СОДЕРЖАНИЕ

Номер 2, 2021

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ	
Численное интегрирование уравнений качения	
с использованием подходов теории управления	
И. В. Матросов, Ю. В. Морозов, А. В. Пестерев	3
ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ	
Двумерная модель для оценки эффективности угловых измерений по эллиптическим орбитам	
А. М. Ануфриев, Ю. А. Горицкий, Д. Г. Тигетов	14
Статистические и нестатистические методы оценивания импульсной характеристики динамической системы	
С. Г. Пушков	25
УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ	
Об инвариантности оптимального управления в задаче синтеза стохастического линейного регулятора с динамическим масштабированием коэффициентов	
Е. С. Паламарчук	35
СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ Построение графов простых путей в транспортных сетях. II. Анализ двусвязности графов	
И. А. Головинский	47
ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ	
Повышение пространственного разрешения панхроматических спутниковых изображений на основе генеративных нейросетей	
В. Ю. Игнатьев, И. А. Матвеев, А. Б. Мурынин, А. А. Усманова, В. И. Цурков	62
НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ	
Маятниковый акселерометр с цифровым управлением и новыми функциональными возможностями	
В. И. Гребенников, Е. А. Депутатова, Д. М. Калихман, Л. Я. Калихман, В. В. Скоробогатов	71
СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ	
Оптимизация систем автоматического сопровождения воздушных объектов на основе локальных квадратично-биквадратных функционалов. II. Исследование эффективности метода	
В. С. Верба, И. Р. Загребельный, В. И. Меркулов, Е. А. Руденко	94
Оптимизация процессов раскрытия и создания формы трансформируемого рефлектора космического базирования	
С. А. Кабанов, Ф. В. Митин	106

Построение программных движений механических систем с учетом ограничений при помощи многочленов третьего порядка	
А. Е. Голубев	126
Оценка тензора инерции и автоматическая балансировка макета микроспутника на аэродинамическом подвесе	
Д. С. Иванов, Т. А. Иванова, Н. А. Ивлев, М. Ю. Овчинников, Д. С. Ролдугин	138
РОБОТОТЕХНИКА	
Преодоление инсектоморфным роботом завалов в виде изолированных цилиндров Ю. Ф. Голубев, В. В. Корянов	156
$10. \ \Psi. \ 10.1 yoeo, \ D. \ D. \ Kopanoo$	150

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБШАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УЛК 62-50

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ КАЧЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОДХОДОВ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ¹

© 2021 г. И. В. Матросов^{а,*}, Ю. В. Морозов^{b,**}, А. В. Пестерев^{b,***}

^a OOO "Джавад Джи Эн Эс Эс", Москва, Россия

^b ИПУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: matrossov@yandex.ru

**e-mail: tot1983@inbox.ru

***e-mail: alexanderpesterev.ap@gmail.com
Поступила в редакцию 01.08.2019 г.
После доработки 23.10.2020 г.

Принята к публикации 30.11.2020 г.

Предлагается подход к решению задачи численного интегрирования уравнений движения механических систем с ограничениями. В рамках данного подхода неизвестные силы реакции, действующие на систему, трактуются как управления, а алгебраические уравнения, которым должны удовлетворять реакции — как цели управления. На основе данного подхода разработан алгоритм численного решения задач моделирования качения. В качестве примера рассмотрено применение указанного алгоритма для интегрирования уравнений качения без проскальзывания тяжелого обруча по криволинейному профилю.

DOI: 10.31857/S0002338821020098

Введение. Для практических приложений важное значение имеет задача качения колеса по неровной поверхности. Возрождение интереса к этой классической задаче [1] связано с внедрением в практику роботизированных систем нового типа (шарообразных роботов) и поиском новых движителей для таких систем [2, 3]. Для решения задач управления шарообразным роботом необходимы, в частности, методы численного интегрирования уравнений качения по неровной поверхности. Частным случаем рассматриваемой задачи является задача качения тяжелого колеса по криволинейному профилю.

Основная трудность решения задачи качения связана с тем, что сила реакции и момент, действующие на колесо в точке касания, заранее не известны и должны быть определены из некоторых алгебраических соотношений (связей), следующих из дополнительных предположений о характере качения [1]. Для случая плоской поверхности, решение данной задачи в квадратурах было получено Пэнлеве [1] в конце XIX в., однако его обобщение на случай произвольного криволинейного профиля затруднительно. С другой стороны, хорошо известно, что попытки прямого численного решения уравнений движения механических систем, стесненных неголономными связями, часто приводят к отсутствию устойчивости и сходимости процесса счета, а также нарушению условий связи. Одной из наиболее ранних работ, известной авторам, где ставится и решается проблема стабилизации связей, является статья [4], в которой предложен метод построения устойчивого алгоритма для случая одного дополнительного уравнения связи. Метод приобрел популярность и вызвал большое число публикаций (см., например, [5—7] и приведенные там ссылки), посвященных его дальнейшему развитию, обобщению на более широкий класс систем и обсуждению вопросов численной реализации.

Изложенный в настоящей работе подход позволяет расширить класс систем, к которым применима техника стабилизации связей, и включить в рассмотрение такие системы, в которых уравнения связей и/или правые части дифференциальных уравнений зависят не только от обобщенных координат и скоростей, но и от некоторых дополнительных переменных, входящих в

¹ Работа выполнена при частичной поддержке Программы фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом Российской академии наук, № 7 "Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники" и РФФИ (проект № 18-08-00531).

уравнения нелинейно. Пример такой системы — тяжелое колесо, катящееся без отрыва и проскальзывания по криволинейному профилю: уравнения связей, наложенных на систему, нелинейно зависят от угла наклона касательной к кривой в точке касания колеса, который не входит в число обобщенных координат. Применение классического варианта метода стабилизации связей потребовало бы решения нелинейного алгебраического уравнения для нахождения этого угла на каждом шаге интегрирования. В рамках же предлагаемого подхода указанная трудность преодолевается включением данного угла в число переменных и добавлением одного дифференциального уравнения первого порядка, что позволяет получить устойчивый алгоритм численного решения задачи, при работе которого алгебраические соотношения и дифференциальные уравнения выполняются с заданными точностями на больших интервалах времени.

1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему со связями. Будем полагать, что уравнения движения записаны в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка с линейно зависящей от неизвестного вектора реакций связей $N \in \mathbb{R}^m$ правой частью:

$$\dot{X} = B(X)N + \widetilde{F}(X), \quad X(0) = X_0, \quad t \in [0, t_1].$$
 (1.1)

Здесь, $X \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, а $n \times m$ -матрица B(X) и вектор $\widetilde{F}(X)$ — непрерывнодифференцируемые функции. В частном случае механической системы с p степенями свободы, описываемой уравнениями Ньютона или Лагранжа, $X = [x_1, \dot{x}_1, ..., x_p, \dot{x}_p]^T$, где x_i , $i = \overline{1,p}$, — обобщенная координата и n = 2p. Однако, как это будет видно из примера в разд. 3, указанный случай не исчерпывает всех возможностей, так что в общем случае размерность n системы (1.1) не связана напрямую с числом степеней свободы и, в частности, может быть и нечетной.

Будем полагать, что связи заданы в виде т алгебраических уравнений (ограничений)

$$f_i(X) = 0, \quad i = \overline{1, m},\tag{1.2}$$

и что начальные условия в (1.1) удовлетворяют указанным ограничениям. Предположим, что функции f_i имеют непрерывные частные производные до порядка n включительно и что уравнения (1.2) определяют гладкое многообразие \mathcal{M} в R^n , которому принадлежит искомая траектория движения. Для системы (1.1), (1.2) рассматривается задача о поиске приближенного решения. Под приближенным решением с точностью δ здесь, следуя А.Ф. Филиппову [8], понимаются вектор-функции X(t) и N(t), такие, что $||\dot{X} - F(X, N)|| < \delta$ и $|f_i| < \delta$, $\forall t \in [0, t_1]$, $\forall i = \overline{1, m}$.

В силу того, что правые части системы (1.1) включают неизвестные функции (реакции связей N), решение задачи не может быть получено применением стандартных процедур численного интегрирования. Таким образом, возникает необходимость в разработке метода численного решения системы дифференциально-алгебраических уравнений вида (1.1), (1.2).

Причина, по которой уравнения движения заданы в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка, заключается в том, что правые части уравнений или условия связей могут зависеть не только от обобщенных координат и скоростей, но и от некоторых дополнительных переменных, динамика которых не обязательно описывается уравнениями второго порядка (пример такой системы рассматривается в разд. 3). Запись уравнений движения в виде (1.1) позволяет нам рассматривать такие системы и системы, описываемые дифференциальными уравнениями второго порядка (уравнениями Ньютона или Лагранжа), в рамках единого подхода и, таким образом, расширить класс систем, к которым применим предлагаемый метод.

2. Идея предлагаемого подхода. Уравнения (1.2) вместе с (1.1) образуют замкнутую систему n+m уравнений относительно n+m неизвестных функций (X,N) и при этом алгебраические уравнения (1.2) не зависят явно от переменных N. Такого рода задачи возникают в теории управления u, в частности, в задачах стабилизации движения. Рассмотрим, например, классическую задачу о стабилизации траектории движения $x^*(t)$ управляемого объекта с одним входом, описываемого нелинейной аффинной системой:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x) + \beta(x)u,$$

где $\Phi(x)$ и $\beta(x)$ — гладкие функции. Требуется найти такое скалярное управление в виде обратной связи u = u(x), при котором в пределе выполняется (не зависящее явно от управления u) алгебраическое уравнение $x - x^*(t) = 0$. В теории управления предложено несколько подходов к решению этой задачи, таких, как линеаризация обратной связью и бэкстеппинг [9, 10]. В качестве

основной идеи в этих методах предлагается дифференцировать невязку $y = x(t) - x^*(t)$ до тех пор, пока не появится u, после чего подставить производные в соответствующее эталонное линейное уравнение относительно y и выразить из него u. Аналогичный прием применяется при линеаризации с помощью обратной связи системы с m входами и m выходами [10]. Указанная идея используется и в рассматриваемой задаче о поиске приближенного решения системы (1.1) с ограничениями (1.2).

Обозначим через r_i порядок наименьшей производной по времени функции $f_i(X)$ в силу системы (1.1), (1.2), которая явно зависит по крайней мере от одной компоненты вектора N. Так как правая часть (1.1) линейно зависит от N, r_i -я производная f_i в силу (1.1) также зависит от N линейно, т.е. для любых $X \in \mathcal{M}$

$$\frac{d^{r_i}f_i}{dt^{r_i}} = A_i(X)N + \varphi_i(X), \quad i = \overline{1, m},$$
(2.1)

где $A_i(X)$ — вектор-строка длины m и $\varphi_i(X)$ — сумма всех не зависящих от N членов, в то время как для любых $j < r_i$, $d^j f_i/dt^j$ явно от N не зависит.

Составим теперь из строк $A_i(X)$ $m \times m$ -матрицу A(X). Следуя А. Исидори [10], будем говорить, что система (1.1), (1.2) имеет векторную относительную степень $\{r_1, \ldots, r_m\}$ в точке $X^* \in \mathcal{M}$, если матрица $A(X^*)$ не вырождена. В дальнейшем предполагается, что рассматриваемая система имеет векторную относительную степень (r_1, \ldots, r_m) во всех точках $X \in \mathcal{M}$.

Для механической системы в подавляющем числе случаев либо $r_i = 1$ (например, для неголономных ограничений), либо $r_i = 2$. Хотя рассмотрение общего случая произвольного r_i не представляет принципиальных трудностей (см., например, [11, 12] и приведенные там ссылки) для простоты изложения, будем считать далее, что для всех условий связи $r_i \le 2$, и введем обозначение \dot{f}_i и \ddot{f}_i для первой и второй производных функций f_i по времени в силу системы (1.1), (1.2).

Так как уравнения (1.2) на искомой траектории выполняются тождественно, левые части в формулах (2.1) также тождественно равны нулю:

$$\frac{d^{r_i}f_i}{dt^{r_i}} = 0, \quad i = \overline{1, m},\tag{2.2}$$

откуда следует, что искомый вектор N удовлетворяет уравнению

$$A(X)N + \varphi(X) = 0, (2.3)$$

где $X \in \mathcal{M}$ и $\phi(X) = [\phi_1, ..., \phi_m]^T$.

Однако, как замечено в [4—6], использование уравнений (2.2) для численного нахождения вектора N недопустимо из-за неконтролируемого роста невязок алгебраических уравнений (1.2), возникающего при наличии сколь угодно малых ошибок задания начальных данных или неточности метода построения приближенного решения, так как общее решение уравнений (2.2) имеет вид $f_i(t) = c_{i2}t + c_{i1}$ для $r_i = 2$ и $f_i(t) = c_{i1}$, если $r_i = 1$, где константы интегрирования определены начальными условиями: $c_{i1} = f_i(0)$ и $c_{i2} = \dot{f}_i(0)$.

Следуя подходу, предложенному в [13], заменим систему (2.2) новой системой дифференциальных уравнений относительно f_i , удовлетворяющей следующим условиям:

- 1) порядок i-го дифференциального уравнения новой системы совпадает с порядком i-го уравнения в (2.2);
- 2) решения новой системы уравнений и системы (2.2) при нулевых начальных условиях совпадают;
- 3) любое решение новой системы, соответствующее ненулевым начальным условиям, экспоненциально стремится к нулю.

Указанным условиям удовлетворяют, например, уравнения вида

$$\ddot{f}_i(t) + 2\lambda_i \dot{f}_i(t) + \lambda_i^2 f_i(t) = 0, \quad \lambda_i > 0, \tag{2.4}$$

для невязок, соответствующих связям с $r_i = 2$, и

$$\dot{f}_i(t) + \lambda_i f_i(t) = 0, \quad \lambda_i > 0, \tag{2.5}$$

для невязок, соответствующих связям с $r_i = 1$. Выбор коэффициентов из однопараметрического семейства в уравнении (2.4) (λ_i^2 и $2\lambda_i$) сделан для удобства обозначений и последующих выкладок; в общем случае оба (положительных) коэффициента могут выбираться независимо друг от друга. Напомним, что порядок каждого дифференциального уравнения выбирается так, чтобы старшая производная соответствующей f_i явно зависела от сил N, а коэффициенты уравнений λ_i определяют показатели экспоненциального убывания невязок.

Подставляя правые части выражений в (2.1) вместо производных \ddot{f}_i и \dot{f}_i в (2.4) и (2.5) соответственно, получим отличную от (2.3) линейную алгебраическую систему уравнений относительно реакций связей N:

$$A(X)N = -\varphi(X,\lambda),\tag{2.6}$$

где $\lambda = [\lambda_1, ..., \lambda_m], \, \varphi(X, \lambda) = [\varphi_1(X, \lambda_1), ..., \varphi_m(X, \lambda_m)]^{\mathrm{T}}$ и $\varphi_i(X, \lambda_i)$ определено при $r_i = 2$ формулой

$$\varphi_i(X,\lambda) = \varphi_i(X) + \lambda_i^2 f_i + 2\lambda_i \dot{f}_i$$
(2.7)

и при $r_i = 1$ формулой

$$\varphi_i(X,\lambda) = \varphi_i(X) + \lambda_i f_i. \tag{2.8}$$

Так как допускаются ненулевые невязки, уравнения (2.6) определены не только на многообразии, но и некоторой его окрестности. По предположению о наличии векторной относительной степени во всех точках многообразия матрица A(X) не вырождена при любых $X \in \mathcal{M}$. Следовательно, найдется окрестность многообразия, в которой эта матрица также не вырождена и систему (2.6) можно разрешить относительно N:

$$N(X,\lambda) = -A^{-1}(X)\varphi(X,\lambda). \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в (1.1) и интегрируя полученную замкнутую разрешенную относительно старших производных систему обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи стандартного метода численного интегрирования, такого, как методы Рунге—Кутта или Адамса, находим искомую траекторию движения системы. Полученное решение будет δ -решением системы (1.1), (1.2), (2.9) по Филиппову, если вторые производные правой части системы ограничены на компактном замыкании окрестности области интегрирования.

Если начальные условия в (1.1) удовлетворяют ограничениям (1.2), то $f_i(0) = 0$, $i = \overline{1,m}$, и если $r_i = 2$, то $\dot{f}_i(0) = 0$. Так что решением уравнений (2.4) и (2.5) будут функции $f_i(t) \equiv 0$, $i = \overline{1,m}$, т.е. для точного решения выполнены условия (1.2). Если начальные условия не удовлетворяют ограничениям (1.2), метод дает приближенное решение задачи, при этом невязки ограничений стремятся экспоненциально к нулю. Выбирая достаточно большие коэффициенты λ_i (и уменьшая при этом шаг интегрировании, см. [5]), можно добиться сколь угодно высокой точности δ -решения задачи. Ошибки, связанные с неточным заданием начальных условий, не только не накапливаются, но и убывают экспоненциально с показателями $-\lambda_i$, что позволяет получить решение задачи на больших интервалах времени с высокой точностью. Выбор шага интегрирования и коэффициентов λ_i , а также метода численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений выходит за рамки настоящей статьи и далее не рассматривается (интересующийся читатель может найти обсуждение задачи согласованного выбора численных значений для шага интегрирования и коэффициентов λ_i , например, в [5, 6]).

З а м е ч а н и е. Обратимость матрицы A(X) при любых X, принадлежащих многообразию, не является необходимым условием применимости метода. Разрешимость уравнений (2.6) в таком случае исследуется дополнительно с использованием специфики решаемой задачи. Например, в задаче о качении колеса, рассматриваемой в следующем разделе, доказывается аналитически, что решение системы алгебраических уравнений (2.6) существует и при обращении детерминанта матрицы в нуль.

3. Качение тяжелого обруча по криволинейному профилю. В качестве иллюстрации применим описанный в предыдущем разделе метод для численного интегрирования уравнений качения тяжелого колеса (обруча) по криволинейному профилю (рис. 1).

Обозначим через M и r массу и радиус колеса. Пусть x и z — координаты центра колеса относительно горизонтальной и вертикальной осей неподвижной системы координат соответственно, а θ — угол поворота обруча вокруг центра, принимающий положительные значения при

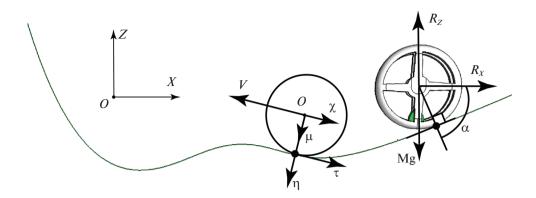


Рис. 1. Кинематическая и динамическая схемы колеса, катящегося по криволинейному желобу

повороте против часовой стрелки. После освобождения от связей уравнения движения обруча [1] могут быть записаны в виде

$$M\ddot{x} = R_x, \quad M\ddot{z} = -Mg + R_z, \quad J\ddot{\theta} = Q,$$
 (3.1)

где g — ускорение свободного падения, $J=Mr^2$ — момент инерции обруча, R_x и R_z — проекции силы реакции опоры на оси координат и Q — вращающий момент относительно центра масс. Уравнения (3.1) не могут быть проинтегрированы непосредственно, так как сила реакции и момент не известны. Для их нахождения мы далее выпишем алгебраические соотношения, следующие из дополнительных, сформулированных ниже предположений о характере качения.

Пусть форма желоба, по которому катится обруч, задана неявно уравнением h(x,z)=0. Будем предполагать, что частная производная h_z функции h(x,z) по z нигде не равна нулю (профиль не содержит вертикальных участков) и что кривая является допустимой для данного обруча, т.е. кривизна кривой в любой точке меньше 1/r. Обозначим через x_a и z_a текущие координаты точки обруча, в которой он касается кривой: $x_a = x + r \cos \alpha$, $z_a = z + r \sin \alpha$, где $-\pi < \alpha < 0$ — угол между осью x и вектором, направленным из центра обруча в точку касания (рис. 1).

Предположим, что колесо катится по желобу, не теряя с ним контакта, что система консервативна и что нет проскальзывания. Первые два условия имеют вид

$$h(x_a, z_a) = 0 ag{3.2}$$

И

$$M(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)/2 + Mr^2\dot{\theta}^2/2 + Mgz - E_0 = 0,$$
(3.3)

где E_0 — полная энергия системы в начальный момент времени. Условие качения без проскальзывания можно записать как равенство нулю проекции скорости точки колеса, касающейся кривой, на касательное к кривой направление:

$$-\dot{x}\sin\alpha + \dot{z}\cos\alpha + r\dot{\theta} = 0 \tag{3.4}$$

(обычно используемое условие качения без проскальзывания $\dot{x}^2 + \dot{z}^2 - (r\dot{\theta})^2 = 0$ в данном случае не годится, так как, наряду с истинным движением, оно допускает и физически нереализуемое движение, при котором колесо вращается в противоположную сторону). Описывающие систему уравнения (3.1)—(3.4) имеют вид, отличный от (1.1), (1.2), так как алгебраические уравнения (3.2) и (3.4) зависят не только от переменных состояния, но и от дополнительной переменной α .

Введем обозначения $\eta = [h_x'(x_a, z_a), h_z'(x_a, z_a)]^T$ и $\tau = [-h_z'(x_a, z_a), h_x'(x_a, z_a)]^T$ для нормали к кривой и касательного вектора в точке касания с колесом (в дальнейшем, для краткости будем опускать аргументы функции $h(x_a, z_a)$ и ее производных), $v = [\dot{x}, \dot{z}]^T$ для вектора скорости центра колеса, $\mu = [\cos\alpha, \sin\alpha]^T$ для единичного вектора, лежащего на прямой, соединяющей центр колеса и точку касания с кривой, и $\chi = [-\sin\alpha, \cos\alpha]^T$ для ортогонального ему вектора (рис. 1). Очевидно,

что при качении колеса без отрыва от кривой векторы μ и τ ортогональны, $(\mu, \tau) \equiv 0$, т.е. должно выполняться условие

$$h'_{r}(x_{\alpha}, z_{\alpha}) \sin \alpha - h'_{r}(x_{\alpha}, z_{\alpha}) \cos \alpha = 0. \tag{3.5}$$

В классическом варианте метода стабилизации связей на каждом шаге интегрирования пришлось бы численно решать нелинейное алгебраическое уравнение (3.5) для того, чтобы выразить α через обобщенные координаты и скорости. В рамках же предлагаемого подхода для приведения системы уравнений к виду (1.1), (1.2) предлагается расширить пространство состояний, включив α в число переменных состояния, и добавить к системе (3.1) дифференциальное уравнение относительно новой переменной (из дальнейшего будет ясно, почему в данном случае можно ограничиться уравнением первого порядка):

$$\dot{\alpha} = U. \tag{3.6}$$

Так как неизвестная функции $U \in R$ входит линейно в правую часть уравнения (3.6), мы можем рассматривать ее как еще одну "реакцию связей", а уравнение (3.5) — в качестве четвертого алгебраического уравнения связи.

Таким образом, мы получаем систему (3.1), (3.6) дифференциальных уравнений порядка семь относительно семи переменных состояния, $X = [x, z, \theta, \dot{x}, \dot{z}, \dot{\theta}, \alpha]^{\mathrm{T}}$, и четыре алгебраических уравнения (3.2)—(3.5) для определения четырех неизвестных "реакций связей", компонент вектора $N = [R_x, R_z, Q, U]^{\mathrm{T}}$, в правой части системы. В соответствии с изложенным в предыдущем разделе методом обозначим левые части уравнений (3.2)—(3.5) через f_1 , f_2 , f_3 и f_4 соответственно. Дифференцируя первое алгебраическое уравнение, получаем

$$\dot{f}_1 = h'_x \dot{x}_a + h'_z \dot{z}_a = h'_x \dot{x} + h'_z \dot{z} + r \dot{\alpha} (-h'_x \sin \alpha + h'_z \cos \alpha) = (v, \eta) - (\tau, \mu) r \dot{\alpha}.$$

Так как скалярное произведение (τ, μ) тождественно равно нулю на многообразии, производная f_1 по времени в силу системы (3.1)—(3.6) не зависит явно от N. Второе дифференцирование дает

$$\ddot{f}_1 = (\dot{v}, \eta) + (v, \dot{\eta}).$$

Непосредственным дифференцированием нетрудно показать, что $\dot{\eta} = H_2 v + r \dot{\alpha} H_2 \chi$, где

$$H_2 = \begin{pmatrix} h_{xx}^{"} & h_{xz}^{"} \\ h_{xz}^{"} & h_{zz}^{"} \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу для \ddot{f}_1 , получаем

$$\ddot{f}_1 = h_x' \ddot{x} + h_z' \ddot{z} + (v, H_2 v) + (v, H_2 \chi) r \dot{\alpha},$$

и вторая производная f_1 в силу системы (3.1)—(3.6) принимает вид

$$\ddot{f}_1 = (h_x' R_x + h_z' R_z)/M + (v, H_2 \chi) r U - g h_z' + (v, H_2 v). \tag{3.7}$$

Дифференцируя f_2 и f_3 по времени в силу уравнений (3.1)—(3.6), находим

$$\dot{f}_2 = M\dot{x}\ddot{x} + M\dot{z}\ddot{z} + Mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mg\dot{z} = \dot{x}R_x + \dot{z}R_z + \dot{\theta}Q$$
(3.8)

И

$$\dot{f}_3 = -\ddot{x}\sin\alpha + \ddot{z}\cos\alpha - \dot{\alpha}(\dot{x}\cos\alpha + \dot{z}\sin\alpha) + r\ddot{\theta}.$$

Коэффициент при $\dot{\alpha}$ на многообразии равен нулю в силу ортогональности векторов v и μ , и мы окончательно получаем

$$\dot{f}_3 = (-R_x \sin \alpha + R_z \cos \alpha)/M + Q/Mr - g \cos \alpha. \tag{3.9}$$

Производная $f_4 \equiv (\mu, \tau)$ равна

$$\dot{f}_4 = (\dot{\mu}, \tau) + (\mu, \dot{\tau}),$$

где $\dot{\mu} = [-\sin\alpha, \cos\alpha]^T \dot{\alpha} = \dot{\alpha}\chi$ и

$$(\dot{\mu}, \tau) = \dot{\alpha}(h_x' \cos \alpha + h_z' \sin \alpha) = \dot{\alpha}\sqrt{(h_x')^2 + (h_z')^2} \equiv \dot{\alpha} \|\nabla h\|.$$

Дифференцируя касательный вектор τ:

$$\dot{\tau} = \begin{bmatrix} -h_{xz}''(\dot{x} - r\dot{\alpha}\sin\alpha) - h_{zz}''(\dot{z} + r\dot{\alpha}\cos\alpha) \\ h_{xx}''(\dot{x} - r\dot{\alpha}\sin\alpha) + h_{xz}''(\dot{z} + r\dot{\alpha}\cos\alpha) \end{bmatrix},$$

после несложных выкладок находим

$$(\mu, \dot{\tau}) = -\cos\alpha(h''_{xz}\dot{x} + h''_{zz}\dot{z}) + \sin\alpha(h''_{xx}\dot{x} + h''_{xz}\dot{z}) + r\dot{\alpha}(h''_{xz}\cos\alpha\sin\alpha - h''_{zz}\cos^2\alpha - h''_{xz}\sin^2\alpha + h''_{xz}\sin\alpha\cos\alpha) = \dot{x}(h''_{xx}\sin\alpha - h''_{xz}\cos\alpha) + \dot{z}(h''_{xz}\sin\alpha - h''_{zz}\cos\alpha) + r\dot{\alpha}[-\sin\alpha(h''_{xx}\sin\alpha - h''_{xz}\cos\alpha) + \cos\alpha(h''_{xz}\sin\alpha - h''_{zz}\cos\alpha)] = -(v, H_2\chi) - (\chi, H_2\chi)r\dot{\alpha}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу для \dot{f}_4 , получаем производную f_4 в силу системы (3.1)—(3.6):

$$\dot{f}_4 = (\|\nabla h\| - (\chi, H_2 \chi)r)U - (v, H_2 \chi). \tag{3.10}$$

Так как после первого дифференцирования появляется компонента вектора N, $r_4 = 1$. В отличие от классического варианта метода стабилизации связей, в котором голономные ограничения надо дифференцировать дважды, второе дифференцирование не требуется, что в свою очередь и объясняет, почему мы ограничились дифференциальным уравнением первого порядка для α .

Из (3.7)—(3.10) находим матрицу A(X):

$$A(X) = \begin{pmatrix} h'_x & h'_z & 0 & (v, H_2 \chi) M r \\ \dot{x} & \dot{z} & \dot{\theta} & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

где $d = \|\nabla h\| - (\chi, H_2\chi)r$, и правые части системы $\varphi_1(X, \lambda) = -Mgh_z' + M(v, H_2v) + \lambda_1^2 Mf_1 + 2\lambda_1 Mf_1'$, $\varphi_2(X, \lambda) = \lambda_2 f_2$, $\varphi_3(X, \lambda) = -Mg\cos\alpha + \lambda_3 Mf_3$, и $\varphi_4(X, \lambda) = -(v, H_2\chi) + \lambda_4 f_4$.

В соответствие с обсуждаемым в разд. 2 методом решение задачи о качении сводится по существу к решению системы четырех алгебраических уравнений $A(X)N = -\phi(X,\lambda)$, где $\phi(X,\lambda)$ — вектор с компонентами $\phi_i(X,\lambda)$, $i=\overline{1,4}$, подстановке найденного вектора $N(X,\lambda)$ в систему дифференциальных уравнений (3.1), (3.6) и численному интегрированию полученной системы.

Для проверки обратимости матрицы A(X) найдем ее детерминант при $X \in \mathcal{M}$:

$$\det A(X) = d \begin{vmatrix} h'_x & h'_z & 0 \\ \dot{x} & \dot{z} & \dot{\theta} \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 1/r \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{d}{r} (-\dot{x}h'_z + \dot{z}h'_x) - d\dot{\theta}(h'_x \cos\alpha + h'_z \sin\alpha) = \frac{d}{r} (v, \tau) - (\eta, \mu) d\dot{\theta}.$$

Принимая во внимание, что при $X \in \mathcal{M}$ пары векторов η , μ и v, χ коллинеарны и, следовательно, выполняются соотношения $(\eta, \mu) = \|\nabla h\|$, $\tau = \|\nabla h\|\chi$, $v = -r\dot{\theta}\chi$, откуда $(v, \tau) = -r\|\nabla h\|\dot{\theta}$, получаем окончательно следующую формулу для детерминанта на многообразии:

$$\det A(X) = -2d||\nabla h||\dot{\theta}.$$

Покажем, что величина d не может быть равна нулю. Используя формулу

$$\rho = \frac{((h'_x)^2 + (h'_z)^2)^{3/2}}{(h'_z)^2 h''_{xx} - 2h'_x h'_z h''_{xz} + (h'_x)^2 h''_{zz}} \equiv \frac{\|\nabla h\|^3}{(\tau, H_2 \tau)}$$

для радиуса кривизны кривой, заданной неявно уравнением h(x,z) = 0, находим

$$d = \|\nabla h\| - (\chi, H_2 \chi)r = \|\nabla h\| - \frac{(\tau, H_2 \tau)r}{\|\nabla h\|^2} = \|\nabla h\| \left(1 - \frac{r}{\rho}\right).$$

В силу предположения о допустимости кривой, $r < \rho$ и, следовательно, d > 0.

Таким образом, на многообразии детерминант равен нулю тогда и только тогда, когда $\dot{\theta}=0$, т.е. когда колесо останавливается в верхней точке своей траектории перед тем, как катиться в противоположную сторону, при этом $\phi_1=-Mgh_z'$, $\phi_2=\phi_4=0$ и $\phi_3=-Mg\cos\alpha$. Обозначим через X^* точку многообразия, в которой детерминант матрицы A равен нулю. Пусть $X^k\in\mathcal{M}$ — произвольная стремящаяся к особой точке последовательность принадлежащих многообразию точек, $X^k\to X^*$. Введем обозначение $A_k=A(X^k)$ и $\phi^k=\phi(X^k,\lambda)$. Нетрудно проверить, что уравнение $A_kN^k=\phi_k$ разрешимо при любых k и его решение N^k стремится к вектору $N^*=[R_x^*,R_z^*,Q^*,U^*]^T$, гле

$$R_x^* = \frac{Mgh_z'\cos\alpha}{2\|\nabla h\|}, \quad R_z^* = \frac{Mg}{2} + \frac{Mgh_z'\sin\alpha}{2\|\nabla h\|}, \quad Q^* = \frac{Mgr\cos\alpha}{2}, \quad U^* = 0.$$

Таким образом, уравнение (2.3) имеет решение $N = -A^{-1}(X)\varphi(X)$ при любых $X \in \mathcal{M}$, которое в точках необратимости матрицы A(X) достраивается до непрерывного. Тем самым описанный в предыдущем разделе метод применим к рассматриваемой задаче.

4. Численное моделирование. Численное моделирование проводилось с помощью разработанной И.В. Матросовым системы компьютерной алгебры DExpert. Эта система позволяет автоматически находить аналитические выражения для неизвестных реакций и в формульном виде подставлять их в правую часть уравнений движения системы, после чего производить численное интегрирование.

В численных расчетах рассматривалось движение колеса массы M=1 и радиуса r=0.01 по кривой, заданной уравнением $z=x^4+ax^3-bx^2-ax-(1-b)$, a=0.13, b=0.5 (все параметры системы — безразмерные).

Профиль кривой показан на рис. 1. Начальные условия выбирались так, чтобы координата x_a точки касания колеса и кривой при любых t принадлежала отрезку [-1, 1]. При этом колесо совершало периодическое движение между двумя крайними точками. Интегрирование проводилось как на коротких, так и длительных интервалах времени (до нескольких сотен прохождений профиля туда и обратно).

Для интегрирования замкнутой системы использовался явный метод Рунге—Кутта второго порядка с постоянным шагом $h=10^{-5}$. Результаты численных экспериментов показали, что показатели λ_i при таком шаге должны выбираться из диапазона [1, 10^5], что согласуется с результатами в [5, 14]. При любых λ_i из указанного диапазона максимальная невязка в установившемся режиме меньше 10^{-7} и достигает минимума ($\max_{i=1,4} |\delta_i| < 7 \times 10^{-9}$) при $\lambda_i = 10^3$. Заметим, что при том

же значении λ_i уменьшение шага до $h=10^{-6}$ позволяет уменьшить максимальную невязку на три порядка: $\max_{i=1}^{4} |\delta_i| < 5 \times 10^{-12}$.

Чтобы определить константу δ в определении Филиппова из разд. 1, необходимо также оценить абсолютную ошибку численного метода, используемого при интегрировании системы дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старших производных. В нашем случае при применении методов Рунге—Кутта и Адамса второго порядка можно использовать известную оценку $\delta < \hat{C}h^2$ [15, 16]. Константа \hat{C} определяется максимальным значением нормы гессиана правой части системы разрешенных относительно старших производных дифференциальных уравнений [15, 16] и в данном численном примере не превосходит величины 10^2 . Получение более точной оценки довольно трудоемко (см., например, вычисление \hat{C} и δ в скалярном случае в работе [17]) и далеко выходит за рамки настоящей статьи.

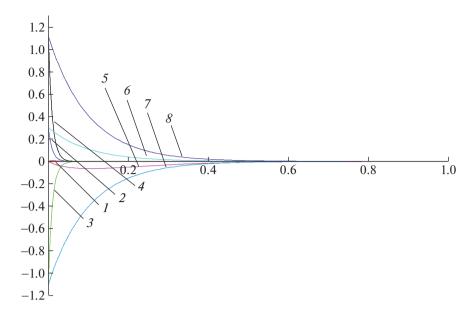


Рис. 2. Графики невязок f_i , $i=\overline{1,4}$, на начальном отрезке интегрирования для двух значений коэффициентов $\lambda_i=100$ (кривые 1-4) и $\lambda_i=10$ (кривые 5-8)

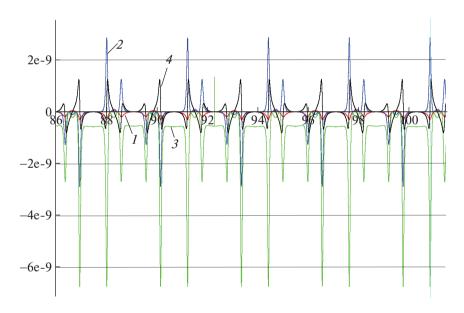


Рис. 3. Графики невязок f_i , $i=\overline{1,4}$, вызванных ошибками интегрирования, $h=10^{-5}$ и $\lambda_i=10^3$

Выбор значений λ_i из допустимого диапазона определяет скорость, с которой убывают начальные невязки. Чем больше λ_i , тем быстрее убывают невязки. На рис. 2 показаны графики невязок, вызванных ошибками в начальных данных, на начальном отрезке времени интегрирования при двух различных показателях, $\lambda_i = 10$ (кривые 5-8) и $\lambda_i = 100$ (кривые 1-4), $i = \overline{1,4}$. Как и следовало ожидать, увеличение на порядок значения λ_i ускоряет убывание начальных невязок.

При интегрировании на больших интервалах времени ошибки в начальных данных оказывают пренебрежимо малый эффект на результат, и невязки вызываются ошибками, связанными с конечностью шага интегрирования. Типичная картина таких невязок показана на рис. 3, где

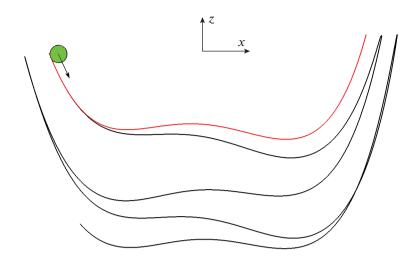


Рис. 4. Траектория движения колеса при $\lambda_i = 0, i = \overline{1, m}$

цифрами I-4 отмечены графики невязок $f_i(t)$, $i=\overline{1,4}$, соответственно, на интервале времени с 86 по 101 единицу времени. Интегрирование проводилось на длительном интервале времени при шаге $h=10^{-5}$ и $\lambda_i=10^3$. Как видно из рисунка, величина максимальной из невязок (f_3) не превышает 7×10^{-9} .

Следующий рисунок иллюстрирует утверждение разд. 2 о недопустимости использования уравнений (2.3) (соответствуют нулевым λ_i) для численного нахождения сил реакций. На рис. 4 показаны профиль, по которому должно катиться колесо (верхняя кривая), и траектория, описываемая точкой (x_a, z_a) , полученная при $\lambda_i = 0$, $i = \overline{1,4}$, на интервале времени, соответствующем двукратному прохождению профиля туда и обратно. Из рис. 4 видно, насколько сильно отличается действительная траектория точки контакта колеса с кривой от кривой, по которой она должна двигаться, при том что начальные условия были выбраны достаточно точными $(\max_{i=1,4} |\delta_i(0)| < 1.0e^{-6})$. Таким образом, очевидно, что попытка численного интегрирования уравнений качения без стабилизации связей заведомо обречена на неудачу.

Заключение. Предложен подход к решению задачи численного интегрирования уравнений движения механических систем с ограничениями, основанный на стабилизации связей. На базе предлагаемого подхода, разработан метод численного решения задачи качения колеса по криволинейному профилю, обеспечивающий регуляризацию в процессе счета и позволяющий получить решение задачи на больших интервалах времени с высокой точностью.

Отметим, что приведенный метод может быть адаптирован для решения задач управления/стабилизации механических систем. Действительно, легко видеть, что если $X=(x,\dot{x})$, то рассматриваемая в статье задача может быть интерпретирована как задача стабилизации аффинной системы управления с векторным входом N и векторным выходом $Y=(y_1,\dots,y_m)$, где $y_i=f_i(X)$. Более того, в рамках предлагаемого подхода можно исследовать управляемые механические системы с априори неизвестными реакциями связей, полагая, что вектор N включает в себя как управления, так и реакции связей, и записывая систему в виде (1.1), (1.2). При этом часть компонентов векторного выхода будет представлять собой ограничения, наложенные на систему, а другие — цели управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехтеориздат, 1954.
- 2. Борисов А.В., Мамаев И.С., Караваев Ю.Л. Мобильные роботы: робот-колесо и робот-шар. М.: Институт компьютерных исследований, 2013.
- 3. *Ylikorpi T.J.*, *Forsman P.J.*, *Halme*, *A.J.* Dynamic Obstacle Overcoming Capability of Pendulum Driven Ballshaped Robots // Proc. 17th IASTED Inter. Conf. Robot. Appl. (RA 2014). Zurich, 2014. P. 329–338.

- 4. *Baumgarte J.* Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems // Comp. Math. Appl. Mech. Eng. 1972. V. 1. P. 1–16.
- 5. Ascher U.M., Hongsheng C., Petzold L.R., Reich S. Stabilization of Constrained Mechanical Systems with DAEs and Invariant Manifolds // J. Mech. Struct. Mach. 1995. V. 23. P. 135–158.
- 6. *Petzold L.R.* QDAE Methods for the Numerical Solution of Euler-Lagrange Equations // App. Num. Math. 1992. V. 10. P. 397–413.
- 7. *Мухарлямов Р.Г.* Дифференциально-алгебраические уравнения программных движений лагранжевых динамических систем // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 50—61.
- 8. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
- 9. Khalil H.K. Nonlinear Systems (3rd ed.). Upper Saddle River. N.J.: Prentice Hall, 2002.
- 10. Isidori A. Nonlinear Control Systems. London: Springer, 1995.
- 11. *Lin S.-T., Hong M.-C.* Stabilization Method for the Numerical Integration of Controlled Multibody Mechanical System: A Hybrid Integration Approach // JSME Intern. J. Ser. C. 2001. V. 44. № 1. P. 79–88.
- 12. *Мухарлямов Р.Г.* Управление динамикой системы с дифференциальными связями // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 4. С. 16—28.
- 13. *Матросов И.В.* О единственности справа решений невырожденных алгебро-дифференциальных уравнений с разрывами // АиТ. 2007. № 1. С. 11—19.
- 14. Flores P., Machado M., Seabra E. Investigation on the Baumgarte Stabilization Method for Dynamic Analysis of Constrained Multibody Systems // Proc. EUCOMES08. Cassino. 2008. P. 305–312.
- 15. Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics. N.Y.: Wiley, 1962.
- 16. *Hairer E., Wanner G.*, Solving Ordinary Differential Equations II Stiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin: Springer, 1996.
- 17. *Филиппов А.Ф.* Получение на ЭВМ строгих оценок решений дифференциальных уравнений // ЖВМиМФ. 1991. № 7. С. 994-1005.

_____ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ ____ И ИЛЕНТИФИКАЦИЯ

УДК 621.396

ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПО ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОРБИТАМ

© 2021 г. А. М. Ануфриев^{а,*}, Ю. А. Горицкий^а, Д. Г. Тигетов^{b,**}

^а МЭИ, Москва, Россия

^b АО "ВНИИРТ", Москва, Россия

*e-mail: goritskiy@yandex.ru

**e-mail: david.tigetov@gmail.com

Поступила в редакцию 21.11.2019 г.

После доработки 23.04.2020 г.
Принята к публикации 27.07.2020 г.

Рассматриваются неблагоприятные для наблюдателя орбиты, плоскость которых проходит вблизи плоскости орбиты. Замена движения наблюдателя приближенно эквивалентным движением на плоскости орбиты приводит к простой двумерной модели измерения-движения. Определяются границы Рао—Крамера для оценок параметров орбит. Углы места наблюдения связаны с истинными аномалиями и параметрами орбиты нелинейными уравнениями. Дифференцирование уравнений по параметрам орбиты дает матрицу Якоби одиночных угловых измерений, а затем и информационную матрицу Фишера, которая является основой для анализа точности. Наиболее сложная часть определения матрицы Фишера состоит в вычислении производных истинных аномалий по параметрам орбиты; эта часть основана на численном решении дифференциального уравнения, выражающего второй закон Кеплера. Приведены примеры вычисления границ точности оценок в широком диапазоне практических скоростей и углов падения. Результаты показывают, что по угловым измерениям возможно получить практически интересные точности по некоторым параметрам.

DOI: 10.31857/S0002338820060025

Введение. Предполагается, что наземный наблюдатель в дискретные моменты времени может измерять только угловые координаты объекта. Объект находится в свободном движении со скоростью, меньшей первой космической, на высотах не более $1000\,$ км. Решается вопрос о том, можно ли по угловым измерениям оценить параметры движения с практически интересной точностью. Для ответа учитываем лишь основное, пренебрегая многочисленными влияющими на точность факторами: считаем, что движение кеплеровское, а измерения производятся с дискретностью Δt и со случайной погрешностью, дисперсия которой — σ^2 . Цель работы — описать для инженера-разработчика приближенное, но достаточно простое средство анализа.

Задача оценивания параметров орбит космических тел (KT) по угловым измерениям не является новой [1-9], однако с изменением технических средств измерения, требований к точности и вычислительных возможностей задача приобретает различные особенности. В частности, актуальна ситуация пассивной радиолокации, высокой частоты измерений, мощных вычислительных средств и высоких требований к точности определения расстояния от измерителя до точки падения.

Простые алгоритмы оценивания [1, 5, 6, 10] основаны на построении точечной оценки состояния КТ в фиксированный момент времени. Начальную оценку угловых величин получают регрессией угловых измерений, используя полиномы; оценки радиальных величин находят как корни трансцендентных уравнений орбитального движения, связывающих радиальные и угловые величины. Полученную оценку применяют в качестве начального приближения в различных методах уточнения, [1, 3–6], связанных с минимизацией квадратичной формы отклонения. В [7] излагается альтернативный подход, связанный с аппроксимацией апостериорной плотности вероятности состояния КТ, получаемой при аппроксимации априорной плотности вероятности состояния КТ и функции преобразования состояния [11–13].

Анализ эффективности методов оценивания обычно связывают с границами дисперсий многомерного неравенства Рао—Крамера, [1, 14—19]. В [1] теоретическая граница Рао—Крамера используется как эталонная мера ошибки оценивания, а в фундаментальной отечественной работе [5] авторы приводят универсальные соотношения для приближенного вычисления ошибок оценивания параметров орбит, которые в частном случае независимых гауссовых ошибок измерений совпадают с границей Рао—Крамера. Вычисление границ в ряде случаев представляет отдельную нетривиальную задачу, [14—16], например, в [15, 16] для вычисления границ Рао—Крамера в задаче фильтрации двумерного движения используется специализированная система координат угловых измерений. В данной работе при вычислении матрицы Фишера численно решается дифференциальное уравнение, представляющее второй закон Кеплера.

Разработчикам алгоритмов необходимо знать, с какой частотой и точностью нужно измерять и какую точность на каких орбитах можно получить. Эти вопросы могут прояснить информационные оценки точности, которая зависит от параметров орбиты. На практике особо выделяют класс траекторий, направленных в сторону наблюдателя, для которых весьма характерными являются малые изменения азимута. Малые изменения азимута имеют место в тех случаях, когда движение наблюдателя, связанное с вращением Земли, происходит вблизи плоскости орбиты. В этих случаях задачу можно приближенно считать двумерной, проецируя движение наблюдателя на плоскость орбиты, а единственным источником информации — измерения угла места. Ситуации с малыми изменениями азимута интересны также тем, что они наименее благоприятны для оценки параметров движения, и потому анализ их точности может служить ориентиром для использования угловых измерительных систем.

Цель данной работы состоит в том, чтобы предложить инженерам-разработчикам алгоритмов достаточно простые инструменты для приближенной оценки возможной точности при угловых измерениях. Задача оценки точности решается, опираясь на два момента, отличающих ее от других. 1. Выделено семейство неблагоприятных для наблюдателя орбит; это орбиты, плоскость которых касается орбиты движущегося наблюдателя, и точка касания является точкой пересечения соответствующих траекторий. 2. Обоснована простая приближенная плоская модель движения—измерения, в которой истинное движение наблюдателя (вне плоскости орбиты КТ) без изменения его скорости заменяется движением в плоскости орбиты КТ по окружности земной сферы.

Далее необходимо сделать следующие пояснения. Во-первых, нас интересуют орбиты, которые могут закончиться в окрестности наблюдателя. Во-вторых, семейство орбит, которые заканчиваются в точке наблюдателя (и в этой точке окружность наблюдателя касается плоскости орбиты), являются наиболее неблагоприятными в том смысле, что иначе информации будет больше, и тогда и качество оценок должно быть выше. Действительно, если в момент падения в эту точку вектор скорости наблюдателя не лежит в плоскости орбиты, то измерительной информации по орбите будет больше (чем в случае касания) за счет азимутальных измерений. Если же отодвинем точку падения от точки наблюдателя, то диапазон изменения угла места увеличится и мы опять имеем увеличение информации.

1. Двумерная модель измерения. 1.1. Предварительная схема: неподвижный наблюдатель. Рассматривается ситуация, в которой точка наблюдения Н (рис. 1) находится в плоскости орбиты и она неподвижна. В дальнейшем учтено влияние движения вне этой плоскости. Объект движется по эллипсу, главная ось которого составляет угол ф относительно направления на точку Н наблюдения. Орбита характеризуется трехмерным параметром *a*:

$$a = (j, p, e)^{\mathrm{T}},$$

 ϕ — угол между наблюдателем H и главной осью эллипса, p — фокальный параметр, e — эксцентриситет орбиты. Уравнение орбиты в полярных координатах

$$r(\theta) = p/(1 - e\cos\theta),\tag{1.1}$$

где $r(\theta)$ — расстояние до центра Земли, θ — истинная аномалия — угол направления на объект, отсчитываемый от направления на апогей. Измерения угла места начинаются после момента t_0 входа в зону видимости, т.е. когда объект выходит из-за горизонта G. Угол места $\varepsilon = \varepsilon(t)$ в любой момент $t \ge t_0$ определяется очевидным соотношением: тангенс угла есть отношение катетов (рис. 1):

$$tg(\varepsilon) = \frac{r(\theta)\cos(\varphi - \theta) - R_3}{r(\theta)\sin(\varphi - \theta)} = ctg(\varphi - \theta) - \frac{R_3(1 - e\cos\theta)}{p\sin(\varphi - \theta)},$$
(1.2)

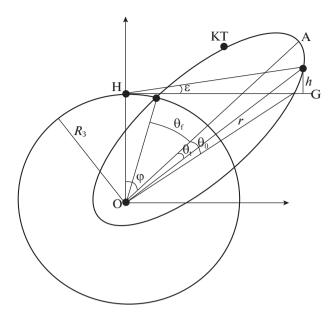


Рис. 1. Схема плоской задачи

 $\theta = \theta(t)$ — аномалия в момент t измерения. После умножения (1.2) на $\sin(\varphi - \theta)$ имеем

$$\sin(\varphi - \theta)\operatorname{tg}(\varepsilon) = \cos(\varphi - \theta) - (R_3/p)(1 - e\cos\theta). \tag{1.3}$$

Это соотношение определяет $\varepsilon = \varepsilon(\theta; \varphi, p, e)$, как функцию θ и параметров орбиты, но $\theta = \theta(t)$ — функция времени, и потому для любого фиксированного момента t

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(\theta(t), \varphi, p, e)$$

— функция трех переменных (заметим, что $\theta(t) = \theta(t; \varphi, p, e)$ — тоже функция (φ, p, e)). По значению ε и фиксированным параметрам (φ, p, e) орбиты можно определить аномалию θ , решая уравнение (1.3), сводимое к квадратному: $\theta = h(\varepsilon; \varphi, p, e)$ (см. Приложение). Для произвольного момента t значение $\theta(t)$ при известных параметрах орбиты p и e определяется по дифференциальному уравнению (второй закон Кеплера о постоянстве секториальной скорости)

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(\theta; p, e), \tag{1.4}$$

с начальным условием: при $t = t_0 \theta = \theta_0$; $\omega(\theta; p, e) = \sqrt{p\mu}/r^2 = (\sqrt{\mu}/p^{3/2})(1 - e\cos\theta)^2$ – угловая скорость; $\mu = 3.9860044 \times 10^{14} \text{ м}^3/\text{c}^2$ – геоцентрическая гравитационная постоянная.

В дискретные моменты времени $t_0, t_1, ..., t_n, t_i = t_{i-1} + \Delta t, i = 1, ..., n$, имеем измерения

$$x_i = \varepsilon(t_i; a) + \delta_i, \quad \varepsilon_i(a) = \delta_i, \quad a = (\varphi, p, e),$$
 (1.5)

 δ_i — независимые случайные ошибки измерений со средним 0 и дисперсией $D\delta_i^2 = \sigma^2$; $x = (x_0, ..., x_n)$ — исходная совокупность измерений.

В некоторый известный момент времени t_0 имеется начальное измерение

$$x_0 = \widehat{\varepsilon}_0 = e(t_0; a) + d_0.$$

По значению $\hat{\varepsilon}_0$ по (1.3) определим приближенно $\tilde{\theta}_0(a)$ — аномалию θ_0 в момент t_0 как функцию параметра a (начальное условие при $t = t_0$):

$$\theta = \tilde{\theta}_0(a) = h(\hat{\epsilon}_0; \varphi, p, e) = \theta_0(a) + \delta_{\theta}, \tag{1.6}$$

 $\tilde{\theta}_0(a)$ — оценка начальной аномалии $\theta_0(a)$, δ_{θ} — погрешность оценки, с.к.о. (среднее квадрати́ческое отклоне́ние) которой $\sigma/|\epsilon_{\theta}'|$, ϵ_{θ}' — производная функции ϵ по θ . При известной орбите (ϕ, p, e) погрешность в $\tilde{\theta}_0(a)$ определяется погрешностью измерения угла в момент t_0 . Заметим, что

t, c	ε, град	d, km				
		100	300	600	1000	
100	12	0.13, 0.001	0.15, 0.0004	0.15, 0.0002	0.15, 0.0002	
	48	0.14, 0.0036	0.15. 0.001	0.15. 0.0006	0.15, 0.0004	
	72	0.17, 0.006	0.16, 0.002	0.16, 0.001	0.15, 0.0006	
300	12	2.9, 0.021	3.7, 0.009	3.8, 0.005	3.9, 0.005	
	48	3.35, 0.086	3.84, 0.033	3.98, 0.017	4.04, 0.01	
	72	4.65, 0.152	4.46, 0.049	4.31, 0.023	4.23, 0.014	
600	12	19, 0.136	25, 0.06	28, 0.033	30, 0.021	
	48	23, 0.59	29.5, 0.25	30.6, 0.13	31.5, 0.08	
	72	35.9, 1.17	36.8, 0.40	35.5, 0.19	34.5, 0.11	

Таблица 1. Значения Δl (слева) в метрах и $\Delta \varepsilon$ (справа) в угловых минутах

уравнение (1.4) определяется двумя параметрами (p, e), а зависимость решений от параметра ϕ происходит только через начальное условие.

1.2. Учет движения наблюдателя вследствие вращения Земли. Наблюдатель вследствие вращения Земли движется по окружности вдоль своей параллели. Будем считать траекторию КТ неблагоприятной для измерителя, если плоскость орбиты КТ касается орбиты движущегося измерителя, и точка касания является общей точкой (точкой пересечения) для соответствующих траекторий. Эти траектории характеризуются, во-первых, настолько малым диапазоном измеряемых азимутальных углов, что измерениями азимута можно пренебречь, и, во-вторых, диапазон изменения угла места минимален при последних (наиболее информативных) наблюдениях (так как траектория входит в точку О наблюдения). Следовательно, траектории неблагоприятны, если в момент падения вектор скорости наблюдателя лежит в плоскости орбиты.

Если реверсировать время, то можно сформулировать так: неблагоприятны для измерителя те траектории, которые исходят из точки наблюдения, и орбитальная плоскость проходит через вектор скорости наблюдателя. В этом случае взаимное движение выглядит следующим образом: из точки касания O начинаются одновременно два движения: наблюдатель движется по окружности — параллели с широтой ϕ_H , а KT движется в орбитальной плоскости.

Простые соображения показывают, что существует фиктивное движение измерителя (по окружности сферы S_3 Земли в орбитальной плоскости), эквивалентное (в смысле получения углов места) истинному движению (вне орбитальной плоскости). Для этого достаточно, чтобы в любой момент времени два расстояния (от КТ до фиктивного движения и до истинного движения) были одинаковы. С помощью такого эквивалентного фиктивного движения $\Delta \phi(t)$ задача сводится к плоской. Однако фиктивное эквивалентное движение зависит от точки расположения КТ.

Построим *приближенно* эквивалентное движение, независимое от KT. Заменим равномерное движение наблюдателя вдоль своей параллели движением по окружности S_3 сферы в орбитальной плоскости, сохранив его линейную скорость $\omega_3 R_3 \cos \varphi_H$. Заметим, что для экватора $\varphi_H = 0$ и на северном полюсе $\varphi_H = \pi/2$, это фиктивное движение является эквивалентным.

Оценим это приближение. Оба движения, истинное и фиктивное, исходят (вернее, приходят) одновременно в общую точку O. Определим разность длин двух отрезков, исходящих из точки КТ на истинную траекторию и на фиктивную. Если длины в любой момент одинаковы, $\Delta d = 0$, то углы места равны. Если они не одинаковы, $\Delta d \neq 0$, то оценим величину погрешности $\Delta \varepsilon(t;d,\varepsilon) \approx (\Delta d/d)$ tg ε измеряемого угла места или величину сдвига $\Delta l(t;d,\varepsilon) \approx \Delta d/\cos\varepsilon$ фиктивного наблюдателя, при котором угол места равен истинному. Необходимые формулы даны в Приложении. В табл. 1 в каждой клетке приведены расчетные значения Δl и $\Delta \varepsilon$, зависящие от расположения КТ (угла ε и дальности d) и времени t движения до точки O; значение широты принято $\phi_{\rm H} = 60^{\circ}$.

Видно, что смещение $\Delta l(t, \varepsilon, d)$ относительно эквивалентных точек меньше 5 м в диапазоне до 300 с и до 72° при дальностях от 100 до 1000 км. Если Δl переводить в погрешность $\Delta \varepsilon$ по углу ме-

ста, то, например, за 300 с до точки O при дальности 300 км и $\varepsilon = 48^{\circ}$ имеем $\Delta l = 3.84$ м, что означает $\Delta \varepsilon \approx 0.033$ угл. мин., что меньше с.к.о. измерения в сотни раз.

Фиктивное движение при вычислениях учитывается добавлением к неизвестному параметру ϕ в (1.2) линейно изменяющееся во времени (со скоростью $\omega_3 \cos \phi_H$) слагаемое $\Delta \phi(t) = \pm \omega_3 \cos \phi_H(T-t)$, T — момент падения, причем $\Delta \phi(T) = 0$. Заметим, что формулы производных по параметрам, необходимые для матрицы Фишера, остаются без изменения; изменяются лишь их значения при вычислениях.

2. Вычисление матрицы Фишера. Информационная матрица Фишера, как известно, есть

$$F(a) = M \left(d \ln p(x; a) / da \right)^{T} \left(d \ln p(x; a) / da \right),$$

где М, Т — символы математического ожидания и транспонирования. Если измерения в (1.5) принять независимыми и нормальными, то для матрицы Фишера справедливо выражение:

$$F(a) = \sigma^{-2} \sum_{i=1}^{n} (\partial \varepsilon_i / \partial a)^{\mathrm{T}} (\partial \varepsilon_i / \partial a), \tag{2.1}$$

где слагаемое под знаком суммы есть матрица Фишера для момента t_i , $(\partial \varepsilon_i/\partial a)$ — вектор-строка. В соответствии с неравенством Рао—Крамера диагональные элементы матрицы

$$R(a) = F^{-1}(a)$$

являются нижними границами для дисперсий несмещенных оценок.

Производные ($\partial \varepsilon_i/\partial a$) функций определяются из уравнения (1.2), и при фиксированном $t=t_i$ их можно выписать в явном виде (см. Приложение). Эти функции зависят от аномалии $\theta=\theta(t)$ и от ее производных по параметрам:

$$\partial \varepsilon / \partial \varphi = \Phi_1(\theta, \theta_{\omega}), \quad \partial \varepsilon / \partial p = \Phi_2(\theta, \theta_{\upsilon}), \quad \partial \varepsilon / \partial e = \Phi_3(\theta, \theta_{\varepsilon}),$$
 (2.2)

где обозначено $\theta_{\phi} = \partial\theta/\partial\phi$, $\theta_p = \partial\theta/\partial p$, $\theta_e = \partial\theta/\partial e$. Заметим, что значения производных аномалии являются функциями времени. Для вычисления $\theta = \theta(t)$ и ее производных используем дифференциальное уравнение (1.4) с начальным условием (1.6). Формула для $\theta_0(a)$ выписана в Приложении. Продифференцировав (1.4) и (1.6) по параметрам, получим три дифференциальных уравнения:

$$d\theta_p/dt = \omega_p\theta, \quad d\theta_e/dt = \omega_e, \quad d\theta_\phi/dt = \omega_\phi,$$
 (2.3)

где угловая скорость $\omega = \omega(p,e,\theta)$ зависит от трех переменных; а справа стоят ее производные по параметрам; начальные условия:

$$\theta_n(t_0) = \theta_{0,n}, \quad \theta_e(t_0) = \theta_{0,e}, \quad \theta_{\omega}(t_0) = \theta_{0,\omega}.$$

Решения (1.4) и (2.3) для всех четырех функций $\theta = \theta(t)$, $\theta_p(t)$, $\theta_e(t)$, $\theta_\phi(t)$ в моменты $t_i = i\Delta t$, i = 1, ..., n, получаем простым численным методом. Вычислительные формулы производных скорости по параметрам даны в Приложении. Производные $\partial \varepsilon_i/\partial a$ по параметрам для матрицы Фишера с изменением i вычисляются последовательно.

3. Некоторые расчетные результаты. 3.1. Не подвижный наблюдатель. Исходные параметры орбит: α и V — угол падения и скорость КТ (формулы связи (V, α) с (p, e) даны в Приложении); $L_a = \varphi R_3$ — расстояние до точки апогея; H_a — высота в апогее; φ — угол главной оси выбирался так, чтобы орбита была "неблагоприятной", $\Delta t = 5$ с — дискретность измерений, $\sigma = 6$ — стандартная ошибка измерений; \mathbf{N} — количество наблюдений (доля времени наблюдения составляет 0.9).

Результаты нижних границ для с.к.о. приведены в табл. 2 для следующих параметров: σ_{Va} – скорости V_a в апогее, σ_{Vy} – вертикальной V_y скорости, σ_{Δ} – расстояния Δ до точки падения. По результатам делаем следующие выводы:

- горизонтальную составляющую V_a можно оценить с точностью до единиц и десятков м/с,
- точность по месту падения для высоких и с малой скоростью орбит можно получить порядка сотен метров (выделено 571, 645, 719, ...),
- вертикальную составляющую вектора скорости оценить невозможно (погрешности порядка единиц километров в секунду).

Таблица 2. Расчетные значения границ с.к.о. для V_a, V_y и Δ

Характеристики по орбитам		Угол α, град						
		12	24	36	48	60	72	
V=1 KM/c	H_a , км	2.2	8.6	17.8	28.4	38.6	46.5	
	L_a , км	21	39	49	51	44	30	
	N	7	14	21	27	31	34	
	$\sigma_{\Delta, M}$	1108	571	287	180	161	118	
	σ_{V_a} , M/C	43	12	4.6	2.3	1.5	0.9	
	σ_{V_y} , km/c	2.98	2.87	1.8	1.34	1.62	1.41	
V = 2 KM/c	H_a , км	9.4	35.8	74.3	118	159	191	
	L_a , км	88	160	202	208	179	120	
	N	15	29	43	55	64	69	
	$σ_Δ$, м	1440	1170	645	543	406	306	
	σ_{V_a} , M/c	36.3	13.6	5.6	3.4	2.0	1.2	
	σ_{V_y} , KM/C	5.7	10	7.3	8.5	7.7	7	
V = 3 KM/c	H_a , км	23	87	179	282	377	450	
	L_a , км	216	387	480	486	411	273	
	N	22	44	65	85	101	104	
	$σ_Δ$, м	3562	1936	1359	1027	719	547	
	σ_{V_a} , M/c	53.2	15.6	7.5	4.3	2.4	1.4	
	σ_{V_y} , km/c	2.49	2.45	2.48	2.45	2.0	1.83	

Таблица 3. Границы с.к.о. для $V_a,\,V_y$ и Δ

Характеристики по орбитам		Угол α, град						
		12	24	36	48	60	72	
V=1 KM/c	$\sigma_{\!\scriptscriptstyle \Delta}$, м	1680	872	440	277	252	187	
	σ_{V_a} , M/c	65.4	18.4	7.2	3.7	2.6	1.6	
	σ_{V_y} , km/c	4.5	4.4	2.7	2.0	2.4	2.1	
V = 2 KM/c	$\sigma_{\!\scriptscriptstyle \Delta}$, м	1790	1450	806	680	508	385	
	σ_{Va} , м/с	45.3	17.1	7.1	4.4	2.6	1.6	
	σ_{Vy} , km/c	7.1	13	9.1	10	9.4	8.4	
V = 3 KM/c	$\sigma_{\!\scriptscriptstyle \Delta}$, м	4130	2250	1600	1200	835	636	
	σ_{V_a} , M/c	61.2	18.2	8.8	5	2.9	1.8	
	σ_{V_y} , km/c	29	28	29	28	23	21	

3.2. Подвижный наблюдателя и КТ результаты показаны в табл. 3. Видим увеличение всех значений (понятна причина: увеличение скорости взаимного приближения). При движении в одну сторону наблюдателя и КТ результаты показаны в табл. 4. Наблюдаем уменьшение всех значений (из-за уменьшения скорости взаимного приближения).

Характері	истики по			Угол (х, град		
орбі	итам	12	24	36	48	60	72
V=1 KM/c	σ_{Δ} , M	649	334	170	109	98	71
	σ_{V_a} , M/C	25.2	6.9	2.6	1.3	0.8	0.4
	σ_{V_y} , km/c	1.7	1.7	1.1	0.85	1.1	0.95

Таблица 4. Границы с.к.о. для V_a , V_v и Δ

Заключение. Выделено семейство неблагоприятных для наблюдателя орбит, плоскость которых касается орбиты движущегося наблюдателя, и точка касания является точкой пересечения соответствующих траекторий. Обоснована простая приближенная плоская модель движения—измерения, в которой истинное движение наблюдателя (вне плоскости орбиты КТ) без изменения его скорости заменяется движением в плоскости орбиты КТ по окружности земной сферы. Обоснование проведено вычислением погрешностей.

На этой модели проанализирована потенциальная точность с помощью информационной матрицы Фишера. Вычисление матрицы Фишера основано на численном решении дифференциального уравнения, выражающего второй закон Кеплера.

Рассчитаны границы для точностей параметров для семейства неблагоприятных орбит. Примеры показывают, что по угловым измерениям возможно получение практически интересных точностей для некоторых параметров (например, горизонтальной составляющей скорости).

В Приложении приведены все формулы, необходимые для проведения аналогичных расчетов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

 Φ о р м у л а для начального значения аномалии. Начальное условие $\theta_0(\hat{\epsilon}_0, \phi, p, e)$ находим из уравнения (1.3), полагая известным измеренное значение $\hat{\epsilon}_0$ начального угла места. Это значение может быть выбрано произвольным, поскольку для оценки возможных точностей не существенно, какое именно значение было начальным; важно, что оно известно и близко к 0. Полагаем $\hat{\epsilon}_0 = 0$, записываем $\cos(\phi - \theta_0)$ через косинус суммы, вводим неизвестное $x = \text{tg}(\theta_0/2)$, через x выражаем $\sin\theta_0$ и $\cos\theta_0$, и из полученного квадратного уравнения

$$Ax^{2} + Bx + C = 0$$
, где $A = a + c$, $B = -2b$, $C = c - a$,

причем $a = \cos \varphi + e(R_3/p)$, $b = \sin \varphi$, $c = R_3/p$, получаем решение:

$$\theta_0 = 2 \operatorname{arctg} \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad \theta_f = 2 \operatorname{arctg} \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

 θ_f — второй корень уравнения (финальная аномалия).

Оценка погрешности угла места при фиктивном движении наблюдателя. На рис. $2 \text{ C}\Pi$ — северный полюс, точка O — начало системы отсчета (x, y, z); ортогональные оси x и y находятся в плоскости орбиты, ось y направлена вдоль вектора V скорости наблюдателя в точке O, ось z — ортогональна орбитальной плоскости.

Истинное движение наблюдателя. Координаты $(u_{\rm H}, y_{\rm H})$ наблюдателя в плоскости $P_{\rm H}$ его движения в момент t записываются в виде:

$$u_{\mathrm{H}}(t) = (R_3 \cos(\varphi_{\mathrm{H}}))(1 - \cos(\omega_3 t)), \quad y_{\mathrm{H}}(t) = R_3 \cos(\varphi_{\mathrm{H}})\sin(\omega_3 t),$$

 R_3 , ω_3 — радиус Земли и угловая скорость; t — время движения наблюдателя из точки О. Запишем вектор $r_{\rm H}(t)$ координат наблюдателя в системе (x, y, z):

$$r_{\mathrm{H}}(t) = \begin{bmatrix} x_{\mathrm{H}}(t) \\ y_{\mathrm{H}}(t) \\ z_{\mathrm{H}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{\mathrm{H}} \mathrm{cos}(\varphi_{\mathrm{H}}) = -R_{3} \mathrm{cos}^{2}(\varphi_{\mathrm{H}}) [1 - \mathrm{cos}(\omega_{3}t)] \\ (R_{3} \mathrm{cos}(\varphi_{\mathrm{H}})) \sin(\omega_{3}t) \\ u_{\mathrm{H}} \mathrm{sin}(\varphi_{\mathrm{H}}) = R_{3} \mathrm{sin}(2\varphi_{\mathrm{H}}) \mathrm{cos}(\omega_{3}t)/2 \end{bmatrix}.$$

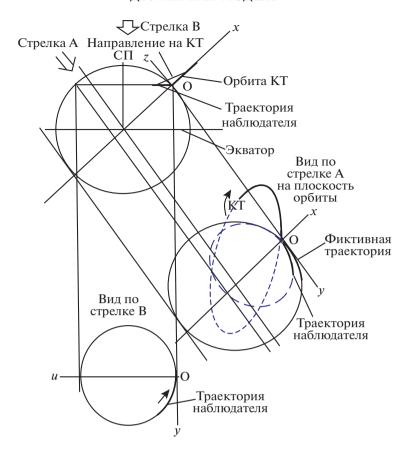


Рис. 2. Орбиты движений наблюдателя и КТ в трех проекциях

Вектор координат КТ в момент t обозначим через $r = (x, y, z = 0)^{T}$. Расстояние между КТ и наблюдателем равно $d_{H}(t) = |r - r_{H}(t)|$.

 Φ иктивное движение наблюдателя. Пусть $\omega_f = \omega_3 \cos \phi_{\rm H} - {
m yr}$ ловая скорость фиктивного движения; вектор координат

$$r_f(t) = \begin{bmatrix} x_f(t) \\ y_f(t) \\ z_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_3 (1 - \cos(\omega_f t)) \\ R_3 \sin(\omega_f t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Расстояние между КТ и фиктивным наблюдателем:

$$d_f(t) = \left| r - r_f(t) \right|.$$

Разность расстояний $d_f(t)$ и $d_H(t)$:

$$\Delta d(t) = d_f(t) - d_H(t) = \Delta d(t; d, \varepsilon),$$

 (d,ε) — координаты КТ (дальность и угол места из точки O).

Если $\Delta d(t)=0$, то погрешность $\Delta \varepsilon(t)=0$. Если $\Delta d(t)\neq 0$, то погрешность оценивается величиной

$$\Delta \varepsilon(t; d, \varepsilon) \approx (\Delta d/d) \operatorname{tg} \varepsilon$$

(рис. 3), а также расстоянием сдвига $\Delta l(t;d,\varepsilon) \approx \Delta d/\cos\varepsilon$, при котором $\Delta\varepsilon = 0$.

Формулы для производных угла по параметрам. Соотношение (1.2) связывает измеряемые углы ε с параметрами $a = (\varphi, p, e)$ орбиты и аномалией θ в любой момент t:

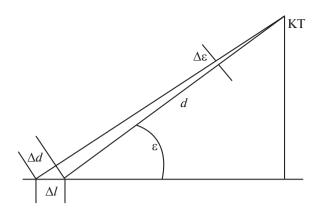


Рис. 3. Связь между Δd и $\Delta \epsilon$

 $\varepsilon = \varepsilon(\theta; \varphi, p, e)$. Найдем производные $\partial \varepsilon / \partial \varphi$, $\partial \varepsilon / \partial p$, $\partial \varepsilon / \partial e$ функции $\varepsilon(\varphi, p, e)$ по параметрам (φ, p, e) , опуская t. Дифференцируя (1.3) по φ , имеем

$$\cos(\varphi - \theta) \left(1 - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) \operatorname{tg} \varepsilon + \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\cos^2 \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = -\sin(\varphi - \theta) \left(1 - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) - \frac{R_3}{p} e \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial \varphi},$$

откуда

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = -\cos^2 \varepsilon \left[\left(1 - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) \left(1 + \frac{\mathrm{tg}\varepsilon}{\mathrm{tg}(\varphi - \theta)} \right) - \frac{R_3 e}{\rho} \frac{\sin \theta}{\sin(\varphi - \theta)} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right].$$

Аналогично имеем производные по p и по e:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial e} = \cos^2 \varepsilon \left[\frac{R_3}{p \sin(\varphi - \theta)} \cos \theta + \left(1 - e \cdot \frac{R_3 \sin \theta}{p \sin(\varphi - \theta)} + \frac{tg\varepsilon}{tg(\varphi - \theta)} \right) \frac{\partial \theta}{\partial e} \right].$$

Получили три функции из (2.2) (для каждого момента t):

$$\Phi_1(\theta,\theta_{\omega}), \Phi_2(\theta,\theta_{n}), \Phi_3(\theta,\theta_{e}),$$

где обозначено $\partial\theta/\partial\phi=\theta_{\phi}=\theta_{\phi}(t)$, $\partial\theta/\partial p=\theta_{p}=\theta_{p}(t)$, $\partial\theta/\partial e=\theta_{e}=\theta_{e}(t)$. Заметим, что аномалия θ и ее производные по параметрам $\theta=\theta(t)$, $\theta_{\phi}(t)$, $\theta_{p}(t)$, $\theta_{p}(t)$ являются функциями времени.

Производные угловых скоростей по параметрам. Из формулы (1.4) имеем

$$\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial p} = -\frac{3}{2} p^{-\frac{5}{2}} \sqrt{\mu} (1 - e \cos \theta)^2, \quad \frac{\partial \omega}{\partial e} = -2 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (1 - e \cos \theta) \cos \theta.$$

Формулы связи параметров (V, α) и (p, e). Здесь приведены формулы пересчета параметров (V, α) — скорости V и угла α падения в параметры (p, e) — фокальный параметр p и эксцентриситет e.

1. Исходными соотношениями являются формулы для радиальной v_r и трансверсальной v_u составляющих:

$$v_r = \sqrt{\mu/p}e\sin\theta$$
, $v_\mu = \sqrt{\mu/p}(1 - e\cos\theta)$,

откуда

$$tg\alpha = \frac{v_r}{v_u} = \frac{e\sin\theta}{1 - e\cos\theta} = \frac{x}{y},$$

где $x = e \sin \theta$, $y = 1 - e \cos \theta$, $x = y \tan \theta$ причем

$$x^2 + (1 - y)^2 = e^2$$
.

2. Условие пересечения орбиты со сферой запишем уравнением

$$\frac{p}{1 - e\cos\theta} = \frac{p}{y} = R_3,$$

тогда
$$y = \frac{p}{R_3}$$
, $x = y \operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{R_3} \operatorname{tg} \alpha$.

3. Модуль скорости

$$V^2 = v_r^2 + v_u^2 = (\mu/p)(x^2 + y^2),$$

$$x^{2} + y^{2} = \frac{p}{\mu}V^{2}, \quad \left(\frac{p}{R_{3}} \operatorname{tg}\alpha\right)^{2} + \left(\frac{p}{R_{3}}\right)^{2} = \frac{p}{\mu}V^{2}.$$

После сокращения на р имеем

$$\frac{p}{R_3^2}(\mathsf{tg}^2\alpha+1)=\frac{V^2}{\mu}.$$

Тогда, используя обозначение $p/R_3 = p_R$, получаем выражение для p и e через V и α :

$$p = p_R R_3, \quad p_R = \frac{R_3}{\mu} \frac{V^2}{\lg^2 \alpha + 1},$$

$$y = p_R$$
, $x = y \operatorname{tg} \alpha = p_R \operatorname{tg} \alpha$,

$$e^2 = x^2 + (1 - y)^2 = (p_B \operatorname{tg}\alpha)^2 + (1 - p_B)^2$$
.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Chang C.B. Optimal State Estimation of Ballistic Trajectories with Angle-only Measurements // M.I.T., Lincoln Laboratory, Technical Note 1979–1. 1979.
- 2. Chang C.B., Tabaczynski J. Application of State Estimation to Target Tracking // IEEE Trans. Automatic Control, 1984, V. 29, № 2, P. 98–109.
- 3. Саврасов Ю.С. Методы определения орбит космических объектов. М.: Машиностроение, 1981.
- 4. Саврасов Ю.С. Алгоритмы и программы в радиолокации. М.: Радио и связь, 1985.
- 5. *Аким Э.Л., Энеев Т.М.* Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений // Космич. исслед. 1963. Т. 1. № 1. С. 5—50.
- 6. *Молотов Е.П., Тучин А.Г.* Навигация космических аппаратов при исследовании дальнего космоса. М.: Радиотехника, 2016.
- 7. *Колесса А.Е., Пругло А.В., Равдин С.С.* Восстановление орбит по угловым измерениям // Радиотехника. 2005. № 10. С. 5—9.
- 8. *Бульчев В.Ю., Бульчев Ю.Г., Ивакина С.С.* Пассивная локация на основе угловых и мощностных измерений системы пеленгаторов // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 1. С. 65—73.
- 9. *Бульчев В. Ю., Бульчев Ю.Г., Ивакина С.С.* Угломерно-энергетический метод нестационарной пассивной локации на базе однопозиционной системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 122—136.
- 10. Chang C.B., Athans M., Whiting R. Onthe Stateand Parameter Estimation for Maneuvering Reentry Vehicles // IEEETrans. Automatic Control. 1977. V. 22. № 1. P. 99–105.
- 11. *Колесса А.Е.* Рекуррентные алгоритмы фильтрации для некоторых систем с нелинейностями кусочнолинейного типа // AuT. 1986. № 4. С. 48–55.
- 12. *Колесса А.Е.* Некоторые прикладные вопросы кусочно-линейной фильтрации // АиТ. 1986. № 5. С. 61—69.
- 13. *Колесса А.Е.* Точные формулы оптимальной фильтрации для нестационарной кусочно-линейной задачи оценивания параметра // AuT. 1989. № 12. С. 69–80.
- 14. *Miller R.W.* A Lower Boundon Angle only Tracking Accuracy // M.I.T. Lincoln Laboratory. Project Report No. RMP–149. 1978.

- 15. *Brehard T., le Cadre J.P.* Closed-Form Posterior Cramer − Rao Bounds for Bearings − Only Tracking // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems. 2006. V. 42. № 4.
- 16. Brehard T., le Cadre J.P. Closed form Posterior Cramer Rao Bound for a Maneuvering Target in the Bearings Only Tracking Context Using Best Fitting Gaussian Distribution // 9thIntern. Conf. on Information Fusion. Florence, Italy. 2006.
- 17. *Farina A.*, *Benvenuti D.*, *Ristic B.*Tracking a Ballistic Target: Comparison of Several Nonlinear Filters // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems. 2002. V. 38. № 3. P. 854–867.
- 18. *Farina A., Ristic B., Timmoneri L.* Cramer − Rao Bound for Nonlinear Filtering with Pd ≤ 1 and its Application to Target Tracking // IEEE Trans. Signal Processing. 2002. V. 50. № 8. P. 1916–1924.
- 19. *Ristic B., Farina A., Benvenuti D., Arulampalam M.S.* Performance Bounds and Comparison of Nonlinear Filters for Tracking a Ballistic Object on Re-entry // IEEE Proceedings Radar, Sonar and Navigation. 2003. V. 150. № 2. P. 65—70.

____ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ _ И ИЛЕНТИФИКАЦИЯ

YIK 519.7 + 681.51

СТАТИСТИЧЕСКИЕ И НЕСТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© 2021 г. С. Г. Пушков

ФНПЦ "Алтай", Бийск, Россия e-mail: pushkovsg@yandex.ru
Поступила в редакцию 07.05.2019 г.
После доработки 14.09.2020 г.
Принята к публикации 30.11.2020 г.

Рассматривается проблема оценивания импульсной характеристики линейной стационарной динамической системы с дискретным временем на основе данных о ее входных и выходных сигналах. Предлагаются варианты методов оценивания для асимптотически устойчивых динамических систем в рамках различных подходов к представлению параметрической неопределенности, включая подходы на основе интервального анализа и теории нечетких множеств. Проведены сравнительный анализ и численная иллюстрация методов.

DOI: 10.31857/S0002338821020116

Введение. Импульсная характеристика или реакция системы на единичный импульс является одной из наиболее удобных и часто используемых характеристик представления внешнего поведения линейных стационарных динамических систем как систем с непрерывным временем, так и систем, развивающихся в дискретном времени [1]. И в том и в другом случае знание импульсной характеристики позволяет вычислять (с помощью уравнений свертки) выходной сигнал системы на основании информации о входном сигнале в предшествующие моменты времени.

Задача оценивания параметров импульсной характеристики по результатам измерений входных и выходных сигналов системы (или задания пробных входных сигналов и измерения выходных сигналов) является классической задачей идентификации систем. В рамках вероятностностатистического подхода к проблеме данная задача, а также ряд задач, к ней примыкающих, всесторонне изучены и изложены в большом количестве публикаций, например [2]. Между тем в последнее время получили распространение методы описания систем с неопределенностями в параметрах или данных на основе других подходов к представлению этих неопределенностей, в частности, методы интервального анализа [3] и теории нечетких множеств [4].

Для класса линейных стационарных динамических систем с дискретным временем методы оценивания параметров импульсной характеристики могут оказаться также полезными при построении моделей с пространством состояний на основе данных об измерениях входных и выходных сигналов системы. В частности, эти методы оказываются необходимой частью при осуществлении двухэтапной процедуры построения модели с пространством состояний [5]. Здесь задачей первого этапа является получение отображения вход-выход, хорошим представлением которого является импульсная характеристика, для систем с дискретным временем это есть импульсная последовательность матриц. На втором этапе из решения задачи реализации вычисляются матрицы эквивалентной системы в виде модели с пространством состояний. Некоторые методы решения задачи второго этапа для различных подходов к представлению параметрической неопределенности можно найти в следующих работах: [6] — при статистическом подходе, [7] — для интервальных систем, [8] — для систем над нечеткими числами.

Настоящая статья посвящена задаче оценивания параметров импульсной характеристики на основе данных об измерении входных и выходных сигналов системы. С этой целью после краткого анализа проблемы оценивания импульсной характеристики для класса линейных стационарных динамических систем с дискретным временем рассматриваются постановки задач и методы их решения для различных подходов к описанию неопределенностей в данных. Наряду с методом, основанным на минимизации среднеквадратичного отклонения (СКО), представлены

варианты методов интервального и нечеткого оценивания матриц импульсной последовательности. Работа завершается сравнительным анализом и численной иллюстрацией методов.

1. Импульсная характеристика динамической системы и ее оценивание. Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему Σ с дискретным временем с m входами n состояниями и p выходами над полем действительных чисел \mathbb{R} , которую можно отождествить с четверкой линейных отображений $\Sigma = (F, G, H, J)$:

$$F: X \to X$$
, $G: U \to X$, $H: X \to Y$, $J: U \to Y$,

где $U = \mathbb{R}^m$, $X = \mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}^p$ — векторные пространства над полем \mathbb{R} размерностей m, n и p (пространства входных сигналов, состояний и выходных сигналов соответственно). Динамическое поведение системы Σ описывается разностными уравнениями:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad v(t) = Hx(t) + Ju(t), \quad t = 1, 2, \dots$$
 (1.1)

где $x(t) \in X$, $u(t) \in U$, $y(t) \in Y$ для всех дискретных моментов времени t. Отображения F, G, H и J в уравнениях (1.1) могут быть представлены матрицами с вещественными коэффициентами размеров $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ и $p \times m$ соответственно. Поэтому далее мы будем обозначать эти отображения и соответствующие им матрицы одинаковыми символами.

Пусть на вход системы $\Sigma = (F, G, H, J)$ с динамическим поведением (1.1), находящейся в начальный момент времени t = 0 в состоянии x(0), поступает последовательность входных сигналов $u(0), u(1), u(2), \dots$ Тогда по индукции легко установить, что значения состояния и выходного сигнала в любой последующий момент времени t можно вычислить по формулам

$$x(t) = F^{t}x(0) + \sum_{j=1}^{t} F^{j-1}Gu(t-j),$$

$$y(t) = HF^{t}x(0) + \sum_{j=1}^{t} HF^{j-1}Gu(t-j) + Ju(t).$$
(1.2)

Если x(0) = 0, то y(0) = 0 (в правых частях последних двух уравнений 0 следует понимать в векторном смысле) и, согласно (1.2),

$$y(t) = \sum_{j=1}^{t} HF^{j-1}Gu(t-j) + Ju(t), \quad t = 1, 2, ...$$

Вводя обозначения

$$A_0 = J$$
, $A_j = HF^{j-1}G$, $j = 1, 2, ...$

получаем уравнения

$$y(t) = \sum_{i=0}^{t} A_{j} u(t-j) = \sum_{i=0}^{t} A_{t-j} u(j), \quad t = 1, 2, \dots$$
 (1.3)

Таким образом поведение вход-выход линейной стационарной динамической системы с дискретным временем, находящейся в начальный момент времени t=0 в нулевом состоянии, x(0)=0, наряду с *отображением вход-выход* $f_{\Sigma}: (u(0),u(1),...)\mapsto (y(0),y(1),...)$ [1] может быть охарактеризовано *импульсной последовательностью матриц* (называемой также *последовательностью весовых матриц* или *последовательностью марковских параметров*)

$$\{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$$
 (1.4)

размера $p \times m$, являющейся представлением *импульсной характеристики* системы. Это название связано с тем, что данную последовательность можно получить в результате специального эксперимента с системой, подав на ее вход единичный импульс и наблюдая значения выходного сигнала. Уравнения (1.3) иногда называют *уравнениями свертки*, а поскольку матрицы (1.4) определяют веса, с которыми входные сигналы в предшествующие моменты времени представлены в выходном сигнале, становится понятным другое название этой последовательности.

Задача оценивания импульсной характеристики, т.е. определения матриц импульсной последовательности на основе данных измерения входных и выходных сигналов системы в течение некоторого промежутка времени, становится актуальной во многих практических ситуациях и

уже давно является классической задачей идентификации систем. В общем случае задача по одновременному оцениванию параметров и начального состояния системы оказывается весьма трудоемкой и не всегда разрешимой. В случае, когда система является асимптотически устойчивой, эта задача становится проще и часто бывает вполне разрешимой.

Линейная стационарная динамическая система с дискретным временем $\Sigma = (F, G, H, J)$ называется асимпиотически устойчивой, если

$$\lim_{i\to\infty}||F^j||=0$$

для некоторой матричной нормы $\|\cdot\|$. Легко установить, что если система $\Sigma = (F, G, H, J)$ устойчива, то для ее матриц импульсной последовательности будет выполняться условие

$$\lim_{i\to\infty}||A_j||=0,$$

и тогда для некоторого ограниченного τ , называемого *временем затухания переходных* процессов, вместо (1.3) мы можем записать приближенное равенство

$$y(t) \approx \sum_{j=0}^{\tau} A_j u(t-j) = \sum_{j=t-\tau}^{t} A_{t-j} u(j), \quad t = 1, 2, ...$$
 (1.5)

Более того, поскольку в этом случае $\lim_{j\to\infty} \|HF^jx(0)\| = 0$ для любого начального состояния x(0), то мы можем использовать уравнения (1.5) и для систем с ненулевым начальным состоянием.

С учетом вышеизложенного задача оценивания импульсной характеристики асимптотически устойчивой линейной стационарной динамической систем с дискретным временем приобретает следующий вид. Пусть N — число экспериментов — пар (u(i), y(i)), $i = \overline{1, N}$, $N > \tau$. Будем определять A_i для $j = \overline{0, \tau}$ из решения задачи минимизации некоторого функционала:

$$\Phi\left(y(i), \sum_{j=0}^{\tau} A_j u(i-j), i = \overline{1, N}\right) \to \min_{A_0, \dots, A_{\tau}},$$

который характеризует меру несогласованности (ошибки) между моделью (1.5) и наблюдаемыми экспериментальными данными вход-выход. Конкретный вид функционала Φ в значительной степени определяет метод решения этой задачи.

2. Статистический подход. Наиболее изучена методология оценивания параметров на основе минимизации СКО с использованием статистического подхода к проблеме [2, 9]. Необходимые оценки и свойства этих оценок можно получить с помощью статистических понятий и методов.

Будем определять A_j для $j=\overline{0,\tau}$ из решения задачи минимизации квадратичного функционала:

$$\Phi = \sum_{i=\tau+1}^{N} \left\| y(i) - \sum_{j=0}^{\tau} A_j u(i-j) \right\|^2 \to \min_{A_0, \dots, A_{\tau}},$$
 (2.1)

где $\|\cdot\|$ — матричная евклидова норма.

Введем в рассмотрение блочные матрицы

$$A = (A_0 \ A_1 \ \dots \ A_{\tau}), \quad S = \begin{pmatrix} S_{00} \ S_{01} \ \dots \ S_{0\tau} \\ S_{10} \ S_{11} \ \dots \ S_{1\tau} \\ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \\ S_{\tau 0} \ S_{\tau 1} \ \dots \ S_{\tau \tau} \end{pmatrix}, \quad R = (R_0 \ R_1 \ \dots \ R_{\tau}),$$

$$(2.2)$$

где S_{ii} — матрица размера $m \times m$,

$$S_{jt} = \sum_{i=\tau+1}^{N} u(i-j)u^{\mathrm{T}}(i-t), \quad j,t = \overline{0,\tau},$$
 (2.3)

 R_t — матрица размера $p \times m$,

$$R_t = \sum_{i=\tau+1}^{N} y(i)u^{\mathrm{T}}(i-t), \quad t = \overline{0,\tau}.$$
 (2.4)

В этих обозначениях исходная задача сводится к задаче вычисления параметров множественной линейной регрессии.

П р е д л о ж е н и е. Для асимптотически устойчивых линейных стационарных динамических систем с дискретным временем решение задачи (2.1) удовлетворяет матричному уравнению

$$AS = R. (2.5)$$

Вариант доказательства этого утверждения без обращения к статистическим понятиям можно найти в работе [5].

Таким образом, оценки матриц импульсной последовательности асимптотически устойчивой системы мы можем получить, решив матричное уравнение (2.5). В результате решения этой задачи оценки будут точечными. Если мы обладаем достаточной информацией о законе распределения ошибок в исходных данных, то на основе вероятностно-статистических методов можно получить информацию о свойствах этой оценки, в том числе найти оценки доверительных интервалов.

3. Интервальное оценивание. При данном подходе мы изначально ищем не точечные оценки, а интервальные. Причем эти интервальные оценки следует интерпретировать в ином по сравнению со статистическим подходом смысле, не как доверительные интервалы, а как множество равноправных точечных моделей, которые объясняют наблюдаемые данные.

Итак, пусть по-прежнему мы имеем в распоряжении данные измерений входного и выходного сигнала некоторой системы:

$$u(0), u(1), ..., u(N) \in \mathbb{R}^m, \quad y(0), y(1), ..., y(N) \in \mathbb{R}^p,$$

а также модель, описывающую поведение вход-выход:

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\tau} A_j u(t-j), \quad t = 1, 2, \dots$$
 (3.1)

Разница заключается в том, что матрицы A_j в соотношениях (3.1) являются интервальными и соответственно само соотношение (3.1) понимается в интервальном смысле, т.е. операции выполняются по правилам интервальной арифметики. Необходимые сведения по обращению с интервалами и элементами интервального анализа можно найти в работе [10], там же можно ознакомиться с некоторыми другими интервальными методами оценивания параметров.

То, что матрицы A_j являются интервальными, в частности, означает, что все элементы матриц A_j — интервалы. Эти матрицы мы будем представлять в виде

$$A_{j} = \left[\underline{A}_{j}, \overline{A}_{j}\right], \quad j = \overline{0, \tau}, \tag{3.2}$$

где \underline{A}_j и \overline{A}_j — точечные матрицы, элементы которых состоят из нижних и верхних границ элементов матрицы A_j соответственно. Уравнения (3.1) с интервально заданными матрицами A_j , $j=\overline{0,\tau}$, следует понимать как семейство уравнений

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\tau} B_j u(t-j), \quad t = 1, 2, ...,$$
(3.3)

с точечными матрицами $B_j \in \left[\underline{A}_j, \overline{A}_j\right], j = \overline{0, \tau}.$

Для решения задачи оценивания матриц импульсной характеристики в виде (3.2) образуем допустимое множество, состоящее из всех наборов точечных матриц $\{B_0, ..., B_{\tau}\}$, удовлетворяющих уравнениям (3.3):

$$\mathbf{B} = \left\{ \left\{ B_0, \dots, B_{\tau} \right\} : \sum_{j=0}^{\tau} B_j u(t-j) = y(t), \ t = \overline{\tau + 1, N} \right\}.$$
 (3.4)

Таким образом требование соответствия модели (1.5) наблюдаемым данным вход-выход, которое ранее выражалось в задаче минимизации (2.1) функционала Φ , теперь состоит в принадлежности допустимому множеству **B**. Сами интервальные оценки будем находить из решения $2(\tau+1)pm$ задач линейного программирования на нахождение нижних и верхних границ всех элементов матриц A_i :

$$\underline{a}_{kql} = \min_{\{B_0, \dots, B_{\tau}\} \in \mathbf{B}} b_{kql}, \quad k = \overline{0, \tau}, \quad q = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, m},$$

$$\overline{a}_{kql} = \max_{\{B_0, \dots, B_{\tau}\} \in \mathbf{B}} b_{kql}, \quad k = \overline{0, \tau}, \quad q = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, m},$$

$$(3.5)$$

где \underline{a}_{kql} , \overline{a}_{kql} , b_{kql} — элементы, расположенные в q-й строке и l-м столбце, матриц \underline{A}_k , \overline{A}_k , B_k соответственно. В каждой из этих $2(\tau+1)pm$ задач на допустимом множестве \mathbf{B} , определенном, согласно (3.4), в качестве функционала, используется один из $(\tau+1)pm$ элементов матриц B_j (остальные свободны и могут принимать любые значения в рамках ограничивающего множества \mathbf{B}), для которых находится минимум и максимум. Они же являются и искомыми параметрами.

Задачи (3.5) на допустимом множестве **B**, определенном согласно (3.4), в большинстве случаев не имеют решения, поскольку несовместной оказывается система ограничений. Эти задачи гарантировано имеют решения только для точных данных и точного указания порядка модели. Поэтому при решении задач (3.5) вместо допустимого множества, определенного согласно (3.4), целесообразно рассматривать более широкое множество, учитывающее погрешность определения выхода $\Delta y(t)$. При этом ограничения принимают форму неравенств:

$$\mathbf{B} = \left\{ \left\{ B_0, \dots, B_{\tau} \right\} : \begin{cases} \sum_{j=0}^{\tau} B_j u(t-j) \le y(t) + \Delta y(t), t = \overline{\tau + 1, N}, \\ \sum_{j=0}^{\tau} B_j u(t-j) \ge y(t) - \Delta y(t), t = \overline{\tau + 1, N} \end{cases} \right\}. \tag{3.6}$$

Данная задача по интервальному оцениванию матриц импульсной последовательности может быть обобщена на случай интервального выхода, т.е. когда

$$u(0), u(1), ..., u(N) \in \mathbb{R}^m, \quad y(0), y(1), ..., y(N) \in \mathbb{IR}^p.$$

Здесь \mathbb{IR} — множество всех вещественных интервалов, соответственно \mathbb{IR}^p — множество всех интервальных векторов размерности p. Через $\underline{y}(t)$ и $\overline{y}(t)$ будем обозначать векторы нижних и верхних границ вектора выхода соответственно. \overline{B} итоге получается задача (точнее, семейство задач) (3.5) на допустимом множестве

$$\mathbf{B} = \left\{ \left\{ B_0, \dots, B_{\tau} \right\} : \begin{cases} \sum_{j=0}^{\tau} B_j u(t-j) \leq \overline{y}(t), t = \overline{\tau + 1, N}, \\ \sum_{j=0}^{\tau} B_j u(t-j) \geq \underline{y}(t), t = \overline{\tau + 1, N} \end{cases} \right\}.$$

Для случая

$$u(0), u(1), ..., u(N) \in \mathbb{R}^m, \quad y(0), y(1), ..., y(N) \in \mathbb{R}^p$$

с неотрицательными интервальными входами $u(t) = [\underline{u}(t), \overline{u}(t)]$ можно рассматривать задачи (3.5) на допустимом множестве

$$\mathbf{B} = \left\{ \left\{ B_0, \dots, B_{\tau} \right\} : \begin{cases} \sum_{j=0}^{\tau} B_j \underline{u}(t-j) \leq y(t), t = \overline{\tau + 1, N}, \\ \sum_{j=0}^{\tau} B_j \overline{u}(t-j) \geq y(t), t = \overline{\tau + 1, N} \end{cases} \right\}.$$

Наконец, возможно применение интервального варианта метода, описанного в разд. 2. Тогда потребуется решение матричного уравнения

$$AS = R \tag{3.7}$$

с интервальной матрицей R и, в общем случае, даже с интервальной матрицей S. Здесь при формировании интервальных матриц R и S в (2.2) вместо уравнений (2.3) и (2.4) нужно использовать их интервальные аналоги:

$$S_{jt} = \sum_{i=\tau+1}^{N} [\underline{u}(i-j), \overline{u}(i-j)] [\underline{u}^{\mathrm{T}}(i-t), \overline{u}^{\mathrm{T}}(i-t)], \quad j, t = \overline{0, \tau},$$

$$R_{t} = \sum_{i=\tau+1}^{N} [\underline{y}(i), \overline{y}(i)] [\underline{u}^{\mathrm{T}}(i-t), \overline{u}^{\mathrm{T}}(i-t)], \quad t = \overline{0, \tau}.$$

Последний случай с интервальной матрицей S может привести к весьма сложной и не всегда полезной задаче (из-за очень широких оценочных интервалов), поскольку потребует обращения интервальной матрицы. В то время как первый случай (только с интервальной матрицей R и точечной S) всегда имеет решение (когда S является невырожденной) с адекватной шириной оценочных интервалов. Причем когда $\underline{y}(t) = y(t) - \Delta y(t)$ и $\overline{y}(t) = y(t) + \Delta y(t)$, точечное решение, полученное на основе метода, описанного в разд. 2, оказывается в точности центром решения интервальной задачи.

4. Нечеткое оценивание. Данный подход по своей сути также является интервальным, но поскольку ядро этого подхода — нечеткая (интервальная) модель регрессии впервые была предложена в литературе по применениям нечетких множеств [4], в данной работе будем называть такие модели и соответствующие им методы нечеткими.

В отличие от подхода разд. 3, где интервал представлялся нижней и верхней границами, $a = [\underline{a}, \overline{a}]$, здесь будем описывать интервалы с использованием его центра c и ширины δ , применяя запись $a = (c, \delta)$, где $\underline{a} = c - \delta$, $\overline{a} = c + \delta$. Интервал $a = (c, \delta)$ будем считать нечетким числом с треугольной функцией принадлежности (треугольное нечеткое число), в то время как интервалы $a = [\underline{a}, \overline{a}]$ целесообразно рассматривать как нечеткие числа с постоянной на $[\underline{a}, \overline{a}]$ функцией принадлежности.

Итак, как и прежде, мы имеем в распоряжении данные измерений:

$$u(0), u(1), \dots, u(N) \in \mathbb{R}^m, \quad v(0), v(1), \dots, v(N) \in \mathbb{R}^p,$$

и импульсная характеристика описывается моделью

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\tau} A_j u(t-j), \quad t = 1, 2, ...,$$
(4.1)

но теперь A_j есть матрицы с нечеткими треугольными числами, которые мы будем представлять в виде

$$A_j = (C_j, \Delta_j), \quad j = \overline{0, \tau},$$

где C_j — матрицы центров и Δ_j — матрицы ширин матриц A_j . Таким образом формула (4.1) для вычисления нечеткого (интервального) выхода принимает вид

$$y(t) = \left(\sum_{j=0}^{\tau} C_j u(t-j), \sum_{j=0}^{\tau} \Delta_j |u(t-j)|\right), \quad t = 1, 2, ...,$$
(4.2)

где |u(t-j)| понимается как вектор, все координаты которого состоят из абсолютных значений соответствующих координат вектора u(t-j):

$$y(t) = \left(\sum_{j=0}^{\tau} C_j u(t-j), \sum_{j=0}^{\tau} \Delta_j |u(t-j)|\right), \quad t = 1, 2, ...$$

В соответствии с формулами (4.2) суммарная ширина оценочного интервала для p-мерного вектора выхода v(t) определяется как

$$\sum_{n=1}^{p} \sum_{j=0}^{\tau} \Delta_{j} |u(t-j)|.$$

Найдем оценки матриц A_j , которые дают минимальную суммарную величину ширины оценочных интервалов всех векторов выхода, которая в данном случае вычисляется по формуле

$$\sum_{i=\tau+1}^{N} \sum_{q=1}^{p} \sum_{j=0}^{\tau} \Delta_{j} |u(t-j)|.$$

Добавив также требование того, чтобы наблюдаемые значения выхода включались в оценочные значения выхода, приходим к следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{cases}
\sum_{i=\tau+1}^{N} \sum_{q=1}^{p} \sum_{j=0}^{\tau} \Delta_{j} |u(t-j)| \to \min_{C,\Delta}, \\
\sum_{j=0}^{\tau} C_{j} u(t-j) - \sum_{j=0}^{\tau} \Delta_{j} |u(t-j)| \le y(t), \quad t = \overline{\tau+1, N}, \\
\sum_{j=0}^{\tau} C_{j} u(t-j) + \sum_{j=0}^{\tau} \Delta_{j} |u(t-j)| \ge y(t), \quad t = \overline{\tau+1, N}, \\
\Delta_{j} \ge 0, \quad j = \overline{1, \tau}.
\end{cases} \tag{4.3}$$

В отличие от традиционной регрессионной оценки для данного метода характерно то, что увеличение числа данных расширяет оценочный интервал.

- **5.** Сравнительный анализ и численная иллюстрация методов. Проведем сравнительный анализ представленных выше методов оценивания матриц импульсной характеристики и проиллюстрируем их на численных примерах. Таким образом в сравнении будут участвовать следующие четыре метода оценивания импульсной характеристики:
- 1) метод, который будем обозначать через StaImp, основанный на минимизации квадратичной ошибки путем решения задачи (2.1), которое получается из решения матричного уравнения (2.5) (его условно можем считать статистическим);
- 2) интервальный метод IntImp1, базирующийся на решении $2(\tau + 1)pm$ задач линейного программирования (3.5) на допустимом множестве **B**, определенном согласно (3.6);
- 3) интервальный метод IntImp2 из решения интервального матричного уравнения (3.7) с интервальной матрицей R;
- 4) нечеткий (интервальный) метод FuzImp на основе решения задачи линейного программирования (4.3).

Метод StaImp является точечным в том смысле, что мы получаем точечные (неинтервальные) оценки параметров импульсной характеристики системы. Поскольку этому методу можно дать статистическую интерпретацию, то, используя те или иные предположения о законах распределения искажений выходного сигнала и соответствующие им статистические методы, удается получить интервальные оценки, например 95%- или 99%-ные доверительные интервалы. Но проблема заключается в том, что эти доверительные интервалы в большинстве реальных ситуаций оказываются настолько большими, что теряют всякий практический смысл. Достоинством данного метода является относительно небольшие вычислительные затраты. Точность оценок улучшается при увеличении длины временного ряда.

Интервальный метод IntImp1 требует значительно больших (по сравнению с методом StaImp) вычислительных затрат. Достоинство метода состоит в том, что получаемые интервальные оценки содержат все точечные решения, которые описывают наблюдаемый временной ряд с учетом заранее заданных погрешностей измерений или наблюдений. Также плюсом этого метода является то, что в систему ограничений задачи линейного программирования можно добавить ограничения, касающиеся априорных знаний об оцениваемых параметрах. В отличие от метода StaImp, ширина полученных интервальных оценок растет с увеличением длины временного ряда. Недостаток данного метода состоит также в том, что при достаточно большой длине временного ряда задача линейного программирования, лежащая в основе метода, не всегда имеет решение (из-за несовместимости системы ограничений). Это затруднение может быть преодолено путем взятия больших величин $\Delta y(t)$ в задачах (3.6), что в свою очередь приведет к увеличению ширины оценочных интервалов.

Интервальный метод IntImp2 дает в итоге более широкие интервалы в качестве оценок параметров, и эти оценки являются практически гарантированными. Решение задачи существует

всегда, когда невырожденной оказывается матрица S в уравнении (3.7). Вычислительные затраты на реализацию этого метода будут существенно меньшими, чем при реализации интервального метода IntImp1. Когда $\underline{y}(t) = y(t) - \Delta y(t)$ и $\overline{y}(t) = y(t) + \Delta y(t)$, центры интервальных оценок, полученных методом IntImp2, в точности совпадают с точечными оценками, полученными методом StaImp. Недостаток метода — часто избыточно большая ширина полученных интервалов.

Нечеткий (интервальный) метод FuzImp требует меньших по сравнению с методом IntImp1 вычислительных затрат, поскольку решается только одна задача линейного программирования. Полученные оценочные интервалы являются несколько более широкими, чем при использовании метода IntImp1. В отличие от метода IntImp1, задача линейного программирования метода FuzImp практически всегда имеет решение. Увеличение числа данных (длины временного ряда наблюдения) расширяет оценочные интервалы. Данную ситуацию, как и в случае с методом IntImp1, можно интерпретировать как приобретение новой информации, что приводит к расширению возможной оценки. Метод FuzImp имеет тот же плюс, что и метод IntImp1, а именно возможность дополнять систему ограничений априорными знаниями специалистов об оцениваемых параметрах.

П р и м е р 1. Рассмотрим линейную стационарную систему $\Sigma = (F, G, H, J)$ с одним входом, одним выходом и тремя состояниями (m = p = 1, n = 3):

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.4 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.3 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad J = 0.5, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Импульсная последовательность для этой системы имеет вид

$$A_0 = 0.5$$
, $A_1 = -0.34$, $A_2 = -0.73$, $A_3 = -0.05$, $A_4 = A_5 = \dots = 0$.

Оценивание импульсной последовательности будем проводить на основе временного ряда

$$\left\{ u(t), y(t); \ u(t) \in \mathbb{R}, \ y(t) \in \mathbb{R}, \ t = \overline{1, N} \right\},\tag{5.1}$$

порождаемого уравнениями

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad y(t) = Hx(t) + Ju(t) + \eta(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$
 (5.2)

где в качестве входного сигнала u(t) используется равномерно распределенная случайная величина из интервала [-1, 1], а выходной сигнал y(t) искажен равномерно распределенным на интервале [-0.1, 0.1] или нормально распределенным случайным шумом $\eta(t)$ с нулевым средним и дисперсией, подобранной так, чтобы соотношение сигнал/шум было близким к 10.

Для достаточно короткого временного ряда длины N=30, искажения выходного сигнала равномерным на интервале [-0.1, 0.1] шумом и временем затухания переходных процессов $\tau=3$ результаты оценивания импульсной характеристики по описанным выше четырем методам приведены в табл. 1. Здесь для метода StaImp при вычислении средней ширины оценочных интервалов использовались 95%-ные доверительные интервалы, вычисленные на основе соответствующих процентилей распределения Стьюдента. СКО в интервальных методах вычислялось для центров полученных интервальных оценок суммарно по всем четырем параметрам. Для более длинного временного ряда длины N=100 при этих же условиях результаты оценивания импульсной характеристики дают более высокую точность оценивания по всем методам (если сравнивать СКО центров оценок), при этом ширина оценочных интервалов, полученных методом FuzImp, существенно возрастет.

Похожая картина будет наблюдаться, если вместо искажения выходного сигнала шумом с равномерным искажением взять соответствующие искажения шумом с нормальным распределением той же интенсивности. В этом случае немного улучшатся оценки, полученные методами StaImp и FuzImp, и ухудшатся оценки, полученные методом IntImp1.

Характеристи ка	Точные значения	StaImp	IntImp1	IntImp2	Fuz	Imp
A_0	0.5	0.463	[0.419, 0.527]	[0.257, 0.669]	(0.465, 0.054)	[0.411, 0.519]
$A_{ m l}$	-0.34	-0.375	[-0.396, -0.313]	[-0.592, -0.159]	(-0.37, 0.084)	[-0.454, -0.285]
A_2	-0.73	-0.742	[-0.794, -0.699]	[-0.925, -0.56]	(-0.776, 0)	[-0.776, -0.776]
A_3	-0.05	-0.045	[-0.1, 0.001]	[-0.215, 0.125]	(-0.012, 0.034)	[-0.047, 0.022]
CKO	0	0.026	0.017	0.026	0.0	38
Средняя ширина интервалов	0	0.362	0.097	0.387	0.0	086

Таблица 1. Результаты оценивания импульсной характеристики для системы с одним входом и одним выходом

Таблица 2. Результаты оценивания импульсной характеристики для системы с двумя выходами

Характе- ристика	Точные значения	StaImp	IntImp1	IntImp2	FuzImp	
A_0	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.512 \\ -0.468 \end{pmatrix}$	$ \begin{bmatrix} [0.482, 0.547] \\ [-0.448, -0.422] \end{bmatrix} $	$ \begin{pmatrix} [0.351, 0.673] \\ [-0.629, -0.307] \end{pmatrix} $	(0.524, 0.004) (-0.421, 0.045)	$ \begin{bmatrix} [0.52, 0.529] \\ [-0.466, -0.375] \end{bmatrix} $
$A_{ m l}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.02\\ 0.489 \end{pmatrix}$	$ \begin{bmatrix} [-0.032, 0.023] \\ [0.451, 0.515] \end{bmatrix} $	$ \begin{bmatrix} [-0.182, 0.142] \\ [0.326, 0.651] \end{bmatrix} $	$\begin{pmatrix} (-0.011, 0.016) \\ (0.507, 0) \end{pmatrix}$	$ \begin{pmatrix} [-0.027, 0.005] \\ [0.507, 0.507] \end{pmatrix} $
A_2	$\begin{pmatrix} -0.25 \\ -0.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.263 \\ -0.086 \end{pmatrix}$	$ \begin{pmatrix} [-0.256, -0.251] \\ [-0.125, -0.083] \end{pmatrix} $	11 1	1 1	$ \begin{pmatrix} [-0.339, -0.191] \\ [-0.181, -0.045] \end{pmatrix} $
A_3	$\begin{pmatrix} -0.125 \\ -0.175 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.123 \\ -0.159 \end{pmatrix}$	$ \begin{pmatrix} [-0.171, -0.101] \\ [-0.173, -0.125] \end{pmatrix} $	' ' '	`	$ \begin{pmatrix} [-0.205, -0.096] \\ [-0.217, -0.125] \end{pmatrix} $
CKO	0	0.024	0.037	0.024	0.045	
Средняя	0	0.396	0.047	0.322	0.077	
ширина						
интервалов						

Пример 2. Теперь рассмотрим линейную стационарную систему с двумя выходами $\Sigma = (F,G,H,J)$ ($m=1,\ p=2,\ n=4$):

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.25 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -0.25 \\ -0.1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

В отличие от системы примера 1 данная система хотя и является асимптотически устойчивой, матрицы ее импульсной последовательности не превращаются в нулевые, начиная с четвертого члена.

Оценивание матриц импульсной последовательности также будем проводить на основе временного ряда (5.1), порождаемого уравнениями (5.2), где выходной сигнал y(t) искажен равномерно и нормально распределенным векторным случайным шумом $\eta(t)$ с теми же параметрами распределений, что и в примере 1.

Результаты оценивания импульсной характеристики на основе временного ряда длины N=30 с равномерными искажениями (при соотношении сигнал/шум около 10) приведены в табл. 2 ($\tau=3$).

Вообще при небольшом уровне зашумления выходного сигнала метод IntImp1 довольно часто может не давать результата либо полученные оценочные интервалы окажутся настолько узкими,

что могут не содержать точные значения. Но по мере уменьшения соотношения сигнал/шум картина существенно меняется (особенно для равномерно распределенного шума). При высоком уровне зашумления выходного сигнала этот метод может стать наиболее предпочтительным по сравнению с другими.

Заключение. Рассмотрены методы оценивания матриц импульсной характеристики линейных стационарных динамических систем с дискретным временем, основанные на различных подходах к представлению параметрической неопределенности. Наряду со стандартным подходом, допускающим вероятностно-статистическую интерпретацию и основанным на минимизации СКО, рассматриваются подходы в рамках описания неопределенностей на языках интервального анализа и теории нечетких множеств.

В работе представлены четыре метода оценивания матриц импульсной характеристики: метод StaImp, основанный на минимизации квадратичной ошибки; интервальный метод IntImp1, базирующийся на вычислении минимальных интервалов, которые содержат наблюдаемые данные; интервальный метод IntImp2 можно считать обобщением метода StaImp на интервальный случай; нечеткий (интервальный) метод FuzImp на основе решения задачи минимизации области неопределенности (метод нечеткой регрессии).

Представленные методы дают разные по качеству оценки и имеют различную вычислительную сложность. Метод StaImp имеет преимущества по сравнению с другими методами, когда в нашем распоряжении имеются достаточно длинные временные ряды наблюдений, а характер шума, искажающего выходные сигналы, близок к нормальному распределению. Для искажений случайным шумом без тенденции к центрированию (в особенности, равномерном распределении) наиболее предпочтительным становятся интервальные методы IntImp1 и IntImp2. Метод IntImp1 имеет преимущества для коротких временных рядов и высоких уровней "зашумления" выходного сигнала, а метод IntImp2 дает лучшие результаты для более длинных временных рядов и низких уровней зашумления. Метод FuzImp может с успехом применяться для случаев искажения шумами с тенденцией к центрированию, а также при нестационарном характере шума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем / Пер. с англ. М.: Мир, 1971.
- 2. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя / Пер. с англ. М.: Наука, 1991.
- 3. *Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э.* Прикладной интервальный анализ / Пер. с англ. Москва— Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
- 4. Асаи К., Ватада Д., Иван С. и др. Прикладные нечеткие системы / Пер. с япон. М.: Мир, 1993.
- 5. *Пушков С.Г.* Представление динамических систем в пространстве состояний: точная и приближенная реализация. Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2003.
- 6. *Пушков С.Г.* Об одном подходе к описанию наблюдаемого процесса линейной динамической системой // Изв. РАН. ТиСУ. 2001. № 1. С. 39—44.
- 7. *Пушков С.Г., Кривошапко С.Ю.* О проблеме реализации в пространстве состояний для интервальных динамических систем // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9. № 1. С. 75–85.
- 8. *Кожухарь В.А.*, *Пушков С.Г.* Об одном методе реализации в пространстве состояний динамических систем над нечеткими треугольными числами // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 2. С. 31—40.
- 9. Современные методы идентификации систем / Пер. с англ. Под ред. П. Эйкхоффа. М.: Мир, 1983.
- 10. Алефельд Г., Херибергер Ю. Введение в интервальные вычисления / Пер. с англ. М.: Мир, 1987.

__ УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ____ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 519.71

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА СТОХАСТИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО РЕГУЛЯТОРА С ДИНАМИЧЕСКИМ МАСШТАБИРОВАНИЕМ КОЭФФИЦИЕНТОВ¹

© 2021 г. Е. С. Паламарчук

Центральный экономико-математический ин-т РАН, Москва, Россия e-mail: e.palamarchuck@gmail.com
Поступила в редакцию 18.02.2020 г.
После доработки 27.04.2020 г.
Принята к публикации 27.07.2020 г.

Рассматривается задача синтеза стохастического линейно-квадратического регулятора на бесконечном интервале времени при динамическом масштабировании коэффициентов в уравнении состояния и целевом функционале. Динамическое масштабирование означает домножение коэффициентов на положительную функцию времени. Используемые критерии оптимальности представляют собой обобщения долговременного среднего и потраекторного долговременного среднего. При этом в качестве нормировки целевых функционалов применяется интеграл от масштабирующей функции. Показано, что вид оптимального управления инвариантен по времени и может быть получен на основе установившейся оптимальной стратегии, известной для автономной системы.

DOI: 10.31857/S0002338821020104

Введение. Линейные управляемые системы, изменение состояния которых подвержено влиянию аддитивных шумовых воздействий, широко применяются при моделировании динамики объектов в различных областях приложений, в частности для механики и управления движением, например [1-5]. Следует отметить весомый вклад отечественных исследователей в разработку данного направления, начиная с работ А.М. Летова [6–8], также см. обзорную статью В.А. Якубовича [9] для стохастического случая и изложенное в монографиях [4, 5, 10, 11]. При этом в задачах долгосрочной оптимизации часто используется предположение о постоянстве во времени параметров соответствующих моделей, см. [12-14]. Как следствие, оказывается возможным применение хорошо известных методов теории оптимального управления, разработанных для случая автономных уравнений и стационарных процессов [9]. Вместе с тем ряд аспектов функционирования систем и специфики принятия решений не учитывается при такой постановке. Например, к таким особенностям можно отнести несинхронность временных шкал течения процессов и осуществления наблюдений [15, 16], а также наличие субъективного времени [17]. Для рассматриваемой в данной работе линейной модели динамики состояния такое предположение приводит к возникновению масштабирования параметров. Масштабирование является динамическим, т.е. масштабирующие функции зависят от времени. Динамическое масштабирование коэффициентов оказывается необходимым при переходе от "внутренного" (субъективного) времени к реальной (физической) временной шкале функционирования системы управления. Стратегия управления выбирается с целью стабилизации системы в долгосрочном периоде, а используемый в оценке функционал имеет интегральный квадратичный вид. Долговременная оптимизация в таких задачах основана на построении установившегося закона управления [18, разд. 3.4] и определении подходящего критерия оптимальности на бесконечном интервале времени. Известно, что установившийся закон управления имеет вид линейной обратной связи по состоянию и соответствует предельной форме оптимальных стратегий, найденных при конечном горизонте планирования. В случае постоянных параметров структура установившейся стратегии содержит решение алгебраического уравнения Риккати, что является преиму-

¹ Работа выполнена в рамках НИР ЦЭМИ РАН.

ществом с точки зрения ее реализации. В данной работе будет показано, что инвариантность оптимальной стратегии может также возникнуть и при переменных коэффициентах. Основная цель проводимого исследования — анализ задачи синтеза стохастического линейного регулятора с динамическим масштабированием коэффициентов. Далее статья организована следующим образом. В разд. 1 проводится описание исследуемой системы управления и осуществляется постановка задачи. Раздел 2 содержит результаты об оптимальном управлении в системе с масштабированием, а также включает необходимые сведения по оптимальности в задаче синтеза стохастического линейного регулятора с постоянными коэффициентами. В разд. 3 рассматривается пример скалярной системы управления и проводится анализ ключевых предположений на параметры. Раздел 4 посвящен изучению примера задачи динамической стабилизации в макроэкономике, где возможно применение полученных результатов. Основные выводы работы, а также информация о возможных направлениях дальнейших исследований представлены в Заключении.

1. Описание системы управления и постановка задачи. Пусть на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathsf{F}, \mathsf{P}\}$ задан n-мерный случайный процесс X_t , $t \ge 0$, описываемый уравнением

$$dX_t = \alpha_t A X_t dt + \alpha_t B U_t dt + \sqrt{\alpha_t} G dW_t, \quad X_0 = x, \tag{1.1}$$

где начальное состояние x неслучайно, W_t , $t \geq 0$, — d-мерный стандартный винеровский процесс, U_t , $t \geq 0$, — допустимое управление или k-мерный случайный процесс, согласованный с фильтрацией $\{\mathsf{F}_t\}_{t\geq 0}$, $\mathsf{F}_t = \sigma\{W_s, s \leq t\}$ ($\sigma(\cdot)$ — обозначение σ -алгебры), такой, что уравнение (1.1) имеет решение; A, B, G — постоянные матрицы соответствующих размерностей, $G \neq 0$. Множество допустимых управлений обозначим через U . Отметим, что управление в виде обратной связи (называемое также синтезом или управлением по замкнутому циклу), т.е. зависящее от значений $\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$ (точнее, U_t измеримо относительно $\sigma\{X_s, s \leq t\}$), входит в множество U . В уравнении (1.1) $\alpha_t > 0$ — масштабирующая функция, при этом использование $\sqrt{\alpha_t}$ при масштабировании аддитивных шумовых воздействий dW_t обусловлено тем, что $\sqrt{\alpha_t}dW_t$ имеет порядок $\alpha_t dt$ в среднем квадратичном, т.е. $E(\sqrt{\alpha_t}dW_t)^2 = \alpha_t dt$ ($E(\cdot)$ обозначает взятие математического ожидания).

Уравнение вида (1.1) ранее рассматривалось в различных приложениях при частичном масштабировании коэффициентов. Например, детерминированная версия (1.1), где изменялась только матрица $\alpha_t A$, возникала в процессе решения задачи стабилизации класса нелинейных систем, известных как неголономные [19], с функцией α_t в качестве характеристики устойчивости. Динамика (1.1) для A=0 и $G\neq 0$ изучалась в рамках исследований когнитивных процессов [20], при этом α_t определяла силу воздействия внешнего импульса, влияющего также и на коэффициент диффузии. В работах [21–23] класс процессов вида (1.1) со степенной масштабирующей функцией α_t был введен с целью эконометрического моделирования передачи сигналов, а также изменения ряда экономических переменных.

Для каждого T > 0 в качестве целевого функционала определим случайную величину

$$J_T(U) = \int_0^T \alpha_t (X_t^{\mathsf{T}} Q X_t + U_t^{\mathsf{T}} R U_t) dt, \tag{1.2}$$

где $U \in \mathsf{U}-$ допустимое управление на интервале [0,T] (см. также характеристику допустимых управлений и множества U при задании (1.1)); $Q \geq 0$, R > 0 — симметричные матрицы ($^{\mathsf{T}}-$ знак транспонирования, запись $A \geq B$ для матриц означает, что разность A - B положительно полуопределена). При наличии монотонной функции $\alpha_t > 0$ в (1.2) α_t можно придать смысл дисконтирующей. Положительное дисконтирование возникает для убывающей α_t , а отрицательное имеет место в случае, когда α_t возрастает [24]. Возникновение соответствующей терминологии обусловлено знаком ставки дисконтирования ϕ_t , определяемой как $\phi_t = -\dot{\alpha}_t/\alpha_t$ (\cdot — производная функции по времени).

Обращаясь к анализу (1.1)—(1.2) в ситуации масштабирования, отметим, что если функция α_t является монотонной и $\alpha_0 = 1$, то при $\alpha_t > 1$ имеем инфляцию (рост абсолютных значений) коэффициентов, случай $\alpha_t \to \infty$, $t \to \infty$, аналогичен "гиперинфляции". Ситуация $\alpha_t \equiv 1$ означает

отсутствие масштабирования, постоянство коэффициентов во времени и соответствует автономной системе управления. Если же $\alpha_t < 1$, то происходит дефлирование параметров, что в предельном случае $\alpha_t \to 0$, $t \to \infty$, приводит к вырождению матриц.

Далее формулируются предположения, в рамках которых будут получены основные результаты работы.

Предположение А. Масштабирующая функция $\alpha_t > 0$ при t > 0 является интегрируемой и

$$\int_{0}^{t} \alpha_{s} ds \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Условие в предположении A, в частности, означает, что масштабирование сохраняет асимптотически неограниченный (при $T \to \infty$) рост общей дисперсии интегральных шумовых воздействий на систему. Действительно, если определить

$$\mathbf{Z}_T = \int_0^T \sqrt{\alpha_s} dW_t$$

И

$$E(Z_T^{\mathsf{T}} Z_T) = \|G\|^2 \int_0^T \alpha_t dt,$$

то $E(Z_T^{\mathrm{T}}Z_T) \to \infty$ при $T \to \infty$ ($\| \ \| -$ матричная норма).

Предположение В. Пара матриц (A, B) — стабилизируема, пара матриц (A, \sqrt{Q}) — выявляема (обнаруживаема).

Стабилизируемость пары (A,B) (выявляемость пары (A,\sqrt{Q})) означает существование матрицы K (матрицы L), такой что матрица A+BK $(A+L\sqrt{Q})$ является экспоненциально устойчивой [25, с. 167–168]. Хорошо известно [18, теорема 3.7, с. 275], что при условии выполнения предположения B существует так называемый оптимальный установившийся закон управления U^* , имеющий вид $U_t^* = -R^{-1}B^T \overline{\Pi} X_t^*$, где матрица $\overline{\Pi} \geq 0$ — решение алгебраического уравнения Риккати $\overline{\Pi}A + A\overline{\Pi} - \overline{\Pi}BR^{-1}B^T\overline{\Pi} + Q = 0$. В автономной системе управления, т.е. при $\alpha_t \equiv 1$, стратегия U^* оказывается решением задачи управления на бесконечном интервале времени с критерием долговременного среднего, например [25, теорема 5.4.3, с. 169]:

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{EJ_T(U)}{T} \to \inf_{U \in U}.$$
 (1.3)

Кроме того, U^* выступает в качестве оптимальной стратегии при использовании более сильного вероятностного критерия потраекторного среднего (потраекторного эргодического) [26], когда рассматривается задача

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{J_T(U)}{T} \to \inf_{U \in \mathcal{U}} \quad c \ вероятностью \ 1. \tag{1.4}$$

Как было показано в [27], приведенные критерии адекватно отражают воздействие фактора неопределенности на оценку качества управления только для случая системы (1.1)—(1.2) с ограниченными коэффициентами и невырожденной матрицей диффузии. В рассматриваемой ситуации динамического масштабирования параметров для сравнения стратегий управления при $T \to \infty$ будут использоваться понятия обобщенного долговременного среднего и обобщенного стохастического (потраекторного) долговременного среднего, введенные в [28] для переменной G_t , когда вместо T в (1.3) и (1.4) используется нормировка

$$\int_{0}^{T} \|G_t\|^2 dt.$$

В (1.1) матрица диффузии $G_t = \sqrt{\alpha_t}G$. Цель данной работы состоит в нахождении управления U^* , являющегося оптимальным в задачах

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{EJ_T(U)}{\int\limits_0^T\alpha_tdt}\to\inf_{U\in\mathcal{U}}\quad\text{и}\quad \limsup_{T\to\infty}\frac{J_T(U)}{\int\limits_0^T\alpha_tdt}\to\inf_{U\in\mathcal{U}}\quad c\ \textit{вероятностью}\quad 1.$$

В работе будет показано, что вид оптимального управления U^* оказывается инвариантен при переходе от автономной системы управления к системе с динамическим масштабированием.

2. Инвариантность оптимального управления в системе с динамическим масштабированием. Как было сказано ранее, при анализе проблемы оптимального управления на бесконечном интервале времени системой с динамическим масштабированием важную роль играет рассмотрение ситуации $\alpha_t \equiv 1$ в (1.1)-(1.2), т.е. постоянства коэффициентов. Для этого случая соответствующие результаты являются известными и будут приведены в данном разделе. При описании элементов такой автономной системы управления вводятся отдельные обозначения, что связано с последующей процедурой по замене времени. Состояние системы $\tilde{X}_{\tau}, \tau \geq 0$, описывается уравнением

$$d\tilde{X}_{\tau} = A\tilde{X}_{\tau}d\tau + B\tilde{U}_{\tau}d\tau + Gd\tilde{W}_{\tau}, \quad \tilde{X}_{0} = x. \tag{2.1}$$

Целевой функционал на $[0,\tilde{T}]$ имеет вид

$$\tilde{J}_{\tilde{T}}(\tilde{U}) = \int_{0}^{\tilde{T}} (\tilde{X}_{\tau}^{\mathsf{T}} Q \tilde{X}_{\tau} + \tilde{U}_{\tau}^{\mathsf{T}} R \tilde{U}_{\tau}) d\tau. \tag{2.2}$$

Оптимальный установившийся закон управления \tilde{U}^* в системе (2.1)—(2.2) находится как

$$\tilde{U}_{\tau}^* = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\bar{\Pi}\tilde{X}_{\tau}^*,\tag{2.3}$$

где симметричная матрица $\bar{\Pi}$ — единственное неотрицательно определенное решение алгебраического уравнения Риккати:

$$\overline{\Pi}A + A\overline{\Pi} - \overline{\Pi}BR^{-1}B^{T}\overline{\Pi} + Q = 0, \tag{2.4}$$

процесс $\tilde{X}^*_{\tau}, \tau \geq 0$, является оптимальной траекторией и задается уравнением

$$d\tilde{X}_{\tau}^* = (A - BR^{-1}B^{\mathsf{T}}\bar{\Pi})\tilde{X}_{\tau}^*dt + Gd\tilde{W}_{\tau}, \quad \tilde{X}_{0}^* = x.$$

$$(2.5)$$

Основные результаты об оптимальности \tilde{U}_{τ}^* известны [25, теорема 5.4.3, с. 169; 26, теорема 2; 18, теорема 3.7, с. 275] и приводятся в следующей ниже теореме.

Теорема 1. Пусть выполнено предположение В. Тогда закон управления \tilde{U}^* , найденный в (2.3)—(2.5), будет решением следующих задач:

$$\limsup_{\tilde{T} \to \infty} \frac{E\tilde{J}_{\tilde{T}}(\tilde{U})}{\tilde{T}} \to \inf_{\tilde{U} \in \mathcal{U}},$$

$$\limsup_{\tilde{T} o \infty} rac{ ilde{J}_{\tilde{T}}(ilde{U})}{ ilde{T}} o \inf_{ ilde{U} \in \mathcal{U}} \quad c \ вероятностью \ 1.$$

Оптимальные значения обоих критериев совпадают:

$$\limsup_{\tilde{T} \to \infty} \frac{E\tilde{J}_{\tilde{T}}(\tilde{U}^*)}{\tilde{T}} = \limsup_{\tilde{T} \to \infty} \frac{\tilde{J}_{\tilde{T}}(\tilde{U}^*)}{\tilde{T}} = \operatorname{tr}(G^{\mathsf{T}} \overline{\Pi} G)$$

 $({\rm tr}(\cdot)-{\rm c}$ лед матрицы, т.е. сумма ее диагональных элементов). При этом матрица $\tilde{A}^*=A-BR^{-1}B^{\rm T}\Pi$ экспоненциально устойчива.

Помимо изучения характеристик оптимальности \tilde{U}_{τ}^* также возникает вопрос оценки поведения траекторий процесса $\tilde{X}_{\tau}^*, \tau \ge 0$, из уравнения (2.5). Далее формулируется лемма, основанная на утверждениях [24, теорема 2; 29, лемма A.2].

Л е м м а 1. Пусть верны условия теоремы 1. Тогда для траекторий процесса $\tilde{X}_{\tau}^*, \tau \ge 0$, задаваемого (2.5), справедливы следующие соотношения:

- 1) $c_1 \le E \|\tilde{X}_{\tau}^*\|^2 \le c_2$ для $\tau \ge 0$ при некоторых константах $c_1, c_2 > 0$ [24];
- 2) существует неслучайная константа $\overline{c} > 0$, такая, что с вероятностью 1 выполняется неравенство [29]

$$\limsup_{\tau \to \infty} \frac{\|\tilde{X}_{\tau}^*\|^2}{\ln \tau} < \overline{c} < \infty.$$

Известно, что для линейных нестационарных систем распространенным подходом, помогающим устранить их неоднородность по времени, является преобразование переменных [30, 31]. В рассматриваемом же случае наличие управления в уравнении динамики, а также связанного с ним квадратичного функционала (1.2) не позволяет применить указанную выше технику. Однако при помощи замены времени

$$\tau = \int_{0}^{t} \alpha_{s} ds$$

система управления (1.1)—(1.2) с динамическим масштабированием может быть приведена к автономной системе (2.1)—(2.2).

Лемма 2. Пусть

$$\tau = \int_{0}^{t} \alpha_{s} ds. \tag{2.6}$$

Тогда системы управления (1.1)–(1.2) и (2.1)–(2.2) связаны следующим соотношением:

$$X_t = \tilde{X}_{\tau}, \quad U_t = \tilde{U}_{\tau}, \quad J_T(U) = \tilde{J}_{\tilde{T}}(\tilde{U}),$$

где
$$\tilde{T} = \int_{0}^{T} \alpha_{t} dt$$
.

Доказательство леммы 2. Пусть τ определено в (2.6). Используется соответствующее (2.1) интегральное представление:

$$\tilde{X}_{\tau} = x + \int_{0}^{\tau} A \tilde{X}_{s} ds + \int_{0}^{\tau} B \tilde{U}_{s} ds + \int_{0}^{\tau} G d \tilde{W}_{s}.$$

При изменении переменной времени t определяются дифференциалы

$$d\left(\int_{0}^{\tau} A\tilde{X}_{s} ds\right) = A\tilde{X}_{\tau} d\tau = \alpha_{t} A\tilde{X}_{\tau} dt, \quad d\left(\int_{0}^{\tau} B\tilde{U}_{s} ds\right) = B\tilde{U}_{\tau} d\tau = \alpha_{t} B\tilde{U}_{\tau} dt.$$

Для стохастического интеграла применяется известный результат о замене времени, см. [32, следствие 8.5.4, с. 188], когда

$$\int_{0}^{\tau} d\tilde{W}_{s} = \tilde{W}_{\tau} = \int_{0}^{t} \sqrt{\alpha_{s}} dW_{s}$$

и, следовательно,

$$d\left(\int_{0}^{\tau}d\tilde{W}_{s}\right)=\sqrt{\alpha_{t}}dW_{t}.$$

Поэтому

$$d\tilde{X}_{\tau} = \alpha_{t}A\tilde{X}_{\tau}dt + \alpha_{t}B\tilde{U}_{\tau}dt + \sqrt{\alpha_{t}}GdW_{t}, \quad \tilde{X}_{0} = x.$$

Сравнивая приведенное выше уравнение с уравнением динамики (1.1) для X_t , видим, что $X_t = \tilde{X}_{\tau}$, $U_t = \tilde{U}_{\tau}$. Используя полученные соотношения, целевой функционал (1.2) можно преобразовать при τ из (2.6) путем замены переменных в подынтегральном выражении:

$$J_T(U) = \int\limits_0^T \alpha_t (X_t^{\mathsf{T}} Q X_t + U_t^{\mathsf{T}} R U_t) dt = \int\limits_0^{\tilde{T}} (\tilde{X}_{\tau}^{\mathsf{T}} Q \tilde{X}_{\tau} + \tilde{U}_{\tau}^{\mathsf{T}} R \tilde{U}_{\tau}) d\tau, \quad \text{где} \quad \tilde{T} = \int\limits_0^T \alpha_t dt.$$

Таким образом, $J_T(U) = \tilde{J}_{\tilde{T}}(\tilde{U})$. Утверждение доказано.

Соотношение, полученное в лемме 2, также может дать представление о возникновении системы управления с динамическим масштабированием. Если исходная система управления (2.1)-(2.2) автономна, но непосредственно доступен только процесс $X_t = \tilde{X}_{\tau}$, где τ задано в (2.6), например, в силу несинхронности временных шкал протекающего процесса и наблюдателя (реализующего управляющее воздействие) [16], то управление (2.1)-(2.2) осуществляется на основе изменения (1.1) с функционалом (1.2).

По предположению А функция

$$\int_{0}^{T} \alpha_{t} dt \to \infty$$

при $T \to \infty$, а значит, и $\tilde{T} \to \infty$ в автономной системе (2.1)—(2.2) с измененным временем т по (2.6). Тогда результаты теоремы 1 об оптимальном управлении очевидным образом могут быть использованы и для системы с динамическим масштабированием.

В условиях предположения В определим оптимальный установившийся закон управления:

$$U_t^* = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi X_t^*, (2.7)$$

где процесс $X_t^*, t \ge 0$, является оптимальной траекторией и задается уравнением

$$dX_{t}^{*} = \alpha_{t}(A - BR^{-1}B^{T}\overline{\Pi})X_{t}^{*}dt + \sqrt{\alpha_{t}}GdW_{t}, \quad X_{0}^{*} = x,$$
(2.8)

а матрица $\bar{\Pi} \ge 0$ определяется как решение алгебраического уравнения Риккати (2.4).

Из соотношений, установленных в лемме 2, и утверждения теоремы 1 следует справедливость приводимого ниже результата.

Т е о р е м а 2. Пусть выполнены предположения A и B. Тогда закон управления U^* , задаваемый (2.7)—(2.8), является оптимальным по критериям обобщенного долговременного среднего и потраекторного обобщенного долговременного среднего в системе с динамическим масштабированием, т.е. решением задач

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{EJ_T(U)}{\int\limits_0^T \alpha_t dt} \to \inf_{U \in \mathcal{U}}, \tag{2.9}$$

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{J_T(U)}{\int_0^T \alpha_r dt} \to \inf_{U \in \mathcal{U}} \quad c \quad \text{вероятностью} \quad 1. \tag{2.10}$$

Значения критериев на оптимальном управлении U^* равны

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{EJ_T(U^*)}{T} = \limsup_{T \to \infty} \frac{J_T(U^*)}{T} = \operatorname{tr}(G^T \overline{\Pi} G).$$

Установленный в теореме 2 результат показывает инвариантность вида оптимального управления при рассмотрении задач оптимизации в системе с динамическим масштабированием коэффициентов. Действительно, U^* в форме $U_t^* = -R^{-1}B^T \overline{\Pi} X_t^*$ известен как оптимальный установившийся закон для автономного стохастического линейного регулятора на бесконечном интервале времени (см. (2.3) и теорему 1). Вместе с тем следует отметить различие в используемых критериях оптимальности. Динамическое масштабирование параметров функцией α_t приводит к необходимости модификации долговременных средних из (1.3), (1.4) в направлении их обобщения путем применения нормировки $\int_0^T \alpha_t dt$ (см. (2.9) и (2.10)).

Следующее далее замечание характеризует стабилизирующие свойства управления U^* и его оптимальность в детерминированной системе (1.1)—(1.2), т.е. для G=0. При этом предполагаются выполненными условия теоремы 1.

3 а м е ч а н и е 1. Матрица $A^* = \alpha_t (A - BR^{-1}B^T\overline{\Pi})$ в (2.7) является асимптотически устойчивой с темпом $\delta_t = \lambda \alpha_t$ ($\lambda > 0$ — некоторая константа), т.е. соответствующая A_t^* фундаментальная матрица $\Phi(t,s)$ допускает оценку

$$\|\Phi(t,s)\| \le \kappa \exp\left(-\lambda \int_{s}^{t} \alpha_{\nu} d\nu\right), \quad s \le t,$$

при некоторой константе $\kappa > 0$. Данный факт следует из указанного в теореме 1 свойства экспоненциальной устойчивости матрицы $\tilde{A}^* = A - BR^{-1}B^T\overline{\Pi}$, а также соотношений

$$A_t^* = \alpha_t \tilde{A}^* \quad \text{ } \text{ } \text{ } \Phi(t,s) = \exp\left\{\tilde{A}^* \int\limits_s^t \alpha_v dv\right\},$$

см. [30]. Для детерминированной системы управления (1.1)—(1.2) стратегия U^* является решением задачи $\limsup_{T\to\infty} J_T(U)\to \inf_{U\in U}$, а значение $\limsup_{T\to\infty} J_T(U^*)=x^T\overline{\Pi}x$.

Приводимые ниже результаты относительно оценки асимптотического поведения оптимальной траектории X_t^* в среднем квадратичном, а также в смысле почти наверное формулируются на основе леммы 1 с соответствующей корректировкой по замене времени.

З а м е ч а н и е 2. Существуют константы $c_1, c_2 > 0$, такие, что $c_1 \le E \|X_t^*\|^2 \le c_2$ для $t \ge 0$. Такая равномерная ограниченность процесса в среднем квадратичном аналогична результату, известному для оптимальной траектории в задаче синтеза автономного стохастического линейного регулятора [24].

3 а м е ч а н и е 3. Существует неслучайная константа $\overline{c} > 0$, такая, что с вероятностью 1 выполнено соотношение

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\|X_t^*\|^2}{\ln\left(\int\limits_0^t \alpha_s ds\right)} < \overline{c} < \infty.$$

Подобная верхняя оценка является обобщением логарифмической верхней функции, известной для случая $\alpha_r \equiv 1$ при анализе асимптотического поведения квадрата нормы оптимальной траектории процесса в автономной системе [29].

К важным характеристикам оптимального закона управления U^* (2.6)—(2.7) относится его взаимосвязь с решениями задач оптимизации при конечном T. Известно (например [18, теорема 3.9, с. 301]), что стратегия $U_t^{*T} = -R^{-1}B^T\Pi_t^TX_t^*$ оптимальна в задаче $EJ_T(U) \to \inf_{U \in \mathbb{U}}$ (здесь индекс T означает решение для конечного T), функция $\Pi_t^T \geq 0$ удовлетворяет уравнению Риккати $\dot{\Pi}_t^T + \alpha_t \Pi_t^T A + \alpha_t A^T\Pi_t^T - \alpha_t \Pi_t^T BR^{-1}B^T\Pi_t^T + \alpha_t Q = 0$ с граничным условием $\Pi_T^T = 0$, X_t^{*T} — соответствующий процесс, определяемый по (1.1) при $t \leq T$. При сформулированных предположениях существует $\lim_{T\to\infty}\Pi_t^T = \bar{\Pi}$, где матрица $\bar{\Pi} \geq 0$ — решение алгебраического уравнения Риккати (2.4). Ключевым условием здесь является

$$\int_{0}^{t} \alpha_{s} ds \to \infty$$

при $t \to \infty$ (см. предположение A), что можно проследить, рассмотрев ниже пример управления скалярным процессом.

3. Пример задачи управления скалярным процессом и анализ условий оптимальности. Рассмотрим систему управления (1.1)—(1.2) в скалярном случае:

$$dX_t = \alpha_t a X_t dt + \alpha_t b U_t dt + \sqrt{\alpha_t} g dW_t, \quad X_0 = x, \quad g \neq 0.$$
(3.1)

$$J_T(U) = \int_0^T \alpha_t (qX_t^2 + rU_t^2) dt, \quad q \ge 0, \quad r > 0.$$
 (3.2)

Нетрудно заметить, что выполнение предположения В возможно в следующих ситуациях ограничений на параметры: 1) a — любое, $b \neq 0$, q > 0, 2) a < 0, b = 0, q > 0, 3) a < 0, b = 0, q = 0. Случай 3) тривиален, так как влечет $\overline{\Pi} = 0$ в (2.4) и в дальнейшем не рассматривается. Алгебраическое уравнение Риккати (2.4) $2a\overline{\Pi} - (b^2/r)\overline{\Pi}^2 + q = 0$ имеет решения $\overline{\Pi}^{(1)} = (a + \sqrt{a^2 + qb^2/r})(r/b^2)$, $\overline{\Pi}^{(2)} = -q/(2a)$ для 1) и 2) соответственно. Решения дифференциального уравнение Риккати

$$\dot{\Pi}_t^T + 2\alpha_t a \Pi_t^T - \alpha_t (b^2/r) (\Pi_t^T)^2 + q\alpha_t = 0$$

с граничным условием $\Pi_T^T = 0$ могут быть получены на основе замены времени (лемма 2) и результатов для регулятора с постоянными коэффициентами [33, с. 147]:

$$\Pi_{t}^{(1)T} = \overline{\Pi}^{(1)} - \frac{2\beta(r/b^{2})}{[(\beta - a)/(\beta + a)] \exp\left\{2\beta \int_{t}^{T} \alpha_{s} ds\right\} + 1},$$
(3.3)

$$\beta = \overline{\Pi}^{(1)}(b^2/r) - a > 0,$$

$$\Pi_t^{(2)T} = \overline{\Pi}^{(2)} - \overline{\Pi}^{(2)} \exp\left\{2a \int_t^T \alpha_s ds\right\}.$$
 (3.4)

Из соотношений (3.3) и (3.4) очевидно, что $\lim_{T\to\infty}\Pi_t^{(1)T}=\overline{\Pi}^{(1)}$ и $\lim_{T\to\infty}\Pi_t^{(2)T}=\overline{\Pi}^{(2)}$ только при условии

$$\int_{0}^{t} \alpha_{s} ds \to \infty, \quad t \to \infty.$$

В противном случае, когда

$$\int_{0}^{\infty} \alpha_{t} dt < \infty,$$

предел $\lim_{T\to\infty}\Pi_t^T$ не является решением алгебраического уравнения Риккати, и инвариантность управления U^* по времени уже не будет иметь место, что обусловлено отсутствием перехода к автономному стохастическому линейному регулятору на бесконечном временном интервале при управлении системой с динамическим масштабированием.

4. Анализ залачи динамической стабилизации для макроэкономики. Далее приводится пример задачи макроэкономической стабилизации, в которой используются результаты теоремы 2, замечаний 2, 3 и примера из разд. 3. При этом за основу берется модель из [34], а класс функций α , степенного вида определяется по [23]. Отметим, что под динамической задачей макроэкономической стабилизации понимается поддержание траектории системы (набора экономических переменных) вблизи заданного уровня [35. Pt III] в течение планового периода с учетом возникающих издержек по управлению. Управление осуществляется при помощи выбора инструментов (также экономических переменных) и часто формулируется в виде задачи синтеза линейного регулятора на бесконечном интервале времени [36, 37]. В данном примере рассматривается корректировка уровня безработицы. Акцент делается на фрикционную и структурную составляющие безработицы (структурная безработица связана с изменением структуры экономики со стороны производства и потребления, фрикционная – с добровольной сменой места работы ввиду переезда и т.д.). В качестве инструмента управления используются государственные расходы на так называемую активную политику на рынке труда (затраты на переобучение, инфраструктуру центров занятости, информационную поддержку, повышение мобильности населения и т.д., в отличие от "пассивной политики" изменения минимального размера оплаты труда и пособий по безработице). Таким образом, будет рассматриваться скалярный процесс вида (1.1) (см. также (3.1)). При этом предполагается, что состояние X_t и управление U_t описывают отклонение соответствующих экономических переменных от своих плановых уровней:

$$dX_{t} = (1+t)^{p} (-\gamma) X_{t} dt - (1+t)^{p} \beta U_{t} dt + (1+t)^{p/2} g dW_{t}, \quad X_{0} = x, \quad g \neq 0,$$

$$(4.1)$$

где константа $\gamma > 0$ задает скорость стремления безработицы к своему плановому естественному уровню в долгосрочном периоде при отсутствии управляющих воздействий и внешних шоков; константа $\beta > 0$ характеризует мультипликатор влияния государственных расходов на динамику безработицы; g > 0 — степень воздействия неопределенности; функция $\alpha_t = (t+1)^p$, $p \ge -1$. Модель вида (4.1) при $U_t \equiv 0$ ранее рассматривалась в [34], возникновение масштабирующей функции α_t было обусловлено наличием "операционного" (т.е. внутреннего) времени развития системы. Функция α_t степенного вида использовалась в работе [23] при эконометрическом моделировании безработицы (в частности, по данным для США была получена оценка p = 10). В задаче стабилизации целевой функционал имеет интегральный квадратичный вид (3.2) и учитывает потери из-за отклонения переменных состония и управления от своих плановых значений с учетом фактора времени и приоритета издержек. Точнее,

$$J_T(U) = \int_0^T (1+t)^p (\lambda X_t^2 + (1-\lambda)U_t^2) dt, \quad 0 < \lambda < 1.$$
 (4.2)

Если p < 0 в (4.2), то значимость фактора времени наступления потерь уменьшается при $t \to \infty$ и возникает так называемое "гиперболическое" дисконтирование (термин используется в экономике и когнитивных науках [38]). При p > 0, наоборот, будущим затратам придается больший вес, что, как известно из теории управления, способствует усилению стабилизирующих свойств оптимальной стратегии [39, Section 3.5], а также [24], и такие функционалы носят название взвешенных по времени интегральных квадратичных критериев качества, применяемых в инженерных приложениях [40, 41]. Для p = 0 имеет место нейтральность ко времени возникновения потерь и стандартная автономная система управления. Константа $0 < \lambda < 1$ задает приоритет одного из двух видов затрат (потерь из-за отклонения состояния или издержек по управлению). Согласно результатам теоремы 2 и примера из разд. 3, будем иметь оптимальный закон управле-

$$\overline{\Pi} = -\gamma \beta^{-2} (1 - \lambda) + \beta^{-2} \sqrt{\gamma^2 (1 - \lambda)^2 + \beta^2 \lambda (1 - \lambda)}.$$

ния $U_t^* = \beta(1 - \lambda)^{-1} \overline{\Pi} X_t^*$, где

Динамика оптимальной траектории будет иметь вид

$$dX_t^* = (1+t)^p \left(-\sqrt{\gamma^2 + \beta^2 \lambda (1-\lambda)^{-1}}\right) X_t^* dt + (1+t)^{p/2} g dW_t, \quad X_0 = x.$$
 (4.3)

Обозначим $\mu(\lambda) = \sqrt{\gamma^2 + \beta^2 \lambda (1 - \lambda)^{-1}}$. При этом "коэффициент усиления" $k(\lambda)$ в законе управления $U_t^* = k(\lambda) X_t^*$, где $k(\lambda) = -\gamma \beta^{-1} + \beta^{-1} \sqrt{\gamma^2 + \beta^2 \lambda (1 - \lambda)^{-1}}$, возрастает по λ . Таким образом, чем выше значимость стабилизации самой траектории экономической переменной в формировании целевого функционала, тем больший показатель устойчивости (в терминах множителя $\mu(\lambda)$ для (4.3)) будет обеспечивать соответствующая оптимальная стратегия управления. Тогда, согласно замечанию 2, отклонение уровня безработицы от своего планового значения будет поддерживаться в фиксированных пределах (в среднеквадратичной метрике). Для самих же траекторий процесса безработицы (см. замечание 3) динамическая оценка их долгосрочных колебаний может быть выражена в виде логарифмической функции времени при p > -1 и дважды логарифмической, если p = -1.

Заключение. Полученный в работе результат (см. теорему 2) характеризует инвариантность решения задачи управления системой с масштабированием на бесконечном интервале времени. Вид управления U^* совпадает с оптимальной стратегией, найденной для случая автономной системы. Значения соответствующих критериев оптимальности при использовании U^* также сохраняются. При этом меняется вид самих критериев — вместо длины интервала планирования T

в качестве нормировки целевых функционалов применяется функция $\int_0^T \alpha_t dt$ интегрального масштабирования. Следует отметить, что подобная инвариантность в задачах синтеза стохастических линейных регуляторов с переменными параметрами может возникнуть и при других предположениях, например, в работе [42], где рассматривалась система с асимптотически постоянными матрицами $A_t \to A$, $B_t \to B$, $G_t \to G$, $Q_t \to Q$, $R_t \to R$, в предположении о достаточно быстрой сходимости, точнее

$$\int_{0}^{\infty} ||A_{t} - A|| dt < \infty$$

и т.д. Это условие позволило использовать решение алгебраического, а не дифференциального уравнения Риккати для построения оптимальной стратегии в рамках обычного критерия долговременного среднего. В данной статье также было показано применение полученных результатов в динамической задаче макроэкономической стабилизации со степенной масштабирующей функцией. В качестве направления дальнейших исследований следует выделить рассмотрение ситуации, когда для масштабирующей функции

$$\int_{0}^{\infty} \alpha_{t} dt < \infty.$$

Изучение простого скалярного примера показывает, что при таком предположении инвариантность оптимального управления уже не имеет места и требуется привлечение других методов анализа, основанных на асимптотиках решений дифференциальных уравнений Риккати.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Zhong W.X. Duality System in Applied Mechanics and Optimal control. N.Y.: Springer, 2006.
- 2. Arora J.S. (Ed.) Optimization of Structural and Mechanical Systems. Singapore: World Scientific, 2007.
- 3. Tewari A. Aeroservoelasticity: Modeling and Control. N.Y.: Springer, 2015.
- 4. Лебедев А.А., Бобронников В.Т., Красильщиков М.Н., Малышев В.В. Статистическая динамика управляемого полета. М.: Машиностроение, 1978.
- Малышев В.В. Методы оптимизации в задачах системного анализа и управления: Учеб. пособие. М.: МАИ, 2010.
- 6. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов І // АиТ. 1960. Т. 21. № 4. С. 436—441.
- 7. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов II // АиТ. 1960. Т. 21. № 5. С. 561–568.

- 8. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов III // АиТ. 1960. Т. 21. № 6. С. 661-665.
- 9. *Якубович В.А.* Оптимизация и инвариантность линейных стационарных систем управления // АиТ. 1984. № 8. С. 5–45.
- 10. Казаков И.Е., Гладков Д.И. Методы оптимизации стохастических систем. М.: Наука, 1987.
- 11. Кибзун А.И. Стохастическое управление динамическими системами: Учеб. пособие. М.: МАИ, 1991.
- 12. Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A. Infinite Horizon Optimal Control: Deterministic and Stochastic Systems. N.Y.: Springer, 2012.
- 13. Wu J.C., Yang J.N. Control of Lateral-Torsional Motion of Nanjing TV Transmission Tower // Computational Mechanics in Structural Engineering: Recent Developments. N.Y.: Elsevier, 1999. P. 43–56.
- 14. *Tan Z.*, *Bainum P.M.* Optimal Linear Quadratic Gaussian Digital Control of an Orbiting Tethered Antenna/Reflector system // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1994. V. 17. № 2. P. 234–241.
- 15. Lamperski A., Cowan N.J. Time-changed Linear Quadratic Regulators // Control Conf. (ECC), 2013 European. N.Y.: IEEE, 2013. P. 198–203.
- 16. Singh R., Gupta V. On LQR Control with Asynchronous Clocks // Decision and Control and Europ. Control Conf. (CDC-ECC), 50th IEEE Conf. N.Y.: IEEE, 2011. P. 3148–3153.
- 17. Aadland D., Shaffer S. Time Compression and Saving Rates // J. Neuroscience, Psychology, and Economics. 2015. V. 8. № 4. P. 217–240.
- 18. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Наука, 1977.
- 19. *Karafyllis I., Tsinias J.* Non-uniform in Time Stabilization for Linear Systems and Tracking Control for Non-holonomic Systems in Chained Form // Intern. J. Control. 2003. V. 76. № 15. P. 1536–1546.
- 20. Smith P.L., Ratcliff R., Sewell D.K. Modeling Perceptual Discrimination in Dynamic Noise: Time-Changed Diffusion and Release from Inhibition // J. Mathematical Psychology. 2014. V. 59. P. 95–113.
- 21. *Jiang H., Gray H.L., Woodward W.A.* Time-frequency Analysis − G (λ)-stationary Processes // Computational Statistics & Data Analysis. 2006. V. 51. № 3. P. 1997–2028.
- 22. *Vijverberg C.P.C.* Time Deformation, Continuous Euler Processes and Forecasting // J. Time Series Analysis. 2006. V. 27. № 6. P. 811–829.
- 23. Vijverberg C.P.C. A Time Deformation Model and its Time-varying Autocorrelation: an Application to US Unemployment Data // Intern. J. Forecasting. 2009. V. 25. № 1. P. 128–145.
- 24. *Паламарчук Е.С.* Стабилизация линейных стохастических систем с дисконтированием: моделирование долгосрочных эффектов применения оптимальных стратегий управления // Мат. моделирование. 2015. Т. 27. № 1. С. 3–15.
- 25. Дэвис М.Х.А. Линейное оценивание и стохастическое управление. М.: Наука, 1984.
- 26. *Palamarchuk E*. On Infinite Time Linear-Quadratic Gaussian Control of Inhomogeneous Systems // Control Conf. (ECC), 2016 European. N.Y.: IEEE, 2016. P. 2477–2482.
- 27. *Паламарчук Е.С.* Анализ критериев долговременного среднего в задаче стохастического линейного регулятора // АиТ. 2016. № 10. С. 78—92.
- 28. *Белкина Т.А.*, *Паламарчук Е.С.* О стохастической оптимальности для линейного регулятора с затухающими возмущениями // AuT. 2013. № 4. С. 110—128.
- 29. *Белкина Т.А., Кабанов Ю.М., Пресман Э.Л.* О стохастической оптимальности для линейно-квадратического регулятора // Теория вероятностей и ее применения. 2003. Т. 48. № 4. С. 661–675.
- 30. *Wu M.-Y.*, *Sherif A*. On the Commutative Class of Linear Time-Varying Systems // Intern. J. Control. 1976. V. 23. № 3. P. 433–444.
- 31. *Каленова В.И., Морозов В.М.* Об управлении линейными нестационарными системами специального вида // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 3. С. 6—15.
- 32. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, АСТ, 2003.
- 33. Lewis F.L., Vrabie D., Syrmos V.L. Optimal control. N.Y.: John Wiley & Sons, 2012.
- 34. *Stock J.H.* Hysteresis and the Evolution of Postwar US and UK Unemployment // Economic Complexity: Chaos, Sunspots, Bubbles, and Nonlinearity: Proceedings of the Fourth International Sympos. in Economic Theory and Econometrics / Eds W.A. Barnett, J. Geweke, K. Shell. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1989. P. 361–382.
- 35. *Turnovsky S.J.* Macroeconomic Analysis and Stabilization Policy. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1977.

- 36. *Sengupta J.K.* Optimal Stabilization Policy with a Quadratic Criterion Function // The Review of Economic Studies. 1970. V. 37. № 1. P. 127–145.
- 37. Sack B. Does the Fed Act Gradually? A VAR analysis // J. Monetary Economics. 2000. V. 46. № 1. P. 229–256.
- 38. *Loewenstein G., Prelec D.* Anomalies in Intertemporal Choice: Evidence and an Interpretation // The Quarterly J. Economics. 1992. V. 107. № 2. P. 573–597.
- 39. Anderson B.D.O., Moore J.B. Optimal Control: Linear Quadratic Methods. Courier Corporation, 2007.
- 40. *Bonkas E.K.*, *Liu Z.K.* Suboptimal Design of Regulators for Jump Linear System with Time-multiplied Quadratic Cost // IEEE Transactions on Automatic Control. 2001. V. 46. № 1. P. 131–136.
- 41. *Xie X., Lam J., Fan C.* Robust Time-weighted Guaranteed Cost Control of Uncertain Periodic Piecewise Linear Systems // Information Sciences. 2018. V. 460. P. 238–253.
- 42. Czornik A. On Time-varying LQG // IFAC Proceedings Volumes. 1998. V. 31. № 18. P. 411–415.

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.163

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФОВ ПРОСТЫХ ПУТЕЙ В ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЯХ. II. АНАЛИЗ ДВУСВЯЗНОСТИ ГРАФОВ

© 2021 г. И. А. Головинский

Северо-Кавказский федеральный ун-т, Ставрополь, Россия e-mail: igolovinskij@gmail.com
Поступила в редакцию 14.08.2019 г.
После доработки 03.07.2020 г.
Принята к публикации 30.11.2020 г.

Задача построения всех простых путей в неориентированном графе, соединяющих попарно вершины из заданного множества, интерпретируется как построение графа, который является объединением этих путей. Данное построение опирается на вычисление компонент двусвязности и мостов исходного графа. Предлагается новый алгоритм, делающий это вычисление более прозрачным и контролируемым. Его идея — отслеживать "открытие" и "закрытие" хорд при обходе графа в глубину. Благодаря наглядности предлагаемого решения его правильность ясна без особого обоснования. В этом его преимущество перед известным алгоритмом Хопкрофта—Тарьяна. Предложенный алгоритм делает наглядным получение компонент двусвязности графа в результате последовательного объединения его фундаментальных циклов, имеющих общие ребра.

DOI: 10.31857/S0002338821020049

Введение. В работе [1] описаны общие решения задач соединения простыми путями вершин, принадлежащих непересекающимся подмножествам множества вершин неориентированного графа. Показано, что эти общие решения строятся на основе вычисления блоков и шарниров графа. Для решения последней задачи известен алгоритм, опубликованный Р.Э. Тарьяном и Дж.Э. Хопкрофтом в 1971-1973 гг. [2-4]. Этот алгоритм излагается практически во всех руководствах, где рассматриваются вопросы анализа двусвязности графов [5-13]. По числу операций он имеет порядок сложности O(n+m), где n число вершин графа, m число его ребер. Поскольку при вычислении блоков необходимо обработать каждую вершину и каждое ребро графа хотя бы по одному разу, улучшить данную оценку невозможно в принципе.

Это, однако, не означает, что алгоритм Хопкрофта—Тарьяна нельзя улучшить в другом отношении. Определенный недостаток его состоит в том, что его идея заслонена от пользователя техническими приемами, смысл которых не всегда очевиден. В руководствах, где этот алгоритм излагается, его обычно сопровождают нетривиальным доказательством. Непосредственно из самого алгоритма усмотреть его правильность непросто.

В современных разработках сложных систем управления возрастает роль таких свойств алгоритмов, как логическая простота, содержательная ясность. От них зависят трудозатраты на отладку и развитие программ. Путь к сокращению таких затрат лежит через упрощение и прояснение смысла применяемых вычислительных методов. В статье излагается новый метод вычисления блоков и шарниров неориентированных графов, смысл и правильность которого видны просто из его описания. Этим он отличается от алгоритма Хопкрофта—Тарьяна, имея тот же порядок вычислительной сложности O(n+m).

1. Постановка задачи. Рассматриваются неориентированные графы, не содержащие петель и кратных ребер. *Собственным шарниром* такого графа называется вершина, при удалении которой число компонент связности графа увеличивается. Максимальный связный подграф неориентированного графа, не имеющий собственных шарниров, называется блоком графа [13, с. 58; 14, с. 136]¹. Если блок содержит ровно одно ребро, то он называется мостом графа; в противном слу-

¹ Если связный граф G содержит более одного блока, то любой его блок содержит хотя бы один шарнир графа G, не имея при этом собственных шарниров. Поэтому, когда речь идет о шарнирах в подграфе g графа G, нужно уточнять, относительно какого графа они рассматриваются — g или G.

чае — компонентой двусвязности графа. Вычисление блоков и шарниров графа будем называть анализом его двусвязности.

Пусть в неориентированном графе G выбран какой-то остовный лес и относительно него построена фундаментальная система циклов F(G) [6, с. 98; 13, с. 68]. Циклы, принадлежащие системе F(G), будем для краткости называть ее F-циклами. На множестве F-циклов системы F(G) определим бинарное отношение *смежности*. Будем говорить, что два F-цикла системы F(G) смежны, если они имеют общее ребро. Очевидно, отношение смежности F-циклов рефлексивно и симметрично. Поэтому его транзитивное замыкание является отношением эквивалентности. Последнее разбивает множество F-циклов системы F(G) на классы эквивалентности. Класс эквивалентных F-циклов совпадает с множеством F-циклов, содержащихся в некоторой компоненте двусвязности графа G. Каждая компонента двусвязности совпадает с объединением всех содержащихся в ней F-циклов (см. [15, с. 126]).

Объединение двух двусвязных графов, имеющих общее ребро, есть двусвязный граф [14, с. 137]. Вычислять компоненту двусвязности графа можно, последовательно объединяя содержащиеся в ней F-циклы через общие ребра. На этом основан метод вычисления блоков графа, предложенный в [15, 16], — метод присоединения фундаментальных циклов. Он устанавливает сводимость анализа двусвязности графа G к анализу простой связности другого графа — биграфа принадлежности ребер графа G фундаментальным циклам². Этот биграф будет определен в разд. 7.

Остовный лес неориентированного графа строится обходом графа — в ширину, в глубину или как-либо иначе. В общем случае метод присоединения фундаментальных циклов допускает любой порядок обхода графа при построении остовного леса. Известно, что удобным образом строить фундаментальную систему циклов позволяет обход графа в глубину [13, с. 69]. Ниже будет показано, что построение F-циклов обходом графа в глубину можно совместить с процессом их объединения в компоненты двусвязности. Предлагаемый в статье алгоритм основан на этом совмешении.

В алгоритме обхода графа в глубину вершинам присваиваются и проверяются такие признаки их состояния, как "новая", "открытая" и "закрытая". В предлагаемом алгоритме контролируются, кроме того, признаки "открытой" и "закрытой" хорды. Поэтому новый алгоритм назван алгоритмом контроля открытых хорд; сокращенно — алгоритмом ОСС (open chord control). Алгоритм Хопкрофта—Тарьяна будем для краткости именовать алгоритмом НТ.

Алгоритм обхода графа в глубину будем обозначать принятой в литературе аббревиатурой DFS (depth first search). Алгоритмы ОСС и HT получаются из алгоритма DFS добавлением к последнему специальных операций обработки вершин и ребер.

2. Свойства разметки графа в глубину. Если исходный анализируемый граф содержит более одной компоненты простой связности, то анализ его двусвязности производится в пределах каждой такой компоненты независимо от остальных компонент простой связности. Поэтому далее исходный анализируемый граф предполагается связным.

Пусть G = (V, E) — связный неориентированный граф, V — множество его вершин, E — множество ребер, T — неориентированное остовное дерево графа G. Ребра дерева T будем называть ветвями. Ребро графа G, не являющееся ветвью остова T, называется хордой в графе G относительно этого остова.

Любую вершину неориентированного дерева можно принять в качестве его корня. Дерево с выделенной вершиной называется корневым. Выделим какую-нибудь вершину в остовном дереве T, обозначив ее ρ . Полученное корневое дерево обозначим $T(\rho)$.

На каждой ветви корневого дерева $T(\rho)$ зададим ориентацию в сторону от корня ρ . Полученное ордерево будет выходящим из вершины ρ . Обозначим его $T'(\rho)$. Построение этого ордерева и его хорд будем называть *разметкой* графа G, корень ρ остовного ордерева — корнем этой разметки. Если (σ,τ) — ориентированная ветвь ордерева $T'(\rho)$, то вершину σ будем называть ее началом, вершину τ — концом³.

Множество вершин дерева T совпадает с множеством V вершин графа G. Ориентация ветвей ордерева $T'(\rho)$ индуцирует отношение частичного порядка на этом множестве. Пусть вершина

³ Будем говорить, что ориентированная дуга (λ , μ) орграфа, направленная от λ к μ , *выходит* из вершины λ и *входит* в вершину μ .

² Биграф (двудольный граф, бихроматический граф) — неориентированный граф, множество вершин которого разбито на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 (доли). Каждое ребро биграфа соединяет вершину из множества V_1 с вершиной из множества V_2 .

 $\sigma \in V$ предшествует вершине $\tau \in V$ в смысле указанного частичного порядка. Будем записывать это как $\sigma < \tau$. В этом случае вершина σ называется предком вершины τ , вершина τ — потомком вершины σ . Считаем, что вершина не может быть ни предком самой себя, ни потомком. Заметим, что идентификаторами вершин графа могут быть, например, номера, присвоенные в произвольном порядке, однако тогда соотношение $\sigma < \tau$ не будет означать, что номер вершины σ меньше номера вершины τ .

Предок σ вершины τ называется родительской вершиной для τ , если в графе G нет такой вершины π , для которой выполнялись бы одновременно соотношения $\sigma < \pi$ и $\pi < \tau$. Иначе говоря, когда нет вершин между σ и τ . В этом случае вершина τ называется дочерней для σ .

Если остовное ордерево $T'(\rho)$ построено обходом графа в глубину (алгоритмом DFS), то разметку графа G будем называть *разметкой в глубину* графа G посредством ордерева $T'(\rho)$.

Хорда называется продольной, если ее концы сравнимы в смысле отношения частичного порядка, индуцированного на множестве вершин графа ориентацией остовного ордерева $T(\rho)$. При разметке графа в глубину все хорды продольны [13, с. 53]. Это позволяет ввести на них ориентацию. Если $\sigma < \tau$, то считают, что хорда (τ, σ) направлена от τ к σ , т.е. обратно отношению частичного порядка на множестве вершин графа, индуцированного ориентацией остовного ордерева $T(\rho)$. Вершину τ будем называть началом этой хорды, вершину σ — ее концом. Будем говорить, что в вершине τ эта хорда открывается, в σ — закрывается.

Отметим некоторые свойства блоков и разметки, существенные для понимания анализа двусвязности на основе обхода графа в глубину. В руководствах по графам они освещены неполно [6, с. 102; 7, с. 164; 8, с. 463; 13, с. 56–64].

- 1. Пусть T остовное дерево связного графа G, построенное каким-либо обходом графа G (не обязательно в глубину); B блок графа G. Пересечение $T \cap B$ будет остовным деревом блока B. На каждой ветви дерева $T \cap B$ определена ориентация, которую данная ветвь имеет в ордереве $T'(\rho)$. Дерево $T \cap B$ с этой ориентацией обозначим T_B' . В этом ордереве имеется ровно одна вершина, относительно которой оно будет выходящим. Эту вершину будем называть *начальной вершиной блока B* (относительно произведенной разметки графа G).
- 2. Корень какой-либо разметки связного графа G (не обязательно в глубину) является начальной вершиной каждого блока, которому он принадлежит. Корень разметки принадлежит ровно одному блоку графа G (будучи начальной вершиной этого блока) тогда и только тогда, когда он не является шарниром графа G. Такой блок будем называть *начальным блоком* графа G (относительно произведенной разметки). Если корень разметки принадлежит двум или более блокам графа G (являясь шарниром графа G), то считаем, что этот граф не имеет начального блока.
- 3. Если остовное ордерево $T'(\rho)$ строится обходом графа G в глубину, то при этом будет происходить обход в глубину блока B, в результате чего получится остовное ордерево T_B' . При разметке графа G в глубину блок B будет содержать ровно одну ветвь ордерева T_B' , выходящую из начальной вершины блока B. Эту ветвь будем называть *начальной ветвью блока* B.
- 4. Свойство вершины графа быть шарниром будем называть также свойством ее *шарнирности*. Распознавание шарнирности корня ρ разметки связного графа G в глубину производится непосредственно алгоритмом DFS, не требуя дополнительных специальных операций, выполняемых алгоритмами HT или OCC. Критерий шарнирности корня при разметке в глубину: корень ρ является шарниром графа G тогда и только тогда, когда из него выходят не менее двух ветвей остовного ордерева $T'(\rho)$. Каждая такая ветвь будет начальной ветвью одного из блоков, содержащих корень ρ . В этом случае граф G не содержит начального блока. Если же из корня разметки в глубину выходит ровно одна ветвь остовного ордерева, то этот корень шарниром не будет. Блок, содержащий эту ветвь, будет начальным блоком графа G.
- **3.** Демонстрационный пример и структура исходных данных. Операции алгоритма ОСС, включая также операции алгоритма DFS, будем иллюстрировать на примере связного графа H, изображенного на рис. 1. Вершины этого графа перенумерованы целыми числами от 1 до 19. Из чертежа видно, что шарнирами графа H являются вершины 3, 7, 12, 13 и 14.

Сложность алгоритма зависит в том числе от способа представления его исходных данных. Этот способ стремятся выбрать так, чтобы сложность алгоритма минимизировать. Для поиска в глубину граф обычно представляют множеством списков смежности вершин. Это позволяет минимизировать сложность алгоритма по числу операций [6, с. 87; 17, с. 84–85]. Для алгоритмов ОСС и НТ достаточно задать для каждой вершины графа массив смежных с ней вершин.

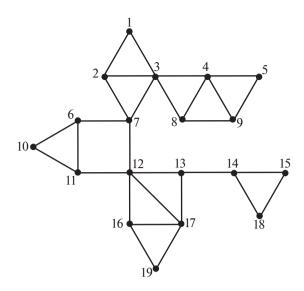


Рис. 1. Демонстрационный граф

Для каждой вершины графа в алгоритме предусматривается переменный указатель на позицию текущего обрабатываемого элемента в ее списке смежности. Эти указатели нужны для того, чтобы при повторных посещениях вершины алгоритму было известно, на каком элементе ее списка смежности он остановился при предыдущем посещении этой вершины.

4. Порядок обхода графа в глубину. Обработку графа алгоритмом DFS опишем несколько подробнее, чем обычно делается в литературе, поясняя особенности, важные для алгоритма ОСС.

Обход графа начинается с произвольно выбранной вершины — корня разметки. В демонстрационном примере, представленном на рис. 1 графом H, в качестве начала разметки ρ выберем вершину 1. Остовное ордерево T(1), получаемое в результате описываемой далее разметки графа в глубину, показано на рис. 2. Ветви этого ордерева изображены сплошными линиями, хорды — штриховыми. Стрелки указывают направления ветвей и хорд. Корень разметки 1 не является шарниром графа H. Поэтому в графе H имеется начальный блок, содержащий корень разметки. Его вершинами являются 1-3 и 7.

В каждую вершину графа, кроме корня разметки, входит ровно одна ветвь остова. Каждую ветвь обозначаем номером вершины, в которую входит эта ветвь. На рис. 2 указаны номера всех вершин и подразумевается, что ветвь, входящая в вершину, имеет номер этой вершины. При необходимости ветвь будем обозначать также упорядоченной парой ее начальной и конечной вершин. Каждая хорда будет обозначаться тоже упорядоченной парой ее начальной и конечной вершин.

Когда алгоритм обработки графа проходит по вершинам графа, говорят, что он *посещает* вершины. Вершина может посещаться более одного раза. До начала обхода графа алгоритмом (DFS, OCC или HT) каждая вершина графа находится в состоянии "новая" (непосещенная). В момент начала обработки вершины при первом ее посещении алгоритмом данная вершина переходит в состояние "открытая". Считается, что в этом состоянии она остается до момента, когда заканчивается ее обработка при последнем ее посещении алгоритмом. Открытая вершина считается "активной", пока алгоритм выполняет при ее посещении относящиеся к ней операции. Когда алгоритм переходит от одной вершины к другой, первая перестает быть активной, но остается открытой, если ее обработка не закончена (не пройден до конца список смежных с ней вершин). Открытую неактивную вершину будем называть "отложенной". Когда обработка вершины полностью завершается, данная вершина переходит в состояние "закрытая". К этому моменту будет завершена обработка всех потомков данной вершины. Признаки текущего состояния вершины в течение работы алгоритма запоминаются в переменных, привязанных к идентификатору вершины.

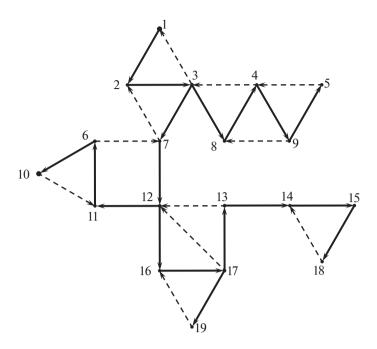


Рис. 2. Одна из возможных разметок в глубину демонстрационного графа

Для управления обходом графа в глубину используется стек. Его можно представить как столбец идентификаторов вершин графа, которые добавляются сверху и сверху же удаляются из стека. Будем говорить также о "вершинах в стеке", подразумевая идентификаторы вершин. В стеке находятся все открытые вершины и только они. В самой верхней позиции стека находится активная вершина, ниже — отложенные. При переходе вершины из новой в открытую она добавляется в стек сверху. Когда обработка вершины полностью заканчивается, она из стека удаляется, переходя в состояние "закрытая".

Потомки вершины σ помещаются в стек после вершины σ и удаляются из стека раньше нее. Они находятся в стеке выше вершины σ . Обработка всех потомков вершины σ выполняется в промежутке между помещением вершины σ в стек и ее удалением из стека, т.е. между началом и окончанием обработки вершины σ . Это является характерной особенностью обхода графа в глубину [8, с. 446–452].

Алгоритм начинает обработку графа с первого из списков смежности вершин. В каждом списке смежности алгоритм просматривает поочередно все вершины, проходя по этому списку слева направо. Когда в списке смежности для вершины σ обнаруживается вершина τ , находящаяся в состоянии "новая", алгоритм DFS определяет ребро (σ , τ) как ветвь остова. Эта ветвь получает направление от σ к τ и добавляется к построенной части ориентированного остова $T'(\rho)$. Атрибуту вершины τ , который называется "номер родительской вершины", присваивается номер вершины σ . Вершина τ становится открытой и активной и добавляется в стек. Алгоритм приостанавливает проход по списку смежности вершины σ : ее признак "активная" он заменяет на "отложенная" и переходит к обработке вершины τ , делая ее активной. Алгоритм выполняет теперь поиск новой вершины среди вершин, смежных уже с вершиной τ , двигаясь по ее списку смежности.

К обработке отложенной вершины σ алгоритм возвращается после того, как закончит обработку всех вершин, попавших в стек после σ . После первого посещения вершины σ , когда она стала открытой, алгоритм столько раз возвратится в нее, сколько ветвей остова, выходящих из нее, он сможет проложить. Когда весь список смежности для вершины σ будет пройден и ее обработка будет закончена, алгоритм удалит ее из стека и переведет в состояние "закрытая". Если вершина σ — корень разметки, то ее закрытием алгоритм закончит свою работу. В противном случае в верхней позиции стека окажется вершина π , родительская по отношению к σ . Пока обрабатывалась вершина σ и ее потомки, вершина σ была отложенной, но теперь она снова становится активной. Алгоритм возобновляет ее обработку, продолжая проход по списку смежных с ней вершин.

Когда при прохождении по списку смежности алгоритм встречает в нем вершину τ , не являющуюся новой, эта вершина может быть либо открытой, либо закрытой. Первый случай имеет место тогда, когда τ есть предок вершины σ : $\tau < \sigma$. Если при этом τ не является родительской вершиной для σ , то алгоритм DFS опознает ребро (σ , τ) как хорду и присваивает ей направление от σ к τ . Хорда (σ , τ) в этот момент открывается.

Во втором случае, т.е. если вершина τ оказывается закрытой, она будет потомком вершины σ : $\tau > \sigma$. Ребро (τ, σ) к этому моменту уже будет опознано как хорда, направленная от τ к σ . В этот момент хорда (τ, σ) закрывается.

При просмотре списка вершин, смежных с σ , все они могут оказаться открытыми. Это будет означать, что они все являются предками вершины σ , а сама эта вершина — концевой в остовном дереве T.

Каждую ветвь (α , β) остова алгоритм (DFS, OCC или HT) проходит дважды. Сначала он проходит ее от начала α к концу β . Этот проход будем называть прямым ходом алгоритма, а также перемещением "вперед" или "в глубину". Обойдя всех потомков вершины β и возвратившись в β , алгоритм затем проходит ветвь (α , β) в обратном направлении — от ее конца β к началу α . Будем говорить, что тогда алгоритм проходит ветвь "назад" или "из глубины".

5. Принцип контроля открытых хорд. Идея алгоритма ОСС состоит в том, чтобы при каждом возврате в отложенную вершину σ контролировать количество хорд, "обходящих" (в обратном направлении) ту выходящую из σ ветвь, со стороны которой алгоритм возвратился в σ . Определим понятия обхода хордой вершины и обхода (шунтирования) хордой ветви.

Будем говорить, что хорда (σ , τ), где $\sigma > \tau$, *обходит вершину* α , если $\sigma > \alpha$ и $\alpha > \tau$. Иначе говоря, когда σ есть потомок вершины α , а τ — предок вершины α . Например, на рис. 2 видно, что вершину 17 обходят хорды (13, 12) и (19, 16).

Будем говорить, что хорда *обходит* или *шунтирует* ветвь (в направлении, обратном ориентации ветви), если она обходит хотя бы одну из двух вершин — начало этой ветви или ее конец. Например, хорда (13, 12) шунтирует ветвь 13, обходя начало этой ветви — вершину 17. Эта же хорда шунтирует ветвь 16 (обходя конец ветви — вершину 16) и ветвь 17 (обходя начало 16 и конец 17 ветви).

Для лучшей обозримости случаев обхода хордами вершин и ветвей в демонстрационном графе H его разметка, приведенная на рис. 2, показана на рис. 3 в "развернутом" виде. Ветви представлены сплошными прямыми стрелками, а хорды — штриховыми дугами. Эта же "развернутая" разметка дана также на рис. 4, но с раздельным изображением блоков. Здесь шарниры изображены маленькими незакрашенными окружностями. Разделенные "части" шарниров соединены точечными линями. На обоих рисунках ясно видны F-циклы: каждый F-цикл образован штриховой дугой (хордой) и цепочкой однонаправленных ветвей, начальную и конечную вершины которой эта дуга соединяет.

Предположим, что при возвращении алгоритма в начало ветви (α, β) в графе G оказывается, что все хорды, шунтирующие эту ветвь, в начале α данной ветви закрываются. Если вершина α не является корнем разметки, то можно утверждать, что тогда она является шарниром. В самом деле, если вершину α удалить из графа G (вместе с инцидентными ей ребрами), то в полученном графе ни вершину β , ни какого-либо ее потомка нельзя будет соединить путем в графе G ни с каким предком вершины α . Число компонент связности графа G увеличится при удалении вершины α . Например, в демонстрационном графе ветвь (3,8) шунтируется одной хордой (4,3), и эта хорда закрывается в вершине 3. Поэтому вершина 3 есть шарнир.

И обратно, если вершина α — шарнир, то среди ее дочерних вершин имеется такая вершина β , что все хорды, шунтирующие ветвь (α , β), закрываются в вершине α . В самом деле, если такой дочерней вершины β нет, то удаление из графа G вершины α не увеличит число компонент связности графа. Чтобы число компонент связности увеличилось при удалении α , необходимо, чтобы хотя бы для одной ветви, выходящей из α , все хорды, шунтирующие эту ветвь, закрывались в α . Например, вершина 17, из которой выходят две ветви (17, 13) и (17, 19), шарниром не является, потому что первая ветвь шунтируется хордой (19, 16), вторая — хордой (13, 12), и ни та, ни другая хорда в вершине 17 не закрывается. На рис. 4 особенно ясно видно, что в каждом шарнире хотя бы у одной из выходящих из него ветвей закрываются все хорды, шунтирующие эту ветвь.

⁴ Вершина неориентированного графа называется концевой, если ей инцидентно в точности одно ребро графа.

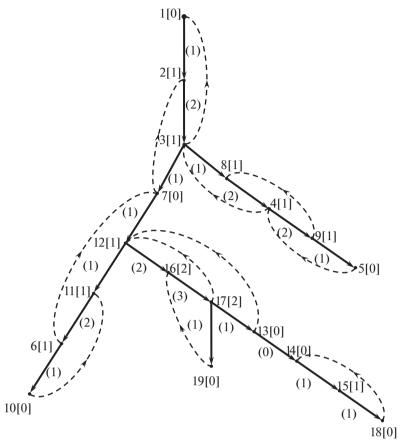


Рис. 3. Более наглядное, чем на рис. 2, расположение разметки демонстрационного графа. Показаны значения счетчиков over (σ) и shunt(x)

В предыдущих двух абзацах изложено основание принципа контроля открытых хорд, обеспечивающего распознавание шарниров неориентированных графов. Сформулируем этот принцип в виде теоремы.

Т е о р е м а 1. Пусть $T'(\rho)$ — остовное ордерево с корнем ρ связного неориентированного графа G, построенное разметкой этого графа в глубину. Вершина α , отличная от ρ , является шарниром графа G в том и только том случае, когда существует такая ветвь (α, β) , что все хорды графа G относительно ордерева $T'(\rho)$, шунтирующие ветвь (α, β) , закрываются в вершине α . В этом случае α есть шарнир блока, начальной ветвью которого является (α, β) .

Если удалить из этой формулировки последнюю фразу, то оставшаяся часть будет эквивалентна утверждению, которое в иных терминах дано с доказательством в [13, c. 56-57, теорема $2]^5$.

Для иллюстрации выявления блоков посредством контроля открытых хорд пройдем, например, в графе H от концевой вершины 5 остовного ордерева против направления ветвей. В вершине 5 открывается хорда (5, 4). Она в обратном направлении шунтирует ветви (9, 5) и (4, 9) и закрывается в вершине 4. Но вершина 4 не будет шарниром, потому что ее обходит хорда (9, 8). Эта хорда шунтирует ветви (4, 9) и (8, 4). При дальнейшем движении против направления ветвей первой вершиной, где все хорды, шунтирующие проходимые ветви, окажутся закрытыми, будет вершина 3. Она будет шарниром. Это наиболее наглядно отображено на рис. 4.

Также можно проследить, что при движении против направления ветвей от концевой вершины 18 остова первой вершиной, где все шунтирующие хорды окажутся закрытыми, будет вершина 14. Далее при продолжении обратного хода это свойство обнаруживается у вершины 13. Обе

⁵ В [8, с. 463, задача б] в качестве задачи предлагается доказать следующее ошибочное утверждение: "Пусть v — вершина связного графа G, отличная от корня его остовного дерева. Докажите, что v — шарнир графа G, если и только если не существует хорды (u, w), для которой u — потомок вершины v, а w — предок вершины v". В демонстрационном графе H это утверждение опровергается хордой (7, 2), которая обходит шарнир 3, и хордой (6, 7), обходящей шарнир 12.

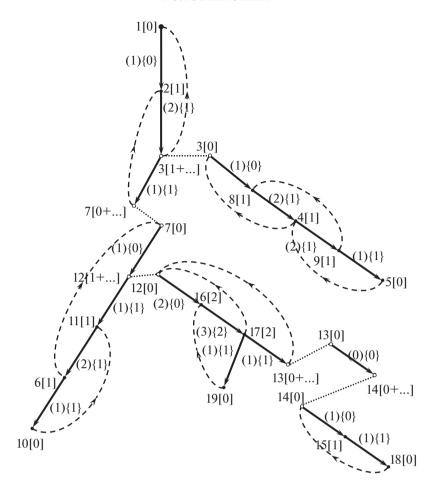


Рис. 4. Раздельное изображение блоков графа с разметкой, показанной на рис. 3. Указаны значения счетчиков $\operatorname{over}(\sigma)$, $\operatorname{shunt}(x)$ и $\operatorname{pass}(x)$

вершины — 13 и 14 — будут шарнирами. Двигаясь дальше обратным ходом, закрытие всех хорд обнаруживаем в вершине 12. При этом учитываем также хорду (19, 16), открывающуюся в концевой вершине 19. Другими словами, при подсчете числа хорд, закрываемых в начале какой-либо ветви (α, β) (в данном случае — ветви (12, 16)), должны быть просмотрены в обратном направлении все пути по ветвям от конца этой ветви β до всех концевых вершин остовного ордерева, являющихся потомками вершины β .

Двигаясь обратным ходом от концевой вершины 10, находим закрытие всех шунтирующих хорд к началу ветви (7, 12) — к вершине 7. Она тоже будет шарниром. Таким образом, посредством контроля открытых хорд мы распознали все шарниры демонстрационного графа H: 3, 7, 12, 13 и 14.

6. Счетчики хорд и их вычисление. Принцип контроля открытых хорд сам по себе достаточно нагляден, но его алгоритмическая реализация требует некоторых несложных технических приспособлений. Ими служат массивы счетчиков числа хорд, находящихся в том или ином отношении к вершинам и ветвям. Этих счетчиков пять типов; их назначение описано в табл. 1.

Аргументом счетчиков open(σ) и over(σ) является идентификатор обрабатываемой вершины, аргументом счетчиков close(x), shunt(x) и pass(x) — идентификатор обрабатываемой ветви. Множество ветвей остовного дерева взаимно-однозначно соответствует множеству всех вершин графа, за вычетом корня остова. Поэтому последние три счетчика формально тоже могут рассматриваться как функции вершины σ , которая является концом ветви $x = (\pi, \sigma)$. При обработке графа в качестве удобного способа обозначения вершин можно использовать порядковые номера, присвоенные им в произвольной очередности. Далее предполагаем, что идентификаторами вершин служат эти порядковые номера.

В начале работы алгоритма значение каждого счетчика для каждой вершины или ветви равно нулю. При каждом посещении вершины алгоритм ОСС обновляет значения всех счетчиков,

Таблица 1. Счетчики хорд

Аргумент счетчика	Обозначение счетчика	Назначение счетчика
σ – идентификатор вершины	open(\sigma)	Число хорд, открывающихся в вершине σ
σ – идентификатор вершины	$over(\sigma)$	Число хорд, обходящих вершину σ
x — идентификатор ветви	shunt(x)	Число хорд, обходящих (шунтирующих) ветвь x
x — идентификатор ветви	close(x)	Число хорд, обходящих ветвь х и закрываю-
		щихся в ее начале
x — идентификатор ветви	pass(x)	Число хорд, обходящих ветвь x и не закрываю-
		щихся в ее начале

Таблица 2. Итоговые значения счетчиков хорд для демонстрационного графа

Номер	open(σ)	close(x)	shunt(x)	pass(x)	over(σ)
вершины – σ		$x = (\pi, \sigma)$			Over(O)
1	0	_	_	_	0
2	0	1	1	0	1
3	1	1	2	1	1
4	1	1	2	1	1
5	1	0	1	1	0
6	1	1	2	1	1
7	1	0	1	1	0
8	0	1	1	0	1
9	1	1	2	1	1
10	1	0	1	1	0
11	0	0	1	1	1
12	0	1	1	0	1
13	1	0	1	1	0
14	0	0	0	0	0
15	0	1	1	0	1
16	0	2	2	0	2
17	1	1	3	2	2
18	1	0	1	1	0
19	1	0	1	1	0

аргументом которых служит данная вершина или входящая в нее ветвь. По номеру вершины алгоритм обращается к соответствующей строке таблицы значений счетчиков хорд (табл. 2). Он считывает значение счетчика из таблицы, прибавляет к нему (если нужно) некоторое приращение и записывает результат в таблицу на место старого значения.

Таблица 2— это обычная реляционная таблица. Для ясности она показана с некоторыми дополнительными частями, которые в памяти программы хранить не требуется. Это заголовки всех столбцов, а также весь первый столбец, содержащий номера вершин в порядке их возрастания. Эти номера являются порядковыми номерами строк таблицы. В табл. 2 даны итоговые значения счетчиков после окончания работы алгоритма.

Значение open(σ) есть количество хорд, открывающихся в вершине σ . Оно вычисляется алгоритмом OCC при проходе по списку вершин, смежных с σ . Когда в этом списке обнаруживается открытая вершина τ , не являющаяся родительской для σ , ребро (σ , τ) распознается как открывающаяся хорда. В этом случае алгоритм увеличивает счетчик open(σ) на единицу. Вычисление значения open(σ) заканчивается, когда вершина σ закрывается.

Значение close(x) равно числу хорд, закрывающихся в начале ветви $x = (\tau, \pi)$, где π является предком вершины σ . Оно увеличивается на единицу всякий раз, когда алгоритм обнаруживает вершину τ в списке смежности у какого-то из потомков σ вершины π . Спрашивается: как алгоритм узнает номер ветви x (совпадающий с номером вершины π) по номеру σ ? Очень просто: по текущему значению указателя вершины в списке смежности для отложенной вершины τ . В момент обработки вершины σ этот указатель дает ту вершину, единственную из смежных с τ , которая является предком текущей активной вершины σ , т.е. вершину π .

Например, при просмотре вершин, смежных с вершиной 4, алгоритм обнаруживает, что смежная вершина 3 открыта. Поскольку она не является родительской для вершины 4, ребро (4, 3) распознается алгоритмом как хорда. Счетчик ореп (4) увеличивается на 1. В списке смежности для вершины 3 указатель в данный момент показывает на вершину $\pi = 8$, поскольку именно через нее алгоритм углубился от вершины 3 до вершины 4. Алгоритм увеличивает на 1 значение close (8): обнаружена хорда, закрывающаяся в начале ветви (3, 8). Обратим внимание, что в close (8) подсчитывается число хорд, которые закрываются не в вершине 8, а в ее родительской вершине 3, т.е. в начале единственной ветви (3, 8), входящей в вершину 8.

Значения счетчиков shunt(x), pass(x) и over(σ) алгоритм ОСС вычисляет рекурсивно при возвращении алгоритма "из глубины", начиная с концевых вершин остова графа. Счетчик shunt(x) выражает число хорд, шунтирующих ветвь $x = (\pi, \sigma)$. Если σ есть концевая вершина остова T графа G, то ветвь x могут шунтировать только хорды, открывающиеся в σ . В этом случае

$$shunt(x) = open(\sigma).$$
 (6.1)

Например, вершина 5 является концевой. В этой концевой вершине открывается одна хорда — (5, 4), так что open(5) = 1. В вершину 5 входит ветвь под номером 5. Поэтому shunt(5) = 1.

Если же вершина σ не является концевой в остове T, но не является и его корнем, то

$$\operatorname{shunt}(x) = \operatorname{over}(\sigma) + \operatorname{open}(\sigma),$$
 (6.2)

где $x = (\pi, \sigma)$. К моменту вычисления по этой формуле величина over(σ) будет уже известна, а open(σ) определяется непосредственно в вершине σ . Если, например, в графе $H \sigma = 17$, то x = (16, 17). Тогда over(17) = 2 и open(17) = 1, откуда shunt(17) = 3.

В концевых вершинах остова хорды могут только открываться, но не могут в них закрываться или обходить их. Так что если вершина σ концевая, то over(σ) = 0. Поэтому формула (6.1) является частным случаем формулы (6.2).

Счетчик pass(x) выражает число всех хорд, шунтирующих (обходящих) ветвь x и не закрывающихся в ее начале. Он вычисляется по очевидной формуле

$$pass(x) = shunt(x) - close(x).$$
 (6.3)

Например, ветвь 16 шунтируется хордами (13, 12) и (17, 12). Обе они закрываются в вершине 12, являющейся началом ветви 16. Поэтому shunt(16) = 2 и close(16) = 2, откуда pass(16) = 0. А ветвь 17 шунтируют три хорды: (13, 12), (17, 12) и (19, 16), но в начальной вершине 16 этой ветви закрывается только одна из них — хорда (19,16). Поэтому shunt(17) = 3 и close(17) = 1, откуда pass(17) = 2.

Подставляя в (6.3) выражение для shunt(x) из (6.2), получим

$$pass(x) = over(\sigma) + open(\sigma) - close(x)$$
(6.4)

для любой ветви $x = (\pi, \sigma)$.

С помощью счетчика pass(x) сформулированный выше критерий шарнирности в алгоритме OCC (теорема 1) можно выразить следующим образом.

Т е о р е м а 1'. Пусть вершина α неориентированного графа G не является корнем его разметки в глубину; раss(x) — число всех хорд относительно этой разметки, шунтирующих ветвь x и не закрывающихся в ее начале. Вершина α будет шарниром графа G тогда и только тогда, когда рass(x) = 0 хотя бы для одной ветви x, выходящей из α . В этом случае ветвь x будет начальной ветвью блока, которому она принадлежит.

Например, в демонстрационном графе pass(16) = 0, и поэтому ветвь 16 будет начальной ветвью блока, а ее начальная вершина 12 — шарниром. А, например, вершина 16 шарниром не будет, так как для единственной выходящей из нее ветви 17 имеем pass(17) = 2.

Величина over(σ) есть число хорд, обходящих вершину σ . Если σ — корень разметки или концевая вершина остова, то over(σ) = 0; в противном случае over(σ) формируется в результате обработки всех вершин, дочерних к σ . Тогда из вершины σ может выходить более одной ветви остовного ордерева. Хорда, обходящая вершину, может открываться в любом из ее потомков. Для вычисления over(σ) требуется знать pass(x_i) для каждой ветви $x_1, x_2, ...$, выходящей из вершины σ :

$$over(\sigma) = pass(x_1) + pass(x_2) + \dots$$
 (6.5)

Например, из вершины 17 выходят две ветви -13 и 19. Со стороны ветви 13 вершину 17 обходит хорда (13, 12), а со стороны ветви 19 эту вершину обходит хорда (19, 16). Имеем соответственно pass(13) = 1 и pass(19) = 1. Отсюда

$$over(17) = pass(13) + pass(19) = 1 + 1 = 2.$$

При первом посещении алгоритмом ОСС вершины σ , из которой выходят ветви $x_1, x_2, ...,$ значение over(σ) равно 0. При каждом следующем посещении этой вершины к текущему значению over(σ) прибавляется очередное слагаемое из правой части формулы (6.5). Если при возврате алгоритма в вершину σ по ветви x_j окажется pass(x_j) = 0, то вершина σ будет шарниром, а ветвь x_j — начальной ветвью блока. Счетчик over(σ) получает окончательное значение, когда список смежности для вершины σ пройден и ее обработка заканчивается.

Все арифметические операции алгоритма ОСС выражаются формулами (6.4) и (6.5). Счетчик shunt(x) в них не входит: он является промежуточным и использован здесь для подробного объяснения алгоритма. Остальные операции в программе, реализующей алгоритм ОСС, обеспечивают обход графа в глубину и определение состояния вершин.

Итоговые значения счетчиков shunt(x), pass(x) и over(σ) показаны, кроме табл. 2, также на рис. 3 и 4. На них при каждой вершине указан ее номер, и тот же номер имеет ветвь, входящая в данную вершину. При номере каждой вершины в квадратных скобках указано значение over(σ). При каждой ветви x в круглых скобках указано значение shunt(x). На рис. 4, кроме того, к значению shunt(x), указанному для каждой ветви x в круглых скобках, еще приписано в фигурных скобках значение pass(x).

Если ветвь выходит из шарнира, который не является корнем остовного ордерева $T'(\rho)$, то она может не быть начальной ветвью блока. Примеры дают ветви (3,7) и (12,11). Пусть из шарнира σ выходит более одной ветви. Тогда на рис. 4 в блоке, которому шарнир σ принадлежит, но не является его начальной вершиной, значение функции over (σ) показано в виде $\sigma[pass(x)+...]$, где x ветвь этого блока, выходящая из σ . Многоточие здесь означает сумму значений функции pass (x_j) для всех ветвей x_j , выходящих из шарнира σ , но принадлежащих другим блокам. Там каждая из этих ветвей будет начальной. Например, надпись 3[1+...] при вершине σ 0 в блоке, начальная ветвь которого есть σ 1, указывает на то, что вершина σ 3 является шарниром и начальной вершиной другого блока. Это будет блок σ 2 начальной ветвью σ 3.

7. Сводимость анализа двусвязности к анализу простой связности и к объединению F-циклов. В [15] показано, что метод присоединения фундаментальных циклов выявляет сводимость анализа двусвязности графа к анализу простой связности другого графа — графа инцидентности ветвей F-циклам. Пусть G — связный неориентированный граф, T — его остовное дерево. Принадлежность ребер графа G фундаментальным циклам можно наглядно показать посредством биграфа (двудольного графа). Для этого каждый F-цикл представим графом-звездой 6 . Хорду, определяющую F-цикл, будем представлять центральной вершиной звезды, ветви остова в этом F-цикле — концевыми вершинами данной звезды. Центральной вершине звезды присвоим идентификатор хорды F-цикла, концевым вершинам — идентификаторы его ветвей. Каждый мост графа G будем изображать отдельной вершиной, присвоив ей идентификатор этого моста как ветви.

Звезды всех F-циклов графа G объединим как графы, совмещая те концевые вершины разных звезд, которые представляют одну и ту же ветвь. Добавим изолированные вершины, соответствующие всем мостам графа G. Полученный биграф обозначим $D_G(P_1, P_2, L)$ или просто D_G . Он будет состоять из долей P_1 , P_2 и множества ребер L. Доля P_1 будет множеством вершин, взаимно-однозначно представляющих все ветви остовного дерева T. Доля P_2 будет множеством вершин, взаимно-однозначно представляющих все хорды графа G относительно остовного дерева T, и тем

⁶ Графом-звездой называется неориентированное дерево, все ребра которого инцидентны одной вершине, называемой центром (центральной вершиной) звезды. Ребра этого графа называются лучами звезды.

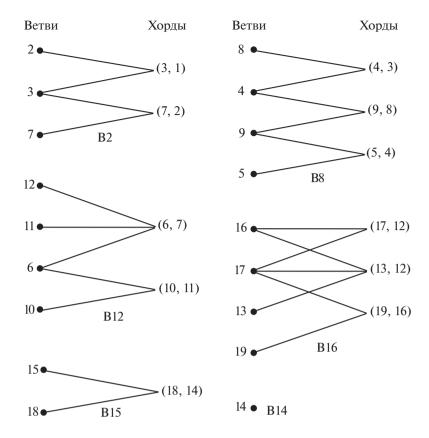


Рис. 5. Биграф принадлежности ветвей демонстрационного графа его F-циклам: объединение звезд F-циклов и изолированных вершин мостов

самым — фундаментальные циклы графа G. Таким образом, множество вершин графа D_G будет взаимно-однозначно соответствовать множеству ребер графа G.

Полученный биграф D_G назовем биграфом принадлежности ветвей F-циклам относительно остовного леса T графа G. В [15] доказана следующая теорема.

T е о p е м а $\, 2$. Множество компонент связности биграфа принадлежности ветвей F-циклам неориентированного связного графа $\, G$ взаимно-однозначно соответствует множеству блоков графа $\, G$.

Таким образом, анализ двусвязности графа G сводится к анализу простой связности биграфа D_G .

На рис. 5 показан биграф D_H , изображающий принадлежность ветвей F-циклам в демонстрационном графе H. Исходный граф H связен, но его биграф D_H не связен: он состоит из шести компонент простой связности. Они представляют блоки графа H. Обозначения компонент связности биграфа D_H образованы буквой "В" и приписанным к ней номером начальной ветви блока графа H, отображаемого данной компонентой. Начальная ветвь блока однозначно определяет этот блок. Так, начальной ветвью блока, которому в биграфе на рис. 5 соответствует компонента связности B12, является ветвь (7, 12). Изолированная вершина 14 биграфа D_H выражает единственный мост графа H— ветвь (13, 14). Остальные компоненты связности биграфа D_H представляют компоненты вершинной двусвязности графа H.

Алгоритм ОСС можно интерпретировать как процесс последовательного объединения F-циклов графа G через их общие ветви при обратном ходе алгоритма по остовному ордереву. Если вершина графа не является ни концевой, ни шарниром, ни корнем остовного ордерева, то ее обходит хотя бы одна хорда. Если хорда a обходит вершину σ , в которой открывается хорда b, то эти две хорды как бы "зацепляются" друг за друга. В этом случае F-циклы, определяемые хордами a и b, будут иметь общую ветвь (π , σ), входящую в σ . Объединение этих двух F-циклов через их общее

ребро (π , σ) будет двусвязным графом. Такие объединения будут выявляться при обратном ходе алгоритма, пока он не возвратится к такой ветви z, у которой все шунтирующие ее хорды будут закрываться в ее начале. Это начало будет шарниром графа G (если оно не корень разметки), а объединившиеся перед этим F-циклы дадут компоненту двусвязности графа G. Если же ветвь g не шунтируется ни одной хордой, то она — мост.

В общем случае "зацепление" двух хорд означает просто наличие общих ветвей у двух F-циклов, определяемых этими хордами. В биграфе D_G это выражается в наличии общих концевых вершин у звезд, представляющих данные F-циклы. Последовательному объединению F-циклов графа G через их общие ветви остова соответствует последовательное соединение звезд F-циклов через их общие концевые вершины, в результате чего будут получаться компоненты простой связности биграфа D_G .

Последовательность попарных "зацеплений" хорд, приводящую к объединению F-циклов в двусвязную компоненту графа, проиллюстрируем примером вычисления блока B8 в графе H. Через $\Phi(\alpha,\beta)$ будем обозначать F-цикл, определяемый хордой (α,β) . Операцию объединения графов будем выражать символом "+".

При движении от вершины 5 к шарниру 3 алгоритм ОСС последовательно выявляет F-циклы $\Phi(5,4)$, $\Phi(9,8)$ и $\Phi(4,3)$. Сначала он обнаруживает, что ветвь (4,9) шунтируется двумя хордами (5,4) и (9,8), "зацепляющимися" одна за другую. Ветвь (4,9) принадлежит одновременно двум соответствующим F-циклам — $\Phi(5,4)$ и $\Phi(9,8)$. Их объединение $\Phi(5,4)$ + $\Phi(9,8)$ есть двусвязный подграф выявляемого блока.

Далее алгоритм ОСС аналогичным образом распознает "зацепление" хорды (9, 8) за хорду (4, 3) посредством шунтирования ими обеими ветви (8, 4). Эта ветвь является общим ребром двух F-циклов — $\Phi(9, 8)$ и $\Phi(4, 3)$. Поэтому объединение F-цикла $\Phi(4, 3)$ с двусвязным графом $\Phi(5, 4) + \Phi(9, 8)$ дает двусвязный граф, выражаемый формулой $\Phi(5, 4) + \Phi(9, 8) + \Phi(4, 3)$. К последнему добавить новые F-циклы уже нельзя: перейдя с ветви (8, 4) на ветвь (3, 8), алгоритм ОСС установит равенство раss(8) = 0. Оно означает прекращение последовательного "зацепления" хорд. Таким образом, оказывается выявленным блок

$$B8 = F(5, 4) + F(9, 8) + F(4, 3).$$

Попарное объединение F-циклов $\Phi(5,4)$ с $\Phi(9,8)$ и $\Phi(9,8)$ с $\Phi(4,3)$ через общие ветви (4,9) и (8,4) представлено в биграфе D_H соединением звезд этих F-циклов через их концевые вершины 9 и 4 (рис. 5).

8. Сравнение с методом Хопкрофта—Тарьяна. Алгоритм ОСС производит однократный обход графа в глубину — точно так же, как алгоритм НТ. Оба алгоритма в одинаковом порядке просматривают списки смежности открытых вершин. В силу этого оба имеют одинаковый порядок сложности по числу операций. Для связных графов эта оценка есть O(m), для несвязных — O(n+m), где n — число вершин графа, m — число его ребер. Затраты памяти компьютера у обоих алгоритмов тоже одинаковы. Они определяются размерами таблицы списков смежности вершин — O(n+m), а также размерами стека и массивов вычисляемых целочисленных функций вершин — O(n).

Выявление алгоритмом ОСС последовательности "зацепления" хорд в пределах одной компоненты двусвязности графа делает наглядной суть этого алгоритма. Алгоритм НТ такой наглядности не дает.

Метод ОСС позволяет легко обосновать алгоритм Хопкрофта—Тарьяна. Обозначим через \overline{G} орграф, полученный из графа G заданием ориентации на ветвях и хордах, как описано в разд. 2. Эта ориентация показана для демонстрационного графа H на рис. 2 и 3. Алгоритм НТ при обходе графа в глубину присваивает каждой вершине σ графа порядковый "глубинный" номер $Dnum(\sigma)$ и вычисляет для нее номер $Lnum(\sigma)$ — наименьший из "глубинных" номеров вершин, достижимых из вершины σ в орграфе \overline{G} по путям, каждый из которых содержит не более одной хорды.

Согласно критерию ОСС, вершина σ , не являющаяся корнем остова, будет шарниром тогда и только тогда, когда хотя бы для одной ее дочерней вершины τ ни одна хорда, шунтирующая ветвь (σ , τ), не будет обходить вершину σ . Тогда всякая хорда, шунтирующая ветвь (σ , τ), должна

закрываться в вершине σ . Если такая хорда существует, то $Lnum(\tau) = Dnum(\sigma)$, если нет, то $Lnum(\tau) > Dnum(\sigma)$. В любом случае получается $Lnum(\tau) \ge Dnum(\sigma)$, а это и есть критерий Хопкрофта—Тарьяна, характеризующий шарнирность вершины σ .

С другой стороны, из критерия HT вытекает критерий OCC. Неравенство $Lnum(\tau) \ge Dnum(\sigma)$, где (σ,τ) есть ветвь ордерева $T'(\rho)$, означает, что каждая хорда, начало которой достижимо из вершины τ по ориентированным ветвям, закрывается либо в вершине σ , либо в ее потомке. Это условие совпадает с критерием OCC.

Алгоритм НТ вычисляет две целочисленные функции вершин — $Dnum(\sigma)$ и $Lnum(\sigma)$. В формулах (6.4) и (6.5), к которым сводятся вычисления в алгоритме ОСС, фигурируют четыре целочисленные функции вершин: open(σ), close(x), over(σ) и pass(x). Это больше, чем две функции, вычисляемые алгоритмом НТ. Является ли это недостатком алгоритма ОСС? Нет, ибо это просто эффект большей понятийной детализации алгоритма ОСС по сравнению с НТ. Она реализуется в ОСС посредством таких понятий, как "открытие хорды в вершине", "закрытие хорды в вершине", "обход вершины хордой", "обход ветви хордой". Благодаря этому алгоритм ОСС получается наглядным и не требует дополнительных обоснований после его описания.

Заключение. При достигнутых на сегодня вычислительных мощностях компьютеров практическая ценность алгоритма характеризуется не только его вычислительной сложностью. Возрастает роль таких факторов, как легкость понимания алгоритма человеком, удобство алгоритма для программирования и для контроля работы реализующей его программы. Алгоритм должен быть "удобным" не только для компьютера, но и для программиста.

В статье описан новый метод вычисления шарниров и блоков неориентированных графов. Известный алгоритм Хопкрофта—Тарьяна, решающий эту задачу, не обладает такой наглядностью и простотой обоснования, как алгоритм, предложенный в настоящей работе. В основе нового алгоритма, названного здесь ОСС, лежит идея отслеживания числа хорд, обходящих (шунтирующих) вершины и ветви остова анализируемого графа. Благодаря этому контролю становится очевидным, как последовательное объединение фундаментальных циклов графа, имеющих общие ребра, приводит к построению его компонент двусвязности.

На базе метода ОСС легко устанавливается эквивалентность двух критериев шарнирности вершин — критерия Хопкрофта—Тарьяна и критерия ОСС.

Поскольку предложенный алгоритм ОСС, как и алгоритм Хопкрофта—Тарьяна, основан на обходе графа в глубину, оценки вычислительной сложности обоих одинаковы. Они сводятся к оценке сложности обхода неориентированного графа в глубину, выражаемой как O(n+m), где n — число вершин графа, m — число ребер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Головинский И.А.* Построение графов простых путей в транспортных сетях. І. Общие решения и примеры // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 1. С. 124—159.
- 2. *Hopcroft J., Tarjan R.* Efficient Algorithms for Graph Manipulation. Tech. Rep. 207, Computer Science Department, Stanford University, Stanford, Calif., 1971. URL: http://i.stanford.edu/pub/cstr/reports/cs/tr/71/207/CS-TR-71-207.pdf (дата обращения: 20.05.2020).
- 3. *Tarjan R.E.* Depth First Search and Linear Graph Algorithms // BIAM J. Computing. 1972. V. 1 (2). P. 146–160.
- 4. Hopcroft J.E., Tarjan R.E. Efficient Algorithms for Graph Manipulation // Comm. ACM. 1973. V. 16 (6). P. 372–378.
- 5. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980.
- 6. Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. 213 с.
- 7. *Асанов М.О.*, *Баранский В.А.*, *Расин В.В.* Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 288 с.
- 8. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2001. 960 с.
- 9. *Седжвик Р.* Фундаментальные алгоритмы на C++. Ч. 5. Алгоритмы на графах. СПб.: ООО "ДиаСофтЮП", 2002. 496 с.
- 10. *Ахо А.В., Хопкрофт Дж.Э., Ульман Дж.Д.* Структуры данных и алгоритмы. М., СПб., Киев: Вильямс, 2003. 384 с.

- 11. Макконнелл Дж. Основы современных алгоритмов. Изд. 2-е. М.: Техносфера, 2004. 368 с.
- 12. Окулов С.М. Программирование в алгоритмах. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. 341 с.
- 13. Алексеев В.Е., Таланов В.А. Графы и алгоритмы. Структуры данных. Модели вычислений. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 320 с.
- 14. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.
- 15. *Тумаков А.В., Головинский И.А.* Анализ двусвязности графов: обоснование и варианты метода фундаментальных циклов // Информационные технологии моделирования и управления. 2013. № 2 (80). С. 123—137.
- 16. Головинский И.А., Тумаков А.В. Анализ двусвязности графов методом присоединения фундаментальных циклов // Информационные технологии моделирования и управления. 2013. № 2 (80). С. 92—105.
- 17. Дасгупта С., Пападимитриу Ч., Вазирани У. Алгоритмы. М.: Изд-во МЦНМО, 2014. 320 с.

__ ИСКУССТВЕННЫЙ _ ИНТЕЛЛЕКТ

УЛК 004.932.2

ПОВЫШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗРЕШЕНИЯ ПАНХРОМАТИЧЕСКИХ СПУТНИКОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ГЕНЕРАТИВНЫХ НЕЙРОСЕТЕЙ¹

© 2021 г. В. Ю. Игнатьев^{a,d,*}, И. А. Матвеев^{a,*,*}, А. Б. Мурынин^{a,b,*,*,*}, А. А. Усманова^{b,c,*,*,*,*} В. И. Пурков^{a,*,*,*,*,*,*,*,*,*,*,*,*,*,*,*,*}</sup>

^а ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

^b НИИ АЭРОКОСМОС, Москва, Россия

^c МФТИ, Долгопрудный, МО, Россия

^d Сколковский ин-т науки и технологий, Москва, Россия

*e-mail: vladimir.ignatiev.mipt@gmail.com

**e-mail: matveev@ccas.ru

***e-mail: amurynin@bk.ru

***e-mail: tsurkov@ccas.ru

Поступила в редакцию 31.08.2020 г.
После доработки 05.09.2020 г.
Принята к публикации 30.11.2020 г.

Генеративно-состязательные нейронные сети применены для повышения разрешения спутниковых изображений определенного класса без привлечения дополнительных данных. Оценка качества получаемых изображений повышенного разрешения проводится отношением сигнал/шум и мерой структурного сходства. На основе известных функций потерь, используемых для обучения генеративно-состязательных нейронных сетей, получена функция, специфичная для решаемой задачи. Обучение и тестирование ведется на примере изображений объектов железнодорожной инфраструктуры, выборка представляет около 78 км железных дорог.

DOI: 10.31857/S0002338821020074

Введение. Информация, получаемая из спутниковых изображений, имеет важное значение для решения многих задач, в частности, для управления пространственно распределенной инфраструктурой железнодорожного транспорта на различных этапах жизненного цикла [1]. Полезность спутниковой информации определяется в первую очередь пространственным разрешением, которое здесь понимается как количество пикселей изображений, приходящихся на единицу площади подстилающей поверхности [2]. Актуальна разработка методов получения изображений более высокого разрешения, чем непосредственно регистрируемые аппаратурой. Существуют различные способы восполнения недостающих данных при повышении разрешения. Как правило, привлекаются дополнительные источники информации: растровые изображения более высокого разрешения другого спектрального диапазона [3], векторные данные, полученные при подспутниковых измерениях и из других источников [4, 5]. Хорошо развиты методы слияния растровых изображений (паншарпенинга), основанные на математической морфологии [6], вероятностном и пространственно-спектральном подходах [7, 8].

Существуют приложения, в которых дополнительная информация недоступна. Подходы, используемые в этом случае, развивались от передискретизации полиномиальными методами [9, 10] и фильтрами Ланцоша [11] до нелинейных моделей, существенно зависящих от области применения, таких, как анизотропная диффузия [12—14], эвристики с выделением контуров [15, 16], пространственно-спектральный синтез [7]. Новые возможности здесь появились в связи с развитием машинного обучения с применением искусственных нейронных сетей. На сегодняшний день направление глубоких нейросетей является наиболее перспективным ввиду

¹ Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (уникальный идентификатор проекта RFMEFI60719X0312).

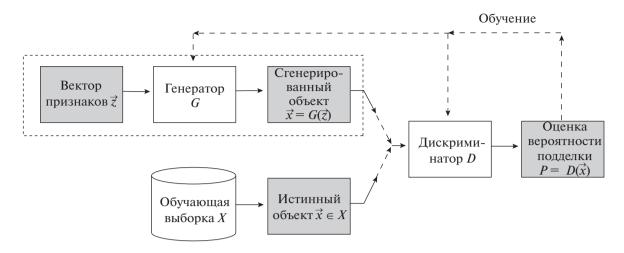


Рис. 1. Общая схема ГСН

появления в открытом доступе большого количества данных дистанционного зондирования Земли субметрового пространственного разрешения [17—21], на которых такие сети могут тренироваться.

Подходы на основе модификации генеративно-состязательных нейросетей (ГСН) превосходят по качеству другие нейросетевые ахритекутры при двух-четырехкратном повышении пространственного разрешения изображений [22—25]. Размеры обучающих выборок (датасетов) изображений с фотоаппаратов, на которых тестировались ГСН и иные подходы повышения разрешения, исчисляются десятками тысяч. Например, в наборе VOC2012 [26] примерно 17 000 цветных и черно-белых снимков для 20 различных классов объектов, размеченных для решения задач классификации сцены, сегментации и детектирования объектов на изображениях, классификации действий.

В данной работе исследуется возможность повышения разрешения панхроматических спутниковых снимков субметрового пространственного разрешения без привлечения дополнительной информации при помощи ГСН. Одной из вспомогательных задач стало создание обучающей выборки для конкретной прикладной области изображений объектов железнодорожного транспорта.

1. ГСН в задаче повышения качества изображений. ГСН (от англ. generative adversarial network - GAN) впервые были предложены Я. Гудфеллоу в 2014 г. [27]. ГСН состоит из двух нейросетей, генератора и дискриминатора, соревнующихся друг с другом. Задачей генератора G является формирование объектов, максимально схожих с объектами обучающей выборки. Задача дискриминатора D — отличать объекты обучающей выборки от сгенерированных. Генератор и дискриминатор тренируются параллельно, формируя и обучаясь отличать объекты, которые имеют все более сложное распределение, приближающееся к истинному. На рис. 1 показана схема тренировки и работы ГСН.

Для тренировки используется обучающая выборка X, содержащая примеры истинных объектов, обозначим вектор признаков через \vec{x} ; можно считать, что признаки берутся из некоторого распределения с плотностью вероятности $p(\vec{x})$. На каждом шаге тренировки на вход генератора G поступает вектор $\vec{z} \sim p(\vec{z})$, который может быть набором случайных чисел. Генератор выдает признаки $\hat{\vec{x}} = G(\vec{z})$, моделирующие истинный объект. Дискриминатор D получает на вход или признаки истинного объекта $\vec{x} \in X$, взятые из обучающей выборки, или сгенерированные $\hat{\vec{x}}$ и выдает оценку (вероятность) $P = D(\vec{x})$ того, что на вход поданы истинные признаки. В зависимости от величины P и того, какие признаки использовались на самом деле, происходит обучение генератора и дискриминатора. Штриховой рамкой на рисунке выделен "рабочий цикл", все остальные блоки используются на этапе тренировки. Тренировка ГСН может быть представлена как задача оптимизации:

$$\min_{\theta_{G}} \max_{\theta_{D}} V(G, D), V(G, D) = \mathbb{E}_{p(\vec{x})} \left[\log D(\vec{x}) \right] + \mathbb{E}_{p(\vec{z})} \left[\log \left\{ 1 - D\left(G(\vec{z})\right) \right\} \right], \tag{1.1}$$

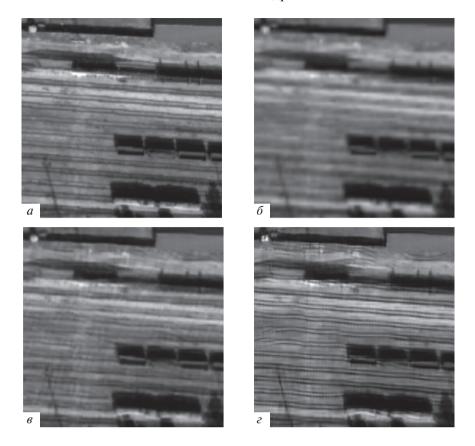


Рис. 2. Примеры изображений: a — исходное I^{HR} , δ — низкого разрешения I^{LR} , δ — результат $G(I^{LR})$ при обучении (1.2), ε — результат $G(I^{LR})$ при обучении (3.3)

где θ_G и θ_D — параметры (веса связей между нейронами) нейросетей G и D соответственно, $\mathbb{E}_a(b)$ — матожидание b по распределению a.

Эта общая схема несколько изменена для задачи повышения разрешения. Введем следующие определения.

Изображение высокого разрешения (high resolution image, I^{HR}) — изображение из обучающей выборки, $I^{HR} \in X$. На рис. 2, a представлен пример такого изображения.

Изображение низкого разрешения (low resolution image, I^{LR}) — это исходное изображение на этапе работы, на этапе тренировки оно получается из изображения обучающей выборки. На рис. 2, δ представлен пример такого изображения.

Изображение со сверхразрешением (super resolution image, I^{SR}) получается из I^{LR} процедурой повышения разрешения, здесь такой процедурой является использование нейросети-генератора $G: I^{SR} = G(I^{LR})$.

Загрубленное изображение (downsampled image, I^{DS}) получается из I^{SR} снижением разрешения аналогично тому, как из I^{HR} вычисляется I^{LR} .

Растровое изображение может быть представлено как вектор, значениями которого являются значения яркости пикселей, взятые в порядке развертки. Это называется векторизацией: $\vec{x} = vec(I)$. Далее для простоты будем опускать это обозначение. В задаче сверхразрешения генератор G получает на вход изображение низкого разрешения I^{LR} и пытается восстановить из него I^{HR} — это "рабочий цикл" (рис. 3). Для тренировки было бы оптимально использовать пары (изображение высокого разрешения; изображение низкого разрешения), зарегистрированные одновременно, с тем, чтобы ГСН обучалась наиболее правдоподобным образом восстанавливать

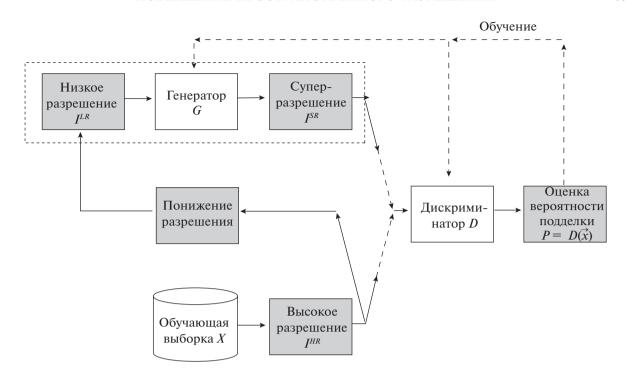


Рис. 3. Схема ГСН для повышения разрешения

первое из второго. Однако в действительности такие данные крайне редко доступны. Поэтому применяется следующий способ, описанный также в [7]. Для тренировки используется выборка изображений высокого разрешения I^{HR} . Изображения низкого разрешения I^{LR} получаются из них специальной процедурой снижения разрешения L, моделирующей регистрацию изображения менее качественной аппаратурой. В данной работе снижение разрешения производится при помощи бикубической интерполяции [28].

Таким образом можно переписать целевую функцию (1.1) в виде

$$V(G, D) = \mathbb{E}_{p(I^{HR})}[\log D(I^{HR})] + \mathbb{E}_{p(I^{HR})}[\log\{1 - D(G(L(I^{HR})))\}]. \tag{1.2}$$

Сеть, оптимизирующую функцию (1.2), назовем ΓCH сверхразрешения ($\Gamma CHCP$, super resolution GAN, SRGAN).

- **2.** Выбор функции потерь. В этом разделе описаны функции потерь ($\Phi\Pi$), используемые в задаче повышения разрешения изображений на основе ГСНСР. Описано влияние исследуемых $\Phi\Pi$ на результат обучения выбранных моделей, на основании которого предлагается усовершенствованная $\Phi\Pi$ для данной модели.
- 2.1. Φ у н к ц и я потерь общих и з менений. Φ побщих изменений (total variation loss) используется для обеспечения пространственной непрерывности сгенерированных изображений. Впервые она предложена для задачи повышения разрешения в [29], в ГСНСР она используется на одном из наборов данных. Φ побщих изменений задается в виде

$$U_{TVL}(I^{SR}) = \frac{1}{hwc} \sum_{i,i,k} \sqrt{(I_{i,j+1,k}^{SR} - I_{i,j,k}^{SR})^2 + (I_{i+1,j,k}^{SR} - I_{i,j,k}^{SR})^2},$$
(2.1)

где h, w, c — высота, ширина и количество каналов сгенерированного изображения соответственно, $I_{i,j,k}^{SR}$ — значение пикселя изображения I^{SR} с координатами (i,j,k).

2.2. Функция потерь согласованности цикла. $\Phi\Pi$ согласованности цикла (cycle consistency loss) предложена в задаче перевода одного изображения в другое [30], к задаче повышения разрешения применена в [31]. Ее идея заключается в том, что сгенерированное изображение I^{SR} снова приводится к изображению низкого разрешения I^{DS} , которое должно быть

Вес ФП	PSNR	SSIM
0	25.09	0.746
10^{-5}	25.35	0.754
10^{-4}	25.64	0.761
10^{-3}	25.17	0.742
10^{-2}	24.69	0.727
10^{-1}	24.72	0.729
1	24.77	0.726

Таблица 1. Влияние ФП согласованности цикла

идентично исходному изображению низкого разрешения I^{LR} . $\Phi\Pi$ согласованности цикла вычисляется как среднеквадратичное отклонение:

$$U_{cycle}(I^{DS}, I^{LR}) = \frac{1}{hwc} \sqrt{\sum_{i,j,k} (I_{i,j,k}^{DS} - I_{i,j,k}^{LR})^2}.$$
 (2.2)

К модели ГСНСР, использующей также $\Phi\Pi$ общих изменений, добавлялась $\Phi\Pi$ согласованности цикла с различными весами.

В табл. 1 приведены меры качества, полученные при добавлении к целевой функции $\Phi\Pi$ согласованности цикла с различными весами.

2.3. Функция потерь текстуры. $\Phi\Pi$ текстуры (texture loss), предложенная в [32], является основной составляющей в задаче передачи стиля изображения [33]. К задаче повышения разрешения эта $\Phi\Pi$ впервые применена в [34].

Текстура изображения определяется из корреляции между значениями функции активации по разным каналам одного и того же слоя, при прохождении изображения через сверточную нейронную сеть VGG [35]. Используется матрица Грама $G^{(l)} \in \mathbb{R}^{c_l \times c_l}$ (l — номер слоя сети VGG, c_l — количество каналов в этом слое), которая отражает сходство между каждой парой векторов: если два вектора похожи друг на друга, то их скалярное произведение будет большим и, следовательно, матрица Грама будет иметь большие значения. Необходимо минимизировать расстояние между двумя матрицами Грама, соответствующими реальному и сгенерированному изображениям [36]. Компоненты матрицы $G^{(l)}$ задаются как

$$G_{ij}^{(l)}(I) = \left\langle \phi_i^{(l)}(I), \phi_j^{(l)}(I) \right\rangle, \tag{2.3}$$

где $\phi_i^{(l)}$ — карта признаков i-го канала в l-м слое, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение (сумма произведений соответствующих значений) слоев сети. Тогда сама $\Phi\Pi$ текстуры выглядит следующим образом:

$$U_{texture}(I^{SR}, I^{HR}) = \sum_{c,l \in \Lambda} \frac{1}{c_l^2} \sqrt{\sum_{i,j} (G_{ij}^{(l)}(I^{SR}) - G_{ij}^{(l)}(I^{HR}))^2}.$$
 (2.4)

Внешнее суммирование берется на выходе слоев активации, в используемой конфигурации сети VGG19- это слои с номерами $\Lambda=\{8,17,26,35\}$. К модели $\Gamma CHCP$, применяющей также $\Phi\Pi$ общих изменений, добавлялась $\Phi\Pi$ текстуры с различными весами. В табл. 2 приведены меры качества, полученные при добавлении к целевой функции $\Phi\Pi$ текстуры с различными весами.

На рис. 4 представлена схема расчета $\Phi\Pi$ согласованности цикла и $\Phi\Pi$ текстуры.

- 2.4. Комбинация $\Phi \Pi$. Произведена попытка скомбинировать исследуемые функции: к модели ГСНСР, использующей также $\Phi \Pi$ общих изменений, добавлены $\Phi \Pi$ текстуры и согласованности цикла с коэффицентами, показавшими наилучший результат в разд. 2.2 и 2.3.
- **3. Численные эксперименты.** Вычислительные эксперименты проводились на специально собранной базе изображений железнодорожной инфраструктуры. Показателями качества работы были выбраны стандартные меры, также применялась визуальная оценка. Экспериментально

Вес ФП	PSNR	SSIM
0	25.09	0.746
10^{-4}	25.25	0.756
10^{-3}	25.18	0.738
10^{-2}	25.34	0.762
10^{-1}	26.84	0.811
1	25.23	0.753

Таблица 2. Влияние ФП потерь текстуры

подобраны весовые коэффициенты при целевой функции, используемой при тренировке ГСНСР, такие, что обученная сеть показывает оптимальный результат.

3.1. Оценка качества изображений. Качество получаемых изображений оценивается как с привлечением численных критериев, так и путем визуального анализа. Для количественной оценки использовались меры, описанные ниже.

Пиковое отношение сигнала к шуму (peak signal-to-noise ratio, PSNR) вычисляется как отношение квадрата максимальной яркости изображения B и среднего квадрата разности между сгенерированным изображением I^{SR} и изображением высокого разрешения I^{HR} . Для простоты обозначив $I = I^{HR}$ и $\hat{I} = I^{SR}$, запишем:

$$PSNR(\hat{I}, I) = 10 \log \frac{NB^{2}}{\sum_{i=1}^{N} (\hat{I}(i) - I(i))^{2}},$$
(3.1)

где I(i) — яркость i-го пикселя изображения, N — число пикселей, B = 255 в случае 8-битовых изображений.

Индекс структурного сходства (structural similarity index, SSIM) учитывает структуру изменения информации, т.е. взаимосвязь между пикселями, располагающимися пространственно близко друг к другу:

SSIM(
$$\hat{I}, I$$
) = $\frac{(2\mu_I \mu_{\hat{I}} + c_1)(2\sigma_I \sigma_{\hat{I}} + c_2)}{(\mu_I^2 + \mu_{\hat{I}}^2 + c_1)(\sigma_I^2 + \sigma_{\hat{I}}^2 + c_2)}$, (3.2)

где значения

$$\mu_I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I(i), \quad \sigma_I = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (I(i) - \mu_I)^2}$$

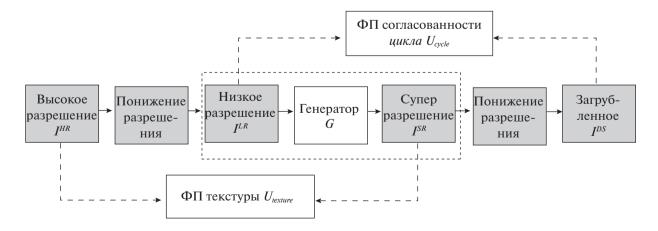


Рис. 4. Схема вычисления ФП

оценивают яркость и контрастность изображения. Константы $c_1 = (k_1 B)^2$ и $c_2 = (k_2 B)^2$ служат для избежания нестабильности, $k_1 = 0.01$, $k_2 = 0.03$ определены экспериментально [37].

Принимая во внимание, что назначением разрабатываемого метода является улучшение качества изображений объектов транспортной инфраструктуры, целесообразно помимо численных характеристик использовать визуальный анализ качества восстановленных изображений. Показатели визуального качества можно сформулировать следующим образом [2]: сохранение спектральных особенностей в изображениях (внешний вид объектов обработанного изображения проверяется на основании внешнего вида тех же самых объектов на оригинальном изображении); резкость границ объектов на восстановленном изображении:

3.2. Сбор и подготовка обучающих данных. Исследование имеет прикладную направленность и зависит от особенностей предметной области. Целевыми являются изображения объектов железнодорожного транспорта: железнодорожное полотно, вагоны, объекты капитального строительства, находящиеся в непосредственной близости к железной дороге, и т.д. Поэтому сбор и подготовка обучающих данных проводятся специальным образом.

В качестве исходных данных выбрано панхроматическое изображение высокого разрешения (линейный размер пикселя 0.3 м, разрядность 16 бит), на котором представлен фрагмент московского региона площадью около 53 кв. км., содержащий около 78 км железнодорожных линий. Использованы данные некоммерческого проекта OpenStreetMap [38]. Для получения разметки железнодорожных объектов на исходной карте применялся веб-инструмент Overpass turbo [39], основанный на данных OpenStreetMap. Далее на исходном изображении выделялись точки — центры фрагментов, которые вырезались и служили изображениями обучающей выборки.

Изображения обучающей выборки имеют размер 512×512 пикселей. Этот размер выбран, исходя из характерных размеров целевых объектов на изображениях. Взято 8000 фрагментов, представляющих железнодорожную инфраструктуру $P\Phi$, и 2000 случайно выбранных посторонних для предотвращения переобучения.

Вычислительные эксперименты проводились на персональном компьютере со следующими характеристиками: графический ускоритель: NVIDIA Tesla K80; центральный процессор: Intel(R) Xeon(R) CPU @ 2.30GHz; оперативная память: 12 Гб.

3.3. Особенности процесса обучения. Приведение исходного изображения в низкое разрешение осуществлялось при помощи уменьшения размера в 4 раза посредством бикубическоей интерполяции.

Для оптимизации использовался алгоритм градиентного спуска Adam [40]. Размер тренировочной выборки составляет 9500 изображений, валидационной — 500 изображений. Количество эпох для полного обучения модели: 100. Время обучения одной эпохи равно около 90 с, время одной эпохи с валидацией и сохранением результатов — около 270 с, полное время обучения — около 8 ч.

3.4. Т е с т и р о в а н и е. Тестирование качества работы модели на основе архитектуры ГСНСР и комбинированной $\Phi\Pi$ осуществляется на наборе изображений, не участвовавших в процессе обучения. Средние значения мер качества PSNR и SSIM, рассчитанные на тестовом наборе, приведены в табл. 1 и 2.

 $\Phi\Pi$ согласованности цикла, примененная в модели ГСНСР, влияет на качество изображения (разд. 2.2). Наилучшее качество в данном эксперименте демонстрирует модель с коэффициентом 10^{-5} , а также максимальные значения PSNR и SSIM и наилучшее визуальное качество.

 $\Phi\Pi$ текстуры значительно влияет на качество изображения в модели ГСНСР (разд. 2.3). По количественным мерам PSNR и SSIM получили значительный прирост при коэффициенте 0.1, но по визуальному восприятию наиболее качественное изображение получили при коэффициенте 0.01.

На основе экспериментов выбраны оптимальные коэффициенты, с которыми дополнительные $\Phi\Pi$ входят в оптимизируемый функционал:

$$U = V(G, D) + 2 \times 10^{-8} U_{TVL} + 10^{-2} U_{texture}.$$
 (3.3)

 $\Phi\Pi$ согласованности цикла в итоге не вошла в оптимальную комбинацию. На рис. 2, θ представлен пример изображения, полученного при обучении с использованием исходной целевой функции V(G,D) (1.2) в сети [23], на рис. 2, ε — результат использования модифицированной $\Phi\Pi$ (3.3).

Заключение. ГСН применены в задаче повышения качества аэрокосмических изображений субметрового разрешения. Качество изображений повышенного разрешения, генерируемых нейросетью, оценивалось количественными мерами (отношением сигнал/шум и мерой структурного сходства), а также визуально. На основании нескольких применявшихся ранее в родственных задачах ФП разработана новая ФП, показывающая лучший результат как при сравнении количественными мерами качества, так и при визуальном анализе. Отработка алгоритмов повышения разрешения проведена на коллекции изображений объектов железнодорожной инфраструктуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Левин Б.А*. Комплексный мониторинг транспортной инфраструктуры // Наука и технологии железных дорог. 2017. № 1. С. 14—21.
- 2. Milanfar P. Super-Resolution Imaging. Boca Raton, USA: CRC Press, 2011.
- 3. Бондур В.Г. Современные подходы к обработке больших потоков гиперспектральной и многоспектральной аэрокосмической информации // Исследование Земли из космоса. 2014. № 1. С. 4—16.
- 4. *Желтов С.Ю.*, *Себряков Г.Г.*, *Татарников И.Б.* Компьютерные технологии создания геопространственных трехмерных сцен, использующих комплексирование географической информации и синтезированных пользовательских данных // Авиакосмическое приборостроение. 2003. № 8. С. 2—10.
- 5. *Мурынин А.Б., Трекин А.Н., Игнатьев В.Ю., Кульченкова В.Г., Ракова К.О.* Метод повышения разрешения космических изображений ригидных объектов // Машинное обучение и анализ данных. 2019. № 5. С. 296—308.
- 6. Визильтер Ю.В., Выголов О.В., Желтов С.Ю., Рубис А.Ю. Комплексирование многоспектральных изображений для систем улучшенного видения на основе методов диффузной морфологии // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 4. С. 103—114.
- 7. *Бочкарева В.Г., Матвеев И.А., Мурынин А.Б., Цурков В.И.* Методы улучшения качества изображений, основанные на пространственном спектральном анализе // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 6. С. 115—123.
- 8. *Гороховский К.Ю., Игнатьев В.Ю., Мурынин А.Б., Ракова К.О.* Поиск оптимальных параметров вероятностного алгоритма повышения пространственного разрешения мультиспектральных спутниковых изображений // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 6. С. 112—124.
- 9. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001.
- 10. Getreuer P. Linear Methods for Image Interpolation // Image Processing On Line. 2011. № 1. P. 238–259.
- 11. *Turkowski K., Gabriel S.* Filters for Common Resampling Tasks // Andrew Glassner: Graphics Gems I. Boston: Acad. Press, 1990. P. 147–165.
- 12. Carrato S., Ramponi G., Marsi S. A Simple Edge-Sensitive Image Interpolation Filter // Proc. IEEE Intern. Conf. Image Processing, Lausanne, Switzerland, 1996. V. 3. P. 711–714.
- 13. *Li X., Orchard M.T.* New Edge-Directed Interpolation // IEEE Trans. Image Processing. 2001. V. 10. P. 1521–1527.
- 14. *Пурков В.И*. Аналитическая модель сохранения кромки при подавлении шумов посредством анизотропной диффузии // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 3. С. 107—110.
- 15. *Su D., Willis P.* Image Interpolation by Pixel Level Data-Dependent Triangulation // Computer Graphics Forum. 2004. V. 23. № 2. P. 189–201.
- 16. *Tappen M.F., Russell B.C., Freeman W.T.* Efficient Graphical Models for Processing Images // Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition. Washington, DC, USA, 2004. P. 673–680.
- 17. *Van E.A.*, *Lindenbaum D.*, *Bacastow T.M.* Spacenet: A Remote Sensing Dataset and Challenge Series // 2018. URL: https://arxiv.org/pdf/1807.01232.pdf
- 18. *Kaggle Inc.* DSTL Satellite Imagery Feature Detection Challenge // URL: https://www.kaggle.com/c/dstl-satellite-imagery-feature-detection/
- 19. Rottensteiner F., Sohn G., Gerke M. et al. ISPRS Semantic Labeling Contest // URL: http://www2.is-prs.org/commissions/comm3/wg4/semantic-labeling.html.
- 20. *Maggiori E., Tarabalka Y., Charpiat G. et al.* Can Semantic Labeling Methods Generalize to any City? The INRIA Aerial Image Labeling Benchmark // Proc. IEEE Intern. Geoscience and Remote Sensing Sympos. Fort Worth, TX, USA, 2017. P. 3226–3229.
- 21. Aeronetlab, Skoltech Open Dataset for Building Height Estimation // URL: https://github.com/aeronet-lab/open-datasets.
- 22. Ledig C., Theis L., Husza F. et al. Photo-realistic Single Image Super-Resolution Using a Generative Adversarial Network // Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition. Honolulu, HI, USA, 2017. P. 105—114.

- 23. Wang X., Yu K., Wu S. et al. ESRGAN: Enhanced Super-Resolution Generative Adversarial Networks // Computer Vision ECCV 2018 Workshops. Lecture Notes in Computer Science. V. 11133 / Eds L. Leal-Taixe, S. Roth. Springer, Cham, 2018.
- 24. *Jiang K., Wang Z., Yi P. et al.* Edge-Enhanced GAN for Remote Sensing Image Superresolution // IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing. 2019. V. 57. № 8. P. 5799–5812.
- 25. *Ma W., Pan Z., Guo J., Lei B.* Super-Resolution of Remote Sensing Images Based on Transferred Generative Adversarial Network // Proc. IEEE Intern. Geoscience and Remote Sensing Sympos. Valencia, Spain, 2018. P. 1148–1151.
- 26. Everingham M., Eslami S.M.A., Van Gool L. et al. The Pascal Visual Object Classes Challenge: A Retrospective // Intern. J. Comput Vis. 2015. V. 111. P. 98–136.
- 27. Goodfellow I., Pouget-Abadie J., Mirza M. et al. Generative Adversarial Networks // Proc. Intern. Conf. Neural Information Processing Systems. Montreal, Canada, 2014. P. 2672–2680.
- 28. *Keys R*. Cubic Convolution Interpolation for Digital Image Processing // IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1981. V. 29. № 6. P. 1153–1160.
- 29. *Aly H.A.*, *Dubois E.* Image Up-sampling Using Total-variation Regularization with a New Observation Model // IEEE Trans. Image Processing. 2005. V. 14. № 10. P. 1647–1659.
- 30. Zhu J., Park T., Isola P., Efros A.A. Unpaired Image-to-Image Translation Using Cycle-Consistent Adversarial Networks // Proc. IEEE Intern. Conf. Computer Vision. Venice, Italy, 2017. P. 2242–2251.
- 31. *Yuan Y., Liu S., Zhang J. et al.* Unsupervised Image Super-resolution Using Cycle-in-cycle Generative Adversarial Networks // Proc. IEEE/CVF Conf. Computer Vision and Pattern Recognition Workshops. Salt Lake City, USA, 2018. P. 814–81409.
- 32. *Gatys L., Ecker A.S., Bethge M.* Texture Synthesis Using Convolutional Neural Networks // Proc. Intern. Conf. Neural Information Processing Systems. Montreal, Canada, 2015. V. 1. P. 262–270.
- 33. *Gatys L., Ecker A.S., Bethge M.* Image Style Transfer Using Convolutional Neural Networks // Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition. Las Vegas, USA, 2016. P. 2414–2423.
- 34. *Sajjadi M.S., Scholkopf B., Hirsc M.* Enhancenet: Single Image Super-resolution through Automated Texture Synthesis // Proc. Intern. Conf. Computer Vision. Venice, Italy, 2017. P. 4501—4510.
- 35. Simonyan K., Zisserman A. Very Deep Convolutional Networks for Large-Scale Image Recognition // 2014. URL: https://arxiv.org/abs/1409.1556
- 36. *Dalvadi J.* A Survey on Techniques of Image Super Resolution // Intern. J Innovative Research in Computer and Communication Engineering. 2016. V. 4. № 3. P. 3084–3089.
- 37. Wang Z., Bovik A.C., Sheikh H.R., Simoncelli E.P. Image Quality Assessment: from Error Visibility to Structural Similarity // IEEE Trans. Image Processing. 2004. V. 13. № 4. P. 600–612.
- 38. OpenStreetMap community https://www.openstreetmap.org/about/ Дата обращения 2020.08.30.
- 39. Overpass turbo http://overpass-turbo.eu/ Дата обращения 2020.08.30.
- 40. Kingma D.P., Ba J. Adam: A Method for Stochastic Optimization // Proc. Intern. Conf. Learning Representations. San Diego, CA, USA, 2015.

____ НАВИГАЦИОННЫЕ ___ СИСТЕМЫ

УДК 531.383

МАЯТНИКОВЫЙ АКСЕЛЕРОМЕТР С ЦИФРОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ И НОВЫМИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ

© 2021 г. В. И. Гребенников^{а,*}, Е. А. Депутатова^{а,**}, Д. М. Калихман^а, Л. Я. Калихман^а, В. В. Скоробогатов^а

^а ПО "Корпус" (Филиал ФГУП "НПЦАП им. акад. Н.А. Пилюгина"), Capamoв, Россия
*e-mail: lidkalihman@yandex.ru
**e-mail: deputatova@bk.ru
Поступила в редакцию 19.11.2018 г.
После доработки 21.09.2020 г.
Принята к публикации 30.11.2020 г.

Рассматривается кварцевый маятниковый акселерометр компенсационного типа, особенностью которого является применение в контуре управления цифрового усилителя обратной связи (для реализации дискретного регулятора и алгоритмической компенсации погрешностей от разбалансировки маятника и температурных зависимостей смещения нуля и масштабного коэффициента). Проблема связана с построением цифровой системы управления рассматриваемого акселерометра, обеспечивающего высокоточное измерение проекции на ось чувствительности действующего кажущегося ускорения объекта, на котором установлен акселерометр. Дается решение данной проблемы, позволяющее находить алгоритмы цифрового управления при использовании различных методов синтеза дискретных регуляторов контура управления. Проводится анализ полученных решений во временной и частотной областях, подтверждающий высокое качество регулирования. Приводятся результаты экспериментальных исследований.

DOI: 10.31857/S0002338821020062

Введение. Современным направлением развития инерциальных систем управления подвижных объектов является технология БИНС – бесплатформенных инерциальных навигационных систем. Блоки чувствительных элементов БИНС, как правило, содержат измерители угловой скорости (гироскопы) и измерители кажущегося ускорения (акселерометры) [1]. В последнее время кварцевые маятниковые акселерометры (КМА) компенсационного типа нашли широкое применение в системах управления летательными аппаратами и космическими объектами. К зарубежным производителям указанных приборов относятся фирмы "Honeywell" (США), "Safran" (Франция), "InnaLabs" (Ирландия). К акселерометрам отечественных фирм относятся прибор АК-15 разработки ПАО "Московский институт электромеханики и автоматики", изготавливаемый заводом "Утес" (г. Ульяновск), прибор КХ67-041 разработки и изготовления производственного объединения "Корпус" (г. Саратов), а также прибор ВА-3 разработки ООО "Научнопроизводственный комплекс "Электрооптика" (г. Москва). Между приборами космической и авиационной направленности есть ряд отличий. Например, к измерителям в авиации предъявляются более жесткие требования по температурному диапазону от -65 до +85°C, так как они, как правило, располагаются в "нежилом" отсеке самолета и подвержены воздействию температур в достаточно широком диапазоне: по широтам — от пустынь до крайнего севера, а по высотам от земной поверхности до стратосферы, тогда как измерители, используемые в космонавтике, находятся, как правило, в "жилом" отсеке, отсюда и диапазон температур колеблется от 0 до +40°C. Кроме того, к приборам космической и авиационной направленности предъявляются высокие требования по временной стабильности выходных параметров, для космоса вследствие долгосрочного нахождения на орбите (сроки до года), для авиации это связано с тем, что, хотя полет самолета продолжается не более суток, однако длительная стоянка в аэропорту не позволяет производить калибровку измерительных приборов, установленных на его борту. Эти и многие другие особенности предопределяют некоторую разницу в технических требованиях к приборам в авиации и космонавтике, что, в конечном счете, приводит к ряду отличий в подходах к их разработке. Так, например, в приборах космического применения при компенсации температурных погрешностей не нужно учитывать явление гистерезиса масштабного коэффициента и смещения нулевого сигнала, так как в диапазоне температур от 0 до $+40^{\circ}$ C он особо не проявляется, тогда как в авиационном температурном диапазоне от -65 до $+85^{\circ}$ C учет этого явления обязателен.

Важнейшей технической характеристикой акселерометра является погрешность масштабного коэффициента (линейность выходной характеристики), определяющая класс измерителя линейных ускорений. В авиации и пилотируемой космонавтике, как правило, диапазон измеряемых кажушихся ускорений не превышает ± 10 g вследствие практической невозможности выдерживания пилотом больших перегрузок без существенного вреда для здоровья. В беспилотных системах и ракетах боевого применения, особенно в системах, совершающих маневры при достижении цели, возможны и большие диапазоны измеряемых ускорений. Для акселерометров с широким диапазоном измерения от ± 20 до ± 50 g выявлена одна специфическая погрешность, приводящая к нелинейности данной характеристики, названная разбалансировкой маятника [2]. Разбалансировка возникает вследствие несовпаления точек приложения к маятнику трех сил: инершионной силы, пропоршиональной измеряемому ускорению, силы Ампера, реализуемой магнитоэлектрическим датчиком момента, и газодинамической силы, возникающей при перемещении маятника в герметичном корпусе, заполненном инертным газом. Взаимное смещение точек приложения этих трех сил возникает по конструкторским и технологическим причинам и приводит к возрастанию погрешности масштабного коэффициента на ускорениях свыше ± 20 g до уровня 0.8%, т.е. более чем в 80 раз в сравнении с той же погрешностью на ускорениях до ± 10 g (до уровня 0.01%). В работе [2] предложен конструктивный способ решения данной задачи, однако появление цифрового усилителя обратной связи в контуре управления акселерометра позволяет рассмотреть алгоритмический способ компенсации указанной погрешности.

Для решения задач аппаратного обеспечения в современных системах управления применяют, как правило, аналого-цифровое преобразование (АЦП) сигналов датчиков перемещений; цифроаналоговое, частотно-импульсное или широтно-импульсное формирование сигнала цепи обратной связи [3], когда управляющий сигнал в определенной форме поступает на исполнительный элемент измерителя. Теоретически можно применять любой из указанных способов для формирования управляющего сигнала в цифровом усилителе обратной связи, однако в [4] было показано, что наиболее перспективным является построение цифрового усилителя с широтно-импульсным модулятором (ШИМ).

1. Постановка задачи. В предлагаемой статье рассматривается несколько задач, связанных с построением компенсационного контура управления чувствительным элементом акселерометра и расчетом параметров его функциональных элементов, с разработкой алгоритма работы дискретного регулятора и алгоритмов компенсации погрешностей, обусловленных температурными возмущениями и разбалансировкой маятника. Задача синтеза алгоритма цифрового управления включает выбор метода синтеза, обеспечивающего наилучшее качество регулирования по результатам оценки запасов устойчивости, частотных характеристик и переходных процессов, формирование дискретного управляющего полинома в конечно-разностной форме, прошиваемого в микроконтроллер в цифровом усилителе обратной связи, а также разработку и реализацию алгоритмов повышения точности прибора.

Модернизация и совершенствование кварцевых маятниковых акселерометров компенсационного типа с цифровым управлением в контуре обратной связи является актуальной научной и технической проблемой, решение которой позволяет создать измерители кажущегося ускорения с новыми функциональными возможностями.

2. Функциональный состав и принцип работы маятникового акселерометра с цифровым управлением. Функционально-кинематическая схема кварцевого маятникового акселерометра (КМА) компенсационного типа с цифровым управлением изображена на рис. 1.

На рис. 1 введены следующие обозначения: ЧЭ — чувствительный элемент; q — проекция на ось чувствительности акселерометра вектора действующего кажущегося ускорения; t° С — значения температуры; ДТ — датчик температуры; ДУ — датчик угла; ДМ — датчик момента; Общ. — общая точка; C_1 , C_2 — переменные емкости ДУ; S, N — обозначения полюсов постоянных магнитов ДМ; ЦУОС — цифровой усилитель обратной связи; У — усилитель сигнала ДТ; ПУ — предварительный усилитель сигналов ДУ; ИОН — источник опорных напряжений; ВГ — внешний генератор; МК — микроконтроллер; ПС — преобразователь сигнала; ПТ — переключатель тока; $U_{\text{ДТ}}^0$, $U_{\text{ДТ}}$ — напряжения ДТ до усиления и после; $U_{\text{ДУ}1}$, $U_{\text{ДУ}2}$, $U_{\text{ПУ}}$ — напряжения ДУ до усиления и после; $I_{\text{ДМ}}$ — ток датчика момента (ток цепи обратной связи); $U_{\text{оп}}$ — опорное напряжение питания

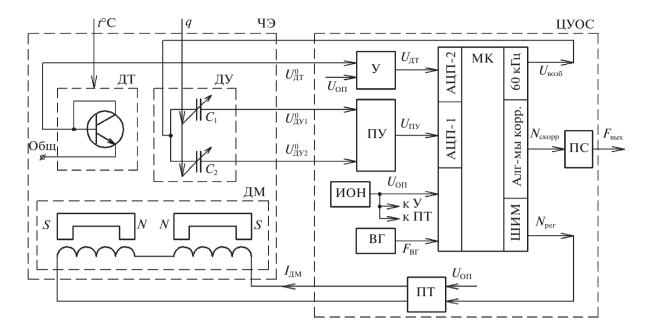


Рис. 1. Функционально-кинематическая схема КМА с цифровым управлением

МК, У и ПТ; $F_{\rm B\Gamma}$ — тактовая частота работы МК, формируемая ВГ; $U_{\rm возб}$ — напряжение возбуждения ДУ; $N_{\rm per}$ — сигнал с выхода регулятора в МК; $N_{\rm скорр}$ — алгоритмически скорректированный в МК выходной сигнал; $F_{\rm вых}$ — выходная цифровая информация акселерометра.

В соответствии с рис. 1 КМА состоит из ЧЭ (включающего маятниковую пластину (на рис. 1 не показана), ДУ, ДМ и ДТ) и ЦУОС, построенного на базе МК и содержащего усилители У и ПУ, а также ПТ для формирования направления протекания и величины тока $I_{\rm ДМ}$ в зависимости от знака и величины действующего ускорения q и вспомогательные элементы для работы функциональной электроники — это ИОН для выработки стабилизированных напряжений и ВГ для формирования тактовой частоты работы МК.

KMA с ЦУОС работает следующим образом. Под действием ускорения q формируется входной момент, который определяется моментом силы инерции. Он отклоняет маятник от нулевого положения, угол отклонения маятника измеряется емкостным ДУ, построенным по обращенной мостовой схеме. На выходе ДУ формируются напряжения рассогласования мостовой схемы $U_{\Pi Y 1}$ и $U_{\Pi Y 2}$, поступающие на вход ΠY , который входит в состав ЦУОС. Выходное напряжение $\Pi \dot{\mathbf{y}} \ U_{\Pi \mathbf{y}} = (U_{\Pi \mathbf{y}1} - U_{\Pi \mathbf{y}2}) K_{\Pi \mathbf{y}} = U_{\Pi \mathbf{y}} \ K_{\Pi \mathbf{y}}$, где $K_{\Pi \mathbf{y}}$ – коэффициент усиления $\Pi \dot{\mathbf{y}}$, в МК ЦУОС преобразуется в широтно-модулированные импульсы напряжения, управляющие переключателем тока цепи обратной связи $I_{\text{лм}}$, который поступает на исполнительный элемент — магнитоэлектрический датчик момента. Датчик момента в свою очередь формирует уравновешивающий момент и возвращает маятник в исходное нулевое положение. На базе МК в ЦУОС реализован дискретный регулятор, обеспечивающий требуемые динамические характеристики и запасы устойчивости. С выхода МК снимается также скорректированная в соответствии с алгоритмами повышения точности акселерометра выходная цифровая информация $F_{\text{вых}}$, обусловленная протекающим через нагрузку током $I_{\text{ДМ}}$ и пропорциональная действующему ускорению q. В качестве $F_{\text{вых}}$ можно сформировать коды в формате RS-232, RS-485, код Манчестер, унитарный код или любой другой в зависимости от требований, предъявляемых к объекту, на котором будет устанавливаться акселерометр. При технологической отладке макетного образца акселерометра с ЦУОС достаточно снимать выходной сигнал в формате RS-232.

Для формирования алгоритма температурной коррекции используются сигналы ДТ, расположенного внутри корпуса ЧЭ и выполненного на биполярном транзисторе, а для формирования алгоритма компенсации разбалансировки маятника — сами показания на выходе регулятора в MK, пропорциональные действующему ускорению q.

Высокоточные показания КМА обеспечиваются применением компенсационных принципов, главным образом принципом обратной связи при магнитоэлектрическом способе

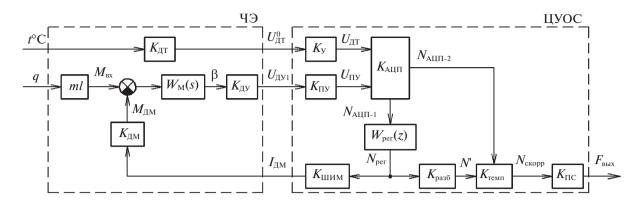


Рис. 2. Структурная схема системы управления КМА

уравновешивания маятника, а также использованием наиболее совершенного упругого материала в подвесе маятника — кварцевого стекла [5].

3. Математическая модель акселерометра и аппаратное обеспечение для его реализации. Структурная схема КМА с ЦУОС, составленная в соответствии с функционально-кинематической схемой (рис. 1), но без учета ПТ, коэффициент передачи которого математически закладывается в коэффициент передачи $K_{\text{ШИМ}}$, и без вспомогательных элементов, не влияющих на систему управления "КМА—ЦУОС", а именно без ИОН и ВГ, приведена на рис. 2.

На рис. 2 помимо введенных ранее (на рис. 1) приняты следующие обозначения: ml — маятниковость; $M_{\rm BX}$ — входной момент; $M_{\rm ДM}$ — момент, формируемый ДМ; $W_{\rm M}(s)$ — передаточная функция маятника; s — символ преобразования Лапласа, s = α + $j\omega$ (α — действительная часть s, j — мнимая единица, ω — частота входного сигнала); β — угол отклонения маятника; $K_{\rm ДT}$, $K_{\rm ДY}$, $K_{\rm ДM}$, $K_{\rm Y}$, $K_{\rm ПУ}$, $K_{\rm ДII}$, $K_{\rm MIMM}$, $K_{\rm IIC}$ — коэффициенты передачи соответствующих элементов; $W_{\rm per}(z)$ — z-преобразование передаточной функции регулятора; $N_{\rm AUII-1}$, $N_{\rm AUII-2}$ — сигналы на выходе АЦП, пропорциональные действующему ускорению и температуре соответственно; $K_{\rm pa36}$, $K_{\rm темп}$ — поправочные коэффициенты (функционалы) выходного сигнала при разбалансировке маятника и воздействии температуры.

Передаточная функция объекта управления — Ч Θ акселерометра в соответствии с рис. 2 имеет вид

$$W_{\text{q},\text{q}}(s) = W_{\text{M}}(s)K_{\text{J},\text{Y}}K_{\text{J},\text{M}},$$
 (3.1)

в которой передаточная функция маятника принимается такой же, как в работе [6]:

$$W_{\rm M}(s) = 1/(J_{\beta}s^2 + n_{\beta}s + C_{\rm T}), \tag{3.2}$$

где J_{β} — момент инерции; n_{β} — коэффициент демпфирования; $C_{\scriptscriptstyle \rm T}$ — угловая жесткость торсиона подвеса маятника.

Параметры КМА с ЦУОС разработки ПО "Корпус" [6] без коэффициентов цифрового регулятора, подлежащих определению, сведены в табл. 1, где ед.ц.к. — условное обозначение количества единиц цифрового кода $n_{\text{ц.к.}}$, используемых как размерность числовых значений при расчетах внутри микроконтроллера, т.е. все математические операции от АЦП до ШИМ выполняются в условно названных нами ед.ц.к.

С учетом передаточной функции (3.2) и численных значений параметров (табл. 1) передаточная функция (3.1) примет вид

$$W_{\text{Y}9}(s) = \frac{182 \times 150}{1.2 \times 10^{-4} s^2 + 0.05s + 1.6} = \frac{1.71 \times 10^4}{(T_{1\text{Y}9}s + 1)(T_{2\text{Y}9}s + 1)},$$
(3.3)

откуда частоты, на которых идет сопряжение асимптотических логарифмических амплитудных частотных характеристик (ЛАЧХ), при постоянных времени $T_{149} \approx 0.2863 \times 10^{-1}\,\mathrm{c},~T_{249} \approx 0.262 \times 10^{-2}\,\mathrm{c}$ определяются как

$$\omega_{149} = 1/(T_{149}) \approx 34.93 \ 1/c, \quad \omega_{249} = 1/(T_{249}) \approx 381.7 \ 1/c.$$

Параметр	Числовое значение, единица измерения	Параметр	Числовое значение, единица измерения
\overline{q}	(1-50) g	$K_{ m ДM}$	150 г ⋅ см/А
t °C	(−65 − +85)°C	$\mathit{K}_{ extsf{ДT}}$	$1.15 \times 10^{-3} \text{В/град}$
ml	0.15 г ⋅ см/g	$K_{\mathcal{Y}}$	16.97
J_{eta}	$1.2 \times 10^{-4} \mathrm{r\cdot cm\cdot c^2}$	$K_{\Pi ext{y}}$	2.93
n_{eta}	0.05 г · см · с	$K_{ m AU\Pi}$	1638.4 ед.ц.к./В
$C_{\scriptscriptstyle m T}$	1.6 г·см/рад	$K_{ m IIIIM}$	1×10^{-5} А/ед.ц.к.
$\mathit{K}_{\mathrm{J\!\!\!/}\mathrm{y}}$	182 В/рад	$K_{\Pi ext{C}}$	1 (для RS-232)

Таблица 1. Параметры КМА с ЦУОС

АЦП представляет собой ключ, замыкающийся через промежутки времени $T_{\text{o.c}}$ (период дискретности работы цепи обратной связи) на очень малое время $\delta \ll T_{\text{o.c}}$ и превращающий выходное напряжение ПУ из непрерывной функции в решетчатую, последовательность цифровых значений которой поступает на вход вычислителя МК.

В соответствии с рис. 2 алгоритм работы ЦУОС можно записать через дискретную передаточную функцию в следующем виде:

$$W_{\text{HYOC}}(z) = I_{\text{JM}}(z)/U_{\text{JY}}(z) = K_{\text{HY}}K_{\text{AHH}}W_{\text{per}}(z)K_{\text{HIMM}},$$
 (3.4)

представляющую собой *z*-преобразование разностного уравнения [7]:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i I_{\text{ДM}}[(n-i)T_{\text{o.c}}] = \sum_{j=0}^{m} b_j U_{\text{ДV}}[(n-j)T_{\text{o.c}}], \quad n = 1, 2, ..., \infty, \quad m \ge k.$$
(3.5)

В соответствии с рис. 2 и выражением (3.4) алгоритм работы МК запишется как

$$W_{\text{per}}(z) = N_{\text{per}}(z)/N_{\text{AU}\Pi-1}(z) = W_{\text{UVOC}}(z)/(K_{\Pi Y}K_{\text{AU}\Pi}K_{\text{ШИМ}}) = 20.8311W_{\text{UVOC}}(z). \tag{3.6}$$

Для вычислений в соответствии с (3.5) на каждом из отрезков времени $nT_{\rm o.c}$ МК затрачивает время τ , внося тем самым запаздывание. Современные МК обладают быстродействием, обеспечивающим обработку цифровых алгоритмов с частотой десятки килогерц. Если выбрать период дискретности достаточно малым, то все постоянные времени $W_{\rm ч9}(s)$ будут расположены в области низких частот. В этом случае можно не учитывать запаздывание (время τ), затрачиваемое на вычисления в соответствии с (3.5).

Акселерометр с цифровой обратной связью проектируется так, чтобы полоса пропускания составляла не менее 500 Гц, т.е. частота среза разомкнутой системы $\omega_{\rm cp} \approx 500 \cdot 2\pi \approx 3.14 \times 10^3 \, {\rm c}^{-1}$. В соответствии с требованиями теоремы Котельникова—Шеннона период дискретности работы цифровой системы должен отвечать требованию $T_{\rm o.c} < 2/\omega_{\rm cp} \approx 0.64 \times 10^{-3} \, {\rm c}$. Если выбрать с запасом $T_{\rm o.c} = 0.1 \times 10^{-3} \, {\rm c}$, то частота работы обратной связи определится как $f_{\rm o.c} = 1/T_{\rm o.c} = 1/(0.1 \times 10^{-3} \, {\rm c}) = 10 \, {\rm kFu}$.

Покажем, как рассчитываются коэффициенты ЦУОС, сведенные в табл. 1, при выборе его аппаратного обеспечения.

Коэффициент передачи 12-разрядного АЦП, встроенного в МК 1986ВЕ93У фирмы "ПКК "Миландр" (г. Зеленоград), имеет вид

$$K_{\rm AU\Pi} = N_{\rm AU\Pi}/U_{\rm on} = 2^{12}$$
ед.ц.к./2.5 В = 4096 ед.ц.к./2.5 В = 1638.4 ед.ц.к./В,

где $N_{\rm AII\Pi}$ — количество дискретных значений преобразования АЦП.

Коэффициент передачи ШИМ

$$K_{\text{III} \text{IIM}} = I_{\text{JM}}^{\text{max}} / N_{\text{III} \text{IIM}},$$

где $I_{\rm ДM}^{\rm max}$ — максимально допустимый ток, протекающий через катушки ДМ; $N_{\rm ШИM}$ — количество минимальных интервалов в периоде ШИМ, соответствующих одной ед.ц.к. $n_{\rm ll.k}$:

$$N_{\text{шим}} = (f_{\text{MK}}/f_{\text{o.c}}) n_{\text{ц.к.}} = (80 \times 10^6 \text{ Гц/}10 \times 10^3 \text{ Гц}) \times 1 \text{ед.ц.к.} = 8 \times 10^3 \text{ед.ц.к.},$$

где $f_{\rm MK}$ — частота работы МК, $f_{\rm MK}$ = 80 МГц, тогда

$$K_{\text{иим}} = 80 \times 10^{-3} \text{A} / (8 \times 10^{3} \text{ед. ц. к.}) = 1 \times 10^{-5} \text{ A/ед. ц. к.}$$

Коэффициент передачи усилителя У, построенного по инвертирующей схеме на базе операционного усилителя (ОУ) 140УД17АН1ВК с входным резистором $R_{y1} = 8.25$ кОм и резистором в обратной связи ОУ $R_{v2} = 140$ кОм, вычисляется следующим образом:

$$K_{\rm y} = R_{\rm v2}/R_{\rm v1} = 140 \ {\rm кОм/8.25 \ kOm} \approx 16.97.$$

Коэффициент передачи ДТ можно найти из выражения

$$K_{\rm JIT} = K_{\rm offil}/(K_{\rm Y}K_{\rm AHII}),$$

где $K_{\text{общ}}$ — общий коэффициент передачи У, ДТ и АЦП, получаемый экспериментальным путем при испытаниях акселерометра в диапазоне температур, например, от 0 до +50 °C:

$$K_{\text{общ}} = (N_{50} - N_0)/(T_{50} - T_0) = (2990 \text{ ед.ц.к.} - 1380 \text{ ед.ц.к.})/(50^{\circ}\text{C} - 0^{\circ}\text{C}) \approx 32 \text{ ед.ц.к.}/\text{град,}$$

где N_{50} , N_0 — измеренные значения на выходе АЦП при задании температуры $T_{50} = 50^{\circ}\mathrm{C}$ и $T_0 = 0^{\circ}\mathrm{C}$ соответственно, тогда

$$K_{\rm ЛT} = (32\ {\rm eд. u. \kappa./rpag})/(16.97 \times 1638.4\ {\rm eд. u. \kappa./B}) \approx 1.15 \times 10^{-3}\ {\rm B/rpag.}$$

- **4.** Синтез дискретного регулятора акселерометра. За последние годы в теории автоматического управления разработан целый комплекс методов синтеза дискретных регуляторов, среди которых можно отметить такие, как традиционный метод (с построением желаемых частотных характеристик), метод прямой дискретизации, метод линейно-квадратической дискретной оптимизации (LQD-оптимизации), метод H_{∞} , метод построения гибридного, нейросетевого регуляторов и др. Рассмотрим несколько методов синтеза дискретного регулятора акселерометра для проведения сравнительного анализа характеристик замкнутой системы управления "КМА—ЦУОС".
- 4.1. Традиционный метод (с построением желаемых частотных характер актер истик). Согласно этому методу, необходимо выполнить переход от непрерывной передаточной функции $W_{\rm qg}(s)$ к дискретной частотной характеристике $W_{\rm qg}(j\lambda)$, где λ псевдочастота [7]. В работе [7] предложен способ перехода, основанный на формировании $W_{\rm qg}(j\lambda)$ отдельно для областей низких и высоких частот. При этом низкими считаются частоты $\omega_{\rm H} < 2/T_{\rm o.c.}$, высокими $\omega_{\rm g} \ge 2/T_{\rm o.c.}$, где $2/T_{\rm o.c.} \approx 20 \times 10^3 \, {\rm c}^{-1}$. Поскольку частоты $\omega_{\rm 1qg}$ и $\omega_{\rm 2qg}$ намного меньше $2/T_{\rm o.c.}$, то постоянные времени передаточной функции (3.3) находятся в области низких частот, в которой частоты ω и λ практически совпадают.

Поскольку период дискретности $T_{\text{o.c}}$ выбран с большим запасом и было показано, что запаздыванием можно пренебречь, тогда переход от $W_{\text{ЧЭ}}(s)$ к $W_{\text{ЧЭ}}(j\lambda)$ будет заключаться в замене символа s на $j\lambda$ и умножении числителя на $(1-j\lambda T_{\text{o.c}}/2)$ [7]. При переходе к дискретной частотной характеристике при заданном значении $T_{\text{o.c}}$ получим

$$W_{\text{q}_{3}}(j\lambda) = \frac{1.71 \times 10^{4} (1 - 0.5 \times 10^{-4} j\lambda)}{(0.2863 \times 10^{-1} j\lambda + 1)(0.262 \times 10^{-2} j\lambda + 1)}.$$
(4.1)

По характеристике (4.1) строится ЛАЧХ располагаемого объекта управления, приведенная на рис. 3 (кривая I).

На рис. 3 также строится желаемая ЛАЧХ (кривая 2) разомкнутой скорректированной системы "КМА—ЦУОС", при которой обеспечиваются астатизм системы, запасы устойчивости по амплитуде и фазе, а также требуемые динамические характеристики.

По разности кривых 1 и 2 (рис. 3) записывается дискретная частотная характеристика ЦУОС:

$$W_{\text{IIVOC}}(j\lambda) = \frac{6.016(0.33 \times 10^{-2} j\lambda + 1)(0.66 \times 10^{-3} j\lambda + 1)}{j\lambda \cdot (0.66 \times 10^{-4} j\lambda + 1)}.$$
(4.2)

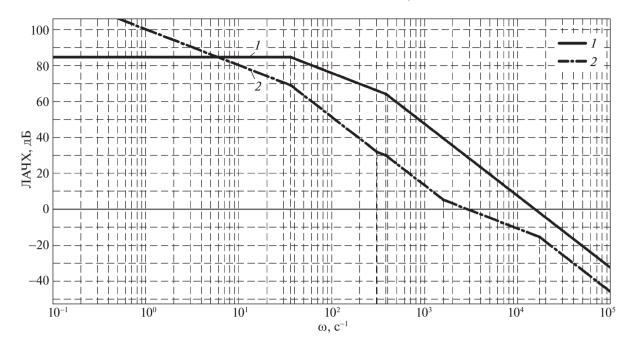


Рис. 3. ЛАЧХ: 1- располагаемого объекта управления; 2- разомкнутой скорректированной системы "КМА–ЦУОС" (желаемые характеристики)

С помощью подстановки в (4.2)

$$j\lambda = \frac{2}{T_{0,c}} \frac{z-1}{z+1} \tag{4.3}$$

находится дискретная передаточная функция ЦУОС:

$$W_{\text{IIYOC}}(z) = \frac{0.1234z^2 - 0.2257z + 0.1028}{z^2 - 1.138z + 0.1379},$$

откуда дискретная передаточная функция регулятора с учетом (3.6) примет вид

$$W_{\text{per}}(z) = \frac{2.57z^2 - 4.701z + 2.142}{z^2 - 1.138z + 0.1379}.$$
(4.4)

4.2. Метод прямой дискретизации. Согласно работе [6], аналоговый усилитель обратной связи (АУОС) КМА имеет передаточную функцию:

$$W_{\text{AYOC}}(s) = I_{\text{ДM}}(s) / U_{\text{ДY}}(s) = \frac{0.2(2.05 \times 10^{-6} s + 1)(0.6 \times 10^{-4} s + 1)(3.3 \times 10^{-4} s + 1)(8.8 \times 10^{-2} s + 1)}{s(3.27 \times 10^{-5} s + 1)(3.95 \times 10^{-5} s + 1)(2.34 \times 10^{-9} s^2 + 8 \times 10^{-5} s + 1)}.$$
(4.5)

В связи с тем, что некоторые постоянные времени регулятора (4.5) более чем на порядок меньше величины, обратной требуемой полосы пропускания ($1/\omega_{cp} \approx 3.2 \times 10^{-4}$ с) системы "KMA–AУОС", упростим передаточную функцию (4.5) и запишем ее в следующем эквивалентном (по результатам математического моделирования) виде:

$$W_{\text{AYOC}}(s) = \frac{0.2(0.6 \times 10^{-4} s + 1)(3.3 \times 10^{-4} s + 1)(8.8 \times 10^{-2} s + 1)}{s(2.34 \times 10^{-9} s^2 + 8 \times 10^{-5} s + 1)}.$$

Метод прямой дискретизации заключается в переходе от оператора Лапласа s к дискретному оператору z аналогично выражению (4.3), что наиболее просто выполнить с помощью программного комплекса Matlab (функция c2d(...) [8]). Таким образом, передаточная функция дискретно-

го регулятора при заданном значении $T_{\rm o.c.}$, реализуемого на базе МК и с учетом введения АЦП, ШИМ и нового ПУ с соответствующими коэффициентами передачи (табл. 1), примет вид

$$W_{\text{per}}(z) = \frac{2.954z^3 - 5.717z^2 + 2.903z - 0.1388}{z^3 - 1.144z^2 + 0.1764z - 0.03275}.$$
(4.6)

4.3. Метод LQD-оптимизации. Методика построения дискретного регулятора указанным методом рассматривается в [9]. Полное название метода звучит как метод линейно-квадратической дискретной оптимизации, цифровой фильтрации и теории наблюдающих устройств минимальной размерности типа Луенбергера.

Метол, основанный на процедурах LOD-оптимизации и цифровой фильтрации дискретных систем [9-11], позволяет учесть запаздывание по управлению и требование астатизма. Необходимость введения астатизма связана с тем, что для обеспечения малого угла отклонения маятника акселерометра, что является одним из основных требований при разработке подобных приборов [12], и, в частности, для устранения статической ошибки по этому углу при постоянном измеряемом ускорении регулятор контура акселерометра должен быть астатическим. Основными этапами этого метода являются: составление математической модели объекта управления контура КМА в форме лифференциальных уравнений для выбранных переменных состояния, переход к дискретной модели с учетом принятой частоты дискретизации и запаздывания по управлению на один такт и ее расширение за счет модели запаздывания и искусственно вводимого дискретного интегратора для реализации требования астатизма. Дальнейшее решение связано с построением регулятора по измеряемому выходу на базе наблюдателя Луенбергера минимальной размерности [13] и применением стандартных процедур дискретной оптимизации, основанных на решении соответствующих уравнений Риккати. При этом исходными данными этих процедур. помимо матриц расширенного объекта, являются также некоторые весовые матрицы Q и Ψ для уравнений Риккати и скалярный коэффициент передачи α вводимого дискретного интегратора для обеспечения астатизма системы, которые выбираются так, чтобы обеспечить необходимое качество регулирования.

Объект управления КМА, согласно структурной схеме, приведенной на рис. 2, описывается передаточной функцией (3.3) и включает датчик момента, подвижный элемент акселерометра (маятник) и датчик угла. Принимая в качестве переменных состояния $y = U_{\rm ДУ}$ — измеряемый выход и ω_{β} — угловую скорость маятника ($\omega_{\beta} = \dot{\beta}$), можно получить модель соответствующего объекта, которая без учета внешнего воздействия q будет представляться следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = K_{\Pi Y} \omega_{\beta}(t); \\ \dot{\omega}_{\beta}(t) = -J_{\beta}^{-1} C_{T} K_{\Pi Y}^{-1} y(t) - J_{\beta}^{-1} n_{\beta} \omega_{\beta}(t) - J_{\beta}^{-1} K_{\Pi M} u(t), \end{cases}$$

где $u = I_{\text{ЛМ}}$ — вход объекта управления.

Если ввести вектор состояний $x = colon\{y, \omega_{\beta}\}$, то можно получить следующее векторно-матричное описание:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t), y(t) = C_0 x(t),$$
(4.7)

где A_0 , B_0 , C_0 — числовые матрицы:

$$A_{0} = \begin{bmatrix} 0 & K_{\Pi Y} \\ -J_{\beta}^{-1} C_{T} K_{\Pi Y}^{-1} & -J_{\beta}^{-1} n_{\beta} \end{bmatrix}, \quad B_{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -J_{\beta}^{-1} K_{\Pi M} \end{bmatrix}, \quad C_{0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
 (4.8)

Пусть $y(i) = y(t) \mid_{iTo.c}$ — оцифрованное с помощью АЦП в момент $t = iT_{o.c}$ значение измеряемого выхода объекта; i = 0, 1, 2, ... — дискретное время (номер такта). И пусть u(i) — значение управления, вычисляемое в МК на i-м такте и прикладываемое к объекту (с помощью ШИМ) по истечении этого такта. Требуется определить дискретную передаточную функцию цифрового регулятора $W_{\rm per}(z)$ так, чтобы обеспечить устойчивость и необходимое качество регулирования контура КМА как автономной системы.

Составим дискретную модель непрерывного объекта (4.7). С учетом запаздывания по управлению на один такт такая модель будет описываться уравнениями:

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i-1),$$

 $y(i) = Cx(i),$ (4.9)

где A, B, C — числовые матрицы, определяемые по известным формулам перехода [10, 11]:

$$A = e^{A_0 T_{\text{o.c.}}}, \quad B = \int_0^{T_{\text{o.c.}}} e^{A_0 T_{\text{o.c.}}} B_0 d\lambda, \quad C = C_0.$$

Для учета запаздывания по управлению введем вспомогательную переменную $x_{\tau}(i) = u(i-1)$, а для учета требования астатизма дополним объект (4.9) дискретным интегратором $\mu(i+1) = \mu(i) + \alpha T_{o.c} y(i)$ с некоторым коэффициентом передачи α . Формально это приводит к тому, что к модели объекта (4.9) добавляются уравнения:

$$x_t(i+1) = u(i), \quad m(i+1) = m(i) + aT_{o,c}y(i),$$
 (4.10)

которые затем, после решения задачи синтеза, должны быть отнесены к регулятору. Последнее, в частности, означает, что новые переменные x_{τ} и μ , определенные как управление из предыдущего такта и выход интегратора, доступны для использования в алгоритме управления, в силу чего они могут быть отнесены к дополнительным измеряемым переменным. Таким образом, если ввести векторы для расширенного состояния $\bar{x} = colon\{\mu, y, x_{\tau}\}$ и новых измеряемых выходов $\bar{y} = colon\{\mu, y, x_{\tau}\}$, то эквивалентное описание дискретной модели объекта примет вид

$$\overline{x}(i+1) = \overline{A}\overline{x}(i) + \overline{B}u(i),$$

$$\overline{y}(i) = \overline{C}\overline{x}(i),$$
(4.11)

где $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ — блочные матрицы следующей структуры:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha T_{\text{o.c}} C & 0 \\ 0_{2\times 1} & A & B \\ 0 & 0_{1\times 2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0_{2\times 1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1\times 2} & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0_{1\times 2} & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Здесь и далее $0_{\alpha \times \beta}$ обозначает нулевой блок соответствующих размеров.

Для решения задачи будем использовать подход, основанный на объединении регулятора по состоянию и наблюдающего устройства. Причем в качестве последнего целесообразно использовать наблюдатель Луенбергера минимальной размерности, который позволяет получить динамический регулятор по измеряемому выходу наименьшего (в рамках данного подхода) порядка. Тогда полные уравнения регулятора будут иметь вид [9]

$$\overline{\xi}(i+1) = \overline{W}\,\overline{\xi}(i) + \overline{K}\,\overline{y}(i) + \overline{TB}u(i),
 u(i) = \overline{F}\hat{x}(i) = \overline{F}(\overline{V}\,\overline{\xi}(i) + \overline{U}\overline{y}(i)),$$
(4.13)

где $\bar{\xi}$ — 3-мерный вектор состояний наблюдателя, \hat{x} — вектор оценок переменных состояния объекта (4.11), используемых в регуляторе состояния с матрицей \bar{F} . Остальные матрицы ($\bar{W}, \bar{K}, \bar{T}, \bar{V}, \bar{U}$), входящие в (4.13), должны удовлетворять известным соотношениям [9, 10]:

$$\overline{T}\,\overline{A} - \overline{W}\,\overline{T} = \overline{K}\,\overline{C}, \quad \overline{U}\,\overline{C} + \overline{V}\,\overline{T} = I,\tag{4.14}$$

где I обозначает единичную матрицу.

Решение уравнений (4.14) основано на таком выборе матрицы \overline{T} , при котором гарантированно обеспечивается существование обратной от блочной матрицы $colon\{\overline{C},\overline{T}\}$. Используя структуру \overline{C} из (4.12) и учитывая выражение для $C=C_0$ из (4.8), выберем матрицу \overline{T} :

$$\bar{T} = [0 \ T \ 0], \quad T = [L \ I],$$
 (4.15)

где L — некоторая 2×1 -матрица. Тогда можно показать [9], что решения уравнений (4.14) будут определяться следующими соотношениями:

$$\overline{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0_{2\times 1} & U & 0_{2\times 1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 \\ -L \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \\
\overline{W} = \overline{T} \, \overline{A} \, \overline{V} = TAV = W, \quad \overline{K} = \overline{T} \, \overline{A} \, \overline{U} = \begin{bmatrix} 0 & K & TB \end{bmatrix}, \quad K = TAU.$$
(4.16)

Анализируя данные выражения, можно увидеть, что регулятор (4.13) будет полностью определяться двумя матрицами \overline{F} и L, которые должны быть найдены таким образом, чтобы контур КМА был устойчивым и имел необходимые показатели качества. Следует отметить, что если выполняются уравнения (4.14), то полюсами замкнутого контура КМА будут являться [10, 11] собственные числа матриц $\overline{A} + \overline{B} \, \overline{F}$ и $W = TAV = A_{22} + LA_{12}$, где A_{ij} , i,j=1,2,- блоки матрицы A исходного объекта (4.9), соответствующие разбиению вектора состояний этого объекта на две части: $x = \begin{bmatrix} y & v \end{bmatrix}^T$, $v = \omega_{\beta}$. Тогда для определения матриц \overline{F} и L можно использовать любой из известных методов теории многомерных систем, в частности, метод, основанный на применении процедур линейно-квадратической оптимизации и оптимальной фильтрации, которые для дискретных систем представляются выражениями

$$\overline{F} = -(1 + \overline{B}^{T} P \overline{B})^{-1} \overline{B}^{T} P \overline{A}, \quad L = -A_{22} S A_{12}^{T} (I + A_{12} S A_{12}^{T})^{-1}, \tag{4.17}$$

где $P = P^{\mathsf{T}} > 0$ и $S = S^{\mathsf{T}} > 0$ — положительно-определенные решения соответствующих уравнений Риккати:

$$P = \overline{A}^{T} P \overline{A} + Q - \overline{A}^{T} P \overline{B} (1 + \overline{B}^{T} P \overline{B})^{-1} \overline{B}^{T} P \overline{A},$$

$$S = A_{22} S A_{22}^{T} + \Psi - A_{22} S A_{12}^{T} (I + A_{12} S A_{12}^{T})^{-1} A_{12} S A_{22}.$$
(4.18)

В этом случае устойчивость контура КМА будет гарантирована, а необходимое качество регулирования может быть достигнуто выбором весовых матриц Q, Ψ и коэффициента α введенного интегратора.

Обратимся к регулятору (4.13), который с использованием (4.15)—(4.18) оказывается полностью определенным, но для расширенного объекта (4.11), (4.12). Чтобы построить модель регулятора для исходного объекта, подставим выражения (4.16) в уравнения (4.17), представляя найденную матрицу \overline{F} в блочной форме: $\overline{F} = [F_{\mu} \ F_{\tau} \ F_{\tau}]$, где F_{μ} , F_{τ} — скалярные коэффициенты. Тогда с учетом структуры вектора \overline{y} получим

$$\begin{split} \overline{\xi}(i+1) &= W\overline{\xi}(i) + K\overline{y}(i) + TBx_{\tau}(i), \\ u(i) &= F_{\mu}\mu(i) + F_{x}Uy(i) + F_{x}V\overline{\xi}(i) + F_{\tau}x_{\tau}(i). \end{split}$$

Добавим к этому описанию уравнения (4.10) и введем новый вектор состояний $\xi = colon\{\mu, \overline{\xi}, x_{\tau}\}$. В результате, после преобразований, окончательно получим модель искомого регулятора в форме Коши:

$$\xi(i+1) = A_r \xi(i) + B_r y(i), u(i) = F_1 \xi(i) + F_2 y(i),$$
(4.19)

где A_r , B_r , F_1 , F_2 — матрицы, которые по построению будут иметь следующую блочную структуру:

$$A_{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & W & TB \\ F_{\mu} & F_{x}V & F_{\tau} \end{bmatrix}, \quad B_{r} = \begin{bmatrix} \alpha T_{\text{o.c.}} \\ K \\ F_{x}U \end{bmatrix},$$

$$F_{1} = [F_{\mu} & F_{x}V & F_{\tau}], \quad F_{2} = F_{x}U.$$

$$(4.20)$$

Отметим, что данный алгоритм синтеза, включая переход к дискретному объекту (4.9) с последующими вычислениями по уравнениям (4.17), (4.18) и формулам (4.15), (4.16), (4.20), легко реализуется с использованием стандартных операторов и процедур комплекса Matlab. В результате определяются матрицы регулятора (4.19) и его дискретная передаточная функция, которая затем применяется для формирования алгоритма вычисления управления u(i) на текущем i-м такте.

В частности, для решения задачи синтеза цифрового регулятора КМА подбираются следующие весовые матрицы из (4.18): $Q = diag\{10^5; 10^4; 10^3; 1\}$, $\Psi = I$ и коэффициент передачи интегратора (4.10): $\alpha = 6 \times 10^3$.

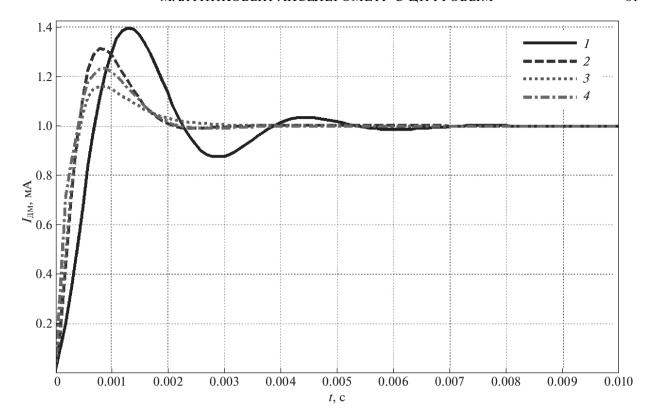


Рис. 4. Переходные процессы по току датчика момента KMA с различными регуляторами: 1 – аналоговый; 2 – дискретный, рассчитанный традиционным методом; 3 – дискретный, рассчитанный методом прямой дискретизации; 4 – дискретный, рассчитанный методом LQD-оптимизации

В результате решения задачи и после округления некоторых коэффициентов (в процессе анализа переходных процессов) была получена следующая дискретная передаточная функция цифрового регулятора:

$$W_{\text{per}}(z) = \frac{5.574z^3 - 10.1z^2 + 4.559z}{z^3 - 0.5351z^2 - 0.2124z - 0.2524},$$
(4.21)

которую также можно записать как

$$W_{\text{per}}(z) = \frac{5.574z(z - 0.9551)(z - 0.8563)}{(z - 1)(z^2 + 0.4649z + 0.2524)}.$$
(4.22)

Заметим, что полученная дискретная передаточная функция (4.22) содержит в качестве сомножителей операторы z и 1/(z-1), которые означают соответственно компенсацию запаздывания по управлению на один такт и наличие интеграторов, обеспечивающих астатизм.

5. Анализ результатов во временной и частотной областях. Анализ замкнутой системы управления "акселерометр—усилитель обратной связи" во временной области проводится в среде Simulink программного комплекса Matlab по структурной схеме, приведенной на рис. 2. При этом в качестве усилителя рассматриваются аналоговый с передаточной функцией (4.5) (для определения робастного регулятора среди рассчитанных цифровых путем сравнения полученных результатов) и цифровые с дискретными передаточными функциями (4.4), (4.6) и (4.21), построенные различными методами синтеза. Задающее воздействие принимается в виде единичной функции q = 1(t), соответствующей изменению действующего ускорения на 1g.

Графики переходных процессов, полученные путем математического моделирования, приведены на рис. 4 и 5. На рис. 4 представлены реакции системы по току датчика момента. Из рассмотренных графиков следует, что качество регулирования вполне удовлетворительное. В частности, время регулирования составляет не более 1.7×10^{-3} с, перерегулирование — не более 32%.

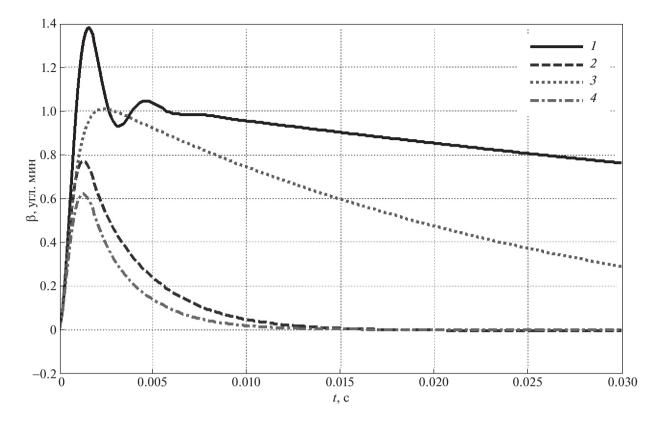


Рис. 5. Переходные процессы по углу отклонения маятника КМА с различными регуляторами: 1 – аналоговый; 2 – дискретный, рассчитанный традиционным методом; 3 – дискретный, рассчитанный методом прямой дискретизации; 4 – дискретный, рассчитанный методом LQD-оптимизации

Отметим, что эти показатели примерно соответствуют прототипу разработки — KMA с AУОС, для которого время регулирования составляет 3.5×10^{-3} с, а перерегулирование — 39.7%.

На рис. 5 представлены реакции системы по углу отклонения маятника акселерометра при действии ускорения q=1 g. Из приведенных графиков следует, что максимальный угол отклонения для систем с ЦУОС не превышает 1 угл. мин, в то время как для акселерометра с АУОС эта величина достигает 1.4 угл. мин.

На рис. 6 и 7 в основной полосе частот представлены частотные характеристики КМА с указанными регуляторами. В частности, на рис. 6 приведены логарифмические характеристики разомкнутого контура управления. Из этих характеристик установлено, что частота среза разомкнутого контура для всех вариантов КМА с ЦУОС составляет примерно 540 Гц, что соответствует заданной при синтезе; запасы устойчивости по амплитуде составляют примерно 14 дБ, а запасы устойчивости по фазе — примерно 53°. Полученные частотные показатели качества характеризуют данную систему как систему с высокими робастными свойствами, причем у прототипа — КМА с АУОС, запасы устойчивости составляют 22.4 дБ и 34.7° соответственно.

На рис. 7 приведены АЧХ замкнутых систем КМА с указанными регуляторами от задающего воздействия к току датчика момента, из которых установлено, что полоса пропускания для всех вариантов применения ЦУОС составила примерно 960 Гц. Показатель колебательности для акселерометров с ЦУОС уменьшился до величины 1.4 по сравнению с этим показателем для КМА с АУОС, величина которого составляет 1.77.

Результаты математического моделирования сведены в табл. 2, из анализа которой следует, что наилучшими характеристиками обладает КМА с ЦУОС с регулятором (4.4), рассчитанным традиционным методом с построением желаемых частотных характеристик. Кроме того, порядок числителя и знаменателя в (4.4) ниже, чем в дискретных передаточных функциях (4.6) и

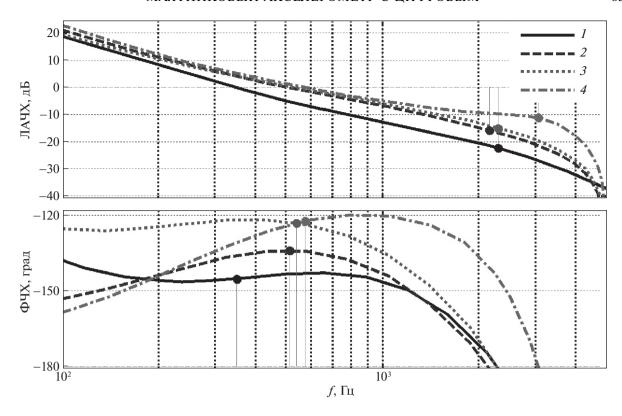


Рис. 6. ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутого контура управления КМА с различными регуляторами: 1 — аналоговый; 2 — дискретный, рассчитанный традиционным методом; 3 — дискретный, рассчитанный методом прямой дискретизации; 4 — дискретный, рассчитанный методом LQD-оптимизации

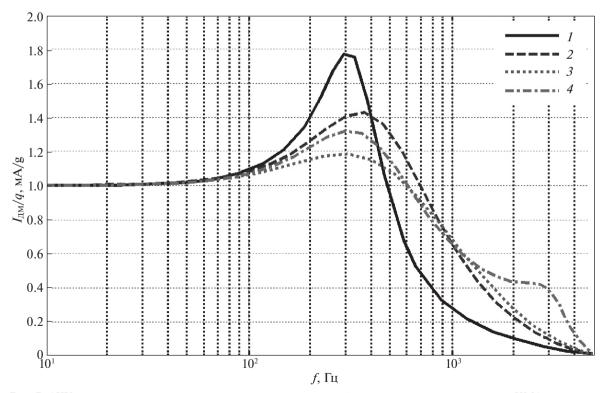


Рис. 7. АЧХ замкнутых систем управления от задающего воздействия к току датчика момента КМА с различными регуляторами: 1— аналоговый; 2— дискретный, рассчитанный традиционным методом; 3— дискретный, рассчитанный методом прямой дискретизации; 4— дискретный, рассчитанный методом LQD-оптимизации

	Числовое значение				
		КМА с ЦУОС	КМА с ЦУОС	КМА с ЦУОС	
Попомотр одиница изморония		с дискретным	с дискретным	с дискретным	
Параметр, единица измерения	КМА с АУОС	регулятором,	регулятором,	регулятором,	
	(прототип)	рассчитанным	рассчитанным	рассчитанным	
		традиционным	методом прямой	методом LQD-	
		методом	дискретизации	оптимизации	
Время регулирования, с	3.5×10^{-3}	1.7×10^{-3}	1.7×10^{-3}	1.7×10^{-3}	
Перерегулирование, %	39.7	31.2	16.1	23.5	
Резонансный угол отклонения	1.38	0.77	1.01	0.62	
маятника при 1 g, угл. мин (рад)	(0.4×10^{-3})	(0.23×10^{-3})	(0.3×10^{-3})	(0.18×10^{-3})	
Частота среза, Гц	352	520	538	573	
Запас устойчивости по	22.4	15.6	14.9	11.2	
амплитуде, дБ					
Запас устойчивости по фазе,	34.7	45.6	56.8	57.4	
град					
Полоса пропускания, Гц	575	963	989	927	
Показатель колебательности	1.77	1.42	1.18	1.32	

Таблица 2. Результаты математического моделирования работы КМА с АУОС и ЦУОС

(4.21), что повлияет в конечном итоге на быстродействие системы. Передаточную функцию дискретного регулятора (4.4) можно представить в следующем виде:

$$W_{\text{per}}(z) = \frac{2.57 - 4.701z^{-1} + 2.142z^{-2}}{1 - 1.138z^{-1} + 0.1379z^{-2}}$$
(5.1)

и соответствующее (5.1) конечно-разностное уравнение:

$$N_{\text{per}}(nT_{\text{o.c}}) = 1.138N_{\text{per}}[(n-1)T_{\text{o.c}}] - 0.1379N_{\text{per}}[(n-2)T_{\text{o.c}}] + +2.57 \times N_{\text{AIIII-I}}(nT_{\text{o.c}}) - 4.701N_{\text{AIIII-I}}[(n-1)T_{\text{o.c}}] + 2.142N_{\text{AIIII-I}}[(n-2)T_{\text{o.c}}],$$
(5.2)

где $N_{\rm per}(nT_{\rm o,c})$ — среднее за период $T_{\rm o,c}$ значение выходного сигнала МК.

Таким образом, уравнение (5.2) является алгоритмом работы ЦУОС, обеспечивающим требуемые динамические характеристики и запасы устойчивости акселерометра.

- **6. Алгоритмы повышения точности.** Рассмотрим два алгоритма, связанных с компенсацией погрешностей от разбалансировки маятника и от температурных зависимостей смещения нуля и масштабного коэффициента и позволяющих повысить точностные характеристики акселерометра.
- 6.1. Алгоритмическая компенсация погрешностей от разбаланси-ровки маятника. В [2] приведено экспериментальное подтверждение нелинейной зависимости масштабного коэффициента выходного сигнала акселерометра от действующего ускорения, вследствие разбалансировки маятника. Нелинейный характер зависимости понятен и из физики явления. Если центр масс смещен относительно геометрического центра системы сил, то при действии линейного ускорения пластина будет испытывать не только изгибной момент вокруг оси торсиона, но и скручивающий момент вокруг оси, лежащей в плоскости маятника и перпендикулярной оси торсиона. К этому возмущающему моменту добавляется момент вследствие неравномерности рабочего зазора ДМ, что и определяет ярко выраженную нелинейную зависимость масштабного коэффициента акселерометра при значительных величинах линейных ускорений. Для обеспечения стабильности масштабного коэффициента в [2] предложен способ корректировки параметров системы действующих сил, заключающийся в следующем. Выполняют смещение точки приложения инерционной силы путем перемещения центра масс, для чего на маятник либо устанавливают балансировочный груз, либо выполняют балансировочное отверстие.

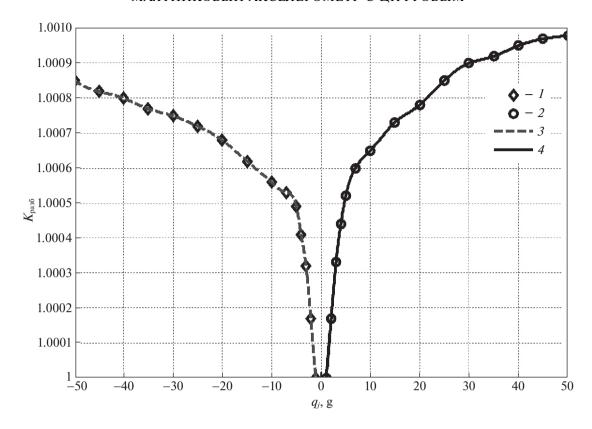


Рис. 8. Результаты работы алгоритма расчета поправочных коэффициентов при разбалансировке маятника акселерометра в диапазоне измерения от ± 1 до ± 50 g: 1 — поправочный коэффициент в диапазоне измерения от -1 до -50 g; 2 — поправочный коэффициент в диапазоне измерения от 1 до 50 g; 3 — аппроксимация кубическим сплайном в диапазоне от -1 до -50 g; 4 — аппроксимация кубическим сплайном в диапазоне от 1 до 50 g

Предлагаемый метод может быть с успехом применен при изготовлении опытных образцов акселерометров, однако в серийном производстве могут возникнуть проблемы, связанные со следующими факторами. Характер и величина взаимного смещения точек приложения упомянутых трех сил для каждого изготавливаемого акселерометра — индивидуальны. На одном акселерометре можно выполнить подбор груза либо балансировочного отверстия и арочных выборок, обеспечивающих компенсацию разбалансировки. При изготовлении акселерометров в производстве такой индивидуальный подбор элементов компенсации мало технологичен. Если же ввести в документацию акселерометра одинаковое для всех изготавливаемых акселерометров размещение балансировочного отверстия и арочных выборок либо балансировочный груз определенной величины, то это может дать обратный эффект.

Разработка акселерометра с ЦУОС позволяет решить данную проблему методами алгоритмической компенсации. Суть предлагаемого метода состоит в следующем.

1. На центрифуге испытуемый прибор устанавливается так, чтобы его ось чувствительности была направлена вдоль действия центробежной силы. Задаются различные величины перегрузки и записываются показания прибора, после чего вычисляется поправочный коэффициент масштаба для каждой величины перегрузки, показывающий, во сколько раз выходная информация прибора отличается от требуемой при действующем ускорении, из соотношения:

$$K_{\text{разб}} = |\hat{q}_i N_{\text{per}}(1) / N_{\text{per}}(q_i)|,$$

где \hat{q}_i — нормированное значение i-й перегрузки: $\hat{q}_i = q_i/1$ g; $N_{\rm per}(q_i)$ — выходная информация МК при воздействии q_i ; $N_{\rm per}(1)$ — выходная информация МК при воздействии ускорения в 1 g.

В практическом применении не обязательно точно задавать абсолютные значения ускорения на прибор, а достаточно знать, во сколько раз воздействие отличается от начального амплитудой в 1 g. Удобно использовать воздействия, отличающиеся в целое число раз от начального. Количество величин перегрузок следует выбирать, исходя из монотонности кривой погрешности

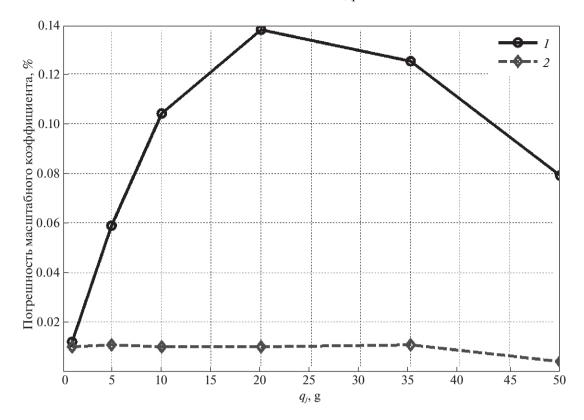


Рис. 9. Результаты экспериментальных исследований погрешности масштабного коэффициента акселерометра в диапазоне измерения от 1 до 50 g: I- до алгоритмической компенсации; 2- после компенсации

масштаба и требуемой точности компенсации. В результате получается табличная зависимость поправочного коэффициента масштаба от выходной информации прибора.

- 2. Для алгоритмической компенсации погрешности масштабного коэффициента зависимость поправочного коэффициента целесообразно аппроксимировать. В зависимости от формы кривой погрешности возможно применение различных методов интерполяции и аппроксимации. Для компенсации погрешности масштабного коэффициента кварцевого маятникового акселерометра оказался наиболее удобным метод интерполяции с помощью кубического сплайна [14]. Пример аппроксимации поправочного коэффициента приведен на рис. 8 для экспериментально снятых значений выходного сигнала акселерометра в диапазоне действующих перегрузок от ± 1 до ± 30 g.
- 3. Коэффициенты полиномов сплайна записываются в память МК в ЦУОС и используются в расчете поправочного коэффициента масштаба для текущего значения выходной информации в соответствии со структурной схемой, приведенной на рис. 2: $N' = K_{\text{pas}6} N_{\text{per}}$.

На рис. 9 приведены результаты испытаний КМА с ЦУОС и ШИМ-управлением током датчика момента в диапазоне от 1 до 50 g. Из графиков, представленных на рис. 9, видно, что в результате компенсации разбалансировки маятника погрешность масштабного коэффициента не превышает 0.01% во всем диапазоне измерений, тогда как до компенсации она доходила до 0.14%.

Таким образом, погрешность масштабного коэффициента на ускорениях свыше 10 g после введения алгоритмической компенсации снижается более чем в 14 раз в сравнении с той же погрешностью на ускорениях до 10 g.

6.2. Алгоритмическая компенсация погрешностей от температурных зависимостей смещения нуля и масштабного коэффициента. Особенностью всех КМА как отечественных, так и зарубежных является существенная зависимость их характеристик, таких, как систематическая составляющая смещения нулевого сигнала (или смещения нуля) и масштабный коэффициент, от изменения температуры окружающей среды. Температурная зависимость носит, как правило, нелинейный характер [5] и заключается в следующем.

- 1. Изменение смещения нуля КМА при изменении температуры происходит вследствие термоупругих деформаций, возникающих в маятнике, а также вследствие разной толщины золотого напыления (с обеих сторон маятника), реализующего емкостный датчик угла. Напыление в свою очередь вносит неоднородность в упругодеформируемое кварцевое стекло материал маятника. Исследования, проведенные на предприятии ПО "Корпус", показали, что отличие толщин золотого покрытия, нанесенного на одну и другую стороны маятника, на величину 0.02 мкм (при номинальном значении толщины покрытия 0.2 мкм) приводит к температурному изменению величины смещения нуля на 3×10^{-3} g при изменении температуры на 30° C.
- 2. Температурная зависимость масштабного коэффициента КМА в основном определяется зависимостью от температуры индукции в рабочем зазоре датчика момента, состоящего из медных катушек и постоянных магнитов.

Кварцевый маятниковый акселерометр (прибор КХ67-041) исследовался во ВНИИМ им. Д.И. Менделеева в процессе выполнения его аттестации для введения в ранг рабочего эталона. При этом исследования проводились на установках ЭУП-3 и ДЦ-3, входящих в состав Государственного эталона первого рода ГЭТ 94-01. При этом выходной сигнал $F_{\text{вых}}$ в функции от измеряемого кажущегося ускорения записывался в следующем виде:

$$F_{\text{вых}} = K_{\text{M}}(K_0 + q + K_2 q^2 + K_3 q^3 + K_{\text{о.м}} q q_{\text{о.м}} + K_{\text{о.п}} q q_{\text{о.п}} + \delta_0 q_{\text{о.п}} + \delta_1 q_{\text{о.м}}), \tag{6.1}$$

где $K_{\rm M}$ — масштабный коэффициент акселерометра; K_0 — смещение нуля выходного сигнала; q — измеряемое кажущееся ускорение, действующее вдоль измерительной оси акселерометра; $q_{\rm 0.M}$ — ускорение, действующее в направлении оси маятника; $q_{\rm 0.\Pi}$ — ускорение, действующее в направлении оси подвеса маятника; K_2 — нелинейный коэффициент второго порядка; K_3 — нелинейный коэффициент третьего порядка; $K_{\rm 0.M}$ — коэффициент перекрестной связи между ускорениями, действующими в направлениях измерительной оси и оси маятника; $K_{\rm 0.\Pi}$ — коэффициент перекрестной связи между ускорениями, действующими в направлениях измерительной оси и оси подвеса маятника; δ_0 — коэффициент поперечной чувствительности акселерометра в направлении оси маятника; δ_1 — коэффициент поперечной чувствительности акселерометра в направлении оси подвеса маятника.

По результатам аттестации во ВНИИМ им. Д.И. Менделеева были получены следующие значения коэффициентов математической модели (6.1):

$$K_{\rm M}=0.10709~{
m B}~{
m c}^2/{
m m}; \quad K_0=-0.013{
m m/c}^2; \quad d_0=~2\times 10^{-5}; \quad d_1=~1\times 10^{-4};$$
 $K_2=4\times 10^{-6}~{
m c}^2/{
m m}; \quad K_3=~0; \quad K_{
m o.m}=~1\times 10^{-5}~{
m c}^2/{
m m}; \quad K_{
m o.\pi}=~6.5\times 10^{-6}~{
m c}^2/{
m m}.$

Из результатов аттестации следует, что акселерометр обладает высокой стабильностью масштабного коэффициента, комплексная оценка нелинейности этой характеристики составляет 0.005%. Факторами, влияющими на высокую линейность и стабильность во времени масштабного коэффициента акселерометра, являются методы технологического процесса изготовления акселерометра, обеспечивающие отсутствие остаточных напряжений в кварцевой пластине акселерометра, равномерность рабочего зазора в датчике момента и стабильность величины магнитной индукции в рабочем зазоре.

В ходе температурных испытаний акселерометра было замечено, что зависимости масштабного коэффициента и смещения нуля от температуры имеют параболическую форму, которую можно описать полиномом второй степени. Для расчета коэффициентов полиномов используются по четыре точки на температурной кривой. В ходе экспериментальных отработок алгоритма термокомпенсации замеры производились при четырех температурах, °С: 5, 20, 35 и 50. Температурные точки могут быть выбраны другие, в зависимости от условий эксплуатации прибора.

Измерения и расчет температурной коррекции проходят следующим образом. На каждой температуре проводятся замеры в четырех положениях акселерометра на оптической делительной головке (ОДГ). Для этого акселерометр устанавливается на площадку ОДГ базовой поверхностью. Площадка ОДГ предварительно горизонтируется (горизонтальное положение площадки соответствует значению 0° на шкале ОДГ). С помощью ОДГ задаются четыре угловых положения: 0, 90, 180 и 270° . По показаниям в положениях 90 и 270° определяется смещение нуля по формуле

$$\Delta_{\text{cm.H}} = (F_{\text{Bbix}}^{270^{\circ}} + F_{\text{Bbix}}^{90^{\circ}})/2.$$

Положения 0 и 180° соответствуют измерениям -1 g и +1 g. Показания в этих положениях корректируются с учетом смещения нуля по формулам

$$N_{
m ckopp}^{+g} = F_{
m Bhix}^{180^{\circ}} - \Delta_{
m cm.H};
onumber \ N_{
m ckopp}^{-g} = F_{
m Bhix}^{0^{\circ}} - \Delta_{
m cm.H}.$$

В результате этих операций становятся известными значения систематической составляющей нулевого сигнала и масштабного коэффициента для положительных и отрицательных ускорений для каждой температуры. Также в ходе измерений на каждой температуре фиксируются показания термодатчика акселерометра. По этим данным рассчитываются коэффициенты аппроксимирующих квадратичных полиномов, зависящих от показаний термодатчика:

$$\begin{split} \delta_{\text{\tiny CM.H}} &= a_2 t_{\text{ДT}}^2 + a_1 t_{\text{ДT}} + a_0; \\ k_+ &= b_2 t_{\text{ДT}}^2 + b_1 t_{\text{ДT}} + b_0; \\ k_- &= c_2 t_{\text{ДT}}^2 + c_1 t_{\text{ДT}} + c_0, \end{split}$$

где $\delta_{\text{см.н.}}, k_+, k_-$ поправки смещения нуля и масштабных коэффициентов соответственно; $a_i, b_i, c_i, i=0,1,2,$ — вычисленные коэффициенты полиномов; $t_{\text{ДT}}$ — показания ДТ.

Полученные коэффициенты полиномов записываются в программу работы микроконтроллера. В программе на этапе вычисления поправок термокомпенсации вычисляются поправки смещения нуля и масштабного коэффициента для положительных и отрицательных ускорений с использованием соответствующих полиномиальных выражений и текущего показания термодатчика. Перед выдачей выходной информации о действующем ускорении в интерфейс производится коррекция по формуле:

$$N_{\text{скорр}} = egin{cases} (N' - \delta_{\text{см.н}}) k_+, & \text{если} & N' \geq 0; \\ (N' - \delta_{\text{см.н}}) k_-, & \text{если} & N' < 0. \end{cases}$$

При этом весь циклический алгоритм делится на две части: асинхронную и синхронную, выполняемую в МК. В асинхронной части производится вычисление температурных поправок в зависимости от оцифрованного значения показаний термодатчика и в соответствии с запрограммированными коэффициентами полиномов термокомпенсации. Поскольку процесс изменения температуры является медленно меняющимся, то нет необходимости рассчитывать температурные поправки синхронно с основным алгоритмом. Это вычисление происходит в свободное от расчетов время вычисления основного алгоритма.

Графики, приведенные на рис. 10 и 11, иллюстрируют работу термокомпенсации погрешностей масштабного коэффициента при измерении ускорения амплитудой ± 1 g и систематической составляющей нулевого сигнала в диапазоне температур от -60 до $+85^{\circ}$ С, характерном для эксплуатационных условий в авиации. Замер характеристик осуществлялся как при нагреве, так и при охлаждении прибора. Согласно графикам, происходит расхождение кривых при нагреве и охлаждении прибора, связанное с явлением температурного гистерезиса акселерометра (рис. 10 и 11).

Таким образом, при испытаниях акселерометра в диапазоне температур от -60 до $+85^{\circ}$ С погрешность масштабного коэффициента после введения алгоритмической компенсации уменьшается с 18×10^{-3} до 6×10^{-4} g и систематической составляющей нулевого сигнала - с 5×10^{-3} до 1×10^{-4} g.

- 7. Преимущества использования цифрового управления по сравнению с аналоговым в контуре обратной связи акселерометра. Применение цифрового усилителя обратной связи в контуре управления рассматриваемого измерителя кажущегося ускорения придает ему новые функциональные возможности.
- 1. Сокращение общего количества ЭРИ (электрорадиоизделий) и уменьшение габаритно-массовых характеристик измерительного канала, включающего, кроме собственно акселерометра с УОС (усилителем обратной связи), блок преобразования информации и вторичный источник питания. На рис. 12 приведены 3D-модель КМА с ЦУОС, где показана возможность реализации всех плат электроники в одном конструктиве, и фото ныне реализованного макетного образца. На рис. 12, δ обозначено: I ЧЭ, Z макет ЦУОС, S оснастка для крепления ЧЭ на испытательном оборудовании.

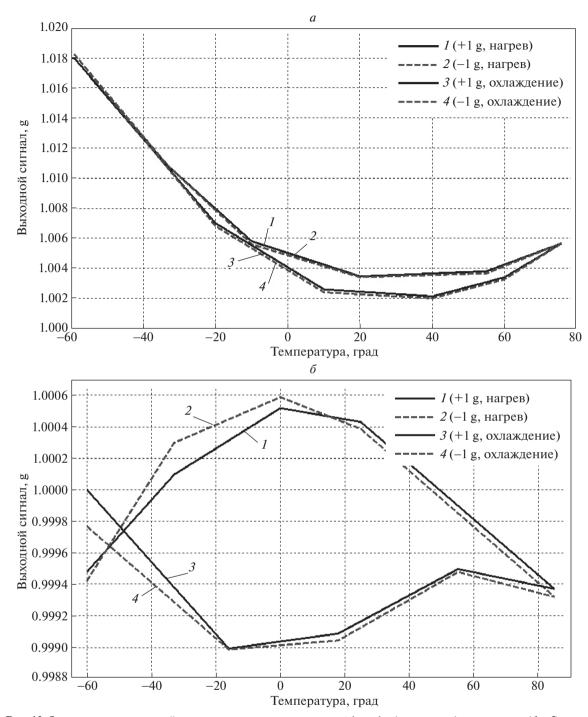


Рис. 10. Зависимость показаний акселерометра при измерении +1 и -1 g (по модулю) при нагреве (1 и 2) и при охлаждении (3 и 4) от температуры: a — до компенсации, δ — после компенсации

- 2. Реализация требуемого количества алгоритмов повышения точности прибора, что ограничено лишь вычислительной мощностью встроенного в ЦУОС микроконтроллера, с разгрузкой бортовой цифровой вычислительной машины (БЦВМ) подвижного объекта от компенсационных алгоритмов первичного измерителя. Это в свою очередь исключает многоконтурную систему обмена данными (между бортовым вычислителем и измерителем) и, кроме того, при замене измерителя не требует перепрошивки бортового вычислителя.
- 3. Расширение диапазона измеряемых ускорений от ± 10 до ± 50 g без внесения изменений в конструкцию прибора.

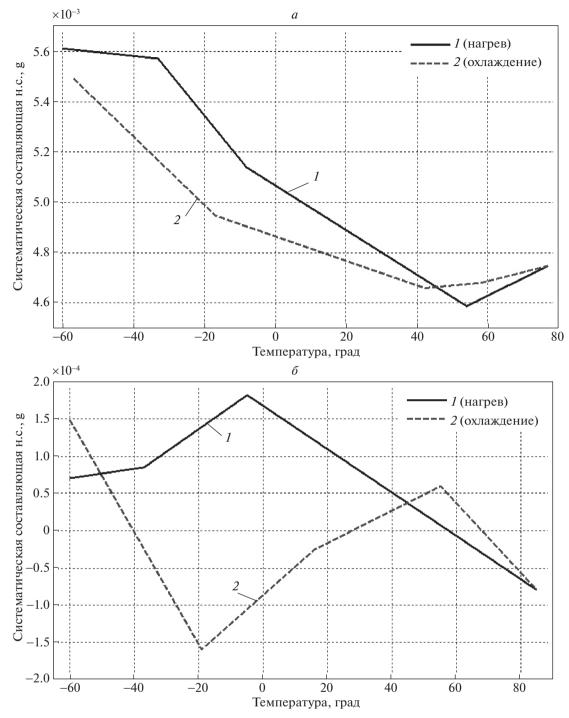
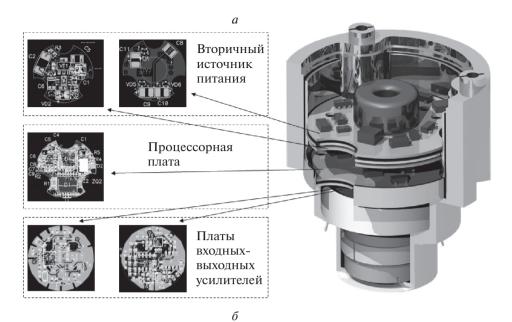


Рис. 11. Зависимость систематической составляющей нулевого сигнала (н.с.) акселерометра при нагреве (I) и при охлаждении (2) от температуры: a — до компенсации, δ — после компенсации

- 4. Коррекция динамических характеристик измерителя в зависимости от объекта, на который он будет устанавливаться, путем изменения коэффициентов цифрового регулятора в контуре обратной связи.
- 5. Сохранение широкой полосы пропускания измерителя по сравнению с вариантом применения МК в выходном каскаде, а не в контуре обратной связи.
- 6. Упрощение организации любого требуемого вида выходной информации (унитарный код, RS-232, RS-485, код Манчестер и т.п.).



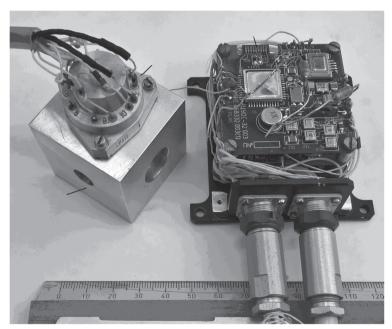


Рис. 12. Внешний вид КМА с ЦУОС: a - 3D-модель, $\delta - \phi$ ото макетного образца

7. Возможность перехода к построению адаптивной системы управления, теоретически описанной в книге [15].

Заключение. Рассмотрен кварцевый маятниковый акселерометр, особенностью которого является применение в контуре управления цифрового усилителя обратной связи, придающего прибору новые функциональные возможности. Приведено описание аппаратного обеспечения ЦУОС с расчетом соответствующих коэффициентов, работы алгоритмов цифрового управления, полученных с использованием различных методов синтеза дискретных регуляторов, и алгоритмов повышения точности, связанных с компенсацией погрешностей от разбалансировки маятника и температурных зависимостей смещения нуля и масштабного коэффициента, что подтверждено результатами экспериментальных исследований.

В табл. 3 приведены технические характеристики двух акселерометров — с аналоговым усилителем обратной связи, рассматриваемый как прототип разработки, и с цифровой обратной

Таблица 3. Технические характеристики КМА с АУОС и ЦУОС

Параметр, размерность	Величина		Примечание
параметр, размерность	КМА с АУОС	КМА с ЦУОС	1
Диапазон измерения, g	±10	$\pm 10 - \pm 50$	2
Масштабный коэффициент	1.0-1.32 B/g	1000 ед.ц.к./g	3
Нестабильность масштабного коэффициента (не более), $\%$	0.02	0.02	4
Систематическая составляющая нулевого сигнала (в пределах), g	$\pm 10 \times 10^{-3}$	$\pm 1 \times 10^{-3}$	_
Случайная составляющая нулевого сигнала (не более), g:			_
в 10-минутном запуске,	20×10^{-6}	_	
в 30-минутном запуске,	_	5×10^{-6}	
– в 3-часовом запуске	40×10^{-6}	20×10^{-6}	
Случайная составляющая нулевого сигнала от запуска к запуску (не более), g	1×10^{-4}	1×10^{-4}	_
Порог чувствительности (не более), g	0.5×10^{-6}	0.5×10^{-6}	_
Полоса пропускания сигнала (по уровню 0.7), не менее, Γ ц	200	300	5
Время готовности (не более), с:			_
функциональной,	_	1	
точностной	1200	300	
Ресурс, ч	11000	11000	_
Срок службы, лет	12	12	_
Рабочий диапазон температур, °С	0+40	-65+85	6
Масса, не более, кг	0.3	0.1	_
Потребляемая мощность (не более), Вт	3	1.5	7
Входное напряжение, В	27 ⁺⁷ ₋₄	27 ⁺⁷ ₋₄	_

связью, дискретный регулятор которого рассчитан традиционным методом, в котором реализованы алгоритмы повышения точности. К табл. 3 добавлены следующие примечания.

Примечание 1. КМА с АУОС включает в себя собственно акселерометр и АУОС, а также вторичный источник питания и блок преобразования выходного сигнала из аналогового в унитарный код. КМА с ЦУОС содержит акселерометр, ЦУОС и вторичный источник питания; преобразователь сигнала не требуется, так как выходной сигнал прибора уже цифровой; тип выходного интерфейса может быть следующим: RS-232, RS-485, код Манчестер, унитарный код и т.д.

Примечание 2. Диапазон измеряемых ускорений для KMA с ЦУОС может быть выбран любым из диапазона от ± 10 до ± 50 g. При необходимости верхний предел может быть понижен до ± 1 g.

Примечание 3. Масштабный коэффициент для КМА с ЦУОС может быть обеспечен любой.

Примечание 4. Нестабильность масштабного коэффициента дается во всем температурном диапазоне и во всем диапазоне измерений. Для КМА с ЦУОС указанный параметр приводится с учетом компенсации температурных погрешностей и погрешностей от разбалансировки маятника на ускорениях, амплитуда которых свыше 1 g.

Примечание 5. Полоса пропускания сигнала для КМА с ЦУОС выбирается в диапазоне 100—1000 Гц программным способом.

Примечание 6. Рабочий диапазон температур для КМА с ЦУОС может быть "космический" — $(0...+40)^{\circ}$ С или "авиационный" — $(-65...+85)^{\circ}$ С с обеспечением алгоритмической компенсации температурных зависимостей масштабного коэффициента и систематической составляющей нулевого сигнала.

Примечание 7. Указана мощность, потребляемая измерительным каналом. В случае диапазона температур $(0...+40)^{\circ}$ С и уменьшения диапазона измерения мощность для KMA с ЦУОС может быть уменьшена до 1.1 Вт.

Проведенный анализ во временной и частотной областях для разомкнутой и замкнутой системы "КМА—ЦУОС" показал, что предложенные алгоритмы цифрового управления обладают высокими робастными свойствами и обеспечивают хорошее качество переходных процессов. При этом независимо от выбранного метода синтеза в приборе обеспечиваются требуемые динамические характеристики, различными остаются лишь порядки числителя и знаменателя полученных дискретных передаточных функций регуляторов, реализация которых ограничена производительностью применяемого МК.

Таким образом, динамические свойства акселерометра с ЦУОС практически не зависят от выбора способа синтеза регулятора, а определяются аппаратными возможностями системы управления.

Из полученных результатов следует, что в КМА, применяемых в современных БИНС навигационного класса точности, желательно применять ЦУОС с реализованными в нем компенсационными алгоритмами для коррекции температурных и иных погрешностей измерителя, естественно, помимо некомпенсируемых погрешностей, связанных с технологией изготовления прибора, с гистерезисом постоянных магнитов и т.п. Все это позволит существенно расширить функциональные возможности не только современных первичных измерителей, но и всей БИНС в целом.

Сделанные выводы нашли свое подтверждение на летных испытаниях, прошедших в августесентябре 2019 г. в составе шестиосного прибора БИЛУ (блок измерителей линейного ускорения), где в качестве измерительного канала был использован КМА с ЦУОС, описанный в настоящей работе. Прибор БИЛУ работал в системе управления космическим кораблем (КК) "Союз МС-14" с роботом "Фёдором" на борту. Прибор функционировал на участках выведения на орбиту, стыковки и расстыковки КК с Международной космической станцией (МКС), при посадке на участках торможения и раскрытия парашютов. После успешной посадки спускаемого аппарата прибор БИЛУ был доставлен на завод-изготовитель для проверки точностных характеристик после летных испытаний. Все основные параметры, внесенные в формуляр прибора при сдаче заказчику, подтвердили практически без изменений свои точностные характеристики, что свидетельствует о верности как теоретических посылок, так и высокой надежности цифровой системы управления, реализованной на отечественной элементной базе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
- 2. *Сео Дже Бом*. Оптимизация параметров и моделирование рабочих режимов в компенсационных акселерометрах типа Q-flex и Si-flex: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 2012. 16 с.
- 3. Берендс Д.А., Кукулиев Р.М., Филиппов К.К. Приборы и системы автоматического управления с широтно-импульсной модуляцией. Л.: Машиностроение, 1982. 280 с.
- 4. *Скоробогатов В.В.* Основы разработки безобогревных термоинвариантных измерителей угловых скоростей и кажущихся ускорений для систем управления ракетно-космическими объектами: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Саратов, 2018. 24 с.
- 5. *Мельников В.Е.* Электромеханические преобразователи на базе кварцевого стекла. М.: Машиностроение, 1984. 160 с.
- 6. *Калихман Д.М.* Прецизионные управляемые стенды для динамических испытаний гироскопических приборов / Под ред. В.Г. Пешехонова. СПб.: Изд-во ЦНИИ "Электроприбор", 2008. 273 с.
- 7. *Федоров С.М., Литвинов А.П.* Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами. М.— Л.: Энергия, 1965. 320 с.
- 8. Дьяконов В.П. Matlab 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6[®]. Основы применения. Серия "Библиотека профессионала". М.: СОЛОН-Пресс, 2005. 800 с.
- 9. *Садомцев Ю.В.* Конструирование систем управления с обратной связью по критериям точности и грубости. Саратов: СГТУ, 2003. 297 с.
- 10. Изерман Р. Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984. 541 с.
- 11. *Куо Б*. Теория и проектирование цифровых систем управления / Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1986. 446 с.
- 12. Располов В.Я. Микромеханические приборы: учебное пособие. М.: Машиностроение, 2007. 400 с.
- 13. Luenberger D.G. On introduction to observers // IEEE Trans. Autom. Contr. 1971. V. AC-16.
- 14. Бахвалов Н.С. Численные методы. Т. 1. М.: Наука, 1973. 632 с.
- 15. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы: Учеб. пособие для вузов по спец. "Автоматика и управление в технических системах". М.: Высш. шк., 1989. 263 с.

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУШИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УЛК 629.7.058

ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ ВОЗДУШНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ЛОКАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНО-БИКВАДРАТНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ. II. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА

© 2021 г. В. С. Верба^a, И. Р. Загребельный a,b,*, В. И. Меркулов^a, Е. А. Руденко^{c,**}

а АО "Концерн "Вега", Москва, Россия

^b МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

с МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

*e-mail: ilya-zagrebelnyi@mail.ru

**e-mail: rudenkoevg@yandex.ru

Поступила в редакцию $08.06.2020~\mathrm{r}$. После доработки $18.08.2020~\mathrm{r}$.

Принята к публикации 30.11.2020 г.

Приведены результаты исследований эффективности оптимального радиолокационного угломера при сопровождении целей, движущихся по траекториям различной сложности. Следящая система угломера получена в первой части данной статьи локальной минимизацией квадратично-биквадратного функционала качества.

DOI: 10.31857/S0002338821020141

0. Введение. В работе [1] решена задача локальной квадратично-биквадратной оптимизации линейных систем автоматического сопровождения воздушных объектов. Там же рассмотрено и ее применение к синтезу управления типовым приводом антенны следящего радиолокационного угломера [2]:

$$\begin{split} \dot{\varphi}_{y} &= \omega_{y}, \quad \varphi_{y}(0) = \varphi_{y0}, \\ \dot{\omega}_{y} &= -\frac{1}{T}\omega_{y} + \frac{b}{T}u_{y}, \quad \omega_{y}(0) = \omega_{y0}, \end{split} \tag{0.1}$$

предназначенного для сопровождения интенсивно маневрирующей воздушной цели, определяемой моделью

$$\dot{\varphi}_{T} = \omega_{T} + \frac{j_{T}}{\dot{D}}, \quad \varphi_{T}(0) = \varphi_{T0},$$

$$\dot{\omega}_{T} = -\frac{2\dot{D}}{D}\omega_{T} - \frac{j_{T}}{D}, \quad \omega_{T}(0) = \omega_{T0}.$$

$$(0.2)$$

Здесь $\phi_{\rm T}$, $\omega_{\rm T}$ — бортовой пеленг цели и угловая скорость линии визирования цели; $\phi_{\rm y}$, $\omega_{\rm y}$ — угол поворота равносигнального направления антенны и скорость его изменения; $\phi_{\rm y0}$, $\omega_{\rm y0}$, $\phi_{\rm r0}$, $\omega_{\rm r0}$ — значения этих координат на момент захвата цели; b, T — коэффициент передачи сигнала управления $u_{\rm y}$ и постоянная времени угломера; D, \dot{D} — дальность до цели и скорость ее изменения; $\dot{J}_{\rm T}$ — поперечное ускорение цели, манипулируя которым можно реализовать траектории различной сложности.

Геометрия текущего взаимного расположения цели и угломера показана на рис. 1, на котором $O_{\rm p,y}$ и $O_{\rm u}$ — точки расположения радиолокационного угломера и цели, ${\bf V}_{\rm u}$ — вектор скорости цели, $x_{\rm PCH}$ — положение равносигнального направления (PCH) в горизонтальной плоскости, определяющее величину $\phi_{\rm v}$.

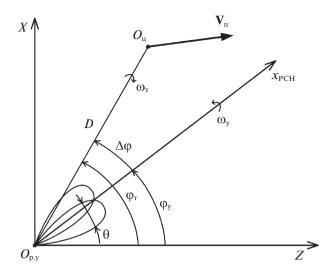


Рис. 1. Геометрия взаимного расположения радиолокационного угломера и цели

С целью уменьшения ошибок слежения за углом $\Delta \phi = \phi_{\scriptscriptstyle T} - \phi_{\scriptscriptstyle y}$ и угловой скоростью $\Delta \omega = \omega_{\scriptscriptstyle T} - \omega_{\scriptscriptstyle y}$ в [1] был получен локально оптимальный по минимуму изменяющегося во времени функционала

$$I_{t} = \int_{0}^{t} k_{\omega} u_{y}^{2}(\tau) d\tau + \begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta \omega \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta \omega \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta \omega \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta \omega \end{bmatrix}^{2}$$

$$(0.3)$$

закон управления приводом

$$u_{y} = K_{1}\Delta\varphi + K_{2}\Delta\omega + K_{3}\Delta\varphi^{3} + K_{4}\Delta\varphi^{2}\Delta\omega + K_{5}\Delta\varphi\Delta\omega^{2} + K_{6}\Delta\omega^{3}$$
(0.4)

с коэффициентами

$$K_{1} = \frac{b}{k_{\omega}T}q_{12}, \quad K_{2} = \frac{b}{k_{\omega}T}q_{22}, \quad K_{3} = \frac{2b}{k_{\omega}T}p_{11}p_{12},$$

$$K_{4} = \frac{2b}{k_{\omega}T}(2p_{12}^{2} + p_{11}p_{22}), \quad K_{5} = \frac{6b}{k_{\omega}T}p_{12}p_{22}, \quad K_{6} = \frac{2b}{k_{\omega}T}p_{22}^{2}.$$

$$(0.5)$$

Здесь q_{11} , q_{12} , q_{22} — коэффициенты квадратичного штрафа за ошибки слежения $\Delta \varphi$, $\Delta \omega$; p_{11} , p_{12} , p_{22} — коэффициенты соответствующего биквадратного штрафа, определяющие в законе (0.4) веса нелинейных слагаемых.

Целью дальнейшего изложения является исследование эффективности закона управления (0.4), (0.5) и его разновидностей при сопровождении целей, маневрирующих по сложным законам, в том числе и со сменой знаков производных.

1. Условия исследования. Исследование эффективности предложенного метода оптимизации по минимуму квадратично-биквадратных функционалов качества выполнялось на примере сопровождения радиолокационным угломером высокоскоростных целей, двигающихся по траекториям различной сложности, в том числе и со сменой знака производных. Необходимо отметить, что существующие следящие угломеры неспособны сопровождать такие цели [3].

При этом полагалось, что угломер входит в состав моноимпульсной радиолокационной системы (РЛС) с двухлепестковой диаграммой направленности с шириной $\theta = 4^{\circ}$ (рис. 1) с полосой рабочей зоны $0.5\theta = \pm 2^{\circ}$ [4], а цели перемещаются в пространстве со сверхзвуковой скоростью.

Исследования проводились путем моделирования траекторий полета цели (0.2) по трем различным траекториям. В качестве показателей эффективности использовались текущие ошибки сопровождения по углу и угловой скорости. Если при этом выполнялось условие $|\Delta \phi| \ge 2^{\circ}$, то регистрировался срыв сопровождения.

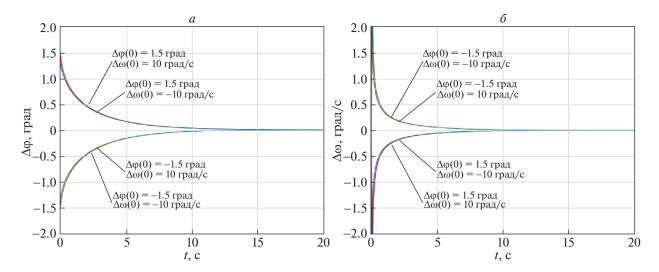


Рис. 2. Текущие ошибки по углу (a) и угловой скорости (δ) при отработке алгоритмом (1.1) первоначальных ошибок захвата различных знаков

Для выяснения влияния отдельных слагаемых оптимального закона управления (0.4) на качество сопровождения исследования проводились при использовании следующих вариантов:

– полный закон (0.4) с коэффициентами (0.5):

$$u_{y1} = K_1 \Delta \varphi + K_2 \Delta \omega + K_3 \Delta \varphi^3 + K_4 \Delta \varphi^2 \Delta \omega + K_5 \Delta \varphi \Delta \omega^2 + K_6 \Delta \omega^3; \tag{1.1}$$

— без куба ошибки по углу $\Delta \phi^3$:

$$u_{y2} = K_1 \Delta \varphi + K_2 \Delta \omega + K_4 \Delta \varphi^2 \Delta \omega + K_5 \Delta \varphi \Delta \omega^2 + K_6 \Delta \omega^3; \tag{1.2}$$

— без куба ошибки по угловой скорости $\Delta\omega^3$:

$$u_{v3} = K_1 \Delta \varphi + K_2 \Delta \omega + K_3 \Delta \varphi^3 + K_4 \Delta \varphi^2 \Delta \omega + K_5 \Delta \varphi \Delta \omega^2; \tag{1.3}$$

— без куба ошибки по углу $\Delta \phi^3$ и смеси $\Delta \phi \Delta \omega^2$, что соответствует использованию в критерии (0.3) диагональной матрицы биквадратных штрафов ($p_{12}=0$):

$$u_{y4} = K_1 \Delta \varphi + K_2 \Delta \omega + K_4 \Delta \varphi^2 \Delta \omega + K_6 \Delta \omega^3; \tag{1.4}$$

— без кубов ошибок и по углу $\Delta \phi^3$ и по угловой скорости $\Delta \omega^3$:

$$u_{y5} = K_1 \Delta \varphi + K_2 \Delta \omega + K_4 \Delta \varphi^2 \Delta \omega + K_5 \Delta \varphi \Delta \omega^2; \tag{1.5}$$

- без куба ошибки по углу $\Delta\phi^3$ и смеси $\Delta\phi^2\Delta\omega$:

$$u_{y6} = K_1 \Delta \varphi + K_2 \Delta \omega + K_5 \Delta \varphi \Delta \omega^2 + K_6 \Delta \omega^3; \tag{1.6}$$

— без кубов ошибок по углу $\Delta\phi^3$, по угловой скорости $\Delta\omega^3$ и смеси $\Delta\phi\Delta\omega^2$:

$$u_{v7} = K_1 \Delta \varphi + K_2 \Delta \omega + K_4 \Delta \varphi^2 \Delta \omega; \tag{1.7}$$

— типовой линейный алгоритм сопровождения, который соответствует одному из лучших вариантов существующих угломеров [2]:

$$u_{v8} = K_1 \Delta \varphi + K_2 \Delta \omega. \tag{1.8}$$

Исследования проводились в несколько этапов:

- проверялась способность всех управлений устранять первоначальные ошибки захвата $\Delta \phi(0) = \pm 1.5^{\circ}$ и $\Delta \omega(0) = \pm 10$ град/с в различных сочетаниях по знаку;
 - изучались показатели сопровождения цели, движущейся равноускорено прямолинейно;

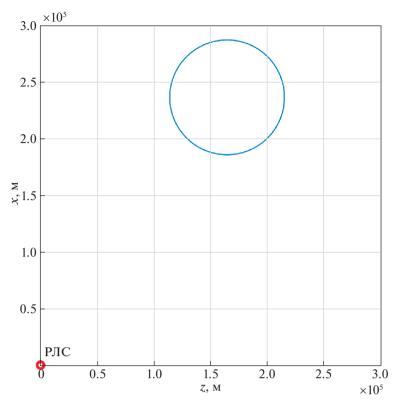


Рис. 3. Геометрия взаимного расположения РЛС и цели при ее движении по окружности

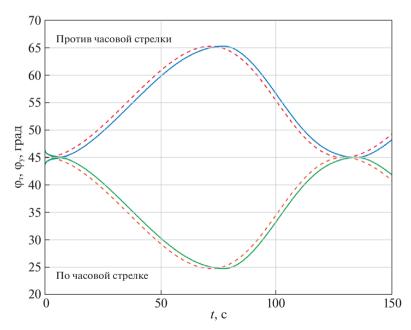


Рис. 4. Бортовой пеленг цели (пунктирная линия) и угол поворота антенны (сплошная линия) для алгоритма (1.1) при движении цели по окружности

- исследовалась работоспособность всех вариантов управления при сопровождении цели, движущейся по окружности на некотором удалении от РЛС с периодической сменой знаков производных бортовых пеленгов и дальности;
- оценивались возможности всех законов управления при сопровождении цели, движущейся по квазисинусоидальной траектории (маневр "змейка").

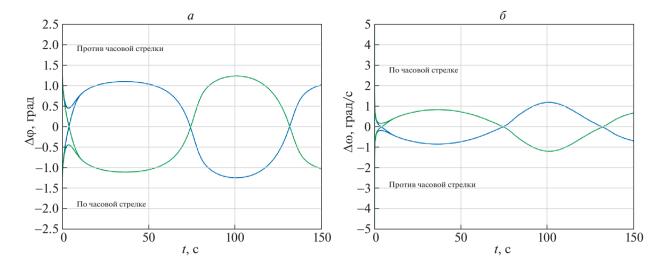


Рис. 5. Ошибки сопровождения по углу (a) и угловой скорости (b) для алгоритма (1.1) при движении цели по окружности

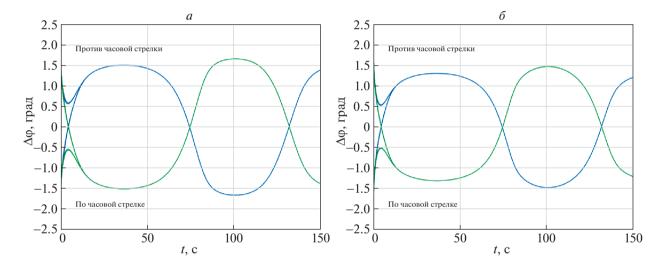


Рис. 6. Ошибки сопровождения по углу для алгоритмов (1.2) (а) и (1.3) (б) при движении цели по окружности

2. Результаты исследований. Проведенные исследования показали, что все варианты управления устойчиво устраняют первоначальные ошибки захвата при их различном сочетании по знаку. В качестве примера на рис. 2 показаны эпюры устранения ошибок захвата по углу и угловой скорости при использовании управления (1.1). Все остальные варианты управления (1.2)—(1.8) также устойчиво устраняют ошибки захвата, но с несколько худшими показателями точности и времени отработки.

При сопровождении цели, движущейся равноускорено прямолинейно, ошибки сопровождения устраняются всеми вариантами сигналов управления, обеспечивая высокоточное сопровождение в установившемся режиме с некоторым увеличением ошибок сопровождения по углу и угловой скорости на начальном этапе. Исследование этого этапа позволяет прийти к заключению, что при сопровождении целей, маневрирующих без смены знака производных угловых координат, все варианты управления (1.1)—(1.7) по сравнению с традиционным пропорционально-дифференциальным методом (1.8) несколько улучшают точность сопровождения.

2.1. Сопровождение цели, движущейся по окружности. Положение цели, движущейся по окружности на определенном расстоянии от РЛС, показано на рис. 3, а результаты исследований иллюстрируются рис. 4-12.

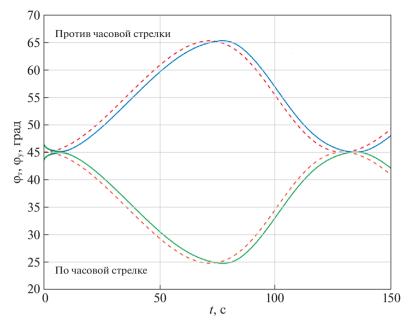


Рис. 7. Бортовой пеленг цели (пунктирная линия) и угол поворота антенны (сплошная линия) для алгоритма (1.4) при движении цели по окружности

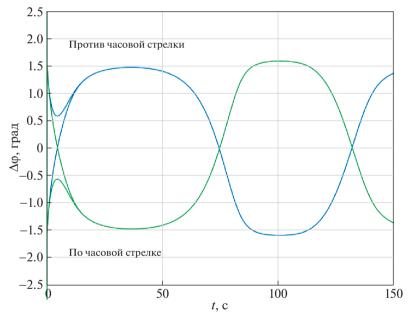


Рис. 8. Ошибка сопровождения по углу для алгоритма (1.5) при движении цели по окружности

На рис. 4 представлено изменение углового положения цели и угла поворота антенны в процессе сопровождения при использовании полного закона управления (1.1), а на рис. 5 — реализуемые при этом ошибки сопровождения по углу и угловой скорости. Из них видно, что закон управления (1.1), обеспечивая отработку ошибок захвата, реализует высокую точность сопровождения цели $|\Delta \phi| \le 1.3^\circ$, $|\Delta \omega| \le 1.2 \, \text{град/с}$, движущейся со сменой знаков производных дальности и углов, с большим запасом устойчивости $|0.5\theta-\Delta \phi|>0.5^\circ$.

Способы управления без учета $\Delta \phi^3$ (1.2) и без учета $\Delta \omega^3$ (1.3) также обеспечивают бессрывное сопровождение, но с несколько худшими показателями точности. Графики ошибок сопровождения для этих законов приведены на рис. 6.

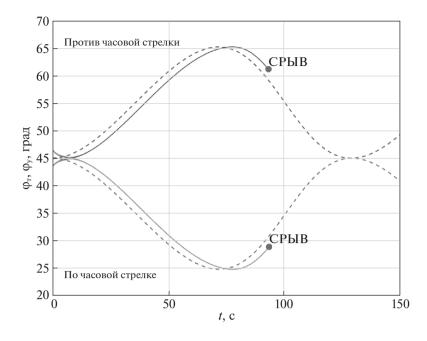


Рис. 9. Бортовой пеленг цели (пунктирная линия) и угол поворота антенны (сплошная линия) для алгоритмов (1.6) и (1.7) при движении цели по окружности

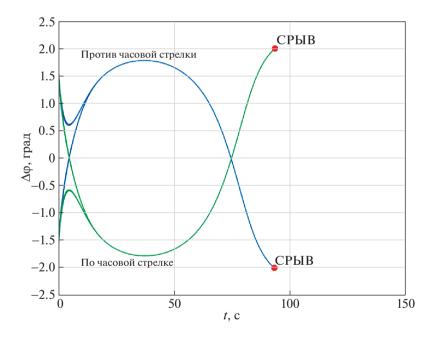


Рис. 10. Ошибки сопровождения по углу для алгоритмов (1.6) и (1.7) при движении цели по окружности

Рисунок 7 иллюстрирует показатели точности закона управления (1.4), полученного при условии использования в критерии (0.3) диагональной матрицы биквадратного штрафа $(p_{12}=0)$. Результаты исследований подтвердили его способность сопровождать цели, движущиеся по окружности, но с несколько худшей по сравнению с (1.1) точностью и меньшим запасом устойчивости.

Рисунок 8, характеризующий точность закона управления (1.5), который не учитывает кубических составляющих $\Delta \phi^3$, $\Delta \omega^3$, свидетельствует о его возможности сопровождать цели, движущиеся по окружности, но с несколько худшей точностью.

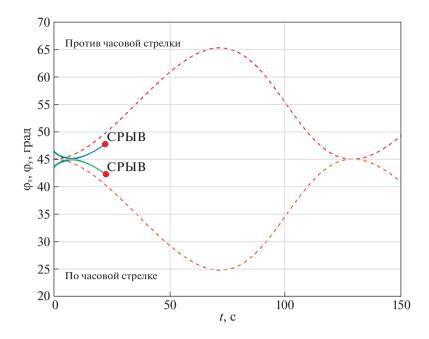


Рис. 11. Бортовой пеленг цели (пунктирная линия) и угол поворота антенны (сплошная линия) для алгоритма (1.8) при движении цели по окружности

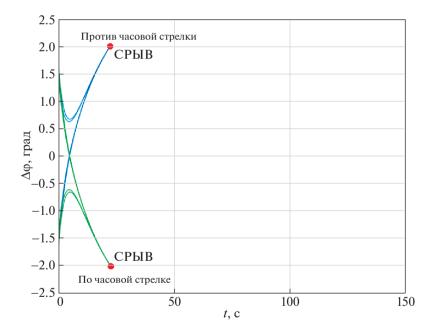


Рис. 12. Ошибка сопровождения по углу для алгоритма (1.8) при движении цели по окружности

Исследование вариантов без учета $\Delta \varphi^3$ и $\Delta \varphi^2 \Delta \omega$ (1.6) и без учета $\Delta \varphi^3$, $\Delta \varphi \Delta \omega^2$ и $\Delta \omega^3$ (1.7) показало, что, практически обладая одинаковыми свойствами, данные законы не обеспечивают бессрывное сопровождение. Графики, поясняющие их работу, приведены на рис. 9, 10.

Графики текущих пеленгов, углов поворота антенны и ошибок сопровождения для традиционного угломера (1.8) представлены на рис. 11, 12.

Из рис. 5—8 видно, что полный вариант закона управления (1.1) и его разновидности (1.2)—(1.5) обеспечивают высокоточное бессрывное сопровождение цели при ее движении как по часовой, так и против часовой стрелки при любом наборе ошибок захвата. При этом хорошо

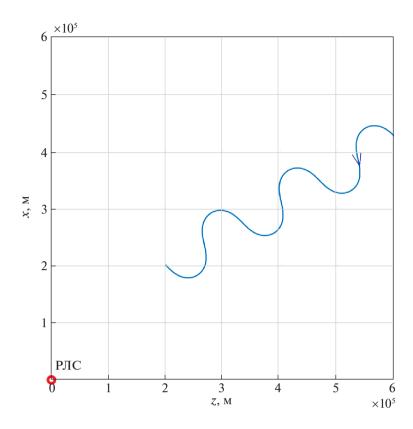


Рис. 13. Геометрия взаимного расположения РЛС и цели при выполнении маневра "змейка"

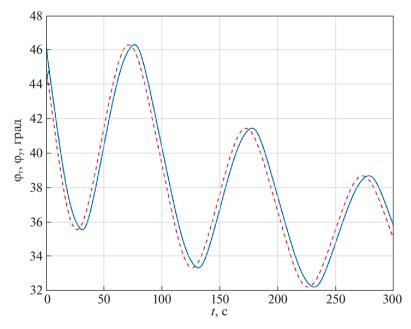


Рис. 14. Бортовой пеленг цели (пунктирная линия) и угол поворота антенны (сплошная линия) для алгоритма (1.1) при маневре цели "змейка"

просматривается сглаживающее влияние кубических слагаемых $K_3 \Delta \phi^3$ и $K_6 \Delta \omega^3$ в области больших ошибок сопровождения. Так что достаточно высокими показателями точности и устойчивости обладают законы управления, содержащие хотя бы одно кубическое слагаемое.

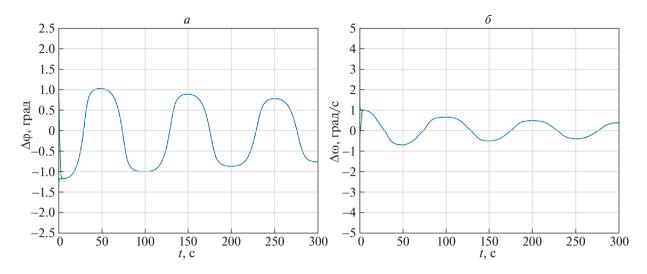


Рис. 15. Ошибки сопровождения по углу (a) и угловой скорости (b) для алгоритма (1.1) при маневре цели "змейка"

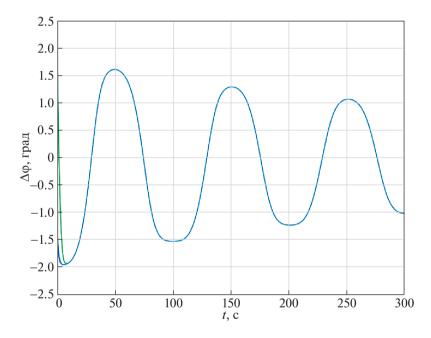


Рис. 16. Ошибки сопровождения по углу для алгоритмов (1.2)—(1.5) при маневре цели "змейка"

В то же время дополнительное исключение любого смешанного слагаемого $\Delta \phi \Delta \omega^2$ или $\Delta \phi^2 \Delta \omega$ приводит к нарастанию текущих ошибок и срыву сопровождения (рис. 9, 10). Особенно показательны эпюры ошибок сопровождения (рис. 11, 12) для традиционного пропорционально-дифференциального метода (1.8), который приводит к срыву существенно быстрее, чем другие варианты управления.

Анализируя результаты исследований этого этапа, можно прийти к заключению, что разработанный метод оптимизации, в отличие от других, позволяет синтезировать управление, которое обеспечивает бессрывное сопровождение целей, движущихся по сложным траекториям со сменой знака производной дальности и угловой координаты.

2.2. Сопровождение цели, движущейся по квазисинусоидальной траектории. Для практики наибольшую ценность имеют результаты сопровождения цели, которую существующие угломеры неспособны беспрерывно сопровождать и которая обычно

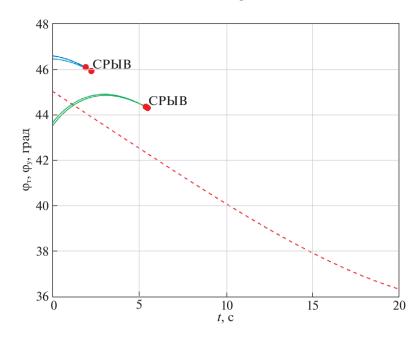


Рис. 17. Бортовой пеленг цели (пунктирная линия) и угол поворота антенны (сплошная линия) для алгоритма (1.8) при маневре цели "змейка"

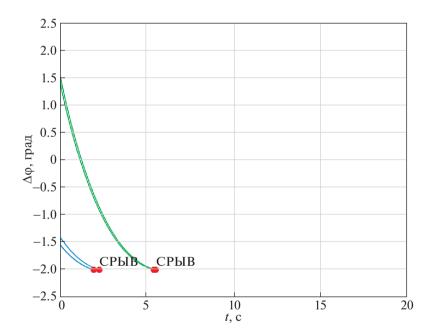


Рис. 18. Ошибка сопровождения по углу для алгоритма (1.8) при маневре цели "змейка"

используется для уклонения от средств поражения [3]. Траектория такого движения цели показана на рис. 13, а графики показателей сопровождения — на рис. 14—18.

При этом на рис. 14 показаны зависимости бортового пеленга и угла поворота антенны для закона управления (1.1), а на рис. 15 — соответствующие графики ошибок слежения по углу и угловой скорости. Из этих двух рисунков видно, что цель устойчиво сопровождается с тенденцией снижения ошибок сопровождения и по углу, и по угловой скорости.

На рис. 16 приведены графики ошибок сопровождения по углу, общие для законов управления (1.2)—(1.5). Они качественно повторяют рис. 15, a, но с несколько худшей точностью.

Остальные варианты управления (1.6), (1.7) и особенно традиционный метод (1.8) не обеспечивают бессрывного сопровождения целей, двигающихся по квазисинусоидальной траектории. В качестве примера на рис. 17, 18 приведены графики траекторий отслеживаемых углов и соответствующих ошибок сопровождения для традиционного алгоритма (1.8).

Заключение. Предложенный способ синтеза систем на основе минимизации квадратично-биквадратных функционалов качества позволяет сформировать более эффективные законы управления. Они решают задачи бессрывного сопровождения новых типов целей, недоступные для типовых систем автосопровождения, оптимизированных по минимуму квадратичных функционалов качества.

При этом для формирования оптимального закона (1.1) не требуется знания старших производных угловых координат, а достаточно знания бортовых пеленгов, углового положения антенны и скоростей их изменения. Последние довольно просто формируются по результатам измерений углового положения антенны и пеленгаторов в плоскостях управления летательного аппарата-носителя.

Необходимо подчеркнуть, что, манипулируя видом биквадратного слагаемого функционала качества и его коэффициентами, можно получить широкий набор алгоритмов бессрывного высокоточного сопровождения для различных областей техники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Верба В.С., Меркулов В.И., Руденко Е.А.* Оптимизация систем автоматического сопровождения воздушных объектов на основе локальных квадратично-биквадратных функционалов. Ч. І. Синтез оптимального управления // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 1. С. 24—29.
- 2. Автоматическое сопровождение целей в РЛС интегрированных авиационных комплексов. Т. 2. Сопровождение одиночных целей / Под ред. В.С. Вербы. М.: Радиотехника, 2018. 486 с.
- 3. Авиационные системы радиоуправления. Т. 3. Системы командного радиоуправления. Автономные и комбинированные системы наведения / Под ред. А.И. Канащенкова и В.И. Меркулова. М.: Радиотехника, 2004. 320 с.
- 4. Многофункциональные радиолокационные комплексы истребителей / Под ред. В.Н. Лепина. М.: Радиотехника, 2014. 296 с.

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЛВИЖУШИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 517.977.5-629.783

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ РАСКРЫТИЯ И СОЗДАНИЯ ФОРМЫ ТРАНСФОРМИРУЕМОГО РЕФЛЕКТОРА КОСМИЧЕСКОГО БАЗИРОВАНИЯ¹

© 2021 г. С. А. Кабанов^{а,*}, Ф. В. Митин^{а,**}

^а БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, Россия
*e-mail: kaba-sa@mail.ru
**e-mail: fedor28@list.ru
Поступила в редакцию 13.09.2019 г.
После доработки 11.05.2020 г.
Принята к публикации 25.05.2020 г.

Представлены математические модели раскрытия и настройки крупногабаритного рефлектора космического базирования. Разработаны алгоритмы оптимального управления для автоматического развертывания элементов антенны и настройки радиоотражающего сетеполотна. Приведены результаты численного моделирования, показывающие преимущество использования алгоритма коррекции параметров структуры управления по сравнению с классическими методами.

DOI: 10.31857/S0002338820060050

Введение. Современный этап развития радиотехнических систем различного назначения связан с разработкой и применением крупногабаритных раскрывающихся антенн-рефлекторов, устанавливаемых на космических аппаратах (КА). При этом возникают новые задачи управления. Так как антенны доставляются на космические орбиты в сложенном состоянии, то необходимо правильно реализовать процесс раскрытия и обеспечить функционирование проектируемой механической системы. Несмотря на значительные успехи в области проектирования раскрывающихся крупногабаритных трансформируемых конструкций космического базирования [1, 2], важной остается задача их плавного и надежного раскрытия.

Крупногабаритный трансформируемый рефлектор (КТР) космического базирования (рис. 1) с использованием вантовой системы состоит из KA (I), относительно которого разворачиваются элементы солнечных батарей (2), обеспечивающих энергией установку, системы (3), облучающей отражающую поверхность. Также в состав рефлектора входит штанга (4), выдвигающая рефлектор (5) на необходимое расстояние, и сетеполотно (6), формирующие необходимую диаграмму направленности. В точках A, B и C находятся двигатели (7), которые переводят КТР из сложенного транспортировочного положения в развернутое штатное.

В общем виде задача раскрытия КТР на каждом этапе решается за счет воздействия на конструкцию исполнительных механизмов (актюаторов). В настоящее время развертывание различных видов крупногабаритных рефлекторов (ферменных, зонтичных, кольцевых и др.) производится за счет энергии пружин или деформированных упругих элементов [3, 4]. Очевидные недостатки данного способа: невозможность осуществления синтеза управления при процессе раскрытия, необходимость создания макета и проведения дополнительных расчетов для определения степени сжатия пружин или закручивания элементов, наличие колебаний и прогибов конструкции.

Альтернативой классическим могут являться автоматические системы, в которых энергия для развертывания элементов рефлектора производится за счет приводов, в частности электрической машины. Для раскрытия рефлекторов расчет динамики и прочности конструкции является одним из определяющих факторов. В процессе приведения КТР в рабочее состояние и после его завершения возникают высокие напряжения в элементах конструкции в результате импульсных

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-08-00646).

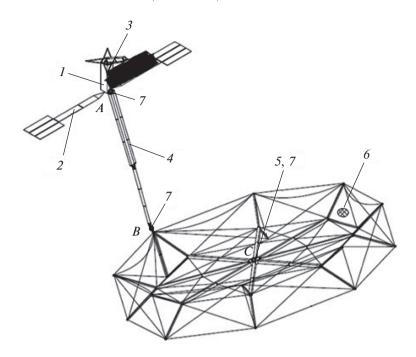


Рис. 1. КТР с использованием тросовой системы поддержания формы рефлектора

воздействий со стороны управляющего органа, а также механизмов упора и фиксации. Вследствие чего могут возникать колебания всего спутника, что приведет к длительному времени неактивности аппарата или даже к его выходу из строя. Решение задачи минимизации колебаний конструкции является не тривиальным и требует особого подхода к каждой рассматриваемой системе [5, 6].

Точность поддержания заданной формы обеспечивает высокое качество передаваемого сигнала. В условиях открытого космоса конструкция подвержена различным возмущающим воздействиям, таким, как перепад температур, радиация, и возникает задача настройки и поддержания формы радиоотражающего сетеполотна.

Ввиду больших затрат на проведение испытаний в космической отрасли важным является этап математического моделирования. Поэтому возникает задача построения адекватной математической модели [7, 8]. А.А. Красовский в работе [9] писал: "Разработка математических моделей требуемого уровня адекватности, их идентификация и сертификация (верификация) для многих новых процессов, объектов и технологий требует очень высоких интеллектуальных и материальных затрат. Для ряда объектов и процессов создание верифицированных математических моделей невозможно без натурных испытаний, а объекты и процессы не могут быть доведены до натурных испытаний без таких математических моделей (т.е. возникает "порочный круг")".

- **1.** Описание системы и постановка задачи. При развертывании КТР имеют место поступательное и вращательное движения. Развертывание происходит поэтапно по соответствующим видам движения. Для описания динамики воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода с учетом диссипативных сил [7].
- 1.1. Раскрытие спицы рефлектора. Вращательное движение встречается при раскрытии штанг и спиц. Математические модели динамики, описанные системой дифференциальных уравнений, на всех этих этапах аналогичны друг другу, а конструкции отличаются только массогабаритными параметрами.

Рассмотрим разворот спицы. Примем, что один актюатор разворачивает только одну спицу в одной плоскости (рис. 2). Спица одним концом жестко закреплена за силовой каркас рефлектора.

Система дифференциальных уравнений первого порядка для определения прогиба спицы h при ее повороте на угол ϕ имеет вид [7] $\dot{\mathbf{X}}_{\mathrm{p}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{\mathrm{p}}, u, t)$, где $\mathbf{X}_{\mathrm{p}} = (\phi \ \omega \ h \ V_{_{\mathrm{ИЗГ}}})^{\mathrm{T}}$ — вектор состояния процесса раскрытия, u — вектор управления, t — время, ω — угловая скорость поворота спицы,

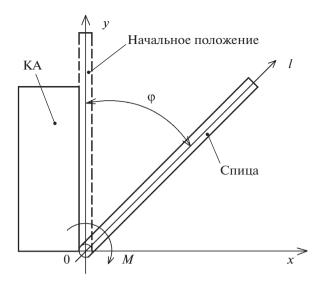


Рис. 2. Раскрытие спицы рефлектора

 $V_{\mbox{\tiny ИЗГ}}$ — линейная скорость изгиба спицы. В поэлементном виде система представляется следующим образом:

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\omega} = \frac{M_{\pi}(U_{1}) - M_{\tau p} - M_{y\pi op}(\varphi, \omega) - M_{\varphi}(\varphi, \omega)}{I},$$

$$\dot{h} = V_{_{\text{M3F}}}, \quad \dot{V}_{_{\text{M3F}}} = -\frac{EI_{_{\text{M3F}}}}{\rho S} \frac{\partial^{4} h}{\partial l^{4}} - \gamma \frac{EI_{_{\text{M3F}}}}{\rho S} \frac{\partial^{4} V_{_{\text{M3F}}}}{\partial l^{4}} + \frac{2}{\rho S} \frac{\partial M(U_{1}, \varphi, \omega)}{\partial l},$$

$$(1.1)$$

где M_{Π} — полезный момент, создаваемый бесколлекторной машиной; U_1 — напряжение питания бесколлекторной машины; $M_{\text{тр}}$ — момент трения; $M_{\text{упор}}$ — момент, создаваемый упором; M_{Φ} — момент, создаваемый фиксатором; I — момент инерции спицы; E — модуль упругости; $I_{\text{изг}}$ — изгибной момент инерции; ρ — плотность материала спицы; S — площадь спицы в поперечном сечении; γ — коэффициент затухания; M — общий момент, действующий на спицу: $M = M_{\Pi} - M_{\text{тр}} - M_{\text{упор}} - M_{\Phi}$. С учетом функций Крылова [10] значения $\partial^4 h/\partial l^4$, исходя из граничных условий при l=0 и l=a, определяются как

$$\frac{\partial^4 h}{\partial l^4} = \rho S \omega_{c_{_{_{\mathrm{H3T}}}k}}^2 h(l) \sin(\omega_{c_{_{_{_{\mathrm{H3T}}}k}}} t) / (EI_{_{_{\mathrm{H3T}}}});$$

$$\frac{\partial^4 V_{_{_{_{\mathrm{H3T}}}}}}{\partial l^4} = \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial^4 h}{\partial l^4}) = \rho S \omega_{c_{_{_{\mathrm{H3T}}}k}}^3 h(l) \cos(\omega_{c_{_{_{_{\mathrm{H3T}}}k}}} t) / (EI_{_{_{\mathrm{H3T}}}}),$$

где $\omega_{c_{max}} - k$ -я собственная частота изгибных колебаний;

$$h(l) = CK_3(Z_k) + DK_4(Z_k);$$
 (1.2)

 $K_3 = 0.5 (\text{ch} Z_k - \cos Z_k); \ K_4 = 0.5 (\text{sh} Z_k - \sin Z_k); \ Z_k = l \rho S \omega_{\text{с}_{\text{нзг}}}^2 / (EI_{\text{нзг}}); \ C, \ D -$ коэффициенты, определяемые из граничных условий задачи. Для определения $\partial M/\partial l$ примем, что полный момент силы M создается на радиусе вала двигателя $R_{\text{дв}}$, приводящего систему в движение; $\partial M/\partial l|_{l=R_{\text{LB}}} = M/R_{\text{дв}}, \ R_{\text{дв}} = 0.5 \text{ м}.$

Моменты, действующие на спицу при раскрытии, определяются как [7]

$$\begin{split} M_{\text{ynop}} &= \left(k_{\text{y,ynop}} \Delta \phi + c_{\text{д,ynop}} \dot{\phi}\right) H_{\text{ynop}}(\Delta \phi), \quad M_{\phi} &= \left(k_{\text{y,}\phi} \Delta \phi + c_{\text{д,}\phi} \dot{\phi}\right) H_{\phi}(\Delta \phi), \\ M_{\pi} &= m_{\phi \text{a} \text{3}} p E_0 U_1 \sin \vartheta / (\omega_1 X_{\text{cuhxp}}), \end{split}$$

где $k_{\rm y,ynop(\varphi)}$ — коэффициент жесткости упругой компоненты модели упора (фиксатора); $c_{\rm д,ynop(\varphi)}$ — коэффициент демпфирования вязкой компоненты модели упора (фиксатора); $\Delta \phi = \phi - \phi_f$ — относительный угол, соответствующий моменту t_f установки на упор (фиксатор) спицы при дости-

жении конечного угла раскрытия ϕ_f ; $H_{\text{упор}}(\Delta \phi)$ — функция, которая принимает значение 1 (при $\Delta \phi > 0$) или 0 (при $\Delta \phi < 0$); $H_{\phi}(\Delta \phi)$ — функция, которая принимает значение 1 (при $\Delta \phi < 0$) или 0 (при $\Delta \phi > 0$) при условии, что спица уже достигла ϕ_f , т.е. сработал упор и $H_{\text{упор}}(\Delta \phi) = 1$; $m_{\phi a 3}$ — число фаз ротора; p — число пар полюсов магнитного поля, E_0 — действующее значение электродвижущей силы (ЭДС) на обмотке статора; ϑ — угол рассогласования (между U_1 и E_0 , для двигателя находится в пределах $[0,\pi/2]$)); ω_1 — угловая скорость вращения ротора двигателя; $X_{\text{синхр}}$ — синхронное сопротивление ($X_{\text{синхр}} = X_{\sigma} + X_a$, где X_{σ} и X_a — индуктивные сопротивления рассеяния и реакции якоря соответственно).

Исходя из результатов численного моделирования, полученных в [7], система (1.1) написана в предположении, что момент инерции постоянный. Угловые скорости ω при раскрытии спицы не превышают 10^{-2} рад/с, тогда при рассматриваемых параметрах (m=32 кг — масса спицы, a=30 м — длина спицы) центробежная сила $F_{II}=m\omega^2a=4.7\times10^{-2}$ Н. Нормальное напряжение в поперечном сечении $\sigma=F_{II}/S=6$ Н/м². Из закона Гука сила упругости $F_y=k\Delta l$ [11], где k=ES/a, $\epsilon=\Delta l/a$, т.е. $\sigma=E\epsilon$ и относительное удлинение $\epsilon=\sigma/E=5\times10^{-11}$. Следовательно, абсолютное удлинение $\Delta l=1.5\times10^{-9}$ м. Возникающая при этом сила Кориолиса $F_K=2m\omega\Delta l$ не превышает $F_K=10^{-11}$ Н, где $\Delta l=10^{-11}$ м/с — скорость удлинения спицы в процессе ее поворота, определенная из результатов моделирования. Закон Гука при изгибе $\sigma=M_{\rm изг}/W$ [11], где $M_{\rm изг}$ — момент изгиба, W — момент сопротивления изгибу. Для наибольшего нормального напряжения на поверхности изгиба на половине длины спицы ($M_{\rm изг}=0.25F_Ka=15\times10^{-12}$ Нм, $W=\pi D^4/8=0.22$ Нм) получаем $\sigma=M_{\rm изг}/W=7\times10^{-11}$. При данных порядках величин момент инерции можно считать постоянным.

Для решения системы уравнений необходимо выполнить интегрирование как по времени, так и по длине. Конструктивно спица имеет вид цилиндрической трубы с внешним радиусом R и изготовлена из материала с плотностью ρ и модулем упругости E. За исполнительный двигатель был взят A2212 Brushless Inrunner. Напряжение питания U_1 , $|U_1| \leq U_{\rm lmax}$ выберем в качестве управления и будем изменять его значения для достижения конечного угла раскрытия.

Момент трения рассчитывается динамически в процессе моделирования системы по формуле [12] $M_{\rm Tp} = \phi_{ish}\phi_{rs}M_{rr} + M_{sl} + M_{seal} + M_{drag}$, где ϕ_{ish} — коэффициент уменьшения за счет нагрева смазочного материала, ϕ_{rs} — коэффициент уменьшения в режиме кинематического голодания, где M_{rr} — момент трения качения, M_{sl} — момент трения скольжения, M_{seal} — момент трения уплотнений, M_{drag} — момент трения за счет сопротивления смазки, взбалтывания, разбрызгивания и пр.

Примем, что спица является тонкостенным кольцом в плоскости изгиба. При этом в сложенном состоянии звенья жестко закреплены и никаких дополнительных перемещений звеньев относительного друг друга не происходит.

Требуется найти такое управление U_1^* , которое переведет систему (1.1) из начального состояния $\mathbf{X}_p(0)$ в конечное $\mathbf{X}_p(t_f)$ при минимизации прогиба спицы h при ограничении на управление U_1 за конечное время t_f

1.2. Выдвижение спицы рефлектора. Одним из этапов развертывания КТР является выдвижение спицы (рис. 3). Необходимо выдвинуть спицу рефлектора космического базирования длиной $x_{\text{выдв}}$ и массой $m_{\text{выдв}}$ из начального транспортировочного положения x_0 в конечное заданное x_6 .

Система дифференциальных уравнений, описывающих динамику выдвижения спицы, имеет вид [7] $\dot{\mathbf{X}}_{\scriptscriptstyle B} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{\scriptscriptstyle B},u,t)$, где $\mathbf{X}_{\scriptscriptstyle B} = (x\ V\ \Delta x_{\scriptscriptstyle \mathrm{cx}}\ V_{\scriptscriptstyle \mathrm{cx}})^{\scriptscriptstyle \mathrm{T}}$ – вектор состояния процесса выдвижения, x – длина выдвижения спицы; V – линейная скорость выдвижения спицы, $\Delta x_{\scriptscriptstyle \mathrm{cx}}$ – продольная

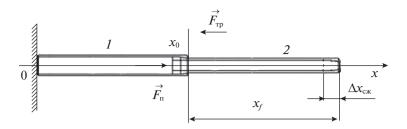


Рис. 3. Выдвижение спицы рефлектора

деформация, $V_{\rm cж}$ — линейная скорость сжатия спицы. В поэлементном виде система представляется следующим образом:

$$\dot{x} = V, \quad \dot{V} = \frac{F_{\Pi}(U_{1}) - F_{\text{Tp}} - F_{\text{ymop}}(x, V) - F_{\Phi}(x, V)}{m_{\text{выдв}}},$$

$$\Delta \dot{x}_{\text{cw}} = V_{\text{cw}}, \quad \dot{V}_{\text{cw}} = -\frac{E}{\rho} \frac{\partial^{2} \Delta x_{\text{cw}}}{\partial x^{2}} - \gamma \frac{E}{\rho} \frac{\partial V_{\text{cw}}}{\partial x} - \frac{F(U_{1}, x, V)}{\rho S},$$

$$(1.3)$$

где F_{Π} — полезная сила; $F_{\text{тр}}$ — сила трения, $F_{\text{упор}}$ — сила, создаваемая упором; F_{Φ} — сила, создаваемая фиксатором; $m_{\text{выдв}}$ — масса выдвигаемой части; F — общая сила, действующая на спицу: $F = F_{\Pi} - F_{\text{тр}} - F_{\text{упор}} - F_{\Phi}$. С учетом функций Крылова [7, 10] значение $\partial^2 \Delta x_{\text{сж}} / \partial x^2$, исходя из граничных условий при x = 0 и $x = x_{\text{выдв}}$, равно $\partial^2 \Delta x_{\text{сж}} / \partial x^2 = \rho \omega_{\text{с}_{\text{прол }k}}^2 \sin(\omega_{\text{с}_{\text{прол }k}} t) / E$, где $\omega_{\text{с}_{\text{прол }k}} - k$ -я собственная частота продольных колебаний. В работе [7] показано, что

$$\partial \Delta x_{\text{cw}} / \partial x = \sqrt{\rho / E} \omega_{\text{c}_{\text{npog } k}} \cos(\sqrt{\rho / E} \omega_{\text{c}_{\text{npog } k}} x) \sin(\omega_{\text{c}_{\text{npog } k}} t),$$

тогда можно записать

$$\partial V_{\text{cw}}/\partial x = \partial/\partial t \left(\partial \Delta x_{\text{cw}}/\partial x\right) = \sqrt{\rho/E} \omega_{\text{c}_{\text{npog}\,k}}^2 \cos(\sqrt{\rho/E} \omega_{\text{c}_{\text{npog}\,k}} x) \cos(\omega_{\text{c}_{\text{npog}\,k}} t).$$

Для описания F_{Π} можно использовать уравнение, аналогичное M_{Π} в системе (1.1). Для создания F_{Π} необходимо учитывать конструкцию передачи, например цепную, зубчатую и т.д., что само по себе является отдельной технической задачей. Для полного описания также необходимо учитывать люфты и "мертвые" зоны механизма. Ввиду всего вышесказанного уравнение для F_{Π} будет состоять из уравнения типа M_{Π} в системе (1.1), умноженного на коэффициент k_f , который отвечает за преобразование вращающего момента в толкающую силу $F_{\Pi} = k_f M_{\Pi}$. Аналогично этапу раскрытия спицы учтем воздействие механизмов упора и фиксации.

При выдвижении спицы необходимо минимизировать сжатие $\Delta x_{\rm cж}$, так как оно является эффективным показателем нагрузок, оказываемых на спицу. Силу трения $F_{\rm rp}$ примем равной константе. Соединение между звеньями 1 и 2 можно считать без наличия люфтов.

Управление выдвижением происходит за счет изменения напряжения питания электродвигателя $u=U_1, |U_1| \leq U_{\rm lmax}$. Требуется найти такое управление U_1^* , которое переведет систему (1.3) из начального состояния $\mathbf{X}_{\rm B}(0)$ в конечное $\mathbf{X}_{\rm B}(t_f)$ при минимизации сжатия спицы $\Delta x_{\rm cx}$ и ограничении на управление U_1 за конечное время t_f .

1.3. Настройка формы радиоотражающей поверхности. Рассмотрим процесс настройки формы радиоотражающей поверхности. На рис. 4 представлена одна спица в сечении: I — спица, 2 и 3 — внешняя и задняя сетка, 4 — ванты, в которых установлены актюаторы. Необходимо, изменяя длину вант 4 с помощью актюаторов 5, задать желаемую форму радиоотражающего сетеполотна 2.

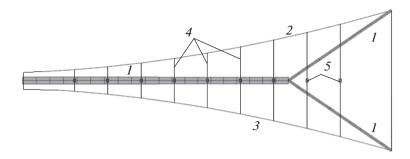


Рис. 4. Настройка формы радиоотражающего сетеполотна

Для определения формы радиоотражающего сетеполотна в пространстве удобно представить ее в виде мембраны. Тогда дифференциальное уравнение мембраны можно описать уравнением Лапласа [8]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{S_{\rm M}},\tag{1.4}$$

где x, y, z — оси координат, q — распределенная нагрузка, $S_{\scriptscriptstyle \rm M}$ — площадь поверхности мембраны.

В качестве актюаторов рассматривались пьезопривод, двигатель постоянного тока (ДПТ). Система дифференциальных уравнений, описывающих пьезоэлемент с исполнительным органом, имеет вид [13] $\dot{\mathbf{X}}_{\text{пэ}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{\text{пэ}}, u, t)$, где $\mathbf{X}_{\text{пэ}} = (\Delta l_{\text{пэ}} \ V_{\text{пэ}} \ U_{\text{пэ}})^{\text{T}}$ — вектор состояния пьезоэлемента; $\Delta l_{\text{пэ}}$ — изменение длины (ход) пьезоактюатора; $V_{\text{пэ}}$ — скорость выдвижения пьезоактюатора; $U_{\text{пэ}}$ — напряжение, приложенное к электродам пьезоактюатора, или

$$\Delta \dot{I}_{\Pi 9} = V_{\Pi 9},
\dot{V}_{\Pi 9} = \frac{K_{0}U_{\Pi 9} + F_{CTAT} - K_{y. \Pi 9}\Delta I_{\Pi 9} - K_{д. \Pi 9}V_{\Pi 9}}{m_{\Sigma}},
\dot{U}_{\Pi 9} = \frac{e_{n}}{C_{0}R_{\text{BHYT}}K_{\text{д. \Pi 9}}} - \frac{U_{\Pi 9}}{C_{0}R_{\text{BHYT}}K_{\text{д. \Pi 9}}} - \frac{K_{n}V_{\Pi 9}}{C_{0}K_{\text{д. \Pi 9}}},$$
(1.5)

где K_0 — коэффициент обратного пьезоэффекта, $F_{\text{стат}}$ — статическое усилие, $K_{\text{у. пэ}}$ — коэффициент упругости пьезоактюатора, $K_{\text{д. пэ}}$ — коэффициент внутреннего демпфирования пьезоактюатора, e_n — напряжение от источника ЭДС, C_0 — емкость, $R_{\text{внут}}$ — внутреннее сопротивление, K_n — коэффициент прямого пьезоэффекта, m_{Σ} — суммарная масса, состоящая из массы самого пьезоактюатора и перемещаемой массы.

Задача управления пьезоактюатором состоит в приведении его из начального положения $\mathbf{X}_{\text{пэ}}(0)$ в заданное конечное состояние $\mathbf{X}_{\text{пэ}}(t_f)$ при ограничении на управление, за которое принято напряжение от источника ЭДС e_n , $|e_n| \le e_{n \text{ max}}$.

Система уравнений, описывающая ДПТ с учетом угла поворота вала, имеет вид [14] $\dot{\mathbf{X}}_{\text{ДПТ}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{\text{ДПТ}}, u, t)$, где $\mathbf{X}_{\text{дпт}} = (\phi_{\text{вал}} \ \omega_{\text{вал}} \ I_{\text{я}})^{\text{Т}}$ – вектор состояния ДПТ; $\phi_{\text{вал}}$ – угол поворота вала двигателя; $I_{\text{я}}$ – ток якоря, или

$$\dot{\phi}_{\text{BAJ}} = \omega_{\text{BAJ}},$$

$$\dot{\omega}_{\text{BAJ}} = \frac{k_m I_{\text{g}} - M_{\text{BHeIII}}}{J_{\text{g}}},$$

$$\dot{I}_{\text{g}} = \frac{U_{\text{ДПТ}} - R_{\text{g}} I_{\text{g}} - k_e \omega_{\text{BAJ}}}{L_{\text{g}}},$$
(1.6)

где k_m — коэффициент пропорциональности (постоянная момента двигателя), $M_{\text{внеш}}$ — момент внешних сил, $J_{\text{я}}$ — момент инерции ротора двигателя, $U_{\text{ДПТ}}$ — внешнее напряжение ДПТ, $R_{\text{я}}$ — ак-

тивное сопротивление обмотки якоря, k_e — коэффициент пропорциональности (постоянная ЭДС двигателя), $L_{\rm g}$ — индуктивность якорной обмотки. В качестве редуктора рассматривается диск радиуса $R_{\rm pen}$, который одевается непосредственно на вал двигателя и обеспечивает изменение длины ванты на длину $\Delta l_{\rm ДПТ} = \phi_{\rm вал} R_{\rm pen} \pi / 180^{\circ}$.

Задача управления ДПТ состоит в приведении его из начального положения $\mathbf{X}_{\text{ДПТ}}(0)$ в заданное конечное состояние $\mathbf{X}_{\text{ДПТ}}(t_f)$ при ограничении на управление, за которое принято внешнее напряжение питания U_a , $|U_a| \leq U_{a\max}$.

2. Разработка стратегий управления. Оптимизация процесса создания и поддержания формы КТР космического базирования является сложной задачей. Построение устойчивых алгоритмов поиска оптимальной траектории в реальном масштабе времени затруднено, а зачастую невозможно ввиду трудности обеспечения сходимости решений, возникающих из принципа максимума [15, 16] двухточечных краевых задач. Поэтому требуется разработать методику и алгоритмы, которые позволят получать надежное решение задачи оптимизации траектории в реальном времени движения.

Одним из возможных подходов к решению задачи синтеза оптимального управления является разработка алгоритма оптимизации движения с коррекцией параметров структуры управления [17—19]. При этом управление может вычисляться в реальном времени в процессе раскрытия как функция текущих значений фазовых координат. В этом случае из применения принципа максимума определяется структура управления, параметры которой оптимизируются во вспомогательной задаче.

Системы (1.1) и (1.3) содержат в правых частях уравнений частные производные. Примем, что параметры колебаний данных систем вычисляются на конце спицы, т.е. при l=a. Также будем считать первую форму колебаний на конце спицы, так как первая форма вносит самый большой вклад в амплитуду колебаний, а на конце спицы они максимальны. Тогда частные производные $\partial^4 h/\partial l^4$, $\partial^4 V_{\rm изг}/\partial l^4$, $\partial^2 \Delta x_{\rm cx}/\partial x^2$, $\partial V_{\rm cx}/\partial x$ примут конкретные значения, что позволяет применять принцип максимума Понтрягина, который был разработан применительно к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим задачи разворота, выдвижения спицы и настройки сетеполотна при наличии наблюдений по полным данным и при отсутствии возмущений.

2.1. Раскрытие спицы рефлектора. Используем принцип максимума для поиска оптимального управления с учетом постановки задачи минимизации прогиба h на всем времени развертывания. В качестве целевого рассмотрим интегротерминальный функционал:

$$J = \mathbf{V}_f(\mathbf{X}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{X}, u, t) dt,$$
(2.1)

где $\mathbf{V}_f = 0.5 \left[\mathbf{X}_{\mathrm{p}}(t_f) - \mathbf{X}_{\mathrm{p}\ f} \right]^{\mathrm{T}} \mathbf{\rho} \left[\mathbf{X}_{\mathrm{p}}(t_f) - \mathbf{X}_{\mathrm{p}\ f} \right]; f_0 = 0.5h^2/k_{\mathrm{p}}^2; \mathbf{\rho} = \mathrm{diag}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4), k_{\mathrm{p}} - \mathrm{коэффици-}$ енты этапа раскрытия; $\mathbf{X}_{\mathrm{p}\ f} = (\phi_f\ \omega_f\ h_f\ V_{\mathrm{usr}\ f})^{\mathrm{T}} - \mathrm{заданные}$ конечные значения соответствующих переменных процесса раскрытия. В системе уравнений (1.1) прогиб h зависит и от времени, и от длины, поэтому для упрощения вычислений в первом приближении прогиб можно принять равным $h(l) = Ml^2/(2EI_{\mathrm{usr}})$, где $M - \mathrm{oбщ}$ ий момент, действующий на спицу [20]. Так как $M = EI_{\mathrm{usr}} \partial^2 h/\partial l^2$, то $h(l) = 0.5l^2 \partial^2 h/\partial l^2$. Исходя из (1.2) получим $\partial^2 h/\partial l^2 = \alpha^2 [AK_1(Z_k) + BK_2(Z_k)]$, где $\alpha = \rho S\omega_{\mathrm{c}}^2$ (EI_{usr}); $K_1 = 0.5(\mathrm{ch}Z + \mathrm{cos}\,Z)$, $K_2 = 0.5(\mathrm{sh}Z + \mathrm{sin}\,Z)$, $A, B - \mathrm{коэффициенты}$, определяемые из граничных условий задачи. Проделав данные преобразования получаем выражение для первого приближения прогиба в виде $h(l) = 0.5l^2\alpha^2 [AK_1(Z_k) + BK_2(Z_k)]$, подставив в него значения коэффициентов A, B получим уравнение идентичное (1.2). Данное упрощение является допустимым, поскольку принимается, что максимальный прогиб достигается на конце спицы. Спица в каждый момент времени жестко закреплена одним концом, а второй конец является свободным. На спицу действует момент, приложенный к закрепленному концу спицы.

Поскольку в терминальную часть функционала (2.1) входят требования не только к конечным значениям угла ϕ и прогиба h, но и к их производным, то механизмы упора и фиксатора при оп-

тимальном управлении будут нести в себе только функции собственно фиксации спиц при достижении упора и не приводить к колебаниям в этих механизмах.

С учетом сделанных допущений гамильтониан системы (1.1) примет вид $H = \mathbf{P}^T \mathbf{f}(\mathbf{X}_p) + f_0$, где $\mathbf{P} = [P_{\varphi} \ P_{\phi} \ P_h \ P_{V_{uur}}]^T$ — вектор сопряженных переменных, или

$$\begin{split} H &= P_{\varphi} \omega + P_{\omega} \frac{M_{\Pi} - M_{\text{Tp}}}{I} + P_{h} V_{\text{M3}\Gamma} + P_{V_{\text{M3}\Gamma}} \left(-\frac{EI_{\text{M3}\Gamma}}{\rho S} \frac{\partial^{4} h}{\partial l^{4}} - \gamma \frac{EI_{\text{M3}\Gamma}}{\rho S} \frac{\partial^{4} V_{\text{M3}\Gamma}}{\partial l^{4}} + \frac{2}{\rho S} \frac{M_{\Pi} - M_{\text{Tp}}}{R_{\text{JB}}} \right) + \\ &+ \frac{1}{8} \frac{l^{4}}{E^{2} I_{\text{M3}\Gamma}^{2} k_{\text{p}}^{2}} (M_{\Pi}^{2} - 2M_{\Pi} M_{\text{Tp}} + M_{\text{Tp}}^{2}). \end{split}$$

Найдем сопряженные переменные:

$$\dot{P}_{\varphi} = 0, \quad \dot{P}_{\omega} = -P_{\varphi}, \quad \dot{P}_{h} = 0, \quad \dot{P}_{V_{\text{HSF}}} = -P_{h}; \quad P_{\varphi}(t_{f}) = \rho_{1}[\varphi(t_{f}) - \varphi_{f}],
P_{\omega}(t_{f}) = \rho_{2}[\omega(t_{f}) - \omega_{f}], \quad P_{h}(t_{f}) = \rho_{3}[h(t_{f}) - h_{f}], \quad P_{V_{\text{HSF}}}(t_{f}) = \rho_{4}[V_{\text{HSF}}(t_{f}) - V_{\text{HSF}}].$$
(2.2)

Так как на управление наложено ограничение $|U_1| \le U_{1 \text{ max}}$, то оно определяется из условия [16] $\partial H/\partial U_1 = 0$:

$$U_{1}(t) = \frac{M_{\text{Tp}}(t)}{A} - P_{\omega}(t) \frac{4E^{2}I_{\text{изг}}^{2}k_{\text{p}}^{2}}{AI} - P_{V_{\text{изг}}}(t) \frac{8E^{2}I_{\text{изг}}^{2}k_{\text{p}}^{2}}{AoSR_{\text{mag}}}$$
(2.3)

при $|U_1| < U_{1 \text{ max}}$ или $U_1 = U_{1 \text{ max}} \text{sign} U_1$ при $|U_1| \ge U_{1 \text{ max}}$, где $A = m_{\text{фаз}} p E_0 \sin \vartheta / (\omega_1 X_{\text{синхр}})$.

2.2. Выдвижение спицы рефлектора. Аналогично этапу раскрытия спицы рассмотрим этап выдвижения. Исходя из постановки задачи, целевой критерий примем в виде

$$J = \mathbf{V}_f(\mathbf{X}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{X}, u, t) dt,$$
(2.4)

где $\mathbf{V}_f = 0.5 \left[\mathbf{X}_{\rm B}(t_f) - \mathbf{X}_{\rm B}_f \right]^{\rm T} \mathbf{\rho} \left[\mathbf{X}_{\rm B}(t_f) - \mathbf{X}_{\rm B}_f \right]; f_0 = 0.5 \Delta x_{\rm cx}^2 / k_{\rm B}^2; \mathbf{X}_{\rm B}_f = \left(x_f \ V_f \ \Delta x_{\rm cx}_f \ V_{\rm cx}_f \right)^{\rm T} -$ заданные конечные значения соответствующих переменных; $\mathbf{\rho} = {\rm diag}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4), k_{\rm B} -$ коэффициенты этапа выдвижения.

В первом приближении сжатие $\Delta x_{\rm cж}$ можно принять равным [20] $\Delta x_{\rm cж} = Fl/(ES)$, где F- общая сила, действующая на спицу. Для оптимального управления по критерию (2.4) при наличии в системе упора и фиксатора аналогично случаю раскрытия спицы гамильтониан системы (1.3)

примет вид $H = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{X}_{\mathrm{B}}) + f_{0}$, где $\mathbf{P} = [P_{x} \ P_{V} \ P_{\Delta \mathbf{x}_{\mathrm{Cx}}} \ P_{V_{\mathrm{Cx}}}]^{\mathrm{T}}$ – вектор сопряженных переменных, или

$$\begin{split} H &= P_{x}V + P_{V}\frac{F_{\Pi} - F_{\text{Tp}}}{m_{\text{выдв}}} + P_{\Delta x_{\text{cw}}}V_{\text{cw}} + P_{V_{\text{cw}}}\left(-\frac{E}{\rho}\frac{\partial^{2}\Delta x_{\text{cw}}}{\partial x^{2}} - \gamma\frac{E}{\rho}\frac{\partial V_{\text{cw}}}{\partial x} - \frac{F_{\Pi} - F_{\text{Tp}}}{\rho S}\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{l^{2}}{E^{2}S^{2}k_{\text{B}}^{2}}(F_{\Pi}^{2} - 2F_{\Pi}F_{\text{Tp}} + F_{\text{Tp}}^{2}). \end{split}$$

Найдем сопряженные переменные

$$\dot{P}_{x} = 0, \quad \dot{P}_{V} = -P_{x}, \quad \dot{P}_{\Delta x_{\rm cx}} = 0, \quad \dot{P}_{V_{\rm cx}} = -P_{\Delta x_{\rm cx}}; \quad P_{x}(t_{f}) = \rho_{1}[x(t_{f}) - x_{f}],$$

$$P_{V}(t_{f}) = \rho_{2}[V(t_{f}) - V_{f}], \quad P_{\Delta x_{\rm cx}}(t_{f}) = \rho_{3}[\Delta x_{\rm cx}(t_{f}) - \Delta x_{\rm cx}], \quad P_{V_{\rm cx}}(t_{f}) = \rho_{4}[\Delta V_{\rm cx}(t_{f}) - \Delta V_{\rm cx}],$$
(2.5)

и управление с учетом ограничения $|U_1| \le U_{1 \max}$ из условия $\partial H/U_1 = 0$:

$$U_{1}(t) = \frac{F_{\text{Tp}}(t)}{B} + P_{V_{\text{cx}}}(t) \frac{E^{2}S^{2}k_{\text{B}}^{2}}{\text{o}Sl^{2}B} - P_{V}(t) \frac{E^{2}S^{2}k_{\text{B}}^{2}}{m_{\text{more}}l^{2}B}$$

при $|U_1| < U_{1 \text{ max}}$ или $U_1 = U_{1 \text{ max}} \text{sign} U_1$ при $|U_1| \ge U_{1 \text{ max}}$, где $B = k_f \, m_{\phi a 3} p E_0 \sin \vartheta / (\omega_1 X_{\text{синхр}})$.

2.3. Настройка формы радиоотражающей поверхности. Примем, что необходимо перенастроить форму радиоотражающего сетеполотна. Для этого по формуле (1.4) определяется текущее состояние фронтальной сети. Вычисляются необходимые размеры вант для за-

дания желаемой формы радиоотражающего сетеполотна. С помощью актюаторов в каждой точке происходит изменение длины ванты.

Рассмотрим в качестве исполнительного органа пьезоактю при оптимизации перевода системы из одного положения в другое с фиксированным начальным и конечным состоянием выберем критерий $J=t_f$.

Гамильтониан системы (1.5) имеет вид $H = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{X}_{\scriptscriptstyle{\Pi}9})$, где $\mathbf{P} = [P_{\Delta l_{\scriptscriptstyle{\Pi}9}} \ P_{V_{\scriptscriptstyle{\Pi}9}} \ P_{V_{\scriptscriptstyle{\Pi}9}}]^{\mathrm{T}}$ – вектор сопряженных переменных, или

$$H = P_{\Delta l_{\Pi 3}} V + P_{V_{\Pi 3}} \left(\frac{K_0 U_{\Pi 3} + F_{\text{CTAT}} - K_{\text{y. $\Pi 3$}} \Delta l_{\Pi 3} - K_{\text{д. $\Pi 3$}} V_{\Pi 3}}{m_{\Sigma}} \right) + P_{U_{\Pi 3}} \left(\frac{e_n}{C_0 R_{\text{BHYT}} K_{\text{д. $\Pi 3$}}} - \frac{U_{\Pi 3}}{C_0 R_{\text{BHYT}} K_{\text{д. $\Pi 3$}}} - \frac{K_n V_{\Pi 3}}{C_0 K_{\text{д. $\Pi 3$}}} \right).$$

Найдем сопряженные переменные

$$\begin{split} \dot{P}_{\Delta l_{\Pi 3}} &= P_{V_{\Pi 3}} \, K_{\mathrm{y.\,\Pi 3}} \big/ m_{\Sigma} \,, \quad \dot{P}_{V_{\Pi 3}} = -P_{\Delta l_{\Pi 3}} + P_{V_{\Pi 3}} \, K_{\mathrm{д.\,\Pi 3}} \big/ m_{\Sigma} + P_{U_{\Pi 3}} \, K_{n} \big/ C_{0} K_{\mathrm{д.\,\Pi 3}} \,, \\ \dot{P}_{U_{\Pi 3}} &= -P_{V_{\Pi 3}} \, K_{0} \big/ m_{\Sigma} + P_{U_{\Pi 3}} \big/ (C_{0} R_{\mathrm{BHYT}} K_{\mathrm{д.\,\Pi 3}}) \,, \quad P_{\Delta l_{\Pi 3}} (t_{f}) = \rho_{1} [\Delta l(t_{f}) - \Delta l_{f}] \,, \\ P_{V} \, \, (t_{f}) &= \rho_{2} [V(t_{f}) - V_{f}] \,, \quad P_{U} \, \, (t_{f}) = \rho_{3} [U(t_{f}) - U_{f}] \,. \end{split}$$

При решении задачи оптимальности по быстродействию системы дифференциальных уравнений (1.5) структура управления, согласно принципу максимума, при наличии ограничения на управление $|e_n| \le e_{n\max}$ примет вид

$$e_n(t) = e_{n \text{ max}} \operatorname{sign} P_{U_{na}}(t). \tag{2.6}$$

При выборе в качестве актюатора ДПТ для задачи, аналогичной пьезоактюатору, получим следующий гамильтониан системы (1.6): $H = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(\mathbf{X}_{\Pi\Pi\mathrm{T}})$, где $\mathbf{P} = [P_{I_{\mathrm{g}}} \ P_{\omega_{\mathrm{Ban}}} \ P_{\phi_{\mathrm{Ban}}}]^{\mathrm{T}}$ — вектор сопряженных переменных, или

$$H = P_{\phi_{\text{Ba}}} \omega_{\text{Ba}} + P_{\omega_{\text{Ba}}} \frac{k_m}{J_{\text{g}}} I_{\text{g}} - P_{\omega_{\text{Ba}}} \frac{M_{\text{BHeIII}}}{J_{\text{g}}} + P_{I_{\text{g}}} \left(\frac{U_{\text{ДПТ}}}{L_{\text{g}}} - \frac{R_{\text{g}}I_{\text{g}}}{L_{\text{g}}} - \frac{k_{e}\omega_{\text{Ba}}}{L_{\text{g}}} \right).$$

Сопряженные переменные

$$\begin{split} \dot{P}_{\phi_{\text{Ba}\pi}} &= 0, \quad \dot{P}_{\omega_{\text{Ba}\pi}} = -P_{\phi_{\text{Ba}\pi}} + P_{I_{\text{R}}} \, k_e / L_{\text{R}} \,, \quad \dot{P}_{I_{\text{R}}} = -P_{\omega_{\text{Ba}\pi}} \, k_m / J_{\text{R}} + P_{I_{\text{R}}} \, R_{\text{R}} / L_{\text{R}} \,; \\ P_{\phi_{\text{Ba}\pi}}(t_f) &= \rho_1 [\phi_{\text{Ba}\pi}(t_f) - \phi_{\text{Ba}\pi f}], \quad P_{\omega_{\text{Ba}\pi}}(t_f) = \rho_2 [\omega_{\text{Ba}\pi}(t_f) - \omega_{\text{Ba}\pi f}], \quad P_{I_{\text{R}}}(t_f) = \rho_3 [I_{\text{R}}(t_f) - I_{\text{R}f}]. \end{split}$$

При оптимизации по быстродействию системы дифференциальных уравнений (1.6) структура управления при наличии ограничения на управление $|U_{\rm ДПT}| \le U_{\rm ДПT\ max}$ примет вид $U_{\rm ДПT}(t) = -U_{\rm ДПT\ max} {\rm sign} P_{I_u}(t)$.

Решение перечисленных задач раскрытия и выдвижения спиц рефлектора, настройки сетеполотна с использованием принципа максимума позволяет выявить структуру оптимального управления. Используя момент времени τ_i переключения структуры управления в качестве параметров, представим структуру управления в виде:

$$u(t) = u_1(t) + \Delta \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{l}(t, \mathbf{\tau}_i),$$

где $i = \overline{1,r}$, i — номер участка структуры управления, r — количество переключений управления в структуре, $\mathbf{l}^{\mathrm{T}}(t,\tau_{i}) = [l(t,\tau_{1})\ l(t,\tau_{2})...l(t,\tau_{r})]$, $\Delta u_{i} = -u_{i} + u_{i+1}$, $u_{i}(t) = u_{1}(t)$ при $t < \tau_{1}$. Здесь u_{i} и u_{i+1} — управления на предыдущем и последующем участках этой структуры относительно τ_{1} соответственно, а $l(t,\tau_{i})$ — единичные функции.

К исходным системам (1.1), (1.3), (1.5), (1.6) добавляются уравнения $\dot{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{w}$, где $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1 \, \tau_2 \, ... \, \tau_r)^T$; $\boldsymbol{w} = (w_1 \, w_2 \, ... \, w_r)^T$ — векторы новых переменных, принимаемых за управления.

Вспомогательную задачу можно решать с минимизацией критерия

$$J_1 = J + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{w}^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{w} dt$$

или критерия

$$J_2 = J_1 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{w}_0^T \mathbf{k}^{-2} \mathbf{w}_0 dt,$$
 (2.7)

где $\mathbf{k} = \text{diag}(k_1, k_2, k_3, k_4)$.

Тогда уравнения для обобщенного вектора состояния запишутся как

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, u, t),$$

$$\dot{\mathbf{\tau}} = \mathbf{w}$$
(2.8)

При свободном времени окончания t_f оно также является корректируемым параметром: $\mathbf{\tau} = (\tau_1 \ \tau_2 \ ... \ \tau_r \ t_f)^{\mathrm{T}}$. Введением нового вектора управления **w** исходная задача оптимизации по определению *u* решается косвенно — через нахождение этого вектора **w**.

Для обеспечения развертывания крупногабаритного рефлектора космического базирования с мягким выходом к упорам можно также использовать алгоритм последовательной оптимизации по иерархии целевых функционалов [21].

- **3.** Моделирование. Рассмотрим отдельно задачи для раскрытия, выдвижения спиц и настройки сетеполотна.
- 3.1. Раскрытие спиц рефлектора. Рассмотрим первый этап развертывания КТР раскрытие спиц. При раскрытии системы не оказывается никаких возмущающих воздействий и управление осуществляется по полным данным. Процесс получения информации с датчиков (без ошибок) происходит непрерывно.

Спица разворачивается из начального траспортировочного положения при значении угла поворота $\phi_0=0$ и фиксируется при достижении заданного угла $\phi_f=\pi/2$. Спица в начальном положении находится в состоянии покоя, соответсвенно угловая скорость $\omega_0=0$, прогиба $h_0=0$ и скорость изгиба $V_{\text{изг}_0}=0$. Конечные значения угловой скорости $\omega_f=0$, прогиба $h_f=0$ и скорости изгиба $V_{\text{изг}_f}=0$. Примем время раскрытия $t_f=130$ с, максимальная допустимая амплитуда прогиба $h_{\text{max}}=10$ мм. Значение коэффициента затухания примем $\gamma=0.04$ с [7]. Первая собственная частота изгибных колебаний для случая заделанного левого и свободного правого концов [10] $\omega_{\text{с}_{\text{изг}_1}}=14.465$ Гц. Число фаз ротора $m_{\phi a 3}=2$, число пар полюсов магнитного поля p=2, действующее значение ЭДС на обмотке статора $E_0=2.5$ В, синхронное сопротивление $X_{\text{синхр}}=22\times10^{-3}$ Ом, угол рассогласования между полем ротора и статора $\vartheta=\pi/10$ при любой нагрузке. Коэффициенты $k_{\text{у,упор}}=k_{\text{у,}\phi}=100$, $c_{\text{д,упор}}=30$, $c_{\text{д,\phi}}=25$.

Были выбраны следующие параметры спицы при моделировании: материал пластик QHF — 0140: плотность материала $\rho=1600~{\rm kr/m^3}$, модуль упругости (Юнга) $E=1.2\times 10^{11}~{\rm Па}$, длина спицы $a=9.75~{\rm m}$, масса спицы (всех вложенных звеньев) $m=32~{\rm kr}$. Рассматривается спица с сечением в виде кольца с внешним радиусом $R=0.26~{\rm m}$ и внутренним радиусом $r=0.25~{\rm m}$. Момент инерции I будет равняться $I=\frac{1}{2}mR^2+\frac{1}{3}ma^2=1015.4~{\rm kr}\cdot {\rm m}^2$. Изгибной момент инерции $I_{\rm изг}=\pi R^3\delta=5.52\times 10^{-4}~{\rm m}^4$, где $\delta=0.01~{\rm m}$ — толщина стенки спицы.

В качестве регулятора было рассмотрено применение различной структуры (пропорционально-интегрально-дифференцирующего) ПИД-регулятора, в том числе с ограничениями на управление. Измерению и вычислению доступны $\Delta \mathbf{X}_{\mathrm{p}} = \mathbf{X}_{\mathrm{p}\ f} - \mathbf{X}_{\mathrm{p}}(t)$, интеграл $\int_0^t \Delta \mathbf{X}_{\mathrm{p}} dt$ и производная $\Delta \dot{\mathbf{X}}_{\mathrm{p}}$.

Проанализировав работу различной структуры ПИД-регулятора, выберем в качестве наилучшего (пропорционально-интегральный) ПИ-регулятор, так как его использование обеспечило удовлетворительное качество переходного процесса. Для перевода системы из начального состояния $\mathbf{X}_{\mathrm{p}}(0) = (0\ 0\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$ в конечное $\mathbf{X}_{\mathrm{p}}(t_f) = (\pi/2\ 0\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$ с отсутствием перерегулирования по углу разворота ф потребовалось $t_f = 462.2\ \mathrm{c}$, что больше заданного времени развертывания, равного 130 с. Максимальное значение величины прогиба h составило $h_{\mathrm{max}} = 1.35 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}$.

Можно настроить ПИ-регулятор таким образом, чтобы система достигала конечного значения $\mathbf{X}_{\rm p}(t_f) = (\pi/2\ 0\ 0\ 0)^{\rm T}$ за $t_f = 130\ {\rm c}$, но из-за наличия в системе упора и фиксатора колебания спицы продолжаются больше заданного времени (340 c) при максимальной величине прогиба $h_{\rm max} = 0.0018\ {\rm m}$.

При оптимальном управлении краевая задача (1.1), (2.2), (2.3) решалась методом Ньютона [15] с использованием вектора невязок:

$$\mathbf{Z}_{H}(t,t_f) = \left[\mathbf{\varphi}(t_f) - \mathbf{\varphi}_f \quad \mathbf{\omega}(t_f) - \mathbf{\omega}_f \quad h(t_f) - h_f \quad V_{\text{MST}}(t_f) - V_{\text{MST}} \right]^{\text{T}}.$$

Здесь для более быстрой сходимости метода Ньютона при получении решения поставленной задачи можно считать фиксированным правый конец траектории. Это позволяет не включать в вектор невязок значения сопряженных переменных на правом конце траектории при сохранении условий оптимальности. Данное упрощение допустимо, поскольку метод Ньютона используется для выявления структуры оптимального управления.

Интегрирование проводилось методом Эйлера с шагом $\Delta t = 0.01$ с при $k_{\rm p} = 1 \times 10^{-7}$. Были приняты начальные условия для компонент вектора сопряженных переменных $P(t_0)$: $P_{\rm \phi}(t_0) = 0$, $P_{\rm o}(t_0) = -20$, $P_{\rm h}(t_0) = -0.1$, $P_{\rm h, tot}(t_0) = -1$ при приращениях для сопряженных переменных $\Delta P|_{\rm \phi} = 0.1$, $\Delta P|_{\rm o} = 1$, $\Delta P|_{\rm h} = 0.01$, $\Delta P|_{\rm v, tot} = 0.1$ в процедуре численного определения частных производных от вектора невязок. Итерационная процедура выполнялась с точностью $\|\mathbf{Z}_{\rm H}(t,t_f)\| \le 0.001$. При заданных начальных условиях за 13 итераций были получены оптимальные начальные значения сопряженных переменных $P_{\rm \phi}(t_0)_{\rm ont} = 0.1$, $P_{\rm o}(t_0)_{\rm ont} = -1.9$, $P_{\rm h}(t_0)_{\rm ont} = -0.01$, $P_{\rm v, tot}(t_0)_{\rm ont} = -1.909$.

Как видно из рис. 5, a и δ , удалось добиться перевода системы из заданного начального положения в заданное конечное за $t_f=133$ с, причем данное время является минимально возможным для поставленных условий задачи. Максимальное значение величины прогиба h составило $h_{\rm max}=1.583\times 10^{-4}$ м, что на порядок меньше по сравнению с ПИ-регулятором при одинаковых условиях.

Значение величины невязки $\|\mathbf{Z}_{\mathrm{H}}(t,t_f)\|$ необходимо выбирать не более 0.001, так как в системе присутствуют упор и фиксатор, и даже небольшое расхождение по углу раскрытия спицы ϕ и угловой скоростью ω приводит к колебательному процессу или же спица не доходит до своего конечного значения. При выбранных оптимальных начальных значениях сопряженных переменных значение невязки составило не более 10^{-5} .

Представим сигнал управления U_1 в виде, когда возможно два переключения (из решения задачи методом Ньютона следует одно переключение):

$$U_1 = -U_{\text{lmax}} \text{sign}(P_{\omega 0}) + \Delta U_{1} l(t, \tau_1) + \Delta U_{1} l(t, \tau_2),$$

где $P_{\omega \ 0} = P_{\omega}(0), \Delta U_{1_1} = 2U_{1 \max} \text{sign}(P_{\omega \ 0}), \Delta U_{1_2} = -U_{1 \max} \text{sign}(P_{\omega \ 0}),$ а $l(t, \tau_1), l(t, \tau_2)$ — функции вида [21]

$$l(t, \tau_i) = 0.5(1 + \text{th}(c(t - \tau_i))) = \frac{1}{1 + e^{-2c(t - \tau_i)}}.$$
(3.1)

Здесь c — коэффициент, при неограниченном возрастании которого функция $l(t, \tau_i)$ приближается к единичной функции Хэвисайда.

Запишем гамильтониан вспомогательной задачи оптимизации с учетом (2.7) и (2.8):

$$H = P_{\varphi}\omega + P_{\omega}\frac{M_{\Pi} - M_{Tp}}{I} + P_{h}V_{HST} + P_{V_{HST}}\left(-\frac{EI_{HST}}{\rho S}\frac{\partial^{4}h}{\partial l^{4}} - \gamma\frac{EI_{HST}}{\rho S}\frac{\partial^{4}V_{HST}}{\partial l^{4}} + \frac{2}{\rho S}\frac{M_{\Pi} - M_{Tp}}{R_{JB}}\right) + P_{\tau_{1}}w_{1} + P_{\tau_{2}}w_{2} + \frac{1}{2}\mathbf{w}^{\mathsf{T}}\mathbf{k}^{-2}\mathbf{w} + \frac{1}{2}\mathbf{w}_{0}^{\mathsf{T}}\mathbf{k}^{-2}\mathbf{w}_{0}.$$

Система канонических уравнений имеет вид

$$\begin{split} \dot{\phi} &= \omega, \quad \dot{\omega} = \left(M_{\scriptscriptstyle \Pi} - M_{\scriptscriptstyle \mathrm{TP}} - M_{\scriptscriptstyle \mathrm{ynop}} - M_{\scriptscriptstyle \Phi}\right)/I, \quad \dot{h} = V_{\scriptscriptstyle \mathrm{H3\Gamma}}, \\ \dot{V}_{\scriptscriptstyle \mathrm{H3\Gamma}} &= -\frac{EI_{\scriptscriptstyle \mathrm{H3\Gamma}}}{\wp S} \frac{\partial^4 h}{\partial I^4} - \gamma \frac{EI_{\scriptscriptstyle \mathrm{H3\Gamma}}}{\wp S} \frac{\partial^4 V_{\scriptscriptstyle \mathrm{H3\Gamma}}}{\partial I^4} + \frac{2}{\wp S} \frac{\partial M}{\partial I}, \end{split}$$

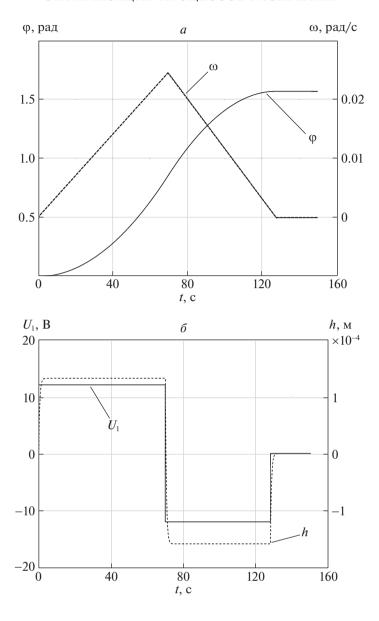


Рис. 5. Динамика раскрытия спицы: a — графики $\phi(t)$ и $\omega(t)$; δ — графики $U_1(t)$ и h(t)

$$\begin{split} \dot{\tau}_1 &= 0, \quad \dot{\tau}_2 = 0, \quad \dot{P}_{\phi} = 0, \quad \dot{P}_{\omega} = -P_{\phi}, \quad \dot{P}_{h} = 0, \quad \dot{P}_{V_{\text{HSF}}} = -P_{h}, \\ \dot{P}_{\tau_1} &= -P_{\omega} A \Delta U_{l_1} \delta(t, \tau_1) - P_{V_{\text{HSF}}} \frac{2A}{\rho S R_{\text{JB}}} \Delta U_{l_1} \delta(t, \tau_1), \\ \dot{P}_{\tau_1} &= -P_{\omega} A \Delta U_{l_2} \delta(t, \tau_2) - P_{V_{\text{HSF}}} \frac{2A}{\rho S R_{\text{JB}}} \Delta U_{l_2} \delta(t, \tau_2), \end{split}$$

где $\delta(t,\tau_1)$, $\delta(t,\tau_2)$ — функции вида $\delta(t,\tau_i) = \partial l(t,\tau_i)/\partial \tau_i = -2ce^{-2c(t-\tau_i)}/(1+e^{-2c(t-\tau_i)})^2$. Составляющие вектора управления $w_l(t) = -k_l^2 P_{\tau_1}(\tau_1)$, $w_2(t) = -k_2^2 P_{\tau_2}(\tau_2)$.

Расчеты показали, что характер зависимостей $\varphi(t)$, $\omega(t)$, $\omega(t)$, $\omega(t)$, $\omega(t)$ соответствуют графикам на рис. 5. Алгоритм оптимизации с коррекцией параметров структуры управления позволяет обеспечить успешное выполнение поставленной задачи без затруднений в сходимости. При этом τ_1 стремится к оптимальному времени смены предельных значений управления U_1 , полученного из метода

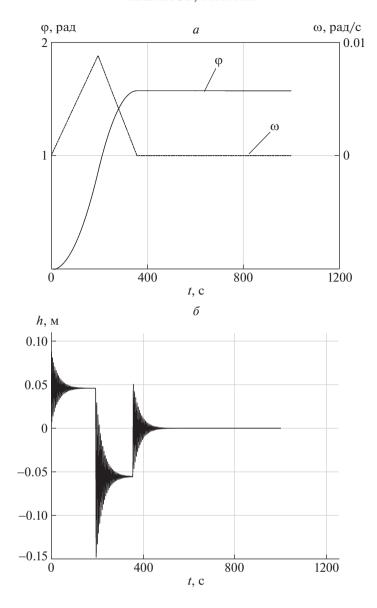


Рис. 6. Характер динамики раскрытия спицы: a — графики $\varphi(t)$ и $\omega(t)$; δ — график h(t)

Ньютона (рис. 5, δ), а τ_2 стремится к конечному времени, при котором система достигает заданных значений [17].

Прогибы конструкции незначительны и не превышают величины $h_{\rm max}=0.002$ м. При использовании оптимального регулятора время затухания колебаний составляет 5 с. Это объясняется достаточной жесткостью конструкции.

Исходя из [7] наибольший интерес представляет минимизация прогиба и колебаний при полностью раскрытой спице, так как в данном случае спица более склонна к переходному процессу с длительными затухающими колебаниями. При данных условиях изменится длина, момент инерции, первая собственная частота спицы: $a=29.01\,$ м, $I\approx8978\,$ кг · м², $\omega_{\text{с}_{\text{изг-1}}}=1.432\,$ Гц. На двигатель также подается напряжение питания U_1 не более $U_{\text{lmax}}=12\,$ В.

Увеличение момента инерции почти в 9 раз делает систему "более" инерционной, вследствие чего увеличивается время раскрытия. Поэтому необходимо корректно выбрать конечное время. Проанализируем время раскрытия спицы от минимально до максимально возможного. Для этого была решена задача максимального быстродействия, время перевода системы (1.1) из начального состояния $\mathbf{X}_{\mathrm{p}}(0) = (0\ 0\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$ в конечное $\mathbf{X}_{\mathrm{p}}(t_f) = (\pi/2\ 0\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$ составило $t_f = 900\ \mathrm{c}$, конечное

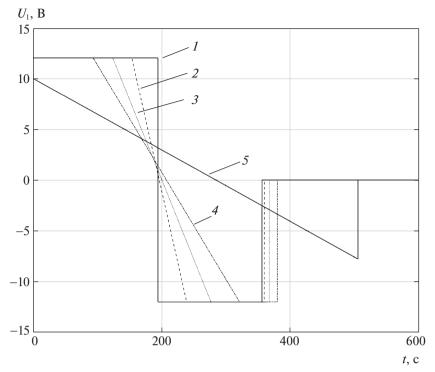


Рис. 7. Набор кривых $U_1(t)$

значение по углу разворота ϕ и угловой скорости разворота ω было достигнуто за 356 с (рис. 6, a). Затухающие колебания свободного конца спицы длились 544 с (рис. 6, δ). Максимальное значение величины прогиба $h_{\rm max}=0.148$ м.

Для оценки времени раскрытия был рассмотрен вариант раскрытия спицы при использовании ПИД-регулятора при переходном процессе без перерегулирования. Время перевода системы (1.1) из начального состояния в конечное $t_f=1590\,\mathrm{c}$, при этом конечное значение по углу разворота ϕ и угловой скорости разворота ϕ было достигнуто за 1369 с. Затухающие колебания свободного конца спицы длились 221 с. Максимальное значение величины прогиба $h_{\mathrm{max}}=0.008\,\mathrm{m}$.

Поскольку прогиб спицы прямо пропорционален приложенному моменту, то для получения минимальной величины прогиба необходимо так управлять спицей, чтобы момент был минимален. Напряжение питания, необходимое для преодоления момента трения, $U_1=1.12~\mathrm{B}$. При данном напряжении разворот спицы из начального состояния $\mathbf{X}_{\mathrm{p}}(0)=(0~0~0~0)^{\mathrm{T}}$ в конечное $\mathbf{X}_{\mathrm{p}}(t_f)=(\pi/2~0~0~0)^{\mathrm{T}}$ произойдет за $t_f=28042~\mathrm{c}$, при этом конечное значение по углу разворота ϕ и угловой скорости разворота ϕ будет достигнуто за 27830 с. Затухающие колебания свободного конца спицы будут длиться 212 с. Максимальное значение величины прогиба $h_{\mathrm{max}}=0.006~\mathrm{m}$.

Для удобства обозначим: $t_f = T_f + t_{\text{затух}}$, T_f — время раскрытия по углу разворота ϕ и угловой скорости разворота ω , $t_{\text{затух}}$ — время затухания колебаний спицы после постановки ее на упор и фиксатор. Исходя из полученных данных, необходимо выбирать время разворота спицы по углу разворота ϕ и угловой скорости разворота ω в пределах от 356 до 1369 с.

При этом с увеличением T_f вид оптимального управления будет изменяться, например, от релейного переключения до управления с линейным участком убывания (рис. 7). Кривая $I-T_f=356$ с, $t_f=936$ с; кривая $2-T_f=360$ с, $t_f=940$ с; кривая $3-T_f=368$ с, $t_f=948$ с; кривая $4-T_f=380$ с, $t_f=960$ с; кривая $5-T_f=506$ с, $t_f=1200$ с.

При этом в случаях, где управление достигает максимального значения ± 12 В, величина прогиба $h_{\rm max}$ одинакова, чем меньше напряжение питания (кривая 5), тем меньше прогиб и быстрее затухающий процесс. Так для случая $T_f = 506$ с значение $h_{\rm max} = 0.07$ м. При достаточно большом выборе t_f можно получить переходную характеристику, аналогичную минимально возможному прогибу ($t_f = 28042$ с).

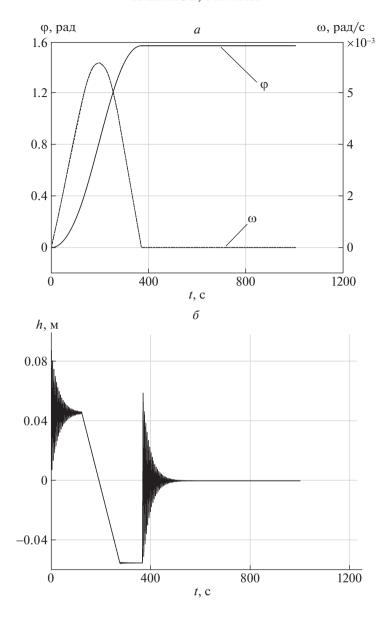


Рис. 8. Динамика раскрытия спицы: a — графики $\varphi(t)$ и $\omega(t)$; δ — график h(t)

Расчеты показали, что управление раскрытием с максимальным быстродействием приводит к заметному увеличению времени затухания $t_{\text{затух}}$ колебаний. Поэтому целесообразно применить алгоритм коррекции структуры управления, в которой переход между предельными значениями управлений разных знаков осуществляется по плавно изменяющейся кривой.

Для использования алгоритма с коррекцией параметров структуры управления примем, что $T_f=368$ с. За управление выберем функцию вида (3.1) путем домножения ее на 24 и прибавления к ней 12, с коэффициентом c=0.017.

На рис. 8 представлены характеристики динамики развертывания полностью раскрытой спицы при применении алгоритма коррекции параметров структуры управления для рассмотренного случая $T_f = 368$ с (кривая 3 на рис. 7) с выходом в конечное положение $\mathbf{X}_{\rm p}(t_f)$ за $t_f = 948$ с.

3.2. В ы д в и ж е н и е с п и ц р е ф л е к т о р а. Рассмотрим этап выдвижения спицы (рис. 3). Первая собственная частота продольных колебаний для случая заделанного левого и свободного правого концов [10] $\omega_{\rm c} = \pi/(2x)\sqrt{E/\rho} = 4157$ Гц. Значение коэффициента затухания примем $\gamma = 0.04$ с [7]. Коэффициент k_f примем для рассматриваемого случая равным 1. Начальное значе-

ние длины выдвижения $x_0=0$. Спица фиксируется при достижении расстояния, равного ее длине, за исключением участка стыковки первого и второго звеньев, поэтому конечное значение длины $x_f=9.5$ м. Поскольку спица в начальном положении находится в состоянии покоя, то соответственно линейная скорость $V_0=0$, сжатие $\Delta x_{\text{сж}\;0}=0$, скорость сжатия $V_{\text{сж}\;0}=0$. Для задания сил упора $F_{\text{упор}}$ и фиксатора F_{ϕ} необходимо определить коэффициенты $k_{\text{у. упор}(\phi)}$ и $c_{\text{д. упор}(\phi)}$. Исходя из экспериментальных данных примем $k_{\text{у. упор}}=k_{\text{у. $\phi}}=100$, $c_{\text{д. упор}}=50$, $c_{\text{д. $\phi}}=15$. Примем время раскрытия $t_f=100$ с, максимальная допустимая амплитуда сжатия $\Delta x_{\text{сж}\;\text{max}}=1$ мм.

Измерениям доступен вектор переменных состояния $\mathbf{X}_{\text{в}}$. Для перевода системы из начального состояния $\mathbf{X}_{\text{в}}(0) = (0\ 0\ 0\ 0)^{\text{T}}$ в конечное $\mathbf{X}_{\text{в}}(t_f) = (9.5\ 0\ 0\ 0)^{\text{T}}$ с отсутствием перерегулирования по длине выдвижения x при работе ПИ-регулятора потребовалось $t_f = 113\ \text{c}$, что больше заданного времени развертывания. Максимальное значение величины сжатия спицы $\Delta x_{\text{сж}}$ составило $\Delta x_{\text{сж max}} = 0.5 \times 10^{-6}\ \text{м}$. Можно настроить ПИ-регулятор таким образом, чтобы система достигала конечного значения $\mathbf{X}_{\text{в}}(t_f) = (9.5\ 0\ 0\ 0)^{\text{T}}$ за $t_f = 100\ \text{c}$, но из-за наличия в системе упора и фиксатора колебания спицы продолжаются больше заданного времени (105 c) при максимальной величине сжатия спицы $\Delta x_{\text{сж}} = 1.42 \times 10^{-5}\ \text{м}$. Особенностью продольных колебаний в отличие от поперечных, возникающих при развороте спицы, является их высокая частота и быстрое время затухания.

При оптимальном управлении краевая задача (1.3), (2.4), (2.5) решалась методом Ньютона с использованием вектора невязок

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{H}}(t,t_f) = \left[x(t_f) - x_f \quad V(t_f) - V_f \quad \Delta x_{\mathrm{cw}}(t_f) - \Delta x_{\mathrm{cw}} \quad V_{\mathrm{cw}}(t_f) - V_{\mathrm{cw}} \quad f\right]^{\mathrm{T}}.$$

Расчет проводился при $k_{\rm B}=1\times 10^{-10}$, шаг $\Delta t=0.0001$ с, начальные условия для компонент вектора сопряженных переменных $P(t_0)$ и приращениях для сопряженных переменных составляют: $P_x(t_0)=-0.01,\ P_V(t_0)=100,\ P_{\Delta x_{\rm cx}}(t_0)=-0.0001,\ P_{V_{\rm cx}}(t_0)=300,\ \Delta P|_x=0.1,\ \Delta P|_V=10,\ \Delta P|_{\Delta x_{\rm cx}}=0.0001,\ \Delta P|_{V_{\rm cx}}=1$ в процедуре численного определения частных производных от вектора невязок в методе Ньютона.

На рис. 9, a и b для данного варианта представлены оптимальные характеристики. Как видно из графиков, удалось добиться перевода системы из заданного начального положения в заданное конечное за $t_f = 100$ с за 7 итераций. Максимальное значение величины сжатия спицы $\Delta x_{\rm cж} = 8 \times 10^{-7}$ м, что на 2 порядка меньше по сравнению с ПИ-регулятором при одинаковых условиях. Время затухания колебаний спицы составило 3 с.

В соответствии с рис. 9, δ можно структуру сигнала управления U_1 представить линейной функцией $U_1 = at + b$, где a и b — коэффициенты. Тогда в качестве оптимизируемых параметров можно выбрать коэффициенты a и b. При этом удается добиться перевода выдвигающегося элемента из начального состояния в конечное при ограничении на управление.

Отметим, что в данной задаче сжатие конструкции незначительно и не превышает величины $\Delta x_{\rm cж\ max} = 8 \times 10^{-7}$ м. При этом с использованием оптимального регулятора время затухания колебаний составляет 3 с.

Можно сделать вывод, что с помощью оптимального регулятора удается снизить значение сжатия на порядок. Тем не менее, ни при каких рассматриваемых условиях задачи $\Delta x_{\rm cж}$ не превышает установленное граничное значение в 1 мм как при использовании ПИ-регулятора, так и оптимального регулятора.

Применение алгоритма коррекции параметров структуры управления обеспечивает высокую сходимость решения задачи, но в отличие от коррекции моментов времени переключения структуры параметры a и b необходимо выбирать в небольшом диапазоне от оптимальных значений.

3.3. Настройка формы радиоотражающей поверхности. Использование алгоритмов оптимального управления как для пьезоактю атора, так и для ДПТ при настройке формы радиоотражающего сетеполотна подробно рассмотрено в [23, 24]. При выборе, например, пьезоактю атора применение алгоритма с коррекцией параметров структуры управления в виде (2.6) позволяет осуществить линейное перемещение без возникновения колебательного

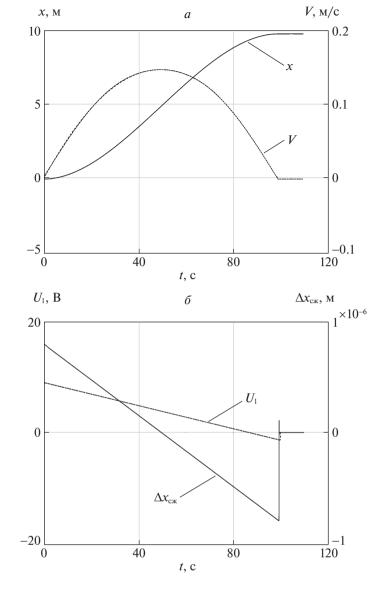


Рис. 9. Динамика раскрытия спицы: a — графики x(t) и V(t); δ — графики $\Delta x_{\mathrm{cw}}(t)$ и $U_1(t)$

процесса, а время достижения конечного состояния существенно меньше, чем с помощью $\Pi U \Pi$ -регулятора, и составляет $t \approx 0.6$ с (рис. 10) вместо 2 с.

Задача управления состоит в приведении пьезоактюатора из начального положения ($\Delta I_{\text{пэ 0}}=0$ м; $V_{\text{пэ 0}}=0$ м/с; $U_{\text{пэ 0}}=0$ В) в заданное конечное состояние ($\Delta I_{\text{пэ f}}=1\times10^{-7}$ м; $V_{\text{пэ f}}=0$ м/с; $U_{\text{пэ f}}=0$ В) при ограничении на управление, за которое принято напряжение от источника ЭДС $e_n=\pm10$ В. Коэффициент обратного пьезоэффекта $K_0=38\times10^{-9}$, статическое усилие $F_{\text{стат}}=10^{-8}$ Н, коэффициент упругости $K_{\text{у. пэ}}=4.4$, коэффициент внутреннего демпфирования $K_{\text{д. пэ}}=1$, емкость $C_0=1.17\times10^{-6}$ Ф, внутреннее сопротивление $R_{\text{внут}}=102.5$ Ом, коэффициент прямого пьезоэффекта $K_n=K_0$, суммарная масса $m_\Sigma=0.25$ кг.

Предложенный алгоритм для управления ДПТ помимо повышения быстродействия позволяет снизить энергетические затраты, что является важным в условиях ограниченного запаса энергии при работе в космическом пространстве.

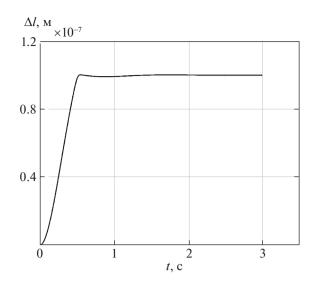


Рис. 10. Длина выдвижения активной части пьезоактю атора



Рис. 11. Макет фасеты КТР

Для настройки формы радиоотражающего сетеполотна научно-исследовательской лабораторией и студенческим конструкторским бюро БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д.Ф. Устинова были изготовлены макетные образцы фасеты (части радиоотражающего сетеполотна) КТР (рис. 11). При проведении эксперимента в качестве актюаторов применялся ДПТ, аналогичный рассмотренному выше. Для определения усилий и длин оттяжки вант использовалась методика на основе уравнения Лапласа для мембраны [8].

Предлагаемый алгоритм коррекции параметров структуры управления применяется для выбранного в качестве актюатора ДПТ. Отсутствие постоянной силы тяжести в космическом пространстве не усложняет решение данной задачи. Меняются условия для использования методики на основе уравнения Лапласа для мембраны. При наземных испытаниях в правую часть уравнения (1.4) добавляется составляющая силы тяжести. Алгоритм управления ДПТ не нуждается в корректировке, так как его сравнение с ПИД-структурой происходит в одинаковых условиях.

Применение алгоритма коррекции параметров структуры управления позволило более чем в 2 раза сократить время настройки по сравнению с ПИД-регулятором, а также прийти в заданное значение без перерегулирования, что соответствует результатам моделирования. Ввиду плавного подхода к конечному значению удалось повысить энергоэффективность использования ДПТ.

Выигрыш в затратах мощности при управлении одним актюатором составил $\approx 15\%$ (0.495 Вт против 0.583 Вт).

Данные эксперимента позволяют сделать вывод о возможности уменьшения емкости источников питания за счет уменьшения потребления мощности актюаторов. Это дает возможность уменьшить массогабаритные размеры энергонакопительных элементов и освободить место для полезной нагрузки.

Оптимальное управление с разработанными алгоритмами для данных актюаторов значительно ускоряет переходный процесс и, как следствие, поддерживает заданную форму сетеполотна с необхолимой точностью.

Заключение. В статье был выполнен поиск и разработка стратегий управления процессами раскрытия и настройки КТР. Реализованы в соответствующих программах для ЭВМ математические модели этапов развертывания КТР. Для развертывания, выдвижения спиц, а также управления актюаторами для настройки сетеполотна показано преимущество использования алгоритма с коррекцией параметров структуры управления. Для всех этапов применение разработанных алгоритмов позволяет добиться необходимой точности и качества регулирования системы. Решена задача улучшения характеристик развертывания КТР путем включения в контур управления бортового компьютера с программным обеспечением, допускающим реализацию алгоритмов оптимального управления. При этом для получения оптимальной динамики используется математическая модель.

В дальнейшем в математической модели можно учесть люфты в соединениях. Учет действующих на исследуемую систему возмущений и шумов предполагаемых датчиков приводит к сложным задачам обработки результатов измерений и их планирования [16, 25, 26]. В перспективе целесообразно произвести стабилизацию имитационной модели раскрытия КТР (или реального процесса) посредством самоорганизующегося оптимального регулятора с экстраполяцией (СОРЭ) А.А. Красовского [27, 28]. СОРЭ целесообразно применять при отсутствии математических моделей или для обеспечения оптимальных режимов, полученных с помощью математических моделей. В этом случае СОРЭ уменьшает отклонения динамики имитационной модели (или реального КТР) от оптимальной опорной траектории при использовании информационной модели соответствующих отклонений. Это позволит адаптировать решения, полученные для математических моделей, к реальным объектам и приближает результаты теории оптимального управления к решению практических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Пономарев С.В.* Трансформируемые рефлекторы антенн космических аппаратов // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2011. № 4. С. 110—119.
- 2. *Чуйкина Л.В., Порпылев В.Г., Чуйкин Д.О.* Тенденции развития приводов раскрытия // Решетневские чтения: Матер. XIV Междунар. научн. конф., посвященной памяти генерального конструктора ракет.-космич. систем акад. М.Ф. Решетнева: В 2 ч. / Под общ. ред. Ю.Ю. Логинова: Красноярск: Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т, 2010. Ч. 1. С. 93—94.
- 3. *Гриневич Д.В.* Исследование динамики раскрывающихся протяженных конструкций // Вопросы электромеханики. Тр. ВНИИЭМ. 2013. Т. 134. С. 37—42.
- 4. *Кабдулин Г.В., Комков В.А., Мельников В.М., Харлов Б.Н.* Динамика управляемого раскрытия центробежными силами космических конструкций с компенсацией кинетического момента // Космонавтика и ракетостроение. 2009. № 1 (54). С. 189—198.
- 5. *Голубев Ю.Ф.*, *Дитковский А.Е.* Управляемое движение упругого манипулятора // Изв. РАН. ТиСУ. 2001. № 6. С. 166—176.
- 6. *Акуленко Л.Д.*, *Гавриков А.А.* Управление одномерными движениями гибридных колебательных систем стержневого типа // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 3. С. 5—14.
- 7. *Кабанов С.А., Зимин Б.А., Митин Ф.В.* Разработка и анализ математических моделей раскрытия подвижных частей трансформируемых космических конструкций. Ч. I // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 20. № 1. С. 51—64.
- 8. *Кабанов С.А., Зимин Б.А., Митин Ф.В.* Разработка и анализ математических моделей раскрытия подвижных частей трансформируемых космических конструкций. Ч. II // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 21. № 2. С. 117—128.
- 9. *Красовский А.А.* Теория самоорганизующегося оптимального регулятора биномиального типа в детерминированно-стохастическом приближении // AuT. 1999. № 5. С. 97—112.
- 10. Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. М.: Академия наук СССР, 1931. 80 с.

- 11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. В X т. Т. VII. Теория упругости: учеб. пособие. 3-е изд., испр. и доп. М.: Физматлит, 2003. 264 с.
- 12. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 337 с.
- 13. Никольский А.А. Точные двухканальные следящие электроприводы с пьезокомпенсаторами. М.: Энергоатомиздат, 1988. 160 с.
- 14. *Вольдек А.И.* Электрические машины. Учебник для студентов высш. техн. заведений. 3-е изд., перераб. Л.: Энергия, 1978. 832 с.
- 15. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
- 16. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
- 17. *Малышев В.В., Кабанов Д.С.* Алгоритм коррекции структуры управления автоматическим подводным аппаратом для построения области достижимости // Изв. вузов. Приборостроение. 2012. Т. 55. № 7. С. 21—27.
- 18. *Кабанов С.А.* Оптимизация динамики систем с коррекцией параметров структуры управления // Вест. СПбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1. Вып. 2. С. 254–260.
- 19. *Кабанов Д.С.* Синтез алгоритма оптимального программно-позиционного управления многорежимным автоматическим подводным аппаратом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 60—66.
- 20. Работонов Ю.Н. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1962. 456 с.
- 21. Кабанов С.А. Управление системами на прогнозирующих моделях. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 200 с.
- 22. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их применение. СПб.: Лань, 2010. 149 с.
- 23. *Кабанов С.А., Митин Ф.В., Кривушов А.И., Улыбушев Е.А.* Управление пьезоактюатором для настройки отражающей поверхности рефлектора космического базирования // Изв. вузов. Авиационная техника. 2018. № 4. С. 111—116.
- 24. Fedor Mitin, Alexey Krivushov. Application of Optimal Control Algorithm for DC Motor // Proc. 29th DAAAM Intern. Sympos. Vienna, Austria, 2018. P. 0762–0766.
- 25. *Кабанов С.А*. Совмещенный синтез оптимального управления как иерархическая дифференциальная игра // Докл. РАН. 2000. Т. 372. № 3. С. 317—318.
- 26. Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Карлов В.И. Оптимизация наблюдения и управления летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1989. 312 с.
- 27. *Красовский А.А.* Адаптивный оптимальный регулятор с переменным порядком наблюдателя и временем экстраполяции // AuT. 1994. № 1. С. 97—111.
- 28. *Кабанов С.А.* Управление с самоорганизацией как инструмент для решения оптимизационных задач в социально-экономической сфере // Изв. РАН. ТиСУ. 1999. № 3. С. 172—176.

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЛВИЖУШИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 519.71

ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ МНОГОЧЛЕНОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА¹

© 2021 г. А. Е. Голубев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия e-mail: v-algolu@hotmail.com
Поступила в редакцию 25.02.2020 г.
После доработки 28.02.2020 г.
Принята к публикации 30.03.2020 г.

Рассматривается задача синтеза программных движений механических систем на основе использования полиномов от времени. Программная траектория выбирается в классе монотонных на заданном временном отрезке многочленов третьего порядка исходя из начального и конечного состояний системы, а также ограничений на переменные состояния и управления. Задача учета ограничений решается аналитически за счет выбора времени движения. В частности, построено программное движение с нулевыми начальными и конечными значениями обобщенных скоростей и ускорений, удовлетворяющее требуемым ограничениям на значения обобщенных координат, скоростей и ускорений. Предлагаемый подход к планированию траекторий движения с учетом ограничений проиллюстрирован на примере решения задачи управления движением параллельного дельта-робота.

DOI: 10.31857/S0002338820060049

Введение. Одним из эффективных способов построения программных движений динамических систем с управлением является метод обратных задач динамики [1, 2], основная идея которого заключается в следующем. Сначала с учетом имеющихся требований и ограничений формируются желаемые значения переменных состояния системы, например как функции независимой переменной. Далее построенные функции подставляются вместо переменных состояния в уравнения динамической системы и полученная в результате этой подстановки система алгебраических уравнений относительно управляющих переменных решается аналитически или численно. Результатом решения является программное управление.

При синтезе программных движений на основе концепции обратных задач динамики часто используется подход, основанный на применении полиномов от независимой переменной [3, 4]. Решение различных терминальных задач управления с помощью многочленов рассматривалось, например, в [5—17]. Однако следует отметить, что указанный подход, как он используется в большинстве работ, не позволяет явным образом учитывать ограничения, наложенные на переменные состояния и управления. Численные процедуры синтеза программных движений механических систем с учетом ограничений, основанные на применении полиномов от независимой переменной, рассматривались, например, в [11, 12]. Некоторые идеи аналитического построения программных траекторий механических систем с учетом ограничений можно найти в книге [8] и, например, в работах [14, 18]. В [16, 19—21] для представленных классов дифференциально плоских динамических систем предложено аналитическое решение терминальных задач управления, удовлетворяющее ограничениям на переменные состояния. Тем не менее, задача синтеза программных движений с учетом ограничений, в том числе при помощи многочленов от независимой переменной, остается актуальной и до конца нерешенной.

В настоящей работе исследуется аналитическое построение программных движений механических систем на основе использования полиномов от времени. Программная траектория выбирается в классе монотонных на заданном временном отрезке многочленов третьего порядка ис-

 $^{^{1}}$ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 19-07-00817 и 20-07-00279).

ходя из начального и конечного состояний системы. За счет выбора времени движения решается задача учета ограничений на переменные состояния и управления.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача синтеза программных движений для динамических систем, имеющих структуру уравнений Эйлера—Лагранжа и записанных в виде

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + G(q) = u, \tag{1.1}$$

где $q = (q_1, ..., q_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ — вектор обощенных координат; $u = (u_1, ..., u_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ — вектор управляющих сил и моментов; M(q) — матрица кинетической энергии, $M(q) = M^{\mathrm{T}}(q) > 0$ при всех $q \in \mathbb{R}^m$; $C(q,\dot{q})\dot{q}$ — центробежные и кориолисовы силы; $D\dot{q}$ — демпфирование; $G(q) = [\partial P(q)/\partial q]^{\mathrm{T}}$, где P(q) — потенциальная энергия системы.

Программное движение системы (1.1) представляет собой пару функций $q = q_r(t)$, $u = u_r(t)$, такую, что уравнения системы (1.1) превращаются в тождества на заданном отрезке изменения независимой переменной $t \in [0,T]$. В статье решается задача аналитического построения программных движений, удовлетворяющих фиксированным начальным и конечным условиям на переменные состояния q, \dot{q} системы (1.1), а также ограничениям

$$|q_i(t)| \le B_i, \quad |\dot{q}_i(t)| \le N_i, \quad |\ddot{q}_i(t)| \le Q_i \quad \text{при всех} \quad t \in [0, T],$$
 (1.2)

где B_i , N_i и Q_i — некоторые заданные положительные числа, $i=\overline{1,m}$. Предполагается, что при синтезе программных движений для системы (1.1) есть свобода выбора времени движения T и/или при всех $i=\overline{1,m}$ каких-либо величин среди начальных $q_i(0)$, $\dot{q}_i\left(0\right)$ и конечных $q_i(T)$, $\dot{q}_i\left(T\right)$ значений соответственно обобщенных координат и скоростей.

Заметим, что в случае локальной липшицевости функций переменных состояния q, \dot{q} , стоящих в левой части системы (1.1), для любой дважды кусочно непрерывно дифференцируемой программной траектории $q = q_r(t)$ кусочно непрерывное программное управление системой (1.1), найденное при помощи метода обратных задач динамики, запишется как

$$u = u_r(t) = M(q_r(t))\dot{q}_r(t) + C(q_r(t),\dot{q}_r(t))\dot{q}_r(t) + D\dot{q}_r(t) + G(q_r(t)), \quad t \in [0,T].$$
(1.3)

Следовательно, если для программной траектории $q = q_r(t)$ выполнены условия (1.2), то для программного управления (1.3) справедлива оценка $||u_r(t)|| \le L$ при всех $t \in [0,T]$, где постоянная L > 0 зависит от свойств матриц в (1.3) (например, их спектральных норм) и значений B_i , N_i и Q_i , $i = \overline{1,m}$. Здесь $||\cdot||$ — евклидова норма в \mathbb{R}^m .

2. Синтез программных движений для одной степени свободы. Рассмотрим сначала уравнения изменения состояния для одной из степеней свободы механической системы (1.1), записанные в виде динамической системы:

$$\dot{x}_{1i} = x_{2i},
\dot{x}_{2i} = f_i(t, x_i) + g_i(t, x_{1i})u_i,$$
(2.1)

где $x_i = (x_{li}, x_{2i}) = (q_i, \dot{q}_i) \in \mathbb{R}^2$, значение $i, 1 \le i \le m$, фиксировано, q_i — обобщенная координата, $u_i \in \mathbb{R}$ — компонента вектора управляющих воздействий u, функции $f_i(t, x_i)$ и $g_i(t, x_{li})$ кусочно непрерывны по t и локально липшицевы по x_i и x_{li} соответственно, причем $g_i(t, x_{li}) \ne 0$ при всех $x_{li} \in \mathbb{R}$ и $t \ge 0$. Здесь зависимость функций $f_i(t, x_i)$ и $g_i(t, x_{li})$ от t неявная и связана с возможной зависимостью этих функций от других, отличных от q_i и \dot{q}_i обобщенных координат и скоростей.

Фиксируем произвольные начальные и желаемые конечные значения положения и скорости:

$$x_{1i}(0) = x_{0i}, \quad x_{2i}(0) = \dot{x}_{0i}, \quad x_{1i}(T) = x_{*i}, \quad x_{2i}(T) = \dot{x}_{*i},$$

удовлетворяющие условиям

$$\max\{|x_{0i}|, |x_{*_i}|\} \le B_i, \quad \max\{|\dot{x}_{0i}|, |\dot{x}_{*_i}|\} \le N_i. \tag{2.2}$$

Будем полагать, что состояние (x_{*_i}, \dot{x}_{*_i}) системы (2.1) достижимо [4] из состояния (x_{0i}, \dot{x}_{0i}) . Здесь T — время движения из точки (x_{0i}, \dot{x}_{0i}) в точку (x_{*_i}, \dot{x}_{*_i}) на фазовой плоскости (x_{1i}, x_{2i}) . Далее без

ограничения общности будем считать, что начальные и конечные значения переменных x_{1i} , x_{2i} для искомой программной траектории удовлетворяют неравенствам

$$\dot{x}_{0i}\dot{x}_{*i} \ge 0, \quad \dot{x}_{0i}^2 + \dot{x}_{*i}^2 \ne 0, \quad (\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i})(x_{*i} - x_{0i}) > 0.$$
 (2.3)

Отметим, что, если условия (2.3) не выполнены, то при построении программной траектории на фазовой плоскости из начальной точки (x_{0i}, \dot{x}_{0i}) в конечную (x_{*i}, \dot{x}_{*i}) всегда можно использовать дополнительные промежуточные точки. Тогда за счет выбора их координат добьемся для каждой из промежуточных программных траекторий, образующих искомую траекторию как составную, выполнения соответствующих неравенств, аналогичных (2.3). Например, если имеет место равенство $\dot{x}_{0i}^2 + \dot{x}_{*i}^2 = 0$, то можно рассмотреть, как минимум, одну промежуточную точку с координатами (x_{li}, \dot{x}_{li}) на фазовой плоскости и построить сначала программную траекторию из начальной точки (x_{0i}, \dot{x}_{0i}) в промежуточную (x_{li}, \dot{x}_{li}) , а затем из промежуточной точки в конечную (x_{*i}, \dot{x}_{*i}) . При этом годятся любые значения x_{li} и \dot{x}_{li} , удовлетворяющие условиям

$$x_{li} \in (\min\{x_{0i}, x_{*i}\}, \max\{x_{0i}, x_{*i}\}), \quad 0 < |\dot{x}_{li}| \le N_i, \quad \dot{x}_{li}(x_{*i} - x_{0i}) > 0.$$

Далее, в качестве t — параметризованной кривой на фазовой плоскости (x_{1i}, x_{2i}) , соединяющей точки (x_{0i}, \dot{x}_{0i}) и (x_{*i}, \dot{x}_{*i}) , используем фазовый график [4] $\overline{p}_i(t) = (p_i(t), \dot{p}_i(t)), t \in [0, T]$, многочлена

$$p_{i}(t) = x_{0i} + \dot{x}_{0i}t + c_{1i}t^{2} + c_{2i}t^{3}, \tag{2.4}$$

где коэффициенты c_{1i} , c_{2i} находятся из условий $p_i(T) = x_{*i}$, $\dot{p}_i(T) = \dot{x}_{*i}$ и имеют вид

$$c_{1i} = -((2\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i})T + 3(x_{0i} - x_{*i}))/T^{2},$$

$$c_{2i} = ((\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i})T + 2(x_{0i} - x_{*i}))/T^{3}.$$
(2.5)

В силу ограничений (1.2) для многочлена (2.4) и его производных по времени первого и второго порядков при всех $t \in [0,T]$ необходимо выполнить условия $|p_i(t)| \leq B_i$, $|\dot{p}_i(t)| \leq N_i$ и $|\ddot{p}_i(t)| \leq Q_i$ соответственно. Заметим, что в случае справедливости неравенств (2.2) и (2.3) для выполнения при всех $t \in [0,T]$ ограничений $|p_i(t)| \leq B_i$ и $|\dot{p}_i(t)| \leq N_i$ достаточно обеспечить монотонность функций $p_i(t)$ и $\dot{p}_i(t)$ на отрезке $t \in [0,T]$. При этом, если выполнены условия (2.2), (2.3), для строгой монотонности многочлена (2.4) и монотонности его производной по времени на отрезке $t \in [0,T]$ необходимо и достаточно, чтобы вторая производная многочлена, имеющая вид

$$\ddot{p}_i(t) = 2c_{1i} + 6c_{2i}t, \tag{2.6}$$

была знакопостоянной на интервале $t \in (0,T)$. Отметим, что функция (2.6) линейная и в случае $c_{2i} \neq 0$ обращается в ноль при $t = -c_{1i}/(3c_{2i})$. Тогда для знакопостоянства второй производной по времени многочлена (2.4) на интервале $t \in (0,T)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $c_{2i} = 0$ или

$$c_{2i} \neq 0, \quad -c_{1i}/(3c_{2i}) \le 0,$$
 (2.7)

или

$$c_{2i} \neq 0, \quad -c_{1i}/(3c_{2i}) \geq T.$$
 (2.8)

Наконец, в силу линейности по переменной t функция (2.6) при любых значениях x_{0i} , \dot{x}_{0i} , x_{*i} , \dot{x}_{*i} и T > 0 является монотонной на отрезке $t \in [0,T]$. Следовательно, для выполнения ограничения $|\ddot{p}_i(t)| \leq Q_i$ при всех $t \in [0,T]$ необходимо и достаточно, чтобы было справедливо неравенство

$$\max \{ |\ddot{p}_i(0)|, |\ddot{p}_i(T)| \} = \max \{ 2|c_{1i}|, 2|c_{1i}| + 3c_{2i}T | \} \le Q_i.$$
 (2.9)

Отметим, что соответствующая компонента u_i программного управления (1.3), реализующая программную траекторию $x_{li} = p_i(t)$, $x_{2i} = \dot{p}_i(t)$, $t \in [0,T]$, системы (2.1), согласно [3, 4], имеет вид

$$u_{i} = u_{ir}(t) = \frac{1}{g_{i}(t, p_{i}(t))} \left(-f\left(t, \overline{p}_{i}(t)\right) + \ddot{p}_{i}(t) \right), \quad t \in [0, T].$$
(2.10)

Тогда в силу непрерывности функций $f_i(t, x_i)$ и $g_i(t, x_{li})$ в правой части системы (2.1) для любой положительной константы $L_i > 0$ можно подобрать такие значения постоянных B_i , N_i и Q_i , что при всех $t \in [0, T]$ имеет место неравенство $|u_{ir}(t)| \leq L_i$.

2.1. Учет ограничений за счет выбора времени движения. Воспользуемся свободой выбора времени T движения на фазовой плоскости из рассматриваемой начальной точки (x_{0i}, \dot{x}_{0i}) в конечную (x_{*i}, \dot{x}_{*i}) . Используем далее обозначения

$$T_{1i} = \frac{2(x_{*i} - x_{0i})}{\dot{x}_{*i} + \dot{x}_{0i}}, \quad T_{2i} = \frac{3(x_{*i} - x_{0i})}{2\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i}}, \quad T_{3i} = \frac{3(x_{*i} - x_{0i})}{\dot{x}_{0i} + 2\dot{x}_{*i}}$$
(2.11)

И

$$I_{Ti} = [\min \{T_{2i}, T_{3i}\}, \max \{T_{2i}, T_{3i}\}].$$

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Пусть значения x_{0i} , \dot{x}_{0i} и x_{*i} , \dot{x}_{i*} , такие, что выполнены условия (2.3). Многочлен (2.4) с коэффициентами (2.5) и его производная по времени обладают соответственно свойством строгой монотонности и монотонности по переменной t на отрезке $t \in [0,T]$ тогда и только тогда, когда $T \in I_{Ti}$. При этом $I_{Ti} = [T_{2i}, T_{3i}]$, если $T_{2i} \leq T_{1i}$, и $I_{Ti} = [T_{3i}, T_{2i}]$ в случае $T_{1i} \leq T_{2i}$.

Доказательство. Согласно условиям теоремы в силу справедливости неравенств (2.3) значения T_{1i} , T_{2i} и T_{3i} конечны и положительны.

Рассмотрим сначала неравенства (2.7), которые эквивалентны выполнению условий $c_{li} \leq 0$, $c_{2i} < 0$ или $c_{li} \geq 0$, $c_{2i} > 0$. Неравенства $c_{li} \leq 0$, $c_{2i} < 0$ в силу соотношений (2.5) можно представить в виде $T \geq T_{2i}$, $T < T_{li}$ при $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} > 0$ и $T \leq T_{2i}$, $T > T_{li}$ в случае $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} < 0$. Аналогично неравенства $c_{li} \geq 0$, $c_{2i} > 0$ эквивалентны выполнению условий $T \leq T_{2i}$, $T > T_{li}$, если $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} > 0$, и $T \geq T_{2i}$, $T < T_{li}$ при $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} < 0$.

Далее заметим, что для выполнения условий (2.8) необходимо, чтобы были справедливы неравенства $c_{1i} < 0$, $c_{2i} > 0$ или $c_{1i} > 0$, $c_{2i} < 0$. Условия $c_{1i} < 0$, $c_{2i} > 0$, $-c_{1i}/(3c_{2i}) \ge T$ с учетом соотношений (2.5) эквивалентны неравенствам $T > \max\{T_{1i}, T_{2i}\}, T \le T_{3i}$ при $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} > 0$ и $T < \min\{T_{1i}, T_{2i}\}, T \ge T_{3i}$ в случае $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} < 0$. Неравенства $c_{1i} > 0$, $c_{2i} < 0$, $-c_{1i}/(3c_{2i}) \ge T$ примут вид $T < \min\{T_{1i}, T_{2i}\}, T \ge T_{3i}$, если $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} > 0$, и $T > \max\{T_{1i}, T_{2i}\}, T \le T_{3i}$ в случае $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} < 0$.

Следовательно, в случае $T_{2i} \leq T < T_{1i}$ выполнено $c_{1i} \leq 0$, $c_{2i} < 0$, если $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} > 0$, и $c_{1i} \geq 0$, $c_{2i} > 0$ при $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} < 0$. Далее легко показать, что при $0 < T_{2i} < T_{1i}$ справедливо неравенство $T_{3i} > T_{1i}$. Тогда в случае $T_{2i} < T_{1i} < T \leq T_{3i}$ получим, что $c_{1i} < 0$, $c_{2i} > 0$, $-c_{1i}/(3c_{2i}) \geq T$ при $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} > 0$ и $c_{1i} > 0$, $c_{2i} < 0$, $-c_{1i}/(3c_{2i}) \geq T$, если $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} < 0$. Таким образом, если выполнены условия $T_{2i} < T_{1i}$, $T_{2i} \leq T \leq T_{3i}$, $T \neq T_{1i}$, то функция (2.6) является знакопостоянной на интервале $t \in (0,T)$.

Аналогичным образом при $T_{1i} < T_{2i}$ доказывается знакопостоянство функции (2.6) на интервале $t \in (0,T)$, где $T_{1i} < T \le T_{2i}$ или $T_{3i} \le T < T_{1i}$. Наконец, при $T = T_{1i}$ имеет место равенство $c_{2i} = 0$, функция (2.6) является постоянной величиной и, следовательно, знакопостоянна. Достаточность доказана.

Для доказательства необходимости условий теоремы заметим, что в случае $c_{1i} \le 0$, $c_{2i} < 0$ функция (2.6) отрицательна при всех $t \in (0,T]$ и, следовательно, $\dot{x}_{*i} < \dot{x}_{0i}$. Если $c_{1i} \ge 0$, $c_{2i} > 0$, то вторая производная по времени многочлена (2.4) положительна при всех $t \in (0,T]$ и $\dot{x}_{*i} > \dot{x}_{0i}$. Далее при $c_{1i} < 0$, $c_{2i} > 0$ если функция (2.6) сохраняет знак на интервале $t \in (0,T)$, то она отрица-

тельна при всех $t \in [0,T)$ и имеет место неравенство $\dot{x}_{*i} < \dot{x}_{0i}$. Аналогично в случае $c_{1i} > 0$, $c_{2i} < 0$ для знакопостоянства на интервале $t \in (0,T)$ функции (2.6) необходимым условием является ее положительность при всех $t \in [0,T)$ и, следовательно, справедливость неравенства $\dot{x}_{*i} > \dot{x}_{0i}$.

Отметим, что при $\dot{x}_{0i}\dot{x}_{*i} \geq 0$, $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} \neq 0$ двойное неравенство $0 < T_{2i} \leq T_{1i}$ имеет место тогда и только тогда, когда справедливы неравенства $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} > 0$, $x_{*i} > x_{0i}$, $\dot{x}_{*i} \leq \dot{x}_{0i}$ или $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} < 0$, $x_{*i} < x_{0i}$, $\dot{x}_{*i} \geq \dot{x}_{0i}$.

Следовательно, если имеют место неравенства $c_{1i} \geq 0$, $c_{2i} > 0$ или $c_{1i} \leq 0$, $c_{2i} < 0$, то при $0 < T_{2i} \leq T_{1i}$ выполнены условия $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} < 0$ или $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} > 0$ соответственно и справедливо неравенство $T_{2i} \leq T < T_{1i}$. Далее при $c_{1i} < 0$, $c_{2i} > 0$ и $c_{1i} > 0$, $c_{2i} < 0$ получим, что в случае $0 < T_{2i} \leq T_{1i}$ имеют место соответственно неравенства $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} > 0$ и $\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i} < 0$ и при $-c_{1i}/(3c_{2i}) \geq T$ выполняется условие $T_{1i} < T \leq T_{3i}$.

В случае $T_{1i} \leq T_{2i}$ аналогичным образом можно показать, что из неравенств $c_{1i} \geq 0$, $c_{2i} > 0$ или $c_{1i} \leq 0$, $c_{2i} < 0$ следует двойное неравенство $T_{1i} < T \leq T_{2i}$, а для выполнения условий $c_{1i} < 0$, $c_{2i} > 0$ или $c_{1i} > 0$, $c_{2i} < 0$ при $-c_{1i}/(3c_{2i}) \geq T$ необходимым является условие $T_{3i} \leq T < T_{1i}$.

Наконец, равенство $c_{2i}=0$ эквивалентно условию $T=T_{1i}$. Необходимость доказана.

В частности, заметим, что в случае $\dot{x}_{0i}=\dot{x}_{*i}\neq 0$ имеют место равенства $T_{1i}=T_{2i}=T_{3i}$ и $c_{1i}=c_{2i}=0$. Следствием теоремы 1 является следующий результат.

Следствие 1. Пусть значения x_{0i} , \dot{x}_{0i} и x_{*i} , \dot{x}_{*i} такие, что справедливы неравенства (2.2) и (2.3). Тогда для любого $T \in I_{Ti}$ многочлен (2.4) с коэффициентами (2.5) и его производная по времени при всех $t \in [0,T]$ удовлетворяют ограничениям $|p_i(t)| \leq B_i$ и $|\dot{p}_i(t)| \leq N_i$.

Далее исследуем соответствующее условие $|\ddot{p}_i(t)| \leq Q_i, \ t \in [0,T]$, на вторую производную по времени многочлена (2.4) с коэффициентами (2.5). Рассмотрим выражения $\ddot{p}_i(0) = 2c_{1i}$ и $\ddot{p}_i(T) = 2c_{1i} + 6c_{2i}T$ в неравенстве (2.9) как функции переменной $T \in I_{Ti}$. Заметим, что первая и вторая производные по переменной T выражения для $\ddot{p}_i(0)$ обращаются в ноль при $T = 2T_{2i}$ и $T = 3T_{2i}$ соответственно. Аналогично первая и вторая производные по переменной T выражения для $\ddot{p}_i(T)$ равны нулю соответственно, если $T = 2T_{3i}$ и $T = 3T_{3i}$. Можно показать, что в случае выполнения условий теоремы 1 справедливы неравенства $2T_{2i} > T_{3i}$ и $2T_{3i} > T_{2i}$. Следовательно, для поиска максимальных по модулю значений $\ddot{p}_i(0)$ и $\ddot{p}_i(T)$ как функций переменной $T \in I_{Ti}$ достаточно проверить значения этих функций при $T = T_{2i}$ и $T = T_{3i}$.

При $T = T_{2i}$ имеют место равенства $c_{1i} = 0$, $c_{2i} = (\dot{x}_{*i} - \dot{x}_{0i})/(3T_{2i}^2)$ и $\ddot{p}_i(0) = 0$. Таким образом, максимальное по модулю значение второй производной по времени многочлена (2.4) на отрезке $t \in [0, T_{2i}]$ достигается при $t = T_{2i}$ и равно

$$\ddot{p}_i(T_{2i}) = 6c_{2i}T_{2i} = \frac{2(\dot{x}_{*i} - \dot{x}_{0i})(2\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i})}{3(x_{*i} - x_{0i})}.$$
(2.12)

В случае $T = T_{3i}$ справедливы равенства $c_{1i} + 3c_{2i}T_{3i} = 0$, $c_{1i} = (\dot{x}_{*i} - \dot{x}_{0i})/T_{3i}$ и $\ddot{p}_i\left(T_{3i}\right) = 0$. Следовательно, максимальное по модулю значение второй производной многочлена (2.4) на отрезке $t \in [0, T_{3i}]$ достигается при t = 0 и равно

$$\ddot{p}_i(0) = 2c_{1i} = \frac{2(\dot{x}_{*i} - \dot{x}_{0i})(\dot{x}_{0i} + 2\dot{x}_{*i})}{3(x_{*i} - x_{0i})}.$$
(2.13)

В частности, при $T = T_{li}$ имеют место равенства $c_{2i} = 0$, $c_{1i} = (\dot{x}_{*i} - \dot{x}_{0i})/(2T_{li})$ и вторая производная по времени многочлена (2.4) при всех $t \in [0, T_{li}]$ является постоянной величиной:

$$\ddot{p}_i(t) = 2c_{1i} = \frac{\dot{x}_{*i}^2 - \dot{x}_{0i}^2}{2(x_{*i} - x_{0i})}.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 2. Пусть значения x_{0i} , \dot{x}_{0i} и x_{*i} , \dot{x}_{*i} , такие, что справедливы неравенства (2.3) и

$$\max \left\{ \left| \frac{2(\dot{x}_{*i} - \dot{x}_{0i})(2\dot{x}_{0i} + \dot{x}_{*i})}{3(x_{*i} - x_{0i})} \right|, \left| \frac{2(\dot{x}_{*i} - \dot{x}_{0i})(\dot{x}_{0i} + 2\dot{x}_{*i})}{3(x_{*i} - x_{0i})} \right| \right\} \le Q_i.$$
 (2.14)

Тогда для любого $T \in I_{Ti}$ вторая производная по времени многочлена (2.4) с коэффициентами (2.5) при всех $t \in [0,T]$ удовлетворяет ограничению $|\ddot{p}_i(t)| \leq Q_i$.

На основе следствия 1 и теоремы 2 сформулируем следующий результат.

Т е о р е м а 3. Пусть значения x_{0i} , \dot{x}_{0i} и x_{*i} , \dot{x}_{*i} , такие, что справедливы неравенства (2.2), (2.3) и (2.14). Тогда для любого $T \in I_{Ti}$ многочлен (2.4) с коэффициентами (2.5) и его первая и вторая производные по времени при всех $t \in [0,T]$ удовлетворяют ограничениям $|p_i(t)| \leq B_i$, $|\dot{p}_i(t)| \leq N_i$ и $|\ddot{p}_i(t)| \leq Q_i$ соответственно.

Заметим, что, если требуемое значение времени движения T задано в постановке задачи, то выполнение условия $T \in I_{Ti}$ в теоремах 1-3 и следствии 1 обеспечим за счет выбора тех значений из x_{0i} , \dot{x}_{0i} , \dot{x}_{*i} , которые не фиксированы в условиях задачи. В этом случае соотношения в (2.11) для подходящих величин T_{2i} и T_{3i} рассмотрим как систему линейных алгебраических уравнений относительно соответствующих начальных и/или конечных значений положения и скорости. При этом необходимо, чтобы время движения T было таким, что полученные значения удовлетворяют условиям (2.2) и (2.3). Выполнение ограничения (2.14) требует дополнительной проверки.

3. Синтез программных движений для многих степеней свободы. Далее будем полагать, что для каждой из m степеней свободы механической системы (1.1) уравнения системы, соответствующие рассматриваемой степени свободы, могут быть представлены в виде (2.1), где $g_i(t,x_{li}) \neq 0$ при всех $x_{li} \in \mathbb{R}$ и $t \geq 0$, $i \in \overline{1,m}$.

Фиксируем произвольные начальные $x_{1i}(0) = x_{0i}$, $x_{2i}(0) = \dot{x}_{0i}$, $i = \overline{1,m}$, и желаемые конечные $x_{1i}(T) = x_{*i}$, $x_{2i}(T) = \dot{x}_{*i}$, $i = \overline{1,m}$, значения переменных q_i и \dot{q}_i , $i \in \overline{1,m}$. Здесь T – время движения в фазовом пространстве $(q_1, \dot{q}_1, \ldots, q_m, \dot{q}_m)$ системы (1.1) из начальной точки с координатами $(x_{01}, \dot{x}_{01}, \ldots, x_{0m}, \dot{x}_{0m})$ в конечную точку с координатами $(x_{*1}, \dot{x}_{*1}, \ldots, x_{*m}, \dot{x}_{*m})$. Справедлива теорема, являющаяся следствием теоремы 3.

Следствие 2. Пусть значения x_{0i} , \dot{x}_{0i} и x_{*i} , \dot{x}_{*i} , $i \in 1, m$, такие, что справедливы соответствующие неравенства (2.2), (2.3), (2.14) и множество $I_T = I_{T1} \cap ... \cap I_{Tm}$ непустое. Тогда для любого $T \in I_T$ при всех $i \in \overline{1,m}$ многочлены (2.4) с коэффициентами (2.5) и их первые и вторые производные по времени удовлетворяют на отрезке $t \in [0,T]$ ограничениям $|p_i(t)| \leq B_i$, $|\dot{p}_i(t)| \leq N_i$ и $|\ddot{p}_i(t)| \leq Q_i$, $i \in \overline{1,m}$.

Отметим, что, если множество I_T пустое при заданных значениях x_{0i} , \dot{x}_{0i} и x_{*i} , \dot{x}_{*i} , $i \in 1, m$, то необходимо добиться непустоты I_T за счет выбора с учетом условий (2.2), (2.3) и (2.14) тех значений из x_{0i} , \dot{x}_{0i} и x_{*i} , \dot{x}_{*i} , $i \in \overline{1,m}$, которые не фиксированы в постановке задачи.

Наконец, каждая из компонент u_i , i = 1, m, программного управления (1.3) имеет вид (2.10).

3.1. Движение с нулевыми начальными и конечными значениями обобщенных скоростей. В частности, рассмотрим задачу построения программных движений при условии, что $\dot{x}_{0i}=\dot{x}_{*i}=0,\,i=\overline{1,m}.$ Отметим, что для выполнения условий теорем 1–3 и следствий 1, 2 необходимо, чтобы хотя бы одно из соответствующих значений \dot{x}_{0i} и \dot{x}_{*i} было отлично от нуля, что в данном случае не выполняется при всех $i=\overline{1,m}$. Дополнительно к ограничениям (1.2) потребуем, чтобы искомая программная траектория удовлетворяла условиям $\ddot{q}_i(0)=\ddot{q}_i(T)=0,\,i=\overline{1,m}.$

Для синтеза программной траектории из начальной точки $(x_{01},0,...,x_{0m},0)$ в конечную точку $(x_{*1},0,...,x_{*m},0)$ в пространстве состояний $(q_1,\dot{q}_1,...,q_m,\dot{q}_m)$ системы (1.1) используем дополни-

тельные промежуточные точки с координатами $(x_{j1}, \dot{x}_{j1}, ..., x_{jm}, \dot{x}_{jm}), j = \overline{1,4},$ где значения $x_{ji}, \dot{x}_{ji},$ $j = \overline{1,4}, i = \overline{1,m},$ удовлетворяют условиям

$$x_{ji} \in (\min\{x_{0i}, x_{*i}\}, \max\{x_{0i}, x_{*i}\}), \quad (x_{j,i} - x_{j-1,i})(x_{*i} - x_{0i}) > 0, \quad j = \overline{1, 4}, \quad i = \overline{1, m},$$
 (3.1)

$$\dot{x}_{ji}(x_{*i} - x_{0i}) > 0, \quad \dot{x}_{2i} = \dot{x}_{3i}, \quad \max\{|\dot{x}_{1i}|, |\dot{x}_{4i}|\} < |\dot{x}_{2i}| \le N_i, \quad j = \overline{1, 4}, \quad i = \overline{1, m}.$$
 (3.2)

Параметризованные временем кривые

$$x_{1i} = p_{ji}(t), \quad x_{2i} = \dot{p}_{ji}(t), \quad t \in \left[\sum_{k=0}^{j-1} T_k, \sum_{k=0}^{j} T_k\right], \quad j = \overline{1,5}, \quad i = \overline{1,m},$$
 (3.3)

в фазовом пространстве системы (1.1), соединяющие соответственно точки с координатами $(x_{j-1,1},\dot{x}_{j-1,1},\ldots,x_{j-1,m},\dot{x}_{j-1,m})$ и $(x_{j1},\dot{x}_{j1},\ldots,x_{jm},\dot{x}_{jm}),\ j=\overline{1,5},\ \text{где}\ T_0=0,\ T_1+\ldots+T_5=T,\ x_{5i}=x_{*i},\ \dot{x}_{5i}=\dot{x}_{*i}=0,\ i=\overline{1,m},$ зададим при помощи многочленов

$$p_{ji}(t) = x_{j-1,i} + \dot{x}_{j-1,i} \left(t - \sum_{k=0}^{j-1} T_k \right) + c_{1i_j} \left(t - \sum_{k=0}^{j-1} T_k \right)^2 + c_{2i_j} \left(t - \sum_{k=0}^{j-1} T_k \right)^3, \quad j = \overline{1,5}, \quad i = \overline{1,m}.$$
 (3.4)

Здесь коэффициенты c_{1i} , c_{2i} , $j = \overline{1,5}$, $i = \overline{1,m}$, следующие:

$$c_{1i_j} = -((2\dot{x}_{j-1,i} + \dot{x}_{ji})T_j + 3(x_{j-1,i} - x_{ji}))/T_j^2, \quad c_{2i_j} = ((\dot{x}_{j-1,i} + \dot{x}_{ji})T_j + 2(x_{j-1,i} - x_{ji}))/T_j^3.$$

Согласно следствию 2, рассмотренному для каждой из пяти промежуточных траекторий, образующих составную программную траекторию (3.3) из начальной точки с координатами $(x_{01},0,\ldots,x_{0m},0)$ в конечную точку $(x_{*1},0,\ldots,x_{*m},0)$, значения T_j , $j=\overline{1,5}$, и x_{ji} , \dot{x}_{ji} , $\dot{j}=\overline{1,4}$, $i=\overline{1,m}$, выбираются таким образом, что имеют место соотношения

$$\frac{3(x_{ji} - x_{j-1,i})}{2\dot{x}_{i-1,i} + \dot{x}_{ii}} \le (\ge) T_j \le (\ge) \frac{3(x_{ji} - x_{j-1,i})}{\dot{x}_{i-1,i} + 2\dot{x}_{ii}}, \quad j = \overline{1,5}, \quad j \ne 3, \quad i = \overline{1,m},$$
(3.5)

$$T_3 = \frac{x_{3i} - x_{2i}}{\dot{x}_{2i}}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{3.6}$$

Далее, условия $\ddot{q}_i(0) = \ddot{p}_{li}(0) = 0$ и $\ddot{q}_i(T) = \ddot{p}_{5i}(T) = 0$, $i = \overline{1,m}$, обеспечим, выбрав соответственно значения T_1 , x_{li} , \dot{x}_{li} и T_5 , x_{4i} , \dot{x}_{4i} , $i = \overline{1,m}$, такие, что

$$T_{1} = \frac{3(x_{1i} - x_{0i})}{\dot{x}_{1i}}, \quad T_{5} = \frac{3(x_{*i} - x_{4i})}{\dot{x}_{4i}}, \quad i = \overline{1, m}.$$
(3.7)

Заметим, что для непрерывности вторых производных по времени составных функций $x_{1i} = x_{1i}(t), t \in [0,T], i = \overline{1,m},$ в (3.3) при $t = T_1 + T_2$ и $t = T_1 + T_2 + T_3$ необходимо и достаточно, чтобы имели место равенства $\ddot{p}_{2i}(T_1 + T_2) = 0$ и $\ddot{p}_{4i}(T_1 + T_2 + T_3) = 0, i = \overline{1,m}$. Указанные условия на значения вторых производных соответствующих многочленов выполним за счет выбора значений $T_2, x_{2i}, \dot{x}_{2i}$ и $T_4, x_{3i}, i = \overline{1,m}$, удовлетворяющих соотношениям

$$T_2 = \frac{3(x_{2i} - x_{1i})}{\dot{x}_{1i} + 2\dot{x}_{2i}}, \quad T_2 = \frac{3(x_{4i} - x_{3i})}{\dot{x}_{4i} + 2\dot{x}_{2i}}, i = \overline{1, m}.$$
 (3.8)

Наконец, производные второго порядка $\ddot{x}_{li}(t)$, $t \in [0,T]$, $i=\overline{1,m}$, для составной программной траектории (3.3) непрерывны при $t=T_1$ и $t=T_1+T_2+T_3+T_4$ тогда и только тогда, когда имеют место равенства

$$\ddot{p}_{li}(T_1) = \frac{2\dot{x}_{li}^2}{3(x_{li} - x_{0i})} = \frac{2(\dot{x}_{2i} - \dot{x}_{li})(\dot{x}_{li} + 2\dot{x}_{2i})}{3(x_{2i} - x_{li})} = \ddot{p}_{2i}(T_1), \quad i = \overline{1, m},$$
(3.9)

$$\ddot{p}_{4i}\left(\sum_{k=1}^{4}T_{k}\right) = \frac{2\left(\dot{x}_{4i} - \dot{x}_{2i}\right)\left(2\dot{x}_{2i} + \dot{x}_{4i}\right)}{3\left(x_{4i} - x_{3i}\right)} = \frac{2\dot{x}_{4i}^{2}}{3(x_{4i} - x_{*i})} = \ddot{p}_{5i}\left(\sum_{k=1}^{4}T_{k}\right), \quad i = \overline{1, m}.$$
(3.10)

Условия (3.9) выполним, выбрав

$$\dot{x}_{1i} = \frac{\dot{x}_{2i}}{\varepsilon_1}, \quad x_{1i} = \frac{x_{2i} + (\varepsilon_1 - 1)(1 + 2\varepsilon_1)x_{0i}}{\varepsilon_1(2\varepsilon_1 - 1)}, \quad i = \overline{1, m},$$
(3.11)

где $\varepsilon_1 > 1$ — произвольный параметр. Аналогично добьемся справедливости равенств (3.10) за счет выбора

$$\dot{x}_{4i} = \frac{\dot{x}_{2i}}{\varepsilon_2}, \quad x_{4i} = \frac{x_{3i} + (\varepsilon_2 - 1)(1 + 2\varepsilon_2)x_{*i}}{\varepsilon_2(2\varepsilon_2 - 1)}, \quad i = \overline{1, m}, \quad \varepsilon_2 > 1.$$
 (3.12)

Отметим, что при любых значениях параметров $\varepsilon_1 > 1$, $\varepsilon_2 > 1$ и переменных x_{2i} , \dot{x}_{2i} , x_{3i} , $\dot{i} = \overline{1,m}$, удовлетворяющих условиям (3.1) и (3.2), для значений x_{1i} , \dot{x}_{1i} , $\dot{i} = \overline{1,m}$, (3.11) и x_{4i} , \dot{x}_{4i} , $\dot{i} = \overline{1,m}$, (3.12) выполнены соотношения в (3.1) и (3.2).

В случае справедливости равенств (3.11), (3.12) имеют место соотношения $T_2 = (\varepsilon_1 - 1)T_1$, $T_4 = (\varepsilon_2 - 1)T_5$ и условия (2.14) для составной программной траектории (3.3) примут вид

$$\max \left\{ \frac{2\dot{x}_{1i}^{2}}{3|x_{1i} - x_{0i}|}, \frac{2\dot{x}_{4i}^{2}}{3|x_{4i} - x_{*i}|} \right\} =$$

$$= \max \left\{ \frac{6|x_{2i} - x_{0i}|}{\varepsilon_{1}(2\varepsilon_{1} - 1)T_{1}^{2}}, \frac{6|x_{3i} - x_{*i}|}{\varepsilon_{2}(2\varepsilon_{2} - 1)T_{5}^{2}} \right\} \leq Q_{i}, \quad i = \overline{1, m}.$$

$$(3.13)$$

Далее если требуемое значение времени движения T задано в постановке задачи, возьмем произвольные положительные значения T_1 , T_3 , T_5 и $\varepsilon_1 > 1$, $\varepsilon_2 > 1$ таким образом, чтобы было выполнено условие $\varepsilon_1 T_1 + T_3 + \varepsilon_2 T_5 = T$. Тогда, рассмотрев соотношения (3.6) и (3.7) как систему линейных алгебраических уравнений относительно переменных x_{2i} , \dot{x}_{2i} и x_{3i} , $i = \overline{1,m}$, при условии, что имеют место равенства (3.11), (3.12), получим

$$x_{2i} = \frac{T_1(2\varepsilon_1 - 1)x_{*i} + (3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1))x_{0i}}{T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1)}, \quad i = \overline{1, m},$$
(3.14)

$$x_{3i} = \frac{\left(T_1\left(2\varepsilon_1 - 1\right) + 3T_3\right)x_{*i} + T_5\left(2\varepsilon_2 - 1\right)x_{0i}}{T_1\left(2\varepsilon_1 - 1\right) + 3T_3 + T_5\left(2\varepsilon_2 - 1\right)}, \quad i = \overline{1, m},$$
(3.15)

$$\dot{x}_{2i} = \frac{3(x_{*i} - x_{0i})}{T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1)}, \quad i = \overline{1, m}.$$
 (3.16)

Отметим, что для любых значений $x_{0i} \neq x_{*i}$, $i = \overline{1,m}$, и положительных T_1 , T_3 , T_5 , $\varepsilon_1 > 1$, $\varepsilon_2 > 1$ значения переменных x_{2i} , $i = \overline{1,m}$, (3.14) и x_{3i} , $i = \overline{1,m}$, (3.15) удовлетворяют соответствующим условиям в (3.1). При этом для выполнения ограничений $|\dot{x}_{2i}| \leq N_i$, $i = \overline{1,m}$, на переменные \dot{x}_{2i} , $i = \overline{1,m}$, записанные в виде (3.16), необходимо и достаточно, чтобы значения x_{0i} , x_{*i} , $i = \overline{1,m}$, и T_1 , T_3 , T_5 , $\varepsilon_1 > 1$, $\varepsilon_2 > 1$ удовлетворяли неравенствам

$$\frac{3|x_{*i} - x_{0i}|}{T_1(2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5(2\varepsilon_2 - 1)} \le N_i, \quad i = \overline{1, m}.$$
(3.17)

В этом случае для значений (3.16) выполнены соответствующие условия в (3.2).

Наконец, неравенства (3.13) для x_{2i} , \dot{x}_{2i} и x_{2i} , i=1,m, имеющих вид (3.14)—(3.16), запишутся следующим образом:

$$\frac{6|x_{*i} - x_{0i}|}{\varepsilon_1 T_1 (T_1 (2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5 (2\varepsilon_2 - 1))} \le Q_i, \quad i = \overline{1, m},$$
(3.18)

$$\frac{6|x_{*i} - x_{0i}|}{\varepsilon_2 T_5 (T_1 (2\varepsilon_1 - 1) + 3T_3 + T_5 (2\varepsilon_2 - 1))} \le Q_i, \quad i = \overline{1, m}.$$
 (3.19)

4. Построение программных движений для параллельного дельта-робота. Рассмотрим динамику параллельного дельта-робота, записанную в виде [22]

$$\ddot{\theta} = M^{-1}(\theta)(\tau - C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} - G(\theta)), \tag{4.1}$$

где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ — углы между неподвижным основанием и рычагами; $\tau \in \mathbb{R}^3$ — моменты, создаваемые силовыми приводами и действующие на рычаги; $M(\theta) = M^{\mathrm{T}}(\theta) > 0$ — матрица моментов инерции; $C(\theta, \dot{\theta})$ — слагаемые, связанные с центробежными и кориолисовыми силами; $G(\theta)$ — слагаемые, связанные с действием силы тяжести. Положение подвижной конечной платформы робота в пространстве описывается при помощи вектора $X = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$ в прямоугольной декартовой системе координат.

Отметим, что одна из типовых задач управления движением дельта-робота состоит в подхвате и переносе различных объектов из одного положения в пространстве в другое при помощи инструмента, установленного на подвижной платформе. При этом подвижная платформа совершает перемещение в пространстве из некоторого начального положения $X_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ в соответствующее конечное положение $X_1 = (x_1, y_2, z_3)^T$. С использованием обратной кинематики робота [22] начальное $X = X_0$ и конечное $X = X_1$ положения подвижной платформы можно записать в переменных θ как $\theta = \theta_0 = (\theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{03})^T$ и $\theta = \theta_* = (\theta_{*1}, \theta_{*2}, \theta_{*3})^T$.

Решим задачу синтеза программного движения $\theta = \theta_r(t)$, $\tau = \tau_r(t)$, переводящего систему (4.1) из начального состояния $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$ при $\ddot{\theta}(0) = 0$ в конечное состояние $\theta(T) = \theta_*$, $\dot{\theta}(T) = 0$ таким образом, что $\ddot{\theta}(T) = 0$. При этом необходимо, чтобы искомая программная траектория $\theta = \theta_r(t)$ удовлетворяла при всех $t \in [0,T]$ геометрическим ограничениям $|\theta_{ir}(t)| \leq \pi/2$, ограничениям на значения угловых скоростей $|\dot{\theta}_{ir}(t)| \leq N_i$ и ограничениям на значения угловых ускорений $|\ddot{\theta}_{ir}(t)| \leq Q_i$, $i = \overline{1,3}$. Здесь N_i , Q_i , $i = \overline{1,3}$, — заданные положительные значения. Будем также полагать, что время движения T не задано в постановке задачи.

Фиксируем произвольные положительные значения T_1 , T_3 , T_5 и $\varepsilon_1 > 1$, $\varepsilon_2 > 1$. Для синтеза программной траектории из начальной точки с координатами $(\theta_{01}, 0, \theta_{02}, 0, \theta_{03}, 0)$ в конечную точку $(\theta_{*1}, 0, \theta_{*2}, 0, \theta_{*3}, 0)$ в фазовом пространстве системы (4.1) используем дополнительные промежуточные точки с координатами $(\theta_{j1}, \dot{\theta}_{j1}, \theta_{j2}, \dot{\theta}_{j2}, \theta_{j3}, \dot{\theta}_{j3})$, $j = \overline{1,4}$. Здесь значения θ_{ji} , $\dot{\theta}_{ji}$, $j = \overline{1,4}$, $i = \overline{1,3}$, удовлетворяют условиям $\dot{\theta}_{2i} = \dot{\theta}_{3i}$, $i = \overline{1,3}$, и соответствующим соотношениям (3.11), (3.12), (3.14)—(3.16), записанным в обозначениях θ .

Программная траектория $\theta = \theta_r(t)$, $t \in [0,T]$, запишется покомпонентно следующим образом:

$$\theta_{i} = \theta_{ir}(t) = \left\{ p_{ji}(t), t \in \left[\sum_{k=0}^{j-1} T_{k}, \sum_{k=0}^{j} T_{k} \right], j = \overline{1,5} \right\}, \quad i = \overline{1,3},$$

$$(4.2)$$

где $T=\varepsilon_1T_1+T_3+\varepsilon_2T_5, T_2=(\varepsilon_1-1)T_1, T_4=(\varepsilon_2-1)T_5$, многочлены $p_{ji}(t), j=\overline{1,5}, i=\overline{1,3}$, имеют соответствующий вид (3.4), записанный в обозначениях θ .

Заметим, что для выполнения заданных ограничений на значения функций (4.2) и их первых и вторых производных по времени необходимо и достаточно, чтобы выбранные значения T_1 , T_3 , T_5 и $\varepsilon_1 > 1$, $\varepsilon_2 > 1$ удовлетворяли соответствующим неравенствам (3.17), (3.18) и (3.19), записанным в обозначениях θ .

Искомое программное управление, являющееся решением рассматриваемой терминальной задачи для системы (4.1), имеет вид

$$\tau = \tau_r(t) = M(\theta_r(t))\ddot{\theta}_r(t) + C(\theta_r(t),\dot{\theta}_r(t))\dot{\theta}_r(t) + G(\theta_r(t)), \quad t \in [0,T].$$

$$(4.3)$$

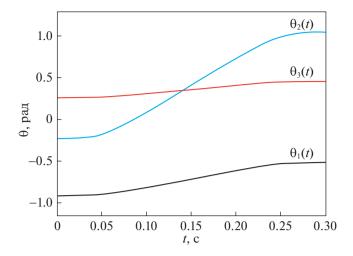


Рис. 1. Угловые координаты θ как функции времени

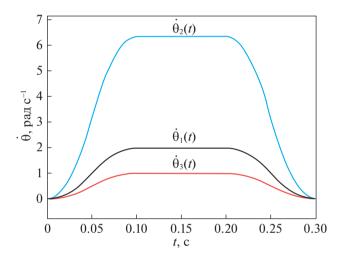


Рис. 2. Угловые скорости $\dot{\theta}$ как функции времени

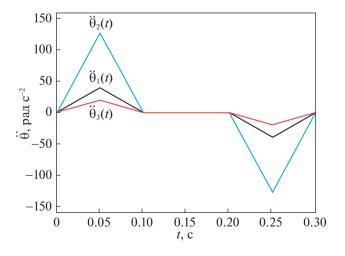


Рис. 3. Угловые ускорения $\ddot{\theta}$ как функции времени

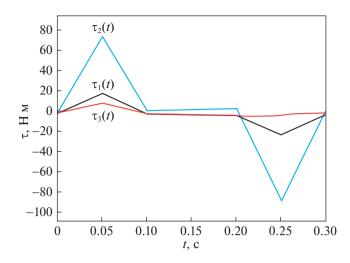


Рис. 4. Управляющие моменты τ как функции времени

Результаты численного моделирования системы (4.1) с управлением (4.3) для значений физических и геометрических параметров модели, взятых из работы [22], представлены на рис. 1—4. В качестве начальных и конечных значений угловых координат рассматривались соответственно $\theta_0 = (-0.9106, -0.2294, 0.2568)^{\rm T}$ и $\theta_* = (-0.516, 1.04, 0.4541)^{\rm T}$. При этом начальное и конечное положения подвижной конечной платформы робота в декартовой системе координат следующие: $X_0 = (0.2, 0.1, -0.5)^{\rm T}$ и $X_1 = (0.4, -0.2, -0.6)^{\rm T}$. Допустимые максимальные по модулю значения угловых скоростей и ускорений взяты соответственно $N_i = 7$ рад \cdot с $^{-1}$ и $Q_i = 150$ рад \cdot с $^{-2}$, $i = \overline{1,3}$. При планировании программной траектории были выбраны значения T = 0.3 с, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$; $T_1 = T/(3\varepsilon_1)$, $T_5 = T/(3\varepsilon_2)$.

Заключение. Для задачи планирования программных движений механических систем на основе использования полиномов третьего порядка от времени предложено аналитическое решение, учитывающее наличие ограничений на переменные состояния и управления. Программная траектория строится с учетом допустимых максимальных по модулю значений обобщенных координат, скоростей и ускорений. Выполнение заданных ограничений достигается за счет выбора времени движения. В частности, предложено решение задачи построения программной траектории с нулевыми начальными и конечными значениями обобщенных скоростей и ускорений, удовлетворяющее требуемым ограничениям на значения обобщенных координат, скоростей и ускорений. В качестве примера рассмотрено решение задачи управления движением параллельного дельта-робота. Для дальнейших исследований представляет интерес получение аналогичных результатов для программных движений, основанных на использовании полиномов более высоких, чем третий, порядков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. М.: Наука, 1987. $304\,\mathrm{c}$.
- 2. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 326 с
- 3. *Жевнин А.А.*, *Крищенко А.П.* Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 4. С. 805—809.
- 4. *Краснощеченко В.И., Крищенко А.П.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
- 5. *Ермошина О.В., Крищенко А.П.* Синтез программных управлений ориентацией космического аппарата методом обратных задач динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2000. № 2. С. 155—162.
- 6. *Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б.* Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 5. С. 156—163.

- 7. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Терминальное управление пространственным движением летательных аппаратов // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 5. С. 51–64.
- 8. Biagiotti L., Melchiorri C. Trajectory Planning for Automatic Machines and Robots. Springer, 2008. 514 p.
- 9. Ryu J.C., Agrawal S.K. Planning and Control of Under-actuated Mobile Manipulators Using Differential Flatness // Auton. Robots. 2010. V. 29. № 1. P. 35–52.
- Tang C.P., Miller P.T., Krovi V.N., Ryu J., Agrawal S.K. Differential-flatness-based Planning and Control of a Wheeled Mobile Manipulator – Theory and Experiment // IEEE/ASME Trans. on Mechatronics. 2011. V. 16. № 4. P. 768–773.
- 11. *Mohseni N.A., Fakharian A.* Optimal Trajectory Planning for an Omni-directional Mobile Robot with Static Obstacles: a Polynomial Based Approach // AI and Robotics (IRANOPEN). 2015. P. 1–6.
- 12. *Mohseni N.A., Fakharian A.* Optimal Trajectory Planning for Omni-directional Mobile Robots using Direct Solution of Optimal Control Problem // Proc. 4th Intern. Conf. on Control, Instrumentation, and Automation (ICCIA). Qazvin, 2016. P. 172–177.
- 13. *Голубев А.Е., Крищенко А.П.* Решение терминальной задачи управления для аффинной системы при помощи многочленов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 2. С. 101—114. https://doi.org/10.7463/0215.0758826
- 14. *Jond H.*, *Nabiyev V.*, *Benveniste R*. Trajectory Planning using High Order Polynomials under Acceleration Constraint // J. Optimization in Industrial Engineering. 2016. V. 10. P. 1–6.
- 15. *Richter C.A.*, *Bry A.P.*, *Roy N.* Polynomial Trajectory Planning for Aggressive Quadrotor Flight in Dense Indoor Environments // Robotics Research. 2016. V. 114. P. 649–666.
- 16. *Golubev A.E., Krishchenko A.P., Utkina N.V., Velishchanskiy M.A.* Solution of a Terminal Control Problem under State Constraints // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50 (1). P. 10679–10684.
- 17. *Golubev A.E.*, *Botkin N.D.*, *Krishchenko A.P.* Backstepping Control of Aircraft Take-off in Windshear // IFAC-PapersOnLine. 2019. V. 52 (16). P. 712–717.
- 18. *Велищанский М.А.* Движение летательных аппаратов в вертикальной плоскости при наличии ограничений на состояния // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 3. С. 70—81.
- 19. Белинская Ю.С., Четвериков В.Н. Метод накрытий для терминального управления с учетом ограничений // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 12. С. 1629—1639.
- 20. *Касаткина Т.С.* Решение терминальных задач для систем второго порядка при наличии ограничений на состояния // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 1. С. 17—26.
- 21. *Белинская Ю.С.* Решение задачи терминального управления для плоской системы с учетом ограничений заменой плоского выхода // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 6. С. 122—134.
- 22. Olsson A. Modeling and Control of a Delta-3 Robot. Master thesis. Lund: Lund University, 2009.

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЛВИЖУШИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 629.7.072.1

ОЦЕНКА ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ И АВТОМАТИЧЕСКАЯ БАЛАНСИРОВКА МАКЕТА МИКРОСПУТНИКА НА АЭРОЛИНАМИЧЕСКОМ ПОЛВЕСЕ

© 2021 г. Д. С. Иванов^{а,*}, Т. А. Иванова^b, Н. А. Ивлев^c, М. Ю. Овчинников^a, Д. С. Ролдугин^a

Рассматривается задача определения положения центра масс и тензора инерции макета на аэродинамическом подвесе по измерениям оптической системы оценки углового движения. Благодаря системе электродинамических линейных актюаторов и закрепленным на них грузам можно смещать положение центра масс макета относительно центра подвеса. С помощью уравнений движения макета на аэродинамическом подвесе и измерений углового положения оценивается тензор инерции и положение центра масс макета. По полученной оценке, линейные актюаторы перемещаются для задания требуемого положения центра масс относительно точки подвеса. Проводится экспериментальное исследование разработанного алгоритма автоматической балансировки макета микроспутника.

DOI: 10.31857/S0002338821020086

Введение. В настоящее время можно выделить два основных направления методов лабораторного тестирования систем управления движением космических аппаратов с точки зрения динамики — использование аэродинамических подвесов и применение аэродинамических столов, а также их комбинации. С помощью стенда с аэродинамическим столом благодаря воздушной подушке между поверхностью стола и опорой макета системы управления спутника обеспечивается свободное плоское поступательное движение и одноосное вращение аппарата. Такие стенды могут использоваться как для тестирования алгоритмов управления одиночным аппаратом, так и для отработки управления движением группы спутников [1—3].

Сферический аэродинамический подвес — наиболее распространенный способ лабораторной имитации углового движения спутника. Подвес представляет собой две полусферы, вложенные друг в друга. Внешняя полусфера имеет некоторое, обычно небольшое, число отверстий для выхода воздуха. За счет этого между внешней и внутренней сферами создается воздушная прослойка, практически исключающая трение. Подвес имеет три степени свободы, хотя обычно может неограниченно вращаться только относительно вертикали, так как на внутреннюю сферу устанавливается платформа, имитирующая спутник или его систему ориентации [4, 5].

Один из первых стендов был создан в Агентстве баллистических ракет США в 1959 г. [6]. Сложная конструкция пьедестала и платформы, на которой устанавливались элементы систем спутника, позволили добиться поворота до 120° по углу крена. Первый вопрос, для решения которого применялись аэродинамические подвесы, — влияние диссипации энергии (топливо в баках, нутационные демпферы, маховики) на движение спутника. В настоящее время крупные космические компании и агентства имеют в своем распоряжении стенды, предназначенные для моделирования движения макета спутника, включающего большую часть его систем [7, 8].

Первый небольшой (грузоподъемностью до 100 кг) стенд со сферическим подвесом был создан в Стэнфорде в 1975 г. [9]. Сейчас небольшие стенды широко распространены в европейских и американских университетах. Так, платформа на аэродинамическом подвесе, имеющаяся в Мексиканском институте географии, имеет массу всего 35 кг. На платформе установлены аксе-

лерометры, гироскопы, магнитометр, солнечный датчик, магнитные катушки, маховики и система балансировки [10]. Угол крена ограничен 50° .

Одно из преимуществ небольшого макета на подвесе — возможность установить его внутри колец Гельмгольца. Кольца предназначены для имитации геомагнитного поля и его изменения в соответствие с движением спутника на орбите. Эта особенность хорошо согласуется с размерами и возможностями малых спутников: они зачастую имеют магнитные катушки в качестве основных управляющих элементов. Поэтому проведение экспериментов в имитационном магнитном поле становится одновременно важным и возможным, так как область однородности колец Гельмгольца невелика. Такой стенд имеется, например, в университетах Стретчклайда в Глазго [11], Фридриха II в Неаполе [12], в Массачусетском технологическом институте [13], Университете Бразилии [14]. Такие стенды позволяют установить на подвесе только специальный макет системы ориентации, а не всего спутника.

Одно из преимуществ использования сферического аэродинамического подвеса – простота интерпретации результатов, полученных в эксперименте, в терминах полета спутника в космическом пространстве. Движение обоих тел — спутника и макета в подвесе — описывается одними и теми же уравнениями, различаются лишь внешние возмущения и неполная свобода поворота макета по одному или двум углам. Основным источником возмущений, действующих на макет. является гравитационный момент, возникающий из-за смещения центра масс относительно центра вращения. При этом, несмотря на то, что момент является доминирующим, его можно уменьшить с помощью системы балансировки, состоящей из подвижных грузов на макете системы управления. Для корректной работы системы балансировки необходимо оценить положение центра масс макета. Если центр масс находится ниже центра вращения, макет движется подобно математическому маятнику. Макеты, у которых центр давления находится выше центра масс, предпочтительны — такой макет не заваливается набок, а совершает колебания небольшой амплитуды. Процедура балансировки может быть осуществлена с помощью ручного перемещения подвижных грузов путем оценки периода колебаний макета [15]. Однако такой подход основан на методе проб и ошибок и требует достаточно много времени для установки центра масс на приемлемом расстоянии от центра давления. Поэтому автоматическая система балансировки, когда массы на макете перемещаются с помощью линейных электромеханических приводов, значительно сокращает время для балансировки и увеличивает точность. Однако для автоматической балансировки требуется оценка положения центра масс. Такая оценка может быть получена как с помощью бортовых алгоритмов обработки измерений датчиков, так и с помощью внешней системы определения углового движения макета [16–18].

Для корректной настройки алгоритмов управления угловым движением макета на аэродинамическом подвесе необходимо не только уменьшить величину гравитационного момента с помощью балансировки, но и иметь оценку тензора инерции макета. Как правило, тензор инерции рассчитывается с помощью специальных программных пакетов, в которых задается положение и масса всех компонент макета. Однако распределение масс внутри каждого блока макета известно приблизительно, поэтому тензор инерции известен с довольно большой погрешностью. Оценить тензор инерции возможно с помощью измерений углового движения макета при управляемом движении на аэродинамическом подвесе, как это сделано в [19-21]. Однако в этих работах предполагается, что величина управляющего воздействия на макет известна, благодаря чему с помошью алгоритмов на основе метода наименьших квадратов или динамической фильтрации определяются как тензор инерции, так и положение центра масс макета. К сожалению, в распоряжении разработчиков системы управления не всегда имеется откалиброванный актюатор, такой, как маховики или магнитные катушки. Поэтому в отличие от предыдущих публикаций в настоящей работе для оценки тензора инерции и положения центра масс макета используется только информация о смещении груза системы балансировки. Рассматриваются два этапа балансировки макета. На первом этапе по измерениям системы определения углового положения макета и с помощью заданного смещения груза оценивается тензор инерции макета в связанной системе координат с центром в точке подвеса и положение центра масс относительно точки подвеса. На втором этапе в предположении известного тензора инерции проводится оценка положения центра масс в режиме реального времени и реализуется итерационная процедура помещения центра масс в требуемое положение с помощью системы подвижных грузов.

1. Стенд для имитации углового движения микроспутников. В настоящей работе рассматривается стенд для испытаний алгоритмов управления угловым движением макетов микроспутников, созданный компанией "Спутникс" [22]. В состав стенда входят имитатор магнитного поля, имитатор Солнца, макет системы ориентации микроспутника и аэродинамический подвес. Фото

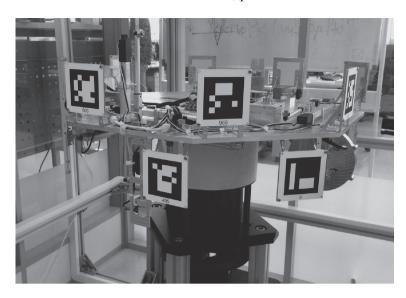


Рис. 1. Макет системы ориентации на аэродинамическом подвесе

макета представлено на рис. 1. Этот макет благодаря воздушной подушке способен совершать трехосное угловое движение относительно точки подвеса.

Вследствие неидеальности балансировки положение точки подвеса не совпадает с центром масс макета, возникает гравитационный момент, который влияет на движение макета. Чтобы уменьшить влияние гравитационного момента, на макете установлена двухуровневая система балансировки: грубая ручная установка положения центра масс относительно центра подвеса с помощью грузов, перемещаемых вдоль осей системы координат, связанной с макетом, и программно-управляемая система балансировки. Эта система состоит из шести линейных приводов, по два привода вдоль каждой связанной с макетом оси системы координат (рис. 2). Линейный привод способен перемещать грузик в диапазоне [—5; 5] см с точностью 1 мм. Масса груза вместе с перемещаемой частью линейного привода составляет 15.6 г.

Для определения углового движения макета применяется система оптических измерений. Она основана на обработке изображений, получаемых с камеры, неподвижно установленной на имитаторе геомагнитного поля. На изображении распознаются специальные метки, установленные на макете (рис. 3), и определяется угловое положение макета относительно неподвижной лабораторной системы координат. Центр лабораторной системы координат находится в центре подвеса макета, ось z направлена в зенит, оси x и y перпендикулярны друг другу и находятся в плоскости местного горизонта. Точность определения углового положения макета с помощью системы оптических измерений составляет $\sigma_{\text{изм}} = 0.2^{\circ}$, частота поступающих измерений — около 5 Гц.

Цель статьи заключается в том, чтобы с помощью обработки данных системы независимых измерений в режиме пассивного движения макета на аэродинамическом подвесе оценить тензор инерции макета в системе координат, связанной с макетом и началом в центре масс, а также вектор положения центра масс макета относительно точки подвеса. Задача решается посредством перемещения грузов с помощью линейных приводов во время пассивного движения. Измерения углового положения макета во время экспериментов используются для постэкспериментальной обработки. С помощью метода наименьших квадратов определяются тензор инерции и положение центра масс, доставляющие минимальное значение квадрату разности прогноза измерений и полученных в эксперименте измерений углового положения.

Приведем основные приблизительные динамические характеристики макета системы ориентации. С помощью программы SolidWorks были рассчитаны предварительные компоненты

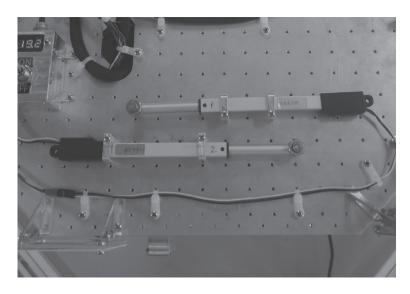


Рис. 2. Линейные электромеханические приводы системы балансировки

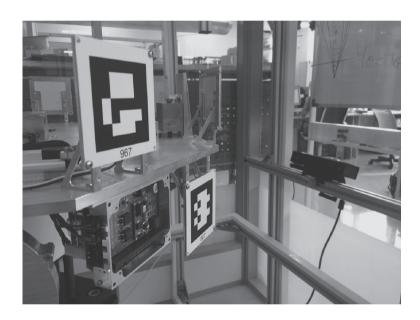


Рис. 3. Метки для определения углового движения макета и установленная на имитаторе магнитного поля камера

тензора инерции без учета кабельной сети на макете. Эти компоненты тензора инерции в системе координат с началом в центре масс имеют следующие значения:

$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 0.3309 & 0.0018 & 0.0373 \\ 0.0018 & 0.5253 & 0.0012 \\ 0.0373 & 0.0012 & 0.8120 \end{bmatrix} \text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

Масса всего макета составляет m = 14.24 кг.

2. Уравнения движения макета на аэродинамическом подвесе. Движение макета описывается с помощью динамических уравнений Эйлера. Используемые переменные можно разделить на две группы. Первую группу составляют компоненты ω_1 , ω_2 , ω_3 абсолютной угловой скорости спутника ω , записанные в осях связанной с телом системы координат. Для описания ориентации используется кватернион (\mathbf{q}, q_0) , где \mathbf{q} — векторная, q_0 — скалярная часть кватерниона [23]. Дина-

мические уравнения Эйлера движения твердого тела относительно неподвижной точки имеют вил

$$\mathbf{J}\frac{d\mathbf{\omega}}{dt} + \mathbf{\omega} \times \mathbf{J}\mathbf{\omega} = \mathbf{M},\tag{2.1}$$

где механический момент ${\bf M}$ содержит как управление ${\bf M}_{\rm упр}$, так и возмущающие моменты, т.е. ${\bf M}={\bf M}_{\rm упр}+{\bf M}_{\rm возм}$. Для спутника ${\bf J}-$ это тензор инерции, вычисленный для связанной с телом системы координат, находящейся в центре масс. При этом оси обычно направлены по главным осям спутника. В случае макета возможны два варианта. Можно поместить связанную с макетом систему координат в его центр масс. В этом случае уравнения получаются те же, ${\bf J}-$ тензор инерции в главных центральных осях. Однако такой подход заставляет учитывать дополнительные возмущения и движение центра масс относительно центра вращения. Поэтому обычно применяется более естественный подход — описание движения макета относительно центра вращения. Это усложняет вид тензора ${\bf J}$, но упрощает запись действующих на спутник возмущений. Тензор инерции ${\bf J}$ можно представить как

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} I_{11} + mr_2^2 + mr_3^2 & I_{12} - mr_1r_2 & I_{13} - mr_1r_3 \\ I_{12} - mr_1r_2 & I_{22} + mr_1^2 + mr_3^2 & I_{23} - mr_2r_3 \\ I_{13} - mr_1r_3 & I_{23} - mr_2r_3 & I_{33} + mr_1^2 + mr_2^2 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где I_{ij} — компоненты тензора инерции ${\bf I}$ для центра масс макета, ${\bf r}$ — вектор, соединяющий центр вращения и центр масс. Будем считать, что ${\bf I}$ — тензор инерции всего макета, в том числе перемещаемых грузов, которые находятся изначально в несмещенном положении. Связь тензоров инерции с грузами и без них задается формулой

$$\mathbf{I} = \hat{\mathbf{I}} - \sum_{i=1}^{N} m_i (\mathbf{r}_i^2 - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}),$$

где $\hat{\bf I}$ — исходный тензор инерции макета без балансировочных грузов, ${\bf r}_i$ — положение і-го груза в связанной системе координат, m_i — его масса, N — число грузов. В случае смещения грузов на вектор $d{\bf r}_i$ новый тензор инерции $\tilde{\bf I}$ будет иметь вид

$$\tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{I}} - \sum_{i=1}^{N} m_i ((\mathbf{r}_i + d\mathbf{r}_i)^2 - (\mathbf{r}_i + d\mathbf{r}_i)(\mathbf{r}_i + d\mathbf{r}_i)^{\mathrm{T}}).$$

Тогда изменение тензора инерции в случае смещения грузиков рассчитывается по следующей формуле:

$$\Delta \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}} = \sum_{i=1}^{N} m_i (d\mathbf{r}_i^2 + 2(\mathbf{r}_i, d\mathbf{r}_i)^2 - \mathbf{r}_i d\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}} - d\mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^{\mathrm{T}} - d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}).$$
(2.3)

Динамические уравнения (2.1) дополняются кинематическими уравнениями, которые при использовании кватерниона (\mathbf{q} , q_0) для описания углового положения имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix}
\frac{d\mathbf{q}}{dt} \\
\frac{dq_0}{dt}
\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix}
0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\
-\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\
\omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\
-\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
\mathbf{q} \\
q_0
\end{pmatrix}.$$
(2.4)

Рассмотрим в качестве возмущающего момента гравитационный момент, который записывается в связанной с макетом системе координат в точке подвеса следующим образом:

$$\mathbf{M}_{zp} = mg\mathbf{r} \times \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{2.5}$$

где ${\bf A}$ — матрица направляющих косинусов, задающая переход от лабораторной системы координат в связанную с макетом систему координат, m — масса всего макета, g — ускорение свободного падения.

Приведем, как изменяется радиус-вектор положения центра масс \mathbf{r} , заданный в системе координат с центром в точке подвеса при смещении грузов на векторы $d\mathbf{r}_i$. До смещения грузов вектор вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{r} = \frac{\hat{m}\hat{\mathbf{r}} + \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i}{m},$$

где $\hat{\mathbf{r}}$ — радиус-вектор до центра масс макета без грузов, \hat{m} — масса макета без грузов. После смещения грузов на $d\mathbf{r}_i$ положение центра масс $\tilde{\mathbf{r}}$ определяется из следующего выражения:

$$\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\hat{m}\hat{\mathbf{r}} + \sum_{i=1}^{N} m_i(\mathbf{r}_i + d\mathbf{r}_i)}{m}.$$

Тогда смещение центра масс находится из выражения

$$d\mathbf{r} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i d\mathbf{r}_i}{m}.$$
 (2.6)

3. Методика оценки центра масс и тензора инерции макета на аэродинамическом подвесе с помощью системы балансировки. Для проведения лабораторных исследований алгоритмов определения углового движения и управления ориентацией необходимо, чтобы движение макета на аэродинамическом подвесе было максимально приближено к орбитальному движению. Однако этому препятствует смещение центра масс макета от точки подвеса, в результате чего возникает гравитационный момент. Для уменьшения его влияния на движение макета с помощью балансировочных грузов положение центра масс требуется установить близко в окрестности точки подвеса с максимально-возможной точностью. Чтобы корректно рассчитать смещение грузов необходимо иметь оценку как положения центра масс, полученную по измерениям системы определения движения макета. Кроме того, так как тензор инерции также непосредственно влияет на движение системы, а он известен только приблизительно по предварительным расчетам, то требуется разработать методику по его оценке совместно с оценкой положения центра масс.

Рассмотрим свободное движение макета на аэродинамическом подвесе, т.е. на макет не воздействует управляющий момент со стороны маховиков или магнитных катушек. Движение полностью определяется гравитационным моментом (2.5). Пусть в начальный момент грузы системы балансировки находятся в нулевом положении. Движение макета определяется уравнениями (2.1) и (2.4). Во время этого свободного движения накапливаются измерения системы определения углового положения макета, т.е. компоненты кватерниона, поступающие с некоторой частотой. Далее, в известный момент времени грузы смещаются на известную величину $d\mathbf{r}_i$, тем самым изменяя положение центра масс относительно точки подвеса по формуле (2.6) и тензор инерции по формуле (2.3). После смещения положения грузиков макет продолжает свободное движение, накапливаются измерения об угловом положении.

Таким образом, движение макета определяется следующими неизвестными параметрами: положением центра масс до смещения грузов ${\bf r}$, тензором инерции в связанной с центром масс системе координат до смещения грузиков ${\bf I}$, а также вектором начальной угловой скорости макета в связанной системе координат ${\bf \omega}_0$. Кватернион в начальный момент времени Λ_0 принимаем за первое измерение системы определения углового положения макета. Введем вектор оцениваемых параметров ${\bf \xi}$:

$$\boldsymbol{\xi} = [\mathbf{r}^T, I_{11}, I_{22}, I_{33}, I_{12}, I_{13}, I_{23}, \boldsymbol{\omega}_0^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}.$$

Вектор ξ полностью задает свободное угловое движение макета на аэродинамическом подвесе. С помощью интегрирования уравнений движения можно получить прогноз углового положения макета $\hat{\Lambda}_k$ в каждый момент времени t_k . Построим функцию следующего вида:

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=1}^{K} (\hat{\Lambda}_k - \Lambda_k)^2, \tag{3.1}$$

где Λ_k — кватернион углового положения, полученный с помощью системы независимых измерений.

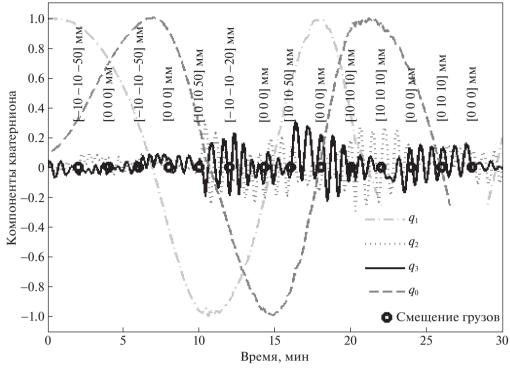


Рис. 4. Измерения углового положения во время экспериментов

Задача оценки тензора инерции и положения центра масс сводится к задаче минимизации функции (3.1), которая производится численно.

Следует заметить, что положение центра масс вследствие температурных деформаций макета может изменяться во времени. Поэтому разумно оценивать положение центра масс макета и балансировать его в режиме реального времени непосредственно при тестировании алгоритмов управления угловым движением.

4. Оценка тензора инерции и положения центра масс на аэродинамическом подвесе. Был проведен ряд экспериментов по методике, описанной выше. Раз в 2 мин грузы перемещались на известную величину. На рис. 4 представлены компоненты кватерниона, полученные с помощью системы определения углового положения, точками обозначены моменты смещения грузиков, а в квадратных скобках дан вектор смещения грузов $d\mathbf{r}$.

Рассмотрим в качестве примера отрезок измерений в окрестности третьего смещения грузов (рис. 5).

Зададим начальное значение для вектора определяемых параметров: положение центра масс макета $\mathbf{r}_0 = [0 \ 0 \ -10^{-4}]^T$ м; момент инерции зададим согласно расчетам из программы SolidWorks

 $I_0 = \hat{I}$; вектор угловой скорости ω_0 оценим с помощью дифференцирования матрицы направляющих косинусов по первым двум измерениям углового положения. На рис. 6, a представлено сравнение компонент кватерниона, полученных с помощью системы определения углового положения и с помощью интегрирования уравнений движения, из которого видно, что оценки компонент кватерниона сильно отклоняются от измеренных значений, что можно объяснить неточным значением начального приближения вектора оцениваемых параметров $\xi_0 = [\mathbf{r}_0; I_0; \boldsymbol{\omega}_0]^T$.

Запустим итерационную процедуру, которая найдет такой вектор ξ , который доставит минимум функционалу (3.1). Для минимизации функции используется алгоритм Левенберга—Марквардта. В результате минимизации получены следующие искомые параметры:

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} -9.2 \times 10^{-7} \\ -1.0 \times 10^{-7} \\ -7.9 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \mathbf{m};$$

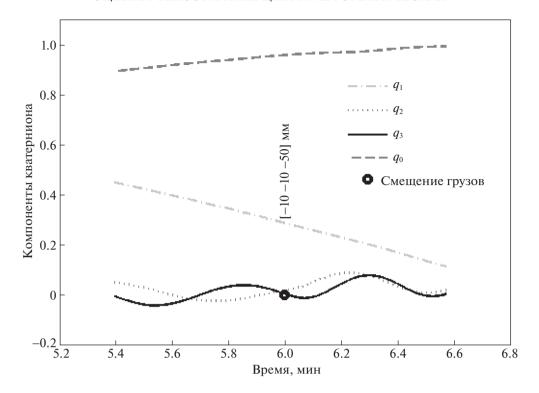


Рис. 5. Отрезок измерений

$$\begin{split} \hat{\mathbf{I}} = & \begin{bmatrix} 0.3565 & -0.0078 & 0.0314 \\ -0.0078 & 0.5301 & 0.0113 \\ 0.0314 & 0.0113 & 0.8782 \end{bmatrix} \text{KT} \cdot \text{M}^2; \\ \boldsymbol{\omega}_0 = & \begin{bmatrix} -0.010 \\ -0.004 \\ 0.011 \end{bmatrix} \text{pag/c}. \end{split}$$

Тензор инерции несколько отличается от рассчитанного с помощью программы SolidWorks, но близок к нему. На рис. 6, δ представлено сравнение измеренного и полученного с помощью интегрирования по оцененным параметрам кватерниона ориентации. Визуально эти графики совпадают, но на рис. 7 можно увидеть покомпонентную разность, которая не превышает значения 7×10^{-3} , что соответствует ошибке 0.8° по угловому положению. На рис. 8 можно увидеть компоненты вектора угловой скорости. Излом кривых в точке около 37 с вызван смещением грузов.

На рис. 9, a представлена диаграмма размаха оценок положения центра масс для 20 экспериментов, из которой можно заключить, что разброс значений для вертикальной компоненты составляет около 10^{-5} м, а для горизонтальных компонент — около 5×10^{-6} м. На рис. 9, δ приведена диаграмма размаха оценки компонент тензора инерции макета, из которой можно заключить, что разброс по определению диагональных элементов тензора инерции составляет около $0.1~{\rm kr\cdot m^2}$. Для оценки значений недиагональных элементов разброс составляет около $0.05~{\rm kr\cdot m^2}$. На рис. 9,6 также представлены значения элементов тензора инерции, рассчитанные с помощью программы SolidWorks. Расчетные значения осевых моментов инерции по третьей и второй оси заметно отличаются от среднего значения по результатам экспериментов, что может свидетельствовать об ошибках в расчетах распределения масс в компонентах макета.

5. Автоматическая балансировка в режиме реального времени. Для оценки положения центра масс в режиме реального времени по поступающим измерениям углового положения используется алгоритм на основе расширенного фильтра Калмана [24, 25]. На этом этапе будем считать, что оценка тензора инерции известна в результате применения алгоритма на основе метода

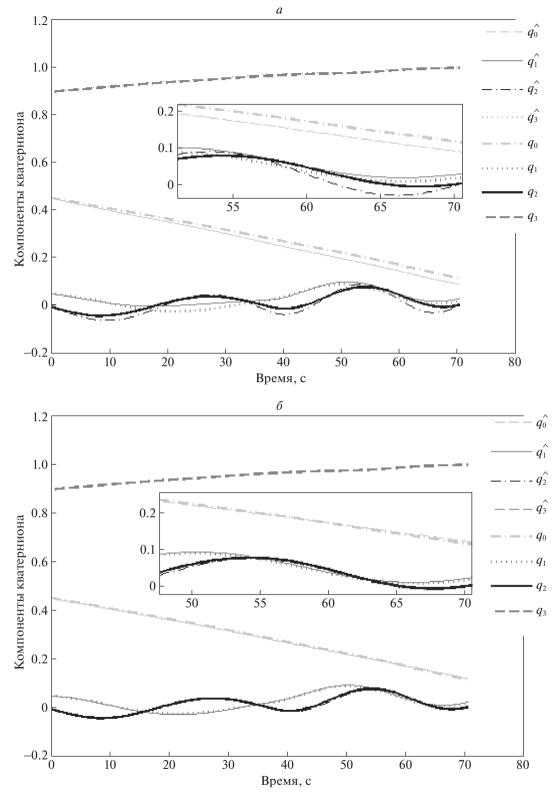


Рис. 6. Сравнение измеренного и полученного с помощью интегрирования углового положения до оценки (a) и после оценки (b) параметров ξ

наименьших квадратов, рассмотренного в разд. 3 статьи. Кроме того, тензор инерции практически не изменяется, тогда как положение центра масс может значительно измениться вследствие термических деформаций платформы макета во время экспериментов под действием нагрева

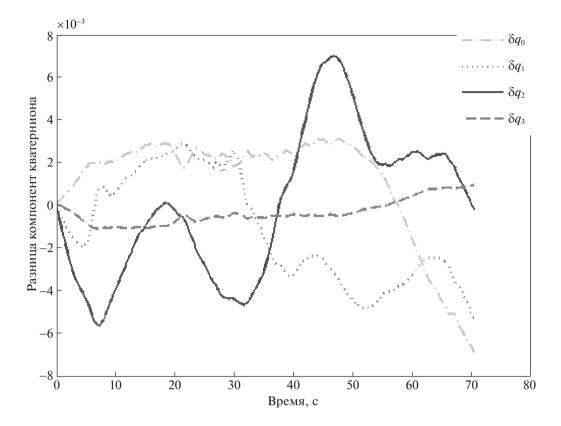


Рис. 7. Разность компонент кватерниона

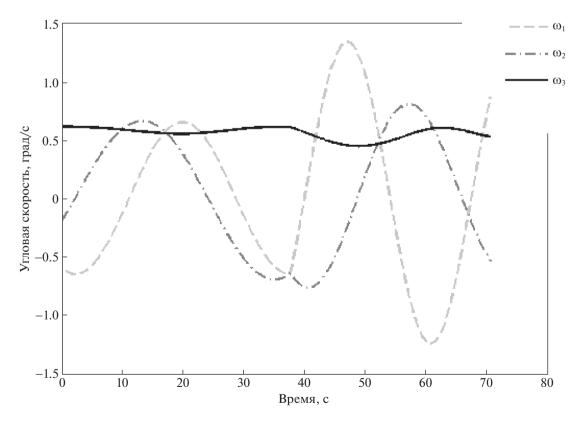


Рис. 8. Компоненты вектора угловой скорости

со стороны имитатора Солнца. Это может привести к значительным возмущениям со стороны гравитационного момента.

Для случая определения положения центра масс макета в режиме реального времени используется вектор состояния макета, содержащий векторную часть кватерниона ориентации, вектор угловой скорости и положение центра масс относительно точки подвеса:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{\omega} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}.$$

Дискретная модель изменения вектора состояния записывается следующим образом:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_{k} \mathbf{x}_{k} + \mathbf{w}_{k}, \quad \mathbf{\Phi}_{k} = e^{\mathbf{F}_{k} \Delta t} \approx \mathbf{E}_{9 \times 9} + \mathbf{F}_{k} \Delta t, \quad \mathbf{F}_{k} = \begin{pmatrix} -\mathbf{W}_{\mathbf{w}_{k}} & \frac{1}{2} \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{J}^{-1} \mathbf{W}_{\mathbf{r}_{k}} \mathbf{W}_{mg} & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}_{\text{rup}}^{k} & -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{W}_{mg} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

где $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k), t_k$ — тактовый момент времени, $\Delta t = t_{k+1} - t_k, k$ — номер такта алгоритма определения движения, $0_{3\times 3}$ — нулевая матрица размерности 3×3 , $\mathbf{E}_{n\times n}$ — единичная матрица размерности $n \times n$, \mathbf{w}_k — дискретная белая нормально распределенная ошибка модели движения с $\mathbf{M}(\mathbf{w}_k) = 0$ и $M(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i^{\mathrm{T}}) = Q \delta_{ki}, \delta_{ki}$ — символ Кронекера, \mathbf{F}_k — матрица динамики, полученная в результате линеаризации уравнений движения (2.1), (2.4), $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}$ — кососимметрическая матрица с элементами, определенными вектором $\mathbf{y}, \mathbf{F}_{\text{гир}}^{k} = 2 \left(\mathbf{W}_{\mathbf{J}\mathbf{\omega}_{k}} \mathbf{W}_{\mathbf{\omega}_{k}} - \mathbf{W}_{\mathbf{\omega}_{k}} \mathbf{J} \mathbf{W}_{\mathbf{\omega}_{k}} \right) -$ матрица гироскопического момента.

В (5.1) принята следующая дискретная модель изменения радиус-вектора центра масс в жестко связанной с макетом системе координат с центром в точке подвеса:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{w}_k^r,$$

 $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{w}_k^r,$ где $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}\left(t_k\right)$, $\mathbf{w}_\mathbf{r}$ — дискретная белая нормально распределенная случайная величина с $\mathbf{M}(\mathbf{w}_k^{\mathrm{T}}) = 0$ и $\mathbf{M}(\mathbf{w}_{i}^{r}\mathbf{w}_{i}^{r\mathrm{T}}) = \mathbf{Q}^{r}\delta_{ki}$. Случайная природа изменения положения центра масс может быть обусловлена влиянием неучтенного в модели термического изменения объема материалов, из которых состоит макет.

В качестве вектора измерений рассматривается векторная часть кватерниона $\mathbf{z} = \mathbf{q}$. Тогда дискретная модель измерений имеет вид

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{\psi}_k,$$

где $\mathbf{H} = [\mathbf{E}_{3\times3} \ \ 0_{3\times3} \], \mathbf{\psi}_k$ — белая нормально распределенная, не зависящая от \mathbf{w}_k ошибка измерений с нулевым математически ожиданием $\mathbf{M}(\mathbf{\psi}_k) = 0$ и ковариационной матрицей $\mathbf{M}(\mathbf{\psi}_k \mathbf{\psi}_i^{\mathrm{T}}) =$ $= \mathbf{R} \delta_{ki}$.

Работа расширенного фильтра Калмана состоит из двух этапов – прогноза вектора состояния на момент получения измерения и его коррекции при обработке результатов измерения. На этапе прогноза априорная оценка вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$ вычисляется с использованием непрерывных уравнений движения с начальными условиями, которые задаются апостериорной оценкой вектора состояния на предыдущем шаге $\hat{\mathbf{x}}_{k}^{+}$:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, t) dt,$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ — функция правых частей, которая может быть получена из уравнений (2.1) и (2.4). Также на этапе прогноза необходимо найти ковариационную матрицу ошибок вектора состояния ${f P}_k = {f M}(\Delta {f x}_k \Delta {f x}_k^{\rm T})$, где $\Delta {f x}_k = \hat{{f x}}_k - {f x}_k$ — ошибка оценки фильтра Калмана. Априорная матрица ${f P}_{k+1}^-$ вычисляется с помощью дискретного уравнения следующим образом:

$$\mathbf{P}_{k+1}^{-} = \mathbf{\Phi}_k \mathbf{P}_k^{+} \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}.$$

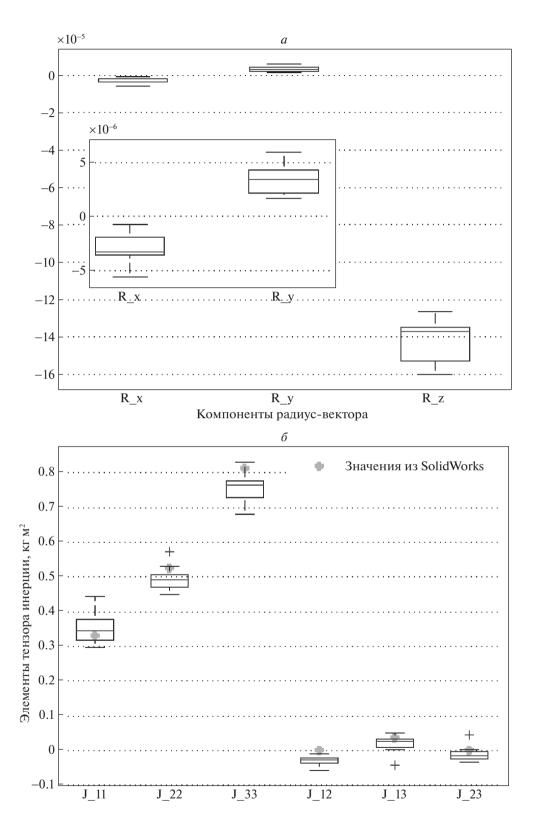


Рис. 9. Диаграммы ошибок определения центра масс макета (a) и ошибок определения компонент тензора инерции макета (δ) для 20 экспериментов

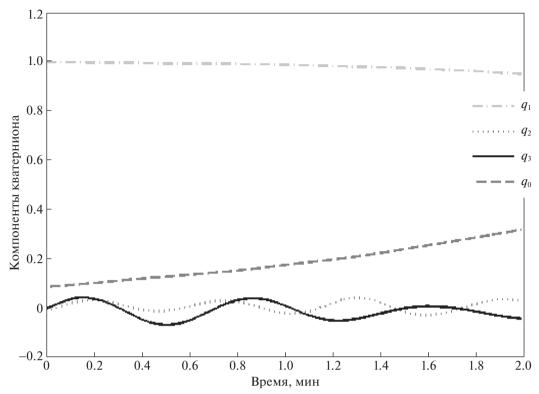


Рис. 10. Измерения углового положения до смещения грузов

На этапе коррекции апостериорная оценка вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+$ и апостериорная ковариационная матрица \mathbf{P}_{k+1}^+ вычисляются по формулам

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{+} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{-} + \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{-}),$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^{+} = (\mathbf{E}_{9x9} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H})\mathbf{P}_{k+1}^{-},$$

где

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1}^{-} \mathbf{H}^{\mathrm{T}} (\mathbf{H} \mathbf{P}_{k+1}^{-} \mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R})^{-1}.$$

Для работы дискретного фильтра Калмана в начальный момент времени требуется задать вектор состояния \mathbf{x}_0 , ковариационные матрицы ошибок модели движения \mathbf{Q} , ошибок измерений \mathbf{R} и ошибок знания начального вектора состояния \mathbf{P}_0 . Величину матрицы \mathbf{Q} можно оценить экспериментально, исходя из величины неучтенных в модели движения возмущений. Ковариационная матрица \mathbf{R} , как правило, задается диагональной, где по диагонали расположены дисперсии ошибок измерений, которые определяются экспериментально, т.е. $\mathbf{R} = \text{diag}(\sigma_{\text{изм}}^2, \sigma_{\text{изм}}^2, \sigma_{\text{изм}}^2)$. Матрица \mathbf{P}_0 задается исходя из начального незнания вектора состояния \mathbf{x}_0 .

Рассмотрим участок измерений без перемещения грузов, который представлен на рис. 10. Будем подавать на вход измерения и на каждом шаге получать оценку положения центра масс макета. На рис. 11 приведена оценка угловой скорости макета, а на рис. 12 — оценка вектора положения центра масс макета. В результате после сходимости оценка положения центра масс составила, м:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -4.0 \times 10^{-6} \\ -1.0 \times 10^{-7} \\ -8.1 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

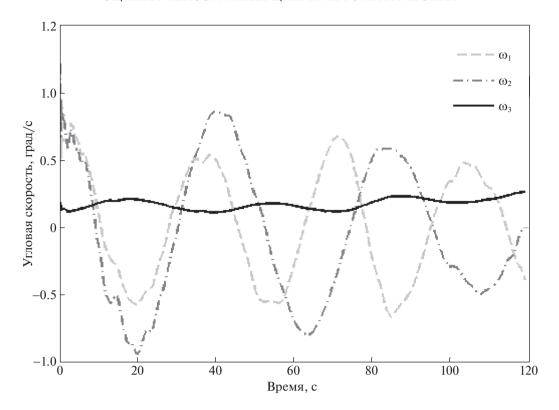


Рис. 11. Оценка угловой скорости

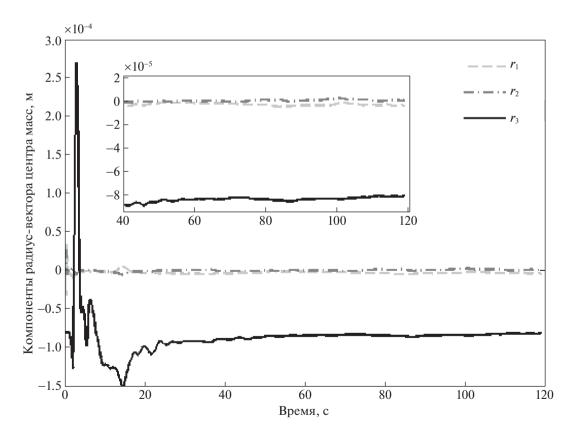


Рис. 12. Оценка компонент радиус-вектора центра масс относительно центра подвеса в связанной с макетом системе координат

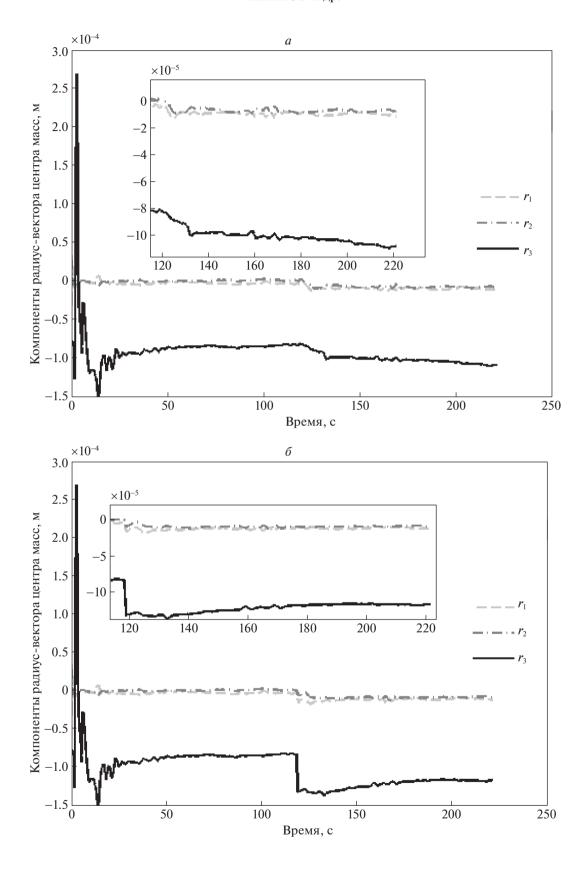


Рис. 13. Оценка компонент радиус-вектора центра масс при смещении грузов, если информация о перемещении в уравнения движения в фильтре Калмана не подается (a) и если подается (b)

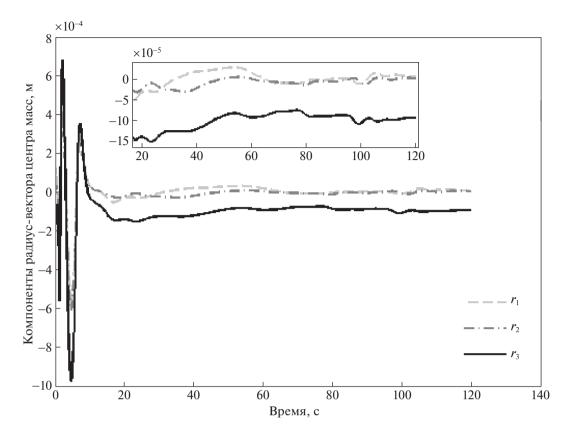


Рис. 14. Оценка положения центра масс во время автоматической балансировки

Ошибка относительно положения центра масс, оцененного с помощью метода наименьших квадратов, составила 2×10^{-6} м.

Рассмотрим теперь, что произойдет с оценками положения центра масс при смещении грузов. Пусть грузы смещаются на вектор [-10;-10;-50] мм, это соответствует смещению центра масс, согласно приведенным выше параметрам, на величину $[-1;-1;-5]\times 10^{-5}$ м. На рис. 13, a представлен пример, когда в уравнения движения в фильтре Калмана не подается информация о смещении грузов. Видно, что с момента, равного приблизительно 120 с, оценка положения центра масс начала отслеживать текущее значение положения центра масс, причем изменение вектора положения центра масс близко к расчетному $[-1;-1;-5]\times 10^{-5}$ м. На рис. 13, δ приведен пример, когда в уравнения движения в фильтре Калмана подается информация о смещении грузов на заданное значение. В момент 120 с оценки положения центра масс резко смещаются на величину $[-1;-1;-5]\times 10^{-5}$ м, но по третьей компоненте это значение постепенно сходится к значению 1.1×10^{-5} м вместо расчетного 1.4×10^{-5} м. Это может быть обусловлено тем, что расчетное значение смещения положения центра масс несколько ошибочно из-за неточности линейных приводов, ошибки исполнения или в результате смещения положения центра масс за счет термического расширения.

Теперь продемонстрируем совместную работу алгоритма определения центра масс макета и автоматических балансиров. Пусть требуемое положение центра масс задается вектором $[0;0;0]\times 10^{-5}\,\mathrm{m}$. В этом случае можно уменьшить влияние гравитационного момента на движение аэродинамического подвеса. По оценке положения центра масс, полученной с помощью фильтра Калмана, раз в 25 с будем сдвигать грузики на такую величину, чтобы положение центра масс было равно желаемому значению. Однако вследствие ошибок оценки положения центра масс и плавного смещения центра масс вследствие термических эффектов требуется постепенное уточнение положения центра масс. Таким образом, из-за последовательных периодических смещений грузиков центр масс системы устанавливается в некоторой окрестности требуемого

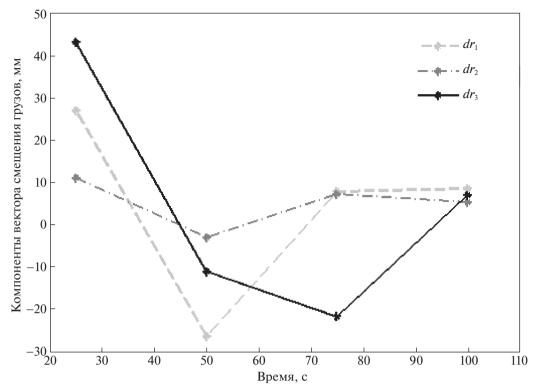


Рис. 15. Смещения грузов во время автоматической балансировки

значения. На рис. 14 представлены оценки положения центра масс, полученные фильтром Калмана, а на рис. 15 — значения перемещения грузов для балансировки, рассчитанные по текущим значениям положения центра масс раз в 25 с. В результате после четырех итераций с точностью около 1×10^{-5} м установилось требуемое положение центра масс.

Таким образом, продемонстрирована работа системы определения положения центра масс относительно точки подвеса и системы перемещения грузов для уменьшения влияния гравитационного момента на движение макета на аэродинамическом подвесе за счет смещения центра масс макета ближе к центру подвеса.

Заключение. При тестировании алгоритмов управления угловым движением спутников на наземных стендах с аэродинамическим подвесом необходимо уменьшить влияние возмущающего гравитационного момента на движение макета системы ориентации. В работе предложена связка алгоритмов для двухэтапной балансировки макета микроспутника. На первом этапе оцениваются положение центра масс макета относительно центра вращения подвеса и компоненты тензора инерции макета с помощью известного перемещения грузов системы балансировки во время свободного неуправляемого движения. Эта методика была протестирована на стенде компании "Спутникс", точность оценки положения центра масс составила около 10 мкм, а точность оценки диагональных элементов тензора инерции — около $0.1 \, \mathrm{kr} \cdot \mathrm{m}^2$. Оценка тензора инерции и первое приближение положения центра масс используется на втором этапе автоматической балансировки. За счет термических деформаций положение центра масс смещается при длительных экспериментах, поэтому оно оценивается с помощью алгоритма на основе фильтра Калмана в режиме реального времени, и на основе этой информации грузы смещаются для помещения центра масс макета в требуемое положение. В результате экспериментального исследования разработанной методики на стенде удалось обеспечить требуемое положение центра масс относительно центра подвеса с точностью около 10 мкм, что является приемлемым значением для тестирования бортовых алгоритмов управления ориентацией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов Д.С., Коптев М.Д., Маштаков Я.В. и др.* Лабораторный стенд для моделирования движения микроспутников // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 1. С. 125—140.

- 2. *Ivanov D., Koptev M., Mashtakov Y. et al.* Determination of Disturbances Acting on Small Satellite Mock-up on Air Bearing Table // Acta Astronautica. 2018. V. 142. P. 265–276.
- 3. *Биндель Д., Зараменских И.Е., Иванов Д.С. и др.* Лабораторный стенд для верификации алгоритмов управления группировкой спутников // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. Т. 48. № 5. С. 109—117.
- 4. *Ovchinnikov M., Ivanov D., Ivlev N. et al.* Development, Integrated Investigation, Laboratory and In-flight Testing of Chibis-M Microsatellite ADCS // Acta Astronautica. 2014. V. 93. P. 23–33.
- 5. *Иванов Д.С., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю. и др.* Испытания алгоритмов управления ориентацией микроспутника "Чибис-М" на лабораторном стенде // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 1. С. 118—137.
- 6. Haeussermann W., Kennel H. A Satellite Motion Simulator // Automatica. 1960. V. 5. № 12. P. 22–25; 90–91.
- 7. Peck M., Miller L., Cavender A. et al. An Airbearing-Based Testbed for Momentum Control Systems and Spacecraft Line of Sight // Advances in the Astronautical Sciences. 2003. V. 114. P. AAS 03-127.
- 8. *Ivanov D., Koptev M., Ovchinnikov M. et al.* Flexible Microsatellite Mock-up Docking with Non-cooperative Target on Planar Air Bearing Test Bed // Acta Astronautica. 2018. V. 153. P. 357–366.
- 9. *Cordova S.S.F., DeBra D.B.* Mass Center Estimation of a Drag-Free Satellite // Proceedings of the 6th Triennial World Congress of the IFAC. Boston, 1975.
- 10. *Prado J., Bisiacchi G., Reyes L. et al.* Three-axis Air-bearing Based Platform for Small Satellite Attitude Determination and Control Simulation // J. Applied Research and Technology. 2005. V. 3. № 3. P. 222–237.
- 11. *Post M.A., Li J., Lee R.* Design and Construction of a Magnetic Field Simulator for CubeSat Attitude Control Testing // J. Instrumentation, Automation and Systems. 2014. V. 1. № 1. P. 1–9.
- 12. Pastena M., Sorrentino L., Grassi M. Design and Validation of the University of Naples Space Magnetic Field Simulator (SMAFIS) // J. IEST. Institute of Environmental Sciences & Technology. 2001. V. 44. № 1. P. 33–42.
- 13. *Prinkey M., Miller D., Bauer P. et al.* CubeSat Attitude Control Testbed Design: Merritt 4-Coil per Axis Helmholtz Cage and Spherical Air Bearing // AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conf. Reston, Virginia, 2013.
- 14. Silva R., Ishioka I., Cappelletti C. et al. Helmholtz Cage Design and Validation for Nanosatellites HWIL Testing // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2019. V. 55. № 6. P. 3050–3061.
- 15. *Romano M.*, *Agrawal B.N.* Acquisition, Tracking and Pointing Control of the Bifocal Relay Mirror Spacecraft // Acta Astronautica. 2003. V. 53. № 4–10. P. 509–519.
- 16. *Kim J.J.*, *Agrawal B.N*. Automatic Mass Balancing of Air-Bearing-Based Three-Axis Rotational Spacecraft Simulator // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2009. V. 32. № 3. P. 1005–1017.
- 17. Wang S., Ma J., Gao S. Balancing Methods on the Three-Axis Air-Bearing Platform // Asia Simulation Conf. Shaghai: Springer, 2012. P. 117–125.
- 18. Chesi S., Gong Q., Pellegrini V. et al. Automatic Mass Balancing of a Spacecraft Three-Axis Simulator: Analysis and Experimentation // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2014. V. 37. № 1. P. 197–206.
- 19. Xu Z., Qi N., Chen Y. Parameter Estimation of a Three-axis Spacecraft Simulator Using Recursive Least-squares Approach with Tracking Differentiator and Extended Kalman Filter // Acta Astronautica. 2015. V. 117. P. 254–262.
- 20. *Krishnanunni A., Jayadevan S., Mony A. et al.* Inertia and Center of Mass Estimation of a 3 DoF Air Bearing Platform // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. № 1. P. 219—224.
- 21. *Xu Z.*, *Chen Y.*, *Xu Z.* A Suboptimal Excitation Torque for Parameter Estimation of a 5-DOF Spacecraft Simulator // Advances in Space Research. 2018. V. 62. № 9. P. 2556–2565.
- 22. СПУТНИКС Испытательные стенды [электронный ресурс]. URL: https://sputnix.ru/ru/oborudo-vanie/ispytatelnye-stendy/ (дата доступа: 12.02.2020).
- 23. *Бранец В.Н.* Лекции по теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем управления. М.: МФТИ, 2009. 304 р.
- 24. *Kalman R.E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // Transactions of ASME, Series D. J. Basic Engineering. 1960. V. 82. P. 35–45.
- 25. Ovchinnikov M., Ivanov D. Approach to Study Satellite Attitude Determination Algorithms // Acta Astronautica. 2014. V. 98. P. 133–137.

______ РОБОТОТЕХНИКА

УДК 531.38

ПРЕОДОЛЕНИЕ ИНСЕКТОМОРФНЫМ РОБОТОМ ЗАВАЛОВ В ВИДЕ ИЗОЛИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРОВ

© 2021 г. Ю. Ф. Голубев^{а,*}, В. В. Корянов^{а,**}

^а ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
*e-mail: golubev@keldysh.ru
**e-mail: korianov@keldysh.ru
Поступила в редакцию 05.10.2020 г.
После доработки 09.10.2020 г.
Принята к публикации 30.11.2020 г.

Разработан метод преодоления шестиногим роботом препятствий в виде одиночных цилиндров крупных радиусов и совокупности отдельно лежащих цилиндров небольшого радиуса, находящихся на горизонтальной плоскости под действием силы тяжести, сухого трения и трения качения. Установлено, что если радиус одиночного цилиндра сопоставим с высотой робота, то преодолеть такое препятствие возможно, придав цилиндру подходящую начальную угловую скорость. Приводятся результаты численных экспериментов.

DOI: 10.31857/S0002338821020050

Введение. Характерной особенностью дикой лесистой местности являются различного рода завалы. Часто встречаются завалы из стволов упавших деревьев. Бывают также искусственные завалы, предназначенные для ограничения проезда колесных или гусеничных транспортных средств. Принципиальная возможность преодоления хотя бы простейших завалов из стволов деревьев и бревен выделяет шагающие машины и, в частности, инсектоморфные роботы как перспективное транспортное средство для работы в естественной среде. Такой робот контактирует с опорой стопами ног. Применение для повышения надежности опоры в стопах ног аппарата таких специальных средств, как вакуумные присоски, магнитные контактные устройства и средства химической адгезии [1–3], представляется в рассматриваемом случае нецелесообразным. Особенность преодоления завалов состоит в том, что робот, наступая на отдельные предметы и создавая дополнительную нагрузку на опору, может ее разрушить. Поэтому проблемы выбора опорных точек на бревнах и направлений опорных усилий в процессе преодоления препятствия требуют специального исследования.

Существует очень много видов завалов из бревен [4]. В предлагаемой работе рассмотрим лишь некоторые простейшие варианты препятствий. Например, это могут быть отдельные бревна, лежащие на горизонтальной в среднем поверхности. Если бревен несколько, то в зависимости от расстояний между ними они могут образовывать препятствия различной сложности. В качестве математической модели бревен возьмем шероховатые однородные прямые круговые цилиндры различного радиуса. Опорную поверхность представим горизонтальной шероховатой опорной плоскостью.

Задача преодоления препятствия в виде отдельного цилиндра, лежащего на шероховатой горизонтальной плоскости, сводится в наиболее общем случае к задаче о равновесии цилиндра под действием силы тяжести и сил, приложенных к поверхности цилиндра. Ясно, что цилиндр не покатится, если линии действия этих сил пройдут через образующую цилиндра, касающуюся опорной плоскости, а если линии действия сил окажутся внутри соответствующего конуса трения, то не возникнет и проскальзывания цилиндра относительно опорной плоскости. В этом случае отдельный цилиндр будет достаточно хорошей опорой.

Препятствие в виде двух цилиндров, целиком лежащих на плоскости, преодолевается как последовательность отдельных цилиндров, если они не касаются друг друга и лежат на достаточном расстоянии. Задача несколько усложняется, если расстояние между цилиндрами сравнимо с половиной длины корпуса. Если цилиндры параллельны и касаются, то они образуют более надежную опору, чем один цилиндр, поскольку на линии их касания возникает сила трения, препятствующая их встречному качению. Для того, чтобы использовать эту силу трения, достаточно направить линию действия внешней силы в какую-нибудь точку площадки между проекциями осей цилиндров на опорную плоскость.

В дальнейшем ограничимся случаем, когда завал образован не более чем тремя цилиндрами. Равновесие системы и возможность ее использования в качестве опоры для шагающего робота будут исследоваться в предположении, что сухое трение и трение качения в контактах системы ограничены. Предлагаемая статья развивает результаты работ [5-10] и увеличивает набор препятствий, которые инсектоморфный робот теоретически может преодолеть. С целью выявления некоторых принципиальных особенностей алгоритма управления для преодоления завалов в статье рассматриваются следующие простейшие локомоционные задачи. На горизонтальной плоскости лежит либо один цилиндр, либо три параллельных одинаковых прямых круговых шероховатых цилиндра. Первоначально робот движется в направлении, перпендикулярном осям цилиндров. В общем случае он не видит участок опорной плоскости за препятствием. Если в процессе движения робота будет установлено, что опорная плоскость за препятствием непосредственно по курсу движения робота непригодна для наступания, то робот, находясь на препятствии, должен изменить свое положение на нем так, чтобы спуститься с препятствия в доступном для опоры месте. В статье представлен конструктивно построенный алгоритм решения сформулированных задач. Этот алгоритм был отработан на программном комплексе "Универсальный механизм" [11] с учетом полной динамики системы в целом. Приведенные результаты компьютерного моделирования свидетельствуют о принципиальной реализуемости предложенного алгоритма. Полная динамическая модель робота формируется автоматически средствами комплекса "Универсальный механизм" [11].

1. Механическая модель системы. Конструкция робота совпадает с принятой в [5]. Твердый корпус робота имеет форму прямоугольного параллелепипеда массы m, a — его боковая сторона (длина), b — передний или задний край (ширина), c — высота параллелепипеда. По бокам корпуса симметрично прикреплены шесть одинаковых инсектоморфных ног. Точки прикрепления ног с каждой стороны корпуса расположены на одинаковом расстоянии друг от друга. Отдельная нога состоит из двух твердых звеньев: бедра длины l_1 , массы m_1 и голени длины l_2 , массы m_2 . Допускается касание роботом поверхности опоры и окружающих предметов только стопами, ноги робота не должны иметь взаимных пересечений во все время движения.

Программные значения шарнирных углов генерируются алгоритмом управления с учетом информации о реализовавшейся конфигурации робота при его движении. Реализация программных значений шарнирных углов осуществляется так же, как в [5] с помощью простейшей модели электроприводов с самоиндукцией. Предполагается, что роботу известны: собственное положение относительно препятствий, несущая способность участков поверхности, выбираемых для опоры, шарнирные углы, скорости перемещения как самого робота, так и объектов, выбираемых для опоры.

Цилиндры, образующие препятствия, могут свободно перекатываться по плоскости. На них действует сухое кулоновское трение и трение качения. Если какие-нибудь реакции выходят за ограничивающие их пределы, то возникает соответствующее проскальзывание.

Траектории переносов ног формируются в виде плоских шаговых циклов [5, 6], адаптируемых в зависимости от поверхностей препятствий, скорости движения робота, предписанных следовых точек. Движения ног, соответствующие шаговым циклам, сглаживаются, чтобы сохранить непрерывность как самого движения, так и его скорости [5].

Наличие силового момента в опорных точках не предполагается. Реакции в них должны удовлетворять условию малой деформации опорной поверхности и должны принадлежать конусам кулоновского трения с заданным коэффициентом [5]. Коэффициент трения предполагается равным единице. Программное движение создается в виде последовательности событий, в начале каждого из которых в некоторой абсолютной системе координат $O\xi\eta\zeta$ определяются траектории перемещений стоп и точек их крепления к корпусу.

2. Постановки задач. Решаемые задачи формулируются следующим образом.

Задача 1 ("Ряд цилиндров"). Поперек трассы под прямым углом расположены три цилиндра, диаметры которых равны половине клиренса робота. Расстояние между осями цилиндров сравнимо с половиной длины корпуса (рис. 1). Робот должен преодолеть эту полосу препятствий.

Задача 2 ("Толстый цилиндр"). Шестиногий робот идет вдоль прямолинейной трассы по горизонтальной плоскости. Поперек трассы под прямым углом лежит одиночный

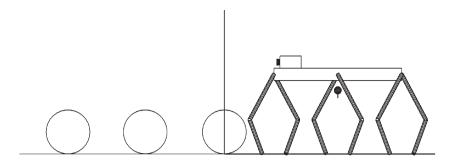


Рис. 1. Задача 1

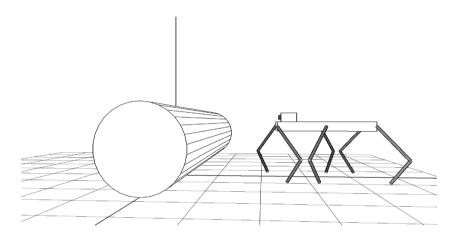


Рис. 2. Задача 2

цилиндр, по высоте сравнимый с маршевой высотой робота, так что робот не может ни перешагнуть его, ни увидеть расположенную за цилиндром и примыкающую к нему область горизонтальной опорной плоскости (рис. 2). Робот должен забраться на цилиндр и, если за цилиндром имеется достаточно хорошая опора, продолжить движение поперек цилиндра, а если за цилиндром опора ненадежная, то переместиться вдоль цилиндра, так чтобы обойти ненадежный участок, а затем спуститься на опорную плоскость.

Задача З ("Большой цилиндр"). Шестиногий робот идет вдоль прямолинейной трассы по горизонтальной плоскости. Поперек трассы под прямым углом лежит одиночный цилиндр настолько большого радиуса, что робот не может, имея точки опоры средних и задних ног на плоскости, дотянуться до вершины цилиндра (рис. 3). Как и в задаче 2, робот должен забраться на цилиндр и, если за цилиндром имеется достаточно хорошая опора, продолжить движение поперек цилиндра, а если за цилиндром опора ненадежная, то переместиться вдоль цилиндра, так чтобы обойти ненадежный участок и слезть с цилиндра.

Рассмотрим методику преодоления препятствий для каждой задачи.

- **3.** Преодоление препятствий в задачах 1 и 2. 3.1. Задача "Ряд цилиндров". Диаметры цилиндров и расстояния между ними в задаче 1 выбраны таким образом, что робот, преодолевая препятствие, будет вынужден наступить хотя бы на один цилиндр. Движение робота имеет структуру волновой походки "галоп". Перечислим характерные этапы движения в этом случае.
- 9 т а п 1.1. Приблизившись к препятствию походкой "трешки", робот перестраивает положение ног для походки "галоп" и готовится к переносу передних ног через ближайший к нему (первый) цилиндр (рис. 4, a).
- 9 т а п 1.2. Передними ногами робот перешагивает через первый цилиндр, продвигает корпус вперед по ходу движения и делает шаг задними ногами (рис. 4, δ).
- Этап 1.3. Робот переносит средние ноги и вынужден поставить их на первый цилиндр (рис. 5, *a*). Если проскальзывание цилиндра относительно опорной плоскости не возникает,

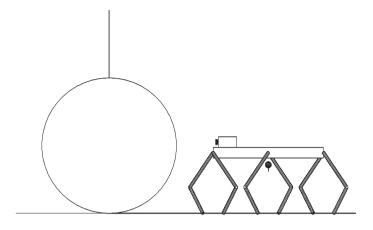


Рис. 3. Задача 3

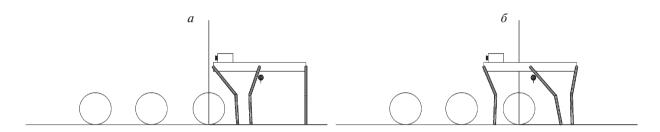


Рис. 4. Этап 1.1 (*a*), этап 1.2 (*б*)

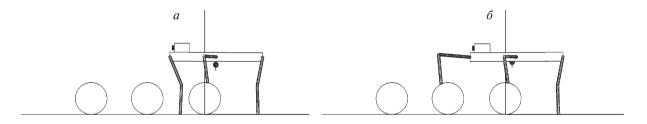


Рис. 5. Этап 1.3 (а), этап 1.4 (б)

а робот образует жесткую фигуру, то цилиндр будет надежной опорой, несмотря на то что проекция точки опоры на горизонтальную плоскость может оказаться вне опоры цилиндра.

 Θ т а п 1.4. Робот делает очередной шаг передними ногами и ставит их на средний цилиндр. Задние ноги продолжают опираться об опорную плоскость (рис. 5, δ).

Этап 1.5. Задние ноги переносятся в точку опоры на плоскости поближе к первому цилиндру. Во время их переноса робот опирается передними и средними ногами о средний и первый цилиндры соответственно. При этом существенно, чтобы точки опоры передних ног проецировались относительно вертикальной плоскости, проходящей через опорную образующую среднего цилиндра, со стороны, противоположной, чем проекции точек опоры средних ног относительно вертикальной плоскости, проходящей через опорную образующую первого цилиндра (принцип устойчивой опоры) (рис. 6, а). В этом случае моменты сил, действующих со стороны робота на цилиндры при опоре, будут иметь разные знаки и система стабилизации робота будет удерживать цилиндры от раскатывания в разные стороны.

Этап 1.6. Средние ноги ставятся в промежуток между первым и средним цилиндрами (рис. $6, \delta$).

9 т а п 1.7. Передние ноги ставятся на последний цилиндр. Корпус продвигается вперед, подготавливая перенос задних ног (рис. 7, a).



Рис. 6. Этап 1.5 (*a*), этап 1.6 (*б*)



Рис. 7. Этап 1.7 (a), этап 1.8 (б)

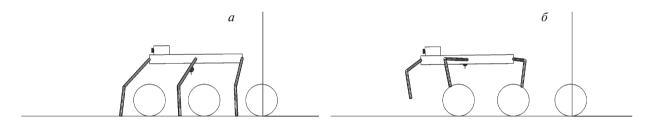


Рис. 8. Этап 1.9 (а), этап 1.10 (б)

Э т а п 1.8. Задние ноги перешагивают через первый цилиндр (рис. $7, \delta$).

Этап 1.9. Средние ноги перешагивают через средний цилиндр, а за ними перешагивают передние ноги через последний цилиндр (рис. 8, *a*). Все ноги робота стоят на плоскости. Передние ноги находятся за препятствием, средние ноги стоят между последним и средним цилиндрами, задние ноги — между первым и средним цилиндрами.

Э т а п 1.10. Корпус робота продвигается вперед, сначала задние ноги ставятся на средний цилиндр, затем средние ноги ставятся на последний цилиндр, потом передние ноги переносятся вперед в следующую точку опоры на плоскости. Во время переноса передних ног робот стоит на среднем и заднем цилиндрах (рис. 8, δ). При этом относительно последнего и среднего цилиндров должен соблюдаться принцип устойчивой опоры, как при выполнении этапа 1.5.

Этап 1.11. После постановки передних ног на плоскость корпус продвигается вперед и, начиная с задних ног, запускается волна переносов ног (рис. 9, a) с перешагиванием через цилиндры так, чтобы робот целиком оказался за препятствием (рис. 9, δ).

3.2. Задача "Толстый цилиндр". Задача 2 имеет много общего с задачей преодоления препятствия в виде шара [5]. Основная разница состоит в том, что цилиндр может катиться по плоскости только в направлении, перпендикулярном к оси цилиндра, тогда как шар может катиться в любом направлении. Кроме того, трение качения цилиндра будет больше, чем трение качения шара при прочих равных условиях. Указанные обстоятельства облегчают решение задачи 2. Рассмотрим последовательные этапы преодоления цилиндра, диаметр которого сравним с маршевой высотой робота.

 Θ т а п 2.1. Приблизившись к препятствию походкой "трешки", робот перестраивает положение ног для походки "галоп" и, продвигая корпус по направлению к цилиндру, готовится к переносу на него передних ног (рис. 10, a).

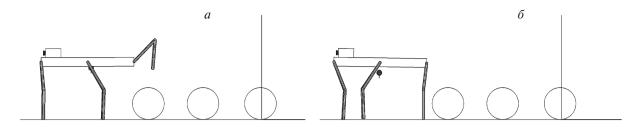


Рис. 9. Этап 1.11 (*a*), препятствие преодолено (б)

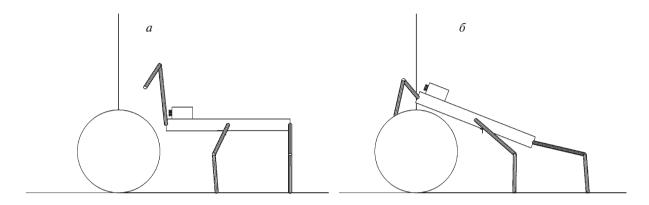


Рис. 10. Этап 2.1 (а), этап 2.2 (б)

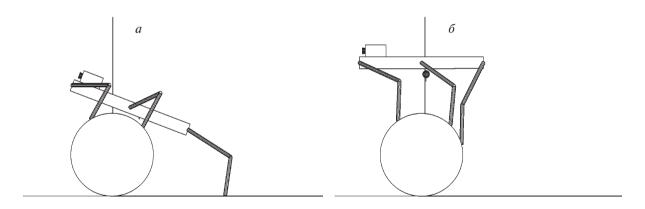


Рис. 11. Этап 2.3 (а), этап 2.4 (б)

- Этап 2.2. Робот ставит передние ноги на верхнюю часть цилиндра, приводит корпус в наклонное положение и продвигает его вперед так, чтобы центр масс корпуса проектировался в опорный многоугольник передних и средних ног. Тем самым готовится перенос задних ног (рис. $10, \delta$).
- 9 т а п 2.3. В соответствии с правилом волновой походки робот переносит задние ноги поближе к цилиндру, затем переносит средние и продвигает корпус вперед вдоль его оси, подготавливая перенос задних ног на цилиндр (рис. 11, a).
- Этап 2.4. Робот продолжает продвигать корпус вдоль своей оси до тех пор, пока задние ноги не будут полностью выпрямлены. Затем происходит перенос задних ног на поверхность цилиндра. Одновременно осуществляется поворот и подъем корпуса, чтобы привести его в горизонтальное положение на маршевой высоте над поверхностью цилиндра (рис. $11, \delta$).
- Этап 2.5. Робот видит, что за цилиндром спуск невозможен. Он переносит средние ноги в более удобную позицию для движения вдоль оси цилиндра походкой "трешки" (рис. 12, *a*).

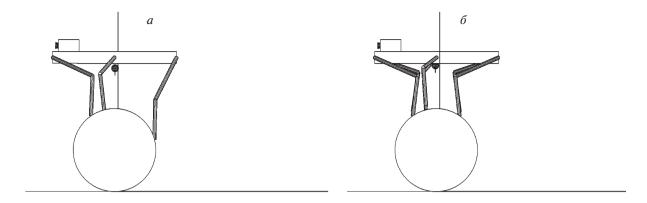


Рис. 12. Этап 2.5 (*a*), этап 2.6 (*б*)

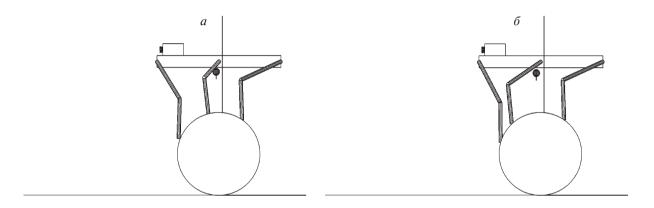


Рис. 13. Этап 2.7. Передние ноги (*a*), этап 2.7. Средние ноги (*б*)

- Θ т а п 2.6. Робот идет походкой "трешки" по цилиндру вдоль его оси до тех пор, пока опорная площадка за цилиндром окажется пригодной для спуска с цилиндра (рис. 12, δ). Центр масс робота проектируется в малую окрестность верхней точки цилиндра.
- Θ т а п 2.7. Обнаружив за цилиндром достаточно надежную площадку для спуска, робот начинает спуск с цилиндра и переносит на цилиндр поближе к опорной плоскости сначала стопы передних (рис. 13, a), а за ними стопы средних ног (рис. 13, δ).
- Θ т а п 2.8. Робот приседает, одновременно с этим наклоняется, переносит передние ноги на опорную плоскость и продвигает корпус по касательной к цилиндру (рис. 14, a).
- \Im т а п 2.9. Корпус продвигается далее по касательной с одновременным переносом средних ног на опорную плоскость (рис. 14, δ).
- Этап 2.10. Робот переносит передние ноги в более удобные точки опоры на горизонтальной плоскости, одновременно приподнимает корпус и переносит его вперед, так чтобы его центр масс проектировался в опорный многоугольник передних и средних ног (рис. 15, a).
- Этап 2.11. Корпус робота выравнивается. Задние ноги переносятся на опорную плоскость, завершая преодоление препятствия (рис. 15, δ).

Перейдем к анализу задачи 3 о преодолении препятствия в виде большого цилиндра. Она аналогична задаче о преодолении шара большого диаметра [5] с той существенной разницей, что на шаре робот, создавая давление ногами на шар перпендикулярно поверхности, имеет возможность за счет обхвата шара ногами легче создать необходимое сцепление ног с поверхностью шара. Возможность обхвата цилиндра может быть эффективно реализована лишь перпендикулярно образующей, что ослабляет сцепление робота с поверхностью цилиндра. Трудность задачи в том, что когда центр масс робота находится не над вершиной цилиндра, то из-за момента силы тяжести цилиндр может покатиться, а робот из-за этого может упасть.

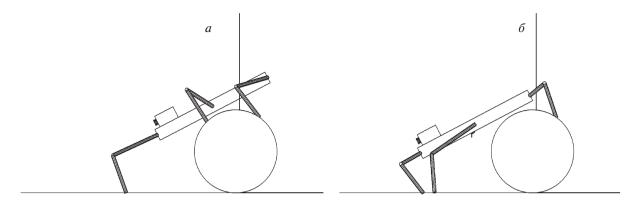


Рис. 14. Этап 2.8 (а), этап 2.9 (б)

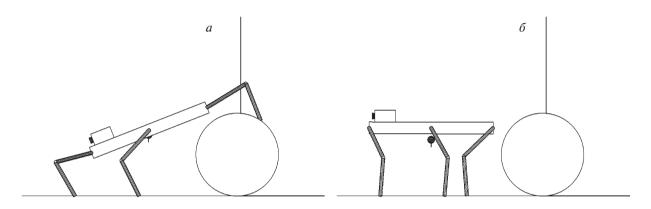


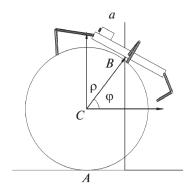
Рис. 15. Этап 2.10 (а), этап 2.11 (б)

4. Динамика залезания на большой цилиндр. Пусть однородный шероховатый круговой цилиндр радиуса R и массы M лежит на горизонтальной опорной плоскости. Центр масс C цилиндра расположен на его оси. Предположим, что цилиндр не может скользить по плоскости вдоль образующей, а может только катиться по плоскости в общем случае с проскальзыванием перпендикулярно образующей цилиндра. Движение цилиндра будет в этом случае плоскопараллельным. Через центр масс C проведем вертикальную плоскость перпендикулярно оси цилиндра. В сечении получим круговой диск D, касающийся плоскости в точке A. Движение цилиндра интерпретируется как качение диска в неподвижной вертикальной плоскости O f по горизонтальной прямой f правоориентированной декартовой неподвижной системы координат f с направляющими векторами f с оответственно. Начало координат принадлежит опорной плоскости. Рассмотрим случай, когда радиус цилиндра настолько велик, что робот должен вскарабкаться на него, не опираясь на опорную плоскость, прежде, чем он окажется на вершине цилиндра.

С диском D свяжем подвижную систему координат $C\xi\eta\zeta$. Движение корпуса робота предполагается параллельным плоскости $O\eta\zeta$ таким образом, что продольная ось корпуса в любой момент времени движения направлена по касательной к цилиндру, а плоскость $C\eta\zeta$ служит плоскостью симметрии корпуса. Точки опоры ног на цилиндре также будем располагать симметрично относительно $C\eta\zeta$. Положение фигуры, полученной сечением робота плоскостью $C\eta\zeta$, будем характеризовать постоянным радиусом ρ между точкой C и центром масс $C\eta\zeta$ робота и переменным углом $C\eta\zeta$ и направлением из центра диска $C\eta\zeta$ в точку $C\eta\zeta$ (рис. 16, а).

Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента \mathbf{K}_A цилиндра вместе с роботом, взятого относительно подвижной точки A [5, 12]:

$$\frac{d\mathbf{K}_{A}}{dt} + \mathbf{v}_{A} \times \mathbf{Q} = \mathbf{\rho} \times m\mathbf{g} + L\mathbf{e}_{\xi}, \tag{4.1}$$



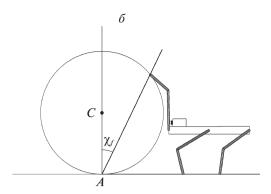


Рис. 16. Возможность залезания на цилиндр

где t — время, \mathbf{v}_A — вектор скорости точки A, \mathbf{Q} — вектор количества движения системы, "×" — знак векторного умножения, m — масса робота, \mathbf{g} — вектор ускорения силы тяжести, $\mathbf{\rho}$ — радиусвектор центра масс B робота, имеющий начало в точке C, L — момент трения качения. Предполагается, что $\mathbf{\rho} > R$ и $|L| \le L_m$. Выражение в правой части для момента силы тяжести робота относительно точки A справедливо из-за того, что радиус $\mathbf{C}\mathbf{A}$ в любой момент времени параллелен силе тяжести.

Будем считать, что цилиндр не имеет вертикальной составляющей угловой скорости, а его движение параллельно плоскости $O\eta\zeta$. Тогда кинетический момент \mathbf{K}_c цилиндра относительно точки A выражается формулой

$$\mathbf{K}_{c} = J_{c} \omega \mathbf{e}_{\xi}, \quad J_{c} = \frac{3}{2} M R^{2}, \quad \omega = \frac{V_{A}}{R},$$

так как центр диска всегда проектируется в точку A. При условии, что угол между отрезком ${\bf CB}$ и продольной осью корпуса остается постоянным, кинетический момент ${\bf K}_r$ робота относительно точки A имеет вид [12]

$$\mathbf{K}_r = m\mathbf{\rho}_{AB} \times \mathbf{v}_r + \mathbf{K}_r^*$$

где

$$\mathbf{\rho}_{AB} = \rho \cos \phi \mathbf{e}_{\eta} + (\rho \sin \phi + R) \mathbf{e}_{\zeta},$$

$$\mathbf{v}_{r} = -(\dot{\phi}\rho \sin \phi + v_{A}) \mathbf{e}_{\eta} + \dot{\phi}\rho \cos \phi \mathbf{e}_{\zeta},$$

 \mathbf{K}_r^* — кинетический момент робота относительно его центра масс, \mathbf{v}_r — скорость точки B, $\mathbf{\rho}_{AB}$ — вектор из точки A в точку B. Пренебрегая для простоты кинетическим моментом движения ного относительно корпуса и обозначая через J_r момент инерции всего робота относительно его центра масс, получим выражение

$$\mathbf{K}_A = [J_r \dot{\varphi} + J_c \omega + m \dot{\varphi} (\rho^2 + R \rho \sin \varphi) + m \omega R (R + \rho \sin \varphi)] \mathbf{e}_{\xi}.$$

С учетом сказанного уравнение (4.1) в проекции на ось $C\xi$ принимает вид

$$\frac{d}{dt}\{\dot{\varphi}[J_r + m(\rho^2 + R\rho\sin\varphi)]\} + \dot{\omega}[J_c + (m+M)R^2 + mR\rho\sin\varphi] = -mg\rho\cos\varphi + L. \tag{4.2}$$

Пусть робот залезает на цилиндр с постоянной угловой скоростью $\dot{\phi} \neq 0$. Если при этом цилиндр остается неподвижным, то из (4.2) получим

$$L = m(g + \dot{\varphi}^2 R)\rho \cos \varphi. \tag{4.3}$$

До тех пор, пока робот залезает на первоначально покоящийся цилиндр в соответствии с рис. 16, имеем $\cos \phi \ge 0$. Таким образом, согласно свойствам трения качения, при

$$m(g + \dot{\varphi}^2 R)\rho\cos\varphi \le L_m \tag{4.4}$$

цилиндр при залезании робота будет оставаться неподвижным. Наиболее критичным для равновесия цилиндра будет начальный момент залезания, когда соѕф максимален. Если в этот момент равновесие цилиндра не нарушилось, то оно сохранится и в дальнейшем движении. Из формулы (4.4) также следует, что корпус робота при залезании должен располагаться как можно ближе к цилиндру, а скорость залезания должна быть как можно меньше.

Пусть теперь в начале залезания робота на цилиндр неравенство (4.4) не выполнено, а цилиндр имеет угловую скорость ω_0 . Угловая скорость цилиндра при его качении подчиняется уравнению

$$\dot{\omega} = -\frac{(g + \dot{\varphi}^2 R)m\rho\cos\varphi + L_m \operatorname{sign}\omega}{J_c + (m + M)R^2 + mR\rho\sin\varphi},$$

которое можно проинтегрировать:

$$\omega = \omega_0 - a(I_1 + \chi I_2 \operatorname{sign} \omega), \tag{4.5}$$

где ω_0 — начальная угловая скорость цилиндра,

$$I_{1}(\varphi, \varepsilon) = \int_{\varphi_{0}}^{\varphi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{1 + \varepsilon \sin \varphi}, \quad I_{2}(\varphi, \varepsilon) = \int_{\varphi_{0}}^{\varphi} \frac{d\varphi}{1 + \varepsilon \sin \varphi},$$

$$a = \frac{(g + \dot{\varphi}^{2}R)m\varphi}{\dot{\varphi}[J_{c} + (m + M)R^{2}]}, \quad \chi = \frac{L_{m}}{(g + \dot{\varphi}^{2}R)m\varphi}, \quad \varepsilon = \frac{mR\varphi}{J_{c} + (m + M)R^{2}}.$$

$$(4.6)$$

Аналитические выражения для интегралов $I_1(\varphi, \varepsilon)$ и $I_2(\varphi, \varepsilon)$ могут быть найдены стандартными методами и здесь не приводятся. Отметим лишь, что при $\varphi_0 \le \varphi \le \pi/2$ для $\forall \varepsilon = \text{const} > 0$ функции $I_1(\varphi, \varepsilon)$ и $I_2(\varphi, \varepsilon)$ монотонно возрастают, причем $0 \le I_1 \le I_2$.

По смыслу задачи при достижении роботом вершины цилиндра ($\phi=\pi/2$) цилиндр должен быть в покое ($\omega=0$). Вместе с тем остановка цилиндра может произойти и раньше при некотором значении угла $\phi_0 < \phi = \phi_s < \pi/2$. Пусть это значение задано. Для него получим уравнение, связывающее начальную угловую скорость ω_0 цилиндра и постоянную угловую скорость ω_0 перемещения робота по цилиндру:

$$\omega_0 = a[I_1(\varphi_s, \varepsilon) + \chi I_2(\varphi_s, \varepsilon) \operatorname{sign} \omega_0]. \tag{4.7}$$

С учетом (4.6) уравнение (4.7) можно представить в виде

$$\omega_0 = \frac{\varepsilon}{R} \left(\frac{b}{\dot{\varphi}} + c \dot{\varphi} \right),\,$$

где

$$b = gI_1 + \frac{L_m I_2 \text{sign } \omega_0}{m\rho}, \quad c = RI_1.$$
 (4.8)

Следовательно,

$$\omega_0 \ge \frac{\varepsilon}{R} \sqrt{bc} = \frac{\varepsilon}{R} \sqrt{RI_1 \left(gI_1 + \frac{L_m I_2 \operatorname{sign} \omega_0}{mo} \right)}. \tag{4.9}$$

Минимальное значение начальной угловой скорости цилиндра достигается при $\dot{\phi} = \sqrt{b/c}$. Если значение ω_0 больше минимального, то уравнение (4.7) будет иметь два корня относительно $\dot{\phi}$, из которых следует выбирать наименьший.

При условии, что $\varepsilon \ll 1$, интегралы I_1 и I_2 можно вычислить приближенно с точностью до членов первого порядка малости по ε . При $\phi_0 = 0$ получим

$$I_1 \approx \sin \varphi \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \sin \varphi\right), \quad I_2 \approx \varphi - \varepsilon (1 - \cos \varphi).$$

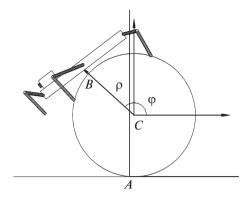


Рис. 17. Система робот-цилиндр

В частности, если потребовать, чтобы цилиндр остановился в тот момент, когда робот окажется в близкой окрестности вершины цилиндра, то в формуле (4.9) можно принять

$$I_1 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad I_2 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

5. Динамика слезания робота с большого цилиндра. Как и прежде, предполагается, что круговой шероховатый цилиндр радиуса R и массы M может катиться по горизонтальной плоскости без проскальзывания и отскоков под действием трения качения. В начальный момент времени робот покоится на вершине неподвижного цилиндра, его корпус ориентирован горизонтально, а все шесть ног опираются о цилиндр, образуя в проекции на горизонтальную плоскость симметричный опорный многоугольник. Радиус цилиндра настолько велик, что робот не может, находясь на вершине, наступить на опорную плоскость. Он может начать спуск непосредственно из состояния покоя, либо предварительно разогнав цилиндр так, чтобы он в начальный момент времени имел угловую скорость ω_0 [5]. Пусть робот при слезании с цилиндра выполняет плоскопараллельное движение вдоль вертикальной плоскости. Если сила тяжести и трение качения отсутствуют, то кинетический момент системы в целом относительно опорной образующей цилиндра сохраняется. Поэтому движение робота вдоль поверхности цилиндра будет вызывать приращение кинетического момента цилиндра относительно опорной образующей. Это приращение по направлению будет противоположно кинетическому моменту робота относительно той же образующей. Вместе с тем в реальности под действием силы тяжести робота и трения качения кинетический момент системы меняется. В этом случае момент силы тяжести будет сонаправлен кинетическому моменту робота и, следовательно, будет разгонять цилиндр в направлении движения робота. Можно оценить, какая должна быть скорость робота, чтобы скорость цилиндра в момент окончания маневра оказалась минимальной.

Поступим аналогично тому, как это было сделано в разд. 4. Возьмем систему координат $C\xi\eta\zeta$ с началом C, совпадающим в любой момент времени с центром диска D (рис. 17) и с осями, параллельными осям абсолютной системы координат $O\xi\eta\zeta$. Ось $C\eta$ направлена в сторону, противоположную предполагаемой начальной скорости робота, и не меняет своей ориентации в процессе движения. Ось $C\zeta$ направлена вертикально вверх. Ось $C\xi$ образует с двумя указанными осями правую тройку, так что с положительного направления оси $C\xi$ вращение цилиндра, индуцированное качением цилиндра в сторону движения робота, будет видно происходящим против хода часовой стрелки. Пусть \mathbf{e}_{ξ} , \mathbf{e}_{η} , \mathbf{e}_{ζ} — единичные направляющие векторы указанных координатных осей.

Движение корпуса робота предполагается происходящим параллельно плоскости $O\eta\zeta$, причем продольная ось корпуса в любой момент времени движения параллельна касательной к цилиндру, а плоскость $C\eta\zeta$ служит плоскостью симметрии корпуса. Точки опоры ног на цилиндре также будем располагать симметрично относительно плоскости $C\eta\zeta$. Положение фигуры, полученной сечением робота плоскостью $C\eta\zeta$, будем характеризовать постоянным радиусом ρ между точкой C и центром масс B робота и переменным углом ϕ между осью $C\eta$ и направлением из центра C в точку B (рис. 17).

Воспользуемся уравнением (4.2). Пусть робот слезает с цилиндра с постоянной угловой скоростью $\dot{\phi} > 0$. Тогда для угловой скорости цилиндра имеем выражение (4.5), где ω_0 — проекция начальной угловой скорости цилиндра на ось $B\xi$, $\phi_0 = \pi/2$ — начальное угловое положение робота. При этих условиях имеем $I_1 \leq 0$, $I_2 \geq 0$. Финальное положение робота на цилиндре определим углом $\phi_f > \pi/2$. По смыслу задачи при $\phi = \phi_f$ цилиндр должен иметь минимально возможную абсолютную величину угловой скорости $\omega = \omega_f$ для того, чтобы облегчить роботу переход с цилиндра на опорную плоскость. Формулу (4.5) можно представить в виде

$$\omega_0 - \omega = \frac{\varepsilon}{R} \left(\frac{b}{\dot{\varphi}} + c \dot{\varphi} \right), \tag{5.1}$$

где b и c выражаются формулами (4.8), из которых следует, что в рассматриваемом случае c < 0, а знак коэффициента b зависит от величины коэффициента трения качения и от знака начальной угловой скорости ω_0 цилиндра. Таким образом, нулевое значение скорости ω_f может быть достигнуто лишь при

$$\omega_0 \le -\frac{\varepsilon}{R} \sqrt{bc} = -\frac{\varepsilon}{R} \sqrt{RI_1 \left(gI_1 + \frac{L_m I_2 \operatorname{sign} \omega_0}{m\rho} \right)}, \quad b \le 0,$$

$$\omega_0 \ge 0, \qquad b > 0.$$
(5.2)

Заметим, что случай b > 0 реализуется при достаточно большом значении L_m предельного трения качения:

$$L_m > -\frac{mg\rho I_1}{I_2}. (5.3)$$

Например, для $\varphi_f = \pi$ получим

$$I_1 \approx \frac{\varepsilon}{2} - 1, \quad I_2 \approx \frac{\pi}{2} - \varepsilon \to L_m > \frac{2mg\rho}{3} \left(1 + \frac{3\varepsilon}{2}\right).$$

Если неравенство (5.3) выполнено, то робот может спуститься с цилиндра даже при $\omega_0 = 0$. Для этого достаточно выбрать скорость $v_r = \rho \dot{\phi}$ движения робота по цилиндру в соответствии с неравенством

$$v_r \le \rho \sqrt{-\frac{b}{c}} = \rho \sqrt{-\frac{1}{RI_1} \left(g + \frac{L_m I_2}{m\rho}\right)}.$$

Это ограничение в виде неравенства следует из (5.1), поскольку момент трения качения имеет пассивную природу и возникает лишь по мере необходимости воспрепятствовать возникновению движения. Грунты, удовлетворяющие (5.3), можно назвать мягкими, поскольку именно для мягких грунтов характерны большие значения постоянной L_m , и возможен спуск с покоящегося цилиндра. Для твердых грунтов, для которых неравенство (5.3) нарушено, спуск с покоящегося цилиндра невозможен, и для безопасности перед спуском необходимо цилиндру придать иногда заметную угловую скорость.

Приведенные формулы дают грубую оценку динамики робота при слезании с цилиндра из-за того, что они не учитывают движение ног при движении робота. Вместе с тем они дают качественно верную картину явления и могут быть использованы для предварительного анализа рациональности применяемых алгоритмов построения движения.

6. Исходная позиция перед большим цилиндром. Формулы (4.4) и (4.9) показывают, что если предельная величина трения качения невелика, то для возможности залезания на цилиндр робот должен толкнуть цилиндр в том же направлении, в котором он приближается к цилиндру, и придать цилиндру достаточно большую начальную скорость. В начале толчка корпус робота должен быть ориентирован по касательной к цилиндру. Будем считать, что передняя часть корпуса должна оказаться выше задней. Тогда из соображений дотягивания ног до опорной плоскости очевидно, что в толчке должны участвовать задние ноги. После отделения всех стоп от опорной плоскости передние и средние ноги должны надежно обхватывать цилиндр, чтобы робот мог перемещать корпус относительно цилиндра без проскальзывания стоп по поверхности цилиндра. Поскольку на перенос ног требуется конечное время, заключаем, что к началу толчка передние

и средние ноги должны уже находиться на цилиндре и толчок осуществляется лишь задними ногами. Для залезания будем использовать походку "галоп", располагая точки опоры симметрично относительно плоскости C η ζ .

Пусть робот приблизился к цилиндру и стоит рядом с ним в симметричной позе, соответствующей походке "галоп". Корпус горизонтален, а его передний край находится на расстоянии σ от цилиндра, соответствующем началу маневра залезания на цилиндр. Средние и задние ноги перенесены вперед, так что центр масс робота проектируется в опорный многоугольник, образованный средними и задними стопами. Робот имеет возможность перенести на цилиндр стопы передних ног.

Основная цель подготовительного этапа состоит в том, чтобы расположить корпус по касательной к цилиндру в вертикальной плоскости. При этом для уверенной опоры стопы передних ног должны оказаться вблизи верхней точки цилиндра. Для надежности обхвата цилиндра после начального толчка стопы средних ног необходимо расположить на цилиндре на достаточном расстоянии от точек опоры передних ног [5]. Чтобы придать корпусу требуемую скорость вместе с цилиндром, точки опоры задних ног целесообразно разместить на опорной плоскости на продолжении продольной оси корпуса. Возможность выполнения подготовительного этапа обеспечивается следующим кинематическим свойством системы робот—цилиндр.

Предположим, что робот поставил стопы передних ног на цилиндр и давит на него так, что линия действия сил, приложенных к цилиндру со стороны стоп ног, принадлежит двугранному углу сухого трения с ребром в опорной образующей цилиндра (рис. 16, 6). Тангенс половины угла трения χ_f равен коэффициенту трения. Тогда цилиндр способен лишь перекатываться по опорной плоскости без проскальзывания. Покажем, что если робот перемещается, сохраняя точки контакта между передними стопами и цилиндром, а также расстояние между передними стопами на цилиндре и неподвижными точками опоры других ног, находящихся на опорной плоскости, то цилиндр должен оставаться в покое [5]. Действительно, при виртуальном перекатывании цилиндра движение опирающихся о него стоп будет перпендикулярным кратчайшему отрезку, соединяющему расположенные на нем стопы с опорной образующей цилиндра. Указанный отрезок и отрезок, проходящий через стопы передних ног и точки опоры на плоскости, не параллельны. Следовательно, проекция перемещения стоп передних ног на отрезок, соединяющий стопы передних ног со стопами, которые опираются на плоскость, будет ненулевой, что противоречит условию сохранения расстояний между опорными стопами. Отмеченное свойство позволяет точки опоры передних ног на цилиндре использовать с целью переноса других ног.

Примем, что в начале подготовительного этапа корпус робота ориентирован горизонтально. Выполнение поворота корпуса в положение, при котором его продольная ось ориентирована по требуемой касательной к цилиндру, должно происходить с таким расчетом, чтобы средние ноги смогли дотянуться до опорной плоскости. С целью осуществления поворота корпуса аналогично [5] потребуем, чтобы передний край корпуса робота двигался с постоянной скоростью по вертикальной окружности радиуса $R' = R + \sigma$ с центром в точке C (рис. 16), а средняя точка корпуса выполняла бы вынужденное движение по прямой, составляющей с осью $O\eta$ угол $-\gamma$. Движение передней точки корпуса зададим параметрически

$$\eta_f(s) = R'\cos s, \quad \zeta_f(s) = R'\sin s + R, \quad s \ge s_0, \quad R'\sin s_0 = h_k - R,$$

где h_k есть высота корпуса над опорной плоскостью перед началом выполнения маневра поворота корпуса. Найдем зависимости от параметра s координат $\eta_m(s)$, $\zeta_m(s)$ средней точки корпуса и координат $\eta_r(s)$, $\zeta_r(s)$ его задней точки. При $s=s_0$ имеем

$$\eta_m(s_0) = R' \cos s_0 + a/2,
\eta_r(s_0) = R' \cos s_0 + a,
\zeta_m(s_0) = \zeta_r(s_0) = R' \sin s_0,$$

где a — длина корпуса робота. Обозначим

$$\Delta \eta_f = \eta_f(s) - \eta_f(s_0), \quad \Delta \eta_m = \eta_m(s) - \eta_m(s_0), \quad \Delta \eta_r = \eta_r(s) - \eta_r(s_0),$$

$$\Delta \zeta_f = \zeta_f(s) - \zeta_f(s_0), \quad \Delta \zeta_m = \zeta_m(s) - \zeta_m(s_0), \quad \Delta \zeta_r = \zeta_r(s) - \zeta_r(s_0).$$

Движение средней точки корпуса по прямой определено соотношениями

$$\frac{\Delta \zeta_m}{\Delta \eta_m} = -\text{tg}\gamma, \quad \Delta \eta_m = \Delta \eta_f + \sqrt{a^2/4 - (\Delta \zeta_f - \Delta \zeta_m)^2} - a/2. \tag{6.1}$$

Из них для $\Delta \zeta_m$ получаем уравнение

$$-\Delta \eta_f + a/2 - \sqrt{a^2/4 - (\Delta \zeta_f - \Delta \zeta_m)^2} = \Delta \zeta_m \operatorname{ctg} \gamma,$$

решение которого

$$\Delta \zeta_m = \frac{\Delta \zeta_m' - \sqrt{(\Delta \zeta_m')^2 - (\Delta \eta_f^2 - a\Delta \eta_f + \Delta \zeta_f^2)(1 + tg^2 \gamma)}}{1 + tg^2 \gamma} tg \gamma, \tag{6.2}$$

где $\Delta \zeta_m' = a/2 - \Delta \eta_f + \Delta \zeta_f \operatorname{tg} \gamma$ вместе с (6.1) дает искомую зависимость. Координаты задней точки корпуса заданы равенствами

$$\Delta \eta_r = 2\Delta \eta_m - \Delta \eta_f, \quad \Delta \zeta_r = 2\Delta \zeta_m - \Delta \zeta_f.$$

Очевидно, что условие дотягивания средних ног до опорной плоскости ограничивает значения параметра γ : $tg\gamma < 2(l_1 + l_2 - h_k)/a$. Задняя точка корпуса не должна опускаться ниже опорной плоскости. Поэтому возникает ограничение

$$2\Delta \zeta_m - \Delta \zeta_f > -h_k. \tag{6.3}$$

Подходящая величина γ позволяет расширить диапазон значений параметра s, при которых неравенство (6.3) выполняется. Из формулы (6.2) следует, что указанное расширение диапазона для s возникает при $\gamma > 0$. Таким образом, значение γ должно принадлежать интервалу

$$0 < \operatorname{tg} \gamma < \frac{2(l_1 + l_2 - h_k)}{a_r}$$

с тем расчетом, чтобы можно было осуществить поворот корпуса, не нарушая неравенство (6.3). Вместе с тем интуитивно ясно, что чем выше удалось поднять корпус робота на подготовительном этапе, тем легче ему будет взобраться на вершину цилиндра впоследствии. Поэтому значение γ следует выбирать максимально допустимым с учетом сохранения достаточного запаса статической устойчивости при опоре на средние и задние ноги.

Поворот корпуса робота следует продолжать до тех пор, пока расстояние между цилиндром и корпусом не станет равным заданной величине $\sigma' \leq \sigma$. При выполнении этого условия уже можно начать движение корпуса по касательной к цилиндру. Для реализации поворота необходимо задать функцию s(t). Тогда радиус-векторы

$$\mathbf{r}_f(s) = (\eta_f(s), \zeta_f(s)), \quad \mathbf{r}_m(s) = (\eta_m(s), \zeta_m(s))$$

соответственно передней точки корпуса и средней его точки будут функциями времени. Условие окончания вращения корпуса можно выразить формулой

$$\frac{|\mathbf{r}_f(s) \times [\mathbf{r}_m(s) - \mathbf{r}_f(s)]|}{|\mathbf{r}_m(s) - \mathbf{r}_f(s)|} = R + \sigma'.$$
(6.4)

7. Перелезание через большой цилиндр. Из формулы (4.9) следует, что если коэффициент трения качения мал, то залезть на большой цилиндр можно, лишь придав ему ненулевую начальную угловую скорость. Опишем последовательность этапов подготовки начального толчка с целью разгона цилиндра до необходимой скорости. На каждом этапе учитывается условие статической устойчивости в смысле принадлежности опорному многоугольнику проекции центра масс робота на опорную плоскость. Опорный многоугольник в данном случае получается как выпуклая оболочка проекций всех точек опоры на опорную плоскость.

На рис. 18, a показана исходная позиция робота перед началом подготовительного этапа. Центр масс робота проектируется в опорный многоугольник средних и задних ног. Робот приготовился к постановке передних ног на цилиндр. На рис. 18, δ изображена позиция робота после постановки передних ног на цилиндр. Корпус робота в этот момент времени еще горизонтален. Из этой позиции робот начинает поворот корпуса.

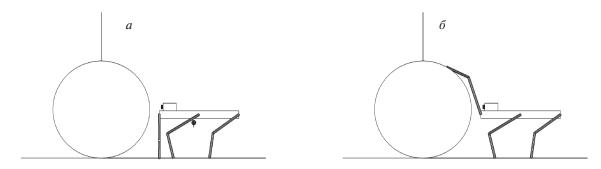


Рис. 18. Подход к цилиндру

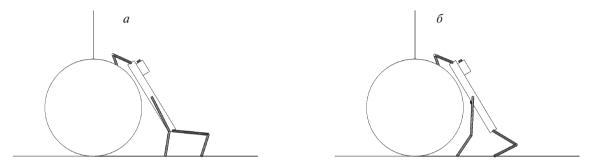


Рис. 19. Поворот корпуса завершен (a), задние и средние ноги переставлены (δ)

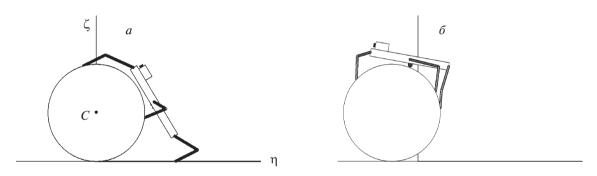
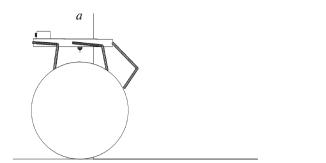


Рис. 20. Отталкивание

В процессе поворота все точки опоры сохраняются. На рис. 19, a показана позиция робота после поворота корпуса. Центр масс робота проектируется в опорный многоугольник, образованный передними и средними ногами, что дает возможность начать перенос задних ног в позицию, удобную для выполнения толчка цилиндра. После переноса задних ног (целевая позиция показана на рис. 19, δ) можно осуществить последовательность переносов, обеспечивающих достаточный контакт робота с цилиндром после толчка. Перемещаются средние ноги в позицию, указанную на рис. 19, δ , чтобы обеспечить статическую устойчивость при переносе передних ног. Передние ноги ставятся практически на верхнюю часть цилиндра (позиция на рис. 20, a). Подготовительный этап заканчивается переносом средних ног на цилиндр (рис. 20, a). Расстояние между точками опоры передних и средних ног на цилиндре выбирается достаточным, чтобы в них при отталкивании не возникало проскальзывания относительно цилиндра.

Разгон цилиндра реализуется при отсутствии проскальзывания в его точке контакта с опорной поверхностью. Скорость центра масс цилиндра v_* должна быть получена за время T^* опорной фазы задних ног из положения, приведенного на рис. 20, a в момент времени t_s . Программное движение цилиндра формируется в предположении постоянства ускорения его центра масс.



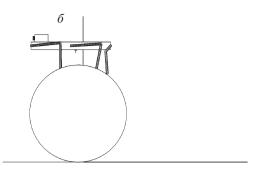


Рис. 21. Залезание на цилиндр

Пусть в момент времени t_s центр масс цилиндра имеет скорость $v_B=0$. На рис. 20, a неподвижная система координат $O\xi\eta\zeta$ соответствует положению цилиндра в момент t_s . При положительной угловой скорости цилиндра движение его центра масс будет происходить в отрицательном направлении оси $O\eta$. Программный закон движения цилиндра во время отталкивания задними ногами от горизонтальной опорной плоскости выражается координатами $\xi_b(t)$, $\eta_b(t)$, $\zeta_b(t)$ и углом поворота $\psi(t)$ цилиндра вокруг оси $C\xi$:

$$\xi_b(t) = 0, \quad \eta_b(t) = -\frac{v_*(t - t_s)^2}{2T^*}, \quad \zeta_b(t) = 0, \quad \psi(t) = \frac{v_*(t - t_s)^2}{2RT^*},$$
(7.1)

так что каждая точка цилиндра, имеющая в момент времени t_s координаты $\xi(t_s)$, $\eta(t_s)$, $\zeta(t_s)$, будет описывать обобщенную циклоиду, параллельную плоскости $O\eta\zeta$:

$$\xi(t) = \xi(t_s),$$

$$\eta(t) = \eta_b(t) + \eta(t_s)\cos\psi(t) - \zeta(t_s)\sin\psi(t),$$

$$\zeta(t) = \eta(t_s)\sin\psi(t) + \zeta(t_s)\cos\psi(t).$$
(7.2)

Формулы (7.1) и (7.2) дают возможность рассчитать программные положения стоп опирающихся о цилиндр передних и средних ног в любой момент времени при разгоне цилиндра.

Для расчета шарнирных углов требуется еще задать программный закон движения корпуса робота. Потребуем, чтобы во время толчка корпус робота двигался параллельно своему положению, достигнутому к моменту t_s (рис. 20, a), а расстояние от осевой линии корпуса до цилиндра при этом не менялось. В соответствии с разд. 4 за время T^* корпус робота должен продвинуться относительно цилиндра на вектор $\Delta \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_c(t) - \mathbf{r}_c(t_s)$ так, чтобы ближайшая к цилиндру точка осевой линии корпуса совпала с серединой корпуса. Этот замысел реализуется формулой

$$\Delta \mathbf{r}(t) = \left\{ \frac{\mathbf{r}_f + \mathbf{r}_m}{2} + \frac{(\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_m)[\mathbf{r}_f \cdot (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_f)]}{(\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_m)^2} \right\} \lambda(t) + \eta_b(t) \mathbf{e}_{\eta},$$

где $\lambda(t_s) = 0$, $\lambda(t_s + T^*) = 1$, "·" — знак скалярного умножения векторов. Полностью поступательное движение корпуса при толчке определено тем, что величина $\Delta \mathbf{r}(t)$ добавляется к радиус-вектору любой точки корпуса, полученному к моменту t_s .

После отталкивания цилиндр и робот движутся совместно, а задние ноги выполняют перенос своих стоп на цилиндр. В процессе переноса задних ног корпус перемещается относительно поверхности цилиндра вверх с опережением (см. разд. 4), используя передние и средние ноги. Движение цилиндра замедляется. После переноса стоп задних ног на цилиндр робот оказывается в позиции, показанной на рис. 20, δ . Затем осуществляются переносы стоп средних и задних ног таким образом, чтобы стопы средних ног оказались в точках на цилиндре, соответствующих окончанию залезания. Эта позиция робота и цилиндра представлена на рис. 21, a. Точки опоры ног на цилиндре расставляются с тем расчетом, чтобы не было взаимных пересечений ног при переносах. Движение корпуса относительно цилиндра вблизи его поверхности продолжается до тех пор, когда центр масс робота окажется внутри опорного многоугольника передних и средних ног с достаточным запасом. К этому моменту скорость цилиндра практически исчезает. Далее

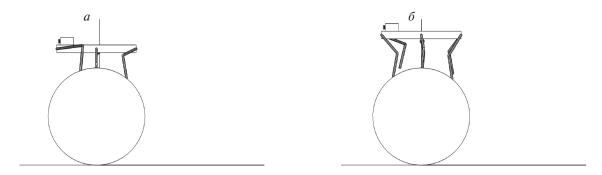


Рис. 22. Робот на цилиндре

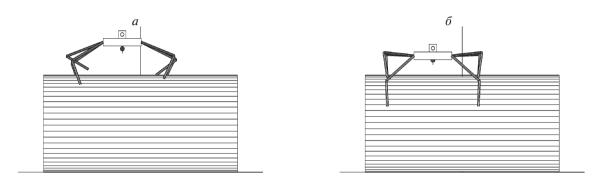


Рис. 23. Робот на цилиндре

происходит перенос задних ног в их финальное положение относительно цилиндра (рис. 21, δ). После этого робот переставляет средние ноги в симметричную позу (рис. 22, a) и окончательно останавливает цилиндр с использованием алгоритма стабилизации, изложенного в [5].

Забравшись на вершину, робот обнаруживает, что сразу за препятствием отсутствует возможность наступить на опорную плоскость и поэтому он начинает движение вбок по цилиндру (рис. 22, δ). Пройдя несколько шагов по цилиндру (рис. 23, a), робот останавливается, а затем начинает спускаться с него (рис. 23, δ). Центр масс робота после остановки проецируется в близкую окрестность точек опоры средних ног. Поэтому сначала робот переносит средние ноги назад для обеспечения статической устойчивости при переносе задних ног, а затем переносит задние ноги поближе к вершине цилиндра. После этой подготовки начинается спуск с цилиндра. Сначала переносятся средние ноги вперед так, чтобы можно было поднять передние ноги (рис. 24, а). Потом переносятся передние ноги (позиция на рис. 24, δ). Стопы средних ног переносятся за вершину цилиндра (рис. $24, \delta$), а затем одновременно с движением корпуса вперед переносятся снова передние ноги (рис. 25, а). Вслед за этим снова переносятся средние ноги с одновременным смещением и поворотом корпуса по касательной к цилиндру (рис. 25, б). Сам цилиндр при этом начинает врашаться в сторону движения робота. После этого упомянутое движение корпуса продолжается, а передние ноги ставятся на опорную плоскость (рис. 26, а). Движение корпуса при этом останавливается. Частый перенос передних и средних ног связан с необходимостью сохранения статической устойчивости, а также с необходимостью отсутствия взаимного пересечения ног. После этого корпус движется параллельно самому себе, а средние ноги ставятся на опорную поверхность (позиция на рис. 26, б). Настала очередь переносить задние ноги. Но поставить их сразу на опорную плоскость невозможно. Поэтому они сначала ставятся на цилиндр, чтобы облегчить необходимые маневры передними и средними ногами (рис. 26, б). Затем переносятся средние ноги поближе к передним (позиция на рис. 27, а). После переноса средних ног происходит перенос передних (рис. 27, a), а затем осуществляется продвижение корпуса вперед с одновременным его поворотом (рис. 27, δ). Теперь освободилось место для постановки задних ног (рис. 28, a), и их можно поставить (рис. 28, δ). Преодоление препятствия завершено.

8. Компьютерное моделирование. Компьютерное моделирование осуществлялось аналогично тому, как это было описано в [5, 7]. Управление роботом и закон взаимодействия стоп ног с



Рис. 24. Начало спуска с цилиндра (a), процесс спуска (δ)

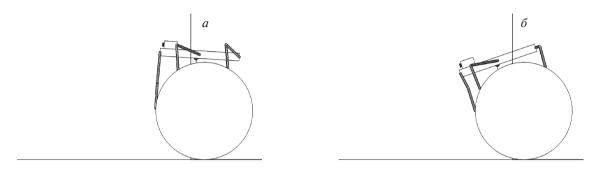


Рис. 25. Процесс спуска с цилиндра

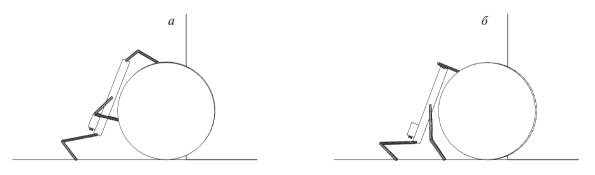


Рис. 26. Передние ноги на плоскости (a), средние ноги на плоскости (δ)

цилиндрами реализованы в виде DLL-библиотеки, подключенной к программному комплексу "Универсальный механизм" [11]. Тем самым создается виртуальная среда обитания робота. Неподвижная опорная поверхность в ней представлена горизонтальной плоскостью. Опорная плоскость, цилиндры и ноги робота взаимодействуют друг с другом, согласно модели трения, основанной на вязкоупругом взаимодействии тел в точках контакта. Управление движением реализуется посредством компьютерного моделирования работы электромеханических приводов шарнирных углов. Выполнение требуемого движения робота осуществляется, как и в реальности, лишь в результате подачи значения управляющего электрического напряжения на модели электромеханических приводов. Соотношение размеров корпуса и звеньев ног имеет вид

$$a:b:c:l_1:l_2=1:0.5:0.1:0.5:0.33.$$

Соотношения размеров корпуса и радиуса цилиндра имеют вид

1:0.18, 1:0.35, 1:0.64

для задач 1-3 соответственно. Массы корпуса робота и звеньев ног относятся как

 $m: m_1: m_2 = 10: 0.5: 0.5.$

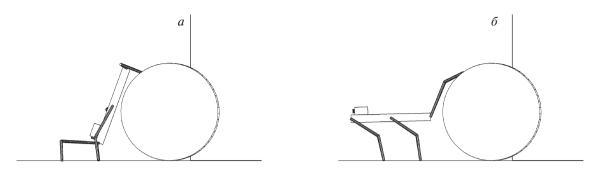


Рис. 27. Процесс спуска с цилиндра. Повотор корпуса

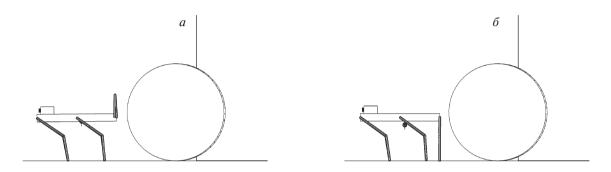


Рис. 28. Процесс спуска с цилиндра. Окончание

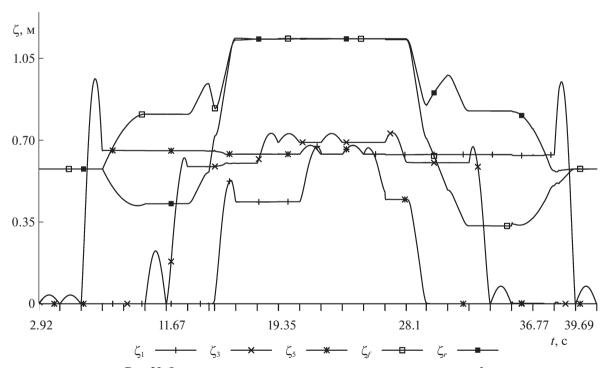


Рис. 29. Зависимость основных параметров от времени для задачи 2

Соотношения масс робота и цилиндров имеют вид

16:171, 16:171, 16:136.8

для задач 1-3 соответственно.

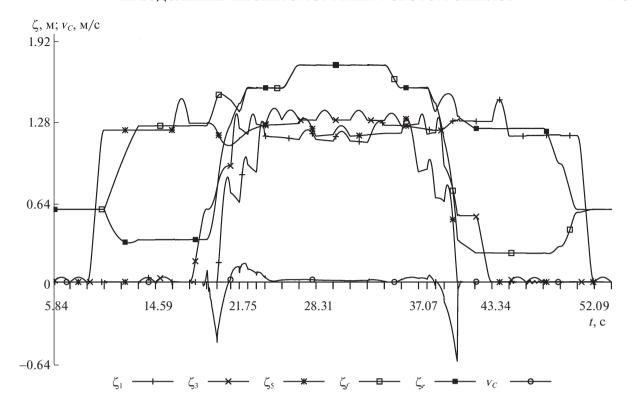


Рис. 30. Зависимость основных параметров от времени для задачи 3

Управляющие моменты в шарнирах были ограничены по модулю значениями $60 \text{ H} \cdot \text{м}$ (задача 1), $80 \text{ H} \cdot \text{м}$ (задача 2), $400 \text{ H} \cdot \text{м}$ (задача 3).

Представление о движении корпуса робота и его ног возникает в результате численного интегрирования дифференциальных уравнений полной трехмерной динамики робота. Поскольку в точках контакта объектов предполагается силовое взаимодействие, механическая система имеет 42 степени свободы для задачи 1 и 30 степеней свободы для задач 2, 3. Уравнения динамики синтезируются автоматически [11]. Результаты компьютерного моделирования отображаются на экране монитора в виде движения геометрических образов исследуемых материальных объектов.

На рис. 29, 30 представлены графики изменения по времени вертикальных координат нечетных стоп ζ_1 , ζ_3 , ζ_5 , а также передней и задней точек корпуса ζ_f , ζ_r . На рис. 30 дополнительно приведена горизонтальная скорость цилиндра v_C . Все величины даны в абсолютной системе координат $O\xi\eta\zeta$.

Заключение. Представлено решение новой задачи о преодолении инсектоморфным роботом препятствий в виде одиночных цилиндров крупных радиусов и совокупности отдельно лежащих цилиндров небольшого радиуса. Для препятствия в виде ряда отдельно лежащих цилиндров, диаметры которых равны половине клиренса робота, описан принцип расположения точек опоры на цилиндрах, обеспечивающий устойчивую опору.

Для задачи о преодолении цилиндра, диаметр которого сравним с маршевой высотой робота, построен конструктивный алгоритм залезания на цилиндр, движения робота вбок и слезания с учетом малости области постановки стоп на вершине препятствия.

Для преодоления цилиндра, диаметр которого не позволяет роботу дотянуться до вершины парой передних ног, имея точки опоры остальных ног на плоскости, на основе теоремы об изменении кинетического момента механической системы робот—цилиндр относительно точки опоры цилиндра о горизонтальную плоскость найдены условия реализуемости указанного маневра. Дана оценка величины скорости движения робота по цилиндру, обеспечивающая слезание. Построен конструктивный алгоритм залезания на цилиндр с отталкиванием от опорной плоскости, движения робота вбок и слезания.

Предложенные алгоритмы формирования движения робота при преодолении указанных препятствий были отработаны средствами компьютерного моделирования в программной среде, реализующей расчет взаимодействия трехмерной полной динамической модели робота и окружающих его объектов с учетом сил кулоновского трения и моделей электромеханических приводов в шарнирах робота. Показано, что предложенные программные движения реализуемы при коэффициенте трения, не превышающем 1.

Стабилизация движения робота в окрестности программного движения построена по принципу кусочно-формируемой с дискретностью шага интегрирования обратной связи. Обратная связь рассчитывается по рассогласованиям реальных и программных шарнирных углов с требованием минимальных значений угловых скоростей. Возникающие в шарнирных углах переходные процессы не разрушают требуемое программное движение робота на всех этапах движения системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Сырых Н.В.*, *Чащухин В.Г*. Роботы вертикального перемещения с контактными устройствами но основе постоянных магнитов: конструкции и принципы управления контактными устройствами // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 5. С. 163—173. https://doi.org/10.1134/S0002338819050135
- 2. Градецкий В.Г., Князьков М.М., Кравчук Л.Н., Крюкова А.А., Семенов Е.А., Суханов А.Н., Чащухин В.Г. Управляемое формирование вакуума в устройствах сцепления с поверхностями при движении мобильных роботов с аэродинамическим прижимом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18. № 7. С. 447—452. https://doi.org/10.17587/mau.18.447-452
- 3. *Longo D., Muscato G.* Adhesion Techniques for Climbing Robots: State of the Art and Experimental Considerations // Proc. 11-th Internat. Conf. CLAWAR-2008. Coimbra, Portugal: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2008. P. 6–28.
- 4. Завал. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Завал (дата обращения: 09.03.2020).
- 5. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Экстремальные локомоционные возможности инсектоморфных роботов. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018. 212 с. ISBN 978-5-98354-040-8, https://doi.org/10.20948/mono-2018-golubev.
- 6. *Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф.* Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. М.: Наука. Физматлит, 1984. 312 с.
- 7. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Преодоление небольшой водной преграды инсектоморфным роботом на плоту // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 6. С. 141–162. https://doi.org/10.7868/S0002338817060117
- 8. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Транспортировка груза на плоту инсектоморфным роботом // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 136—146. https://doi.org/10.31857/S000233880002853-7
- 9. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Мелкумова Е.В.* Приведение инсектоморфного робота в рабочее состояние из аварийного положения "вверх ногами" // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 163—176. https://doi.org/10.1134/S0002338819060052
- 10. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Преодоление шестиногим роботом изолированных цилиндрических препятствий // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 65. 34 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-65 URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-65.
- 11. Универсальный механизм. Моделирование динамики механических систем. URL: http://www.umlab.ru (дата обращения: 10.03.2020).
- 12. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики: Учебник. 3-е изд., переработанное и дополненное. М.: Изд-во МГУ. 2019. 728 с. ISBN 978-5-19-011288-7.