



Российская Академия Наук

# АТ ВТОМАТИКА и ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

7

июль

Москва

2020

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

**Главный редактор:**

Васильев С.Н.

**Заместители главного редактора:**

Кулешов А.П., Поляк Б.Т., Рубинович Е.Я.

**Ответственный секретарь:**

Хлебников М.В.

**Редакционный совет:**

Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Микрин Е.А., Пархоменко П.П.,

Пешехонов В.Г., Попков Ю.С., Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

**Редакционная коллегия:**

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Васильев В.И., Вишневский В.М.,

Воронцов К.В., Галляев А.А., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В.,

Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М.,

Крищенко А.П., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,

Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М., Михальский А.И.,

Назин А.В., Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я.,

Пакшин П.В., Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В.,

Соболевский А.Н., Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л.,

Хрусталев М.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: [redacsia@ipu.ru](mailto:redacsia@ipu.ru)

Зав. редакцией Е.А. Мартехина

Москва

ООО «ИКЦ «АКАДЕМКНИГА»

# *Нелинейные системы*

© 2020 г. К.Г. ГАРАЕВ, д-р физ.-мат. наук ([fmf@kai.ru](mailto:fmf@kai.ru))  
(Казанский национальный исследовательский технический  
университет им. А.Н. Туполева-КАИ)

## **ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ ПРИВОДИМОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Ставится задача приводимости оптимальных процессов и предлагается теоретико-групповой подход к ее решению, основанный на инфинитезимальном аппарате Ли–Овсянникова [1].

*Ключевые слова:* оптимальное управление, уравнение Беллмана, теория групп Ли, приводимость оптимальных процессов.

**DOI:** [10.31857/S0005231020070016](https://doi.org/10.31857/S0005231020070016)

### **1. Введение**

В проблеме управления теоретико-групповые методы впервые были использованы в работах Павлова В.Г., Кухтенко А.И., Семенова В.Н., Павловского Ю.Н., Яковенко Г.Н., Гараева К.Г., Можаева Г.В., Борецкого И.Ф. и других исследователей. Среди зарубежных авторов первые публикации в этом направлении принадлежат Арбибу М., Брокету Р., Барнету С., Херману Р., Калману Р. и другим ученым (см., например, [2, 3]). Использование группового подхода позволяет реализовать идеи эрлангенской программы Ф. Клейна в проблеме управления.

Остановимся кратко на тех конкретных задачах, при изучении которых используется групповой подход.

Известно, что при синтезе оптимального управления возникает труднопреодолимая проблема — «проклятие размерности» (Р. Беллман), одним из эффективных методов решения которой является операция декомпозиции, приводящая к расщеплению исходной системы управления на подсистемы, для каждой из которых формируется своя локальная задача [4–9]. В [10–13] разработана общая теория декомпозиции и агрегирования систем с постоянным вектором управления, основанная на теории инвариантов групп непрерывных преобразований; проблеме агрегирования посвящена также работа [14]. Теория групп позволила провести классификацию видов декомпозиции, найти количество подсистем и их размерности и тем самым определить целесообразность декомпозиции для динамических систем с управлением.

Исследованию влияния возмущений параметров систем автоматического управления на их выходные характеристики, т.е. изучению чувствительности систем, посвящены (на языке теории групп) работы [15–17].

Ряд работ (например, [3, 18–24]) посвящен проблемам управляемости и наблюдаемости динамических систем. Введенное в [25] понятие L-системы

позволяет в ряде случаев заменить дифференциальные уравнения принципа максимума эквивалентными конечными соотношениями.

Групповой подход к проблеме конструирования систем управления, обеспечивающих инвариантность характеристик системы по отношению к внешним возмущениям, предложен в [19, 20, 22, 26].

Задаче синтеза оптимального управления посвящены работы [25, 27, 28]. В частности, в [27] введено понятие инвариантного оптимального процесса и определены условия его существования (выражающие инвариантность многообразия и функционала относительно одной и той же группы преобразований), что позволило свести проблему синтеза управления к оптимальной задаче с меньшим числом переменных при сохранении экстремального значения функционала.

Следует отметить, что если направление исследований, связанное с групповым подходом к изучению систем управления с сосредоточенными параметрами, развивается достаточно интенсивно, то в отношении систем с распределенными параметрами имеются только единичные публикации [15, 27, 29, 30–33].

## 2. Постановка и решение задачи приводимости оптимального процесса

Пусть процесс управления на отрезке  $[t_0, t_k]$  описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x, u) \quad (i = 1, \dots, n)$$

с заданными начальными условиями  $x^i(t_0) = x_0^i$ .

Качество управляемого процесса оценивается функционалом

$$(2) \quad J = \int_{t_0}^{t_k} \varphi(t, x, u) dt,$$

определенным на движениях системы (1). Здесь  $x = (x^1, \dots, x^n)$  — фазовые координаты;  $u = (u^1, \dots, u^m)$  — управляющие воздействия;  $f^i, \varphi$  — непрерывно дифференцируемые функции; отрезок времени  $[t_0, t_k]$  предполагается фиксированным.

Требуется найти управление  $u$ , реализующее на движениях системы (1) минимум функционала (2).

Следуя [27], будем называть исследуемый управляемый процесс оптимально инвариантным относительно локальной группы Ли с оператором

$$U = \xi_t(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi_x^i(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi_u^j(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u^j}, \\ (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m),$$

если функционал  $J$  является интегральным инвариантом этой группы (в смысле Ли–Чеботарева [34, 35]) и если система (1) допускает эту же группу непрерывных преобразований.

Другими словами: и уравнения (1), и функционал (2) инвариантны относительно оператора  $U$ . Необходимое и достаточное условие оптимальной инвариантности исследуемого процесса согласно [34, 36] можно записать в виде

$$(3) \quad \xi_t \frac{\partial f^k}{\partial t} + \xi_x^l \frac{\partial f^k}{\partial x^l} + \xi_u^i \frac{\partial f^k}{\partial u^i} = \frac{\partial \xi_x^k}{\partial t} + f^l \frac{\partial \xi_x^k}{\partial x^l} - f^k \frac{\partial \xi_t}{\partial t} - f^k f^l \frac{\partial \xi_t}{\partial x^l},$$

$$(4) \quad U(\varphi) + \varphi D_t(\xi_t) = 0,$$

где

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + x^l \frac{\partial}{\partial x^l} + u^i \frac{\partial}{\partial u^i} \quad (k, l = 1, \dots, n; i = 1, \dots, m).$$

Отметим, что условия инвариантности (3), (4) позволяют, вообще говоря, решать две самостоятельные задачи.

*Прямая задача.* Функции  $f^i$  и  $\varphi$  заданы. Требуется найти группу  $G_r$ .

*Обратная задача.* Задана группа  $G_r$ . Требуется найти  $f^i$  и  $\varphi$  (отыскание функции  $\varphi$  Н.Г. Чеботарев называет задачей конструирования объемов).

Задание процесса (1), (2) будем понимать в смысле либо прямой, либо обратной задач.

Одним из конструктивных методов исследования оптимально инвариантных процессов может оказаться предлагаемый здесь метод редуцирования (приводимости) оптимальных процессов, который заключается в следующем. Находятся такие преобразования переменных исходной задачи к новым переменным в некотором вспомогательном пространстве, в котором оптимальная задача трансформируется в задачу, решаемую в ряде случаев проще исходной. Следует заметить, что применительно к задачам механики тел переменной массы задача приводимости была впервые сформулирована И.В. Мещерским в форме метода «отображения движения» [37]. С математической точки зрения метод приводимости приводит к следующей задаче. Требуется найти гладкое взаимно-однозначное преобразование (диффеоморфизм)  $T$

$$(5) \quad \bar{t} = \bar{t}(t, x), \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(t, x), \quad \bar{u}^j = \bar{u}^j(t, x, u) \\ (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m),$$

переводящее оптимальную систему (1) в систему вида

$$(6) \quad \frac{d\bar{x}^i}{dt} = \bar{f}^i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}),$$

а функционал (2) — в функционал

$$(7) \quad J = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_k} \bar{\varphi}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}) d\bar{t},$$

где  $\bar{f}^i$  и  $\bar{\varphi}$  — функции, структура которых задается заранее.

Если, например, функции  $\bar{f}^i$  и  $\bar{\varphi}$  не содержат в явном виде  $\bar{t}$ , то имеет место частная задача редуцирования: требуется найти преобразование  $T$ , переводящее систему (1) в автономную систему, а функционал (2) — в инвариантный относительно новой независимой переменной функционал. Тогда если отображение  $T$  — диффеоморфизм, то в случае программного управления сопряженная система будет допускать первый интеграл [38], а в задаче синтеза оптимального управления соответствующее уравнение Беллмана будет уравнением с независящими от нового «времени»  $\bar{t}$  коэффициентами [39]; при этом в случае фиксированных начального и конечного состояний системы и свободного времени перехода его решение не будет зависеть явным образом от  $\bar{t}$ . Отметим, что для неуправляемых процессов задача автономизации линейных динамических систем в рамках метода факторизации дифференциальных операторов была рассмотрена в [40].

В дальнейшем будем предполагать, что управляемый процесс (1), (2) инвариантен относительно интранзитивной группы  $G_r$  (т.е. группы, имеющей нетривиальные и функционально независимые алгебраические инварианты) с оператором  $U$ , а процесс (6), (7) — относительно группы  $G_r$  с оператором

$$(8) \quad U = \xi_{\bar{t}}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \xi_{\bar{x}}^i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} + \xi_{\bar{u}}^j(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^j}.$$

Пусть  $T_a$  ( $a$  — групповой параметр) — любое преобразование группы  $G_1$ . Если отображение (5) — диффеоморфизм, то в системе координат  $(t, x, u)$  однопараметрическое семейство преобразований  $\bar{T}_a$ , определяемое равенством  $\bar{T}_a = TT_aT^{-1}$  согласно С. Ли [35], вновь определяет локальную группу Ли  $\bar{G}_1$ , получаемую из  $T_a$  с помощью преобразования подобия  $T$ .

В новой системе координат  $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u})$  оператор  $U$  принимает вид

$$(9) \quad \bar{U} = U(\bar{t}) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + U(\bar{x}^i) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} + U(\bar{u}^j) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^j},$$

координаты которого с помощью равенства (5) выражаются через  $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u})$ .

Следовательно, преобразование  $T$ , осуществляющее редуцирование оптимальных процессов, является решением квазилинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$(10) \quad U(\bar{t}) = \xi_{\bar{t}}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}), \quad U(\bar{x}^i) = \xi_{\bar{x}}^i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}), \quad U(\bar{u}^j) = \xi_{\bar{u}}^j(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}) \\ (i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m).$$

Покажем, что частная задача приводимости, поставленная выше, является разрешимой. Действительно, так как в этом случае  $\xi_t = 1$ ,  $\xi_x^i = \xi_u^j = 0$ , то из уравнения (10) в силу интранзитивности группы следует, что новые фазовые координаты  $\bar{x}^i$  и управляющие воздействия  $\bar{u}^j$  являются алгебраическими инвариантами, а новая независимая переменная  $\bar{t}$  является решением линейного дифференциального уравнения  $U(\bar{t}) = 1$ . Отметим попутно, что если известно преобразование, переводящее оптимальный процесс (1), (2) в оптимальный процесс (6), (7), то уравнения (10) позволяют найти группу, допускаемую исходным оптимально инвариантным процессом (1), (2).

### 3. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу синтеза оптимального управления процессом, поведение которого описывается уравнением

$$(11) \quad x^{(n)} = F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}) + b(t)u, \quad t \in [t_0, t_n]$$

с начальными условиями  $x^{(i-1)}(t_0) = x_0^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Запишем (11) в равносильной форме ( $x = x^1$ ):

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= x^2, \quad \frac{dx^2}{dt} = x^3, \dots, \quad \frac{dx^{n-1}}{dt} = x^n; \\ \frac{dx^n}{dt} &= F(t, x^1, x^2, \dots, x^n) + b(t)u. \end{aligned}$$

Функционал (2) зададим в виде

$$(13) \quad J = \int_{t_0}^{t_k} [S(t, x) + m(t)u^2] dt \quad (m(t) > 0).$$

Оператор группы  $G$ , относительно которой остается инвариантным процесс (12), (13), будем искать в виде (рассматривается обратная задача)

$$U = \xi_t(t) \frac{\partial}{\partial t} + a(t)x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_x^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i} + g(t)u \frac{\partial}{\partial u} \quad (i = 2, \dots, n),$$

где  $\xi_t(t)$ ,  $a(t)$ ,  $\xi_x^i(t, x)$ ,  $g(t)$  — произвольные дифференцируемые функции. Определяющие уравнения (3) записутся так:

$$(14) \quad \xi_x^{k+1} = \frac{\partial \xi_x^k}{\partial t} + x^{l+1} \frac{\partial \xi_x^k}{\partial x^l} - x^{k+1} \dot{\xi}_t \quad (l = 1, \dots, k; \quad k = 1, \dots, n-1),$$

$$(15) \quad \frac{\partial \xi_x^n}{\partial t} + x^{k+1} \frac{\partial \xi_x^n}{\partial x^k} + (F + bu) \left( \frac{\partial \xi_x^n}{\partial x^n} - \dot{\xi}_t \right) = \xi_t \frac{\partial F}{\partial t} + \xi_x^i \frac{\partial F}{\partial x^i} + bu\xi_t + bgu \quad (k = 1, \dots, n-1; \quad i = 1, \dots, n).$$

Так как координаты  $\xi_x^i$  и функция  $F$  по условию не зависят от  $u$ , то уравнение (15) расщепляется на два уравнения

$$(16) \quad \frac{\partial \xi_x^n}{\partial t} + x^{k+1} \frac{\partial \xi_x^n}{\partial x^k} + F \left( \frac{\partial \xi_x^n}{\partial x^n} - \dot{\xi}_t \right) = \xi_t \frac{\partial F}{\partial t} + \xi_x^i \frac{\partial F}{\partial x^i} \quad (k = 1, \dots, n-1; \quad i = 1, \dots, n);$$

$$(17) \quad b \left( \frac{\partial \xi_x^n}{\partial x^n} - \dot{\xi}_t \right) = \dot{b}\xi_t + bg.$$

Решая систему (14), получим

$$(18) \quad \xi_x^i = x^1 a^{i-1} + P_j^i x^j,$$

$$(19) \quad P_j^i = C_{i-1}^{j-1} a^{(i-j)} - C_{i-1}^{j-2} \xi_t^{(i+1-j)} \quad (j = 2, \dots, i; \quad i = 2, \dots, n),$$

где через  $C_n^m$  обозначено число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$ . Частное решение уравнений (10) для случая  $\xi_{\bar{t}} = 1$ ,  $\xi_{\bar{x}}^i = 0$ ,  $\xi_{\bar{u}} = 0$  выберем в виде

$$(20) \quad \begin{aligned} \bar{t} &= \int_{t_0}^t \frac{dt}{\xi_t(t)}, \quad \bar{x}^k = m_i^k x^i, \quad \bar{u} = ub \xi_t^n \exp \left( - \int_{t_0}^t \frac{a}{\xi_t} dt \right) \\ &\quad (i = 1, \dots, k; \quad k = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

где функции  $m_i^k(t)$  удовлетворяют системе рекуррентных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} (21) \quad &\xi_t \dot{m}_1^k + m_i^k a^{(i-1)} = 0 \quad (i = 1, \dots, k); \\ &\xi_t \dot{m}_2^k + P_2^i m_i^k = 0 \quad (i = 2, \dots, k); \\ &\dots \dots \dots \\ &\xi_t \dot{m}_{k-1}^k + P_{n-1}^i m_i^k = 0 \quad (i = k-1, \dots, k); \\ &\xi_t \dot{m}_k^k + P_k^k m_k^k = 0 \quad (k = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

которая для достаточно гладких функций  $\xi_t(t)$  и  $a(t)$  всегда имеет общее решение, определяемое путем последовательного интегрирования (начиная с последнего уравнения системы). Так как здесь подходит любое частное решение, то начальные условия к этой системе удобно задать в виде  $m_i^k(t_0) = \delta_i^k$  так, что  $\bar{x}^k(0) = x^k(t_0)$  и из последнего уравнения получим

$$(22) \quad m_k^k(t) = \left[ \frac{\xi_t(t)}{\xi_t(t_0)} \right]^{k-1} \exp \left( - \int_{t_0}^t \frac{a(t)}{\xi_t(t)} dt \right)$$

( $\delta_i^k$  — символ Кронекера).

Решения уравнений (16) и (17) имеют соответственно вид

$$(23) \quad F(t) = \xi_t^{1-n} \exp \left( \int_{t_0}^t \frac{a}{\xi_t} dt \right) \left[ \frac{\omega(m_1^1 x^1, \dots, m_n^n x^n)}{\xi_t} - \dot{m}_i^n x^i - m_{j-1}^n x^j \right] \\ (i = 1, \dots, n; \quad j = 2, \dots, n),$$

$$(24) \quad g = a - n \dot{\xi}_t - \xi_t \dot{b}/b.$$

Здесь  $\omega$  — произвольная непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов;  $b$  и  $\xi_t$  — произвольные достаточно число раз дифференцируемые функции переменного  $t$ .

Подвергая (12) преобразованиям (20), получим

$$(25) \quad \frac{d\bar{x}^1}{dt} = \bar{x}^2, \quad \frac{d\bar{x}^2}{dt} = \bar{x}^3, \quad \dots, \quad \frac{d\bar{x}^{n-1}}{dt} = \bar{x}^n; \quad \frac{d\bar{x}^n}{dt} = \omega(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) + \bar{u}.$$

*Следствие.* Если в формуле (23) положить  $\omega = \beta_k \bar{x}^k$ , где  $\beta_k$  — постоянные, то

$$(26) \quad F = \xi_t^{1-n} \exp \left( \int_{t_0}^t \frac{a}{\xi_t} dt \right) \left[ x^1 \left( \frac{\beta_k m_1^k}{\xi_t} - \dot{m}_1^n \right) + x^i \left( \frac{\beta_k m_i^k}{\xi_t} - \dot{m}_i^n - m_{i-1}^n \right) \right] \\ (i = 2, \dots, n; \quad k = 1, \dots, n).$$

Таким образом, если функция  $F$  задана в виде (26), то линейное однородное уравнение  $n$ -го порядка с переменными коэффициентами с помощью подстановки (20) приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Если  $a = 0$ , то  $m_i^k = \text{const}$  и подстановка (20) совпадает с одной из подстановок, указанных в [41].

Отметим, что для частного случая неуправляемой системы третьего порядка из (25) следует основной результат работы [42].

Функции  $S(t, x)$ ,  $m(t)$ , допускающие приводимость оптимальной задачи, в соответствии с (4) удовлетворяют уравнению

$$(27) \quad \xi_t \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \dot{m} u^2 \right) + ax^1 \frac{\partial S}{\partial x^1} + P_j^i x^j \frac{\partial S}{\partial x^i} + 2mu\xi_u + (S + mu^2) \dot{\xi}_t = 0 \\ (j = 2, \dots, i; \quad i = 2, \dots, n),$$

откуда с учетом (19), (24) следует

$$(28) \quad S(t, x) = \psi(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) / \xi_t,$$

где  $\psi$  — произвольная непрерывно дифференцируемая функция;

$$(29) \quad m(t) = cb^2 \xi_t^{2n-1} \exp \left( -2 \int_{t_0}^t \frac{a}{\xi_t} dt \right).$$

Функционал (13) в новых переменных примет вид

$$(30) \quad J = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_k} [\psi(\bar{x}) + c\bar{u}^2] d\bar{t},$$

где  $c$  — произвольная постоянная и

$$\bar{t}_k = \int_{t_0}^{t_k} \frac{dt}{\xi_t(t)}.$$

Таким образом, справедливо следующее

*Утверждение 1.* Пусть в системе (12) функция  $F(t, x)$  задана равенством (23), а в функционале (13) функции  $S(t, x)$  и  $m(t)$  определяются соответственно формулами (28) и (29). Тогда преобразование  $T$  (20) осуществляет приводимость управляемого процесса (12), (13) в инвариантный относительно «времени»  $\bar{t}$  процесс (25), (30).

Покажем, что преобразование  $T$  является взаимно-однозначным; для этого достаточно установить, что его якобиан

$$J(T) = \frac{\alpha(t)}{\xi_t(t)} |M|, \quad M = \begin{vmatrix} m_i^k \end{vmatrix}, \quad \alpha = b\xi_t^n \exp\left(-\int_{t_0}^t \frac{a}{\xi_t} dt\right)$$

не равен нулю:  $J(t) \neq 0$ .

Следовательно, нужно доказать, что определитель  $|M| \neq 0$ . Так как  $i < k$ , то матрица  $M$  является треугольной и, следовательно,  $M = \prod_{k=1}^n m_n^k(t)$ , где  $m_n^k(t)$  определяются равенством (22). Таким образом, при естественном предположении  $b(t) \neq 0$ ,  $\xi_t(t) \neq 0$  преобразование  $T$  есть диффеоморфизм.

Следуя [43], введем следующее понятие.

*Определение.* Уравнение Р. Беллмана, соответствующее оптимальному процессу (12), (13), инвариантно относительно преобразования  $T$  (20), если в результате преобразования этого уравнения получается уравнение, совпадающее с уравнением Р. Беллмана, составленным для оптимального процесса (25), (30).

*Утверждение 2.* Уравнение Р. Беллмана для оптимальной задачи (12), (13) инвариантно относительно преобразования (20).

Действительно, уравнение Р. Беллмана для оптимальной задачи (12), (13) согласно [39] имеет вид

$$(31) \quad -\frac{\partial \omega}{\partial t} = \max \left[ S + mu^2 + x^{k+1} \frac{\partial \omega}{\partial x^k} + (F + bu) \frac{\partial \omega}{\partial x^n} \right] \quad (k = 1, \dots, n-1).$$

Подвергая уравнение (31) преобразованиям (20), получим

$$(32) \quad -\frac{\partial \omega}{\partial \bar{t}} = \max \left[ \psi + c\bar{u}^2 + \bar{x}^{k+1} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}^k} + (\omega + \bar{u}) \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}^n} \right] \quad (k = 1, \dots, n-1).$$

Но равенство (32) есть уравнение Р. Беллмана для оптимальной задачи (25), (30), что и доказывает это утверждение.

#### 4. Заключение

В работе дана постановка задачи приводимости оптимальных процессов с сосредоточенными параметрами и предложен метод ее решения с привлечением теории групп С. Ли.

В качестве примера рассмотрена задача приводимости оптимального процесса, заданного нелинейным уравнением  $n$ -го порядка и квадратичным относительно управления функционалом.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при решении задачи синтеза регуляторов для линейных и нелинейных автоматических систем различных назначений.

При написании раздела «Введение» был использован материал, любезно предоставленный автору профессором В.Г. Павловым, которому автор выражает глубокую благодарность.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Борецкий И.Ф., Павлов В.Г.* О некоторых свойствах динамических систем, связанных с их симметрией / Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Изд-во АН УССР, 1980. Вып. 47. С. 25–34.
3. *Брокетт Р.У.* Алгебры Ли и группы Ли в теории управления / Математические методы в теории систем. М.: Мир, 1979. С. 174–220.
4. *Борецкий И.Ф., Павлов В.Г.* О единственности декомпозиции в линейной задаче оптимального управления с квадратичным критерием качества // АиТ. 1979. № 11. С. 10–15.  
*Boretskiy I.F., Pavlov V.G.* On Uniqueness of Decomposition in a Linear Optimal Control Problem with a Quadratic Performance Criterion // Autom. Remote Control. 1979. V. 40. No. 11. P. 1563–1568.
5. *Кухтенко А.И.* Основные задачи теории управления сложными системами / Сложные системы управления. АН УССР. Институт кибернетики. Киев, 1968. Вып. 1. С. 3–37.
6. *Можаев Г.В.* Об использовании симметрии в линейных задачах оптимального управления с квадратичным критерием качества // АиТ. 1975. № 6. С. 22–30.  
*Mozhaev G.V.* On the Use of Symmetry in Linear Optimal Control Problems with a Quadratic Performance Criterion // Autom. Remote Control. 1975. V. 36. No. 6. P. 892–899.
7. *Удилов В.В., Ковбаса Г.Т.* О декомпозиции многомерных симметричных линейных систем автоматического управления / Сложные системы управления. Киев: Изд-во АН УССР, 1972. С. 65–81.
8. *Шайкин М.Е.* Теоретико-групповые методы декомпозиции симметричных многосвязных динамических систем // АиТ. 1973. № 9. С. 22–32.  
*Shaykin M.Ye.* Group-Theoretic Methods of Decomposition of Symmetrical Multivariable Dynamical Systems // Autom. Remote Control. 1973. V. 34. No. 9. P. 1383–1392.
9. *Ramar K., Ramaswami B.* Transformation of timevariable multiinput systems to a canonical form / IEEE Trans. Automat. Contr. 1971. V. AC-16. P. 371–374.
10. *Павловский Ю.Н.* Групповые свойства управляемых динамических систем и фазовые организационные структуры. I // Вычислит. математика и мат. физика. 1971. № 4. С. 862–872.
11. *Павловский Ю.Н.* Групповые свойства управляемых динамических систем и фазовые организационные структуры. II // Вычислит. математика и мат. физика. 1971. Т. 14. № 5. С. 1093–1103.

12. Павловский Ю.Н. К вопросу об агрегировании и построении иерархических управляющих структур для одного класса сложных систем // Вычислите. математика и мат. физика. 1971. Т. 11. № 6. С. 1510–1520.
13. Павловский Ю.Н. Агрегирование, декомпозиция, групповые свойства, декомпозиционные структуры динамических систем // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наук. думка, 1978. Вып. 39. С. 53–63.
14. Елкин Е.Н. Об условиях агрегирования управляемых динамических систем // Вычислите. математика и мат. физика. 1978. Т. 18. № 4. С. 928–934.
15. Борецкий И.Ф., Павлов В.Г. Теоретико-групповая интерпретация чувствительности гладких динамических систем // АиТ. 1980. № 2. С. 5–10.  
*Boretskiy I.F., Pavlov V.G. Group-Theoretic Interpretation of Smooth Dynamic System Sensitivity // Autom. Remote Control. 1980. V. 41. No. 2.*
16. Гараев К.Г., Павлов В.Г. Непрерывные группы преобразований в задаче чувствительности систем с распределенными параметрами. Теория инвариантности и ее применение / Тр. Всесоюзн. сов. Киев. 1979. С. 330–334.
17. Павлов В.Г. Использование понятия инфинитезимального преобразования в исследовании чувствительности линейных оптимальных систем / Тр. КАИ. Казань. 1971. Вып. 135. С. 3–9.
18. Борецкий И.Ф. Управляемость и наблюдаемость нелинейных систем при отображениях / ВИНТИ. Москва. 1981. № 954. С. 16–22.
19. Борецкий И.Ф., Павлов В.Г. Теоретико-групповая интерпретация некоторых свойств линейной динамической системы // АиТ. 1979. № 2. С. 12–15.  
*Boretskiy I.F., Pavlov V.G. Group-Theoretic Interpretation of Some Properties of a Linear Dynamic System // Autom. Remote Control. 1979. V. 40. No. 2. P. 163–165.*
20. Кухтенко А.И. и др. Абстрактная теория систем. Современное состояние и тенденции развития // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наук. думка, 1972. Вып. 15. С. 4–22.
21. Семенов В.Н. Об управляемости нелинейных динамических систем управления // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наук. думка, 1971. Вып. 8. С. 38–40.
22. Яковенко Г.Н. Групповой подход к управляемости и инвариантности динамических систем // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наук. думка, 1978. № 38. С. 21–29.
23. Paul C.R., Kuol L. Controllability and observability of linear dynamical systems // SIAM J. Contr. 1972. V. 10. No. 2. P. 252–264.
24. Wonham W.M. Dynamic observes: geometric theory // IEEE Trans. Automat. Contr. 1970. V. AC-15. P. 258–259.
25. Яковенко Г.Н. Траекторный синтез оптимального управления // АиТ. 1972. № 6. С. 5–12.  
*Yakovenko G.N. Design of Optimal Control by Evolution Trajectories // Autom. Remote Control. 1972. V. 33. No. 6. P. 889–895.*
26. Яковенко Г.Н. Симметрии по состоянию в системах с управлением / Прикладная механика и математика: Межвед. сб. науч. тр. М.: МФТИ, 1992. С. 155–176.
27. Павлов В.Г. Построение некоторых инвариантных решений в частной задаче аналитического конструирования регуляторов // АиТ. 1972. № 6. С. 192–195.  
*Pavlov V.G. Obtaining Certain Invariant Solutions in a Particular Problem of Regulator Analytical Construction // Autom. Remote Control. 1972. V. 33. No. 6. P. 1054–1057.*

28. Ikeda M., Sakamoto K. On the concept of symmetry in Pontryagins maximum principle // SIAM J. Contr. 1975. V. 13. P. 389–399.
29. Павлов В.Г. Групповые свойства и инвариантные решения в задаче аналитического конструирования регуляторов в процессе с распределенными параметрами // АиТ. 1973. № 8. С. 5–12.
- Pavlov V.G. Group Properties and Invariant Solutions in the Problem of Analytical Design of Controllers in a Process with Distributed Parameters // Autom. Remote Control. 1973. V. 34. No. 8. P. 1201–1207.
30. Garaev K.G., Kuznetsov V.K. An invariant variational problem of the laminar boundary layer // J. Appl. Math. Mechan. 2011. V. 75. No. 4. P. 404–409.
31. Garaev K.G. On a Problem of Optimal Control of the Laminar Boundary Layer in Incompressible Flow // Russian Aeronaut. 2017. V. 60. No. 2. P. 299–302.
32. Garaev K.G., Mukhametzyanov I.R. Problem of Optimal Control of the Turbulent Boundary Layer on a Permeable Surface in Supersonic Gas Flow // Fluid Dynam. 2018. V. 53. No. 4. P. 573–581.
33. Garaev K.G., Mukhametzyanov I.R. To the Problem of Friction Minimization on Permeable Surfaces at Supersonic Flow Rate // Russian Aeronaut. (Iz.VUZ). 2018. V. 61. No. 3. P. 391–395.
34. Чеботарев Н.Г. Теория групп Ли. М.;Л.: Гостехтеориздат, 1940.
35. Lie S., Scheffers G. Vorlesungen über differentialgleichungeh mit bekannten infinitesimalen transformationen. Leipzig, 1891.
36. Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
37. Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы. М.: Гостехтеориздат, 1952.
38. Понtryагин Л.С., Болтманский А.Г., Гамкрелидзе Р.Б., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
39. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: НИЛ, 1960.
40. Беркович Л.М., Розов Н.Х. Система обыкновенных дифференциальных уравнений, приводимая к автономному виду // Тр. Семинара по дифференц. уравнениям. Куйбышев. 1975. С. 98–114.
41. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1979.
42. Дасарати Р., Странивасан Б. О подстановках, сводящих нестационарные системы в эквивалентные системы с постоянными коэффициентами // Экспресс-информация. Системы автоматического управления. 1968. № 27.
43. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. М.;Л.: Гостехиздат, 1950.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.*

Поступила в редакцию 16.10.2019

После доработки 24.01.2020

Принята к публикации 30.01.2020

# Стохастические системы

© 2020 г. А.С. АРХИПОВ ([ege3145@yandex.ru](mailto:ege3145@yandex.ru)),  
К.В. СЕМЕНИХИН, д-р физ.-мат. наук ([siemenkv@rambler.ru](mailto:siemenkv@rambler.ru))  
(Московский авиационный институт)

## МИНИМАКСНОЕ ЛИНЕЙНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПО ВЕРОЯТНОСТНОМУ КРИТЕРИЮ ПРИ НАЛИЧИИ УНИМОДАЛЬНЫХ ПОМЕХ И ОГРАНИЧЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ<sup>1</sup>

Рассмотрена модель линейной регрессии с вектором ограниченных параметров и центрированным вектором помех, имеющим неопределенное унимодальное распределение, но известную ковариационную матрицу. Сформулирована задача минимаксного оценивания линейной комбинации неизвестных параметров с использованием вероятностного критерия. Минимаксная оценка определяется в результате минимизации вероятностной границы на области возможных значений дисперсии и квадрата смещения всевозможных линейных оценок. Установлена меньшая консервативность полученного робастного решения в сравнении с более широкими классами распределений.

*Ключевые слова:* минимаксная оценка, вероятностный критерий, ограниченные параметры, унимодальные помехи, наихудшее распределение.

**DOI:** 10.31857/S0005231020070028

### 1. Введение

Минимаксные постановки задач оценивания возникают при необходимости построить оценку, имеющую наилучшие показатели погрешности из расчета наихудший случай сочетания неопределенных характеристик модели наблюдения. При такой трактовке проблема оценивания формулируется в виде задачи оптимизации, целью которой является выбор оценки, доставляющей минимум максимальному значению погрешности. При выборе оптимизационной формулировки необходимо учитывать, что широкие классы неопределенности приводят к сильно перестраховочным и потому малоэффективным статистическим решениям. Поэтому поиск минимаксных постановок, которые приводят к оценкам, сочетающим в себе свойства робастности и эффективности, остается актуальной проблемой. Одним из вариантов решения этой проблемы является сравнительный анализ решений минимаксных задач, соответствующих различным классам распределений.

В данной статье основным показателем качества оценивания выступает вероятность ошибки, т.е. вероятность превышения ошибкой оценки заданного

<sup>1</sup> Результаты работы получены в рамках выполнения госзадания № 9.7555.2017/БЧ.

порога. Этот вероятностный критерий был использован Бахадуром для определения специального понятия асимптотической эффективности [1]. В отличие от классического подхода, предложенного Фишером и развитого Рао и Крамером, это понятие основано на сравнении вероятности ошибки, а не среднеквадратической погрешности [2]. Неасимптотические границы для вероятности ошибки были получены при решении статистических задач распознавания и обучения [3]. При построении минимаксных линейных оценок скалярных параметрических функций по вероятностному критерию в [4] использовалось обобщенное неравенство Чебышёва. Для оценивания многомерных параметров, близких к минимизации вероятности ошибки является метод доверительного оценивания, при котором требуется построить доверительное множество наименьшего размера. Для моделей, содержащих одновременно гауссовские помехи и неопределенные параметры, метод нелинейного доверительного оценивания разработан в [5, 6]. Для стохастических многошаговых систем метод мультиоценок разработан в [7]. Задача минимаксного оценивания по вероятностному критерию при наличии неограниченных неизвестных параметров и случайных ошибок с неопределенным распределением и частично заданной ковариационной матрицей рассматривалась в [8]. В сравнении с этой работой специфика данной статьи определяется тем, что на неизвестные параметры накладываются априорные ограничения, а совместное распределение помех принадлежит классу унимодальных распределений.

Для построения минимаксных статистических решений в условиях неопределенности, описываемой с помощью ограничений на математические ожидания и ковариационные матрицы, применяется методология полуопределенного программирования и техника линейных матричных неравенств [9, 10]. Однако наихудшие значения вероятностных показателей качества на классе распределений, определяемых лишь условиями на моментные характеристики второго порядка, оказываются достаточно пессимистичными. Это легко видно из сравнения неравенств Чебышёва и Гаусса: сужение класса до унимодальных распределений позволяет снизить вероятностную границу в  $9/4$  раз [11].

Важные факты об унимодальных распределениях собраны в [12]. Утверждение о том, что равномерное распределение доставляет минимум вероятности попадания в выпуклое множество на классе унимодальных распределений, обосновано в [13–15]. Если дополнительно наложены моментные ограничения, то эту оптимизационную постановку для некоторых специальных классов унимодальных распределений можно свести к задаче полуопределенного программирования [16].

В настоящей статье рассматривается задача минимаксного оценивания линейной комбинации ограниченных параметров в модели линейной регрессии при наличии центрированных помех с неопределенным распределением, но фиксированными дисперсиями и ковариациями. Основное внимание уделяется случаю симметричного унимодального распределения. Для этого класса помех разработан метод построения неасимптотических доверительных множеств [17, 18]. Благодаря [19], радиус доверительного интервала можно выбирать оптимальным образом на основе неулучшаемой границы для вероятности превышения симметричной унимодальной величиной заданного по-

рога. Таким образом, решение задачи минимаксного оценивания для разных классов распределений получается за счет использования известных вероятностных границ, следующих из неравенств Селберга, Гаусса, Высочанского–Петунина и др.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную регрессионную модель

$$(1) \quad X = \langle a, \theta \rangle, \quad Y = B\theta + \eta,$$

в которой скалярная величина  $X$  подлежит оцениванию по фиксированному набору наблюдений, представленному в виде вектора  $Y \in \mathbb{R}^n$  (скобки  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначают скалярное произведение).

Допустим, что вектор неизвестных параметров  $\theta$  принадлежит заданному компактному множеству  $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ , а вектор случайных помех  $\eta \in \mathbb{R}^n$  имеет нулевое математическое ожидание и известную положительно определенную матрицу ковариаций  $K$ :

$$(2) \quad M\eta = 0, \quad \text{cov}\{\eta, \eta\} = K \succ O.$$

Матрица регрессии  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  и вектор коэффициентов  $a \in \mathbb{R}^p$  предполагаются заданными, а информационная матрица  $D = B^*K^{-1}B$  – невырожденной (символ  $*$  обозначает транспонирование).

Распределение вектора помех  $P_\eta$  будем считать неопределенным с точностью до принадлежности некоторому классу  $\mathcal{H}(K)$ , который содержит  $n$ -мерные распределения с учетом ограничений на моментные характеристики (2). Это условие будем записывать кратко в виде  $\eta \sim \mathcal{H}(K)$ .

В качестве  $\mathcal{H}(K)$  будут рассматриваться:

- 1) класс  $\mathcal{U}(K)$  симметричных унимодальных распределений;
- 2) класс  $\mathcal{V}(K)$  унимодальных распределений;
- 3) класс  $\mathcal{P}(K)$  всевозможных распределений.

Условие *унимодальности случайного вектора*  $\eta \in \mathbb{R}^n$  означает, что при любом выборе вектора коэффициентов  $g \in \mathbb{R}^n$  унимодальной будет величина  $\langle \eta, g \rangle$ . В [12] это свойство многомерного распределения именуется *линейной унимодальностью*. Выбор этого понятия связан с двумя причинами. Во-первых, его проверка требует лишь анализа линейных форм случайного вектора вместо изучения многомерного распределения. Во-вторых, понятие линейной унимодальности в сравнении с другими видами многомерной унимодальности определяет наиболее широкий класс распределений, в котором соблюдаются инвариантность относительно линейных преобразований случайного вектора.

По определению

$$(3) \quad \eta \sim \mathcal{U}(K) \iff \langle \eta, b \rangle \sim \mathcal{U}(d) \quad \forall b \in \mathbb{R}^n, d \geq 0: d = \langle Kb, b \rangle,$$

где  $\mathcal{U}(d)$  обозначает класс симметричных унимодальных распределений на прямой с нулевым средним и дисперсией  $d$ . Для скалярной величины условие  $\xi \sim \mathcal{U}(d)$ , помимо равенства  $D\xi = d$ , означает, что вероятность попадания

в любое борелевское множество  $B$  можно записать в виде

$$(4) \quad P\{\xi \in B\} = (1 - q)\delta_m(B) + q \int_B f(x) dx,$$

где  $q$  — число из отрезка  $[0, 1]$ ,  $\delta_m$  — мера Дирака, сосредоточенная в точке  $m = 0$ ,  $f(x)$  — четная плотность вероятности, невозрастающая на полуоси  $(0, \infty)$ . Таким образом, для величины  $\xi \sim \mathcal{U}(d)$  точка  $m = 0$  является одновременно центром симметрии, математическим ожиданием и модой.

В случае  $\xi \sim \mathcal{V}(d)$  имеет место представление (4), в котором плотность вероятности  $f(x)$  монотонно не возрастает при  $x > m$  и монотонно не убывает при  $x < m$ , хотя точка  $m$  не обязана совпадать с нулем, а плотность вероятности  $f(x)$  может быть несимметричной. Поэтому унимодальная величина  $\xi \sim \mathcal{V}(d)$  имеет те же моментные характеристики  $M\xi = 0$ ,  $D\xi = d$ , но произвольную моду  $m$ . Теперь формальное определение класса  $\mathcal{V}(K)$  можно дать аналогично (3).

Описанные классы распределений связаны включениями

$$\mathcal{U}(K) \subset \mathcal{V}(K) \subset \mathcal{P}(K).$$

При построении оценок условие  $\eta \sim \mathcal{U}(K)$  будет рассматриваться в качестве основного предположения о распределении помех, а классы  $\mathcal{V}(K)$  и  $\mathcal{P}(K)$  будут использоваться для анализа консервативности построенных оценок.

Рассмотрим линейную оценку величины  $X$

$$(5) \quad \tilde{X} = \langle f, Y \rangle + c,$$

где  $f \in \mathbb{R}^n$  — вектор коэффициентов (оцениватель), а  $c \in \mathbb{R}$  — коэффициент сдвига.

Пусть положительное число  $h$  определяет величину порога, превышение которого модулем ошибки оценивания  $\tilde{X} - X$  является весьма нежелательным событием. Вероятность этого события

$$(6) \quad P\left\{|\tilde{X} - X| \geq h\right\},$$

называемая далее *вероятностью ошибки*, характеризует надежность оценки: чем меньше вероятность (6), тем более надежна оценка  $\tilde{X}$ . Следовательно, для построения наиболее надежной оценки вероятность ошибки требуется минимизировать. Однако непосредственно сделать это невозможно, так как (6) зависит и от неопределенного распределения вектора помех, и от вектора неизвестных параметров. При этом пополнить или уточнить информацию об этих характеристиках невозможно в силу ограниченности объема наблюдений. Поэтому для формулировки корректной оптимизационной постановки задачи оценивания будем использовать *минимаксный подход*.

Итак, требуется минимизировать *гарантированное* значение вероятности ошибки в рамках имеющейся априорной информации за счет выбора коэффициентов оценки:

$$(7) \quad \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\eta \sim \mathcal{H}(K)} P\left\{|\tilde{X} - X| \geq h\right\} \rightarrow \min_{f \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}} .$$

Если пара  $(\hat{f}, \hat{c})$  доставляет минимум в (7), то соответствующую оценку  $\hat{X} = \langle \hat{f}, Y \rangle + \hat{c}$  будем называть *минимаксной*, а вектор  $\hat{f}$  при  $\hat{c} = 0$  — *минимаксным оценивателем*.

Таким образом, цель данной работы — решение задачи минимаксного оценивания по *вероятностному критерию* (7) при наличии ограниченных неизвестных параметров и случайных помех с неопределенным унимодальным распределением.

Помимо построения минимаксной оценки  $\hat{X}$ , важным представляется нахождение *наиходшего распределения*  $\hat{P}_\eta$ , на котором достигается максимум вероятности ошибки на классе  $\mathcal{H}(K)$ :

$$\sup_{\eta \sim \mathcal{H}(K)} \mathbb{P} \left\{ |\hat{X} - X| \geq h \right\} = \hat{\mathbb{P}} \left\{ |\hat{X} - X| \geq h \right\},$$

где  $\hat{\mathbb{P}}$  — символ вероятности, вычисляемой в предложении  $\eta \sim \hat{P}_\eta$ .

**Замечание 1.** Предположение о том, что ковариационная матрица вектора помех фиксирована, не является принципиальным. Условие (2) можно без ограничения общности заменить на матричное неравенство  $\text{cov}\{\eta, \eta\} \preceq K$ , которое позволяет учесть ограниченность дисперсий и неопределенность ковариаций. Однако рассмотрение более общих множеств неопределенности для матриц  $\text{cov}\{\eta, \eta\}$  выходит за рамки данной статьи.

### 3. Вероятностные границы

Определим гарантированное значение вероятности ошибки

$$(8) \quad \sup_{\eta \sim \mathcal{H}(K)} \mathbb{P} \left\{ |\tilde{X} - X| \geq h \right\}$$

при условии, что задано определенное значение вектора параметров  $\theta$ . В этом случае дисперсия и смещение оценки (5) также будут фиксированы:

$$(9) \quad d = \mathbb{D}\tilde{X} = \langle Kf, f \rangle, \quad r = \mathbb{M}\{\tilde{X} - X\} = c + \langle B^*f - a, \theta \rangle.$$

Тогда вероятность ошибки равна  $\mathbb{P}\{|\varepsilon + r| \geq h\}$ , где  $\varepsilon$  — *центрированная ошибка*. Она имеет нулевое математическое ожидание, дисперсию  $d$  и распределение из соответствующего класса, который будем обозначать как  $\mathcal{H}(d)$ .

Если  $\mathcal{H}(d)$  совпадает с одним из определенных выше классов  $\mathcal{U}(d)$ ,  $\mathcal{V}(d)$  или  $\mathcal{P}(d)$ , то условия  $\varepsilon \sim \mathcal{H}(d)$  и  $-\varepsilon \sim \mathcal{H}(d)$  равносильны, поэтому знак смещения  $r$  не имеет значения. Благодаря этому факту, определим вероятностную границу

$$(10) \quad \pi_h^{\mathcal{H}}(d, r^2) = \sup_{\varepsilon \sim \mathcal{H}(d)} \mathbb{P}\{|\varepsilon + r| \geq h\}$$

как функцию пары аргументов: дисперсии  $d$  и квадрата смещения  $r^2$ .

Для решения задачи минимаксного оценивания по вероятностному критерию принципиальным является следующий вопрос: “Совпадает ли граница (10) с гарантированным значением вероятности ошибки (8)?”

Как показывает приведенная ниже теорема, ответ на этот вопрос положителен, по крайней мере, для двух классов  $\mathcal{U}(K)$  или  $\mathcal{P}(K)$ .

*Теорема 1.* Для любой линейной оценки (5) гарантированное значение вероятности ошибки при фиксированном значении  $\theta$  равно соответствующей вероятностной границе:

$$(11) \quad \sup_{\eta \sim \mathcal{H}(K)} \mathbb{P} \left\{ |\tilde{X} - X| \geq h \right\} = \pi_h^{\mathcal{H}}(d, r^2),$$

где  $d, r$  определяются выражениями (9), а  $\mathcal{H}(K)$  — любой из двух классов распределений  $\mathcal{U}(K)$  или  $\mathcal{P}(K)$ .

Доказательства этой и последующих теорем вынесены в Приложение.

В доказательстве теоремы 1 используется специальная конструкция вектора помех, имеющего наихудшее распределение. Однако для того чтобы утверждать, что это распределение действительно принадлежит классу  $\mathcal{V}(K)$ , не хватает факта об унимодальности свертки унимодального и симметричного унимодального распределений. Но такое утверждение без дополнительных предположений неверно. К тому же вид наихудшего распределения центрированной ошибки в задаче (10) в случае  $\mathcal{H} = \mathcal{V}$  не известен. Поэтому для класса унимодальных распределений  $\mathcal{V}(K)$  можно утверждать лишь неравенство

$$\sup_{\eta \sim \mathcal{V}(K)} \mathbb{P} \left\{ |\tilde{X} - X| \geq h \right\} \leq \pi_h^{\mathcal{V}}(d, r^2).$$

О вероятностных границах известно следующее:

$$(12) \quad \pi_h^{\mathcal{U}}(d, r^2) = \begin{cases} 4d/(9h^2), & d \leq 3h^2/4, \quad |r| \leq (1 - 1/\sqrt{2})h, \\ 1 - h/\sqrt{3d}, & d \geq 3h^2/4, \quad |r| \leq (1 - 1/\sqrt{2})h, \\ 1, & |r| \geq h, \end{cases}$$

$$(13) \quad \pi_h^{\mathcal{V}}(d, r^2) \leq \bar{\pi}_h^{\mathcal{V}}(d, r^2) = \begin{cases} 4(d + r^2)/(9h^2), & d + r^2 \leq 3h^2/8, \\ 4(d + r^2)/(3h^2) - 1/3, & 3h^2/8 \leq d + r^2 \leq h^2, \\ 1, & d + r^2 \geq h^2; \end{cases}$$

$$(14) \quad \pi_h^{\mathcal{P}}(d, r^2) = \begin{cases} d/(d + (h - |r|)^2), & d + r^2 \leq |r|h, \\ (d + r^2)/h^2, & |r|h \leq d + r^2 \leq h^2, \\ 1, & d + r^2 \geq h^2. \end{cases}$$

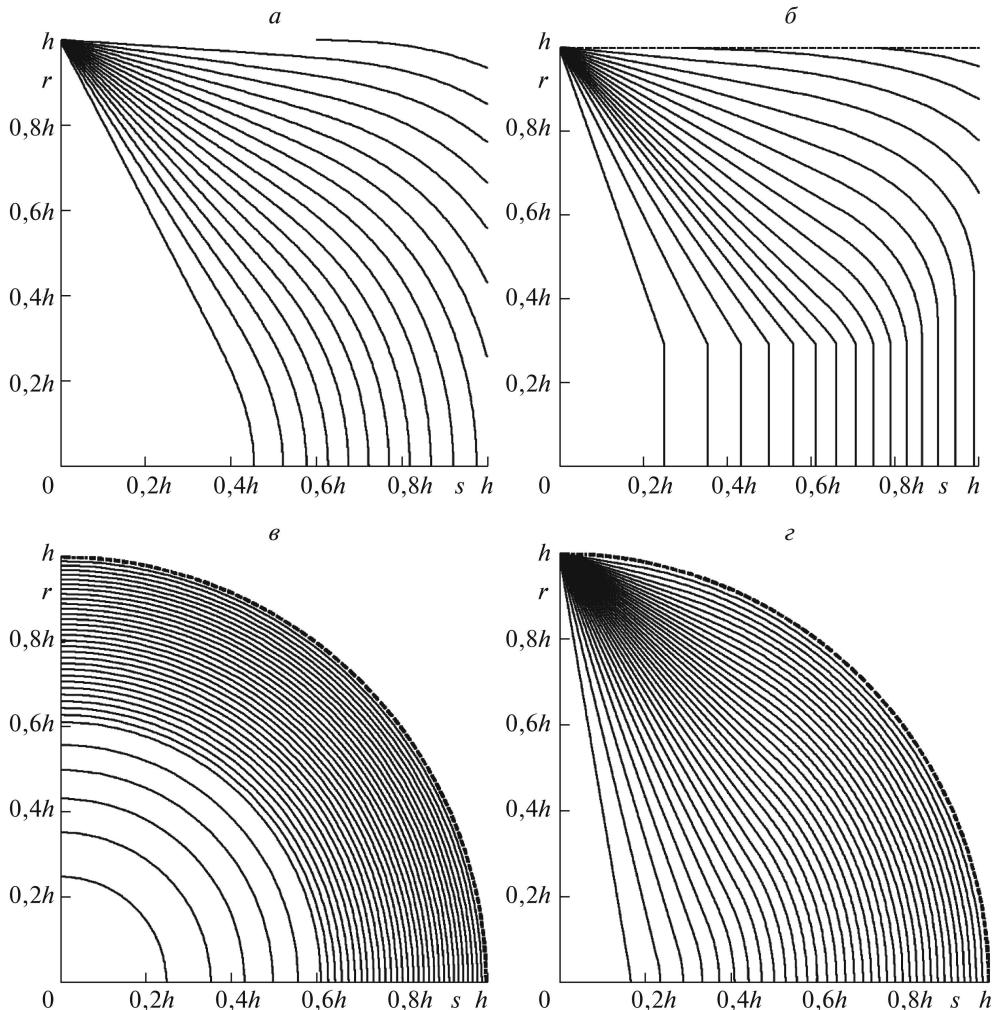


Рис. 1. Линии уровня *a* — вероятности нормальной ошибки  $\pi_h^N(s^2, r^2) = \alpha$  и вероятностных границ *б* —  $\pi_h^U(s^2, r^2) = \alpha$ , *в* —  $\bar{\pi}_h^V(s^2, r^2) = \alpha$ , *г* —  $\pi_h^P(s^2, r^2) = \alpha$  для  $\alpha = k/36$ ,  $k = 1, \dots, 35$ .

Полное выражение для границы  $\pi_h^U$  на классе симметричных унимодальных распределений показано в [19]. Первые два случая в (12) соответствуют ситуации, при которой смещение оценки составляет меньше 29 % от порога ошибки *h*. При этом  $\pi_h^U$  совпадает с правой частью неравенства Гаусса, которое описывает неулучшаемую границу в ситуации нулевого смещения [11].

К сожалению, замкнутое выражение для границы  $\pi_h^V$  на классе унимодальных распределений не известно. Тем не менее вместо  $\pi_h^V$  можно использовать ее оценку сверху  $\bar{\pi}_h^V$ , известную из неравенства Высочанского–Петунина [20, 21]. Выражение (13) полностью определяется вторым моментом  $M(\varepsilon + r)^2 = d + r^2$ , в то время как мода является неопределенной. В первом случае из (13) граница  $\bar{\pi}_h^V$  по форме совпадает с тем, что давало бы неравенство Гаусса для величины с нулевой модой.

Наконец,  $\pi_h^P$  представляет собой правую часть неравенства Селберга, описывающую вероятностную границу для величины с произвольным распределением, но фиксированными средним и дисперсией [11]. Во втором случае из (14) соответствующая граница определяется неравенством Маркова, в котором используется только второй момент.

В дополнение к указанным выше вероятностным границам приведем выражение для вероятности ошибки  $\pi_h^V(d, r^2) = \mathbb{P}\{|\varepsilon + r| \geq h\}$  в случае нормальной случайной величины  $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, d)$ :

$$(15) \quad \pi_h^V(d, r^2) = \Psi\left(\frac{h - r}{\sqrt{d}}\right) + \Psi\left(\frac{h + r}{\sqrt{d}}\right), \quad \text{где} \quad \Psi(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

На рис. 1 изображены линии уровня вероятности ошибки в четырех случаях на плоскости переменных  $(s, r)$ , где  $s$  — среднеквадратичное отклонение (с.к.о.), а  $r$  — смещение. Случай  $a$  соответствует нормальному распределению, а случаи  $b$ ,  $v$  и  $g$  описывают границы вероятности ошибки на классах распределений  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  и  $\mathcal{P}$  соответственно. Сплошные линии соответствуют уровням  $\alpha = 1/36 \approx 0,028$ ,  $1/18 \approx 0,056$ ,  $1/12 \approx 0,083$ ,  $1/9 \approx 0,111$  и далее с шагом  $1/36$ . На графиках они идут слева направо. Штриховая линия определяет границу области, вне которой вероятностная граница равна единице.

Отметим, что граница  $\bar{\pi}_h^V$  из неравенства Высочанского–Петунина является перестраховочной. Поэтому, несмотря на включение  $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}$ , неравенство  $\bar{\pi}_h^V \leq \pi_h^P$  нарушается при достаточно большом смещении  $r < h$ .

#### 4. Геометрический метод решения задачи минимаксного оценивания

Теорема 1 позволяет высказать предположение о том, что исходная минимаксная задача (7) может быть сведена к минимизации вероятностной границы

$$(16) \quad \min_{(d, \rho) \in Q} \pi_h^H(d, \rho)$$

по области возможных значений характеристик ошибки:

$$(17) \quad Q = \left\{ (d, \rho) : \exists (f, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : d \geq \langle Kf, f \rangle, \rho \geq (c + \langle B^*f - a, \theta \rangle)^2 \forall \theta \in \Theta \right\}.$$

Согласно определению область  $Q$  образована парами  $(d, \rho)$ , где  $d$  — дисперсия, а  $\rho = r^2$  — квадрат смещения произвольной линейной оценки. Свойства области (17) описаны ниже.

**Теорема 2.** *На плоскости переменных  $(d, \rho)$  область  $Q$  представляет собой надграфик выпуклой непрерывной функции*

$$(18) \quad \rho(d) = \min_{(f, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \left\{ \max_{\theta \in \Theta} (c + \langle B^*f - a, \theta \rangle)^2 : \langle Kf, f \rangle \leq d \right\}, \quad d \geq 0.$$

Для  $\lambda \geq 0$  прямая  $\rho + \lambda d = \gamma_\lambda$  будет опорной к  $Q$  тогда и только тогда, когда

$$(19) \quad \gamma_\lambda = \min_{(f,c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \left\{ \lambda \langle Kf, f \rangle + \max_{\theta \in \Theta} (c + \langle B^* f - a, \theta \rangle)^2 \right\}.$$

Если  $(f_\lambda, c_\lambda)$  — решение задачи (19), то точка

$$(20) \quad d_\lambda = \langle Kf_\lambda, f_\lambda \rangle, \quad \rho_\lambda = \max_{\theta \in \Theta} (c_\lambda + \langle B^* f_\lambda - a, \theta \rangle)^2$$

лежит на кривой (18).

Таким образом, построение нижней огибающей множества  $Q$  связано с решением семейства минимаксных задач (18), каждая из которых состоит в минимизации максимального смещения при ограниченной дисперсии ошибки. Благодаря выпуклости и замкнутости, множество  $Q$  можно описать набором опорных прямых  $\rho + \lambda d = \gamma_\lambda$ . При этом величина  $\gamma_\lambda$  равна минимаксному значению среднеквадратичной (с.к.) ошибки в исходной модели (1) при условии, что коэффициент  $\lambda$  задает уровень помех:  $\text{cov}\{\eta, \eta\} = \lambda K$ .

Отметим, что при  $\lambda = 0$  соответствующее  $\gamma_0$  равно минимально возможному значению максимума квадрата смещения. Но в силу невырожденности информационной матрицы  $D$  существуют несмешенные оценки, поэтому указанное значение равно нулю:  $\gamma_0 = \rho(d) = 0$  при  $d \geq d_0$ , где  $d_0 = \langle D^{-1}a, a \rangle$  — дисперсия наилучшей линейной несмешенной оценки

$$\tilde{X}_0 = \langle f_0, Y \rangle, \quad f_0 = K^{-1}BD^{-1}a.$$

Если же  $\lambda > 0$  достаточно велико, то  $\gamma_\lambda = R^2$ , где  $R$  — радиус интервала возможных значений оцениваемой величины  $X$ , т.е.

$$R = \frac{1}{2} \left( \max_{\theta \in \Theta} \langle a, \theta \rangle - \min_{\theta \in \Theta} \langle a, \theta \rangle \right).$$

Для решения минимаксной задачи (19) можно использовать методы двойственной оптимизации (см., например, теорему 3.4.1 из [22]).

Если  $\mathcal{H}(K)$  — один из классов  $\mathcal{N}(0, K)$ ,  $\mathcal{U}(K)$  или  $\mathcal{P}(K)$ , то связь между задачей минимаксного оценивания по вероятностному критерию (7) и двумерной оптимизацией вероятностной границы (16) раскрыта в следующей теореме.

**Теорема 3.** Если точка  $(\hat{d}, \hat{\rho})$  доставляет минимум вероятностной границы в (16), а пара  $(\hat{f}, \hat{c})$  образует решение минимаксной задачи (19) с параметром  $\lambda \geq 0$ , равным коэффициенту опорной прямой к области  $Q$  в точке  $(\hat{d}, \hat{\rho})$ , то оценка  $\hat{X} = \langle \hat{f}, Y \rangle + \hat{c}$  является минимаксной по вероятностному критерию, причем

$$(21) \quad \pi_h^{\mathcal{H}}(\hat{d}, \hat{\rho}) = \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\eta \sim \mathcal{H}(K)} \mathbb{P} \left\{ |\hat{X} - X| \geq h \right\}.$$

**Замечание 2.** Утверждение теоремы 3 для случая  $\mathcal{H} = \mathcal{P}$  фактически содержится в теореме 7.13.1 из [4].

**Замечание 3.** Если вместо  $\pi_h^{\mathcal{V}}$  взять границу Высочанского–Петунина на  $\bar{\pi}_h^{\mathcal{V}}$ , то все утверждения теоремы 3 остаются в силе для класса унимодальных распределений  $\mathcal{V}(K)$ , кроме равенства (21).

**Замечание 4.** Теоремы 1–3 допускают обобщение на бесконечномерный случай, когда  $\Theta$  образует ограниченное подмножество некоторого нормированного пространства  $T$ ,  $\langle a, \cdot \rangle$  определяет ограниченный линейный функционал на  $T$ , а  $B$  является ограниченным линейным оператором из  $T$  в  $\mathbb{R}^n$ . В этом случае в формулировках теорем все максимумы по множеству  $\Theta$  необходимо заменить на супремумы.

Геометрическая иллюстрация способа решения, представленного в теореме 3, описана в следующем примере.

**Пример 1.** Рассмотрим случай, когда множество неизвестных параметров представляет собой эллипсоид

$$(22) \quad \Theta = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^p : \langle \Sigma \theta, \theta \rangle \leq 1 \right\},$$

где  $\Sigma$  – положительно определенная матрица размера  $p \times p$ .

В этом случае минимаксная задача (19) может быть решена непосредственно. Для этого заметим, что имеет место равенство

$$(23) \quad \max_{\theta \in \Theta} \langle u, \theta \rangle^2 = \langle \Sigma^{-1} u, u \rangle.$$

Отсюда следует, что задача (19) принимает вид

$$\gamma_\lambda = \min_{f \in \mathbb{R}^n} \left\{ \lambda \langle Kf, f \rangle + \langle \Sigma^{-1}(B^* f - a), B^* f - a \rangle \right\}.$$

Тогда ее решением будет

$$(24) \quad f_\lambda = K^{-1} B(D + \lambda \Sigma)^{-1} a, \quad \gamma_\lambda = \lambda \langle (D + \lambda \Sigma)^{-1} a, a \rangle,$$

где вектор  $f_\lambda$  известен как оцениватель Кукса–Ольмана.

Укажем выражения для дисперсии и квадрата смещения с помощью (20) и (23):

$$d_\lambda = \langle (D + \lambda \Sigma)^{-1} D (D + \lambda \Sigma)^{-1} a, a \rangle, \\ \rho_\lambda = \lambda^2 \langle (D + \lambda \Sigma)^{-1} \Sigma (D + \lambda \Sigma)^{-1} a, a \rangle.$$

В специальном случае, когда  $a$  является собственным вектором матрицы  $D \Sigma^{-1}$ , данные выражения можно упростить:

$$d_\lambda = d_0 (1 + \lambda d_0 / R^2)^{-2}, \quad \rho_\lambda = R^2 (1 + R^2 / (\lambda d_0))^{-2}.$$

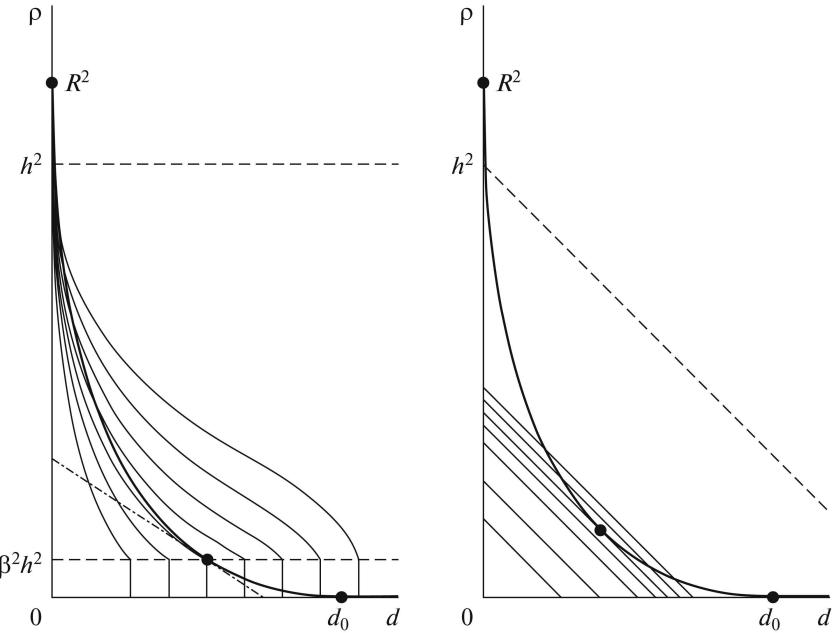


Рис. 2. Граница области  $Q$  с линиями уровня двух вероятностных границ:  $\pi_h^U(d, \rho)$  (слева) и  $\pi_h^V(d, \rho)$  (справа).

Отсюда получаем явное уравнение кривой, определяющей левую нижнюю часть границы области  $Q$ :

$$\rho = R^2(1 - \sqrt{d/d_0})^2, \quad 0 \leq d \leq d_0.$$

Данная кривая выходит при  $\lambda = 0$  из нижней точки  $(d_0, 0)$ , соответствующей несмещенной оценке с наименьшей дисперсией  $d_0 = \langle D^{-1}a, a \rangle$ , и заканчивается при  $\lambda \rightarrow \infty$  в верхней точке с координатами  $(0, R^2)$ , где  $R = \langle \Sigma^{-1}a, a \rangle^{1/2}$  — радиус интервала возможных значений оцениваемой величины  $X = \langle a, \theta \rangle$ . При этом касательная к границе в точке  $(d_0, 0)$  будет горизонтальна, а в точке  $(0, R^2)$  — вертикальна.

Геометрическая иллюстрация этих фактов приведена на рис. 2. На обоих графиках сплошной жирной кривой показана граница области  $Q$  в переменных  $d, \rho$ , а тонкими сплошными — линии уровня двух вероятностных границ. Кроме того, на каждом графике отмечены три точки, две из которых  $(d_0, 0)$  и  $(0, R^2)$  лежат на координатных осях, а третья представляет собой точку минимума  $(\hat{d}, \hat{\rho})$  соответствующей вероятностной границы  $\pi_h^U$  или  $\pi_h^V$ . Касательная к границе области  $Q$  в точке минимума  $\pi_h^U$  изображена штрих-пунктиром, а для вероятностной границы  $\pi_h^V$  касательная совпадает с линией уровня.

Важно отметить, что для оценки, минимаксной по вероятностному критерию на классе симметричных унимодальных распределений  $\mathcal{U}$ , максимальное смещение не может быть меньше 29% порога ошибки  $h$ . Это следует из того,

что ниже прямой  $\rho = \beta^2 h^2$ , где  $\beta = 1 - 1/\sqrt{2} \approx 0,29$ , линии уровня вероятностной границы  $\pi_h^U$  представляют собой вертикальные отрезки (см. левый график рис. 2).

Для оценки, которая определяется из условия минимума границы на классе  $\mathcal{V}$ , оптимальные значения дисперсии  $\hat{d}$  и квадрата смещения  $\hat{\rho}$  лежат на прямой  $\rho + d = \text{const}$ , поэтому касательная в точке  $(\hat{d}, \hat{\rho})$  будет иметь коэффициент наклона  $\lambda = 1$ . В силу теоремы 2 это означает, что искомая оценка будет идентична с.к. минимаксной оценке.

Для визуального сравнения вероятностных границ были взяты несколько уровней вероятности ошибки, составляющих арифметическую прогрессию  $\alpha_1 < \dots < \alpha_7$ , где  $\pi_h^U = \alpha_3$  и  $\pi_h^V = \alpha_5$  – оптимальные значения (на рис. 2 этим уровням соответствуют третья и пятая линии, если считать слева направо).

## 5. Оценивание терминального положения маневрирующей цели

Данный раздел посвящен нахождению характеристик оценок, минимаксных по вероятностному критерию в задаче определения движения маневрирующей цели.

Движение цели описывается дважды непрерывно дифференцируемой функцией  $x(t) \in \mathbb{R}$ , которая определяет положение цели в момент  $t \in [0, T]$ . Для начального положения  $x(0)$  и начальной скорости  $\dot{x}(0)$  известны диапазоны

$$|x(0) - x_0| \leq \delta_x, \quad |\dot{x}(0) - v_0| \leq \delta_v,$$

а ускорение цели подчинено ограничению

$$(25) \quad |\ddot{x}(t)| \leq \delta_w.$$

Предположим, что имеются измерения  $Y_1, \dots, Y_n$ , проведенные в заданные моменты времени  $0 < t_1 < \dots < t_n < T$ :

$$Y_k = x(t_k) + \eta_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

с центрированными некоррелированными ошибками одинаковой дисперсии  $\sigma^2$ .

Допустим, что оцениванию подлежит терминальное положение цели  $X = x(T)$ , а критерием качества является минимум вероятности ошибки  $P\{|X - \tilde{X}| \geq h\}$  с учетом того, что помехи имеют неопределенное совместное распределение (здесь  $h$  – заданный порог ошибки, а  $\tilde{X}$  – искомая оценка).

Подобная задача со с.к. критерием качества и непрерывным процессом наблюдений рассматривалась в [23].

С учетом замечания 4 описанную модель можно записать в виде (1), если:

— обозначить вектор наблюдения, вектор помех и оцениваемую величину как

$$Y = \text{col}[Y_1, \dots, Y_n], \quad \eta = \text{col}[\eta_1, \dots, \eta_n] \in \mathbb{R}^n, \quad X = x(T) \in \mathbb{R};$$

— определить вектор параметров

$$\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2), \quad \theta_0 = x(0), \quad \theta_1 = \dot{x}(0), \quad \theta_2(t) = \ddot{x}(t)$$

как элемент пространства  $T = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times C[0, T]$ ;

— задать множество неопределенности

$$\Theta = [x_0 - \delta_x, x_0 + \delta_x] \times [v_0 - \delta_v, v_0 + \delta_v] \times B,$$

где  $B$  — шар радиуса  $\delta_w$  в пространстве непрерывных функций  $C[0, T]$ ;

— ввести оператор  $B: T \rightarrow \mathbb{R}^n$  и функционал  $\langle a, \cdot \rangle$  на  $T$

$$(B\theta)_k = \theta_0 + \theta_1 t_k + \int_0^T (t_k - \tau)_+ \theta_2(\tau) d\tau, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\langle a, \theta \rangle = \theta_0 + \theta_1 T + \int_0^T (T - \tau) \theta_2(\tau) d\tau,$$

где  $(\cdot)_+ = \max\{\cdot, 0\}$ .

В силу симметричности множества  $\Theta$  относительно точки  $\theta^o = (x_0, v_0, 0)$  оценку можно искать в виде

$$(26) \quad \tilde{X} = x_0 + v_0 T + \sum_{k=1}^n f_k (Y_k - (x_0 + v_0 t_k)), \quad f = \text{col}[f_1, \dots, f_n].$$

Запишем выражение для смещения, используя сопряженный оператор  $B^*$ :

$$\begin{aligned} M\{\tilde{X} - X\} &= \langle B^* f - a, \theta - \theta^o \rangle = \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^n f_k - 1 \right\} (\theta_0 - x_0) + \left\{ \sum_{k=1}^n f_k t_k - T \right\} (\theta_1 - v_0) + \\ &\quad + \int_0^T \left\{ \sum_{k=1}^n f_k (t_k - \tau)_+ - (T - \tau) \right\} \theta_2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Если к данному выражению применить равенство

$$\sup_{\phi \in B} \int_0^T \phi(\tau) \psi(\tau) d\tau = \delta_w \int_0^T |\psi(\tau)| d\tau,$$

то получим точную верхнюю грань смещения

$$\begin{aligned} (27) \quad \bar{r}(f) &= \sup_{\theta \in \Theta} M\{\tilde{X} - X\} = \\ &= \delta_x \left| \sum_{k=1}^n f_k - 1 \right| + \delta_v \left| \sum_{k=1}^n f_k t_k - T \right| + \delta_w \int_0^T \left| \sum_{k=1}^n f_k (t_k - \tau)_+ - (T - \tau) \right| d\tau. \end{aligned}$$

Теперь задача минимизации гарантированного значения смещения при ограничении на дисперсию (18) принимает вид

$$(28) \quad \rho(s^2) = \min_{f \in \mathbb{R}^n} \{ \bar{r}^2(f) : \sigma^2 \langle f, f \rangle \leq s^2 \}.$$

Если разбить  $[0, T]$  на интервалы между наблюдениями, включая точки  $t_0 = 0$  и  $t_{n+1} = T$ , то получится представление

$$\begin{aligned} \bar{r}(f) &= \delta_x |g_1| + \delta_v |u_1| + \delta_w \sum_{l=1}^n \int_{t_{l-1}}^{t_l} |u_l - g_l \tau| d\tau + \delta_w \frac{(T - t_n)^2}{2}, \\ g_l &= \sum_{k=l}^n f_k - 1, \quad u_l = \sum_{k=l}^n f_k t_k - T. \end{aligned}$$

Можно проверить, что имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_{t_{l-1}}^{t_l} |u_l - g_l \tau| d\tau &= \frac{t_l - t_{l-1}}{2} \mu(p_l, q_l), \quad p_l = u_l - g_l t_l, \quad q_l = u_l - g_l t_{l-1}, \\ \mu(p, q) &= 2 \int_0^1 |(1-t)p + tq| dt = \begin{cases} |p+q|, & pq \geq 0, \\ (p^2 + q^2)/|p-q|, & pq \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Для аппроксимации  $r(f)$  кусочно-линейными функциями можно использовать приближение, основанное на формуле трапеций:

$$\begin{aligned} \bar{r}(f) &\approx \delta_x \left| \sum_{k=1}^n f_k - 1 \right| + \\ &+ \left( \delta_v + \frac{\delta_w \Delta}{2} \right) \left| \sum_{k=1}^n f_k t_k - T \right| + \delta_w \Delta \sum_{m=1}^{M-1} \left| \sum_{k=1}^n f_k (t_k - \tau_m)_+ - (T - \tau_m) \right|, \end{aligned}$$

где  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_M = T$  — равномерная сетка на  $[0, T]$  с шагом  $\Delta < t_1$ . После этого преобразования задача (28) приспособлена для решения в пакете **cvx**, реализованном на платформе MATLAB [24].

Необходимо отметить, что применение пакета **cvx** было связано с некоторыми ограничениями: при количестве наблюдений  $n \geq 10$  решатель не мог определить значимого направления минимизации. Частично это объясняется структурой решения задачи гарантирующего оценивания с непрерывным процессом наблюдений и равномерно ограниченными возмущениями. В таких задачах, зачастую, хватает небольшого числа измерений для достаточно точной аппроксимации минимаксной оценки [23]. Кроме того, для решения задачи (28) более приспособлены специальные методы  $\ell_1$ -оптимизации [25].

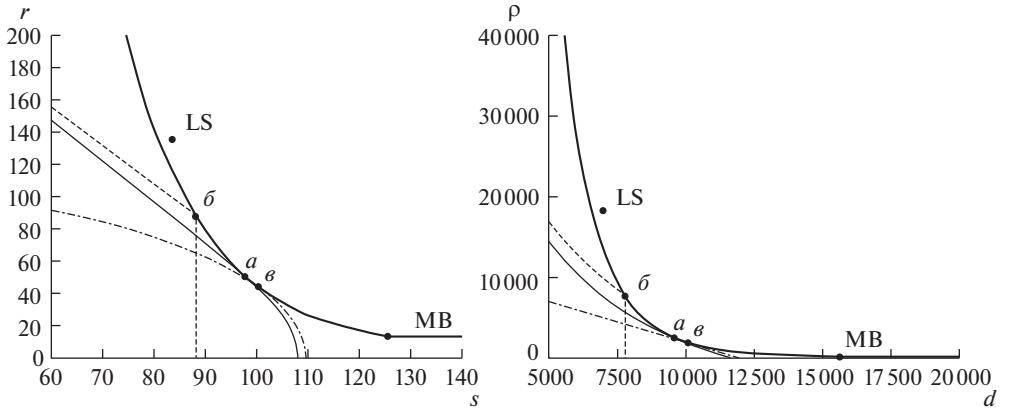


Рис. 3. Граница области  $Q$  в переменных  $(s, r)$  (слева) и в переменных  $(d, \rho)$  (справа), где  $s$  – с.к.о.,  $r$  – смещение (м) и  $d = s^2$ ,  $\rho = r^2$  ( $\text{м}^2$ ).

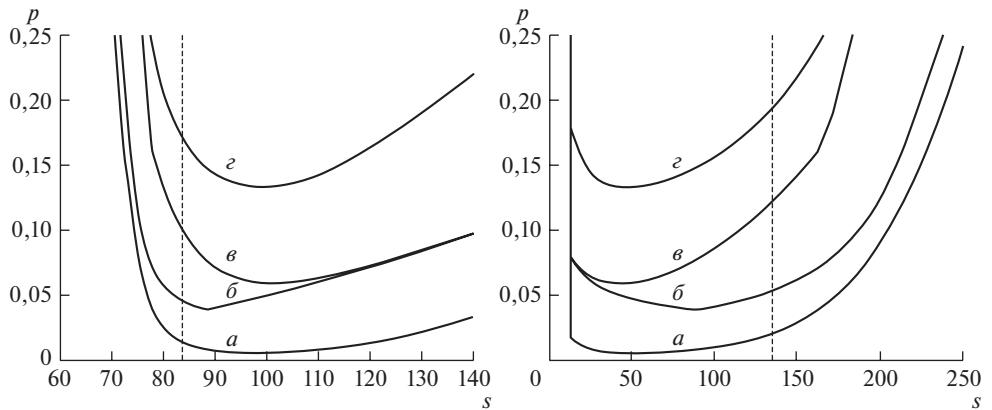


Рис. 4. Зависимость вероятности ошибки  $p$  от с.к.о.  $s$  (м) (слева) и смещения  $r$  (м) (справа) на границе области  $Q$  для четырех гипотез  $a$ – $\varepsilon$ .

Для расчетов были взяты следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} n &= 5, & \delta_x &= 50 \text{ м}, & \delta_v &= 10 \text{ м/с}, & \delta_w &= 5 \text{ м/с}^2, \\ \sigma &= 100 \text{ м}, & h &= 300 \text{ м}, & t_1 &= 2 \text{ с}, & t_2 &= 6,25 \text{ с}, \\ t_3 &= 10,5 \text{ с}, & t_4 &= 14,75 \text{ с}, & t_5 &= 19 \text{ с}, & T &= 20 \text{ с}. \end{aligned}$$

Относительно распределения вектора помех  $\eta = \text{col} [\eta_1, \dots, \eta_n]$  введены четыре гипотезы:

$$a) \eta \sim \mathcal{N}(0, K), \quad b) \eta \sim \mathcal{U}(K), \quad c) \eta \sim \mathcal{V}(K), \quad d) \eta \sim \mathcal{P}(K), \quad \text{где } K = \sigma^2 I_n.$$

На рис. 3 изображена граница области  $Q$ , точкой которой представляют собой пары  $(s^2, r^2)$ , где  $r = \sqrt{\rho(s^2)}$  – минимум гарантированного значения смещения (28) при ограничении на дисперсию оценок  $s^2$ . Точка LS соответствует оценке  $\tilde{X}_{\text{LS}}$ , полученной по методу наименьших квадратов (МНК) в упрощенной модели без учета ускорения цели:  $x(t) = \theta_0 + \theta_1 t$ . Как видно из рисунка,

Значения вероятности ошибки на нескольких оценках

Гипотеза $\mathcal{H}$	$\hat{s}$ (м)	$\hat{r}$ (м)	$\pi_h^{\mathcal{H}}(\hat{s}^2, \hat{r}^2)$	$\pi_h^{\mathcal{H}}(s_{\text{LS}}^2, r_{\text{LS}}^2)$	$\pi_h^{\mathcal{H}}(s_{\text{MB}}^2, r_{\text{MB}}^2)$
а) $\mathcal{N}(0, K)$	97,87	50,20	0,005520	0,013810	0,021324
б) $\mathcal{U}(K)$	88,66	85,63	0,038821	0,045803	0,083008
в) $\mathcal{V}(K)$	100,37	43,95	0,059290	0,100724	0,083859
г) $\mathcal{P}(K)$	98,70	47,99	0,132998	0,170892	0,188684

МНК-оценка является сильно смещенной: ее смещение в наихудшем случае будет  $r_{\text{LS}} \approx 135$  м. Это объясняется тем, что в исходной модели оцениваемая траектория  $x(t)$  зависит от элемента бесконечномерного пространства  $\theta_2 = \ddot{x}(t)$ , поэтому несмешанных оценок по конечному числу наблюдений не существует. Тем не менее в силу условия (25) смещения оценок будут ограничены. Можно выбрать оценку  $\tilde{X}_{\text{MB}}$  с минимально возможной верхней границей смещения  $r_{\text{MB}} \approx 13$  м. Это значительно меньше, чем в случае МНК-оценки, хотя с.к.о. оказывается больше:  $s_{\text{MB}} \approx 125$  м и  $s_{\text{LS}} \approx 84$  м.

На рис. 4 изображены графики гарантированных значений вероятности ошибки  $\mathbb{P}\{|X - \tilde{X}| \geq h\}$  на оценках (26), (28) при различном выборе дисперсии  $s^2$ . Штриховая линия соответствует характеристикам МНК-оценки.

В таблице приведены значения вероятности ошибки на трех оценках: минимаксной, МНК и оценке с минимальным смещением. Согласно теореме 1 характеристики минимаксной оценки  $\hat{s}^2, \hat{r}^2$  образуют точку минимума вероятностной границы  $\pi_h^{\mathcal{H}}$  на границе области  $Q$ . В зависимости от выбора класса  $\mathcal{H}$  эти характеристики будут разными, что видно из рис. 4 и таблицы.

## 6. Заключение

В работе описан геометрический способ решения задачи минимаксного оценивания по вероятностному критерию в модели линейной регрессии с ограниченными параметрами и симметричными унимодальными помехами. Проведено сравнение минимаксных оценок линейной комбинации неизвестных параметров для нескольких классов совместных распределений помех. Способ описания априорной информации о неопределенном многомерном распределении в виде набора условий на симметричность, унимодальность, математическое ожидание и ковариационную матрицу приводит к более стабильным статистическим решениям, которые оказываются менее консервативными, чем известные ранее.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 1.* Рассмотрим линейную оценку  $\tilde{X}$ , определяемую вектором коэффициентов  $f \in \mathbb{R}^n$  и сдвигом  $c \in \mathbb{R}$  согласно (5).

Если оцениваемая величина  $X$  и вектор наблюдений  $Y$  удовлетворяют уравнениям модели регрессии (1) с вектором параметров  $\theta \in \Theta$  и вектором помех  $\eta \sim \mathcal{H}(K)$ , то ошибка  $\tilde{X} - X$  допускает представление  $\varepsilon + r$ , где  $\varepsilon \sim \mathcal{H}(d)$ , а  $d, r$  удовлетворяют соотношениям (9). Следовательно, в (11) имеет место знак неравенства « $\leqslant$ ».

Чтобы доказать обратное неравенство, достаточно для заданного вектора параметров  $\theta \in \Theta$  и случайной величины  $\varepsilon \sim \mathcal{H}(d)$ , где  $d$  и  $r$  имеют вид (9), подобрать случайный вектор  $\eta \sim \mathcal{H}(K)$ , удовлетворяющий равенству  $\varepsilon + r = \tilde{X} - X$  с вероятностью 1. В силу (1) и (9) требуемое равенство равносильно следующему:

$$\varepsilon = \langle f, \eta \rangle.$$

Действуя так же, как в [26], определим искомый вектор по правилу

$$\eta = K^{1/2} \left\{ \varepsilon |g|^{-2} g + P\zeta \right\},$$

где  $P = I_n - |g|^{-2} gg^*$ ,  $g = K^{1/2} f$ ,  $I_n$  — единичная матрица размера  $n \times n$ , а  $\zeta$  — стандартный  $n$ -мерный гауссовский вектор, не зависящий от случайной величины  $\varepsilon$ . Проверка условий  $\varepsilon = \langle f, \eta \rangle$ ,  $M\eta = 0$  и  $\text{cov}\{\eta, \eta\} = K$  идентична выкладкам из [26].

В случае  $\mathcal{H} = \mathcal{P}$  доказательство заканчивается.

При  $\mathcal{H} = \mathcal{U}$  остается проверить, что распределение вектора  $\eta$  симметрично и линейно унимодально. Согласно [12] это условие означает, что при любом выборе вектора коэффициентов  $b \in \mathbb{R}^n$  распределение линейной комбинации

$$\langle b, \eta \rangle = \varepsilon |g|^{-2} \langle b, Tg \rangle + \langle b, TP\zeta \rangle$$

является симметричным унимодальным. А этот факт следует из унимодальности свертки двух симметричных унимодальных одномерных распределений, каковыми являются распределения обоих слагаемых в силу  $\varepsilon \sim \mathcal{U}(d)$  и  $\zeta \sim \mathcal{N}(0, I_n)$  (см. теорему 1.6 из того же источника).

*Доказательство теоремы 2.* Выпуклость области  $Q$  непосредственно следует из выпуклости по  $(f, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  двух функций

$$\langle Kf, f \rangle \quad \text{и} \quad \max_{\theta \in \Theta} (c + \langle B^* f - a, \theta \rangle)^2.$$

Поэтому функция  $\rho(d)$  как нижняя огибающая выпуклого множества  $Q$  тоже будет выпуклой (см. теорему I.5.3 из [27]). А в силу того, что она всюду конечна, она будет непрерывной.

Второе утверждение следует из определения опорной прямой для выпуклого множества. При фиксированном  $\lambda \geq 0$  прямая  $\rho + \lambda d = \gamma_\lambda$  является опорной к области  $Q$  в точке  $(d_\lambda, \rho_\lambda)$ , если линейная форма  $\rho + \lambda d$  достигает на  $Q$  минимума (или максимума) в указанной точке. Случай максимума можно отбросить, поскольку указанная линейная форма на области  $Q$  не ограничена сверху. Таким образом, получаем требуемые факты (19) и (20).

*Доказательство теоремы 3.* Из теоремы 1 в силу монотонной зависимости  $\pi_h^{\mathcal{H}}(d, \rho)$  по  $\rho$  следует равенство

$$(1) \quad \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\eta \sim \mathcal{H}(K)} \mathbb{P} \left\{ |\tilde{X} - X| \geq h \right\} = \pi_h^{\mathcal{H}}(d, \rho),$$

где  $d = \langle Kf, f \rangle$  и  $\rho = \sup_{\theta \in \Theta} (c + \langle B^* f - a, \theta \rangle)^2$ .

Пусть  $(\hat{d}, \hat{\rho})$  — точка минимума  $\pi_h^{\mathcal{H}}(d, \rho)$  по  $(d, \rho) \in Q$ , а  $(\hat{f}, \hat{c})$  — решение минимаксной задачи (19) с параметром  $\lambda$ , равным коэффициенту опорной прямой к области  $Q$  в точке  $(\hat{d}, \hat{\rho})$ . Тогда согласно теореме 2 будут иметь место равенства

$$\hat{d} = \langle K\hat{f}, \hat{f} \rangle, \quad \hat{\rho} = \max_{\theta \in \Theta} \left( \hat{c} + \langle B^* \hat{f} - a, \theta \rangle \right)^2.$$

Поэтому на оценке  $\hat{X} = \langle \hat{f}, Y \rangle + \hat{c}$  реализуется равенство

$$(2) \quad \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\eta \sim \mathcal{H}(K)} \mathbb{P} \left\{ |\hat{X} - X| \geq h \right\} = \pi_h^{\mathcal{H}}(\hat{d}, \hat{\rho}).$$

Теперь в силу  $\pi_h^{\mathcal{H}}(\hat{d}, \hat{\rho}) \leq \pi_h^{\mathcal{H}}(d, \rho)$  получаем, что левая часть (2) не превосходит левую часть (1). Следовательно,  $\hat{X}$  — минимаксная оценка по вероятностному критерию на классе  $\mathcal{H}(K)$ , что и требовалось доказать.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bahadur R.R.* On the Asymptotic Efficiency of Tests and Estimates // Sankhya: Indian J. Statist. 1960. V. 22. No. 3–4. P. 229–252.
2. *Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1977.
3. *Вапник В.Н., Червоненкис А.Я.* Теория распознавания образов (статистические проблемы обучения). М.: Наука, 1974.
4. *Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е.* Определение и коррекция движения. М.: Наука, 1980.
5. *Тимофеева Г.А.* Нелинейные доверительные множества для статистически неопределенных систем // АиТ. 2003. № 11. С. 84–95.  
*Timofeeva G.A.* Nonlinear Confidence Estimates for Statistically Uncertain Systems // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 11. P. 1724–1733.
6. *Медведева Н.В., Тимофеева Г.А.* Сравнение линейных и нелинейных методов доверительного оценивания для статистически неопределенных систем // АиТ. 2007. № 4. С. 51–60.  
*Medvedeva N.V., Timofeeva G.A.* Comparison of Linear and Nonlinear Methods of Confidence Estimation for Statistically Uncertain Systems // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 4. P. 619–627.
7. *Ананьев Б.И.* Многошаговые стохастические включения специального вида и их мультиоценки // АиТ. 2007. № 11. С. 3–11.  
*Anan'ev B.I.* Multistep Specific Stochastic Inclusions and Their Multiestimates // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 11. P. 1891–1899.
8. *Панков А.Р., Семенихин К.В.* О минимаксном оценивании по вероятностному критерию // АиТ. 2007. № 3. С. 66–82.  
*Pankov A.R., Semenikhin K.V.* Minimax Estimation by Probabilistic Criterion // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 430–445.
9. *Delage E., Ye Y.* Distributionally Robust Optimization under Moment Uncertainty with Application to Data-Driven Problems // Oper. Res. 2010. V. 58. P. 595–612.

10. Коган М.М. Робастное оценивание и фильтрация в неопределенных линейных системах при неизвестных ковариациях // АиТ. 2015. № 10. С. 50–66.  
*Kogan M.M. Robust Estimation and Filtering in Uncertain Linear Systems under Unknown Covariations // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 10. P. 1751–1764.*
11. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
12. Dharmadhikari S., Joag-dev K. Unimodality, Convexity, and Applications. San Diego: Academic, 1988.
13. Barmish B.R., Lagoa C.M. The Uniform Distribution: A Rigorous Justification for Its Use in Robustness Analysis // Math. Control Signal. Syst. 1997. V. 10. P. 203–222.
14. Кубзун А.И. О наихудшем распределении в задачах стохастической оптимизации с функцией вероятности // АиТ. 1998. № 11. С. 104–116.  
*Kibzun A.I. On the Worst-Case Distribution in Stochastic Optimization Problems with Probability Function // Autom. Remote Control. 1998. V. 59. No. 11. P. 1587–1597.*
15. Кан Ю.С. Об обосновании принципа равномерности в задаче оптимизации вероятностного показателя качества // АиТ. 2000. № 1. С. 54–70.  
*Kan Yu.S. On the Justification of the Uniformity Principle in the Optimization of a Probability Performance Index // Autom. Remote Control. 2000. V. 61. No. 1. P. 50–64.*
16. Van Parys B.P.G., Goulart P.J., Kuhn D. Generalized Gauss Inequalities via Semidefinite Programming // Math. Program. 2016. V. 156. P. 271–302.
17. Границин О.Н. Неасимптотическое доверительное множество для параметров линейного объекта управления при произвольном внешнем возмущении // АиТ. 2012. № 1. С. 24–35.  
*Granichin O.N. The Nonasymptotic Confidence Set for Parameters of a Linear Control Object under an Arbitrary External Disturbance // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 1. P. 20–30.*
18. Weyer E., Campi M.C., Csaji B.C. Asymptotic Properties of SPS Confidence Regions // Automatica. 2017. V. 82. P. 287–294.
19. Семенихин К.В. Двусторонняя вероятностная граница для симметричной уни-модальной случайной величины // АиТ. 2019. № 3. С. 103–122.  
*Semenikhin K.V. Two-Sided Probability Bound for a Symmetric Unimodal Random Variable // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 3. P. 474–489.*
20. Высочанский Д.Ф., Петунин Ю.И. Об одном неравенстве Гаусса для одновершинных распределений // Теория вероятн. и ее примен. 1982. Т. 27. № 2. С. 339–341.  
*Vysochanskii D.F., Petunin Yu.I. On a Gauss Inequality for Unimodal Distributions // Theory Probab. Appl. 1983. V. 27. No. 2. P. 359–361.*
21. Pukelsheim F. The Three Sigma Rule // Amer. Statist. 1994. V. 48. P. 88–91.
22. Соловьев В.Н. Двойственные экстремальные задачи и их применение к задачам минимаксного оценивания // Успехи матем. наук. 1997. Т. 52. № 4. С. 49–86.  
*Solov'ev V.N. Dual Extremal Problems and Their Applications to Minimax Estimation Problems // Russian Math. Surveys. 1997. V. 52. No. 4. P. 685–720.*
23. Matasov A.I. Estimators for Uncertain Dynamic Systems. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.
24. Grant M.C., Boyd S.P. The CVX Users' Guide. Release 2.1. CVX Research, Inc. 2018. [Online]. Available: <http://cvxr.com/cvx>.

25. Акимов П.А., Матасов А.И. Итерационный алгоритм для  $\ell_1$ -аппроксимации в динамических задачах оценивания // АиТ. 2015. № 5. С. 7–26.  
*Akimov P.A., Matasov A.I. An Iterative Algorithm for  $\ell_1$ -Norm Approximation in Dynamic Estimation Problems // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 5. P. 733–748.*
26. Архипов А.С., Семенихин К.В. Анализ надежности линейных несмещенных оценок при наличии помех с неизвестным унимодальным распределением // Изв. РАН. Теория и сист. управления. 2019. № 5. С. 8–17.  
*Arkhipov A.S., Semenikhin K.V. Confidence Analysis of Linear Unbiased Estimates under Uncertain Unimodal Noise Distributions // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2019. V. 58. No. 5. P. 674–683.*
27. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.*

Поступила в редакцию 02.12.2019

После доработки 23.01.2020

Принята к публикации 30.01.2020

© 2020 г. О.В. ЗВЕРЕВ, канд. наук по прикладной математике НИУ ВШЭ  
(zv-oleg@yandex.ru)  
(Центральный экономико-математический институт РАН, Москва),  
Б.М. ХАМЕТОВ, д-р физ.-мат. наук (khametovvm@mail.ru)  
(Национальный исследовательский университет  
“Высшая школа экономики”, Москва;  
Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)),  
Е.А. ШЕЛЕМЕХ (letis@mail.ru)  
(Центральный экономико-математический институт РАН, Москва)

## **ОПТИМАЛЬНОЕ ПРАВИЛО ОСТАНОВКИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ СО СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ ВЫИГРЫША<sup>1</sup>**

Решены две задачи об оптимальной остановке геометрического случайного блуждания со степенной функцией выигрыша (с конечным и бесконечным горизонтом). Для этих задач установлены явный вид урезанной цены и правила оптимальной остановки; доказано, что оптимальные правила остановки являются пороговыми нерандомизированными и описывают соответствующую свободную границу, явный вид которой представлен.

*Ключевые слова:* геометрическое случайное блуждание, момент остановки, область остановки, область продолжения наблюдений, производящая функция.

**DOI:** 10.31857/S000523102007003X

### **1. Введение**

Теория оптимальных правил остановки является одним из разделов теории оптимального стохастического управления и посвящена одноразовому выбору марковского момента, максимизирующего ожидаемое значение выигрыша наблюдателя в некоторый конечный случайный момент времени. Проблема оптимальной остановки случайных последовательностей возникает во многих областях науки и техники. Так, в теории и практике приема с обратной связью дискретной информации часто применяются процедуры последовательного обнаружения, сводящиеся к решению задачи об оптимальной остановке [1]. В системах синхронизации [1], как правило, требуется как можно быстрее обнаружить срыв или сбой в работе; эта проблема с математической точки зрения сводится к задаче о разладке [2]. Решение последней состоит в построении оптимального правила остановки. В экономике проблема оптимальной остановки возникает, например: 1) при решении задач расчета американских опционов, поскольку владелец опциона вправе выбрать

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-010-00666).

момент предъявления контракта к исполнению (обычно выбирается момент, в который доход владельца максимален) [3], 2) в задачах стимулирования инвестиционных проектов [4], 3) в последовательном планировании экспериментов [5].

Известно [2, 3, 6], что задача об оптимальной остановке случайной последовательности относится к числу труднорешаемых. Общей теории оптимальных правил остановки случайных последовательностей посвящено большое количество работ. По-видимому впервые теория оптимальных правил остановки была сформулирована в [7], в ней также обосновано применение этой теории к задачам статистического последовательного анализа. Достаточно полное изложение актуального состояния теории оптимальных правил остановки можно найти в [3, 8, 9], для случая марковских наблюдаемых последовательностей — в [2]. Вместе с тем, на настоящий момент известно очень мало примеров явного аналитического решения задачи оптимальной остановки. Наиболее полный обзор известных примеров можно найти в [8].

В этой статье получены новые примеры точного решения задач об оптимальной остановке, а именно аналитически решены две задачи об оптимальной остановке геометрического случайного блуждания со степенной функцией выигрыша наблюдателя с конечным и с бесконечным горизонтом. Степенная функция выигрыша имеет широкое применение в приложениях: в экономике (стандартная функция полезности с гиперболической абсолютной несклонностью к риску, стандартная функция спроса с постоянной эластичностью), в технике и других областях, где возникает задача о разладке с распределением Парето наблюдаемой последовательности. Таким образом, полученные примеры интересны с точки зрения большого количества прикладных задач.

Не найдено работ, посвященных задачам оптимальной остановки в данной постановке. Вместе с тем к задаче этой статьи с бесконечным горизонтом применимы результаты статей [10–12], в которых для случая, когда наблюдается марковский процесс, функция выигрыша непрерывна и монотонна, доказано, что область продолжения наблюдений отделена от внутренности области остановки единственной точкой (вид которой не предъявляется). В статье этот результат не использовался, но он совпадает с полученным здесь; также приведена формула для этой точки в случае степенной функции выигрыша.

Приведем еще работы, в которых исследовались задачи, наиболее близкие к рассматриваемой в статье. В [13] решена задача об оптимальной остановке случайного одномерного блуждания, когда: 1) независимые одинаково распределенные случайные величины, порождающие это блуждание, имеют отрицательное среднее значение, 2) функция выигрыша представляет собой целую положительную степень стандартного опциона call, 3) горизонт бесконечен, 4) оптимальный момент остановки единственный. Доказано, что в описанной ситуации момент первого пересечения уровня, который совпадает с наибольшим значением полинома Аппеля, является оптимальным моментом остановки. В [3] также рассматривалась задача оптимальной остановки с конечным и бесконечным горизонтом, где наблюдается одномерное случайное блуждание и функция выигрыша, соответствующая стандартному опциону call. В случае конечного горизонта предъявлено рекуррентное соотношение,

которому удовлетворяют урезанные цены задачи; доказано, что для каждого момента времени область остановки отделена от области наблюдения одной точкой, соответствующая последовательность точек монотонно убывает по времени, но вид точек не найден. Для случая бесконечного горизонта установлен вид зависимости цены задачи от начального состояния наблюдаемой последовательности. Таким образом, даже в наиболее близких по постановке задачах на настоящий момент не удалось получить явных формул для решения.

Статья имеет следующую структуру. Каждой из задач посвящен отдельный раздел: для задачи с конечным горизонтом — раздел 2, а с бесконечным — раздел 3. В разделе 2 сначала приведены необходимые сведения из теории оптимальных правил остановки с конечным горизонтом (подраздел 2.1), затем — постановка задачи и известные свойства ее решения (подраздел 2.2) и основные результаты (раздел 2.3) — теоремы 1 и 2, в которых установлены явный вид урезанных цен и областей остановки (продолжения) наблюдения соответственно. Раздел 3 включает постановку задачи и необходимые известные результаты теории оптимальных правил остановки с бесконечным горизонтом (подраздел 3.1) и раздел 3.2, где приведен основной результат — теорема 3, дающая явный вид цены оптимальной остановки и областей остановки (продолжения) наблюдения. Доказательства всех утверждений вынесены в Приложения.

## 2. Задача с конечным горизонтом

### 2.1. Необходимые сведения из теории оптимальных правил остановки

Подробное изложение приведенных здесь результатов и их доказательства можно найти в [3].

Пусть на стохастическом базисе  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in N_0}, \mathsf{P})$ , где  $N_0 \triangleq \{0, \dots, N\}$ ,  $N < \infty$  — горизонт, задана случайная последовательность  $(S_n, \mathcal{F}_n)_{n \in N_0}$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\mathcal{F}_n \triangleq \sigma\{S_0, \dots, S_n\}$ .

Будем использовать следующие обозначения:  $\mathsf{E}\xi$  — математическое ожидание (интеграл Лебега относительно вероятностной меры  $\mathsf{P}$ )  $\mathcal{F}$ -измеримой случайной величины  $\xi$ , а  $\mathsf{E}(\xi | \mathcal{F}_n)$  — ее условное математическое ожидание относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_n$  и меры  $\mathsf{P}$ ,  $n \in N_0$ . Для произвольного множества  $A \in \mathcal{F}$  определим индикатор

$$1_{\{A\}}(\omega) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A, \\ 0, & \text{если } \omega \notin A. \end{cases}$$

Положим, что  $(f_n, \mathcal{F}_n)_{n \in N_0}$  — согласованное семейство случайных величин, элементы которого  $f_n$  будем интерпретировать как значения функции выигрыша в момент времени  $n \in N_0$ . Предполагается, что выполнено следующее.

Условие (f):  $\mathsf{E} \max_{n \in N_0} |f_n| < \infty$ .

Пусть  $\tau$  — момент остановки относительно фильтрации  $(\mathcal{F}_n)_{n \in N_0}$ .

Тогда

$$f_\tau(\omega) \triangleq \sum_{i=0}^N f_i 1_{\{\tau=i\}}(\omega) \quad \left( S_\tau(\omega) \triangleq \sum_{i=0}^N S_i 1_{\{\tau=i\}}(\omega) \right).$$

Обозначим через  $T_n^N$ ,  $n \in N_0$ , множество моментов остановки  $\tau$  таких, что  $n \leq \tau(\omega) \leq N$ ,  $\omega \in \Omega$ . Условие (f) гарантирует, что для любого  $\tau \in T_0^N$  определено  $E|f_\tau| < \infty$ . Величина  $Ef_\tau$  — это ожидаемое значение выигрыша в момент  $\tau$ .

Задача оптимальной остановки:

$$(1) \quad Ef_\tau \rightarrow \sup_{\tau \in T_0^N} .$$

Величина  $\sup_{\tau \in T_0^N} Ef_\tau$  есть цена задачи (1). Если существует такой  $\tau^0 \in T_0^N$ , что  $\sup_{\tau \in T_0^N} Ef_\tau = Ef_{\tau^0}$ , то его называют оптимальным моментом остановки в задаче (1).

Выполнение условия (f) позволяет ввести последовательность

$$(2) \quad \{v_n^N, \mathcal{F}_n\}_{n \in N_0} : \begin{cases} v_n^N = \max [f_n, E(v_{n+1}^N | \mathcal{F}_n)], \\ v_n^N|_{n=N} = f_N. \end{cases}$$

По определению случайные величины  $v_n^N$  являются  $\mathcal{F}_n$ -измеримыми. Их называют урезанной ценой оптимальной остановки в момент  $n$  или огибающей Снелла. Известно, что  $v_0^N = \sup_{\tau \in T_0^N} Ef_\tau = Ef_{\tau^0}$ , где

$$(3) \quad \tau^0 = \min \{n \in N_0 : v_n^N = f_n\}.$$

Таким образом, чтобы решить задачу (1), достаточно найти решение рекуррентного уравнения (2). Известно, что в общем случае она является труднорешаемой.

Из (2) следует, что

$$v_n^N \geq f_n, \quad v_n^N \geq E(v_{n+1}^N | \mathcal{F}_n), \quad n \in N_0,$$

почти наверное относительно меры  $P$  (далее по тексту —  $P$ -п.н.) Из условия (f) и последнего неравенства следует, что  $\{v_n^N, \mathcal{F}_n\}_{n \in N_0}$  — супермартингал относительно фильтрации  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in N_0}$  и вероятностной меры  $P$ . Отметим также, что из рекуррентного соотношения (2) следует, что для любого  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ :

1) на множестве  $\{\omega \in \Omega : f_n \geq E(v_{n+1}^N | \mathcal{F}_n)\}$  имеет место равенство  $v_n^N = f_n$   $P$ -п.н.;

2) на множестве  $\{\omega \in \Omega : f_n < E(v_{n+1}^N | \mathcal{F}_n)\}$  — равенство  $v_n^N = E(v_{n+1}^N | \mathcal{F}_n)$   $P$ -п.н.

Таким образом, для любого  $n \in \{0, \dots, N-1\}$  величина  $v_n^N$  допускает представление  $P$ -п.н.

$$(4) \quad v_n^N = f_n 1_{\{f_n \geq E(v_{n+1}^N | \mathcal{F}_n)\}} + E(v_{n+1}^N | \mathcal{F}_n) 1_{\{f_n < E(v_{n+1}^N | \mathcal{F}_n)\}}.$$

## 2.2. Постановка задачи с конечным горизонтом и некоторые известные свойства ее решения

Пусть  $\{S_n, \mathcal{F}_n\}_{n \in N_0}$  задана рекуррентным соотношением

$$(5) \quad \begin{cases} S_{n+1} = S_n \lambda^{\rho_{n+1}}, \\ S_n|_{n=0} = S_0 > 0, \end{cases}$$

где  $1 < \lambda < \infty$  — параметр, а  $\{\rho_n\}_{n \geq 1}$  — последовательность независимых в совокупности одинаково распределенных случайных величин с заданной функцией распределения  $F_\rho(x)$ . Известно [6], что последовательность  $\{S_n, \mathcal{F}_n\}_{n \in N_0}$  является однородной марковской и описывает одномерное геометрическое случайное блуждание, причем Р-п.н.  $S_n > 0$ ,  $n \in N_0$ . Описанная последовательность  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  является строго марковской [6].

**Замечание 1.** Условие  $\lambda > 1$  — техническое, оно будет использовано в доказательствах ниже. Вместе с тем это предположение не ограничивает общности рассматриваемой постановки: чтобы получить случай  $0 < \lambda < 1$ , достаточно вместо (5) рассмотреть последовательность

$$\left\{ \tilde{S}_n, \mathcal{F}_n \right\}_{n \in N_0} : \quad \tilde{S}_{n+1} = \tilde{S}_n \lambda^{\theta_{n+1}}, \quad \tilde{S}_0 = S_0,$$

где  $\theta_{n+1} = -\rho_{n+1}$ ,  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ . В прикладных исследованиях интересны оба случая.

Будем решать задачу оптимальной остановки для дисконтированной степенной функции выигрыша:

$$(6) \quad f_n(x) = \beta^n (Ax^\sigma + B), \quad x > 0$$

с параметрами:  $\beta \in (0, 1]$  — коэффициент дисконтирования [3],  $A$ ,  $B$ ,  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ).

**Замечание 2.** Задачи оптимальной остановки с функцией выигрыша вида (6) встречаются в различных прикладных задачах. Так, при  $A = \sigma$  функция (6) соответствует стандартной функции полезности с гиперболической абсолютной несклонностью к риску (HARA) [9]. В задачах микроэкономики в случаях, когда эластичность спроса по цене можно считать постоянной, спрос описывается степенной функцией [14]. Задача о разладке для наблюдаемых величин с распределением Парето также имеет степенную функцию выигрыша. Поскольку степенные функции применяются для описания явлений в самых разных областях, имеет смысл рассматривать задачу оптимальной остановки со степенной функцией наиболее общего вида (6).

Таким образом, рассматривается задача:

$$(7) \quad \mathbb{E} \beta^\tau (A(S_\tau)^\sigma + B) \rightarrow \sup_{\tau \in T_0^N} .$$

Известно [2], что в случае строго марковской наблюдаемой последовательности  $\{S_n, \mathcal{F}_n\}_{n \in N_0}$  и функции выигрыша, зависящей от значения аргумента

только в текущий момент времени, урезанные цены  $v_n^N$  являются марковскими функциями, т.е. для любого  $n \in N_0$  существует борелевская функция, действующая из  $\mathbb{R}^+$  в  $\mathbb{R}^+$ , которую будем обозначать через  $v_n^N(x)$ , такая что

$$v_n^N = v_n^N(x) \Big|_{x=S_n} = v_n^N(S_n) \quad \text{P-п.н.}$$

Кроме того, последовательность  $\{v_n^N(x)\}_{n \in N_0}$  однородна по  $n$ , т.е. для любых  $x \in \mathbb{R}^+$  и  $k \in N_0$  существует борелевская функция, обозначаемая  $v^k(x)$ , такая что

$$(8) \quad v_n^N(x) = v_0^{N-n}(x) = \beta^k v^k(x) \Big|_{k=N-n}.$$

Для задачи (7) из результатов, приведенных в подразделе 2.1, и сделанных замечаний следует, что для любого  $x \in \mathbb{R}^+$  существует частичная последовательность борелевских функций  $\{v^k(x)\}_{k \in N_0}$  (где  $k$  принимает значения  $N, N-1, \dots, 0$ ), которая:

1) удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$(9) \quad \begin{cases} v^k(x) = \max [Ax^\sigma + B, \beta \mathbf{E}v^{k+1}(x\lambda^{\rho_1})], \\ v^k(x)|_{k=N} = Ax^\sigma + B; \end{cases}$$

$$2) v^0(x)|_{x=S_0} = v_0^N = \sup_{\tau \in T_0^N} \mathbf{E}\beta^\tau (AS_\tau^\sigma + B) = \mathbf{E}\beta^{\tau^0} (AS_{\tau^0}^\sigma + B), \text{ где}$$

$$(10) \quad \tau^0 = \min \left[ k \in N_0 : v^k(S_k) = AS_k^\sigma + B \right]$$

есть оптимальный момент остановки в задаче (7);

3) монотонно не возрастает, т.е. для любого  $x \in \mathbb{R}^+$  имеет место неравенство

$$(11) \quad v^k(x) \geq v^{k+1}(x), \quad k \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Из (9), в свою очередь, для любых  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $k \in N_0$  и  $\beta \in (0, 1]$  следуют неравенства

$$(12) \quad v^k(x) \geq Ax^\sigma + B, \quad v^k(x) \geq \beta \mathbf{E}v^{k+1}(x\lambda^{\rho_1}).$$

Аналогично [2], введем области остановки и продолжения наблюдений. Для любого  $k \in N_0$  множество  $\Gamma_k \subseteq \mathbb{R}^+$  назовем множеством (областью) остановки, если

$$(13) \quad \Gamma_k \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^+ : v^k(x) = Ax^\sigma + B \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ : Ax^\sigma + B \geq \beta \mathbf{E}v^{k+1}(x\lambda^{\rho_1}) \right\}.$$

Множество  $C_k \triangleq \mathbb{R}^+ \setminus \Gamma_k$  назовем множеством продолжения наблюдений:

$$(14) \quad C_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ : v^k(x) > Ax^\sigma + B \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ : Ax^\sigma + B < \beta \mathbf{E}v^{k+1}(x\lambda^{\rho_1}) \right\}.$$

Из определения семейств областей  $\{C_k\}_{k \in N_0}$  и  $\{\Gamma_k\}_{k \in N_0}$ , а также свойства монотонности (для любых  $x \in \mathbb{R}^+$ ) частичной последовательности  $\{v^k(x)\}_{k \in N_0}$  следуют включения

$$(15) \quad \mathbb{R}^+ = \Gamma_N \supseteq \Gamma_{N-1} \supseteq \dots \supseteq \Gamma_k \supseteq \dots \supseteq \Gamma_0,$$

$$(16) \quad \emptyset = C_N \subseteq C_{N-1} \subseteq \dots \subseteq C_k \subseteq \dots \subseteq C_0.$$

В совокупности (9), (13)–(16) дают представление для  $v^k(x)$ , где  $k \in N_0$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ :

$$(17) \quad v^k(x) = \begin{cases} \beta \mathbb{E} v^{k+1}(x \lambda^{\rho_1}), & \text{если } x \in C_k, \\ Ax^\sigma + B, & \text{если } x \in \Gamma_k. \end{cases}$$

С учетом (17) имеем при любых  $k \in N_0$  и  $x \in \mathbb{R}^+$  представление для  $v^k(x)$ :

$$(18) \quad v^k(x) = (Ax^\sigma + B) 1_{\{x \in \Gamma_k\}} + \beta \mathbb{E} v^{k+1}(x \lambda^{\rho_1}) 1_{\{x \in C_k\}}.$$

Итак, чтобы найти решение задачи (7), необходимо решить рекуррентное уравнение (9) и для любого  $k \in N_0$  построить области  $\Gamma_k$  и  $C_k$ . Это будет сделано в следующем разделе.

### 2.3. Решение задачи с конечным горизонтом

Следующие два утверждения — основные для этого раздела, они дают решение задачи (7). В них будут использованы обозначения

$$(19) \quad A_k \triangleq A(\beta \mathbb{E} \lambda^{\sigma \rho_1})^{N-k}, \quad B_k \triangleq \beta^{N-k} B,$$

где  $k \in N_0$  — любое,  $A > 0$ ,  $B \in \mathbb{R}^1$ , а  $\sigma \geq 0$ . Непосредственно проверяется, что  $A_k$  и  $B_k$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$(20) \quad A_k = A_{k+1} \beta \mathbb{E} \lambda^{\sigma \rho_1}, \quad A_k|_{k=N} = A; \quad B_k = \beta B_{k+1}, \quad B_k|_{k=N} = B.$$

Условие ( $\varphi$ ):

$$(21) \quad 0 < \mathbb{E} \lambda^{\sigma \rho_1} < \infty, \quad \sigma \geq 0.$$

*Теорема 1. Пусть выполнены условия:*

- 1) последовательность  $\{S_k, \mathcal{F}_k\}_{k \in N_0}$  удовлетворяет рекуррентному соотношению (5);
- 2) условие ( $\varphi$ );
- 3) дисконтируемая функция выигрыша имеет вид (6);
- 4) для любых  $(k, x) \in N_0 \times \mathbb{R}^+$  урезанная цена  $v^k(x)$  удовлетворяет рекуррентному соотношению (9).

*Тогда справедливы следующие утверждения:*

- а) для любых  $k \in N_0$  и  $\sigma > 0$  множества  $C_k$  и  $\Gamma_k$  допускают представления соответственно

$$(22) \quad C_k = \{x \in \mathbb{R}^+ : A_k x^\sigma + B_k > Ax^\sigma + B\},$$

$$(23) \quad \Gamma_k = \{x \in \mathbb{R}^+ : A_k x^\sigma + B_k \leq Ax^\sigma + B\}.$$

б) для любых  $k \in N_0$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$  и  $\sigma > 0$  решение рекуррентного соотношения (9) допускает представление

$$(24) \quad v^k(x) = Ax^\sigma + B + \max [A_k x^\sigma + B_k - Ax^\sigma - B, 0].$$

Установим теперь вид оптимального момента остановки в задаче (7). Предварительно заметим, что из (13), (22) следует, что для любого  $k \in N_0$  внутренность  $\Gamma_k$ , обозначаемая как  $\text{int } \Gamma_k$ , допускает представление

$$(25) \quad \text{int } \Gamma_k \triangleq \{x \in \mathbb{R}^+ : A_k x^\sigma + B_k < Ax^\sigma + B\}.$$

Значит, для любого  $k \in N_0$  определено множество

$$(26) \quad \partial \Gamma_k \triangleq \Gamma_k \setminus \text{int } \Gamma_k = \{x \in \mathbb{R}^+ : A_k x^\sigma + B_k = Ax^\sigma + B\}.$$

Если  $\partial \Gamma_k \neq \emptyset$ , то (26) определяет границу, которая для каждого  $k$  делит  $\mathbb{R}^+$  на область остановки  $\Gamma_k$  и область продолжения наблюдений  $C_k$ . Из (26) также следует, что из разрешимости для любого  $k \in N_0$  уравнения

$$A_k x^\sigma + B_k = Ax^\sigma + B$$

относительно  $x$  (т.е. существование элемента  $x(k) \in \mathbb{R}^+$ , обращающего (26) в тождество) следует  $\partial \Gamma_k \neq \emptyset$ . Частичную последовательность  $\{x(k)\}_{k \in N_0}$  в задаче об оптимальной остановке называют свободной границей [3].

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого  $k \in N_0$  справедливы следующие утверждения:

I. если  $\beta = 1$ ,

1)  $a \sigma > 0$ ,  $\varphi(\sigma) \leq 1$ , то  $\Gamma_k = [0, \infty)$ ;

2)  $a \sigma > 0$ ,  $\varphi(\sigma) > 1$ , то  $\Gamma_k = \{0\}$ ;

II. если  $\beta \in (0, 1)$  и  $B = 0$ ,

1)  $a \sigma > 0$ ,  $\beta\varphi(\sigma) \leq 1$ , то  $\Gamma_k = [0, \infty)$ ;

2)  $a \sigma > 0$ ,  $\beta\varphi(\sigma) > 1$ , то  $\Gamma_k = \{0\}$ ;

III. если  $\beta \in (0, 1)$  и  $B < 0$ ,

1)  $a \sigma_1 > 0$  — единственный нетриivialный корень уравнения  $\varphi(\sigma) = 1$  и  $\beta\varphi(\sigma) < 1$ , то  $\Gamma_k = [x(k), \infty)$ ;

2)  $a \sigma > 0$ ,  $\beta\varphi(\sigma) < 1$  и  $\varphi(\sigma) \neq 1$ , то  $\Gamma_k = [x(k), \infty)$ , где частичная последовательность  $\{x(k)\}_{k \in N_0}$  описывает свободную границу, а ее элементы для любого  $k \in N_0$  определяются формулой

$$(27) \quad x(k) \equiv \max \left[ \left( \frac{B}{A} \frac{1 - \beta^k}{(\beta\varphi(\sigma))^k - 1} \right)^{\frac{1}{\sigma}}, 0 \right];$$

3)  $a \sigma > 0$ ,  $\beta\varphi(\sigma) \geq 1$ , то  $\Gamma_k = \{0\}$ ;

IV. если  $\beta \in (0, 1)$  и  $B > 0$ ,

1)  $a \sigma > 0$ ,  $\beta\varphi(\sigma) \leq 1$ , то  $\Gamma_k = [0, \infty)$ ;

2) а  $\sigma > 0$ ,  $\beta\varphi(\sigma) > 1$ , то  $\Gamma_k = [x(k), \infty)$ , где частичная последовательность  $\{x(k)\}_{k \in N_0}$  описывает свободную границу, а ее элементы для любого  $k \in N_0$  определяются формулой (27);

V. пусть  $\{\Gamma_k\}_{k \in N_0}$  — набор множеств, определенный в пунктах I–IV. Тогда оптимальный момент остановки  $\tau^0$  допускает представление  $\tau^0 = \min \{k \in N_0 : S_k \in \Gamma_k\}$  Р-н.н.

**Замечание 3.** 1. Из доказательства теоремы 2 следует, что в утверждениях I–IV теоремы 2 элементы частичной последовательности  $\{x(k)\}_{k \in N_0}$  определяются единственным образом.

2. Из утверждения теоремы 2 следует, что значения параметров  $A$  и  $B$  функции выигрыша существенно влияют на вид решения задачи (7). Так, при  $B = 0$  получаются лишь тривиальные решения. Такой результат связан с тем, что слагаемое  $B$  в каждый момент умножается на дисконтирующий множитель. Этот факт следует учитывать при выборе конкретного вида функции выигрыша в прикладных задачах, например в задачах максимизации ожидаемого значения функции полезности, которая, как известно, определяется с точностью до константы.

Итак, теоремы 1, 2 дают явный вид решения задачи (7): цена задачи допускает представление  $v^N(x) = Ax^\sigma + B + \max[A_Nx^\sigma + B_N - Ax^\sigma - B, 0]$ , а оптимальный момент остановки имеет вид, указанный в п. V теоремы 2.

### 3. Задача с бесконечным горизонтом

#### 3.1. Постановка задачи с бесконечным горизонтом и некоторые известные свойства ее решения

Пусть теперь  $T_0^\infty$  — множество всех конечных марковских моментов  $\tau$ . Предположим, что выполнено условие  $(\varphi)$ . Тогда задача об оптимальной остановке геометрического случайного блуждания с дисконтированной степенной функцией выигрыша и бесконечным горизонтом состоит в следующем:

$$(28) \quad \mathbb{E}\beta^\tau (AS_\tau^\sigma + B) \rightarrow \sup_{\tau \in T_0^\infty},$$

где параметрами задачи являются коэффициент дисконтирования  $\beta \in (0, 1]$  и  $A, B, \sigma$  ( $\sigma > 0$ ).

Момент остановки  $\tau^0 \in T_0^\infty$  называют оптимальным, если

$$\sup_{\tau \in T_0^\infty} \mathbb{E}\beta^\tau (AS_\tau^\sigma + B) = \mathbb{E}\beta^{\tau^0} (AS_{\tau^0}^\sigma + B).$$

Пусть борелевская функция  $\hat{v} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^1$ , обозначаемая как  $\hat{v}(x)$ , определена равенством

$$\hat{v}(x) = \sup_{\tau \in T_0^\infty} \mathbb{E}\beta^\tau (AS_\tau^\sigma + B).$$

Эту функцию называют ценой оптимальной остановки.

Как было указано в разделе 2, последовательность урезанных цен  $\{v^k(x)\}_{k \geq 1}$  является монотонной (см. неравенство (11)). Поэтому для любого  $x \in \mathbb{R}^+$  у последовательности  $\{v^k(x)\}_{k \geq 1}$  существует поточечный предел

$$\hat{v}(x) \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} v^k(x).$$

Известно также [2], что в рекуррентном соотношении (9) в силу теоремы о монотонной сходимости можно осуществить предельный переход при  $k \rightarrow \infty$ . Следовательно, для любого  $x \in \mathbb{R}^+$  цена  $\hat{v}(x)$  удовлетворяет нелинейному уравнению

$$(29) \quad \hat{v}(x) = \max \left[ Ax^\sigma + B, \beta \mathbb{E}\hat{v}(x\lambda^{\rho_1}) \right].$$

Из (29) следует, что для любого  $x \in \mathbb{R}^+$  имеют место неравенства

$$(30) \quad \hat{v}(x) \geq Ax^\sigma + B, \quad \hat{v}(x) \geq \beta \mathbb{E}\hat{v}(x\lambda^{\rho_1}).$$

Кроме того, из (29) следует, что приводимые ниже соотношения определяют области в  $\mathbb{R}^+$ :

a)

$$(31) \quad \Gamma \triangleq \{x \in \mathbb{R}^+ : \hat{v}(x) = Ax^\sigma + B\} = \{x \in \mathbb{R}^+ : Ax^\sigma + B \geq \beta \mathbb{E}\hat{v}(x\lambda^{\rho_1})\},$$

б)

$$(32) \quad C \triangleq \{x \in \mathbb{R}^+ : \hat{v}(x) = \beta \mathbb{E}\hat{v}(x\lambda^{\rho_1})\} = \{x \in \mathbb{R}^+ : Ax^\sigma + B < \beta \mathbb{E}\hat{v}(x\lambda^{\rho_1})\},$$

которые также называют [2] соответственно областью остановки и областью продолжения наблюдений. Из (31), (32) следуют равенства

$$(33) \quad \Gamma \cup C = \mathbb{R}^+, \quad \Gamma \cap C = \emptyset.$$

Формулы (29), (31)–(33) дают также представление

$$(34) \quad \hat{v}(x) = \begin{cases} Ax^\sigma + B & \text{при } x \in \Gamma, \\ \beta \mathbb{E}\hat{v}(x\lambda^{\rho_1}) & \text{при } x \in C. \end{cases}$$

В свою очередь, из (33) и (34) следуют равенства для любых  $x \in \mathbb{R}^+$ :

$$(35) \quad \begin{aligned} \hat{v}(x) &= (Ax^\sigma + B) \mathbf{1}_{\{x \in \Gamma\}} + \beta \mathbb{E}\hat{v}(x\lambda^{\rho_1}) \mathbf{1}_{\{x \in C\}} = \\ &= Ax^\sigma + B + [\beta \mathbb{E}\hat{v}(x\lambda^{\rho_1}) - Ax^\sigma - B] \mathbf{1}_{\{x \in C\}}. \end{aligned}$$

### 3.2. Решение задачи с бесконечным горизонтом

Из приведенных выше рассуждений следует, что решение задачи (28) будет найдено, если установить условия, при которых рекуррентное соотношение (29) имеет решение. Вид этого решения, а также областей остановки и продолжения наблюдений для задачи (28) получены в следующем утверждении.

*Теорема 3.* Предположим, что выполнено условие  $(\varphi)$ . Пусть  $\sigma_{\frac{1}{\beta}} > 0$  доводит к равенству

$$(36) \quad \beta E \lambda^{\frac{\sigma_1 \rho_1}{\beta}} = 1,$$

причем

$$(37) \quad \sigma \neq \sigma_{\frac{1}{\beta}}.$$

Если выполнено одно из условий:

а)

$$(38) \quad \sigma > \sigma_{\frac{1}{\beta}} \quad u \quad B > 0,$$

б)

$$(39) \quad \sigma < \sigma_{\frac{1}{\beta}} \quad u \quad B < 0,$$

то справедливы следующие утверждения.

1. Для любых  $x \in \mathbb{R}^+$  и  $\beta \in (0, 1]$  существует решение уравнения (29), которое имеет вид

$$(40) \quad v(x) = Ax^\sigma + B + \max [A^*x^\sigma - Ax^\sigma - B, 0],$$

где константа  $A^* > 0$  допускает представление

$$(41) \quad A^* \triangleq B \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_{\frac{1}{\beta}}} \quad \left( \frac{A}{B} \frac{\sigma - \sigma_{\frac{1}{\beta}}}{\sigma_{\frac{1}{\beta}}} \right)^{\frac{\sigma_1}{\sigma}}.$$

2. Существует число

$$(42) \quad x_\Gamma = \left( \frac{B}{A} \frac{\sigma_{\frac{1}{\beta}}}{\sigma - \sigma_{\frac{1}{\beta}}} \right)^{\frac{1}{\sigma}} > 0,$$

отделяющее область остановки от внутренности области продолжения наблюдения:

а) если выполнено условие (38), то

$$(43) \quad \Gamma = [0, x_\Gamma], \quad C = (x_\Gamma, \infty).$$

б) если выполнено условие (39), то

$$(44) \quad \Gamma = [x_\Gamma, \infty), \quad C = [0, x_\Gamma].$$

3. Момент остановки

$$(45) \quad \tau^0 = \begin{cases} \inf \{n \geq 0 : S_n \in \Gamma\} \\ \infty, \text{ если } S_n \notin \Gamma \text{ для любого } n \end{cases}$$

является оптимальным в задаче (28).

**Замечание 4.** Выше было отмечено, что значения параметров модели  $A$  и  $B$  существенно влияют на вид решения в случае конечного горизонта. Как следует из утверждения и доказательства теоремы 3, решение задачи в случае бесконечного горизонта при  $B = 0$  не существует.

#### 4. Заключение

Из утверждений теорем 1–3 следует, что в случае одномерного однородного геометрического случайного блуждания с дисконтированной степенной функцией выигрыша в задаче об оптимальной остановке:

- 1) не всегда существуют нетривиальные области остановки и продолжения наблюдений;
- 2) соответствующее рекуррентное соотношение (когда горизонт конечен) или уравнение (когда горизонт бесконечен) допускают явное решение;
- 3) установлены условия существования и вид решений.

Таким образом, в статье построены новые точно решаемые примеры задачи об оптимальной остановке.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Далее в доказательствах основных утверждений потребуются условия существования и свойства производящей функции, соответствующей функции распределения  $F_{\rho_1}(x)$  случайной величины  $\rho_1$ . Приведем необходимые определения и утверждения.

Пусть борелевская функция  $\varphi : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$  (обозначаемая как  $\varphi(\sigma)$ ) определена равенством

$$(\Pi.1.1) \quad \varphi(\sigma) = \mathbb{E}\lambda^{\sigma\rho_1},$$

где  $1 < \lambda < \infty$  — параметр,  $\sigma \in \mathbb{R}^1$  — переменная величина. Функцию  $\varphi(\sigma)$  называют производящей функцией моментов случайной величины  $\rho_1$  [6]. Обозначим:

$$M^+ \triangleq \sup_{x \in \mathbb{R}^1} \{x \in \mathbb{R}^1 : F_{\rho_1}(x) < 1\} \quad \left( M^- \triangleq \inf_{x \in \mathbb{R}^1} \{x \in \mathbb{R}^1 : F_{\rho_1}(x) > 0\} \right).$$

Величина  $M^+$  ( $M^-$ ) — это существенная верхняя (нижняя) грань случайной величины  $\rho_1$  [6], а множество вида  $[M^-, M^+]$  — ее носитель [6].

Следующее простое утверждение, по-видимому, известно, но, к сожалению, в доступных источниках не было сформулировано и доказано.

**Предложение 1.** Пусть  $M^- > -\infty$  и  $M^+ < \infty$ . Тогда справедливы утверждения:

- 1) для любого  $\sigma \in \mathbb{R}^1$  выполнено (21);
- 2) для любого  $\sigma \in \mathbb{R}^1$  существуют и конечны производные  $\frac{d^l}{d\sigma^l}\varphi(\sigma)$ , где  $l \in \mathbb{N}$  — любое, причем  $\frac{d^2}{d\sigma^2}\varphi(\sigma) > 0$ , т.е.  $\varphi(\sigma)$  — строго выпуклая функция;

3) если  $m(\sigma) \triangleq \frac{d}{d\sigma} \ln \varphi(\sigma)$ , то

$$(П.1.2) \quad M^+ = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{m(\sigma)}{\ln \lambda},$$

$$(П.1.3) \quad M^- = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{m(\sigma)}{\ln \lambda}.$$

*Доказательство предложения 1.* По условию предложения 1  $M^-$  и  $M^+$  конечны, поэтому в доказательстве без ограничения общности можно полагать  $\rho_1 \geq c$  P-п.н., где  $c > 0$  — константа.

1. В силу сделанного предположения и определения величины  $M^+$  справедливы неравенства  $c \leq \rho_1 \leq M^+ < \infty$  P-п.н. Отсюда для любого  $\sigma \geq 0$  имеем P-п.н.

$$(П.1.4) \quad 0 < \lambda^{-|\sigma|c} \leq \lambda^{-|\sigma|\rho_1} \leq \lambda^{\sigma\rho_1} \leq \lambda^{|\sigma|\rho_1} \leq \lambda^{|\sigma|M^+} < \infty.$$

Соотношения (П.1.4) дают искомые неравенства  $0 < \varphi(\sigma) < \infty$ .

2. Пусть  $l \in \mathbb{N}$ . Тогда из (П.1.4) для любого  $\sigma \geq 0$  следуют неравенства P-п.н.

$$(П.1.5) \quad 0 < c^l \lambda^{\sigma c} \leq |\rho_1|^l \lambda^{\sigma\rho_1} \leq (M^+)^l \lambda^{|\sigma|M^+} < \infty.$$

Отсюда

$$0 < \mathbb{E} |\rho_1|^l \lambda^{\sigma\rho_1} < \infty.$$

Значит, для любого  $l \in \mathbb{N}$  существует  $l$ -я производная производящей функции моментов

$$\frac{d^l \varphi}{d\sigma^l}(\sigma) = (\ln \lambda)^l \mathbb{E} \rho_1^l \lambda^{\sigma\rho_1},$$

причем

$$(П.1.6) \quad \left| \frac{d^l \varphi}{d\sigma^l}(\sigma) \right| < \infty.$$

В частности, для любого  $\sigma \geq 0$  имеем

$$(П.1.7) \quad \frac{d}{d\sigma} \varphi(\sigma) = (\ln \lambda) \mathbb{E} \rho_1 \lambda^{\sigma\rho_1},$$

$$(П.1.8) \quad \frac{d^2 \varphi}{d\sigma^2}(\sigma) = (\ln \lambda)^2 \mathbb{E} \rho_1^2 \lambda^{\sigma\rho_1} > 0,$$

$$(П.1.9) \quad m(\sigma) = (\ln \lambda) \frac{\mathbb{E} \rho_1 \lambda^{\sigma\rho_1}}{\mathbb{E} \lambda^{\sigma\rho_1}}.$$

Из (П.1.6)–(П.1.8) следует, что  $\varphi(\sigma)$  — строго выпуклая функция.

3. Установим равенства (П.1.2)–(П.1.3). Пусть  $P^{\sigma'}(A)$  — вероятностная мера, определенная с помощью преобразования Эшера (см., например, [3]) распределения вероятностей случайной величины  $\rho_1$ :

$$(П.1.10) \quad P^{\sigma'}(A) \triangleq E \frac{\lambda^{\sigma' \rho_1}}{E \lambda^{\sigma' \rho_1}} 1_A(\omega),$$

где  $A \in \mathcal{F}$  — любое, а  $\sigma' \geq 0$ . Известно, что  $P^{\sigma'}$  эквивалентна  $P$  [3]. Тогда из (П.1.9)–(П.1.10) следует представление

$$(П.1.11) \quad \frac{m(\sigma')}{\ln \lambda} = E^{P^{\sigma'}} \rho_1,$$

где  $E^{P^{\sigma'}} \rho_1$  — математическое ожидание случайной величины  $\rho_1$  относительно меры  $P^{\sigma'}$ . Из (П.1.11) с учетом  $\rho_1 \leq M^+ < \infty$   $P$ -п.н. следует, что для  $\sigma \geq 0$  имеет место неравенство

$$(П.1.12) \quad \frac{m(\sigma')}{\ln \lambda} = E^{P^{\sigma'}} \rho_1 \leq M^+.$$

Пусть  $\{M_n\}_{n \geq 1}$  — числовая последовательность такая, что  $0 < M_n < M^+$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M^+$ . Тогда  $\frac{m(\sigma')}{\ln \lambda} = E^{P^{\sigma'}} \rho_1 \geq E^{P^{\sigma'}} \rho_1 1_{[M_n, \infty)}(\rho_1) \geq M_n$ , где

$$1_{[M_n, \infty)}(x) \triangleq \begin{cases} 1, & x \in [M_n, \infty), \\ 0, & x \notin [M_n, \infty). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\lim_{\sigma' \rightarrow \infty} \frac{m(\sigma')}{\ln \lambda} \geq M_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} M^+.$$

Последняя формула в совокупности с (П.1.12) дает требуемое равенство  $\lim_{\sigma' \rightarrow \infty} \frac{m(\sigma')}{\ln \lambda} = M^+$ .

Аналогичным образом устанавливается равенство  $\lim_{\sigma' \rightarrow -\infty} \frac{m(\sigma')}{\ln \lambda} = M^-$ . Доказательство закончено.

*Следствие 1.* Пусть выполнены условия предложения 1. Тогда производящая функция моментов  $\varphi(\sigma)$  при  $\sigma \geq 0$  обладает следующими свойствами.

1. Если  $M^+ < 0$ , то функция  $\varphi(\sigma)$  монотонно убывает от значения 1 к нулю.

2. Если  $M^+ > 0$  и  $E\rho_1 < 0$ , то существуют  $0 < \sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_{\frac{1}{\beta}} < \infty$  такие, что:

а)  $0 < \varphi(\sigma_0) = \min_{\sigma \in \mathbb{R}^+} \varphi(\sigma) < 1$ , т.е.  $\sigma_0$  — единственный неотрицательный корень уравнения

$$\frac{d}{d\sigma} \varphi(\sigma_0) = 0;$$

б)  $\varphi(0) = \varphi(\sigma_1) = 1$ , где  $\sigma_1 \neq 0$  — единственный нетривиальный корень уравнения  $\varphi(\sigma) = 1$ , причем

- для любого  $\sigma \in (0, \sigma_1)$  имеют место неравенства  $0 < \varphi(\sigma) < 1$ ,
- для любого  $\sigma \geq \sigma_1$  функция  $\varphi(\sigma) \geq 1$ ;

в) для любого  $\beta \in (0, 1)$  существует единственный корень  $\sigma_{\frac{1}{\beta}}$  уравнения  $\varphi(\sigma) = \frac{1}{\beta}$ , причем

- если  $\sigma < \sigma_{\frac{1}{\beta}}$ , то  $\varphi(\sigma) < \frac{1}{\beta}$ ,
- если  $\sigma \geq \sigma_{\frac{1}{\beta}}$ , то  $\varphi(\sigma) \geq \frac{1}{\beta}$ .

3. Если  $E\rho_1 \geq 0$ , то для любого  $\beta \in (0, 1]$  существует единственный нетривиальный корень  $\sigma_{\frac{1}{\beta}}$  уравнения  $\varphi\left(\sigma_{\frac{1}{\beta}}\right) = \frac{1}{\beta}$ , причем при  $\sigma \geq \sigma_{\frac{1}{\beta}}$  функция  $\varphi(\sigma) \geq \frac{1}{\beta}$ .

**Доказательство следствия 1.** Согласно п. 2 предложения 1 (см. также (П.1.8))  $\varphi(\sigma)$  — строго выпуклая функция. Известно [15], что производная строго выпуклой функции, в частности  $\frac{d}{d\sigma}\varphi(\sigma)$ , является непрерывной и монотонно возрастающей. Очевидно также, что производные  $\frac{d\varphi}{d\sigma}(0)$  и  $\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}(0)$  определены как правые производные в точке нуль и имеют вид

$$\frac{d\varphi}{d\sigma}(0) = \ln \lambda E\rho_1, \quad \frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}(0) = (\ln \lambda)^2 E\rho_1^2.$$

По определению производящей функции моментов (формула (П.1.1)) параметр  $\ln \lambda > 1$ , поэтому знак  $\frac{d\varphi}{d\sigma}(0)$  совпадает со знаком  $E\rho_1$ . Следовательно, возможны следующие варианты зависимости  $\varphi(\sigma)$  от  $\sigma$ .

Вариант 1:  $M^+ < 0$ . Тогда  $E\rho_1 < 0$ ,  $\frac{d\varphi}{d\sigma}(0) < 0$  и  $\frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma) \uparrow 0$  при  $\sigma \rightarrow \infty$ . Иными словами, при  $\sigma \geq 0$  функция  $\varphi(\sigma)$  монотонно убывает от значения 1 (поскольку  $\varphi(0) = 1$ ) к нулю.

Вариант 2. Пусть  $M^+ > 0$ , но  $E\rho_1 < 0$  (т.е.  $\frac{d\varphi}{d\sigma}(0) < 0$ ). Кроме того, в этом случае  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma) \geq \ln \lambda \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left\{ E\rho_1 \lambda^{\sigma \rho_1} 1_{\{O_{M^+}(\varepsilon) \cap (0, \infty)\}} \right\} = \infty$ , где  $O_{M^+}(\varepsilon)$  —  $\varepsilon$ -окрестность точки  $M^+$ ,  $\varepsilon > 0$  — любое. Отсюда следует существование чисел  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_{\frac{1}{\beta}} \in \mathbb{R}^+$  таких, что:

2.1)  $\sigma_0$  — это (в силу теоремы Коши) единственный корень уравнения  $\frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma) = 0$  (действительно,  $\frac{d\varphi}{d\sigma}(0) < 0$ ,  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma) = +\infty$  и  $\frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma)$  монотонно возрастает по  $\sigma$ ), причем на основании теоремы Ферма  $0 < \varphi(\sigma_0) = \min_{\sigma \in \mathbb{R}^1} \varphi(\sigma) < \varphi(0) = 1$ ;

2.2)  $\sigma_1 > 0$  — это единственное нетривиальное решение уравнения  $\varphi(\sigma) = 1$  ( $= \varphi(0)$ ), причем если: а)  $\sigma \in (0, \sigma_1]$ , то  $\varphi(\sigma) \leq 1$ , б)  $\sigma > \sigma_1$ , то  $\varphi(\sigma) > 1$ ;

2.3)  $\sigma_{\frac{1}{\beta}} > 0$  — это корень уравнения  $\varphi(\sigma) = \frac{1}{\beta}$ , где  $\beta \in (0, 1)$ , причем  $\sigma_1 < \sigma_{\frac{1}{\beta}}$  и если  $\sigma > \sigma_{\frac{1}{\beta}}$ , то  $\varphi(\sigma) > \varphi\left(\sigma_{\frac{1}{\beta}}\right)$ .

Вариант 3. Пусть  $\mathbf{E}\rho_1 \geq 0$ . Тогда  $\frac{d\varphi}{d\sigma}(0) \geq 0$  и, поскольку  $\frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma)$  монотонно возрастает по  $\sigma$ , очевидно, что и  $\varphi(\sigma) \geq 1$  монотонна и возрастает по  $\sigma$ ,  $\sigma \geq 0$ . Поэтому для любого  $\beta \in (0, 1]$  существует единственный корень  $\sigma_{\frac{1}{\beta}}$  уравнения  $\varphi\left(\sigma_{\frac{1}{\beta}}\right) = \frac{1}{\beta}$ , причем при  $\sigma \geq \sigma_{\frac{1}{\beta}}$  функция  $\varphi(\sigma) \geq \frac{1}{\beta}$ .

Доказательство закончено.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

В этом приложении доказаны теоремы 1 и 2.

При доказательстве теоремы 1 воспользуемся следующим вспомогательным утверждением о виде решения рекуррентного соотношения (относительно  $w^k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ):

$$(P.2.1) \quad \begin{cases} w^k(x) = \beta \mathbf{E}w^{k+1}(x\lambda^{\rho_1}), \\ w^k(x)|_{k=N} = Ax^\sigma + B. \end{cases}$$

*Лемма 1.* Пусть выполнены условия теоремы 1. Семейство  $\{w^k(x)\}_{k \in N_0}$  является единственным решением (P.2.1) тогда и только тогда, когда

$$(P.2.2) \quad w^k(x) = A_k x^\sigma + B_k, \quad k \in N_0,$$

где  $\{A_k\}_{k \in N_0}$  и  $\{B_k\}_{k \in N_0}$  определены равенствами (19).

*Доказательство леммы 1.* 1. Необходимость. Докажем, что семейство функций (P.2.2) является решением системы (P.2.1). Доказательство проведем методом индукции. При  $k = N$  из (P.2.1) следует, что  $w^k(x)|_{k=N} = Ax^\sigma + B$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ .

Пусть

$$w^{k+1}(x) = A_{k+1} x^\sigma + B_{k+1},$$

где

$$A_{k+1} = A(\beta \mathbf{E}\lambda^{\sigma\rho_1})^{N-k-1}, \quad B_{k+1} = \beta^{N-k-1}B.$$

Установим, что  $w^k(x) = A_k x^\sigma + B_k$ . Действительно, из (P.2.1) и предположения индукции для любых  $x \in \mathbb{R}^+$  следуют равенства

$$\begin{aligned} w^k(x) &= \beta \mathbf{E}w^{k+1}(x\lambda^{\rho_1}) = \beta \mathbf{E}(A_{k+1}x^\sigma\lambda^{\sigma\rho_1} + B_{k+1}) = \\ &= \beta A_{k+1}x^\sigma \mathbf{E}\lambda^{\sigma\rho_1} + \beta B_{k+1} = A(\beta \mathbf{E}\lambda^{\sigma\rho_1})^{N-k} x^\sigma + \beta^{N-k}B = A_k x^\sigma + B_k. \end{aligned}$$

Таким образом, основной шаг индукции обоснован, а вместе с ним установлена необходимость.

2. Достаточность. Установим, что семейство функций (P.2.2) удовлетворяет (P.2.1). Из (P.2.2) имеем  $w^{k+1}(x\lambda^{\rho_1}) \triangleq A_{k+1}x^\sigma\lambda^{\sigma\rho_1} + B_{k+1}$ . От левой и правой частей последнего равенства возьмем математическое ожидание, умноженное на  $\beta$ . Учитывая (20), получим

$$\begin{aligned} \beta \mathbf{E}w^{k+1}(x\lambda^{\rho_1}) &= \beta \mathbf{E}(A_{k+1}x^\sigma\lambda^{\sigma\rho_1} + B_{k+1}) = \\ &= (\beta A_{k+1} \mathbf{E}\lambda^{\sigma\rho_1}) x^\sigma + \beta B_{k+1} = A_k x^\sigma + B_k = w^k(x). \end{aligned}$$

Установили достаточность.

Единственность очевидна. Доказательство закончено.

*Доказательство теоремы 1.* Известно [3], что решение рекуррентного соотношения (9) допускает представление (18). Из (18), в свою очередь, следует, что для любых  $k \in N_0$  имеются три взаимоисключающие возможности: 1)  $\Gamma_k = \emptyset$  ( $C_k = \mathbb{R}^+$ ), 2)  $C_k = \emptyset$  ( $\Gamma_k = \mathbb{R}^+$ ), 3)  $C_k \neq \emptyset, \Gamma_k \neq \emptyset$ , причем  $C_k \cup \Gamma_k = \mathbb{R}^+$ . Рассмотрим каждую из них.

Возможность 1. Из (9) следует, что в этом случае урезанная цена  $v^k(x)$  для любого  $x \in \mathbb{R}^+$  удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$(П.2.3) \quad \begin{cases} v^k(x) = \beta \mathbf{E}v^{k+1}(x\lambda^{\rho_1}), \\ v^k(x)|_{k=N} = Ax^\sigma + B. \end{cases}$$

Тогда из утверждения леммы 1 следует, что решение (П.2.3), в силу его единственности, имеет вид

$$(П.2.4) \quad v^k(x) = A_k x^\sigma + B_k,$$

причем  $A_k$  и  $B_k$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям (20).

Возможность 2. В этом случае из (18) следует, что для любого  $x \in \mathbb{R}^+$  решение (9) имеет вид

$$(П.2.5) \quad v^k(x) = Ax^\sigma + B.$$

Возможность 3. Поскольку по условию  $C_k \neq \emptyset$ , то из (15) следует, что для любого  $0 \leq n \leq k$  множество  $C_n \neq \emptyset$ . Поэтому для любого  $x \in C_n$  урезанная цена  $v^n(x)$  удовлетворяет рекуррентному соотношению (П.2.3), решение которого имеет вид (П.2.4). Следовательно, (18) с учетом (15) для любых  $n \leq k$  и  $x \in \mathbb{R}^+$  можно переписать в виде

$$(П.2.6) \quad \begin{aligned} v^n(x) &= (Ax^\sigma + B) \mathbf{1}_{\{x \in \Gamma_n\}} + (A_n x^\sigma + B_n) \mathbf{1}_{\{x \in C_n\}} = \\ &= (Ax^\sigma + B) + [A_n x^\sigma + B_n - Ax^\sigma - B] \mathbf{1}_{\{x \in C_n\}}. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из определения множеств  $C_n$  и  $\Gamma_n$ .

Из (П.2.6) и (12) очевидным образом следует, что для любых  $x \in \mathbb{R}^+$  выполняются соотношения

$$(П.2.7) \quad v^n(x) - Ax^\sigma - B = [A_n x^\sigma + B_n - Ax^\sigma - B] \mathbf{1}_{\{x \in C_n\}} \geq 0.$$

По условию имеем  $C_n \neq \emptyset$ . Тогда из (П.2.7) следует, что множество  $C_n$  ( $n \leq k$ ) допускает представление

$$(П.2.8) \quad \begin{aligned} C_n &= \{x \in \mathbb{R}^+ : v^n(x) - Ax^\sigma - B\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^+ : [A_n x^\sigma + B_n - Ax^\sigma - B] \mathbf{1}_{\{x \in C_n\}} > 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^+ : A_n x^\sigma + B_n > Ax^\sigma + B\}, \end{aligned}$$

что и доказывает (22). Поэтому в силу (П.2.8) множество  $\Gamma_n = \mathbb{R}^+ \setminus C_n$  допускает представление (23).

Рассмотрим правую часть равенства (П.2.7). В силу (П.2.8) для любого  $x \in \mathbb{R}^+$  имеем

$$\begin{aligned}[A_n x^\sigma + B_n - A x^\sigma - B] 1_{\{x \in \mathbb{R}^+ : A_n x^\sigma + B_n > A x^\sigma + B\}} = \\ = \max \{A_n x^\sigma + B_n - A x^\sigma - B, 0\}.\end{aligned}$$

Поэтому из (П.2.5) с учетом (23) и последнего равенства устанавливается равенство (24). Этим завершается доказательство теоремы 1.

*Доказательство теоремы 2.* Согласно теореме 1 для любого  $k \in N_0$  множество остановки  $\Gamma_k$  имеет вид (23), из которого следует замкнутость этого множества. Поэтому его внутренность ( $\text{int } \Gamma_k$ ) допускает представление (25). Ясно, что  $\partial \Gamma_k$ , определяемое (26), — это множество граничных точек множества  $\Gamma_k$  и при любых  $k \in N_0$  граница  $\partial \Gamma_k \neq \emptyset$ . Поэтому элементы  $x(k) \in \partial \Gamma_k$  должны удовлетворять уравнению

$$(П.2.9) \quad A_k x^\sigma + B_k = A x^\sigma + B.$$

Если выполнены условия теоремы 1 и хотя бы одно из условий I–IV теоремы 2, то для каждого из этих случаев очевидно существование единственного неотрицательного решения  $x(k)$  уравнения (П.2.9). Стало быть,  $\partial \Gamma_k$  — одноточечное множество (т.е.  $\partial \Gamma_k = \{x(k)\}$ ). Непосредственной проверкой легко убедиться в справедливости утверждений I–IV теоремы 2.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Доказательство утверждений теоремы 3 опирается на следующее вспомогательное утверждение.

*Лемма 2.* Пусть выполнены условия теоремы 3, где  $x \in \mathbb{R}^+$ , а борелевская функция  $w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^1$  удовлетворяет уравнению (относительно  $w(x)$ ):

$$(П.3.1) \quad w(x) = \beta \mathbb{E}w(x \lambda^{\rho_1}).$$

Тогда для любого  $x \in \mathbb{R}^+$  уравнение (П.3.1) имеет единственное нетривиальное решение

$$(П.3.2) \quad w(x) = A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}},$$

где  $A^* > 0$  — некоторая константа, а  $\sigma_1 \frac{1}{\beta}$  — единственный корень уравнения  $\beta \varphi(\sigma) = 1$ .

*Замечание 5.* Лемма 2 устанавливает структуру решения уравнения (П.3.1). Однако, из него не следует, какое значение принимает константа  $A^*$ .

*Доказательство леммы 2.* Доказательство проведем по индукции. Рассмотрим рекуррентное соотношение,  $k \geq 1$

$$(П.3.3) \quad \begin{cases} w^k(x) = \beta \mathbb{E}w^{k-1}(x \lambda^{\rho_1}), \\ w^k(x)|_{k=0} = A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}}, \end{cases}$$

где  $x \in \mathbb{R}^+$ , а  $A^*$  — некоторая положительная константа.

Из (П.3.3) следует, что

$$w^1(x) = \beta \mathbb{E} w^0(x\lambda^{\rho_1}) = \beta \mathbb{E} A^*(x\lambda^{\rho_1})^{\frac{\sigma_1}{\beta}} = \beta A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}} \varphi\left(\sigma_{\frac{1}{\sigma}}\right).$$

Из условия  $\beta \varphi\left(\sigma_{\frac{1}{\beta}}\right) = 1$  следует, что  $w^1(x) = A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}}$ . Пусть теперь  $w^{k-1}(x) = A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}}$ . Установим, что из (П.3.3) следует равенство  $w^k(x) = A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}}$ . Действительно, из (П.3.3) имеем

$$w^k(x) = \beta \mathbb{E} A^*(x\lambda^{\rho_1})^{\frac{\sigma_1}{\beta}} = \beta A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}} \varphi\left(\sigma_{\frac{1}{\sigma}}\right) = A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}}.$$

Основной шаг индукции обоснован. Следовательно, для любых  $k \geq 1$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$  и  $\beta \in (0, 1]$  имеем равенство  $w^k(x) = A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}}$ . Поэтому

$$w(x) \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} w^k(x) = A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}}.$$

Единственность решения уравнения (П.3.1) следует из единственности предела. Доказательство закончено.

*Доказательство теоремы 3.* Поскольку уравнение (П.3.1) имеет единственное решение (П.3.2) для любого  $x \in \mathbb{R}^+$ , то оно имеет такое же решение и для любого  $x \in C \subseteq \mathbb{R}^+$ . Стало быть, в силу (35) и утверждения леммы 2 имеем для любого  $x \in C$  равенства

$$(П.3.4) \quad v(x) = w(x) = A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}}.$$

Поэтому из равенств (34) и (35) в силу (П.3.4) для любого  $x \in \mathbb{R}^+$  следуют равенства

$$\begin{aligned} (П.3.5) \quad v(x) &= (Ax^\sigma + B) 1_{\{x \in \Gamma\}} + \beta \mathbb{E} v(x\lambda^{\rho_1}) 1_{\{x \in C\}} = \\ &= (Ax^\sigma + B) 1_{\{x \in \Gamma\}} + v(x) 1_{\{x \in C\}} = \\ &= (Ax^\sigma + B) 1_{\{x \in \Gamma\}} + A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}} 1_{\{x \in C\}}. \end{aligned}$$

Так как  $1_{\{x \in \Gamma\}} = 1 - 1_{\{x \in C\}}$ , то из (П.3.5) следует, что для любых  $x \in \mathbb{R}^+$

$$(П.3.6) \quad v(x) - Ax^\sigma - B = \left( A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}} - Ax^\sigma - B \right) 1_{\{x \in C\}} \geq 0.$$

Последнее неравенство в (П.3.6) следует из неравенств (30). Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что для любого  $x \in \mathbb{R}^+$  в силу (П.3.6) имеет место равенство

$$(П.3.7) \quad \left( A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}} - Ax^\sigma - B \right) 1_{\{x \in C\}} = \max \left[ A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}} - Ax^\sigma - B, 0 \right].$$

Из (П.3.6) и (П.3.7) следует (40).

Теперь установим представление множеств  $C$  и  $\Gamma$ . Действительно, из (40) и определения множества  $C$  имеем

$$C = \{x \in \mathbb{R}^+ : v(x) - Ax^\sigma + B > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}} > Ax^\sigma + B\right\}.$$

Отсюда с учетом определения множества  $\Gamma = \mathbb{R}^+ \setminus C$  получаем

$$(П.3.8) \quad \Gamma = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}} \leq Ax^\sigma + B\right\}.$$

Теперь найдем значение константы  $A^*$ . Для этого сначала заметим, что из неравенства (30) и (П.3.7) следует, что имеет место экстремальная задача

$$(П.3.9) \quad (v(x) - Ax^\sigma - B) \rightarrow \inf_{x \in \mathbb{R}^+}.$$

Из равенства (П.3.6) вытекает, что задача (П.3.9) эквивалентна следующей задаче:

$$(П.3.10) \quad \max \left[ A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}} - Ax^\sigma - B, 0 \right] \rightarrow \inf_{x \in \mathbb{R}^+}.$$

Из (П.3.6) и (П.3.7) следует, что

$$(П.3.11) \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^+} \max \left[ A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}} - Ax^\sigma - B, 0 \right] = 0.$$

Возникает вопрос о том, достигается ли нижняя грань в (П.3.11), т.е. существует ли такое  $x_\Gamma > 0$ , что выполнено равенство

$$(П.3.12) \quad A^* x_\Gamma^{\frac{\sigma_1}{\beta}} = Ax_\Gamma^\sigma + B.$$

Из теоремы Ферма следует, что для существования такого  $x_\Gamma > 0$  необходимо, чтобы существовало решение уравнения

$$d \left( A^* x^{\frac{\sigma_1}{\beta}} - Ax^\sigma - B \right) / dx = 0.$$

Следовательно,

$$(П.3.13) \quad \sigma \frac{1}{\beta} A^* x_\Gamma^{\frac{\sigma_1}{\beta}-1} = \sigma A x_\Gamma^{\sigma-1}.$$

Таким образом, (П.3.12) и (П.3.13) дают систему нелинейных алгебраических уравнений относительно  $A^*$  и  $x_\Gamma$

$$(П.3.14) \quad \begin{cases} A^* x_\Gamma^{\frac{\sigma_1}{\beta}} = Ax_\Gamma^\sigma + B, \\ \sigma \frac{1}{\beta} A^* x_\Gamma^{\frac{\sigma_1}{\beta}-1} = \sigma A x_\Gamma^{\sigma-1}. \end{cases}$$

Тогда в условиях теоремы 3 (т.е. при выполнении (37) и (38) или (39)), как легко установить, система (П.3.14) имеет единственное решение вида (41), (42).

Покажем теперь, что  $x_\Gamma > 0$ , определяемое (42), является искомой свободной границей. Сначала заметим, что множество  $\Gamma$  в силу (П.3.8) можно представить в виде  $\Gamma = \partial\Gamma \cup \text{int } \Gamma$ , где

$$\text{int } \Gamma \triangleq \left\{ x > 0 : A^* x^{\frac{\sigma}{\beta}} < Ax^\sigma + B \right\}$$

— внутренность множества  $\Gamma$ , а

$$\partial\Gamma = \left\{ x > 0 : A^* x^{\frac{\sigma}{\beta}} = Ax^\sigma + B \right\}$$

— свободная граница, отделяющая множество  $C$  от  $\text{int } \Gamma$ .

Очевидно, что  $\Gamma \neq \emptyset$ , если  $\text{int } \Gamma \neq \emptyset$ , т.е. если существует хотя бы один  $x > 0$  такой, что выполняется неравенство

$$A^* x^{\frac{\sigma}{\beta}} < Ax^\sigma + B,$$

либо если  $\partial\Gamma \neq \emptyset$ , то существует хотя бы одно решение уравнения (относительно  $x \in \mathbb{R}^+$ ) (П.3.12). Следовательно, в силу (П.3.9), существует  $x_\Gamma > 0$  такая, что

$$x_\Gamma = \arg \left\{ x > 0 : A^* x^{\frac{\sigma}{\beta}} = Ax^\sigma + B \right\},$$

т.е.  $x_\Gamma$  является единственной крайней точкой множества  $\Gamma$ . Поэтому  $\Gamma$  допускает представление (44).

Для завершения доказательства осталось заметить, что (45) следует из определения оптимального момента остановки  $\tau^0$  и равенства

$$\tau^0 = \inf \{n \geq 0 : S_n \in \Gamma\} = \begin{cases} \inf_n \{n \geq 0, S_n \in \Gamma\}, \\ \infty, \text{ если } S_n \notin \Gamma \text{ для любого } n. \end{cases}$$

Доказательство закончено.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розов А.К. Оптимальные правила остановки и их применения. СПб.: Политехника, 2009.
2. Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976.
3. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Теория. М.: Фазис, 1998.
4. Аркин В.И., Сластников А.Д. Аркина С.В. Стимулирование инвестиционных проектов с помощью механизма амортизации / Научный доклад № 02/05. Консорциум экономических исследований и образования. Серия «Научные доклады». М.: EERC, 2002.
5. Ермаков С.М., Жиглявский А.А. Математическая теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1987.
6. Ширяев А.Н. Вероятность — 1. М.: МЦНМО, 2004.
7. Wald A. Sequential analysis. N.Y.: John Wiley and Sons, 1947.

8. Ferguson T. S. Optimal Stopping and Applications. – unpublished manuscript, 2000, URL: <http://www.math.ucla.edu/tom/Stopping/Contents.html> (дата обращения: 10.07.2014).
9. Фёльмер Г., Шид А. Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008.
10. Jönsson H., Kukush A.G., Silvestrov D.S. Threshold structure of optimal stopping strategies for american type option. I // Theory Probab. Math. Statist. 2005. No. 71. P. 93–103.
11. Jönsson H., Kukush A.G., Silvestrov D.S. Threshold structure of optimal stopping strategies for american type option. II // Theory Probab. Math. Statist. 2006. No. 72. P. 47–58.
12. Kukush A.G., Silvestrov D.S. Optimal pricing of American type options with discrete time // Theory Stoch. Proces. 2004. V. 10(26). No. 1–2. P. 72–96.
13. Новиков А.А., Ширяев А.Н. Об одном эффективном случае решения задачи об оптимальной остановке для случайных блужданий // Теория вероятн. и ее примен. 2004. Т. 49. Вып. 2. С. 373–382.
14. Силаева М.В., Силаев А.М. Спрос и предложение. Н. Новгород: Нижегород. филиал ГУ-ВШЭ, 2006.
15. Рокфеллер Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.*

Поступила в редакцию 11.12.2019

После доработки 16.01.2020

Принята к публикации 30.01.2020

# *Робастное, адаптивное и сетевое управление*

© 2020 г. П.Ш. ГЕЙДАРОВ, канд. техн. наук (plbaku2010@gmail.com)  
(Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку)

## **СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ С ВЫЧИСЛЕННЫМИ ВЕСОВЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ И С ГЕНЕРАЦИЕЙ ВЕСОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧАЙНЫМ ОБРАЗОМ**

Нейронные сети на основе метрических методов распознавания позволяют на основе начальных условий задачи распознавания, таких как количество образов и эталонов, определить структуру нейронной сети (количество нейронов, слоев, связей), а также позволяют аналитически вычислять значения весов связей нейронной сети. Будучи нейронными сетями прямого распространения, эти сети могут также обучаться классическими алгоритмами обучения. Возможность предварительного вычисления значений весов нейронной сети позволяет утверждать, что процедура создания и дообучения нейронной сети прямого распространения ускоряется по сравнению с классической схемой создания и обучения нейронной сети, в которой значения весов генерируются случайным образом. В статье выполняются два эксперимента на базе рукописных цифр MNIST, подтверждающие это утверждение.

**Ключевые слова:** нейронные сети, метрические методы распознавания, метод ближайшего соседа, алгоритм обратного распространения ошибки, случайная инициализация весов.

**DOI:** 10.31857/S0005231020070041

### **1. Введение**

В современном мире применение нейронных сетей получило широкое применение, в особенности в задачах распознавания образов. Несмотря на это, на практике создание и обучение нейронных сетей остается сложной и часто непредсказуемой работой. Это главным образом связано с тем, что процесс создания и обучения нейронных сетей [1, 2] не является строго определенным, что создает ряд сложностей и делает этот процесс трудоемким. Сложности заключаются как в выборе самой структуры нейронной сети, так и в выборе параметров обучения.

В публикациях [3, 4] предложена архитектура нейронной сети, реализующая метрические методы распознавания [5]. Структура этих нейронных сетей: количества нейронов, связей, слоев строго определяются на основе начальных условий задачи метрических методов распознавания [5], таких

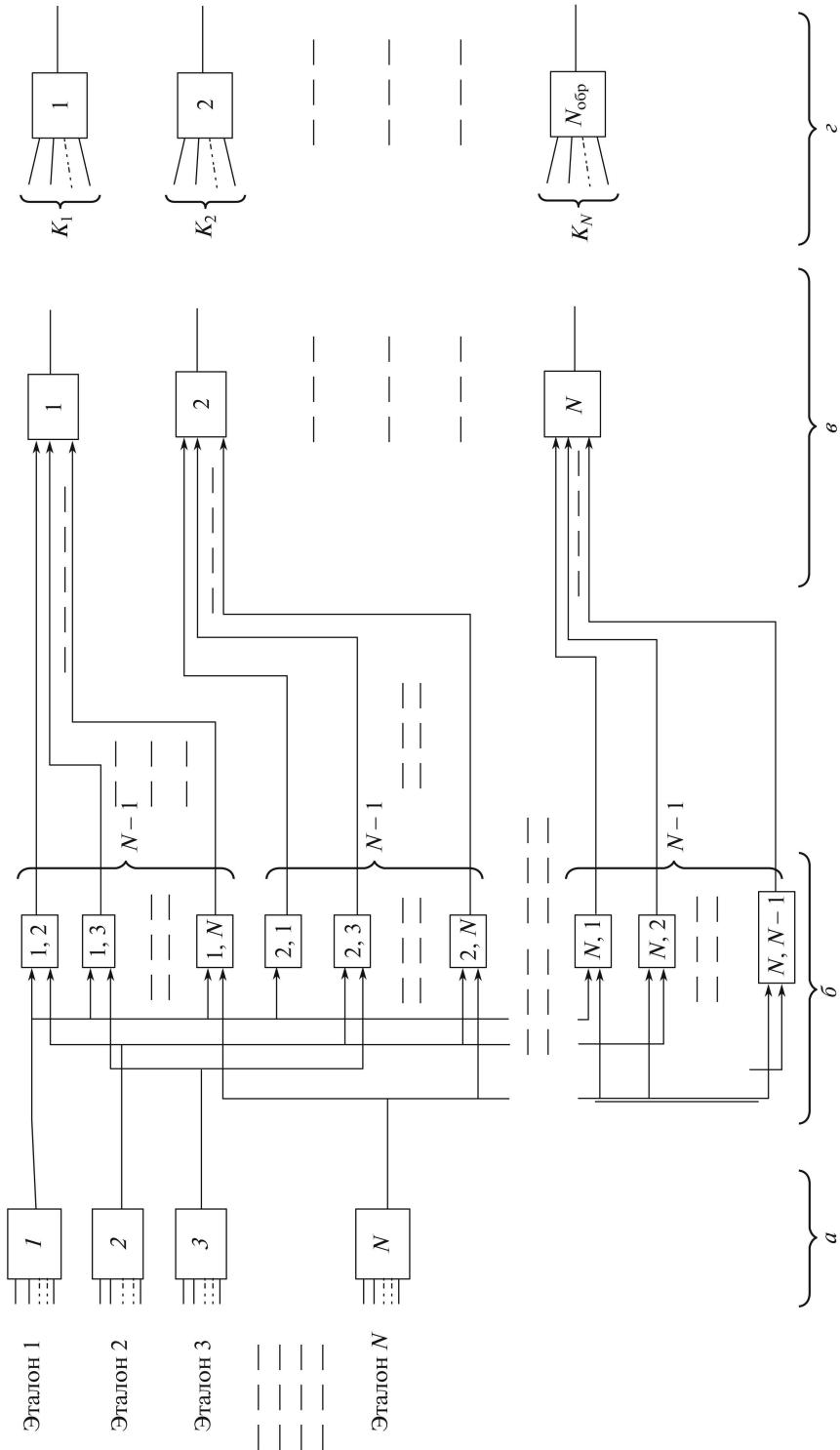


Рис.1. Четырехслойная нейронная сеть для задачи распознавания  $N_{\text{обр}}$  образов с  $N$  эталонами:  $a$  — нулевой слой;  $b$  — первый слой;  $\delta$  — второй слой;  $\varrho$  — третий слой.

как количество используемых эталонов и количество распознаваемых образов. Значения весов связей для этих сетей также вычисляются аналитически на основе метрических мер близости [5]. Такая возможность уже позволяет получить работающую нейронную сеть без применения алгоритмов обучения. Нейронные сети на основе метрических методов распознавания являются частным случаем классического трех–четырехслойного многослойного перцептрона, но при этом архитектуры этих сетей позволяют определить структуру нейронной сети и аналитически определять значения весов. Кроме того, архитектура этих сетей позволяет каскадно добавлять в нейронную сеть новые эталоны и распознаваемые образы без изменения предыдущих весовых значений, что также выгодно отличает эти сети от классических сетей прямого распространения, в том числе и от глубоких сверточных сетей [6, 7].

Нужно сказать, что существуют нейронные сети с предварительно определяемыми весами, такие, например, как сети Хопфилда и Хемминга [1, 2]. Но эти сети не являются сетями прямого распространения, имеют обратные связи и в связи с этим имеют ряд сложностей и нерешенных проблем, среди которых и такие, как проблема неустойчивости этих сетей. Помимо этого, предварительное фиксирование значений весов иногда применяется и в нейронных сетях прямого распространения. Это так называемый подход “замораживания весов” [8], что, например, применяется в случаях, когда необходимо сократить время обучения путем замораживания веса скрытого нейрона, если его выход не изменяется существенно в течение обучения, или когда необходимо воспользоваться преимуществами ранее обученной нейронной сети и использовать ее веса для дальнейшей настройки данной нейронной сети. Но эти подходы не определяют значения весов, а направлены на корректирование и ускорение процесса алгоритма обучения.

Поскольку нейронные сети на основе метрических методов распознавания являются сетями прямого распространения, то эти сети могут также обучаться и классическими алгоритмами обучения [1, 2]. В [9, 10] был приведен обобщенный алгоритм определения значений весов для второго и третьего слоя полносвязной нейронной сети, полученной на основе нейронной сети на основе метрических методов распознавания (рис. 1). Данный алгоритм позволяет вычислять всевозможные диапазоны значений весов и порогов нейронной сети второго и третьего слоев, при которых логика работы нейронной сети на рис. 1 сохраняется неизменной. Там же было сделано предположение, что процесс вычисления и последующее за этим дообучение нейронной сети будет выполняться быстрее, чем это происходит классическим способом, когда обучение нейронной сети выполняется на основе случайно сгенерированных значений весов. Но такое предположение могло быть и ошибочным, поскольку не исключает того, что процесс дообучения может, наоборот, уничтожать результативность, основанную на предварительно вычисленных значениях весов, и в результате, возможно, еще больше удлинять процесс обучения. Другими словами, для проверки предположения в публикациях [9, 10] необходимо наличие экспериментального подтверждения. С этой целью в данной статье выполняется сравнительный эксперимент на базе MNIST обучений одной и той же нейронной сети как с вычисленными, так и со случайно сгенерированными весовыми значениями. Кроме того, такой эксперимент также позволит

проверить работоспособность нейронных сетей на основе метрических методов распознавания на большой тестируемой базе, такой как база MNIST, а также проверить возможность работы данных сетей с непрерывными функциями активаций и соответственно возможность дообучения этих сетей алгоритмом обратного распространения ошибки. Принципиальная разница от классических методов при таком подходе будет заключаться в ускорении процедуры создания и обучения нейронной сети благодаря предварительному вычислению значений весов связей нейронов, тогда как в классических схемах создания и обучения нейронной сети ускорение реализуется при помощи использования более быстрых алгоритмов обучения нейронной сети со случайной инициализацией весов.

Отметим, что возможность ускорения создания и обучения нейронной сети посредством предварительного вычисления весов может быть особо актуальной для будущих нейронных сетей, близких к возможностям биологических нейронных сетей, где количество распознаваемых образов будет значительным или даже огромным.

Цель статьи — выполнить два эксперимента по обучению одной и той же нейронной сети с одинаковым количеством эпох обучения как с предварительно вычисленными весами, так и с инициализацией значений весов случайными числами. В качестве базы данных используется база MNIST изображений рукописных цифр. Окончательная цель заключается в сравнении полученных результатов двух экспериментов с целью оценки как по результативности распознанных цифр базы MNIST, так и по общему потраченному времени создания и обучения нейронной сети.

## **2. Основные положения нейронных сетей на основе метрических методов распознавания**

Метрические методы распознавания — это методы, которые определяют принадлежность распознаваемого объекта к тому или иному образу в некоторой определенной признаковой системе координат на основе наименьшего значения метрической характеристики близости к эталону или к группе эталонов образа [5]. Здесь под “эталонами” понимаются выбранные (выделенные) образцы от каждого образа в существующей выборке данных. Работоспособность метрических методов распознавания основана на гипотезе компактности, которая предполагает, что элементы одного класса (образа) в некоторой признаковой системе координат находятся компактно друг к другу. В качестве метрических характеристик близости для одной точки (ячейки таблицы, пикселя) могут использоваться разные метрические выражения, например выражения среднеквадратичной разности (2.1), (2.2):

$$(2.1) \quad w_{ij,k} = (y_{etal} - j)^2,$$

где  $w_{ij,k}$  — значение веса таблицы весов с координатами  $i, j$  для  $k$ -го нейрона нулевого слоя,  $y_{etal}$  — ближайшая по вертикали к координате  $j$  активная ячейка бинарной матрицы. Выражение (2.1) применимо, например, для за-

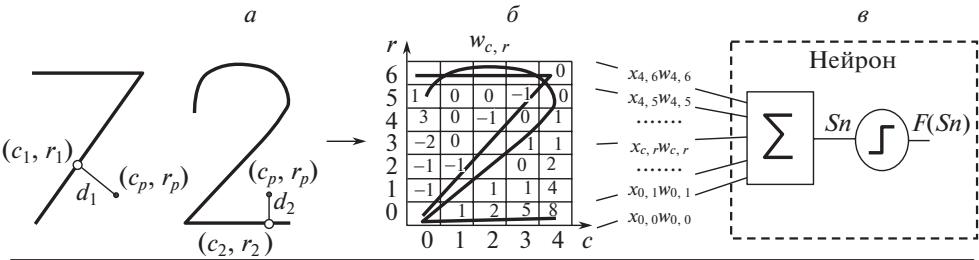


Рис. 2. Пример таблицы весов с размерностью  $5 \times 7$  для пары эталонов  $\{7, 2\}$ :  
 а — формирование таблицы весов для нулевого слоя; б — таблица весов для нейрона первого слоя; в — нейрон первого слоя.

дачи распознавания кривых

$$(2.2) \quad w_{c,r}^{(0)} = d_1^2 = \left( (c_1 - c_p)^2 + (r_1 - r_p)^2 \right).$$

Формула (2.2) — еще одно возможное выражение определения значения веса для нейрона нулевого слоя, где  $(c_p, r_p)$  — координаты точки (ячейки таблицы весов), для которой вычисляется значение веса,  $(c_1, r_1)$  — ближайшие координаты активных точек (ячеек таблицы весов) для точки (ячейки) с координатами  $(c_p, r_p)$  (рис. 2, а).

К метрическим методам относятся такие методы, как: метод построения эталонов (метод эталона), метод ближайшего соседа, метод ближайших  $N$  соседей, метод потенциальных функций и т.д. [5]. Приведенная на рис. 1 схема нейронной сети реализует метод ближайшего соседа, алгоритм которого реализуется следующим образом:

- Определяется характеристика (коэффициент) близости, например по выражениям (2.1), (2.2), для каждого эталона;
- Определяется минимальное значение коэффициента близости;
- По принадлежности ближайшего эталона к тому или иному образу определяется наименование ближайшего образа (класса).

В нейронной сети на рис. 1 каждому выбранному эталону соответствует один нейрон в нулевом слое и согласно п. 1 алгоритма метода ближайшего соседа в каждом нейроне нулевого слоя определяется суммарное значение коэффициента близости между входным элементом  $X$  и эталоном, которому соответствует данный нейрон:

$$(2.3) \quad S_{n_k}^{(0)} = \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^C x_{ij} w_{i,j},$$

где  $S_{n_k}^{(0)}$  — значение функции состояния  $k$ -го нейрона нулевого слоя,  $x_{ij}$  — значение ячейки бинарной матрицы входного распознаваемого элемента.  $R, C$  — число колонок и рядов таблицы весов и бинарной матрицы. При этом

здесь нейроны нулевого слоя являются линейными нейронами, т.е. нейронами, для которых функция активации равна функции состояния нейрона:

$$(2.4) \quad f(Sn_k^{(0)}) = Sn_k^{(0)}.$$

Далее, согласно п. 2 алгоритма метода ближайшего соседа определяется эталон (нулевой нейрон) с минимальным значением коэффициента близости  $Sn_k^{(0)}$ , который соответствует самому ближайшему эталону к распознаваемому элементу  $X$ . Для этого в первом слое выполняется попарное сравнение всех выходов нулевого слоя, рис. 1,б, например, для первого нейрона первого слоя функция состояния определяется выражением

$$(2.5) \quad Sn_1^{(1)} = w_2^{(1)} f(Sn_2^{(0)}) - w_1^{(1)} f(Sn_1^{(0)}),$$

где  $w_2^{(1)} = w_1^{(1)} = 1$ , а функция активации для этого нейрона определяется условиями:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} f(Sn_1^{(1)}) &= 1, & \text{если } Sn_1^{(1)} < 0, \\ f(Sn_1^{(1)}) &= 0, & \text{если } Sn_1^{(1)} > 0. \end{aligned}$$

А в нейроне второго слоя (рис. 1,в) выполняется суммирование всех выходов первого слоя, соответствующих одному эталону (одному нейрону нулевого слоя):

$$(2.7) \quad Sn_k^{(2)} = \sum_{j=1, j \neq k}^N f(Sn_{k,j}^{(1)}),$$

где активный выход второго слоя выделяется пороговым значением  $H^{(2)} = N - 1$  и определяет ближайший эталон к распознаваемому объекту  $X$ :

$$(2.8) \quad \begin{aligned} f(Sn_k^{(2)}) &= 1, & \text{если } Sn_k^{(2)} \geq (N - 1) = H^{(2)}, \\ f(Sn_k^{(2)}) &= 0, & \text{если } Sn_k^{(2)} < (N - 1) = H^{(2)}. \end{aligned}$$

Каждый  $k$ -й нейрон третьего слоя нейронной сети суммирует выходы нейронов второго слоя, принадлежащих к эталонам одного  $k$ -го образа

$$(2.9) \quad Sn_k^{(3)} = \sum_{i \in k}^{K_k} f(Sn_i^{(2)}),$$

где  $K_k$  — количество эталонов для  $k$ -го распознаваемого образа, и проверяет на активность хотя бы один вход нейрона при помощи функции активации:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} f(Sn_k^{(3)}) &= 1, & \text{если } Sn_k^{(3)} > 0, \\ f(Sn_k^{(3)}) &= 0, & \text{если } Sn_k^{(3)} \leq 0. \end{aligned}$$

Значения весов для каждого входа нейронов второго и третьего слоев вычисляются либо по приведенному в [9, 10] обобщенному алгоритму определения значения весов второго и третьего слоя, либо в простейшем случае принимаются равными единице:

$$(2.11) \quad w_{i,j}^{(2)} = w_{i,j}^{(3)} = 1.$$

Таким образом, согласно п. 3 алгоритма метода ближайшего соседа порядковый номер активного выхода третьего слоя определяет ближайший образ для распознаваемого элемента  $X$ .

На рис. 1 приведена расширенная схема нейронной сети на основе метрических методов распознавания, реализующая метод ближайшего соседа. Нейронная сеть строится на основе набора выбранных эталонов и количества распознаваемых в задаче образов (классов).

На схеме рис. 1 количество нейронов второго слоя равно количеству используемых эталонов  $n^{(2)} = N$ , а количество нейронов третьего слоя соответствует количеству распознаваемых образов  $n^{(3)} = N_{\text{обр}}$ . Количество нейронов 1-го слоя в расширенной схеме на рис. 1,б определяется количеством всевозможных пар эталонов:

$$(2.12) \quad n^{(1)} = N(N - 1).$$

Нейронная сеть на рис. 1 может быть и без нулевого слоя, тогда для каждого нейрона первого слоя вычисляется таблица весов, где значения весов связей нейронов первого слоя вычисляются аналитически на основе метрических выражений близости двух нейронов нулевого слоя, например, выражением

$$(2.13) \quad w_{c,r}^{(1)} = d_1^2 - d_2^2 = \left( (c_1 - c_p)^2 + (r_1 - r_p)^2 \right) - \left( (c_2 - c_p)^2 + (r_2 - r_p)^2 \right),$$

где  $(c_p, r_p)$  — координаты точки (ячейки таблицы весов), для которой вычисляется значение веса,  $(c_1, r_1)$  и  $(c_2, r_2)$  — ближайшие координаты активных точек (ячеек таблицы весов) для точки (ячейки) с координатами  $(c_p, r_p)$  (рис. 2,а и 2,б). В качестве выражений меры близости могут использоваться и другие более простые или сложные выражения, отличные от (2.13). В данной статье при создании нейронной сети используется выражение (2.13).

Отметим, что на основе схемы на рис. 1 с незначительными дополнениями и поправками могут быть также реализованы другие метрические методы распознавания.

### 3. Создание нейронной сети и вычисление значений весов

В данной статье нейронная сеть создается на базе MNIST. Это означает, что набор эталонов набирается из базы MNIST (рис. 3), размерность таблицы весов определяется также на основе размерности матрицы изображений базы MNIST, превышая ее в два раза и будет равна  $28 \times 56$ . Дальнейшее дообучение сети выполняется также на базе MNIST.

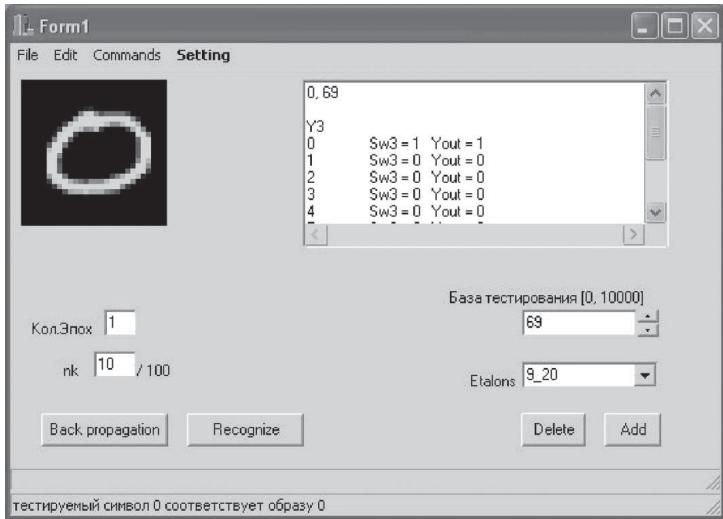


Рис. 3. Программный модуль для распознавания и обучения изображений базы MNIST, реализованный в среде Builder C++.

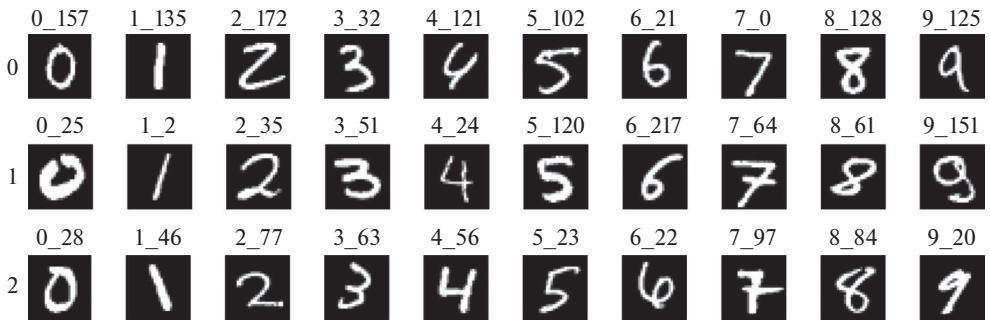


Рис. 4. Выбранные эталоны из контрольной базы MNIST, наименование изображения включает название образа и порядковый номер изображения в базе MNIST.

Напомним, что база MNIST состоит из обучающей базы, в который входят 60000 изображений рукописных цифр, и контрольной (тестовой) базы, состоящей из 10000 образцов изображений цифр. Каждой базе также прилагается своя база наименований цифр, порядок расположения которых такой же, как и порядок расположения изображений цифр в обучающей и контрольной базах. Изображения цифров в базах описаны в виде матрицы цифров размерностью  $28 \times 28$ . Каждая цифра матрицы определяет значение тональности одного пикселя изображения цифры в диапазоне  $[0, 255]$ .

В качестве эталонов было выбрано по три образца изображений цифр от каждого образа. Итого использовалось 30 эталонов, приведенных на рис. 4. Этапоны были выбраны интуитивно из первых 250 изображений цифр контрольной базы MNIST. На рис. 4 над каждым выбранным эталоном приве-

дено наименование изображения, например 2\_1, в котором первая цифра указывает образ, которому принадлежит изображение цифры, вторая цифра указывает порядковый номер данного изображения цифры в базе MNIST. Далее по тексту изображения базы MNIST будут обозначаться так, как представлено. Поскольку количество эталонов равно 30, то в соответствии с архитектурой нейронных сетей, реализующих метрические методы распознавания, количество нейронов второго слоя будет равно тоже 30, где каждый  $i$ -й выход соответствует  $i$ -му эталону и определяет принадлежность распознаваемого изображения к  $i$ -му эталону.

Для эталонов в рассматриваемой задаче выбран порядок расположения в той последовательности, который приведен на рис. 4. Сначала столбец с изображениями цифры “0”, потом — цифры “1” и т.д. В соответствии с этим схема сети на рис. 1 определяет и выходы второго слоя. Например, эталону 0\_157 соответствует  $k = 0$  выход второго слоя, а эталону 5\_23 соответствует  $k = 5 \cdot 3 + 3 - 1 = 17$  выход второго слоя и т.д. Количество нейронов третьего слоя равно количеству распознаваемых образов цифр,  $n^{(3)} = 10$ . Каждый  $i$ -й выход третьего слоя определяет принадлежность распознаваемого элемента к  $i$ -му образу цифры. Порядок образов цифр определен последовательно от 0 до 9.

Количество нейронов первого слоя определяется выражением (2.12):

$$(3.1) \quad n^{(1)} = 30 \cdot 29 = 870.$$

Для того чтобы упростить и ускорить вычисление таблиц весов первого слоя, вычисляются таблицы весов нулевого слоя [4] по формуле (2.2), на основе которых далее вычисляются таблицы весов первого слоя (2.13).

В процессе распознавания или обучения для каждого входного распознаваемого изображения составляется бинарная матрица, которая состоит из двух частей. В первой части бинарной матрицы единицы определяют светлые пиксели изображения, значения которых  $> 150$  и, наоборот, нули определяют затемненные пиксели изображения, значения которых  $< 150$ . Другая часть матрицы зеркально противоположна, определяет активными ( $=1$ ) темные пиксели изображений ( $< 150$ ) и неактивными ( $=0$ ) — светлые пиксели изображений ( $> 150$ ). Размерность бинарной матрицы равна  $28 \times 56$ . Соответственно каждая таблица весов нулевого слоя соразмерна с бинарной матрицей и состоит тоже из двух частей, приведенных на рис. 5. На рис. 5 можно видеть, что в отличие от входной бинарной матрицы распознаваемых изображений в таблицах весов нулевого слоя активным пикселям изображения соответствуют нули. Для каждого эталона вычисляется своя таблица весов нулевого слоя, подобная таблице на рис. 5.

Таблица весов первого слоя определяется на основе таблиц весов нулевого слоя путем вычитания двух попарно сравниваемых таблиц весов нейронов нулевого слоя выражением

$$(3.2) \quad \overline{W}_{i,j}^{(1)} = \overline{W}_i^{(0)} - \overline{W}_j^{(0)}.$$

	a																b															
100	85	72	61	52	49	40	37	34	29	25	20	17	16	15	16	15	16	16	15	16	15	16	16	17	20	23	32	41	50	61		
89	74	63	50	41	36	29	25	22	22	23	20	17	15	13	10	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	
80	63	52	42	32	23	20	17	15	13	10	9	8	5	4	2	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
73	58	43	34	23	13	10	9	8	5	4	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
68	25	40	29	20	13	8	3	4	4	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
63	50	37	26	17	20	5	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
64	49	36	23	15	9	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
64	49	36	23	15	4	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
65	50	37	26	17	10	5	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
68	53	40	29	20	13	8	5	4	4	4	3	3	2	1	0	0	0	0	1	2	5	8	13	18	23	26	29	32	36	40		
73	58	43	34	23	13	10	9	9	8	5	4	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
80	63	52	42	32	23	20	17	16	13	8	3	2	1	0	0	0	0	1	2	3	8	13	18	23	26	29	32	36	40			
83	72	63	50	41	32	23	18	13	8	5	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
72	61	50	43	32	23	18	13	8	5	2	1	0	0	0	0	0	0	1	2	3	8	13	18	23	26	29	32	36	40			
61	50	43	32	23	18	13	8	5	2	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	8	13	18	23	26	29	32	36	40			
52	44	32	23	18	13	8	5	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	8	13	18	23	26	29	32	36	40			
43	34	23	18	13	8	5	2	1	0	0	0	1	2	3	8	13	18	23	26	29	32	36	40									
40	29	20	13	8	3	2	1	0	0	1	2	3	8	13	18	23	26	29	32	36	40											
37	26	17	10	3	2	1	0	0	0	1	2	3	8	13	18	23	26	29	32	36	40											
36	23	16	9	4	1	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4			
36	23	16	9	4	1	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4		
36	23	16	9	4	1	0	0	0	1	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4		
37	26	17	10	3	2	1	0	0	0	1	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4		
40	29	20	13	8	3	2	1	0	0	1	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4		
45	34	23	18	13	8	5	4	2	1	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4		
22	44	32	23	18	13	10	8	5	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4		
61	50	43	32	23	18	13	10	8	5	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4		
72	61	50	43	32	23	18	13	10	8	5	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4		

Рис. 5. Таблица весов нулевого слоя нейронной сети для эталона 2\_172: *a* — для части бинарной таблицы, в которой светлым пикселям ( $>150$ ) изображения соответствует 1; *b* — для части бинарной таблицы, в которой затемненным пикселям ( $<150$ ) соответствует 1.

	<i>a</i>																												
W <i>hi</i> =0	0.28	0.28	0.26	0.24	0.22	0.2	0.18	0.16	0.16	0.2	0.24	0.28	0.32	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.29	0.24	0.21	0.19	0.16	0.11	0.05	-0.01	-0.05	-0.09	
0.24	0.24	0.24	0.22	0.2	0.18	0.16	0.14	0.12	0.16	0.19	0.23	0.26	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.23	0.2	0.17	0.15	0.12	0.07	0.01	0.03	-0.07	0.11		
0.18	0.2	0.2	0.2	0.18	0.16	0.14	0.12	0.1	0.12	0.15	0.17	0.2	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.15	0.13	0.11	0.08	0.03	-0.01	-0.05	-0.09	0.13	
0.12	0.14	0.16	0.16	0.15	0.14	0.12	0.1	0.08	0.08	0.11	0.12	0.14	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.13	0.12	0.09	0.07	0.04	0.01	-0.03	-0.07	-0.11	-0.15	
0.04	0.08	0.1	0.12	0.12	0.12	0.1	0.08	0.05	0.05	0.03	0.07	0.08	0.08	0.09	0.09	0.09	0.09	0.08	0.08	0.05	0.03	0.02	-0.01	-0.02	-0.09	-0.13	-0.17		
-0.04	0	0.04	0.06	0.08	0.08	0.08	0.08	0.06	0.04	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.02	0.01	0	-0.03	-0.07	-0.11	-0.13	-0.19	
-0.12	-0.08	-0.04	0	0.02	0.04	0.04	0.04	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0	-0.01	-0.04	-0.08	-0.12	-0.16		
-0.19	-0.15	-0.11	-0.07	-0.03	-0.01	0.01	0.01	0.01	0	0	0	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	0	0	0	0	-0.01	-0.04	-0.08	-0.12	-0.16			
-0.25	-0.21	-0.17	-0.13	-0.09	-0.05	-0.03	-0.02	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0	0	0.01	0.01	0	-0.02	-0.06	-0.09	-0.13	-0.17		
-0.31	-0.27	-0.23	-0.19	-0.15	-0.11	-0.07	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	0	0.01	0.01	0.02	0.03	0	-0.04	-0.07	-0.11	-0.15	-0.19		
-0.37	-0.33	-0.29	-0.25	-0.21	-0.17	-0.13	-0.1	-0.09	-0.08	-0.08	-0.08	-0.04	0	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.05	0	-0.04	-0.08	-0.13	-0.17	-0.21			
-0.44	-0.4	-0.36	-0.32	-0.28	-0.24	-0.2	-0.17	-0.15	-0.13	-0.12	-0.07	-0.04	0.01	0.01	0.04	0.05	0.05	0.08	0.08	0.08	0.08	0.02	-0.04	-0.09	-0.15	-0.19	-0.23		
-0.49	-0.47	-0.43	-0.41	-0.37	-0.31	-0.25	-0.18	-0.12	-0.08	-0.05	-0.02	-0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04	0.05	0.03	0.04	-0.02	-0.09	-0.15	-0.16	-0.2	
-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53	-0.53			
-0.51	-0.21	-0.21	-0.19	-0.17	-0.15	-0.13	-0.09	-0.05	-0.01	0	0	0	-0.01	-0.03	-0.04	-0.05	-0.05	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.01	0.01	0.04	0.08	0.12	0.16		
-0.07	-0.07	-0.07	-0.07	-0.07	-0.05	-0.03	0.01	0.01	0.01	0.07	0.07	0.03	0.04	0.04	0.01	0.01	0.01	0.05	0.08	-0.13	-0.18	-0.13	-0.08	0	0.1	0.2	0.31	0.43	
0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.09	0.11	0.14	0.15	0.13	0.1	0.09	0.07	0.03	0.03	0.03	-0.07	-0.12	-0.16	-0.15	-0.12	-0.08	-0.04	0.02	0.12	0.22	0.33	0.43	
0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.23	0.24	0.25	0.2	0.17	0.15	0.11	0.03	-0.03	-0.09	-0.08	-0.08	-0.09	-0.08	-0.04	0	0.03	0.14	0.24	0.33	0.47			
0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53		
0.29	0.27	0.25	0.23	0.21	0.19	0.17	0.16	0.17	0.19	0.15	0.13	0.08	0.06	0.04	0.05	0.04	-0.02	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	0	0.04	0.09	0.16	0.23	0.35	0.47	0.59
0.22	0.2	0.18	0.18	0.14	0.12	0.1	0.09	0.08	0.12	0.06	0.06	0.04	0.04	0.03	0.03	0.01	0	-0.01	0	0	0.01	0.02	0.05	0.1	0.16	0.25	0.35	0.43	
0.17	0.15	0.13	0.11	0.09	0.07	0.05	0.04	0.05	0.07	0.04	0.03	0.02	0.01	0.01	0	0	0	0.01	0.03	0.07	0.12	0.18	0.25	0.35	0.43	0.55			
0.13	0.11	0.09	0.07	0.05	0.03	0.01	0.01	0.02	0.04	0.02	0.01	0.01	0	0	0	0	-0.01	0	0.01	0.03	0.06	0.13	0.2	0.26	0.35	0.43	0.55		
0.09	0.07	0.05	0.03	0.01	0.01	-0.01	-0.01	0.01	0.01	0	0	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	0	-0.01	-0.02	0.01	0.03	0.05	0.11	0.19	0.27	0.35	0.45		
0.04	0.02	0	-0.03	-0.04	-0.04	-0.04	-0.02	-0.02	-0.01	-0.01	-0.01	-0.02	-0.02	-0.03	-0.02	-0.03	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	0.03	0.05	0.09	0.17	0.25	0.33	0.44	
-0.02	-0.04	-0.06	-0.08	-0.08	-0.08	-0.07	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.01	0.05	0.07	0.13	0.23	0.31	0.4	
-0.08	-0.01	-0.12	-0.12	-0.12	-0.12	-0.12	-0.12	-0.12	-0.12	-0.12	-0.12	-0.12	-0.11	-0.09	-0.1	-0.12	-0.08	-0.08	-0.07	-0.06	-0.08	-0.06	-0.04	0.03	0.03	-0.01	-0.03	-0.07	0.13
-0.14	-0.16	-0.15	-0.15	-0.15	-0.15	-0.15	-0.12	-0.12	-0.12	-0.12	-0.12	-0.12	-0.11	-0.09	-0.1	-0.12	-0.08	-0.06	-0.04	-0.03	-0.03	0.01	0.03	0.11	0.19	0.27	0.33	0.44	

6

Рис. 6. Таблица весов первого слоя для нейрона, выполняющего сравнение эталонов 2\_172 и 5\_102: *a* — для части бинарной матрицы, в которой светлым пикселям изображения ( $>150$ ) соответствует 1; *б* — для части бинарной матрицы, в которой затемненным пикселям изображения ( $<150$ ) соответствует 1.

Поскольку значения весов первого слоя получаются большими, в основном располагающиеся в диапазоне  $[0, 100]$ , что неестественно для алгоритма *back propagation*, то каждое значение веса первого слоя делится на 100. На рис. 6 приведен пример таблицы весов первого слоя, вычисленных для пары эталонов 2\_172 и 5\_102. Таким образом, для каждого нейрона первого слоя вычисляется таблица весов. Итого вычисляется 870 таблиц весов для первого слоя. При этом нужно сказать, что в дальнейшем при обучении нейронной сети нейроны нулевого слоя далее не используются, рассматриваться будет только полученная трехслойная сеть, состоящая из первого, второго и третьего слоев (рис. 1,*b*, 1,*c* и 1,*d*).

Рис. 7. *a* — фрагмент весов для второго слоя; *б* — все веса третьего слоя.

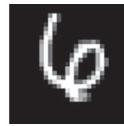
Прежде чем начать обучение нейронной сети на рис. 1 алгоритмом *back propagation*, необходимо провести некоторые преобразования в сети. На рис. 1,*б*, 1,*в* и 1,*г* нейронная сеть является сетью прямого распространения, но при этом второй и третий слои сети не являются полно связанными, соответственно и сама сеть неполно связная. В [9, 10] был приведен обобщенный алгоритм создания полно связной нейронной сети и вычисления значений весов второго и третьего слоев, при которых сохраняется первоначальная логика работы сети. Но в простейшем случае из схемы на рис. 1 полно связную нейронную сеть можно получить добавлением всех недостающих связей второго и третьего слоев, значения весов которых будут приравнены нулю. В то время как значения связей (не добавленных) второго и третьего слоя на рис. 1 останутся, как и прежде, равными единице. В этом случае логика работы сети на рис. 1 также не изменится. На рис. 7 приведены значения весов связей нейронов второго и третьего слоев, расположенных горизонтально в строках. Каждому нейрону второго и третьего слоев соответствует строка последовательности значений весов связей: единиц и нулей. Например, на рис. 7,*б* количество последовательных единиц в строке определяется количеством эталонов, принадлежащих одному образу цифры. В рассматриваемом примере это значение одинаково для всех образов и равно трем (рис. 4). На рис. 7 над каждой строкой приведены также пороговые значения нейронов. Для второго слоя согласно выражению (2.8) это значение одинаково для всех нейронов



2\_174



4\_19



6\_22



2\_1

Рис. 8. Образцы изображений цифр из контрольной базы MNIST.

второго слоев и равно  $H^{(2)} = N - 1 = 30 - 1 = 29$ , для третьего слоя  $H^{(3)} = 0$ . Пороговое значение, представленное в качестве веса, противоположно по знаку пороговому значению  $H$ , ( $Wh2 = -H = -29$ ).

В качестве функции активации нейронов использовалась сигмоидная функция активации

$$(3.3) \quad f(Sw) = \frac{1}{1 + e^{-Sw}}.$$

Поскольку для схемы сети на рис. 1 все весовые значения нейронов второго и третьего слоев являются положительными, то соответственно и все выходы нейронов третьего слоя, вычисленные с сигмоидной функцией активации,

**Таблица 1.** Выходы третьего слоя нейронной сети с пороговой и сигмоидальной функцией активации при распознавании символа 2\_174 (рис. 8) из контрольной базы MNIST

с пороговой функцией активации		
0	<b>Sw3 = 0</b>	<b>Yout = 0</b>
1	<b>Sw3 = 0</b>	<b>Yout = 0</b>
<b>2</b>	<b>Sw3 = 1</b>	<b>Yout = 1</b>
3	<b>Sw3 = 0</b>	<b>Yout = 0</b>
4	<b>Sw3 = 0</b>	<b>Yout = 0</b>
5	<b>Sw3 = 0</b>	<b>Yout = 0</b>
6	<b>Sw3 = 0</b>	<b>Yout = 0</b>
7	<b>Sw3 = 0</b>	<b>Yout = 0</b>
8	<b>Sw3 = 0</b>	<b>Yout = 0</b>
9	<b>Sw3 = 0</b>	<b>Yout = 0</b>
с сигмоидной функцией активации		
0	Sw3 = 0,000270242677595017	Yout = 0,500067560668988
1	Sw3 = 3,43951083407716E-6	Yout = 0,500000859877708
<b>2</b>	<b>Sw3 = 0,0526576299057448</b>	<b>Yout = 0,513161366435398</b>
3	Sw3 = 0,0109778057331013	Yout = 0,502744423871947
4	Sw3 = 9,28464982946175E-6	Yout = 0,500002321162457
5	Sw3 = 0,000934588149375769	Yout = 0,500233647020337
6	Sw3 = 0,000250751415905857	Yout = 0,500062687853648
7	Sw3 = 1,20144980966343E-7	Yout = 0,500000030036245
8	Sw3 = 0,014626235919069	Yout = 0,503656493794839
9	Sw3 = 0,00149247436075622	Yout = 0,50037311852093

**Таблица 2.** Результаты распознавания контрольной базы MNIST (10000 символов) без обучения

s0 = 834	i0 = 980	p0 = 85 %
s1 = 968	i1 = 1135	p1 = 85 %
s2 = 530	i2 = 1032	p2 = 51 %
s3 = 454	i3 = 1010	p3 = 44 %
s4 = 410	i4 = 982	p4 = 41 %
s5 = 411	i5 = 892	p5 = 46 %
s6 = 586	i6 = 958	p6 = 61 %
s7 = 556	i7 = 1028	p7 = 54 %
s8 = 773	i8 = 974	p8 = 79 %
s9 = 750	i9 = 1009	p9 = 74 %
Итого: i = 10000, s = 6272, p = 62 %		

больше 0,5. Это можно наблюдать в табл. 1, где приведены выходы третьего слоя при распознавании изображения 2\_174 (рис. 8). В данных экспериментах в качестве правила сравнения на выходе нейронной сети было использовано определение активности выхода нейрона третьего слоя по наибольшему значению выхода  $Y_i$  нейронной сети, например в табл. 1 наибольший выход соответствует выходу 2.

Все вычисления, описанные в данной статье, проводились на одном компьютере в программном модуле, приведенном на рис. 3, реализованном в среде Builder C++. На весь процесс создания нейронной сети и вычисления всех весов в программном модуле на рис. 3 было зафиксировано общее потраченное время  $t_{\text{созд}} = 0,5469$  с, т.е. меньше секунды.

В табл. 2 приведены результаты распознавания контрольной базы MNIST (10000 изображений) на основе полученной нейронной сети с использованием как пороговой, так и сигмоидной функции активации. Также приведены количество и процент правильно идентифицированных объектов контрольной базы MNIST отдельно для каждого образа цифры ( $s_j$ ,  $p_j$ , где  $j$  — наименование образа), а также приводится общее количество изображений  $i_j$  для каждого  $j$  образа в контрольной базе MNIST.

По данным табл. 2 можно видеть, что общее количество правильно идентифицированных изображений MNIST составило 62 % для нейронной сети с пороговой функцией активации. Результат вычисленных значений весов сохраняется и с сигмоидной функцией активации, что подтверждается также распознаванием контрольной базы MNIST нейронной сети с сигмоидной функцией активацией и с проверкой на выходе нейронной сети по наибольшему значению выхода  $Y_i$ . В этом случае результат нейронной сети с сигмоидной функцией активации идентичен результату нейронной сети с пороговой функцией активации и равен также 62 %.

Нужно также сказать, что в данных экспериментах для сигмоидной функции активации значение веса-порога  $Wh2 = -29$  увеличивалась до значения  $Wh2 = -27$ , что было сделано для того, чтобы повысить пропускную способность нейронов второго слоя, поскольку известно, что в отличие от пороговой

функции активации сигмоидная функция стремится к единице, но не достигает ее.

Возможно, в этом изменении и не было никакой необходимости, поскольку процент распознавания по контрольной базе MNIST с сигмоидной функцией активации и с проверкой на выходе нейронной сети по наибольшему значению выхода сети одинаков по результату и для случая  $Wh2 = -27$  и для случая  $Wh2 = -29$  и равен 62 %, т.е. равен результату тестирования нейронной сети с пороговой функцией активации.

Обучение нейронной сети выполнялось стохастическим алгоритмом обратного распространения ошибки (*back propagation*) с использованием обучающей выборки MNIST (60000 изображений). Поправки вносились после каждого представления нового объекта на входы сети в случае наличия ошибки распознавания на выходе нейронной сети. В случае отсутствия ошибки распознавания правки не вносились. При обратном распространении в качестве правильного активного выхода нейронной сети рассматривалось значение  $y^{corr} = 0,7$ , а для правильного неактивного выхода — значение  $y^{corr} = 0,2$ , т.е. в процессе обучения значения выходов нейронной сети подтягивались к этим значениям. Для каждого эксперимента обучения нейронной сети использовались три эпохи, первые две из которых обучались со скоростью  $nk = 0,1$ , а последняя эпоха — со скоростью  $nk = 0,02$ . Ошибка обучения  $S_{err}$  вычислялась для каждой эпохи по формуле:

$$(3.4) \quad S_{err} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^P \sum_{k=0}^{N_{\text{об}}-1} \left( y_k^{(corr)} - f(Sn_k^{(3)}) \right)^2,$$

где  $y_k^{(corr)}$  — правильное значение  $k$ -го выхода третьего слоя для активного выхода  $y_k^{(corr)} = 0,7$ , а для неактивного  $y_k^{(corr)} = 0,2$ ;  $P$  — количество неправильно идентифицированных изображений обучающей базы MNIST, для которых в процессе эпохи делались правки весов алгоритмом обратного распространения ошибки. Во втором эксперименте также выполнялось обучение полученной выше нейронной сети, но на этот раз значения всех весов генерировались случайным образом в диапазоне  $[-0,5; 0,5]$ .

Стохастический алгоритм обратного распространения ошибки, реализованный в программном модуле рис. 3, выполняется следующим образом:

1. В последовательном порядке выбирается из обучающей базы MNIST изображение обучающей выборки, для которой создается бинарная матрица изображения, которая подается на вход нейронной сети с предварительно вычисленными или сгенерированными случайными весовыми значениями;
2. Выполняется прямое распространение по нейронной сети с последовательным вычислением значений функций состояний и активаций нейронов по выражениям (2.5)–(2.10), начиная с первого слоя и кончая третьим;
3. Проверяются выходы нейронной сети по правилу наибольшего значения выхода сети. Если активный выход нейронной сети соответствует установленному выходу образа, которому принадлежит изображение, то выполняется возвращение к п. 1, если не соответствует, то реализуется обратное распро-

странение ошибки по сети от третьего слоя к первому, для чего выполняется переход к п. 4;

4. Для каждого  $i$ -го нейрона третьего слоя вычисляется новое весовое пороговое значение (смещение):

$$(3.5) \quad Wh3[i][0] = Wh3[i][0] + dWh3[i][0],$$

где  $dWh3[i][0]$  — приращение весового порогового значения  $i$ -го нейрона третьего слоя

$$(3.6) \quad dWh3[i][0] = nk \cdot Sig3[i],$$

здесь  $nk$  — коэффициент скорости обучения (на рис. 3 поле  $nk$ ), а  $Sig3[i]$  — ошибка для  $i$ -го выхода третьего слоя нейронной сети, определяемая по выражению:

$$(3.7) \quad Sig3[i] = (Ycorr - Yout[i]) \cdot Yout[i] \cdot (1 - Yout[i]),$$

где  $Yout[i]$  — текущее  $i$ -е выходное значение третьего слоя,  $Ycorr$  — ожидаемое  $i$ -е выходное значение третьего слоя. Для ожидаемого правильного выхода  $Ycorr = 0,7$ , для ожидаемого неправильного выхода нейронной сети  $Ycorr = 0,2$ . На этом же этапе вычисляется также поправка суммарной квадратичной ошибки (3.4)  $S_{err}$  для данного изображения и добавляется к предыдущему значению  $S_{err}$ :

$$(3.8) \quad S_{err} = S_{err} + \sum_{i=0}^{N_{обp}-1} (Ycorr - Yout[i])^2;$$

5. Вычисляются новые весовые значения для третьего слоя по выражению:

$$(3.9) \quad W3[i][k] = W3[i][k] + dW3[i][k],$$

здесь  $dW3[i][k]$  — приращение значения веса  $W3[i][k]$ , связывающего  $k$ -й нейрон второго слоя и  $i$ -й нейрон третьего слоя, и определяется по выражению:

$$(3.10) \quad dW3[i][k] = nk \cdot Sig3[i] \cdot F2[k],$$

где  $F2[k]$  — выход  $k$ -го нейрона второго слоя. Вычисляются весовые пороговые значения нейронов второго слоя:

$$(3.11) \quad Wh2[k][0] = Wh2[k][0] + dWh2[k][0],$$

где  $dWh2[k][0]$  — приращение весового порогового значения  $Wh2[k][0]$  для  $k$ -го нейрона второго слоя, определяемое выражением:

$$(3.12) \quad dWh2[k][0] = nk \cdot Sig2[k],$$

здесь ошибка

$$(3.13) \quad Sig2[k] = \sum_{i=0}^{N_{обp}-1} (Sig3[i] \cdot W3[i][k]);$$

6. Вычисляются новые весовые значения для второго слоя по выражению:

$$(3.14) \quad W2[i][k][k1] = W2[i][k][k1] + dW2[i][k][k1],$$

где  $dW2[i][k][k1]$  — приращение значения веса  $W2[i][k][k1]$  для связи, связывающего  $i$ -й нейрон второго слоя и нейрон первого слоя, который выполняет идентификацию пары эталонов с порядковыми номерами  $k$  и  $k1$ .  $dW2[i][k][k1]$  вычисляется выражением:

$$(3.15) \quad dW2[i][k][k1] = nk \cdot \text{Sig2}[i] \cdot F1[k][k1],$$

где  $F1[k][k1]$  — выход нейрона первого слоя, выполняющий сравнение  $k$  и  $k1$  эталонов.

Вычисляются весовые пороговые значения для нейронов первого слоя:

$$(3.16) \quad Wh1[k][k1][0] = Wh1[k][k1][0] + dWh1[k][k1][0],$$

где  $dWh1[k][k1][0]$  — приращение весового порогового значения веса  $Wh1[k][k1][0]$  для нейрона первого слоя, выполняющее распознавание  $k$  и  $k1$  эталонов

$$(3.17) \quad dWh1[k][k1][0] = nk \cdot \text{Sig1}[k][k1],$$

где ошибка

$$(3.18) \quad \text{Sig1}[k][k1] = \sum_{i=0}^{N-1} (\text{Sig2}[i] \cdot W2[i][k][k1]);$$

7. Вычисляются новые весовые значения отдельно для двух частей таблиц весов первого слоя по выражениям:

$$(3.19) \quad W1[k][k1][0][r][c] = W1[k][k1][0][r][c] + dW1[k][k1][0][r][c],$$

$$(3.20) \quad W1[k][k1][1][r][c] = W1[k][k1][1][r][c] + dW1[k][k1][1][r][c],$$

где  $dW1[k][k1][0][r][c]$  — приращение весового значения  $W1[k][k1][0][r][c]$  для связи, связывающего ячейку первой части таблицы весов с координатами  $(r, c)$  с нейроном первого слоя, который выполняет попарную идентификацию эталонов с порядковыми номерами  $k$  и  $k1$ , а  $dW1[k][k1][1][r][c]$  — приращение весового значения  $W1[k][k1][1][r][c]$  для связи, связывающего ячейку второй части таблицы весов с координатами  $(r, c)$  с нейроном первого слоя, который выполняет попарную идентификацию эталонов с порядковыми номерами  $k$  и  $k1$ . Значения  $dW1[k][k1][0][r][c]$  и  $dW1[k][k1][1][r][c]$  определяются выражениями:

$$(3.21) \quad dW1[k][k1][0][r][c] = nk \cdot \text{Sig1}[k][k1] \cdot \text{BinX}[0][r][c],$$

$$(3.22) \quad dW1[k][k1][1][r][c] = nk \cdot \text{Sig1}[k][k1] \cdot \text{BinX}[1][r][c],$$

где  $\text{BinX}[0][r][c]$ ,  $\text{BinX}[1][r][c]$  — значения ячеек с координатами  $(r, c)$  для первой и второй частей бинарной матрицы входного изображения обучающей базы MNIST;

**Таблица 3.** Сравнение результатов обучения нейронной сети по обучающей выборке MNIST (60000 изображений) для каждой эпохи обучения

		Обучение нейронной сети с предварительно вычисленными весами			
№ эпохи	Скорость обучения	Количество узнанных изображений	Процент узнанных изображений	$S_{err}$	время в минутах
1	0,1	43932	73 %	1199	159
2	0,1	49748	83 %	737	98
3	0,02	52285	87 %	545	72
Общее время обучения в минутах				329	
		Обучение нейронной сети с случайной инициализацией весов в диапазоне $[-0,5; 0,5]$			
№ эпохи	Скорость обучения	Количество узнанных изображений	Процент узнанных изображений	$S_{err}$	время в минутах
1	0,1	35370	59 %	1935	256
2	0,1	46033	76 %	1051	139
3	0,02	49195	82 %	784	104
Общее время обучения в минутах				499	

**Таблица 4.** Сравнение результатов обучения нейронной сети с проверкой на контрольной выборке MNIST (10000 изображений) для каждой эпохи обучения

№ эпохи	Скорость обучения в эпохе	Обучение нейронной сети с предварительно вычисленными весами	Обучение нейронной сети с случайной инициализацией весов
1	0,1	9145	8894
2	0,1	9282	9116
3	0,02	9449	9256

8. Если были последнее, 60000-е, изображение обучающей базы MNIST и последняя заданная эпоха (рис. 3), то алгоритм на этом завершается, в противном случае выполняется переход к п. 1.

Отметим, что при программной реализации нейронных сетей на основе метрических методов распознавания в какой-либо программной среде, целесообразно и удобно нумерацию нейронов первого слоя вести не по количеству нейронов, как это делается при реализации классических схем, а по номерам двух эталонов, которые сравниваются в данном нейроне, как это было показано выше, например  $W1[k][k1][0][r][c]$ . Такой подход позволяет удобно и понятно реализовать структуру схемы на рис. 1, а также функции: предварительного вычисления значений весов, распознавания входного изображения, обучения нейронной сети, вывода полученных результатов и т.д.

В табл. 3 приведены результаты обучений полученной нейронной сети как с предварительно вычисленными значениями весов нейронной сети, так и классическим образом — со случайной инициализацией весов.

В табл. 4 приведены результаты проверки полученной нейронной сети после каждой эпохи обучения на контрольной базе MNIST (10000 изображений).

#### 4. Сравнение полученных результатов двух экспериментов

По результатам табл. 3 и 4 построим диаграммы как для контрольной базы MNIST (рис. 9), так и для обучающей базы MNIST (рис. 10). На диаграммах можно видеть, что результативность нейронной сети с предварительно вычисленными весами выше после каждой эпохи обучения по сравнению с результативностью обученной сети, для которой начальные значения весов генерировались случайным образом. По-видимому, это связано с тем, что у

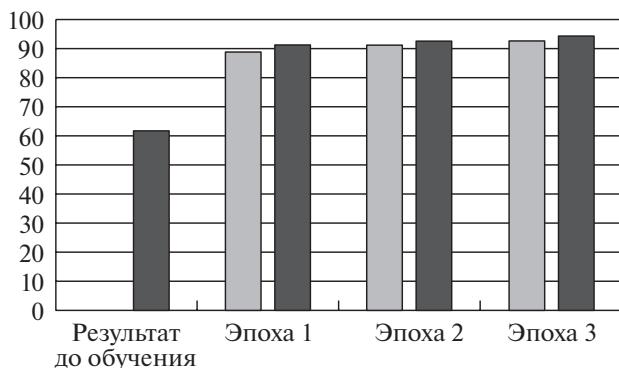


Рис. 9. Диаграмма процентов количества правильно узнанных изображений контрольной базы MNIST (10000 изображений): светлые столбцы — результаты обучения нейронной сети с нуля без предварительных вычислений значений весов; темные столбцы — результаты обучения нейронной сети с предварительно вычисленными значениями весов.

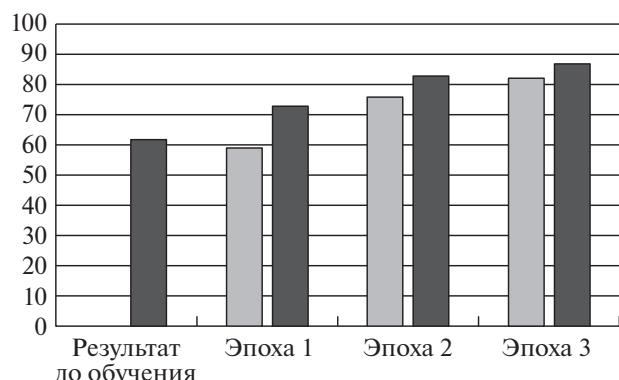


Рис. 10. Диаграмма процентов количества правильно узнанных изображений, выполненных по обучающей выборке MNIST (60000 изображений) для двух экспериментов: светлые столбцы — результаты обучения нейронной сети с нуля без предварительных вычислений весов; темные столбцы — результаты обучения нейронной сети с предварительно вычисленными весами.

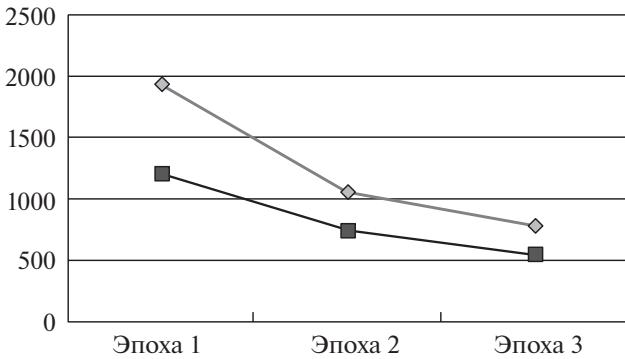


Рис. 11. Графики изменений ошибки  $S_{err}$  после каждой эпохи для двух экспериментов: светлая кривая — ошибка  $S_{err}$  при обучении с нуля без предварительных вычислений весов; темная кривая — ошибка  $S_{err}$  до обучения с предварительно вычисленными весами.

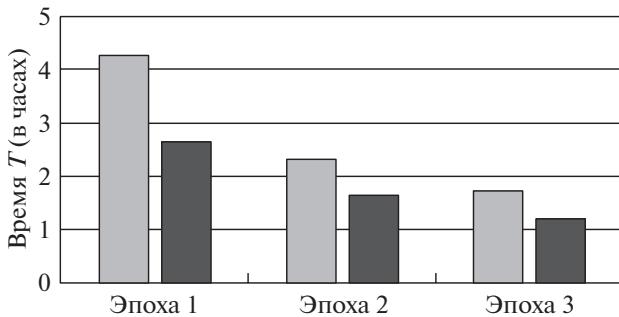


Рис. 12. Диаграмма сравнения затраченного времени (в часах) на каждую эпоху для двух экспериментов: светлые столбцы — обучение с нуля без предварительных вычислений весов; темные столбцы — до обучения с предварительно вычисленными весами.

нейронной сети с вычисленными весовыми значениями, согласно графикам на рис. 9 и 10, в запасе больше времени и в то же время короче путь, который требуется для того, чтобы добраться до более лучших результатов как по количеству правильно распознанных изображений базы MNIST, так и для достижения более низких значений ошибок  $S_{err}$  (рис. 11).

Время, потраченное на обучение нейронной сети с вычисленными весовыми значениями, также меньше на всех эпохах по сравнению с нейронной сетью, обучаемой с нуля (рис. 12). При этом на диаграмме (рис. 12) можно также наблюдать, что основное преимущество по времени накапливается в первой эпохе. В целом, на обучение нейронной сети с вычисленными весовыми значениями было затрачено 329 мин = 5 ч. 29 мин, а при обучении нейронной сети с нуля общее время обучения составило 499 мин = 8 ч. 19 мин, т.е. для второго эксперимента понадобилось почти на 3 часа больше.

Отметим также, что приведенные результаты были получены при наборе эталонов, приведенных на рис. 4, который по-видимому не является самым

*a*

```

Wh2 =-26,9798
1,02273 1,03707 1,01161 1,01429 1,01668 1,09436 1,04434 1,00577 1,05321 1,03789 1,01096 1,04362 1,05321
Wh2 =-27,0031
0,00653327 -0,00412966 -0,00308971 -0,00309406 -0,00309341 -0,0225603 0,00632404 -0,0030341 0,0019
Wh2 =-26,9888
0,0346238 0,0520874 0,00711415 0,0081946 0,00931319 0,110453 0,0461116 0,00551403 0,0534076 0,08
Wh2 =-26,976
0,00955242 0,00718852 0,00442882 0,00583441 -0,0221693 -0,00520425 -0,000323037 -0,0199936 -0,0087
Wh2 =-26,9727
0,0125543 -0,00108514 0,0293263 -0,0103038 -0,00784111 -0,0202156 -0,0139231 -0,0355479 0,0290557 -
Wh2 =-26,9823
0,00514448 0,0116094 -0,00815483 -0,00703385 0,00181616 -0,00108448 -0,0140935 -0,011053 0,004342;
Wh2 =-26,9982
0,0114983 0,0531569 -0,000970677 0,026209 -0,0192114 0,0790814 0,0235482 0,0105859 -0,0275643 0,05
Wh2 =-27,0017
0,0658932 0,0589804 -0,00999116 0,0468242 -0,0438653 0,0331221 0,0517183 0,0197762 0,0212233 0,09

```

*b*

```

Wh3 =-1,21389
1,09088 0,917265 0,764771 -0,0506185 -0,043322 -0,0267967 -0,222947 -0,223477 0,0288491 -0,0778204 -0,12255
Wh3 =-1,21495
-0,0784049 -0,0627303 -0,107165 1,31762 1,52215 1,31522 0,00396852 0,0381043 0,108136 -0,0740865 -0,078349
Wh3 =-1,21087
0,0808409 0,0209968 -0,111898 -0,0983802 -0,234842 -0,034789 1,27359 1,2942 0,825619 -0,0772912 -0,0878193
Wh3 =-1,01762
-0,296377 -0,148033 -0,139417 -0,181047 -0,291219 -0,103179 -0,0403369 -0,20726 -0,127507 1,05603 0,979885 1,
Wh3 =-1,13877
-0,0386596 -0,0405599 -0,0744336 -0,0665303 -0,0492572 -0,0661714 -0,31225 -0,146512 -0,0254047 -0,0572122 -
Wh3 =-1,13345
-0,124775 -0,205603 -0,140333 -0,134727 -0,13084 -0,207992 -0,0317918 -0,121255 -0,0549948 -0,436682 -0,0869;
Wh3 =-1,24501
-0,0342267 0,200686 -0,0743375 -0,0776128 0,0077351 -0,0174852 -0,187996 -0,101407 -0,0414697 -0,0512284 -0

```

Рис. 13. Фрагменты значений весов после третьей эпохи обучения для нейронной сети с предварительно вычисленными значениями весов: *a* — для второго слоя; *b* — для третьего слоя.

лучшим ни по качеству, ни по количеству. Другими словами, при более качественном и при большем количестве эталонов результаты могли бы быть еще более заметными. Итоговая результативность обучения может также быть выше при использовании алгоритмов обучения [1], которые дают лучшие результаты по сравнению с использованным в экспериментах стохастическим алгоритмом обратного распространения ошибки.

Результаты на рис. 9–12, в целом, показывают также, что алгоритм обучения обратного распространения не уничтожает результативность нейронной сети с предварительно вычисленными весовыми значениями, а ищет решение еще лучше, отталкиваясь от уже существующего начального результата.

Это же подтверждают и весовые значения второго и третьего слоев, приведенные на рис. 13. На рис. 13 можно видеть, что изначальные значения

**Таблица 5.** Фрагмент (9 из 30) выходов второго слоя при распознавании символа 2\_1 (рис. 8) из контрольной выборки MNIST. Сеть дообучена в трех эпохах

№ Y2	Эталоны	Sw2	F2
0	0_157	$Sw2 = -2,25757884565147$	$F2 = 0,0946977310982947$
1	0_25	$Sw2 = -14,7120863080901$	$F2 = 4,07964075748757E - 7$
2	0_28	$Sw2 = -2,45988516820271$	$F2 = 0,0787186646034626$
3	1_135	$Sw2 = -16,1987387416131$	$F2 = 9,22522804629833E - 8$
4	1_2	$Sw2 = -21,1151249699638$	$F2 = 6,75799304608105E - 10$
5	1_46	$Sw2 = -14,8256166236525$	$F2 = 3,64180217856173E - 7$
<b>6</b>	<b>2_172</b>	<b><math>Sw2 = 1,78349180153865</math></b>	<b><math>F2 = 0,85612749736249</math></b>
7	2_35	$Sw2 = -0,45514766242243$	$F2 = 0,388137562543613$
8	2_77	$Sw2 = -6,77250084528418$	$F2 = 0,00114351889764061$
9	3_32	$Sw2 = -0,268545411318517$	$F2 = 0,433264229225887$

весов — единиц и нулей, а также установленных порогов второго и третьего слоев в процессе всего обучения изменились незначительно в положительную или отрицательную сторону, сохранив при этом основную логику сети. То же самое подтверждают и выходы второго слоя нейронной сети, например, приведенных в табл. 5 для изображения 2\_1 из контрольной базы (рис. 8). В табл. 5 можно видеть, что активный выход второго слоя для распознаваемого изображения 2\_1 соответствует тому же выходу, который был изначально установлен в схеме сети для эталона 2\_172 на рис. 1,в. Другими словами, каких-либо значительных изменений в структуре и логике обученной нейронной сети не наблюдается.

## 5. Заключение

На основе проведенных экспериментов и полученных результатов можно сделать следующие заключения:

1. Время создания и вычисления всех весовых значений нейронной сети, включая веса нулевого слоя, для формата изображений базы MNIST составляет доли секунд (для рассмотренного примера  $t_{созд} = 0,5469$  с). Можно сказать, что по сравнению с затратами времени на обучение сеть создание нейронной сети и вычисление всех весовых значений выполняется практически мгновенно;
2. Нейроны нейронной сети на основе метрических методов распознавания могут иметь и непрерывную функцию активации, например сигмоидную функцию активации;
3. Нейронная сеть на основе метрических методов распознавания обучаема алгоритмом обратного распространения ошибки (*back propagation*);
4. Процесс дообучения нейронной сети с вычисленными весами требует меньше времени по сравнению с классическим обучением нейронной сети с генерированием случайных значений весов. В рассмотренном примере выигрыш по времени составил 2 ч. 50 мин;

5. Приведенный пример показал также, что результативность нейронной сети с вычисленными весами на всех трех эпохах имеет более хороший результат распознавания по базе MNIST. Наибольший результат распознавания контрольной базы MNIST по результатам трех эпох обучения нейронной сети с вычисленными весами составил 94 %;

6. На основе приведенных результатов экспериментов можно предположить, что при более качественном подборе эталонного набора, а также при большем количестве выбранных эталонов в приведенных на рис. 9–12 диаграммах и графиках преимущественные отличия могут быть еще более значимыми;

7. Приведенная технология предварительного вычисления значений весов может быть предположительно использована и в других архитектурах нейронных сетей прямого распространения, например в глубоких сетях [6, 7], что может позволить ускорить процедуру создания и обучения этих сетей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Круглов В.В., Борисов В.В. Искусственные нейронные сети. Теория и практика. М.: Горячая линия–Телеком, 2001.
2. Уоссермэн Ф. Нейрокомпьютерная техника. Теория и практика. М.: Мир, 1992.
3. Geidarov P.Sh. Neural Networks on the Basis of the Sample Method // Automat. Contr. Comput. Sci. N.Y.: Alerton Press, 2009. V. 43. No. 4. P. 203–210.
4. Гейдаров П.Ш. Многозадачное применение нейронных сетей, реализующих метрические методы распознавания // АиТ. 2013. № 9. С. 53–67.  
Geidarov P.Sh. Multitasking Application of Neural Networks Implementing Metric Methods of Recognition // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 9. P. 1474–1485.
5. Биргер И.А. Техническая диагностика. М.: Машиностроение, 1978.
6. LeCun Y., Bengio Y., Hinton G. Deep learning // Nature. 2015. No. 521. P. 436–444.
7. Schmidhuber J. Deep Learning in Neural Networks: An overview // Neural Networks. 2015. No. 61. P. 85–117.
8. Srivastava N. et al. A Simple Way to Prevent Neural Networks from Overfitting // J. Mach. Learn. Res. 2014. V. 15. No. 1 P. 1929–1958.
9. Geidarov P.Sh. Clearly Defined Architectures of Neural Networks and Multilayer Perceptron // Opt. Mem. Neural Network. 2017. V. 26. P. 62–76.
10. Гейдаров П.Ш. Алгоритм реализации метода ближайшего соседа в многослойном перцептроне // Тр. СПИИРАН. Вып. 51. 2017. С. 123–151.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии О.П. Кузнецовым.*

Поступила в редакцию 03.12.2018

После доработки 24.10.2019

Принята к публикации 28.11.2019

© 2020 г. Ю.П. ЕМЕЛЬЯНОВА, канд. физ.-мат. наук ([emelianovajulia@gmail.com](mailto:emelianovajulia@gmail.com))  
(Арзамасский политехнический институт (филиал)  
Нижегородского государственного технического  
университета им. Р.Е. Алексеева)

## УПРАВЛЕНИЕ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМОЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ НА ОСНОВЕ НАБЛЮДАТЕЛЯ СОСТОЯНИЯ<sup>1</sup>

Рассматриваются линейные системы с аффинной моделью параметрической неопределенности, функционирующие в повторяющемся режиме. Для таких систем предлагается новый метод синтеза управления с итеративным обучением. Этот метод основан на использовании наблюдателя состояния полного порядка и вспомогательной 2D-модели в форме дифференциального повторяющегося процесса, устойчивость которой гарантирует сходимость процесса обучения. Для получения условий устойчивости используется дивергентный метод векторных функций Ляпунова. Приведен пример, демонстрирующий особенности и преимущества нового метода.

*Ключевые слова:* управление с итеративным обучением, наблюдатель, 2D-системы, устойчивость, векторная функция Ляпунова, дифференциальные повторяющиеся процессы.

**DOI:** 10.31857/S0005231020070053

### 1. Введение

Управление с обратной связью является наиболее эффективным способом достижения таких свойств системы, как устойчивость, рабочесть, оптимальность в смысле заданного критерия и т.п. На практике существует много систем, которые функционируют в повторяющемся режиме с одной и той же продолжительностью каждого повторения, в течение которого системы должны отслеживать заданный сигнал с требуемой точностью. При использовании обратной связи ошибки слежения будет одинаковой независимо от количества повторений (итераций). Это обстоятельство заставило искать новые решения, которые обеспечили бы уменьшение ошибки слежения с увеличением числа повторений.

Таким решением является управление с итеративным обучением, которое организовано таким образом, чтобы последовательно уменьшать ошибку слежения (обучения) в повторяющихся операциях. Задача управления с итеративным обучением состоит в том, чтобы найти соответствующий управляющий сигнал, который заставляет выходную переменную следить за желаемой

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 18-79-00088).

траекторией, определенной на конечном интервале времени, за счет итеративного уточнения этого сигнала. Такой тип управления использует информацию об ошибке, информацию с предыдущих повторений, а также некоторую предварительную информацию о системе, чтобы получить такой входной сигнал, который обеспечит сходимость ошибки обучения к нулю по мере увеличения числа повторений. В отличие от адаптивного управления параметры системы здесь остаются неизменными.

Обзорные публикации [1, 2] могут служить отправной точкой. Управление с итеративным обучением успешно используется в огромном числе приложений от медицинских роботов для реабилитации после инсульта [3, 4] и для поддержки желудочка сердца [5] до лазерного напыления металла [6], морских систем [7] и производственных систем [8].

Начиная с пионерской публикации [9] отмечено, что управление с итеративным обучением адекватно моделируется двумерной (2D) системой. Действительно, с одной стороны, управление с итеративным обучением заставляет систему многократно выполнять одну и ту же команду на конечном интервале времени. С другой стороны, управление с итеративным обучением исправляет команду от повторения к повторению, чтобы уменьшить ошибку обучения. Таким образом, в качестве двух независимых переменных выступают шаг по оси времени и номер повторения по оси итераций.

Наиболее распространенными двумерными (2D) моделями управления с итеративным обучением являются повторяющиеся процессы. Сведения об этих процессах, включая теорию устойчивости в рамках линейной динамики с использованием моделей в банаховом пространстве, можно найти в [10] и в источниках из приведенной там библиографии. Теории устойчивости и диссипативности повторяющихся процессов, основанные на векторных функциях Ляпунова и векторных функциях накопления, были разработаны в [11] и в предшествующих публикациях тех же авторов, приведенных в списке литературы. Основная особенность этих результатов заключается в том, что для получения условий устойчивости вместо полной производной или полного приращения скалярной функции Ляпунова используется дивергенция векторной функции или ее дискретный аналог.

Как правило, в алгоритмах управления с итеративным обучением не используются ни переменные состояния системы, ни их оценки. В то же время ясно, что использование этих переменных может гарантировать более высокое качество управления в смысле увеличения скорости сходимости процесса обучения и в смысле достижения более высокой точности. В частности, это демонстрирует публикация [12], в которой результаты были подтверждены экспериментом. Алгоритмы управления с итеративным обучением с оценками состояния, полученными наблюдателем полного порядка, были предложены в [13–15], где рассматривались детерминированные системы с измеряемым выходом.

В недавней работе автора [14] получен алгоритм управления с итеративным обучением, использующий информацию о выходной переменной и оценках состояния на текущем и предыдущем повторениях для случая, когда па-

раметры системы точно известны. Данная статья развивает эти результаты на случай систем с неопределенными параметрами.

В [14] были отмечены трудности подхода в рамках дифференциальных моделей – конечные результаты выражаются через решение модифицированного неравенства Риккати, которое в известных публикациях не изучалось, и для нахождения его решения пока можно предложить лишь эвристические итерационные методы. В то же время для систем с неопределенными параметрами использование дифференциальных моделей предпочтительно, поскольку в этом случае неопределенности учитываются проще и нагляднее.

Попытки преодолеть эти трудности привели к разработке нового подхода, позволяющего в случае систем с постоянными параметрами свести задачу к решению линейного матричного неравенства вместо упомянутого сложного неравенства типа Риккати. В случае систем с неопределенными параметрами задача сводится к решению системы линейных матричных неравенств. Таким образом, указанное затруднение удается обойти не только для случая, изучаемого в [14], но и для более общего случая.

В данной статье рассматриваются линейные системы с непрерывным временем с аффинной моделью параметрической неопределенности. На основе предложенного нового подхода решается задача синтеза управления с итеративным обучением в предположении, что непосредственному измерению доступен только вектор выхода. Закон управления формируется на основе этого вектора и оценок вектора состояния номинальной модели. Выбор параметров закона управления, обеспечивающих сходимость процесса обучения, осуществляется на основе условий устойчивости вспомогательной 2D-модели в форме дифференциального повторяющегося процесса, которые выводятся на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова [11] и выражаются в виде системы линейных матричных неравенств. Приведен пример, демонстрирующий эффективность и преимущества нового метода.

## 2. Синтез управления с итеративным обучением дифференциальными повторяющимися процессами

### 2.1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему с неопределенными параметрами, которая функционирует в повторяющем режиме и описывается на  $k$ -м повторении моделью в пространстве состояний

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A(\delta(t))x_k(t) + B(\delta(t))u_k(t), \\ y_k(t) &= Cx_k(t), \quad t \in [0, T], \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где  $x_k(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  — вектор состояния,  $u_k(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  — вектор управления и  $y_k(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  — вектор выходных переменных, называемый профилем повторения,  $k$  — номер повторения,  $T$  — продолжительность повторения. Модель неопределенности задается в форме

$$(2) \quad A(\delta(t)) = A + \sum_{j=1}^l \delta_j(t)A_j, \quad B(\delta(t)) = B + \sum_{j=1}^l \delta_j(t)B_j,$$

где  $A$  и  $B$  – матрицы номинальной модели,  $A_j$  и  $B_j$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ) – постоянные матрицы соответствующих размеров и  $\delta_j(t) \in [\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j]$ . Далее повсюду для компактности записи зависимость  $\delta$  от  $t$  не указывается.

Обозначим

$$\mathbf{D} = \left\{ \delta = [\delta_1 \dots \delta_l]^T, \delta_j \in [\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j] \right\},$$

$$\mathbf{D}_v = \left\{ \delta = [\delta_1 \dots \delta_l]^T, \delta_j \in \{\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j\} \right\},$$

где  $\mathbf{D}_v$  – конечное множество из  $2^l$  элементов.

Пусть  $y_{ref}(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , – заданная желаемая траектория. Тогда

$$(3) \quad e_k(t) = y_{ref}(t) - y_k(t)$$

является ошибкой обучения на повторении  $k$ . Задача состоит в нахождении такой последовательности управлений  $u_k(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , которая обеспечивает достижение заданной точности воспроизведения профиля за конечное число повторений  $k_{fin}$  и сохранение этой точности при дальнейших повторениях, т.е.

$$(4) \quad \|e_k(t)\| \leq e^*, \quad k \geq k_{fin}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Величина  $k_{fin}$  определяется требуемой точностью, и всегда желательно, чтобы эта величина была как можно меньше. Прямой метод выбора этой величины неизвестен, и здесь прослеживается полная аналогия с достижением требуемого времени переходного процесса в классических задачах управления.

Поставленная задача будет решена, если указанная последовательность  $u_k(t)$  удовлетворяет условиям

$$(5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(t)\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k(t) - u_\infty(t)\| = 0,$$

где  $u_\infty(p)$  – ограниченная переменная, обычно называемая обученным управлением.

Закон управления с итеративным обучением на текущем повторении формируется в виде

$$(6) \quad u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Delta u_{k+1}(t),$$

где  $\Delta u_{k+1}(t)$  – корректирующая поправка, которая должна быть синтезирована так, чтобы обеспечить условия сходимости (5).

Выбор закона управления с обратной связью по текущему повторению дает одинаковую ошибку на каждом повторении. Закон управления с итеративным обучением должен изменять входной сигнал на основе состояния на текущем повторении ( $x_{k+1}(t)$ ) и упреждающих значений выходной переменной на предыдущем повторении ( $y_k(t)$ ). В данной статье предполагается, что вектор состояния недоступен для измерения и вместо него используется оценка.

Для построения оценки вектора состояния очевидным подходом является использование наблюдателя полного порядка; некоторые результаты по оценке вектора состояния при управлении с итеративным обучением для систем с известными параметрами были опубликованы в [13–15] для систем с известными параметрами. В [14] наблюдатель состояния используется в сочетании с подходом на основе диссипативности 2D-моделей и дивергентного метода векторных функций Ляпунова. Конечные результаты представлены в виде линейных матричных неравенств. В [13], наблюдатель состояния использовался в сочетании с синтезом управления с итеративным обучением на основе линейных матричных неравенств в конечных частотных областях. В [15] коэффициент усиления хорошо известного закона управления с итеративным обучением  $P$ -типа обновлялся на каждом повторении путем решения соответствующего дискретного уравнения Риккати. Данная статья развивает результаты [14] на случай систем с неопределенными параметрами.

Зададим наблюдатель состояния для системы (1) в виде модели в пространстве состояний с *номинальными* параметрами

$$(7) \quad \frac{d\hat{x}_k(t)}{dt} = A\hat{x}_k(t) + Bu_k(t) + F[y_k(t) - C\hat{x}_k(t)],$$

где  $\hat{x}_k(t)$  — оценка вектора состояния на повторении  $k$ ;  $F$  — матрица усиления наблюдателя; и, как обычно,  $\tilde{x}_k(t) = x_k(t) - \hat{x}_k(t)$  обозначает ошибку оценивания.

Потребуем, чтобы для начального состояния наблюдателя выполнялось соотношение

$$(8) \quad \hat{y}_k(0) = C\hat{x}_k(0) = y_{ref}(0).$$

## 2.2. Дифференциальная 2D-модель

Для управления с итеративным обучением синтезу подлежит корректирующая поправка  $\Delta u_{k+1}(p)$ , которая синтезируется как обычное управление с обратной связью для вводимой далее в рассмотрение вспомогательной системы относительно приращений переменных — приращения оценки и ошибки оценивания:

$$\hat{\xi}_{k+1}(t) = \hat{x}_{k+1}(t) - \hat{x}_k(t), \quad \tilde{\xi}_{k+1}(t) = \tilde{x}_{k+1}(t) - \tilde{x}_k(t).$$

В терминах этих переменных динамика системы (1) с наблюдателем (7) может быть описана уравнениями

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{d\hat{\xi}_{k+1}(t)}{dt} &= A\hat{\xi}_{k+1}(t) + FC\tilde{\xi}_{k+1}(t) + Bv_{k+1}(t), \\ \frac{d\tilde{\xi}_{k+1}(t)}{dt} &= A_a(\delta)\hat{\xi}_{k+1}(t) + (A(\delta) - FC)\tilde{\xi}_{k+1}(t) + B_a(\delta)v_{k+1}(t), \end{aligned}$$

где

$$A_a(\delta) = \sum_{j=1}^l \delta_j A_j, \quad B_a(\delta) = \sum_{j=1}^l \delta_j B_j, \quad v_{k+1}(t) = \Delta u_{k+1}(t).$$

Динамику процесса изменения ошибки относительно переменной  $k$  можно описать только с использованием производной от ошибки, которая в рассматриваемом случае недоступна измерению. В связи с этим будем использовать оценку производной ошибки

$$\hat{e}_k(t) = \dot{y}_{ref}(t) - C\hat{x}_k(t).$$

Обозначим  $\varepsilon_k(t) = \hat{e}(t)$ . С учетом (9) изменение оценки ошибки обучения (3) в зависимости от числа повторений  $k$  опишется уравнением

$$(10) \quad \varepsilon_{k+1}(t) = \varepsilon_k(t) - CA(\delta)\hat{\xi}_{k+1}(t) - CFC(\delta)\tilde{\xi}_{k+1}(t) - CB(\delta)v_{k+1}(t).$$

Обозначим  $\eta_{k+1}(t) = [\hat{\xi}_{k+1}(t)^T \quad \tilde{\xi}_{k+1}(t)^T]^T$  и запишем (9), (10) в стандартной форме дифференциального повторяющегося процесса

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{\eta}_{k+1}(t) &= A_{11}(\delta)\eta_{k+1}(t) + A_{12}\varepsilon_k(t) + B_1(\delta)v_{k+1}(t), \\ \varepsilon_{k+1}(t) &= A_{21}\eta_{k+1}(t) + A_{22}\varepsilon_k(t) + B_2v_{k+1}(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}(\delta) &= \begin{bmatrix} A & FC \\ A_a(\delta) & A(\delta) - FC \end{bmatrix}, \quad A_{12} = 0, \\ A_{21} &= [-CA \quad -CFC], \quad A_{22} = I, \\ B_1(\delta) &= \begin{bmatrix} B \\ B_a(\delta) \end{bmatrix}, \quad B_2 = -CB. \end{aligned}$$

Выберем корректирующую поправку в виде

$$(12) \quad \Delta u_{k+1}(t) = K_1\hat{\xi}_{k+1}(t) + K_2\varepsilon_k(t),$$

и тогда (9), (10) с учетом (12) запишется уравнениями

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{d\hat{\xi}_{k+1}(t)}{dt} &= (A + BK_1)\hat{\xi}_{k+1}(t) + FC\tilde{\xi}_{k+1}(t) + BK_2\varepsilon_k(t), \\ \frac{d\tilde{\xi}_{k+1}(t)}{dt} &= (A_a(\delta) + B_a(\delta)K_1)\hat{\xi}_{k+1}(t) + (A(\delta) - FC)\tilde{\xi}_{k+1}(t) + \\ &\quad + B_a(\delta)K_2\varepsilon_k(t), \\ \varepsilon_{k+1}(t) &= -C(A + BK_1)\hat{\xi}_{k+1}(t) - CFC\tilde{\xi}_{k+1}(t) + (I - CBK_2)\varepsilon_k(t), \end{aligned}$$

которые в более компактной форме имеют вид

$$(14) \quad \begin{aligned} \dot{\eta}_{k+1}(t) &= A_{c11}(\delta)\eta_{k+1}(t) + A_{c12}\varepsilon_k(t), \\ \varepsilon_{k+1}(t) &= A_{c21}\eta_{k+1}(t) + A_{c22}\varepsilon_k(t), \end{aligned}$$

где

$$A_{c11}(\delta) = \begin{bmatrix} A + BK_1 & FC \\ (A_a(\delta) + B_a(\delta)K_1) & A(\delta) - FC \end{bmatrix}, \quad A_{c12} = \begin{bmatrix} BK_2 \\ B_a(\delta)K_2 \end{bmatrix},$$

$$A_{c21} = \begin{bmatrix} -C(A + BK_1) & -CFC \end{bmatrix}, \quad A_{c22} = I - CBK_2.$$

### 2.3. Решение на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова

Закон управления с итеративным обучением (12) должен обеспечивать условия сходимости (5). Чтобы найти матрицы  $K_1$  и  $K_2$ , гарантирующие это свойство, воспользуемся методом векторных функций Ляпунова для дифференциальных повторяющихся процессов [11].

*Определение.* Дифференциальный повторяющийся процесс (14) называется экспоненциально устойчивым, если существуют действительные числа  $\kappa > 0$ ,  $\lambda > 0$  и  $0 < \zeta < 1$  такие, что

$$(15) \quad \|\eta_k(t)\|^2 + \|\varepsilon_k(t)\|^2 \leq \kappa e^{-\lambda t} \zeta^k,$$

где  $\kappa$ ,  $\lambda$  и  $\zeta$  не зависят от продолжительности повторения  $T$ .

Рассмотрим векторную функцию Ляпунова вида

$$(16) \quad V(\eta_k(t), e_k(t)) = \begin{bmatrix} V_1(\eta_k(t)) \\ V_2(\varepsilon_k(t)) \end{bmatrix},$$

где

$$V_1(\eta) > 0, \quad \eta \neq 0, \quad V_2(\varepsilon) > 0, \quad e \neq 0, \quad V_1(0) = 0, \quad V_2(0) = 0.$$

Аналог оператора дивергенции, который будем называть далее дивергенцией, для этой функции вдоль траекторий системы (13) задается в виде

$$(17) \quad \mathcal{D}_c V(\eta_k(t), \varepsilon_k(t)) = \frac{dV_1(\eta_k(t))}{dt} + \Delta_k V_2(\varepsilon_k(t)),$$

где

$$\Delta_k V_2(\varepsilon_k(t)) = V_2(\varepsilon_{k+1}(t)) - V_2(\varepsilon_k(t)).$$

Следующая теорема дает достаточные условия экспоненциальной устойчивости.

**Теорема [11].** Дифференциальный повторяющийся процесс (14) экспоненциально устойчив, если существуют векторная функция Ляпунова (16) и положительные скаляры  $c_1, c_2$  и  $c_3$ , такие что

$$\begin{aligned} c_1 \|\eta_k(t)\|^2 &\leq V_1(\eta_k(t)) \leq c_2 \|\eta_k(t)\|^2, \\ c_1 \|\varepsilon_k(t)\|^2 &\leq V_2(\varepsilon_k(t)) \leq c_2 \|\varepsilon_k(t)\|^2, \\ \mathcal{D}_c V(\eta_k(t), \varepsilon_k(t)) &\leq -c_3 (\|\eta_k(t)\|^2 + \|\varepsilon_k(t)\|^2), \\ \left\| \frac{\partial V_1(\eta_k(t))}{\partial \eta} \right\| &\leq -c_4 \|\eta_k(t)\|. \end{aligned}$$

Если система (14) экспоненциально устойчива, то  $\varepsilon_k(t) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда поскольку выполняется (8), то  $\hat{e}_k(t) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , и если при этом  $e_k = \hat{e}_k + \tilde{e}_k$  будет удовлетворять заданным требованиям точности, то поставленная задача будет решена.

Для дальнейшего анализа введем обозначения:

$$\bar{A}(\delta) = \begin{bmatrix} A_{11}(\delta) & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_c(\delta) = \begin{bmatrix} A_{c11}(\delta) & A_{c12} \\ A_{c21} & A_{c22} \end{bmatrix},$$

$$A_{cij}(\delta) = A_{ij}(\delta) + B_i(\delta)K_j, \quad i, j = 1, 2,$$

$$I^{(1,0)} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I^{(0,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(\delta) = \begin{bmatrix} B_1(\delta) \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

Пусть матрицы  $P = \text{diag}[P_1 \ P_2]$  и  $K = [K_1 \ K_2]$  удовлетворяют билинейному матричному неравенству

$$(18) \quad \begin{aligned} \bar{A}_c^T(\delta)I^{(1,0)}P + PI^{(1,0)}\bar{A}_c(\delta) + \bar{A}_c^T(\delta)I^{(0,1)}P\bar{A}_c(\delta) - I^{(0,1)}P + \\ + Q + K^TRK \preceq 0, \quad \delta \in \mathbf{D}, \end{aligned}$$

где  $Q = \text{diag}[Q_1 \ Q_2] \succ 0$  и  $R \succ 0$  — весовые матрицы, которые подлежат выбору. Они аналогичны весовым матрицам в теории линейно-квадратичного регулятора, и их выбор осуществляется на основе результатов этой теории.

Поскольку  $\tilde{\xi}$  недоступна, то для дальнейшего анализа матрицы  $A_{c11}(\delta), A_{c21}$  необходимо представить в виде

$$(19) \quad \begin{aligned} A_{c11}(\delta) &= A_{11} + B_1(\delta)K_1C_0, \\ A_{c21} &= A_{21} + B_2K_1C_0, \end{aligned}$$

где

$$C_0 = [I \ 0].$$

Выберем компоненты векторной функции Ляпунова (16) в виде квадратичных форм  $V_1(\eta_k(t)) = \eta_k^T(t)P_1\eta_k(t)$ ,  $V_2(\varepsilon_k(t)) = \varepsilon_k^T(t)P_2\varepsilon_k(t)$ , где  $P_1 \succ 0$  и

$P_2 \succ 0$ . Тогда, вычисляя  $\mathcal{D}_c V$ , получим, что при выполнении неравенства (18)  $\mathcal{D}_c V \leq -Q - K^T R K$  и все условия теоремы оказываются выполненными, что гарантирует экспоненциальную устойчивость (11). Используя формулу дополнения Шура, учитывая (19) и вводя вспомогательную переменную  $Z_1$  как решение уравнения  $C_0 X_1 = Z_1 C_0$ , сведем (18) к линейному матричному неравенству относительно  $X = \text{diag}[X_1 \ X_2]$ , где  $X_1 = P_1^{-1}$  и  $X_2 = P_2^{-1}$  и  $Y_1 = K_1 Z_1$ ,  $Y_2 = K_2 X_2$ :

$$(20) \quad \left[ \begin{array}{cc} (A_{11}(\delta)X_1 + B_1(\delta)(Y_1 C_0)) + (A_{11}(\delta)X_1 + B_1(\delta)(Y_1 C_0))^T & (A_{12}X_2 + B_1(\delta)Y_2) \\ (A_{12}X_2 + B_1(\delta)Y_2)^T & -X_2 \\ 0 & 0 \\ (A_{21}X_1 + B_2(Y_1 C_0)) & (A_{22}X_2 + B_2 Y_2) \\ X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \\ (Y_1 C_0) & Y_2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \leq 0, \quad \delta \in \mathbf{D},$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc} 0 & (A_{21}X_1 + B_2(Y_1 C_0))^T & X_1 & 0 & (Y_1 C_0)^T \\ 0 & (A_{22}X_2 + B_2 Y_2)^T & 0 & X_2 & Y_2^T \\ -X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Q_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \leq 0, \quad \delta \in \mathbf{D},$$

$$C_0 X_1 = Z_1 C_0, \quad X_1 \succ 0, \quad X_2 \succ 0.$$

Поскольку (20) — линейное неравенство и зависимость от  $\delta$  аффинная, то (20) будет выполняться для всех  $\delta \in \mathbf{D}$  тогда и только тогда, когда оно выполняется для  $\delta \in \mathbf{D}_v$ .

Таким образом, если неравенство (20) разрешимо для  $\delta \in \mathbf{D}_v$ , то  $K = [K_1 C_0 \ K_2]$ ,  $K_2 = Y_2 X_2^{-1}$  и поскольку матрица  $C_0$  имеет ранг, совпадающий с рангом единичной матрицы ее первого блока, то матрица  $Z_1$  будет невырожденной и  $K_1 = Y_1 Z_1^{-1}$ .

**З а м е ч а н и е.** При практическом нахождении матрицы  $K$  целесообразно вместо линейного матричного неравенства (20) решать задачу максимизации следа матрицы  $X$  при ограничениях в виде этого линейного матричного неравенства. Это позволит ускорить процесс нахождения решения.

### 3. Пример

Рассмотрим модель однозвездного гибкого манипулятора [16], функционирующего в повторяющемся режиме с постоянным периодом повторения. Динамика движения манипулятора в пространстве состояний описывается урав-

нениями (1), где  $x = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T$ ,  $\theta$  — угол поворота сервопривода,  $\alpha$  — угол отклонения гибкого звена,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_s}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{K_s(J_l + J_{eq})}{J_l J_{eq}} & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \\ -\frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$B_{eq}$  — коэффициент вязкого трения сервопривода,  $K_s$  — жесткость гибкого звена,  $J_l$  — момент инерции гибкого звена относительно центра масс,  $J_{eq}$  — момент инерции сервопривода. Движение гибкого звена происходит в горизонтальной плоскости.

Задача состоит в том, чтобы найти алгоритм управления с итеративным обучением, при котором выходная переменная  $y(t)$  воспроизводила бы желаемую траекторию  $y_{ref}(t)$  с заданной точностью  $e^*$ . Непосредственному измерению доступен только угол  $\theta$ .

Для расчетов и моделирования были принятые следующие значения параметров из [16]:  $B_{eq} = 0,004 \text{ Н}\cdot\text{м}/(\text{рад}/\text{с})$ ,  $K_s = 1,3 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}$ ,  $J_l = 0,038 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $J_{eq} = 2,08 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Продолжительность цикла повторения 3 с, требуемая точность  $e^* = 0,005 \text{ рад}$ . При вычислениях использовался метод Эйлера с шагом  $T_s = 0,001 \text{ с}$ .

Желаемая траектория движения звена представлена на рис. 1 и описывается уравнением

$$y_{ref}(t) = \frac{\pi t^2}{6} - \frac{\pi t^3}{27}, \quad t \in [0, T].$$

В данном примере  $CB = 0$ , а разработанная теория предполагает, чтобы  $CB \neq 0$ . С целью обойти это затруднение воспользуемся тем, что для данной системы

$$\dot{y}_k = C\dot{x}_k = C_1x_k,$$

где  $C_1 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$ .

Поскольку непосредственно измеряется только угол, то вместо производной можно использовать лишь ее оценку  $\hat{y}_k = C_1\hat{x}_k$ , где  $\hat{x}_k$  определяется наблюдателем (7). В этом случае динамику процесса изменения ошибки относительно переменной  $k$  можно описать только с использованием оценки второй

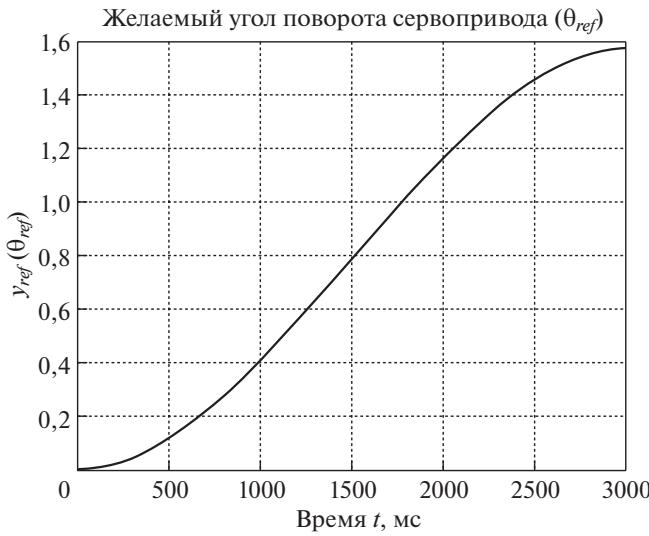


Рис. 1. Желаемая траектория.

производной

$$\hat{e}_k = \ddot{y}_{ref} - C_1 \hat{x}_k.$$

Обозначим  $\epsilon_k = \hat{e}_k$ , и тогда ошибка обучения опишется уравнением

$$(21) \quad \epsilon_{k+1} = \epsilon_k - C_1 A \hat{\xi}_{k+1} - C_1 F C \tilde{\xi}_{k+1} - C_1 B \Delta u_{k+1}.$$

Динамика системы с учетом наблюдателя теперь будет описываться уравнениями

$$(22) \quad \begin{aligned} \dot{\eta}_{k+1}(t) &= A_{11}(\delta) \eta_{k+1}(t) + A_{12} \epsilon_k(t) + B_1 v_{k+1}(t), \\ \epsilon_{k+1}(t) &= A_{21} \eta_{k+1}(t) + A_{22} \epsilon_k(t) + B_2 v_{k+1}(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}(\delta) &= \begin{bmatrix} A & FC \\ A_a(\delta) & A(\delta) - FC \end{bmatrix}, \quad A_{12} = 0, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} -C_1 A & -C_1 F C \end{bmatrix}, \\ A_{22} &= I, \quad B_1 = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = -C_1 B. \end{aligned}$$

Начальные условия для наблюдателя в дополнение к (8) должны удовлетворять условию

$$\hat{y}_k(0) = C \hat{x}_k(0) = \dot{y}_{ref}(0).$$

Выберем корректирующую поправку в виде

$$\Delta u_{k+1} = K_1 \hat{\xi}_{k+1} + K_2 \epsilon_k.$$

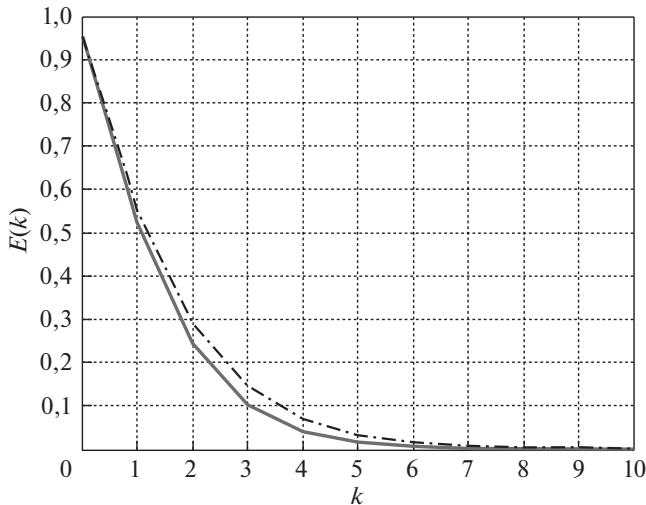


Рис. 2. Среднеквадратическая ошибка обучения при различных разбросах неопределенных параметров  $J_l$  и  $K_s$ .

Тогда закон управления с итеративным обучением будет иметь вид

$$(23) \quad \begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + \Delta u_{k+1} = u_k + K_1(\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k) + K_2(\ddot{y}_{ref} - C_1\hat{x}_k) = \\ &= u_k + K_1(\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k) + K_2(\ddot{y}_{ref} - C_1A\hat{x}_k - C_1Bu_k - C_1F(y_k - C\hat{x}_k)). \end{aligned}$$

Чтобы оценить эффективность этого закона управления с итеративным обучением, для каждого повторения  $k$  введем среднеквадратическое отклонение ошибки обучения

$$(24) \quad E(k) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |e_k(t)|^2 dt}.$$

Предположим, что момент инерции гибкого звена может принимать значения от  $J_l + \Delta J_l$  до  $J_l + \Delta \bar{J}_l$ , что с физической точки зрения может означать наличие или отсутствие груза на гибком звене или наличие различных грузов. Также добавим неопределенность по жесткости  $K_s$ , полагая, что жесткость может принимать значения от  $K_s + \Delta K_s$  до  $K_s + \Delta \bar{K}_s$ . В этом случае матрица параметров  $A(\delta)$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} A(\delta) &= A + A_a(\delta), \quad A_a(\delta) = \delta A, \quad \delta = \{\delta_1; \delta_2\}, \\ \delta_1 &= [J_l; \bar{J}_l], \quad \delta_2 = [K_s; \bar{K}_s]. \end{aligned}$$

Параметры фильтра выберем с помощью стандартной функции `lqr` пакета MATLAB из условия, что вещественные части собственных значений матрицы  $(A - FC)$  меньше  $-0,15$ . Этому условию удовлетворяет матрица  $F = [0,1881 \ -0,0026 \ 0,0127 \ -0,0055]$ . Решая задачу максимизации  $\text{tr}[X]$  при ограничениях в виде неравенства (20), с учетом очевидных изменений

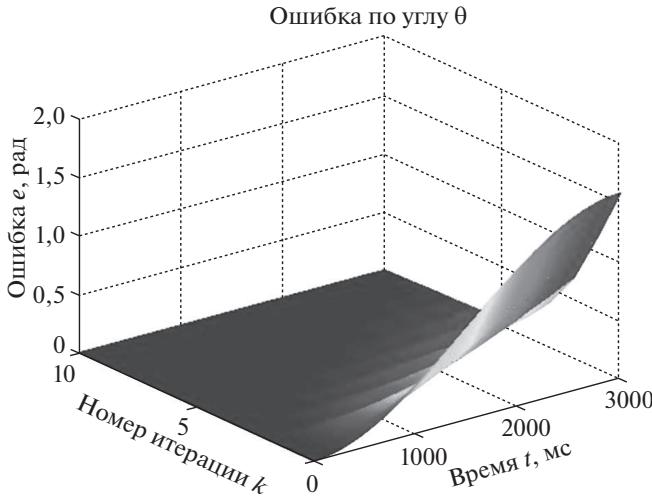


Рис. 3. Изменение ошибки обучения в зависимости от числа повторений.

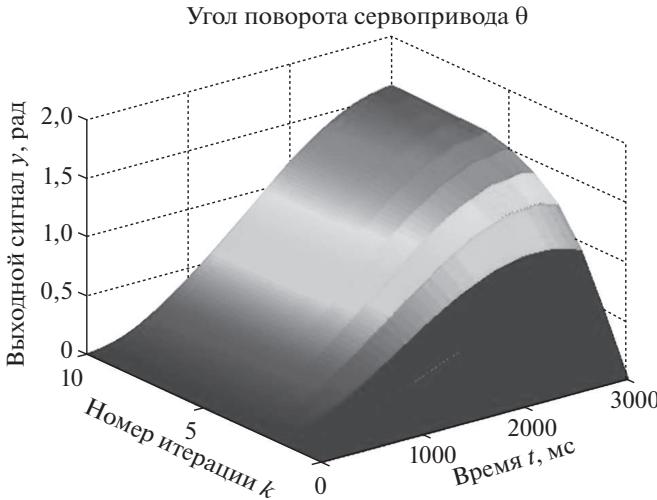


Рис. 4. Изменение выходной переменной в зависимости от числа повторений.

матриц  $A_{11}(\delta), A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1(\delta), B_2$ , и задавая

$$\Delta \overline{J_l} = 0,3J_l, \quad \Delta \underline{J_l} = -0,3J_l, \quad \Delta \overline{K_s} = 0,1K_s, \quad \Delta \underline{K_s} = -0,1K_s,$$

$$Q = \text{diag}[Q_1 \ Q_2], \quad Q_1 = 10^{-2}I, \quad Q_2 = 10^{-3}I, \quad R = 1,$$

получим

$$K_1 = [-0,0000 \quad -1,2385 \quad 0,0019 \quad -0,0004], \quad K_2 = 0,0020.$$

На рис. 2 представлен график изменения среднеквадратической ошибки обучения (24) в зависимости от числа повторений  $k$  при указанном разбросе параметров  $J_l$  и  $K_s$  (штрихпунктирная линия). При меньшем разбросе этих параметров  $\Delta \overline{J_l} = 0,1J_l, \Delta \underline{J_l} = -0,1J_l, \Delta \overline{K_s} = 0,005K_s, \Delta \underline{K_s} = -0,005K_s$

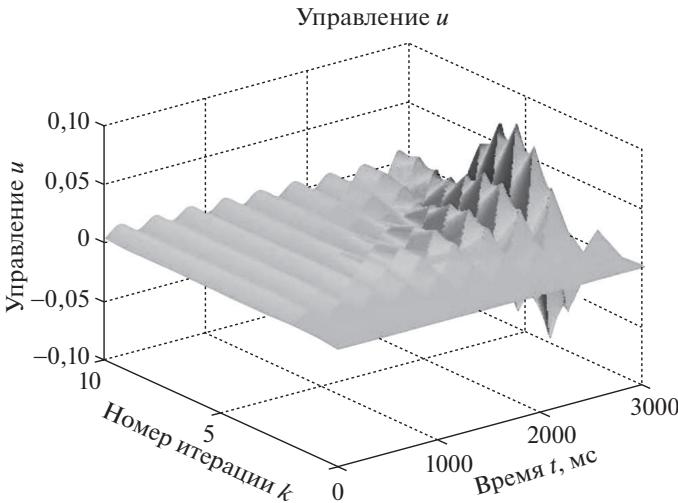


Рис. 5. Изменение управления в зависимости от числа повторений.

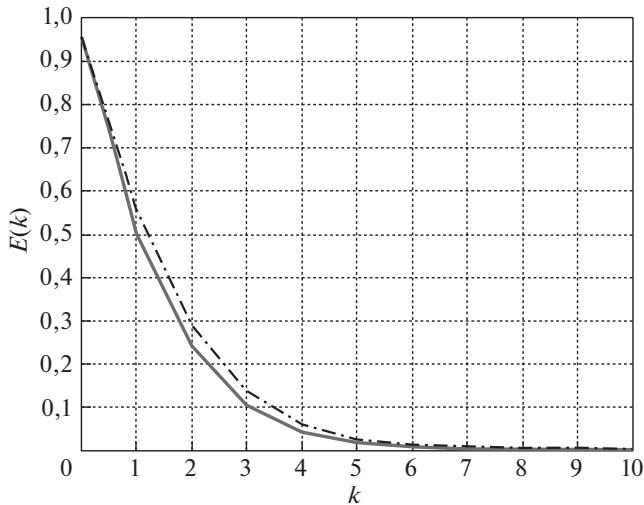


Рис. 6. Среднеквадратическая ошибка обучения в случае сочетания неопределенных параметров  $J_l$  и  $K_s$  на верхней границе (штрихпунктирная линия) и на нижней границе.

ошибка сходится к нулю быстрее (сплошная линия). Требуемая точность  $e^* = 0,005$  рад достигается за 8 повторений ( $k_{fin} = 8$ ,  $E(8) = 0,003454$  рад  $\approx 0,2^\circ$ ). При большем разбросе неопределенных параметров система может не только не достичь требуемой точности, но и не стабилизироваться, это вполне объяснимо — энергии управления не хватает для компенсации неопределенности.

На рис. 3–5 представлены изменения ошибки, выходной переменной и управления в зависимости от времени на текущем повторении и числа повторений.

На рис. 6 представлен случай, когда оба неопределенных параметра  $J_l$  и  $K_s$  находятся на верхней границе, а именно  $\Delta\overline{J}_l = 0,3J_l$ ,  $\Delta\overline{K}_s = 0,1K_s$  (штрих-пунктирная линия), или на нижней границе  $\Delta\underline{J}_l = -0,3J_l$ ,  $\Delta\underline{K}_s = -0,1K_s$  (сплошная линия).

#### 4. Заключение

В данной статье разработан метод синтеза управления с итеративным обучением с использованием наблюдателя состояния для случая дифференциальных повторяющихся процессов, когда модель объекта управления содержит аффинные неопределенности. Результаты решения данной задачи позволяют повысить скорость сходимости процессов управления с итеративным обучением и обеспечить робастность этих процессов по отношению к различным неопределенностям, неизбежно возникающим при функционировании реальных систем. Значительный интерес представляет исследование влияния динамики наблюдателя на ошибку обучения. Эта задача пока остается открытой. Сочетание управления с итеративным обучением и управления с обратной связью также представляет интересную задачу для дальнейших исследований.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bristow D.A., Tharayil M., Alleyne A.G.* A Survey of Iterative Learning Control: A Learning-Based Method for High-Performance Tracking Control // IEEE Control Syst. Magaz. 2006. V. 26. No. 3. P. 96–114.
2. *Ahn H-S., Chen Y.Q., Moore K.L.* Iterative Learning Control: Survey and Categorization // IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part C: Appl. Rev. 2007. V. 37. No. 6. P. 1099–1121.
3. *Freeman C.T., Rogers E., Hughes A.-M., Burridge J.H., Meadmore K.L.* Iterative Learning Control in Health Care: Electrical Stimulation and Robotic-Assisted Upper-Limb Stroke Rehabilitation // IEEE Control Syst. Magaz. 2012. V. 47. P. 70–80.
4. *Meadmore K.L., Exell T.A., Hallewell E., Hughes A.-M., Freeman C.T., Kutlu M., Benson V., Rogers E., Burridge J.H.* The Application of Precisely Controlled Functional Electrical Stimulation to the Shoulder, Elbow and Wrist for Upper Limb Stroke Rehabilitation: a Feasibility Study // J. NeuroEngineer. Rehabilitation. 2014. P. 11–105.
5. *Ketelhut M., Stemmler S., Gesenhues J., Hein M., Abel D.* Iterative Learning Control of Ventricular Assist Devices with Variable Cycle Durations // Control Engin. Pract. 2019. V. 83. P. 33–44.
6. *Sammons P.M., Gegel M.L., Bristow D.A., Landers R.G.* Repetitive Process Control of Additive Manufacturing with Application to Laser Metal Deposition // IEEE Trans. Control Syst. Technol. 2019. V. 27. No. 2. P. 566–575.
7. *Sornmo O., Bernhardsson B., Kroling O., Gunnarsson P., Tenghamn R.* Frequency-Domain Iterative Learning Control of a Marine Vibrator // Control Engin. Pract. 2016. V. 47. P. 70–80.
8. *Lim I., Hoelzle D.J., Barton K.L.* A Multi-Objective Iterative Learning Control Approach for Additive Manufacturing Applications // Control Eng. Pract. 2017. V. 64. P. 74–87.

9. Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F. Bettering Operation of Robots by Learning // J. Robot. Syst. 1984. V. 1. P. 123–140.
10. Rogers E., Galkowski K., Owens D.H. Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes / Lect. Notes Control Inform. Sci. Berlin: Springer-Verlag, 2007. V. 349.
11. Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Galkowski K., Rogers E. Dissipivity and Stabilization of Nonlinear Repetitive Processes // Syst. Control Lett. 2016. V. 91. P. 14–20.
12. Hladowski L., Galkowski K., Cai Z., Rogers E., Freeman C., Lewin P. Experimentally Supported 2D Systems Based Iterative Learning Control Law Design for Error Convergence and Performance // Control Engin. Pract. 2010. V. 18. P. 339–348.
13. Paszke W., Rogers E., Patan K. Observer-Based Iterative Learning Control Design in the Repetitive Process Setting // IFAC-PapersOnline. 2017. V. 50. No. 1. P. 13390–13395.
14. Емельянова Ю.П., Пакшин П.В. Синтез управления с итеративным обучением на основе наблюдателя состояния // АиТ. 2019. № 9. С. 9–24.  
*Emelianova J.P., Pakshin P.V. Iterative Learning Control Design Based on State Observer // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 9. P. 1561–1573.*
15. Jayawardhana R.N., Ghosh B.K. Kalman Filter Based Iterative Learning Control for Discrete Time MIMO Systems // Proc. 30th Chinese Control and Decision Conf. (2018 CCDC). 2018. P. 2257–2264.
16. Apkarian J., Karam P., Levis M. Workbook on Flexible Link Experiment for Matlab/Simulink Users. Quanser, 2011.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.*

Поступила в редакцию 27.11.2019

После доработки 11.02.2020

Принята к публикации 04.03.2020

# *Управление в технических системах*

© 2020 г. А.И. ПЕСЧАНСКИЙ, д-р техн. наук (peschansky\_sntu@mail.ru)  
(Севастопольский государственный университет)

## **СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕНАДЕЖНОЙ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОТЕРЯМИ И УЧЕТОМ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПО НАРАБОТКЕ<sup>1</sup>**

Рассматривается ненадежная восстанавливаемая одноканальная система обслуживания с потерями, в которой во время обслуживания требований могут происходить отказы прибора. Случайные величины, описывающие систему, имеют распределения общего вида. Для повышения эффективности системы предлагается проводить профилактическое техническое обслуживание прибора в тот момент, когда накопленное время обслуживания требований превышает заранее заданный уровень. Построена полумарковская модель эволюции системы во времени. С помощью найденного стационарного распределения вложенной цепи Маркова устанавливаются выражения для определения финальных вероятностей и средних времен пребывания системы в различных физических состояниях. Решается задача оптимизации периодичности проведения технического обслуживания прибора с целью максимизации средней удельной прибыли и минимизации средних удельных затрат системы.

**Ключевые слова:** одноканальная система обслуживания с отказами, техническое обслуживание, стационарное распределение вложенной цепи Маркова, финальные вероятности состояний, стационарные показатели эффективности.

**DOI:** 10.31857/S0005231020070065

### **1. Введение**

Интерес к системам с отказами каналов обслуживания связан с практической важностью адекватного описания функционирования современных технических и информационных систем. Обзор по ненадежным системам обслуживания можно найти, например, в [1, 2]. Отметим некоторые результаты исследований в этом направлении. Так, в [3] исследована многоканальная система обслуживания с каналами конечной надежности при частном виде функций распределения случайных величин, описывающих процессы в системе. В [4] описана система  $M/G/1/1$  с двумя типами заявок, в которой

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках Государственного задания Министерства образования и науки РФ (№ 1.10513.2018/11.12) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00704).

функции распределения времени восстановления и времени между отказами имеют общий вид. В [5] решена задача оптимизации групповой политики восстановления отказавших обслуживающих приборов. В [6] исследована дисциплина обслуживания в двухканальной неоднородной системе обслуживания с различными надежностными характеристиками и интенсивностями обслуживания заявок. Следует отметить, что наиболее полные результаты получены при условии, что случайные факторы, описывающие ненадежные системы, имеют показательные распределения. Модели ненадежных одноканальных систем обслуживания в случае общего вида распределений построены в [7, 8]. Упомянутые публикации — далеко не полный список исследований по определению характеристик систем обслуживания с каналами, которые могут отказывать.

Системы с ненадежными приборами часто являются предметом современных исследований, поскольку развитие технологий приводит к появлению новых содержательных математических задач. Наряду с определением характеристик систем с отказами каналов важно оказывать воздействия на эти показатели. В ряде случаев повысить эффективность системы можно за счет проведения предупредительного технического обслуживания (ТО) канала. Так, в [9] исследована стратегия, при которой решение о проведении ТО зависит от длительности обслуживания требования. В [10] построена модель системы с учетом наработки прибора на отказ и отложенным ТО, в [11] — с учетом ТО системы в случае скрытых отказов прибора, в [12] — с учетом ТО в зависимости от суммарной наработки прибора на отказ, в [13] — с учетом различных типов восстановления прибора. В данной статье исследуется еще одна стратегия ТО ненадежной одноканальной системы обслуживания с потерями: ТО прибора начинается в тот момент, когда накопленное время обслуживания требований после завершения восстановительных работ превысит заранее заданный уровень.

## 2. Постановка задачи

В ненадежную систему обслуживания  $GI/G/1/0$  поступает рекуррентный поток требований, порожденный случайной величиной (СВ)  $\beta$  с функцией распределения (ФР)  $G(t) = P\{\beta \leq t\}$ . Длительность обслуживания требования — СВ  $\alpha$  с ФР  $F(t) = P\{\alpha \leq t\}$ . В начальный момент времени начинается обслуживание поступившего требования и отсчет наработки прибора до отказа. Под наработкой понимается накопленное время, затраченное прибором на обслуживание требований. Во время обслуживания требования возможен отказ прибора, который происходит в момент достижения прибором наработки, реализуемой как СВ  $\gamma$  с ФР  $\Phi(t) = P\{\gamma \leq t\}$ . Отказ обнаруживается мгновенно, и сразу же начинается аварийное восстановление (АВ) прибора, которое длится случайное время  $\sigma_a$  с ФР  $\Psi_a(t) = P\{\sigma_a \leq t\}$ .

Перед началом эксплуатации назначается предельно допустимый детерминированный уровень наработки  $\tau$ , при достижении которого незамедлительно начинается ТО прибора. Длительность проведения ТО — СВ  $\sigma_p$  с ФР  $\Psi_p(t) = P\{\sigma_p \leq t\}$ . Обслуживание требования, находящегося на приборе в момент начала АВ или ТО, прерывается и на дообслуживание требование

не возвращается. В результате любого вида восстановления надежностные характеристики прибора полностью обновляются, и в момент поступления первого требования в обновленную систему весь процесс ее функционирования повторяется.

Предполагается, что  $0 < P\{\alpha < \beta\} < 1$  и  $0 < P\{\alpha < \gamma\} < 1$ ; СВ  $\alpha, \beta, \gamma, \sigma_a, \sigma_p$  независимы, имеют соответственно плотности распределения вероятностей  $f(t), g(t), \varphi(t), \psi_a(t), \psi_p(t)$ , конечные математические ожидания  $M\alpha, M\beta, M\gamma, M\sigma_a, M\sigma_p$  и дисперсии.

Требуется построить полумарковскую модель функционирования описанной выше системы обслуживания, найти ее стационарные вероятностные и экономические характеристики, решить задачу оптимизации периодичности проведения ТО прибора с целью повышения средней удельной прибыли в единицу календарного времени и снижения средних удельных затрат в единицу времени обслуживания требований.

### 3. Построение полумарковской модели системы

Для описания функционирования системы используем аппарат теории полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний. Приведем краткие сведения из теории этих процессов. Пусть  $(E, \xi)$  — измеримое пространство,  $E$  интерпретируется как фазовое пространство состояний стохастической системы,  $\xi$  — булева алгебра выделенных подмножеств из  $E$ , интерпретируемых как совокупность наблюдаемых подмножеств состояний системы. Полумарковский процесс с общим фазовым пространством состояний определяется с помощью процесса марковского восстановления, который, в свою очередь, задается полумарковским ядром  $Q(t, x, B)$ ,  $x \in E$ ,  $B \in \xi$ ,  $t \geq 0$  [14, 15].

Процесс марковского восстановления есть двухмерная цепь Маркова  $\{S_n, \theta_n; n \geq 0\}$  со значениями в  $E \times [0, \infty)$ , вероятности перехода которой определяются равенством

$$P\{S_{n+1} \in B, \theta_{n+1} \leq t / S_n = x\} = Q(t, x, B).$$

Первая компонента  $\{S_n; n \geq 0\}$  процесса марковского восстановления  $\{S_n, \theta_n; n \geq 0\}$  является однородной цепью Маркова с переходными вероятностями

$$P(x, B) = P\{S_{n+1} \in B / S_n = x\} = Q(+\infty, x, B),$$

и называется вложенной цепью Маркова (ВЦМ). Случайные величины  $\{\theta_{n+1}, n \geq 0\}$ , составляющие вторую компоненту процесса марковского восстановления, можно интерпретировать как времена пребывания системы в состояниях  $\{S_n; n \geq 0\}$ , они определяют интервалы между моментами марковского восстановления  $\tau_n$ :

$$\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k, \quad n \geq 1, \quad \tau_0 = \theta_0 = 0.$$

Полумарковский процесс  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ , в измеримом фазовом пространстве  $(E, \xi)$ , соответствующий процессу марковского восстановления  $\{S_n, \theta_n; n \geq 0\}$ , задается соотношением

$$S(t) = S_{\nu(t)}, \quad t \geq 0,$$

где  $\nu(t)$  — число моментов марковского восстановления на отрезке  $[0, t]$ .

Полумарковское ядро  $Q(t, x, B)$  процесса марковского восстановления  $\{S_n, \theta_n; n \geq 0\}$  с условно независимыми компонентами представимо в виде

$$Q(t, x, B) = P(x, B)G_x(t), \quad x \in E, \quad B \in \xi, \quad t \geq 0,$$

где

$$G_x(t) = P\{\theta_{n+1} \leq t / S_n = x\} = Q(t, x, E)$$

— функции распределения СВ  $\theta_{n+1}$ , зависящие от первой компоненты. Таким образом, для задания процесса марковского восстановления достаточно описать фазовое пространство состояний  $E$ , определить переходные вероятности ВЦМ  $\{S_n; n \geq 0\}$  и функции распределения случайных величин  $\theta_n$ .

Начнем с описания фазового пространства состояний. Рассматриваемая система может находиться в следующих физических состояниях: 0 — прибор в работоспособном состоянии ожидает требование; 1 — прибор занят обслуживанием; 2 — проводится АВ прибора; 3 — проводится ТО прибора. Расширим пространство физических состояний за счет введения непрерывных компонент, в результате фазовое пространство состояний системы будет иметь вид

$$E = \{1, 1uv, 2x, 3x, 0x, 0xuv; x > 0, u > 0, 0 < v < \tau\}.$$

Поясним коды состояний: 1 — начинается обслуживание первого требования, поступившего после завершения ТО или АВ прибора;  $1uv$  — начинается обслуживание поступившего требования, наработка прибора в этот момент равна  $v$ , величина оставшейся наработки до отказа равна  $u$ ;  $2x$  — произошел отказ и начинается АВ прибора, до поступления следующего требования в систему остается время  $x$ ;  $3x$  — величина наработки достигла предельного уровня и начинается ТО прибора, до поступления следующего требования в систему остается время  $x$ ;  $0x$  — завершилось ТО или АВ прибора, до поступления следующего требования остается время  $x$ ;  $0xuv$  — закончилось обслуживание требования, наработка прибора в этот момент равна  $v$ , величина оставшейся наработки до отказа равна  $u$ , до поступления следующего требования в систему остается время  $x$ .

Временная диаграмма функционирования системы представлена на рис. 1. Времена пребывания системы в соответствующих состояниях определяются формулами

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \alpha \wedge \gamma \wedge \tau, \quad \theta_{1uv} = \alpha \wedge u \wedge (\tau - v); \\ \theta_{2x} &= \sigma_a; \quad \theta_{3x} = \sigma_p; \quad \theta_{0xuv} = \theta_{0x} = x, \end{aligned}$$

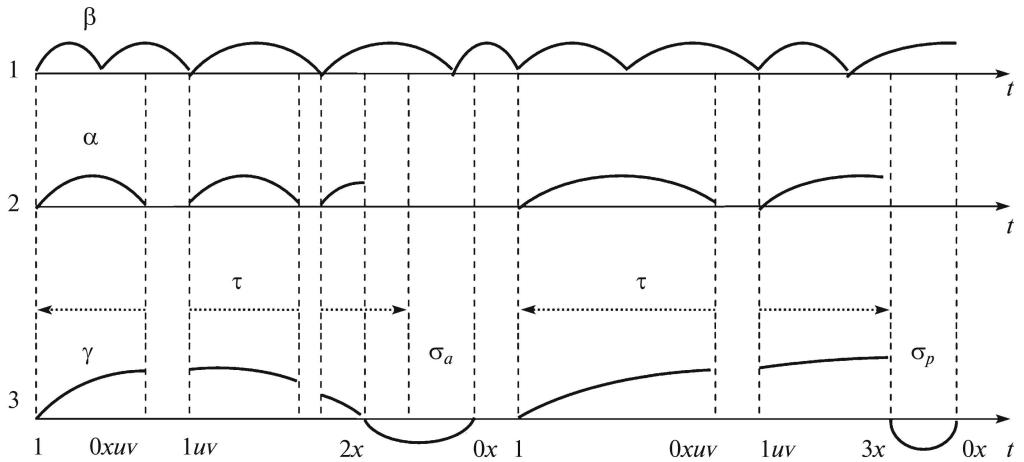


Рис. 1. Временная диаграмма функционирования системы: 1 — входящий поток ( $\beta$  — время между требованиями); 2 — процесс обслуживания требований ( $\alpha$  — время обслуживания); 3 — процесс функционирования прибора ( $\gamma$  — наработка до отказа,  $\sigma_a$  — аварийное восстановление,  $\sigma_p$  — техническое обслуживание;  $\tau$  — предельно допустимый уровень наработки).

где  $\wedge$  — знак минимума, исходя из которых нетрудно выписать функции распределения времен пребывания в состояниях.

Опишем случайные события и вероятности переходов из состояний ВЦМ  $\{S_n; n \geq 0\}$  с учетом их содержательного смысла. Например, переходы из состояния  $1uv$ , в котором система пребывает время  $\alpha \wedge u \wedge (\tau - v)$ , зависят от реализации минимума случного времени  $\alpha$  обслуживания требования и детерминированных величин в момент начала обслуживания требования: оставшейся наработки прибора  $u$  до отказа и оставшейся наработки  $\tau - v$  до проведения ТО прибора. Если время обслуживания требования меньше указанных наработок, причем  $u < (\tau - v)$ , тогда в момент окончания обслуживания требования система переходит в состояние  $(0xu', v + u - u')$ , где  $u'$  — величина оставшейся наработки прибора до отказа в этот момент,  $v + u - u'$  — наработка прибора,  $x$  — время до поступления ближайшего требования в систему (время обслуживания реализуется как  $u - u'$ ).

Аналогично рассматриваются и другие случаи реализации времени пребывания системы в состоянии  $1uv$ . В результате получаем:

$$\begin{aligned}
 & \{1uv \rightarrow (0xu', v + u - u')\} = \\
 & = \{\alpha < u < (\tau - v), \alpha \in u - du', \beta_{u-u'} \in dx, u' < u, x > 0\}, \\
 & \{1uv \rightarrow (0x, u + v - v', v')\} = \\
 & = \{\alpha < (\tau - v) < u, \alpha \in dv' - v, \beta_{v'-v} \in dx, v < v' < \tau, x > 0\}, \\
 & \{1uv \rightarrow 2x\} = \{u < \alpha \wedge (\tau - v), \beta_u \in dx, x > 0\}, \\
 & \{1uv \rightarrow 3x\} = \{\tau - v < \alpha \wedge u, \beta_{\tau-v} \in dx, x > 0\}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $\beta_t$  — прямое остаточное время для процесса восстановления, порожденного СВ  $\beta$ , с плотностью распределения

$$v_g(t, x) = g(t + x) + \int_0^t h_g(t - s)g(s + x)ds,$$

$h_g(t)$  — плотность функции восстановления  $H_g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*(n)}(t)$  этого процесса [16]. Величина  $\beta_t$  фиксирует время в момент  $t$  до ближайшего момента поступления требования в систему. Запись, например,  $\alpha \in u - du'$  означает, что  $u - u' < \alpha \leq u - u' + du'$ .

Иллюстрации переходов приведены на рис. 2–4, где использованы обозначения: 1 — входящий поток требований; 2 — процесс обслуживания требований; 3 — процесс функционирования прибора ( $v, v'$  — наработка,  $u, u'$  — оставшаяся наработка до отказа;  $\tau$  — предельно допустимый уровень наработки;  $\sigma_a$  — длительность АВ;  $\sigma_p$  — длительность ТО прибора).

Вероятности переходов из состояния  $1uv$  определяются формулами:

$$\begin{aligned} p_{1uv}^{(0dx, du', v+u-du')} &= f(u - u')v_g(u - u', x)dxdu', \quad u' < u, \quad x > 0, \quad u < \tau - v; \\ p_{1uv}^{(0dx, v+u-dv', dv')} &= f(v' - v)v_g(v' - v, x)dxdv', \quad v < v' < \tau, \quad x > 0, \quad u > \tau - v; \\ p_{1uv}^{2dx} &= \bar{F}(u)v_g(u, x)dx, \quad x > 0, \quad u < \tau - v, \quad \bar{F}(u) = 1 - F(u); \\ p_{1uv}^{3dx} &= \bar{F}(\tau - v)v_g(\tau - v, x)dx, \quad x > 0, \quad u > \tau - v. \end{aligned}$$

Аналогично определяются вероятности перехода из других состояний:

$$p_1^{0dxdudv} = f(v)\varphi(v + u)v_g(v, x)dudvdx, \quad u > 0, \quad x > 0, \quad 0 < v < \tau;$$

$$p_1^{2dx} = \int_0^\tau \varphi(t)\bar{F}(t)v_g(t, x)dtdx, \quad x > 0;$$

$$p_1^{3dx} = \bar{F}(\tau)\bar{\Phi}(\tau)v_g(\tau, x), \quad x > 0,$$

$$\bar{\Phi}(\tau) = 1 - \Phi(\tau); \quad P_{0xuv}^{1uv} = P_{0x}^1 = 1;$$

$$p_{3x}^{0dy} = \psi_p(x - y) + \int_x^\infty \psi_p(t)v_g(t - x, y)dtdy, \quad 0 < y < x;$$

$$p_{3x}^{0dy} = \int_x^\infty \psi_p(t)v_g(t - x, y)dtdy, \quad y > x;$$

$$p_{2x}^{0dy} = \psi_a(x - y) + \int_x^\infty \psi_a(t)v_g(t - x, y)dtdy, \quad 0 < y < x;$$

$$p_{2x}^{0dy} = \int_x^\infty \psi_a(t)v_g(t - x, y)dtdy, \quad y > x.$$

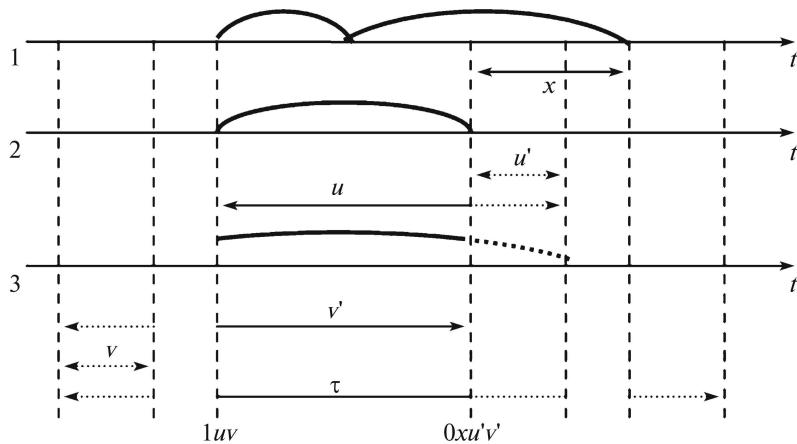


Рис. 2. Событие перехода из состояния  $1uv$  в состояние  $0xu'v'$ , где  $v' = v + u - u'$ ;  $u < \tau - v$ .

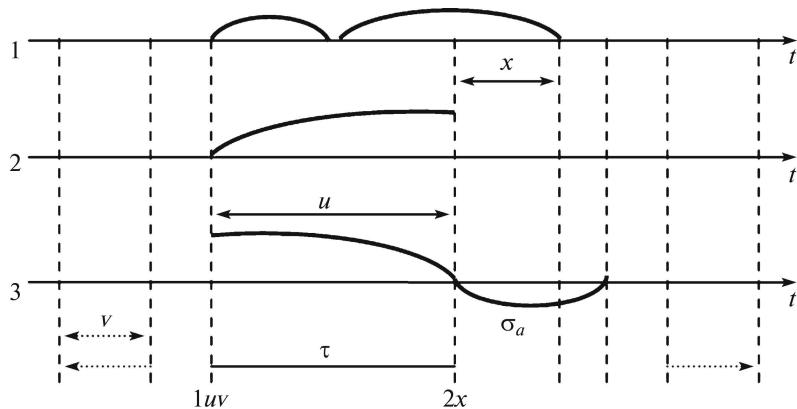


Рис. 3. Событие перехода из состояния  $1uv$  в состояние  $2x$ .

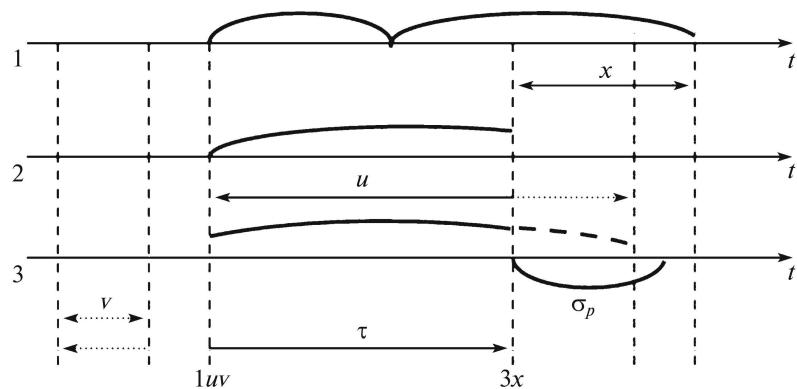


Рис. 4. Событие перехода из состояния  $1uv$  в состояние  $3x$ .

Отметим, что построенный процесс  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ , является регенерирующим. Точкой регенерации является момент попадания системы в состояние 1, т.е. начало обслуживания первого требования после завершения любой из восстановительных работ.

#### 4. Стационарные характеристики системы

Для нахождения стационарных характеристик системы потребуется определить стационарное распределение ВЦМ  $\{S_n; n \geq 0\}$  полумарковского процесса  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ , описывающего ее функционирование. Введем следующие обозначения:  $\rho_1$  — стационарная вероятность пребывания в состоянии 1, а  $\rho(1uv)$ ,  $\rho(0xuv)$ ,  $\rho(0x)$ ,  $\rho(2x)$  и  $\rho(3x)$  — плотности стационарного распределения ВЦМ для соответствующих состояний.

*Теорема 1. Стационарное распределение вложенной цепи Маркова  $\{S_n; n \geq 0\}$  полумарковского процесса  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ , определяется формулами:*

$$\begin{aligned}
 \rho(1uv) &= \rho_1 h_f(v)\varphi(u+v), \\
 \rho(0xuv) &= \rho_1 \varphi(u+v) \left[ f(v)v_g(v,x) + \int_0^v h_f(v-s)f(s)v_g(s,x)ds \right], \\
 \rho(3x) &= \rho_1 \overline{\Phi}(\tau) \left[ \overline{F}(\tau)v_g(\tau,x) + \int_0^\tau h_f(\tau-s)\overline{F}(s)v_g(s,x)ds \right], \\
 (1) \quad \rho(2x) &= \rho_1 \int_0^\tau \varphi(t) \left[ \overline{F}(t)v_g(t,x) + \int_0^t h_f(t-s)\overline{F}(s)v_g(s,x)ds \right] dt, \\
 \rho(0x) &= \rho_1 \overline{\Phi}(\tau) \int_0^\infty \psi_p(t) \left[ \overline{F}(\tau)v_g(\tau+t,x) + \int_0^\tau h_f(\tau-s)\overline{F}(s)v_g(s+t,x)ds \right] dt + \\
 &+ \rho_1 \int_0^\infty \psi_a(t)dt \int_0^\tau \varphi(y) \left[ \overline{F}(y)v_g(y+t,x) + \int_0^y h_f(y-s)\overline{F}(s)v_g(s+t,x)ds \right] dy, \\
 \rho_1 &= \left[ 3 + 2 \int_0^\tau h_f(s)\overline{\Phi}(s)ds \right]^{-1},
 \end{aligned}$$

где  $h_f(v)$  — плотность функции восстановления  $H_f(v)$ , порожденной случайным временем  $\alpha$  обслуживания требования.

Доказательства теоремы 1 и последующих теорем 2 и 3 приводятся в Приложении.

Отметим вероятностный смысл выражений, входящих в формулы для плотностей стационарного распределения. По переменной  $x$  функ-

ция  $f(v)v_g(v, x) + \int_0^v h_f(v-s)f(s)v_g(s, x)ds$  является плотностью распределения интервала времени от момента окончания обслуживания требования до момента поступления следующего требования при условии, что наработка прибора в момент завершения обслуживания равна  $v$ . По переменной  $x$  функция  $\bar{F}(t)v_g(t, x) + \int_0^t h_f(t-s)\bar{F}(s)v_g(s, x)ds$  — плотность распределения интервала времени между моментом отказа прибора и моментом поступления следующего требования в систему при условии, что наработка прибора в момент отказа достигла уровня  $t$ . Функция  $\bar{F}(\tau)v_g(\tau+t, x) + \int_0^\tau h_f(\tau-s)\bar{F}(s)v_g(s+t, x)ds$  по переменной  $x$  — плотность распределения интервала времени между моментом завершения ТО прибора и первым после этого моментом поступления требования в систему при условии, что ТО прибора длилось время  $t$ .

Найдем финальные вероятности и средние стационарные времена пребывания системы в различных физических состояниях. Для этого разобъем фазовое пространство состояний  $E$  на непересекающиеся подмножества, соответствующие различным физическим состояниям прибора:  $E_0 = \{0x, 0xuv\}$  — работоспособный прибор находится в состоянии ожидания требования;  $E_1 = \{1, 1uv\}$  — прибор обслуживает требование;  $E_2 = \{2x\}$  — проводится АВ прибора;  $E_3 = \{3x\}$  — проводится ТО прибора.

В следующей теореме 2 устанавливаются выражения для предельных значений  $p_i^*$  переходных вероятностей

$$\Phi(t, x, E_i) = P\{S(t) \in E_i / S(0) = x\}, \quad x \in E, \quad i = \overline{0, 3},$$

полумарковского процесса  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ , а в теореме 3 — выражения для средних стационарных времен пребывания в этих состояниях. Утверждения этих теорем содержат следующие характеристики  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ , как регенерирующего процесса:

$$\bar{N}_{\text{обс}}(\tau) = \int_0^\tau \bar{\Phi}(v)h_f(v)dv$$

— среднее число полностью обслуженных требований в интервале между восстановительными работами;

$$\bar{N}_{\text{пот}}^{\text{обс}}(\tau) = \int_0^\tau \bar{\Phi}(v)f(v)H_g(v)dv + \int_0^\tau \bar{\Phi}(v)dv \int_0^v h_f(v-s)f(s)H_g(s)ds$$

— среднее число требований, потерянных по причине занятости прибора обслуживанием этих требований;

$$\bar{N}_{\text{пот}}^p(\tau) = \bar{\Phi}(\tau) \int_0^\infty \psi_p(t) \left[ \bar{F}(\tau)\hat{H}_g(\tau+t) + \int_0^\tau h_f(\tau-s)\bar{F}(s)\hat{H}_g(s+t)ds \right] dt$$

— среднее число потерянных требований на периоде регенерации по причине ТО прибора и за время обслуживания требования, на котором достигается

предельно допустимая наработка на отказ;

$$\begin{aligned}\overline{N}_{\text{пот}}^a(\tau) &= \\ &= \int_0^\infty \psi_a(t) dt \int_0^\tau \varphi(y) \left[ \overline{F}(y) \widehat{H}_g(y+t) + \int_0^y h_f(y-s) \overline{F}(s) \widehat{H}_g(s+t) ds \right] dy\end{aligned}$$

— среднее число потерянных требований на периоде регенерации по причине АВ прибора и за время обслуживания требования, находящегося на приборе в момент его отказа. Здесь

$$\widehat{H}_g(t) = 1 + H_g(t).$$

*Теорема 2.* Финальные вероятности  $p_i^*(\tau)$  пребывания системы в состояниях  $E_i$ ,  $i = \overline{0, 3}$ , определяются формулами:

$$(2) \quad \begin{aligned}p_0^*(\tau) &= 1 - \frac{M(\gamma \wedge \tau) + M\sigma_a P(\gamma < \tau) + M\sigma_p P(\gamma > \tau)}{M\beta \overline{N}(\tau)}, \\ p_1^*(\tau) &= \frac{M(\gamma \wedge \tau)}{M\beta \overline{N}(\tau)}, \quad p_2^*(\tau) = \frac{M\sigma_a P(\gamma < \tau)}{M\beta \overline{N}(\tau)}, \quad p_3^*(\tau) = \frac{M\sigma_p P(\gamma > \tau)}{M\beta \overline{N}(\tau)},\end{aligned}$$

где

$$\overline{N}(\tau) = \overline{N}_{\text{обс}}(\tau) + \overline{N}_{\text{пот}}^{\text{обс}}(\tau) + \overline{N}_{\text{пот}}^p(\tau) + \overline{N}_{\text{пот}}^a(\tau)$$

— среднее число требований, поступающих в систему на периоде регенерации.

*Теорема 3.* Средние стационарные времена пребывания системы в состояниях  $E_i$ ,  $i = \overline{0, 3}$ , определяются выражениями:

$$\begin{aligned}T(E_1) &= \frac{M(\gamma \wedge \tau)}{1 + \overline{N}_{\text{обс}}(\tau)}, \quad T(E_2) = M\sigma_a, \quad T(E_3) = M\sigma_p, \\ T(E_0) &= \frac{M\beta \overline{N}(\tau) - M(\gamma \wedge \tau) - M\sigma_a P(\gamma < \tau) - M\sigma_p P(\gamma > \tau)}{1 + \overline{N}_{\text{обс}}(\tau)}.\end{aligned}$$

Перейдем к нахождению стационарных экономических показателей эффективности функционирования системы [17]. Для этого воспользуемся тем, что случайный процесс, описывающий эволюцию технической системы во времени, является регенерирующим. Пусть  $c_1$  — доход, получаемый за обслуживание одного требования;  $c_a$  — затраты в единицу времени АВ;  $c_p$  — затраты в единицу времени на проведение ТО прибора. Тогда средняя удельная прибыль  $S(\tau)$  в единицу календарного времени и средние удельные затраты  $C(\tau)$  в единицу времени обслуживания требований определяются соотношениями:

$$(3) \quad \begin{aligned}S(\tau) &= \frac{c_1 N_{\text{сер}}(\tau) - c_p M\sigma_p \overline{\Phi}(\tau) - c_a M\sigma_a \Phi(\tau)}{M\beta \overline{N}(\tau)}, \\ C(\tau) &= \frac{c_a M\sigma_a \Phi(\tau) + c_p M\sigma_p \overline{\Phi}(\tau)}{M(\gamma \wedge \tau)}.\end{aligned}$$

Для частных видов входящих потоков и времени обслуживания требований выражения для вычисления характеристик системы упрощаются. Так, в случае простейшего входящего потока требований с интенсивностью  $\lambda$  при вычислении стационарных характеристик ненадежной системы  $M/G/1/0$  в соответствующих формулах следует полагать, что

$$\bar{N}(\tau) = 1 + \int_0^\tau h_f(t)\bar{\Phi}(t)dt + \lambda \int_0^\tau \bar{\Phi}(t)dt + \lambda M\sigma_a \Phi(\tau) + \lambda M\sigma_p \bar{\Phi}(\tau).$$

Для системы  $GI/M/1/0$ , в которой длительность обслуживания требования имеет показательное распределение с параметром  $\mu$ , в формулах для вычисления стационарных характеристик следует подставить:

$$\begin{aligned}\bar{N}_{\text{обс}}(\tau) &= \mu \int_0^\tau \bar{\Phi}(x)dx, \\ \bar{N}(\tau) &= \mu \int_0^\tau \bar{\Phi}(t)dt + \mu \int_0^\tau \bar{\Phi}(t)dt \int_0^t e^{-\mu s} h_g(s)ds + \\ &+ \bar{\Phi}(\tau) \int_0^\infty \psi_p(t) \hat{H}_g(t)dt + \bar{\Phi}(\tau) \int_0^\infty \psi_p(t)dt \int_0^\tau e^{-\mu s} h_g(s+t)ds + \\ &+ \Phi(\tau) \int_0^\infty \psi_a(t) \hat{H}_g(t)dt + \int_0^\infty \psi_a(t)dt \int_0^\tau \varphi(y)dy \int_0^y e^{-\mu s} h_g(s+t)ds.\end{aligned}$$

Для системы  $M/M/1/0$ , в которой входящий поток требования является простейшим с параметром  $\lambda$ , а длительность обслуживания требования имеет показательное распределение с параметром  $\mu$ , в формулах для определения стационарных характеристик имеем:

$$\begin{aligned}\bar{N}_{\text{обс}}(\tau) &= \mu \int_0^\tau \bar{\Phi}(x)dx, \\ \bar{N}(\tau) &= 1 + (\lambda + \mu) \int_0^\tau \bar{\Phi}(t)dt + \lambda M\sigma_a \Phi(\tau) + \lambda M\sigma_p \bar{\Phi}(\tau).\end{aligned}$$

В частности, когда СВ  $\gamma$ ,  $\sigma_a$  и  $\sigma_p$ , описывающие процессы отказа и восстановления, имеют экспоненциальные распределения, т.е.  $\varphi(t) = \eta e^{-\eta t}$ ,  $\psi_a(t) = \nu_a e^{-\nu_a t}$  и  $\psi_p(t) = \nu_p e^{-\nu_p t}$ , тогда финальные вероятности пребывания системы в состояниях вычисляются по формулам:

$$p_0^*(\tau) = \frac{\eta + \mu(1 - e^{-\eta\tau})}{\eta \left(1 + \frac{\lambda}{\nu_p} e^{-\eta\tau}\right) + \left(\lambda + \mu + \frac{\eta\lambda}{\nu_a}\right) (1 - e^{-\eta\tau})},$$

$$p_1^*(\tau) = \frac{\lambda(1 - e^{-\eta\tau})}{\eta \left(1 + \frac{\lambda}{\nu_p}e^{-\eta\tau}\right) + \left(\lambda + \mu + \frac{\eta\lambda}{\nu_a}\right)(1 - e^{-\eta\tau})},$$

$$p_2^*(\tau) = \frac{\frac{\lambda\eta}{\nu_a}(1 - e^{-\eta\tau})}{\eta \left(1 + \frac{\lambda}{\nu_p}e^{-\eta\tau}\right) + \left(\lambda + \mu + \frac{\eta\lambda}{\nu_a}\right)(1 - e^{-\eta\tau})},$$

$$p_3^*(\tau) = \frac{\frac{\lambda\eta}{\nu_p}e^{-\eta\tau}}{\eta \left(1 + \frac{\lambda}{\nu_p}e^{-\eta\tau}\right) + \left(\lambda + \mu + \frac{\eta\lambda}{\nu_a}\right)(1 - e^{-\eta\tau})}.$$

## 5. Оптимизация периодичности проведения ТО прибора

Рассмотрим задачу оптимизации допустимого уровня наработки для проведения ТО прибора. Вначале выберем в качестве критерия оптимизации средние удельные затраты  $C(\tau)$  в единицу времени обслуживания требований. Достаточные условия существования конечной точки минимума  $\tau_c$  функции  $C(\tau)$  приводятся в [16]. Заметим, что в случае  $\tau_c = \infty$  оптимальной является пассивная стратегия обслуживания прибора, т.е. проведение его ТО нецелесообразно.

Если в качестве критерия оптимальности взять среднюю удельную прибыль  $S(\tau)$  в единицу времени, то точка максимума этой функции удовлетворяет уравнению  $S'(\tau) = 0$  или ему эквивалентному:

$$(4) \quad c_1 h_f(\tau) \overline{N}_{\text{пот}}(\tau) - \lambda_\varphi(\tau) (c_a M \sigma_a - c_p M \sigma_p) \overline{N}(\tau) - c_1 \overline{N}_{\text{обс}}(\tau) \frac{\overline{N}'_{\text{пот}}(\tau)}{\overline{\Phi}(\tau)} + \\ + (c_a M \sigma_a \Phi(\tau) + c_p M \sigma_p \overline{\Phi}(\tau)) \left( h_f(\tau) + \frac{\overline{N}'_{\text{пот}}(\tau)}{\overline{\Phi}(\tau)} \right) = 0,$$

где  $\overline{N}_{\text{пот}}(\tau) = \overline{N}_{\text{пот}}^{\text{обс}}(\tau) + \overline{N}_{\text{пот}}^p(\tau) + \overline{N}_{\text{пот}}^a(\tau)$  — среднее число потерянных требований на периоде регенерации,  $\lambda_\varphi(\tau) = \varphi(\tau)/\overline{\Phi}(\tau)$  — интенсивность отказа прибора.

Обозначим функцию в левой части (4) через  $Z(\tau)$ , и предположим, что она является непрерывной. Тогда достаточным условием существования конечного решения этого уравнения является выполнение неравенства  $Z(0)Z(\infty) < 0$ . В частности, неравенство выполняется, если интенсивность отказов в ненадежной системе обслуживания неограниченно возрастает, т.е.  $\lambda_\varphi(\infty) = \infty$ ; средние затраты за период регенерации на АВ больше, чем на ТО и меньше прибыли от обслуженных требований, т.е.  $c_a M \sigma_a > c_p M \sigma_p$  и  $c_a M \sigma_a < c_1 \overline{N}_{\text{обс}}(\infty)$ ; среднее число потерянных заявок по причине АВ больше, чем по причине ТО, т.е.

$$\int_0^\infty \overline{F}(y) dy \int_0^\infty (\psi_a(t) - \psi_p(t)) \hat{H}_g(y + t) dt > 0;$$

а также

$$c_1 h_f(0) - \lambda_\varphi(0) c_a M \sigma_a \geq 0.$$

При решении двухкритериальной задачи оптимизации в качестве целевой функции можно использовать линейную свертку  $K(\tau) = a_s S(\tau) - a_c C(\tau)$  частных критериев  $S(\tau)$  и  $C(\tau)$  при весовых коэффициентах  $a_s > 0$  и  $a_c > 0$ ,  $a_s + a_c = 1$ .

## 6. Численный пример

Интервал времени между поступающими в систему требованиями имеет распределение Эрланга 4-го порядка с плотностью распределения  $g(t) = 20(20t)^3 e^{-20t} / 3!$ , длительность времени обслуживания требования — распределение Эрланга 3-го порядка с плотностью  $f(t) = 12(12t)^2 e^{-12t} / 2!$ . Наработка прибора до отказа и длительность времени его АВ распределены по закону Вейбулла–Гнеденко с плотностями  $\varphi(t) = 0,3(0,1t)^2 e^{-(0,1t)^3}$  и  $\psi_a(t) = 5(10t)^{-0,5} e^{-(10t)^{0,5}}$  соответственно. Длительность ТО прибора имеет гамма-распределение с плотностью  $\psi_p(t) = 5(5t)^{-0,5} e^{-5t} / \Gamma(0,5)$ . Средние значения перечисленных случайных величин (в часах), доход от обслуживания требования и затраты в единицу времени на восстановительные работы (в денежных единицах) помещены в табл. 1.

Вычисленные в пакете MathCAD по формулам (2) и (3) значения стационарных характеристик системы в зависимости от предельного уровня  $\tau$  наработки прибора на ТО помещены в табл. 2. В ней использованы следующие обозначения:  $\tau_s$  — точка максимума функции удельной прибыли  $S(\tau)$ ;  $\tau_c$  — точка минимума функции удельных затрат  $C(\tau)$ ;  $\tau_k$  — точка максимума линейной свертки  $K(\tau) = 0,2S(\tau) - 0,8C(\tau)$ ;  $p_0^*(\tau)$  — вероятность пребывания системы в свободном работоспособном состоянии;  $\bar{N}_{\text{обс}}(\tau)$  и  $\bar{N}_{\text{пот}}(\tau)$  — среднее число обслуженных и потерянных требований на периоде регенерации соответственно;  $M\beta \bar{N}(\tau)$  — средняя длина периода регенерации. Случай  $\tau = \infty$  соответствует характеристикам системы для пассивной стратегии обслуживания (ТО не проводится).

**Таблица 1.** Исходные параметры системы

$M\beta$ , ч	$M\alpha$ , ч	$M\gamma$ , ч	$M\sigma_a$ , ч	$M\sigma_p$ , ч	$c_1$ , денежных единиц	$c_a$ , денежных единиц	$c_p$ , денежных единиц
0,2	0,25	8,930	0,2	0,1	4	20	5

**Таблица 2.** Стационарные характеристики системы в зависимости от периодичности технического обслуживания прибора

Уровень наработки на ТО, ч	$S(\tau)$ , денежных единиц	$C(\tau)$ , денежных единиц	$p_0^*(\tau)$	$\bar{N}_{\text{обс}}(\tau)$	$\bar{N}_{\text{пот}}(\tau)$	$M\beta \bar{N}(\tau)$
$\tau = \infty$	10,006	0,448	0,336	35,386	33,343	13,746
$\tau_c = 4,162$	9,964	0,182	0,340	16,019	15,763	6,356
$\tau_s = 7,589$	10,101	0,254	0,338	27,081	25,681	10,552
$\tau_k = 5,099$	10,041	0,189	0,339	19,410	18,787	7,639

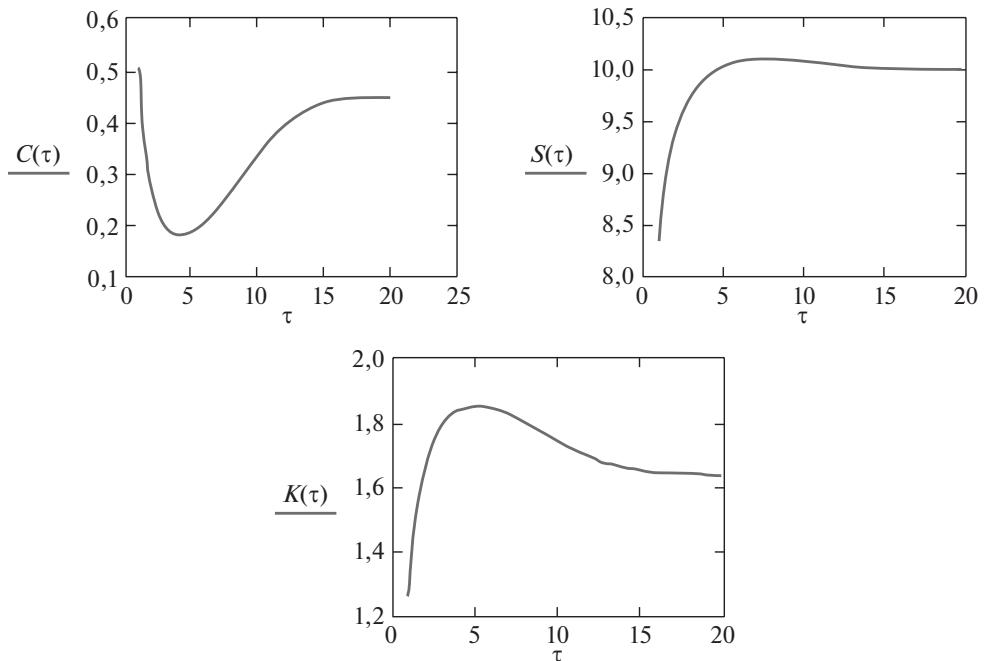


Рис. 5. Графики зависимостей экономических показателей системы и их линейной сверки от периодичности проведения ТО прибора.

При минимизации удельных затрат оптимально допустимый уровень наработки на ТО равен  $\tau_c = 4,162$  ч, а при максимизации удельной прибыли —  $\tau_s = 7,589$  ч. При этом по сравнению с пассивной стратегией обслуживания прибора затраты снижаются на 59,405 %, а прибыль увеличивается на 0,942 % соответственно. В случае двухкритериальной оптимизации оптимальный допустимый уровень наработки на ТО составляет  $\tau_k = 5,099$  ч, по сравнению с пассивной стратегией обслуживания удельная прибыль увеличивается на 0,345 %, а удельные затраты снижаются на 57,735 %.

Графики зависимостей частных критериев и их линейной свертки от периодичности проведения ТО прибора представлены на рис. 5.

## 7. Заключение

С помощью аппарата теории полумарковских процессов с дискретно-непрерывным множеством состояний построена модель функционирования системы обслуживания  $GI/G/1/0$ , в которой во время обслуживания требования может произойти отказ прибора. С помощью найденного стационарного распределения вложенной цепи Маркова и предельных теорем найдены выражения для нахождения стационарных вероятностных и экономических показателей системы с учетом проведения профилактического обслуживания прибора. Приводятся достаточные условия, при которых целесообразно проведение технического обслуживания в зависимости от уровня наработки прибора. В приведенном численном примере найдены стационарные харак-

теристики системы и количественно оценено влияние периодичности проведения профилактического обслуживания на среднюю удельную прибыль в единицу календарного времени и средние удельные затраты в единицу времени обслуживания требований.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 1.* Система уравнений

$$\rho(B) = \int_E \rho(dx)P(x, B)$$

для стационарного распределения  $\rho(\cdot)$  ВЦМ  $\{S_n, n \geq 0\}$  с учетом вероятностей переходов  $P(x, B)$  из состояний имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho(0xuv) &= \int_0^v f(t)v_g(t, x)\rho(1, t+u, v-t)dt + \rho_1 f(v)v_g(v, x)\varphi(v+u), \\ \rho(1uv) &= \int_0^\infty \rho(0xuv)dx, \\ \rho(3x) &= \int_0^\tau v_g(t, x)\bar{F}(t)dt \int_t^\infty \rho(1u, \tau-t)du + \rho_1 \bar{F}(\tau)v_g(\tau, x)\bar{\Phi}(\tau), \\ \rho(2x) &= \int_0^\tau v_g(t, x)\bar{F}(t)dt \int_t^\tau \rho(1t, v-t)dv + \rho_1 \int_0^\tau \bar{F}(t)v_g(t, x)\varphi(t)dt, \\ \rho(0x) &= \int_0^\infty \psi_p(t)\rho(3, t+x)dt + \int_0^\infty \psi_p(t)dt \int_0^t v_g(t-s, x)\rho(3s)ds + \\ &\quad + \int_0^\infty \psi_a(t)\rho(2, t+x)dt + \int_0^\infty \psi_a(t)dt \int_0^t v_g(t-s, x)\rho(2s)ds, \\ \rho_1 &= \int_0^\infty \rho(0x)dx. \end{aligned}$$

В результате исключения из первых двух уравнений системы функции  $\rho(0xuv)$  получаем уравнение восстановления для плотности  $\rho(1uv)$  по переменной  $v$ :

$$\rho(1uv) = \rho_1 f(v)\varphi(u+v) + \int_0^v f(t)\rho(1, t+u, v-t)dt,$$

решением которого является функция  $\rho(1uv) = \rho_1 h_f(v)\varphi(u+v)$ . Выражения для остальных плотностей находятся с помощью свойств плотностей функции восстановления и прямого остаточного времени восстановления. Значение стационарной вероятности  $\rho_1$  определяется из условия нормировки. Теорема 1 доказана.

**Доказательство теоремы 2.** Предельные значения  $p_i^*$  переходных вероятностей полумарковского процесса  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ , определяются с помощью соотношений [14, 15]

$$p_i^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x, E_i) = \int_{E_i} m(x) \rho(dx) \left[ \int_E m(x) \rho(dx) \right]^{-1}, \quad i = \overline{0, 3}.$$

С учетом найденного стационарного распределения ВЦМ (1), средних времен пребывания в состояниях:

$$\begin{aligned} M\theta_1 &= \int_0^\tau \bar{F}(t) \bar{\Phi}(t) dt, \quad M\theta_{1uv} = \int_0^{u \wedge (\tau-v)} \bar{F}(t) dt, \\ M\theta_{2x} &= M\sigma_a; \quad M\theta_{3x} = M\sigma_p; \quad M\theta_{oxuv} = M\theta_{0x} = x \end{aligned}$$

и тождества  $M\beta_t = M\beta(1 + H_g(t)) - t$  получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{E_1} m(x) \rho(dx) &= \rho_1 \int_0^\tau \bar{F}(t) \bar{\Phi}(t) dt + \rho_1 \int_0^\tau h_f(v) dv \int_0^\infty \varphi(u+v) du \int_0^{u \wedge (\tau-v)} \bar{F}(t) dt = \\ &= \rho_1 \int_0^\tau \bar{F}(t) \bar{\Phi}(t) dt + \rho_1 \int_0^\tau \bar{\Phi}(s) ds \int_0^s h_f(t) \bar{F}(s-t) dt = \rho_1 \int_0^\tau \bar{\Phi}(t) dt = \rho_1 M(\gamma \wedge \tau); \\ \int_{E_2} m(x) \rho(dx) &= M\sigma_a \int_0^\infty \rho(2x) dx = \rho_1 M\sigma_a \Phi(\tau) = \rho_1 M\sigma_a P(\gamma < \tau); \\ \int_{E_3} m(x) \rho(dx) &= M\sigma_p \int_0^\infty \rho(3x) dx = \rho_1 M\sigma_p \bar{\Phi}(\tau) = \rho_1 M\sigma_p P(\gamma > \tau); \\ \int_{E_0} m(x) \rho(dx) &= \rho_1 M\beta \left[ \bar{N}_{\text{обс}}(\tau) + \bar{N}_{\text{нот}}^{\text{обс}}(\tau) + \bar{N}_{\text{нот}}^p(\tau) + \bar{N}_{\text{нот}}^a(\tau) \right] - \\ &\quad - \rho_1 \int_0^\tau \bar{\Phi}(t) dt - \rho_1 \bar{\Phi}(\tau) M\sigma_p - \rho_1 \Phi(\tau) M\sigma_a; \\ \int_E m(x) \rho(dx) &= \rho_1 M\beta \left[ \bar{N}_{\text{обс}}(\tau) + \bar{N}_{\text{нот}}^{\text{обс}}(\tau) + \bar{N}_{\text{нот}}^p(\tau) + \bar{N}_{\text{нот}}^a(\tau) \right]. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

*Доказательство теоремы 3.* Средние времена  $T(E_i)$  пребывания системы в подмножествах состояний  $E_i$  определяются с помощью соотношений [14, 15]

$$(П.1) \quad T(E_i) = \int_{E_i} m(x)\rho(dx) \left[ \int_{E \setminus E_i} \rho(dx)P(x, E_i) \right]^{-1}, \quad i = \overline{0, 3}.$$

Учитывая вероятности переходов и вид стационарного распределения ВЦМ (1), интегралы в знаменателях дробей выражений (П.1) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \int_{E \setminus E_1} \rho(dx)P(x, E_1) &= \int_0^\infty \rho(0x)dx + \int_0^\tau dv \int_0^\infty du \int_0^\infty \rho(0xuv)dx = \\ &= \rho_1 + \rho_1 \int_0^\tau h_f(x) \bar{\Phi}(x) dx = \rho_1 [1 + \bar{N}_{\text{обс}}(\tau)]; \\ \int_{E \setminus E_2} \rho(dx)P(x, E_2) &= \int_{E_2} \rho(dx)P(x, E \setminus E_2) = \int_0^\infty \rho(2x)dx = \rho_1 \Phi(\tau); \\ \int_{E \setminus E_3} \rho(dx)P(x, E_3) &= \int_{E_3} \rho(dx)P(x, E \setminus E_3) = \int_0^\infty \rho(3x)dx = \rho_1 \bar{\Phi}(\tau); \\ \int_{E \setminus E_0} \rho(dx)P(x, E_0) &= \int_{E_0} \rho(dx)P(x, E \setminus E_0) = \\ &= \int_0^\infty \rho(0x)dx + \int_0^\tau dv \int_0^\infty du \int_0^\infty \rho(0xuv)dx = \rho_1 [1 + \bar{N}_{\text{обс}}(\tau)]. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.
- Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995.
- Печинкин А.В., Чаплыгин В.В. Стационарные характеристики системы массового обслуживания  $SM/MSP/n/r$  // АиТ. 2004. № 9. С. 85–100.  
Pechinkin A.V., Chaplygin V.V. Stationary Characteristics of the  $SM/MSP/n/r$  Queuing System // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 9. P. 1429–1443.

4. *Krishna Kumar B., Arivudainambi D., Vijayakumar A.* An M/G/1/1 Queue with Unreliable Server and no Waiting Capacity // Inf. Manage. Sci. 2002. V. 13. P. 35–50.
5. *Wu C.-H., Lee W.-C., Ke J.-C., Liu T.-H.* Optimization Analysis of an Unreliable Multi-server Queue with a Controllable Repair Policy // Comput. Oper. Res. 2014. No. 49. P. 83–96.
6. *Özkan E., Kharoufeh J.P.* Optimal Control of a Two-server Queuing System with Failures // Prob. Eng. Inform. Sci. 2014. No. 28 (4). P. 489–527.
7. *Песчанский А.И.* Полумарковская модель однолинейной системы обслуживания с потерями и ненадежным восстанавливаемым каналом // Динамические системы. 2017. Т. 7 (35). № 1. С. 53–61.
8. *Peschansky A.I.* Semi-Markov Models of One-Server Loss Queues with Recurrent Input. Germany. LAP LAMPERT Acad. Publish., 2013.
9. *Песчанский А.И., Коваленко А.И.* Полумарковская модель однолинейной системы обслуживания с учетом технического обслуживания ненадежного канала // Сб. науч. тр. Оптимизация производственных процессов. 2014. Вып. 15. С. 63–70.
10. *Peschansky A.I., Kovalenko A.I.* On a Strategy for the Maintenance of an Unreliable Channel of a One-Server Loss Queue // Automat. Contr. Comput. Sci. 2016. V. 50. No. 6. P. 397–407.
11. *Песчанский А.И., Коваленко А.И.* Полумарковская модель технического обслуживания ненадежной однолинейной системы обслуживания с потерями и скрытым отказом // Сб. науч. тр. Вестн. СевНТУ. Автоматизация процессов и управление. 2014. Вып. 147. С. 64–72.
12. *Peschansky A.I., Kovalenko A.I.* Semi-Markov Model of a Single-Server Queue with Losses and Maintenance of an Unreliable Server // Cybern. Syst. Anal. 2015. V. 51. No. 4. P. 632–643.
13. *Песчанский А.И., Коваленко А.И.* Полумарковская модель ненадежной однолинейной системы обслуживания с потерями и различными типами восстановления // АиТ. 2016. № 11. С. 112–126.  
*Peschansky A.I., Kovalenko A.I.* A Semi-Markov Model for an Unreliable Single-Line Queueing System with Losses and Different Restoration Types // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 12. P. 2192–2204.
14. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. Киев: Наук. думка, 1982.
15. *Корлат А.Н., Кузнецов В.Н., Новиков М.И. и др.* Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. Кишинев: Штиинца, 1991.
16. *Beichelt F., Franken P.* Zuverlässigkeit und Instanphaltung, Mathematische Methoden. StateplaceBerlin: VEB Verlag Technik, 1983.
17. *Каштанов В.А., Медведев А.И.* Теория надежности сложных систем (теория и практика). М.: Европейский центр по качеству, 2002.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневским.*

Поступила в редакцию 30.09.2019

После доработки 22.01.2020

Принята к публикации 30.01.2020

# *Управление в социально-экономических системах*

© 2020 г. Г.И. АЛГАЗИН, д-р физ.-мат. наук ([algaz46@yandex.ru](mailto:algaz46@yandex.ru)),  
Д.Г. АЛГАЗИНА, канд. техн. наук ([darya.algazina@mail.ru](mailto:darya.algazina@mail.ru))  
(Алтайский государственный университет, Барнаул)

## **ПРОЦЕССЫ РЕФЛЕКСИИ И РАВНОВЕСИЕ В МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ С ЛИДЕРОМ**

Проводится аналитическое исследование динамических процессов рефлексивного поведения в модели олигополии с лидером в классе линейных функций спроса и издержек агентов. Обосновываются динамические процессы принятия решений при неточных представлениях агентов о выборе конкурентов, осуществляемые не путем оптимальных ответов на их ожидаемые действия, а как повторяемые статические игры на диапазоне допустимых ответов. Агенты от игры к игре, наблюдая сложившееся состояние рынка и учитывая текущие условия по конкурентоспособности и прибыли, в рамках своей информированности уточняют объемы выпуска, делая шаги в направлении текущего положения цели. Получены достаточные условия на величины шагов, выбираемые лидером по Штакельбергу и независимо друг от друга агентами с реакцией по Курно, для сходимости динамик к равновесию.

*Ключевые слова:* равновесие Штакельберга, рефлексивное коллективное поведение, конкурентоспособность, валовая прибыль, уточнение объемов выпуска, условия сходимости.

**DOI:** 10.31857/S0005231020070077

### **1. Введение**

В «классической» теоретико-игровой модели Штакельберга [1] фирма, выступившая в роли единоличного лидера рынка, в точности знает реакцию на его действия ведомых агентов, конкурирующих по Курно [2] объемами выпуска однородной продукции. Это позволяет фирме выбрать равновесное по Нэшу [3] действие, которое при наличии общего знания максимизирует ее прибыль. Однако исследования и опыт применения теоретико-игровых моделей свидетельствует о том, что имеет место фундаментальная проблема априорной неосведомленности агентов о выборе действий другими агентами (см., например, [4–9]). Если лидер не располагает достоверной информацией для построения функции реакции, а ведомые агенты, делая свой выбор, не располагают точными и полными представлениями о выборе конкурентов, их реакция на действия лидера не будет для него ожидаемой, а сам лидер может не получить ожидаемой прибыли. В этих условиях лидер и другие фирмы-агенты вынуждены делать прогнозы действий своих конкурентов (осуществлять рефлексию).

В последнее время исследователи обращают внимание на модели рефлексивного коллективного поведения [10, 11], которые при достаточно слабых предположениях об информированности агентов и достаточно неадекватных предсказаниях действий конкурентов дают возможность строить процессы, приводящие к равновесию (см., например, [4, 7, 12–15]). Используемые до этого в модели с лидером по Штакельбергу различные численные методы достижения равновесия, в частности метод однопараметрической прогонки [16], аппроксимация функции реакции лидера с решением задач математического программирования с одним ограничением, зависящим от параметра [17], двухуровневая оптимизация на многогранном множестве с помощью метода штрафных функций с использованием алгоритма симплициального разбиения [18] и др., не совсем адекватно отражали процессы принятия решений.

Основные результаты по исследованию равновесия Штакельберга с применением моделей рефлексивного коллективного поведения относятся к выявлению условий существования равновесия, его единственности и сходимости процессов рефлексии. Аналитические решения, в основном, получены для самой распространенной и простейшей модели коллективного поведения — модели индикаторного поведения [7, 10, 12, 13, 15], в которой не учитываются экономические ограничения; для более сложных моделей [6, 8, 9, 11, 14] явно преобладают качественные и численные методы.

В данной статье предложены динамические процессы принятия решений при неточных представлениях агентов о выборе конкурентов. Решается задача аналитического оценивания диапазонов допустимых ответов, выбираемых лидером по Штакельбергу и независимо друг от друга агентами с реакцией по Курно, таких что динамики сходятся к истинному равновесию. Во внимание принимается начальное состояние олигополии, а в условиях допустимости текущих решений учитываются такие экономические категории, как конкурентоспособность и убыточность агентов.

## 2. Базовая модель олигополии и информированность агентов

Пусть  $i \in N = \{1, \dots, n\}$  — агенты, конкурирующие на рынке объемами выпуска однородной продукции. Агенты продают произведенный ими выпуск  $q_i$  по единой рыночной цене  $p(Q)$ , которая определяется суммарным объемом выпуска  $Q = \sum_{i \in N} q_i$ . Действия агентов направлены на максимизацию прибыли:

$$(1) \quad \Pi_i(p(Q), q_i) = p(Q)q_i - \phi_i(q_i) \rightarrow \max_{q_i}, \quad i \in N.$$

Цена  $p(Q)$  и полные издержки агентов  $\phi_i(q_i)$  заданы линейными функциями:

$$(2) \quad p(Q) = a - bQ, \quad \phi_i(q_i) = c_i q_i + d_i, \quad i \in N,$$

где  $a, b$  — параметры спроса;  $c_i, d_i$  — предельные и постоянные издержки агентов.

Предпосылки базовой модели: 1) дискретность процесса; 2) однородность продукции; 3) конкуренция объемами выпусков, весь выпуск реализуется; 4) единая рыночная цена; 5) произвольное число агентов на рынке; 6) линейность функций спроса и полных затрат агентов, имеющих различные предельные издержки; 7) отсутствие ограничений мощности и коалиций; 8) рациональное поведение агентов, направленное на максимизацию собственной прибыли; 9) первый агент ( $i = 1$ ) занимает лидирующее положение среди остальных агентов за счет того, что «предсказывает» их ответ на его выбор объема выпуска; 10) остальные агенты выбирают свои действия по Курно, считая, что все другие агенты не меняют свои объемы выпуска; 11) одновременный порядок ходов.

Поясним предпосылки 9)–11) и информированность агентов. Здесь выбор реальных действий всеми агентами осуществляется синхронно (одновременно). Подобный прием упрощает реальный процесс последовательных реакций. Он использован, например, в [7, 8, 12] и, как отмечается в [8], адекватен в случае, когда достигнутое равновесие стабильно. В отличие от классической игры Штакельберга, когда лидер делает первым ход, который становится известен другим агентам, здесь агенты с реакцией по Курно не знают ход лидера, синхронный своему ходу. Более того, они не знают, что у них есть лидер, полагая, что он, как и другие агенты, оставит свой объем выпуска неизменным (например, считая остальных агентов менее «интеллектуальными», чем они сами, либо что оппоненты достигли равновесия и им не выгодно от него отклониться). Полагаем, что агенты, действующие по Курно, не знают, что другие такие же агенты действуют так же.

Также полагаем, что в базовой модели все агенты точно знают собственные затраты и целевую функцию, собственную функцию реакции, включающую параметры спроса  $a$  и  $b$ , а также уже произведенnyй выпуск (достаточно только суммарный) другими агентами. Лидер также знает общее число агентов на рынке. При необходимости, зная формулу (2), агенты могут оценить сложившуюся на рынке цену. Полагаем также, что агенты не располагают достоверной априорной информацией относительно множеств допустимых действий, функций затрат и целевых функций конкурентов, а также об ожидаемых объемах их выпуска.

Формально предположения лидера и остальных агентов в условиях указанных предпосылок можно записать в виде следующих соотношений для предположительных вариаций [1, 2]:

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_1} = -\frac{1}{n}, \quad j \neq 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial q_j}{\partial q_i} = 0, \quad i \neq 1, \quad i \neq j \quad (i, j \in N).$$

Отсюда

$$(3) \quad \frac{\partial Q_{-1}}{\partial q_1} = -\frac{n-1}{n};$$

$$(4) \quad \frac{\partial Q_{-i}}{\partial q_i} = 0, \quad i \neq 1, \quad i \in N.$$

Здесь обозначено

$$(5) \quad Q_{-i} = \sum_{j \neq i} q_j, \quad i, j \in N.$$

Следуя определениям рангов рефлексии в общей модели рефлексивного коллективного поведения [4, 19], можно полагать, что агенты, выбирающие действия по Курно, обладают низким («нулевым») рангом рефлексии. Первый агент обладает более высоким («первым») рангом рефлексии, считая всех остальных нерефлексирующими (агентами с нулевым рангом рефлексии), и в соответствии с этим предсказывает их выбор. Его выбор будет ориентирован на наилучший ответ на ту обстановку, которая, по его мнению, должна сложиться. Предполагается, что все агенты не допускают существование агентов, имеющих такой же или более высокий ранг рефлексии, чем они сами.

### 3. Анализ и постановка проблемы

Традиционный процесс пошаговой рефлексии предполагает, что агенты выбирают оптимальный отклик в соответствии со своей функции реакции.

Оптимальный отклик  $i$ -го агента находится из условия  $\partial \Pi_i / \partial q_i = 0$  с учетом (2):

$$(6) \quad q_i = \frac{h_i - Q_{-i}}{2 + \partial Q_{-i} / \partial q_i} \quad (i \in N),$$

где обозначено

$$(7) \quad h_i = \frac{a - c_i}{b}.$$

Если система условий (3)–(7) имеет решение, то соответствующее ему состояние рынка определяется как равновесие Штакельберга [1].

Тогда из (3), (4), (6) имеем выражения для оптимального отклика (см., например, [7, 12]):

$$(8) \quad q_1 = \frac{n(h_1 - Q_{-1})}{1 + n},$$

$$(9) \quad q_i = \frac{h_i - Q_{-i}}{2}, \quad i \in N \setminus \{1\}.$$

Приведем соответствующий динамический процесс рефлексивного коллективного поведения:

1. Первый агент, используя наблюдаемые выпуски остальных агентов  $q_i^t$  и полагая, что в текущем  $(t+1)$ -м моменте времени они будут действовать по Курно, на основе (8) рассчитывает свой текущий оптимальный выпуск (оптимальный отклик)  $x_1^t$ :

$$(10) \quad x_1^t = \frac{n(h_1 - Q_{-1}^t)}{1 + n}.$$

Каждый из остальных агентов, используя наблюдаемые выпуски конкурентов  $q_i^t$  и полагая, что в текущем  $(t+1)$ -м моменте времени все они, включая первого, выберут те же выпуски, какие выбрали в предыдущем  $t$ -м моменте, на основе (9) рассчитывает свой текущий оптимальный выпуск (оптимальный отклик на действия конкурентов)  $x_i^t$ :

$$(11) \quad x_i^t = \frac{h_i - Q_{-i}^t}{2}, \quad i \in N \setminus \{1\}.$$

Начальный вектор выпусков  $q^0 = (q_1^0, \dots, q_n^0)$  считается заданным. Остальные правила процесса рефлексии определяются условиями базовой модели олигополии 1)–9) в разделе 2.

2. Каждый агент рассчитывает свой выпуск в текущем  $(t+1)$ -м моменте времени по формуле

$$(12) \quad q_i^{t+1} = x_i^t \quad (i \in N; t = 0, 1, 2, \dots).$$

Затем процесс повторяется с п.1.

Определим (10)–(12) как процесс 1. Его можно рассматривать как имитацию автоматов, формально осуществляющих выбор действия.

К достоинствам процесса можно отнести его выраженную целевую направленность, так как агент в каждый момент выбирает наилучший ответ. К основным недостаткам процесса относятся: отсутствие сходимости при  $n \geq 3$  (соответствующее утверждение приведено в разделе 5 и доказано в Приложении), для него не гарантируются текущие неотрицательные выпуски, положительная валовая прибыль агентов, положительная цена товара.

#### 4. Адаптивная динамика в модели олигополии с лидером

Приведем (1) с учетом (2) и (7) к виду  $\Pi_i = b(h_i - Q_{-i} - q_i)q_i - d_i$ . Рациональный агент при ожиданиях  $h_i - Q_{-i} > 0$  выбирает положительный выпуск, который определяется выражениями (8) и (9). При ожиданиях  $h_i - Q_{-i} \leq 0$  положительный выпуск дает отрицательную валовую прибыль (т.е. прибыль без учета постоянных издержек  $d_i$ ), и, чтобы минимизировать потери, агент выбирает нулевой выпуск.

Принимая во внимание эти положения, достоинства и недостатки процесса (10)–(12), рассмотрим следующий динамический процесс рефлексивного коллективного поведения (процесс 2):

1. Агенты рассчитывают текущее положение своей цели так же, как в процессе 1: лидер по формуле (10), агенты с реакцией по Курно по (11).

2. Каждый агент рассчитывает свой выпуск в текущем  $(t+1)$ -м моменте времени, делая шаг от выпуска за предыдущий  $t$ -й момент времени по направлению к текущему оптимальному выпуску  $x_i^t$  по формуле

$$(13) \quad q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i^t - q_i^t), & x_i^t > 0; \\ 0, & x_i^t \leq 0 \end{cases} \quad (i \in N; t = 0, 1, 2, \dots).$$

Здесь:  $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$  — параметры, определяющие величины шагов. В этом процессе в отличие от процесса 1 допускается «неполный» шаг.

Затем процесс повторяется с п. 1.

Достоинства такого процесса: его целевая направленность, поскольку агент в каждый момент выбирает шаг в направлении текущей цели; экономическая содержательность процесса, выраженная в том, что условиями (13) гарантируются неотрицательный текущий выпуск (конкурентоспособность) и неотрицательная текущая валовая прибыль агентов.

В теории коллективного поведения формула (13) без условия на  $x_i^t$  описывает динамику выбора решений, основанную на аксиоме индикаторного поведения [10].

## 5. Основные результаты

Приведем основные, доказанные в Приложении, утверждения для процессов (10)–(12) и (10), (11), (13).

*Утверждение 1. Процесс (10)–(12)*

а) сходится при  $n = 2$ ;

б) сходится при  $n \geq 3$ , если  $x_1 = \frac{y_1}{y_0}$ ,  $y_0 \neq 0$ . Здесь:  $x_1$  — больший корень уравнения  $x^2 - px - g = 0$  при  $p = \frac{2-n}{2}$  и  $g = \frac{n(n-1)}{2(1+n)}$ , а  $y_0$ ,  $y_1$  — начальные значения последовательности  $y_t = q_1^{t+1} - q_1^t$ ;

в) в остальных случаях при  $n \geq 3$  расходится.

*Утверждение 2. Процесс (10), (11), (13), в котором допустимые ответы агентов учитывают сложившиеся текущие условия по их конкурентоспособности и прибыли, сходится к истинному равновесию при  $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$  для агентов с реакцией по Курно и при  $\gamma_1^{t+1} \in \left(0; \frac{1}{n}\right]$  для лидера по Штакельбергу ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ) и любых начальных выпусках  $\{q_i^0, i \in N\}$ .*

В Приложении также формулируются и доказываются леммы, используемые для доказательства утверждений 1 и 2.

Следует также отметить, что некоторые результаты, полученные в Приложении при доказательстве утверждения 2, отчасти повторяют результаты авторов статьи для олигополии Курно [20], но сами доказательства этих результатов имеют специфику, обусловленную различием моделей рынка и процессов рефлексии.

## 6. Заключение

На конкурентных рынках агенты, как правило, не раскрывают друг другу свои истинные возможности и намерения. В представленной в статье теоретико-игровой модели олигополии агенты, не располагая достоверной информацией о выборе действий конкурентами, разыгрывают повторяющуюся игру с лидером по Штакельбергу. В классе линейных функций спроса и из-

держек агентов проведено аналитическое исследование двух моделей рефлексивного принятия решений:

— в первой модели агенты выбирают оптимальные ответы на ожидаемые действия окружения в соответствии со своей функцией реакции. Аналитически доказано, что такой процесс рефлексии сходится при  $n = 2$ , а при  $n \geq 3$  расходится. Ранее этот факт подтверждался численным моделированием;

— во второй модели рефлексивного коллективного поведения допускаются неоптимальные ответы, осуществляемые агентами в направлении их текущих целей. Условия допустимости ответов учитывают не только величину «шага» движения в направлении текущей цели, но и сложившиеся текущие условия по конкурентоспособности и прибыли агентов. Для такого процесса в статье получены аналитические оценки для диапазонов ответов, при которых процесс сходится к равновесию.

Результаты численного моделирования указывают на перспективность аналитических исследований в направлении расширения диапазонов «шагов», гарантирующих сходимость процессов рефлексии. Так, эксперименты показали [21], что, в частности, при  $n = 3$  правая граница диапазона сходимости может быть доведена до  $0,8 \div 0,9$ , при  $n = 4$  — до  $0,6 \div 0,7$ , при  $n = 5$  — до  $0,5 \div 0,6, \dots$ , при  $n = 9$  — до  $0,3 \div 0,4$ . Это превышает почти в 2 раза границы по утверждению 2 и говорит о потенциале к развитию аналитических методов. Также актуален и перспективен поиск аналитических решений для нелинейных моделей рынка.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство утверждения 1.* Из (5), (11) и (12) для агентов, действующих по Курно, имеем

$$(П.1) \quad q_i^{t+1} = \frac{1}{2} (h_i - Q^t + q_i^t).$$

По двум соседним периодам имеем разность

$$q_i^{t+1} - q_i^t = \frac{1}{2} (q_i^t - q_i^{t-1}) - \frac{1}{2} (Q^t - Q^{t-1}).$$

Суммируя по индексу  $i$  ( $i = 2, \dots, n$ ) полученное выражение, приходим к равенству

$$(П.2) \quad Q_{-1}^{t+1} - Q_{-1}^t = -\frac{n-2}{2} (Q_{-1}^t - Q_{-1}^{t-1}) - \frac{n-1}{2} (q_1^t - q_1^{t-1}).$$

Для лидера по Штакельбергу из (10) и (12) получаем

$$(П.3) \quad q_1^{t+1} = \frac{n}{1+n} (h_1 - Q_{-1}^t).$$

Из (П.3) следуют равенства

$$(П.4) \quad Q_{-1}^t - Q_{-1}^{t-1} = -\frac{1+n}{2} (q_1^{t+1} - q_1^t), \quad Q_{-1}^{t+1} - Q_{-1}^t = -\frac{1+n}{2} (q_1^{t+2} - q_1^{t+1}).$$

Подставляя полученные выражения в (П.2), получим

$$(П.5) \quad q_1^{t+2} - q_1^{t+1} = \frac{2-n}{2} (q_1^{t+1} - q_1^t) + \frac{n(n-1)}{2(1+n)} (q_1^t - q_1^{t-1}).$$

Введем обозначения

$$(П.6) \quad p = \frac{2-n}{2},$$

$$(П.7) \quad g = \frac{n(n-1)}{2(1+n)},$$

$$(П.8) \quad y_t = q_1^{t+1} - q_1^t.$$

Тогда (П.5) представляет собой линейную рекуррентную последовательность с постоянными коэффициентами и начальными значениями  $y_0 = q_1^1 - q_1^0$ ,  $y_1 = q_1^2 - q_1^1$ , имеющую вид

$$(П.9) \quad y_{t+2} = py_{t+1} + gy_t \quad (t \geq 0).$$

Известно [22], что для линейной рекуррентной последовательности с постоянными коэффициентами имеет место соотношение

$$(П.10) \quad y_t = s_1(x_1)^t + s_2(x_2)^t.$$

В (П.10) индекс “ $t$ ” обозначает временной период и является показателем степени для корней  $x_1$  и  $x_2$  характеристического уравнения  $x^2 - px - g = 0$ , а значения  $s_1$  и  $s_2$  находятся из решения системы линейных уравнений

$$(П.11) \quad \begin{cases} y_0 = s_1x_1 + s_2x_2, \\ y_1 = s_1(x_1)^2 + s_2(x_2)^2. \end{cases}$$

Далее будут полезны записи этих корней:

$$(П.12) \quad x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + g}, \quad x_2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + g}.$$

*Лемма П.1. Корни  $x_1$  и  $x_2$  характеристического уравнения  $x^2 - px - g = 0$  а) различны, б) действительные, в) не равны нулю, г) имеют разные знаки, д) при  $n = 2$  больший корень  $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , меньший  $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ , е) при  $n \geq 3$  большим по модулю является отрицательный корень и его модуль больше единицы, ж) положительный корень меньше единицы.*

*Доказательство леммы П.1.* Подкоренное выражение  $\frac{(2-n)^2}{16} + \frac{n(n-1)}{2(1+n)}$  в (П.12) положительно, т.е. корни уравнения простые и действительные. Допустим, есть равные нулю корни. Тогда из  $x^2 - px - g = 0$  следует, что  $g = 0$ . Но по (П.7) такое возможно только при  $n = 1$ . Положения а), б) и в) доказаны.

Имеем  $x_1x_2 = -g = -\frac{n(n-1)}{2(1+n)}$ . Поэтому следует г). При  $n = 2$  имеем  $x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ , если  $n = 3$ , то  $x = \left(\frac{\sqrt{11}-1}{4}, -\frac{\sqrt{11}-1}{4}\right)$ . При  $n \geq 4$  будет  $x_1x_2 < -1$ . Поэтому справедливы положения д) и е). Докажем ж). По (П.12)  $x_1 = \frac{2-n}{4} + \sqrt{\frac{(2-n)^2}{16} + \frac{n(n-1)}{2(1+n)}}$ . Имеем  $x_1 < 1$ , так как  $\sqrt{\frac{(2-n)^2}{16} + \frac{n(n-1)}{2(1+n)}} < 1 - \frac{2-n}{4}$  или  $\frac{n(n-1)}{2(1+n)} < 1 - \frac{2-n}{2} = \frac{n}{2}$ .

Лемма П.1 доказана.

*Лемма П.2.* Если больший простой корень  $x_1$  характеристического уравнения последовательности  $y_{t+2} = py_{t+1} + gy_t$  равен  $\frac{y_1}{y_0}$  ( $y_0 \neq 0$ ), то последовательность сходится к нулю.

*Доказательство леммы П.2.* Пусть  $x_1 = \frac{y_1}{y_0}$  ( $y_0 \neq 0$ ). По лемме 1  $x_1 \neq 0$ . Из системы уравнений (П.11) имеем  $s_2x_2(x_1 - x_2) = 0$ . Поскольку корни различны и  $x_2 \neq 0$ , то  $s_2 = 0$ . Тогда по (П.10) будет  $y_t = s_1(x_1)^t$ . По лемме П.1  $x_1 < 1$ , поэтому  $\{y_t\}$  сходится к нулю.

Лемма П.2 доказана.

Ниже верхним индексом “ $(s)$ ” обозначим показатели в статическом равновесии Штакельберга для базовой модели (1), (2).

*Лемма П.3.* Если  $y_t = q_1^{t+1} - q_1^t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то а)  $q_1^t \rightarrow q_1^{(s)}$ , б)  $q_i^t \rightarrow q_i^{(s)}$   $\forall i \in N \setminus \{1\}$ .

*Доказательство леммы П.3.* По (П.4) следует  $Q_{-1}^t - Q_{-1}^{t-1} \rightarrow 0$ . Покажем, что  $q_1^t \rightarrow q_1^{(s)}$ . Преобразуем (П.1) к виду  $q_i^{t+1} - q_i^t = \frac{1}{2}(h_i - Q^t - q_i^t)$ . Суммируя это выражение по  $i$  ( $i = 2, \dots, n$ ), получим

$$\begin{aligned} Q_{-1}^{t+1} - Q_{-1}^t &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=2}^n h_i - nQ^t + q_1^t \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( nh_1 - nQ^t - q_1^t + \sum_{i=2}^n h_i - nh_1 + 2q_1^t \right). \end{aligned}$$

По (П.3)  $q_1^{t+1} - q_1^t = \frac{1}{n+1}(nh_1 - nQ^t - q_1^t)$ . Поэтому  $nh_1 - nQ^t - q_1^t \rightarrow 0$  и  $q_1^t \rightarrow \frac{1}{2} \left( nh_1 - \sum_{i=2}^n h_i \right) = q_1^{(s)}$ . Итак,  $q_1^t \rightarrow q_1^{(s)}$  и  $Q^t \rightarrow h_1 - \frac{q_1^{(s)}}{n} = Q^{(s)}$ . Часть а) доказана.

Из (П.1) и  $Q^t \rightarrow Q^{(s)}$  следует, что  $q_i^{t+1} - \frac{1}{2}q_i^t = \frac{1}{2}(h_i - Q^t)$  и  $q_i^{t+1} - \frac{1}{2}q_i^t \rightarrow \frac{1}{2}(h_i - Q^{(s)})$ . Поэтому сходятся последовательности  $\left\{ \frac{1}{2}q_i^t - \frac{1}{4}q_i^{t-1} \right\}$ , а также  $\left\{ q_i^{t+1} - \frac{1}{4}q_i^{t-1} \right\}$  как суммы сходящихся последовательностей. По той же причине сходятся  $\left\{ \frac{1}{4}q_i^{t-1} - \frac{1}{8}q_i^{t-2} \right\}$  и  $\left\{ q_i^{t+1} - \frac{1}{8}q_i^{t-2} \right\}$  и т.д. Приходим к тому, что сходятся  $\left\{ q_i^{t+1} - \frac{1}{2^{t+1}}q_i^0 \right\}$  и  $\left\{ q_i^{t+1} \right\}$ . Тогда из (П.1) следует, что  $q_i^t \rightarrow q_i^{(s)} = h_i - Q^{(s)}$  ( $i \in N \setminus \{1\}$ ).

Лемма П.3 доказана.

Теперь вернемся непосредственно к доказательству утверждения 1.

При  $n = 2$  из (П.10) и положения д) леммы П.1 следует  $y_t = q_1^{t+1} - q_1^t \rightarrow 0$ . Тогда по лемме П.3  $q_1^t \rightarrow q_1^{(s)}$  и  $q_2^t \rightarrow q_2^{(s)}$ . При  $n \geq 3$  и  $x_1 = \frac{y_1}{y_0}$ ,  $y_0 \neq 0$  по лемме П.2  $y_t = q_1^{t+1} - q_1^t \rightarrow 0$ , и по лемме П.3  $q_i^t \rightarrow q_i^{(s)} \forall i \in N$ . Части а) и б) утверждения доказаны.

При  $n \geq 3$  и  $x_1 \neq \frac{y_1}{y_0}$  в (П.10)  $s_2 \neq 0$ . По лемме П.1  $0 < x_1 < 1$  и  $x_2 < -1$ . Поэтому  $y_t = q_1^{t+1} - q_1^t$  не сходится к нулю.

Утверждение 1 доказано.

*Примечание.* Если  $y_0 = 0$  и  $s_2 = 0$ , то из системы уравнений (П.11) имеем  $s_1 = 0$  и  $y_t \equiv 0$ . Процесс будет «стоять на месте» и сходить не может.

*Доказательство утверждения 2.* Введем функции-индикаторы [11], характеризующие отклонения текущих выпусков от текущих оптимумов,  $\alpha_i^t = 2(x_i^t - q_i^t)$  для агентов с реакцией по Курно и  $\alpha_1^t = \frac{1+n}{n}(x_1^t - q_1^t)$  для лидера. Коэффициенты «2» и  $\frac{1+n}{n}$  введены для последующих удобств. Используя (7) и что по (10), (11)  $h_i = Q^{(s)} + q_i^{(s)}$  ( $i \in N \setminus \{1\}$ ) и  $h_1 = Q^{(s)} + \frac{q_1^{(s)}}{n}$ , имеем

$$(П.13) \quad \alpha_i^t = Q^{(s)} + q_i^{(s)} - Q^t - q_i^t, \quad i \in N \setminus \{1\},$$

$$(П.14) \quad \alpha_1^t = Q^{(s)} + \frac{1}{n}q_1^{(s)} - Q^t - \frac{1}{n}q_1^t.$$

Решением однородной системы уравнений (П.13), (П.14) является равновесный выпуск  $q_i^t = q_i^{(s)}$  ( $i \in N$ ). Будет показано, что наряду с функциями-индикаторами важную роль в исследовании и доказательстве сходимости процесса (10), (11), (13) играет выражение  $\max_{i,j \in N} \{\alpha_i^t - \alpha_j^t\}$ .

Введем обозначения:  $N_1^t = \{i | x_i^t > 0, i \in N\}$ ,  $N_2^t = \{i | x_i^t \leq 0, i \in N\}$ . Тогда  $N_1^t \cap N_2^t = \emptyset$  и  $N_1^t \cup N_2^t = N$ .

С учетом введенных обозначений, а также (7), (10), (11), (П.13) и (П.14) запишем (14) как

$$(П.15) \quad q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\alpha_i^t, & i \in N_1^t \setminus \{1\}, \quad \gamma_i^{t+1} \in [0; 1], \\ 0, & i \in N_2^t \setminus \{1\}; \end{cases}$$

$$(П.16) \quad q_1^{t+1} = \begin{cases} q_1^t + \frac{\gamma_1^{t+1}n}{1+n}\alpha_1^t, & 1 \in N_1^t, \quad \gamma_1^{t+1} \in [0; 1], \\ 0, & 1 \in N_2^t. \end{cases}$$

Для последующих преобразований удобно переопределить параметры  $\gamma$  следующим образом:  $\lambda_i^{t+1} = \gamma_i^{t+1}$ ,  $i \in N \setminus \{1\}$ ;  $\lambda_1^{t+1} = \frac{\gamma_1^{t+1}2n}{1+n}$  ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ).

Тогда:

$$\begin{aligned}
 & (II.17) \quad Q^{t+1} = Q^t + \sum_{j \in N_1^t} \frac{\lambda_j^{t+1}}{2} \alpha_j^t - \sum_{j \in N_2^t} q_j^t; \\
 & \quad Q^{(s)} + q_i^{(s)} - Q^{t+1} - q_i^{t+1} = \\
 & \quad = Q^{(s)} + q_i^{(s)} - Q^t - q_i^t - \frac{\lambda_i^{t+1}}{2} \alpha_i^t - Q^{t+1} + Q^t, \quad i \in N_1^t \setminus \{1\}; \\
 & Q^{(s)} + \frac{1}{n} q_1^{(s)} - Q^{t+1} - \frac{1}{n} q_1^{t+1} = Q^{(s)} + \frac{1}{n} q_1^{(s)} - Q^t - \frac{1}{n} q_1^t - \frac{1}{n} \frac{\lambda_1^{t+1}}{2} \alpha_1^t - Q^{t+1} + Q^t; \\
 & (II.18) \quad \alpha_i^{t+1} = \left(1 - \frac{\lambda_i^{t+1}}{2}\right) \alpha_i^t - Q^{t+1} + Q^t = \\
 & = \left(1 - \frac{\lambda_i^{t+1}}{2}\right) \alpha_i^t - \sum_{j \in N_1^t} \frac{\lambda_j^{t+1}}{2} \alpha_j^t + \sum_{j \in N_2^t} q_j^t, \quad i \in N_1^t \setminus \{1\}; \\
 & (II.19) \quad \alpha_1^{t+1} = \left(1 - \frac{\lambda_1^{t+1}}{2n}\right) \alpha_1^t - Q^{t+1} + Q^t = \\
 & = \left(1 - \frac{\lambda_1^{t+1}}{2n}\right) \alpha_1^t - \sum_{j \in N_1^t} \frac{\lambda_j^{t+1}}{2} \alpha_j^t + \sum_{j \in N_2^t} q_j^t, \quad 1 \in N_1^t; \\
 & Q^{(s)} + q_i^{(s)} - Q^{t+1} - q_i^{t+1} = Q^{(s)} + q_i^{(s)} - Q^t - q_i^t + q_i^t - Q^{t+1} + Q^t, \quad i \in N_2^t \setminus \{1\}; \\
 & Q^{(s)} + \frac{1}{n} q_1^{(s)} - Q^{t+1} - \frac{1}{n} q_1^{t+1} = Q^{(s)} + \frac{1}{n} q_1^{(s)} - Q^t - \frac{1}{n} q_1^t + \frac{1}{n} q_1^t - Q^{t+1} + Q^t; \\
 & (II.20) \quad \alpha_i^{t+1} = \alpha_i^t + q_i^t - Q^{t+1} + Q^t = \alpha_i^t + q_i^t - \sum_{j \in N_1^t} \frac{\lambda_j^{t+1}}{2} \alpha_j^t + \sum_{j \in N_2^t} q_j^t, \quad i \in N_2^t \setminus \{1\}; \\
 & (II.21) \quad \alpha_1^{t+1} = \alpha_1^t + \frac{1}{n} q_1^t - Q^{t+1} + Q^t = \alpha_1^t + \frac{1}{n} q_1^t - \sum_{j \in N_1^t} \frac{\lambda_j^{t+1}}{2} \alpha_j^t + \sum_{j \in N_2^t} q_j^t, \quad 1 \in N_2^t.
 \end{aligned}$$

*Лемма II.4.* Если для процесса (10), (11), (13) в последовательности  $\{\alpha_i^t, i \in N\}$  есть не только положительные члены, то

$$\max_{i,j \in N} \left\{ \alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1} \right\} < \max_{i,j \in N} \left\{ \alpha_i^t - \alpha_j^t \right\}.$$

*Доказательство леммы II.4.* Возможны 4 случая для агентов  $i$  и  $j$ , на которых достигается  $\max_{i,j \in N} \left\{ \alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1} \right\}$ : 1)  $i, j \in N_1^t$ ; 2)  $i \in N_1^t, j \in N_2^t$ ; 3)  $i \in N_2^t, j \in N_1^t$ ; 4)  $i, j \in N_2^t$ .

Рассмотрим первый случай. Пусть  $i, j \in N_1^t$ . Для определенности положим, что  $i, j \in N_1^t \setminus \{1\}$ . Когда  $i \in N_1^t \setminus \{1\}, j = 1$  или  $i = 1, j \in N_1^t \setminus \{1\}$ , доказательства аналогичны. Обозначим:  $\alpha_{M_1^{t+1}}^{t+1} = \max_i \{\alpha_i^{t+1}, i \in N_1^t\}$  и

$\alpha_{m_1^{t+1}}^{t+1} = \min_i \{\alpha_i^{t+1}, i \in N_1^t\}$ . По (П.18)

$$\alpha_{M_1^{t+1}}^{t+1} - \alpha_{m_1^{t+1}}^{t+1} = \left(1 - \frac{\lambda_{M_1^{t+1}}^{t+1}}{2}\right) \alpha_{M_1^{t+1}}^t - \left(1 - \frac{\lambda_{m_1^{t+1}}^{t+1}}{2}\right) \alpha_{m_1^{t+1}}^t.$$

Но  $\alpha_{M_1^{t+1}}^t \leq \alpha_{M^t}^t > 0$  и  $\alpha_{m_1^{t+1}}^t \geq \alpha_{m^t}^t \leq 0$ . Поэтому

$$\max_{i,j \in N_1^t} \{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\} < \alpha_{M_1^{t+1}}^t - \alpha_{m^t}^t < \alpha_{M^t}^t - \alpha_{m^t}^t = \max_{i,j \in N} \{\alpha_i^t - \alpha_j^t\}.$$

Рассмотрим второй случай, когда  $i \in N_1^t, j \in N_2^t$ . Пусть для определенности  $i \in N_1^t \setminus \{1\}, j = 1$ . Когда  $i = 1, j \in N_2^t \setminus \{1\}$  или  $i \in N_1^t \setminus \{1\}, j \in N_2^t \setminus \{1\}$ , доказательства аналогичны. По (П.18) и (П.21) имеем, что

$$\alpha_{M_1^{t+1}}^{t+1} - \alpha_{m_2^{t+1}}^{t+1} = \left(1 - \frac{\lambda_{M_1^{t+1}}^{t+1}}{2}\right) \alpha_{M_1^{t+1}}^t - \left(\alpha_{m_2^{t+1}}^t + \frac{1}{n} q_{m_2^{t+1}}^t\right).$$

Здесь  $\alpha_{m_2^{t+1}}^{t+1} = \min_i \{\alpha_i^{t+1}, i \in N_2^t\}$ ,  $m_2^{t+1} = 1$  и  $\alpha_{M_1^{t+1}}^t \leq \alpha_{M^t}^t > 0$ . Тогда

$$\max_{i \in N_1^t, j \in N_2^t} \{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\} < \alpha_{M^t}^t - \alpha_{m_2^{t+1}}^t \leq \alpha_{M^t}^t - \alpha_{m^t}^t = \max_{i,j \in N} \{\alpha_i^t - \alpha_j^t\}.$$

Рассмотрим случай  $i \in N_2^t, j \in N_1^t$ . Пусть для определенности  $i = 1, j \in N_1^t \setminus \{1\}$ . Когда  $i \in N_2^t \setminus \{1\}, j = 1$  или  $i \in N_2^t \setminus \{1\}, j \in N_1^t \setminus \{1\}$ , доказательства аналогичны. Тогда  $M_2^{t+1} = 1$ . Ввиду (10) и  $x_1^t \leq 0$ , (П.14) и  $h_1 = Q^{(s)} + \frac{q_1^{(s)}}{n}$  имеем  $\alpha_1^t + \frac{1}{n} q_1^t = h_1 - Q_{-1}^t - q_1^t < 0 < \alpha_{M^t}^t$ . Тогда по (П.21) и (П.18) получим

$$\begin{aligned} \alpha_{M_2^{t+1}}^{t+1} - \alpha_{m_1^{t+1}}^{t+1} &= \left(\alpha_{M_2^{t+1}}^t + \frac{1}{n} q_{M_2^{t+1}}^t\right) - \left(1 - \frac{\lambda_{m_1^{t+1}}^{t+1}}{2}\right) \alpha_{m_1^{t+1}}^t < \\ &< \alpha_{M^t}^t - \left(1 - \frac{\lambda_{m_1^{t+1}}^{t+1}}{2}\right) \alpha_{m^t}^t < \alpha_{M^t}^t - \alpha_{m^t}^t = \max_{i,j \in N} \{\alpha_i^t - \alpha_j^t\}. \end{aligned}$$

Пусть теперь  $i, j \in N_2^t$ . Возьмем для определенности  $i = 1, j \in N_2^t \setminus \{1\}$ . Когда  $i \in N_2^t \setminus \{1\}, j = 1$  или  $i \in N_2^t \setminus \{1\}, j \in N_2^t \setminus \{1\}$ , доказательства аналогичны. По (П.20) и (П.21)  $\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1} = (\alpha_i^t + \frac{1}{n} q_i^t) - (\alpha_j^t + q_j^t)$ . Имеем  $\max_{i,j \in N_2^t} \{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\} < \max_{i \in N_1^t, j \in N_2^t} \{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\}$ , так как  $i = M_2^{t+1} = 1$  и  $\alpha_1^t + \frac{1}{n} q_1^t < \alpha_{M^t}^t$ . Обобщая все случаи, получаем

$$\begin{aligned} \max_{i,j \in N} \{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\} &= \max \left\{ \max_{i,j \in N_1^t} \{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\}, \max_{i \in N_1^t, j \in N_2^t} \{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\}, \right. \\ &\quad \left. \max_{i \in N_2^t, j \in N_1^t} \{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\}, \max_{i,j \in N_2^t} \{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\} \right\} < \max_{i,j \in N} \{\alpha_i^t - \alpha_j^t\}. \end{aligned}$$

Лемма П.4 доказана.

**Лемма П.5.** Пусть для процесса (10), (11), (13)  $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$  для агентов с реакцией по Курно и  $\gamma_1^{t+1} \in \left(0; \frac{1}{n}\right]$  для лидера по Штакельбергу. Тогда а) если в последовательности  $\{\alpha_i^t, i \in N\}$  есть положительные члены, то в последовательности  $\{\alpha_i^{t+1}, i \in N\}$  также будут положительные члены, б) если в последовательности  $\{\alpha_i^t, i \in N\}$  есть отрицательные или нулевые члены и  $N_1^t = N$ , то в  $\{\alpha_i^{t+1}, i \in N\}$  будут отрицательные члены.

**Доказательство леммы П.5.** Докажем часть а). Имеем  $\alpha_{M^t}^t > 0$  и  $M^t \in N_1^t$ . По (П.18) и (П.19)

$$\alpha_{M^t}^{t+1} > \left(1 - \frac{\lambda_{M^t}^{t+1}}{2}\right) \alpha_{M^t}^t - \alpha_{M^t}^t \sum_{j \in N_1^t} \frac{\lambda_j^{t+1}}{2} = \alpha_{M^t}^t \left(1 - \frac{\lambda_{M^t}^{t+1}}{2} - \sum_{j \in N_1^t} \frac{\lambda_j^{t+1}}{2}\right),$$

если  $M^t \in N_1^t \setminus \{1\}$ , или

$$\alpha_{M^t}^{t+1} > \left(1 - \frac{\lambda_{M^t}^{t+1}}{2n}\right) \alpha_{M^t}^t - \alpha_{M^t}^t \sum_{j \in N_1^t} \frac{\lambda_j^{t+1}}{2} = \alpha_{M^t}^t \left(1 - \frac{\lambda_{M^t}^{t+1}}{2n} - \sum_{j \in N_1^t} \frac{\lambda_j^{t+1}}{2}\right),$$

если  $M^t = 1 \in N_1^t$ . Если  $1 - \frac{\lambda_{M^t}^{t+1}}{2} - \sum_{j \in N_1^t} \frac{\lambda_j^{t+1}}{2} > 0$ , что имеет место с учетом введенного ранее переопределения параметров, то  $\alpha_{M^t}^{t+1} > 0$  при  $\lambda_i^{t+1} = \gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$  ( $i \in N \setminus \{1\}$ ) и  $\lambda_1^{t+1} = \frac{\gamma_1^{t+1} 2n}{1+n} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$ .

Часть б) леммы доказывается аналогичным образом на основе формул (П.18) и (П.19).

Лемма П.5 доказана.

**Лемма П.6.** Для процесса (10), (11), (13) справедливы неравенства: а)  $Q^{(s)} - Q^t > Q^{(s)} - Q^{t+1} > 0$ , если  $\alpha_i^t, \alpha_i^{t+1} \geq 0$  ( $\forall i \in N$ ) и есть отличные от нуля  $\alpha_i^t$  и  $\alpha_i^{t+1}$ ; б)  $Q^t - Q^{(s)} > Q^{t+1} - Q^{(s)} > 0$ , если  $\alpha_i^t, \alpha_i^{t+1} \leq 0$  ( $\forall i \in N$ ) и есть отличные от нуля  $\alpha_i^t$  и  $\alpha_i^{t+1}$ .

**Доказательство леммы П.6.** По (П.17)  $Q^{(s)} - Q^{t+1} = Q^{(s)} - Q^t - \sum_{j \in N_1^t} \frac{\lambda_j^{t+1}}{2} \alpha_j^t + \sum_{j \in N_2^t} q_j^t$ . При условиях на  $\alpha_i^t$  в части а) леммы  $N_2^t$  будет пусто и  $Q^{(s)} - Q^t > Q^{(s)} - Q^{t+1}$ . Если также  $\alpha_i^{t+1} \geq 0$  и не все равны нулю, то с учетом (П.13), (П.14)  $\sum_{i \in N \setminus \{1\}} \alpha_i^{t+1} + n\alpha_1^{t+1} = 2n(Q^{(s)} - Q^{t+1}) > 0$  и поэтому  $Q^{(s)} - Q^t > Q^{(s)} - Q^{t+1} > 0$ . Часть б) леммы доказывается аналогичным образом.

Лемма П.6 доказана.

В следующей лемме доказываются результаты относительно смены знаков в  $\{\alpha_i^t, i \in N\}$  при переходе из  $t$ -го в  $(t+1)$ -й момент времени.

**Лемма П.7.** Если в процессе (10), (11), (13) а) некоторый отрицательный член последовательности  $\{\alpha_i^t, i \in N\}$  в  $\{\alpha_i^{t+1}, i \in N\}$  станет положительным, то все положительные члены  $\{\alpha_i^t, i \in N\}$  сохранят свои знаки в  $\{\alpha_i^{t+1}, i \in N\}$ ; б) некоторый положительный член последовательности  $\{\alpha_i^t, i \in N\}$  в  $\{\alpha_i^{t+1}, i \in N\}$  станет отрицательным, то все отрицательные члены  $\{\alpha_i^t, i \in N\}$  сохранят свои знаки в  $\{\alpha_i^{t+1}, i \in N\}$ .

**Доказательство леммы П.7.** Докажем часть а). Пусть  $k$  — индекс отрицательного члена, переходящего в положительный, и  $k \in N_1^t$ . Тогда по (П.18) и (П.19) знаки положительных  $\alpha_i^t$  не изменятся. Пусть  $k \in N_2^t$ . Учитывая, что  $2x_k^t = \alpha_k^t + 2q_k^t \leq 0$  ( $k \neq 1$ ) или  $\frac{1+n}{n}x_1^t = \alpha_1^t + \frac{1+n}{n}q_1^t \leq 0$  ( $k = 1$ ), по (П.20) и (П.21) знаки положительных  $\alpha_i^t$  ( $i \in N_2^t$ ), а по (П.18) и (П.19) знаки положительных  $\alpha_i^t$  ( $i \in N_1^t$ ) не изменятся. Часть а) доказана. Часть б) доказывается аналогичным образом.

Лемма П.7 доказана.

После доказательства вспомогательных лемм вернемся непосредственно к доказательству утверждения 2.

Вначале обратим внимание на последовательности только с отрицательными и нулевыми членами. Такая последовательность может в очередной момент времени перейти в последовательности: 1) имеющие положительные члены, 2) не имеющие положительных членов.

Если имеет место первый случай, то последовательность только с отрицательными и нулевыми членами далее не встретится, так как согласно лемме П.5 последовательность с хотя бы одним положительным членом не может при  $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$  ( $i \in N \setminus \{1\}$ ) и  $\gamma_1^{t+1} \in (0; \frac{1}{n}]$  перейти в последовательность только с отрицательными и нулевыми членами. Поэтому во всех последующих последовательностях будут положительные члены.

Если реализуется второй случай, то согласно лемме П.6 будет  $0 < Q^{t+1} - Q^{(s)} < Q^t - Q^{(s)}$ . Опять возможно, что в  $(t+2)$ -й момент времени окажутся только отрицательные и нулевые члены. Таким образом, последовательности только с отрицательными и нулевыми членами могут быть либо в начальной стадии процесса, либо на протяжении всего процесса. Последнее рассмотрим подробнее. Последовательное применение леммы П.6 дает цепочку неравенств  $Q^0 - Q^{(s)} > Q^1 - Q^{(s)} > \dots > Q^t - Q^{(s)} > Q^{t+1} - Q^{(s)} > \dots > 0$  ( $t > 1$ ), из которой следует  $Q^t \rightarrow Q^{(s)}$  и  $\sum_{i \in N \setminus \{1\}} \alpha_i^t + n\alpha_1^t = 2n(Q^{(s)} - Q^t) \rightarrow 0$ . Поэтому  $\alpha_i^t \rightarrow 0$ , а по (П.13) и (П.14)  $q_i^t \rightarrow q_i^{(s)}$  ( $i \in N$ ). Процесс сходится.

Пусть теперь  $\alpha_i^t > 0$  ( $\forall i \in N$ ). Поскольку  $\alpha_i^t = 2(x_i^t - q_i^t)$ , то  $x_i^t > 0 \forall (i \in N)$  и все агенты рассчитывают свой текущий выпуск по формуле (13). Тогда из леммы П.6 следует неравенство  $Q^{(s)} - Q^{t+1} < Q^{(s)} - Q^t$ . Если и в последующие моменты знаки всех членов останутся положительными, то из цепочки неравенств  $Q^{(s)} - Q^t > Q^{(s)} - Q^{t+1} > \dots > Q^{(s)} - Q^{t+k} > Q^{(s)} - Q^{t+k+1} > \dots > 0$  ( $k > 1$ ) следует последовательное приближение суммарного объема выпуска к равновесному, т.е.  $Q^t \rightarrow Q^{(s)}$ . Тогда  $\alpha_i^t \rightarrow 0$  и  $q_i^t \rightarrow q_i^{(s)}$  ( $i \in N$ ).

Пусть в  $\{\alpha_i^t, i \in N\}$  есть не только положительные члены. По лемме П.4 процесс сделает последовательное приближение к равновесию, так

как  $\max_{i,j \in N} \{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\} < \max_{i,j \in N} \{\alpha_i^t - \alpha_j^t\}$ . По лемме П.5 в  $\{\alpha_i^{t+1}, i \in N\}$  будут положительные члены. Если в ней есть также отрицательные или нулевые члены, то процесс сделает следующее приближение к равновесию  $\max_{i,j \in N} \{\alpha_i^{t+2} - \alpha_j^{t+2}\} < \max_{i,j \in N} \{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\}$ . Если подобная ситуация повторяется на протяжении всего процесса, то имеем  $\max_{i,j \in N} \{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\} < \max_{i,j \in N} \{\alpha_i^t - \alpha_j^t\} < \max_{i,j \in N} \{\alpha_i^{t-1} - \alpha_j^{t-1}\} < \dots < \max_{i,j \in N} \{\alpha_i^0 - \alpha_j^0\}$ . Таким образом,  $\max_{i,j \in N} \{\alpha_i^t - \alpha_j^t\} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Поскольку знаки  $\alpha_{m_t}^t$  и  $\alpha_{M_t}^t$  не совпадают, то  $\forall i \in N \alpha_i^t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и  $Q^t \rightarrow Q^{(s)}$ ,  $q_i^t \rightarrow q_i^{(s)}$ . Процесс сходится. В дополнение отметим ряд полезных результатов, связанных со сменой или сохранением знаков членов последовательностей  $\{\alpha_i^t, i \in N\}$ , которые приведены в лемме П.7.

Таким образом, показана сходимость процесса (10), (11), (13) при любых начальных выпусках агентов  $\{q_i^0, i \in N\}$ .

Утверждение 2 доказано.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stackelberg H.* Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Basin, Urch&Hill. Springer, 2011. (Original 1934.)
2. *Cournot A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838.)
3. *Nash J.* Non-Cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
4. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. Leiden: CRC Press, 2014.
5. *Berger U., de Silva H., Ferner-Rohling G.* Cognitive Hierarchies in the Minimizer Game // J. Econom. Behavior Organizat. 2016. V. 130. P. 337–348.
6. *Айзенберг Н.И., Зоркальцев В.И., Мокрый И.В.* Исследование нестационарных олигопольных рынков // Сиб. журн. индустр. мат. 2017. Т. 20. № 1. С. 11–20.
7. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Коллективное поведение в модели Штакельберга в условиях неполной информации // АиТ. 2017. № 9. С 91–105.
8. *Algazin G.I., Algazina D.G.* Collective Behavior in the Stackelberg Model under Incomplete Information // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1619–1630.
9. *Гераськин М.И., Чхартишвили А.Г.* Анализ игровых моделей рынка олигополии при ограничениях по мощности и конкурентоспособности агентов // АиТ. 2017. № 11. С. 105–121.
- Geras'kin M.I., Chkhartishvili A.G.* Analysis of Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market under Constrains on the Capacity and Competitiveness of Agents // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 11. P. 2025–2038.
9. *Гераськин М.И.* Моделирование рефлексии в нелинейной модели трехагентной олигополии Штакельберга для телекоммуникационного рынка России // АиТ. 2018. № 5. С. 83–106.

- Geras'kin M.I. Modeling Reflection in the Non-Linear Model of the Stackelberg Three-Agent Oligopoly for the Russian Telecommunication Market // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 5. P. 841–859.*
10. *Онойцев В.И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.
  11. *Малишевский А.В.* Качественные модели в теории сложных систем. М.: Наука, 1998.
  12. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Информационное равновесие в модели динамики коллективного поведения на конкурентном рынке // Управление большими системами. 2016. № 64. С. 112–136.
  13. *Васин А.А., Васина П.А., Рулева П.Ю.* Об организации рынков однородных товаров // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 98–112.
  14. *Корепанов В.О., Новиков Д.А.* Метод рефлексивных разбиений в моделях группового поведения и управления // Проблемы управления. 2011. № 1. С. 21–32.
  15. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Модели рефлексивных игр в задачах управления эколого-экономическими системами // Управление большими системами. 2015. № 55. С. 362–372.
  16. *Булавский В.А., Калашников В.В.* Метод однопараметрической прогонки для исследования состояния равновесия // Экономика и мат. методы. 1994. Т. 30. № 4. С. 129–138.
  17. *Sherali H., Soyster A., Murphy F.* Stackelberg-Nash-Cournot Equilibria: Characterizations and Computations // Oper. Res. 1983. V. 31(2). P. 253–276.
  18. *Harker P., Choi S.-C.* A Penalty Function Approach for Mathematical Programs with Variational Inequality Constraints // Inform. Decision Technolog. 1991. V. 17. P. 41–50.
  19. *Новиков Д.А.* Модели стратегической рефлексии // АиТ. 2012. № 1. С. 3–18.  
*Novikov D.A. Models of Strategic Behavior // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 1. P. 1–19.*
  20. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // АиТ. 2020. № 2. С. 115–133.  
*Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // Autom. Remote Control. 2020. No. 81(2). P. 345–359.*
  21. *Алгазин Г.И., Коптевич Е.В.* Возвратные последовательности в исследовании конкурентных рынков // МАК-2019 «Математики – Алтайскому краю»: сб. тр. Всероссийской конф. по математике с междунар. участием. Барнаул, 2019. С. 119–123.
  22. *Маркушевич А.А.* Возвратные последовательности. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1950.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.*

Поступила в редакцию 14.08.2019

После доработки 18.01.2020

Принята к публикации 30.01.2020

© 2020 г. А.А. АШИМОВ, д-р. техн. наук (ashimov37@mail.ru),  
Ю.В. БОРОВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук (yuborovskiy@gmail.com),  
М.А. ОНАЛБЕКОВ (mukhon@list.ru)  
(Казахский национальный исследовательский технический  
университет им. К.И. Сатпаева, Алматы)

## **МОДЕЛЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ РЕАЛИЗАЦИИ НАЦИОНАЛЬНОГО ПРОЕКТА «ЗДРАВООХРАНЕНИЕ»**

Сформулированы задачи сценарного анализа и оптимизации условий реализации национального проекта с использованием подходов теории параметрического регулирования. Для решения поставленных задач предложена глобальная динамическая многосторонняя вычислимая модель общего равновесия. Предложенные подходы к решению задач сценарного анализа и оптимизации проиллюстрированы на примере национального проекта РФ «Здравоохранение» и входящих в него федеральных проектов.

*Ключевые слова:* национальный проект, сценарный анализ, теория параметрического регулирования, вычислимая модель общего равновесия.

**DOI:** 10.31857/S0005231020070089

### **1. Введение**

Проведение государством своей макроэкономической политики не ограничивается заданием и реализацией значений ее инструментов. Разработка и реализация крупных социально-экономических проектов, связанных с развитием отдельных отраслей национальной экономики (сопровождаемое соответствующим бюджетным финансированием), также несомненно влияет на изменение макроэкономических и отраслевых показателей страны. Примерами таких социально-экономических проектов являются 13 национальных проектов России [1, 2], реализация которых осуществляется в 2019–2024 гг.

Актуальными задачами, связанными с проведением государственной макроэкономической политики, включающей реализацию социально-экономического проекта, являются:

- прогнозирование значений макроэкономических и отраслевых показателей при различных сценариях финансирования рассматриваемого проекта и
- определение оптимальных условий реализации рассматриваемого проекта, например распределения по годам выделенных на проект финансов, в смысле определенного макроэкономического критерия при соответствующих ограничениях.

В известной литературе для подробной оценки возможных последствий для экономики страны и ее отраслей от реализации различных вариантов макроэкономической политики используются вычислимые модели общего

равновесия (CGE модели) [3, 4]. Однако следует отметить, что в этих и других источниках [5–7] до сих пор не встречалась указанная выше задача об оптимальном распределении бюджетных средств, выделенных на рассматриваемый проект.

Для решения сформулированных в настоящей работе задач предложена разработанная авторами на базе статической модели Globe1 [8] динамическая многосторонняя глобальная CGE модель (далее – Модель) [9].

В работе на базе Модели формулируется и решается задача параметрического регулирования, позволяющая оценить оптимальные значения: ежегодных бюджетных сумм, направляемых на реализацию федеральных проектов (в рамках суммарных бюджетов таких проектов), включенных в национальный проект РФ «Здравоохранение», и эффективных ставок налогов на использование факторов соответствующей отраслью (социальные сборы; налоги на имущество; налоги, сборы и платежи за пользование природными ресурсами и др.).

## 2. Задачи моделирования реализации национальных проектов

Анализ условий реализации национальных проектов России (состоящих из соответствующих наборов федеральных проектов) позволяет конкретизировать указанные в предыдущем разделе две актуальные задачи в виде следующих двух классов задач оценки и повышения макроэкономической эффективности от реализации конкретного национального проекта:

— оценка изменений значений определенных макро- и отраслевых показателей в результате выполнения соответствующего набора федеральных проектов при заданных сценариях годовых финансирований этих проектов (по сравнению с вариантом без реализации данного национального проекта);

— определение оптимальных значений: ежегодных сумм, направляемых на реализацию федеральных проектов, включенных в данный национальный проект (в рамках суммарных бюджетов такого проекта), и эффективных налоговых ставок (при соответствующих ограничениях), дающих максимум выбранного критерия, характеризующего направления макроэкономического и/или отраслевого развития.

Настоящая работа посвящена решению на базе Модели задач из указанных классов на примере федеральных проектов, входящих в национальный проект «Здравоохранение» [10]. Перечислим все такие федеральные проекты и общие бюджетные суммы, выделенные на их реализацию в течение 2019–2024 гг.

1. Развитие системы оказания первичной медико-санитарной помощи — 62,5 млрд руб.
2. Борьба с сердечно-сосудистыми заболеваниями — 75,2 млрд руб.
3. Борьба с онкологическими заболеваниями — 969 млрд руб.
4. Развитие детского здравоохранения, включая создание современной инфраструктуры оказания медицинской помощи детям — 211,2 млрд руб.
5. Обеспечение медицинских организаций системы здравоохранения квалифицированными кадрами — 166,1 млрд руб.

6. Развитие сети национальных медицинских исследовательских центров и внедрение инновационных медицинских технологий — 63,9 млрд руб.

7. Создание единого цифрового контура в здравоохранении на основе единой государственной информационной системы здравоохранения (ЕГИСЗ) — 177,7 млрд руб.

8. Развитие экспорта медицинских услуг — 0,2 млрд руб. (в дальнейшем этой величиной пренебрегаем вследствие ее незначительности).

Анализ указанных федеральных проектов показывает возможность моделирования следующего сценария (далее — Сценарий), описывающего условия финансирования рассматриваемых федеральных проектов при заданных годовых объемах их финансирования.

1. Выполнение федеральных проектов 1, 4, 6 и 7 предполагает дополнительные государственные затраты на использование капитала отраслью «Здравоохранение» общим объемом 515,3 млрд руб. Это увеличение государственных затрат можно представить с помощью следующего сценарного моделирования:

1.1) уменьшение чистых налоговых поступлений (налоги минус субсидии) от отрасли «Здравоохранение» в каждый из 2019–2024 гг. на неотрицательные величины  $u_{2019}, u_{2020}, \dots, u_{2024}$ , в сумме дающие 515,3 млрд руб.;

1.2) увеличение затрат на величины  $u_t$  ( $t = 2019, \dots, 2024$ ) на используемый отраслью «Здравоохранение» фактор — капитал.

2. Выполнение федерального проекта 5 предполагает увеличение потребления отраслью «Здравоохранение» промежуточной продукции отрасли «Образование» общим объемом 166,1 млрд руб. При моделировании предполагается, что общий объем предложения рабочей силы в стране является экзогенным, поэтому увеличение спроса (и равного ему предложения) на рабочую силу отраслей «Здравоохранение» и «Образование» в результате выполнения национального проекта приведет к соответствующему уменьшению предложения рабочей силы остальным отраслям экономики РФ. Указанные условия выполнения федерального проекта 5 можно реализовать с помощью следующего сценарного моделирования:

2.1) уменьшение чистых налоговых поступлений от отрасли «Здравоохранение» в каждый из лет 2019–2024 на неотрицательные величины  $v_{2019}, v_{2020}, \dots, v_{2024}$ , в сумме дающие 166,1 млрд руб.;

2.2) увеличение используемой отраслью «Здравоохранение» промежуточной продукции «Образование» на величины  $v_t$ ,  $t = 2019, \dots, 2024$ .

3. Выполнение федеральных проектов 2 и 3 предполагает дополнительное государственное потребление ( $w_{2019}, w_{2020}, \dots, w_{2024}$ ) продукции отрасли «Здравоохранение» общим объемом 1044,2 млрд руб.

В базовом варианте Сценария указанные величины  $u_t, v_t, w_t$  распределены равномерно по годам:  $\bar{u}_t = 515,3/6$  млрд руб.,  $\bar{v}_t = 166,1/6$  млрд руб.,  $\bar{w}_t = 1044,2/6$  млрд руб. для  $t = 2019, \dots, 2024$ .

Указанные два класса задач оценки и повышения макроэкономической эффективности и возможности моделирования условий реализации федеральных проектов в рамках национального проекта «Здравоохранение» России

позволяют следующим образом сформулировать задачи исследования выполнения указанных выше федеральных проектов на базе Модели:

— найти ежегодные изменения ВВП и выпуска отрасли «Здравоохранение» по сравнению с соответствующими базовыми прогнозными значениями в периоде реализации национального проекта «Здравоохранение» при указанных выше базовых значениях государственного финансирования  $\bar{u}_t, \bar{v}_t, \bar{w}_t$ ;

— найти значения экономических инструментов национального проекта «Здравоохранение» (ежегодных финансирований  $u_t, v_t, w_t$  с фиксированными суммарными значениями и эффективных налоговых ставок  $\alpha_t, \beta_t$  на использование соответственно факторов «труд» и «капитал» отраслью «Здравоохранение» для  $t = 2019, \dots, 2024$ ), доставляющие наибольшее значение критерия  $K$  (суммарный выпуск отрасли «Здравоохранение» для указанных значений  $t$ ) при соответствующих ограничениях на указанные инструменты.

Следует отметить, что ограничения данной оптимизационной задачи гарантируют, что реализация ее решения обеспечивает достижение целей и целевых показателей [10] указанных федеральных проектов, а представленное далее в работе решение этой задачи демонстрирует ожидаемый народнохозяйственный эффект от реализации национального проекта «Здравоохранение».

### 3. Краткое описание модели

Мировая экономика в Модели представлена в виде функционирования следующих взаимодействующих агентов каждого региона: производителей (отраслей), домашних хозяйств, государств, агента-региона Globe, который импортирует транспортные услуги и экспортирует их во все регионы при импорте каждого вида товаров из каждого региона в каждый другой регион.

Динамическая Модель по сравнению с базовым вариантом статической модели Globe1 [8] развита путем описания ряда переменных с помощью введенных динамических уравнений для описания технологических коэффициентов производственных функций, а также для предложений факторов (труда и капитала).

Откалиброванная Модель описывает экономику следующих девяти условных регионов: члены ЕАЭС (Россия, Казахстан, Беларусь, Армения, Киргизия), а также их основные торговые партнеры (Европейский союз (в виде одной страны), США, Китай и Остальной мир (в виде одной страны)). Экономика каждого Региона описывается шестнадцатью отраслями, являющимися наиболее значимыми для экономик стран ЕАЭС.

Период расчета Модели (2004–2023 гг.) определяется доступными значениями матриц SAM из базы GTAP (2004, 2007, 2011 гг.) и горизонтом прогнозов основных макроэкономических показателей, предоставляемых МВФ (2023 г.).

Ядром базы данных Модели являются наборы согласованных матриц социальных счетов (SAM) Регионов для каждого рассматриваемого года (2004–2023 гг.). Наборы SAM для 2004, 2007 и 2011 гг. были извлечены с помощью специального преобразователя из базы данных GTAP [11]. Для 2005, 2006, 2008–2010 и 2012–2015 гг. искомые наборы SAM были рассчитаны с

помощью разработанного алгоритма (см. [9]) на базе доступных статистических источников, содержащих симметричные таблицы затраты–выпуск, показателей взаимной торговли [12], с использованием базовых соотношений, рассчитанных с помощью известных SAM для ближайшего последнего года (2004, 2007 или 2011 гг.). Для прогнозного периода (2016–2023 гг.) использовался разработанный алгоритм, позволяющий рассчитать указанные наборы SAM на базе следующих прогнозных показателей Регионов, предоставляемых МВФ [13]: ВВП, общие инвестиции, объем импорта товаров, объем импорта услуг, объем экспорта товаров, объем экспорта услуг, общие государственные доходы, общие государственные расходы, обменный курс национальной валюты к доллару США. При этом использовались базовые соотношения, рассчитанные с помощью рассчитанных SAM 2015 г.

Результаты расчета полученного таким образом базового сценария откалиброванной Модели в точности воспроизводят статистические и прогнозные данные, используемые при построении указанных выше наборов SAM.

Подробное описание данной Модели и некоторые результаты ее применения приводятся в [9].

#### 4. Сценарный анализ реализации национального проекта «Здравоохранение»

Расчет Сценария на базе Модели с помощью моделирования условий, сформулированных выше в конце раздела 2 пунктов 1, 2, 3, был проведен путем выполнения следующих основных шагов.

i) Производится базовый (без учета финансирования указанных федеральных проектов) расчет Модели для 2019, …, 2024 г. (базовая Модель).

ii) Вносятся следующие основные изменения базовой Модели и ее замыкания (разбиения переменных на два класса: экзогенные и эндогенные). Здесь  $r$  — регион Россия,  $a$  — отрасль «Здравоохранение»,  $f$  — фактор капитал,  $t = 2019, \dots, 2024$  г.

— Вводятся новая экзогенная переменная  $A_{a,r,t}$  для определения (ранее эндогенных) налоговых поступлений с отрасли «Здравоохранение» и соответствующее уравнение:

$$(1) \quad A_{a,r,t} = TX_{a,r,t}PX_{a,r,t}QX_{a,r,t}.$$

Здесь  $QX_{a,r,t}$  — объем выпуска;  $PX_{a,r,t}$  — цена этого выпуска;  $TX_{a,r,t}$  — эндогенная эффективная ставка налога с отрасли Модели (в старом замыкании она экзогенная).

— Вводятся новая экзогенная переменная  $B_{a,r,t}$  для определения (ранее эндогенного) номинального потребления капитала отраслью «Здравоохранение» в России и соответствующее уравнение

$$(2) \quad B_{a,r,t} = WF_{f,r,t}FD_{f,a,r,t}.$$

Здесь  $FD_{f,a,r,t}$  — объем потребляемого отраслью капитала,  $WF_{f,r,t}$  — его цена. Ранее экзогенный долевой параметр  $(\delta_{f,a,r,t}^{va})$  производственной CES функции

ции ВДС отрасли «Здравоохранение» в новом замыкании становится эндогенным.

— Вводятся новая экзогенная переменная  $C_{a,cp,r,t}$  для определения (ранее эндогенного) номинального потребления отраслью «Здравоохранение» промежуточной продукции «cp — Образование» и соответствующее уравнение

$$(3) \quad C_{a,cp,r,t} = ioqint_{cp,a,r,t} QINT_{a,r,t} PQD_{cp,r,t}.$$

Здесь  $QINT_{a,r,t}$  — общий объем промежуточного потребления отрасли «Здравоохранение»,  $ioqint_{cp,a,r,t}$  — доля продукции «cp — Образование» в этом потреблении,  $PQD_{cp,r,t}$  — цена этой продукции. Ранее экзогенный параметр  $ioqint_{cp,a,r,t}$  в новом замыкании становится эндогенным. При этом базовые значения всех прочих долевых параметров промежуточных продукции  $ioqint_{c1,a,r,t}$ , где  $c1 \neq cp$ , умножаются на такой эндогенный коэффициент  $k_{a,r,t} = (1 - ioqint_{cp,a,r,t}) / \sum_{c1 \neq cp} ioqint_{c1,a,r,t}$ , что сумма долей всех промежуточных продукции  $c$  для отрасли  $a$  остается равной единице:  $ioqint_{c1,a,r,t} = k_{a,r,t} ioqint_{c1,a,r,t}, \sum_c ioqint_{c,a,r,t} = 1$ .

— Вводятся новая экзогенная переменная ( $D_{c,r,t}$ ) для определения (ранее эндогенного) номинального государственного спроса на продукцию « $c$  — Здравоохранение» в России и соответствующее уравнение

$$(4) \quad D_{c,r,t} = PQD_{c,r,t} qgdconst_{c,r,t}.$$

Здесь  $qgdconst_{c,r,t}$  — реальное государственное потребление продукции  $c$ , а  $PQD_{c,r,t}$  — цена этой продукции. Ранее экзогенная величина  $qgdconst_{c,r,t}$  в новом замыкании становится эндогенной.

— Поскольку на базе Модели все расчеты производятся в долларах США, то в нее вводятся переменные и уравнения для перевода денежных величин из долларов в рубли и обратно с использованием прогнозных значений обменного курса этих валют, предоставляемых МВФ [13].

Модель с указанными выше изменениями будем называть Моделью 1. Очевидно, что базовые прогнозы (в долларах США) соответствующих переменных для Модели и Модели 1 совпадают.

iii) С использованием Модели 1 рассчитывается Сценарий, определяющийся следующими ежегодными изменениями экзогенных переменных по сравнению с базовым расчетом для  $t = 2019, \dots, 2024$ :

— уменьшение налоговых поступлений с отрасли «Здравоохранения»  $A_{a,r,t}$  на величины  $(\bar{u}_t + \bar{v}_t)$ ;

— увеличение номинальных потреблений отраслью «Здравоохранение» капитала  $B_{a,r,t}$  на величины  $\bar{u}_t$ ;

— увеличение номинальных потреблений отраслью «Здравоохранение» промежуточной продукции «cp — Образование»  $C_{a,cp,r,t}$  на величины  $\bar{v}_t$ ;

— увеличение номинальных государственных потреблений продукции « $c$  — Здравоохранения»  $D_{c,r,t}$  на величины  $\bar{w}_t$ .

Результаты выполнения действий, указанных в пунктах i)–iii), позволяют оценить (и сравнить с соответствующими базовыми значениями) результаты реализации Сценария при условии равномерного по годам распределения выделенных бюджетных средств.

**Таблица 1.** Процентное изменение выпуска отрасли «Образование, Здравоохранение, Государственное управление» по сравнению с базовым сценарием

Составляющая изменения	Год				
	2019	2020	2021	2022	2023
I	0,040	0,026	0,015	0,009	0,015
II	1,477	1,249	1,068	0,969	1,283
III	0,665	0,618	0,571	0,533	0,533
Всего	2,182	1,893	1,654	1,511	1,831

**Таблица 2.** Процентное изменение ВВП России по сравнению с базовым сценарием

Составляющая изменения	Год				
	2019	2020	2021	2022	2023
I	-0,098	-0,107	-0,113	-0,115	-0,121
II	-0,352	-0,353	-0,346	-0,342	-0,371
III	0,067	0,063	0,060	0,058	0,058
Всего	-0,383	-0,397	-0,399	-0,399	-0,434

В табл. 1 и 2 приведены некоторые результаты расчета такого Сценария. В последних строках данных таблиц указаны процентные изменения годовых значений выпуска модельной отрасли «Образование, Здравоохранение, Государственное управление» и ВВП РФ соответственно по сравнению с соответствующими прогнозами базового сценария (без учета данного национального проекта). В табл. 1 и 2 также приведены результаты разложения изменения указанных макропоказателей по следующим рассмотренным выше составляющим, соответствующим: увеличению затрат на используемый отраслью фактор-капитал (I), увеличению используемой отраслью промежуточной продукции образования (II), увеличению государственного потребления продукции отрасли (III).

Анализ табл. 1 и 2 демонстрирует, что наибольший вклад в рост выпуска указанной отрасли в течение всего пятилетнего периода вносят увеличения используемой отраслью промежуточной продукции Образования. Эти же увеличения потребления промежуточной продукции определяют основной отрицательный эффект для уменьшения ВВП РФ по сравнению с базовым прогнозом. Такой эффект можно объяснить отрицательным воздействием увеличения бюджетного субсидирования потребления промежуточной продукции отрасли «Образование, Здравоохранение, Государственное управление» на остальные отрасли РФ.

## 5. Постановка и решение задачи параметрического регулирования реализации национального проекта «Здравоохранение»

Рассмотрим следующую постановку задачи параметрического регулирования (далее — Задача) по оптимальному распределению сумм, выделенных на федеральные проекты, включенные в национальный проект «Здравоохране-

ние», и определению оптимальных значений эффективных ставок налогов на использования факторов отраслью «Здравоохранение». Задача направлена на повышение отраслевых показателей РФ на примере повышения выпуска отрасли «Здравоохранение» в период реализации рассматриваемого национального проекта.

*Задача.* Найти на базе Модели 1 значения инструментов национального проекта «Здравоохранение»  $u_t, v_t, w_t, \alpha_t, \beta_t$  для  $t = 2019, \dots, 2024$ , доставляющие наибольшее значение критерия  $K$  (суммарный выпуск отрасли «Здравоохранение» за 2019–2024 гг.) при следующих ограничениях на указанные инструменты:

$$(5) \quad \sum_{t=2019}^{2024} u_t = 515,3 \text{ (млрд руб.);}$$

$$(6) \quad \sum_{t=2019}^{2024} v_t = 166,1 \text{ (млрд руб.);}$$

$$(7) \quad \sum_{t=2019}^{2024} w_t = 1044,2 \text{ (млрд руб.);}$$

$$(8) \quad |u_t - \bar{u}_t| \leq 0,3\bar{u}_t;$$

$$(9) \quad |v_t - \bar{v}_t| \leq 0,3\bar{v}_t;$$

$$(10) \quad |w_t - \bar{w}_t| \leq 0,3\bar{w}_t;$$

$$(11) \quad |\alpha_t - \bar{\alpha}_t| \leq 0,3\bar{\alpha}_t;$$

$$(12) \quad |\beta_t - \bar{\beta}_t| \leq 0,3\bar{\beta}_t.$$

Здесь  $\bar{u}_t, \bar{v}_t, \bar{w}_t$  — базовые значения соответствующих инструментов  $u_t, v_t, w_t$  рассматриваемого выше Сценария;  $\alpha_t, \beta_t$  — соответственно эффективные ставки налогов на использование факторов «труд» и «капитал» отраслью «Здравоохранение»,  $\bar{\alpha}_t, \bar{\beta}_t$  — базовые значения указанных ставок.

Данные ограничения описывают предположение о возможных распределениях указанных налоговых ставок и годовых средств на национальный проект «Здравоохранение», которые позволяют выполнить его при использовании общей суммы государственных субсидий, выделенных на данный проект.

Задача была численно решена с использованием решателя NLPEC [14]. В результате ее решения оказалось, что значение критерия  $K$  может быть увеличено на 0,371%, а значение суммарного ВВП РФ за 2019–2024 гг. — на 0,222% по сравнению с соответствующими прогнозными значениями для Сценария с равномерным по годам финансированием. Полученные в результате решения Задачи процентные изменения ВВП РФ по сравнению с соответствующими прогнозными значениями для Сценария представлены в табл. 3.

Анализ представленных результатов демонстрирует возможности параметрического регулирования, позволяющего повысить оптимизируемый вы-

**Таблица 3.** Процентное изменение ВВП России по сравнению со Сценарием

Год				
2019	2020	2021	2022	2023
0,254	0,356	0,224	0,099	0,183

пуск отрасли и в значительной степени нивелировать падение ВВП, произошедшее в результате применения Сценария.

Варианты Модели 1, соответствующие базовому сценарию, Сценарию и решению Задачи были успешно протестиированы на возможность переноса на практику результатов вычислительных экспериментов с помощью трех подходов, первые два из которых предложены теорией параметрического регулирования [9]: с помощью оценки устойчивости задаваемых Моделью отображений, переводящих значения экзогенных параметров в значения эндогенных переменных; с помощью оценки показателей устойчивости таких отображений и с помощью анализа ряда тестовых прогнозных сценариев. Во всех случаях результаты расчетов продемонстрировали:

- отсутствие особых точек рассматриваемых отображений в соответствующих областях их определения и устойчивость этих отображений;
- допустимые значения оценок показателей устойчивости рассматриваемых отображений;
- соответствие результатов рассматриваемых прогнозных сценариев для 2019–2023 гг. основным положениям макроэкономической теории.

## 6. Заключение

1. Сформулированы задачи моделирования сценарного анализа и оптимального распределения финансирования национальных проектов.
2. Представлены результаты разработки динамической глобальной многострановой вычислимой модели общего равновесия.
3. Приводятся результаты сценарного анализа реализации национального проекта РФ «Здравоохранение» и входящих в него федеральных проектов. В частности, отмечен положительный эффект на выпуск отрасли от использования отраслью дополнительной промежуточной продукции Образования и отрицательный эффект от этого использования на ВВП РФ.
4. Представлены постановка и решение задачи параметрического регулирования, направленного на оптимизацию значений ежегодных средств, направляемых на реализацию федеральных проектов, включенных в данный национальный проект (в рамках суммарных бюджетов таких проектов) и эффективных ставок налогов на использования факторов соответствующей отраслью. Реализация результатов применения оптимальных значений указанных инструментов в периоде 2019–2023 гг. позволяет увеличить суммарный выпуск отрасли и суммарное ВВП РФ на 0,371% и 0,222% соответственно по сравнению с прогнозными значениями, полученными в результате реализации сценария с равномерным финансированием.

Эти результаты демонстрируют эффективность подхода теории параметрического регулирования по выработке рекомендаций по реализации национальных проектов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Национальные проекты: целевые показатели и основные результаты; <http://static.government.ru/media/files/p7nn2CS0pVhvQ98OOwAt2dzCIAietQih.pdf>
2. Будущее России. Национальные проекты; <https://futurerussia.gov.ru>
3. *Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Сулакшин С.С.* Применение вычислимых моделей в государственном управлении. М.: Научный эксперт, 2007.
4. Dynamic modeling and applications for global economic analysis / Edited by E. Ianchovichina, T. Walmsley. Cambridge, MA: Cambridge University press, 2012.
5. *Sartori D., Catalano G., Genco M., et al.* Guide to Cost-Benefit Analysis of Investment Projects. Economic appraisal tool for Cohesion Policy 2014–2020. Brussels: Eur. Commission, 2015.
6. *Мельников Р.М., Краснощеков В.Н., Боровикова Е.В. и др.* Анализ международного опыта использования метода сопоставления издержек и выгод для оценки общественно значимых проектов и разработка предложений по его применению в России. М.: РАНХиГС, 2016.
7. *Florio M.* Applied welfare economics: cost-benefit analysis of projects and policies. Abingdon, Oxon: Routledge, 2014.
8. *McDonald S., Thierfelder K.* GLOBE 1, [www.cgemod.org.uk/globe1.html](http://www.cgemod.org.uk/globe1.html)
9. *Ашилов А.А., Боровский Ю.Б., Новиков Д.А., Султанов Б.Т.* Макроэкономический анализ и параметрическое регулирование регионального экономического союза. М.: URSS, 2018.
10. Паспорт национального проекта «Здравоохранение»; <http://static.government.ru/media/files/gWYJ4OsAhPOWeWaJk1prKDEpregEcdI.pdf>
11. GTAP 9 Data Bases; <https://www.gtap.agecon.purdue.edu/databases/v9/default.asp>
12. World Integrated Trade Solution; <http://wits.worldbank.org>
13. World Economic Outlook Databases; <http://www.imf.org/external/ns/cs.aspx?id=28>
14. NLPEC; [https://www.gams.com/latest/docs/S\\_NLPEC.html](https://www.gams.com/latest/docs/S_NLPEC.html)

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.*

Поступила в редакцию 20.08.2019

После доработки 29.10.2019

Принята к публикации 28.11.2019

© 2020 г. А.С. ШВЕДОВ, д-р физ.-мат. наук ([ashvedov@hse.ru](mailto:ashvedov@hse.ru))  
(Национальный исследовательский университет  
“Высшая школа экономики”, Москва)

## ВОЙНА НА ИЗНУРЕНИЕ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ И С НЕЧЕТКИМИ ТИПАМИ ИГРОКОВ

Результат о существовании равновесного в смысле Байеса–Нэша профиля чистых стратегий для симметричных игр с неполной информацией класса «война на изнурение» обобщается для случая, когда действия и типы игроков могут быть нечеткими.

*Ключевые слова:* игра с неполной информацией, нечеткое множество, нечетко-случайная величина, равновесие Байеса–Нэша.

**DOI:** 10.31857/S0005231020070090

### 1. Введение

В последние десятилетия играм класса «война на изнурение» уделяется значительное внимание. Для таких игр многие результаты и теоретического, и прикладного характера были получены при рассмотрении биологических задач, когда два животных одного вида вступают в спор за некоторый приз, например пищу или территорию, при этом приз может достаться только одному из них. Однако животные не начинают схватку, а пытаются показать сопернику свою силу и заставить его отступить. При этом ценность приза для каждого из соперников уменьшается при увеличении времени противостояния.

В различных работах изучаются игры этого класса и с полной, и с неполной информацией. При рассмотрении игр с неполной информацией каждый из игроков знает свой тип, но не знает тип соперника (например, типом игрока может быть то, насколько животное голодно). Однако каждому из игроков известно распределение вероятностей для типа его соперника.

Результат о существовании равновесного в смысле Байеса–Нэша профиля чистых стратегий для симметричных игр с неполной информацией класса «война на изнурение» (т.е. для игр с одинаковыми игроками, точнее, с игроками с одинаковыми распределениями вероятностей для типов и с одинаковыми действиями для каждого типа) представлен в [1]. Доказательство этого результата можно найти, например, в [2]. В некоторых последующих работах данный результат назван классическим. Различные модификации игр класса «война на изнурение» рассматривались многими авторами. Например, в [3] даются приложения к экономическим задачам. Некоторые обзоры этого направления можно найти в [4, 5]. Подробнее об играх с неполной информацией и о равновесии Байеса–Нэша см., например, [6].

Теория нечетких множеств применяется при рассмотрении многих игровых задач. Для игр в нормальной форме можно назвать обзор [7]. Если

использовать электронные базы научных ресурсов, то нетрудно убедиться, что число работ, в названиях которых присутствует и слово “fuzzy”, и слово “game”, является значительным, причем многие из этих работ недавние. Теория нечетких множеств используется и в моделях, где присутствует некоторый управляющий центр, но объекты управления активны, т.е. преследуют и свои интересы [8]. Однако, насколько известно, до сих пор не рассматривались игры с неполной информацией, где типы игроков были бы нечеткими числами (или нечеткими множествами).

Для игр класса «война на изнурение» логично предположить, что ценность приза для каждого из игроков (при любом сроке противостояния) известна лишь приближенно, т.е. является нечетким числом. Тогда и типы игроков должны быть нечеткими числами. Такие задачи рассматриваются в настоящей работе. Получено обобщение результата о существовании равновесного профиля чистых стратегий из [1].

Теория нечетких множеств и теория вероятностей — это два различных подхода к описанию неопределенности. Эти подходы могут использоваться и независимо друг от друга, и комбинированно. При этом существуют различные пути, как такое комбинирование может производиться. В настоящей работе используется подход, при котором понятие нечетко-случайной величины — это прямое обобщение понятия случайной величины, только значениями измеримой функции являются нечеткие числа, а не обычные действительные числа. Первые такие определения нечетко-случайных величин даются в [9–11]. Здесь используется определение нечетко-случайной величины из работы [12], являющееся модификацией упомянутых определений.

С точки зрения автора для нечетко-случайных величин распределения вероятностей удобнее задавать не при помощи функций распределения, а при помощи квантильных функций, как это сделано в [13]. В настоящей работе математический инструментарий, развитый в [13], существенно используется.

В разделе 2 приводится постановка задачи, решение которой дается в разделе 3.

## 2. Равновесие Байеса–Нэша

Для положительных чисел  $z, \gamma, \delta$  рассмотрим функцию

$$U(z, \gamma, \delta) = \begin{cases} z - \delta & \text{при } \delta < \gamma, \\ -\gamma & \text{при } \delta \geq \gamma. \end{cases}$$

Пусть  $x$  — это тип первого игрока,  $y$  — тип второго игрока,  $\alpha$  — действие первого игрока,  $\beta$  — действие второго игрока. Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — выбранное время противостояния для каждого игрока. Тогда функция  $U(x, \alpha, \beta)$  определяет выигрыш первого игрока. Если  $\beta < \alpha$ , то приз достается первому игроку, и ценность приза для него равняется  $x - \beta$ . Если  $\beta \geq \alpha$ , то приз не достается первому игроку, и его потери считаются равными  $\alpha$ . Аналогично функция  $U(y, \beta, \alpha)$  определяет выигрыш второго игрока.

Напомним, что нечеткое число  $\tilde{z}$  — это фигура (компактное множество) на плоскости с координатами  $(\xi, \eta)$ , лежащая в полосе  $0 \leq \eta \leq 1$  и определяе-

мая двумя функциями  $z^L(\eta)$  и  $z^R(\eta)$ , которые будем называть соответственно левым и правым индексами нечеткого числа  $\tilde{z}$ . Функция  $z^L(\eta)$  монотонно неубывающая, функция  $z^R(\eta)$  монотонно невозрастающая,  $z^L(1) \leq z^R(1)$ . Фигура  $\tilde{z}$  состоит из точек  $(\xi, \eta)$  таких, что  $z^L(\eta) \leq \xi \leq z^R(\eta)$  при любом  $\eta \in [0, 1]$ . Если обе функции  $z^L(\eta)$  и  $z^R(\eta)$  линейные, то фигура  $\tilde{z}$  — это трапеция и нечеткое число называется трапециoidalным. Если обе эти функции константы, то фигура  $\tilde{z}$  — это прямоугольник и нечеткое число называется прямоугольным. Если, кроме того, эти константы равны одному и тому же действительному числу, то нечеткое число  $\tilde{z}$  можно отождествлять с данным действительным числом. В общем случае компактность множества  $\tilde{z}$  обеспечивается условием, что функции  $z^L(\eta)$  и  $z^R(\eta)$  являются непрерывными слева.

Определение нечетко-случайной величины в настоящей работе то же, что и в [12]. Квантильная функция случайной величины — это монотонно неубывающая функция  $q(p)$  на интервале  $0 < p < 1$ . Квантильная функция нечетко-случайной величины, определение которой дается в [13], — это множество нечетких чисел  $\tilde{q}(p)$ ,  $0 < p < 1$ . (Нечеткие числа будем обозначать строчными буквами со знаком «тильда», нечетко-случайные величины — прописными буквами со знаком «тильда».)

Пусть  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$  — это две независимые одинаково распределенные нечетко-случайные величины, которые используются для задания типов первого и второго игрока соответственно. Под одинаковой распределенностью нечетко-случайных величин понимается совпадение их квантильных функций. Эта квантильная функция считается известной обоим игрокам.

Через  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$  будем обозначать нечеткие числа, являющиеся типом первого и второго игрока соответственно. Стратегией первого игрока называется функция  $A$ , которая ставит в соответствие каждому типу  $\tilde{x}$  первого игрока некоторое действие  $\tilde{\alpha}$ , где  $\tilde{\alpha}$  также является нечетким числом. Стратегией второго игрока называется функция  $B$ , которая ставит в соответствие каждому типу  $\tilde{y}$  второго игрока некоторое действие  $\tilde{\beta}$ , где  $\tilde{\beta}$  также является нечетким числом.

Пусть функции  $x^L(\eta)$  и  $x^R(\eta)$  — это соответственно левый и правый индексы нечеткого числа  $\tilde{x}$ , функции  $y^L(\eta)$  и  $y^R(\eta)$  — это соответственно левый и правый индексы нечеткого числа  $\tilde{y}$ , функции  $\alpha^L(\eta)$  и  $\alpha^R(\eta)$  — это соответственно левый и правый индексы нечеткого числа  $\tilde{\alpha}$ , функции  $\beta^L(\eta)$  и  $\beta^R(\eta)$  — это соответственно левый и правый индексы нечеткого числа  $\tilde{\beta}$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$ .

Наложим ограничение на функции  $A$  и  $B$ . Будем считать, что существует функция  $a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  такая, что при любом  $\eta \in [0, 1]$  выполняются соотношения  $\alpha^L(\eta) = a(x^L(\eta))$ ,  $\alpha^R(\eta) = a(x^R(\eta))$ , и существует функция  $b: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  такая, что при любом  $\eta \in [0, 1]$  выполняются соотношения  $\beta^L(\eta) = b(x^L(\eta))$ ,  $\beta^R(\eta) = b(x^R(\eta))$ . Каждая из функций  $a$  и  $b$  является строго возрастающей, непрерывно дифференцируемой,  $a(0) = b(0) = 0$ .

Пусть однопараметрические семейства случайных величин  $X^L(\eta)$  и  $X^R(\eta)$  — это соответственно левые и правые индексы нечетко-случайной величины  $\tilde{X}$ ; однопараметрические семейства случайных величин  $Y^L(\eta)$

и  $Y^R(\eta)$  — это соответственно левый и правый индексы нечетко-случайной величины  $\tilde{Y}$ ; параметр  $\eta$  меняется от 0 до 1.

Будем считать, что квантильная функция любой из случайных величин  $X^L(\eta)$ ,  $X^R(\eta)$ ,  $Y^L(\eta)$ ,  $Y^R(\eta)$ , определенная на интервале  $0 < p < 1$ , является строго возрастающей и непрерывно дифференцируемой, стремится к 0 при  $p \rightarrow 0$ . Кроме того, все эти квантильные функции на интервале  $(0, 1)$  ограничены сверху некоторой общей константой. (Последнее условие вытекает из определения нечетко-случайной величины, данного в [12]).

Будем говорить, что профиль стратегий  $(A, B)$  является равновесием Байеса–Нэша, если при каждом типе  $\tilde{x}$  и при каждом  $\eta \in [0, 1]$

$$(1) \quad \begin{aligned} a(x^L(\eta)) &\in \arg \max_{\alpha^L(\eta)} E(U(x^L(\eta), \alpha^L(\eta), b(Y^L(\eta)))) , \\ a(x^R(\eta)) &\in \arg \max_{\alpha^R(\eta)} E(U(x^R(\eta), \alpha^R(\eta), b(Y^R(\eta)))) \end{aligned}$$

и при каждом типе  $\tilde{y}$  и при каждом  $\eta \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} b(y^L(\eta)) &\in \arg \max_{\beta^L(\eta)} E(U(y^L(\eta), \beta^L(\eta), a(X^L(\eta)))) , \\ b(y^R(\eta)) &\in \arg \max_{\beta^R(\eta)} E(U(y^R(\eta), \beta^R(\eta), a(X^R(\eta)))) . \end{aligned}$$

Здесь  $E$  означает ожидание соответствующей случайной величины.

### 3. Определение нечетких действий, составляющих равновесный профиль

Если для краткости писать  $x$  вместо  $x^L(\eta)$ ,  $\alpha$  вместо  $\alpha^L(\eta)$ ,  $Y$  вместо  $Y^L(\eta)$ , то условие (1) можно записать в виде

$$(2) \quad a(x) \in \arg \max_{\alpha} E(U(x, \alpha, b(Y))) .$$

Пусть  $q$  — квантильная функция случайной величины  $Y$ . Из соотношения (2) можно вывести, что

$$(3) \quad b(y) = \int_0^y \frac{z}{1 - q^{-1}(z)} \frac{dq^{-1}(z)}{dz} dz .$$

Имеет место аналогичное выражение и для функции  $a(x)$ . Это дает равновесный в смысле Байеса–Нэша профиль чистых стратегий, найденный в [1] (доказательство приведено, например, в [2]). В Приложении приводится новый вывод формулы (3), более простой, чем другие известные автору доказательства. При этом используется выражение из [13] для моментов случайных величин через интеграл, содержащий квантильную функцию.

Если обозначить через  $F^L(z; \eta)$  функцию распределения случайной величины  $Y^L(\eta)$ , а через  $F^R(z; \eta)$  функцию распределения случайной величины  $Y^R(\eta)$ , то выражение (3) дает

$$(4) \quad b(y^L(\eta)) = \int_0^{y^L(\eta)} \frac{z}{1 - F^L(z; \eta)} \frac{dF^L(z; \eta)}{dz} dz.$$

Аналогично

$$(5) \quad b(y^R(\eta)) = \int_0^{y^R(\eta)} \frac{z}{1 - F^R(z; \eta)} \frac{dF^R(z; \eta)}{dz} dz.$$

Остается найти условия, при которых функции  $b(y^L(\eta))$  и  $b(y^R(\eta))$ , задаваемые формулами (4), (5), являются левым и правым индексами некоторого нечеткого числа соответственно.

Обозначим через  $q^L(p; \eta)$  квантильную функцию случайной величины  $Y^L(\eta)$ , а через  $q^R(p; \eta)$  квантильную функцию случайной величины  $Y^R(\eta)$ . Предположим, что существует нечеткое число  $\tilde{c}$ , левый и правый индексы которого обозначаются как  $c^L(\eta)$  и  $c^R(\eta)$  соответственно, причем  $c^L(0) > 0$ , такое что

$$q^L(p; \eta) = c^L(\eta)q_0(p), \quad q^R(p; \eta) = c^R(\eta)q_0(p)$$

при всех  $p \in (0, 1)$ ,  $\eta \in [0, 1]$ , где  $q_0(p)$  — некоторая квантильная функция. Функцию распределения, соответствующую квантильной функции  $q_0$ , обозначим через  $F_0$ .

Ключевым в задаче оказывается соображение, что нужно связать типы игрков с квантильной функцией нечетко-случайных величин  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$ .

**Теорема.** Пусть фиксировано  $p \in (0, 1)$  и пусть  $y^L(\eta) = q^L(p; \eta)$ ,  $y^R(\eta) = q^R(p; \eta)$  при любом  $\eta \in [0, 1]$ . Тогда функции, стоящие в левых частях равенств (4), (5), являются соответственно левым и правым индексами нечеткого числа  $\gamma_p \tilde{c}$ , где

$$\gamma_p = \int_0^{q_0(p)} \frac{u}{1 - F_0(u)} F'_0(u) du.$$

Доказательство теоремы приводится в Приложении.

#### 4. Заключение

Во многих работах, где изучаются приложения теории нечетких множеств к игровым задачам, предполагается, что нечеткими являются выигрыши. Выигрыши не являются однозначно определенными действительными числами

и в настоящей работе. Но это — не исходное предположение, а следствие того, что и типы игроков, и действия нечеткие. В отличие от сложения нечетких чисел их вычитание — это не прямолинейная задача. Многие трудности в приложениях теории нечетких множеств связаны именно с этим. По смыслу игр класса «война на изнурение» вычитание необходимо. В настоящей работе удалось таким образом наложить все условия, что вычитание не приводит к выходу из множества нечетких чисел. Получен ответ на вопрос, каким образом приблизительность в типах игроков (нечеткость) должна влиять на приблизительность их действий, чтобы профиль стратегий был равновесным. Результаты могут иметь практическое значение, например, в тех случаях, когда по смыслу задачи действия являются не мгновенными, а пролонгированными.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство формулы (3).* Согласно (2) из [13]

$$I(x, \alpha) = E(U(x, \alpha, b(Y))) = \int_0^1 U(x, \alpha, b(q(p))) dp.$$

Если рассмотреть функцию

$$\psi(\alpha) = q^{-1}(b^{-1}(\alpha)),$$

то последняя формула может быть записана в виде

$$I(x, \alpha) = \int_0^{\psi(\alpha)} (x - b(q(p))) dp - \alpha(1 - \psi(\alpha)).$$

Из формулы

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \int_0^{\psi(\alpha)} f(p) dp \right) = f(\psi(\alpha)) \psi'(\alpha)$$

следует, что

$$(П.1) \quad \frac{d}{d\alpha} I(x, \alpha) = x\psi'(\alpha) - \alpha\psi'(\alpha) + \alpha\psi'(\alpha) - (1 - \psi(\alpha)).$$

Необходимое условие максимума, равенство нулю частной производной, дает

$$x\psi'(\alpha) - (1 - \psi(\alpha)) = 0.$$

Из условия  $a(x) = \alpha$  и из симметричности игроков следует, что  $x = b^{-1}(\alpha)$ . Следовательно,

$$(П.2) \quad b^{-1}(\alpha)\psi'(\alpha) - (1 - \psi(\alpha)) = 0.$$

Имеем

$$\psi'(\alpha) = (q^{-1})' (b^{-1}(\alpha)) \ (b^{-1})' (\alpha).$$

Положим  $z = b^{-1}(\alpha)$ . Тогда с учетом того, что

$$(b^{-1})' (\alpha) = \frac{1}{b'(z)},$$

соотношение (П.2) записывается в виде

$$z (q^{-1})' (z) \frac{1}{b'(z)} = 1 - q^{-1}(z).$$

Следовательно,

$$b'(z) = \frac{z}{1 - q^{-1}(z)} \frac{dq^{-1}(z)}{dz}.$$

Тогда из условия  $b(0) = 0$  вытекает соотношение (3).

Обоснование того, что точка, найденная из необходимого условия эстремума, в данном случае является точкой глобального максимума, проводится по известной схеме. Из (П.1) вытекает, что

$$(П.3) \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial \alpha} I(x, \alpha) > 0.$$

Будем рассматривать функцию  $a(x)$ , которая в силу симметричности игроков имеет тот же вид, что и функция  $b(y)$ , определяемая формулой (3). Предположим, что при некотором  $x_0$  существует значение  $\alpha'$  такое, что

$$I(x_0, \alpha') > I(x_0, a(x_0)).$$

Тогда

$$\int_{a(x_0)}^{\alpha'} \frac{\partial I}{\partial \alpha} (x_0, t) dt > 0.$$

При любом  $t$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} (a^{-1}(t), t) = 0,$$

поэтому

$$\int_{a(x_0)}^{\alpha'} \left( \frac{\partial I}{\partial \alpha} (x_0, t) - \frac{\partial I}{\partial \alpha} (a^{-1}(t), t) \right) dt > 0$$

или

$$(П.4) \quad \int_{a(x_0)}^{\alpha'} \int_{a^{-1}(t)}^{x_0} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} I(x, t) dx dt > 0.$$

Пусть  $a(x_0) < \alpha'$ . Тогда для любого  $t \in (a(x_0), \alpha']$  выполняется  $a^{-1}(t) > x_0$ , условия (П.3) и (П.4) противоречат друг другу. Пусть  $a(x_0) > \alpha'$ . Тогда для любого  $t \in [\alpha', a(x_0))$  выполняется  $a^{-1}(t) < x_0$ , и вновь условия (П.3) и (П.4) противоречат друг другу. Показано, что найден глобальный максимум.

*Доказательство теоремы.* Имеем

$$\begin{aligned} b(y^L(\eta)) &= \int_0^{c^L(\eta)q_0(p)} \frac{z}{1 - F^L(z; \eta)} \frac{dF^L(z; \eta)}{dz} dz = \\ &= \int_0^{c^L(\eta)q_0(p)} \frac{z}{1 - F_0\left(\frac{z}{c^L(\eta)}\right)} \frac{1}{c^L(\eta)} F'_0\left(\frac{z}{c^L(\eta)}\right) dz = \\ &= c^L(\eta) \int_0^{q_0(p)} \frac{u}{1 - F_0(u)} F'_0(u) du. \end{aligned}$$

Так же проводится преобразование для  $b(y^R(\eta))$ . Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bishop D.T., Cannings C., Maynard Smith J.* The war of attrition with random rewards // J. Theoret. Biol. 1978. V. 74. P. 377–388.
2. *Milgrom P.R., Weber R.J.* Distributional strategies for games with incomplete information // Math. Oper. Res. 1985. V. 10. P. 619–632.
3. *Fudenberg D., Tirole J.* A theory of exit in duopoly // Econometrica. 1986. V. 54. P. 943–960.
4. *Hörner J., Sahuguet N.* A war of attrition with endogenous effort levels // Econ. Theory. 2011. V. 47. P. 1–27.
5. *Kim G.J., Kim B., Kim J.* Equilibrium in a war of attrition with an option to fight decisively // Oper. Res. Lett. 2019. V. 47. P. 326–330.
6. *Алипрантис К.Д., Чакрабарти С.К.* Игры и принятие решений. М.: Изд. дом Высш. шк. эконом., 2016.
7. *Larbani M.* Non cooperative fuzzy games in normal form: A survey // Fuzzy Sets Syst. 2009. V. 160. P. 3184–3210.
8. *Новиков Д.А., Петраков С.Н.* Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999.
9. *Kwakernaak H.* Fuzzy random variables — I. Definitions and theorems // Inform. Sci. 1978. V. 15. P. 1–29.
10. *Kwakernaak H.* Fuzzy random variables — II. Algorithms and examples for the discrete case // Inform. Sci. 1979. V. 17. P. 153–178.

11. *Puri M.L., Ralescu D.A.* Fuzzy random variables // J. Math. Anal. Appl. 1986. V. 114. P. 409–422.
12. *Шведов А.С.* Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин // Прикл. эконометрика. 2016. Т. 42. С. 121–138.  
[http://pe.cemi.rssi.ru/pe\\_2016\\_42\\_121-138.pdf](http://pe.cemi.rssi.ru/pe_2016_42_121-138.pdf)
13. *Шведов А.С.* Квантильная функция нечетко-случайной величины и выражения для ожиданий // Мат. заметки. 2016. Т. 100. С. 455–460.  
<http://www.mathnet.ru/links/2307f468fe7c02264feb6d8cf54c25f5/mzm10879.pdf>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф. Т. Алекскеровым.*

Поступила в редакцию 17.10.2019

После доработки 23.01.2020

Принята к публикации 30.01.2020

# Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2020 г. Ю.С. ПОПКОВ, д-р техн. наук ([popkov@isa.ru](mailto:popkov@isa.ru))

(Федеральный исследовательский центр

“Информатика и управление” РАН, Москва;

Институт проблем управления, Москва),

А.Ю. ПОПКОВ, канд. техн. наук ([apopkov@isa.ru](mailto:apopkov@isa.ru))

(Федеральный исследовательский центр

“Информатика и управление” РАН, Москва),

Ю.А. ДУБНОВ ([yury.dubnov@phystech.edu](mailto:yury.dubnov@phystech.edu))

(Федеральный исследовательский центр

“Информатика и управление” РАН, Москва;

Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”, Москва)

## ЭЛЕМЕНТЫ РАНДОМИЗИРОВАННОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ПРЕДСКАЗАНИЯ СУТОЧНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ<sup>1</sup>

Развит метод randомизированного прогнозирования, основанный на генерации ансамблей энтропийно-оптимальных прогнозных траекторий. Последние генерируются randомизированными моделями динамической регрессии, содержащими случайные параметры, измерительные шумы и случайный вход. Функции плотности распределения вероятностей случайных параметров и измерительных шумов оцениваются с использованием реальных данных в рамках процедуры randомизированного машинного обучения. Генерация ансамблей прогнозных траекторий осуществляется путем сэмплирования энтропийно-оптимальных распределений вероятностей. Предлагаемая процедура применяется для randомизированного прогнозирования суточной нагрузки региональной энергетической системы. Синтезирована стохастическая модель колебательной динамической регрессии. Построены одно- двух- и трехсуточные прогнозы и исследованы их погрешности.

*Ключевые слова:* прогнозирование, иерархическая randомизация, колебательная динамическая регрессия, энтропийный функционал, эмпирический баланс, суточная нагрузка энергетической системы, сэмплирование функций ПРВ.

**DOI:** [10.31857/S0005231020070107](https://doi.org/10.31857/S0005231020070107)

### 1. Введение

Традиционный путь решения задач прогнозирования состоит в моделировании исследуемого процесса, “обучении” его параметризованной модели на

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 19-07-00282, 20-07-00223).

ретроспективной информации и затем использовании “обученной” модели как предсказывающей. Отсюда следуют два этапа в прогнозировании развивающихся процессов: этап машинного обучения модели процесса и собственно этап прогнозирования.

Современная концепция машинного обучения базируется на детерминированной параметризации моделей и оценках параметров, использующих пакеты данных с постулируемыми свойствами. Качество оценивания характеризуется функциями эмпирического риска, минимизация которого дает оптимальные оценки [1, 2].

Наиболее распространеными являются параметрические модели динамической регрессии (ПМДР), в которых текущее состояние модели определяется ее состояниями на некотором временном отрезке в прошлом [3, 4]. Формальный образ ПМДР — это разностные уравнения, в общем случае  $p$ -го порядка [5]. Наиболее распространены в прикладных задачах линейные ПМДР. В частности, они являются базовыми во многих проблемах макроэкономического моделирования и прогнозирования, таких как моделирование временных рядов экономических индикаторов [6], определении адекватности ПМДР [7], прогнозирование обменных курсов [8]. Линейные ПМДР оказываются достаточно эффективными для краткосрочного прогнозирования. Но для больших горизонтов прогноза они приводят к значительным погрешностям. Поэтому естественными являются попытки улучшения прогнозов путем введения в ПМДР различных нелинейностей. Общему подходу к формированию и использованию нелинейных ПМДР посвящена монография [9]. Однако прикладные задачи требуют более адекватного подхода к выбору наиболее полезной и эффективной нелинейности. На этом пути кажется полезным, например, для прогнозирования обменных курсов применение логистической и экспоненциальной нелинейностей [10], периодических авторегрессионных моделей [11] или многомерных временных рядов [12] для прогнозирования суточной электрической нагрузки энергетической системы.

При переходе к этапу прогнозирования необходимо быть уверенным, что состояние и свойства исследуемого процесса сохраняются на интервале прогноза, что надежно утверждать сложно. Поэтому возникают погрешности прогноза как следствие воздействия каких-то неучтенных факторов. Одним из подходов к уменьшению таких погрешностей является приданье прогнозу некоторых вероятностных характеристик [13, 14]. Наиболее распространенным на этом пути является использование формулы Байеса об апостериорной вероятности. Если задать некоторую структуру параметризованной условной плотности распределения вероятностей (ПРВ) данных и априорную плотность распределения параметров, то их произведение после нормировки определяет апостериорную плотность параметров при фиксированных данных. Принципиальные проблемы в этом подходе связаны с выбором структуры условной ПРВ и априорной ПРВ. Обычно выбираются нормальные ПРВ или их смесь, причем веса смеси оцениваются по ретроспективным данным [15–17]. Аналогичный подход используется в прикладных исследованиях: в популяционной генетике [18], где развивается метод численной аппроксимации апостериорных ПРВ, во взаимодействии финансового сектора экономики и трудового рынка [19], где для оценивания параметров указанных

выше ПРВ используется алгоритм Метрополиса–Гастингса, в прогнозировании динамики населения [20], где использовалась иерархия байесовских моделей для факторов рождаемости, смертности и миграционной активности. Вероятностные прогнозы формируются и другими методами с учетом специфики прикладных задач. В частности, в метеорологии путем накопления ретроспективных прогнозов погоды определяются оценки функций ПРВ, которые затем используются для кратковременного прогнозирования [21–24]. Довольно любопытным является формирование вероятностного прогноза путем смешивания прогнозов, полученных разными методами [25].

Из далеко не полного обзора и анализа указанных работ можно сделать вывод, что основная проблема прикладного прогнозирования — это неопределенность, заложенная в исследуемом процессе. Флуктуация наших знаний о природе процессов и, следовательно, неадекватность их математических моделей; достаточность, достоверность и точность ретроспективных данных о процессе; и, главное, сохранение основных свойств процессов в будущем, чтобы накопленные знания и модели сохраняли свою полезность при прогнозировании — все эти факторы являются следствием неопределенности.

Как повысить надежность прогноза? Один из рецептов связан с концепцией *рандомизации*, т.е. искусственной генерации искусственной случайности. Этот подход использовался в самых разных задачах, не связанных с прогнозированием. Существует много примеров в самых разных областях науки, управлении, экономики, таких как, например, рандомизированные численные методы оптимизации [26–28], смешанные (случайные) стратегии в биржевой торговле [29], рандомизированное прогнозирование динамики населения [30], вибрационное управление технологическими процессами [31]. При этом рандомизация предполагает приздание неслучайным объектам искусственных стохастических свойств с оптимальными, в выбранном смысле, вероятностными характеристиками.

В большинстве работ, которые можно было бы отнести к использованию в той или иной форме рандомизации, искусственная случайность вводилась произвольно, в том смысле, что ее вероятностные характеристики — функции ПРВ — выбирались из известных: равномерных, нормальных, экспоненциальных и др.

Хотелось бы эти характеристики формировать с точки зрения предсказуемого качества рандомизации и ее ожидаемых свойств. Поскольку причиной для привлечения этого подхода является неопределенность, то полезность рандомизации целесообразно характеризовать информационной энтропией, которая является мерой неопределенности [32–34]. Максимизация информационной энтропии соответствует максимальной неопределенности.

В данной статье предлагается принципиально иной метод формирования прогнозов, названный энтропийно-рандомизированным прогнозированием (ЭРП). Он основан на генерации ансамбля случайных прогнозов моделью динамической регрессии со случайными оптимизированным входом и параметрами. Соответствующие вероятностные характеристики, а именно функции ПРВ, определяются с помощью процедуры энтропийно-рандомизированного

машинного обучения [35]. Ансамбли прогнозных траекторий строятся путем сэмплирования энтропийно-оптимальных ПРВ.

Предлагаемый метод применяется для рандомизированного прогнозирования суточной электрической нагрузки энергетической системы. Построена иерархическая рандомизированная модель динамической регрессии, описывающая зависимость нагрузки от температуры окружающего воздуха. Временная эволюция температуры моделируется колебательной моделью динамической регрессии второго порядка со случайным параметром и случайным входом. Приводятся результаты рандомизированного обучения указанной модели на реальных данных GEFCom2014 [36]. Предлагается технология рандомизированного прогнозирования и исследуется ее адекватность в зависимости от длины горизонта прогноза.

## 2. Рандомизированные модели динамической регрессии со случайным входом и параметрами

Структура, предлагаемой рандомизированной модели динамической регрессии (РМДР) изображена на рис. 1. Она состоит из модели основного объекта РМДР-О со случайными параметрами  $\mathbf{a} \in R^p$  и модели внешних факторов РМДР-Ф со случайными параметрами  $\mathbf{b} \in R^s$  и случайным входом  $\zeta \in R^q$ . Состояния объекта и его модели принадлежат векторному пространству  $R^m$ , в котором  $\hat{\mathbf{x}}[n]$  — векторы состояний объекта,  $\mathbf{x}[n] \in R^m$  — векторы состояний РМДР-О. Внешние факторы характеризуются вектором  $\hat{\mathbf{y}}[n] \in R^q$ , а изменение во времени состояния РМДР-Ф — вектором  $\mathbf{y}[n] \in R^q$ . Переменная  $n$  целочисленная, обозначает дискретное время в интервале  $\mathcal{L} = [n^-, n^+]$ .

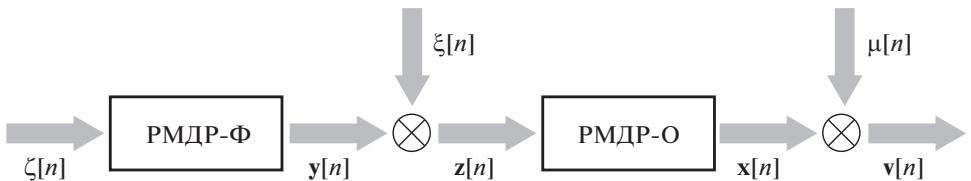


Рис. 1.

Рассмотрим линейную версию РМДР-О. Состояние модели  $\mathbf{x}[n]$  в момент времени  $n$  меняется под влиянием  $p$  ретроспективных состояний  $\mathbf{x}[n-1], \dots, \dots, \mathbf{x}[n-p]$  и измеряемых в каждый момент времени внешних факторов  $\mathbf{z}[n] \in R^q$ . Соответствующее уравнение имеет вид

$$(2.1) \quad \mathbf{x}[n] = \mathbf{X}^{(n,p)} \mathbf{A}^{(p)} + A_{(p+1)} \mathbf{z}[n],$$

где:

- блочный вектор-столбец параметров —

$$(2.2) \quad \mathbf{A}^{(p)} = [A_1, \dots, A_p]^\top,$$

$A_i$  —  $(m \times m)$ -матрица со случайными элементами интервального типа

$$(2.3) \quad A_i \in \mathcal{A}_i = [A^-_i, A^+_i], \quad i = \overline{1, p};$$

- $A_{(p+1)}$  —  $(m \times q)$ -матрица со случайными элементами интервального типа

$$(2.4) \quad A_{(p+1)} \in \mathcal{A}_{(p+1)} = [A_{-(p+1)}, A_{+(p+1)}];$$

- блочный вектор-строка  $p$  ретроспективных состояний —

$$(2.5) \quad \mathbf{X}^{(n,p)} = [\mathbf{x}[n-1], \dots, \mathbf{x}[n-p]].$$

Здесь  $\lfloor \bullet \rfloor$  обозначает блочный вектор-строку.

Вероятностные свойства блочного вектора  $\mathbf{A}^{(p)}$  характеризуются функцией совместной ПРВ  $P(\mathbf{A}^{(p)})$ , а матрицы  $A_{(p+1)}$  — функцией ПРВ  $F(A_{(p+1)})$ .

Предполагается, что измеряемое в каждый момент времени  $n$  состояние РМДР-О содержит аддитивный шум  $\mu[n]$ :

$$(2.6) \quad \mathbf{v}[n] = \mathbf{x}[n] + \mu[n].$$

Случайные векторы  $\mu[n]$  — интервального типа:

$$(2.7) \quad \mu[n] \in \mathcal{M}_n = [\mu_{-n}, \mu_{+n}]$$

с функцией ПРВ  $M_n(\mu[n])$ . Случайные векторы, измеряемые в разные моменты времени, предполагаются статистически независимыми.

Рассмотрим линейную версию РМДР-Ф, которая имеет аналогичную РМДР-О структуру. Будем иметь:

$$(2.8) \quad \mathbf{y}[n] = \mathbf{Y}^{(n,s)} \mathbf{B}^{(s)} + \zeta[n],$$

где

- блочный вектор-столбец —

$$(2.9) \quad \mathbf{B}^{(s)} = [B_1, \dots, B_s]^\top,$$

- $B_i$  —  $(q \times q)$ -матрица со случайными элементами интервального типа

$$(2.10) \quad B_i \in \mathcal{B}_i = [B_{-i}, B_{+i}], \quad i = \overline{1, s},$$

- блочная вектор-строка

$$(2.11) \quad \mathbf{Y}^{(n,p)} = [\mathbf{y}[n-1], \dots, \mathbf{y}[n-s]].$$

Вероятностные свойства параметров характеризуются непрерывно-дифференцируемой функцией ПРВ  $W(\mathbf{B}^{(s)})$ .

Случайный вектор  $\zeta[n]$  — интервального типа:

$$(2.12) \quad \zeta[n] \in \mathcal{E}_n = [\zeta_{-n}, \zeta_{+n}]$$

с функцией ПРВ  $Q_n(\zeta[n])$ , также непрерывно-дифференцируемой. Векторы  $\zeta[n]$  для разных моментов времени статистически независимые.

По аналогии с РМДР-О измеряемое в каждый момент времени  $n$  состояние РМДР-Ф  $\mathbf{z}[n]$  содержит аддитивный шум  $\xi[n]$ :

$$(2.13) \quad \mathbf{z}[n] = \mathbf{y}[n] + \xi[n].$$

Случайный вектор  $\xi[n]$  — интервального типа:

$$(2.14) \quad \xi[n] \in \Xi_n = [\xi^{-}_n, \xi^{+}_n],$$

с непрерывно-дифференцируемой функцией ПРВ  $G_n(\xi[n])$ . Случайные векторы, измеряемые в разные моменты времени, предполагаются статистически независимыми.

Итак, в общей РМДР (РМДР-О и РМДР-Ф) неизвестными являются функции ПРВ параметров  $P(\mathbf{A}^{(p)})$ ,  $F(A_{(p+1)})$ ,  $W(\mathbf{B}^{(s)})$  и шумов  $M_n(\mu[n])$ ,  $Q_n(\zeta[n])$ ,  $G_n(\xi[n])$ ,  $n \in \mathcal{L}$ .

### 3. Модели данных из обучающей коллекции

Оценивание указанных в предыдущем параграфе ПРВ производится с использованием обучающих коллекций данных, полученных на интервале обучения  $n \in \mathcal{L} = [n^-, n^+]$  и согласованных с РМДР.

Рассмотрим РМДР-О. На интервале обучения будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n^-] &= \mathbf{X}^{(n^-, p)} \mathbf{A}^{(p)} + A_{(p+1)} \mathbf{z}[n^-], \\ \mathbf{x}[n^- + 1] &= \mathbf{X}^{(n^- + 1, p)} \mathbf{A}^{(p)} + A_{(p+1)} \mathbf{z}[n^- + 1], \\ &\dots \\ (3.1) \quad \mathbf{x}[n^+] &= \mathbf{X}^{(n^+, p)} \mathbf{A}^{(p)} + A_{(p+1)} \mathbf{z}[n^+]. \end{aligned}$$

Тогда наблюдаемые состояния РМДР-О на интервале обучения  $\mathcal{L}$  представляют собой набор векторов

$$(3.2) \quad \mathbf{v}[n] = \mathbf{x}[n] + \mu[n], \quad n = \overline{n^-, n^+}.$$

Отсюда следует, что коллекция обучающих данных состоит из данных о рефлексивных состояниях объекта

$$(3.3) \quad \hat{\mathbf{X}}^{(n^-, p)}, \hat{\mathbf{X}}^{(n^- + 1, p)}, \dots, \hat{\mathbf{X}}^{(n^+, p)}$$

и данных о наблюдаемых текущих состояниях

$$(3.4) \quad \hat{\mathbf{v}}[n^-], \dots, \hat{\mathbf{v}}[n^+], \quad \hat{\mathbf{z}}[n^-], \dots, \hat{\mathbf{z}}[n^+].$$

Рассмотрим РМДР-Ф. На интервале обучения будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}[n^-] &= \mathbf{Y}^{(n^-, s)} \mathbf{B}^{(s)} + \zeta[n^-], \\ \mathbf{y}[n^- + 1] &= \mathbf{Y}^{(n^- + 1, s)} \mathbf{B}^{(s)} + \zeta[n^- + 1], \\ &\dots \\ (3.5) \quad \mathbf{y}[n^+] &= \mathbf{Y}^{(n^+, s)} \mathbf{B}^{(s)} + \zeta[n^+]. \end{aligned}$$

Наблюдаемые состояния РМДР-Ф на интервале обучения  $\mathcal{L}$  представляют собой набор векторов

$$(3.6) \quad \mathbf{z}[n] = \mathbf{y}[n] + \xi[n], \quad n = \overline{n^-, n^+}.$$

Отсюда следует, что коллекция обучающих данных состоит из данных о ретроспективных состояниях объекта

$$(3.7) \quad \hat{\mathbf{Y}}^{(n^-, s)}, \hat{\mathbf{Y}}^{(n^-+1, s)}, \dots, \hat{\mathbf{Y}}^{(n^+, s)}$$

и данных о наблюдаемых текущих состояниях

$$(3.8) \quad \hat{\mathbf{z}}[n^-], \dots, \hat{\mathbf{z}}[n^+].$$

Итак, в процедуре обучения РМДР участвуют коллекции данных (3.4), (3.7), (3.8).

#### 4. Алгоритм рандомизированного машинного обучения (РМО)

Энтропийная версия [35] алгоритмов РМО используется для оценивания функций ПРВ параметров и шумов для РМДР-О и РМДР-Ф. Применительно к РМДР-О соответствующий алгоритм имеет вид

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_O = & - \int_{\mathcal{A}} P(\mathbf{A}^{(p)}) \ln P(\mathbf{A}^{(p)}) d\mathbf{A}^{(p)} - \int_{\mathcal{A}_{(p+1)}} F(A_{(p+1)}) \ln F(A_{(p+1)}) dA_{(p+1)} - \\ & - \sum_{n=n^-}^{n^+} \int_{\mathcal{M}_n} M_n(\mu[n]) \ln M_n(\mu[n]) dM_n(\mu[n]) \Rightarrow \max_{P, F, M} \end{aligned}$$

при ограничениях:

— нормировки ПРВ

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} P(\mathbf{A}^{(p)}) d\mathbf{A}^{(p)} &= 1, \quad \int_{\mathcal{A}_{(p+1)}} F(A_{(p+1)}) dA_{(p+1)} = 1, \\ \int_{\mathcal{M}_n} M_n(\mu[n]) dM_n(\mu[n]) &= 1, \quad n = \overline{n^-, n^+}, \end{aligned}$$

— эмпирических балансов

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} P(\mathbf{A}^{(p)}) \hat{\mathbf{X}}^{(n, p)} \mathbf{A}^{(p)} d\mathbf{A}^{(p)} + \int_{\mathcal{A}_{(p+1)}} F(A_{(p+1)}) A_{(p+1)} \hat{\mathbf{z}}[n] dA_{(p+1)} + \\ + \int_{\mathcal{M}_n} M_n(\mu[n]) \mu[n] d\mu[n] &= \hat{\mathbf{v}}[n], \quad n = \overline{n^-, n^+}. \end{aligned}$$

Заметим, что эмпирические балансы представляют собой систему  $(n^+ - n^-)$  блоков из  $m$  уравнений. Каждому такому блоку соответствует вектор множителей Лагранжа  $\theta^{(n)}$  размерности  $m$ . Эта задача относится к классу функциональных задач энтропийно-линейного программирования ляпуновского типа, см. [37, 38], с. 354, теорема (принцип Лагранжа для ляпуновской задачи). Она имеет аналитическое решение, параметризованное множителями Лагранжа:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} P^*(\mathbf{A}^{(p)}) &= \frac{\exp \left( - \sum_{n=n^-}^{n^+} \langle \theta^{(n)}, \hat{\mathbf{X}}^{(n,p)} \mathbf{A}^{(p)} \rangle \right)}{\mathcal{P}(\theta)}, \\ F^*(A_{(p+1)}) &= \frac{\exp \left( - \sum_{n=n^-}^{n^+} \langle \theta^{(n)}, A_{(p+1)} \hat{\mathbf{z}}[n] \rangle \right)}{\mathcal{F}(\theta)}, \\ M_n^*(\mu[n]) &= \frac{\exp(-\langle \theta^{(n)}, \mu[n] \rangle)}{\mathcal{M}_n(\theta^{(n)})}, \quad n = \overline{n^-, n^+}. \end{aligned}$$

В этих равенствах

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \mathcal{P}(\theta) &= \int_{\mathcal{A}} \exp \left( - \sum_{n=n^-}^{n^+} \langle \theta^{(n)}, \hat{\mathbf{X}}^{(n,p)} \mathbf{A}^{(p)} \rangle \right) d\mathbf{A}^{(p)}, \\ \mathcal{F}(\theta) &= \int_{\mathcal{A}_{(p+1)}} \exp \left( - \sum_{n=n^-}^{n^+} \langle \theta^{(n)}, A_{(p+1)} \hat{\mathbf{z}}[n] \rangle \right) dA_{(p+1)}, \\ \mathcal{M}_n(\theta^{(n)}) &= \int_{\mathcal{M}_n} \exp(-\langle \theta^{(n)}, \mu[n] \rangle) d\mu[n], \quad n = \overline{n^-, n^+}. \end{aligned}$$

Матрица множителей Лагранжа  $\theta = [\theta^{(n^-)}, \dots, \theta^{(n^+)}]$  определяется решением следующих балансовых уравнений:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{\mathcal{P}(\theta)} \int_{\mathcal{A}} \exp \left( - \sum_{n=n^-}^{n^+} \langle \theta^{(n)}, \hat{\mathbf{X}}^{(n,p)} \mathbf{A}^{(p)} \rangle \right) \hat{\mathbf{X}}^{(n,p)} \mathbf{A}^{(p)} d\mathbf{A}^{(p)} + \\ &+ \frac{1}{\mathcal{F}(\theta)} \int_{\mathcal{A}_{(p+1)}} \exp \left( - \sum_{n=n^-}^{n^+} \langle \theta^{(n)}, A_{(p+1)} \hat{\mathbf{z}}[n] \rangle \right) A_{(p+1)} \hat{\mathbf{z}}[n] dA_{(p+1)} + \\ &+ \frac{1}{\mathcal{M}_n(\theta^{(n)})} \int_{\mathcal{M}_n} \exp(-\langle \theta^{(n)}, \mu[n] \rangle) \mu[n] d\mu[n] = \hat{\mathbf{x}}[n], \quad n = \overline{n^-, n^+}. \end{aligned}$$

Из выражений (4.3)–(4.5) следует, что функции ПРВ  $P^*(\mathbf{A}^{(p)})$ ,  $F^*(A_{(p+1)})$  параметров РМДР-О и измерительных шумов  $M_n^*(\mu[n])$ ,  $n = \overline{n^-, n^+}$  определяются по обучающим коллекциям ретроспективных данных  $\hat{\mathbf{X}}(n^-, p)$ ,

$\hat{\mathbf{X}}(n^{-}+1, p), \dots, \hat{\mathbf{X}}(n^{+}, p)$ , данных о текущих состояниях  $\hat{\mathbf{x}}[n^{-}], \dots, \hat{\mathbf{x}}[n^{+}]$  и данных  $\hat{\mathbf{z}}[n^{-}], \dots, \hat{\mathbf{z}}[n^{+}]$ , которые генерируются РМДР-Ф.

Для получения последних применим алгоритм РМО к оцениванию функций ПРВ параметров и шумов для РМДР-Ф. Согласно [35] будем иметь:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_F = & - \int_{\mathcal{B}} W(\mathbf{B}) \ln W(\mathbf{B}) d\mathbf{B} - \\
& - \sum_{n=n^{-}}^{n^{+}} \int_{\mathcal{E}_n} Q_n(\zeta[n]) \ln Q_n(\zeta[n]) dQ_n(\zeta[n]) - \\
(4.6) \quad & - \sum_{n=n^{-}}^{n^{+}} \int_{\Xi_n} G_n(\xi[n]) \ln G_n(\xi[n]) dG_n(\xi[n]) \Rightarrow \max_{W, Q, G}
\end{aligned}$$

при ограничениях:

— нормировки ПРВ

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{B}} W(\mathbf{B}) d\mathbf{B} &= 1, \\
\int_{\mathcal{E}_n} Q_n(\zeta[n]) dQ_n(\zeta[n]) &= 1, \quad \int_{\Xi_n} G_n(\xi[n]) dG_n(\xi[n]) = 1, \quad n = \overline{n^{-}, n^{+}};
\end{aligned}$$

— эмпирических балансов

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{B}} W(\mathbf{B}^{(s)}) \hat{\mathbf{Y}}^{(n,s)} \mathbf{B}^{(s)} d\mathbf{B}^{(s)} + \int_{\mathcal{E}_n} Q_n(\zeta[n]) \zeta[n] d\zeta[n] + \\
(4.7) \quad + \int_{\Xi_n} G_n(\xi[n]) \xi[n] d\xi[n] &= \hat{\mathbf{z}}[n], \quad n = \overline{n^{-}, n^{+}}.
\end{aligned}$$

Эта задача того же класса, что и (4.3)–(4.5). Она имеет аналитическое решение в терминах множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned}
(4.8) \quad W^*(\mathbf{B}^{(s)}) &= \frac{\exp \left( - \sum_{n=n^{-}}^{n^{+}} \langle \eta^{(n)}, \hat{\mathbf{Y}}^{(n,s)} \mathbf{B}^{(s)} \rangle \right)}{\mathcal{W}(\eta)}, \\
Q_n^*(\zeta[n]) &= \frac{\exp(-\langle \zeta[n], \eta^{(n)} \rangle)}{\mathcal{Q}_n(\eta^{(n)})}, \\
G_n^*(\xi[n]) &= \frac{\exp(-\langle \xi[n], \eta^{(n)} \rangle)}{\mathcal{G}_n(\eta^{(n)})}, \quad n = \overline{n^{-}, n^{+}}, \\
\eta &= [\eta^{(n^{-})}, \dots, \eta^{(n^{+})}].
\end{aligned}$$

В этих равенствах

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \mathcal{W}(\eta) &= \int_{\mathcal{B}} \exp \left( - \sum_{n=n^-}^{n^+} \langle \eta^{(n)}, \hat{\mathbf{Y}}^{(n,s)} \mathbf{B}^{(s)} \rangle \right) d\mathbf{B}^{(s)}, \\ \mathcal{Q}_n(\eta^{(n)}) &= \int_{\mathcal{E}_n} \exp \left( - \langle \zeta[n], \eta^{(n)} \rangle \right) d\zeta[n], \\ \mathcal{G}_n(\eta^{(n)}) &= \int_{\Xi_n} \exp \left( - \langle \xi[n], \eta^{(n)} \rangle \right) d\xi[n], \\ n &= \overline{n^-, n^+}. \end{aligned}$$

Матрица множителей Лагранжа  $\eta$  определяется решением следующих балансовых уравнений:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{W}(\eta)} \int_{\mathcal{B}} \exp \left( - \sum_{n=n^-}^{n^+} \langle \eta^{(n)}, \hat{\mathbf{Y}}^{(n,s)} \mathbf{B}^{(s)} \rangle \right) \hat{\mathbf{Y}}^{(n,s)} \mathbf{B}^{(s)} d\mathbf{B}^{(s)} + \\ + \frac{1}{\mathcal{Q}_n(\eta^{(n)})} \int_{\mathcal{E}_n} \exp \left( - \langle \zeta[n], \eta^{(n)} \rangle \right) \zeta[n] d\zeta[n] + \\ + \frac{1}{\mathcal{G}_n(\eta^{(n)})} \int_{\Xi_n} \exp \left( - \langle \xi[n], \eta^{(n)} \rangle \right) \xi[n] d\xi[n] &= \hat{\mathbf{z}}[n], \\ n &= \overline{n^-, n^+}. \end{aligned}$$

## 5. Рандомизированное прогнозирование суточной электрической нагрузки энергетической системы

### 5.1. Модель динамической регрессии

Суточная электрическая нагрузка  $L$  энергосистемы зависит от многих и разнообразных факторов. Здесь ограничимся одним наиболее существенным внешним фактором, а именно температурой  $T$  окружающего воздуха. Суточное изменение температуры носит колебательный характер. Эти колебания отражаются на нагрузке, но с некоторым временным сдвигом. Причиной этого сдвига является инерция электрической сети, по которой передается электрическая энергия от генератора к потребителям.

Следуя общей структуре РМДР, изложенной в разделе 2, модель нагрузки ( $LT$ -модель) описывает динамическую связь нагрузки и температуры окружающего воздуха, а модель температуры ( $T\xi$ -модель) описывает динамику суточной температуры. Что касается  $LT$ -модели, то существует довольно много ее версий, но все они статические, т.е. описывающие связь нагрузки и температуры в текущие моменты времени [39]. Температурная суточная

динамика имеет колебательный характер, который, в частности, описывается периодической авторегрессионной моделью [40].

Следует отметить, что влияние температуры на нагрузку динамическое, т.е. изменение нагрузки под влиянием температуры в данный момент времени зависит от ее значения в предыдущий момент времени. Аналогичным свойством обладает температурная колебательная динамика.

Поэтому в рамках общего рандомизированного подхода предлагается  $LT$ -модель описывать моделью динамической регрессии первого порядка со случайными параметрами,  $T\xi$ -модель формировать в виде динамической регрессии второго порядка со случайнym параметром и случайнym входом  $\xi$ . Тогда  $LT\xi$ -модель будет композицией двух предыдущих.

Ограничиваюсь линейным классом моделей, рандомизированную динамическую регрессионную модель “нагрузка-температура” ( $LT$ -модель) первого порядка можно представить в следующем виде:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} L[n] &= aL[n-1] + bT[n], \\ v[n] &= L[n] + \mu[n], \quad n = \overline{1, 24}, \end{aligned}$$

где случайные независимые параметры  $a, b$  принимают значения в интервалах:

$$(5.2) \quad a \in \mathcal{A} = [a^-, a^+], \quad b \in \mathcal{B} = [b^-, b^+].$$

Их вероятностные свойства характеризуются функциями ПРВ  $P(a)$ ,  $F(b)$ , определенными на множествах  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  соответственно. Случайный шум  $\mu[n]$ , имитирующий ошибки в измерениях нагрузки, также интервального типа. В общем случае для каждого момента времени размеры интервалов могут быть различными, т.е.

$$(5.3) \quad \mu[n] \in \mathcal{M}_n = [\mu^-[n], \mu^+[n]],$$

с функциями ПРВ  $M_n(\mu[n])$ ,  $n = \overline{1, 24}$ .

Рассмотрим  $T\xi$ -модель. Для имитации колебательного характера суточного изменения температуры воспользуемся рандомизированной моделью динамической регрессии второго порядка

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \tau[n] &= c(2, 1\tau[n-1] - 1, 1\tau[n-2]), \quad c = \frac{1}{1 + \omega^2}, \\ T[n] &= t + \tau[n] + \xi[n], \end{aligned}$$

где  $\omega$  — частота колебаний температуры,  $t$  — среднесуточная температура. Эти параметры случайные, интервального типа, т.е.

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \omega \in \Omega &= [\omega^-, \omega^+], \quad c \in \mathcal{C} = [c^-, c^+], \\ c^- &= \frac{1}{1 + (\omega^+)^2} > 0, \quad c^+ = \frac{1}{1 + (\omega^-)^2} > c^- > 0. \end{aligned}$$

Вероятностные свойства параметров характеризуются функциями ПРВ  $W(c)$ , определенными на соответствующих интервалах.

В уравнение (5.4) входит случайный шум, имитируемый независимыми случайными величинами  $\xi[n]$ , значения которых в каждом измерении  $n$  могут принадлежать различным интервалам, т.е.

$$(5.6) \quad \xi[n] \in \Xi_n = [\xi^-_n, \xi^+_n].$$

Вероятностные свойства случайной величины  $\xi[n]$  характеризуются функцией ПРВ  $Q_n(\xi[n])$ ,  $n = \overline{1, 24}$ .

Таким образом, уравнения (5.1), (5.4), моделирующие динамику нагрузки в энергосистеме, характеризуются следующими функциями ПРВ:

- $LT$ -модель: параметры  $P(a), F(b)$ , шум  $M_n(\mu[n])$ ,  $n = \overline{n^-, n^+}$ ;
- $T\xi$ -модель: параметры  $W(c)$ , шум  $Q_n(\xi[n])$ ,  $n = \overline{n^-, n^+}$ .

## 5.2. Обучающая коллекция данных

Для оценивания функций ПРВ будут использоваться приведенные к единичному интервалу реальные данные из датасета GEFCom2014 (см. [36]) по изменению суточной нагрузки  $0 \leq L_r^{(i)}[n] \leq 1$ , среднесуточной температуры  $0 \leq t_r^{(i)} \leq 1$  и отклонения температуры  $0 \leq \tau_r^{(i)}[n] \leq 1$  от среднесуточного значения.

Нормировка осуществлялась следующим образом:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} L_r^{(i)}[n] &= \frac{\hat{L}_r^{(i)}[n] - \hat{L}_{\min}^{(i)}}{\hat{L}_{\max}^{(i)} - \hat{L}_{\min}^{(i)}}, \\ \tau_r^{(i)}[n] &= \frac{\hat{\tau}_r^{(i)}[n] - \hat{\tau}_{\min}^{(i)}}{\hat{\tau}_{\max}^{(i)} - \hat{\tau}_{\min}^{(i)}}, \\ t_r^{(i)} &= \frac{1}{n^+ - n^-} \sum_{n=n^-}^{n^+} \tau_r^{(i)}[n], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\min}^{(i)} &= \min_n \hat{L}^{(i)}[n], & \hat{L}_{\max}^{(i)} &= \max_n \hat{L}^{(i)}[n], \\ \hat{\tau}_{\min}^{(i)} &= \min_n \hat{\tau}^{(i)}[n], & \hat{\tau}_{\max}^{(i)} &= \max_n \hat{\tau}^{(i)}[n]. \end{aligned}$$

На рис. 2 показаны графики нагрузки  $L_r^{(i)}[n]$ , отклонения температуры  $\tau_r^{(i)}[n]$  и данные по среднесуточной температуре  $t_r^{(i)}$  для 03.07.2016 ( $i = 1$ ), 04.07.2016 ( $i = 2$ ), 05.07.2016 ( $i = 3$ ) в качестве обучающей коллекции. Обозначим интервал обучения как  $\mathcal{T}_l = [n^-, n^+] = [1, 24]$ , т.е. обучение будет производиться по данным за 24 ч.

Согласно (5.1), (5.4) сформируем векторы переменных модели на интервале обучения  $n \in \mathcal{T}_l$  и соответствующих им реальных данных:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= \left\{ L^{(i)}[1], \dots, L^{(i)}[24] \right\}, & \mathbf{L}_r^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= \left\{ L_r^{(i)}[1], \dots, L_r^{(i)}[24] \right\}, \\ \mathbf{L}^{(i)}(\mathcal{T}_l - 1) &= \left\{ L^{(i)}[0], \dots, L^{(i)}[23] \right\}, & \mathbf{L}_r^{(i)}(\mathcal{T}_l - 1) &= \left\{ L_r^{(i)}[0], \dots, L_r^{(i)}[23] \right\}, \end{aligned}$$

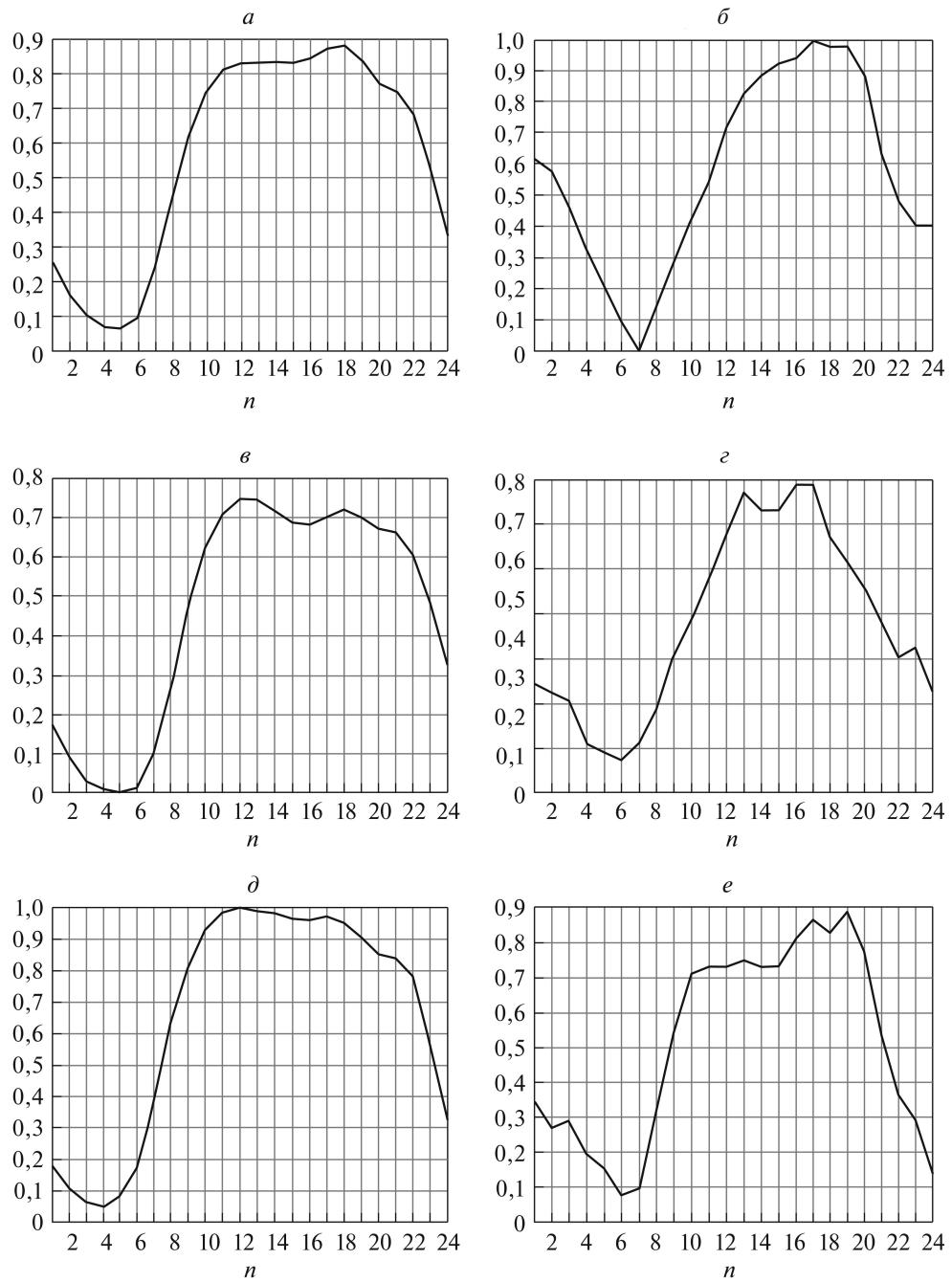


Рис. 2. Нагрузка  $L_r^{(i)}[n]$  и отклонение температуры  $\tau_r^{(i)}[n]$  для  $i = \overline{1,3}$ . *a* —  $L_r^{(1)}[n]$ , *b* —  $\tau_r^{(1)}[n]$ ,  $t_r^{(1)} = 0,5721$ , *c* —  $L_r^{(2)}[n]$ , *d* —  $\tau_r^{(2)}[n]$ ,  $t_r^{(2)} = 0,4784$ , *d* —  $L_r^{(3)}[n]$ , *e* —  $\tau_r^{(3)}[n]$ ,  $t_r^{(3)} = 0,5056$ .

$$\mathbf{V}^{(i)}(\mathcal{T}_l) = \left\{ v^{(i)}[1], \dots, v^{(i)}[24] \right\}, \quad \mathbf{V}_r^{(i)}(\mathcal{T}_l) = \left\{ v_r^{(i)}[1], \dots, v_r^{(i)}[24] \right\},$$

$$\mathbf{T}^{(i)}(\mathcal{T}_l) = \left\{ \tau^{(i)}[1], \dots, \tau^{(i)}[24] \right\}, \quad \mathbf{T}_r^{(i)}(\mathcal{T}_l) = \left\{ \tau_r^{(i)}[1], \dots, \tau_r^{(i)}[24] \right\},$$

$$\tilde{\mathbf{T}}^{(i)}(\mathcal{T}_l - 1, \mathcal{T}_l - 2) = \left\{ 2, 1\tau^{(i)}[0] - 1, 1\tau^{(i)}[-1], \dots, 2, 1\tau^{(i)}[23] - 1, 1\tau^{(i)}[22] \right\},$$

$$\tilde{\mathbf{T}}_r^{(i)}(\mathcal{T}_l - 1, \mathcal{T}_l - 2) = \left\{ 2, 1\tau_r^{(i)}[0] - 1, 1\tau_r^{(i)}[-1], \dots, 2, 1\tau_r^{(i)}[23] - 1, 1\tau_r^{(i)}[22] \right\},$$

$$\mu^{(i)}(\mathcal{T}_l) = \left\{ \mu^{(i)}[1], \dots, \mu^{(i)}[24] \right\}, \quad \xi^{(i)}(\mathcal{T}_l) = \left\{ \xi^{(i)}[1], \dots, \xi^{(i)}[24] \right\}.$$

В терминах (5.2)  $LT$ - и  $T\xi$ -модели на интервале обучения  $\mathcal{T}_l$  имеют вид

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \mathbf{L}^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= a\mathbf{L}^{(i)}(\mathcal{T}_l - 1) + b\mathbf{T}^{(i)}(\mathcal{T}_l), \\ \mathbf{V}^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= \mathbf{L}^{(i)}(\mathcal{T}_l) + \mu^{(i)}(\mathcal{T}_l), \\ \mathbf{T}^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= c\tilde{\mathbf{T}}^{(i)}(\mathcal{T}_l - 1, \mathcal{T}_l - 2), \\ \mathbf{T}^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= t + \tilde{\mathbf{T}}^{(i)}(\mathcal{T}_l) + \xi^{(i)}(\mathcal{T}_l). \end{aligned}$$

Значения случайных параметров лежат в следующих интервалах:

$$(5.9) \quad \mathcal{A} = [0,05; 0,15], \quad \mathcal{B} = [0,5; 1,0], \quad \mathcal{C} = [0,75; 0,85].$$

Шумы принимают значения в следующих интервалах:

$$(5.10) \quad \mathcal{M}_n = [-0,1; 0,1], \quad \Xi_n = [-0,1; 0,1].$$

### 5.3. Энтропийно-оптимальные функции ПРВ параметров и шумов

Применяя технику из раздела 3, получим следующие выражения для функций ПРВ, параметризованных множителями Лагранжа  $\theta^{(i)} = \{\theta_1^{(i)}, \dots, \theta_{24}^{(i)}\}$  для  $LT$ -модели (5.1)–(5.3):

$$(5.11) \quad \begin{aligned} P_i^*(a, \theta^{(i)}) &= \frac{l_r^{(i)}(\theta) \exp(-al_r^{(i)}(\theta))}{\exp(-a^-l_r^{(i)}(\theta)) - \exp(-a^+l_r^{(i)}(\theta))}, \\ F_i^*(b, \theta^{(i)}) &= \frac{h_r^{(i)}(\theta) \exp(-bh_r^{(i)}(\theta))}{\exp(-b^-h_r^{(i)}(\theta)) - \exp(-b^+h_r^{(i)}(\theta))}, \\ M_{i,n}^*(\mu[n]) &= \frac{\theta_n^{(i)} \exp(-\theta_n^{(i)}\mu[n])}{\exp(-\mu^-[n]\theta_n^{(i)}) - \exp(-\mu^+[n]\theta_n^{(i)})}, \quad n = \overline{1, 24}. \end{aligned}$$

В этих равенствах

$$(5.12) \quad l_r^{(i)}(\theta) = \sum_{n=1}^{24} \theta_n L_r^{(i)}[n-1], \quad h_r^{(i)}(\theta) = \sum_{n=1}^{24} \theta_n T_r^{(i)}[n].$$

Множители Лагранжа  $\theta^{(i)}$  определяются решением следующей системы балансовых уравнений:

$$(5.13) \quad L^{(i)}(\theta^{(i)}) + T^{(i)}(\theta^{(i)}) + M_n^{(i)}(\theta_n^{(i)}) = L_r^{(i)}[n], \quad n = \overline{1, 24},$$

где

$$(5.14) \quad \begin{aligned} L^{(i)}(\theta^{(i)}) &= \\ &= \frac{\exp\left(-a^-l_r^{(i)}(\theta^{(i)})\right)\left(a^-l^{(i)}(\theta^{(i)})+1\right)-\exp\left(-a^+l_r^{(i)}(\theta^{(i)})\right)\left(a^+l^{(i)}(\theta^{(i)})+1\right)}{\exp\left(-a^-l^{(i)}(\theta^{(i)})\right)-\exp\left(-a^+l^{(i)}(\theta^{(i)})\right)}, \\ T^{(i)}(\theta^{(i)}) &= \\ &= \frac{\exp\left(-b^-h_r^{(i)}(\theta^{(i)})\right)\left(b^-h^{(i)}(\theta^{(i)})+1\right)-\exp\left(-b^+h_r^{(i)}(\theta^{(i)})\right)\left(b^+h^{(i)}(\theta^{(i)})+1\right)}{\exp\left(-b^-h^{(i)}(\theta^{(i)})\right)-\exp\left(-b^+h^{(i)}(\theta^{(i)})\right)}, \\ M_n^{(i)}(\theta_n^{(i)}) &= \\ &= \frac{\exp\left(-\mu^-[n]\theta_n^{(i)}\right)\left(\mu^-[n]\theta_n^{(i)}+1\right)-\exp\left(-\mu^+[n]\theta_n^{(i)}\right)\left(\mu^+[n]\theta_n^{(i)}+1\right)}{\theta_n^{(i)}\left(\exp\left(-\mu^-[n]\theta_n^{(i)}\right)-\exp\left(-\mu^+[n]\theta_n^{(i)}\right)\right)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим  $T\xi$ -модель. Энтропийно-оптимальные ПРВ, параметризованные множителями Лагранжа, имеют вид

$$\begin{aligned} W_i^*(c, \eta^{(i)}) &= \frac{\tilde{h}_r^{(i)}(\eta) \exp\left(-c\tilde{h}_r^{(i)}(\eta)\right)}{\exp\left(-a^-\tilde{h}_r^{(i)}(\eta)\right)-\exp\left(-a^+\tilde{h}_r^{(i)}(\eta)\right)}, \\ Q_{i,n}^*(\xi[n]) &= \frac{\eta_n^{(i)} \exp\left(-\eta_n^{(i)}\xi[n]\right)}{\exp\left(-\xi^-[n]\eta_n^{(i)}\right)-\exp\left(-\xi^+[n]\eta_n^{(i)}\right)}, \quad n = \overline{1, 24}. \end{aligned}$$

В этих равенствах

$$(5.15) \quad \tilde{h}_r^{(i)}(\eta) = \sum_{n=1}^{24} \eta_n(2, 1T_r^{(i)}[n-1] - 1, 1T_r^{(i)}[n-2]), \quad q^{(i)}(\eta^{(i)}) = \sum_{n=1}^{24} \eta_n^{(i)}.$$

Множители Лагранжа  $\eta^{(i)}$  определяются решением следующей системы балансовых уравнений:

$$(5.16) \quad D^{(i)}(\eta^{(i)}) + N^{(i)}(\eta^{(i)}) + K_n^{(i)}(\eta_n^{(i)}) = T_r^{(i)}[n], \quad n = \overline{1, 24},$$

где

$$\begin{aligned} D^{(i)}(\eta^{(i)}) &= \\ &= \frac{\exp\left(-t^-q^{(i)}(\eta^{(i)})\right)\left(t^-q^{(i)}(\eta^{(i)})+1\right)-\exp\left(-t^+q^{(i)}(\eta^{(i)})\right)\left(t^+q^{(i)}(\eta^{(i)})+1\right)}{\exp\left(-t^-q^{(i)}(\eta^{(i)})\right)-\exp\left(-t^+q^{(i)}(\eta^{(i)})\right)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& N^{(i)} \left( \eta^{(i)} \right) = \\
& = \frac{\exp \left( -c^- \tilde{h}_r^{(i)} (\eta^{(i)}) \right) \left( c^- \tilde{h}^{(i)} (\eta^{(i)}) + 1 \right) - \exp(-c^+ \tilde{h}_r^{(i)} (\eta^{(i)})) (c^+ \tilde{h}^{(i)} (\eta^{(i)}) + 1)}{\exp(-c^- \tilde{h}^{(i)} (\eta^{(i)})) - \exp(-c^+ \tilde{h}^{(i)} (\eta^{(i)}))}, \\
& K_n^{(i)} \left( \eta_n^{(i)} \right) = \\
(5.17) \quad & = \frac{\exp \left( -\xi^- [n] \eta_n^{(i)} \right) \left( \xi^- [n] \eta_n^{(i)} + 1 \right) - \exp \left( -\xi^+ [n] \eta_n^{(i)} \right) \left( \xi^+ [n] \eta_n^{(i)} + 1 \right)}{\eta_n^{(i)} \left( \exp(-\xi^- [n] \eta_n^{(i)}) - \exp(-\xi^+ [n] \eta_n^{(i)}) \right)}.
\end{aligned}$$

#### 5.4. Обучение модели

Использованием данных по суточным изменениям нагрузки и температуры (см. рис. 2) для трех указанных выше суток были сформированы балансовые уравнения (5.13), (5.14), (5.16), (5.17). Решение этих уравнений определялось путем минимизации квадратичной невязки между левой и правой частями этих уравнений. Поскольку уравнения существенно нелинейные, найденные значения множителей Лагранжа, приведенные в табл. 1, соответствуют

**Таблица 1.** Множители Лагранжа  $\theta, \eta$

Время	$\theta^{(1)}$	$\theta^{(2)}$	$\theta^{(3)}$	$\eta^{(1)}$	$\eta^{(2)}$	$\eta^{(3)}$
1	-29,72	7009,28	1038,07	14,63	21,22	17,34
2	1,58	230,89	35,35	19,52	26,71	28,32
3	-4,09	369,96	26,23	35,91	31,60	26,33
4	-4,68	29,93	11,96	55,83	127,82	52,08
5	-7,21	24,25	1,03	96,85	642,35	110,94
6	-9,26	13,72	-15,76	592,99	7009,28	4729,52
7	-59,09	-5,96	-7009,28	7009,28	183,92	7009,28
8	-7009,28	-33,99	-767,99	48,21	39,94	23,16
9	-766,00	-1409,28	-22,91	66,58	12,28	-1,26
10	-50,90	-4229,90	-4,27	37,38	2,35	-19,78
11	-18,97	-45,22	3,72	22,51	-8,82	-22,73
12	-11,42	-15,07	9,17	7,16	-27,06	-23,06
13	-13,94	2,59	17,38	5,72	-172,25	-27,06
14	-17,62	5,82	14,94	2,83	-65,29	-23,02
15	-18,18	9,33	17,74	-0,30	-57,45	-23,15
16	-27,28	11,35	21,85	-1,24	-482,69	-47,78
17	-49,55	4,50	22,68	-5,49	-889,02	-130,49
18	-25,41	-7,09	29,39	-0,89	-28,12	-60,71
19	-8,20	-4,66	98,03	-4,23	-14,20	-270,17
20	0,95	-4,89	52,27	3,70	-6,41	-31,47
21	1,01	-16,37	8,15	21,16	2,48	-1,23
22	22,00	-8,24	7,45	17,85	12,15	14,86
23	2881,43	17,00	902,73	26,78	9,98	26,39
24	512,14	36,30	355,47	27,32	24,65	121,44
$l_r^{(i)}(\theta^*)$	9,71	6,04	6,09			
$h_r^{(i)}(\theta^*)$	0,06	0,58	0,81			
$\tilde{h}_r^{(i)}(\eta^*)$				0,41	0,05	0,19

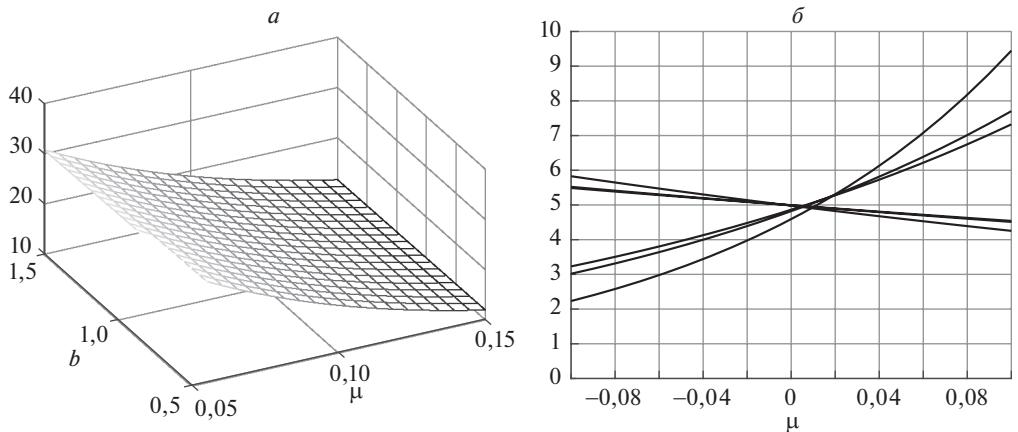


Рис. 3.  $a - U_1^*(a, b)$ ,  $\delta - M_{1,n}^*(\mu)$ .

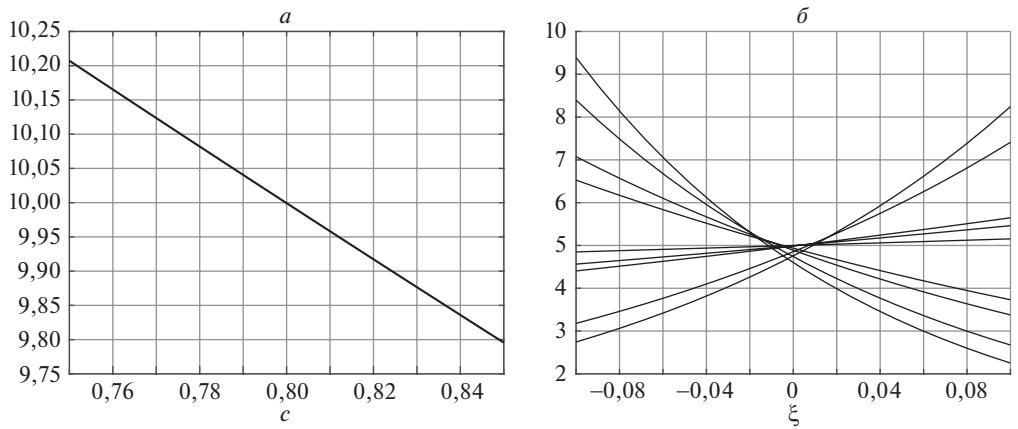


Рис. 4.  $a - W_1^*(c)$ ,  $\delta - Q_{1,n}^*(\xi)$ .

одному из локальных минимумов невязки. Все вычисления были реализованы в среде MATLAB, оптимизация проводилась с помощью функции `fsove`.

Поскольку в  $LT$ -модели параметры независимые, функции совместной ПРВ параметров  $U_i^*(a, b) = P_i^*(a)F_i^*(b)$  и шумов имеют вид

$$\begin{aligned}
 (5.18) \quad U_1^*(a, b) &= 53,09 \exp(-9,72a) \exp(0,06b), \\
 U_2^*(a, b) &= 55,49 \exp(-6,04a) \exp(0,58b), \\
 U_3^*(a, b) &= 65,81 \exp(-6,09a) \exp(-0,81b),
 \end{aligned}$$

$$(a, b) \in [0,05; 0,15] \cup [0,5; 1,0], \quad \mu \in [-0,1, 0,1], \quad i = \overline{1, 24}.$$

Функции ПРВ — экспоненциального типа. Графики для  $i = 1$  показаны на рис. 3.

Функции ПРВ параметров и шумов для  $T\xi$ -модели имеют вид

$$W_1^*(c) = 13,90 \exp(-0,41c),$$

$$W_2^*(c) = 10,43 \exp(-0,05c),$$

$$W_3^*(c) = 11,65 \exp(-0,19c),$$

$$c \in [0,75; 0,85], \quad \xi \in [-0,1; 0,1], \quad i = \overline{1, 24}.$$

Графики для  $i = 1$  показаны на рис. 4.

Таким образом, рандомизированная  $LT\xi$ -модель представляет собой генератор случайных траекторий с энтропийно-оптимальными функциями ПРВ параметров и шумов,

$$(5.19) \quad \begin{aligned} L[n] &= aL[n-1] + bT[n], \quad (P^*(a), F^*(b)), \\ v[n] &= L[n] + \mu[n], \quad M_n^*(\mu[n]), \\ \tau[n] &= c(2\tau[n-1] - \tau[n-2]), \quad W^*(c), \quad i = \overline{1, 3}, \\ T[n] &= t + \tau[n] + \xi[n], \quad Q_n^*(\xi[n]). \end{aligned}$$

Генерация соответствующих ансамблей происходит путем сэмплирования найденных ПРВ параметров и шумов методом исключений (Acceptance-Rejection (AR), Rejection Sampling (RS)) [41]. При реализации расчетов было использовано 100 сэмплов по каждому параметру и 100 сэмплов по шуму, таким образом, ансамбль состоял из  $10^4$  траекторий.

### 5.5. Тестирование модели

Исследование адекватности модели осуществляется путем собственного и перекрестного тестирования  $LT$ -модели и  $T\xi$ -модели на реальных данных по нагрузке и температуре соответственно за 03.07.2016 ( $i = 1$ ), 04.07.2016 ( $i = 2$ ), 05.07.2016 ( $i = 3$ ). Под собственным тестированием понимается генерирование ансамбля траекторий с энтропийно-оптимальными параметрами и шумами для дня  $i$ , вычисления средней (mean) и медианной (med) траекторий и дисперсионной трубки (std±) ансамбля и сравнения средней траектории с реальными траекториями по нагрузке и температуре для этого же дня  $i$ . Качество приближения характеризуется относительными ошибками по нагрузке

$$(5.20) \quad \delta_L^{(i)} = \frac{\sum_{n=1}^{24} \left( L_{\text{mean}}^{(i)}[n] - L_r^{(i)}[n] \right)^2}{\sum_{n=1}^{24} \left( L_{\text{mean}}^{(i)}[n] \right)^2 + \sum_{n=1}^{24} \left( L_r^{(i)}[n] \right)^2}, \quad i = \overline{1, 3},$$

и по температуре

$$(5.21) \quad \delta_T^{(i)} = \frac{\sum_{n=1}^{24} \left( T_{\text{mean}}^{(i)}[n] - T_r^{(i)}[n] \right)^2}{\sum_{n=1}^{24} \left( T_{\text{mean}}^{(i)}[n] \right)^2 + \sum_{n=1}^{24} \left( T_r^{(i)}[n] \right)^2}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

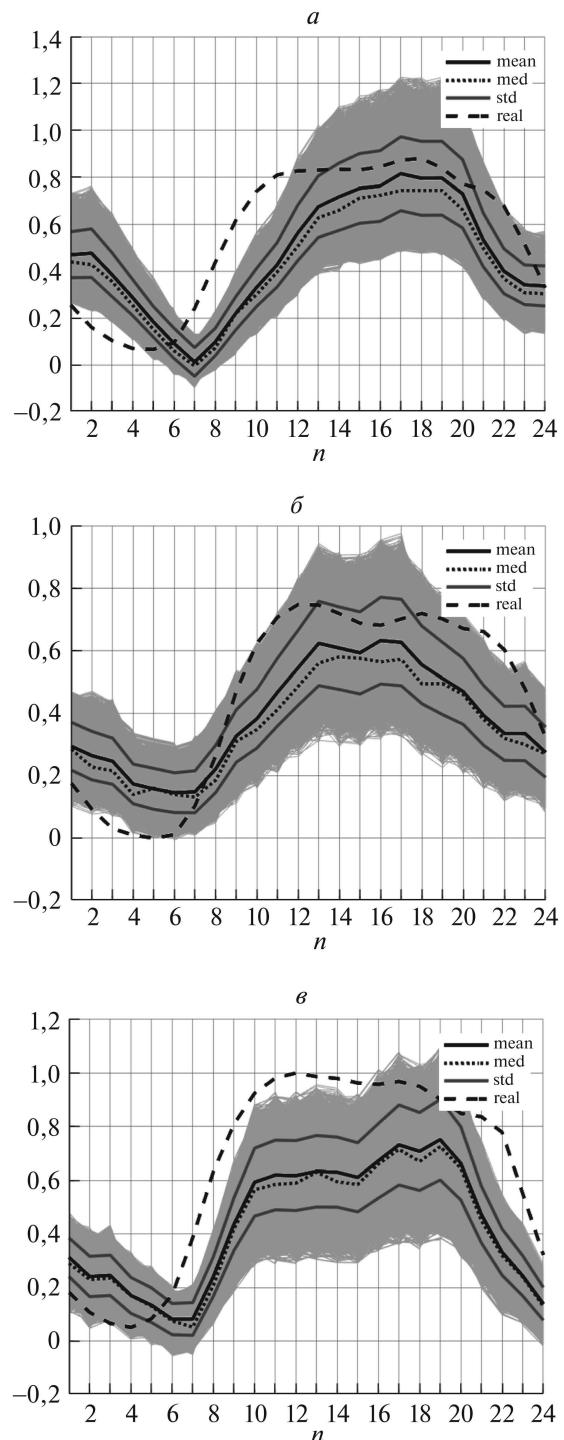


Рис. 5. Ансамбли  $LT$ -модели.  $a - \delta_L^{(1)} = 0,0703$ ,  $b - \delta_L^{(2)} = 0,0523$ ,  $c - \delta_L^{(3)} = 0,1038$ .

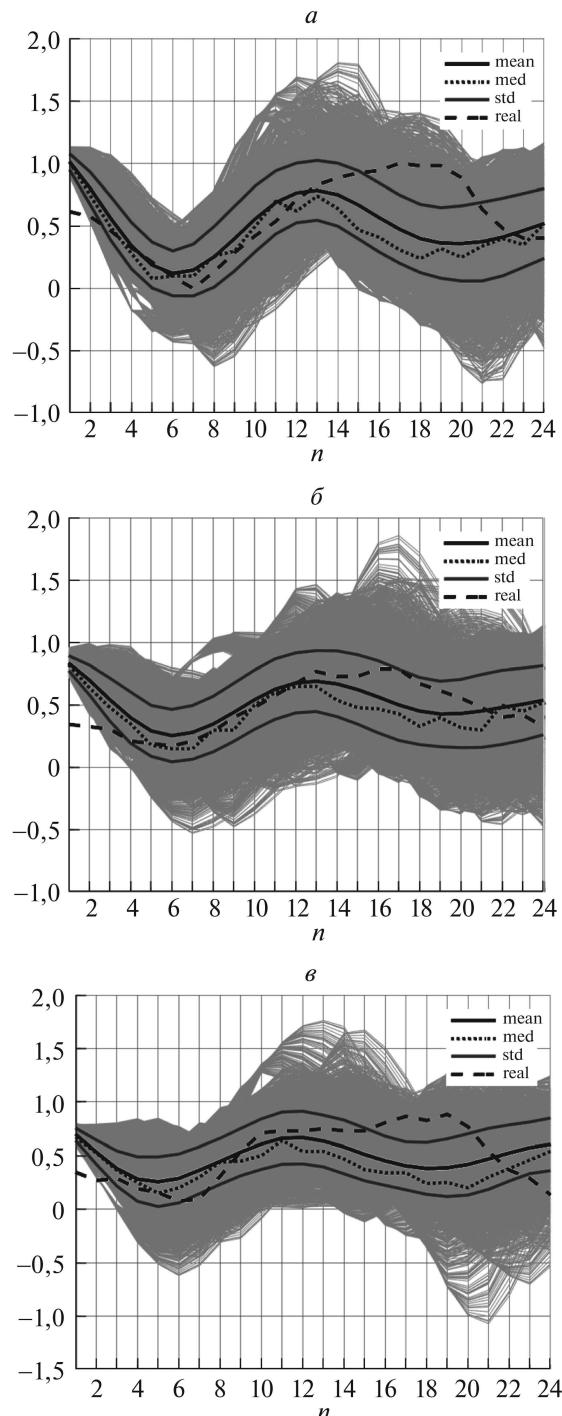


Рис. 6. *a* — Аnsамбли  $T\xi$ -модели,  $\delta = \delta_T^{(1)} = 0,1004$ ,  $\varepsilon = \delta_T^{(2)} = 0,0582$ ,  $\varepsilon = \delta_T^{(3)} = 0,0942$ .

**Таблица 2.** Значения  $\delta_L$  на перекрестном тестировании  $LT$ -модели.  
Среднее значение  $\delta_L = 0,0530$

$i/j$	1	2	3
1		0,0495	0,1052
2	0,0858		0,1428
3	0,0569	0,0364	

**Таблица 3.** Значения  $\delta_T$  на перекрестном тестировании  $T\xi$ -модели.  
Среднее значение  $\delta_L = 0,0757$

$i/j$	1	2	3
1		0,1051	0,1079
2	0,1506		0,1185
3	0,1315	0,0676	

**Таблица 4.** Значения  $\delta_T$  на перекрестном тестировании  $LT\xi$ -модели. Среднее значение  $\delta_L = 0,1478$

$i/j$	1	2	3
1		0,1437	0,2659
2	0,1756		0,2322
3	0,3475	0,1655	

Под перекрестным тестированием понимается та же процедура, но сравнения средних траекторий с реальными по нагрузке и температуре производятся для дней  $j \neq i$ . Качество приближения характеризуется относительными ошибками по нагрузке

$$(5.22) \quad \delta_L^{(i,j)} = \frac{\sum_{n=1}^{24} \left( L_{\text{mean}}^{(i)}[n] - L_r^{(j)}[n] \right)^2}{\sum_{n=1}^{24} \left( L_{\text{mean}}^{(i)}[n] \right)^2 + \sum_{n=1}^{24} \left( L_r^{(j)}[n] \right)^2}, \quad i = \overline{1,3}, \quad i \neq j,$$

и по температуре

$$(5.23) \quad \delta_T^{(i,j)} = \frac{\sum_{n=1}^{24} \left( T_{\text{mean}}^{(i)}[n] - T_r^{(j)}[n] \right)^2}{\sum_{n=1}^{24} \left( T_{\text{mean}}^{(i)}[n] \right)^2 + \sum_{n=1}^{24} \left( T_r^{(j)}[n] \right)^2}, \quad i = \overline{1,3}, \quad i \neq j.$$

**Собственное тестирование.** Для  $LT$ -модели используются реальные данные по температуре  $T_r^{(i)}[n]$  и энтропийно-оптимальные ПРВ  $P_i^*(a), F_i^*(b)$  параметров  $(a, b)$  и  $M_1^*\mu[1], \dots, M_{24}^*\mu[24]$  шумов  $\mu[n]$ . Генерируются ансамбли  $\mathbb{L}^{(i)}$  с помощью *сэмплирования* указанных ПРВ. Вычисляются средняя траектория  $L_{\text{mean}}^{(i)}[n]$ , медианная траектория  $L_{\text{med}}^{(i)}[n]$  и траектории  $L_{\text{std}\pm}^{(i)}[n]$ , соответствующие границам дисперсионной трубки. Вычисляются ошибки  $\delta_L(i)$ . На рис. 5 показаны ансамбли и относительные ошибки  $\delta_L^{(i)}$  для трех указанных дней.

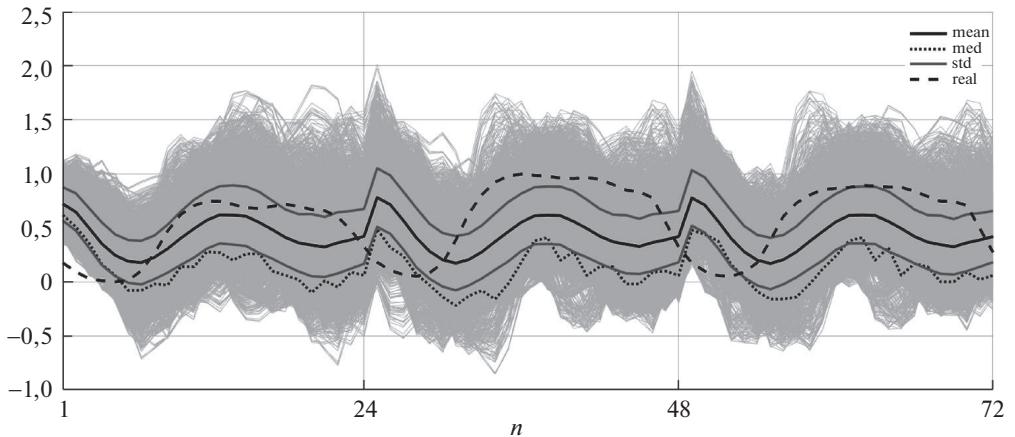


Рис. 7. Прогноз на 3 дня с помощью  $LT\xi$ -модели.

Тестирование  $T\xi$ -модели осуществляется путем генерации ансамбля  $\mathbb{T}^{(i)}$  случайных траекторий  $T^{(i)}[n]$ ,  $n = \overline{1, 24}$  с энтропийно-оптимальными ПРВ  $W^{(i)}(c)$  и  $Q_1^*(\xi[1]), \dots, Q_{24}^*(\xi[24])$  путем их сэмплирования. Вычисляются средняя траектория  $T_{\text{mean}}^{(i)}[n]$ , медианная траектория  $T_{\text{med}}^{(i)}[n]$  и траектории  $T_{\text{std}\pm}^{(i)}[n]$ , соответствующие границам дисперсионной трубы. На рис. 6 показаны ансамбли и относительные ошибки  $\delta_T^{(i)}$  для трех контрольных дней.

**Перекрестное тестирование.** При перекрестном тестировании используются модели  $LT$  и  $LT\xi$ , обученные по данным для дня  $i$ , а их средняя траектория сравнивается с данными дней  $j \neq i$ . В табл. 2–4 указаны полученные значения ошибок.

### 5.6. Рандомизированное прогнозирование $N$ -суточной нагрузки

При рандомизированном прогнозировании  $N$ -суточной нагрузки используется  $LT\xi$ -модель, обученная на интервале  $\mathcal{T}_l$ . Для характеристики качества прогноза будем использовать  $LT\xi$ -модель с энтропийно-оптимальными ПРВ, полученными по данным первого ( $i = 1$ ) дня.

Сэмплируя указанные ПРВ, построим односуточный ( $n \in [1, 24]$ ), двухсуточный ( $n \in [1, 48]$ ) и трехсуточный ( $n \in [1, 72]$ ) ансамбли. Для этих ансамблей определим средние траектории  $L_{\text{mean}}[n]$ , медианные траектории  $L_{\text{med}}[n]$ , граничные дисперсионные траектории  $L_{\text{std}\pm}[n]$ . Результаты прогнозов сравниваются с реальными данными с 03.07.2006 по 06.07.2006 ( $i = \overline{1, 4}$ ). Качество прогнозирования характеризуется относительными ошибками, вычисляемыми аналогично (5.22)–(5.23).

На рис. 7 показаны результаты 24, 48 и 72 часовых рандомизированных прогнозов нагрузки, их вероятностные характеристики: средние и медианные траектории, граничные траектории дисперсионных трубок. Ошибки между модельным прогнозом и реальными данными показаны в табл. 5.

Таблица 5. Точность трехдневного прогноза с помощью  $LT\xi$ -модели

$\delta_L^{(2)}$	$\delta_L^{(3)}$	$\delta_L^{(4)}$
0,1509	0,2515	0,2133

## 6. Заключение

Предлагается новый метод прогнозирования — рандомизированное прогнозирование, ориентированное на осуществление предсказательных состояний в условиях неопределенности. Метод базируется на моделях динамической регрессии со случайными параметрами. Предложен алгоритм рандомизированного обучения модели. Реализация рандомизированного прогноза осуществляется путем сэмплирования энтропийно-оптимальных ПРВ параметров модели и измерительных шумов. Предлагаемый метод применен для рандомизированного прогнозирования суточной электрической нагрузки энергетической системы с использованием реальных данных, заимствованных из GEFCom2014.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vapnik V.N.* Statistical Learning Theory. N.Y.: John Wiley& Sons Inc., 1998.
2. *Bishop C.M.* Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, Series: Information Theory and Statistics, 2006.
3. *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* The Elements of Statistical Learning. Springer, 2001. <http://www-stat.stanford.edu/tibs/ElemStatLearn>.
4. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика, 1985.
5. Tarasov A. Forecasting US money growth using economic uncertainty measures and regularization techniques // Int. J. Forecast. 2019. V. 35. P. 443–457.
6. Marcellino M., Stock J.H., Warson M. A comparison of direct and iterated multi-steps AR methods for forecasting macroeconomic time series // J. Economet. 2006. V. 135(1–2). P. 499–526.
7. Eitrheim O., Terasirta T. Testing the adequacy of smooth transition autoregressive models // J. Economet. 1996. v.74(1), P. 59–75.
8. Molodtsova T., Papell D. Out-of-sample exchange rate predictability with TR fundamentals // J. Int. Econom. 2009. V. 77. P. 167–180.
9. Granger C.W. Terasirta T. Modelling Nonlinear Economic Relationship. Oxford: Oxford Univer. Press, 1993.
10. Wang R., Motley B., Stamatogiannis M. Forecasting the exchange rate using non-linear Taylor rule based model // Int. J. Forecast. 2019. V. 35. P. 429–442.
11. Bessec M., Fuagau J. Short-run electricity load forecasting with combinations of stationary wavelet transforms // EJOR. 2018. V. 264. P. 149–163.
12. Clements A.E., Hurn A.S., Li Z. Forecasting day-ahead electricity load using a multiple equation time series approach // EJOR. 2016. V. 251. P. 522–530.
13. Hong T., Fan S. Probabilistic electric load forecasting: a tutorial review // Int. J. Forecast. 2016. V. 32. P. 914–938.
14. Wheatcroft E. Interpreting the skill score from of forecast performance metrics // Int. J. Forecast. 2019. V. 35. P. 573–579.
15. Canale A., Ruggiero M. Bayesian nonparametric forecasting of nonmonotonic functional time series // Electron. J. Statist. 2016. V. 10(2). P. 3265–3288.
16. Дубнов Ю.А., Булычев А.В. Байесовская идентификация параметров смеси нормальных распределений // Информ. технологии и вычислите. системы. 2017. № 1. С. 101–114.

17. Frazier D.T., Maneesoonthern W., Martin G.M., McCabe B.P.M. Approximate Bayesian forecasting // Int. J. Forecast. 2019. V. 35. P. 521–539.
18. Beaumont M.A., Zhang W., Baldung D.J. Approximate Bayesian computation in population genetics // Genetics. 2001. V. 162(4). P. 2025–2035.
19. McAdam P., Warne A. Eure-area real time density forecasting with financial or labour market friction // Int. J. Forecast. 2019. V. 35. P. 580–600.
20. Alkema L., Gerland P., Raftery A., Wilmoth T. The UN probabilistic population projection: an introduction to demographic forecasting with uncertainty // Foresight. 2015. V. 37. P. 19–24.
21. Brier C.W. Verification of forecast expressed in term probability // Monthly Weather Rev. 1950. V. 78. P. 1–3.
22. Brocker J., Smith L.A. From ensembles forecasts to predictive distribution functions // Tellus A. 2008. V. 60(4). P. 663–678.
23. Christensen H.M., Moroz I.M., Palmer T.N. Evaluation of ensemble forecast uncertainty using a new proper score: application to medium-range and seasonal forecast // Quart. J. Royal Meteorog. Sci. 2015. V. 141(687). P. 538–549.
24. Gneiting T., Katzfuss M. Probabilistic Forecasting // Ann. Rev. Statist. Its Appl. 2014. V. 1. P. 125–151.
25. Lahiri K., Wang J.C. Evaluating probability forecasts for GDP declines using alternative methodological // Int. J. Forecast. 2013. V. 29(1). P. 175–190.
26. Vidyasagar M. Statistical Learning Theory and Randomized Algorithms for Control // IEEE Control Syst. Magazin. 1998. V. 1/17. P. 69–88.
27. Границин О.Н., Поляк Б.Т. Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2002.
28. Назин А.В. Алгоритмы инерционного зеркального спуска в выпуклых задачах стохастической оптимизации // АиТ. 2018. № 1. С. 100–112.  
Nazin A. V. Algorithms of inertial mirror descent in convex problems of stochastic optimization // Autom. Remote Control, 2018. V. 79. No. 1. P. 78–88.
29. Biondo A.E., Pluchino A., Rapisarda A., Helbing D. Are random trading strategies more successful than technical ones? // PLoS ONE. 2013. V. 6(7). P. 68344.
30. Lutz W., Sanderson S., Scherbov S. The end of world population growth // Nature. 2001. V. 412(6846). P. 543–545.
31. Цирлин А.М. Методы усредненной оптимизации и их применение. М.: Физматлит, 1997.
32. Shannon C. Communication Theory of Secrecy Systems // Bell Syst. Technic. J. 1949. V. 28(4). P. 656–715.
33. Jaynes E.T. Information Theory and Statistical Mechanics // Physics Rev. 1957. V. 106. P. 620–630.
34. Jaynes E.T. Papers on probability, statistics and statistical physics. Dordrecht, Kluwer Academ. Publisher, 1989.
35. Попков Ю.С., Попков А.Ю., Дубнов Ю.А. Рандомизированное машинное обучение. М.: ЛЕНАНД, 2018.
36. Hong T., Prinson P., Fan S., Zareipour H., Triccoli A., Hyndman R.J. Probabilistic energy forecasting: Global Energy Forecasting Competition 2014 and beyond // Int. J. Forecast. 2016. V. 32. P. 896–913.
37. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
38. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Hayka, 1979.

39. *Fiedner G.* Hierarchical forecasting: issues and use guidelines // Indust. Management Data Syst. 2001. V. 101(1). P. 5–12.
40. *Amaral L.F., Castro S.R., Stevenson M.* A smooth transition periodic autoregressive (STAR) model for short-term load forecasting // Int. J. Forecast. 2008. V. 24. P. 603–615.
41. *J. von Neumann.* Various techniques in connection with random digits, in Monte Carlo Methods / A.S. Householder, G.E. Forsythe, H.H. Germond. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series (U.S. Government Printing Office, Washington, DC, 1951). P. 36–38.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кубзуном.*

Поступила в редакцию 14.10.2019

После доработки 11.12.2020

Принята к публикации 30.01.2020

---

---

## С О Д Е Р Ж А Н И Е

### Нелинейные системы

Тараев К.Г. Теоретико-групповой подход к задаче приводимости оптимальных процессов .....	3
--	---

### Стохастические системы

Архипов А.С., Семенихин К.В. Минимаксное линейное оценивание по вероятностному критерию при наличии унимодальных помех и ограниченных параметров .....	14
--	----

Зверев О.В., Хаметов В.М., Шелемех Е.А. Оптимальное правило остановки геометрического случайного блуждания со степенной функцией выигрыша ..	34
--	----

### Робастное, адаптивное и сетевое управление

Гейдаров П.Ш. Сравнительный анализ результатов обучений нейронной сети с вычисленными весовыми значениями и с генерацией весовых значений случайным образом .....	56
---	----

Емельянова Ю.П. Управление с итеративным обучением неопределенной системой с непрерывным временем на основе наблюдателя состояния .....	79
---	----

### Управление в технических системах

Песчанский А.И. Стационарные характеристики ненадежной однолинейной системы обслуживания с потерями и учетом технического обслуживания по наработке .....	95
---	----

### Управление в социально-экономических системах

Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером .....	113
---	-----

Ашимов А.А., Боровский Ю.В., Оналбеков М.А. Модель параметрического регулирования реализации национального проекта «Здравоохранение» .....	129
--	-----

Шведов А.С. Война на изнурение с неполной информацией и с нечеткими типами игроков .....	139
--	-----

### Интеллектуальные системы управления, анализ данных

Попков Ю.С., Попков А.Ю., Дубнов Ю.А. Элементы рандомизированного прогнозирования и его применение для предсказания суточной электрической нагрузки энергетической системы .....	148
--	-----

## C O N T E N T S

### Nonlinear Systems

- Garaev K.G.** A Group-Theoretic Approach to the Reducibility Problem of Optimal Processes ..... 3

### Stochastic Systems

- Arkipov A.S., Semenikhin K.V.** Minimax Linear Estimation with the Probability Criterion under Unimodal Noise and Bounded Parameters ..... 14  
**Zverev O.V., Khamedov V.M., Shelemekh E.A.** Optimal Stopping Time for Geometric Random Walks with Power Payoff Function ..... 34

### Robust, Adaptive and Network Control

- Geidarov P.Sh.** Comparative Analysis of the Results of Training a Neural Network with Calculated Weights and with Random Generation of the Weights ..... 56  
**Emelianova J.P.** State Observer-Based Iterative Learning Control of an Uncertain Continuous-Time System ..... 79

### Control in Technical Systems

- Peschansky A.I.** Stationary Characteristics of an Unreliable Single-Server Queueing System with Losses and Preventive Maintenance ..... 95

### Control in Social Economic Systems

- Algazin G.I., Algazina D.G.** Reflexion Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader ..... 113  
**Ashimov A.A., Borovskiy Yu.V., Onalbekov M.A.** A Parametric Control Model for Implementing the National Healthcare Project ..... 129  
**Shvedov A.S.** War of Attrition with Incomplete Information and Fuzzy Players' Types ..... 139

### Intellectual Control Systems, Data Analysis

- Popkov Yu.S., Popkov A.Yu., Dubnov Yu.A.** Elements of Randomized Forecasting and Its Application to Daily Electrical Load Prediction in a Regional Power System ..... 148