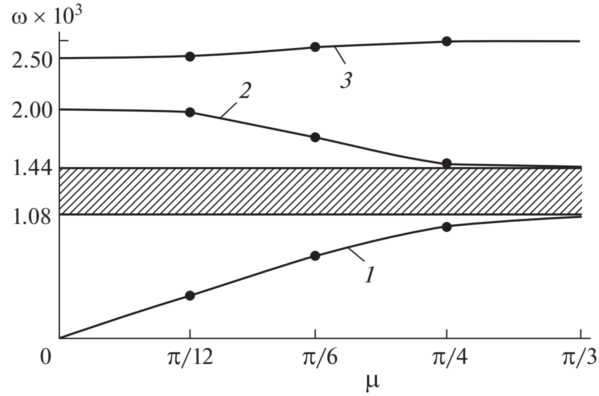


Рис. 3. Дисперсионная кривая многосекционной системы рис. 2: *1*, *2*, *3* – участки дисперсионной кривой, штриховкой выделена первая полоса непропускания гармонического сигнала.

Пример расчета 3-х секционной системы. Рассмотрим в качестве примера 3-х секционную систему (рис. 2). Параметры системы следующие: $k_1 = 2 \times 10^5$ Нм, $k_2 = 1 \times \times 10^5$ Нм, $J = 0.1$ кг м^2 = 0.1 Нм сек^2.

Предельные точки на прямой $\mu = 0$ определим из (8). Это частоты: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = = \sqrt{3k_1/J} = 2.45 \times 10^3$ 1/сек; $\omega_3 = \sqrt{(k_1 + 2)/J} = 2 \times 10^3$. Предельные точки на прямой $\mu = \pi/3$ из (8а): $\omega_4 = 1.08 \times 10^3$ 1/сек; $\omega_5 = 2.61 \times 10^3$ 1/сек; $\omega_8 = \sqrt{k_1/J} = 1.44 \times 10^3$ 1/сек.

Дисперсионная кривая (4) представлена на рис. 3. Она состоит из трех участков, каждый из которых соответствует своей форме колебаний секции. Система имеет области непропускания гармонического сигнала при $1.08 \times 10^3 < \omega < 1.44 \times 10^3$ 1/сек и $2.0 \times 10^3 < \omega < 2.44 \times 10^3 <$ 1/сек. Поскольку дисперсионная кривая не зависит от граничных условий, то в этих областях происходит затухание гармонического сигнала при любых граничных условиях, что обеспечивает хорошую виброизоляцию всей системы.

Найденные результаты во многом аналогичны известным результатам для двухатомной молекулы [3, 4, 9], в которой, в отличие от рассматриваемой нами структуры, неоднородность заключается в различии инерционных элементов. Но и в том и другом случае это приводит к неоднородности парциальных частот, так что полученные результаты, по-видимому, можно считать общими для периодических систем с неоднородной структурой.

Чтобы определить собственные частоты нужно решить совместно уравнения дисперсионной кривой и граничных условий. Пусть система жестко закреплена на концах при $s = 0$ и $s = n + 1$. Как следует из (1), граничные условия относятся только к группе переменных $3s$, $(3s + 2)$, которые, как следует из (1), имеют сдвиг по фазе $e^{2\mu}$. Тогда из (2) получим $x_{3s} = C_1 \sin 3\mu s + C_2 \cos 3\mu s$. Полагая $x_0 = x_{3(n+1)} = 0$, найдем

$$\mu(N + 1) = \pi j, \quad j = 1 \ldots n. \tag{9}$$

Поскольку число секций $N = 3$, получим $\mu = \pi/12, \pi/6, \pi/4$. В силу того, что спектр волновых чисел μ эквидистантный, совместное решение этих уравнений легко осуществляется как численно, так и графически, как показано на рис. 3. Точки пересечения прямых $\mu = \pi/12, \pi/6, \pi/4$ с дисперсионной кривой и определяют собственные ча-

Таблица 1. Собственные частоты системы рис. 2а

№ частоты колебаний	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\omega \times 10^3$ 1/сек	0.363	0.705	0.981	1.530	1.750	1.950	2.470	2.540	2.590

стоты (табл. 1); на рис. 3 они отмечены точками на дисперсионной кривой и их нумерация идет в порядке возрастания частоты.

Собственные формы колебаний при различных частотах представлены на рис. 4—7. На этих рисунках амплитуды колебаний дисков 1—2—3, 4—5—6, 7—8—9, находящихся в секциях, показаны точками.

Как следует из представленных рисунков, в системе возникают модулированные колебания за счет взаимодействия форм колебаний, происходящих с одной длиной волны. Определена структура спектра собственных частот: 1) предельные точки на прямых $\mu = 0$ и $\mu = \pi/3$, соответствующих максимальной и минимальной длине волны, равны собственным частотам секции при различных условиях закрепления, как показано в предыдущем разделе; 2) собственные частоты разделяются на N-групп, число частот в группе равно числу дисков секции. В нашей системе это группы с номерами частот (1, 6, 9), (2, 5, 8), (3, 4, 7). Формы колебаний в каждой группе имеют одинаковую длину волны, но разные частоты; 3) дисперсионная кривая разделяется на n участков, и, соответственно на n подгрупп собственных частот, колебания в которых соответствуют формам колебаний секций. В нашей системе это следующие 3 подгруппы частот: (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9). Во второй подгруппе колебания секций происходят по второй одноузловой форме колебаний (рис. 5), в третьей подгруппе — по третьей 2-х узловой форме колебаний (рис. 8, 9).

Отметим, что все результаты для собственных колебаний многосекционной системы (табл. 1) получены без расчета всей системы в целом, а лишь на основе анализа колебательных и волновых свойств отдельной секции при различных граничных условиях (п. 2).

В рассматриваемой системе каждому элементу (диску) можно присвоить двойную нумерацию: номер секции и номер диска внутри секции. Поэтому данный класс структур можно также отнести к иерархическим. Иерархические периодические структуры были рассмотрены в [5—7]. В [5] для периодической решетки решение определяется в виде произведения волн, что и определяет возникновение модулированных колебаний.

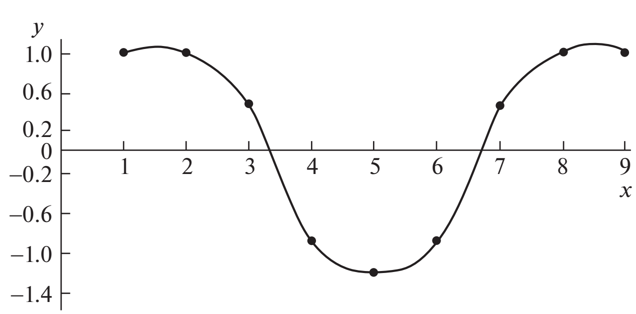


Рис. 4. Форма колебаний на третьей частоте 0.981×10^3 рад/сек, находящейся на первом участке дисперсионной кривой и соответствует первой форме колебаний 3-х дисковой секции.

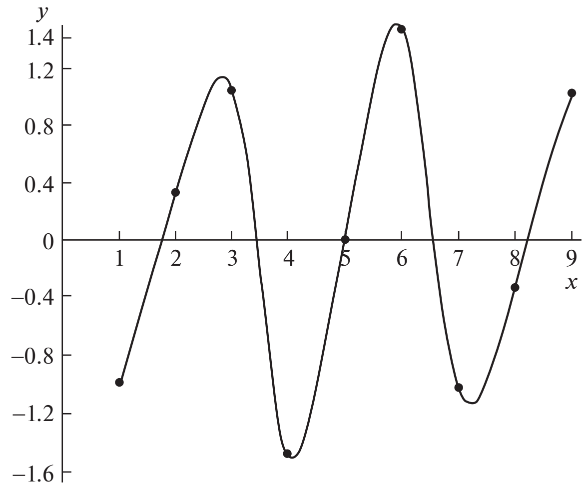


Рис. 5. Собственная форма колебаний на 6-й частоте 1.93×10^3 рад/сек (второй участок дисперсионной кривой, вторая форма колебаний 3-х дисковых секций).

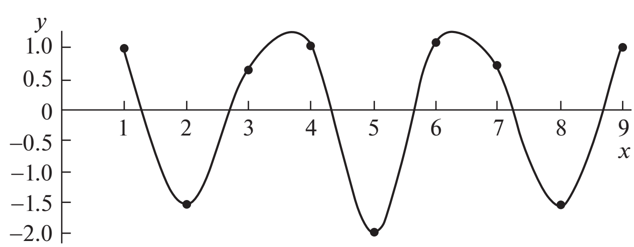


Рис. 6. Собственная форма колебаний на 7-й частоте 2.47×10^3 рад/сек (третий участок дисперсионной кривой, третья форма колебаний секций).

Оценка точности при построении континуальной расчетной модели многомассовых периодических систем. Для периодической системы (рис. 8) в [8] на основе численных экспериментов была получена эмпирическая оценка предельной длины волны изгибных колебаний, для которой при континуализации погрешность собственной частоты находится в допустимых пределах. Эта длина волны L составляет

$$L = 4a, \tag{10}$$

где a — длина образующей ячейки.

Это условие хорошо апробировано на практике и дает хорошие результаты. Однако желательно при этом иметь не только расчетные, но и аналитические оценки погрешности при любой длине волны и частоты вращения, что достаточно актуально для быстроходных роторных систем. Найдем такие оценки, используя волновые подходы.

Рассмотрим крутильные колебания периодической системы рис. 8.

Уравнение в конечных разностях для s-го диска

$$-J\omega^2\varphi_s + k\left(\varphi_{s-1} + \varphi_{s+1} - 2\varphi_s\right) = 0, \tag{11}$$

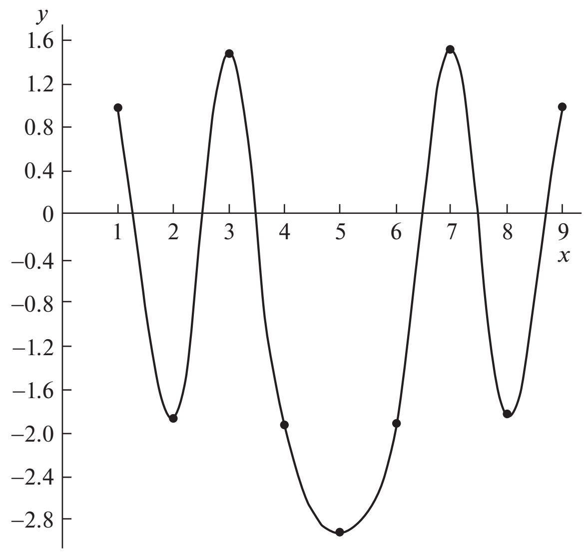


Рис. 7. Собственная форма колебаний на 9-й частоте 2.59×10^3 рад/сек (третий участок дисперсионной кривой, третья форма колебаний секций).

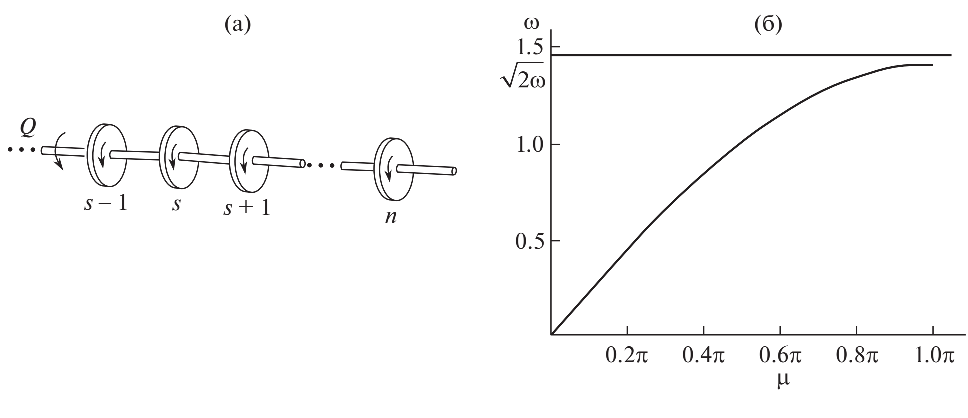


Рис. 8. Система с периодической структурой – (а); дисперсионная кривая – (б).

где k – жесткость вала между дисками; J – момент инерции диска. Частное решение имеет вид

$$\varphi_s = Ce^{i(\omega t - \mu s)}, \tag{12}$$

где ω – собственная частота; μ – волновой параметр, характеризующий изменение фазы при переходе от элемента s к $(s + 1)$. Из (11) и (12) находим дисперсионное уравнение, связывающее частоту ω и волновой параметр μ.

$$2\sin^2(\mu/2) = \frac{J\omega^2}{2k} = \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{2k/J}, \tag{13}$$

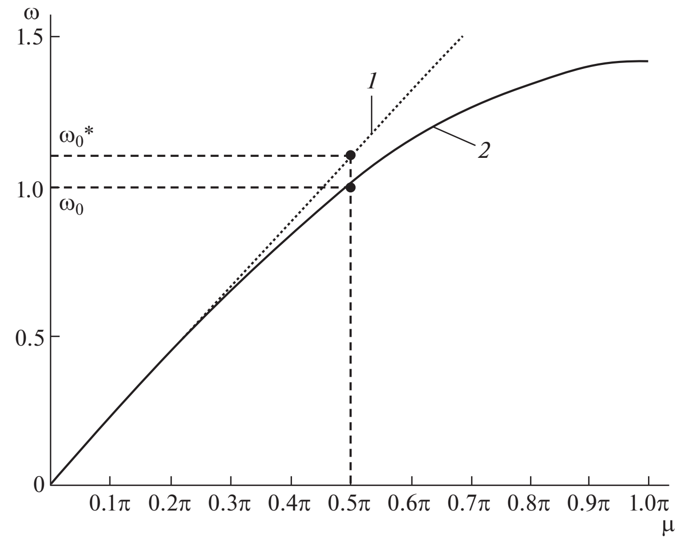


Рис. 9. Сравнение дискретной и континуальной расчетных моделей: *1* – континуальная модель; *2* – дискретная модель; $\omega_0 = \sqrt{2k/J}$ – парциальная частота диска.

где ω_0 – парциальная частота диска. Дисперсионное уравнение представлено на рис. 8б.

Гармоническое решение (13) существует только в полосе $0 < \omega < \sqrt{2}\omega_0$, при $\cos\mu < 1$ и, следовательно, периодическая структура рис. 2а является фильтром низких частот. При $0 < \omega < \sqrt{2}\omega_0$ решение (12) принимает вид

$$\varphi_s = C_1\cos\mu s + C_2\sin\mu s. \tag{14}$$

Длина волны равна [3, 4, 9]

$$L_w = 2a\pi/\mu. \tag{15}$$

Дисперсионное уравнение не зависит от граничных условий и для получения частот собственных колебаний необходимо учесть частотное уравнение. Возможность раздельного анализа дисперсионного и частотного уравнения позволяет отделить свойства, зависящие от типа конструкции от свойств, определяемых условиями закрепления, что важно при оптимизации механических систем. Так, в частности, при закрепленных концах получим из (14) известное уравнение

$$\mu = \frac{\pi j}{(n+1)}, \quad j = 1\ldots n. \tag{16}$$

Отсюда видно, что спектр волновых чисел эквидестантный.

Сравним теперь точность дискретной и континуальной модели. Континуальную модель описывает волновое уравнение [3, 4]

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \rho = J/a, \quad E/a = k. \tag{17}$$

Дисперсионное уравнение распределенной системы находим из (17)

$$\omega^* = \pm\mu\sqrt{k/J} = \pm\omega_0\mu/\sqrt{2}. \tag{18}$$

Это прямая линия (рис. 9). Точность континуализации определяет условие

$$|\omega - \omega^*| = \varepsilon \ll 1.$$

Сравнивая дисперсионные уравнения(13) и (18), видим, что они близки при $\mu \ll 1$, в области достаточно низких частот (рис. 9). Действительно при $\mu \ll 1$ в (13) можно принять $2\sin^2\frac{\mu}{2} \approx 2\left(\frac{\mu}{2} - \frac{\mu^3}{48} + \ldots\right)^2 \approx \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^4}{24} + \ldots$. Тогда из (13) найдем для дискретной системы

$$\omega \approx \omega_0\mu\Big/\sqrt{2\left(1 - \mu^2/12\right)}. \tag{19}$$

Пренебрегая членом $\mu^2\big/12$, получим

$$\omega = \omega_0\mu\big/\sqrt{2}. \tag{20}$$

Таким образом, уравнения распределенной и дискретной системы (18) и (20) совпадают при $\mu \ll 1$ с точностью до малых порядка $\mu^2\big/12$. При $\mu = \pi/2$ отношение частот ω для этих систем составляет 1.0/1.11, т.е. не превышает 0.9, что допустимо в инженерных расчетах.

Длина волны $L = 4a$, как следует из (15), соответствует значению $\mu = \pi/2$, а частота вращения при этом из (13) равна $\omega_0 = \sqrt{2k/J}$ – парциальной частоте диска. До $\mu < \pi/2$ (рис. 9) дисперсионные кривые достаточно близки, а при повышении μ быстро расходятся, и ω_0 – предельно допустимая частота при континуализации.

Таким образом, парциальная частота диска: $\omega_0 = \sqrt{2k/J}$ – это частотный критерий при континуализации периодической структуры.

Аналитическая оценка точности расчета собственных частот при континуализации для любого значения длины волны (или частоты колебаний) получается из сравнения их величин, определяемых в (18) и (19) (или (13)). В зависимости от заданной точности расчета определяется предельно допустимая частота и длина волны $\mu_{\text{доп}}$. Из (16) находим условия континуализации

$$\mu = \frac{\pi j}{(n+1)} \le \mu_{\text{доп}}, \qquad j = 1\ldots n. \tag{21}$$

Соотношение (21) связывает число дисков n и допустимый номер длины волны (формы колебания) $j \ge 1$ и применимо не только в области докритических скоростей, но при любой частоте, когда $j > 1$, что особенно важно при современной тенденции увеличения рабочих скоростей.

В (21) использованы граничные условия при жестком закреплении системы. Они определяют максимально высокие частоты по сравнению с другими условиями закрепления, поэтому при других граничных условиях полученные выше погрешности будут только меньше.

Отметим, что полученные выше результаты справедливы не только для периодических, но и для динамически-самоподобных систем (динамических фракталов), В этих системах упруго-инерционные параметры каждой секции меняются с одинаковым масштабом для каждой ячейки или подсистемы. В [9] показано, что для таких систем существует некоторая частотно-эквивалентная периодическая система и, следовательно структура частотного спектра как периодических, так и динамически- самоподобных систем полностью аналогична.

Выводы. Анализируя характер собственных форм колебаний, отметим следующие закономерности при колебаниях N-секционных многомассовых систем: **1.** Число узловых точек увеличивается на единицу при повышении частоты, аналогично периодической структуре. **2.** Выявлена структура спектра собственных частот: 1) собственные частоты разделяются на N групп, число частот в каждой группе равно n — числу дисков в секции. Формы колебаний в каждой группе имеют одинаковую длину волны, но разные частоты, вследствие чего возникают модулированные колебания системы; 2) дисперсионная кривая состоит из n участков, каждый из которых отвечает определенной форме колебаний n-дисковой секции. Аналогичную структуру частотного спектра имеют также и динамически-самоподобные системы (динамические фракталы).

Все результаты для собственных колебаний многосекционной системы получены без расчета всей системы в целом, а лишь на основе анализа колебательных и волновых свойств отдельной секции.

Найдена предельная допустимая частота при континуализации периодической структуры, она равна парциальной частоте образующего элемента.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-19-00813).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивановский В.Н., Дариев В.И., Сабиров А.А. и др.* Скважинные насосные установки для добычи нефти. М.: ГУП. Изд. “Нефть и газ” РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2002. 824 с.
2. *Бармина О.В., Волоховская О.А.* Методика расчета вибраций в многоступенчатых погружных насосах для нефтедобычи // Машиностроение и инженерное образование. 2011. № 1 (26). С. 7.
3. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
4. *Пейн Г.* Физика колебаний и волн. М.: Мир, 1979. 390 с.
5. *Banakh L.* The vibroisolation properties of the lattices containing the lumped inclusions. Vibroengineering Procedia at the 43rd International Conference on Vibroengineering. 2019. P. 237.
6. *Oftadeh R., Haghpanah B., Vella D., Boudaoud A., Vaziri A.* Optimal Fractal-Like Hierarchical Honeycombs // Phys. Rev. 2014. Lett. V. 113 (10). 104301.
7. *Xu Y.L, Chen C.Q., Tian X.G.* Wave Characteristics of Two-Dimensional Hierarchical Hexagonal Lattice Structures // J. Vib. Acoust. 2014. V. 136 (1). 01101.
8. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
9. *Banakh L.Ya., Kempner M.L.* Vibrations of mechanical systems with regular structure. New York, London: Spinger, 2010. 262 p.

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 51: 621.891

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СМАЗОЧНОГО МАТЕРИАЛА В ОПОРЕ СКОЛЬЖЕНИЯ С ПЛАВКИМ ПОКРЫТИЕМ И УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ОТ ДАВЛЕНИЯ ПРИ НЕПОЛНОМ ЗАПОЛНЕНИИ РАБОЧЕГО ЗАЗОРА

© 2021 г. Д. У. Хасьянова[1,*], М. А. Мукутадзе[2,], А. М. Мукутадзе[2], Н. С. Задорожная[2]**

[1] *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*
[2] *Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону, Россия*
**e-mail: dinara.khasyanova@mail.ru*
***e-mail:murman1963@yandex.ru*

Поступила в редакцию 05.02.2021 г.
После доработки 11.06.2021 г.
Принята к публикации 24.06.2021 г.

В статье представлено асимптотическое и точное автомодельное решение для нулевого (без учета расплава) и первого (с учетом расплава) приближения клиновидной опоры скольжения адаптированного к условиям трения опорным профилем ползуна и легкоплавким металлическим покрытием поверхности направляющей при учете зависимости реологических свойств смазочного материала и расплава, которые обладают при ламинарном режиме течения истинно-вязкими свойствами от давления. Получены аналитические зависимости для профиля расплавленной поверхности легкоплавкого металлического покрытия направляющей, а также для поля скоростей и давлений при нулевом и первом приближении.

Ключевые слова: гидродинамика, опора скольжения (ползун, направляющая), вязкий несжимаемый жидкий смазочный материал, расплавленная поверхность направляющей, зависимость вязкости смазочного материала от давления, нестандартная опорная поверхность ползуна

DOI: 10.31857/S0235711921050084

Разработке расчетной модели упорных подшипников скольжения с легкоплавким покрытием посвящено значительное количество работ [1–5]. Однако процесс смазывания на расплавах покрытий не является самоподдерживающимся процессом. Для обеспечения самоподдерживающегося процесса смазывания подшипников скольжения возникает необходимость не только в наличии легкоплавкого покрытия на одной из контактных поверхностей, но и постоянного наличия смазочного материала, которое можно обеспечить при постоянной его подаче или пористым покрытием на другой контактной поверхности [6–8], а также нестандартным опорным профилем.

В настоящей статье для обеспечения самоподдерживающегося процесса и гидродинамического режима течения приводится расчетная модель клиновидной опоры скольжения “ползун–направляющая” с нестандартным опорным профилем ползуна и легкоплавким покрытием поверхности направляющей. Определены основные рабочие характеристики рассматриваемой пары трения – несущая способность и сила трения. Дана оценка влияния параметров, обусловленных расплавом покрытия, адаптированным к условиям трения опорным профилем и параметре, характеризующем за-

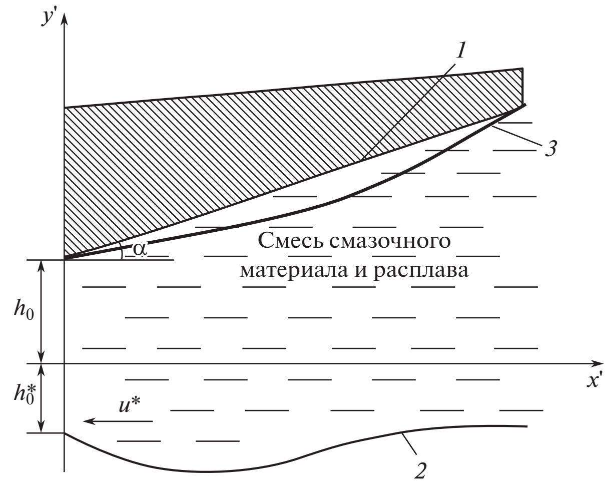


Рис. 1. Рабочая схема: *1* – контур наклонного ползуна (пяты); *2* – контур расплавленного подпятника; *3* – контур нестандартного опорного профиля.

висимость вязкости смазочного материала от давления на несущую способность и силу трения.

Методика расчета. Рассматривается движение вязкой жидкости и расплава покрытия в рабочем зазоре клиновидной опоры скольжения. При этом направляющая с легкоплавким покрытием перемещается со скоростью u^*, а наклонный ползун с нестандартным опорным профилем неподвижен (рис. 1).

Расчетная схема представлена в системе координат $x'o'y'$. Контуры наклонного ползуна с нестандартным опорным профилем и расплавленного покрытия поверхности направляющей обозначены следующим образом:

$$y' = h_0 + x' \operatorname{tg} \alpha^*, \quad y' = h_0 + x' \operatorname{tg} \alpha^* - a' \sin \omega' x' = h'(x'), \quad y' = -\lambda' f'(x'), \tag{1}$$

где α^* – угол между наклонным ползуном и осью Ox; h_0 – толщина смазочного слоя в начальном сечении; a' и ω' – амплитуда возмущения и параметр адаптированного профиля ползуна соответственно.

Зависимость вязкости от давления задается следующим выражением

$$\mu' = \mu_0 e^{\tilde{\alpha} p'}, \tag{2}$$

где μ_0 – характерная вязкость; μ' – коэффициент динамической вязкости смазочного материала; p' – гидродинамическое давление в смазочном слое; $\tilde{\alpha}$ – постоянная.

Рассматриваются условия движения бесконечно широкого ползуна при следующих допущениях: 1) жидкая среда является несжимаемой жидкостью; 2) все тепло в рабочем зазоре идет на плавление поверхностью покрытия.

Исходными базовыми уравнениями являются общеизвестное уравнение для “тонкого слоя” движения смазочного материала с учетом (1), уравнение неразрывности, а также уравнение, описывающее профиль расплавленного контура покрытия поверхности направляющей с учетом скорости диссипации механической энергии

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} = 0; \quad \mu' \frac{\partial^2 v_{x'}}{\partial y'^2} = \frac{dp'}{dx'}; \quad \frac{\partial v_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial v_{y'}}{\partial y'} = 0;$$
$$\frac{d\lambda' f'(x')}{dx'} u^* L' = -2\mu \int\limits_{-\lambda' f'(x')}^{h'(x')} \left(\frac{\partial v_{x'}}{\partial y'} \right)^2 dy, \tag{3}$$

где $v_{x'}$, $v_{y'}$ — компоненты вектора скорости смазочной среды; L' — удельная теплота плавления на единицу объема.

Граничные условия для исходного уравнения (3) с учетом общепринятых упрощений запишутся в виде

$$v_{x'} = 0, \quad v_{y'} = 0 \quad \text{при} \quad y = h_0 + x' \operatorname{tg} \alpha - a' \sin \omega' x';$$
$$v_{x'} = u^*, \quad v_{y'} = 0 \quad \text{при} \quad y = -\lambda' f'(x'); \tag{4}$$
$$p'(0) = p'(L) = p_a.$$

Переход к безразмерным переменным осуществим соотношениями

$$x' = Lx, \quad y' = h_0 y, \quad v_{x''} = u^* v, \quad v_{y'} = u^* \frac{h_0}{L} u, \quad p' = p^* p,$$
$$\omega' = \omega L, \quad p^* = \frac{\mu u^* L}{h_0^*}, \quad \mu' = \mu_0 \mu, \quad \alpha = p^* \tilde{\alpha}. \tag{5}$$

С учетом (5) уравнения (3) и граничные условия (4) примут вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = e^{-\alpha p} \frac{dp}{dx}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{d\Phi(x)}{dx} = -K \int\limits_{-\Phi(x)}^{h(x)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy, \tag{6}$$

$$v = 0, \quad u = 0 \quad \text{при} \quad y = 1 + \eta x - \eta_1 \sin \omega x = h(x);$$
$$v = -1, \quad u = 0 \quad \text{при} \quad y = -\Phi(x); \quad p(0) = p(1) = \frac{p_a}{p^*}; \tag{7}$$

где $K = \dfrac{2\mu_0 u^* L}{h_0^* L'}$, $\eta = \dfrac{L \operatorname{tg} \alpha}{h_0}$, $\eta_1 = \dfrac{a'}{h_0}$, $\Phi(x) = \eta_1 f(x)$.

В результате преобразования система уравнения (6) примет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{1}{\alpha} \frac{dz}{dx}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad z \frac{d\Phi(x)}{dx} = K \int\limits_{-\Phi(x)}^{h(x)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy, \tag{8}$$

с граничными условиями

$$v = 0, \quad u = 0 \quad \text{при} \quad y = 1 + \eta x - \eta_1 \sin \omega x;$$
$$v = -1, \quad u = 0 \quad \text{при} \quad y = -\Phi(x); \quad z_1(0) = z_1(1) = e^{-\alpha \frac{p_a}{p^*}}. \tag{9}$$

Функцию $\Phi(x)$ разложим по параметру K, обусловленному расплавом поверхности покрытия направляющей

$$\Phi(x) = -\Phi_0(x) - K\Phi_1(x) - K^2\Phi_2(x) - K^3\Phi_3(x) - \ldots = H(x). \tag{10}$$

Граничные условия для компонентов скорости на контуре $y = -\Phi(x)$ запишем в виде

$$v(0-H(x)) = v(0) - \left.\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right|_{y=0} \cdot H - \left.\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right|_{y=0} \cdot H^2 + \ldots = -1;$$
$$u(0-H(x)) = u(0) - \left.\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{y=0} \cdot H - \left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right|_{y=0} \cdot H^2 + \ldots = 0. \quad (11)$$

Асимптотическое решение системы уравнений (8)–(10) с учетом граничных условий (9) и (11) ищем в виде

$$v(x,y) = v_0(x,y) + Kv_1(x,y) + K^2 v_2(x,y) + \ldots;$$
$$u(x,y) = u_0(x,y) + Ku_1(x,y) + K^2 u_2(x,y) + \ldots;$$
$$\Phi(x) = \Phi_0(x) - K\Phi_1(x) - K^2\Phi_2(x) - K^3\Phi_3(x) - \ldots; \quad (12)$$
$$z(x) = z_0(x) + Kz_1(x) + K^2 z_2(x) + K^3 z_3(x)\ldots.$$

Выполняя подстановку (12) в систему уравнений (8) с учетом граничных условий (9), получим систему уравнений и граничные условия к ней:

– для нулевого приближения

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = -\frac{1}{\alpha}\frac{dz_0}{dx}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, \quad (13)$$

с граничными условиями

$$v_0 = 0, \quad u_0 = 0 \quad \text{при} \quad y = 1 + \eta x - \eta_1 \sin\omega x;$$
$$v_0 = -1, \quad u_0 = 0 \quad \text{при} \quad y = -\Phi(x); \quad z_0(0) = z_0(1) = e^{-\alpha\frac{p_a}{p^*}}; \quad (14)$$

– для первого приближения

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = -\frac{1}{\alpha}\frac{dz_1}{dx}; \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0; \quad -z_0\frac{d\Phi_1(x)}{dx} = \int\limits_{-\Phi(x)}^{h(x)} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)^2 dy, \quad (15)$$

с граничными условиями

$$v_1 = \left.\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\right|_{y=0} \cdot \tilde{\Phi}; \quad u_1 = \left.\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\right|_{y=0} \cdot \tilde{\Phi};$$
$$v_1 = 0 \quad u_1 = 0 \quad \text{при} \quad h(x) = 1 + \eta x - \eta_1 \sin\omega x; \quad (16)$$
$$z_1(0) = z_1(1) = 0; \quad \Phi_1(0) = h_0^*.$$

Автомодельное решение системы (13) и (14) (для нулевого приближения) будем искать в виде

$$v_0 = \frac{\partial\psi_0}{\partial y} + V_0(x,y); \quad u_0 = -\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + U_0(x,y); \quad \psi_0(x,y) = \tilde{\psi}_0(\xi); \quad \xi = \frac{y}{h(x)};$$
$$V_0(x,y) = \tilde{v}(\xi); \quad U_0(x,y) = \tilde{u}(\xi)\,h'(x). \quad (17)$$

Подставляя выражение (17) в систему уравнений (13) с учетом условий (14), получим систему уравнений и граничные условия к ней

$$\tilde{\psi}_0''' = \tilde{C}_2, \quad \tilde{v}_0'' = \tilde{C}_1, \quad \tilde{u}_0' + \xi\tilde{v}_0' = 0; \quad \frac{dz_0}{dx} = -\alpha\left[\frac{\tilde{C}_1}{\tilde{h}^2(x)} + \frac{\tilde{C}_2}{\tilde{h}^3(x)}\right]; \quad (18)$$

$$\begin{gathered}\tilde{\psi}_0'(0)=0, \quad \tilde{\psi}_0'(1)=0, \quad \tilde{u}_0'(1)=0; \quad \tilde{v}_0'(1)=0;\\ \tilde{u}_0(0)=0; \quad \tilde{v}_0(0)=-1; \quad \int_0^1 \tilde{v}_0(\xi)d\xi=0.\end{gathered} \tag{19}$$

Выполняя интегрирование (18)–(19), получим расчетные формулы

$$\begin{gathered}\tilde{\psi}_0'(\xi)=\frac{\tilde{C}_2}{2}\left(\xi^2-\xi\right); \quad \tilde{v}_0(\xi)=\tilde{C}_1\frac{\xi^2}{2}+\left(1-\frac{\tilde{C}_1}{2}\right)\xi+1;\\ \tilde{u}_0=\frac{d\tilde{\psi}}{d\xi}\frac{\varepsilon}{\tilde{h}(x)}+\frac{\xi v_0}{\eta}-\frac{1}{\eta}\int_0^{\xi} v_0(\xi)\,d\xi, \quad \tilde{C}_1=6.\end{gathered} \tag{20}$$

Из условия $z_0(0)=z_0(1)=e^{-\alpha\frac{p_a}{p^*}}$ для $\tilde{C}_2$ получим

$$\tilde{C}_2=-6\left(1+\frac{\eta}{2}+\frac{\eta_1}{\omega}(\cos\omega-1)\right). \tag{21}$$

С учетом (21) для z_0 получим

$$z_0=-6\alpha\left(\frac{\eta}{2}\left(x^2-x\right)+\frac{\eta_1}{\omega}(\cos\omega x-1)-(\cos\omega-1)\,x\right)+e^{-\alpha\frac{p_a}{p^*}}. \tag{22}$$

Для функции $\Phi_1(x)$, определяющей расплавленный контур опорного кольца, с учетом (20) получим

$$\frac{d\Phi_1(x)}{dx}=\frac{h(x)}{z_0}\int_0^1\left(\frac{\psi_0''(\xi)}{h^2(x)}+\frac{\tilde{v}_0'(\xi)}{h(x)}\right)^2 d\xi. \tag{23}$$

Выполняя интегрирование (23), получим

$$\Phi_1(x)=\frac{1}{\sup\limits_{x\in[0;1]}}\left[x-\frac{1}{2}\eta x^2-\frac{\eta_1}{\omega}\cos\omega x\right]+h_0^*; \tag{24}$$

$$\tilde{\Phi}=\sup_{x\in[0;1]}\Phi_1(x). \tag{25}$$

Автомодельное решение (15) и (16) будем искать так же, как и для системы уравнений (13) и (14). В результате для поля скоростей и давлений получим расчетные формулы

$$\begin{gathered}\tilde{\psi}_1'(\xi)=\frac{\tilde{\tilde{C}}_2}{2}\left(\xi^2-\xi\right), \quad \tilde{v}_1(\xi)=\tilde{\tilde{C}}_1\frac{\xi^2}{2}+\left(1-\frac{\tilde{\tilde{C}}_1}{2}\right)\xi+1, \quad \tilde{\tilde{C}}_1=6M.\\ \tilde{\tilde{C}}_2=-6M\left(1+\frac{1}{2}\tilde{\eta}+\frac{\tilde{\eta}_1}{\omega}(\cos\omega-1)\right)\left(1+\tilde{\Phi}\right),\\ z_1=\frac{-6\alpha M}{\left(1+\tilde{\Phi}\right)^2}\left(\frac{\tilde{\eta}}{2}\left(x^2-x\right)-\frac{\tilde{\eta}_1}{\omega}(\cos\omega x-1-(\cos\omega-1)\,x)\right),\end{gathered} \tag{26}$$

где $\tilde{\eta}=\dfrac{\eta}{1+\tilde{\Phi}}$, $\tilde{\eta}_1=\dfrac{\eta_1}{1+\tilde{\Phi}}$,

$$M=\sup_{x\in[0;1]}\left|\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=0}\Phi_1(x)\right|=\sup_{x\in[0;1]}\left|\left(1+2\eta x+4\eta_1\sin\omega x-\frac{3}{2}\eta+\frac{3\eta_1}{\omega}(\cos\omega-1)\right)\right|\tilde{\Phi}.$$

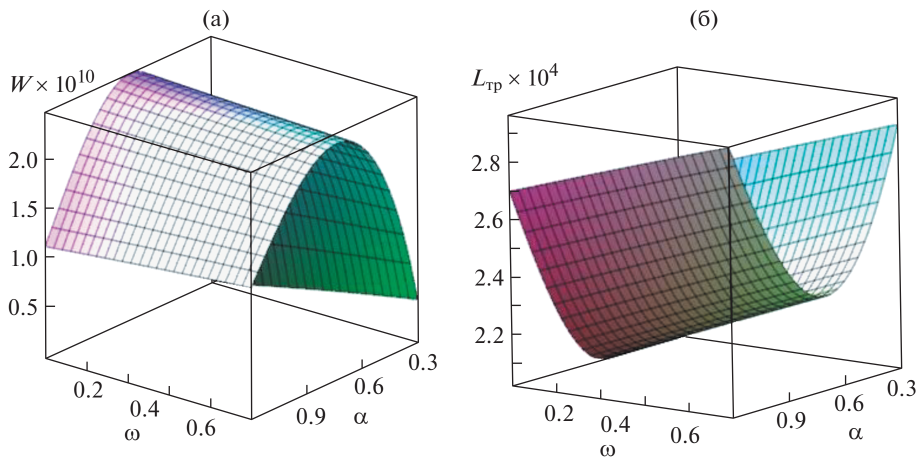


Рис. 2. Влияние параметров ω, характеризующего адаптированный профиль, и α, характеризующего вязкость на: несущую способность подшипника – (а); силу трения – (б).

Для $z = z_0 + Kz_1$ получим

$$z = -6\alpha A + e^{-\alpha\frac{p_a}{p^*}} - 6\alpha KM \cdot B, \tag{27}$$

где

$$A = -\left(\eta\left(x^2 - x\right) + \frac{\eta_1}{\omega}(\cos\omega x - 1) - x(\cos\omega - 1)\right);$$

$$B = \frac{\tilde{\eta}\left(x^2 - x\right) + \dfrac{\tilde{\eta}_1}{\omega}(\cos\omega x - 1 - x(\cos\omega - 1))}{\left(1 + \tilde{\Phi}\right)^2}.$$

Применяя метод Тейлора для $e^{-\alpha\frac{p_a}{p^*}}$, $e^{-\alpha p}$, с точностью до $O\left(\alpha^3\right)$, $O\left(\dfrac{p_a}{p^*}\right)^2$ для гидродинамического давления получим

$$p = \frac{p_a}{p^*} - 6(A + KMB)\left(1 + \alpha\frac{p_a}{p^*} - \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{p_a}{p^*}\right)^2\right). \tag{28}$$

С учетом (13), (15) и (28) для несущей способности и силы трения получим

$$W = p^* L\int_0^1\left(p - \frac{p_a}{p^*}\right)dx = \frac{\mu_0 L^2 u^*}{h_0^2}\left(\frac{1 + KM}{\left(1 + \tilde{\Phi}\right)^2}\right)\left(1 + \alpha\frac{p_a}{p^*} - \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{p_a}{p^*}\right)^2\right);$$

$$L_{тр} = \mu\int_0^1\left[\left.\frac{\partial v_0}{\partial y}\right|_{y=0} + K\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0}\right]dx = \tag{29}$$

$$= \mu_0\left(1 - \alpha p + \frac{\alpha^2 p^2}{2}\right)\left[1 - \frac{\eta}{2} - \frac{\eta_1}{\omega}(\cos\omega - 1) - K\tilde{\Phi}\left(1 - \eta - \frac{2\eta_1}{\omega}(\cos\omega - 1)\right)\right].$$

Численный анализ позволил построить зависимости влияния параметров ω, характеризующего адаптированный профиль, и α, характеризующего вязкость на несущую способность подшипника и силу трения (рис. 2).

Выводы. Для подшипника с клиновидным зазором и гидродинамическим смазыванием получена уточненная расчетная модель при учете зависимости вязкости смазочного материала и расплава покрытия, обладающих истинно вязкими реологическими свойствами, от давления при ламинарном режиме смазывания и адаптированного к условиям трения опорным профилем ползуна.

Показан значительный вклад параметров: α, характеризующего вязкость; *K*, обусловленного расплавом покрытия; ω, характеризующего адаптированный опорный профиль. Установлено, что несущая способность подобных опор скольжения превышает на 12–14% этот же параметр у стандартных подшипников скольжения. Коэффициент трения при этом ниже на 15–17%.

Заключение. Разработаны новые многопараметрические выражения для основных рабочих характеристик (несущая способность и сила трения) клиновидной опоры скольжения с учетом реологических свойств истинно вязкого смазочного материала и расплава поверхности направляющей, покрытой легкоплавким металлическим сплавом, с учетом адаптированного к условиям трения опорного профиля ползуна.

Дана оценка влияния параметров переменных факторов, обусловленных расплавом поверхности направляющей, адаптированным к условиям трения опорным профилем ползуна и зависимости вязкости смазочного материала от давления.

Полученные уточненные расчетные модели клиновидных опор скольжения позволяют в результате варьирования покрытия из легкоплавкого металлического покрытия и адаптированного к условиям трения опорного профиля ползуна регулировать соотношение его несущей способности и коэффициента трения.

Установлена удовлетворительная сходимость теоретических и экспериментальных исследований в подтверждение сделанных теоретических выводов, а также получена более упрощенная и точная модель клиновидных опор скольжения с результатами, выполненными в работах [9, 10]

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект RFMEFI60719X0300.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уилсон Р.* Смазка с расплавом // Проблемы трения и смазки. 1976. № 1. С. 19.
2. *Беретта А., Ниро Д., Сильвестри Ф.* Подшипники скольжения, смазываемые собственным расплавом или продуктом сублимации // Труды Амер. о-ва инж.-мех. 1992. № 1. С. 86.
3. *Приходько В.М., Котельницкая Л.И.* Математическая модель гидродинамической смазки при плавлении опорной поверхности радиального подшипника // Трение и износ. 2001. Т. 22. № 6. С. 606.
4. *Chapple W.M.* Mechanics of thin-skinned fold-and-thrust belts // Bulletin of the Geological Society of America. 1978. V. 89. Is. 8. P. 1189. https://doi.org/10.1130/0016-7606(1978)89<1189:MOTFB>2.0.CO;2
5. *Parness A., Soto D., Esparza N., Gravish N., Wilkinson M., Autumn K., Cutkosky M.* A microfabricated wedge-shaped adhesive array displaying gecko-like dynamic adhesion, directionality and long lifetime // Journal of the Royal Society Interface. 2009. V. 6. Is. 41. P. 1223. https://doi.org/10.1098/rsif.2009.0048

6. *Kragelsky I.V.* Friction and wear. M.: Mechanical engineering, 1968.
7. *Mukutadze M.A., Khasyanova D.U.* Optimization of the supporting surface of a slider bearing according to the load-carrying capacity taking into account the lubricant viscosity depending on pressure and temperature // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2018. V. 4. P. 356.
8. *Ахвердиев К.С., Лагунова Е.О., Василенко В.В.* Расчетная модель радиального подшипника, смазываемого расплавом, с учетом зависимости вязкости от давления // Вестник ДГТУ. 2017. № 3 (90). С. 27.
9. *Chigira M., Tsou C.-Y., Matsushi Y., Hiraishi N., Matsuzawa M.* Topographic precursors and geological structures of deep-seated catastrophic landslides caused by Typhoon Talas // Geomorphology. 2013. V. 201. P. 479.
https://doi.org/10.1016/j.geomorph.2013.07.020
10. *Mahato A., Guo Y., Sundaram N.K., Chandrasekar S.* Surface folding in metals: A mechanism for delamination wear in sliding. Proceedings of the Royal Society A // Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2014. V. 470. Is. 2169.
https://doi.org/10.1098/rspa.2014.0297

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2021, № 5, с. 41–48

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 621.833.51

КИНЕМАТИКА ПЛАНЕТАРНОЙ ПЕРЕДАЧИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ЗУБЧАТЫМИ КОЛЕСАМИ С ВНУТРЕННИМ ЗАЦЕПЛЕНИЕМ

А. А. Приходько[1,*], А. И. Смелягин[1]

[1] Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия
**e-mail: sannic92@gmail.com*

Поступила в редакцию 18.02.2021 г.
После доработки 07.06.2021 г.
Принята к публикации 24.06.2021 г.

Рассматривается задача кинематического исследования планетарного механизма преобразования вращательного движения в возвратно-вращательное, которое обеспечивается за счет применения эллиптических зубчатых колес. Построены центроиды некруглых зубчатых колес с внутренними зубьями, находящихся в зацеплении с эллиптическими зубчатыми колесами, для различных значений межосевого расстояния. Проведен кинематический анализ планетарной передачи с некруглыми зубчатыми колесами, в результате которого найдены функции положения, аналогов скоростей и ускорений выходного вала механизма.

Ключевые слова: вращательное движение, возвратно-вращательное движение, эллиптические зубчатые колеса, центроида некруглого зубчатого колеса, планетарный механизм, кинематический анализ, аналог угловой скорости

DOI: 10.31857/S0235711921050096

Механические передачи с некруглыми зубчатыми колесами привлекают внимание исследователей и изобретателей благодаря своим значительным преимуществам по сравнению с рычажными аналогами: возможности реализации различных передаточных функций; высокой точности и скорости работы; компактной и надежной конструкции передачи. Несмотря на то, что проектирование таких механизмов встречается еще в трудах Леонардо да Винчи, долгое время практическое применение таких устройств было затруднено из-за отсутствия высокоточного металлообрабатывающего оборудования. В настоящее время повышается интерес исследователей к разработке различных механизмов с некруглыми зубчатыми колесами именно благодаря значительным достижениям в изготовлении различных типов некруглых передач: цилиндрических передач с внешним [1–8] и внутренним [9–11] зацеплением, а также конических передач [12].

Одним из перспективных направлений исследований передач с некруглыми зубчатыми колесами является синтез и анализ механизмов, реализующих возвратно-вращательное движение выходного звена [13]. В машиностроении для обеспечения данного вида движения применяются шарнирные четырехзвенники, а также кулисные механизмы [14], имеющие значительные габариты по сравнению с зубчатыми передачами. Также, в рычажных механизмах наблюдается неравномерность нагружения звеньев из-за изменения углов давления, приводящая к снижению надежности привода в целом.

Ранее [15] был представлен структурный синтез и кинематический анализ планетарной передачи с внешним зацеплением, в которой круглые колеса заменены на эл-

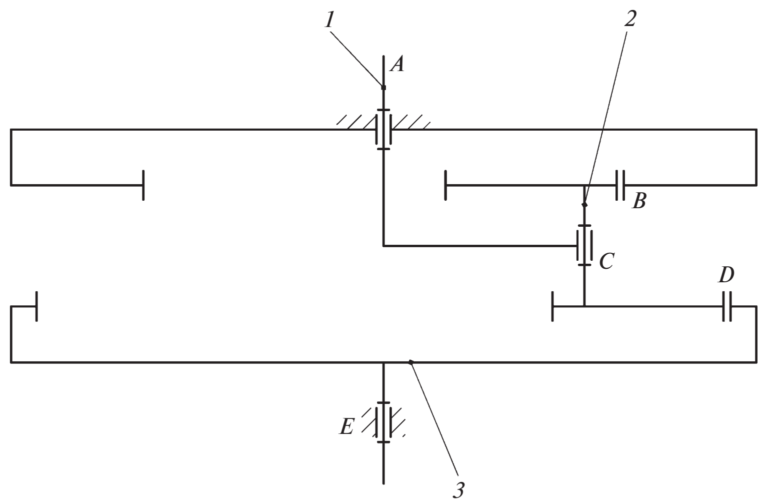


Рис. 1. Структурная схема планетарного механизма с некруглыми зубчатыми колесами.

липтические. Исследование кинематики показало, что переменная передаточная функция пары эллиптических зубчатых колес позволяет при равномерном вращении входного вала получить возвратно-вращательное движение выходного, а амплитуда возвратно-вращательных движений и характер передаточной функции определяются эксцентриситетами эллиптических зубчатых колес. В настоящей статье предлагается исследовать механизм возвратно-вращательного действия, в основе которого лежит схема планетарной передачи с двумя внутренними зацеплениями (рис. 1).

Механизм состоит из двухвершинных звеньев *1*, *3* и трехвершинного звена *2*, одноподвижных кинематических пар *A*, *C*, *E* и двухподвижных кинематических пар *B* и *D*. Замена цилиндрических зубчатых колес в традиционном планетарном механизме на эллиптические позволяет получить механизм с переменной передаточной функцией. Некруглые зубчатые колеса могут иметь различную форму, однако самыми распространенными на сегодняшний день являются эллиптические зубчатые колеса [16–18]. Это объясняется, в основном, широкими исследованиями их геометрии и кинематики [19–21], решением проблем их изготовления [22–24]. Для дальнейшего исследования и проектирования механизма возвратно-вращательного движения на базе предложенной структурной схемы, необходимо построить центроиды некруглых зубчатых колес с внутренними зубьями, находящихся в зацеплении с эллиптическими зубчатыми колесами.

Построение центроид некруглых зубчатых колес с внутренними зубьями. Расчетная схема пары зубчатых колес “эллиптическое колесо с внешними зубьями–некруглое колесо с внутренними зубьями” показана на рис. 2.

Для построения центроиды зубчатого колеса *2* необходимо найти зависимость $\rho_2(\varphi_2)$. Отметим, что точка *A* является общей для звеньев *1* и *2* и ее скорость определится

$$V_A = \omega_1\rho_1 = \omega_2\rho_2, \tag{1}$$

где ω_1, ω_2 – угловые скорости колес *1* и *2*; ρ_1, ρ_2 – радиусы центроид колес *1* и *2*.

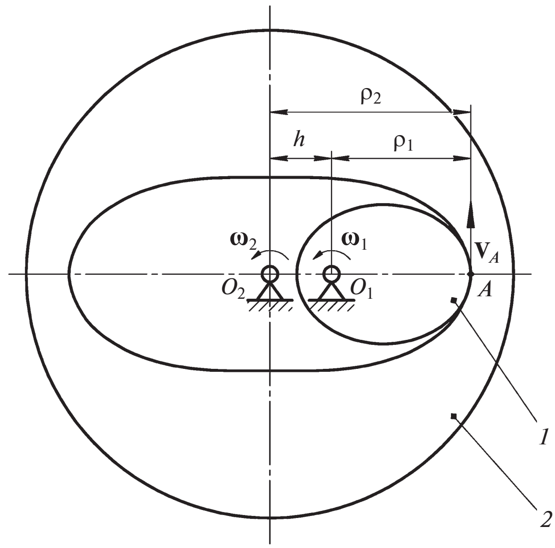


Рис. 2. Расчетная схема пары зубчатых колес: *1* – эллиптическое колесо с внешними зубьями; *2* – некруглое колесо с внутренними зубьями.

Из рис. 2 видно, что $\rho_2 = \rho_1 + h$. Преобразуем (1) и получим

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\rho_1}{\rho_1 + h}, \tag{2}$$

где h – межосевое расстояние.

Учитывая, что $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$, преобразуем уравнение (2) и получим выражение для определения угла поворота колеса с внутренними зубьями φ_2

$$\varphi_2 = \int \frac{\rho_1(\varphi_1)}{\rho_1(\varphi_1) + h} d\varphi_1. \tag{3}$$

Межосевое расстояние h выбирается из условия $\varphi_2 = n\varphi_1$, где $n = 2, 3, \ldots$ – целое число. Таким образом, эллиптическое зубчатое колесо *1* совершает n оборотов за один оборот колеса с внутренними зубьями *2*.

Радиус центроиды эллиптического колеса определяется из уравнения эллипса в полярных координатах [25, 26]

$$\rho_1(\varphi_1) = \frac{p}{1 - e\cos\varphi_1}, \tag{4}$$

где p – фокальный параметр эллипса; e – эксцентриситет.

Примеры передач эллиптическое зубчатое колесо с внешними зубьями – некруглое колесо с внутренними зубьями, имеющих различное межосевое расстояние, показаны на рис. 3.

Таким образом, уравнения (2)–(4) позволяют построить центроиды некруглых зубчатых колес с внутренними зубьями. В качестве примера на рис. 4 приведено конструктивное исполнение планетарного механизма с межосевым расстоянием $h = 56.4$ мм (рис. 4).

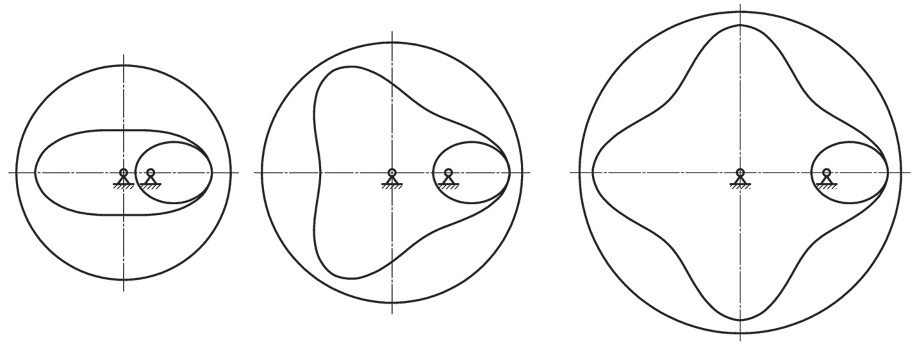


Рис. 3. Примеры передач некруглыми зубчатыми колесами: (а) – h = 17.72 мм; (б) – h = 36.85 мм; (в) – h = 56.4 мм.

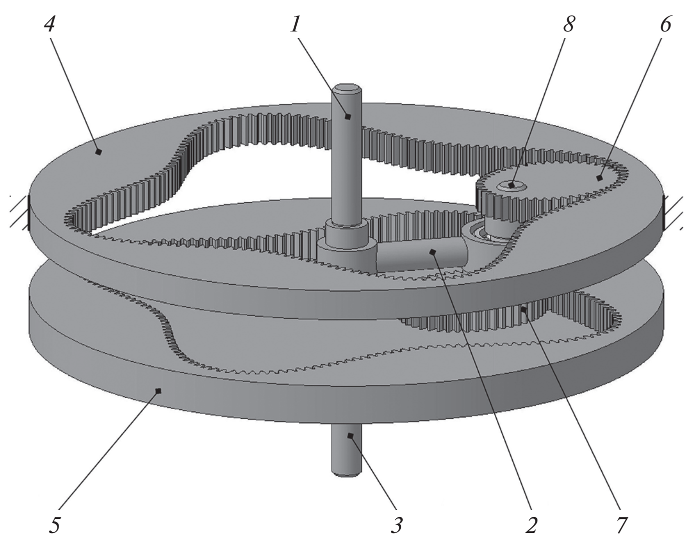


Рис. 4. Конструкция планетарной передачи.

Представленная передача (рис. 4) состоит из входного вала *1*, водила *2*, выходного вала *3*, неподвижного зубчатого колеса с внутренними зубьями (эпицикла) *4*, зубчатого колеса с внутренними зубьями на выходном валу *5*, эллиптических зубчатых колес *6* и *7*, вала сателлита *8*. Переменная передаточная функция каждой пары некруглых зубчатых колес позволяет достичь возвратно-вращательного движения выходного вала *3* при равномерном вращательном движении входного вала *1*. Проведем кинематический анализ механизма с целью проверки данного предположения.

Кинематический анализ планетарного механизма с некруглыми зубчатыми колесами. Исследуем механизм с эллиптическими зубчатыми колесами с осью вращения в фокусе эллипса, с межосевым расстоянием h = 56.4 мм (рис. 4). Для проведения кинематического анализа рассмотрим расчетную схему механизма в промежуточном положении (рис. 5).

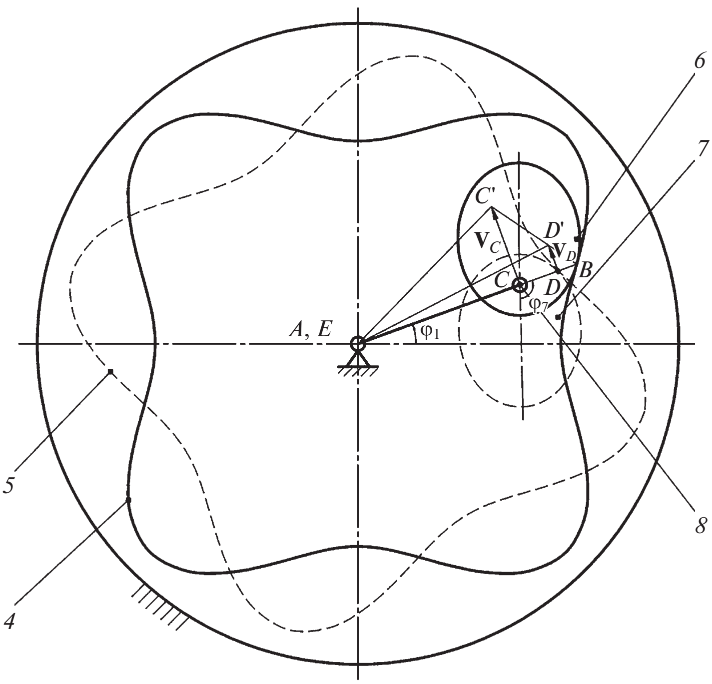


Рис. 5. Расчетная схема механизма.

На расчетной схеме нанесен план линейных скоростей точек и звеньев механизма. Из точки C откладываем вектор CC', изображающий скорость точки C водила. Линии $C'A$ и $C'B$ – линии распределения линейных скоростей в водиле и сателлите, соответственно. На линии $C'B$ расположена точка D' – конец вектора DD', изображающего скорость точки D. Линия $D'E$ отображает распределение линейных скоростей некруглого колеса с внутренними зубьями *5* и выходного вала *3*.

Определим аналог угловой скорости выходного звена *3*

$$\varphi_3' = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = \frac{\omega_3}{\omega_1}. \tag{5}$$

Принимая обозначения в соответствии с расчетной схемой (рис. 5), преобразуем (5) и получим

$$\varphi_3' = \frac{V_D \cdot AC}{V_C \cdot DE} = \frac{BD \cdot AC}{BC \cdot DE}. \tag{6}$$

Во время работы механизма вследствие изменения положения точек B и D изменяется по модулю и направлению вектор скорости DD'. Длины отрезков в уравнении (6) определим с помощью уравнения эллипса (4) и получим

$$BD = \rho_6 - \rho_7; \tag{7}$$

$$BC = \rho_6; \tag{8}$$

$$AC = h; \tag{9}$$

$$DE = h + \rho_7, \tag{10}$$

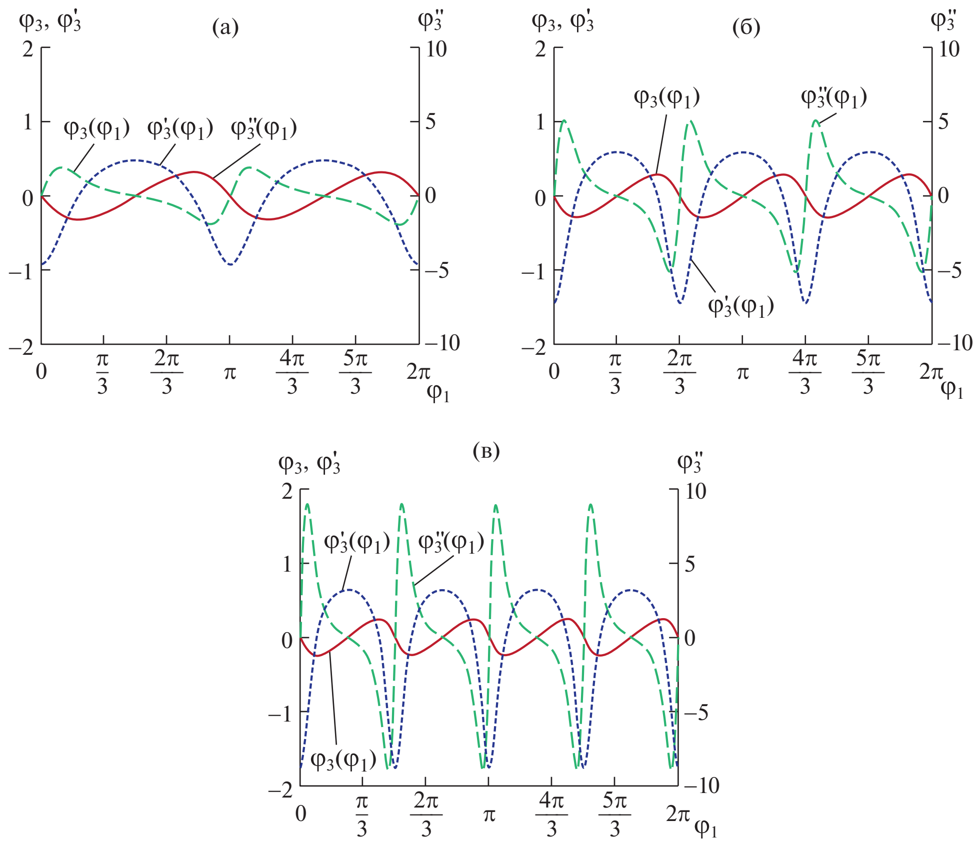


Рис. 6. Графики функции положения, аналога скорости и ускорения выходного вала механизмов с внутренним зацеплением: (а) – $h = 17.72$ мм; (б) – $h = 36.85$ мм; (в) – $h = 56.4$ мм.

где $\rho_6 = \dfrac{p}{1 - e\cos\varphi_6}$ – радиус центроиды эллиптического колеса *6*, $\rho_7 = \dfrac{p}{1 - e\cos\varphi_7}$ – радиус центроиды эллиптического колеса *7*, $\varphi_6 = \varphi_7 + \pi$ – угол поворота эллиптического колеса *6*.

Взаимосвязь между углами φ_7 и φ_1 определяется из уравнения центроиды некруглого колеса с внутренними зубьями.

Преобразуя (6) подстановкой уравнений (7)–(10), определим аналог угловой скорости

$$\varphi_3' = \frac{(\rho_6 - \rho_7)h}{\rho_6(h + \rho_7)}. \tag{11}$$

Закон движения выходного вала и аналог ускорения определяются путем интегрирования или дифференцирования (11) по обобщенной координате.

Представленные уравнения позволяют исследовать кинематику планетарного механизма с внутренним зацеплением, при этом полученные аналитические зависимости можно применить для механизмов с различным межосевым расстоянием h. Построим графики функций $\varphi_3(\varphi_1)$, $\varphi_3'(\varphi_1)$, $\varphi_3''(\varphi_1)$ для механизмов с различным межосевым расстоянием (рис. 6).

Анализ графиков (рис. 6) показывает, что при равномерном вращении входного вала выходной вал совершает возвратно-вращательное движение. В рассмотренных механизмах выходное звено совершает два (для $h = 17.72$ мм), три (для $h = 36.85$ мм) или четыре (для $h = 56.4$ мм) возвратно-вращательных движения за один оборот входного вала.

Заключение. Предлагается новая конструкция механизма возвратно-вращательного движения, в основе которого лежит планетарная передача с внутренним зацеплением, при этом смена направления вращения выходного вала обеспечивается применением в механизме эллиптических зубчатых колес.

Проведено исследование рассматриваемой передачи, включающее построение центроиды некруглого колеса с внутренними зубьями, находящегося в зацеплении с эллиптическим зубчатым колесом, а также кинематический анализ планетарного механизма. В результате кинематического анализа получены аналитические зависимости, необходимые для построения функций положения, аналогов скоростей и ускорений выходного вала механизма.

Преимуществами полученной схемы с некруглыми зубчатыми колесами по сравнению с существующими рычажными аналогами являются компактность, высокая нагрузочная способность, простота статической и динамической балансировки.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ottaviano E., Mundo D., Danieli G.A., Ceccarelli M.* Numerical and experimental analysis of non-circular gears and cam-follower systems as function generators // Mechanism and machine theory. 2008. V. 43. № 8. P. 996.
2. *Litvin F.L., Gonzalez-Perez I., Fuentes A., Hayasaka K.* Design and investigation of gear drives with non-circular gears applied for speed variation and generation of functions // Computer methods in applied mechanics and engineering. 2008. V. 197. № 45–48. P. 3783.
3. *Yazar M., Ozdemir A.* Comparative analysis of the pressure variations and the flow rates of a hydraulic pump made of a pair of elliptical and cylindrical spur gears // Technology. 2011. V. 14. № 1. P. 1.
4. *Huang K.J., Chen S.C., Komsuoglu H., Lopes G., Clark J., Lin P.C.* Design and performance evaluation of a bio-inspired and single-motor-driven hexapod robot with dynamical gaits // Journal of Mechanisms and Robotics. 2015. V. 7. № 3. 031017.
5. *Zhang R., Lu L., Li F., Wang T.* Modification and Simulation of Noncircular Gear Reversing Mechanism of Pumping Unit // 2017 2nd International Conference on Electrical, Control and Automation Engineering (ECAE 2017). Atlantis Press, 2017.
6. *Liu D., Ba Y., Ren T.* Flow fluctuation abatement of high-order elliptical gear pump by external noncircular gear drive // Mechanism and Machine Theory. 2019. V. 134. P. 338.
7. *Čavić D., Čavić M., Penčić M., Dorić J., Rackov M.* IC Engine: Increasing Efficiency by Using Epicyclic Non-circular Gear Train // Joint International Conference of the International Conference on Mechanisms and Mechanical Transmissions and the International Conference on Robotics. Springer, Cham, 2020. P. 391.
8. *Han J., Li D., Tian X., Xia L.* Meshing principle and transmission analysis of a beveloid non-circular gear // Advances in Mechanical Engineering. 2020. V. 12. № 11. P. 1.
9. *Mundo D.* Geometric design of a planetary gear train with non-circular gears // Mechanism and machine theory. 2006. V. 41. № 4. P. 456.
10. *Volkov G.Y., Kurasov D.A., Gorbunov M.V.* Geometric synthesis of the planetary mechanism for a rotary hydraulic machine // Russian Engineering Research. 2018. V. 38. № 1. P. 1.
11. *Lin C., Xia X., Li P.* Geometric design and kinematics analysis of coplanar double internal meshing non-circular planetary gear train // Advances in Mechanical Engineering. 2018. V. 10. № 12. P. 1.
12. *Zheng F., Hua L., Han X., Li B., Chen D.* Synthesis of indexing mechanisms with non-circular gears // Mechanism and Machine Theory. 2016. V. 105. P. 108.

13. *Prikhodko A.A.* Structural and kinematic analysis of a stirred tank planetary drive // Matec Web of Conferences. 2018. V. 226. 01012.
14. *Артоболевский И.И.* Механизмы в современной технике: Т. 1: Элементы механизмов. Простейшие рычажные и шарнирно-рычажные механизмы. 2-е изд., переработанное. М.: Наука, 1979. 496 с.
15. *Smelyagin A.I., Prikhod'ko A.A.* Structure and kinematics of a planetary converter of the rotational motion into the reciprocating rotary motion // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2016. V. 45. № 6. P. 500.
16. *Danieli G.A., Mundo D.* New developments in variable radius gears using constant pressure angle teeth // Mechanism and machine theory. 2005. V. 40. № 2. P. 203.
17. *Karpov O., Nosko P., Fil P., Nosko O., Olofsson U.* Prevention of resonance oscillations in gear mechanisms using non-circular gears // Mechanism and Machine Theory. 2017. V. 114. P. 1.
18. *Gao N., Meesap C., Wang S., Zhang D.* Parametric vibrations and instabilities of an elliptical gear pair // Journal of Vibration and Control. 2020. V. 26. № 19–20. P. 1721.
19. *Liu J.Y., Chang S.L., Mundo D.* Study on the use of a non-circular gear train for the generation of Figure-8 patterns // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2006. V. 220. № 8. P. 1229.
20. *Prikhodko A.A.* Experimental kinematic analysis of an intermittent motion planetary mechanism with elliptical gears // Journal of Measurements in Engineering. 2020. V. 8. № 3. P. 122.
21. *Maláková S., Urbanský M., Fedorko G., Molnár V., Sivak S.* Design of Geometrical Parameters and Kinematical Characteristics of a Non-Circular Gear Transmission for Given Parameters // Applied Sciences. 2021. V. 11. № 3. P. 1000.
22. *Chang S.L., Tsay C.B., Wu L.I.* Mathematical model and undercutting analysis of elliptical gears generated by rack cutters // Mechanism and Machine Theory. 1996. V. 31. № 7. P. 879.
23. *Bair B.W.* Computerized tooth profile generation of elliptical gears manufactured by shaper cutters // Journal of Materials Processing Technology. 2002. V. 122. № 2–3. P. 139.
24. *Figliolini G., Angeles J.* The synthesis of elliptical gears generated by shaper-cutters // Journal of Mechanical Design. 2003. V. 125. № 4. P. 793.
25. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
26. *Литвин Ф.Л.* Некруглые зубчатые колеса. М.-Л.: Машгиз, 1956. 312 с.

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 534.13,533.6.013.42

АЭРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОЙ ЛЕНТЫ В ЛАМИНАРНОМ ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ

А. А. Афанасьева[1,2], А. М. Гуськов[1,2], Г. Я. Пановко[1,2,*]

[1] Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
[2] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
**e-mail: gpanovko@yandex.ru*

Поступила в редакцию 23.04.2021 г.
После доработки 01.06.2021 г.
Принята к публикации 24.06.2021 г.

В статье исследуются нелинейные аэроупругие колебания тонкой плоской ленты в ламинарном воздушном потоке. В качестве расчетной схемы принимается длинная плоская мембрана с двумя струнами, закрепленными по ее длинным краям, к которым приложены растягивающие усилия. Воздушный поток направлен вдоль плоскости мембраны. Исследуются поперечно-крутильные колебания, возникающие при действии аэродинамических сил. Получены связанные дифференциальные уравнения в безразмерной форме, в которых изгибная и крутильная жесткости системы обеспечиваются усилиями натяжения струн и крутящего момента от подъемной силы. Решение задачи представлено в соответствии с методом Галеркина. Выполнен анализ устойчивости и выявлены: бифуркация Пуанкаре–Андронова–Хопфа (появление флаттера ленты в потоке воздуха), бифуркация Эйлера (дивергенция ленты). Определена зависимость критической скорости и частоты колебаний при возникновении флаттера в зависимости от силы натяжения ленты. Исследовано закритическое поведение системы и установление автоколебательного режима, для которого определена его частота и амплитуда колебаний.

Ключевые слова: тонкая лента, мембрана, струна, изгибно-крутильные колебания, аэроупругие колебания, флаттер, автоколебания

DOI: 10.31857/S0235711921050023

В современных технических системах для реализации подъемной и/или движущей силы широко применяются воздухонепроницаемые тонкостенные элементы с практически нулевой изгибной жесткостью (ленты, мембраны, обшивки корпусов, паруса), находящиеся под действием воздушного потока [1–4]. При определенных соотношениях скорости набегающего потока и условий закрепления в таких элементах могут возникать аэроупругие колебания по типу флаттера [1–3, 5, 6]. Аналогичные явления могут возникать и в других тонкостенных конструкциях.

В одних случаях эти колебания являются крайне нежелательным и, даже, весьма опасным явлением, приводящим к потере несущей способности и прочности конструкции [2, 6]. В других случаях возбуждение автоколебаний можно использовать в технических устройствах, например, для генерации электрической энергии, так как это реализовано в системе “Windbelt” [7–11]. В устройствах типа “Windbelt” колеблющаяся лента с постоянными магнитами, находясь в потоке воздуха, периодически взаимодействует с неподвижными катушкам индуктивности, в которых генерируется электрический ток [7].

Вопросам динамического поведения тонких элементов с нулевой изгибной жесткостью в воздушном потоке и выявлению пороговых (критических) значений скорости воздушного потока, при котором возникают колебания (или дивергенция, приводящая к статическому “выворачиванию”), посвящена обширная учебная и специальная литература, например [1, 2, 4–6]. Вместе с тем, вопросы, связанные с исследованиями колебаний тонкой ленты в зависимости от ее натяжения и скорости набегающего потока, изучены недостаточно подробно. Известные расчетные модели основаны на различных упрощающих допущениях, ограничивающие исследование закритического поведения ленты [12–14]. В работах [15, 16] изгибная жесткость тонкой ленты определяется ее продольным натяжением, а крутильная жесткость учитывается модулем сдвига, значение которого не определено и требует дополнительной верификации или уточнения расчетной модели.

В настоящей статье мы попытались исправить эту неопределенность, связанную с необходимостью учета крутильной жесткости через заданные усилия натяжения ленты и крутящего момента от подъемной силы, за счет разработки новой модели, описывающей совместные изгибно-крутильные колебания. Таким образом, целью настоящей статьи является моделирование и анализ динамики самовозбуждающихся изгибно-крутильных колебаний ленты, находящейся в воздушном потоке.

Постановка задачи. Тонкая лента с погонной массой m, длиной l и шириной a нагружена растягивающими усилиями T (рис. 1а). Распределение усилий T по концевым сечениям ленты определяется условиями их приложения, которые могут иметь произвольный характер (в общем случае это распределение трудно идентифицируется). На ленту действует воздушный поток с постоянной скоростью U, направленный параллельно плоскости ленты, и аэродинамическая подъемная сила.

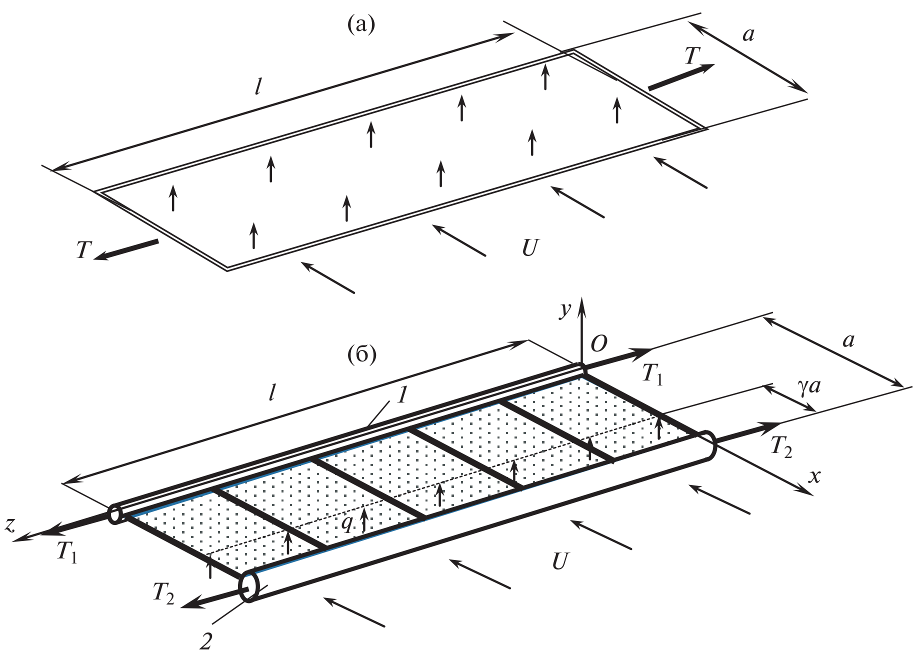


Рис. 1. Лента в воздушном потоке – (а) и ее расчетная схема – (б).

Задача сводится к определению зависимости критической скорости потока воздуха U_{crit} от усилия натяжения T, от распределения массы по ширине ленты, а также от геометрии поперечного сечения (положения центра давления) и анализу периодических движений ленты в закритической области (определению частот и распределения амплитуд ее колебаний). Существенной особенностью задачи является необходимость учета изгибной и крутильной жесткости ленты через заданные усилия ее натяжения.

Расчетная схема. Лента длиной l и шириной a моделируется плоской тонкой мембраной с двумя параллельными струнами (рис. 1б, позиции *1* и *2*), жестко закрепленными по краям мембраны. Предполагается, что $l > a$. Для общности задачи и расширения возможностей анализа будем считать, что струны имеют различные погонные массы m_1, m_2, причем $m_1 + m_2 = m$.

Каждая из струн нагружена растягивающими усилиями T_1, T_2, причем $T_1 + T_2 = T$, $T_1 = \beta T$, где β – параметр, характеризующий точку приложения растягивающего усилия по ширине ленты. На мембрану действует распределенная подъемная сила q, вызванная набегающим воздушным потоком, которая приведена к линии центров давления. Предложенная расчетная схема отражает возникновение изгибной и крутильной жесткости ленты при действии растягивающих усилий, без ограничений на их распределение по концевым сечениям ленты.

Введем абсолютную систему отсчета $Oxyz$ с началом в точке O, совпадающей с одним из концов струны *1*: ось Oz совпадает с осью струны *1*, ось Ox проходит через одноименные концы струн, ось Oy перпендикулярна плоскости xz (рис. 1б).

Подъемную силу, действующую на ленту, распределим по обеим струнам – q_1 и q_2 (индексы соответствуют номеру струны), причем $q_1 + q_2 = q$. На рис. 2 показано произвольное сечение принятой расчетной схемы ленты, где штриховыми линиями показано возможное перемещение струн *1* и *2*. Центр давления подъемной силы в поперечном сечении полотна расположен на расстоянии γa от правого края (рис. 2, точка P). Таким образом, $q_1 = \gamma q$, $q_2 = (1 - \gamma)q$. Случай $\gamma = 0$ соответствует приложению распределенной нагрузке к струне с номером *2*, на краю со стороны набегающего потока. Заметим, что для прямоугольного аэродинамического профиля, находящегося в дозвуковом воздушном потоке известно точное положение центра давления подъемной силы: $\gamma = 1/4$ [2, 17].

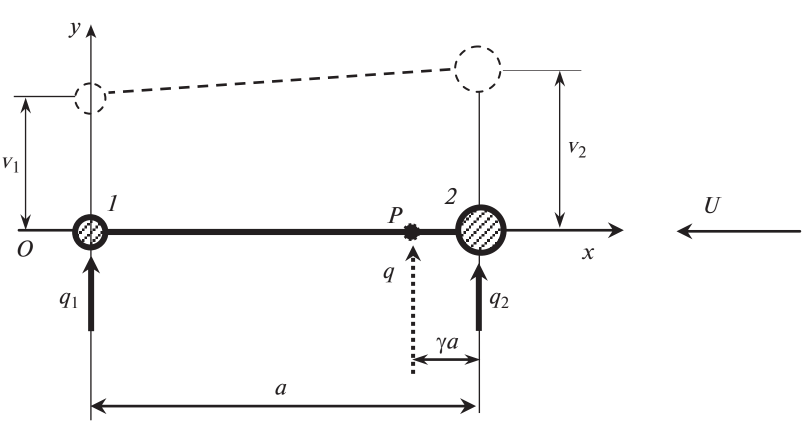


Рис. 2. Поперечное сечение расчетной схемы ленты.

Уравнения движения. Уравнения поперечных колебаний относительно прогибов $v_i(t, z)$, $i = 1, 2$ двух граничных струн в направлении вертикальной оси Oy, растянутых усилиями T_1, T_2 и нагруженных поперечными распределенными силами q_1, q_2 запишем в виде [19, 20]

$$m_i\ddot{v}_i(t,z) - T_i v_i''(t,z) = q_i, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

где $\ddot{v}_i \triangleq \dfrac{\partial^2 v_i(t,z)}{\partial t^2}$, $v_i'' \triangleq \dfrac{\partial^2 v_i(t,z)}{\partial z^2}$, $i = 1, 2$; i – номер струны.

Переход к эквивалентной струне. Введем в рассмотрение приведенную (эквивалентную, оснащенную) струну, расположенную в барицентре обеих струн вдоль оси Ox ленты на расстоянии αa от правого края и на расстоянии $(1 - \alpha)a$ от левого края (рис. 3, точка M). Заметим, что барицентр является общим центром масс поперечных сечений обеих струн.

Связь между основными характеристиками компонент эквивалентной струны выражается через безразмерные параметры α, β, γ.

$$\begin{gathered} m = m_1 + m_2, \quad m_1 = \alpha m, \quad m_2 = (1-\alpha)m, \\ T = T_1 + T_2, \quad T_1 = \beta T, \quad T_2 = (1-\beta)T, \\ q = q_1 + q_2, \quad q_1 = \gamma q, \quad q_2 = (1-\gamma)q, \quad \gamma = 1/4. \end{gathered} \tag{2}$$

Прогиб v эквивалентной струны вдоль оси Oy и угол поворота ϑ вокруг оси Oz определяются через прогибы двух граничных струн v_1, v_2

$$\begin{gathered} v = \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2, \quad \sin(\vartheta) = (v_2 - v_1)/a \Rightarrow \\ \Rightarrow v_1 = v - (1-\alpha)a\sin(\vartheta), \quad v_2 = v + \alpha a \sin(\vartheta). \end{gathered} \tag{3}$$

В дальнейшем будем считать угол поворота ϑ достаточно малым, т.е. $\sin(\vartheta) \approx \vartheta$; тогда из (3)

$$v_1 = v - (1-\alpha)a\vartheta, \quad v_2 = v + \alpha a\vartheta. \tag{4}$$

Подставим соотношения (4) в уравнения (1)

$$\begin{cases} \alpha m\left(\ddot{v} - (1-\alpha)a\ddot{\vartheta}\right) - \beta T\left(v'' - (1-\alpha)a\vartheta''\right) = \gamma q, \\ (1-\alpha)m\left(\ddot{v} + \alpha a\ddot{\vartheta}\right) - (1-\beta)T\left(v'' + \alpha a\vartheta''\right) = (1-\gamma)q. \end{cases} \tag{5}$$

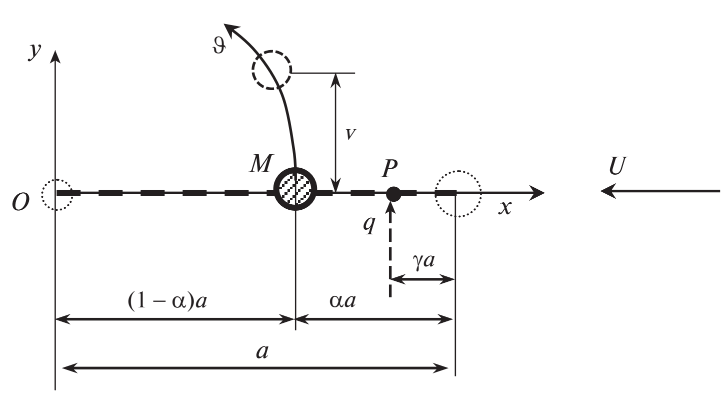


Рис. 3. Схема сечения эквивалентной струны.

Из уравнений (5) находятся выражения для линейного и углового ускорения элемента эквивалентной струны

$$\begin{gathered}\ddot{v} = \frac{T}{m}\left[v'' + (\alpha-\beta)\,a\vartheta''\right] + \frac{q}{m},\\ \ddot{\vartheta} = \frac{T}{am}\left[\frac{\alpha-\beta}{\alpha(1-\alpha)}v'' + \frac{(1-\alpha)\beta + \alpha(\alpha-\beta)}{\alpha(1-\alpha)}a\vartheta''\right] + \frac{q}{am}\frac{\alpha-\gamma}{\alpha(1-\alpha)}.\end{gathered} \tag{6}$$

Первое уравнение (6) представляет собой уравнение поперечных колебаний эквивалентной струны

$$m\ddot{v} = T\left[v'' + (\alpha-\beta)\,a\vartheta''\right] + q. \tag{7}$$

Умножая второе уравнение (6) на момент инерции вращения $\alpha(1-\alpha)\,ma^2$ вокруг оси Oz, получим уравнение крутильных колебаний эквивалентной струны

$$\alpha(1-\alpha)\,ma^2\ddot{\vartheta} = aT\left[(\alpha-\beta)\,v'' + ((1-\alpha)\beta + \alpha(\alpha-\beta))\,a\vartheta''\right] + (\alpha-\gamma)\,aq. \tag{8}$$

Уравнения (7), (8) показывают, что поперечные и крутильные колебания связаны друг с другом и эта связь зависит от распределения масс — параметра α, распределения усилий по ширине ленты — параметра β и от геометрии аэродинамического профиля — параметра γ.

В зависимости от соотношений параметров α, β, γ можно выделить три характерных модельных ситуации для ленты прямоугольного сечения ($\gamma = 1/4$): 1) случай симметричного распределения масс и усилий: $\alpha = \beta = 1/2$; 2) дальняя по потоку кромка ленты (струна *1*) более натянута: $\alpha = 1/2$, $\beta > 1/2$; 3) передняя по потоку кромка ленты (струна *2*) более натянута: $\alpha = 1/2$, $\beta < 1/2$.

В общем случае распределенная нагрузка q зависит от динамического угла атаки ϑ_{dyn} и имеет следующий вид [1, 2]

$$q = \frac{\rho U^2}{2}aCf\left(\vartheta_{\mathrm{dyn}}\right), \tag{9}$$

где $\rho U^2/2$ — скоростной напор и ϑ_{dyn} — динамический угол атаки, ρ — плотность воздуха, C — безразмерная константа. Динамический угол атаки в соответствии с [1] определяется как

$$\vartheta_{\mathrm{dyn}} = \vartheta - \frac{\dot{v} + (\alpha-\gamma)\,a\dot{\vartheta}}{U}. \tag{10}$$

При этом выражение $\dot{v} + (\alpha-\gamma)\,a\dot{\vartheta}$ является поперечной скоростью центра давления. Зависимость $f\left(\vartheta_{\mathrm{dyn}}\right)$ определяется экспериментально и часто ее принимают в виде кубического полинома [1—3]

$$f\left(\vartheta_{\mathrm{dyn}}\right) = \vartheta_{\mathrm{dyn}} - \varepsilon\frac{\vartheta_{\mathrm{dyn}}^3}{3!}. \tag{11}$$

Величины ε, γ являются экспериментальными константами, которые зависят от формы обтекаемого профиля.

Переход к безразмерным переменным. Введем следующие масштабы

$$t = T_*\tau, \quad z = l\zeta, \quad v = a\xi, \quad \dot{r} \triangleq \frac{\partial r}{\partial\tau}, \quad r' \triangleq \frac{\partial r}{\partial\zeta}, \tag{12}$$

где r – переменные задачи. После подстановки (12) в уравнения (6) получаем

$$\ddot{\xi} = \frac{T_*^2 T}{l^2 m}[\xi'' + (\alpha - \beta)\vartheta''] + \frac{T_*^2 q}{am},$$
$$\ddot{\vartheta} = \frac{T_*^2 T}{l^2 m}\left[\frac{\alpha - \beta}{\alpha(1-\alpha)}\xi'' + \frac{(1-\alpha)\beta + \alpha(\alpha - \beta)}{\alpha(1-\alpha)}\vartheta''\right] + \frac{T_*^2 q}{am}\frac{\alpha - \gamma}{\alpha(1-\alpha)}. \tag{13}$$

Масштаб по времени определим из равенства единице множителей перед первыми слагаемыми в (13)

$$\frac{T_*^2 T}{l^2 m} = 1 \Rightarrow T_* = l\sqrt{\frac{m}{T}}. \tag{14}$$

Тогда безразмерная аэродинамическая нагрузка $\psi \sim q$ с учетом (13)

$$\psi = \frac{T_*^2 q}{am} = \frac{l^2}{aT}\frac{\rho U^2}{2}aCf(\vartheta_{\text{dyn}}) = \frac{\mathrm{N}^2}{2}Cf(\vartheta_{\text{dyn}}),$$
$$\vartheta_{\text{dyn}} = \vartheta - \frac{\dot{v} + (\alpha - \gamma)a\dot{\vartheta}}{U} = \vartheta - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}\left[\dot{\xi} + (\alpha - \gamma)\dot{\vartheta}\right], \tag{15}$$
$$\mathrm{A} = a\sqrt{\frac{\rho}{m}}, \quad \mathrm{N} = Ul\sqrt{\frac{\rho}{T}}.$$

В этих выражениях параметр N представляет собой безразмерную скорость набегающего потока, параметр A – отношение массы воздуха, увлекаемой лентой, к массе ленты.

Анализируя безразмерные параметры (14), (15), можно выявить влияние сил натяжения ленты на период осцилляций T_{crit} и скорость набегающего потока воздуха при достижении критического состояния U_{crit} – бифуркации Пуанкаре–Андронова–Хопфа

$$T_{\text{crit}} \sim \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad U_{\text{crit}} \sim \sqrt{T}. \tag{16}$$

С учетом безразмерных параметров (15) уравнения изгибных и крутильных колебаний эквивалентной струны принимают вид

$$\ddot{\xi} = \xi'' + (\alpha - \beta)\vartheta'' + \psi,$$
$$\ddot{\vartheta} = d_1\xi'' + d_2\vartheta'' + d_3\psi, \tag{17}$$

где коэффициенты d_t, $t = 1, 2, 3$ зависят от конструкции гибкой ленты (устройства эквивалентной струны) – параметров α, β, γ

$$d_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha(1-\alpha)}, \quad d_2 = \frac{(1-\alpha)\beta + \alpha(\alpha - \beta)}{\alpha(1-\alpha)}, \quad d_3 = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha(1-\alpha)}. \tag{18}$$

Уравнения (7), (8) или (17), (18) показывают, что поперечные и крутильные колебания связаны друг с другом и эта связь зависит от распределения масс – параметра α, распределения усилий по ширине ленты – параметра β и от геометрии аэродинамического профиля – параметра γ. В частности, если точка приложения результирующего усилия натяжения – центр жесткости, совпадает центром масс поперечного сечения

($\beta = \alpha$), то связь крутильных и изгибных колебаний осуществляется только аэродинамическими силами

$$\ddot{\xi} = \xi'' + \psi, \quad \ddot{\vartheta} = \vartheta'' + d_3\psi,$$
$$d_3 = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha(1-\alpha)}, \quad \psi = \frac{\mathrm{N}^2}{2}Cf(\vartheta_{\mathrm{dyn}}), \quad \vartheta_{\mathrm{dyn}} = \vartheta - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}\left[\dot{\xi} + (\alpha-\gamma)\dot{\vartheta}\right]. \tag{19}$$

Если центр масс совпадает с центром давления, $\alpha = \gamma$, то уравнения динамики (17), (18) принимают вид

$$\ddot{\xi} = \xi'' + (\alpha-\beta)\vartheta'' + \psi, \quad \ddot{\vartheta} = d_1\xi'' + d_2\vartheta'',$$
$$d_1 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha(1-\alpha)}, \quad d_2 = \frac{(1-\alpha)\beta + \alpha(\alpha-\beta)}{\alpha(1-\alpha)}, \tag{20}$$
$$\psi = \frac{\mathrm{N}^2}{2}Cf(\vartheta_{\mathrm{dyn}}), \quad \vartheta_{\mathrm{dyn}} = \vartheta - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}\dot{\xi}$$

и динамический угол атаки ϑ_{dyn} не зависит от $\dot{\vartheta}$.

Краевые условия соответствуют условиям жесткого закрепления концевых сечений ленты (эквивалентной струны) при $z = 0$, $z = l$

$$\xi(\tau,\zeta): \quad \xi(\tau,0) = \xi(\tau,1) = 0,$$
$$\vartheta(\tau,\zeta): \quad \vartheta(\tau,0) = \vartheta(\tau,1) = 0. \tag{21}$$

Уравнения в вариациях около недеформированного состояния. Положим

$$X(\tau,\zeta) \overset{\Delta}{=} \delta\xi(\tau,\zeta), \quad Y(\tau,\zeta) \overset{\Delta}{=} \delta\vartheta(\tau,\zeta). \tag{22}$$

Из уравнений (17), (18) получаем уравнения в вариациях

$$\ddot{X} = X'' + (\alpha-\beta)Y'' + \frac{C\mathrm{N}^2}{2}\left\{Y - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}\left[\dot{X} + (\alpha-\gamma)\dot{Y}\right]\right\},$$
$$\ddot{Y} = d_1X'' + d_2Y'' + d_3\frac{C\mathrm{N}^2}{2}\left\{Y - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}\left[\dot{X} + (\alpha-\gamma)\dot{Y}\right]\right\}. \tag{23}$$

Пространственная дискретизация, метод Галеркина. Выберем полную систему ортонормированных координатных функций, удовлетворяющих краевым условиям (21)

$$s_k(\zeta) = \sqrt{2}\sin(k\pi\zeta), \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \quad (s_k, s_l) = \int_0^1 s_k(\zeta)\,s_l(\zeta)\,d\zeta,$$
$$(s_j, s_j) = 1, \quad \forall j, \quad (s_k, s_l) = 0, \quad \forall k \neq l. \tag{24}$$

Представим функции $X(\tau,\zeta)$, $Y(\tau,\zeta)$ аппроксимацией в виде конечных рядов

$$X(\tau,\zeta) \approx X^n(\tau,\zeta) = \sum_1^n p_j(\tau)s_j(\zeta),$$
$$Y(\tau,\zeta) \approx Y^n(\tau,\zeta) = \sum_1^n q_j(\tau)s_j(\zeta). \tag{25}$$

После проведения ортогонализации в процедуре метода Галеркина для уравнений (23) получим следующую систему уравнений для каждой k-й моды отдельно[1] в силу ортонормированности (24)

$$\begin{aligned} \ddot{p}_k + A_{k1}\dot{p}_k + A_{k2}p_k + B_{k1}\dot{q}_k + B_{k2}q_k &= 0, \\ C_{k1}\dot{p}_k + C_{k2}p_k + \ddot{q}_k + D_{k1}\dot{q}_k + D_{k2}q_k &= 0, \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\begin{gathered} A_{k1} = \frac{C\text{AN}}{2} + 2\zeta_\xi, \quad A_{k2} = (k\pi)^2, \\ B_{k1} = (\alpha - \gamma)\frac{C\text{AN}}{2}, \quad B_{k2} = (\alpha - \beta)(k\pi)^2 - \frac{C\text{N}^2}{2}, \\ C_{k1} = d_3\frac{C\text{AN}}{2}, \quad C_{k2} = (k\pi)^2 d_1, \\ D_{k1} = (\alpha - \gamma) d_3 \frac{C\text{AN}}{2} + 2\zeta_\vartheta, \quad D_{k2} = (k\pi)^2 d_2 - d_3\frac{C\text{N}^2}{2}. \end{gathered} \tag{27}$$

Коэффициенты ζ_ξ, ζ_ϑ учитывают внешнее демпфирование поперечным и крутильным колебаниям.

Расчет характеристических показателей системы (26). Представим решение (26) в виде

$$p_k(\tau) = e^{\lambda\tau}U_k, \quad q_k(\tau) = e^{\lambda\tau}V_k. \tag{28}$$

После подстановки (28) в систему (26) получим алгебраическую задачу

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + A_{k1}\lambda + A_{k2} & B_{k1}\lambda + B_{k2} \\ C_{k1}\lambda + C_{k2} & \lambda^2 + D_{k1}\lambda + D_{k2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_k \\ V_k \end{Bmatrix} = 0. \tag{29}$$

Тогда характеристическое уравнение для (29) будет полиномом четвертого порядка

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= A_{k1} + D_{k1}, \\ a_2 &= A_{k1}D_{k1} + A_{k2} + D_{k2} - B_{k1}C_{k1}, \\ a_3 &= A_{k1}D_{k2} + A_{k2}D_{k1} - B_{k1}C_{k2} - B_{k2}C_{k1}, \\ a_4 &= A_{k2}D_{k2} - B_{k2}C_{k2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Условия устойчивости тривиального решения (26) – $\max(\text{Re}(\lambda)) < 0$, следуют из критерия Рауса–Гурвица

$$\begin{aligned} \mu_1 &= a_1 > 0, \\ \mu_2 &= a_1a_2 - a_3 > 0, \\ \mu_3 &= a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2 > 0, \\ \mu_4 &= a_4\left(a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2\right) > 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Анализ результатов расчета. Расчеты проводились в программном комплексе MATLAB для первой формы колебаний ($k = 1$) при следующих фиксированных значениях постоянных, входящих в выражения для коэффициентов уравнений (23): $C = 1$, $\text{A} = 0.1$, $\zeta_\xi = 0.02$, $\zeta_\vartheta = 0.05$.

При этом варьировалась скорость набегающего потока N, как управляющего параметра, для различных комбинаций параметров α, β, γ. Некоторые результаты расче-

[1] Это условие неверно в случае учета внутреннего трения в каждой струне. Внешнее демпфирование сохраняет условие сепарабельности мод.

тов, иллюстрирующие характер колебаний ленты (эквивалентной струны), представлены на рис. 4–7. Графическое представление третьего минора Гурвица $\mu_3(\mathrm{N})$ из условий устойчивости (32) при его обращении в ноль ($\mu_3 = 0 \Rightarrow \mathrm{N_{crit}}$) позволяет зафиксировать бифуркацию Пуанкаре–Андронова–Хопфа, т.е. появление флаттера струны в потоке воздуха (рис. 4) [8, 20]. На рис. 4 для сравнения представлены два варианта расчета при $\gamma = 0.25$: (а) – при $\alpha = 0.75$, $\beta = 0.5$ и (б) – при $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.4$. В первом

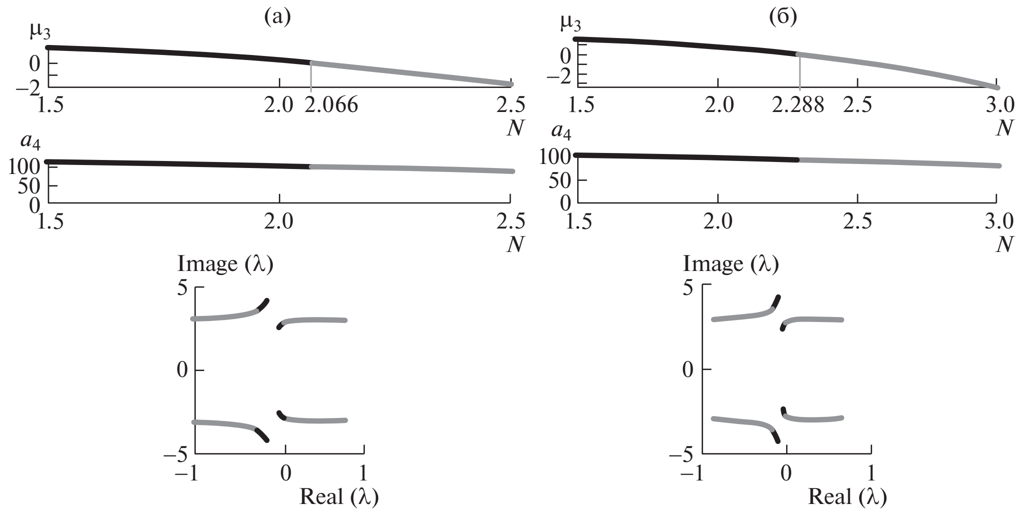


Рис. 4. Бифуркация Пуанкаре–Андронова–Хопфа и диаграммы Аргана: (а) – при $\alpha = 0.75$; $\beta = 0.5$; $\gamma = 0.25$; (б) – при $\alpha = 0.7$; $\beta = 0.4$; $\gamma = 0.25$.

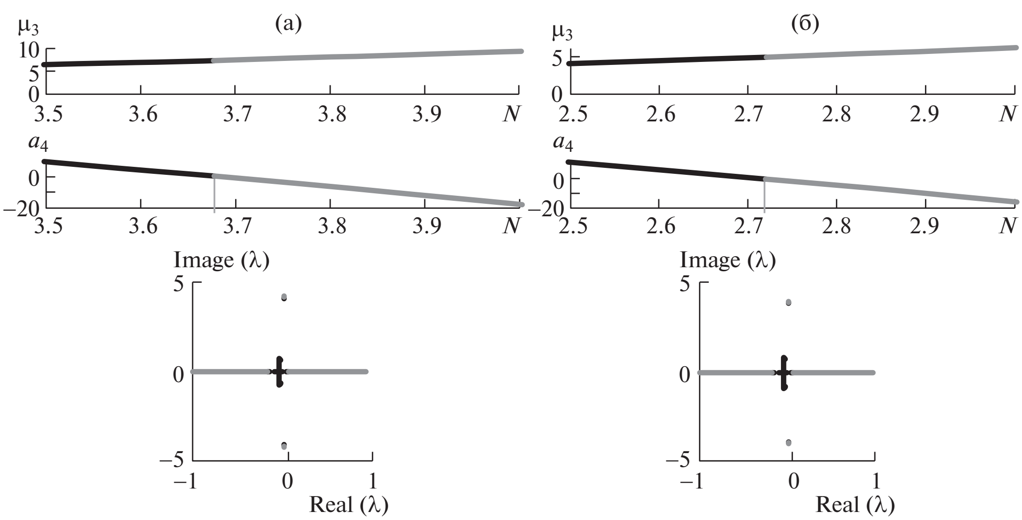


Рис. 5. Бифуркации Эйлера и диаграмма Аргана: (а) – при $\alpha = 0.4$; $\beta = 0.6$; $\gamma = 0.25$; (б) – при $\alpha = 0.5$; $\beta = 0.75$; $\gamma = 0.25$.

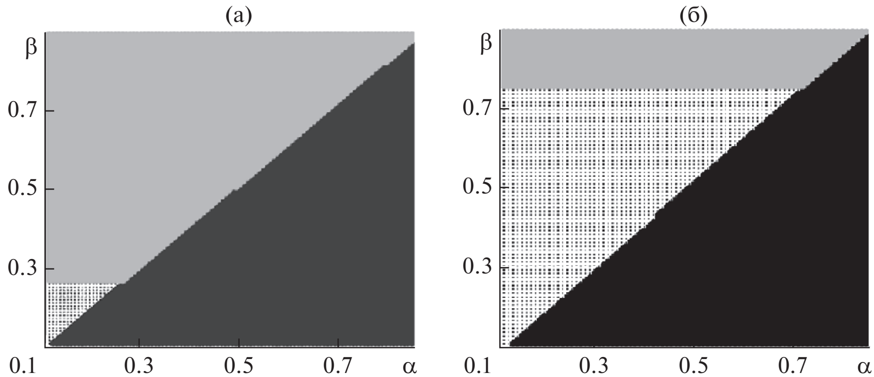


Рис. 6. Области возникновения дивергенции и флаттера на плоскости $\alpha\beta$: (а) – при $\gamma = 0.25$; (б) – при $\gamma = 0.75$.

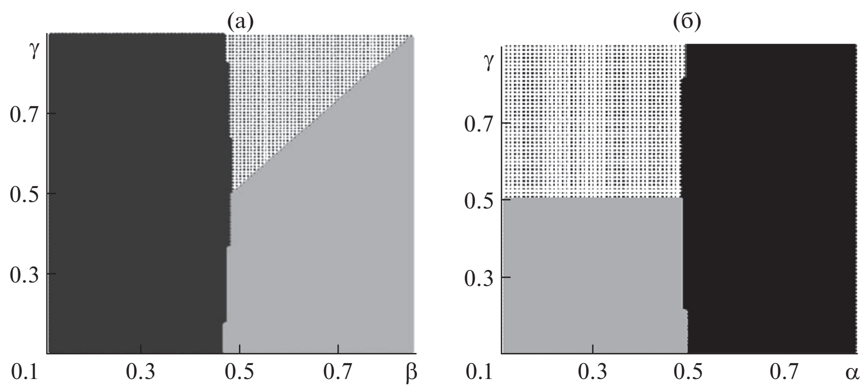


Рис. 7. Области возникновения дивергенции и флаттера: (а) – на плоскости $\beta\gamma$ при $\alpha = 0.5$; (б) – на плоскости $\alpha\gamma$ при $\beta = 0.5$.

случае критическая скорость воздушного потока $N_{crit} = 2.066$; во втором – $N_{crit} = 2.288$. Траектории корней характеристического уравнения (30) $\lambda_j(N)$, $j = \overline{1,4}$ (диаграмма Аргана) наглядно иллюстрируют характер бифуркации – серые линии соответствуют скорости потока N, при которой $\max(\mathrm{Re}(\lambda_j)) > 0$, $j = \overline{1,4}$.

Построение коэффициента $a_4(N)$ по выражению (31) при его обращении в ноль ($a_4 = 0 \Rightarrow N_{crit}$), позволяет локализовать бифуркацию Эйлера, соответствующую дивергенции эквивалентной струны в потоке воздуха (рис. 5). Серые линии на диаграмме Аргана соответствуют скорости потока N, при которой $\max(\mathrm{Re}(\lambda_j)) > 0$ для любого j.

Частота колебаний ленты (эквивалентной струны) ω_{crit} и скорость потока воздуха U_{crit} при достижении критического состояния (рис. 4) определяются из (14), (15)

$$\omega_{crit} = \frac{\mathrm{Imag}(\lambda_{crit})}{l}\sqrt{\frac{T}{m}}, \quad U_{crit} = \frac{N_{crit}}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{33}$$

На рис. 6, 7 показаны области возникновения дивергенции (серый цвет) и флаттера (черный цвет) в зависимости от выбранной плоскости параметров. На рис. 6 – на

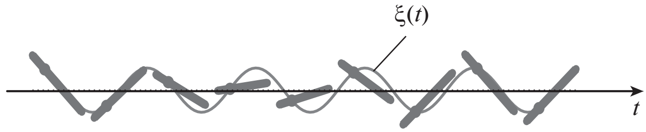


Рис. 8. Характерные положения поперечного сечения ленты.

плоскости $\alpha\beta$ при $\gamma = 0.25$ (рис. 6а) и при $\gamma = 0.75$ (рис. 6б), а на рис. 7 – на плоскости $\beta\gamma$ при $\alpha = 0.5$ (рис. 7а) и на плоскости $\alpha\gamma$ при $\beta = 0.5$ (рис. 7б). Области, заполненные точками, на всех рисунках соответствуют параметрам, при которых не возникает неустойчивости струны (ленты).

На рис. 6, 7 показано, что область дивергенции уменьшается с повышением аэродинамического качества.

Закритическое поведение ленты. Поведение ленты в закритической области (при скоростях потока воздуха выше критической) требует учета нелинейных аэродинамических сил (15). При этом метод Галеркина должен применяться к системе (17) в виде

$$\xi(\tau,\zeta) \approx \xi^n(\tau,\zeta) = \sum_1^n p_j(\tau) s_j(\zeta); \quad \vartheta(\tau,\zeta) \approx \vartheta^n(\tau,\zeta) = \sum_1^n q_j(\tau) s_j(\zeta). \tag{34}$$

Ограничимся случаем $n = 1$. Получим два уравнения, аналогичных (26) с добавлением влияния нелинейных сил. Тогда после ортогонализации в процедуре метода Галеркина вместо (26), получим

$$\begin{gathered} \ddot{p}_1 + A_{11}\dot{p}_1 + A_{12}p_1 + B_{11}\dot{q}_1 + B_{12}q_1 - \psi^{(1)}(p_1,q_1) = 0, \\ C_{11}\dot{p}_1 + C_{12}p_1 + \ddot{q}_1 + D_{11}\dot{q}_1 + D_{12}q_1 - d_3\psi^{(1)}(p_1,q_1) = 0, \end{gathered} \tag{35}$$

где

$$\psi^{(1)}(p_1,q_1) = -\varepsilon\frac{C\mathrm{AN}}{8}\left[\dot{p}_1 + (\alpha-\gamma)\dot{q}_1\right]^3. \tag{36}$$

На рис. 8 показаны положения поперечного сечения ленты (эквивалентной струны) при $\zeta = 0.5$ (среднее сечение ленты), которое оно принимает в различные моменты времени в установившемся режиме после бифуркации Пуанкаре–Андронова–Хопфа при $\mathrm{N} = 1.05\mathrm{N}_{crit}$ ($\mathrm{N}_{crit} = 2.066$). Расчет проводился по уравнениям (35) при $\alpha = 0.75$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.25$.

Заключение. В статье предложена модель растянутой ленты, находящейся в воздушном потоке, в виде двух струн, закрепленными по краям мембраны. В модели изгибная и крутильная жесткости ленты получены через усилия натяжения и крутящего момента, зависящего от усилия натяжения и распределения масс, а также от подъемной аэродинамической силы. Модель и сформированные уравнения описывают совместные изгибно-крутильные колебания ленты. Существенной особенностью модели является возможность учета различных асимметрий, в частности, профиля поперечного сечения ленты, способа приложения растягивающей нагрузки.

Решения дифференциальных уравнений, описывающих колебания ленты, получены в виде конечных рядов по координатным функциям с их последующей ортогонализацией в соответствии с методом Галеркина. Анализ устойчивости полученных решений позволил выявить бифуркацию Пуанкаре–Андронова–Хопфа, т.е. появление флаттера ленты в потоке воздуха, и локализовать бифуркацию Эйлера, соответствующую дивергенции ленты.

При учете нелинейных характеристик аэродинамических сил исследовано поведение ленты в закритической области.

Все расчетные формулы получены в безразмерном виде, что существенно расширяет возможности практического использования результатов работы и позволяет рассчитывать критические скорости возникновения дивергенции и флаттера ленты, а также амплитуды и частоты ее колебаний для произвольного набора численных значений параметров рассматриваемых систем.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-19-00183, https://rscf.ru/project/21-19-00183/.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фын Я.Ц.* Введение в теорию аэроупругости / Перевод с англ. А.И. Смирнова под ред. Э.И. Григолюка. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 523 с.
2. *Амирьянц Г.А., Зинченков М.Ч., Калабухов С.И. и др.* Аэроупругость / Под ред. П.Г. Карклэ. М.: Инновационное машиностроение, 2019. 650 с.
3. *Marchaj C.A.* Aero-Hydrodynamics of Sailing. International Marine Publishing Co, 1989. 720 p.
4. *Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н.* Аэроупругость летательных аппаратов. М.: МАИ, 2020. 100 с.
5. *Тукмаков А.Л.* Нелинейные режимы колебаний упругой панели под действием периодической нагрузки // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 1. С. 186.
6. *Томпсон Дж.М.Т.* Неустойчивость и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.
7. *Frayne S.M.* Generator utilizing fluid-induced oscillations. USA Patent 7573143, 2009.
8. *Bryant M., Garcia E.* Modelling and testing of a novel aeroelastic flutter energy harvester // J. Vib. Acoust, 2011. V. 133 (1). 011010.
9. *Li S., Yuan J., Lipson H.* Ambient wind energy harvesting using cross-flow fluttering // J. Appl. Phys. 2011. V. 109 (2). 026104.
10. *Tang L., Païdoussis M., Jiang J.* Cantilevered flexible plates in axial flow: energy transfer and the concept of flutter-mill // J. Sound Vib. 2009. V. 326 (1–2). P. 263–276.
11. *Doaré O., Michelin S.* Piezoelectric coupling in energy-harvesting fluttering flexible plates: linear stability analysis and conversion efficiency // J. Fluid. Struct. 2011. V. 27. P. 1357.
12. *Shelley M.J., Zhang J.* Flapping and bending bodies interacting with fluid flows // Annual Review of Fluid Mechanics. 2011. V. 43. P. 449.
13. *Tipans I., Viba J., Irbe M., Vutukuru S.K.* Analysis of Non-Stationary flow interaction with simple form objects. Agronomy Research. 2019. V. 17 (1). P. 1227.
14. *Viba J., Panovko G., Gouskov A., Irbe M.* Approximate model of flat ribbon vibrations in the wind // Book of Abstracts of the Second International Nonlinear Dynamics Conference, Rome, Sapienza University, 2021. 45 p.
15. *Афанасьева А.А., Гуськов А.М., Пановко Г.Я.* Нелинейная динамика тонкой узкой ленты в дозвуковом потоке воздуха // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 7. С. 64.
16. *Afanaseva A., Gouskov A., Panovko G.* Nonlinear dynamics of a thin narrow ribbon in an airflow // Vibroengineering Procedia. 2020. V. 32. P. 105.

17. *Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н.* Аэродинамические характеристики профиля крыла с нелинейно деформируемой мембраной в дозвуковом потоке // Механика композиционных материалов и конструкций. 2016. Т. 22. № 4. С. 491.
18. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. 4-е изд., стер. СПб.: Изд-во “Лань”, 2003. 304 с.
19. *Chen L.-Q., Ding H.* Two nonlinear models of a transversely vibrating string // Archive of Applied Mechanics. 2008. V. 78. P. 321.
20. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. СПб.: Невский диалект, 2002. 230 с.

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2021, № 5, с. 62–71

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.3:534.1

ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ КОСОУГОЛЬНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ПАНЕЛЕЙ

© 2021 г. Н. С. Азиков[1], А. В. Зинин[2], Ю. В. Гайдаржи[2,*], И. Ш. Сайфуллин[1]

[1] Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
[2] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия
**e-mail: k0rh@yandex.ru*

Поступила в редакцию 07.04.2021 г.
После доработки 07.06.2021 г.
Принята к публикации 24.06.2021 г.

Представлены результаты оценки устойчивости и прочности при закритическом деформировании слоистых композитных панелей, имеющих геометрическую форму в виде скошенных (косоугольных) пластин. Рассмотрено нагружение сжимающими и касательными усилиями в плоскости слоев ортотропной панели в форме параллелограмма, каждый край которого может иметь независимый способ закрепления. Дан анализ закритического поведения скошенной панели; установлены рациональные геометрические и структурные параметры косоугольных углепластиковых панелей, соответствующие максимуму критических и разрушающих усилий для композитных элементов с симметричной укладкой слоев.

Ключевые слова: композитные материалы, скошенные панели, устойчивость, закритическое деформирование, несущая способность

DOI: 10.31857/S0235711921050059

В настоящее время полимерные композитные материалы широко и эффективно применяются в виде тонкостенных слоистых панелей, служащих формообразующими элементами в авиаракетной технике, судостроении, строительстве и других областях техники. Для типовых условий нагружения таких конструктивных элементов характерно наличие сжимающих и сдвиговых нагрузок в плоскости листа, поэтому создание оптимальной структуры требует правильного понимания особенностей механического поведения конструкции: обеспечение прочности при продольном изгибе и характер потери устойчивости [1–5]. С развитием технологий армированных полимерных материалов расширились также возможности формирования геометрического облика композитного элемента, в наибольшей степени соответствующего требованиям функциональности и надежности всей конструкции. Композитные тонкостенные панели можно выполнить в виде косоугольных в плане пластин, стороны которых соответствуют локальной системе координат конструктивного узла, в состав которого входит панель. Скошенные панели можно применять при обшивке стреловидных крыльев и хвостового оперения самолетов [6, 7], корпусов кораблей [8], оболочек и лонжеронов летательных аппаратов [9, 10], сетчатых (анизогридных) каркасов [11].

В современной литературе методы и результаты анализа композитных косоугольных пластин после потери устойчивости представлены ограничено. Это связано прежде всего со сложностью расчетных методов анализа косоугольных анизотропных объектов и определенными вычислительными трудностями из-за использования неортогональной системы координат, когда строгие формулировки при решении основных уравнений требуют дополнительных ресурсов.

Развитие методов анализа закритического поведения скошенных композитных конструкций в настоящее время связано с применением, как аналитических методов теории анизотропных пластин, так и совершенствованием алгоритмов реализации численных методов. Аналитические решения задач закритического поведения скошенных пластин в основном базируются на использовании классической теории пластин (CPT) и теории деформации пластин первого порядка (SDPT). Процедуры аналитического решения реализованы с использованием вариационных методов Галеркина и Рэлея—Ритца, конформных отображений, методов согласования точек, смещения матрицы и др. В одном из первых точных решений задачи потери устойчивости ортотропных пластин различной геометрии [12] было установлено, что величина критической нагрузки может быть сильно завышена, если граничные условия не полностью удовлетворяются. Одним из возможных вариантов удовлетворения естественных граничных условий является аппроксимация функции перемещений двойными рядами Фурье, с помощью которой дан анализ влияния угла скоса панели и степени анизотропии упругих свойств композита. Прогнозирование геометрически нелинейного поведения слоистых композитных конструкций при комбинированных нагрузках затруднено из-за совместного влияния анизотропии, нелинейной геометрии и условий нагружения [9, 13]. Модель Кумара [13], основанная на теории деформации сдвига первого порядка с учетом геометрической нелинейности фон Кармана и использования функции напряжений Эри, позволила преодолеть эти сложности и получить расчетные оценки критических нагрузок. Для решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных эффективным оказывается метод обобщенных дифференциальных квадратур (GDQ).

На основе метода конечных элементов разработаны различные геометрически нелинейные модели деформирования слоистых композитных конструкций косоугольной формы. В работе [14] представлено параметрическое исследование композитной косоугольной пластины с учетом влияния углов скоса, ориентации слоев материала и переменной толщины, в котором анализ продольного изгиба многослойных пластин переменной толщины выполняется с помощью расчета бифуркации изгиба, реализованного в ANSYS. Усовершенствованный нелинейный анализ [15] методом конечных элементов, основанный на использовании множителей Ларгранжа, показал, что комбинация различных видов нагрузки и последовательность укладки слоев оказывают доминирующее влияние на определение нелинейных характеристик. Заслуживают внимания также конечно-элементные модели закритического поведения скошенных ортотропных панелей, основанные на теории сдвиговой деформации первого порядка (FSDT) [16] и теории сдвиговой деформации более высокого порядка (HSDT) [17].

Из сравнения критических и разрушающих усилий для скошенных панелей следует, что их несущая способность не исчерпывается потерей устойчивости — пластины продолжают воспринимать возрастающую нагрузку и при закритическом деформировании, поэтому в отсутствие ограничений по перемещениям можно значительно повысить эффективность использования композитов путем закритического деформирования [18, 19]. Таким образом, для инженерной практики критическая нагрузка потери устойчивости и прочность на изгиб в закритической области — два важных конструктивных параметра косоугольных композитных панелей.

В настоящей статье проведен анализ закритического поведения скошенной панели с целью оценки несущей способности слоистого элемента после достижения критического состояния и установлены рациональные геометрические и структурные параметры косоугольных углепластиковых панелей, соответствующие максимуму крити-

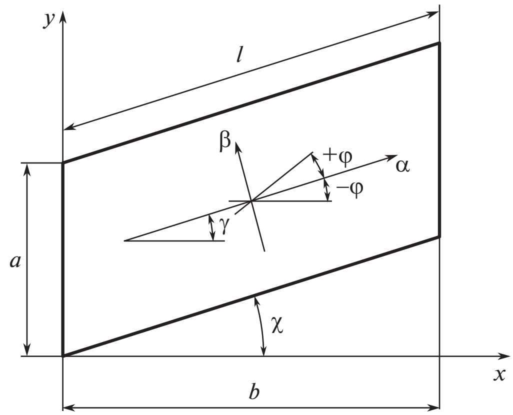


Рис. 1. Геометрические параметры косоугольной панели.

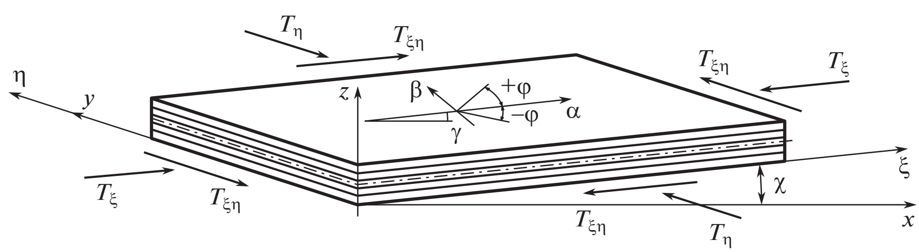


Рис. 2. Схема нагружения и системы координат композитной панели.

ческих и разрушающих усилий для композитных элементов с симметричной укладкой слоев.

Объектом служит тонкостенный элемент силового набора крыла самолета в виде многослойной панели из композиционного материала. Панель в плане представляет собой параллелограмм, геометрия которого определяется конструктивными параметрами силового набора крыла – шагом нервюр a; расстоянием между осями лонжеронов b; углом скоса χ и толщиной h пакета из k ортотропных слоев, симметрично расположенных по толщине с углами армирования $\pm\varphi_i$ к продольной оси 0α (рис. 1).

Для вывода основных соотношений введем две системы координат – ортогональную систему $\alpha\beta z$, которая определяет направление и структуру армирования слоев, и косоугольную систему координат $\xi\eta z$ (рис. 1). Последнюю свяжем с формой панели таким образом, чтобы ось ξ совпадала с продольной, а ось η – с поперечной кромками панели. Панель как часть обшивки крыла нагружена в своей плоскости потоками сжимающих и касательных усилий $\lfloor T \rfloor_{\zeta\eta} = \lfloor T_\zeta T_\eta T_{\zeta\eta} \rfloor^T$ (рис. 2).

Анализ устойчивости такой панели выполнен авторами [2, 3] с использованием энергетического метода, согласно которому функционал энергии деформирования панели (Э) представлен в виде

$$Э = \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^b \Big\{ D_{11}^{\xi\eta} w_{,\xi\xi\xi\xi} + 4D_{13}^{\xi\eta} w_{,\xi\xi\xi\eta} + + 2\left(D_{12}^{\xi\eta} + D_{33}^{\xi\eta}\right) w_{,\xi\xi\eta\eta} + 4D_{23}^{\xi\eta} w_{,\xi\eta\eta\eta} + D_{22}^{\xi\eta} w_{,\eta\eta\eta\eta} \Big\} d\xi d\eta - - \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^b \left[N_\xi \left(w_{,\xi}\right)^2 + N_\eta \left(w_{,\eta}\right)^2 + 2N_{\xi\eta} w_{,\xi} w_{,\eta} \right] d\xi d\eta. \tag{1}$$

Усилия $\lfloor N \rfloor_{\zeta\eta} = \lfloor N_\xi N_\eta N_{\xi\eta} \rfloor^T$, возникающие в панели под действием контурных усилий, в момент потери устойчивости будут равны критическим $\lfloor N \rfloor_{\zeta\eta} = \lfloor T^* \rfloor_{\zeta\eta} = \left\lfloor T_\xi^* T_\eta^* T_{\xi\eta}^* \right\rfloor^T$. Последние будем искать в виде

$$\lfloor T^* \rfloor_{\zeta\eta} = \left\lfloor T_\xi^* T_\eta^* T_{\xi\eta}^* \right\rfloor^T = \frac{\pi^2}{b^2}\sqrt{D_{11}^{\xi\eta} D_{22}^{\xi\eta}}\, \lfloor f^* \rfloor_{\xi\eta}, \tag{2}$$

где $\lfloor f^* \rfloor_{\xi\eta} = \left\lfloor f_\xi^* f_\eta^* f_{\xi\eta}^* \right\rfloor^T$ – вектор коэффициентов устойчивости при, соответственно, продольном, поперечном сжатии и сдвиге; $D_{11}^{\xi\eta}$, $D_{22}^{\xi\eta}$ – изгибные жесткости, которые вместе с остальными жесткостями образуют квадратную симметричную матрицу $[D]^{\xi\eta}$ изгибных жесткостей композитной панели. Компоненты матрицы определяются через жесткости композитного слоя скошенной панели $A_{ij}^{\xi\eta}$

$$D_{ij}^{\xi\eta} = \frac{2}{3}\sum_{p=1}^{k/2} A_{ij}^{\xi\eta}\left[z_p^3 - z_{p-1}^3\right], \tag{3}$$

где z_p, z_{p-1} – толщины от лицевой поверхности до слоев с номерами p и $p-1$;

$$[A]^{\xi\eta} = \left[R_\sigma^{\xi\eta}\right]^{-1} [A]_{\alpha\beta} \left[R_\varepsilon^{\xi\eta}\right],$$

$$\left[R_\sigma^{\xi\eta}\right] = \begin{bmatrix} \cos\chi & 0 & 0 \\ \sin\chi\,\mathrm{tg}\,\chi & \sec\chi & 2\,\mathrm{tg}\,\chi \\ \sin\chi & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[R_\varepsilon^{\xi\eta}\right] = \begin{bmatrix} \sec^2\chi & \mathrm{tg}^2\chi & -\mathrm{tg}\,\chi\sec\chi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2\,\mathrm{tg}\,\chi & \sec\chi \end{bmatrix},$$

где $A_{ij}^{\alpha\beta}$ – известные обобщенные жесткости в ортогональном базисе [1].

Прогиб панели w представим в виде ряда

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\overline{w}_{1m}(\xi)\overline{w}_{2n}(\eta), \tag{4}$$

где m, n – числа полуволн в продольном и поперечном направлениях; A_{mn} – амплитуда прогиба с индексами m, n; $\overline{w}_{1m}$, $\overline{w}_{2n}$ – собственные формы, которые представлены в виде балочных функций Крылова [3].

После подстановки прогиба (4) в полную энергию деформирования панели (1), интегрирования и минимизации полученного выражения по каждому элементу неизвестного вектор амплитуд, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\left([\Omega] - \lfloor\lambda_\xi\rfloor[t_\xi] - \lfloor\lambda_\eta\rfloor[t_\eta] - \lfloor\lambda_{\xi\eta}\rfloor[t_{\xi\eta}]\right)\lfloor A\rfloor = 0, \tag{5}$$

где $[\Omega]=\left(\dfrac{\pi^2}{b^2}\sqrt{D_{11}^{\xi\eta}D_{22}^{\xi\eta}}\right)^{-1}\int_0^l\int_0^b \lfloor k\rfloor_{\xi\eta}^T[D]^{\xi\eta}\lfloor k\rfloor_{\xi\eta}\,d\xi d\eta$, $\lfloor k\rfloor_{\xi\eta}=\lfloor w_{,\xi\xi}\ w_{,\eta\eta}\ 2w_{,\xi\eta}\rfloor$ – вектор кривизн координатной поверхности; $[t_\xi]=\int_0^l\int_0^b(w_{,\xi})^2\,d\xi d\eta$, $[t_\eta]=\int_0^l\int_0^b(w_{,\eta})^2\,d\xi d\eta$, $[t_{\xi\eta}]=\int_0^l\int_0^b w_{,\xi}w_{,\eta}d\xi d\eta$ – квадратные матрицы при собственных значениях с соответствующими индексами, $\lfloor\lambda_\xi\rfloor$, $\lfloor\lambda_\eta\rfloor$, $\lfloor\lambda_{\xi\eta}\rfloor$ – векторы собственных значений при осевом сжатии, поперечном сжатии и сдвиге соответственно.

Из условия существования нетривиального решения однородной системы уравнений (5)

$$\det\left([\Omega]-\lfloor\lambda_\xi\rfloor[t_\xi]-\lfloor\lambda_\eta\rfloor[t_\eta]-\lfloor\lambda_{\xi\eta}\rfloor[t_{\xi\eta}]\right)=0. \tag{6}$$

Определим вектор собственных значений для комбинированного нагружения контурными усилиями $\lfloor\lambda\rfloor_{\zeta\eta}=\lfloor\lambda_\xi\lambda_\eta\lambda_{\xi\eta}\rfloor^T$, минимальные значения которого соответствуют коэффициентам устойчивости

$$\lfloor f^*\rfloor_{\xi\eta}=\min\lfloor\lambda\rfloor_{\zeta\eta}=\min\left(\lfloor\lambda_\xi\lambda_\eta\lambda_{\xi\eta}\rfloor^T\right).$$

Критические усилия при сжатии и сдвиге $\lfloor T^*\rfloor_{\zeta\eta}$ найдем с помощью зависимости (2).

В рамках алгоритма поиска критических усилий проведем анализ влияния угла скоса χ на устойчивость углепластиковых панелей при сжатии и сдвиге с шестью вариантами граничных условий, показанными на рис. 3а–е.

Расчеты показывают, что увеличение угла скоса при действии на панель сжимающих усилий приводит к увеличению критических усилий сжатия T_ξ^* в любом случае закрепления краев панели. Максимальной устойчивостью обладает панель с защемленными кромками. Нагрузки потери устойчивости скошенных пластин при действии в плоскости положительной сдвиговой нагрузки, которая приводит к увеличению угла скоса, ниже показателей в случае сдвига отрицательной нагрузкой. Также при значительных углах скоса наблюдается существенное снижение влияния условий закрепления кромок на критические усилия сдвига (рис. 4).

Далее проанализируем закритическую стадию деформирования. В этом случае прогиб панели можно представить в виде произведения неизвестной амплитуды A_0 на собственную форму, соответствующую критическому усилию

$$w_z=A_0\bar{w}=A_0\sum_m^\infty\sum_n^\infty q_{mn}\cdot\bar{w}_{1\xi}(m)\cdot\bar{w}_{2\eta}(n), \tag{6}$$

где q_{mn} – собственный вектор, который найдем из решения системы уравнений (5) подстановкой в нее минимального собственного значения f^*.

Для вычисления перемещений панели был использован метод центральных конечных разностей, который в данном случае сводится к минимизации по A_0 зависимостей, полученных интегрированием функционала энергии (1) с учетом прогиба в виде (6)

$$\frac{\partial Э}{\partial A_0}=-A_0\left(\alpha_\xi T_\xi+\alpha_\eta T_\eta+\alpha_{\xi\eta}T_{\xi\eta}-N^*\right)+A_0^3R^*=0, \tag{7}$$

где $\alpha_\xi=\int_0^l\int_0^b u_{\xi,\xi}d\xi d\eta$, $\alpha_\eta=\int_0^l\int_0^b u_{\eta,\eta}d\xi d\eta$, $\alpha_{\xi\eta}=\int_0^l\int_0^b(u_{\xi,\eta}+u_{\eta,\xi})d\xi d\eta$, $N^*=$ $=\int_0^l\int_0^b\lfloor k\rfloor_{\xi\eta}^T[D]^{\xi\eta}\lfloor k\rfloor_{\xi\eta}\,d\xi d\eta$, $R^*=\int_0^l\int_0^b\lfloor\varepsilon\rfloor_{\xi\eta}^T[B]^{\xi\eta}\lfloor\varepsilon\rfloor_{\zeta\eta}\,d\xi d\eta$.

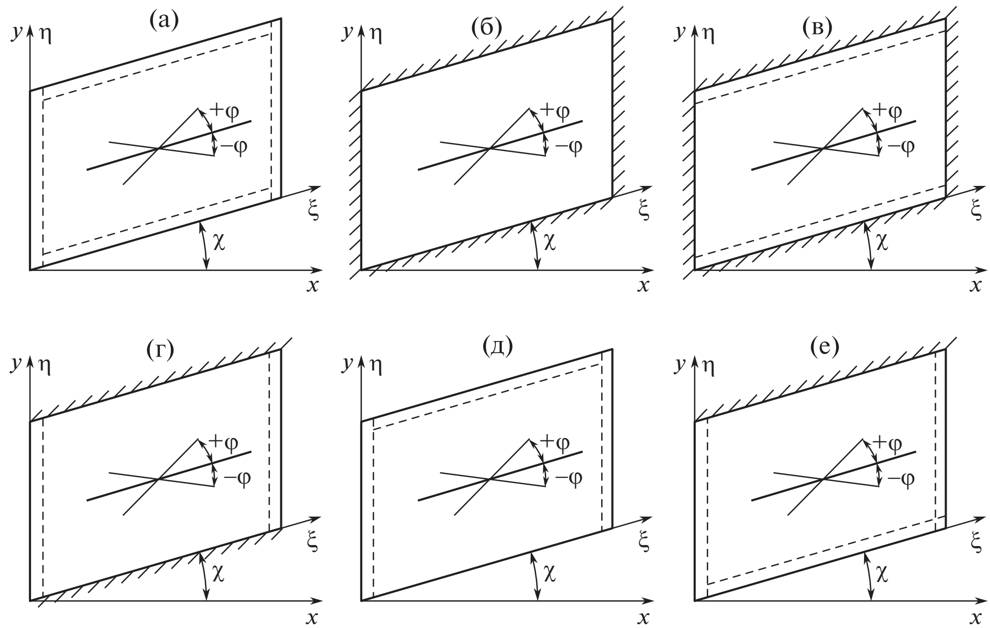


Рис. 3. Схема закрепления кромок панели: пунктир – шарнирное закрепление; штриховка – жесткая заделка; (а) – схема 1; (б) – схема 2; (в) – схема 3; (г) – схема 4; (д) – схема 5; (е) – схема 6.

Уравнение (7) имеет три корня, один из которых всегда действительный и равен $A_0^{(1)} = 0$, а два других мнимые. Следовательно, при нагрузках $\lfloor T \rfloor_{\zeta\eta} < \lfloor T^* \rfloor_{\zeta\eta}$ панель остается плоской. В точке бифуркации $\lfloor T \rfloor_{\zeta\eta} = \lfloor T^* \rfloor_{\zeta\eta}$ все три корня действительные и равны $A_0^{(1)} = A_0^{(2,3)} = 0$. При дальнейшем нагружении $\lfloor T \rfloor_{\zeta\eta} > \lfloor T^* \rfloor_{\zeta\eta}$ возможны следующие состояния равновесия панели: а) панель остается плоской; б) панель теряет устойчивость с появлением прогиба, амплитуда которого равна

$$A_0^{(2,3)} = \pm\sqrt{\left(\alpha_\xi T_\xi + \alpha_\eta T_\eta + \alpha_{\xi\eta} T_{\xi\eta} - N^*\right)/R^*}. \tag{8}$$

В работе [20] показано, что искривленное состояние равновесия такой панели будет устойчивым.

Далее для заданного уровня нагрузки определяем амплитуду (8) и закритический прогиб (6), и вычисляем полные деформации панели в косоугольном базисе

$$\lfloor e \rfloor_{\xi\eta} = \lfloor \varepsilon \rfloor_{\xi\eta} + z \lfloor k \rfloor_{\xi\eta},$$

и деформации отдельного слоя

$$\left\lfloor \varepsilon^{(i)} \right\rfloor_{\alpha\beta} = \left[R_{\alpha\beta}^{\varepsilon} \right] \left[R_{\varepsilon}^{\xi\eta} \right] \lfloor e \rfloor_{\xi\eta},$$

$$\left[R_{\alpha\beta}^{\varepsilon} \right] = \begin{bmatrix} \cos^2(\gamma \pm \varphi_i) & \sin^2(\gamma \pm \varphi_i) & 0.5\sin 2(\gamma \pm \varphi_i) \\ \sin^2(\gamma \pm \varphi_i) & \cos^2(\gamma \pm \varphi_i) & -0.5\sin 2(\gamma \pm \varphi_i) \\ -\sin 2(\gamma \pm \varphi_i) & \sin 2(\gamma \pm \varphi_i) & \cos 2(\gamma \pm \varphi_i) \end{bmatrix}.$$

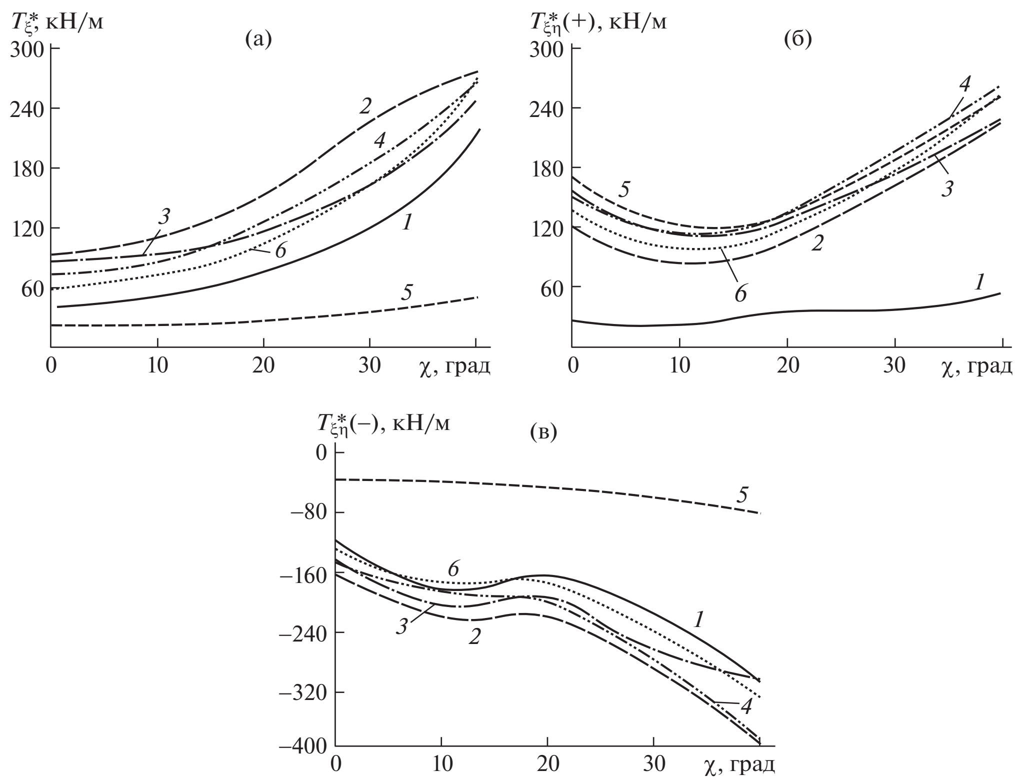


Рис. 4. Зависимость критического усилия потери устойчивости от угла скоса панели при действии: (а) – сжимающей нагрузки; (б) – положительной сдвигающей нагрузки; (в) – отрицательной сдвигающей нагрузки. *1*, *2*, ..., *6* – схемы граничных условий.

Напряженное состояние i-го слоя определяется физическими соотношениями для однородного ортотропного слоя

$$\lfloor \sigma^{(i)} \rfloor_{\alpha\beta} = \lfloor \bar{E}^{(i)} \rfloor^{\alpha\beta} \lfloor \varepsilon^{(i)} \rfloor_{\alpha\beta}, \quad \lfloor \sigma^{(i)} \rfloor_{\alpha\beta} = \lfloor \sigma^{(i)}_\alpha \sigma^{(i)}_\beta \tau^{(i)}_{\alpha\beta} \rfloor^T, \quad \lfloor \varepsilon^{(i)} \rfloor_{\alpha\beta} = \lfloor \varepsilon^{(i)}_\alpha \varepsilon^{(i)}_\beta \varepsilon^{(i)}_{\alpha\beta} \rfloor^T,$$

$$\lfloor \bar{E}^{(i)} \rfloor^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \bar{E}^{(i)}_\alpha & \mu^{(i)}_{\alpha\beta}\bar{E}^{(i)}_\alpha & 0 \\ \mu^{(i)}_{\beta\alpha}\bar{E}^{(i)}_\beta & \bar{E}^{(i)}_\beta & 0 \\ 0 & 0 & G^{(i)}_{\alpha\beta} \end{bmatrix}, \quad \bar{E}^{(i)}_{\alpha,\beta} = \frac{E^{(i)}_{\alpha,\beta}}{1 - \mu^{(i)}_{\alpha\beta}\mu^{(i)}_{\beta\alpha}}, \quad \mu^{(i)}_{\alpha\beta}E^{(i)}_\alpha = \mu^{(i)}_{\beta\alpha}E^{(i)}_\beta,$$

$E^{(i)}_\alpha$, $E^{(i)}_\beta$, $G^{(i)}_{\alpha\beta}$, $\mu^{(i)}_{\alpha\beta}$, $\mu^{(i)}_{\beta\alpha}$ – модули упругости, модуль сдвига, коэффициенты Пуассона однонаправленного слоя композита.

Увеличивая пошагово уровни сжимающих и касательных усилий при закритическом деформировании, находим напряженно-деформированное состояние для каждого слоя в сечениях панели в продольном и поперечном направлениях. Определяем наиболее нагруженный слой по критерию Цая–Ву. Если эквивалентные напряжения по этому критерию меньше единицы, увеличиваем уровни сжимающих и касательных усилий и повторяем процедуру поиска наиболее нагруженного слоя. Если эквивалентные напряжения по критерию Цая–Ву больше единицы, изменяем процедуру поиска

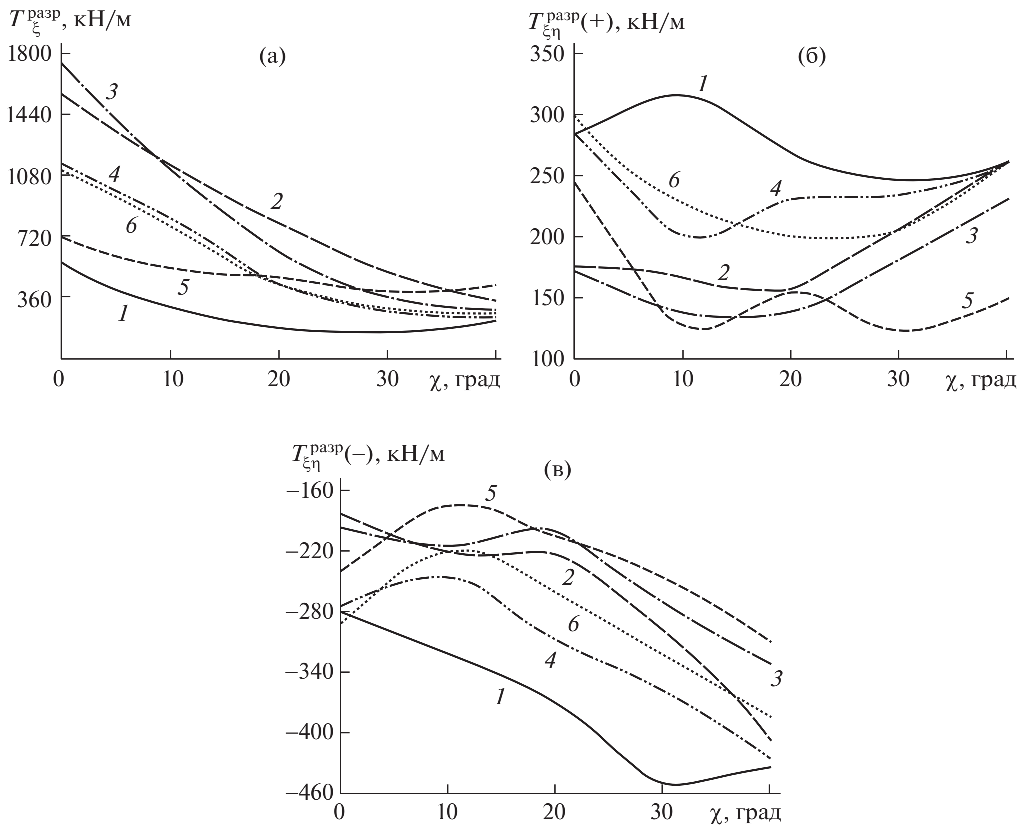


Рис. 5. Зависимость разрушающей нагрузки от угла скоса панели при действии: (а) – сжимающей нагрузки; (б) – положительной сдвигающей нагрузки; (в) – отрицательной сдвигающей нагрузки. *1*, *2*, ..., *6* – схемы граничных условий.

на метод деления пошагового уровня пополам. Вычисления заканчиваются, когда относительная разность предыдущего и последующего уровней сжимающих и касательных усилий меньше заданной погрешности вычислений. Таким способом находим предельные усилия, при которых в наиболее нагруженном слое композита происходит разрушение. На рис. 5 приведены результаты исследований влияния углов скоса и граничных условий на несущую способность углепластиковых панелей при сжатии и сдвиге в закритическом состоянии. В результате прочностного анализа было установлено, что косоугольные панели при действии сжимающей нагрузки имеют пониженную по сравнению с прямоугольными в плане панелями несущую способность (рис. 5а). С увеличением угла скоса прочность панели падает для всех вариантов закрепления. Положительное влияние угла скоса $\chi \geq 10°$ на несущую способность панели после потери устойчивости отмечено только в случае нагружения отрицательными касательными усилиями $T_{\xi\eta}^{\text{разр}}(-)$ (рис. 5в).

При положительном направлении касательных усилий (рис. 5б) несущая способность панели существенным образом зависит как от углов скоса, так и структуры армирования и граничных условий.

Выводы. 1. В докритической стадии увеличение угла скоса при действии на панель сжимающих усилий приводит к увеличению критических усилий сжатия в любом случае закрепления краев панели. Максимальной устойчивостью обладает панель с защемленными кромками. При действии сдвигающих нагрузок важным фактором является направление усилия сдвига, которое существенным образом сказывается для больших углов скоса пластины. **2**. При закритической деформации с увеличением угла скоса несущая способность панели падает. Наибольшей прочностью при сжатии обладают прямоугольные панели. Положительное влияние угла скоса на несущую способность панели после потери устойчивости отмечено только в случае нагружения касательными усилиями отрицательного направления.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
2. *Азиков Н.С.* Устойчивость слоистых композитных косоугольных панелей // Механика композиционных материалов и конструкций. 2004. Т. 10. № 1. С. 133.
3. *Азиков Н.С., Гайдаржи Ю.В.* Устойчивость слоистых скошенных панелей // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16. № 3. С. 361.
4. *Дмитриев В.Г., Егорова О.В., Жаворонок С.И., Рабинский Л.Н.* Исследование устойчивости тонкостенных несущих элементов авиационных конструкций с большими прямоугольными вырезами методами вычислительного эксперимента // Известия вузов. Авиационная техника. 2018. № 2. С. 18.
5. *Liang K., Li Z.* Postbuckling analysis and optimization of composite laminated plates using a novel perturbation-based approximation FE method // Thin-Waled Structures. 2021. V. 160. 107398.
6. *Гуереш Дж., Попов С.А., Рыжов Ю.А.* К определению формы и размеров законцовки крыла дозвукового пассажирского самолета // Известия вузов. Авиационная техника. 2018. № 3. С. 14.
7. *Бойцов Б.В., Гавва Л.М., Ендогур А.И., Фирсанов В.В.* Напряженно-деформированное состояние и устойчивость конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов из композиционных материалов с учетом технологии изготовления // Известия вузов. Авиационная техника. 2018. № 4. С. 20.
8. *Srinivasa C.V., Suresh Y.J., Kumar R.* Buckling Studies on Laminated Composite Skew Plates // International Journal of Computer Applications. 2012. V. 37. № 1. 0975.
9. *Karami C., Shahpari S.A., Malekzadeh P.* DQM analysis of skewed and trapezoidal laminated plates // Compos. Struct. 2003. V. 59. P. 393.
10. *Valvano S., Carrera E.* Multilayered plate elements with node-dependent kinematics for the analysis of composite and sandwich structures // Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering. 2017. V. 15. № 1. P. 1.
11. *Azikov N.S., Zinin A.V.* A Destruction Model for an Anisogrid Composite Structure // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2018. V. 47. № 5. P. 427.
12. *Kennedy J.B., Prabhakara M.K.* Buckling of Simply Supported Orthotropic Skew Plates // Aeronautical Quarterly. 1978. V. 29 (03). P. 161.
13. *Kumar R., Banerjee B., Ramachandra L.S.* Nonlinear stability and dynamics of composite skew plates under nonuniform loadings using differential quadrature method // Mechanics Research Communications. 2016. V. 73. P. 76.
14. *Dhurvey P.* Buckling analysis of composite laminated skew plate of variable thickness // Materials Today: Proceedings. 2017. V. 4 (9). P. 9732.
15. *Han S.-C., Lee S.-Y., Rus G.* Postbuckling analysis of laminated composite plates subjected to the combination of in-plane shear compression and lateral loading // Int. Journal of Solids and Structures. 2006. V. 43 (18–19). P. 5713.

16. *Babu C.S. Kant T.* Two shear deformable finite element models for buckling analysis of skew fiber-reinforced composite and sandwich panels // Compos. Struct. 1999. V. 46. P. 115.
17. *Kant T., Babu C.S.* Thermal buckling analysis of skew fibre-reinforced composite and sandwich plates using shear deformable finite element models // Compos. Struct. 2000. V. 49. P. 77.
18. *Daripa R., Singha M.K.* Influence of corner stresses on the stability characteristics of composite skew plates // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2009. V. 44 (2). P. 138.
19. *Debabrata D., Prasanta S., Kashinath S.* Large deflection analysis of skew plates under uniformly distributed load for mixed boundary conditions // International Journal of Engineering, Science and Technology. 2012. V. 2. № 4. P. 100.
20. *Brzhozovskii B.M., Azikov N.S., Martynov V.V., Zinina E.P.* Composite structure formation on the surfaces of geometrically complex products // Journal of Physics: Conf. Ser. 2019. (1281). 012006. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1281/1/012006

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 622.236.4

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ СКОРОСТЕЙ РОСТА ТРЕЩИН В ГОРНЫХ ПОРОДАХ ПРИ ВЗРЫВОРЕАКТИВНОМ СПОСОБЕ ИХ РАЗРУШЕНИЯ

В. О. Соловьёв[1,*], И. М. Шведов[2,1]

[1] *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*

[2] *Национальный исследовательский технологический университет МИСиС, Москва, Россия*

*****e-mail: soloviewvo@yandex.ru*

Поступила в редакцию 23.03.2021 г.
После доработки 06.06.2021 г.
Принята к публикации 24.06.2021 г.

Исследована модель газодинамической неустойчивости во взрывном канале при взрывореактивном способе разрушения горных пород. Определены скорости развития трещин и области затухания упругих колебаний в породном массиве. Предложен критический амплитудный порог упругих колебаний, превышение которого свидетельствует о начале роста трещин в сплошной среде.

Ключевые слова: горные породы, взрывореактивный способ, газодинамический процесс, рост трещин

DOI: 10.31857/S0235711921050114

В работе [1] приведены результаты моделирования динамики нестационарных газодинамических процессов при работе переносного взрывореактивного комплекса (ПВРК). Применение таких комплексов весьма актуально для решения целого ряда специфических задач в инженерно-строительной области и горном деле. Для повышения эффективности применения таких комплексов на грунтах с различными физико-механическими свойствами, а также на мерзлых и вечномерзлых горных породах, необходимы более детальные исследования особенностей развития процесса разрушения породного массива при формировании нестационарного газодинамического канала [2–4].

Ранее было установлено, что образование полости в горной породе взрывом сопровождается возникновением цуга нестационарных ударных волн, величины давления на фронтах которых, соизмеримы с давлением в струе продуктов детонации (ПД). Выполненные расчеты в постановке осесимметричной задачи показали, что одновременно образуются и зоны разряжения с давлением ниже атмосферного. Для моделирования таких процессов была использована система уравнений вида

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+v\dfrac{\partial\rho}{\partial x}+u\dfrac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial r}\right)=-\dfrac{\rho u N}{r},\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}+u\dfrac{\partial v}{\partial r}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r}=0,\\ \dfrac{\partial k}{\partial t}+v\dfrac{\partial k}{\partial x}+u\dfrac{\partial k}{\partial r}=0,\\ p=A\rho^k,\end{cases} \tag{1}$$

где p – давление ПД, Па; ρ – плотность ПД, кг/м^3; r и x – радиальное и осевое расстояние от центра канала, м; v и u – радиальная и осевая массовая скорость ПД, м/с; t – время, с; k – показатель изоэнтропы; N – число частиц среды в единице массы (для цилиндрической симметрии $N = 1$).

Для задания начальных газодинамических условий среды в канале взрывореактивного устройства (ВУ) ПВРК и полости создаваемой скважины использовались параметры невозмущенной стандартной атмосферы при $k = 1.4$. В модельных расчетах для ПД использовались следующие экспериментальные данные: $k = 3.05$; скорость детонации $D = 8730$ м/с; начальная плотность взрывчатых веществ (ВВ) $\rho_0 = 1780$ кг/м^3. Предполагалось, что процесс детонации каждой кассеты ВВ протекает мгновенно, и параметры на фронте детонационной волны определяются формулой [5]

$$P_{\text{н}}=\frac{\rho_0 D^2}{k+1},$$

где $P_{\text{н}}$ – давление ПД в точке Чепмена–Жуге, Па.

Решение системы уравнений (1) осуществлялось конечно-разностным методом второго порядка точности типа предиктор-корректор в плавающих сетках с использованием метода трехточечного сглаживания [6].

Моделирование показало, что при взаимодействии со стенками образующейся полости происходит многократное отражение ударной волны и возникновение пульсации величины давления в рабочей области. Аналогичный процесс наблюдается в струе сверхзвукового потока в заглушенной полости при работе резонатора Гартмана.

Образование резонансных зон возрастания давления в образующейся полости должно привести и к неравномерности развития процесса разрушения окружающего породного массива за счет различных скоростей роста трещин. Проверить такую гипотезу экспериментально затруднительно.

В настоящей статье выполнен анализ скоростей роста трещин в породном массиве при работе ВУ.

Ввиду очевидной сложности исследования развития всей динамики газодинамического процесса, для анализа и выполнения расчетов был выбран фрагмент вариации величин давления и чисел Маха из выполненного моделирования для центрального канала при выбросе шлама и ПД. Ранее было установлено, что динамика движения расширяющихся ПД в образующейся полости будет во многом определяться ее геометрической конфигурацией и газодинамическими параметрами ПД [1].

На рис. 1, 2 показаны полученные результаты распределения газодинамических параметров при выбросе продуктов разрушения горной породы и газа в вертикальном направлении относительно поверхности забоя образующейся полости [1].

Исследовалась обобщенная модель породного массива как сплошная среда, сложенная горными породами средней крепости без выраженной трещиноватости. Полагая, что такие физико-механические параметры массива, как объемная плотность,

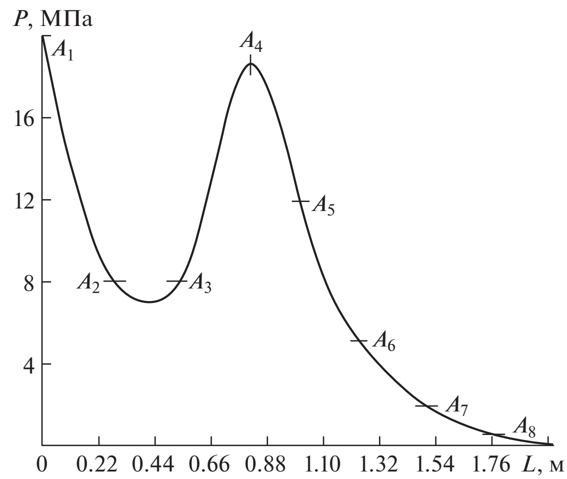


Рис. 1. Распределение величины давления в центральном канале.

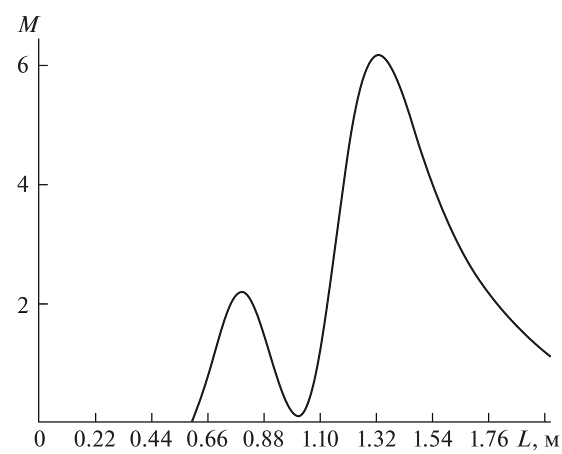


Рис. 2. Распределение чисел Маха в центральном канале.

модуль Юнга, коэффициент Пуассона, акустическая жесткость, постоянные и присущи для всей рассматриваемой области развития процесса разрушения.

Достаточно сложный процесс взрывного разрушения в моделях сплошной среды представляет распространение упругих волн сжатия со сверхзвуковой скоростью. В ближней зоне такая волна носит динамический характер с крутым передним фронтом и создает в среде сложнонапряженное состояние.

В моделировании развития процесса разрушения породного массива обычно рассматривалась задача взрыва ВВ в шпуре, скважине или накладного заряда, т.е. само местоположение ВВ было статически закреплено, и задача решалась в условиях цилиндрической или сферической симметрии с возникновением ударной волны, ее распространением со сверхзвуковой скоростью в глубь массива и дальнейшим затуханием скорости распространения [7–9].

При работе ВУ процесс разрушения массива приобретает еще более сложный характер за счет динамического заглубления заряда и образующейся газодинамической неустойчивости во взрывном канале. Исследование таких стохастических процессов математическим моделированием довольно непростая задача, возможно, ее упрощение путем выделения для конкретной фазы колебания граничных и начальных условий.

Для анализа скоростей роста трещин в породном массиве для фазы развития газодинамического процесса в условиях работы кассет на заглубление в породу, скорость роста трещин определялась как

$$v_T = \frac{dr}{dt}, \tag{2}$$

где r – расстояние от центрального канала, образующегося от работы ВУ, до рассматриваемой области в породном массиве, м; t – время начала разрушения рассматриваемой области после прихода волны, с.

Такое время можно представить, как суммарное время прихода волны сжатия – t_1 и время – t_2 развития разрушающих касательных напряжений

$$t = \sum_{i=1}^{2} t_i.$$

Шаг моделирования задавался с учетом возникновения различных зон ударной волны. Ближнюю зону – зону возникновения и распространения ударной волны с крутым передним фронтом и сверхзвуковой скоростью, обычно определяют в границах 3–7 радиусов заряда ВВ. Следующая зона – зона интенсивного разрушения, характерна для волн сжатия, где наблюдается выполаживание переднего фронта волны со скоростями распространения, учитывая гетерогенность массива, близкими к скоростям звука в некоторой усредненной по физико-механическим свойствам среде. Дальнейшее распространение волн носит сейсмический характер с постепенным затуханием.

Время прихода волны сжатия t_1 можно оценить по формуле

$$t_1 \approx \frac{r}{c_1},$$

где c_1 – скорость продольной волны в породном массиве

$$c_1 = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}. \tag{3}$$

Для ориентировочных расчетов принято значение $\nu = 0.25$ (коэффициент Пуассона), для модуля Юнга использовалось его динамическое значение – $E_Д$, тогда формула (3) приобретает вид

$$c_1 \approx 1.1\sqrt{\frac{E_д}{\rho}}. \tag{4}$$

В работе [10] приведено решение дифференциального уравнения вида (2) с учетом времени t_2

$$v_т = \frac{c_1}{D_т},$$

где $D_т$ – коэффициент, учитывающий скорость роста трещин в зависимости от параметров ВВ и физико-механических свойств породного массива. Для решения задачи в условиях цилиндрической симметрии

$$D_т = 1 + \frac{2(1+\nu)\sigma_р k_в}{\pi\rho_{вв}e_{вв}(k-1)} r_{пр},$$

где $\sigma_р$ – предел прочности на растяжение горной породы, Па; $k_в$ – коэффициент, учитывающий расширение ПД плоского заряда в боковые стороны; $e_{вв}$ – удельная энергия ВВ, Дж/кг; k – показатель адиабаты; $\rho_{вв}$ – плотность ВВ, кг/м^3; $r_{пр}$ – относительное расстояние до точки рассмотрения в массиве.

В расчете рассматривалось образование сетки трещин в известняке с усредненными параметрами: $\sigma_р$ = 10 МПа; $k_в$ = 1.25 (для пород средней крепости); $e_{вв}$ = 5700 кДж/кг [11]. После подстановки значений в формулу (4), значение коэффициента $D_т$ получим

$$D_т = 1 + 4.08\times 10^{-4} r_{пр}. \qquad (5)$$

В расчетах для нахождения значения $E_д$ использовали корреляционную зависимость между статическим и динамическим модулями упругости

$$E_{ст} = 0.35 E_д^{1.141}.$$

Величину массовой скорости определяли как

$$v_м = \frac{P_0}{\rho D_1}, \qquad (6)$$

где P_0 – давление в ударной волне, Па; D_1 – скорость ударной волны в массиве, м/с.

Для анализа скорости роста трещин рассматривался породный массив, сложенный песчаником с ρ = 2700 кг/м^3 и модулем упругости $E_{ст}$ = 65 ГПа. С поверхности в глубину распространяется упругая волна детонации. Были выбраны точки на графике изменения величины давления (рис. 1) и данные по глубине образующейся полости, которые использовались в дальнейших расчетах (табл. 1).

С учетом глубины образующейся полости L, выражение для коэффициента (5) имеет вид

$$D_т = 1 + 4.98\times 10^{-4}\times 12.5L.$$

Результаты произведенных расчетов представлены в виде графиков изменения газодинамических параметров взрывной волны и скоростей роста трещин в массиве на рис. 3, 4.

На рис. 3 показаны графики флуктуации скорости роста трещин в массиве в зависимости от газодинамической неустойчивости на развивающемся фронте взрывной волны при заглублении полости.

Наблюдается рост скоростей развития разрушения среды на участках возрастания пульсации давления. Полученные расчетные значения скоростей роста трещин не превосходили величины скоростей звука в данной среде. Возможно, более корректно будет говорить о скорости развития некоторых областей разрушения в массиве, чем о самой скорости роста трещины, учитывая акустические свойства среды.

Таблица 1. Исходные данные для расчета

P_0, МПа	20	8	8	17.5	12	5	2	0.5	0
L, м	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2

По отношению к числу Маха (рис. 4), для газодинамической струи в канале выброса, график изменения скоростей роста трещин в массиве более инерционен. Сверхзвуковая пульсация скоростей потока в полузамкнутом пространстве, приводит к резонансным эффектам в соответствующих областях, обусловленными геометрическими параметрами полости и параметрами детонации. Теоретические основы возникновения такого рода резонансных эффектов подробно рассмотрены в работе [12].

Была выполнена оценка амплитуды упругого смещения частиц в массиве в разных точках распределения величин давления (рис. 1) при развитии ударной волны в центральном канале.

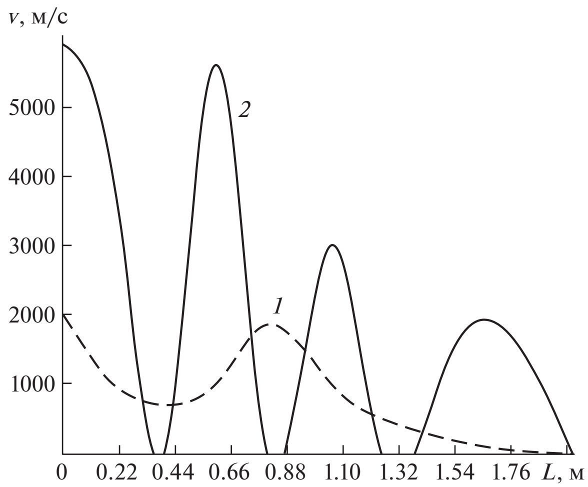


Рис. 3. Динамика скоростей роста трещин в зависимости от давления в ударной волне: *1* – изменение давления ПД; *2* – скорость роста трещин.

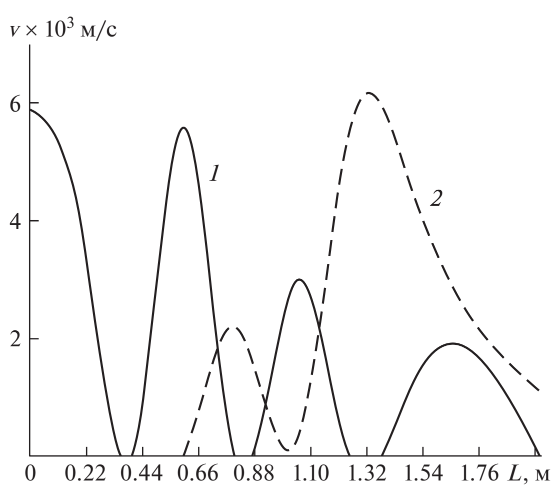


Рис. 4. Динамика роста трещин от пульсации чисел Маха на фронте ударной волны: *1* – скорость роста трещин; *2* – число Маха.

Таблица 2. Исходные данные для расчета амплитуд затухания упругой волны для различных точек волны детонации

P_0, МПа	20	8	8	17.5	12	5	2	0.5
Исследуемые точки	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_0, нм	139	54	54	118	81	34	14	3

Таблица 3. Результаты расчета амплитуд затухания упругих волн

Величина амплитуды, нм		Расстояние от центрального канала до точки в массиве r, м									
A_0	A_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
139	A_1	81.2	48.4	28.5	16.8	9.9	5.9	3.5	2.0	1.2	0.7
54	A_2	31.8	18.8	11.1	6.5	3.9	2.3	1.3	0.8	0.5	0.3
54	A_3	31.8	18.8	11.1	6.5	3.9	2.3	1.3	0.8	0.5	0.3
118	A_4	69.6	41.0	24.2	14.3	8.4	4.9	2.9	1.7	1.0	0.6
81	A_5	47.7	28.2	16.6	9.8	5.8	3.4	2.0	1.1	0.7	0.4
34	A_6	20.1	11.8	7.0	4.1	2.4	1.4	0.8	0.5	0.3	0.2
14	A_7	8.3	4.9	2.9	1.7	1.0	0.6	0.4	0.2	0.1	0.071
3	A_8	1.8	1.0	0.6	0.4	0.2	0.1	0.075	0.044	0.026	0.015

Из условия, что начальная скорость движения частиц породы на границе с газовой полостью определяется по формуле (6), является максимальной скоростью в данный момент времени $v_{\max} = A_0\omega$, где A_0 – величина начальной амплитуды волны, нм; ω – круговая частота, Гц. В результате получаем

$$A_0 = \frac{P_0}{2\pi f \rho D_{\text{т}}},$$

где P_0 – давление в точке, Па; f – линейная частота, Гц; ρ – плотность породы, кг/м^3.

Вычисленные значения начальных амплитуд для различных точек волны детонации приведены в табл. 2.

Величина амплитуд затухания вычислялась по формуле

$$A = A_0 e^{-\theta r},$$

где θ – коэффициент поглощения, для массива из песчаника $\theta = 0.264$, м$^{-1}$; r – расстояние от центрального канала до точки в породном массиве, м.

Была выполнена оценка амплитуды упругого смещения частиц в массиве (в разных точках распределения величин давления в ударной волне) при развитии ударной волны в центральном канале.

Расчет величины амплитуды упругого смещения частиц в массиве в зависимости от расстояния r от центрального канала ВУ приведены в табл. 3.

По полученным данным были построены графики зависимости величин амплитуд затухания упругих колебаний в породном массиве от расстояния до центрального канала ВУ для рассматриваемых точек ударной волны (рис. 5).

В рассматриваемой модели массива использовалась гипотеза сплошной среды, без учета степени его естественной трещиноватости и гетерогенности. Задача заключалась в получении качественного исследования концепции взрывного преобразования

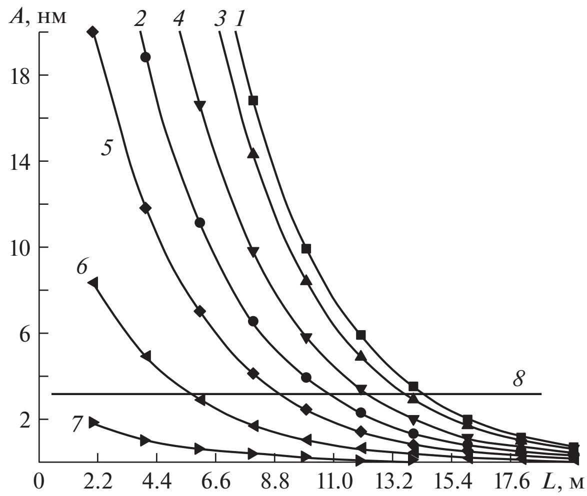


Рис. 5. Затухание амплитуд упругих колебаний для нестабильного фронта ударной волны в массиве: *1* – A_1; *2* – A_2, A_3; *3* – A_4; *4* – A_5; *5* – A_6; *6* – A_7; *7* – A_8; *8* – уровень критических амплитуд упругих колебаний смещения.

энергии [13], в данном случае, в работу хрупкого разрушения согласно теории Гриффитса. Условия для создания макроскопических разрывов сплошности (трещин), их дальнейшего роста, связаны с накоплением и ростом дислокационных дефектов кристаллической структуры. Проведенный анализ результатов исследований особенностей роста трещин в различных материалах, в том числе и горных породах [14–19], позволил, задаваясь величиной межатомных плоскостей для кристаллических структур, обозначить уровень минимальных амплитудных значений упругих колебаний, превышение которого свидетельствует о начале роста трещин в породном массиве, в данном случае, модельном.

Выполненный расчет скоростей роста трещин в массиве при взрывореактивном способе разрушения и проведенное ранее моделирование газодинамических процессов, приводит к следующим **выводам: 1.** Расчетные скорости роста трещин в массиве коррелируют со скоростями звука для данных пород, но не превосходят их по величине. **2.** Процесс разрушения массива относится к нелинейным процессам, соответствующий резонансному характеру пульсации давления в газодинамической струе ПД. **3.** Рост скоростей трещин в массиве совпадает с ростом давления в ударной волне, причем в пике давления волны, процесс роста трещин замирает. Спад величины давления приводит к возникновению критических напряжений и началу роста трещин. **4.** Флуктуационный характер изменения амплитуд скоростей роста трещин позволяет предположить о возникновении областей с различной интенсивностью разрушения. **5.** Предложен критический амплитудный порог упругих колебаний, составляющий 3 нм, превышение которого свидетельствует о начале роста трещин в сплошной среде. Для рассматриваемой модели при работе ВУ ПВРК предельная глубина развития локальных областей разрушения в массиве составляет порядка 13 м. Наиболее интенсивная область разрушения находится в радиусе 4–5 м от центрального канала.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Solov'ev V.O., Shvedov I.M.* Investigation of the gas-dynamic processes in the operation of an explosive-reactive complex // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. 012018.
2. *Дугарцыренов А.В., Заровняев Б.Н., Шубин Г.В., Николаев С.П.* Взрывное разрушение сложноструктурных мерзлых массивов с разнопрочными слоями // Взрывное дело. 2017. № 115/72. С. 71.
3. *Дугарцыренов А.В., Ким И.Т., Рахманов Р.А., Заровняев Б.Н., Шубин Г.В., Николаев С.П.* Оценка времени истечения продуктов детонации из скважины в зависимости от параметров зарядной полости // Взрывное дело. 2015. № 114/71. С. 136.
4. *Шевкун Е.Б., Лещинский А.В., Лысак Ю.А., Плотников А.Ю.* Взрывное рыхление пород на карьерах с большими замедлениями // ГИАБ (научно-технический журнал). 2020. № 10. С. 29.
5. Физика взрыва / Под ред. К.П. Станюковича. М.: Наука, 1975. 704 с.
6. *Кестенбойм Х.С., Росляков Г.С., Чудов Л.А.* Точечный взрыв. Методы расчета. М: МГУ, 1974. 190 с.
7. *Torbica V.* Lapcevic. Rock break by explosives. EIJST. 2014. V. 3. № 3. P. 96.
8. *Lie Changyou, Yang Jingxuan, Yu Bin.* Rock-breaking mechanism and experimental analysis of confined blasting of borehole surrounding rock // International journal of Mining Science and Technology. 2017. № 27. P. 795.
9. *Дугарцыренов А.В.* К механизму разрушения упругой среды (горной породы) при взрыве сосредоточенного и удлиненного зарядов // ГИАБ (научно-технический журнал). 2008. № 3. С. 12.
10. *Черниговский А.А.* Применение направленного взрыва в горном деле и строительстве. М.: Недра, 1976. 319 с.
11. *Кутузов Б.Н.* Методы ведения взрывных работ. М.: Горная книга, 2009. 471 с.
12. *Ганиев О.Р., Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е.* Резонансная макро- и микромеханика нефтяного пласта. Интенсификация добычи нефти и повышение нефтеотдачи. Наука и практика. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. 256 с.
13. *Solov'ev V.O., Shvedov I.M.* The concept of improving the efficiency of explosive energy converters // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. 012007.
14. *Yang X. and Wang S.* Meso-mechanism of damage and fracture on rock blasting // Explos Shock Waves. 2000. V. 20. № 3. P. 247.
15. *Ko T.Y., Kemeny J.* Subcritical crack growth in rocks under shear loading // Journal of geophysical research. 2011. V. 116. B01407. P. 1.
16. *Sivakumar G., Maij V.B.* Simulation of crack propagation in rocks by XFEM // Recent Advances in Rock Engineering (RARE 2016). 2016. P. 291.
17. *Ko T.Y., Lee S.S.* Characteristics of Crack Growth in Rock-Like Materials under Monotonic and Cyclic Loading Conditions // Appl. Sci. 2020. V. 10 (2). P. 719.
18. *Haiping Y., Feng W., Yan L., Hanbing B., Wen C. and Yixian W.* Time-dependent behavior of subcritical crack growth for rock plate: Experimental and numerical study // IJDSN. 2018. V. 14 (11).
19. *Chenglong H., Jun Y.* Dynamic crack propagation of granite subjected to biaxial confining pressure and blast loading // Latin American Journal of Solids and Structures. 2018. V. 15 (6), e45. P. 1.

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2021, № 5, с. 81–91

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.42

ОЦЕНКА ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ СЖАТОЙ КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЫ С НАЧАЛЬНЫМ РАССЛОЕНИЕМ

А. М. Покровский[1,*], А. С. Чермошенцева[1], Л. А. Бохоева[2]

[1] Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия

[2] Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ, Россия

**e-mail: pokrovsky@bmstu.ru*

Поступила в редакцию 13.07.2020 г.
Принята к публикации 26.04.2021 г.

Предложена методика расчета разрушающей силы для сжатой композитной пластины с начальным расслоением. В основу оценки трещиностойкости положен критерий разрушения J-интеграла. Для упрощения вычисления J-интеграла предложена оригинальная методика разложения исходной нагрузки на два состояния так, чтобы для первой системы нагрузок основной участок был не нагружен, а для второй системы кривизны участков были равны, и с точки зрения трещиностойкости эта система была неопасна. Для определения разрушающей силы получена система двух трансцендентных уравнений. Приведено сравнение результатов расчета разрушающей силы для слоистых пластин из углепластика и стеклопластика с различными начальными расслоениями, полученных по предлагаемой методике, с экспериментальными данными (погрешность вычисления разрушающей силы не превышает 10% по сравнению с экспериментальными данными).

Ключевые слова: композитная пластина, трещиностойкость, расслоение

DOI: 10.31857/S023571192104012X

В настоящее время все большее применение при изготовлении различных деталей и элементов конструкций находят обладающие высокой прочностью полимерные композитные материалы (ПКМ) [1]. Для повышения надежности элементов конструкций из таких материалов необходимо разрабатывать методы оценки их прочности, учитывающие наличие в деталях из ПКМ технологических дефектов, в первую очередь расслоений. Описанию методов анализа прочности и трещиностойкости композитов посвящены работы [2–19]. Однако в силу своей сложности задача не может считаться до конца решенной в настоящее время, особенно применительно к полимерным композитным материалам.

Подходы к определению разрушающих нагрузок для деталей из ПКМ возможно разделить на две группы. К первой группе относятся исследования, основанные на теории прочности, ко второй – на механике разрушения. В работах первой группы используются различные критерии прочности [3]: критерии максимальных напряжений, максимальных деформаций и другие. Согласно этим критериям разрушение наступает, когда одно из значений тензора напряжений или деформаций превышает предельное значение. В последнее время используются более сложные критерии прочности [4–13], в которых разрушение связующего элемента – матрицы и наполнителя волокон рассматриваются отдельно. Отдельно исследуется разрушение данных элементов при растяжении и сжатии.

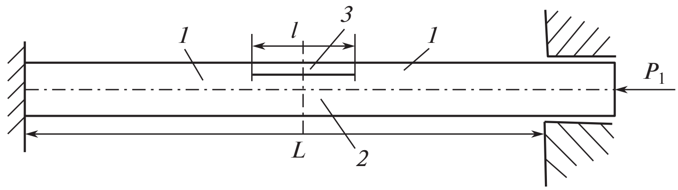


Рис. 1. Схема закрепления и нагружения композитной пластины с расслоением: *1* – основной участок; *2* – дефектный слой; *3* – зона отслоения.

В работах второй группы при оценке трещиностойкости деталей из композиционных материалов используются критерии разрушения: в первую очередь силовой критерий разрушения Ирвина [14], в основе которого лежит коэффициент интенсивности напряжений (КИН) и энергетический критерий разрушения Гриффитса, основанный на понятии интенсивность выделения упругой энергии в вершину трещины [14]. В работе [15], вводится понятие эквивалентного КИН, учитывающего существенную разнородность слоев. Для моделирования роста трещины нормального отрыва, расположенной на границе слоев в композите в условиях плоского напряженного состояния используется модифицированная модель Леонова–Панасюка–Дагдейла.

Согласно критерию Гриффитса вывод о разрушении делается после достижения интенсивности выделения упругой энергии в вершине трещины критического значения. В работах [16–18] приводятся результаты экспериментального определения критического значения выделения упругой энергии в вершину трещины при растрескивании по I моде $G_{\mathrm{I}c}$ и по II моде $G_{\mathrm{II}c}$. Исследование [19] направлено на определение $G_{\mathrm{III}c}$. В настоящей статье предложена методика вычисления сжимающей разрушающей нагрузки в пластине с расслоением на основе критерия разрушения J-интеграла [20].

Математическая модель пластины с тремя ортотропными участками. Рассмотрим анизотропную слоистую сжатую пластину с расслоением (рис. 1). Заменим эту анизотропную пластину пластиной состоящей из трех ортотропных участков: основного (*1*), дефектного (*2*) и зоны отслоения (*3*).

Интегральные упругие характеристики $E_x^{(i)}$, $\mu_{xy}^{(i)}$ и $\mu_{yx}^{(i)}$ для ортотропного материала на этих участках определим в зависимости от углов ориентации волокон в слоях и количества слоев на участках по упругим характеристикам однонаправленного m-го слоя: E_1, E_2 – модули Юнга поперек и вдоль направления армирования соответственно; μ_{12} – коэффициент Пуассона; G_{12} – модуль сдвига в плоскости слоя; φ – угол ориентации волокон слоя по формулам [21]

$$\lambda = \frac{1}{1-\mu_{12}\mu_{21}}; \quad \mu_{21} = \frac{E_2}{E_1}\mu_{12};$$

$$C_{11}^m = \lambda\left(E_1\cos^4\varphi + E_2\sin^4\varphi + \frac{1}{2}\mu_{21}E_1\sin^2 2\varphi\right) + G_{12}\sin^2 2\varphi;$$

$$C_{22}^m = \lambda\left(E_1\sin^4\varphi + E_2\cos^4\varphi + \frac{1}{2}\mu_{21}E_1\sin^2 2\varphi\right) + G_{12}\sin^2 2\varphi;$$

$$C_{12}^m = \lambda[(E_1+E_2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \mu_{21}E_1(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)] - G_{12}\sin^2 2\varphi;$$

$$A_{11}^{(i)} = \frac{1}{n_i}\sum_{m=1}^{n_i} C_{11}^m; \quad A_{12}^{(i)} = \frac{1}{n_i}\sum_{m=1}^{n_i} C_{12}^m; \quad A_{22}^{(i)} = \frac{1}{n_i}\sum_{m=1}^{n_i} C_{22}^m;$$

$$E_x^{(i)} = A_{11}^{(i)} - \frac{(A_{12}^{(i)})^2}{A_{22}^{(i)}}; \quad E_y^{(i)} = A_{22}^{(i)} - \frac{(A_{12}^{(i)})^2}{A_{11}^{(i)}}; \quad \mu_{xy}^{(i)} = \frac{A_{12}^{(i)}}{A_{22}^{(i)}}; \quad \mu_{yx}^{(i)} = \mu_{xy}^{(i)} \frac{E_y^{(i)}}{E_x^{(i)}},$$

где n_i — число слоев на i-м участке ($i = 1, 2, 3$ — номер участка).

Используя гипотезу Кирхгофа–Лява, дифференциальные уравнения прогиба W_i для различных участков (основного, дефектного, зоны отслоения), рассматриваемой пластины с расслоением, имеют вид [22]

$$D^{(i)} \frac{d^4 W_i}{dx_i^4} + P_i \frac{d^2 W_i}{dx_i^2} = 0, \tag{1}$$

где P_i — погонная осевая сила, отнесенная к ширине пластины; $D_{(i)} = \dfrac{E_x^{(i)} h_i^3}{12(1 - \mu_{xy}^{(i)}\mu_{yx}^{(i)})}$ — цилиндрическая жесткость при изгибе, i-го участка; h_i — толщина пакета слоев i-го участка; $h_1 = H$ — толщина основного первого участка; $h_2 = H - h$ — толщина второго участка; $h_3 = h$ — толщина третьего участка.

Решения уравнения (1) на участках после введения обозначений $k_i^2 = P_i/D_{(i)}$, $b = L/2 - l/2$, имеют вид

$$W_1 = \frac{\theta}{k_1 \sin[k_1 b]}\left(1 - \cos[k_1(L/2 - x)]\right), \quad (l/2 \le x \le L/2);$$

$$W_2 = \frac{\theta}{k_1 \sin(k_1 b)}\left\{\frac{k_1 \sin(k_1 b)}{k_2 \sin(k_2 l/2)}[\cos(k_2 x) - \cos(k_2 l/2)] + 1 - \cos(k_1 b)\right\},$$
$$(0 \le x \le l/2);$$

$$W_3 = \frac{\theta}{k_1 \sin(k_1 b)}\left\{\frac{k_1 \sin(k_1 b)}{k_3 \sin(k_3 l/2)}[\cos(k_3 x) - \cos(k_3 l/2)] + 1 - \cos(k_1 b)\right\},$$
$$(0 \le x \le l/2).$$

Полученные выражения удовлетворяют граничным условиям

$$W_1 = W_2 = W_3 = \Delta = \frac{\theta\{1 - \cos[k_1 b]\}}{k_1 \sin[k_1 b]}, \quad W_1' = W_2' = W_3' = -\theta \quad \text{при} \quad x = l/2;$$

$$W_1 = 0, \quad W_1' = 0 \quad \text{при} \quad x = L/2,$$

где θ, Δ — угол поворота и прогиб пластины в начале расслоения соответственно.

Запишем выражения для погонных, отнесенных к единице ширины пластины, изгибающих моментов в начале расслоения для трех участков соответственно

$$M_1 = D_{(1)} W_1''|_{x=l/2} = \frac{D_{(1)}\theta k_1}{\sin(k_1 b)}\cos(k_1 b) = D_{(1)}\theta k_1 \operatorname{ctg}(k_1 b),$$

$$M_2 = D_{(2)} W_2''|_{x=l/2} = -\frac{D_{(2)}\theta k_2}{\sin(k_2 l/2)}\cos(k_2 l/2) = -D_{(2)}\theta k_2 \operatorname{ctg}(k_2 l/2), \tag{2}$$

$$M_3 = D_{(3)} W_2''|_{x=l/2} = -\frac{D_{(3)}\theta k_3}{\sin(k_3 l/2)}\cos(k_3 l/2) = -D_{(3)}\theta k_3 \operatorname{ctg}(k_3 l/2).$$

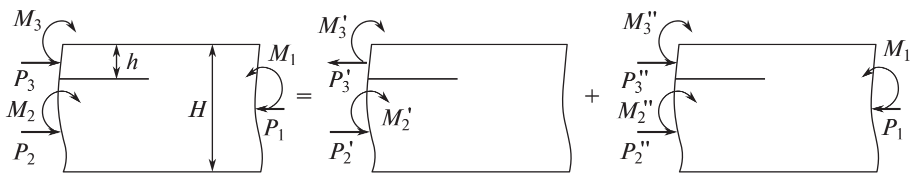


Рис. 2. Разложение нагрузки на два состояния.

Рассмотрим условия равновесия для осевых сил и изгибающих моментов в сечении на границе отслоения (рис. 2).

$$P_1 = P_2 + P_3; \quad M_1 - M_2 - M_3 - P_3 \frac{H-h}{2} + P_2 \frac{h}{2} = 0. \tag{3}$$

Вычисление инвариантного *J*-интеграла. Критерий разрушения J-интеграл можно применить [23] к оценке трещиностойкости многослойных композиционных пластин с дефектом типа расслоение. Получим выражение для критерия разрушения J-интеграла через изгибающие моменты и осевые силы, действующие в прилегающих к вершине расслоения участках (основного участка, дефектного слоя и самого дефекта – отслоения). Для решения задачи воспользуемся принципом суперпозиции, справедливым для линейно-упругого тела и позволяющим представить сложную систему нагрузок в виде суммы более простых. Представим осевые силы и изгибающие моменты, действующие в прилегающих к вершине расслоения на всех участках, как сумму двух составляющих (рис. 2)

$$M_i = M_i' + M_i''; \quad P_i = P_i' + P_i''. \tag{4}$$

Для упрощенного расчета J-интеграла разложим исходную систему нагрузок таким образом, чтобы погонные изгибающий момент и осевая сила на первом участке были равны нулю для первого состояния для того, чтобы основной участок был не нагружен. Таким образом, можно заключить, что в этом случае продольные силы на дефектном участке и расслоении, для первого состояния, будут равны и противоположно направлены. Кроме того, зададим моменты для второго состояния таким образом, чтобы кривизна на участках была одинаковой, следовательно, раскрытия трещиноподобного дефекта (расслоения) происходить не будет и для анализа трещиностойкости достаточно будет рассмотреть только первую систему нагрузок.

Запишем условие равенства кривизны на всех трех участках для второго состояния

$$\frac{M_1}{D_{(1)}} = \frac{M_2''}{D_{(2)}} = \frac{M_3''}{D_{(3)}}.$$

Расписывая выражения для цилиндрических жесткостей на участках, выразим M_2'' и M_3'' через M_1

$$M_2'' = \left(1-\bar{h}\right)^3 \frac{E_x^{(2)}\left(1-\mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)}\right)}{E_x^{(1)}\left(1-\mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)}\right)} M_1, \quad M_3'' = \left(\bar{h}\right)^3 \frac{E_x^{(3)}\left(1-\mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)}\right)}{E_x^{(1)}\left(1-\mu_{xy}^{(3)}\mu_{yx}^{(3)}\right)} M_1,$$

где $\bar{h} = h/H$ – относительная толщина расслоения.

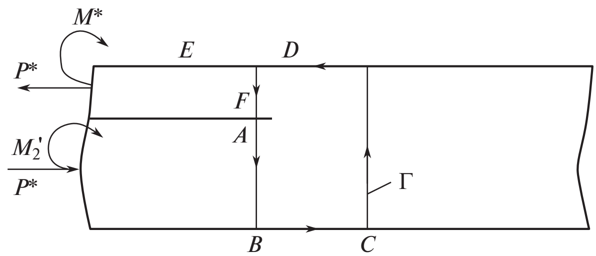


Рис. 3. Контур интегрирования Г для вычисления J-интеграла.

Определим осевую силу на третьем участке второго состояния из уравнения моментов относительно точки приложения осевой силы на втором участке

$$P_3'' = \frac{2M_1}{H}\left(1-\left(\bar{h}\right)^3 \frac{E_x^{(3)}\left(1-\mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)}\right)}{E_x^{(1)}\left(1-\mu_{xy}^{(3)}\mu_{yx}^{(3)}\right)} - \left(1-\bar{h}\right)^3 \frac{E_x^{(2)}\left(1-\mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)}\right)}{E_x^{(1)}\left(1-\mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)}\right)}\right) + P_1\bar{h}.$$

Погонную осевую силу второго состояния на втором участке определим из уравнения равновесия для сил

$$P_2'' = P_1 - P_3'' = P_1\left(1-\bar{h}\right) -$$
$$-\frac{2M_1}{H}\left(1-\left(\bar{h}\right)^3 \frac{E_x^{(3)}\left(1-\mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)}\right)}{E_x^{(1)}\left(1-\mu_{xy}^{(3)}\mu_{yx}^{(3)}\right)} - \left(1-\bar{h}\right)^3 \frac{E_x^{(2)}\left(1-\mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)}\right)}{E_x^{(1)}\left(1-\mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)}\right)}\right).$$

Теперь вычислим погонные изгибающие моменты для первого состояния

$$\begin{aligned} M_2' &= M_2 - M_2'' = M_2 - \left(1-\bar{h}\right)^3 \frac{E_x^{(2)}\left(1-\mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)}\right)}{E_x^{(1)}\left(1-\mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)}\right)} M_1, \\ M_3' &= M_3 - M_3'' = M_3 - \left(\bar{h}\right)^3 \frac{E_x^{(3)}\left(1-\mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)}\right)}{E_x^{(1)}\left(1-\mu_{xy}^{(3)}\mu_{yx}^{(3)}\right)} M_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Определим поперечные силы для первого состояния из уравнения равновесия для моментов

$$\begin{aligned} P_2' &= P_3' = \frac{2}{H}(M_2' + M_3') = \\ &= \frac{2M_1}{H}\left(1-\left(1-\bar{h}\right)^3 \frac{E_x^{(2)}\left(1-\mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)}\right)}{E_x^{(1)}\left(1-\mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)}\right)} - \left(\bar{h}\right)^3 \frac{E_x^{(3)}\left(1-\mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)}\right)}{E_x^{(1)}\left(1-\mu_{xy}^{(3)}\mu_{yx}^{(3)}\right)_1}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Только первая система нагрузок влияет на трещиностойкость, поэтому J-интеграл определим для этого состояния (рис. 3).

На рис. 3 введены обозначения

$$P^* = P_2' = P_3'; \quad M^* = M_3'. \tag{7}$$

Из уравнения равновесия определим момент на втором участке

$$M_2' = P^* H/2 - M^*. \tag{8}$$

Выражение для J-интеграла запишем в принятой системе координат [23]

$$J = \int_{\Gamma}\left(W dz - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds\right), \tag{9}$$

где W — упругий потенциал (удельная потенциальная энергия деформации); T_i, u_i — компоненты вектора поверхностной силы и полного перемещения на направленном против часовой стрелки контуре интегрирования Г; ds — малый элемент этого контура интегрирования.

Примем направленный против часовой стрелки контур $ABCDEF$ в качестве контура интегрирования Г (рис. 3). Начинается контур от верхней точки дефектного слоя точки A. Контур пересекает дефектный слой поперек (AB) и проходит по нижней поверхности пластины (BC). Пересекая основную часть (CD), контур следует по верхней поверхности пластины (DE) и поперек отслоения (EF) приходит в его нижнею точку F. На поверхностях пластины напряжения равны нулю, следовательно упругий потенциал и поверхностная сила также равны нулю, поэтому очевидно, что на участках BC и DE J-интеграл будет равняться нулю. Основная часть пластины ненагружена (рис. 2), поэтому J-интеграл на участке CD также равен нулю. Итак, выражение J-интеграла для выбранного контура интегрирования будет складываться из интегралов на участке AB и EF. Известно, что контур интегрирования J-интеграла может быть произвольным, как бесконечно малым, так и совпадать с границами тела [23]. В связи с этим участки контура AB и EF проведем для удобства расчета на бесконечно малом расстоянии от границы расслоения (вершины трещины), с тем, чтобы при вычислении J-интеграла на этих участках подставлять силы и моменты для $x = l/2$.

Для пластины единичной ширины в условиях плоского деформированного состояния выражение для J-интеграла (9) в случае ортотропного на участках материала будет иметь вид

$$J = \frac{1-\mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)}}{2E_x^{(2)}}\int_{-(H-h)/2}^{(H-h)/2}(\sigma_x^{(2)})^2 dz + \frac{1-\mu_{xy}^{(3)}\mu_{yx}^{(3)}}{2E_x^{(3)}}\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x^{(3)})^2 dz, \tag{10}$$

где $\sigma_x^{(2)}$ и $\sigma_x^{(3)}$ — нормальные напряжения на участке 2 и 3, можно определить по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(2)} &= -P^*/(H-h) - 12M_2'z/(H-h)^3 = \\ &= -P^*/(H-h) - 12(P^*H/2 - M^*)z/(H-h)^3.\end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя значения нормальных напряжений по формулам (11) в выражение для J-интеграла (10), получим

$$J_1 = \frac{1-\mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)}}{2E_x^{(2)}}\int_{-(H-h)/2}^{(H-h)/2}\left(\frac{P^*}{H-h}+\frac{12M_2'z}{(H-h)^3}\right)^2 dz + \frac{1-\mu_{xy}^{(3)}\mu_{yx}^{(3)}}{2E_x^{(3)}}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{P^*}{h}-\frac{12M^*z}{h^3}\right)^2 dz.$$

Подстановка M_2' по формуле (8) и интегрирование последнего выражения приводит к уравнению

$$\begin{aligned}J_1 = \frac{1}{2H^3}\Bigg\{&\frac{1-\mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)}}{E_x^{(2)}}\left(\frac{(HP^*)^2}{1-\bar{h}}+\frac{12\left(P^*H/2-M^*\right)^2}{\left(1-\bar{h}\right)^3}\right)+ \\ &+\frac{1-\mu_{xy}^{(3)}\mu_{yx}^{(3)}}{E_x^{(3)}}\left(\frac{(HP^*)^2}{\bar{h}}+\frac{12\left(M^*\right)^2}{\bar{h}^3}\right)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{12}$$

Учитывая (6), (7) и подставляя M_1 и M_3 по формулам (2) в (4) и (5), получим

$$P^* = \frac{2D_{(1)}\theta k_1 \operatorname{ctg}(k_1 b)}{H}\left(1 - \left(1 - \overline{h}\right)^3 \frac{E_x^{(2)}\left(1 - \mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)}\right)}{E_x^{(1)}\left(1 - \mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)}\right)} - \left(\overline{h}\right)^3 \frac{E_x^{(3)}\left(1 - \mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)}\right)}{E_x^{(1)}\left(1 - \mu_{xy}^{(3)}\mu_{yx}^{(3)}\right)}\right),$$
$$M^* = -D_{(3)}\theta k_3 \operatorname{ctg}(k_3 l/2) - \left(\overline{h}\right)^3 \frac{E_x^{(3)}\left(1 - \mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)}\right)}{E_x^{(1)}\left(1 - \mu_{xy}^{(3)}\mu_{yx}^{(3)}\right)} D_{(1)}\theta k_1 \operatorname{ctg}(k_1 b). \tag{13}$$

Выражая нормальные силы по формуле $P_i = D^{(i)}k_i^2$ в уравнении равновесия для сил (3), придем к выражению

$$D_{(1)}k_1^2 = D_{(2)}k_2^2 + D_{(3)}k_3^2. \tag{14}$$

Проводя такую же подстановку в уравнении равновесия для моментов (3), и подставляя изгибающие моменты по формулам (2), получим

$$D_{(1)}\theta k_1 \operatorname{ctg}(k_1 b) + D_{(2)}\theta k_2 \operatorname{ctg}(k_2 l/2) + D_{(3)}\theta k_3 \operatorname{ctg}(k_3 l/2) -$$
$$- \frac{1}{2} D_{(3)}k_3^2(H - h) + \frac{1}{2} D_{(2)}k_2^2 h = 0. \tag{15}$$

Записывая условие совместности сближения торцов пластины в начале отслоения, придем к уравнению

$$\left(1 - \mu_{xy}^{(3)}\mu_{yx}^{(3)}\right)\frac{D^{(3)}k_3^2 l}{E_x^{(3)}h} - \left(1 - \mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)}\right)\frac{D^{(2)}k_2^2 l}{E_x^{(2)}(H - h)} = -\theta H. \tag{16}$$

Выражая θ из (15) и (16), и приравнивая полученные выражения, получим

$$\left(1 - \mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)}\right)\frac{D^{(2)}k_2^2 l}{E_x^{(2)}(H - h)H} - \left(1 - \mu_{xy}^{(3)}\mu_{yx}^{(3)}\right)\frac{D^{(3)}k_3^2 l}{E_x^{(3)}hH} =$$
$$= \frac{D^{(3)}k_3^2(H - h) - D^{(2)}k_2^2 h}{2\left(D^{(1)}k_1 \operatorname{ctg}(k_1 b) + D^{(2)}k_2 \operatorname{ctg}(k_2 l/2) + D^{(3)}k_3 \operatorname{ctg}(k_3 l/2)\right)}. \tag{17}$$

Подставляя в формулы (13) угол θ, выраженный из формулы (16), придем к следующим зависимостям

$$P^* = \frac{2D^{(1)}k_1 \operatorname{ctg}(k_1 b)}{H}\left(1 - \left(1 - \overline{h}\right)^3 \frac{E_x^{(2)}\left(1 - \mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)}\right)}{E_x^{(1)}\left(1 - \mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)}\right)} - \left(\overline{h}\right)^3 \frac{E_x^{(3)}\left(1 - \mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)}\right)}{E_x^{(1)}\left(1 - \mu_{xy}^{(3)}\mu_{yx}^{(3)}\right)}\right) \times$$
$$\times\left(\left(1 - \mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)}\right)\frac{D^{(2)}k_2^2 l}{E_x^{(2)}(H - h)H} - \left(1 - \mu_{xy}^{(3)}\mu_{yx}^{(3)}\right)\frac{D^{(3)}k_3^2 l}{E_x^{(3)}hH}\right),$$
$$M^* = -\left(D^{(3)}k_3 \operatorname{ctg}(k_3 l/2) + \left(\overline{h}\right)^3 \frac{E_x^{(3)}\left(1 - \mu_{xy}^{(1)}\mu_{yx}^{(1)}\right)}{E_x^{(1)}\left(1 - \mu_{xy}^{(3)}\mu_{yx}^{(3)}\right)} D^{(1)}k_1 \cos(k_1 b)\right) \times$$
$$\times\left(\left(1 - \mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)}\right)\frac{D^{(2)}k_2^2 l}{E_x^{(2)}(H - h)H} - \left(1 - \mu_{xy}^{(3)}\mu_{yx}^{(3)}\right)\frac{D^{(3)}k_3^2 l}{E_x^{(3)}hH}\right). \tag{18}$$

Определение разрушающей силы. Воспользуемся критерием разрушения J-интеграла для определения силы, отнесенной к единице ширины пластины, при которой происходит разрушение [23]. Согласно критерию разрушения J-интеграла быстрый рост трещины, который предшествует полному долому, происходит при критическом значении J-интеграла (упругопластической вязкости разрушения). Для линейно-упругого тела J-интеграл равен интенсивности выделения упругой энергии в вершину трещины G [23]. Это справедливо и для критических значений, поэтому критерий разрушения можно переписать в следующем виде

$$J_{\mathrm{I}} \le G_{\mathrm{I}c}, \tag{19}$$

где $G_{\mathrm{I}c}$ – критическое значение интенсивности выделения упругой энергии в вершину трещины.

Тогда выражение для определения разрушающей силы сжатой слоистой пластины с трещиноподобным дефектом, на основании (12) и (19) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{2H^3}\left\{\frac{1-\mu_{xy}^{(2)}\mu_{yx}^{(2)}}{E_x^{(2)}}\left(\frac{\left(HP^*\right)^2}{1-\bar{h}}+\frac{12\left(P^*H/2-M^*\right)^2}{\left(1-\bar{h}\right)^3}\right)+\right.\\ \left.+\frac{1-\mu_{xy}^{(3)}\mu_{yx}^{(3)}}{E_x^{(3)}}\left(\frac{\left(HP^*\right)^2}{\bar{h}}+\frac{12\left(M^*\right)^2}{\bar{h}^3}\right)\right\}=G_{\mathrm{I}c}.\end{gathered} \tag{20}$$

Уравнение (20), после подстановки в него P^* и M^* по формулам (18), и уравнение (17), после выражения в них k_3 через k_1 и k_2 по формуле (14), приводят, относительно k_1, k_2, к системе двух уравнений. Наименьший корень данной системы уравнения $k_{1\min}$ приводит к значению погонной разрушающей силы

$$P_{\text{разр.}} = D^{(1)}k_{1\min}^2.$$

Для пересчета погонной разрушающей силы в сосредоточенную $F_{\text{разр}}$, необходимо умножить полученное значение $P_{\text{разр}}$ на ширину t рассматриваемой пластины.

Верификация расчетных данных. В работе [24] приведены результаты экспериментального определения разрушающей сжимающей нагрузки для слоистых пластин из углепластика и стеклопластика с начальными расслоениями. Для проведения экспериментальных исследований изготовлены композитные образцы из углеволокна (марка углепластика – ЛУ-П/0.2-А) и стекловолокна (марка стеклоткани – Т-25 (ВМ) ТУ 6-11-380-76). Материалы однонаправленны и имеют следующие упругие постоянные: стеклопластик – $E_1 = 5.4 \times 10^4$ МПа, $E_2 = 1.2 \times 10^4$ МПа, $\mu_{12} = 0.28$, $G_{12} = 5.4 \times 10^4$ МПа; углепластик – $E_1 = 18.0 \times 10^4$ МПа, $E_2 = 0.9 \times 10^4$ МПа, $\mu_{12} = 0.31$, $G_{12} = 0.515 \times 10^4$ МПа. На основе стекловолокна и углеродных волокон, сатинового плетения, препреги изготовлены с эпоксидным связующим. Техпроцесс изготовления образцов происходил следующим образом. На нагретую и смазанную антиадгезионным покрытием поверхность прессформы выкладывались слои раскроенного препрега. Далее прессформы помещались в гидравлический пресс и сжимались. Отслоения в образцах имитировались заложенной между слоями тонкой тефлоновой пленкой с выходом на кромку образца, которая после извлекалась. Для испытания композитных образцов использована гидравлическая машина ИР5057-50 мощностью 10 т. Образцы пластинчатого вида закреплялись в захватах испытательной машины и сжимались с постоянной скоростью перемещения траверсы. При этом вначале образцы теряли устойчивость, а затем разрушались, при этом фиксировалась разрушающая сжимающая сила. Опыты проводилось при температуре 23°C, относительная влажность воздуха составляла 50%. Рабочая длина образцов составляла 200 мм, ширина 20 мм. Длина дефекта варьировалась от 30 до 80 мм. Толщина одного слоя составляла 0.2 мм. Первый участок имел 10 слоев толщиной 2 мм с укладкой волокон $[0_5, 90_5]$, второй участок – 8 слоев толщиной 1.6 мм с укладкой волокон $[0_3, 90_5]$, третий участок – 2 слоя толщиной 0.4 мм с укладкой волокон $[0_2]$. Экспериментальные данные приведены в работе [25], согласно кото-

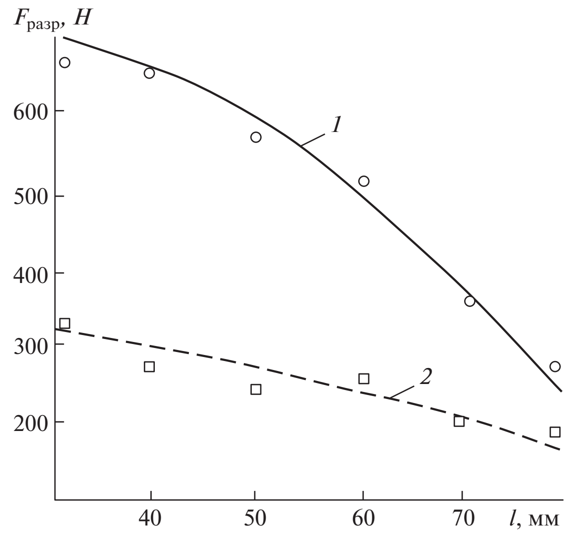


Рис. 4. Сравнение результатов расчета (линии) и эксперимента (значки): *1* – углепластик; *2* – стеклопластик.

рым критическое значение G_{Ic} интенсивности выделения упругой энергии в вершину трещины для рассматриваемого углепластика можно принять равным 894 Дж/м^2, для стеклопластика равным 627 Дж/м^2.

На рис. 4 представлено сравнение расчетных данных, полученных по представленной методике, с результатами экспериментального исследования [24]. Погрешность расчетных значений не превышает 10% (рис. 4).

Заключение. Впервые предложена методика расчета разрушающей силы для сжатой композитной пластины, имеющей три ортотропных участка с разными упругими характеристиками, основанная на критерии разрушения *J*-интеграла. Проведенная верификация позволяет сделать вывод о возможности использования предлагаемой численной методики, связанной с решением системы двух трансцендентных уравнений, для оценки трещиностокости сжатой слоистой пластины с начальным расслоением. Проведенное численное решение показало, что разрушающая сила для углепластика выше, чем для стеклопластика. Например, при начальном расслоении 30 мм более чем в 2 раза. По мере увеличения начальной длины расслоения это различие уменьшается и при длине 80 мм составляет около 40%. Характер зависимости разрушающей силы от длины начального расслоения для углепластика нелинейный, а для стеклопластика практически линейный. Причем для углепластика наблюдается более сильная зависимость разрушающей силы от размера начального расслоения. При увеличении начальной длины от 30 до 80 мм разрушающая сила для углепластика уменьшается в 2.92 раза, а для стеклопластика всего в 1.88 раза. Проведенная верификация позволяет сделать вывод о возможности использования разработанной методики для достоверного расчета разрушающей силы композитной пластины с начальным расслоением.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-18050/20.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каблов Е.Н.* Композиты: сегодня и завтра // Металлы Евразии. 2015. № 1. С. 36.
2. *Митрофанов О.В.* К вопросу об оценке закритического поведения тонких композитных пластин с несимметричной структурой при сжатии и неравномерном локальном нагреве // Естественные и технические науки. 2019. № 2 (128). С. 169.
3. *Гриневич Д.В., Яковлев Н.О., Славин А.В.* Критерии разрушения полимерных композиционных материалов (обзор) // Труды ВИАМ. 2019. № 7 (79). С. 92.
4. *Knops M.* Analysis of Failure in Fiber Polymer Laminates. Springer Berlin Heidelberg, 2008. 205 p. https://doi.org/0.1007/978-3-540-75765-8
5. *Puck A., Kopp J., Knops M.* Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // Composites Science and Technology. 2002. V. 62. P. 1633.
6. *Puck A., Kopp J., Knops M.* Guidelines for the determination of the parameters in Puck's action plane strength criterion // Composites Science and Technology. 2002. V. 62. P. 371.
7. *Davila C., Navin J.* Failure Criteria for FRP Laminates in Plane-Stress. NASA Langley Research Center, 2003. 28 p.
8. *Pinho S., Davila C., Camanho P. et al.* Failure models and criteria for FRP under in-plane or three-dimensional tress states including shear non-linearity: TM-2005-213530. NASA, 2005. 69 p.
9. *Pinho S.T., Robinson P., Iannucci L.* Fracture toughness of the tensile and compressive fibre failure modes in aminated composites // Composites Science and Technology. 2006. № 66 (13). P. 2069.
10. *Davila C., Jaunky N., Goswami S.* Failure Criteria for FRP Laminates in Plane Stress // 44thAI-AA/AME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. (Norfolk, Virginia, April 7–10, 2003). 2003. 11 p. https://doi.org/10.2514/6.2003-1991
11. *Cuntze R., Freund A.* The predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multidirectional laminates // Composites Science and Technology. 2004. V. 64. P. 343.
12. *Cuntze R.* Efficient 3D and 2D failure conditions for UD laminate and their application within the verification of the laminate design // Composites Science and Technology. 2006. V. 66. № 7–8. P. 1081.
13. *Cuntze R.* The predictive capability of failure mode concept-based strength conditions for laminates composed of UD laminas under static tri-axial stress states. Part A of the WWFE-II // Journal of Composite Materials. 2012. № 46 (19–20). P. 2563. https://doi.org/10.1177/0021998312449894
14. *Черепанов Г.П.* Механика разрушения. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. 872 с.
15. *Kurguzov V.D., Astapov N.S., Astapov I.S.* Fracture model for structured quasibrittle materials // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2014. V. 55. № 6. P. 1055.
16. *Финогенов Г.Н., Ерасов В.С.* Трещиностойкость полимерных композитов при межслойных отрыве и сдвиге // Авиационные материалы и технологии. 2003. № 3. С. 62.
17. *Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Крылов В.Д., Попов Ю.А.* Методы определения сдвиговых характеристик полимерных композиционных материалов // Авиационная промышленность. 2014. № 1. С. 20.
18. *Яковлев Н.О., Луценко А.Н., Артемьева И.В.* Методы определения межслоевой трещиностойкости слоистых материалов // Все материалы. Энциклопедический справочник. 2015. № 10. С. 57.
19. *Sham Prasad M.S., Venkatesha C.S., Jayaraju T.* Experimental Methods of Determining Fracture Toughness of Fiber Reinforced Polymer Composites under Various Loading Conditions // Journal of Minerals & Materials Characterization & Engineering. 2011. V. 10. № 13. P. 1263.

20. *Gallo P., Berto F.* Some considerations on the J-integral under elastic-plastic conditions for materials obeying a Ramberg-Osgood law // Physical Mesomechanics. 2015. V. 18. № 4. P. 298.
21. *Бохоева Л.А.* Особенности расчета на прочность элементов конструкций из изотропных и композиционных материалов с допустимыми дефектами. Улан-Удэ: Изд-во ВСТТУ, 2007. 191 с.
22. *Покровский А.М., Бохоева Л.А., Чермошенцева А.С.* Оценка устойчивости и процесса разрушения сжатой пластины из слоистых композиционных материалов с дефектами // Тезисы докладов Всероссийской научно-технической конференции: Механика и математическое моделирование в технике. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. С. 335.
23. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения: Основы механики разрушения. Изд. 3-е. М.: Издательство ЛКИ, 2008. 352 с.
24. *Chermoshentseva A.S., Pokrovskiy A.M., Bokhoeva K.A.* The behavior of delaminations in composite materials – experimental results // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2016. V. 116. Iss. 1. 012005.
https://doi.org/10.1088/1757-899X/116/1/012005
25. *Яковлев Н.О., Гуляев А.И., Лашов О.А.* Трещиностойкость слоистых полимерных композиционных материалов // Труды ВИАМ. 2016. № 4 (40). С. 12.

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 538.951: 53.097

СРАВНЕНИЕ ДЕФОРМАЦИОННОГО ПОВЕДЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМ ТОКОМ ГОМОГЕННЫХ И ГЕТЕРОСТРУКТУРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. В. Столяров

Институт машиноведения РАН им. А.А. Благонравова, Москва, Россия
e-mail: vlstol@mail.ru

Поступила в редакцию 05.02.2021 г.
Принята к публикации 24.06.2021 г.

Исследуется деформационное поведение гетероструктурного композиционного сверхпроводника при растяжении с введением мощных одиночных импульсов тока в сравнении с моноструктурным сплавом аналогичного химического состава.

Ключевые слова: титан-ниобиевый сплав, композит, импульсный ток, деформация, гетероструктура

DOI: 10.31857/S0235711921050126

В последнее десятилетие интерес к давно открытому электропластическому эффекту (ЭПЭ) не только не потерян, но даже увеличился [1–3]. Прежде всего, это связано с потенциальным практическим применением, позволяющим значительно уменьшить механические напряжения, пружинение и повысить деформируемость заготовок в процессах обработки штамповкой, прессованием, прокаткой и волочением [4]. Другой причиной является необходимость более полного понимания физических процессов, сопровождающих пластическую деформацию в присутствии тока. Некоторыми исследованиями установлено, что большое влияние на значимость ЭПЭ оказывают не только вид и режимы тока, но и природа деформируемого материала, и особенно его микроструктура, фазовый состав [5–7]. Предполагается, что особая роль может принадлежать композиционным материалам с различной проводимостью или даже отсутствием проводящих фаз. По-видимому, их объемное распределение в материале может оказывать определенное влияние на проявление ЭПЭ. К таким материалам относятся многожильные сверхпроводники, различные фазы которых могут обладать разной проводимостью, а также быть связными или нет. К настоящему времени отсутствуют данные об особенностях ЭПЭ в подобных материалах. Целью статьи является сравнение деформационного поведения гомогенного и гетерогенного сверхпроводников при воздействии импульсным током.

Материал и методика исследования. Исследования проводились на одножильном и многожильном композиционном прутках Cu–TiNb диаметром 6.1 мм, изготовленных по технологии ВНИИНМ им. А.А. Бочвара. Одножильный пруток из двухкомпонентного сплава Nb–47вес.%Ti изолирован снаружи тонким слоем ниобия и очехлован медной оболочкой. Конструкция многожильного сверхпроводника описана в [8] и представляет собой композит, состоящий из медной матрицы и сверхпроводящих волокон. Материалом волокон служит сплав Nb–47вес.%Ti. Готовые прутки были получены путем операций сборки композита, прессования, прокатки и волочения с промежуточными и финишным отжигами. Для формирования необходимой структуры на промежуточном размере прутки подвергались прокатке с истинной деформацией

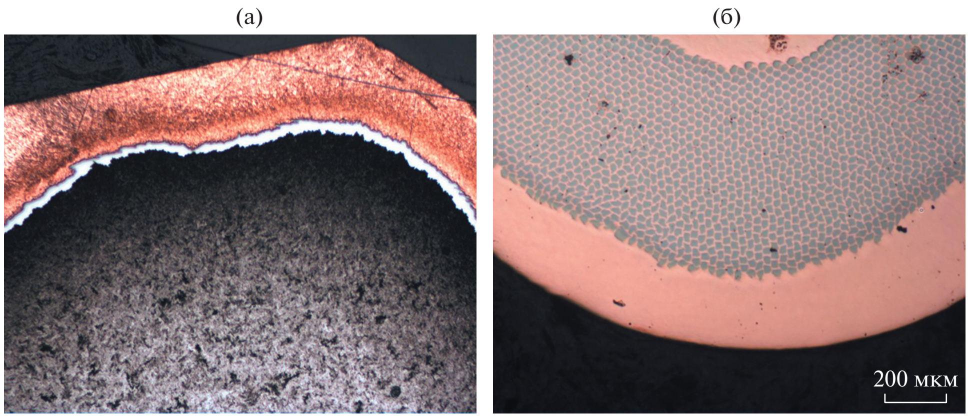


Рис. 1. Изображение макроструктуры в поперечном сечении одножильного (а) и многожильного (б) прутков в оптическом микроскопе при увеличении ×50.

$e = 1.5$ в ромбовидных ручьевых калибрах с импульсным током и последующему отжигу при 380°C один час. Деформационная схема прокатки одноволоконного прутка описана в [9]. На размере ∅3 мм выполнены структурные исследования методами оптической микроскопии (ОМ, Axiovert 40 MAT) и просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ, JEM-2100).

Испытания на растяжение проводились при комнатной температуре, скорости деформации 0.5×10^{-3} с$^{-1}$, с введением одиночных импульсов тока плотностью $j = 1600$ А/мм^2 и длительностью импульса $\tau = 500$ мкс. Образцы с размерами рабочей части ∅3 × 20 мм вырезали из прутка, при этом наружный слой меди полностью удалялся.

Результаты исследований и их обсуждение. Макро- и микроструктура. Исследование обоих типов сверхпроводников на *макроуровне* показало, что они принципиально отличаются степенью структурной однородности: гомогенная структура в одножильном образце и гетерогенная структура в композиционном многожильном образце (рис. 1). Последняя обусловлена наличием медной матрицы с объемным соотношением медь/сверхпроводник равным 1.64 (рис. 1б).

Микроструктура поперечного сечения обоих типов прутков, показана на рис. 2.

В одножильном проводнике хорошо видна (рис. 2а) однородная на микроуровне ультрамелкозернистая (размер зерен/субзерен 100–200 нм), практически однофазная структура, состоящая из темно-серых областей β-TiNb (ОЦК) твердого раствора. Вид электронограммы соответствует структуре, являющейся промежуточной между крупнозернистой и нанозеренной. Частицы второй фазы, присутствующие в исходном прутке, отсутствуют.

В отличие от одножильного образца в многожильном сверхпроводнике (рис. 2б) на микроуровне заметна неоднородность: на фоне более крупных зерен основной фазы β-TiNb размером 200 × 400 нм в темном поле видны светящиеся частицы фазы α-Ti, размером до 25 нм, преимущественно в теле зерен. Это подтверждается и появлением на электронограмме характерных колец, рефлексы на которых соответствуют α-Ti.

Растяжение с током. На рис. 3 приведены кривые растяжения с одноимпульсным током *одножильного* (рис. 3а) и *многожильного* (рис. 3б).

Общим для обоих типов сверхпроводника является одинаковый вид деформационного упрочнения и низкая пластичность, связанная с формированием ультрамелкозернистой микроструктуры. В каждом из проводников введение одиночных импуль-

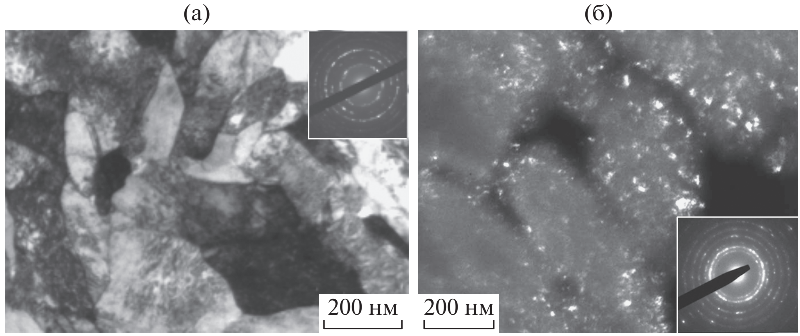


Рис. 2. Изображение микроструктуры и электронограмм в поперечном сечении одножильного – (а), светлое поле; и многожильного – (б), темное поле, прутков в просвечивающем электронном микроскопе.

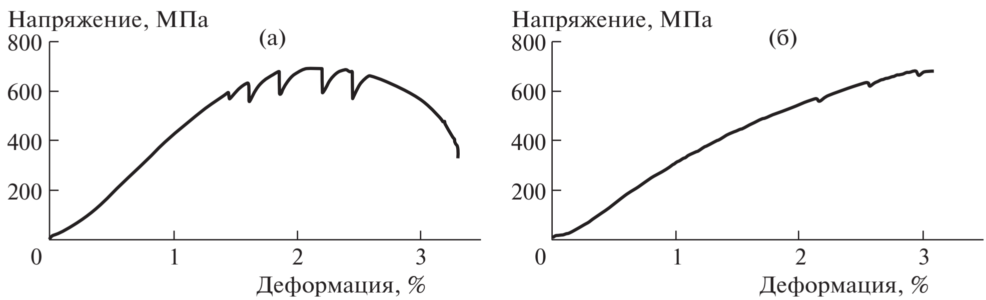


Рис. 3. Кривые напряжение–деформация при растяжении с одиночными импульсами тока одножильного – (а) и многожильного – (б) образца.

сов вызывает характерные для многих металлов скачки напряжения вниз, являющиеся основным признаком электропластического эффекта. Отличием в поведении является амплитуда скачка напряжения, которая для макро- и микрооднородной структуры одножильного проводника многократно выше, чем в многожильном проводнике, что свидетельствует о подавлении электропластического эффекта.

Обсуждение. Несмотря на одинаковые стадии и режимы деформационно-термической обработки, применение интенсивной прокатки с током для одножильного и многожильного сверхпроводника приводит к отличающимся по фазовому составу микроструктурам и, соответственно, механическому поведению при растяжении с током. Логично предположить, что основная причина наблюдающихся различий связана с композиционной природой многожильного образца, в котором тонкие сверхпроводящие волокна около 8 мкм в диаметре разделены такими же тонкими прослойками меди. Структурные изменения при Джоулевом нагреве в процессе прокатки с током в подобном композите из-за сильно отличающихся характеристик электро- и теплопроводности меди и TiNb сплава могут приводить к разным эффектам – растворению и выделению частиц α-Fe, соответственно для одножильного и многожильного образца. Расчеты показали, что при используемой плотности импульсного тока $j = 100$ А/мм^2 температура одножильного проводника в процессе прокатки может достигать 500°C и способствовать динамической рекристаллизации и процессам растворения/выделения. Действительно, повышение температуры ΔT по закону Джоуля–Ленца

$$\Delta T = Nj^2\rho_e\tau/C\rho_v, \tag{1}$$

где N – число импульсов тока; j – плотность тока, А/мм^2; ρ_e – удельное электросопротивление, Ом · м; τ – длительность импульса, с; C – теплоемкость, Дж/(кг · К); ρ_v – плотность, кг/м^3.

При выбранных параметрах: $N = 2000$; $j = 100$ А/мм^2; $\rho_e = 0.65 \times 10^{-6}$ Ом м; $\tau = 10^{-4}$ с; $C = 392$ Дж/(кг К); $\rho_v = 6535$ кг/м^3, $\Delta T = 500$°C. В соответствие с диаграммой состояния Ti–Nb эта температура выше температуры выделения частиц (350–400°C) и близка к температуре рекристаллизации в данном сплаве [10]. Для многожильного сверхпроводника из-за наличия контакта с медью повышение температуры будет заметно меньше.

Растяжение с током показало, что одножильный сверхпроводник проявляет электропластический эффект (ЭПЭ) (прыжки напряжения вниз), что согласуется с полученными ранее результатами в других титановых сплавах [7]. В отличие от одножильного образца в многожильном сверхпроводнике амплитуда прыжков вниз настолько мала, что при использованных режимах тока практически не наблюдается. Возможно, этот факт связан с масштабным фактором, т.е. с малым диаметром жил (около 10 мкм) и их большим количеством. В этом случае происходит мгновенная диссипация вводимой тепловой энергии в окружающую хорошо проводящую медную матрицу, объемная доля которой в 1.6 раза превышает долю волокон. Одним из направлений потенциального использования полученных результатов может быть модернизация традиционной технологии получения сверхпроводниковых проводов с заменой на финишных этапах обычной прокатки (волочения) и термического отжига на прокатку с током и электроимпульсную обработку. Это позволит сократить число операций и трудоемкость получения композиционных сверхпроводников.

Выводы. Введение одиночных импульсов тока при растяжении образца одножильного и многожильного композиционного сверхпроводника сопровождается отличительными особенностями в деформационном поведении и проявлении электропластического эффекта. В одножильном проводнике амплитуда скачков напряжения, связанных с импульсом тока, многократно выше амплитуды аналогичных скачков напряжения в многожильном проводнике. Анализ данных свидетельствует, что подавление электропластического эффекта в многожильном проводнике связано с влиянием структурной неоднородности в распределении микроволокон и выделением дисперсных частиц сверхпроводящей фазы.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Автор выражает благодарность к.т.н. Фроловой за помощь в проведении структурных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Park H.G., Kang B.S., Kim J.* Numerical Modeling and Experimental Verificationfor High-Speed Forming of Al5052 with Single Current Pulse // Metals. 2019. V. 9. P. 1311.
2. *Демлер О., Герштейн Г., Далингер А., Нюрнбергер Ф., Епишин А., Молодов Д.А.* Влияние импульсов электрического тока на деформационное поведение монокристаллов никелевого жаропрочного сплава cmsx-4 и подвижность малоугловой границы зерен в бикристаллах алюминия // Известия РАН. Серия физическая. 2018. № 82. (9). С. 1189.
3. *Lv H., Zhou R., Li L., Ni H., Zhu J., Feng T.* Effect of Electric Current Pulse on Microstructure and Corrosion Resistance of Hypereutectic High Chromium Cast Iron // Materials. 2018. V. 11. P. 2220.

4. *Nguyen-Tran H., Oh H., Hong S., Han H.N., Cao J., Ahn S., Chun D.* A review of electrically-assisted manufacturing // International Journal of Precision Engineering and Manufacturing-Green Technology. 2005. V. 2 (4). P. 365.
5. *Gennari C., Pezzato L., Tarabotti G., Zambon A., Schino A.D., Calliari I.* Influence of Electropulsing Treatments on Mechanical Properties of UNS S32750 Duplex Stainless Steel // Materials. 2020. V. 13 (7). P. 1613.
6. *Ruszkiewicz B.J., Grimm T., Ragai I., Mears L., Roth J.T.* A Review of Electrically-Assisted Manufacturing with Emphasis on Modeling and Understanding of the Electroplastic Effect // Journal of Manufacturing Science and Engineering, Transactions of the ASME. 2017. V. 139 (11). P. 110801.
7. *Stolyarov V.V.* Electroplastic effect in nanocrystalline and amorphous alloys // Materials Science and Technology. 2015. V. 31 (13a). P. 1536.
8. *Lee P.J., Larbalestier D.C.* Niobium-Titanium Superconducting Wires: Nanostructures by Extrusion and Wire Drawing // Invited presentation at Interwire. 2001. P. 1.
9. *Потанина Л.В.* Исследование качества двойных NbTi и тройных NbTiTa сплавов и разработка сверхпроводников на их основе для различных технических применений. Автореф. канд. дисс. М.: ВНИИНМ, 2006. 175 с.
10. Диаграммы состояния двойных металлических систем / Под ред. Н.П. Лякишева. М.: Машиностроение, 2001. 872 с.

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2021, № 5, с. 97–107

НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАШИНОСТРОЕНИИ

УДК 621.891:656.53

СЕРПЕНТИНЫ – КАК ДОБАВКИ К МАСЛАМ: ЭФФЕКТИВНОСТЬ И МЕХАНИЗМ СМАЗОЧНОГО ДЕЙСТВИЯ

© 2021 г. А. Ю. Албагачиев[1], И. А. Буяновский[1,*], А. В. Дунаев[2], А. А. Гвоздев[3], В. Д. Самусенко[1]

[1] Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
[2] Федеральный научный агроинженерный центр ВИМ, Москва, Россия
[3] Ивановская государственная сельскохозяйственная академия имени Д.К. Беляева, Иваново, Россия
**e-mail: buyan37@mail.ru*

Поступила в редакцию 24.05.2021 г.
После доработки 07.06.2021 г.
Принята к публикации 24.06.2021 г.

Рассмотрены материалы об эффективности применения серпентинов в качестве противоизносных, антифрикционных, антикоррозионных, экологически безопасных ресурсовосстанавливающих добавок к смазочным материалам. Обсуждаются методы активации серпентинов для усиления их функционирования. Анализируются современные представления о механизме триботехнического действия серпентинов. На их базе предложено описание последовательности процессов, обеспечивающей эффективное трибологическое действие смазочных сред с минералами группы серпентина.

Ключевые слова: серпентин, геомодификатор трения, термическая активация, компенсация износа, сверхскользкость

DOI: 10.31857/S0235711921050035

По данным ООН до 30% вырабатываемой в мире энергии затрачивается на преодоление трения в механизмах. Это обусловливает значительный расход топлива и не возобновляемых энергетических ресурсов. Традиционным методом сокращения этих затрат является создание энерго- и ресурсосберегающих смазочных материалов, которые обеспечивают уменьшение потерь на трение и износ деталей за счет введения в их состав присадок различного назначения. Так дизельные масла включают 6–25%, трансмиссионные – 8–12% присадок, причем до 5–7% присадок повышают смазочную способность масел.

В режиме граничной смазки присадки обеспечивают улучшение противоизносных и антифрикционных свойств масел [1]. Значительная их часть представляет собой дорогие продукты. Зачастую они включают соединения серы, хлора, фосфора и их сочетания, отрицательно влияющие на окружающую среду при их производстве, хранении, применении, утилизации, вызывающие коррозию цветных металлов [2].

Одним из апробированных путей улучшения свойств масел и пластичных смазок является ввод в них противоизносных и антифрикционных добавок из высокодисперсных порошков минералов группы серпентина, слоистых гидросиликатов в основном магния, описываемых формулой $Mg_6(Si_4O_{10})(OH)_8$ [3, 4], где магний частично замещается алюминием, никелем, железом. Композиции порошков этих минералов, названных геомодификаторами трения (ГМТ), обеспечивают не только существенное повышение противоизносных и антифрикционных свойств смазочных композиций, превосходя традиционные присадки при существенно меньших концентрациях (0.05–0.40 мас. %), но и обеспечивают ремонтно-восстановительный эффект, являющийся их визитной карточкой [5, 6, 10, 13, 16], значительно улучшают экологичность смазочных материалов [5, 6], предотвращают коррозию цветных металлов [7], не изменяя действие присадок [4].

Так при введении в смазочное масло серпентинсодержащей добавки Форсан коэффициент трения уменьшается в 2.5 раза [8]. Противоизносные и антифрикционные свойства пластичной смазки "Политерм" повышаются одинаково, как при введении в нее дисульфида молибдена, так и композиции АРВК на основе серпентинита [9]. Но основным преимуществом смазочных композиций на основе ГМТ является их способность постепенно наращивать на поверхностях трения противоизносное ремонтно-восстановительное покрытие, продлевающее ресурс работы узлов трения в 1.5–3 раза [5, 10]. Именно эта способность ГМТ объясняет повышенное внимание к ним исследователей и производителей ГМТ [10–13]. Например, пробег отечественных легковых автомобилей до капитального ремонта ДВС, приработанных с ГМТ, достигал 550–870 тыс. км, при пробеге с обычными маслами лишь 80–120 тыс. км [10].

Но, несмотря на многочисленные исследования, влияние ГМТ на смазочную способность масел, механо-физико-химический механизм их триботехнического действия в полной мере еще не раскрыт, что затрудняет оптимизацию как материального состава ГМТ, так и технологий их применения для различных узлов трения [13]. Основные гипотезы механизма смазочного действия ГМТ приведены в работе [14], но новые исследования позволяют анализировать их действия более углубленно, как минимум, на уровне феноменологии трибологического процесса в серпентинсодержащих средах.

Целью настоящей статьи является представление результатов этого анализа, проведенного на базе последних исследований ГМТ и моделей процесса трения в смазываемых узлах трения машин и оборудования.

Особенности серпентиновых геомодификаторов трения. ***Серпентины.*** Обычно ГМТ на 70–80% состоят из высокодисперсных порошков минералов группы серпентина, включающих до 28 разновидностей, которые обеспечивают противоизносный, антифрикционный и ремонтно-восстановительный эффекты в узлах трения. По структуре и трибологическому поведению эти серпентины (ГМТ второго поколения) отличаются от твердых смазочных материалов, включая ГМТ первого поколения – графит, молибденит (MoS_2) [10, 13]. Измельченные графит или молибденит наносят на поверхности деталей тем или иным методом, или вводят в смазочный материал, так что эти твердые смазки, попадая в трибологический контакт, удерживаются на поверхностях трения только силами адгезии. ГМТ в смазочном материале в процессе трения сами создают автогенерируемые покрытия, компенсирующие износ поверхностей трения, обеспечивая порой столь низкое трение, что их действие относят к реализации ***эффекта сверхскользскости*** (superlubricity) [15].

Структурной единицей серпентинов (триоктаэдрических слоистых гидросиликатов) является сложная пластинчатая композиция толщиной 0.72 нм, в которой триоктаэдрическая бруситоподобная "сетка" $Mg[Mg_2O_2(OH)_4]^{6-}$ соединена с тетраэдрической силикатной "сеткой" $[Si_2O_5]^{2-}$ через общие вершины (рис. 1, [4]).

В структуре главной разновидности серпентинов чередуются магниевые $[Mg(OH)_2]$ с кремниевыми (Si_2O_5) слоями (рис. 1). Вследствие этого параллельные слои структуры слабо связаны между собой по вертикали, что обеспечивает незначительное сопротивление их сдвигу при трении сопряжений с ГМТ как в масле, так и без него [16].

Между бруситоподобной и силикатной "сетками" существует заметное размерное несоответствие. Так размер ячейки, занятой катионом Mg^{2+}, составляет 9.43 Å, а ячей-

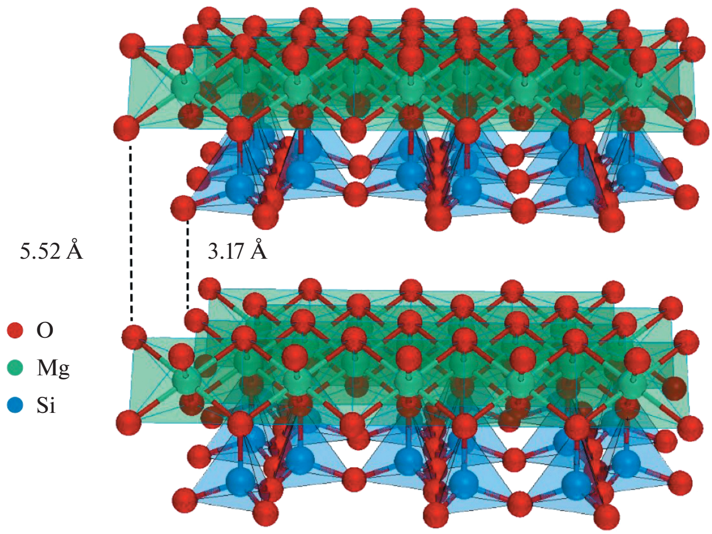


Рис. 1. Базовая структура серпентина (по данным [4]).

ки, занятой катионом Si^{4+} в кремниевой тетраэдрической "сетке", существенно меньше – 9.1 Å. Это несоответствие вызывает заметные напряжения, приводящие к деформациям этих слоев, образуя даже изогнутые слои в полиморфных разновидностях серпентина с одинаковым химсоставом, но с разной кривизной слоев: волокнистый хризотил, пластинчатый агломерированный антигорит и удлиненные минеральные частицы лизардита [4]. В лизардитах напряженность компенсируется не только за счет искажения геометрии "сеток", но и за счет частичного замещения Si и Mg на Al и Fe.

Состав серпентина в переводе на оксиды и воду составляет (по массе): 43% MgO, 44% SiO_2 и 12.1–12.9% H_2O. Конституционная вода выделяется при повышении температуры в зоне трения к 150–300°C, разрушая кристаллическую структуру. По другим данным хрупкая бруситоподобная "сетка" легко разрушается и при механическом воздействии, выделяя конституционную воду и ионы магния, затем принимающие участие в ионно-обменных реакциях [13]. Твердость серпентина 2.5–3.5 по шкале Мооса [16]. В группе минералов серпентина включены 28 разновидностей, но в их составе и сопутствующие минералы на основе Al, Ni, Fe, Ca и др., а также существенно более твердые вещества: магнитный и хромистый железняк, сульфиды меди, никеля и железа, реликты оливинов – например, $(MgFe)_2SiO_4$, имеющий твердость 6.5 по шкале Мооса, а менее качественные ГМТ-составы включают также микропримеси талька, кварца и других минералов [16, 17]. Отсюда свободные от примесей ГМТ не существуют.

Значительное влияние на вариацию трибологических свойств ГМТ оказывает вариация в них разновидностей серпентина: хризотила, антигорита и лизардита, т.к. они действуют по-разному, а состав ГМТ, приготовленного даже из одного куска руды серпентинита, не постоянен. То же относится и к содержанию примесей, так как состав ГМТ зависит от месторождения руды и может изменяться даже в малых ее объемах [18]. А изменение содержания даже одной из примесей может заметно сказаться на трибологических характеристиках ГМТ, что в работе [18] показано на примере вторичного магнетита Fe_3O_4 (твердость 5.6 по Моосу). Его зерна в 1–10 мкм из железа, не вошедшего в серпентин при серпентинизации железно-магниевых силикатов, могут распределяться в кристаллах или агрегатах серпентинитов.

В работе [19] исследованы трибологические характеристики минерального масла с ГМТ с различным содержанием магнетита (4 мас. % и менее). При уменьшении его содержания коэффициент трения снижался с 0.16 при 4 мас. % до 0.11 при ГМТ без магнетита. Однако, минимальный коэффициент трения – 0.10 был получен при содержании магнетита 2 мас. %. При этом поверхности трения эффективно выглаживались, было достаточно магнетита для образования “скелета” к затравке в образовании покрытия, представляющего трибополимер с высокой прочностью и с нарастающей толщиной для компенсации износа сопряжений.

Другие ингредиенты ГМТ также, но по-своему, оказывают заметное влияние на трибологию сопряжений, а управлять ей сложно, так как соотношение ингредиентов в ГМТ случайно. Это затрудняет интерпретацию результатов трибологических испытаний серпентинов разных месторождения и из разных руд одного месторождения. Для углубленного понимания механизма работы ГМТ возможно исследование его с синтезированным серпентином $Mg_6(Si_4O_{10})(OH)_8$. Авторы [20] синтезировали из него покрытие и получили эффекты, характерные для природных серпентинов: значительное снижение коэффициента трения и интенсивности изнашивания при оптимальной концентрации добавки, а также автогенерацию ремонтно-восстановительных покрытий.

Приготовление ГМТ начинается с дробления кусков серпентинита и размола его частиц на мельницах для получения порошка высокой дисперсности. Согласно [16] оптимальный размер фракций порошка ГМТ должен быть 5–10 мкм. Более мелкие частицы коагулируются, образуют конгломераты 100–120 мкм и маслофильтрами отфильтровываются. По Д.М. Телух [17] частицы ГМТ с начальными размерами 5–10 мкм измельчаются в смазываемом узле трения до 2 мкм, что, по его данным, соответствует оптимальной шероховатости и наибольшей износостойкости сопряжений. По данным [13] при исходных размерах частиц серпентинита 5–6 мкм их измельчение в сопряжениях в 2.5–3 раза приводит к повышению износостойкости сопряжений также в 2.5–3 раза. Но в [21] считается, что и нанодобавки ГМТ также оказывают достаточно эффективное действие.

Композиции на основе серпентинов. Композиции на основе серпентинов используют в различных смазочных материалах: в моторных и трансмиссионных маслах, в пластичных смазках независимо от наличия любых присадок. Серпентинсодержащие добавки вводят в смазочные материалы в малых концентрациях. Так в [10, 16] показано, что оптимальное содержание серпентина в моторных маслах составляет 0.05–0.40% (по массе), а в пластичных смазках – до 4.0%.

Наиболее известны такие композиции серпентинов в ГМТ как АРВК, СУПРОТЕК, Трибо, Форсан, ХАДО; других отечественных и зарубежных существовало на порядок больше [10]. Одни из них представляют собой суспензии высокодисперсного порошка серпентинов, другие (АРВК, ХАДО и др.) – это сочетания основного ресурсовосстанавливающего антифрикционного компонента с усиливающими его ингредиентами. Так трибосостав АРВК – это синергетическое сочетание высокодисперсного серпентина и трибополимеробразующей присадки ЭФ-357 [9]. В основном, состав этих дополнительных авторских ингредиентов не известен. Например, в [15] упоминают, что вместе с гидроксидом силиката магния в зону трения вводили “специальные катализаторы”.

Анализ трибологического поведения смазочных материалов с ГМТ. При исследовании трибологического поведения ГМТ следует иметь в виду, что реализация ими противоизносного, антифрикционного и ресурсовосстанавливающего эффекта – процесс многостадийный и длительный. Поэтому кратковременные лабораторные испытания ГМТ в ряде случаев оказываются малоинформативными. Некоторую информацию

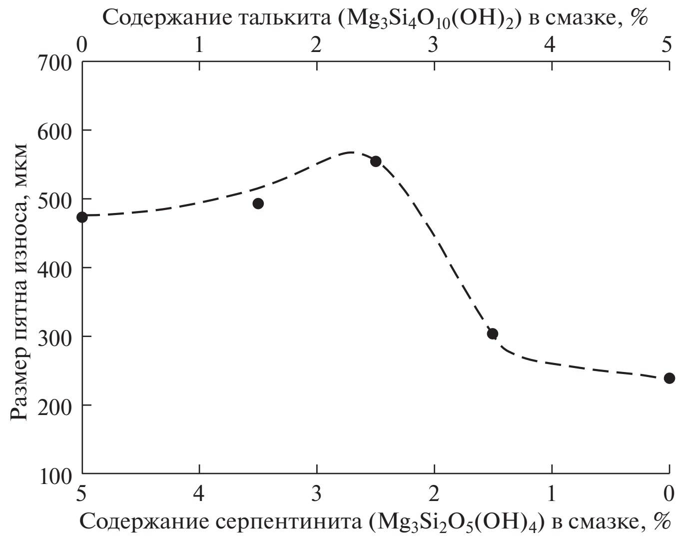


Рис. 2. Зависимость диаметра пятна износа от содержания “талькита” в смеси “талькит+серпентинит”, как добавки к смазке Литол-24 [24].

удается получить при исследовании поверхностей трения, длительно работавших в серпентинсодержащих средах [22]. Рассмотрим основные этапы образования трибопокрытия на стальных образцах из суспензий высокодисперсных порошков серпентинов.

1. **Начальным этапом** подготовки поверхностей трения к организации трибопокрытия является активация поверхностей трения [23]. Твердые составляющие ГМТ абразивно изнашивают тончайшие поверхностные слои деталей, могут шаржировать поверхность более мягкой детали, что приводит к повышению температуры в контактах к 150–300°C. Окончательное “суперфинишное” выглаживание поверхностей трения и их очистка осуществляется мягким абразивом из чешуек разрушившихся частиц ГМТ.

2. **Повышение при трении контактной температуры** вызывает разложение частиц серпентина с образованием более активных в трении веществ. Известны четыре типа реакций разложения серпентинов с выделением силиката магния, кварца, окиси магния, воды, кислорода. Основная реакция

$$Mg_6[Si_4O_{10}](OH)_8 = 3Mg_2SiO_4 + SiO_2 + 4H_2O.$$

В работе [24] рассмотрена разветвленная реакция

$$5Mg_3Si_2O_5(OH)_4 \to Mg_3Si_4O_{10}(OH)_2 + 6Mg_2SiO_4 + 9H_2O\uparrow,$$

где $Mg_3Si_2O_5(OH)_4$ – антигорит; $Mg_3Si_4O_{10}(OH)_2$ – “талькит”; Mg_2SiO_4 – форстерит; H_2O – вода.

Продукты всех реакций активируют, но по-разному обеспечивают образование ремонтно-восстановительного покрытия поверхностей трения.

Для испытания на ЧШМ по ГОСТ 9490-75 различных гидросиликатов как добавок к пластичной смазке Литол-24 был составлен ряд композиций серпентинов и “талькита”, причем суммарное их содержание составляло 5 мас. % смазывающей среды. Результаты испытаний различных пропорций этих смесей представлены на рис. 2 [25].

Как видно на левой части графика, диаметр пятна износа с увеличением доли “талькита” возрастает, доходит до максимума при 2.5% его содержания, а при даль-

Таблица 1. Амплитуды вертикальных виброперемещений подшипниковых опор четырехопорного дутьевого вентилятора ДВ26 (по данным [9])

Даты контроля	Виброперемещения, мкм, по подшипниковым опорам			
	1	*2*	*3*	*4*
26.07.2001	114	64	54	26
29.08.2001	57	47	51	28
23.05.2002	57	47	51	28
15.10.2003	40	27	18	17

нейшем повышении его содержания резко снижается и при добавке, целиком состоящей из “талькита”, диаметр пятна износа почти вдвое меньше, чем при добавке, целиком состоящей из серпентина. Иначе говоря, “талькит” обеспечивает трибосопряжению более высокие триботехнические свойства, чем серпентин.

3. **Повышенное выделение воды** с отработавшими газами при приработке ДВС с ГМТ свидетельствует о том, что начальные физико-химические процессы, обеспечивающие адаптацию элементов триады “сталь–серпентин–сталь” завершены и далее могут рассматриваться как “сталь–покрытие–сталь”. Но для реализации такой адаптации необходимо, чтобы была предварительно обеспечена термическая и нагрузочная [3, 11, 17] активация трибопроцессов.

В [25] на ЧШМ с моторным маслом API CF/SL SAE 5W-30 и с добавкой 0.01% (объемн.) и более, измельченной до 9 мкм и принятой как аналог серпентина, показано, что со свежими шарами наблюдалось некоторое повышение коэффициента трения по сравнению с испытаниями без добавки. При испытании той же смазочной композиции с предварительно изношенными в других испытаниях шарами было значительное – на 47% снижение коэффициента трения [25]. Анализ зависимости коэффициента трения от длительности испытаний показал, что при трении свежих шаров наблюдался постепенный переход от смешанного режима смазки в граничный, а с изношенными шарами – наоборот переход от граничного режима к смешанной смазке.

После испытаний смеси силиката магния с глиноземом на поверхностях ранее изношенных шаров обнаружены железо, кремний и кислород, что, по данным [25], свидетельствовало об образовании ферросиликатного слоя. Аналогичное образование в серпентинсодержащей среде покрытий только на ранее изношенных поверхностях имеет место и с пластичной смазкой.

Авторы работы [9] подтвердили образование в серпентинсодержащей среде покрытий, компенсирующих износ сопряжений. Испытания проводили для четырехопорного вала дутьевого вентилятора ДВ26 Московской ТЭЦ 25 (табл. 1). Здесь вентилятор консольно установлен на валу у опоры *1* и ее подшипник был наиболее изношен. Все подшипники смазывали смазкой Литол-24. Об уровне износа опор вала судили по амплитуде вертикального виброперемещения элементов подшипниковых узлов. Но 26.07.2001 г. во все четыре подшипника вала был заложен Литол-24 с 5 мас. % ресурсовосстанавливающей добавки АРВК. Выравнивание величин виброперемещений на всех четырех подшипниках благодаря образованию в них трибопокрытий контролировали до 15.10.2003. Разница между виброперемещениями вала в опорах постепенно уменьшалась (табл. 1), так как интенсивнее снижались виброперемещения в наиболее изношенных опорах, особенно – в первой, в то время как на менее изношенных подшипниках виброперемещения изменялись меньше.

Это можно объяснить образованием в наиболее нагруженных опорах более толстых покрытий, чем в менее нагруженных опорах.

Автогенерируемые покрытия, образующиеся на изношенных поверхностях трения, в пределе могут полностью компенсировать износ, их толщина может составлять от 5 до 15 и более мкм. Расчеты показали, что объем трибопокрытий может в 25 раз превышать объем введенного в масла порошка ГМТ [10]. Из этого следует, что в образовании защитного покрытия принимают участие и другие вещества трибосреды: например, компоненты смазок, окружающей среды и продукты изнашивания.

Более удивительное свойство ГМТ-покрытий заключается в том, что они обеспечивают работу сопряжений трения без масла, что подтверждено неоднократными испытаниями ГМТ-приработанных ДВС многих легковых автомобилей, тяговых редукторов трамваев и тепловозов, разных редукторов промышленного оборудования. Так известны полносменная работа без масла дизеля автосамосвала в Китае, работа без масла ГМТ-приработанного ДВС ЗИЛ-130 и многие другие примеры безаварийной работы автотранспорта без масла, демонстративно слитого или потерянного в ДТП [10, 14], что объясняется высокой маслоемкостью ГМТ-покрытий.

Механизмы смазочного действия: состав, строение и свойства покрытий. Чтобы выяснить механизм триботехнического действия серпентинсодержащих смазок необходимо, прежде всего, оценить состав и строение покрытий, образующихся в термически и нагрузочно активируемой трибосистеме “металл–серпентинсодержащее масло–металл” при переходе в трибосистему “металл–покрытие–масло–покрытие–металл” исследуют трибологические характеристики покрытий, их способность к автокомпенсации износа, а также снижение потерь на трение в режиме граничной смазки.

Исследования проводились как непосредственно на узлах трения (например, на сопряжениях поршневое кольцо–гильза цилиндра ДВС локомотива [15]), так и на лабораторных трибометрах [10, 15, 25]. В качестве исследуемой смазочной среды использовали суспензии ГМТ в промышленных или в модельных маслах, а в ряде случаев вводили и некоторые “катализаторы”. Для исследования поверхностей применяли оптическую и электронную микроскопию, послойную Оже-спектроскопию, рентгеноспектральный анализ, рамановскую спектроскопию, профилографирование поверхностей, оценку их микро-/наномеханических характеристик и др. Результаты этих исследований позволяют установить ряд закономерностей образования ГМТ-покрытий. Так в [15] установлено, что на поверхностях гильз цилиндров ДВС локомотива, прошедшего 500 тыс. км с добавкой в моторное масло порошка серпентина+неназванного “катализатора”, образовалось трибопокрытие толщиной 8–10 мкм. Микротвердость покрытия по Виккерсу по наношкале вдвое превышала микротвердость детали. Минимальная нанотвердость покрытия составляла 12.7 ГПа, модуль упругости 240 ГПа (их отношение равно 0.06, что, согласно [15, 26], свидетельствует о прекрасных фрикционно-износных характеристиках трибосопряжений). Электрическое сопротивление ГМТ-покрытий составляет от 10–300 Ом/см до 5 кОм/см, оно пористо, в тонком слое прозрачно, маслофильно, не травится азотной кислотой, прочно закреплено на металле, окрашивается, имеет цвет от желто-золотистого до сиреневого и сероватого, полностью разрушается от электрического воздействия, образуется в основном, на стальных поверхностях.

Антифрикционные характеристики ГМТ-покрытия оценивали на трибометре TRB-S-DE [10] на лабораторной машине трения SRV [15]. Образцы для трибологических испытаний в [15] были вырезаны из деталей исследованного китайского тепловозного дизеля, смазочной средой было масло SD/CC, SAE 40 с той же добавкой APT, испытанной в эксплуатации этого же дизеля. После 240 ч испытаний на поверхностях образцов образовалось покрытие толщиной 2 мкм, нанотвердость которого составляла 13.32 ГПа, а модуль упругости – 240 МПа. Коэффициент трения в щадящих нагрузочно-скоростных режимах составлял 0.005, что близко к эффекту сверхскользкости.

Исследование элементного состава покрытия [15] показало, что в наружном его слое сосредоточены в основном более легкие элементы, чем во внутреннем, лежащем

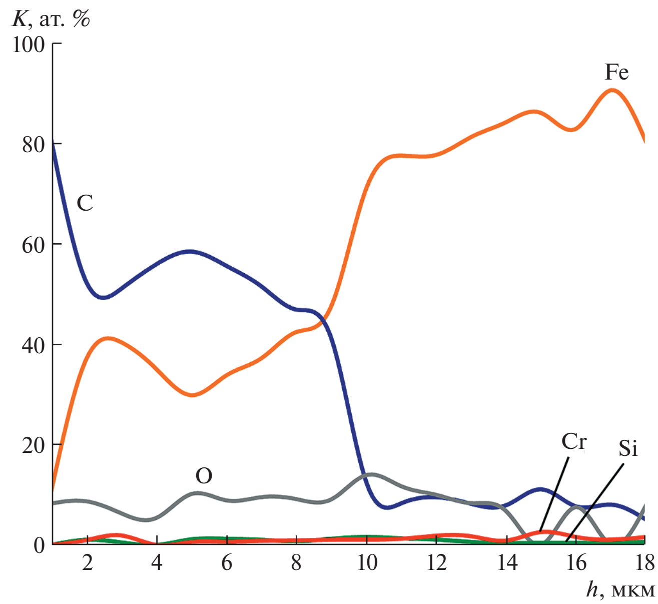


Рис. 3. Динамика содержания основных элементов в ГМТ-покрытии от основания до его поверхности [14].

на подложке. Было установлено, что основными элементами, образующими ГМТ-покрытие, являются углерод, кислород, железо. Естественно, они находятся в составе различных химических соединений. Но магний и кремний, являющиеся основными компонентами серпентинов, в составе исследуемого [15] покрытия практически не обнаружены. Динамика содержания основных химических элементов K по глубине h ГМТ-покрытия была определена по заданию НПО "Researcher" в Центре Cemic (Хельсинки, рис. 3).

По мере роста толщины покрытия содержание углерода в нем увеличивается, а железа уменьшается и поверхность покрытия состоит в основном из углерода с небольшим содержанием железа (рис. 3). Кислород, как составная часть продуктов трибоокисления масел, во всем слое покрытия постоянен и составляет около 10 ат. %.

Из рис. 3 видно, что в покрытии имеются лишь следы кремния и не выявлен магний, что соответствует крайне незначительному их содержанию в ГМТ, вводимого концентрацией 0.01–0.05, а содержания магния и кремния при этом составляет 0.0022–0.012 мас. %, т.е. эти элементы, выявляемые лишь высокочувствительным анализом.

Наличие углерода, по-видимому, объясняется пиролизом и карбонизацией смазочных материалов на активированной с ГМТ поверхности трения или поглощением углерода из окружающей среды (например, из CO_2), а железа – из продуктов изнашивания. Трибопокрытия из ГМТ несколько различаются [10, 17], но все их поверхности содержат углерод. Так, в [15] Оже-спектроскопией микроанализатором Link, было установлено, что при трении стали по стали в серпентиновой среде в слое покрытия толщиной до 4.0 нм от подложки были обнаружены пики Mg, Si и C, но выше 15 нм – только углерод.

ГМТ-покрытия характеризуются комплексом высоких значений таких характеристик, как нанотвердость, модуль упругости, чистота поверхности, износостойкость, низкая взаимная адгезия, низкий коэффициент трения и химическая инертность, ка-

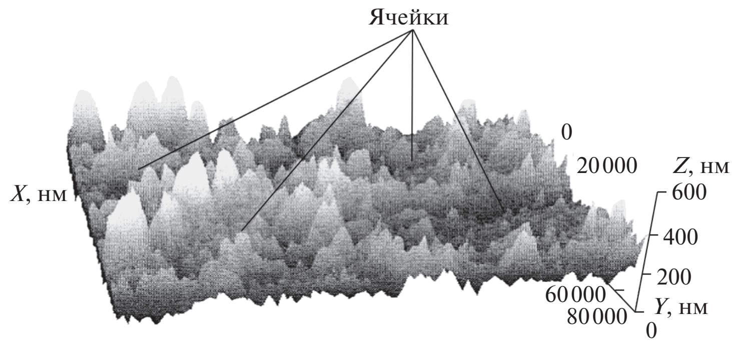


Рис. 4. Топография изношенной в среде с ГМТ стальной поверхности как ячеистой сталагмитовой структурой на гранях кристаллов металлов, удерживающей трибополимер с радикальными фрагментами и смазку, на которой и растет ГМТ-покрытие [10].

кими не обладают классические твердосмазочные покрытия [27]. Высокая твердость поверхности ГМТ-покрытий и их состав характерны для алмазоподобного углерода, поэтому такие покрытия получили название алмазоподобных углеродных пленок (DLC-films).

Основные физико-механические и трибологические характеристики DLC-films можно варьировать путем направленного выбора технологии их нанесения или легирования различными химическими элементами. При этом установившиеся значения коэффициента трения могут варьироваться от 0.001 до 0.7 [27, 28]. В тяжелых условиях низкое трение DLC-films обеспечивается за счет графитизации тончайших поверхностных слоев, обеспечивающей положительный градиент их механических свойств по глубине [29].

Приводим и другие представления о триботехническом действии серпентинов. Так, согласно автору [3], истертые частицы серпентина с оборванными химическими связями при соединении обрывков силоксанов с поверхностями трения, адсорбируют атомарный водород, вместе с гидроксидами железа, магнетитом и другими компонентами образуют начальные пленки, которые предотвращают водородное изнашивание, обеспечивают низкое трение и наращивание ресурсовосстанавливающего покрытия.

Согласно авторам [19], ювенильные поверхности трения, открываемые абразивным действием частиц ГМТ, с их физико-химической активностью образуют на гранях кристаллов металлов минеральный сталагмитовый ячеистый пространственный каркас (рис. 4). На этом каркасе, как вторичный процесс, и идет пленочная трибополимеризация аморфного микропористого покрытия с высокой сорбцией масел.

Можно согласиться, что одним из первых этапов наращивания ГМТ-покрытий, но после открытия ювенильных поверхностей трения, может быть образование на сопряженных поверхностях трения ячеистых сталагмитообразных структур, на остриях или в ячейках которых благодаря радикальным фрагментам [19] образуется трибополимер, осуществляющий смазочное действие.

Но эти модели не объясняют механизм наращивания ГМТ-покрытий, удаленных от поверхностей трущихся тел на десятки и сотни мкм, в том числе и без масла, образование подобных покрытий при стрельбе в стволах орудий и оружия, при натирании холодного оружия (шашек) и колес локомотивов на сухую, при вибронагартовке деталей в водной суспензии ГМТ [10] наращивание толстых ГМТ-покрытий в маслах и без них идет, возможно, благодаря уникальной трибоактивности атомов углерода в синтезе ими новообразований, отмеченной автором [30]. В других случаях, возможны и иные процессы, предполагавшиеся пионерами применения геомодификатора трения в конце XX–начале XXI века [3, 10, 11, 17].

Заключение. В статье рассмотрены проблемы образования, эффективности применения и механизма действия наиболее перспективного геомодификатора трения второго поколения – серпентина в качестве антифрикционной, противоизносной и ресурсовосстанавливающей добавки к смазочным материалам. Показано, что условиями образования ГМТ-покрытий являются: предварительная очистка поверхностей трения мягким абразивом, их активация, эмиссия трибоэлектронов высоких энергий, повышение контактных температур и давлений и, как следствие, механо-термо-химические преобразования частиц ГМТ с выделением ими конституционной воды. Механизм обеспечения эффекта сверхскользскости обусловлен пиролизом, карбонизацией и трибополимеризацией компонентов смазочных сред. Он обеспечивает образование алмазоподобных покрытий, и графитизацию тончайших их слоев. При этом покрытия приобретают высокую нанотвердость порядка 13 ГПа, модуль упругости порядка 240 ГПа, зеркальную чистоту, минимальную склонность к схватыванию, уникальную скользкость и низкое трение. ГМТ-покрытия пористы, в тонком слое, прозрачны, маслофильны, не травятся, имеют сопротивление от 10–300 Ом/см до 5 кОм/см, снижают коэффициент трения в обычных условиях до 0.03–0.04 и продлевают ресурс работы трибосопряжений в 1.5–3 раза. Но полное раскрытие механизма действия геомодификатора трения требует дальнейших углубленных исследований.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Доценко А.И., Буяновский И.А.* Триботехника. М.: ИНФРА-М. 2020. 399 с.
2. *Евдокимов А.Ю., Фукс И.Г., Любинин И.А.* Смазочные материалы в техносфере и биосфере: экологический эффект. Киев: Атика-Н. 2012. 292 с.
3. *Зуев В.В.* Конституция, свойства минералов и строение Земли (энергетические аспекты). СПб.: Наука. 2005. 400 с.
4. *Carmignano O.R.D.R. et al.* Serpentinites: mineral structure, properties and technological applications // Journal of the Brazilian Chemical Society. 2020. V. 31. № 1. P. 2.
5. *Yu H. et al.* Microstructure, mechanical properties and tribological behavior of tribofilm generated from natural serpentine mineral powders as lubricant additive // Wear. 2013. V. 297. № 1–2. P. 802.
6. *Wang X. et al.* The effect of serpentine additive on energy-saving and auto-reconditioning surface layer formation // Industrial Lubrication and Tribology. 2017. V. 69. № 2. P. 158.
7. *Yin Y.L. et al.* Friction and wear behaviors of steel/bronze tribopairs lubricated by oil with serpentine natural mineral additive // Wear. 2020. V. 456. P. 203387.
8. *Чичинадзе А.В., Албагачиев А.Ю.* Исследование добавки Форсан при трении // Трение и смазка в машинах и механизмах. 2010. № 8. С. 28.
9. *Буяновский И.А., Дроздов Ю.Н., Гостев Ю.В. и др.* Антифрикционная ресурсовосстанавливающая композиция присадок для пластичных смазок // Вестник машиностроения. 2005. № 7. С. 34.
10. *Дунаев А.В., Филиппова Е.М.* Нетрадиционная триботехника для повышения ресурса автотракторной техники. Итоги 25-летнего развития. М.: ГОСНИТИ, 2017. 252 с.
11. *Маринич Т.Л., Машков Ю.К., Чечуков Н.Т.* Устойчивая система трибофункционирования // В кн.: Трение, износ и смазочные материалы: Труды международной научной конференции, Ташкент, 22–26 мая 1985 г. В 3-х томах. Т. 2. С. 311.
12. *Балабанов В.И.* Безразборное восстановление трущихся соединений автомобиля. М.: Астрель АСТ, 2002. 60 с.

13. *Погодаев Л.И., Буяновский И.А. Крюков Е.Ю. и др.* К механизму взаимодействия природных слоистых гидросиликатов с поверхностями трения // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 5. С. 71.

14. *Дунаев А.В., Зуев В.В., Васильков Д.В.* Гипотезы механизмов ремонтно-восстановительных серпентиновых трибопрепаратов // Нанотехника. 2012. № 4 (32). С. 58.

15. *Jin Yu., Li Sh.* Superlubricity of *in situ* generated protective layer on worn metal surfaces in presence of $Mg_6Si_4O_{10}(OH)_8$ – In book: Superlubricity / Edited by *A. Erdemir and J.J. Martin*. Amsterdam: Elsevier, 2007. P. 445.

16. *Погодаев Л.И., Кузьмин В.М.* Структурно-энергетические модели надежности материалов и машин. СПб.: Академия транспорта РФ, 2006. 608 с.

17. *Телух Д.М., Кузьмин В.П., Усачев В.В.* Введение в проблему использования природных слоистых гидросиликатов в трибосопряжениях / Интернет-журнал “Трение, износ, смазка”. 2009. № 3. С. 13.

18. *Долгополов К.Н., Любимов Д.Н., Глазунова Е.А.* Влияние примесей магнетита на трибологические свойства смазочных композиций, содержащих минеральные модификаторы трения // Трение и износ. 2011. Т. 32. № 2. С. 143.

19. *Долгополов К.Н., Любимов Д.Н., Пономаренко А.Г. и др.* Структура смазочных слоев, формируемых при трении в присутствии присадок минеральных модификаторов трения // Трение и износ. 2009. Т. 30. № 5. С. 516.

20. *Qin Y., Wang L., Yang G. et al.* Characterisation of self-repairing layer formed by oleic acid modified magnesium silicate hydroxide // Lubrication Science. 2021. V. 33. № 3. P. 113.

21. *Wang B. et al.* Nano serpentine powders as lubricant additive: tribological behaviors and self-repairing performance on worn surface // Nanomaterials. 2020. V. 10. № 5. P. 922.

22. *Белый И.Ф., Меркулов А.Ф., Белый В.И., Голубев И.Г.* Эффективное использование антифрикционных добавок к трансмиссионным и моторным маслам. М.: ФГНУ “Рос-информагротех”. 2011. 52 с.

23. *Yu H.L. et al.* Effect of thermal activation on the tribological behaviours of serpentine ultrafine powders as an additive in liquid paraffin // Tribology International. 2011. V. 44. № 12. P. 1736.

24. *Медведева В.В.* Повышение триботехнических характеристик консистентных смазочных материалов путем применения дисперсных частиц гидросиликатов магния // Автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб.: Изд-во СПб политех. университет Петра Великого, 2018. 18 с.

25. *Singh D. et al.* Friction reduction capabilities of silicate compounds used in an engine lubricant on worn surfaces //Advances in Tribology. 2016. V. 2016.

26. *Leyland A., Matthews A.* On the significance of the H/E ratio in wear control: a nanocomposite coating approach to optimised tribological behaviour // Wear. 2000. V. 246. № 1–2. P. 1.

27. *Буяновский И.А., Левченко В.А., Игнатьева З.В. и др.* Трибологические характеристики углеродных алмазоподобных покрытий стальных деталей, функционирующих в смазочных средах // В кн: Современные технологии модифицирования поверхностей деталей машин. М.: ЛЕНАНД, 2013. С. 37.

28. *Tyagi A. et al.* A critical review of diamond like carbon coating for wear resistance applications // International Journal of Refractory Metals and Hard Materials. 2019. V. 78. P. 107.

29. *Aboua K.A.M. et al.* Effect of Mating Material and Graphitization on Wear of aC: H Coating in Boundary Base Oil Lubrication // Tribology Letters. 2020. V. 68. № 1. P. 1.

30. *Канарев Ф.М.* Теоретические основы физхимии нанотехнологий. 2-е издание. Краснодар: КГАУ, 2008. 675 с.

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2021, № 5, с. 108–112

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ

УДК 621.791.70

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОВОГО ЭФФЕКТА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ БЕЗ ТОКА И С ТОКОМ

У. Х. Угурчиев[1,*], Н. Н. Новикова[1,]**

[1] *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*
**e-mail: umar77@bk.ru*
***e-mail: natalnn3@mail.ru*

Поступила в редакцию 13.03.2021 г.
После доработки 06.06.2021 г.
Принята к публикации 24.06.2021 г.

Исследован тепловой эффект при различных видах деформации образцов из титановых сплавов.

Ключевые слова: титановые сплавы, тепловой эффект, прокатка, растяжение, электрический ток

DOI: 10.31857/S0235711921050138

Проблема повышения деформируемости и физико-механических свойств конструкционных материалов, особенно хрупких и малопластичных наноструктурных сплавов, является важной как в научном, так и в прикладном значении. К материалам с ограниченной деформационной способностью относятся исследуемые титановые сплавы – технически чистый титан ВТ1-0, двухфазный сплав ($\alpha + \beta$) ВТ6 и интерметаллид TiNi с эффектом памяти формы (ЭПФ), обладающие высоким комплексом служебных свойств, особенно в наноструктурном (НС) и ультрамелкозернистом (УМЗ) состояниях [1–5].

Получение длинномерных изделий тонкого сечения (проволоки, фольги, листа) с высокими механическими свойствами из этих сплавов является непростой задачей, что связано с быстрым упрочнением материала при холодной деформации, а деформирование при повышенных температурах приводит к снижению прочности. В качестве альтернативного решения можно рассматривать применение электропластической деформации (ЭПД), основанной на стимулирующем эффекте электрического тока.

Для определения механизма ЭПД важно оценить величину сопутствующих эффектов, в частности теплового эффекта $\Delta t = t_{\text{обр}} - t_{\text{комн}}$, где $t_{\text{обр}}$ – температура образца, $t_{\text{комн}}$ – комнатная температура при деформации, либо совместном действии деформации и тока. Рассмотрим результаты теоретического и экспериментального исследования теплового вклада в сплаве TiNi при прокатке и при растяжении с током и без тока.

В процессе электропластической прокатки (ЭПП) происходит повышение температуры за счет деформационного и электроимпульсного воздействия, т.е. пластической деформации и нагрева током. Генерируемый тепловой поток распределяется между валками и деформируемым образцом (полосой с размерами 2 × 8 × 130 мм) пропорционально их теплофизическим свойствам.

Кинетическая энергия упругопластической деформации является источником контактного теплообразования при прокатке металлов. В зависимости от ее величины

Таблица 1. Тепловые и физико-механические свойства валков и материалов

Материал	Коэффициент теплопроводности λ, Вт/(м °С)	Теплоемкость С, Дж/(кг °С)	Плотность ρ, кг/м^3	Прочность $\sigma_в$, МПа
валки				
90ХФ	44	46	–	990
образцы				
ВТ1-0	18.85	540	4505	375
ВТ6	8.37	0.58	4450	885
TiNi	18	490	6450	1000

контактная температура может колебаться от комнатной, при низких значениях энергии и небольших скоростях деформации, до температуры плавления – при больших значениях энергии и высоких скоростях деформации. Из-за дискретности площади контакта при прокатке необходимо различать среднюю контактную температуру, объемную и температурную вспышку.

Общее количество тепла, генерируемого при ЭПП распределится между прокатываемой полосой и валками в зависимости от их теплофизических свойств

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3, \tag{1}$$

где Q_1, Q_2, Q_3 – количество теплоты, соответственно, поглощенное полосой и валками.

Количество теплоты, поглощаемое двумя валками, одинаково: $Q_2 = Q_3$.

Общее количество теплоты, образующееся при прокатке с током, выраженное через мощность W, имеет вид

$$W = (PV + IU)\tau = Q, \tag{2}$$

где P – сила; V – скорость прокатки; I – сила тока; U – напряжение; τ – длительность действия тока.

С учетом формулы (2) запишем формулу (1)

$$(PV + IU)\tau = Q_1 + 2Q_2. \tag{3}$$

Тогда, при импульсных процессах при прокатке с током в связи с кратковременностью процесса для расчета контактной температуры между валками и прокатываемой полосой, температурных полей и градиента температуры при прокатке можно воспользоваться формулами, представленными в работе [6].

По данным [7] величина конвективной теплоотдачи с металлической поверхности составляет 60 ккал/м^2 ч, однако, в процессе листовой прокатки за доли секунды динамического контактирования валка с полосой мгновенная площадь их контакта составляет всего 2–3 мм^2, поэтому величина конвективной теплоотдачи мала и ею в балансе тепла пренебрегаем. Такая модель дана для конкретного способа деформации (прокатка). В ней не учтено структурное состояние материалов (размер зерен) и другой возможный способ деформации (растяжение).

Тепловые и физико-механические свойства прокатываемых материалов и валков приведены в табл. 1.

Тепловой эффект при растяжении без тока. Рассмотрим тепловой эффект при растяжении лопаточных образцов из нитинола (с размерами 0.3 × 2 × 50 мм и с расчетной длиной 20 мм) с крупнозернистой структурой (КЗ) и зеренной нанокристаллической структурой (НС).

Процесс статического растяжения без тока сопровождается неоднородным нагревом образца, зависящим от структурного состояния материала. Для исходного

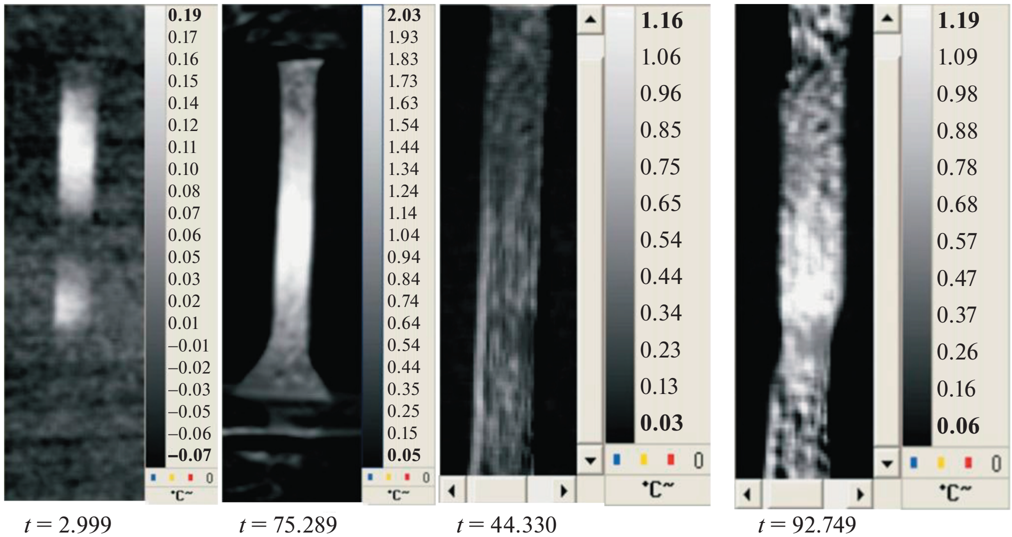


Рис. 1. Распределение температуры на поверхности образца в различные моменты времени: (а) – КЗ состояние; (б) – НС.

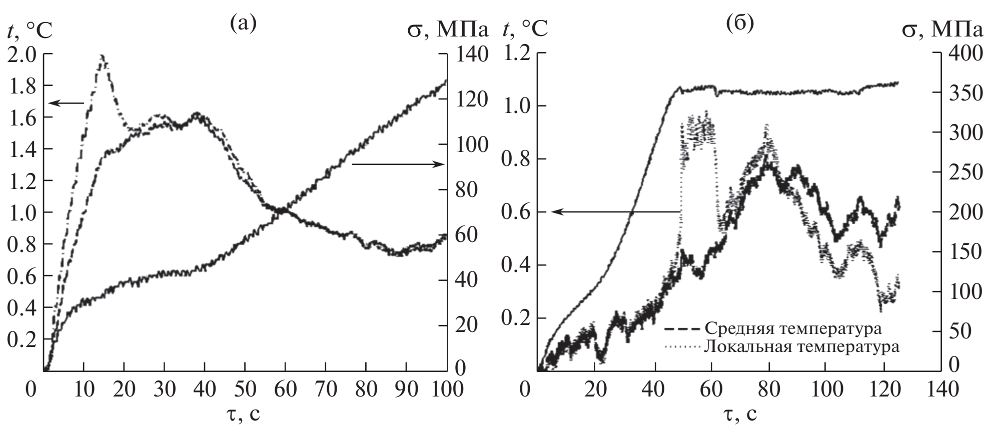


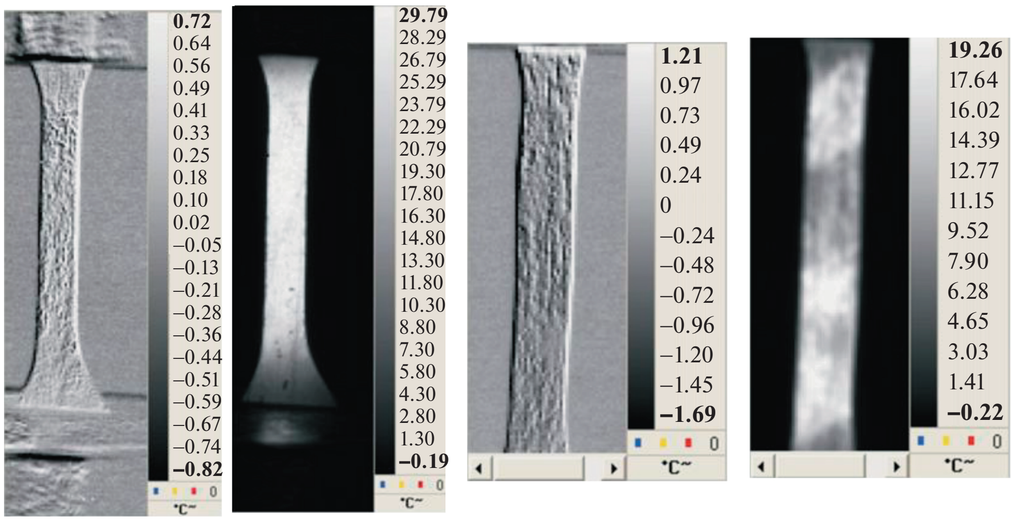
Рис. 2. Зависимость средней и локальной температуры и напряжения в закаленном (а) и НС (б) образце Ti-Ni от времени.

КЗ- и НС-образцов на термограммах наблюдаются полосы (участки) макро- или микронеоднородности размером, соответственно 3–5 мм (рис. 1а) и 200–300 мкм (рис. 1б), подъем температуры, в которых не превышает 2°С, по сравнению с комнатной температурой.

Для обоих случаев максимальная температура достигается на участке фазового превращения соответствующим плато (рис. 2а, б). В обоих случаях тепловой эффект связанный с деформацией меньше, чем тепловой эффект от фазового превращения.

Тепловой эффект при растяжении с током. Наблюдаемые явления при растяжении с током носят более сложный характер по сравнению с обычным растяжением. Это свя-

(а) (б)



$t = 10.608$ $t = 10.613$ $t = 28.129$ $t = 36.249$

Рис. 3. Распределение температуры на поверхности образцов в КЗ – (а) и НС – (б) сплаве TiNi при растяжении с током.

зано с тем, что каждый импульс тока вызывает кратковременный разогрев – охлаждение, которые в свою очередь стимулируют прямое и обратное превращение аустенита $\leftrightarrow$ в мартенсит: А $\leftrightarrow$ М.

Импульс тока в КЗ-образце вызывает мгновенный подъем температуры и связанное с ним обратное превращение М $\to$ А, видимое на термограмме как светлое поле по всей длине образца (рис. 3а). На термограмме НС-образца такой же импульс тока вызывает такое же превращение, которое в отличие от КЗ-образца, стимулирует превращение М $\to$ А в виде отдельных полос (рис. 3б). Таким образом, в НС-состоянии фазовое превращение под действием одиночного импульса тока тормозится и осуществляется отдельными полосами по длине образца.

На рис. 4 приведены зависимости напряжения и средней температуры от времени при растяжении. Они показывают, что подъем температуры вызванный деформацией и током составляет до 45°С (рис. 4а) и 17°С (рис. 4б), соответственно, для КЗ и НС. На кривых растяжения каждый импульс тока соответствует скачку напряжения вверх или вниз. Природа указанных скачков в обоих состояниях связана с конкуренцией проявления двух одновременно действующих разнонаправленных эффектов – эффекта памяти формы (скачки вверх) и электропластического эффекта (скачки вниз). Подробно природа таких скачков рассматривается и объясняется в работе [8].

Тепловой эффект и, соответственно, подъем температуры при растяжении с током на два порядка выше, чем при растяжении без тока (сравни рис. 2 и 4).

Сравнение полученных выше результатов показывает, что величина теплового эффекта в случае КЗ-состояния выше, чем в НС-состоянии, причем наиболее заметно при растяжении с током. Полученный результат можно объяснить более низкой теплопроводностью сплавов в нанокристаллическом состоянии, что в свою очередь связано с высокой плотностью кристаллических дефектов (границ зерен, дислокаций). Действительно в обзоре [1] показано, что теплопроводность уменьшается с уменьшением размеров зерна.

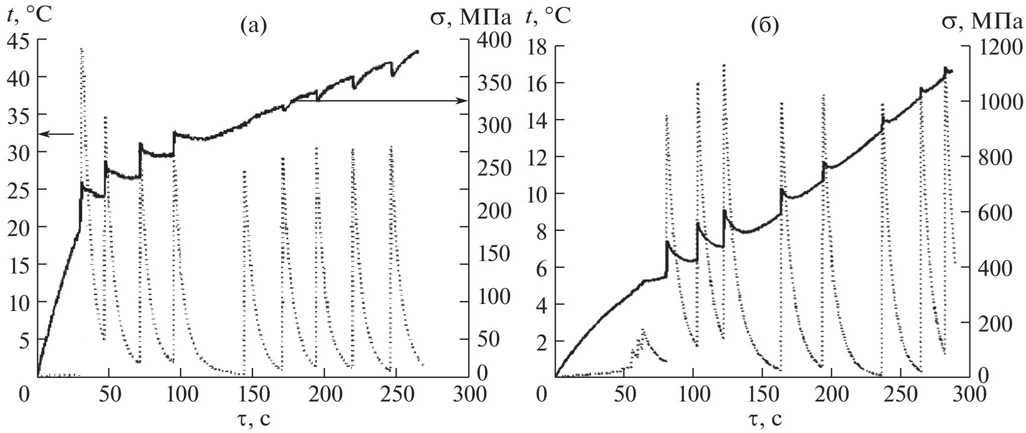


Рис. 4. Зависимость средней температуры и напряжения в КЗ – (а) и НС – (б) сплаве TiNi от времени при растяжении с током.

Выводы. При расчете теплового эффекта необходимо учитывать структурное состояние материалов (размер зерен). Величина теплового эффекта в случае КЗ состояния выше, чем в НС состоянии, причем наиболее заметно при растяжении с током. Тепловой эффект при растяжении с током на два порядка больше, чем при растяжении без тока.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Валиев Р.З., Александров И.В.* Объемные наноструктурные материалы: получение, структура и свойства. М.: ИКЦ “Академкнига”, 2007. 398 с.
2. *Носкова Н.И., Перетурина И.А., Столяров В.В., Елкина О.А.* Прочность и структура нанокристаллического титана // ФММ. 2004. Т. 97. № 5. С. 106.
3. *Столяров В.В., Прокофьев Е.А., Прокошкин С.Д., Добаткин С.В., Трубицына И.Б., Хмелевская И.Ю., Пушин В.Г., Валиев Р.З.* Структурные особенности, механические свойства и эффект памяти формы в TiNi сплаве, полученном равноканальным угловым прессованием // ФММ. 2005. Т. 100. № 6. С. 91.
4. *Столяров В.В.* Структура и свойства ультрамелкозернистого титанового сплава ВТ6, полученного РКУП // Машиностроение и инженерное образование. 2010. № 2. С. 30.
5. *Хасьянова Д.У.* Контроль основных характеристик металлов, обладающих эффектом памяти формы // Вестник Брянского государственного технического университета. 2018. № 9 (70). С. 21.
6. *Албагачиев А.Ю., Угурчиев У.Х.* Моделирование температуры при прокатке с импульсным воздействием электрического тока // В сборнике трудов конференции “Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении – 2014”. 2014. С. 25.
7. *Чичинадзе А.В., Берлинер Э.М., Браун Э.Д. и др.* Трение, износ и смазка (трибология и триботехника) / Под общ. ред. А.В. Чичинадзе. М.: Машиностроение, 2003. 576 с.
8. *Угурчиев У.Х., Новикова Н.Н.* Особенности обработки и получение изделий из сплавов на основе TiNi, претерпевающих фазовые превращения // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2020. № 3. С. 91.