Российская Академия Наук

Отделение нанотехнологий и информационных технологий
Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения
Российской академии наук – обособленное подразделение
ФИЦ КНЦ СО РАН

В.И. Сенашов

ГРУППЫ ШУНКОВА

Москва

2020

УДК 512.54
ББК 22.12
С 31

Группы Шункова / Сенашов В.И. – М.: РАН, 2020 – 246 с.

ISBN 978-5-907036-88-8

ISBN 978-5-907036-88-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Под условием конечности в теории групп понимается любое такое свойство, присущее всем конечным группам, что существует хотя бы одна бесконечная группа, которая этим свойством не обладает [88]. Примерами свойств такого рода являются локальная конечность, локальная нормальность, конечность всех классов сопряженных элементов, конечность всех убывающих цепей подгрупп (условие минимальности для подгрупп) и многие другие свойства конечных групп. Систематическое изучение групп с теми или иными условиями конечности началось в конце 30-х годов XX в. и в значительной степени было связано с исследованием специальных групп и близких к ним локально разрешимых групп с условием минимальности для подгрупп С.Н. Черниковым (см. [82]–[84]) в 1939, 1940 гг., а также с исследованием обобщенно нильпотентных групп Р. Бэром (см. [135]) в 1948 г.

К условиям конечности в бесконечных группах относятся условия конечности для систем некоторых двупорожденных подгрупп, введенных В.П.Шунковым, в том числе и самое известное из них условие сопряженно бипримитивной конечности. В работе В.П. Шункова 1970 года [115] уже используется термин бипримитивно конечные группы, но только для периодических групп и сечения берутся по экстремальным (черниковским) подгруппам. В этой работе группа называется бипримитивно конечной относительно p, если G — периодическая группа, p — некоторое простое число, удовлетворяющее условию: если H подгруппа из G, N — инвариантная экстремальная подгруппа в H, то в фактор-группе H/N любые два элемента порядка p порождают конечную подгруппу.

Если G — бипримитивно конечная относительно любого $p \in \pi(G)$, то группа G в [115] называлась бипримитивно конечной.

В дальнейших работах В.П. Шункова появился термин сопряженно q-бипримитивно конечных и сопряженно бипримитивно конечных групп.

Группа G называется *сопряженно q-бипримитивно конечной*, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любая пара сопряженных элементов порядка q порождает конечную подгруппу.

В частности, любая периодическая группа сопряженно 2-бипримитивно конечна.

Если группа G является сопряженно q-бипримитивно конечной относительно любого простого числа $q \in \pi(G)$, то G называется *сопряженно бипримитивно конечной группой.*

Понятие сопряженно бипримитивно конечной группы в последнем варианте введено Владимиром Петровичем Шунковым в 1975 г. в тезисах доклада на Всесоюзном алгебраическом симпозиуме.

Ссылка на этот факт имеется в работе А.Н. Остыловского [45].

Чуть позже были введены условия

— *слабой q-бипримитивной конечности*, когда два любых элемента простого порядка q в группе порождают конечную подгруппу;

— *слабой бипримитивной конечности*, когда два любых элемента простого порядка в группе порождают конечную подгруппу;

— *слабой q-сопряженно бипримитивной конечности*, когда два любых элемента простого порядка q в группе, сопряженных между собой, порождают конечную подгруппу;

— *слабой сопряженно бипримитивной конечности*, когда два любых элемента простого порядка в группе, сопряженных между собой, порождают конечную подгруппу.

Намек на появление нового термина для класса сопряженно бипримитивно конечных групп сделал сам В.П. Шунков. Когда в 1975 г. Д.И. Зайцев высказал мысль о громоздком названии этого класса групп, Владимир Петрович ответил в шутку: «Так назовите их группами Шункова». Но тогда этот класс еще не получил достаточного применения и использовался только в работах автора и трех его учеников. В 80-е годы XX в. ситуация сильно поменялась: класс сопряженно бипримитивно конечных групп упоминался уже во многих докладах на Международных конференциях, десятки ученых посвящали этому классу групп свои статьи, защищались диссертации. И уже на заседании диссертационного совета официально отметили, что пора бы подумать о более приемлемом названии для широко используемых групп. В самом начале XXI в. В.Д. Мазуров предложил назвать сопряженно бипримитивно конечные группы группами Шункова. И постепенно, то в одной статье, то в другой термин заменялся на новый. И теперь уже трудно встретить старый термин, а термин «группы Шункова» стал таким же естественным, как «группы Черникова».

В настоящее время группы Шункова встречаются в работах А.А. Дуж, Л. Гамуди, В.О. Гомера, М.Н. Ивко, А.Н. Измайлова, А.А. Кузнецова, Д.В. Лыткиной, В.Д. Мазурова, Ал.Н. Остыловского, А.Н. Остыловского, И.И. Павлюка, Д.Н. Панюшкина, А.М. Попова, Е.А. Прониной, А.В. Рожкова, А.Г. Рубашкина, И.В. Сабодах, Е.И. Седовой, В.И. Сенашова, В.А. Середы, А.И. Созутова, Н.Г. Сучковой, Л.Р. Туватуллиной, А.В. Тимофеенко, Г.А. Трояковой, К.А. Филиппова, А.А. Черепа, Н.С. Черникова, А.А. Шафиро, А.А. Шлепкина, А.К. Шлепкина, В.П. Шункова.

Таким образом, сейчас группа называется *группой Шункова*, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу.

Остановимся на содержании монографии.

В первой главе нашло отражение начало исследования групп Шункова в работах различных авторов. Здесь собраны исторически первые результаты, касающиеся групп Шункова. Первый параграф главы посвящен результату в этом направлении самого Владимира Петровича Шункова, пожалуй, из самой цитируемой работы по группам Шункова. Затем приведены результаты как из работ В.П.Шункова, так и из первых работ его учеников по группам Шункова.

В параграф 1.1 вошли исторически первые исследования групп с условиями конечности, введенными Владимиром Петровичем Шунковым. Первым результатом В.П. Шункова для бипримитивно конечных групп по-видимому можно назвать следующую теорему: Если в бипримитивно конечной p-группе централизатор некоторого элемента простого порядка — экстремальная группа, то сама группа экстремальна [115].

В этой же работе доказан результат: Если бипримитивно конечная p-группа (а при $p = 2$ произвольная 2-группа) обладает конечной максимальной элементарной абелевой подгруппой, то группа экстремальна.

В качестве следствий из этих теорем В.П. Шунковым доказаны следствие 1.1.1: Если бипримитивно конечная p-группа (а при $p = 2$ произвольная 2-группа) удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, то она экстремальна; и следствие 1.1.2: Бипримитивно конечная группа (а при $p = 2$ произвольная 2-группа) тогда и только тогда конечна, когда она порождается конечным числом образующих и некоторая ее максимальная элементарная абелева подгруппа конечна.

В параграфе 1.2 приведены результаты В.П. Шункова об абелевых подгруппах в бипримитивно конечных группах. В [17] доказано, что любая бесконечная локально конечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой. П.С. Новиковым и С.И. Адяном доказано [38], что эта теорема не имеет места даже в периодических группах ограниченного нечетного периода (отрицательное решение вопроса 1.24 [19, 20]: всякая ли бесконечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой?). Еще раньше С.Н. Черниковым вопрос 1.24 [20] был решен положительно для локально разрешимых групп [87], а в [89] — для локально конечных групп, обладающих нормальной системой с конечными факторами. Позднее в [73] метод доказательства из [17] был обобщен на группы, в которых любые два элемента порождают конечную подгруппу, и для таких групп вопрос 1.24 [20] решен положительно.

Обзор исследований по обсуждаемой выше проблематике отражен в работах [91, 92].

Вопрос 1.24 [20] решается положительно В.П. Шунковым для бипримитивно конечных групп (теорема 1.2.2): Бесконечная бипримитивно конечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой [121].

В отличие от случая конечных групп силовские q-подгруппы в бесконечных группах не всегда сопряжены. Как показывают многочисленные примеры, для бесконечных (локально конечных) групп более типичной является ситуация, когда силовские q-подгруппы не сопряжены. Тем не менее для некоторых конкретных классов групп удается доказать сопряженность силовских q-подгрупп или, по крайней мере, найти (необходимые и) достаточные условия такой сопряженности [24, 143]. Как правило, в этих случаях на группы накладываются некоторые условия конечности, — например, условие конечности некоторой силовской q-подгруппы или конечности индекса ее нормализатора в группе.

Таким образом, если для локально конечных групп имеется более или менее удовлетворительная силовская теория (в указанном, выше смысле), то этого уже нельзя сказать о периодических (конечно-порожденных) группах. В параграфе 1.3 строится один фрагмент силовской теории в периодических группах (см. теоремы 1.3.1–1.3.4). В частности, из полученных теорем вытекают некоторые известные факты теории локально конечных групп [143]; они указаны в качестве следствий теорем 1.3.1, 1.3.3, 1.3.4. Теоремы 1.3.1–1.3.5 доказываются при дополнительном ограничении q-бипримитивной конечности группы. Это ограничение оказалось столь удобным, что позволило сформулировать результаты (за исключением теоремы 1.3.5) без предположения о периодичности группы. Но, как выяснилось, оно не только удобно, но и необходимо по существу. Указана периодическая группа, для которой теоремы 1.3.2, 1.3.3 неверны (здесь также решающую роль играет группа Новикова-Адяна [37, 39]). Там же показано, что в формулировках теорем 1.3.1, 1.3.4 нельзя отказаться от условия q-бипримитивной конечности группы.

Д.И.Зайцевым [13] было введено следующее слабое условие минимальности: в группе обрывается на конечном номере любая убывающая цепочка подгрупп $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ с бесконечными индексами $|A_n : A_{n+1}|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ Там же для локально конечных групп доказана эквивалентность ослабленного условия минимальности с обычным условием минимальности. Оказывается, что это верно и для периодических бипримитивно конечных групп (теорема 1.3.5).

Вопрос о том, будет ли теорема 1.3.5 справедлива без предположения бипримитивной конечности, остается открытым.

Через (min-inf) min обозначается класс всех групп со (слабым) условием минимальности для подгрупп и само это условие. Если B — некоторая группа, обладающая полной частью, то эту полную часть будем обозначить $\tilde{B}$. Напомним, что полной частью группы B называется нормальная полная абелева подгруппа B такая, что $B/\tilde{B}$ не обладает бесконечными полными абелевыми подгруппами. Далее, напомним, что черниковской группой называется почти абелева группа с условием минимальности [35] (именно в [35] впервые был введен этот термин).

В параграфе 1.3 доказаны теоремы о сопряженности силовских q-подгрупп в q-бипримитивно конечных группах с условием min-inf и равносильности двух условий минимальности в периодических бипримитивно конечных группах

В 1901 году Фробениус доказал следующую теорему: Пусть G — конечная группа, содержащая подгруппу H, совпадающую со своим нормализатором и взаимно простую со своими сопряженными подгруппами. Тогда совокупность элементов, не содержащихся ни в H, ни в одной сопряженной с H подгруппе, вместе с единицей составляют нормальный делитель группы G.

Теорема Фробениуса неверна в общем случае, более того, как показывает пример 1.4.3, она неверна в классе периодических групп. Различными авторами теорема Фробениуса обобщена на некоторые классы бесконечных групп (обзор исследований в этом направлении см., например, в [72]).

В параграфе 1.4 теорема Фробениуса А.И. Созутовым и В.П. Шунковым обобщается на класс бипримитивно конечных групп (теорема 1.4.2) и на периодические слабо бипримитивно конечные группы (теорема 1.4.3).

Также в этом параграфе А.И. Созутовым и В.П. Шунковым доказывается что если бесконечная периодическая бипримитивно конечная группа не содержит ни одной отличной от нее бесконечной неабелевой подгруппы, то она локально конечна (теорема 1.4.4).

В параграфе 1.5 М.В. Носковым доказывается локальная конечность бипримитивно конечных групп при более слабом ограничении, а именно: все собственные бесконечные подгруппы нильпотентности класса ≤ 2. А именно, доказано, что бипримитивно конечная группа G с собственными бесконечными подгруппами нильпотентности класса ≤ 2 локально конечна (теорема 1.5.1).

В параграфе 1.6 решается вопрос: будет ли счетной всякая периодическая группа, все собственные подгруппы которой счетны? Для локально конечных групп этот вопрос был положительно решен В.П. Шунковым [110], а для бинарно конечных групп — С.П. Струнковым [73]. Легко показать, что из положительного решения указанного вопроса вытекает положительное решение известной проблемы счетности А.Г. Куроша: будет ли счетна группа с условием минимальности?

Указанный вопрос и проблема счетности А.Г. Куроша решаются положительно для периодических групп Шункова. В частности, этот класс групп включает в себя локально конечные группы, группы Голода [9], 2-группы и бинарно конечные группы.

Напомним, что пара (G, H), где G — группа и H — ее собственная подгруппа такая, что для любого элемента $g \in G \setminus H$ выполняется условие $H \cap H^g = 1$, называется *парой Фробениуса.*

В параграфе 1.6 Ал.Н. Остыловским доказывается, что периодическая группа Шункова счетна, если все ее собственные подгруппы счетны (теорема 1.6.1).

В качестве следствия получается счетность группы Шункова с условием минимальности.

Заметим, что счетность группы Шункова без инволюций с условием минимальности вытекает и из работы [43].

Группа называется расщепляемой, если она является объединением некоторой совокупности собственных подгрупп, попарно пересекающихся по единице [7]. Эту совокупность подгрупп называют расщеплением группы, а сами подгруппы — компонентами расщепления. Произвольная подгруппа называется допустимой относительно данного расщепления, если с каждой компонентой расщепления она либо пересекается по единице, либо целиком содержит ее.

В § 1.7. рассматриваются расщепляемые слабо бипримитивно конечные группы с нормальной компонентой расщепления. Напомним, что группа $G = F\lambda H$ называется *группой Фробениуса с неинвариантным множителем H и ядром F*, если H и F — собственные подгруппы группы G, $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in G \setminus H$ и $G \setminus F^\# = \cup H^g$.

Введем следующие обозначения: Φ — класс всех групп G, в которых элемент a действует на ядре F регулярно, Ψ — класс всех групп G, в которых каждый элемент из $G \setminus F$ имеет порядок p.

Следуя [7], группы из класса Ψ, не являющиеся p-группами и группами Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$ и ядром F, называются HT-группами. Теорема 1.7.1 А.И. Созутова, А.К. Шлепкина обобщает результат Бэра ([7], теорема 8): Пусть периодическая слабо бипримитивно конечная расщепляемая группа G в некотором расщеплении обладает собственной допустимой нормальной подгруппой. Тогда G является либо p-группой, либо группой Фробениуса, либо HT-группой.

В этом же параграфе приведен пример бесконечной слабо бипримитивно конечной группы, построенной А.И. Созутовым в [66] на основе некоммутативной группы $A(m, n)$ С.И. Адяна.

Также А.И. Созутовым в [66]построена конечнопорожденная слабо бипримитивно конечная группа Фробениуса с периодическим не локально конечным неинвариантным множителем и периодическим абелевым ядром.

Во второй главе изучаются группы Шункова с заданными подгруппами либо рядами подгрупп. Рассматриваются локально конечные и локально разрешимые группы Шункова, бесконечные локально конечные подгруппы в группах Шункова, группы со слабо сопряженно бипримитивно конечным централизатором инволюции, 2-полные подгруппы в группе Шункова. Приводятся свойства групп Шункова.

Опираясь на результаты из §1.3, в параграфе 2.1 доказывается локальная конечность и черниковость периодических групп Шункова без инволюций с условием min-inf и устанавливается, что проблему минимальности в случае нечетных групп достаточно решить для простых квазичерниковских [108] групп (нечерниковская группа называется квазичерниковской, если любая ее собственная подгруппа черниковская) вида $G = \langle a, g^{-1}ag \rangle$ (a, g — некоторые элементы из G, причем a имеет простой порядок).

В этом параграфе изучается нечерниковская квазичерниковская простая группа G и некоторая ее бесконечная максимальная подгруппа H (если она существует), g — элемент из $G \setminus H$. G, в частности, удовлетворяет условиям: G — квазичерниковская группа; любая собственная бесконечная подгруппа из G содержится в некоторой максимальной подгруппе группы G; G — простая группа.

Приводятся с доказательством теоремы А.Н. Остыловского, В.П. Шункова о локальной конечности и разрешимой черниковости группы Шункова без инволюций с двумя вариантами условий минимальности.

В параграфе 2.2 найдены достаточные признаки вложения элемента простого порядка в относительно хорошую бесконечную подгруппу (с нетривиальной конечной нормальной подгруппой) или в бесконечную локально конечную подгруппу.

В качестве приложения теорем 2.2.1, 2.2.2 В.П. Шункова дается описание периодических сопряженно бипримитивно конечных групп без инволюций с условием примарной минимальности. Оказалось, что все такие группы локально конечны (теорема 2.2.3). Теорема 2.2.3 доказана В.П. Шунковым совместно с А.К. Шлепкиным.

В § 2.3 рассматриваются группы со слабо сопряженно бипримитивно конечным централизатором инволюции. Понятие бесконечно изолированной подгруппы впервые было введено в работе [107] в связи с абстрактной характеризацией групп типа $PGL(2, K)$ над локально конечным полем K нечетной характеристики. Оно сыграло исключительно важную роль в решении проблемы минимальности С.Н. Черникова [107, 116] и занимает центральное место в построении теории локально конечных групп с различными условиями конечности [113, 116, 119].

Решение проблемы минимальности С.Н. Черникова в других классах периодических групп [43, 124] также вызвало необходимость рассмотрения периодических групп с бесконечно изолированной подгруппой. Как и в случае локально конечных групп [109], здесь приходится рассматривать ситуацию, когда бесконечно изолированная подгруппа является одновременно и сильно вложенной. В этом параграфе данная ситуация выделена «в чистом виде», т. е. рассмотрен класс периодических групп с сильно вложенной бесконечно изолированной подгруппой. На примерах показано, что этот класс групп достаточно широк и включает в себя не только локально конечные группы. Периодическая группа с сильно вложенной бесконечно изолированной подгруппой может быть как простой, так и непростой. Здесь найдены условия, когда такая группа обладает абелевой нормальной подгруппой (теоремы 2.3.1, 2.3.2).

В §2.4 А.К. Шлепкиным доказывается теорема о 2-полных подгруппах в группе Шункова с условием примарной минимальности (теорема 2.4.1).

В параграфе 2.5. приведены некоторые свойства групп Шункова без доказательства со ссылкой на работу, в которой доказывается этот результат.

В третьей главе устанавливается связь между группами Шункова и другими классами групп: черниковскими группами, группам с условиями минимальности, почти слойно конечными группами, группами, насыщенными системами подгрупп.

Параграфы 3.1 – 3.3 связывают группы В.П. Шункова и группы его учителя С.Н. Черникова.

В.П. Шунковым в [117] поставлена проблема: будет ли локально конечной (сопряженно) бипримитивно конечная группа с условием минимальности для абелевых подгрупп?

В §3.1 А.Н. Остыловским доказывается, что всякая группа Шункова без инволюций, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, является группой Черникова (теорема 5.2.1). Тем самым проблема Шункова решается положительно для групп без инволюций.

В параграфе 3.2 Н.Г. Сучковой и В.П. Шунковым эта же проблема решена положительно для групп с инволюциями: Всякая сопряженно бипримитивно конечная группа, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, является черниковской (теорема 3.2.1).

Наконец в параграфе 3.3 приводится теорема В.П. Шункова, в которой на основе теоремы 3.3.1 дается полное доказательство того, что всякая сопряженно бипримитивно конечная группа с условием минимальности для подгрупп является черниковской группой (теорема 3.3.3).

В § 3.4. продолжается изучение групп Шункова с условием примарной минимальности, начатое А.К. Шлёпкиным и В.П. Шунковым в [125].

А.К. Шлёпкиным доказаны следующие две теоремы:

Периодическая сопряженно бипримитивно конечная группа с условием примарной минимальности локально конечна.

Сопряженно бипримитивно конечная группа с условием примарной минимальности и конечными силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi(G)$ обладает периодической частью.

В §3.5 В.И. Сенашовым изучаются группы Шункова с сильно вложенной почти слойно конечной подгруппой, обладающей черниковской почти слойно конечной периодической частью. Показывается, что почти слойная конечность распространяется на периодическую часть группы G с периодических частей нормализаторов нетривиальных конечных подгрупп группы G, когда G является группой Шункова, обладающей сильно вложенной подгруппой с черниковской почти слойно конечной периодической частью (теорема 3.4.1).

Напомним, что *сильно вложенной* называется собственная подгруппа H группы G, если H содержит элемент порядка 2 (инволюцию) и для любого элемента $g \in G \setminus H$ подгруппа $H \cap H^g$ не содержит инволюций.

Затем в §3.6 В.И. Сенашовым обобщается теорема 3.4.1 – удается отказаться от условия черниковости сильно вложенной подгруппы: Пусть группа Шункова G содержит сильно вложенную почти слойно конечную подгруппу. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью, то сама группа G обладает почти слойно конечной периодической частью.

Параграф 3.7 призван проиллюстрировать теоремой 3.7.1 А.А. Шлепкина направление, возникшее в Красноярске с 1980-х годов и активно развиваемое в настоящее время в работах В.Д. Мазурова, Д.В. Лыткиной, А.А. Дуж, А.А Кузнецова, Д.Н. Панюшкина, Е.А. Прониной, И.В. Сабодах, Л.Р. Туватуллиной, К.А. Филиппова, А.А. Шлепкина, А.К. Шлепкина, ... Это направление тесно связано с группами Шункова и в большинстве результатов используются свойства класса групп Шункова. Объем работ, посвященных группам Шункова, насыщенных теми или иными подгруппами настолько большой, что ему уже можно посвятить отдельную монографию.

В четвертой главе изучается взаимоотношение групп Шункова и близких к ним классов групп. В этой главе рассматриваются классы групп, являющиеся обобщениями групп Шункова. А.В. Рожков ввел в рассмотрение классы n-конечных групп и сопряженно n-конечных групп, близких по свойствам к группам Шункова. Устанавливаются взаимоотношения этих классов групп и групп Шункова.

В §4.1 А.А. Черепом устанавливается несовпадение классов бипримитивно конечных и бинарно конечных групп. Также доказаны две теоремы, устанавливающие условия, при которых совпадают классы групп Шункова и бипримитивно конечных групп. Оказывается, что вопрос о разделении бипримитивной и сопряженно бипримитивной конечности решается отрицательно в классе разрешимых групп и в классе групп с несмешанными факторами и даже если в группе любые два элемента порождают подгруппу с несмешными факторами (определение группы с несмешанными факторами см. в §4.1).

В параграфе 4.2 рассматриваются классы n-конечных групп и сопряженно n-конечных групп.

Группа называется *(сопряженно) r-конечной*, если любые ее r (сопряженных) элементов порождают конечную подгруппу. При $r = 2$ получаем определение сопряженно бинарно конечной группы.

Приводятся без доказательства результаты А.В. Рожкова [51] (доказательства этих результатов можно найти в монографии [56]), которые разграничивают условие слабой сопряженной бипримитивной конечности с условиями сильной (a, b)-конечности, сопряженной бинарной конечности и слабой бипримитивной конечности.

В этом же параграфе А.И. Созутовым для каждого простого числа p и каждого натурального числа $r \geq 2$ построен пример сопряженно r-конечной, но не r-конечной финитно аппроксимируемой p-группы.

А.В. Рожков [52] поставил следующий вопрос: Пусть p –– простое нечётное число, n — натуральное. Для всех ли пар p, n существуют финитно аппроксимируемые конечно порождённые p-группы, являющиеся сопряжённо n-конечными, но не бипримитивно конечными?

Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующая теорема 4.2.2 из параграфа 4.2, доказанная В.А. Середой и А.И. Созутовым [53]: Пусть G — сопряжённо n-конечная группа. Тогда для всех $p \in \pi(G)$, не превышающих n, группа G является p-бипримитивно конечной.

Все результаты в монографии имеют тройную нумерацию — номер главы, номер параграфа, номер результата (теоремы, леммы, следствия, примера, замечания). Для удобства читателя все вспомогательные результаты, на которые делаются ссылки в тексте, приведены в специальном разделе: вспомогательные результаты. На теоремы этого раздела мы ссылаемся как на теоремы с соответствующим одинарным номером. Все необходимые определения и обозначения собраны в отдельном разделе в конце книги.

В монографии нашла отражение часть результатов по группам Шункова. Это позволило дать представление о направлении, возникшем сорок пять лет назад в Красноярске в Институте вычислительного моделирования СО РАН. По этому направлению сейчас работают более тридцати ученых.

Автор благодарен своему Учителю Владимиру Петровичу Шункову за создание научного направления «группы Шункова».

ГЛАВА 1

Первые исследования бипримитивно конечных групп

В этой главе собраны исторически первые результаты, касающиеся групп Шункова. Параграф 1.1 посвящен первому результату в этом направлении самого Владимира Петровича Шункова, пожалуй, из самой цитируемой работы по группам Шункова. Затем приведены результаты как из работ В.П.Шункова, так и из первых работ его учеников по группам Шункова.

§ 1.1. Первый результат В.П. Шункова для бипримитивно конечных групп

В этом параграфе приводится теорема В.П. Шункова, с которой начались исследования рассматриваемых в монографии классов групп, введенных В.П. Шунковым.

Элемент группы называется *почти регулярным*, если его централизатор в группе конечен, и некоторый автоморфизм группы назовем почти регулярным, если он оставляет на месте лишь конечное число элементов группы. Под рангом группы будем понимать специальный ранг в смысле Мальцева [34].

В соответствии с работой [88] группа называется экстремальной, если она является конечным расширением абелевой группы с условием минимальности для подгрупп. Максимальную полную абелеву подгруппу экстремальной группы назовем *полной частью.*

В этом параграфе используется следующее определение для бипримитивно конечных групп:

Определение. Пусть G — периодическая группа, p — некоторое простое число, удовлетворяющие следующему условию: если H — подгруппа из G, N — инвариантная экстремальная подгруппа в H, то в фактор-группе H/N любые два элемента порядка p порождают конечную подгруппу. В этом случае группа G называется *бипримитивно конечной относительно* p. Если G — бипримитивно конечна относительно любого $p \in \pi(G)$, то группа G называется *бипримитивно конечной.*

Произвольная периодическая группа четного порядка бипримитивно конечна относительно 2, так как в ней любые две инволюции порождают конечную подгруппу. С другой стороны, как показывает пример Голода [9], для любого p существуют бипримитивно конечные p-группы, не являющиеся локально конечными.

В параграфе 1.1 будут даказаны две теоремы устанавливающие условия, при которых бипритивно конечная примарная группа является черниковской:

Теорема 1.1.1 (В.П. Шунков). *Если в бипримитивно конечной p-группе централизатор некоторого элемента простого порядка — экстремальная группа, то сама группа экстремальна* [115].

Теорему 1.1.1 по-видимому можно назвать первым результатом В.П. Шункова для бипримитивно конечных групп.

Теорема 1.1.2 (В.П. Шунков). *Если бипримитивно конечная p-группа (а при $p = 2$ произвольная 2-группа) обладает конечной максимальной элементарной абелевой подгруппой, то группа экстремальна* [115].

Эти теоремы — первые результаты В.П. Шункова, касающиеся введенного им понятия бипримитивно конечной группы.

Следствие 1.1.1 (В.П. Шунков). *Если бипримитивно конечная p-группа (а при $p = 2$ произвольная 2-группа) удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, то она экстремальна* [115].

Следствие 1.1.2 (В.П. Шунков). *Бипримитивно конечная группа (а при $p = 2$ произвольная 2-группа) тогда и только тогда конечна, когда она порождается конечным числом образующих и некоторая ее максимальная элементарная абелева подгруппа конечна* [115].

Предварительно будет доказан ряд лемм.

Лемма 1.1.1. *Локально конечная p-группа экстремальна, если в ней централизатор некоторого элемента порядка p экстремален.*

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно вытекает из результата [137], а также свойств p-групп Черникова [24].

Лемма 1.1.2. *Пусть P — конечная p-группа типа: $P = A\lambda\langle b\rangle$, где A — элементарная абелева подгруппа, $b^p = 1$. Если $n = |Z(P)|$, то существует лишь конечное число групп указанного выше типа с центром заданного порядка n.*

Доказательство. Очевидно, нам достаточно рассмотреть случай, когда P некоммутативна. В этом случае $Z(P) \subset A$. Так как A — элементарная абелева подгруппа, то $A = Z(P) \times D$. Пусть $L = Z(P) \times b$. Очевидно, $P = LD = DL$ и $D \cap L = 1$. Подгруппа D не может обладать нетривиальным нормальным делителем в P, так как в противном случае имели бы $Z(P) \cap D \neq 1$ [86], что невозможно, но тогда по теореме 5.3.1. [131] P вкладывается в симметрическую группу степени pn. Отсюда вытекает справедливость леммы.

В этом параграфе ради краткости под периодической группой будем понимать группу, в которой порядок любого элемента конечен и сама группа не локально конечна. Пусть G — бипримитивно конечная p-группа, a — некоторый элемент простого порядка из G, $C_G(a)$ — экстремальная группа. Через $M(a), M_1(a), \ldots$ будем обозначать максимальные локально конечные подгруппы из G, содержащие элемент a. Ввиду леммы 1.1.1 любая такая подгруппа типа $M(a)$ экстремальна.

Лемма 1.1.3. *Если G — бесконечная группа, то любая подгруппа типа $M(a)$ бесконечна.*

Доказательство. При доказательстве леммы воспользуемся хорошо известным методом О.Ю. Шмидта [106].

Пусть среди подгрупп типа $M(a)$ есть конечная подгруппа $T(a)$. Если множество всех элементов порядка p из G содержится в $T(a)$, то оно порождает конечный нормальный делитель Z из $T(a)$ в G. Так как $a \in Z$ нормальной в G и $C_G(a)$ — экстремальная группа, то, очевидно, из конечности индекса $C_G(a)$ в G вытекает экстремальность группы G. Но тогда $T(a) = G$, что противоречит конечности $T(a)$. Пусть k — некоторый элемент порядка p из G и $k \notin T(a)$. Так как $\langle k, a\rangle$ — конечная группа (ввиду бипримитивной конечности группы)), то ее можно включить в некоторую подгруппу $M_1(a) \neq T(a)$.

Пусть $D_1 = T(a) \cap M_1(a)$. Если бы $D_1 = T(a)$, то $T(a) \subseteq M_1(a)$, но тогда, ввиду определения подгруппы типа $M(a)$, получили бы $T(a) = M_1(a)$, что невозможно. Следовательно, $D_1 \neq T(a)$.

Так как $a \in D_1$, то $N_G(D_1)$ — экстремальная группа. В подгруппах $T(a), M_1(a)$ выполняется нормализаторное условие. Отсюда вытекает, $N_G(D_1) \cap T(a) \neq D_1$ и $N_G(D_1) \cap M_1(a) \neq D_1$. Следовательно, $N_G(D_1)$ можно включить в некоторую подгруппу $M_2(a) \neq T(a)$. Пусть $D_2 = T(a) \cap M_2(a)$. Из $N_G(D_1) \subset M_2(a)$ и $N_G(D_1) \cap T(a) \neq D_1$, следует, что $D_2 \neq D_1$ и $D_1 \subset D_2$. Если бы $D_2 = T(a)$, то $T(a) \subset M_2(a)$, что противоречит определению подгруппы типа $M(a)$. Следовательно, $D_2 \neq T(a)$. Как и в предыдущем случае, подгруппу D_2 можно строго включить в некоторую подгруппу D_3 из $T(a)$, причем $D_3 \neq T(a)$. Рассуждая таким образом, мы построим строго возрастающую цепочку подгрупп из $T(a)$:

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots . \subset D_n \subset \ldots,$$

которая не обрывается на конечном номере. Однако это невозможно, так как $T(a)$ — конечная группа. Полученное противоречие доказывает лемму.

Пусть в G задан возрастающий ряд полных абелевых подгрупп:

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots . \subset A_n \subset \ldots, (1.1.1)$$

обладающих следующими свойствами: $N_G(A_n)$ — периодическая группа и $a \in N_G(A_n)(n = 1, 2, \ldots)$. Из леммы 1.1.1 вытекает, что ряд (1.1.1) обрывается на конечном номере n, т.е. подгруппа $A = A_n$ не содержится ни в какой полной абелевой подгруппе, отличной от A, с указанными выше свойствами. Ввиду определения подгруппы A, фактор-группа, $T = N_G(A)/A$ — периодическая группа. Пусть $\overline{a} = aA, H = N_G(A), B = \langle A, a\rangle$.

Замечание 1.1.1. *$C_T(\overline{a})$ — экстремальная группа, нормализатор любой полной абелевой подгруппы из T, содержащий $\overline{a}$ экстремальная группа.*

Доказательство. Допустим, что $C_T(\overline{a})$ — не экстремальная группа. Отсюда следует, что и $U = N_H(B)$ — также не экстремальная группа. Так как B экстремальная группа, то, ввиду результата С.Н.Черникова [90] $C_U(B)$ имеет конечный индекс в U и, кроме этого, $C_U(B)$ содержится в экстремальной подгруппе $C_G(a)$. Но тогда, очевидно, U — экстремальная группа, вопреки ранее сделанному предположению. Первое утверждение замечания 1 доказано. Что касается второго утверждения, то оно является следствием леммы 1.1.1 и определения подгруппы A.

Замечание 1.1.2. *Пусть L — подгруппа типа $M(\overline{a})$ из T. Тогда нормализатор любой бесконечной подгруппы из L в T, содержащий $\overline{a}$, содержится в L.*

Доказательство. Пусть C — бесконечная подгруппа из L, C' — ее полная часть. Очевидно, нам достаточно показать, что $N_T(C') \subset L$. Согласно замечанию 1.1.1, $N_T(C')$ — экстремальная группа. Если L' и Q — соответственно полные части подгрупп L и $N_T(C')$, то, очевидно, $L' \subset Q$. Но, с другой стороны, ввиду замечания 1 и определения подгруппы типа $M(\overline{a})$, получим $N_T(L') = L$ и $Q \subset L'$. Следовательно, $Q = L'$ и $N_T(C') \subset N_T(Q) = N_T(L') = L$, что и требовалось доказать.

Не нарушая общности рассуждений, мы будем предполагать уже в самой группе G не существует возрастающего ряда полных абелевых подгрупп (1.1.1) с указанными выше свойствами. В этом в группе G справедливы замечания 1 и 2.

Лемма 1.1.4. *Пусть Q — полная часть подгруппы $T = T(a) \neq G$, A — конечная подгруппа из Q. Тогда $C_G(A)$ — периодическая группа.*

Доказательство. Пусть r — натуральное число, ограничивающее ранги полных частей подгрупп типа $M(a)$, а такое число, ввиду леммы 1.1.2, существует. Так как число неизоморфных полных частей ранга $\leq r$ конечно [24], а периодические группы автоморфизмов вышеуказанных групп конечны [90], то существует число $s = p^{\alpha}$, ограничивающее порядки силовских p-подгрупп этих групп автоморфизмов (по данному p).

Пусть B — такая конечная подгруппа из Q, что $A \subset B^s$ (B^s — подгруппа, порожденная s-ми степенями элементов из B), причем $a \in N_G(B)$.

Используя тот же метод, что и в доказательстве леммы 1.1.3, построим в T строго возрастающую цепочку подгрупп:

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots, (1.1.2)$$

где $D_n = T \cap T_n(a)$ $(T_n = T_n(a))$ и $N_T(D_n) \subset D_{n+1}(n = 1, 2, \ldots)$. Пусть R_1 — нижний слой подгруппы Q. Так как R_1 нормальна в T, то $L_1 = R_1 \cap D_1$ нормальна в D_1.

Пусть $U = \langle R_1, D_1 \rangle$. Если $L_1 \neq R_1$, то рассмотрим фактор-группу U/L_1. Она нильпотентна, и R_1/L_1 нормальна в U/L_1, и, следовательно, $R_1/L_1 \cap Z(U/L_1) \neq 1$ [86], а это означает, что при $L_1 \neq R_1$ будем иметь $R_1 \cap N_T(D_1) \neq L_1$. Отсюда, а также из $N_T(D_1) \subseteq D_2$ следует, что $L_2 = R_1 \cap D_2 \neq L_1$ и $L_1 \subset L_2$. Если $R_1 \not\subseteq D_2$, то рассуждаем аналогично предыдущему. Так как R_1 — конечная группа, то, очевидно, существует такой номер n_1, что $R_1 \subset D_{n_1}$.

Пусть R_{l+1} — подгруппа, соответствующая нижнему слою фактор-группы $Q/R_l (l = 1, 2, ...)$, и пусть $R_l \subset D_{n_l}$. Как и в случае $l = 1$, можно доказать существование такого номера n_{l+1}, что $R_{l+1} \subset D_{n_{l+1}}$. Так как Q является объединением подгрупп

$$R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_l \subset \ldots,$$

то мы доказали, что Q содержится в объединении подгрупп цепочки (1.1.1). Отсюда следует, что для подгруппы B существует такой номер n что $B \subset D_n = T \cap T_n$.

Пусть Q_n — полная часть подгруппы T_n. Как отмечалось выше, ее ранг не превосходит числа r, и так как фактор-группа $T_n/C_{T_n}(Q_n)$ изоморфна некоторой подгруппе группы автоморфизмов подгруппы Q_n, то, ввиду выбора числа $s = p^\alpha$, получим $|T_n/C_{T_n}(Q_n)| \leq S_s$. Но тогда из $B \subset T_n$ вытекает $A \subseteq B \subset C_{T_n}(Q_n)$.

Очевидно, $a \in N_G(B^s)$ и, кроме этого, $Q, Q_n \subset N_G(B^s)$. Если бы подгруппа $N_G(B^s)$ была локально конечной, то по лемме 1.1.1 она была бы экстремальной и, значит, $Q_n \subset C_G(Q)$. Ввиду замечания 2, получили бы $T(a) = T_n(a)$, что невозможно. Следовательно, $N_G(B^s)$ — периодическая группа, но тогда из конечности B^s и $A \subset B^s$ вытекает периодичность подгруппы $C_G(A)$. Лемма доказана.

Лемма 1.1.5. *Пусть $C_G(a)$ — бесконечная группа, $T(a)$ — подгруппа, не содержащая $C_G(a)$, A — полная часть $T(a)$. Тогда A обладает такой конечной подгруппой B, нормализуемой элементом a, что в фактор-группе $N_G(B)/B$ элемент aB — почти регулярный.*

Доказательство. Предположим, что лемма 1.1.5 неверна. В этом случае A обладает такой строго возрастающей цепочкой конечных подгрупп $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset \ldots$, что в фактор-группе $G_n = N_G(B_n)/B_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ элемент $a_n = aB_n$ не является почти регулярным. Так как полные части подгрупп $C_G(a_n)$ являются образами некоторых полных подгрупп из экстремальной подгруппы $C_G(a)$ и, следовательно, их ранги ограничены в совокупности конечным числом, то некоторая квазициклическая подгруппа $Q \subset C_G(a)$ будет централизовать конечные подгруппы B_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Но тогда $C_G(Q) \cap A$ — бесконечная группа, и из замечания 2 будет следовать, что $C_G(a) \subset T(a)$. Однако это противоречит условию леммы 1.1.5. Лемма доказана.

Лемма 1.1.6. *Если полная абелева p-группа обладает почти регулярным автоморфизмом порядка p, то в ней существует допустимая подгруппа, разложимая в прямое произведение $p-1$ квазициклических подгрупп, все неподвижные элементы которой (относительно этого автоморфизма) порождают циклическую группу простого порядка.*

Доказательство. Лемма вытекает из результатов работы [85] (см. в [85] леммы о коммутаторной лестнице).

Сформулируем еще раз теорему 1.1.1:

Теорема 1.1.1 (В.П. Шунков). *Если в бипримитивно конечной p-группе централизатор некоторого элемента простого порядка — экстремальная группа, то сама группа экстремальна* [115].

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, и пусть G —

периодическая группа, a — ее элемент, удовлетворяющие условиям теоремы.

Лемма 1.1.7. *В G существует такая периодическая подгруппа H с конечной инвариантной в ней подгруппой Z (не обязательно отличной от единицы), содержащая элемент a, что ни для какой периодической подгруппы $T \subseteq H (a \in T, Z \subseteq T)$ с конечной инвариантной подгруппой $P(Z \subseteq P)$ фактор-группа T/P не является группой типа: $D \times \langle b \rangle$, где D — периодическая группа, b — элемент порядка p.*

Доказательство. Лемма 1.1.7 доказывается аналогично лемме 5 из работы [112] с использованием леммы 1.1.1.

Ради удобства дальнейших рассуждений будем предполагать, что $G = H, Z = 1$. Далее, мы будем также предполагать, что для G справедливы замечания 1 и 2. Если $C_G(a)$ — бесконечная группа, то ввиду лемм 4, 5 в G существует периодическая подгруппа, в которой элемент a почти регулярен, а поэтому, не нарушая общности доказательства теоремы 1, будем предполагать, что уже в группе G элемент a — почти регулярен.

Пусть A — абелева подгруппа экспоненты p^2, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $a \in N_G(A) = B$, $a \notin C_G(A) = P$;

2) $C_G(A)$ — периодическая группа;

3) A не содержится ни в какой большей абелевой подгруппе экспоненты p^2, удовлетворяющей условиям 1) и 2).

Согласно условию 1) $B = P \lambda \langle a \rangle$. Из лемм 1.1.1, 1.1.4, 1.1.6 вытекает существование подгруппы A.

Лемма 1.1.8. *Пусть K — конечная подгруппа из P, $a \in N_B(K) = V \lambda \langle a \rangle$ $(V \subset P)$, $N_B(K)$ — периодическая группа. Тогда фактор-группа $N_B(K)/K$ не обладает элементом порядка p из V/K, централизатор которого в $N_B(K)/K$ — экстремальная подгруппа, содержащая aK.*

Доказательство. Допустим, что лемма 1.1.8 неверна. Пусть $T = N_B(K)/K$, $\overline{a} = aK$, $\overline{b}$ — элемент простого порядка из V/K и $C_T(\overline{b})$ — бесконечная экстремальная подгруппа (b — прообраз $\overline{b}$ в $N_B(K)$), содержащая $\overline{a}$, L — подгруппа типа $M(\overline{a})$ и $C_T(\overline{b}) \subset L$.

Если бы все элементы порядка p из T содержались в L, то они порождали бы экстремальный нормальный делитель в T, но тогда в силу замечания 2 и экстремальности $C_T(\overline{b})$ вытекала бы экстремальность группы T, что невозможно. Следовательно некоторый элемент c порядка p из T не содержится в L.

Так как T бипримитивно конечна, то $\langle c, \overline{b}\rangle$ — конечная подгруппа и, ввиду леммы 1.1.3, она содержится в подгруппе S типа $M(\overline{b})$.

Пусть $\overline{Q}$ и S' — соответственно полные части подгрупп L и S (Q — полная подгруппа, являющаяся прообразом $\overline{Q}$ в $N_B(K)$). Ввиду лемм 1.1.4, 1.1.5 в S' существует такая конечная подгруппа U, что $N_T(U)$ — периодическая группа, $\overline{b} \in N_T(U)$ и $\overline{b}$ — почти регулярный элемент в $N_T(U)$. Пусть X — инвариантная подгруппа из U, максимальная в том смысле, что $\overline{Q} \subset C_T(X)$ и $\overline{b} \in N_T(X) = Y$. Из леммы 1.1.5 и бесконечности $C_Y(\overline{b})$ вытекает $X \neq U$. Введем обозначения: $W = N_T(X)/X$, $Q_1 = \overline{Q}X/X$, $U_1 = U/X$, $b_1 = \overline{b}/X$, L_1 — подгруппа из W типа $M(b_1)$, содержащая $C_W(b_1)$. Ввиду замечания 2 $Q_1 \subset L_1$. Так как $\langle U_1, b_1\rangle$ — нильпотентная подгруппа и U_1 нормальна в $\langle U_1, b_1\rangle$, то некоторый элемент $\overline{z}$ порядка p из U_1, принадлежит $C_W(b_1)$, а значит, и L_1, причем $\overline{z} \notin C_W(Q_1)$ (z — прообраз $\overline{z}$ в $N_B(K)$). Но тогда, очевидно, z индуцирует в Q автоморфизм порядка p. Если этот автоморфизм почти регулярный, то ввиду леммы 1.1.6 подгруппа R экспоненты p^2 из Q не централизуется элементом z.

Пусть C_1 — полная часть $Q \cap C_B(z)$. Так как Q — полная абелева группа, то $Q = C_1 \times C_2$ [24].

Очевидно, в фактор-группе $\langle Q, z\rangle / C_1$ элемент zC_1 индуцирует в Q/C_1 почти регулярный автоморфизм простого порядка и снова, ввиду леммы 1.1.6, отсюда будет, вытекать, что R не централизуется элементом z. Далее, $z \in C_B(A)$ (достаточно вспомнить, откуда брался элемент $\overline{z}$), и, очевидно, $a \in N_B(R)$. Но тогда в силу выбора подгруппы A и леммы 1.1.4 должно быть $R \subseteq A$, и, значит, $z \in C_B(R)$, что невозможно. Пусть теперь $C_T(\overline{b})$ — конечная группа.

Так как подгруппа $\langle b, a\rangle$ конечна, то ее можно включить в подгруппу S из B типа $M(a)$. Если S' — полная часть подгруппы S, то элемент b индуцирует в S' почти регулярный автоморфизм порядка p. Дальше рассуждаем так же, как и в случае с элементом z. Лемма доказана.

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1.1.1. Пусть K — экстремальная подгруппа из G, инвариантная в B, и $A \subseteq K$, причем K не содержится ни в какой большей подгруппе с такими свойствами. Ввиду замечания 1, K — конечная группа.

Введем обозначения: $T = B/K$, $D = P/K$, $\overline{a} = aK$, R — подгруппа из D, порожденная всеми элементами порядка p, перестановочными с $\overline{a}$. Очевидно, $T = D\lambda \langle \overline{a}\rangle$. Пусть b — произвольный элемент порядка p из D. Рассмотрим подгруппу $L = \langle b, \overline{a}\rangle$. Так как T — бипримитивно конечная группа, то L — конечная группа и $L = Q\lambda \langle \overline{a} \rangle$ $(Q \subset D)$. Из лемм 1.1.7 и 1.1.8 вытекает, что R и Q — абелевы группы. Пусть S — наибольшая подгруппа из Q, инвариантная в L и $S \subset C_T(R)$.

Если $S \neq Q$, то рассмотрим $T_1 = N_T(S)$. Ввиду леммы 1.1.8, T_1 — периодическая группа. В фактор-группе $\overline{T_1} = T_1/S$ подгруппа $\overline{L} = L/S$ нильпотентна и $\overline{Q} = Q/S$ нормальна в $\overline{L}$. Следовательно, $\overline{Q} \cap z(\overline{L}) \neq 1$ [86]. Пусть $\overline{r} \neq 1$ некоторый элемент из $\overline{Q} \cap z(\overline{L})$ (r — прообраз $\overline{r}$ в T_1). Так как $C_{\overline{T_1}}(\overline{a}S)$ — конечная группа, то $\overline{r}, RS/S$ — также конечная группа. Отсюда следует конечность подгруппы $U = \langle r, R, S \rangle$ из T_1 и $U\lambda \langle \overline{a} \rangle$. Ввиду лемм 1.1.7 и 1.1.8, U — абелева группа, а это противоречит выбору подгруппы S. Следовательно, $S = Q$, а так как $b \in Q = S$, то $R \subset C_T(b)$. Отсюда и из произвольности выбора элемента b порядка p из D вытекает, что R принадлежит центру подгруппы X, порожденной всеми элементами порядка p из D. Очевидно, X нормальна в T. Но тогда $Z(X)$, как характеристическая подгруппа из X, также инвариантна в T. Так как $Z(X) \subset D$ и $Z(X) \neq K$, то по теореме о гомоморфизмах [24] $Z(X)$ будет соответствовать экстремальная подгруппа V из P, инвариантная в B, причем $K \subset V$ и $K \neq V$. Однако это противоречит выбору подгруппы K. Полученное противоречие доказывает теорему 1.1.1.

Лемма 1.1.9. *Если бипримитивно конечная p-группа некоммутативна, то она содержит конечную некоммутативную подгруппу.*

Доказательство. Пусть P — бипримитивно конечная p-группа. По условию леммы $Z(P) \neq P$. Пусть в фактор-группе $P/Z(P)$ существуют два элемента порядка p $\overline{a}$ и $\overline{b}$ $(a, b$ —- прообразы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в $P)$, порождающие некоммутативную подгруппу.

$$a^p = t \in Z(P), b^p = r \in Z(P).$$

Некоммутативная подгруппа $H = \langle a, b \rangle$ обладает конечным нормальным делителем $Q = \langle t, r \rangle$. Из определения бипримитивно конечной группы вытекает, что H/Q — конечная группа и, следовательно, H конечная подгруппа. Если же в $P/Z(P)$ все элементы порождают абелеву подгруппу, то через A обозначим подгруппу, которая ей соответствует в P. Подгруппа A локально конечна, $Z(P) \subset A$ и $A \triangleleft P$. Если A некоммутативна, то в ней, очевидно, существует конечная некоммутативная подгруппа.

Пусть A — абелева подгруппа. Так как $A \neq Z(P)$ и A нормальна в P, то в P существует такой элемент c, что $\langle A, c \rangle$ — некоммутативная локально конечная подгруппа, но тогда P обладает конечной некоммутативной подгруппой. Лемма доказана.

Чтобы доказать теорему 1.1.2 сформулируем ее еще раз:

Теорема 1.1.2 (В.П. Шунков). *Если бипримитивно конечная p-группа (а при $p = 2$ произвольная 2-группа) обладает конечной максимальной элементарной абелевой подгруппой, то группа экстремальна* [115].

Доказательство. Пусть G — группа, R — ее абелева подгруппа, удовлетворяющие условиям теоремы 1.1.2. Предположим, что G — не экстремальная группа.

Пусть a_1 — некоторый элемент из R. Если $G_1 = C_G(a_1)$ — экстремальная группа, то по теореме 1.1.1 G — экстремальная группа, что противоречит нашему предположению. Пусть G_1 — периодическая группа и a_2 — элемент из R, отличный от a_1. По тем же соображениям, что и для a_1, $G_2 = C_{G_1}(a_2)$ — периодическая группа. К подгруппе G_2 и к некоторому элементу $a_3 \in R$ $a_3 \neq a_1, a_2$ снова применяем теорему 1 и т.д. Так как подгруппа R конечна, то последовательность элементов $a_1, a_2, a_3, ...$ оборвется на конечном номере, т.е. мы установим, что $H_1 = C_G(R)$ — периодическая группа.

По лемме 1.1.9 в H_1 существует конечная некоммутативная подгруппа P_1. Из теоремы 1.1.1 вытекает, что $H_2 = C_{H_1}(P_1)$ — периодическая группа, а так как P_1 некоммутативна, то $P_1 \not\subset H_2$. По теореме 1.1.1 и лемме 1.1.9 в H_2 найдется конечная некоммутативная подгруппа P_2 и $H_3 = C_{H_2}(P_2)$ — периодическая группа. К подгруппе H_3 снова применяем теорему 1.1.1 и лемму 1.1.9. Очевидно, выбор таких подгрупп можно делать неограниченно. Но тогда в G существует бесконечная кально конечная подгруппа $U = \{R_1, P_1, P_2, ...\}$ бесконечного ранга, и в ней существует конечная максимальная элементарная абелева подгруппа R. Однако это невозможно ввиду результата Блэкбэрна [137] и свойств p-групп Черникова [24]. Полученное противоречие доказывает теорему 1.1.2.

§ 1.2. Абелевы подгруппы в бипримитивно конечных группах

Сформулируем следующий известный вопрос О.Ю. Шмидта: существуют ли бесконечные некоммутативные группы, все истинные подгруппы которых конечны? Для локально разрешимых групп отрицательное решение проблемы Шмидта вытекало уже из описания локально разрешимых групп с условием минимальности, полученного С.Н. Черниковым в 1939 г. (доказательство его теоремы опубликовано в [83, 84]). О.Ю. Шмидт решил отрицательно свою проблему для $p = 2$ [106]. Однако уже в случае локально конечных групп указанная проблема долгое время оставалась открытой и лишь в 1963 г. М.И. Каргаполов решил ее отрицательно [17].

В [17] доказано, что любая бесконечная локально конечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой. П.С. Новиковым и С.И. Адяном доказано [38], что эта теорема не имеет места даже в периодических группах ограниченного нечетного периода (отрицательное решение вопроса 1.24 [19, 20]: всякая ли бесконечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой?). Еще раньше С.Н. Черниковым вопрос 1.24 [20] был решен положительно для локально разрешимых групп [87], а в [89] — для локально конечных групп, обладающих нормальной системой с конечными факторами. Позднее в [73] метод доказательства из [17] был обобщен на группы, в которых любые два элемента порождают конечную подгруппу, и для таких групп вопрос 1.24 [20] решен положительно.

В этом параграфе вопрос 1.24 [20] решается положительно В.П. Шунковым для бипримитивно конечных групп (см. теорему 1.2.2). В частности, проблема Шмидта для таких групп решается отрицательно. Теорема 1.2.1 используется при доказательстве теоремы 1.2.2.

Напомним, что периодическая группа G называется бипримитивно конечной относительно данного простого числа p, если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два элемента порядка p порождают конечную подгруппу. Если G бипримитивно конечна относительно любого простого делителя порядков ее элементов, то G называется просто бипримитивно конечной.

Очевидно, из бипримитивной конечности группы относительно p вытекает, что и любая ее подгруппа обладает таким же свойством. Что касается инвариантности свойства бипримитивной конечности при переходе к фактор-группе, то этот вопрос остается открытым. Но все же в одном случае инвариантность справедлива:

Предложение 1.2.1. *Фактор-группа p-бипримитивно конечной группы по черниковской подгруппе p-бипримитивно конечна.*

Доказательство. Пусть G — бипримитивно конечная группа относительно p, N — ее черниковская нормальная подгруппа. Если N — конечная группа, то предложение вытекает непосредственно из приведенного выше определения.

Пусть N — бесконечная группа. Так как N является конечным расширением черниковской абелевой группы, то, очевидно, предложение достаточно доказать для случая, когда N — абелева p-группа.

Пусть a, b — p-элементы из G и R — характеристическая подгруппа из N ограниченного периода; a^p, $b^p \in R$. Так как N экстремальна, то R — конечная группа. Фактор-группа G/R, как отмечалось выше, бипримитивно конечна и, следовательно, подгруппа $\langle aR, bR\rangle$ конечна. Но $R < N$, а поэтому подгруппа $\langle aN, bN\rangle$ также конечна. Предложение 1.2.1 доказано.

Понятно, что любая локально конечная группа бипримитивно конечна. Произвольная 2-группа также бипримитивно конечна, так как в ней две инволюции порождают конечную подгруппу. Бипримитивно конечными группами будут и группы, в которых любые два элемента порождают конечную подгруппу. Такие группы рассматривались в работе [73].

Как известно, группой Фробениуса называется конечная группа G, обладающая собственной подгруппой H, совпадающей со своим нормализатором и взаимно простой со своими сопряженными. Нам будут необходимы некоторые факты о конечных группах Фробениуса [7]:

— все элементы из G, не принадлежащие H и ее сопряженным, вместе с единицей составляют нормальный делитель Q и $G = Q\lambda H$ (теорема Фробениуса). H называется неинвариантным множителем, а Q — инвариантным множителем. Каждый неединичный элемент из H индуцирует в Q регулярный автоморфизм и $(|Q|, |G : Q|) = 1$;

— если $|H|$ нечетен, то все элементы простых порядков из H порождают абелеву группу;

— силовские p-подгруппы $(p \neq 2)$ из H циклические.

Лемма 1.2.1. *Пусть конечная группа G нечетного порядка обладает системой образующих $r_{-1}, r_0, r_1, \ldots, r_n (n \geq 1)$, такой, что выполняются условия:*

1) $\langle r_{-1}, r_0\rangle$ — p-группа;

2) $r_{k+1}^{-1} r_k r_{k+1} \in \langle r_{k-1}\rangle$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$;

3) для r_n существует такой номер $s \leq n$, что $r_s^{-1} r_n r_s \in \langle r_{n-1}\rangle$. Тогда G — циклическая группа.

Доказательство. Лемму будем доказывать индукцией по порядку группы G, т. е. предполагая, что для всех групп, удовлетворяющих условиям леммы и имеющих порядок меньший, чем $|G|$, утверждение леммы верно. По теореме Файта—Томпсона (теорема 37) G разрешима, а поэтому она обладает нормальной q-подгруппой $Q \neq 1$. Фактор-группа G/Q, очевидно, удовлетворяет условиям леммы и $|G/Q| < |G|$. По индуктивному предположению G/Q — циклическая p-подгруппа.

Пусть $q = p$. В этом случае G — конечная p-группа. Но тогда из условий 1–3 вытекает, что $G/\Phi(G)$ — циклическая группа и по теореме Бернсайда о базисе [131] G — также циклическая группа.

Пусть теперь $q \neq p$. Очевидно, $|\langle r_i \rangle| \leq |\langle r_{-1} \rangle|(i = 0, 1, \dots, n)$ и G можно представить в виде $G = Q\lambda \langle r_{-1} \rangle$. Отсюда и из условий 1—3 вытекает, что $Q = 1$. Лемма доказана.

Лемма 1.2.2. *Пусть G — группа, $\mathfrak{M}$ — бесконечное множество бесконечных подгрупп, пересечение которых отлично от единицы. Если все неединичные элементы из пересечения подгрупп любого бесконечного подмножества $\mathfrak{M}$ почти регулярны в G, то $\mathfrak{M}$ обладает бесконечным подмножеством $\mathfrak{A}$, таким, что любая подгруппа из $\mathfrak{A}$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $T = \cap_{H \in \mathfrak{A}} H$, причем T совпадает с пересечением подгрупп любого бесконечного подмножества из $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $T = \cap_{H \in \mathfrak{M}} H$. Множество $\mathfrak{M}$ может обладать бесконечным подмножеством $\mathfrak{M}_1$, таким, что $T_1 = \cap_{H \in \mathfrak{M}_1} H \neq T_1$. Очевидно, $T < T_1$. Относительно $\mathfrak{M}_1$ рассуждаем аналогично. Рассуждая таким образом, построим строго возрастающую цепочку подгрупп $T = T_0 < T_1 < \dots < T_n < \dots$ Эта цепочка должна оборваться на конечном номере. В противном случае по теореме Каргаполова [17] объединение таких подгрупп (а оно локально конечно) обладало бы неединичным элементом с бесконечным централизатором, что противоречило бы условиям леммы. Следовательно, для какого-то номера n в множестве $\mathfrak{M}_n$ пересечение подгрупп любого бесконечного подмножества совпадает с T_n. Будем предполагать, что уже $\mathfrak{M}$ обладает таким свойством и $T \notin \mathfrak{M}$.

Если бы $\mathfrak{M}$ обладало бесконечным подмножеством $\mathfrak{L}$, таким, что $T \neq N_H(T)$ $(H \in \mathfrak{L})$, то из конечности $N_G(T)$ ($N_G(T)$ не может быть бесконечным, так как $T \neq 1$ и все неединичные элементы из T почти регулярны в G) вытекало бы существование в пересечении подгрупп некоторого бесконечного подмножества из $\mathfrak{L}$ элемента из $N_G(T)$, не принадлежащего T. Однако это противоречило бы отмеченному выше свойству множества $\mathfrak{M}$. Следовательно, число подгрупп из $\mathfrak{M}$, в которых T отлична от своего нормализатора, конечно. Выбросив их из $\mathfrak{M}$, мы получим бесконечное множество $\mathfrak{A}_1$, в каждой подгруппе которого T совпадает со своим нормализатором. Теперь предположим, что $\mathfrak{A}_1$ обладает подмножеством $\mathfrak{L}_1$, таким, что для любой подгруппы H из $\mathfrak{L}_1$ найдется в H подгруппа $T_H \neq T$, сопряженная с T в H, и $D_H = T \cap T_H \neq 1$. Так как T конечна и содержится в любой подгруппе из $\mathfrak{L}_1$, то, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $D = D_H = D_{H'}$ для любой пары подгрупп H, H' из $\mathfrak{L}_1$.

Пусть P — силовская p-подгруппа из D для $p \in \pi(D)$. Если P не является силовской в T, то она не будет силовской в T_H ни для какой подгруппы H из $\mathfrak{L}_1$ (теорема Силова [18]). Но тогда ввиду нормализаторного условия в конечных p-группах [18] $N_H(P) \not\leq T$, а так как $N_G(P)$ не может быть бесконечным ввиду почти регулярности в G всех неединичных элементов из P, то из $N_H(P) \not\leq T$ вытекало бы существование в пересечении подгрупп некоторого бесконечного подмножества из $\mathfrak{L}_1$ элемента из $N_G(P)$, не принадлежащего T, а это, как уже было показано выше, невозможно. Выбросив конечное число нежелательных подгрупп из $\mathfrak{L}_1$, получим множество $\mathfrak{L}_2$, в каждой подгруппе из которого силовские p-подгруппы из D являются силовскими в T. Однако и в последнем случае $N_H(P) \not\leq T$ $(H \in \mathfrak{L}_2)$. Действительно, в H существует такой элемент h, что $T_H = h^{-1}Th$. Так как P — силовская p-подгруппа в T и T_H и $P \leq T \cap T_H$, а в T силовские p-подгруппы сопряжены, то для некоторого элемента r из T получим $h^{-1}r^{-1}Prh = P$, т. е. $s = rh \in N_H(P)$. Но $h \notin T$ и, значит, $s \notin T$. Поскольку H — произвольная подгруппа из $\mathfrak{L}_2$, то мы пришли к уже рассмотренной выше ситуации (когда P не была силовской в T). Полученное противоречие означает, что в $\mathfrak{A}_1$ имеется лишь конечное число подгрупп, в которых T не является неинвариантным множителем группы Фробениуса. Выбросив их из $\mathfrak{A}_1$, получим искомое множество $\mathfrak{A}$. Лемма доказана.

Лемма 1.2.3. *Пусть G — бесконечная периодическая группа нечетного порядка, в которой любой неединичный элемент почти регулярен, i — некоторый элемент простого порядка p из G. Если в G любой элемент порядка p и элемент i порождают конечную подгруппу, то силовская p-подгруппа из G, содержащая i, — циклическая подгруппа.*

Доказательство. Так как $C_G\langle i\rangle$ конечен, а G — бесконечная группа, то подгруппы типа $\langle i, g^{-1}ig\rangle$, $g \in G$, конечны (условие леммы) и их множество $\mathfrak{M}$ бесконечно. По лемме 1.2.2 $\mathfrak{M}$ обладает бесконечным подмножеством $\mathfrak{A}$, состоящим из групп Фробениуса с неинвариантными множителями, содержащими i. Обозначим через $\mathfrak{N}_i$ множество различных элементов из инвариантных множителей подгрупп из G, являющихся группами Фробениуса с неинвариантными множителями, содержащими i. Очевидно, $\mathfrak{N}_i$ бесконечно.

Предположим теперь, что i содержится в нециклической конечной p-подгруппе R. Так как $p \neq 2$, то R можно считать группой типа $R = \langle i \rangle \times \langle b \rangle$, $b^p = 1$ [131].

Подгруппы $\left\langle i, s^{-1}bs \right\rangle$ $(s \in \mathfrak{N}_i)$ конечны (условия леммы) и их множество бесконечно.

Ввиду леммы 1.2.2 $\mathfrak{N}_i$ обладает бесконечным подмножеством $\mathfrak{L}$, таким, что $H_s = \left\langle i, s^{-1}bs \right\rangle$ $(s \in \mathfrak{L})$ — группа Фробениуса и $\langle i \rangle$ — неинвариантный множитель: $H_s = A_s \lambda \langle i \rangle$ $(s \in \mathfrak{L})$ (свойства группы Фробениуса). Так как $s^{-1}bs \in H_s$ и $\langle i \rangle, \left\langle s^{-1}bs \right\rangle$ сопряжены в H_s (теорема Силова [18]), то в A_s найдется такой элемент c_s, что $c_s^{-1}s^{-1}bsc_s \in \langle i \rangle$. Обозначим $m_s = sc_s$. Очевидно, число различных элементов вида $m_s = sc_s$ $(s \in \mathfrak{L})$ конечно (в противном случае $C_G(b)$ был бы бесконечным). Отсюда вытекает существование в G некоторого элемента r_1, а в — $\mathfrak{L}$, бесконечного подмножества $\mathfrak{L}_1$, таких, что $r_1 = sc_s$ $(s \in \mathfrak{L}_1)$. Равенство $s = r_1c_s^{-1}$ умножим справа на i: $si = r_1c_s^{-1}i$. Если бы $r_1 = 1$, то $b \in \langle i \rangle$, а это невозможно. Следовательно, $r_1 \neq 1$. Далее, так как s и c_s — элементы, взятые из инвариантных множителей конечных групп Фробениуса, в которых i содержится в неинвариантных множителях, то $|si| = |c_s^{-1}i| = p$ (свойства группы Фробениуса), причём подгруппы $\langle i \rangle$ и $\langle si \rangle$ сопряжены в $\langle i, s \rangle$ (теорема Силова [18]). Но тогда подгруппы $B_s = \left\langle si, c_s^{-1}i \right\rangle = \langle si, r_1 \rangle$ $(s \in \mathfrak{L}_1)$ конечны (условие леммы) и их множество бесконечно. По лемме 1.2.2 $\mathfrak{L}_1$ обладает бесконечным подмножеством $\mathfrak{C}$, таким, что B_s $(s \in \mathfrak{C})$ — группы Фробениуса и r_1 содержится в неинвариантном множителе подгруппы B_s $(s \in \mathfrak{C})$. Пусть Q_s — инвариантный множитель подгруппы B_s $(s \in \mathfrak{C})$. Так как $B_s = \left\langle si, c_s^{-1}i \right\rangle$, $Q_s \lhd B_s$, $(|Q_s|, |B_s : Q_s|) = 1$ и p делит $|B_s : Q_s|$, то $si \notin Q_s$ и $B_s = Q_s \lambda \langle si \rangle$ $(s \in \mathfrak{C})$ (см. свойства группы Фробениуса). Но тогда $|r_1| = p$ и $\langle r_1 \rangle, \langle si \rangle$ сопряжены в B_s (теорема Силова [18]). Отсюда и из сопряженности $\langle i \rangle, \langle si \rangle$ в G вытекает сопряженность $\langle i \rangle, \langle r_1 \rangle$ в G.

Теперь рассмотрим пару элементов b, r_1. Пусть $\mathfrak{N}_b$ — множество элементов из G, имеющее тот же смысл относительно b, что и $\mathfrak{N}_i$ относительно i ($\langle i \rangle, \langle b \rangle$ сопряжены в G). Как и в предыдущем случае, докажем существование в G элемента r_2 порядка p, такого, что $r_2^{-1}r_1r_2 \in \langle b \rangle$. Относительно пары r_1, r_2 рассуждаем аналогично. Рассуждая таким образом, построим в G последовательность элементов порядка p

$$i = r_{-1}, b = r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n, r_{n+1}, \ldots,$$

которая не обрывается на конечном номере и удовлетворяет условию:

$$r_{n+1}^{-1} r_n r_{n+1} \in \langle r_{n-1} \rangle \quad (n = 0, 1 \ldots).$$

Подгруппа $M = \langle r_{-1}, r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots \rangle$ локально конечна, так как она является объединением конечных подгрупп: $\langle r_{-1} \rangle < \langle r_0, r_1 \rangle \leq \cdots \leq \langle r_n, r_{n+1} \rangle \leq \ldots$. Но тогда если бы M была бесконечной, то она обладала бы бесконечной абелевой подгруппой [17], что невозможно. Следовательно, M конечна. С помощью леммы 1.2.1 заключаем, что M — циклическая группа, вопреки предположению (r_{-1} и r_0 не содержатся в циклической группе). Полученное противоречие доказывает, что силовская p-подгруппа из G, содержащая i, — циклическая группа. Лемма доказана.

Теорема 1.2.1 (В.П. Шунков). *Пусть G — бесконечная периодическая группа, i — ее некоторый элемент простого порядка p. Если в G любой элемент порядка p и элемент i порождают конечную подгруппу, то G обладает бесконечной подгруппой с нетривиальным центром* [121].

Доказательство. Если G содержит инволюцию, то по теореме 1.1.1 она обладает искомой подгруппой. Предположим, что G — группа нечетного порядка и в ней любой неединичный элемент почти регулярен. В этом случае G удовлетворяет условиям леммы 1.2.3. Пусть $\mathfrak{N}_i$ — множество, определенное в доказательстве леммы 1.2.3. Возьмем в $\mathfrak{N}_i$ некоторый элемент $a \neq 1$ и обозначим $k = aia^{-1}$.

Подгруппы типа $\left\langle i, c^{-1}kc \right\rangle \quad (c \in \mathfrak{N}_i)$ конечны (условия теоремы), и их множество бесконечно. По лемме 1.2.2 в $\mathfrak{N}_i$ существует бесконечное подмножество $\mathfrak{A}$, такое, что $\left\langle i, c^{-1}kc \right\rangle \quad (c \in \mathfrak{A})$ — группа Фробениуса. По тем же соображениям, что и в доказательстве леммы 1.2.3, существует в $\mathfrak{N}_i$ элемент g_c, такой, что

$$g_c^{-1} c^{-1} k c g_c \in \langle i \rangle \quad (c \in \mathfrak{A}). \tag{1}$$

С другой стороны, $a^{-1}ka \in \langle i \rangle$. Отсюда и из (1) получим

$$c g_c a^{-1} = r_c \in N_G(\langle k \rangle) \quad (c \in \mathfrak{A}).$$

Так как $N_G(\langle k\rangle)$ конечен и $\mathfrak{A}$ бесконечно, то существуют в $\mathfrak{A}$ бесконечное подмножество $\mathfrak{L}$, а в $N_G(\langle k\rangle)$ — элемент r_a, такие, что $cg_ca^{-1} = r_a$ $(c \in \mathfrak{L})$ или

$$c = r_a a g_c^{-1}. \tag{2}$$

Из $r_a \in N_G(\langle k\rangle)$ и $a^{-1}ka = i$ следует, что $a^{-1}r_a a = h_a \in N_G(\langle i\rangle)$. Подставив $r_a = ah_a a^{-1}$ в (2), получим $c = ah_a g_c^{-1}$. Умножим последнее равенство справа на i: $ci = ah_a g_c^{-1} i$. Ввиду $c, g_c \in \mathfrak{N}_i$ и определения $\mathfrak{N}_i$, подгруппы $\langle c, i\rangle$ и $\langle g_c, i\rangle$ — группы Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle i\rangle$ (свойства группы Фробениуса). Но тогда $|(ci)| = |(g_c^{-1}i)| = p$, причем (ci) и $\langle i\rangle$ сопряжены в $\langle c, i\rangle$ (теорема Силова [18]). Отсюда и из условия теоремы вытекает, что подгруппы $\left\langle ci, g_c^{-1}i\right\rangle = \langle ci, ah_a\rangle$ $(c \in \mathfrak{L})$ конечны. По лемме 1.2.2 $\mathfrak{L}$ обладает бесконечным подмножеством $\mathfrak{L}_1$, таким, что $H_c = \langle ci, ah_a\rangle$ $(c \in \mathfrak{L}_1)$ — группы Фробениуса с неинвариантными множителями, содержащими элемент ah_a. Так как H_c порождается двумя элементами порядка p, то из свойства группы Фробениуса вытекает, что $|ah_a| = p$. Далее, ввиду $a \in \mathfrak{N}_i$ и определения $\mathfrak{N}_i$ подгруппа $\langle i, a\rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle i\rangle$, а поэтому $|\left\langle ia^{-1}\right\rangle| = p$. По теореме Силова [18] $\langle i\rangle$ и $\left\langle ia^{-1}\right\rangle$ сопряжены в $\langle i, a\rangle$ и по условию теоремы подгруппа $\left\langle ia^{-1}, ah_a\right\rangle$ конечна, причем она содержит элемент $ih_a \in N_G(\langle i\rangle)$.

1. $ih_a \in \langle i\rangle$. Покажем, что этот случай невозможен.

Предположим, что $h_a = i^n$ (n — целое число) и рассмотрим

$$c = ai^n g_c^{-1} \quad (c \in \mathfrak{L}). \tag{3}$$

Пусть $i^n \neq 1$. Умножим (3) справа на i^n: $ci^n = ai^n g_c^{-1} i^n$ или $ci^n = ai^{2n}\bar{g}_c^{-1}$ $\quad(\bar{g}_c = i^{-n} g_c i^n \in \mathfrak{N}_i)$. Так как G не содержит инволюций, то $i^{2n} \neq 1$. В этом случае, как доказано выше, $|\langle ci^n\rangle| = |\left\langle i^{2n} g_c^{-1}\right\rangle| = p$. Подгруппы $\langle ci^n\rangle$ и $\langle i^n\rangle$ сопряжены в $\langle c, i\rangle$ (теорема Силова [18]), и по условию теоремы подгруппы $H_c = \left\langle ci^n, i^{2n}\bar{g}_c^{-1}\right\rangle = \langle ci^n, a\rangle$ $(c \in \mathfrak{L})$ конечны, и их множество бесконечно. Но тогда из порождаемости H_c $(c \in \mathfrak{L})$ двумя элементами порядка p, леммы 1.2.2 и свойств группы Фробениуса вытекает, что $a^p = 1$. Это противоречит тому, что $\langle i\rangle$ — неинвариантный множитель порядка p в группе Фробениуса $\langle a, i\rangle$, а a принадлежит ее инвариантному множителю, порядок которого не делится на p (a был выбран в $\mathfrak{N}_i$). Полученное противоречие означает, что $i^n = 1$. В этом случае $c = ag_c^{-1}$ $(c \in \mathfrak{L})$ умножим справа на $i : ci = ag_c^{-1}i$ и, рассуждая аналогично предыдущему, снова докажем $a^p = 1$, а это, как отмечалось выше, невозможно. Следовательно, для любого $a \neq 1$ из $\mathfrak{N}_i$

2. $h_a \notin \langle i \rangle$. Как уже доказано, подгруппа $\left\langle ia^{-1}, ah_a \right\rangle$ конечна, а так как $\left\langle ia^{-1}, ah_a \right\rangle = \left\langle ia^{-1}, ih_a \right\rangle$, $ih_a \in N_G(\langle i \rangle)$ и $N_G(\langle i \rangle)$ конечен, то, очевидно, множество подгрупп типа $\left\langle ia^{-1}, ih_a \right\rangle \quad (a \in \mathfrak{N}_i)$ бесконечно. Но тогда существуют в $\mathfrak{N}_i$ бесконечное подмножество $\mathfrak{C}$, а в $N_G(\langle i \rangle)$ элемент h такие, что подгруппы $\left\langle ia^{-1}, ih \right\rangle \quad (a \in \mathfrak{C})$ конечны и их множество бесконечно. С помощью рассуждений, которые уже неоднократно проводились выше (например, когда доказывали $(ah_a)^p = 1$), докажем $(ih)^p = 1$, а так как силовские p-подгруппы из $N_G(\langle i \rangle)$ циклические (лемма 1.2.3 и теорема Силова [18]), то $ih \in \langle i \rangle$ и $h \in \langle i \rangle$ вопреки предположению $h \notin \langle i \rangle$.

Полученное противоречие означает, что G обладает бесконечной подгруппой с нетривиальным центром. Теорема доказана.

Теорема 1.2.2 (В.П. Шунков). *Бесконечная бипримитивно конечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой* [121].

Доказательство. Пусть G — бесконечная бипримитивно конечная группа. По любому $p \in \pi(G) \quad G$ удовлетворяет условиям теоремы 1.2.1. Согласно этой теореме G обладает неединичным элементом d_1 с бесконечным $G_1 = C_G(d_1)$. Фактор-группа $\bar{G}_1 = G_1/(d_1)$ — бесконечная бипримитивно конечная группа и по теореме 1.2.1 $\bar{G}_1$ обладает неединичным элементом $\bar{d}_2$ с бесконечным $C_{\bar{G}_1}(\bar{d}_2)$ (d_2 — прообраз $\bar{d}_2$ в G_1). Обозначим $D_1 = (d_1), D_2 = (d_1, d_2), G_2 = C_{G_1}(D_2)$. Очевидно, $\bar{G}_2 = G_2/D_2$ — бесконечная бипримитивно конечная группа и по тем же соображениям, что и для $\bar{G}_1$, она обладает неединичным элементом $\bar{d}_3$ с конечным $C_{\bar{G}_2}(\bar{d}_3)$. Рассуждая таким образом, построим строго возрастающую цепочку абелевых подгрупп

$$D_1 < D_2 < \cdots < D_n < \ldots,$$

которая не обрывается на конечном номере. Объединение этой цепочки есть искомая подгруппа. Теорема доказана.

Из теоремы 1.2.2 вытекает отрицательное решение проблемы Шмидта для бипримитивно конечных групп.

Так как в произвольной периодической группе четного порядка любые две инволюции порождают конечную группу, то с помощью теоремы 1.2.1 получаем следующий результат:

Если проблема Шмидта решается положительно, то всякая бесконечная некоммутативная группа G, все собственные подгруппы которой конечны, обладает следующими свойствами:

— в группе автоморфизмов группы G нет элементов порядка 2;

— для любого $p \in \pi(G/Z(G))$ группа $G/Z(G)$ порождается двумя элементами порядка p, один из которых можно считать произвольным, но фиксированным элементом порядка p.

§ 1.3. Сопряженность силовских подгрупп в q-бипримитивно конечных группах с условием минимальности для q-подгрупп

В отличие от случая конечных групп силовские q-подгруппы в бесконечных группах не всегда сопряжены. Как показывают многочисленные примеры, для бесконечных (локально конечных) групп более типичной является ситуация, когда силовские q-подгруппы не сопряжены. Тем не менее для некоторых конкретных классов групп удается доказать сопряженность силовских q-подгрупп или, по крайней мере, найти (необходимые и) достаточные условия такой сопряженности [24, 143]. Как правило, в этих случаях на группы накладываются некоторые условия конечности, — например, условие конечности некоторой силовскойq-подгруппы или конечности индекса ее нормализатора в группе. Сказанное прежде всего относится к локально конечным группам, где наряду с отмеченными условиями конечности на q-подгруппы накладываются другие ограничения, заведомо обеспечивающие черниковость силовских q-подгрупп (например, условие минимальности для абелевых q-подгрупп). Так, если иметь в виду теорему Черникова [87], то в [118] доказана сопряженность силовскихq-подгрупп в произвольной локально конечной группе, удовлетворяющей условию минимальности для абелевых q-подгрупп по всем q.

Таким образом, если для локально конечных групп мы имеем более или менее удовлетворительную силовскую теорию (в указанном, выше смысле), то этого уже нельзя сказать о периодических (конечнопорожденных) группах. В этом параграфе строится один фрагмент силовской теории в периодических группах (см. теоремы 1.3.1–1.3.4). В частности, из полученных теорем вытекают некоторые известные факты теории локально конечных групп [143]; они указаны в качестве следствий теорем 1.3.1, 1.3.3, 1.3.4. Теоремы 1.3.1–1.3.5 доказываются при дополнительном ограничении q-бипримитивной конечности группы. Это ограничение оказалось столь удобным, что позволило сформулировать результаты (за исключением теоремы 1.3.5) без предположения о периодичности группы. Но, как выяснилось, оно не только удобно, но и необходимо по существу. Указана периодическая группа, для которой теоремы 1.3.2, 1.3.3 неверны (здесь также решающую роль играет группа Новикова-Адяна [37, 39]). Там же показано, что в формулировках теорем 1.3.1, 1.3.4 нельзя отказаться от условия q-бипримитивной конечности группы.

Д.И.Зайцевым [13] было введено следующее слабое условие минимальности: в группе обрывается на конечном номере любая убывающая цепочка подгрупп $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ с бесконечными индексами $|A_n : A_{n+1}|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ Там же для локально конечных групп доказана эквивалентность ослабленного условия минимальности с обычным условием минимальности. Оказывается, что это верно и для периодических бипримитивно конечных групп (теорема 1.3.5).

Вопрос о том, будет ли теорема 1.3.5 справедлива без предположения бипримитивной конечности, остается открытым.

Через (min-inf) min будем обозначать класс всех групп со (слабым) условием минимальности для подгрупп и само это условие. Если B — некоторая группа, обладающая полной частью, то эту полную часть будем обозначить $\tilde{B}$. Напомним, что полной частью группы B называется нормальная полная абелева подгруппа B такая, что $B/\tilde{B}$ не обладает бесконечными полными абелевыми подгруппами. Далее, напомним, что черниковской группой называется почти абелева группа с условием минимальности [35](именно в [35] впервые был введен этот термин).

В этом параграфе будут доказаны теоремы о сопряженности силовских q-подгрупп в q-бипримитивно конечных группах с условием min-inf и равносильности двух условий минимальности в периодических бипримитивно конечных группах

Теорема 1.3.1 (А.Н. Остыловский, В.П. Шунков). *Если в q-бипримитивно конечной группе G некоторая силовская q-подгруппа конечна, то все силовские q-подгруппы в G конечны и они сопряжены* [44].

Доказательство. Пусть Q — некоторая конечная силовская q-подгруппа группы G. Обозначим через $\mathfrak{M}_Q$ — класс всех конечных неединичных q-подгрупп из G таких, что $S^q \not\subset Q$ $(S \in \mathfrak{M}_Q)$ для любого элемента. Предположим, что $\mathfrak{M}_Q$ пустой класс. Тогда любая конечная q-подгруппа из содержится в некоторой подгруппе, сопряженной с Q. С другой стороны, если бы G обладала бесконечной силовской q-подгруппой, то последняя содержала бы бесконечную абелеву q-подгруппу (теорема 1.3.6). Но бесконечная абелева q-группа имеет подгруппы сколь угодно больших порядков, и мы приходим к противоречию с предположением о пустоте класса $\mathfrak{M}_Q$. Итак, для доказательства теоремы достаточно показать, что $\mathfrak{M}_Q = \emptyset$.

Предположим, что $\mathfrak{M}_Q \neq \emptyset$. Ввиду конечности Q можно выбрать в $\mathfrak{M}_Q$ подгруппу B имеющую с Q пересечение K наибольшего порядка. Из определения $\mathfrak{M}_Q$ вытекает, что $K \neq B$. Так как Q — силовская q-подгруппа группы G, а B — q-подгруппа группы G, то $K \neq Q$. В конечных q-группах выполняется нормализаторное условие [18], поэтому существуют подгруппы $B_1 \subset B$ и $Q_1 \subset Q$ такие, что $K \lhd B_1$, $K \lhd Q_1$ и $|Q_1 : K| = |B_1 : K| = q$. Следовательно, фактор-группа $< B_1, Q_1 > /K$ порождается двумя элементами порядка q. Тогда ввиду q-бипримитивной конечности G, ее подгруппа $M =< B_1, Q_1 >$ конечна. Пусть P — силовская q-подгруппа группы M, содержащая Q_1. Если $P \in \mathfrak{M}_Q$, то $Q_1 \subset Q \cap P$ и $|P \cap Q| > |K|$, что противоречит выбору $B \cap \mathfrak{M}_Q$. Следовательно, $P \notin \mathfrak{M}_Q$, т. е. в G существует элемент h такой, что $P \subset Q^h$. По теореме Силова [18] $B_1 \subset P^x$ (x — некоторый элемент из M). Так как $P^x \subset Q^{hx}$ и $B_1 \subset B$, то $B_1 \subset B \cap Qhx$. $B_1^{x^{-1}h^{-1}} B^{x^{-1}h^{-1}} \cap Q$. Но $|B_1^{x^{-1}h^{-1}}| = |B_1| > |K|$ и $B^{x^{-1}h^{-1}} \in \mathfrak{M}_Q$, что противоречит выбору B в $\mathfrak{M}_Q$. Следовательно, $\mathfrak{M}_Q = \emptyset$ и теорема доказана.

Следствие 1.3.1. *Если в периодической группе G некоторая силовская 2-подгруппа конечна, то все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены.*

Действительно, группа G 2-бипримитивно конечна, так как в периодической группе любые две инволюции порождают конечную подгруппу.

Следствие 1.3.2. *В q-бипримитивно конечной группе с условием min-inf для абелевых q-подгрупп силовские q-подгруппы P и Q сопряжены тогда и только тогда, когда сопряжены их полные части $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ соответственно.*

Доказательство. Если $\tilde{P^x} = \tilde{Q}$ (для некоторого $x \in G$), то $P^x/\tilde{Q}$ и $Q/\tilde{Q}$ — силовские конечные q-подгруппы группы $N_G(\tilde{Q})/\tilde{Q}$. Эта группа q-бипримитивно конечна (теорема 1.3.7). Тогда, по теореме 1.3.1, $P^x/\tilde{Q}$ и $Q/\tilde{Q}$ сопряжены в $N_G(\tilde{Q})/\tilde{Q}$. Следовательно, P и Q сопряжены в G. Обратное очевидно.

Следствие 1.3.3 *Пусть G — q-бипримитивно конечная группа* *с условием min-inf для абелевых q-подгрупп, P и Q — силовские q-подгруппы группы G, $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ — их полные части соответственно. Если $\tilde{P} \subset \tilde{Q}$, то $\tilde{P} = \tilde{Q}$, а P и Q сопряжены.*

Доказательство. Фактор $P/\tilde{P}$ является конечной силовской q-подгруппой группы $N_G(\tilde{P})/\tilde{P}$. Тогда, по теореме 1.3.1, в $N_G(\tilde{P})/\tilde{P}$ все силовские q-подгруппы конечны и, по условию, $\tilde{Q}/\tilde{P} \subset N_G(\tilde{P})/\tilde{P}$; Но тогда $|\tilde{Q} : \tilde{P}|$ конечен и $Q = P$ (теорема 1.3.8). По следствию 1.3.2 Q и P сопряжены в G.

Следствие 1.3.4. *Если в локально конечной группе G некоторая силовская q-подгруппа конечна, то все силовские q-подгруппы в Q конечны и сопряжены.*

Теорема 1.3.2 (А.Н. Остыловский, В.П. Шунков). *Пусть G — q-бипримитивно конечная группа с условием min-inf для абелевых q-подгрупп. Если в централизаторе любого нецентрального q-элемента силовские q-подгруппы сопряжены, то и в G силовские q-подгруппы сопряжены* [44].

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, т. е. G удовлетворяет условию α) некоторые силовские q-подгруппы P и Q группы G не сопряжены. Пусть Q^* — максимальная инвариантная q-подгруппа группы G. Она — черниковская группа (теорема 1.3.5), а поэтому $\overline{G} = G/Q^*$, q-бипримитивно конечна (теорема 1.3.7). Если все q-элементы группы G лежат в Q^*, то силовская q-подгруппа группы G единственна, а поэтому утверждение теоремы справедливо. Пусть x — нецентральный q-элемент из G и $x = xQ^*$ для некоторого $x \in G$. Обозначим через B полный прообраз $C_G(x)$ в G. Докажем сопряженность силовских q-подгрупп группы B.

Введем обозначения: $E = \langle Q^*, x\rangle$, $H = C_B(L)L$ и $R = Q^*C_G(x)$. По условию теоремы силовские q-подгруппы централизатора $C_G(x)$ сопряжены в $C_G(x)$. Имея это ввиду, а также Q^*R и $R = Q^*C_G(x)$, легко показать сопряженность силовских q-подгрупп группы R.

Пусть P_B — произвольная силовская q-подгруппа группы B. Так как P_BH/H — q-подгруппа группы $B/H \subset OutL$, а L — черниковская группа, то все периодические подгруппы группы B/H конечны (теорема 1.3.1 или 1.3.2). Отсюда и из теоремы об изоморфизмах [18] вытекает $|P_BH/H| = |PB/P_B \cap H| < \infty$. Тогда $\tilde{P_B} \subset H \subset R \subset B$ и силовские q-подгруппы группы B сопряжены в B (следствие 1.3.3 и сопряженность силовских q-подгрупп группы R). Из определения B вытекает теперь сопряженность силовских q-подгрупп централизатора $C_G(x)$. $\overline{G}$

очевидно, удовлетворяет условию min-inf для абелевых q-подгрупп. Таким образом, в $\overline{G}$ выполнено условие α) (теорема 1.3.11) и все условия теоремы. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $G = \overline{G}$ и, следовательно, G удовлетворяет условию

β) пересечение любой q-подгруппы группы G с центром $Z(G)$ тривиально.

По теореме 1.3.1 P и Q бесконечны. Выберем в $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ соответственно элементы a и B порядка q. Подгруппа $L =< a, b >$ группы G конечна (см. определение q-бипримитивной конечности группы). Обозначим через U силовскую q-подгруппу группы L, содержащую элемент a. Так как в конечной группе силовские q-подгруппы сопряжены [18] то, не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $B \in U$. Пусть S — силовская q-подгруппа группы G, содержащая U. По теореме 1.3.1 S бесконечна. Докажем, что P и S сопряжены в G.

1) $C_G(a) \cap S = K$ бесконечно. По условию теоремы и условию β) силовские q-подгруппы централизатора $C_G(a)$ сопряжены в $C_G(a)$. Поэтому существует $h \in C_G(a)$ такой, что P и K^h лежат в одной силовской q-подгруппе T централизатора $C_G(a)$. Так как $P, K^h \subset T$, то $\left\langle P, K^h \right\rangle$ полная абелева группа. Тогда $\left\langle P, K^h \right\rangle / P$ — полная абелева q-подгруппа группы $N_G(P)/P$. Из теоремы 1.3.1 вытекает, что $K^h \subset P$ с другой стороны $K^h \subset S^h$. Таким образом, S^h и P лежат в централизаторе $C_G(x)$ некоторого нецентрального q-элемента $x \in K^h$. По условию теоремы существует $t \in C_G(x)$ такой, что P и S^{ht} лежат в одной силовской в $C_G(x)$ q-подгруппе N. Так как $P = N = S^{ht}$ (следствие 1.3.3), то P и S сопряжены в G (следствие 1.3.2).

2) $C_G(a) \cap S = W$ конечно. Так как S является ZA-группой, то $S \cap Z(S) \neq 1$ (см. [90]). По построению, $a \in S$. Следовательно, $W \neq 1$. Выберем в $C_G(a)$ силовскую q-подгруппу F, содержащую P. Можно считать, что $W \subset F$ (сопряженность силовских q-подгрупп группы $C_G(a)$ в $C_G(a)$). В $N_G(P)$ существует элемент x такой, что $F^x \subset P$ (теорема 1.3.1). Не теряя общности рассуждений, будем считать, что $F \subset P$ и, следовательно, $W \subset P$. Пересечение $W \cap P = 1$, так как в противном случае мы выбрали бы a из $P \cap S \supset W \cap P = 1$ и получили бы бесконечное пересечение $C_G(a) \cap S$ (а такая ситуация уже рассматривалась (см. 1)).

Выберем в W элемент w порядка q и рассмотрим в P подгруппу $< P, w >= K$. Если $C_K(w)$ бесконечен, то и $C_K(w) \cap P$ бесконечно. Но такая ситуация уже рассматривалась в 1), где P и S поменялись ролями. Таким образом, можно считать, что $C_K(w)$ конечен, а следовательно, и центр $Z(K)$ конечен. Тогда $K = P\lambda < w >$ и все элементы вида hw $(h \in \tilde{P})$сопряжены с w в K (теорема 12). В частности, для некоторого $y \in K$

$$aw = y^{-1}wy.$$

Рассмотрим далее в S подгруппу $< S, a >= B$. Централизатор $C_B(a)$ конечен, так как в противном случае W было бы бесконечно. Значит, центр $Z(B)$ конечен и $B = S\lambda < a >$. Тогда все элементы вида ga $(g \in S)$ сопряжены с a в B (теорема 12). В частности, для некоторого $x \in B$

$$aw = wa = x^{-1}ax.$$

Из этого равенства и доказанного выше $aw = y^{-1}wy$ вытекает, что $w = a^{xy^{-1}} \in P^{xy^{-1}} \cap S$. Тогда $C_G(a^{xy^{-1}}) \cap S$ бесконечно и в этом случае, как было показано выше, P и S сопряжены. Аналогично доказывается сопряженность Q и S. Но тогда, очевидно, P и Q сопряжены, что противоречит условию α). Следовательно, силовские q-подгруппы группы G сопряжены, и теорема доказана.

Заметим, что в действительности мы доказали следующий более общий результат. Пусть G — бипримитивно конечная группа с условием минимальности для абелевых q-подгрупп. Если в централизаторе любого q-элемента группы G, не содержащегося в нормальной q-подгруппе группы G, силовские q-подгруппы сопряжены, то и в G силовские q-подгруппы сопряжены.

Теорема 1.3.3 (А.Н. Остыловский, В.П. Шунков). *Пусть G — q-бипримитивно конечная группа с условием min-inf для абелевых q-подгрупп и для каждой возрастающей цепочки $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ...$ конечных нецентральных абелевых q-подгрупп соответствующая цепочка централизаторов*

$$C_G(A_1) \supseteq C_G(A_2) \supseteq ...$$

стабилизируется после конечного числа шагов. Тогда силовские q-подгруппы группы G сопряжены [44].

Доказательство. Предположим, что в $G = G_0$ найдутся несопряженные силовские q-подгруппы. Тогда, по теореме 1.3.2, G_0 имеет нецентральный q-элемент x_0, такой, что и в $G_1 = C_{G_0}(x_0)$ найдутся несопряженные силовские q-подгруппы. По теореме 1.3.2, G_1 также имеет нецентральный q-элемент x_1 такой, что в $G_2 = C_{G_1}(x_1)$ существуют несопряженные силовские q-подгруппы. Легко видеть, что $< x_0, x_1 >$ есть абелева q-подгруппа группы G и $G_2 = C_G(< x_0, x_1 >)$. Рассуждая аналогично относительно G_2 и далее, построим строго возрастающую цепочку конечных абелевых q-подгрупп $< x_0 >\subset< x_0, x_1 >\subset ... \subset< x_0, x_1, \ldots, x_n >\subset ...$ и строго убывающую цепочку $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n \ldots$. По построению, обе цепочки не обрываются на конечном номере, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана. Следствием теоремы 1.3.3 является теорема 3.4 из [143].

Теорема 1.3.4 (А.Н. Остыловский, В.П. Шунков). *В q-бипримитивно конечной группе G с условием min-inf (в частности, min) силовские q-подгруппы сопряжены* [44].

Доказательство. Предположим, что G обладает не сопряженными силовскими q-подгруппами P и Q. Так как G удовлетворяет условию min-inf то, не нарушая общности рассуждений, будем считать, что G удовлетворяет условию

γ) Если H — подгруппа бесконечного индекса в G, то силовские q-подгруппы группы H сопряжены в H.

Если все q-элементы группы G лежат в центре $Z(G)$, то G обладает единственной силовской q-подгруппой и утверждение теоремы справедливо. Если централизаторы всех нецентральных q-элементов группы G имеют бесконечный индекс в G, то теорема доказана (условие γ и теорема 1.3.2).

Пусть $G = G_0$ обладает нецентральным q-элементом x_0, и $C_G(x_0) = G_1$ имеет конечный индекс в G_0. Их полные части P и Q соответственно лежат в G_1 (теорема 8) и не сопряжены в G_1 (следствие 1.3.2 и предположение о несопряженности P и Q). Следовательно, G_1 обладает несопряженными силовскими q-подгруппами (следствие 1.3.2). Рассуждая аналогично относительно G_1 и далее, построим убывающую цепочку подгрупп с конечными индексами в G: $G = G_0 \supset G_1 \supset G_n \supset \ldots$. Если эта цепочка обрывается на конечном номере n, то это означает, что в централизаторе любого нецентрального q-элемента из G_n в G_n силовские q-подгруппы сопряжены, но для G_n аналогичное, утверждение неверно. Тогда мы приходим к противоречию с теоремой 1.3.2.

Пусть цепочка не обрывается. По построению, $|G : G_n|$ конечен. Тогда G_n, а следовательно, и $G_\omega = \bigcup_{n-1}^{\infty} G_n$ содержат полные части $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$, подгрупп P и Q соответственно (теорема 8), Тогда P и Q, сопряжены в G (условие γ и следствие 1.3.2). Теорема доказана.

Следствие 1.3.5. *В бипримитивно конечной группе с условием min-inf (в частности, min) силовские p-подгруппы сопряжены.*

Из следствия 1.3.5 вытекает известный результат Бэра [135] о сопряженности силовских p-подгрупп в локально конечных группах с условием min.

Следствие 1.3.6. *В произвольной периодической группе с условием min-inf (в частности, min) силовские 2-подгруппы сопряжены.*

Теорема 1.3.5 (А.Н. Остыловский, В.П. Шунков [44]). *Для периодической бипримитивно конечной группы G следующие условия эквивалентны:*

(i) условие min-inf;

(ii) условие min.

Доказательство. Предположим, что в группе $G_0 = G$ выполняется (i), но не выполняется (ii). В G_0 может существовать подгруппа G_1 бесконечного индекса, не удовлетворяющая (ii). Рассуждая аналогично относительно G_1 и далее, построим цепочку подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_n \supset ....$ Ввиду (i) эта цепочка обрывается на некотором конечном номере n. По построению, любая подгруппа из G_n бесконечного индекса в G_n удовлетворяет (ii), но сама группа G_n не удовлетворяет (ii). Без ограничения общности будем считать, что $G = G_n$, т. е. G помимо (i) удовлетворяет еще условию (iii) любая подгруппа бесконечного индекса удовлетворяет (ii).

Бесконечная периодическая бипримитивно конечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой (теорема 6), Для периодических абелевых групп условия min-inf и min эквивалентны (теорема 4). Пусть A — бесконечная максимальная полная абелева подгруппа группы G и $T =< g^{-1}Ag|g \in G >$. Группа T удовлетворяет условию (iii) и не имеет собственных подгрупп конечного индекса (теорема 8). Следовательно, T удовлетворяет (ii). По следствию 1.3.1 теоремы 1.3.4 силовские p-подгруппы группы T сопряжены в T. Пусть Q — одна из таких подгрупп. TG, поэтому для любого $g \in G$ существует $t \in T$ такой, что $g^{-1}Qg = t^{-1}Qt$. Тогда $gt^{-1} = n \in N_G(Q)$ и $G = nt$, следовательно,

$$G = N_G(Q)T.$$

Если $|G : N_G(Q)| = \infty$, то, ввиду (iii), $N_G(Q)$ удовлетворяет (ii). Но тогда из строения группы $G = N_G(Q)T$ вытекает, что G удовлетворяет

(ii) (см. [18]), вопреки предположению. Следовательно, $|G : N_G(Q)| < \infty$.

Так как $|T : T \cap N_G(Q)| \leq |G : N_G(Q)|$ (см. [18]), то $T = T \cap N_G(Q)$ (теорема 8) и Q. Тогда $T = Q_1 \times \ldots \times Q_K$, где $Q_1, \ldots, Q_K$ — силовские q-подгруппы группы T по различным $q \in \pi(T)$. Так как T удовлетворяет (ii), то $Q_1, \ldots, Q_K$ — черниковские группы (теорема 5) и K конечно. Но T не имеет собственных подгрупп конечного индекса (теорема 8). Следовательно, T — полная абелева группа с условием min и, ввиду определения A, имеем $T = A$.

Фактор-группа G/A бипримитивно конечна (теорема 7), не удовлетворяет (ii) (см. [18]), но, очевидно, удовлетворяет (i) и (iii). Следовательно, G/A обладает бесконечной абелевой подгруппой A^*/A с условием min. Но тогда A^* — полная абелева подгруппа с условием min [18] и $A^* \neq A$, что противоречит выбору A. Следование (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидно, и теорема доказана.

Следствием теоремы 1.3.5 является результат Зайцева [13] о равносильности условий min-inf и min в локально конечных группах.

Приведем пример периодической группы с условием min для абелевых подгрупп и несопряженными силовскими примарными подгруппами.

Пусть K — группа Новикова-Адяна периода $n = pq$, ($p \neq q$ — простые числа) [37] (см. теорема 13). Выберем в K нормальную подгруппу R такую, что $K/P = A = A_p \times A_q$ — конечная группа с некоммутативными p и q-подгруппами A_p и A_q соответственно.

1) R — примарная группа, скажем, p-группа. Рассмотрим K_q и B — полные прообразы A_q и $Z(K_q/R)$ в K соответственно. Предположим, что силовские q-подгруппы группы B сопряжены в B и B_q — одна из них. По лемме Фраттини $K_q = N_{K_q}(B_q) \cap B$. Очевидно, B_q конечна. Тогда $C_{K_q}(B_q)$ конечен (теорема 13).Так как $OutB_q \supset N_{K_q}(B_q)/C_{K_q}(B_q)$, то и $N_{K_q}(B_q)$ конечен и, следовательно, является циклической группой (теорема 14). По теореме об изоморфизмах [18]

$$K_q/B = N_{K_q}(B_q)B/B \cong N_{K_q}(B_q)/N_{K_q}(B_q) \cap B$$

Тогда $1 \neq A_q/Z(A_q)$ — циклическая группа, чего не может быть. Следовательно, предположение о сопряженности силовских q-подгрупп группы B неверно, и B — искомая группа.

2) R — не примарная группа. Если в R существуют несопряженные силовские q-подгруппы, то R — искомая группа. Пусть силовские q-подгруппы группы R сопряжены в R, и Q — одна из них. По лемме Фраттини $K = N_K(Q)R$. Покажем, что Q бесконечна. Действительно, пусть Q конечна. Тогда $C_K(Q)$ конечен (теорема 13). Так как $N_K(Q)/C_K(Q) \subset OutQ$, то нормализатор $N_K(Q)$ конечен и, следовательно, является циклической группой (теорема 14). По теореме об изоморфизмах [18]

$$A = K/R = N_K(Q)R/R \cong N_K(Q)/N_K(Q) \cap R$$

что противоречит некоммутативности A. Следовательно, Q бесконечна.

Обозначим $N_K(Q) = K_1$, $K_1 \cap R = R_1$. По теореме об изоморфизмах [18] $K_1/R_1 = K_1/(K_1 \cap R) \cong K_1R/R = A$.

Если в R_1 найдутся несопряженные силовские примарные подгруппы, то R_1 — искомая группа. Пусть в R_1 силовские примарные подгруппы сопряжены. Если R_1 — примарная группа, то, применяя к паре K_1, R_1 рассуждения, приведенные выше для пары K, R, построим нужную нам группу. Пусть R_1 — не примарная группа и P — ее силовская p-подгруппа. По лемме Фраттини $K_1 = N_{K_1}(P)R_1$. Как и выше, доказывается, что P бесконечна.

Обозначим $N_{K_1}(P) = K_2$, и $K_2 \cap R_1 = R_2$. Докажем, что $P = R_2$. Пусть $1 \neq x \in R_2 = N_{R_1}(P)$ и $x \notin P$. P — силовская нормальная p-подгруппа группы R_2, поэтому все p-элементы из R_2 лежат в P. Можно считать теперь, что x — q-элемент из $R_2 \subset R_1$. Далее, Q — силовская нормальная q-подгруппа группы R_1, поэтому $x \in Q$. Таким образом, $1 \neq R_2 \cap QR_2$ и PR_2. Тогда $< R_2 \cap Q, P >= (R_2 \cap Q) \times P$. Группа P бесконечна и $P \cap C_{R_2}(R_2 \cap Q)$, что противоречит теореме 13. Следовательно, $P = R_2$.

По теореме об изоморфизмах $K_2/R_2 \cong A$. Применяя к паре K_2, R_2 рассуждения приведенные выше для пары K, R (R — примарная группа), построим нужную нам группу.

Построенная группа не является q-бипримитивно конечной ни для какого простого числа q, но удовлетворяет всем остальным условиям теорем 1.3.2, 1.3.3. Однако в такой группе для некоторого простого числа q, силовские q-подгруппы не сопряжены.

В теоремах 1.3.1 и 1.3.4 условие q-бипримитивной конечности группы также существенно, как показывают следующие простые примеры. Для $q = 2$ укажем группу $G =< a > \lambda < i >$, где a элемент — бесконечного порядка, i — инволюция, $iai = a^{-1}$; ia — инволюция и

$< ia >$, $< i >$ не сопряжены в G. При произвольном q рассмотрим группу $(< a_1 > \times \ldots \times < a_q >)\lambda < s >$, где S — элемент порядка q, $s^{-1}a_i s = a_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, q-1)$, $s^{-1}a_q s = a_1$. Введем обозначения:

$$z = a_1, .., a_q, k = z^{-1}a^q s^{-1}, a_i^q = b_i (i = 1, \ldots, q),$$

$$< z, b_1, \ldots, b_q >= A, A\lambda < s >= G.$$

Легко проверяется, что k — элемент порядка q и $< k >$ и $< S >$ — несопряженные силовские q-подгруппы группы G.

§ 1.4. Обобщение теоремы Фробениуса на класс бипримитивно конечных групп

В 1901 году Фробениус доказал следующую теорему:

Пусть G — конечная группа, содержащая подгруппу H, совпадающую со своим нормализатором и взаимно простую со своими сопряженными подгруппами. Тогда совокупность элементов, не содержащихся ни в H, ни в одной сопряженной с H подгруппе, вместе с единицей составляют нормальный делитель группы G.

Как известно [72], теорема Фробениуса неверна в общем случае, более того, как показывает пример 1.4.3, она неверна в классе периодических групп. Различными авторами теорема Фробениуса обобщена на некоторые классы бесконечных групп.

В этом параграфе теорема Фробениуса обобщается на класс бипримитивно конечных групп. Сначала будет доказан более общий результат:

Теорема 1.4.1 (А.И. Созутов, В.П. Шунков). *Пусть G — группа, H — ее подгруппа, a — некоторый элемент простого порядка $p \neq 2$ из H, удовлетворяющие условиям:*

а) (G, H)—пара Фробениуса, т. е. $H \cap g^{-1}Hg = 1$ для всех $g \in G \setminus H$;

б) для любого $g \in G \setminus H$ группа $\langle a, g^{-1}ag \rangle$ конечна.

Тогда $G = F_p \lambda H$ где F_p — периодическая группа, не содержащая p-элементов, а H либо обладает единственной инволюцией, либо $H = N_G(\langle a \rangle)$ [63].

В нижеследующих примерах показано, что условия $p \neq 2$ и б) являются существенным ограничением в теореме 1.4.1.

Пример 1.4.1. Пусть G — свободная группа с двумя образующими, H — максимальная абелева подгруппа из коммутанта группы G. Из свойств свободных групп вытекает, что (G, H) — пара Фробениуса. Однако для H не существует нормального дополнения [72].

Пример 1.4.2. Пусть G — периодическая группа Новикова — Адяна [37]. В коммутанте группы G возьмем произвольную циклическую подгруппу и обозначим через H максимальную циклическую подгруппу из G, содержащую выбранную подгруппу. Как показал С.И. Адян [1], H совпадает с максимальной локально конечной подгруппой из G. Используя этот результат, докажем, что (G, H) — пара Фробениуса. Однако H, очевидно, не обладает нормальным дополнением [63].

Пример 1.4.3. Пусть K — p-группа Новикова–Адяна [37]. K обладает автоморфизмом порядка два. Вложим K в ее голоморф [18] и там выберем подгруппу типа $G = K\lambda(a)$, где a — инволюция, и положим $H = C_G(a) \neq G$.

Докажем, что (G, H) — пара Фробениуса. Предположим, что в G существует такой элемент x, что $x^{-1}Hx \neq H$ и $x^{-1}Hx \cap H = D \neq 1$. Пусть h — элемент порядка p из D. Элемент $c = ax^{-1}ax \neq 1$, и, очевидно, $c \in K$. Далее, c — строго вещественный элемент относительно a, и, кроме этого, $h \in C_K(c) = B$ и B — циклическая p-группа [1]. Отсюда и из $|h| = p$ вытекает, что $h \in \langle c \rangle$. Но тогда $a^{-1}ha = h^{-1}$. Однако это невозможно, ввиду выбора h.

Полученное противоречие означает, что H взаимно проста со своими сопряженными подгруппами, отличными от H. Очевидно, $N_G(H) = H$. Следовательно, (G, H) — пара Фробениуса. Предположим, что $G = A\lambda H$. Так как a — инволюция и $H = C_G(a)$, то a индуцирует регулярный автоморфизм в A, и в этом случае A — абелева группа (теорема 22). Но тогда, очевидно, K обладает бесконечной подгруппой с нетривиальным центром, что невозможно [1]. Следовательно, для H не существует нормального дополнения.

Теперь докажем, что $H = C_G(a)$ — бесконечная группа. Действительно, если бы $|C_G(a)| < \infty$, то K обладала бы бесконечной подгруппой с нетривиальным центром [121], а это снова невозможно [1]. Следовательно, H бесконечна.

Построенный пример группы показывает, что хотя G и H удовлетворяют всем условиям теоремы 1.4.1, за исключением условия $p \neq 2$, тем не менее для такой группы теорема 1.4.1 несправедлива [63].

Пример 1.4.4. Построим пример смешанной группы, удовлетворяющей условию а), но для которой утверждение теоремы 1.4.1 неверно.

Пусть F_1 — периодическая группа Новикова–Адяна [37], H — циклическая подгруппа из F_1 выбранная в F_1 таким же способом, что и в G из примера 2. Далее, пусть $F_2, F_3, ..., F_n, ...$ — бесконечная последовательность конечных групп Фробениуса с дополнительным множителем, изоморфным H. Обозначим через G свободное произведение групп $F_1, F_2, ..., F_n, ...$ с объединенной подгруппой H. Как легко показать, (G, H) — пара Фробениуса, но для H не существует нормального дополнения [63].

В качестве приложения теоремы 1.4.1 получается теорема Фробениуса для периодических бипримитивно конечных групп:

Теорема 1.4.2 (А.И. Созутов, В.П. Шунков). *Пусть G — периодическая бипримитивно конечная группа, H — ее собственная подгруппа такая, что $H \cap g^{-1}Hg = 1$ (для любого элемента $g \in G \setminus H$). Тогда*

1) множество элементов из G, не входящих в H и ни в одну из сопряженных с H подгрупп, вместе с единицей является нормальной подгруппой F в G, и $G = F\lambda H$, $\pi(F) \cap \pi(H) = \emptyset$;

2) силовские p-подгруппы из H — локально циклические или обобщенные (бесконечные) группы кватернионов;

3) если H не содержит инволюций, то все элементы простых порядков из H порождают локально циклическую подгруппу;

4) если i — инволюция из H, то она единственная в H [63].

Теорема Фробениуса для периодических слабо бипримитивно конечных групп.

Теорема 1.4.3 (А.И. Созутов, В.П. Шунков). *Пусть G — периодическая слабо бипримитивно конечная группа, H — ее собственная подгруппа такая, что $H \cap g^{-1}Hg = 1$ (для любого элемента $g \in G \setminus H$). Тогда*

1) множество элементов из G, не входящих в H и ни в одну из сопряженных с H подгрупп, вместе с единицей является нормальной подгруппой F в G, и $G = F\lambda H$, $\pi(F) \cap \pi(H) = \emptyset$;

2) если i — инволюция из H, то она единственная в H [63].

Теорема 1.4.4 (А.И. Созутов, В.П. Шунков). *Если бесконечная периодическая бипримитивно конечная группа G не содержит ни одной отличной от нее бесконечной неабелевой подгруппы, то она локально конечна* [63].

Сначала будет изложено доказательство теоремы 1.4.1, затем на ее основе будет приведено доказательство теорем 1.4.2–1.4.4.

Доказательство теоремы 1.4.1 для случая, когда H не содержит инволюций. Напомним, что (G, H) — пара Фробениуса, a — фиксированный элемент простого порядка p из H и подгруппа $\langle a, g^{-1}ag\rangle$ конечна для любого $g \in G \setminus H$. Рассмотрим группу $L_g = \langle a, g^{-1}ag\rangle$, $g \in G \setminus H$. Очевидно, $(L_g, L_g \cap H)$ — пара Фробениуса, порядок $L_g \cap H$ нечетен, и по теореме 19 заключаем, что L_g — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a\rangle$ и инвариантным множителем (ядром) F_g, который взаимно прост с любой сопряженной с H подгруппой.

Совокупность всех элементов, содержащихся в ядрах F_g, $g \in G \setminus H$ обозначим через F_p.

Лемма 1.4.1. *Для любого $g \in G \setminus H$ пересечение $Hg \cap F_p$ непусто и $g = rc$ при некоторых $r \in N_H(\langle a\rangle)$ и $c \in F_p$.*

Доказательство. Пусть $g \in G \setminus H$. Как уже отмечалось выше, группа $L_g = \langle a, g^{-1}ag\rangle$ является группой Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a\rangle$ и ядром F_g. В F_g найдется элемент c такой, что $cg^{-1}agc^{-1} \in \langle a\rangle$ (теорема 20). Имеем $r = gc^{-1} \in N_G(\langle a\rangle)$, $g = rc$ и $c \in Hg \cap F_p$. Лемма доказана.

Лемма 1.4.2. *Всякая подгруппа порядка p из $N_H(\langle a\rangle)$, сопряженная с $\langle a\rangle$ в G, совпадает с $\langle a\rangle$.*

Доказательство. Пусть c — неединичный элемент из F_p такой, что $L = \langle a, c\rangle$ — группа Фробениуса, не содержащая собственных подгрупп Фробениуса, содержащих a; r — элемент из $N_H(\langle a\rangle)$ и $\langle r\rangle$, $\langle a\rangle$ сопряжены в G. Подгруппа $\langle ca\rangle$ сопряжена с $\langle a\rangle$ в L, и $ca \notin H$. По условию б) группа $M = \langle ca, r\rangle$ конечна. Далее, $M \not\subseteq H$, и, следовательно, $(M, M \cap H)$ — пара Фробениуса (теорема 18).

Из теоремы 19 и нечетности $|M \cap H|$ вытекает, что M — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle r\rangle$. Для элемента car имеется две возможности: либо его порядок равен p, либо он лежит в ядре M. Для второй альтернативы $|car^2| = p$. Следовательно, в любом случае найдется число m, $1 \le m < p$ такое, что $|car^m| = p$. Подгруппы $\langle car^m\rangle$ и $\langle r\rangle$ сопряжены в M, что влечет сопряженность $\langle car^m\rangle$ и $\langle a\rangle$ в G. Далее, $car^m \notin H$ ($c \notin H$), группа $K = \langle car^m, a\rangle$ конечна (условие б)), и K — группа Фробениуса с неинвариантным множителем порядка p (теорема 19).

Так как $r \in N_H(\langle a\rangle)$, то $\langle cac^{-1}\rangle = \langle (car^m)a(car^m)^{-1}\rangle \subseteq K$, и по выбору элемента c имеем $L \subseteq K$. Но тогда $r \in K$, что влечет $r \in \langle a\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 1.4.3. *Пусть $\langle t\rangle$ — подгруппа из H, сопряженная с $\langle a\rangle$. Тогда для любого неединичного элемента b из F_p найдутся элементы c, $d \in F_p$ и $r \in \langle a\rangle$ такие, что $tb = rc$ и $tbt^{-1} = d$.*

Доказательство. По лемме 1.4.1, $tb = rc$, где $r \in N_H(\langle a\rangle)$, $c \in F_p$. Если $r = 1$, то $r \in \langle a\rangle$. Пусть $r \neq 1$. Подгруппы $\langle t\rangle$ и $\langle ba\rangle$ сопряжены с $\langle a\rangle$ в G (теорема 20), $t \in H$, $ba \notin H$. Следовательно, $L = \langle t, ba\rangle$ — конечная группа Фробениуса с неинвариантным множителем порядка p (теорема 19). Далее, $rca = tba \in L$, и либо его порядок равен p, либо он лежит в ядре L. Пусть $|rca| = p$. Имеем $r = (rca)(ca)^{-1} \in H$, $ca \notin H$, и, следовательно $\langle rca\rangle$ и $\langle ca\rangle$ не могут вместе содержаться в одной сопряженной с H подгруппе. С другой стороны, $\langle rca\rangle$ и $\langle ca\rangle$ сопряжены с $\langle a\rangle$ (теорема 20), и мы заключаем, что $M = \langle rca, ca\rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем порядка p. Далее, $r \in M \cap H$, и по теореме 19 получаем, что $|r| = p$ и $\langle r\rangle$, $\langle a\rangle$ сопряжены. По лемме 1.4.2, $r \in \langle a\rangle$. Пусть теперь $|rca| \neq p$. Тогда $|rcat^m| = p$ для любого m, $1 \leq m < p$. Группа $\langle ca, t\rangle$, очевидно, является группой Фробениуса с неинвариантным множителем порядка p и, как уже показывалось в лемме 1.4.2, можно подобрать число m так, что $|cat^m| = p$, $1 \leq m < p$. Рассмотрим группу $K = \langle rcat^m, cat^m\rangle$. Подгруппы $\langle rcat^m\rangle$, $\langle cat^m\rangle$ сопряжены с $\langle a\rangle$ в G и не могут содержаться в одной сопряженной с H подгруппе (иначе бы $c \in H$). Из условия б) и теоремы 19 получаем, что K — конечная группа Фробениуса с неинвариантным множителем порядка p. Снова $r \in K$, и, по теореме 20, $\langle r\rangle$ и $\langle cat^m\rangle$ сопряжены, а значит, сопряжены и $\langle r\rangle$ с $\langle a\rangle$. По лемме 1.4.2, $r \in \langle a\rangle$. Первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение леммы. Имеем $tbt^{-1} = rct^{-1}$. Вторично применяя первое утверждение леммы, получаем $tc^{-1} = a_1g$, где $a_1 \in \langle a\rangle$. $g \in F_p$, и $tbi^{-1} = r(tc^{-1})^{-1} = rg^{-1}a_1^{-1} = a_0d$, где $a_0 = ra_1^{-1} \in \langle a\rangle$, $d = a_1g^{-1}a_1^{-1} \in F_p$. Так как $|tb^{-1}| = |b| \neq p$, то заключаем, что $a_0 = 1$. Лемма доказана.

Лемма 1.4.4. *Множество всех элементов из подгрупп, сопряженных в H с подгруппой $\langle a\rangle$, вместе с единицей составляют нормальную подгруппу T в H.*

Доказательство. Пусть $\langle t_1\rangle$, $\langle t_2\rangle$ — различные подгруппы из H, сопряженные с $\langle a\rangle$, и $t_1t_2 \notin \langle a\rangle$. Для доказательства леммы 1.4.4 достаточно показать, что подгруппа $\langle t_1t_2\rangle$ сопряжена с $\langle a\rangle$. Пусть b — неединичный элемент из F_p. По лемме 1.4.3, $t_2b = a_2c_2$, где $a_2 \in \langle a\rangle$, $c_2 \in F_p$. Далее, снова применяя лемму 1.4.3, получаем $t_1t_2b = t_{-1}a_2c_2 =$

$t_1(a_2c_2a_2^{-1})a_2 = a_1c_1a_2 = rc$ где $r = a_1a_2 \in \langle a \rangle, c_1 = a_2^{-1}ca_2 \in F_p$. Найдется число m, $1 \leq m < p$ такое, что $|rca^m| = p$. Подгруппы $\langle rca^m \rangle$ и $\langle ba^m \rangle$ сопряжены в G с $\langle a \rangle$ и содержатся в различных сопряженных с H подгруппах, так как $1 \neq t_1t_2 = (rca^m)\ (ba^m)^{-1} \in H$, $ba^m \notin H$. Отсюда заключаем, что $L = \langle rca^m, ba^m \rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем порядка p (теорема 19). Далее, $1 \neq t_1t_2 \in L \cap H$. Ввиду теорем 19, 20, $\langle t_1t_2 \rangle$ и $\langle ba^m \rangle$ сопряжены, и, следовательно, $\langle t_1t_2 \rangle$ и $\langle a \rangle$ также сопряжены. Лемма доказана.

Лемма 1.4.5. *Для любых b, $c \in F_p$ либо $bc \in T$, либо $bc = rd$ для некоторых $r \in \langle a \rangle$, $d \in F_p$.*

Доказательство. Пусть $bc \in H$ и $bc \neq 1$. Так как $\left\langle ba^{-1} \right\rangle$, $\langle ac \rangle$ сопряжены с $\langle a \rangle$ в G и лежат в различных сопряженных с H подгруппах $(bc \in H, ac \notin H)$, то $L = \left\langle ba^{-1}, ac \right\rangle$ — группа Фробениуса и подгруппы $\langle bc \rangle$ и $\langle ac \rangle$ сопряжены (теоремы 19, 20). Следовательно, подгруппы $\langle a \rangle$, $\langle bc \rangle$ также сопряжены, и $bc \in T$. Пусть $bc \notin H$. По лемме 1.4.1, $bc = rd$ для некоторых $r \in N_H(\langle a \rangle)$ и $d \in F_p$. Нам нужно показать, что $r \in \langle a \rangle$. Если $r = 1$, то все доказано. Пусть подгруппы $\left\langle ba^{-1} \right\rangle$, $\langle aca \rangle$ сопряжены с $\langle a \rangle$ (теорема 20), и если они попадут в подгруппу, сопряженную с H, то, по лемме 1.4.4, $\langle bca \rangle = \langle rda \rangle$ сопряжена с $\langle a \rangle$. Далее, $r = (rda)(da)^{-1}$ и $da \notin H$. Следовательно, rda и da лежат в различных сопряженных с H подгруппах. Поэтому $\langle rda, da \rangle$ — конечная группа Фробениуса и $\langle r \rangle$ и $\langle da \rangle$ сопряжены (теоремы 19, 20), что влечет сопряженность подгрупп $\langle r \rangle$ и $\langle a \rangle$.

По лемме 1.4.2 заключаем, что $r \in \langle a \rangle$. Пусть теперь ba^{-1}, aca лежат в различных сопряженных с H подгруппах. Тогда $M = \left\langle ba^{-1}, aca \right\rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем порядка p. Если $rda = bca$ не лежит в ядре M, то $\langle rda \rangle$ сопряжена с $\langle a \rangle$; этот случай нами уже рассмотрен. Пусть rda — элемент из ядра M. Так как M не содержится в подгруппе, сопряженной с H, можно выбрать подгруппу $\langle k \rangle$ в M, сопряженную с $\langle a \rangle$, такую, что $\langle k, da \rangle$ — конечная группа Фробениуса. Тогда найдется число m, $1 \leq m < p$, такое, что $\langle dak^m \rangle$ сопряжена с $\langle a \rangle$. Подгруппа $\langle rdak^m \rangle$ также сопряжена с $\langle a \rangle$.

Если элементы $rdak^m$, dak^m попадут в группу, сопряженную с H, то $\langle r \rangle$ сопряжена с $\langle a \rangle$, по лемме 1.4.4 и по лемме 1.4.2, $r \in \langle a \rangle$. В противном случае $\langle rdak^m, dak^m \rangle$ — группа Фробениуса и $\langle r \rangle$ сопряжена с $\langle a \rangle$ (теоремы 19, 20), и снова, по лемме 1.4.2, $r \in \langle a \rangle$. Лемма доказана.

Лемма 1.4.6. *Справедливы следующие утверждения:*

1) M — TF_p — подгруппа группы G;

2) $T = \langle a \rangle$, и H совпадает с нормализатором подгруппы $\langle a \rangle$ в G;

3) F_p — нормальная периодическая подгруппа группы G, и $G = F_p \lambda H$.

Доказательство. Пусть $M = TF_p$ (T определена в лемме 1.4.4). Из определения T и F_p и леммы 1.4.3 следует, что M состоит из периодических элементов. Пусть $t_1 b, t_2 c \in M$, $t_1, t_2 \in T$, $b, c \in F_p$. Имеем $t_1 b t_2 c = t_1 t_2 (t_2^{-1} b t_2) c$. По лемме 1.4.3, $t_2^{-1} b t_2 = d \in F_p$, по лемме 1.4.4, $t_1 t_2 = t \in T$, и $t_1 b t_2 c = tdc$. По лемме 1.4.5, либо $dc \in T$, либо $dc = rg$, где $r \in \langle a \rangle$, $g \in F_p$. В первом случае, по лемме 1.4.4, $tdc \in T$. Во втором случае $t_1 b t_2 c = trg \in TF_p$, так как $tr \in T$ (лемма 1.4.4). Первое утверждение леммы доказано.

Далее, заметим, что все элементы из $M \setminus F_p$ содержатся в сопряженных с $\langle a \rangle$ подгруппах группы M (определение F_p, T, условие б), теорема 20 и лемма 1.4.3). Пусть $\langle s \rangle$ — некоторая сопряженная с $\langle a \rangle$ подгруппа из M. Обозначим через F_s множество элементов из M, имеющее такой же смысл для s, что и F_p для $\langle a \rangle$ в G. Так как F_s не содержит элементов порядка p, то по доказанному выше (все элементы из $M \setminus F_p$ порядка p) $F_p \supseteq F_S$. С другой стороны, из сопряженности (s) и $\langle a \rangle$ в M вытекает сопряженность F_s и F_p, а поэтому, очевидно, $F_s = F_p$. Следовательно, для любых $s \in M \setminus F_p$, $b \in F_p$ подгруппа $\langle s, b \rangle$ — конечная группа Фробениуса с ядром, содержащим $\langle b \rangle$. Если бы теперь $bc \in M \setminus F_p$ $(b, c \in F_p)$, то получили бы, что $Q = \langle bc, c \rangle = \langle bc, b \rangle = \langle b, c \rangle$ — конечная группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle bc \rangle$ порядка p. Так как $|b| \neq p$, $|c| \neq p$, то b и c содержались бы в ядре подгруппы Q, а это невозможно. Следовательно, $bc \in F_p$ и F_p — нормальная подгруппа в M.

Докажем, что $T = \langle a \rangle$. Пусть t, b — неединичные элементы соответственно из T и F_p. Предположим, что $t \notin \langle a \rangle$. По лемме 1.4.3, $tb = rd$ $(r \in \langle a \rangle,\ d \in F_p)$, $t = rdb^{-1}$ По доказанному выше, $c = db^{-1} \in F_p$ и $c = r^{-1} t \in H \cap F_p = 1$ и $t = r \in \langle a \rangle$. Пришли к противоречию. Следовательно, $T = \langle a \rangle$. Но $T \trianglelefteq M$, а поэтому $H = N_G(\langle a \rangle)$, и, по лемме 1.4.1, $G = F_p \lambda H$. Лемма доказана.

Лемма 1.4.6 завершает доказательство теоремы 1.4.1 для случая, когда H не содержит инволюций.

Случай, когда H содержит инволюции. Пусть i — некоторая инволюция из H.

Лемма 1.4.7. *$\langle i, g^{-1} a g \rangle$ (для любого $g \in G \setminus H$) — конечная группа Фробениуса с неинвариантным множителем порядка $2p$.*

Доказательство. Элементы $g^{-1} a g$, $i g^{-1} a g i$ сопряжены с a и не содержатся в одной подгруппе, сопряженной с H. Но тогда $L = \langle g^{-1}ag, ig^{-1}agi\rangle$ конечна (условие б)) и $i \in N_G(L)$. Отсюда, очевидно, вытекает конечность $\langle i, g^{-1}ag\rangle$, и порядок ее неинвариантного множителя равен $2p$. Лемма доказана.

Лемма 1.4.8. *Пусть g — элемент из $G \setminus H$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) Hg обладает единственным строго вещественным относительно i элементом и его порядок конечен и нечетен;

2) если c — строго вещественный относительно i элемент из Hg, то $\langle i, c, a\rangle$ — конечная группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle i, a\rangle$ и c принадлежит ее ядру;

3) i — единственная инволюция в H;

4) все инволюции сопряжены в G, и любые две из них порождают конечную подгруппу.

Доказательство. $L = \langle i, g^{-1}ag\rangle$ — конечная группа Фробениуса, и $g^{-1}ag$ не содержится в ядре L (лемма 1.4.7 и теорема 23). Следовательно, для некоторого элемента c из ядра L имеем $cg^{-1}agc^{-1} \in L \cap H$ или $g = hc$ $(h \in H)$ и $c \in Hg$, $ici = c^{-1}$ (теорема 22). Предположим, что $isgi = (sg)^{-1}$ для некоторого $s \in H$. В этом случае $isgi = ishci = ishic^{-1} = c^{-1}(sh)^{-1}$ или $ci(sh)(ci)^{-1} = (sh)^{-1}$. Так как $ci \notin H$ и (G, H) — пара Фробениуса, то $sh = 1$ и $sg = c$. Очевидно, $|c|$ нечетен. Первое утверждение леммы доказано.

Взяв в качестве g элемент c и воспользовавшись единственностью в Hc строго вещественного относительно i элемента, докажем, что $L_c = \langle i, c^{-1}ac\rangle = \langle i, a, c\rangle$. Утверждение 2) доказано.

Пусть j — инволюция из H. Элементы $b_1 = ig^{-1}ig, b_2 = ig^{-1}jg$ строго вещественны относительно i и, очевидно, не принадлежат H. Но тогда они имеют конечные нечетные порядки (утверждение 1) леммы). Выбирая в циклических группах $\langle b_1\rangle$ и $\langle b_2\rangle$ элементы c_1 и c_2 такие, что $c_1^2 = b_1$, $c_2^2 = b_2$, и пользуясь их строгой вещественностью относительно i, получаем:

$$i = c_1g^{-1}igc_1^{-1} = c_2g^{-1}jgc_2^{-1}$$

Так как (G, H) — пара Фробениуса, то $c_1g^{-1}, c_2g^{-1} \in H$ и $Hc_1 = Hg = Hc_2$. По первому утверждению леммы имеем $c_1 = c_2$ что влечет $c_1g^{-1} = c_2g^{-1}$ и $i = j$. Утверждение 3) доказано.

Докажем последнее утверждение леммы. Пусть k — инволюция из $G \setminus H$. Элемент $b = ik$ строго вещественный относительно i. Согласно утверждению 1) леммы $|b|$ конечен и нечетен. Но тогда i, k сопряжены в G (теорема 21). Лемма доказана.

Лемма 1.4.9. *Множество F строго вещественных относительно i элементов из G является абелевой нормальной периодической подгруппой в G, и $G = F\lambda H$.*

Доказательство. Ввиду леммы 1.4.8 и теоремы 22 достаточно показать, что F — группа. Пусть b, c — произвольные элементы из F. Если $bc = cb$, то $ibci = (bc)^{-1}$ и $|bc|$ нечетен, а поэтому $bc \in F$. Предположим, что $bc \neq cb$. Из $ibi = b^{-1}$ и $ici = c^{-1}$ следует, что $b = ki$, $c = ij$ для некоторых инволюций $k, j \in G$, Так как $bc \neq cb$, то $k \neq j$. Подгруппа $L = \left\langle ba, a^{-1}c \right\rangle$ содержит $bc = kj$ и если бы L принадлежала подгруппе, сопряженной с H, то ввиду строгой вещественности bc относительно k, j в этой же подгруппе содержались бы k, j. Но тогда мы пришли бы к противоречию с леммой 1.4.8 и предположением $k \neq j$. Следовательно, L не принадлежит подгруппе, сопряженной с H. Далее, $\langle b, a \rangle$ — конечная группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$ и ядром, содержащим b (лемма 1.4.8). В этом случае $\langle ba \rangle$ и $\langle a \rangle$ сопряжены (теорема 1.4.6), по аналогичным соображениям $\left\langle a^{-1}c \right\rangle$, $\langle a \rangle$ сопряжены. Но тогда L — конечная группа Фробениуса (условие б) и теоремы 19, 23). Используя строгую вещественность элемента bc относительно k и лемму 1.4.8, нетрудно показать, что bc принадлежит ядру R подгруппы L. Рассмотрим $M = C_G(bc)\lambda \langle k \rangle$. Группа $C_G(bc)$ абелева, и все ее элементы строго вещественны относительно k (определение пары Фробениуса, лемма 1.4.8 и теорема 22). Пусть $S = R \cap C_G(bc)$. Если $S = R$, то $k, a^{-1}c \in N_G(S)$. Как доказано выше, $\left\langle a^{-1}c \right\rangle$ и $\langle a \rangle$ сопряжены и $\left\langle k, a^{-1}c \right\rangle$ конечна (леммы 1.4.7, 1.4.8). Но тогда и $B = \left\langle S, k, a^{-1}c \right\rangle$ конечна и является группой Фробениуса с неинвариантным множителем четного порядка, содержащим $a^{-1}c$ (теоремы 18, 23).

Пусть t — инволюция из B и $a^{-1}c \in C_G(t)$. По лемме 1.4.8, $T = \langle a, c, i \rangle$ — конечная группа Фробениуса с ядром, содержащим c, а поэтому $a^{-1}c = c_1^{-1}a^{-1}c_1$, где c_1 из ядра T.

Рассмотрим подгруппу $B_1 = c_1Bc_1^{-1}$. Очевидно, $c_1tc_1^{-1} \in H$ и $i = c_1tc_1^{-1}$ (лемма 1.4.8), и, значит, $c_1bcc_1^{-1}$ принадлежит ядру B_1. В этом случае $ic_1bcc_1^{-1}i = (c_1bcc_1^{-1})^{-1}$, а так как $c_1, b, c \in F$, то получим, что $c_1^{-1}b^{-1}c^{-1}c_1 = c_1c^{-1}b^{-1}c_1^{-1}$ или $bcc_1^{-2}b^{-1} = c_1^{-2}c = d$. Элементы c, c_1 принадлежат абелеву ядру T, а поэтому $d = cc_1^{-2} = c_1^{-2}c$. Но тогда $c, b \in C_G(d)$ и $d \neq 1$. (Действительно, из $d = 1$ следовало бы $c = c_1^2$ и $a^{-1}c = a^{-1}c_1^2 = c_1^{-1}ac_1$, $ac_1^{-1}a^{-1} = c_1$, что противоречило бы условию

$p \neq 2$. Далее, $i \in N_G(d)$ и $C_G(d)$ — абелева группа (теорема 22). Однако это противоречит доказанному выше: $c, b \in C_G(d)$ и предположению $bc \neq cb$. Полученное противоречие означает, что $S \neq R$.

Пусть $P = N_G(S)$. Так как $k \in P$ и $k \notin C_G(S)$, то из определения пары Фробениуса и леммы 1.4.8 вытекает, что

$$P = N_G(S) = C_G(S) \lambda C_P(k). \qquad (1)$$

Если $P \cap R \subseteq C_G(S)$, то ввиду определения S имеем $S = P \cap R$. В этом случае, используя строгую вещественность элементов из S относительно k, лемму 1.4.8 и теорему 22, легко показать, что (R, S) — пара Фробениуса. Однако это противоречит теореме 19, поскольку L — конечная группа нечетного порядка, порожденная двумя элементами порядка p, и R — ее ядро. Следовательно, $N_R(S) \neq S$ и $N_R(S) \cap C_G(S) = S$. В этом случае некоторый элемент r из $N_R(S)$ представляется в виде $r = bh$, где $b \in C_G(S)$, $h \in C_P(k)$, причем $h \neq 1$ (см. равенство (1)). Рассмотрим подгруппу $Q = C_G(S) \lambda \langle h, k \rangle$. Так как $(Q, \langle h, k \rangle)$ — пара Фробениуса и $C_G(S)$ — абелева группа (теорема 1.4.8), то r и h сопряжены (теоремы 23, 20). Но тогда некоторая инволюция t_1 из Q, сопряженная с k, централизует r.

Пусть $C = C_G(t_1) \cap R$. Так как $r \in C$, то $C \neq 1$. По лемме 1.4.8, (R, C) — пара Фробениуса. Однако, как было показано выше, для R не существует таких пар. Полученное противоречие означает, что $S = R$, а это, как уже было доказано, противоречит предположению $bc \neq cb$. Следовательно, $bc = cb$, и лемма доказана.

Леммы 1.4.6, 1.4.9 завершают доказательство теоремы 1.4.1.

Доказательство теоремы 1.4.2. Необходимо рассмотреть два случая: $\pi(H) \neq 2$ и $\pi(H) = 2$.

α) $\pi(H) \neq 2$. В этом случае G и H для любого $p \in \pi(H)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.4.1 (ввиду бипримитивной конечности G), и по этой теореме $G - F_p \lambda H$. Отсюда, из определения бипримитивной конечности группы и теоремы 20 вытекает, что $\pi(F_p) \cap \pi(H) = \emptyset$.

Пусть g — элемент из $G \setminus \bigcup_{x \in G} x^{-1} H x$. Докажем, что $g \in F_p$. Предположим, что $g \notin F_p$. Тогда по крайней мере некоторая силовская q-подгруппа Q из $\langle g \rangle$ не принадлежит F_p. Пусть b — элемент порядка q из Q. Так как $\pi(F_p) \cap \pi(H) = \emptyset$ и $G = F_p \lambda H$, то, очевидно, $q \in \pi(H)$. Но тогда b содержится в подгруппе H_1 сопряженной с H (определение бипримитивной конечности группы, теорема 1.4.1 и теорема 20). А так как (G, H) — пара Фробениуса и $b \in \langle g \rangle$, то $g \in H_1$ что противоречит предположению $g \in G \setminus \bigcup_{x \in G} x^{-1}Hx$. Следовательно, $G \setminus \bigcup_{x \in G} x^{-1}Hx = F_p$, и утверждение 1) доказано.

Утверждения 3), 4) имеют место в силу теоремы 1.4.1.

Докажем утверждение 2). Пусть R — произвольная конечная элементарная абелева p-подгруппа из H. Рассмотрим группу $B = F_p \lambda R$. Очевидно, (B, R) — пара Фробениуса, и из определения бипримитивной конечности и теоремы 16 вытекает, что $|R| = p$. Доказанный факт означает, что любая силовская p-подгруппа из H обладает единственной подгруппой порядка p. Отсюда, из определения бипримитивной конечности группы и теоремы 12.5.2 из [131], нетрудно получить локальную цикличность произвольной силовской p-подгруппы из H, $p \in \pi(H)$, $p \neq 2$. Если H обладает инволюцией, то она единственная в H (как доказано выше), и утверждение 2) вытекает из теоремы 2 в [111].

β) $\pi(H) = \{2\}$. Пусть i — инволюция из H. Как и в лемме 1.4.8, можно доказать, что i — единственная инволюция в H, и в каждом смежном классе Hg существует единственный строго вещественный относительно i элемент. Обозначим через F множество всех таких элементов. Покажем, что F — группа. Очевидно, если некоторый элемент принадлежит F, то и любая его степень принадлежит F. Поэтому из F можно взять некоторый элемент a простого порядка q.

Пусть A — максимальная абелева подгруппа из G, содержащая a и такая, что в ней все элементы строго вещественны относительно i (существование подгруппы A в G вытекает из леммы Цорна).

Пусть c — произвольный элемент из A и $c \neq 1$. Тогда $C_G(c) \subseteq A$. Действительно, $\langle C_G(c), i \rangle = C_G(c) \lambda \langle i \rangle$. Но $C_G(c)$ — абелева группа и все ее элементы строго вещественны относительно i (теорема 22), и $A \subseteq C_G(c)$. Отсюда, ввиду определения A, получим $A = C_G(c)$.

Пусть h — произвольный элемент из H и b — произвольный элемент простого порядка из A. Подгруппа $L = \left\langle b, h^{-1}bh \right\rangle$ конечна (определение бипримитивной конечности группы), и $i \in N_G(L)$. Ввиду теоремы 22, L абелева и, по доказанному выше, $L \subseteq A$. Этим самым мы доказали, что $H \subseteq N_G(A) = T$. Очевидно, $T = A \lambda H$, и $N_G(T) = T$. Предположим, что некоторая подгруппа T_1 сопряженная с T, имеет нетривиальное пересечение с T: $T \cap T_1 = D \neq 1$. В этом случае, как легко видеть, не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что $D = H$. Тогда $T_1 = g^{-1}Tg$, $g^{-1}c^{-1}Hcg = H$ (c — некоторый элемент из A), $cg = r \in H$ и $g = c^{-1}r \in T$, что противоречит $T_1 \neq T$ и $g^{-1}Tg = T_1$. Следовательно, либо $T - G$, либо (G, T) — пара Фробениуса. Вторая альтернатива невозможна (утверждение 4), и $G = A\lambda H$. Разбор случая β) завершен, и этим заканчивается доказательство теоремы 1.4.2.

Доказательство теоремы 1.4.3 no-существу изложено выше (см. в теореме 1.4.2 доказательство утверждений 1), 4)).

Доказательство теоремы 1.4.4. Если группа G абелева, то она локально конечна. Пусть G — неабелева группа, B — ее некоторая собственная нормальная подгруппа. Если B конечна и $C_G(B) \neq G$, то $C_G(B) \triangleleft G$ и $|G : C_G(B)| < \infty$ и в этом случае G локально конечна (теорема Шмидта [106] и условия теоремы).

Пусть B — бесконечная группа. Так как $B \neq G$, то B абелева (условие теоремы). Если G/B конечна, то G локально конечна (теорема Шмидта [106]). Пусть G/B бесконечна и g — любой элемент из G. Тогда $\langle B, g\rangle \neq G$, и, по условию теоремы 1.4.4, $\langle B, g\rangle$ — абелева группа. Так как g — произвольный элемент из G, то $B \subseteq Z(G)$. Таким образом, теорему достаточно доказать для случая, когда любая собственная нормальная подгруппа содержится в $Z(G)$. Докажем, что в $G/Z(G)$ любые два элемента $\overline{a}$, $\overline{b}$ простого порядка p порождают конечную подгруппу. Пусть a, b — прообразы элементов $\overline{a}$, $\overline{b}$ в G, $x = a^p$, $y = b^p$, $R = \langle x, y\rangle$. Так как $R \subseteq Z(G)$, то R конечна и $a, b \in N_G(R)$. Группа G бипримитивно конечна относительно p. Отсюда вытекает, что $\langle aR, bR\rangle$ конечна в G/R. Но тогда, очевидно, и $\left\langle \overline{a}, \overline{b}\right\rangle$ конечна.

Положим $\overline{G} = G/Z(G)$. Группа $\overline{G}$ обладает бесконечной подгруппой L с нетривиальным центром [121]. Если L неабелева, то $\overline{G} = L$ и $Z(L) \neq \overline{G}$ ($Z(L) = Z(\overline{G})$). Полный прообраз K подгруппы $Z(L)$ в G является собственной нормальной подгруппой в G, и, по доказанному выше, $K \subseteq Z(G)$, что невозможно. Следовательно, L абелева. Пусть H — максимальная абелева подгруппа из G, содержащая L (лемма Цорна). Если $N_{\overline{G}}(H) = \overline{G}$, то либо G локально конечна [106] (теорема Шмидта), либо прообраз H в G содержится в $Z(G)$. Последняя альтернатива невозможна, так как $H \neq Z(G)$. Предположим, что $N_{\overline{G}}(H) \neq \overline{G}$. В этом случае $N_{\overline{G}}(H)$ — абелева группа (условие теоремы) и $N_{\overline{G}}(H) = H$ (определение H). Если бы $H \cap g^{-1}Hg \neq 1$ для некоторого $g \in \overline{G} \setminus H$, то, очевидно, $\overline{G}$ обладала бы нетривиальным центром, что невозможно,

Итак, мы доказали, что $(\overline{G}, H)$ — пара Фробениуса. По предыдущей теореме, $\overline{G} = F\lambda H$, $F \neq \overline{G}, F \neq Z(\overline{G})$. Но тогда прообраз F в G содержится в $Z(G)$, что невозможно. Полученное противоречие означает, что $\overline{G}$ локально конечна. По теореме Шмидта [106], G также локально конечна. Теорема доказана.

Если иметь в виду теорему 1 из [91], то в действительности получился более конкретный результат, а именно:

Теорема 1.4.5 (А.И. Созутов, В.П. Шунков). *Если бесконечная бипримитивно конечная группа не содержит ни одной отличной от нее бесконечной неабелевой подгруппы, то она либо абелева, либо является черниковской группой* [63].

§ 1.5. О локальной конечности одного класса бипримитивно конечных групп

В параграфе 1.1 был определён класс групп, бипримитивно конечных относительно данного простого числа p. Любая бесконечная бипримитивно конечная груша содержит собственную бесконечную абелеву подгруппу [121] (см. параграф 1.2). В работе [63] доказана локальная конечность бипримитивно конечных групп, у которых все собственные бесконечные подгруппы абелевы, в этом параграфе доказывается локальная конечность бипримитивно конечных групп при более слабом ограничении, а именно: все собственные бесконечные подгруппы нильпотентности класса ≤ 2.

Теорема 1.5.1 (М.В. Носков). *Бипримитивно конечная группа G с собственными бесконечными подгруппами нильпотентности класса ≤ 2 локально конечна* [40].

Лемма 1.5.1. *Пусть G — бипримитивно конечная группа относительно данного простого числа p, $Z = Z(G)$. Фактор-группа G/Z, бипримитивно конечна относительно p.*

Доказательство. Пусть H — конечное расширение Z и $H \lhd G$, $x, y \in G$, а $x^p, y^p \in H$. Очевидно, достаточно показать, что $\langle xH, yH \rangle$ — конечная подгруппа в G/H. Выберем полную систему представителей $h_1, h_2, \ldots, h_n$ смежных классов фактор-группы H/Z и дополним её элементами $x^p = h_{n+1}, y^p = h_{n+2}$. Если $a_i, b_i \in Z$ такие, что $x^{-1}h_i x = h_i a_i$ и $y^{-1}h_i y = h_k b_i$, то ввиду локальной конечности группы H

$$L = \langle \{a_i\}, \{b_i\}, \{h_i\} \rangle , i = 1, 2, \ldots, n+2,$$

— ее конечная подгруппа и $L \lhd \langle H, x, y \rangle$. Так как $\langle H, x, y \rangle$ бипримитивно конечна и $x^p, y^p \in L$, то $\langle xL, yL \rangle$ конечна в $\langle x, y, H \rangle / L$. Отсюда следует, что $\langle xH, yH \rangle$ конечна в G/H. Лемма доказана.

Следствие 1.5.1. *Если Z — объединение верхнего центрального ряда G, то G/Z — бипримитивно конечная группа.*

Доказательство. Пусть

$$Z(G) = Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_i \subset ...$$

верхний центральный ряд группы G. Доказательство проводим трансфинитной индукцией по длине ряда.

Если $Z = \cup Z_i = Z_\alpha$ и α — непредельное число, то в фактор-группе $G/Z_{\alpha-1}$, центром является $Z_\alpha/Z_{\alpha-1}$ и бипримитивная конечность G/Z следует из леммы 1.5.1. Если α — предельное, то пусть $x^p \in Z_\gamma; y^p \in Z_\beta; \gamma, \beta < \alpha; k = max(\gamma, \beta)$. G/Z_k — бипримитивно конечная группа, т.е. $\langle xZ_k, yZ_k\rangle$ конечна, и, следовательно, конечна $\langle xZ, yZ\rangle$ в фактор-группе G/Z. Следствие доказано.

Лемма 1.5.2. *Бипримитивно конечная труппа G с нильпотентными собственными подгруппами либо локально конечна, либо обладает собственной бесконечной нормальной подгруппой.*

Доказательство. Покажем вначале, либо всякая подгруппа G отлична от своего нормализатора, либо G непроста.

Пусть A — любая собственная подгруппа группы G. Можно считать, что $G_p = \langle x | x^p = 1\rangle$ и не содержится в A. Положим t, t_1 - элементы простого порядка $p \in \pi(A)$, причём $t \in A$, $t_1 \notin A$, $K = \langle t, t_1\rangle$ — конечная группа (определение бипримитивной конечности). Воспользуемся хорошо известным методом О.Ю. Шмидта. Построим последовательности подгрупп D_i и B_i, следующим образом:

$$D_0 = K \cap A; B_i = N_G(D_i); D_i = B_{i-1} \cap A.$$

Так как A с нормализаторным условием, то найдётся такой номер l, что $B_{l-1} \cap A \neq A$, $B_l \cap A = A$, причём B_l содержит H как собственную подгруппу. Если $B_l \neq A$, то $N_G(A) = A$, в противном случае $D_l \triangleleft G$. Если $N_G(A) \neq A$, для любой подгруппы A, то G локально конечна [18].

Предположим теперь, что G не локально конечна и все полученные выше нормальные подгруппы вместе с G_p конечны. Пусть T_1 — любая из них. Рассмотрим $\overline{G} = G/T_1$. $\overline{G}$ — бипримитивно конечная группа и, значит, к ней применимы все приведённые выше рассуждения. Так как $\overline{G}$ не локально конечная группа, то она непроста. Если все её нормальные подгруппы конечны, то пусть $\overline{T_2} \triangleleft G$, $\overline{G_1} = \overline{G}/\overline{T_1}$. Продолжая рассуждения таким образом и рассматривая в G прообразы взятых в фактор-группах нормальных подгрупп, построим цепочку

$T_1 \subset T_2 \subset \ldots$, которая либо обрывается на каком-нибудь бесконечном T_l либо бесконечна. Взяв во втором случае объединение $\cup T_i$, получим в G бесконечную нормальную подгруппу.

Лемма 1.5.3. *Бипримитивно конечная p-группа G о собственными бесконечными подгруппами нильпотентыми класса ≤ 2 локально конечна.*

Доказательство. Предположим, что G не локально конечна. Тогда по лемме 1.5.2 в ней можно выбрать бесконечную максимальную нормальную подгруппу A. Ясно, что $\overline{G} = G/A$ не может быть локально конечной группой, поэтому в ней найдётся собственная подгруппа $\overline{H}$ такая, что

$$\overline{H} = N_{\overline{G}}(\overline{H}).$$

Покажем, что любая подгруппа $\overline{H}^{\overline{g}}$, $\overline{g} \in \overline{G}$, пересекается с $\overline{H}$ по единице. Предположим для некоторого $\overline{g}$, $\overline{H}^{\overline{g}} \cap \overline{H} = \overline{D_0} \neq 1$. Обозначим $\overline{B_i} = N_{\overline{G}}(\overline{D_i})$, $\overline{D_i} = \overline{B_{i-1}} \cap \overline{H}$. Повторяя рассуждения, аналогичные приводимым в доказательстве леммы 1.5.2 и учитывая $\overline{H} = N_{\overline{G}}(\overline{H})$, приходим к противоречив с выбором A.

В дальнейшем будем предполагать G без центра (следствие 1.5.1).

Пусть H — прообраз $\overline{H}$ в G, $c \in G$, $c \notin H$, $H^c = K$ Покажем, что $Z(H) \subseteq A$. Действительно, предположим $z_1 \in Z(H)$, но $z_1 \notin A$, тогда в K найдётся элемент z_2 такой, что $z_2 \in Z(K)$. Так как $H \cap K = A$, то $z_2 \notin H$, $N_G(\langle z_1, z_2 \rangle \cap H)$ не принадлежит H, и поэтому группа $\langle z_1, z_2 \rangle$ должна совпадать с G. Однако A — подгруппа $C_G(z_1)$ и $C_G(z_2)$, а потому должна принадлежать $Z(G)$. Так как по предположению $Z(G) = 1$, получаем противоречие. Очевидно $\langle H, K \rangle = G$, $Z(K) \cap Z(H) = 1$, $G \neq \langle g, A \rangle$. Пусть $a \in H$, $b \in K$, $a, b \notin A$, $r \in Z(H)$. Если $g = ab$, то $g^{-1}rg = b^{-1}rb = rm$, где $m \in Z(K)$, откуда $m = r^{-1}g^{-1}rg \in Z(\langle g, A \rangle)$. Тогда $m \in C_G(g) \cap C_G(b)$. Если $G \neq \langle b, g \rangle$, то, так как $N_G(\langle g, b \rangle \cap K)$ не принадлежит K, найдётся элемент c такой, что $H^c \cap H \neq A$. Значит $\langle g, b \rangle = G$, но тогда она имеет нетривиальный центр. Полученное противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы 1.5.1. Пусть A — некоторая бесконечная собственная подгруппа группы G. Если A вкладывается в возрастающую цепочку подгрупп:

$$a = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_i \subset ...,$$

то возьмем объединение $T = \cup A_i$. Если $T = G$, то G локально конечна, поэтому пусть $T \subset G$. Ясно, что T максимальная и $N_G(T) = T$.

Пусть $D = T \cap T^g \neq 1$ для некоторого $g \in G$. Если D бесконечная подгруппа, то, строя последовательности подгрупп D_i и B_i следующий образом:

$$D_0 = D, B_i = N_G(D_i), D_i = B_{i-1} \cap T,$$

получим с помощью рассуждений, аналогичных приводившимся в лемме 1.5.2, $D_l \triangleleft G$. D_l — бесконечная подгруппа, поэтому всякая собственная подгруппа $\langle \langle g, b \rangle, D \rangle$ нильпотентна. Дальнейшее доказательство локальной конечности в этом случае аналогично доказательству леммы 1.5.3.

Если D — конечная подгруппа, то пусть d — элемент простого порядка p; $d \in D$. Покажем, что пересечение $C_G(d) \cap T$ бесконечно. Ясно, что в этом случае $C_G(d)$ не принадлежит D. Если d можно включить в бесконечную элементарную абелеву подгруппу группы T, то уже $C_T(d)$ бесконечен. Пусть существует максимальная конечная элементарная абелева подгруша, содержащая d, тогда S_p — силовская p-подгруппа в T экстремальна [115].

Если S_p — конечная группа, то бесконечность $C_T(d)$ следует из нильпотентности T, в противном случае это вытекает из бесконечности центра S_p [36].

Последовательности подгрупп:

$$D_0 = T \cap C_T(d), B_i = N_G(D_i), D_i = B_{i-1} \cap T$$

возвращают нас к ситуации, рассмотренной выше.

Если $T \cap T^g = 1$ для любого $g \in G$, то локальная конечность G следует из [63]. Теорема 1.5.1 доказана.

§ 1.6. О счетных сопряженно бипримитивно конечных группах

До сих пор остается открытым вопрос: будет ли счетной всякая периодическая группа, все собственные подгруппы которой счетны? Для локально конечных групп этот вопрос был положительно решен В.П. Шунковым [110], а для бинарно конечных групп — С.П. Струнковым [73]. Легко показать, что из положительного решения указанного вопроса вытекает положительное решение известной проблемы счетности А.Г. Куроша: будет ли счетна группа с условием минимальности?

Указанный вопрос и проблема счетности А.Г. Куроша решаются положительно для периодических групп Шункова. В частности, этот класс групп включает в себя локально конечные группы, группы Голода [9], 2-группы и бинарно конечные группы.

Определение. Пара (G, H), где G — группа и H — ее собственная подгруппа такая, что для любого элемента $g \in G \setminus H$ выполняется условие $H \cap H^g = 1$, называется *парой Фробениуса.* В этом параграфе доказывается

Теорема 1.6.1 (Ал.Н. Остыловский). *Периодическая группа Шункова G счетна, если все ее собственные подгруппы счетны* [46].

Используя доказанную теорему, нетрудно получить

Следствие 1.6.1. *Группа Шункова с условием минимальности счетна.*

Заметим, что счетность группы Шункова без инволюций с условием минимальности вытекает и из [43].

Предварительно докажем лемму.

Лемма 1.6.1. *Пусть G — простая несчетная группа, все собственные подгруппы которой счетны. Тогда любую собственную подгруппу группы G можно вложить в некоторую подгруппу H такую, что (G, H) — пара Фробениуса.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что централизатор любого неединичного элемента группы G счетен, так как в противном случае этот элемент содержится в центре, что противоречит простоте группы G.

Пусть

$$H_0 = B, H_n = \langle H_{n-1} \cup M_{n-1} \rangle \; (n = 1, 2, ...),$$

где

$$M_{n-1} = \{g \in G \setminus H_{n-1} | H_{n-1} \cap H^g_{n-1} \neq 1\}.$$

Индукцией по n докажем, что подгруппа H_n $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ счетна.

Подгруппа H_0 счетна по определению. Предположим, что подгруппа H_{n-1} счетна, и докажем, что счетна подгруппа H_n. Предположим противное. Тогда множество M_{n-1} несчетно. Из предположения индукции и определения множества M_{n-1} вытекает, что для некоторого элемента $a \in H_{n-1}$ существует несчетное множество $N \subseteq M_{n-1}$ такое, что $a^g \in H_{n-1}$ $(g \in N)$. Теперь из предположения индукции следует, что существует несчетное множество $L \subseteq N$ такое, что элементы вида a^g $(g \in L)$ совпадают между собой. Это значит, что $C_G(a)$ несчетен, что противоречит нашему замечанию. Следовательно, множество M_{n-1} счетно. Противоречие. Следовательно, подгруппа H_n счетна.

Объединение H цепочки

$$H_0 < H_1 < ... < H_n < ...$$

счетных подгрупп есть искомая подгруппа. В самом деле, пусть $H \cap H^g \neq 1$ для некоторого элемента $g \in G \setminus H$. Тогда существуют элементы $b, c \in H$ такие, что $b = c^g$. Пусть

$$b \in H_n, c \in H_m, s = max(n, m).$$

Тогда $H_s \cap H_s^g \neq 1$. По построению подгруппы H_{s+1} имеем $g \in H_{s+1} \leq H$. Противоречие. Следовательно, $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.6.1. Предположим, что группа G несчетна. По предложению 1.6.2 достаточно рассмотреть случай, когда группа G неабелева. Несчетная фактор-группа G группы G по ее центру, в силу предложения 1.6.3, снова является группой Шункова. По предложению 1.6.4 G — простая группа и, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы. Поэтому мы можем считать, что группа G проста.

Если в группе G есть элемент простого порядка $p \neq 2$, то по лемме 1.6.1 и предложению 1.6.1 группа G не проста. Противоречие.

Пусть G есть 2-группа и a — некоторая ее инволюция. По лемме 1.6.1 существует пара Фробениуса (G, H) такая, что $a \in H$. Обозначим через g некоторый элемент из $G \setminus H$ и через c — некоторую центральную инволюцию конечной 2-группы $< a, a^g >$. Подгруппа H, очевидно, сильно изолирована. Следовательно, $c \in H$. Элементы c и a^g перестановочны, поэтому $a^g \in H$. Противоречие с тем, что $H \cap H^g = 1$.

Полученные противоречия доказывают теорему.

Предложение 1.6.1. Пусть G — группа, H — ее подгруппа, a — некоторый элемент простого порядка $p \neq 2$ из H, удовлетворяющий условиям:

а) (G, H) — пара Фробениуса;

б) для любого элемента g из $G \setminus H$ группа $\langle a, a^g \rangle$ конечна.

Тогда $G = F_p \lambda H$, где F_p — периодическая группа, не содержащая p-элементов, а H либо обладает единственной инволюцией, либо $H = N_G(a)$ [63].

Предложение 1.6.2. Абелева группа счетна, если все ее собственные подгруппы счетны.

Предложение 1.6.3. Фактор-группа сопряженно бипримитивно конечной группы по периодической подгруппе центра есть сопряженно бипримитивно конечная группа [40].

Предложение 1.6.4. В несчетной группе, все собственные подгруппы которой счетны, любой собственный нормальный делитель содержится в центре [73].

§ 1.7. Расщепляемые слабо бипримитивно конечные группы

Группа называется расщепляемой, если она является объединением некоторой совокупности собственных подгрупп, попарно пересекающихся по единице [7]. Эту совокупность подгрупп называют расщеплением группы, а сами подгруппы — компонентами расщепления. Произвольная подгруппа называется допустимой относительно данного расщепления, если с каждой компонентой расщепления она либо пересекается по единице, либо целиком содержит ее.

Напомним, что группа G называется *слабо бипримитивно конечной*, если любые два элемента одного и того же простого порядка порождают в G конечную подгруппу. Группа $G = F\lambda H$ называется *группой Фробениуса с неинвариантным множителем* H *и ядром* F, если H и F — собственные подгруппы группы G, $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in G \setminus H$ и $G \setminus F^{\#} = \cup H^g$ [63].

Введем следующие обозначения: Φ — класс всех групп G, в которых элемент a действует на ядре F регулярно, Ψ — класс всех групп G, в которых каждый элемент из $G \setminus F$ имеет порядок p, Θ — класс всех групп G, в которых любая пара элементов из $G \setminus F$ порождает конечную подгруппу.

Следуя [7], группы из класса Ψ, не являющиеся p-группами и группами Фробениуса с неинвариантным множителем (a) и ядром F, назовем HT-группами. Следующая теорема обобщает результат Бэра ([7], теорема 8).

Теорема 1.7.1 (А.И. Созутов, А.К. Шлепкин). *Пусть периодическая слабо бипримитивно конечная расщепляемая группа* G *в некотором расщеплении обладает собственной допустимой нормаль-*

ной подгруппой. Тогда G является либо p-группой, либо группой Фробениуса, либо HT-группой [68].

Для доказательства теоремы нам понадобятся леммы 1.7.1–1.7.8.

Лемма 1.7.1 ([7], теорема 8). *Конечная расщепляемая группа с собственной допустимой нормальной подгруппой является либо p-группой, либо группой Фробениуса, либо HT-группой.*

Из доказательства теоремы Фробениуса для бипримитивно конечных групп [63] вытекает

Лемма 1.7.2. *Пусть G — периодическая слабо бипримитивно конечная группа, H — ее собственная подгруппа и $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in G \setminus H$. Тогда $G = F\lambda H$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем H и ядром F, причем для любого $p \in \pi(H)$ имеем $m_p(H) = m_p(G) = 1$ (здесь $m_p(X)$ — p-ранг группы X).*

Из ([66], лемма 5) следует

Лемма 1.7.3. *Пусть G — слабо бипримитивная конечная группа без инволюций и $m_p(G) = 1$ для всех $p \in \pi(G)$. Тогда подгруппа $\Omega_1(G)$, порожденная всеми элементами простых порядков из G, локально конечна и $G = N_G(\langle a \rangle)$ для некоторого элемента a простого порядка.*

В леммах 1.7.4-1.7.8 группа G удовлетворяет условиям теоремы 1.7.1 и F — ее собственная нормальная допустимая подгруппа.

Лемма 1.7.4. *Для любого элемента b из $G \setminus F$ имеем $\langle b \rangle \cap F = 1$. В частности, если элемент b имеет простой порядок, то подгруппа $F \setminus (b)$ принадлежит классу $\Psi \cap \Theta$.*

Доказательство. По условиям теоремы G — расщепляемая группа и F — компонента ее расщепления. Значит, для любого элемента $b \in G \setminus F$, $\langle b \rangle \cap F = 1$, и если $\langle b \rangle$ — простое число, то $F\lambda \langle b \rangle$ принадлежит классу $\Psi \cap \Theta$. Лемма доказана.

Лемма 1.7.5. *Пусть b — элемент порядка pq из $G \setminus F$, где p и q — не обязательно различные простые числа. Тогда (F, b) — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle b \rangle$ и ядром F.*

Доказательство. По условиям теоремы $T = F \cdot (b)$ — расщепляемая группа и F — ее компонента расщепления. По лемме 1.7.4 $\langle b \rangle \cap F = 1$, $T = F\lambda(b)$ и $\langle b \rangle$ — компонента расщепления группы T. Пусть g — произвольный элемент из $F^{\#}$, и предположим, что $\langle b \rangle \cap \langle b^g \rangle \neq 1$. Так как $\langle b \rangle$ — компонента расщепления группы , то $\langle b \rangle = \langle b^g \rangle$. Но тогда $(b, g) = \langle b \rangle \times (g)$ — конечная нерасщепляемая группа вопреки условиям теоремы. Значит, $(b) \cap (b^g) = 1$ для любого $g \in T \setminus (b)$, и лемма вытекает из леммы 1.7.2. Лемма доказана.

Лемма 1.7.6. *Пусть a — элемент простого порядка $q \notin \pi(F)$ из G и $H = N_G(\langle a \rangle)$. Тогда $F = F\lambda H$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем H. В частности, $m_q(G) = 1$ и $m_q(G/F) = 1$.*

Доказательство. По лемме 1.7.4 $G_F(a) = 1$ и $T = F\lambda \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$ и ядром F (лемма 1.7.2). Пусть g — произвольный элемент из $F^{\#}$ и $H \cap H^g = 1$. Можно считать, что $H = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, где b — элемент простого порядка p, и $C_F(b) \neq 1$, что не ограничивает общности рассуждений. По лемме 1.7.5 все элементы из $FH \setminus T$ имеют порядок p и $T\lambda \langle b \rangle \in \Psi \cap \Theta$ в силу слабо бипримитивной конечности группы G. Если $p \in \pi(T)$, то по теореме 3.1 $C_F(a) = 1$ вопреки лемме 1.7.4 и условиям леммы. Если же $p \notin \pi(T)$, то по теореме 27 $C_T(a)$ — бесконечная группа, что снова противоречит равенству $C_F(a) = 1$. Полученное противоречие означает, что $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in FH \setminus H$, и по лемме 1.7.2 $FH = F\lambda H$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем H и ядром F. Лемма доказана.

Лемма 1.7.7. *Пусть $2 \in \pi(G/F)$. Тогда G — либо локально конечная 2-группа, либо группа Фробениуса, либо локально конечная HT-группа.*

Доказательство. Пусть i — инволюция из $G \setminus F$. В силу леммы 1.7.4 $b^i = b^{-1}$ для любого $b \in F$ и F — абелева группа. Предположим вначале, что F — 2-группа. Если не все инволюции группы G содержатся в $T = F\lambda \langle i \rangle$, то ввиду лемм 1.7.5, 1.7.6 для произвольной инволюции $j \in G \setminus T$ имеет место равенство $|ij| = 2$. Из последнего следует, что все 2-элементы группы G порождают элементарную абелеву 2-группу E, и если $E — G$, то лемма доказана.

Пусть $E \neq G$ и L — произвольная конечная $2'$-группа из G. Так как $D = E\lambda L$ — локально конечная расщепляемая группа, то из леммы 1.7.1 легко вытекает, что D — группа Фробениуса с неинвариантным множителем L и ядром E. В частности, E — допустимая нормальная подгруппа в G и $m_p(G) = m_p(G/E) = 1$ для любого $p \in \pi(G/E)$. По лемме 1.7.3 в G найдется элемент a простого порядка $p \neq 2$ такой, что подгруппа $E\lambda \langle a \rangle$ нормальна в G, а по лемме Фраттини получаем $G = F\lambda N_G(\langle a \rangle)$. По лемме 1.7.6 G — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $N_G(\langle a \rangle)$ и ядром E. Таким образом, для данного случая лемма доказана, и отметим, что в этом случае группа G не обязана быть локально конечной (см. ([66], пример 2)).

Пусть все инволюции из G содержатся в T. Тогда iF — единственная инволюция в G/F, и по лемме 1.7.5 G/T — группа без инволюций. Если

$G = T$, то G — локально конечная 2-группа, и лемма доказана. Пусть $G \neq T$ и a — элемент простого порядка $p \neq 2$ из G. Тогда $D = \langle i, a, F\rangle$ — локально конечная расщепляемая группа с допустимой нормальной подгруппой F, и лемма 1.7.2 легко приводит нас к противоречию.

Предположим, что F — $2'$-группа. Пусть не все инволюции группы G содержатся в $= F\lambda\langle i\rangle$ и j — произвольная инволюция из $G\backslash T$. Тогда, как нетрудно убедиться, подгруппа $\langle i, j, F\rangle = Q\lambda\langle i\rangle$ является группой Фробениуса, ядро Q которой — элементарная абелева q-группа (лемма 1.7.1). Также очевидно, что G не содержит элементов порядка q^2. Если a — произвольный элемент порядка q из $G \setminus F$, то $D = \langle i, a, F\rangle$ — локально конечная расщепляемая группа в силу слабо бипримитивной конечности группы G, и по лемме 1.7.1 $D = O_q(D)\lambda\langle i\rangle$ — группа Фробениуса с элементарным абелевым ядром $O_q(D)$. Следовательно, подгруппа V, порожденная в G всеми q-элементами, содержит F в своем центре, и $V\lambda\langle i\rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle i\rangle$ и элементарным абелевым ядром V. Очевидно, $V\lambda\langle i\rangle$ нормальна в G, $G = V\lambda C_G(i)$ и V — допустимая нормальная подгруппа группы G. По лемме 1.7.6 G — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $C_G(i)$ и ядром V, что доказывает лемму в этом случае.

Если же все инволюции из G содержатся в T, то по лемме Фраттини $G = F\lambda C_G(i)$ и G — группа Фробениуса по лемме 1.7.6. Отметим, что и в этом случае G не обязана быть локально конечной группой ([66], пример 2).

Рассмотрим, наконец, случай, когда $2 \in \pi(F)$, но F не 2-группа. Легко убедиться, что в этом случае $C_G(F) \leq F$ и, следовательно, все инволюции из G содержатся в $= F\lambda\langle i\rangle$. Значит, $T \triangleleft G$ и по лемме 1.7.5 G/T — группа без инволюций. Пусть a — элемент простого порядка $p \neq 2$ из $G\backslash F$ и $L = \langle i, a, F\rangle$. Так как G — слабо бипримитивно конечная группа, то L — локально конечная расщепляемая группа с допустимой нормальной подгруппой F и равенство $C_T(F) = F$ и лемма 1.7.1 легко приводят нас к противоречию. Значит, $T = G$ и G — локально конечная HT-группа. Лемма доказана.

Лемма 1.7.8. *Если $|\pi(F)| \geq 2$, то G — либо группа Фробениуса, либо HT-группа.*

Доказательство. В силу леммы 1.7.7 можно считать, что $2 \notin \pi(G/F)$. Покажем, что $m_p(G/F) = 1$ для любого $p \in \pi(F)$. Предположим противное, и пусть $\overline{Q} = \langle\overline{a}\rangle \times \langle\overline{b}\rangle$ — элементарная абелева q-подгруппа ранга 2 из $G = G/F$. Пусть $a, b \in G \setminus F$ такие, что

$aF = \overline{a}, bF = \overline{b}$. По лемме 1.7.4 $|a| = q$, $|b| = q$, и так как G слабо бипримитивно конечна, то подгруппа $Q = \langle a, b\rangle$ из G конечна. Учитывая лемму 1.7.6 и теоремы Силова, приходим к выводу, что $q \in \pi(F)$. Если $F = O_q(F) \times O_{q'}(F)$, то в силу леммы 1.7.6 $G/O_q(F)$ — группа Фробениуса и $m_q(\overline{G}) = 1$ вопреки предположению. Значит, F не разлагается в прямое произведение q-группы и q'-группы. По теореме 26 $O_{q'}(Z(F)) \neq 1$. Тогда подгруппа $O_{q'}(Z(F))Q = B$ локально конечна, и по лемме 1.7.1 B — либо группа Фробениуса, либо HT-группа. Однако обе эти возможности легко приводят нас к противоречию. Таким образом, $m_q(G) = 1$ для любого $q \in \pi(G)$. По лемме 1.7.3 $G = N_G(\langle a\rangle)$ для некоторого элемента a простого порядка. Если полный прообраз $T = F\lambda \langle a\rangle$ группы $\langle a\rangle$ в G является группой Фробениуса, то $G = F\lambda N_G(\langle a\rangle)$, и G — группа Фробениуса по лемме 1.7.6.

Пусть T не является группой Фробениуса. Тогда по лемме 1.7.5 G/T не содержит элементов порядка $|a|$. Если $G = T$, то лемма доказана. Пусть $G \neq T$. Покажем, что это приводит к противоречию. Пусть b — элемент простого порядка q из $G \setminus T$. Без ограничения общности можем считать, что $G = \langle a, b, F\rangle$, и, таким образом, G/T — группа порядка pq. Как доказано выше, $pq \neq p^2$. Если G/F — циклическая группа, то по лемме 1.7.5 G — группа Фробениуса с циклическим неинвариантным множителем порядка pq и ядром F, что противоречит предположению $p \in \pi(F)$.

Значит, G/F — группа Фробениуса порядка pq, и $G = T\lambda \langle b\rangle$ — группа из класса $\Psi \cap \Theta$ по лемме 1.7.4. Если $q \in \pi(T)$, то по теореме 26 $C_F(a)$ содержит q-элементы, что противоречит лемме 1.7.4.

Таким образом, $q \in \pi(T)$ и $T\lambda \langle b\rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle b\rangle$ и ядром F и $L = \langle a, b\rangle$ — конечная подгруппа. Пусть R — локально конечный радикал группы F. Если $\pi(R) \neq \{p\}$, то, рассматривая локально конечную группу Фробениуса RL, покажем, что $O_{p'}(R) \leq C_F(a)$ (теоремы 24, 25), что противоречит включению $F\lambda \langle a\rangle \in \Psi \cap \Theta$ (лемма 1.7.5).

Следовательно, R — p-группа. Но тогда $F = O_p(F) \times O_{p'}(F)$ по теореме 26. Перейдем к фактор-группе $G = G/O_p(F)$. Так как $\overline{G}$ — группа Фробениуса из класса $\Phi \cap \Theta$, то $C_{\overline{T}}(\overline{a})$ — бесконечная подгруппа по теореме 28, и, в частности, $C_{\overline{F}}(\overline{a})$ содержит p'-элементы. Но тогда $F\lambda \langle a\rangle$ не принадлежит классу $\Psi \cap \Theta$, что противоречит лемме 1.7.4. Полученное противоречие означает, что $G = T$, и лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.7.1. Если $2 \in \pi(G/F)$, то теорема вытекает из леммы 1.7.7. Если $|\pi(F)| \geq 2$, то теорема следует из леммы 1.7.8. Таким образом, нам осталось рассмотреть случай, когда F — p-группа, G/F не содержит инволюций и не является p-группой. По лемме 1.7.6 $m_q(G) = 1$ для любого простого числа q из $\pi(G)$, отличного от p, и по ([131], теорема 12.5.2) конечные q-подгруппы из G циклические. Пусть a — элемент порядка q из G, где $q \in \pi(G)$, $q \neq p$. По лемме 1.7.6 $F\lambda N_G(\langle a \rangle)$ — группа Фробениуса, а по ([66], следствие 1) подгруппа $\Omega_1(N_G(\langle a \rangle))$, порожденная всеми элементами простых порядков из $N_G(\langle a \rangle)$ является локально циклической. В частности, любая подгруппа порядка qr из G, где $r \in \pi(G)$, $r \neq p$, является циклической группой.

Пусть g — произвольный элемент из $G \setminus N_G(\langle a \rangle)$ и $L = \langle a, a^g \rangle$. По теореме Фейта–Томпсона L — разрешимая группа. Так как силовские q-подгруппы в L циклические, то $L = T\lambda \langle a \rangle$, где $T = O_{q'}(L)$. Если $p \in \pi(L)$, то все силовские подгруппы в L циклические и L — метациклическая группа (см., например, ([7], §6, лемма 1)). Легко убедиться, что в этом случае L — группа Фробениуса с циклическим ядром и неинвариантным множителем $\langle a \rangle$. Однако, как показано выше, G не содержит таких подгрупп. Полученное противоречие означает, что $p \in \pi(L)$.

Пусть M — минимальная нормальная подгруппа в L. Если M не p-группа, то M — циклическая группа простого порядка r, и по лемме 1.7.6 $FL = F\lambda L$ — группа Фробениуса, что противоречит условию $p \in \pi(L)$. Значит, $M \leq O_p(L)$ и $O_p(L) \neq 1$. Пусть теперь $M \triangleleft L$, $M > O_p(L)$ и M — минимальная подгруппа с данными свойствами. Очевидно, $M = O_p(L)\lambda \langle b \rangle$, где b — элемент простого порядка $r \neq p$, и так как в силу лемм 1.7.4, 1.7.5 G не содержит элементов порядка pr, то M — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle b \rangle$. Далее, по лемме Фраттини $L = O_p(L)\lambda N_L(\langle b \rangle)$, и по лемме 1.7.6 $N_L(\langle b \rangle)$ — p'-группа. Из ([66], следствие 1) вытекает, что $\Omega_1(N_L(\langle b \rangle))$ — циклическая группа, значит, $L = O_p(L)\lambda \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$ и ядром $O_p(L)$.

По теореме 29 $G = F_1\lambda N_G(\langle a \rangle)$, причем F_1 совпадает с объединением ядер групп $\langle a, a^g \rangle$ и является p-группой. Понятно, что $F \leq F_1$, а по лемме 1.7.6 подгруппа $H = N_G(\langle a \rangle)$ не содержит p-элементов. Так как по лемме 1.7.5 в G нет элементов порядка pr, где $r \in \pi(G)$, $r \neq p$, то любой неединичный элемент из H индуцирует на F_1 регулярный автоморфизм. Но тогда по лемме 1.7.2 G — группа Фробениуса с неинвариантным множителем H и ядром F_1. Теорема доказана.

Приведем примеры А.И. Созутова бесконечных слабо бипримитивно конечных групп.

Пример 1.7.1 (А.И. Созутов, [66]). В [2] С.И.Адяном построена некоммутативная группа $A(m, n)$, без кручения, (d) — ее нормальная циклическая подгруппа, и для каждой неединичной циклической подгруппы (c) из G пересечение $(c) \bigcap (d)$ нетривиально. Группа $A(m, n)$ порождается элементами $a_1, ..., a_m$, где $m \geq 2$, не имеет кручения, содержит центральную циклическую подгруппу (d), и фактор-группа $A(m, n)/(d)$ является свободной m-порожденной бесконечной периодической группой показателя n, здесь n — нечетное число и $n \geq 665$.

Если в качестве группы G взять группу Адяна $A(m, p^{\alpha})$, где p — нечетное простое число и $p^{\alpha} \geq 665$, а k положить равным p^{β}, то в качестве группы H получается бесконечная слабо сопряженно бипримитивно конечная p-группа периода $p^{\alpha} + \beta$, обладающую только одной циклической подгруппой порядка p^{γ} для любого $\gamma \leq \beta$.

В более общем случае, когда $\pi = \pi(G/(d))$ конечное множество (это, в частности, выполняется для групп Адяна $A(m, n)$), то, если взять в качестве k число, делящееся на все числа p из π, получается группу H, в которой все элементы простых порядков порождают циклическую подгруппу. В частности, при любом нечетном числе $n \geq 665$ из группы Адяна $A(m, n)$ получается периодическая слабо сопряженно бипримитивно конечная не локально конечная группа, удовлетворяющая условиям:

1) T — локально циклическая группа; 2) T изоморфна $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$; 3) $T = C \times S$, где C — группа типа 1, S — группа типа 2 и $\pi(C) \bigcup \pi(S) = \oslash$.

Отметим, что аналогичные примеры бесконечных периодических групп были построены также А.Ю.Ольшанским [42].

Следующий пример А.И. Созутова m-порожденной слабо бипримитивно конечной группы Фробениуса.

Пример 1.7.2 (А.И. Созутов, [66]). Если H — периодическая группа из примера 1.7.1, полученная из группы Адяна $A(m, n)$, здесь $m \geq 2$, $n \geq 665$, или одна из m-порожденных групп, построенных в [42], а поле $F = GF(p)$, то $G = A\lambda H$ — m-порожденная слабо бипримитивно конечная группа Фробениуса с периодическим не локально конечным неинвариантным множителем и периодическим абелевым ядром.

Пример 2.2 решает вопрос 6.54 из [21]: Построить пример бесконечной конечно порожденной группы Фробениуса.

ГЛАВА 2

Группы Шункова с заданными подгруппами

Во второй главе изучаются группы Шункова с заданными подгруппами либо рядами подгрупп. Рассматриваются локально конечные и локально разрешимые группы Шункова, бесконечные локально конечные подгруппы в группах Шункова, группы со слабо сопряженно бипримитивно конечным централизатором инволюции, 2-полные подгруппы в группе Шункова. Приводятся свойства групп Шункова, некоторые из них без доказательства со ссылкой на работу, в которой доказывается этот результат.

§ 2.1. Локально конечные и локально разрешимые группы Шункова

Опираясь на результаты из §1.3, в настоящем параграфе доказывается локальная конечность и черниковость периодических групп Шункова без инволюций с условием min-inf и устанавливается, что проблему минимальности в случае нечетных групп достаточно решить для простых квазичерниковских [108] групп (нечерниковская группа называется квазичерниковской, если любая ее собственная подгруппа черниковская) вида $G = \left\langle a, g^{-1}ag \right\rangle$ (a, g — некоторые элементы из G, причем a имеет простой порядок).

Группа G называется сопряженно q-бипримитивно конечной ($q \in \pi(G)$), если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента порядка q порождают конечную группу. Если G сопряженно q-бипримитивно конечна для всех $q \in \pi(G)$, то G называется просто сопряженно бипримитивно конечной.

В этом параграфе G будет означать произвольную нечерниковскую квазичерниковскую простую группу (теорема 30), H — некоторую ее бесконечную максимальную подгруппу (если она существует), g — элемент из $G \setminus H$. G, в частности, удовлетворяет условиям:

(i) G — квазичерниковская группа;

(ii) любая собственная бесконечная подгруппа из G содержится в некоторой максимальной подгруппе группы G;

(iii) G — простая группа.

Очевидно,

$$N_G(H) = H.$$

Лемма 2.1.1. *Если R — собственная подгруппа группы G и $R \cap H$ бесконечно, то $R < H$.*

Доказательство. $1 \neq \widetilde{R} \cap \widetilde{H} \lhd \left\langle \widetilde{R}, \widetilde{H} \right\rangle = K$, тогда ввиду (iii), $K \neq G, \widetilde{K} > \widetilde{R}, \widetilde{H}$ (теорема 31), поэтому $\widetilde{K} = \widetilde{H}$ (теорема 32) и $\widetilde{R} < \widetilde{H}$. $\widetilde{R} \lhd \left\langle \widetilde{H}, R \right\rangle = T$, тогда ввиду (iii) $T \neq G$ и $\widetilde{T} = \widetilde{H}$ (теорема 32). Так как $\langle T, H \rangle \rhd \widetilde{H}$, то из (iii) и максимальности H следует $\langle T, H \rangle = H$ и $R < T$. Лемма доказана.

Из леммы 2.1.1 вытекает

$$\widetilde{H}^g \cap \widetilde{H} = 1 \quad (g \in G \setminus H).$$

Лемма 2.1.2. *Пусть $\widetilde{P}$ — силовская p-подгруппа в $\widetilde{H}$. Предположим, что $\widetilde{H}^g \cap H \ni c \neq 1$ и $c^p = 1$. Тогда H не обладает $p-$подгруппой вида $P_2 = \widetilde{P}\lambda((c) \times (t))$.*

Доказательство. Рассмотрим вначале группу $P_1 = \widetilde{P}\lambda(c)$. Если $C_{P_1}(c)$ бесконечен, то по лемме 2.1.1 $C_G(c) < H$. Но так как $\widetilde{H}^g < C_G(c)$, то и $\widetilde{H}^g < H$, что противоречит $\widetilde{H}^g \cap \widetilde{H} = 1 \quad (g \in G \setminus H)$. Следовательно, $C_{P_1}(c)$ конечен. Тогда $Z(P_1)$ — элементарная абелева группа (теорема 33).Так как $Z(P_1) < C_G(c)$ и $C_{\widetilde{H}^g}(c)$ бесконечен, то $Z(P_1) < (H^g \setminus \widetilde{H}^g) \cup \{1\}$ (лемма 2.1.1 и $\widetilde{H}^g \cap \widetilde{H} = 1 \quad (g \in G \setminus H)$) и $S = \widetilde{P}^g \lambda Z(P_1)$ — группа. Из леммы 2.1.1 вытекает, что $C_S(x)$ $(1 \neq x \in Z(P_1))$ конечен. Тогда $Z(P_1) = (z)$ — группа порядка p (теорема 34).

Предположим, что лемма 2.1.2 неверна, т. е. $P_2 < H$. Можно считать, что $|t| = p$. $R = (c) \times (t)$ обладает неединичным элементом r с бесконечным $C_{P_2}(r)$ (теорема 34). Так как $C_{P_2}(c)$ конечен, то можно выбирать $t = r$; $t \in C_G(c)$ и $C_{H^g}(c)$ бесконечен, поэтому $t \in H^g$ (лемма 2.1.1). Если $t \in \widetilde{H}^g$, то $C_G(t) < H^g$ (лемма 2.1.1) и $\widetilde{P} \cap \widetilde{H}^g \neq 1$, что противоречит $\widetilde{H}^g \cap \widetilde{H} = 1 \quad (g \in G \setminus H)$. Следовательно, $t \in H^g \setminus \widetilde{H}^g$. Рассмотрим группы $S_2 = \widetilde{P}^g \lambda((z) \times (t))$ и $L = (z) \times (t)$. Из $\widetilde{H}^g \cap \widetilde{H} = 1 \quad (g \in G \setminus H)$ и леммы 2.1.1 следует, что $C_{S_2}(z)$ конечен. Тогда для некоторого $l \in L \setminus (z) C_{S_2}(l)$ бесконечен (теорема 34). Так как $C_{P_2}(t)$ бесконечен и $z \in Z(P_2)$, то $C_{P_2}(l)$ бесконечен. Из леммы 2.1.1 вытекает $C_{S_2}(l) < H$. Отсюда $\widetilde{H}^g \cap \widetilde{H} \neq 1$, что противоречит $\widetilde{H}^g \cap \widetilde{H} = 1 \quad (g \in G \setminus H)$. Лемма доказана.

Лемма 2.1.3. *Пусть $p \neq 2$. Если $\widetilde{H}^g \cap H \ni c \neq 1$ и $c^p = 1$, то любая силовская p-подгруппа группы H сопряжена с $\widetilde{P}_1 = \widetilde{P}\lambda(c)$.*

Доказательство. Силовские p-подгруппы группы H сопряжены в H (теорема 36, поэтому достаточно показать, что любая p-подгруппа P из H, содержащая P_1, совпадает с P_1. Рассмотрим $\bar{P} = P/\widetilde{P}$.

1. $\bar{P} = (a)$ — циклическая группа порядка p^n. Пусть a — прообраз $\bar{a}$ в P. Тогда $a^{p^{n-1}} = hc$ (h — некоторый элемент из $\widetilde{P}$). Существует $x \in P_1$ такой, что $x^{-1}hcx = c$ (теорема 33), т. е. $a_1^{p^{n-1}} = c$, где $a_1 = x^{-1}ax$. Отсюда $P = \widetilde{P}(a) = \widetilde{P}\lambda(a)$. Без ограничения общности будем считать, что $a = a_1$.

Как показано в лемме 2.1.2, $Z(P_1) = (z)$ — группа порядка p. Легко видеть, что $Z(P) = Z(P_1)$. Предположим, что $n > 1$, например, $n = 2$. Пусть z_2 – элемент из второго гиперцентра группы P и $z_2 \notin (z)$. Имеем: $a^{-1}z_2a = z_2z^i$; $a^{-p}z_2a^p = z_2z^{ip} = z_2$, т. е. $c^{-1}z_2c = z_2$, что противоречит выбору z_2 и тому, что $Z(P_1) = (z)$. Следовательно, $n = 1$ и $P = P_1$.

2. $\widetilde{P}$ — нециклическая группа. Так как $p \neq 2$, то $\bar{P}$ обладает элементарной абелевой подгруппой $(\bar{c}) \times (\bar{t})$ ($\bar{c} = c\widetilde{P}, \bar{t} = t\bar{P}$, t — некоторый элемент из P). Покажем, что это невозможно. Можно считать, что $\bar{P} = (\bar{c}) \times (\bar{t})$, $tct^{-1} = ac$ (a — некоторый элемент из $\widetilde{P}$), и по теореме 33 существует $b \in \widetilde{P}$ такой, что $ac = b^{-1}cb$. Тогда $[t_1, c] = 1$, где $t_1 = bt$. Полагая $t = t_1$, имеем $P = \widetilde{P}((c) \times (t))$. По лемме 2.1.2 $\widetilde{P} \cap ((c) \times (t)) \neq 1$ и $|t| = p^2$. Тогда $1 \neq t^p \in P$ и $[t^p, c] = 1$, т. е. $t^p \in Z(P_1) = (z)$. Так как $t, \widetilde{H}^g < C_G(c)$ и $t^p \in \widetilde{P}$, то $t \in H^g \setminus \widetilde{H}^g$ (лемма 2.1.1) и $\widetilde{P}^g\lambda(t)$ — подгруппа из H^g. Но в наших рассуждениях $|t| = p^2$, что противоречит условию 1. Следовательно, $\widetilde{P}$ — циклическая группа и ввиду условия 1 лемма полностью доказана.

Лемма 2.1.4. *Если G — нечетная группа, то $\widetilde{H}^g \cap H = 1$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $\widetilde{H}^g \cap H \ni c \neq 1$ и $c^p = 1$. По лемме 2.1.3 $P = \widetilde{P}\lambda(c)$ и $S = \widetilde{P}^g\lambda(z)$ — силовские p-подгруппы в H и в H^g соответственно, причем $(c) = Z(S)$ и $(z) = Z(P)$. Существует силовская p-подгруппа $P_1 = \widetilde{P}\lambda(a) < H$ такая, что $P_1^g = S$ и $(z) = (a)^g$. P_1 и P сопряжены в H (теорема 36), т. е. существует $h \in H$ такой, что $P^h = P_1$ и $(c)^h = xa$ (x — некоторый элемент из $\widetilde{P}$). Но xa сопряжен с a некоторым элементом $b \in P_1 < H$ (теорема 33). Таким образом, $P^{hbg} = S$, $(c)^{hbg} = z$, $(z)^{hbg} = c$, т. е. неединичный элемент $hbg \in G$ переставляет подгруппы (c) и (z) и тем самым имеет четный порядок, что противоречит нечетности G. Лемма доказана.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что G — нечетная группа,

a — элемент простого порядка p из $\widetilde{H}$, $L_g = \langle a, g^{-1}ag \rangle$, $g \in G \setminus H$, $\widetilde{P}$ — силовская p-подгруппа из $\widetilde{H}$, P_a — силовская p-подгруппа из L_g, содержащая $R_a = L_g \cap \widetilde{P}$, $P_{g^{-1}ag}$ — силовская p-подгруппа из L_g, содержащая $P_{g^{-1}ag} = L_g \cap \widetilde{P}^g$. Так как $\widetilde{P} \triangleleft H$, то очевидно, $R_a \triangleleft L_g \cap H$.

Следствие 2.1.1 $L_g \not< H^x \quad (x \in G)$.

Доказательство. Предположим $L_g < H^x$. Тогда по лемме 2.1.4 $L_g < \widetilde{H}^x$ и $g^{-1}ag \in C_G(a)$. $C_G(a)$ бесконечен, поэтому $g^{-1}ag \in H$, что противоречит лемме 2.1.4.

Следствие 2.1.2 *Если P_a — черниковская группа, то $P_a < H$.*

Доказательство. Так как $R_a \cap Z(N_{P_a}(R_a)) = 1$ [18], то $N_{P_a}(R_a) < H$ (лемма 2.1.1). Но элементы из R_a не сопряжены в G с элементами из $H \cap P_a \setminus R_a$ (лемма 2.1.4). Тогда $N_{P_a}(N_{P_a}(R_a)) = N_{P_a}(R_a)$. Отсюда ввиду нормализаторного условия в черниковских p-группах [18] $N_{P_a}(R_a) = P_a$ и $P_a < H$.

Лемма 2.1.5. *Силовская p-подгруппа T_p группы $T = H \cap H^g$ циклическая $(p \in \pi(\widetilde{H}), T \neq 1)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда, так как $p \neq 2$, T_p обладает элементарной абелевой подгруппой $(a) \times (b)$. По лемме 2.1.4 $\widetilde{P}\lambda((a) \times (b))$ — подгруппа из H и $\widetilde{P^g}\lambda((a) \times (b))$ — подгруппа из H^g. Можно считать, что $C_{\widetilde{P}}(a)$ бесконечен (теорема 34). Тогда $C_G(a) < H$, что противоречит лемме 2.1.4.

Лемма 2.1.6. *Если L_g конечна, то R_a — циклическая группа.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда порядок нижнего слоя B_a группы R_a больше p. Группа L_g разрешима по теореме Файта—Томпсона (теорема 37). Пусть M — минимальная нормальная подгруппа группы L_g. M — элементарная абелева q-группа [18].

1. $|M| = q^n$ и $q \neq p$. Рассмотрим группу $M\lambda B_a$. Если B_a регулярно действует на M, то $M\lambda B_a$ — группа Фробениуса (теорема 38) и $|B_a| = p$ (теорема 39), что противоречит сказанному о $|B_a|$. Следовательно, найдутся неединичные элементы $d \in M$ и $b \in B_a$, централизующие друг друга. Так как $b \in \widetilde{H}$, то $d \in H$ (лемма 2.1.1) и $C_H(d)$ бесконечен (теорема 35). Тогда $C_G(d) < H$ (лемма 2.1.1), в частности, $M < H$. Отсюда и из $R_a \triangleleft L_g \cap H$ вытекает: $M\lambda B_a = M \times B_a$ и $C_{\widetilde{H}}(M) \neq 1$. Тогда $C_H(M)$ бесконечен (теорема 35). $N_G(M) \cap H > C_H(M)$, поэтому $N_G(M) < H$ (лемма 2.1.1). Следовательно, $L_g < H$, что противоречит следствию 2.1.1 из леммы 2.1.4 и в случае $|M| = q^n, \quad q \neq p$.

2. $|M| = p^n$. По теореме Силова [18] $M < P_a \cap P_{g^{-1}ag}$. Тогда по лемме 2.1.5 $|M| = p$. $M = M_o < Z(P_a)$ и $M_o < Z(P_{g^{-1}ag})$ [18]. Так как

$L_g = \langle a, g^{-1}ag \rangle$, то $M_o < Z(L_g)$. Рассмотрим группу $\bar{L_g} = L_g/M_o$ и $\bar{M_1}$ — ее минимальную нормальную подгруппу. Пусть $\bar{M_1}$ — p-группа и M_1 — ее полный прообраз в L_g. По теореме Силова [18] $M_1 < P_a \cap P_{g^{-1}ag}$. По лемме 2.1.5 и выбору $\bar{M_1}$ M_1 — циклическая группа порядка p^2. По лемме 2.1.4 $\bar{M_1} \times (\bar{a})$ и $\bar{M_1} \times (\overline{g^{-1}ag})$ — группы ($\bar{a} = aM_o$, $\overline{g^{-1}ag} = g^{-1}agM_o$). Следовательно, $\bar{M_1} < Z_1(\bar{L}_g)$. Аналогично рассуждая относительно M_1 и далее, построим максимальную нормальную p-подгруппу M_n группы L_g. Группа M_n циклическая порядка p^{n+1} и $M_{i+1}/M_i < Z(L_g/M_i)$.

Пусть K — полный прообраз минимальной нормальной подгруппы группы L_g/M_n. По лемме Шура $K = M_n \lambda K_q$, где $K_q \simeq K/M_n$. Из нильпотентности K_q [18] и из $M_{i+1}/M_i < Z(L_g/M_i)$ следует нильпотентность K. Тогда $K = M_n \times K_q$ [18] и по теореме Силова $K_q \triangleleft L_g$. Таким образом, в L_g всегда найдется нормальная q-подгруппа ($q \neq p$) и случай 2 сводится к уже рассмотренному случаю 1. Лемма доказана.

Лемма 2.1.7. *Если L_g конечна, то $(a) \triangleleft L_g \cap H$, $O_{p'}(L_g) \cap H < C_G(a)$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из леммы 2.1.6 и из $R_a \triangleleft L_g \cap H$. Пусть $x \in O_{p'}(L_g) \cap H$. По первой части леммы $(a)\lambda(x)$ — группа. С другой стороны, $a^{-1}(x)a < ((a)\lambda(x)) \cap O_{p'}(L_g) = (x)$. Отсюда $(a)\lambda(x) = (a) \times (x)$.

Лемма 2.1.8. *Если L_g конечна, то $L_g = O_{p'}(L_g)\lambda(a)$ — группа Фробениуса.*

Доказательство. $O_{p'}(L_g) = O_{p'} \neq 1$, как было показано в лемме 2.1.6. Пусть $\bar{S}$ — максимальная нормальная p-подгруппа группы $\bar{L}_g = L_g/O_{p'}$ и S — полный прообраз $\bar{S}$ в L_g. По лемме Шура $S = O_{p'}\lambda S_p$, где $S_p \simeq \bar{S}$. По лемме Фраттини $L_g = O_{p'} N_{L_o}(S_p)$ (*). По теореме Силова [18] существует $l \in L_g$, такой, что $P_a^l = p_{g^{-1}ag}$. Пусть $x \in P_a$ и $x^l = g^{-1}ag$. Из леммы 2.1.4 и леммы 2.1.6 вытекает, что $(x) = (a)$, т. е. $(a)^l = (g^{-1}ag)$.

Докажем вначале, что 1) $L_g = O_{p'}\lambda(a)$. Если $N_{L_g}(S_p) < H$, то из $(a) \triangleleft L_g \cap H$ (лемма 2.1.7) и из (*) следует, что l можно выбрать в $O_{p'}$. Отсюда $L_g = \langle a, g^{-1}ag \rangle = \langle l, a \rangle = O_{p'}\lambda(a)$ и 1 доказано. Будем предполагать, что $N_{L_g}(S_p) \not< H$.

Пусть $1 \neq c \in N_{L_g}(S_p) \setminus H$. Тогда $H^c \cap H > S_p$ и по лемме 2.1.5 S_p — циклическая группа. Предположим $a \in S_p$. Так как $S = O_{p'}\lambda S_p \triangleleft L_g$, то по теореме Силова [18] $(a)^l = (a)^y$ (y — некоторый элемент из $O_{p'}$). Отсюда $L_g = \langle a, y \rangle = O_{p'}\lambda(a)$ и 1) в случае $a \in S_p$ доказано.

Предположим $a \notin S_p$. Покажем, что это невозможно. Выберем S_p так, что $P_a \triangleright S_p$. Тогда $S_p \times (a) \triangleleft P_a$ (следствие 2.1.2 из леммы 2.1.4

и лемма 2.1.7) и $C_{L_g}(S_p)\backslash \ni a \neq 1$ (**). Из (*) и выбора $\bar{S}$ следует, что $C_{L_g}(S_p)/S_p$ не обладает p-подгруппами, нормальными в $N_{L_g}(S_p)/S_p$. Ввиду (**) $C_{L_g}(S_p)/S_p$ обладает неединичной максимальной нормальной в $N_{L_g}(S_p)/S_p$ p'-подгруппой $\bar{F}$. Пусть F – полный прообраз $\bar{F}$ в L_g. По лемме Шура $F = S_p \times F_{p'}$, где $F_{p'} \simeq \bar{F}$. Поэтому $F_{p'} \triangleleft N_{L_g}(S_p)$. Тогда $O_{p'}F_{p'}$ — нормальная p'-подгруппа в L_g и из определения $O_{p'}$ следует $F_{p'} < O_{p'}$. Так как a — p-элемент из $C_{L_g}(S_p) \setminus S_p$, то $C_{L_g}(S_p) \neq F$. Отсюда и из определения $\bar{F}$ вытекает, что $C_{L_g}(S_p)/F$ обладает неединичной нормальной в $N_{L_g}(S_p)/F$ p-подгруппой $\bar{K}$. Пусть K — полный прообраз $\bar{K}$ в $C_{L_g}(S_p)$. По теореме об изоморфизмах [18] $O_{p'}K/O_{p'} \simeq K/K \cap O_{p'}$. Так как $K/F_{p'}$ — p-группа и $F_{p'} < K$, то и $K/O_{p'} \cap K$ — p-группа. Отсюда и из определения K, $O_{p'}K/O_{p'}$ — нормальная в $L_g/O_{p'}$ p-подгруппа, строго содержащая $S/O_{p'}$, что противоречит выбору S. Следовательно, $a \in S_p$ и, как отмечалось выше, 1 полностью доказано.

Для доказательства того, что 2) L_g — группа Фробениуса, достаточно показать $C_{O_{p'}}((a)) = C = 1$ (теорема 38). Докажем вначале, что $(O_{p'}, C)$ — пара Фробениуса. Ввиду разрешимости L_g (теорема 37) C содержит неединичную минимальную характеристическую подгруппу C_1. Так как $a \in C_{\widetilde{H}}(C_1)$, то $N_G(C_1) < H$ (теорема 35 и лемма 2.1.1), в частности, $N_{O_{p'}}(C_1) < H \cap O_{p'}$. Отсюда и из леммы 2.1.7 $N_{O_{p'}}(C) = C$.

Пусть $x \in O_{p'} \backslash C$. Предположим, что $C \cap C^x = D \neq 1$ и D_q силовская q-подгруппа в D. Аналогично только что приведенным рассуждениям получаем $N_{O_{p'}}(D_q) < C$. Предположим, что D_q является силовской q-подгруппой в C^x. Тогда по теореме Силова [18] $D_q^{c^x} = D_q^x$ (c^x — некоторый элемент из C^x). Отсюда $c^x x^{-1} = x^{-1}c \in N_{O_{p'}}(D_q) < C$ и $x \in C$, а это противоречит выбору x. Следовательно, D_q не является силовской q-подгруппой в C^x. Ввиду нормализаторного условия в конечных q-группах [18] $N_{C^x}(D_q) \setminus D_q$ содержит неединичный q-элемент y. Как было показано, $N_{O_{p'}}(D_q) < C$, в частности, $y \in D_q$, что противоречит выбору y. Следовательно, $D = C \cap C^x = 1$ ($x \in O_{p'} \setminus C$). Таким образом, $(O_{p'}, C)$ — пара Фробениуса и $O_{p'} = T\lambda C$ [7, 72].

Отсюда $L_g = \langle T\lambda C \rangle \lambda(a)$. Тогда $l \in T$, $L_g = \langle l, a \rangle = T\lambda(a)$ и $C = 1$, а это завершает доказательство леммы.

Лемма 2.1.9. *Пусть G — группа, H — собственная подгруппа, a — элемент простого порядка $p \neq 2$ из H, такие, что $L_g = \left\langle g^{-1}ag, a \right\rangle$ ($g \in G\backslash H$) — группа Фробениуса с неинвариантным множителем (a). Тогда G непроста.*

Доказательство. Лемма является частным случаем теоремы из

[123].

Теорема 2.1.1 (А.Н. Остыловский, В.П. Шунков). *Сопряженно бипримитивно конечная нечетная группа G с условием минимальности локально конечна и является разрешимой черниковской* [43].

Доказательство. Предположим, что G не является черниковской группой. Тогда существует группа F, удовлетворяющая (i) — (iii) (теорема 30) и обладающая бесконечной максимальной подгруппой H (теоремы 1.2.3, 30). Как показано выше, $L_g = \langle a, g^{-1}ag \rangle$ — конечная группа Фробениуса (a — некоторый элемент простого порядка из $\widetilde{H}$, $g \in F \setminus H$). Тогда F непроста (теорема 40), что противоречит (iii). Следовательно, G — черниковская группа. Разрешимость G следует из теоремы Файта–Томпсона (теорема 37). Теорема доказана.

Следствие 2.1.3 (А.Н. Остыловский, В.П. Шунков). *Если существует нечерниковская нечетная группа с условием минимальности, то существует простая квазичерниковская нечерниковская группа $G = \langle a, g^{-1}ag \rangle$, где a, g — некоторые элементы из G, причем a — элемент простого порядка.*

Почти дословно повторяя доказательство теоремы 1.3.5 и используя теорему 2.1.1, легко доказать:

Теорема 2.1.2 (А.Н. Остыловский, В.П. Шунков). *Для периодической сопряженно бипримитивно конечной группы G следующие условия эквивалентны:*

(i) *условие min-inf,*

(ii) *условие минимальности* [43].

Доказательство. Предположив, что G удовлетворяет (i) и не удовлетворяет (ii), без ограничения общности будем считать, что G удовлетворяет условию:

(iii) любая подгруппа бесконечного индекса удовлетворяет (ii).

Ввиду теоремы 1.2.3 и эквивалентности условий (i) и (ii) в периодических абелевых группах [13] максимальная полная абелева подгруппа A из G нетривиальна. Пусть $T = \langle g^{-1}Ag / g \in G \rangle$. Из (iii) и теоремы 31 следует, что T удовлетворяет (ii). Любые две инволюции в периодической группе порождают конечную подгруппу, поэтому T — 2-бипримитивно конечная группа. Тогда силовские 2-подгруппы в T (S — одна из них) сопряжены (теорема 1.3.4). По лемме Фраттини $G = N_G(S)T$. Если $|G : N_G(S)|$ бесконечен, то из (iii) вытекает, что G удовлетворяет (ii) вопреки предположению. Следовательно, $|G : N_G(S)|$ конечен. Так как $|T : T \cap N_G(S)| \leq |G : N_G(S)|$, то $T = T \cap N_G(S)$ (теорема 31) и $S \triangleleft T$. Отсюда и из черниковости S [106]: $\bar{T} = T/S$ — нечетная сопряженно бипримитивно конечная группа (теорема 7). По теореме 2.1.1 $\bar{T}$ — черниковская группа, и, следовательно, T — черниковская группа (теорема 41). Ввиду выбора $A\ \widetilde{T} = A$. Группа G/A обладает бесконечной полной абелевой подгруппой A_1/A (теорема 1.2.2). Тогда A_1 — полная абелева группа [24] и $A_1 \neq A$, что противоречит выбору A. Следование $(ii) \Rightarrow (i)$ очевидно, и теорема полностью доказана.

Из теорем 2.1.1, 2.1.2 вытекает:

Теорема 2.1.3 (А.Н. Остыловский, В.П. Шунков). *Периодическая сопряженно бипримитивно конечная без инволюций группа с условием min-inf локально конечна и является разрешимой черниковской* [43].

§ 2.2. Бесконечные локально конечные подгруппы в группах Шункова

В этом параграфе найдены достаточные признаки вложения элемента простого порядка в относительно хорошую бесконечную подгруппу (с нетривиальной конечной нормальной подгруппой) или в бесконечную локально конечную подгруппу.

В качестве приложения теорем 3.3.1, 2.2.2 дается описание периодических сопряженно бипримитивно конечных групп без инволюций с условием примарной минимальности. Оказалось, что все такие группы локально конечны (теорема 2.2.3). Теорема 2.2.3 доказана В.П. Шунковым совместно с А.К. Шлепкиным.

Лемма 2.2.1. *Пусть G — группа, $\mathfrak{M}$ — бесконечное множество конечных разрешимых подгрупп из G, содержащих некоторый элемент a простого порядка p, удовлетворяющего следующему условию *): элемент a не содержится ни в бесконечной подгруппе с нетривиальной конечной нормальной разрешимой подгруппой, ни в бесконечной локально конечной и локально разрешимой подгруппе. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_1 \bigcup \mathfrak{A}_2 \bigcup \ldots \bigcup \mathfrak{A}_n \bigcup \mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{Y}$ — конечное множество и n — конечное число, а пересечение подгрупп любого бесконечного подмножества множества $\mathfrak{A}_i$ совпадает с пересечением T_i подгрупп множества $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

2) в каждой подгруппе, содержащей a, из T_i абелева нормальная подгруппа является циклической, содержащейся в $C_G(a)$;

3) если H — подгруппа из G и F — ее нильпотентный радикал, то $H = F_H \leftthreetimes T_i$ и $F_H C_H(a)$ — группа Фробениуса с ядром F_H и неинвариантным множителем $C_H(a)$;

4) силовские p-подгруппы из T_i — циклические или обобщенные группы кватернионов.

Доказательство. Возьмем произвольное бесконечное подмножество $\mathfrak{M}_1$ множества $\mathfrak{M}$ и обозначим через S_1 пересечение всех подгрупп из $\mathfrak{M}_1$. Множество $\mathfrak{M}_1$ может обладать таким бесконечным подмножеством $\mathfrak{M}_2$, что пересечение S_2 всех подгрупп из $\mathfrak{M}_2$ отлично от S_1. Относительно $\mathfrak{M}_2$ рассуждаем аналогично и т.д. и в результате этого получим строго возрастающую цепочку конечных подгрупп

$$S_1 < S_2 < \ldots < S_k < \ldots$$

Если бы эта цепочка не обрывалась на конечном номере, то ее объединение было бы бесконечной локально конечной подгруппой, содержащей элемент a вопреки условию *). Следовательно, построение этой цепочки оборвется на некотором номере k, т. е. множество $\mathfrak{M}_k$ обладает следующим свойством 1): пересечение всех подгрупп из бесконечного подмножества совпадает с пересечением всех подгрупп из самого бесконечного множества. Для множества $\mathfrak{M}_k$ таким пересечением является подгруппа $T_1 = S_k$.

Очевидно, объединение всех подмножеств множества $\mathfrak{M}$, обладающих свойством 1) и имеющих в качестве пересечений своих подгрупп подгруппу T_1, также обладает свойством 1). Следовательно, существует максимальное подмножество $\mathfrak{N}$, обладающее свойством 1) и имеющее в качестве пересечения всех своих подгрупп подгруппу T_1.

Исследуем подгруппы из $\mathfrak{N}$.

Пусть H — произвольная подгруппа из $\mathfrak{N}$, B — подгруппа из T_1, и такая, что $N_G(B)$ конечен. Докажем, что

а. Лишь для конечного числа подгрупп H из $\mathfrak{N}$ имеет место $N_H(B) \not\leq T_1$.

Действительно, если это не так, то в $\mathfrak{N}$ существует бесконечное подмножество $\mathfrak{B}$ и такое, что $N_H(B) \not\leq T_1$ $(\forall H \in \mathfrak{B})$. Так как, по предположению, $N_G(B)$ конечен, то, очевидно, в этом случае $\mathfrak{B}$ обладает таким бесконечным подмножеством $\mathfrak{B}_1$, что

$$(\bigcap_{H\in\mathfrak{B}_1} H)\bigcap(N_G(B)\setminus T_1) \ \text{ непусто;}$$

но тогда множество $\mathfrak{N}$ не обладает свойством 1) вопреки предположению. Полученное противоречие доказывает утверждение а.

Число подгрупп из T_1 с конечными нормализаторами в G конечно. Отсюда и из а вытекает, что $\mathfrak{N}$ обладает подмножеством $\mathfrak{A}_1$, не содержащим лишь конечное число подгрупп из $\mathfrak{N}$, и таким, что

б. $T_1 \in \mathfrak{A}_1$ для каждой подгруппы B из T_1 с конечным $N_G(B)$ имеет место

$$N_H(B) \leq T_1 \quad (\forall H \in \mathfrak{A}_1).$$

Далее, ввиду условия *) и конечности $C_G(a)$, каждый неединичный элемент из $C_G(a)$ почти регулярен в G.

Отсюда и из б вытекает, что

в. Для любой подгруппы H из $\mathfrak{A}_1$ нормализатор любой неединичной подгруппы из $C_H(a)$ в H принадлежит T_1.

Обозначим через F_H нильпотентный радикал подгруппы H из $\mathfrak{A}_1$ и докажем, что

г. $F_H\bigcap T_1 = 1 \quad (\forall H \in \mathfrak{A}_1)$.

Предположим, что для некоторой подгруппы $K \in \mathfrak{A}_1$ пересечение $D = F_K\bigcap T_1 \neq 1$. Так как

$$F_K \lhd K, \quad T_1 \neq K \quad (T_1 \in \mathfrak{A}_1)$$

и в F_K выполняется нормализаторное условие [18], то $a \in N_G(D)$ и $N_K(D) \not\leq T$. Бесконечность $N_K(D)$ противоречила бы условию *), а поэтому $N_G(D)$ конечен. Однако и в этом случае мы получаем противоречия с $N_K(D) \not\leq T$ и утверждением б. Следовательно, утверждение г верно.

Пусть Q — элементарная абелева q-подгруппа из T_1 и $a \in N_G(Q)$.

д. $q \notin \pi(F_H) \quad (\forall H \in \mathfrak{A}_1)$.

Предположим, что д неверно. В этом случае $\mathfrak{A}_1$ обладает подгруппой M, такой, что $q \in \pi(F_M)$. Пусть P — силовская q-подгруппа из M и $Q < P$. Так как $q \in \pi(F_M)$ и $Q\bigcap F_M = 1$, то $P_1 = F_M\bigcap P \neq 1, P_1 \lhd P$ и $S = N_M(Q)\bigcap P_1 \neq 1$ [18]. Но $a \in N_G(Q)$ и $Q \neq 1$, и, согласно условию *), $N_G(Q)$ — конечная группа, а поэтому ввиду утверждения б $S < N_M(Q) \leq T_1$. Однако $1 \neq S \leq F_M\bigcap T_1$, что противоречит утверждению г. Следовательно, $q \notin \pi(F_H)$, и д доказано.

Теперь покажем, что Q — циклическая группа и $Q < C_G(a)$. Сначала рассмотрим случай, когда $q = p$. Предположим, что $Q \neq (a)$, а так как $a \in N_H(Q)$, то в Q существует элемент r порядка q и такой, что $r \in C_H(a)$ и $r \notin (a)$ [78]. Но тогда, очевидно, не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что $Q = (r) \times (a)$. Согласно утверждению д, $q \notin \pi(F_H)$ и некоторый элемент порядка q из Q централизует неединичный элемент из F_H (теорема 39). Однако это противоречит утверждениям в и г. Случай $q = p$ рассмотрен.

Пусть $q \neq p$. По теореме Машке [18] $Q = R_1 \times R_2$, где $R_1 < G_H(a)$ и $R_2\lambda(a)$ — либо группа Фробениуса, либо $R_2 = 1$. Если бы R_1 не была циклической группой, то на основании утверждения д и теоремы 39 заключили бы, что некоторый элемент h порядка q из R_1 централизует единичный элемент из F_H. Но тогда, ввиду утверждения в, $C_H(h) \leq T_1$ и $F_H \bigcap T_1 \neq 1$ вопреки утверждению г). Следовательно, R_1 — циклическая группа.

Докажем, что $R_2 = 1$. Предположим противное, т. е. $R_2 \neq 1$. Ввиду утверждений в, г элемент a индуцирует в $F_H\lambda R_2$ регулярный автоморфизм простого порядка (это нетрудно показать), и, по теореме Томпсона [152], $F_H\lambda R_2$ — нильпотентная группа. Но $q \notin \pi(F_H)$, а поэтому $R_2 < X = C_H(F_H)F_H$. Подгруппа X разрешима, $X \triangleleft H$ и $X \neq F$, $F < X$, а так как $X/F \triangleleft H/F$, то X/F обладает нетривиальной абелевой подгруппой $\bar{C}$ нормальной в H/F. Очевидно, полный прообраз C подгруппы $\bar{C}$ является нормальной нильпотентной подгруппой в H и $C \neq F_H$, $F_H < C$. Но тогда F_H не есть нильпотентный радикал вопреки предположению теоремы. Следовательно, $R_2 = 1$ и Q — циклическая группа из $C_G(a)$. В частности, мы доказали, что в силовской p-подгруппе из T_1 элемент a содержится в единственной элементарной абелевой подгруппе. В этом случае, как известно [78], силовские p-подгруппы из T_1 — циклические или обобщенные группы кватернионов. Одновременно мы также доказали, что

ж. $F_H C_H(a)$ — есть группа Фробениуса с неинвариантным множителем $C_H(a)$ и ядром F_H. Остается доказать, что $H = F_H\lambda T_1$.

Рассмотрим фактор-группу $\bar{H} = H/F_H$, и пусть $\bar{L}$ — элементарная абелева нормальная q-подгруппа из $\bar{H}$, $\bar{a} = aF_H$. Если бы $C_{\bar{H}}(a) \bigcap \bar{L} = 1$, то отсюда и из утверждения ж вытекало бы, что a индуцирует регулярный автоморфизм простого порядка в подгруппе L (L — полный прообраз $\bar{L}$), и L была бы нильпотентной [152]. А так как $L \triangleleft H$, $F_H \leq L$ и $F_H \neq L$, то нильпотентность L противоречила бы определению подгруппы F_H. Следовательно, $C_{\bar{H}}(\bar{a}) \bigcap \bar{L} \neq 1$ и, кроме этого, $p \notin \pi(F_H)$ (утверждение д). Отсюда и из леммы Фраттини вытекает, что некоторый неединичный q-элемент h из L принадлежит $C_H(a)$. Но тогда, согласно утверждению д, $q \notin \pi(F_H)$. В этом случае, используя известные факты о конечных разрешимых группах [18], представим L в виде $L = F_H \lambda R$, где R — элементарная абелева q-группа и $h \in R$. На основании утверждения в заключаем, что $R < T_1$. Очевидно, $a \in N_H(R)$ и, по доказанному выше, $R = (h) < C_G(a)$. По лемме Фраттини $H = F_H H_G((h))$ и, ввиду утверждений в, г, $N_G((h)) \leq T_1$ и $H = F_H \lambda T$.

Если множество $\mathfrak{M} \backslash \mathfrak{A}_1$ бесконечно, то, используя аналогичные соображения, что и при построении подмножества $\mathfrak{A}_1$, построим подмножества $\mathfrak{A}_2$ с пересечением T_2 своих подгрупп, обладающие всеми свойствами, перечисленными в лемме. Ввиду самого способа построения подмножеств $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$, подгруппы T_1 и T_2 различны. Рассуждая таким образом далее, построим последовательность подмножеств

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k, \ldots,$$

где $\mathfrak{A}_k$ — подмножество из $\mathfrak{M} \setminus (\mathfrak{A}_1 \bigcup \mathfrak{A}_2 \bigcup \ldots \bigcup \mathfrak{A}_{k-1})$, обладающее всеми свойствами, перечисленными в лемме, с пересечением T_k своих подгрупп, причем

$$T_k \neq T_1, T_2, \ldots, T_{k-1} \ (k = 2, 3, \ldots).$$

По доказанному выше, T_k нормализует некоторую неединичную циклическую подгруппу из $C_G(a)$. А число таких циклических подгрупп из $C_G(a)$ конечно, и их нормализаторы в G конечны (условие *). Отсюда следует, что число подгрупп типа T_k конечно. Но тогда, очевидно, процесс построения последовательности $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k, \ldots,$ оборвется на конечном номере n, т. е.

$$\mathfrak{M} \setminus (\mathfrak{A}_1 \bigcup \mathfrak{A}_2 \bigcup \ldots \bigcup \mathfrak{A}_n) = \mathfrak{Y}$$

есть конечное множество. Лемма доказана.

Теорема 2.2.1 (В.П. Шунков). *Пусть G — группа, содержащая абелеву подгруппу бесконечного периода, t — элемент простого порядка p из G, удовлетворяющие следующему условию **): $\langle t, g^{-1}tg \rangle$ $(\forall g \in G)$ — конечная разрешимая группа.*

Тогда элемент t содержится либо в бесконечной подгруппе с нетривиальной конечной нормальной разрешимой подгруппой, либо в бесконечной локально конечной и локально разрешимой подгруппе [125].

Доказательство. Пусть A — абелева подгруппа бесконечного периода группы G. Очевидно, нам достаточно рассмотреть случай, когда $C_G(t)$ — конечная группа.

Итак, пусть $C_G(t)$ конечен. Но тогда, очевидно, множество $\mathfrak{M}$ подгрупп типа $\langle t, g^{-1}tg\rangle$ $(\forall g \in A)$ бесконечно. Предположим, что теорема неверна. При этом предположении мы находимся в условиях леммы. По лемме 2.2.1, $\mathfrak{M}$ разбивается на подмножества, обладающие свойствами, перечисленными в ней:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_1 \bigcup \mathfrak{A}_2 \bigcup \ldots \bigcup \mathfrak{A}_n \bigcup \mathfrak{Y}.$$

Введем обозначения: F — совокупность элементов нильпотентных радикалов подгрупп из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}$ — множество элементов вида rl

$$(r \in N_G((t)),\ l \in T_i,\ i = 1, 2, \ldots, n), X = \{g \in A | \langle t, g^{-1}tg\rangle \in \mathfrak{A}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Очевидно, $\mathfrak{B}$ конечно, а X не содержит лишь конечное число элементов из A.

Пусть b — произвольный элемент из X. Ввиду определения X найдется такой номер k, что $\langle t, b^{-1}tb\rangle \in \mathfrak{A}_k$. На основании теоремы Силова [18] и леммы 2.2.1 заключаем, что в F и T_k существуют соответственно такие элементы c и l_1, что $l_1cb^{-1}tbc^{-1}l_1^{-1} \in (t)$. Очевидно, $bc^{-1}l_1^{-1} = r_1 \in N_G((t))$ и $b = r_1l_1c = sc(s \in \mathfrak{B}, c \in F)$.

Таким образом, доказано:

а. Каждый элемент b из X есть произведение некоторого элемента s из $\mathfrak{B}$ на некоторый элемент c из $F : b = sc$.

Так как $\mathfrak{B}$ конечно, то из а вытекает, что X обладает разбиением на конечное число подмножеств

$$X = X_1 \bigcup X_2 \bigcup X_3 \bigcup \ldots \bigcup X_m, \qquad 2.2.1$$

таким, что любой элемент $b \in X_i$ имеет вид $b = s_ic_b$, где s_i, c_b — некоторые элементы соответственно из $\mathfrak{B}, F,\ i = 1, 2, \ldots, m$.

Очевидно, что для любого подмножества J из A существует такой номер k, что $J_k = J \bigcap X_k$ бесконечно.

б. Докажем, что A — периодическая группа. Предположим, что A обладает бесконечной циклической подгруппой J. В этом случае подмножества J_k обладают двумя различными элементами b_1 и b_2. Согласно утверждению а) и разбиению (2.2.1)

$$b_1 = s_kc_1,\ b_2 = s_kc_2\ (c_1, c_2 \in F).$$

Отсюда получим

$$d = b_2^{-1}b_1 = c_2^{-1}c_1 = (tc_2)^{-1}tc_1.$$

Далее, d принадлежит бесконечной циклической подгруппе J и $d \neq 1$, а поэтому $|d| = \infty$. Но, с другой стороны, $d \in L = \langle tc_1, tc_2 \rangle$ и элементы tc_1, tc_2 сопряжены с t (определение множества F и лемма 2.2.1) и, по условию **), L конечна. А так как $d \in L$, то $|d| < \infty$ вопреки выше доказанному $|d| = \infty$. Полученное противоречие означает, что в A нет элементов бесконечного порядка.

Итак, A — периодическая группа.

Так как в G выполняется условие *) леммы 2.2.1, то $C_G(t)$ конечен, нормализаторы неединичных циклических подгрупп из $C_G(t)$ в G конечны и их число конечно. Следовательно, порядки этих нормализаторов ограничены некоторым числом f.

Докажем, что

в. A не обладает квазициклической q-подгруппой J_k. Порядки элементов из J_k не ограничены в совокупности, а поэтому существует бесконечная последовательность элементов из J_k

$$b_1 = s_kc_1,\ b_2 = s_kc_2, \ldots,\ b_m = s_kc_m, \qquad (2.2.2)$$

такая, что $|b_m^{-1}b_1| > f$ $(m = 2, 3, \ldots)(c_m \in F, m = 1, 2, \ldots)$. Из (2.2.2) получим $d_{m-1} = b_m^{-1}b_1 = c_m^{-1}c_1 = (tc_m)^{-1}tc_1$ $(m = 2, 3, \ldots)$.

Элементы tc_m, tc_1 сопряжены с t (определение F и лемма 2.2.1), и, по условию **), H_{m-1} $\langle tc_1, tc_m \rangle$ — конечная группа. Но тогда последовательность

$$H_1, H_2, \ldots, H_i, \ldots \qquad (2.2.3)$$

бесконечна, и, не нарушая общности рассуждений, будем считать, что все подгруппы из (2.2.3) различны. Пересечение всех подгрупп последовательности (2.2.3) содержит элемент tc_1. Если бы для последовательности (2.2.3) и элемента tc_1 не выполнялось условие *), то, ввиду сопряженности tc_1 и t, оно не выполнялось бы и для t вопреки предположению. Следовательно, последовательность (2.2.3) удовлетворяет условиям леммы, а поэтому, не нарушая общности рассуждений, будем считать, что подгруппа H_i обладает свойствами:

1) $H_i = F_i \lambda T$, где F_i — нильпотентный радикал подгруппы $H_i (i = 1, 2, \ldots)$;

2) T есть пересечение всех подгрупп из (2.2.3) и является подгруппой из нормализатора некоторой нееденичной циклической подгруппы из $C_G(tc_1)$;

3) из утверждения (2.2.2) и сопряженности t и tc_1 вытекает, что $l = |T| \leq f$.

По определению, $d_i \in H_i$ и $|d_i| > f$. Отсюда и из утверждений 1), 3) получим $d_i^l \in F_i (i = 1, 2, \ldots)$, причем $d_i^l \neq 1$. Далее, $d_i \in J$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и J — квазициклическая группа, а она, как известно, обладает единственной подгруппой R простого порядка. Но тогда $R < F$ $(i = 1, 2, \ldots)$, поскольку $d_i^l \in F_i \cap J$ и $d_i^l \neq 1$, а это означает еще, что $R < T$. Следовательно, $R < T \bigcap F_i$ и $R \neq 1$ вопреки утверждению 1). Полученное противоречие означает, что A не обладает квазициклическими подгруппами.

Теперь докажем, что

г. A не обладает силовской q-подгруппой J бесконечного периода.

Если бы J обладало конечной максимальной подгруппой конечного периода, то J была бы бесконечной черниковской группой (теорема 43) и, в частности, в ней существовала бы квазициклическая подгруппа вопреки утверждению в. Следовательно, все максимальные подгруппы конечного периода из J бесконечны. Отсюда и из бесконечности периода J вытекает, что для любого числа q^i $(i = 1, 2, \ldots)$ множество элементов порядка q^i бесконечно.

Теперь докажем существование такого номера k, что порядки элементов из $J_k = X_k \bigcap J$ не ограничены в совокупности и J_k обладает бесконечным подмножеством элементов заданного порядка. Действительно, предположим, что J_s при любом s не обладает отмеченными выше свойствами. Это означает, что в J_s либо порядки элементов ограничены в совокупности, либо для каждого числа $q^i (i = 1, 2)$ существует лишь конечное число элементов порядка q^i. А так как

$$Q = J_1 \bigcup J_2 \bigcup \ldots \bigcup J_n$$

не содержит лишь конечное число элементов из J и n — конечное число, то, очевидно, и для J справедливо это утверждение. Но тогда мы придем к противоречию с тем, что J обладает бесконечным периодом и для любого числа $q^i (i = 1, 2, \ldots)$ множество элементов порядка q^i из J бесконечно. Следовательно, для некоторого k подмножество J_k обладает бесконечным подмножеством L элементов порядка u, причем порядки элементов из J_k не ограничены в совокупности. Элементы из

L упорядочим в виде последовательности

$$b_2, b_3, \dots, b_i. \qquad (2.2.4)$$

Так как J_k обладает элементами сколь угодно больших порядков, то в J_k выберем такой элемент b_1, чтобы выполнялось неравенство $|b_1^u| > f$. Добавим b_1 к последовательности (2.2.4) и с учетом разбиения (2.2.1) и утверждения а напишем

$$b_1 = s_k c_1,\ b_2 = s_k c_2, \dots, b_i = s_k c_i \dots (c_i \in F, i = 1, 2, \dots).$$

Отсюда получим $b_i^{-1}b_1 = c_i^{-1}c_1 = (tc_i)^{-1}tc_1$ $(i = 2, 3, \dots)$. По предположению, $u = |b_i|$ $(i = 2, 3, \dots)$ и $b_i^{-1}b_1 = b_1 b_i^{-1}$, а поэтому $(b_i^{-1}b_1)^u = b_1^u$. Следовательно,

$$b_i^u \in \text{гр}(tc_1, tc_i) \ \ (i = 2, 3, \dots)$$

и $|b_1^u| > f$. Теперь, рассуждая так же, как и при рассмотрении случая в, мы придем к противоречию с условием *). Полученное противоречие означает, что $\pi(A)$ бесконечно.

Чтобы завершить доказательство теоремы, остается доказать невозможность случая

д. $\pi(A)$ бесконечно.

Если q — произвольное число из $\pi(A)$, то, не нарушая общности рассуждений, будем предполагать, что $q > f$. Как известно [18], A разлагается в прямое произведение примарных силовских подгрупп. Из каждого множества этого произведения выберем по одному элементу простого порядка и составим подмножество J. Так как $\pi(A)$ — бесконечное подмножество, то J бесконечно и для некоторого числа k, $J_k = X_k \bigcap J$ также бесконечно.

Пусть $b_1, b_2, \dots, b_i$ — элементы множества J_k и $p_1, p_2, \dots, p_i$ — соответственно их порядки. Так как $b_i b_i^{-1} = b_i^{-1} b$ и $(p_i, p_1) = 1$ $(i = 2, 3, \dots)$, то $b_1 \in (b_i^{-1}b_1)$ [18] и, кроме этого, еще $|b_1| = p_1 > f$. Дальше дословно повторим с соответствующего места рассуждения из рассмотренного случая в и получим противоречие с условием *).

Все возможные случаи разработаны, и каждый из них привел нас к противоречию с условием *) леммы 2.2.1, а это означает, что утверждение теоремы верно. Теорема доказана.

Теорема 2.2.2 (В.П. Шунков). *Во всякой бесконечной периодической сопряженно бипримитивно конечной группе без инволюций, удовлетворяющей условию минимальности для абелевых p-подгрупп по* *всем p, каждый элемент простого порядка содержится в бесконечной локально конечной подгруппе* [125].

Доказательство. Пусть G — группа, удовлетворяющая условию теоремы. Ввиду этих условий и по теореме 1.2.2, G обладает бесконечной абелевой периодической подгруппой A. Подгруппа A удовлетворяет условию минимальности для p-подгрупп по всем p, а поэтому ее силовская p-подгруппа либо конечна, либо является конечным расширением бесконечной полной подгруппы. Отсюда по теореме 43, очевидно, вытекает бесконечность периода подгруппы A.

Пусть t — произвольный элемент простого порядка из G. Так как G сопряженно бипримитивно конечна, то подгруппы $\langle t, g^{-1}tg \rangle$ $(\forall g \in G)$ конечны нечетного порядка и, по теореме Файта–Томпсона (теорема 37), разрешимы. Следовательно, тройка (G, A, t) удовлетворяет всем условиям теоремы 2.2.1. По этой теореме G обладает бесконечной подгруппой H_1, содержащей t и являющейся либо локально конечной и локально разрешимой, либо в H_1 существует конечная неединичная нормальная разрешимая подгруппа R_1. Если H_1 локально конечна, то утверждение теоремы доказано. Пусть H_1 — не локально конечная группа. Фактор-группа $G = H_1/R_1$ сопряженно бипримитивно конечна и, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы, а поэтому, по тем же соображениям, что и выше, она обладает абелевой подгруппой A_1 бесконечного периода. Обозначим через t_1 элемент из G_1, выбранный следующим образом: при $t \in R_1$ положим $t_1 = tR$; если же $t \in R_1$, то в качестве t_1 выбираем из G_1 некоторый элемент простого порядка. Очевидно, тройка (G_1, A_1, t_1) удовлетворяет всем условиям теоремы 2.2.1 и, по тем же соображениям, что и выше, G_1 обладает бесконечной подгруппой $\bar{H}_2$ с неединичной конечной нормальной разрешимой подгруппой $\bar{R}_2$ в случае, если $\bar{H}_2$ не локально конечна, и $t_1 \in \bar{H}_2$ $(H_2, R_2$ — полные прообразы соответственно $\bar{H}_2$ и $\bar{R}_2$ в $H_1)$. Относительно фактора-группы H_2/R_2 рассуждаем аналогично предыдущему. Рассуждая таким образом, построим убывающую цепочку бесконечных подгрупп

$$H_1 \geq H_2 \geq \ldots \geq H_u \geq \ldots \qquad (2.2.5)$$

и строго возрастающую цепочку конечных подгрупп

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_u < \ldots, \qquad (2.2.6)$$

причем $R_u \triangleleft H_u$.

Если процесс построения цепочки (2.2.5) оборвется на конечном номере k, то это будет означать, что H_{k+1} — бесконечная локально конечная подгруппа и $t \in H_{k+1}$. Пусть цепочка (2.2.5) не обрывается на конечном номере. Но тогда и цепочка (2.2.6) не оборвется на конечном номере, и ее объединение R будет бесконечной локально конечной группой, причем $t \in N_G(R)$. По теореме Шмидта (теорема 42), $\langle R, t\rangle$ — локально конечная подгруппа из G, и теорема доказана.

Замечание 2.2.1. *Теорема 2.2.2 остается справедливой, если предположение, что G не содержит инволюций, заменить следующим: любая конечная подгруппа из G разрешима.*

Замечание 2.2.2. *Группа Новикова—Адяна [37] удовлетворяет условию минимальности для абелевых p-подгрупп по всем p [37]. Но в ней всякая максимальная локально конечная подгруппа конечна (даже циклическая) [1], а поэтому в теореме 2.2.2 предположение, что G сопряженно бипримитивно конечна, является существенным.*

Теорема 2.2.3 (В.П. Шунков, А.К. Шлепкин). *Всякая периодическая сопряженно бипримитивно конечная группа без инволюций с условием примарной минимальной локально конечна* [125].

Доказательство. Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы, и предположим, что для G теорема неверна. Ввиду теоремы 45, G обладает периодической полной частью A и G/A сопряженно бипримитивно конечна с конечными силовскими p-подгруппами по всем p. Очевидно, G/A удовлетворяет условию примарной минимальности, причем для G/A теорема также неверна. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что периодическая полная часть группы G тривиальна и силовские p-подгруппы из G конечны по всем p.

Лемма 2.2.2. *Для G справедливы утверждения:*

1) любая локально конечная подгруппа из G локально нормальна;

2) для любого $p \in \pi(G)$ силовские p-подгруппы из G конечны;

3) если K — конечная подгруппа из G, то $N_G(K)$ бесконечен.

Доказательство. Утверждение 2) доказано выше, а из него и теоремы 46 вытекает утверждение 1).

Докажем 3). По условию теоремы и по теореме 37, K разрешима, и пусть a_1 — элемент порядка p из некоторой элементарной абелевой p-подгруппы R из K. Так как G бесконечна, то из утверждения 2) и теорем 3.1.2, 3.2.1 вытекает, что G обладает абелевой подгруппой бесконечного периода. Но тогда, по теореме 2.2.1, a_1 содержится в бесконечной подгруппе M_1, либо являющейся локально конечной, либо обладающей нетривиальной конечной нормальной подгруппой. Если M_1 локально конечна, то, по утверждению 1), она локально нормальна и $a \in M_1$. Как известно [24], в локально нормальной группе централизатор любого элемента имеет конечный индекс в ней. Отсюда, ввиду бесконечности M_1, вытекает бесконечность $C_G(a_1)$.

Пусть M_1 обладает нетривиальной конечной нормальной подгруппой B_1 и $a \notin B_1$ (если бы $a \in B_1$, то, очевидно, $C_G(a_1)$ был бы бесконечным). Ввиду теоремы 44, M_1/B_1 сопряженно бипримитивно конечна, удовлетворяет условиям теоремы и бесконечна. Как показано выше, в этом случае элемент a_1B_1 содержится в бесконечной подгруппе $\overline{M}_2$, либо являющейся локально конечной, либо обладающей конечной нетривиальной нормальной подгруппой (M_2 — полный прообраз подгруппы $\overline{M}_2$ в M_1). Если $\overline{M}_2$ локально конечна, то, очевидно, и M_2 локально конечна, и $a_1 \in M_2$. Используя те же соображения, что и при рассмотрении пары (a_1, M_1), докажем бесконечность $C_G(a)$. Пусть $\overline{B}_2$ — конечная нетривиальная нормальная подгруппа из $\overline{M}_2$ (B_2 — полный прообраз подгруппы $\overline{B}_2$ в M_1). Относительно пары (B_2, M_2) рассуждаем аналогично предыдущему.

Рассуждая таким образом, построим строго возрастающую цепочку конечных подгрупп

$$B_1 < B_2 < \ldots < B_n < \ldots \qquad (2.2.7)$$

такую, что $a \in N_G(B_n)$ и $N_G(B_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ бесконечен.

Если цепочка (2.2.7) обрывается на конечном номере, то из способа ее построения вытекает, что $C_G(a)$ бесконечен. Пусть цепочка (2.2.7) не обрывается на конечном номере и B — ее объединение. Подгруппа B локально конечна и $a \in N_G(B)$. По теореме Шмидта (теорема 42), $\langle B, a\rangle$ локально конечна, причем она бесконечна. В этом случае, как показано выше, $C_G(a_1)$ бесконечен.

Итак, $H_1 = C_G(a_1)$ — бесконечная группа и $R_1 < H_1$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — все элементы подгруппы R_1. По доказанному выше, $H_2 = C_{H_1}(a_2)$ — бесконечная группа и $R_1 \in H_2$. Рассуждая таким образом, построим убывающую цепочку бесконечных подгрупп:

$$G = H_0 > H_1 > H_2 > \ldots > H_s,$$

где $H_{i+1} = C_{H_i}(a_{i+1})$ $(i = 0, 1, \ldots, s-1)$.

Очевидно, $H_s = C_{H_{s-1}}(R_1)$, и, следовательно, $M = N_G(R_1)$ бесконечен.

Пусть

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_m = K \qquad (2.2.8)$$

— нормальный ряд с элементарными факторами.

Утверждение 2) леммы будем доказывать индукцией по длине ряда (2.2.8). Если $m = 1$, то бесконечность подгруппы L доказана выше. Пусть $m > 1$, фактор-группа $\bar{L} = L/R_1$ бесконечна и удовлетворяет всем условиям теоремы. Подгруппа $\bar{K} = K/R_1$ конечна, и длина ее ряда типа $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k, \ldots$, равна $m-1$. По индуктивному предположению, $N_{\bar{L}}(\bar{K})$ бесконечен. Но тогда, по теореме о гомоморфизмах [18], $N_L(K)$ является также бесконечным. Лемма доказана.

Если бы p-элементы из G для любого $p \in \pi(G)$ порождали конечную подгруппу, то, очевидно, и все элементы конечного порядка из G порождали бы локально конечную подгруппу вопреки предположению относительно группы G. Следовательно, найдется такое q из $\pi(G)$, что q-элементы из G не будут порождать конечной подгруппы. А так как G удовлетворяет условию $q-\min$, то в качестве G можно выбрать группу, удовлетворяющую условиям теоремы и такую, что в любой ее собственной подгруппе q-элементы порождают конечную подгруппу, а она сама обладает бесконечным множеством q-элементов (лемма Дицмана [24]).

В дальнейшем будем предполагать, что группа G выбрана в соответствии с указанными выше требованиями. Далее, согласно теореме Шмидта (теорема 42), G обладает локально конечным радикалом $R(G)$. Ввиду теорем 44, 46, G/R удовлетворяет условиям теоремы.

Предположим, что число q-элементов из $G/R(G)$ конечно. По лемме Дицмана [24], они порождают конечную нормальную подгруппу $\bar{B}$ в $G/R(G)$ (B — полный прообраз подгруппы $\bar{B}$ в G). По теореме о гомоморфизмах [18], $B \triangleleft G$, и, по теореме Шмидта (теорема 42), B — локально конечная группа. Но тогда, ввиду определения локально конечного радикала, получим $B = R(G)$, т. е. все q-элементы из G содержатся в $R(G)$. Но, по лемме 2.2.2, $R(G)$ — локально нормальная группа, причем силовские p-подгруппы из $R(G)$ конечны по всем p. Отсюда вытекает, что все q-элементы из $R(G)$ (а это означает, что все q-элементы из G) порождают конечную подгруппу вопреки предположениям о группе G. Следовательно, множество q-элементов из $G/R(G)$ бесконечно.

Пусть Q — силовская q-подгруппа из G. Докажем, что Q можно вложить в конечную подгруппу L, удовлетворяющую следующему условию

γ): L совпадает с замыканием подгруппы Q в L, и подгруппа L

не содержится ни в какой большей конечной подгруппе, обладающей таким свойством.

Действительно, предположим, что мы уже построили строго возрастающую цепочку конечных подгрупп

$$L_1 < L_2 < \ldots < L_n < \ldots, \qquad (2.2.9)$$

где L_n $(n = 1, 2, \ldots)$ есть замыкание подгруппы Q в L_n. Если бы цепочка (2.2.9) не обрывалась на конечном номере, то ее объединение L было бы бесконечной локально конечной группой, а ввиду леммы 2.2.2 множество q-элементов из L порождало бы конечную подгруппу. Однако это противоречит определению цепочки (2.2.9). Следовательно, построение цепочки (2.2.9) оборвется на конечном номере, а это означает, что существует подгруппа, удовлетворяющая условию γ).

Лемма 2.2.3. *Для доказательства теоремы 2.2.3 достаточно рассмотреть группу G, удовлетворяющую условиям теоремы и обладающую следующими свойствами:*

1) множество q-элементов из G бесконечно;

2) в любой собственной подгруппе из G множество q-элементов порождает конечную подгруппу;

3) если Q — силовская q-подгруппа из G, то она содержится в конечной подгруппе L_1, удовлетворяющей условию γ);

4) группа G обладает единичным локально конечным радикалом.

Доказательство леммы изложено выше.

В дальнейшем будем предполагать, что группа G выбрана в соответствии с требованиями, указанными в лемме 2.2.3 и G — периодическая группа.

Лемма 2.2.4. *Пусть L — подгруппа, определенная в лемме 2.2.3, и $T = N_G(L)$. Тогда порядки подгрупп $D_x = T \bigcap T^x (\forall x \in G \setminus T)$ ограничены в совокупности.*

Доказательство. Так как L — конечная группа и $L \lhd T$, то $m = |T : C_T(L)|$ — конечное число. Предположим, что лемма неверна. В этом случае найдется такой элемент x_1 из $G \setminus T$, что $|D_{x_1}| > m^2$.

Введем обозначения:

$$B = C_T(L), \qquad M = D_{x_1} \bigcap B, \ N = D_x \bigcap B^{x_1}, \qquad (4)$$

$$K = M \bigcap N. \qquad (5)$$

Очевидно, $K \lhd D_{x_1}$ и, по теореме Ремака [18], $|D_{x_1} : K| \leq m^2$. А так как $|D_{x_1}| > m^2$, то $K \neq 1$. Рассмотрим $C_G(K)$. Из определения K вытекает, что $L, L^{x_1} < C_G(K)$. Если бы $C_G(K) = G$, то $K \le Z(G)$, а по условию леммы G — периодическая группа. Но тогда K — локально конечная нормальная подгруппа в G и $K \neq 1$, что противоречило бы лемме 2.2.3 (утверждение 4). Следовательно, $C_G(K) \neq G$. А так как $L, L^{x_1} < C_G(K)$, то из определения подгруппы L, леммы 2.2.3 и теоремы Силова [18] вытекает, что $L = L^{x_1}$, т. е. $x_1 \in N_G(L) = T$. Однако это противоречит предположению, что $x_1 \in G \setminus T$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Среди всех подгрупп типа D_x $(\forall x \in G \setminus T)$ выбираем некоторую подгруппу D наибольшего порядка. По лемме 2.2.4 такая подгруппа существует в G.

Лемма 2.2.5. $D \neq 1$.

Доказательство. Предположим, что $D = 1$. Ввиду определения подгруппы D это, очевидно, означает, что G и T составляют пару Фробениуса и, по теореме 1.4.1, $G = F\lambda T$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем. Пусть a — элемент простого порядка P из T. Подгруппа $H = F\lambda(a)$ является также бесконечной группой Фробениуса. Согласно лемме 2.2.2, H обладает бесконечной локально конечной подгруппой X, содержащей a. Очевидно, X не будет локально нормальной группой вопреки лемме 2.2.2. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы 2.2.3. Пусть $D = T \bigcap T_1$, где T_1 — подгруппа, сопряженная с T в G. Ввиду лемм 2.2.4, 2.2.5, D — конечная группа и $D \neq 1$. По лемме 2.2.2, T, и T_1 и $H = H_T(D), H_1 = N_{T_1}(D), A = N_G(D)$ — бесконечные группы. Так как $H_1 \le T$, то $\bar{H} = H/D \neq \bar{A} = A/D$. Если бы $\bar{A}$ и $\bar{H}$ не составляли пару Фробениуса, то, как легко видеть, это противоречило бы определению подгруппы D. Следовательно, $(\bar{A}, \bar{H})$ — пара Фробениуса. Но фактор-группа $\bar{A} = A/D$ бесконечна и удовлетворяет всем условиям теоремы. Те же соображения, что и при доказательстве леммы, приведут нас к противоречию с леммой 2.2.2. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

В предположении, что G не содержит инволюций, используя лемму 2.1 из работы Н.Д. Подуфалова [50] и свойства подгрупп из $\mathfrak{M}$, описанные в нашей лемме, сразу же получим, что в $\mathfrak{M}$ почти все подгруппы являются группами Фробениуса. Отсюда, из леммы 1 [99] и из критерия непростоты бесконечных групп, доказанного А.И. Созутовым и В.П. Шунковым, вытекает, как нетрудно показать, следующий результат. Во всякой q-сопряженно бипримитивно конечной группе без инволюций с бесконечным множеством элементов конечного порядка для каждого элемента порядка q либо этот элемент содержится в бесконечной локально конечной подгруппе, либо в его централизаторе бесконечно много элементов конечного порядка.

Последнее утверждение можно отбросить в случае сопряженной бипримитивной конечности группы, что значительно усиливает теорему 2.2.2.

§ 2.3. Группы со слабо сопряженно бипримитивно конечным централизатором инволюции

Понятие бесконечно изолированной подгруппы впервые было введено в работе [107] в связи с абстрактной характеризацией групп типа $PGL(2, K)$ над локально конечным полем K нечетной характеристики. Оно сыграло исключительно важную роль в решении проблемы минимальности С.Н. Черникова [107, 116] и занимает центральное место в построении теории локально конечных групп с различными условиями конечности [113, 116, 119].

Решение проблемы минимальности С.Н. Черникова в других классах периодических групп [43, 124] также вызвало необходимость рассмотрения периодических групп с бесконечно изолированной подгруппой. Как и в случае локально конечных групп [109], здесь приходится рассматривать ситуацию, когда бесконечно изолированная подгруппа является одновременно и сильно вложенной. В этом параграфе данная ситуация выделена "в чистом виде т. е. рассмотрен класс периодических групп с сильно вложенной бесконечно изолированной подгруппой. На примерах показано, что этот класс групп достаточно широк и включает в себя не только локально конечные группы. Периодическая группа с сильно вложенной бесконечно изолированной подгруппой может быть как простой, так и непростой. Здесь найдены условия, когда такая группа обладает абелевой нормальной подгруппой (теоремы 2.3.1, 2.3.2). Полученные признаки непростоты найдут применение в исследованиях групп с различными условиями конечности.

Теорема 2.3.1 (А.Н. Измайлов). *Пусть G — периодическая группа, H — ее бесконечно изолированная, сильно вложенная в G подгруп-*

па, удовлетворяющие следующим условиям:

1) централизатор некоторой инволюции из G — слабо сопряженно бипримитивно конечная группа;

2) существует $g \in G \backslash H$, такой, что пересечение $H \cap g^{-1}Hg$ бесконечно;

3) существует внешняя инволюция a, такая, что если b — строго вещественный элемент относительно a из H, то $C_G(b) < H$.

Тогда если B_a — подгруппа из G, порожденная всеми элементами их H, строго вещественными относительно a, то:

1) B_a — бесконечная абелева нормальная подгруппа G, элементы которой строго вещественны относительно любой инволюции из G;

2) силовские 2-подгруппы в G — либо локально циклические (циклические или квазициклические), либо обобщенные группы кватернионов (конечные или бесконечные), $G = C_G(B_a)C_G(i)$, где i — произвольная инволюция из G [15].

В этом параграфе используются следующие условия и обозначения: G — периодическая группа, обладающая инволюцией со слабо сопряженно бипримитивно конечным централизатором, H — бесконечно изолированная, сильно вложенная в G подгруппа.

Пусть, далее, H удовлетворяет следующему условию: в $G \backslash H$ существует элемент g, такой, что $H \cap H^g$ — бесконечная подгруппа. По теореме 58, $g = ha$, где $h \in H$, a — некоторая внешняя инволюция. Обозначим $D_a = H \cap aHa = H \cap g^{-1}Hg$, $C_a = C_H(a)$. Через B_a обозначим подгруппу из G, порожденную элементами из H, строго вещественными относительно a, и, наконец, через b обозначим неединичный элемент из H такой, что $aba = b^{-1}$ и $C_G(b) \not< H$.

Лемма 2.3.1. *Справедливы утверждения:*

1) $D_a = B_a \lambda C_a$;

2) B_a — бесконечная абелева подгруппа строго вещественных относительно a элементов;

3) C_a — конечная подгруппа с циклическими силовскими p-подгруппами, у всех неединичных $c \in C_a$ централизатор $C_H(c)$ конечен;

4) множество инволюций в H бесконечно;

5) если $d \in D_a$ и $C_{D_a}(d)$ бесконечен, то $d \in B_a$.

Доказательство. По теореме 60, все инволюции в G сопряжены, поэтому C_a — слабо сопряженно бипримитивно конечная подгруппа H. Если C_a — бесконечная подгруппа, то, согласно теореме 61, в C_a существует неединичный элемент с бесконечным в H централизатором, что противоречит бесконечной изолированности H в G. Отсюда C_a — конечная группа. Более того, все неединичные элементы из C_a имеют конечные в H централизаторы, что также очевидно следует из бесконечной изолированности H в G.

Согласно теореме 59, мы можем рассмотреть подгруппу $D_a\lambda(a)$. Очевидно, $C_a \leq D_a$, и, значит, $C_a = C_{D_a}(a)$. По теореме 1.3.1, D_a локально конечна и является конечным расширением разрешимой группы, так как a почти регулярна в $D_a\lambda(a)$, и согласно теореме 37 она просто разрешимая группа. Рассмотрим случай, когда $C_a \neq (1)$, так как в противном случае, по теоремам 53 и 58, утверждения леммы очевидны.

Если $p \in \pi$, $\pi = \pi(C_a)$ то по теореме 48 силовские p-подгруппы в D_a черниковские. Тогда по теореме 51 $D_a/O_{p'}(D_a)$ — черниковская группа. Множество π конечно, следовательно, по теореме 41 и теореме Ремака [18] группа $D_A/O_{p'}(D_a)$ черниковская.

Поскольку $O_{\pi'}(D_a)$ — характеристическая подгруппа D_a, то a нормализует ее и, более того, действует на $O_{\pi'}(D_a)$ регулярно. Группа D_a локально конечная, поэтому по теореме 53 $O_{\pi'}(D_a)$ — абелева нормальная подгруппа D строго вещественных относительно a элементов.

Покажем далее, что если R_1 и R_2 — две подгруппы из D_a, нормальные в $D_a\lambda(a)$, на которых a действует регулярно, то и подгруппа $R = R_1R_2$ также абелева, нормальная в $D_a\lambda(a)$ и элементы из R строго вещественны относительно a.

Действительно, на $P = R_1 \cap R_2$ элемент a действует регулярно по выбору R_1 и R_2. Пусть $\bar{R} = R/P = (R_1/P) \times (R_2/P) = \bar{R_1} \times \bar{R_2}$. Если $r \in \bar{R}$ и $C_{\bar{R}}(r)$ содержит образ a, в фактор-группе $(D_a\lambda(a)/P)$, то, по свойствам прямого произведения, $r = r_1r_2$, где $r_1 \in \bar{R_1}$,$r_2 \in \bar{R_2}$. Подействуем $\bar{a} = aP$ на $r \in \bar{R}$ и получим $r_1r_2 = r_1^{-1}r_2^{-1}$. Отсюда $r_1^2 = r_2^{-2}$, и поскольку D_a — группа нечетного порядка, то $r \in \bar{R_1} \cap \bar{R_2}$. Так как $C_R(a) \cap P = (1)$, то $C_R(a) \cong C_{\bar{R}}(\bar{a}) \cong (1)$. Таким образом, a действует на R регулярно. Отсюда, согласно теореме 53, R — абелева группа строго вещественных относительно a элементов, нормальная в $D_a\lambda(a)$. По лемме Цорна, в D_a существует B — максимальная абелева нормальная подгруппа строго вещественных относительно a элементов.

Покажем, что B — подгруппа конечного индекса в группе D_a. Поскольку $O_{\pi'}(D_a) \leq B$, то $D_1 = D_a\lambda(a)/B$ — черниковская группа. Предположим, что она бесконечна, и пусть M_1 — ее полная часть. Рассмотрим $M_1\lambda(a_1)$, где $a_1 = ab \in D_1$. Пусть $x \in C_{M_1}(a_1)$. Элемент $x \notin B$, так как в противном случае a действовала бы регулярно на M — полном прообразе M_1 в D_a, но $M \triangleleft D_a$, что противоречит максимальности B.

Далее, $x \in Z(M_1\lambda(a_1))$, так как M_1 — абелева группа по свойствам черниковских групп. Выберем x простого порядка p. Тогда, по теореме 52, в $M_1\lambda(a_1)$ существует нормальный делитель N такой, что $x \notin N$, а фактор-группа $(M_1\lambda(a_1))/N$ — p-группа, т. е. $a_1 \in N$. Вся квазициклическая p-подгруппа, содержащая x, тривиально пересекается с N, так как в противном случае x попадал бы в N. Таким образом, $C_{M_1}(a_1)$ бесконечен. Так как $C_a \cap B = 1$, то C_a бесконечная группа ($C_a \cong O_{2'}(C_{D_1}(a_1))$, а $O_{2'}(C_{D_1}(a_1))$ содержит $C_{M_1}(a_1)$). Получено противоречие, доказывающее конечность D_1.

Итак, B — подгруппа конечного индекса в бесконечной группе D_a, следовательно, B — бесконечная группа строго вещественных относительно a элементов из H, но тогда по теореме 58 H содержит бесконечное множество инволюций.

Если элемент $u \in D_a$ строго веществен относительно a и $u \notin B$, то на подгруппе $B(u)$ элемент a действует регулярно и по теореме 53 $u \in C_{D_a}(B)$. Из максимальности B и в силу теоремы 55, заключаем, что $C_{D_a}(B)$ содержит неединичные элементы из C_a, но это противоречит бесконечной изолированности H в G, так как B — бесконечная подгруппа H. Таким образом, все элементы из D_a, строго вещественные относительно a, содержатся в B. Отсюда $B = B_a$ и по теореме 55 $D_a = B_a\lambda C_a$.

Докажем цикличность силовских p-подгрупп из C_a. Пусть S — силовская p-подгруппа C_a. Предположим, что в S существует элементарная абелева p-подгруппа A порядка p^2. Пусть Q — силовская q-подгруппа из B_a. Так как B_a абелева, то Q характеристична в ней, следовательно, $Q \triangleleft D_a$.

Предположим, что Q имеет бесконечный порядок, и рассмотрим подгруппу $Q\lambda A$.

Пусть $q = p$. Если Q нечерниковская p-группа, то по теореме 54 в C_a существует неединичный элемент с бесконечным централизатором в H, что противоречит бесконечной изолированности H в G. Если же Q — черниковская группа, то по теореме 57 в A найдется неединичный элемент с бесконечным в H централиэатором. Опять противоречие.

Пусть $q \neq p$, тогда по теореме 39 в Q существует неединичный элемент $b_1 \in C_Q(c)$, где $1 \neq c \in A$.

Рассмотрим B_1 — замыкание b_1 в $Q\lambda A$. Элемент c централизует B_1, так как Q и A абелевы. Далее, рассмотрим действие A на Q/B_1. Если и в этом факторе найдется неединичный элемент b_2, централизующий cb_1, и, более того, этот процесс бесконечен, то мы получим систему $B_1 \triangleleft B_2 \triangleleft \dots \triangleleft B_n \triangleleft \dots$, где B_n — полный прообраз в Q замыкания неединичного элемента b_n, централизующего в фактор-группе $(Q\lambda A)/B_{n-1}$ элемент cB_{n-1}. Объединение этой системы есть бесконечный централизатор c в H, что противоречит бесконечной изолированности H в G. Если этот процесс обрывается для c на некотором конечном шаге, то мы выберем другой элемент из A. Тогда, ввиду того, что A — конечная группа, и согласно теореме 52 найдется неединичный элемент из A с бесконечным централизатором в H. Противоречие.

Осталось рассмотреть случай, когда в B_a не существует бесконечной силовской q-подгруппы. Из абелевости B_a следует, что A нормализует все силовские q-подгруппы, а из бесконечности B_a следует бесконечность $\pi(B_a)$. Таким образом, по теореме 39 в каждой силовской q-подгруппе из B_a централизатор некоторого неединичного элемента из A отличен от единицы. Учитывая конечность A и бесконечность $\pi(B_a)$, делаем вывод, что в A существует элемент, отличный от единицы и с бесконечным в H централизатором, но это противоречит бесконечной изолированности H в G. Полученное противоречие доказывает, что в C_a не существует элементарной абелевой p-подгруппы порядка p^2. Так как C_a — группа нечетного порядка, то силовские p-подгруппы в C_a циклические [78].

Пусть $d \in D_a$ и $C_{D_a}(d)$ бесконечен. Тогда если $X = B_a \cap C_{D_a}(d)$, то X имеет конечный индекс в $C_{D_a}(d)$ и, следовательно, X — бесконечная подгруппа.

Если $d \notin B_a$, то $d = vw$, где $v \in B_a$, $w \in C_a$. Тогда бесконечная подгруппа X централизует v и d, откуда $C_H(w)$ бесконечен, так как содержит X. Противоречие с бесконечной изолированностью H в G. Лемма доказана.

Следствие 2.3.1. *Пусть G — периодическая группа, H — бесконечно изолированная, сильно вложенная в G подгруппа. Тогда в G эквивалентны следующие условия:*

а) для всех q из разности $G \backslash H$ пересечение $H \cap q^{-1}Hq$ бесконечно;

б) в разности $G \backslash H$ существует такой элемент q, что пересечение $H \cap q^{-1}Hq$ бесконечно;

в) множество инволюций в H бесконечно.

Доказательство. Условие б) следует из условия а) очевидным образом, в) следует из б) по лемме 2.3.1. Докажем, что условие а) следует из условия в).

Пусть q — произвольный элемент из разности $G\backslash H$. По теореме 58 $q = hk$, где $h \in H$, k — некоторая внешняя инволюция. Отсюда $H \cap q^{-1}Hq = H \cap kHk = D_k$. По теореме 59 можно рассмотреть подгруппу $D_k\lambda(1)$. По теореме 58 мощность множества элементов из H, строго вещественных относительно k, равна мощности множества инволюций из H. Очевидно, все элементы из H, строго вещественные относительно k, попадают в D_k, откуда D_k — бесконечная подгруппа. Следствие доказано.

Лемма 2.3.2. *Централизатор $C_G(b)$ не содержит инволюций.*

Доказательство. По условию $C_G(b)$ не принадлежит H, кроме того, по лемме 2.3.1 $C_H(b)$ содержит бесконечную подгруппу B_a. Следовательно, в силу бесконечной изолированности H в G, централизатор $C_G(b)$ не содержит инволюций. Лемма доказана.

Пусть G — периодическая группа, H — сильно вложенная в G подгруппа. Тогда внутренними инволюциями назовем инволюции, принадлежащие H, а внешними — инволюции из G, не принадлежащие H.

Лемма 2.3.3. *Пусть b инвертируется некоторой внутренней инволюцией t. Тогда*

1) силовские 2-подгруппы в G — либо локально циклические (циклические или квазициклические), либо обобщенные группы кватернионов (конечные или бесконечные);

2) b — строго вещественный элемент относительно любой внутренней инволюции;

3) если $T = гр(t^h/h \in H)$, то $= O_{2'}()\lambda(t)$, $Z = Z(O_{2'}(T))$ — абелева нормальная подгруппа в H и $b \in Z$.

Доказательство. По условию леммы можно рассмотреть подгруппу $R = C_H(b)\lambda(t)$. По лемме 2.3.2 $C_H(b)$ не содержит инволюций.

С другой стороны, по теореме 59 все инволюции из H сопряжены между собой элементами из B_a, а по лемме 2.3.1 $B_a \leq C_H(b)$. Отсюда b — строго вещественный элемент относительно любой внутренней инволюции, а все внутренние инволюции принадлежат R. Из строения R очевидно, что силовские 2-подгруппы в H содержат только одну инволюцию, по теореме 49 силовские 2-подгруппы в H (а по теореме 60 и в G) являются либо локально циклическими (циклическими или квазициклическими), либо обобщенными группами кватернионов (конечными или бесконечными).

Поскольку $T \leq R$, то $T = C_T(b)\lambda(t)$, но по лемме 2.3.2 $C_G(b)$ не содержит инволюций, следовательно, $T = O_{2'}(T)\lambda(t)$. Рассмотрим $(b)\lambda(t)$. Очевидно, bt — инволюция, значит, $bt \in T$, но и $t \in T$, откуда $b \in T$. Более того, $b \in Z = Z(O_{2'}(T))$. А так как T — характеристическая подгруппа в H, $O_{2'}(T)$ — характеристическая подгруппа в T, а Z — характеристическая подгруппа в $O_{2'}(T)$, то Z — абелева нормальная подгруппа в H. Лемма доказана.

Лемма 2.3.4. *Пусть Q — бесконечная подгруппа B_a, $b \in Q$. Тогда если существует элемент $r \notin H$, такой, что $r \in C_G(b)$ и $Q \leq H \cap r^{-1}Hr$, то b — строго вещественный элемент относительно внутренней инволюции.*

Доказательство. По теореме 58 $r = hk$, $h \in H$, k — некоторая внешняя инволюция. Тогда

$$Q \leq r^{-1}Hr \cap H = H \cap kh^{-1}Hhk = H \cap kHk = D_k,$$

где Q — бесконечная абелева подгруппа D_k. Поэтому $Q \leq B_k$ и b строго вещественный элемент относительно k. Отсюда $h^{-1}bh = b^{-1}$, так как $r \in C_G(b)$. Таким образом, некоторая степень h является 2-элементом, инвертирующим b, а по лемме 2.3.2 порядок этого элемента не должен превосходить 2. Лемма доказана.

Лемма 2.3.5. *Элемент b строго вещественный относительно некоторой внутренней инволюции.*

Доказательство. Введем обозначения: $X_a = C_G(b)$, $Z_a = C_{x_a}(a)$, $M_a = X_a\lambda(a)$, наконец, H_a — подгруппа G, которая содержит $C_G(a)$ и сопряжена с H. Согласно теореме 60, H_a существует в G.

Рассмотрим сначала случай, когда Z_a — бесконечная подгруппа. По теореме 60 все инволюции в G — сопряжены, поэтому Z_a — слабо сопряженно бипримитивно конечная группа. Заметим, что H_a сопряжена с H, поэтому H_a — сильно вложенная в G группа, откуда $Z_a \leq H_a$, кроме того, H_a — бесконечно изолированная подгруппа. По теореме 61 в Z_a существует неединичный элемент c с бесконечным в Z_a централизатором, так как по лемме 2.3.2 Z_a — группа нечетного порядка. Но тогда в силу бесконечной изолированности H_a имеем $C_G(a) \leq H_a$, а так как $Z_a \leq Z_a$, то $b \in H_a$.

Таким образом, b — строго вещественный элемент относительно инволюции a, внутренней по отношению к подгруппе H_a. Предположим, что в B_a существует элемент $d \notin H_a$. Тогда b — строго вещественный элемент относительно инволюции $d^{-1}ad$, внешней по отношению к подгруппе H_a, и $X_a \not\leq H_a$. Тогда по лемме 2.3.3 $b \in Z$, где Z — абелева нормальная подгруппа в H_a. Согласно следствию из леммы 2.3.1, $H \cap H_a = D_k$, где D_k — бесконечная подгруппа нечетного порядка, нормализатору которой принадлежит некоторая инволюция K, внешняя по отношению и к H, и к H_a.

Очевидно, $b \in D = Z \cap D_k$. Если D — бесконечная подгруппа, то по лемме 2.3.1 ввиду абелевости $Z, b \in B_k$. Если же D — конечная группа, то ввиду $D \lhd D_k$, централизатор $C_{D_k}(D)$ также бесконечен и $b \in B_k$. Если $B_a \leq H \cap H_a = D_k$, то, ввиду бесконечности и абелевости B_a, и по лемме 2.3.1 имеем $b \in B_k$, откуда b — строго вещественный элемент относительно внутренней инволюции $t = kak$. Теперь рассмотрим случай, когда Z_a — конечная группа. В этом случае a почти регулярна в M_a и по теоремам 1.3.1 и 37 M_a — разрешимая группа.

Пусть S — максимальный нормальный делитель в M_a, все элементы которого строго вещественны относительно a. Группа S содержит b, отличный от 1.

Подгруппа SB_a допустима относительно a, которая действует на ней регулярно. По теореме 53 эта подгруппа абелева. Если существует элемент $r \in SB_a$, такой, что $r \notin H$, то $B_a \leq H \cap r^{-1}Hr$, и, по лемме 2.3.4, лемма доказана.

Пусть $S \leq H$, тогда, очевидно, $S \leq B_a$. Если S — бесконечная группа, то, взяв любой элемент $r \in X_a$, такой, что $r \notin H$, и использовав лемму 2.3.4, получаем справедливость леммы 2.3.5.

Будем рассматривать случай, когда S — конечная подгруппа из B_a. Пусть $\bar{M}_a = M_a/S$ и $\bar{L}$ — минимальный нормальный делитель $\bar{M}_a$. Так как M_a — разрешимая группа, то $\bar{L} \neq (1)$. Из максимальности S, леммы 2.3.2, теоремы 55 и абелевости $\bar{L}$ заключаем, что $\bar{L} = \bar{R} \times \bar{V}$, где если $\bar{a}$ — образ a в M_a, то $\bar{R} \leq C_{\bar{M}_a}(\bar{a})$, а для всех $v \in V$ выполняется $\bar{a}\bar{v}\bar{a} = \bar{v}^{-1}$.

Пусть L — полный прообраз $\bar{L}$ в M_a. Так как S и Z_a — конечные подгруппы нечетного порядка в X_a, то R — полный прообраз $\bar{R}$ в конечной группе M_a.

Если $L < H$ и L — конечная группа, то R нетривиально пересекается с C_a и, ввиду нормальности L в M_a, централизатор некоторого неединичного элемента из $R \cap C_a$ имеет в H бесконечный порядок, так как бесконечная подгруппа $B_a < N_H(L)$, что противоречит бесконечной изолированности H в G.

Пусть теперь $L \not< H$, где L — конечная группа. Тогда $N = C_{B_a}(L)$ имеет конечный индекс в B_a. Очевидно, $b \in N$ и N — подгруппа бесконечного порядка. Тогда, взяв произвольный элемент $r \in L$, $r \notin H$, мы опять оказываемся в условиях леммы 2.3.4, из которой следует доказательство нашей леммы.

Итак, L — бесконечная группа. Предположим, что и $L_1 = L \cap D_a$ — бесконечная группа. Но тогда $L \cap B_a$ — бесконечная группа, и рассуждения, аналогичные предыдущему абзацу, приводят к доказательству леммы.

Если V — полный прообраз $\bar{V}$ в M_a, V — бесконечная группа. Так как $S < B_a$ и a действует регулярно на V, то $V \cap H \leq B_a$. Поэтому если L_1 — конечная группа, то и $L \cap H$ — конечная группа, так как V — подгруппа конечного индекса в L. Пусть D_1 — произвольная конечная подгруппа B_a, содержащая b, а группа $P_1 = \bigcap_{d \in D_1} \to \cap d^{-1} V d$ бесконечная, ввиду конечности D_1 и индекса V в L. Тогда P_1 допускает D_1, и можно рассмотреть группу $P_1 D_1$, которая допускает a. Элемент a действует регулярно на $P_1 D_1$, следовательно, по теореме 53 $P_1 \leq C_{M_a}(D_1)$. Таким образом, поскольку P_1 — бесконечная группа, а $P_1 \cap H$ конечно, то $C_{M_a}(D_1) = C_1$ содержит элементы из разности $G \backslash H$. Построим бесконечную последовательность конечных подгрупп из B_a:

$$D_1 < D_2 < \ldots < D_n < \ldots$$

Если $C_n = C_{M_a}(D_a)$, то для всех n C_n — бесконечная группа, содержащая b и некоторый элемент из $P_n = \bigcap_{d \in D_n} \to \cap d^{-1} V d$, не принадлежащий H, причем $C_1 \geq C_2 \geq \cdots \geq C_n \geq \ldots$ Так как Z_a — конечная группа, то, начиная с некоторого $n, W = C_n \cap z_a$ стабилизируется.

Если $W \neq 1$, то W централизует $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ бесконечную подгруппу из B_a. Очевидно, в силу бесконечной изолированности H в G, имеем $W \cap C_a = 1$. Тогда существует $w \in W$, $w \notin W$, такой, что $w \in C_G(b)$ и $F \leq H \cap w^{-1} H w$. Теперь из леммы 2.3.4 следует доказательство леммы 2.3.5.

Пусть, начиная с некоторого номера n, $W = (1)$. Тогда a действует регулярно на C_n и по теореме 53 C_n абелева и $P \leq C_G(B_a)$ так как, очевидно, $B_a \leq C_n$. Но в C_n существует элемент $u \in P_n$, $u \in H$, такой, что $u \in C_G(b)$ и $B_a \leq H \cap u^{-1} H u$, и опять используя лемму 2.3.4, завершим доказательство леммы 2.3.5.

Теорема 2.3.1 (А.Н. Измайлов). *Пусть G — периодическая группа, H — ее бесконечно изолированная, сильно вложенная в G подгруппа, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) централизатор некоторой инволюции из G — слабо сопряженно бипримитивно конечная группа;

2) существует $g \in G \backslash H$, такой, что пересечение $H \cap g^{-1}Hg$ бесконечно;

3) существует внешняя инволюция a, такая, что если b — строго вещественный элемент относительно a из H, то $C_G(b) < H$.

Тогда если B_a — подгруппа из G, порожденная всеми элементами их H, строго вещественными относительно a, то:

1) B_a — бесконечная абелева нормальная подгруппа G, элементы которой строго вещественны относительно любой инволюции из G;

2) силовские 2-подгруппы в G — либо локально циклические (циклические или квазициклические), либо обобщенные группы кватернионов (конечные или бесконечные), $G = C_G(B_a)C_G(i)$, где i — произвольная инволюция из G [15].

Доказательство. По лемме 2.3.1 B_a — бесконечная абелева группа строго вещественных относительно инволюции a элементов. По лемме 2.3.2 $C_G(B_a)$ — подгруппа нечетного порядка. По лемме 2.3.5 каждый элемент из B_a строго вещественен относительно некоторой внутренней инволюции. Тогда по лемме 2.3.3 силовские 2-подгруппы в G либо локально циклические (циклические или квазициклические), либо обобщенные группы кватернионов (конечные или бесконечные). Кроме того, все элементы из B_a строго вещественны относительно любой внутренней инволюции и $B_a \leq Z(O_{2'}(T))$, где если t — некоторая внутренняя инволюция, то $T = (t^h \backslash h \in H)$.

С другой стороны, по теореме 59 все внутренние инволюции сопряжены между собой элементами из B_a, откуда $T \leq B_a \lambda(t)$.

Следовательно, $B_a = Z(O_{2'}(T)) = O_{2'}(T)$ — характеристическая подгруппа в H. По теореме 59 $H = B_a \lambda C_H(t)$. Пусть k — некоторая внешняя инволюция. Тогда, по лемме 2.3.1 и следствию из нее подгруппа B_k, образованная всеми элементами из H, строго вещественными относительно k, абелева, имеет бесконечный порядок, и по теореме 59 любой неединичный элемент $d \in B_k$ не централизуется никакой внутренней инволюцией. Отсюда $B_k \leq B_a$. Но все инволюции из H должны быть сопряжены элементами из B_k, откуда $B_k = B_a$. Таким образом, элементы из B_a строго вещественны относительно любой инволюции из G.

По теореме 58 любой элемент $x \in G$ имеет представление $x = hi$, где $h \in H$, i — некоторая инволюция из G. Отсюда $B_a \triangleleft G$. Тогда и $C_G(B_a) \triangleleft G$

и в фактор-группе $G/C_G(B_a)$ содержится только одна инволюция, так как произведение любых двух инволюций из G принадлежит $C_G(B_a)$, откуда следует представление $G = C_G(B_a)C_G(i)$. Теорема 2.3.1 доказана.

Теорема 2.3.2 (В.П. Шунков). *Пусть G — периодическая группа, H — ее бесконечно изолированная, сильно вложенная в G подгруппа, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) централизатор некоторой инволюции из G — слабо сопряженно бипримитивно конечная группа;

2) существует элемент $g \in G\backslash H$, такой, что $H \cap g^{-1}Hg$ — бесконечная подгруппа;

3) существует нееденичный элемент $b \in H$, строго вещественный относительно некоторой внешней инволюции и такой, что $C_G(b) \not< H$. Тогда замыкание элемента b в G образует абелеву подгруппу B, нормальную в G, причем все элементы из B строго вещественны относительно любой инволюции из G. Силовские 2-подгруппы в G — либо локально циклические (циклические или квазициклические), либо обобщенные группы кватернионов (конечные или бесконечные), и группа G имеет вид $G = C_G(B)C_G(i)$, где i — произвольная инволюция из G [15].

Доказательство. По следствию из леммы 2.3.1 все пересечения H со своими сопряженными в G подгруппами — бесконечны, следовательно, предыдущие результаты этого параграфа справедливы в условиях теоремы 2.3.2.

По лемме 2.3.5 элемент B инвертируется некоторой внутренней инволюцией t. Тогда по лемме 2.3.3 силовские 2-подгруппы в G — либо локально циклические (циклические или квазициклические), либо обобщенные группы кватернионов (конечные или бесконечные). Далее, b инвертируется любой внутренней инволюцией. Если $T = \text{гр}(t^h \backslash h \in H)$, то $T = C_T(b)\lambda(t) = O_{2'}(T)\lambda(t)$.

Обозначим $O_{2'}(T) = V$. По лемме 2.3.3, $b \in Z = Z(V)$, Z — абелева нормальная подгруппа группы H.

Лемма 2.3.6. *Если K — внешняя инволюция, то $Z \cap D_k \leq B_k$.*

Доказательство. Пусть $Z \cap D_k = D$. Если D — бесконечная группа, то $C_{D_k}(D)$ бесконечен, так как Z абелева. Если же D — конечная группа, то $C_{D_k}(D)$ бесконечен, так как $D \lhd D_k$. Отсюда по лемме 2.3.1 $D \leq B_k$. Лемма доказана.

Так как Z — абелева группа нечетного порядка, то по теореме 55 $Z = A \times C$, где $C = C_Z(t)$, а все элементы из A строго вещественны относительно t. Далее, $A \neq 1$, так как $b \in A$.

Лемма 2.3.7. *Любой строго вещественный элемент из Z содержится в A.*

Доказательство. Если $C = 1$, то лемма доказана. Пусть $C \neq 1$, $d \in Z$ и s — инволюция, такая, что $sds = d^{-1}$.

Пусть s — внутренняя инволюция. Тогда для некоторого элемента $v \in V$ выполняется $s = vt$ и $d^{-1} = d^s = d^{vt} = d^t$, так как d централизуется v. Следовательно, $d \in A$.

Пусть s — внешняя инволюция. Если $C_G(d) \nless H$, то по лемме 2.3.5 d — строго вещественный элемент относительно некоторой внутренней инволюции и по лемме 2.3.3 $d \in A$, так как $d \in B_s$.

Пусть $C_G(d) = C_H(d)$. Рассмотрим подгруппу $C_H(d)\lambda(s)$, очевидно, $C_H(d)$ содержится в D_s и по лемме 2.3.6 $Z \leq B_s$.

Пусть $1 \neq c \in C$, тогда t централизует c, а s его инвертирует, следовательно, $s \in N_G(C_G(d))$. Отсюда $s \notin (t, sts) \leq C_G(d)$ и существует четвертая группа Клейна, что противоречит ранее полученному описанию силовских 2-подгрупп G. Лемма доказана.

Лемма 2.3.8. *A и C — нормальные подгруппы H.*

Доказательство. Пусть $d \in A$. Тогда если $m \in C_H(t)$, то $m^{-1}dm$ инвертируется t, следовательно, $C_H(t) \leq N_H(A)$. Аналогично пусть $c \in C$; $Z \lhd H$. Тогда $c^m \leq Z$, но $C \leq C_H(t)$, следовательно, $c^m \leq C_H(t)$, откуда $c^m \leq Z \cap C_H(t) = C$, т. е. $C_H(t) \leq N_H(C)$.

Произвольный элемент $v \in V$ имеет по теореме 59 представление $v = uw$, где $w \in B_k$ для некоторой внешней инволюции k, $u \in C_H(t)$. Так как по теореме 59 t сопряжена с любой инволюцией из H элементом из D_k, а по лемме 2.3.3 t сопряжена со всеми внутренними инволюциями элементами из V, то любой элемент $l \in B_k$ имеет представление $l = mn$, где $m \in C_H(t)$, $n \in V$. Отсюда $B_k \leq N_G(A) \cap N_G(C)$.

По теореме 59 $H = B_K C_H(t)$, откуда $A \lhd H$ и $C \lhd H$. Лемма доказана.

По теореме 58 любой элемент $g \in G$ имеет представление $g = hk$, где $h \in H$, k — инволюция из G. Тогда $h \in N_G(A)$, если и все инволюции из G принадлежат $N_G(A)$, и, в силу лемм 2.3.6–2.3.8, теорема доказана. Поэтому далее будем рассматривать ситуацию, когда в G существует внешняя инволюция a, такая, что $A \nleq D_a$.

Лемма 2.3.9. *Пусть $A \nleq D_a$. Тогда $C_H(t) \cap ZB_a \leq Z$.*

Доказательство. Предположим противное, тогда $C_H(t) \cap ZB_a = C$. По лемме 2.3.8 $C \lhd H$, по теореме 59 $ZB_a = B_a(C_h(t) \cap ZB_a)$, следовательно, $ZB_aC\lambda B_a$. Выберем элемент $m \in A$ такой, что $m \notin B_a$. Имеем

$m = cd$, где $c \in C$, $d \in B_a$, причем $c \neq 1$, поэтому $m \in Z$, $c \in Z$ и, следовательно, $d \in Z$. Тогда по лемме 2.3.7 $d \in A$ и $c \in A$. Противоречие. Лемма доказана.

Пусть $X = B_a \cap Z$. По лемме 2.3.7 $X < A$. Обозначим $\bar{Z} = Z/X$, $\bar{B}_a = B_a/X$, $R = ZB_a$, $\bar{R} = R/X$. Покажем, что $\bar{R}$ — группа Фробениуса с ядром $\bar{Z}$ и неинвариантным множителем $\bar{B}_a$.

Пусть $\bar{Z}$ и $\bar{r}$ — неединичные элементы, $\bar{z} \in \bar{Z}$, $\bar{r} \in \bar{R}$, и предположим, что $\bar{z}\bar{r} = \bar{r}\bar{z}$. Рассмотрим подгруппу $M = \text{гр}(X, r)$, где r — некоторый прообраз элемента $\bar{r}$ в R. Если z — некоторый прообраз элемента $\bar{z}$ в R, то $M^z = M$ и $z^{-1}rz = rx$, где $x \in X$.

Имеем $M \lhd \text{гр}(M, Z, a) = W$. Ясно, что $X \lhd W$. В $\bar{W} = W/X$ элементы $\bar{r}$ и $\bar{z}$ перестановочны и $\bar{a}\bar{r}\bar{a} = \bar{r}^{-1}$, где $\bar{a} = aX$, а поэтому $\bar{W} = C_{\bar{W}}(\bar{r})\lambda(\bar{a})$.

Пусть L — полный прообраз в W централизатора $C_{\bar{W}}(\bar{r})$, $W = L\lambda(a)$. Если бы $y = aza \in H$, то, очевидно, $z \in D_a$ и по лемме 2.3.6 $z \in X$, что невозможно.

Следовательно, $y \notin H$. По теореме 58 $y = pj$, где $p \in H$, j — внешняя инволюция. Пусть $jHj = H_1$, тогда $M \leq H \cap H_1$. Если для любого $q \in B_a$ справедливо $qa \in H_1$, то, очевидно, $B_a \leq H_1$ и в этом случае по лемме 2.3.1 $B_a \leq B_j$ и, в частности, $M \leq B_j$.

Пусть $q_1 \in B_a$ такой, что $a_1 = q_1 a \notin H$. Если $m_1 \in M$, то $a_1 m_1 a_1 = m_1^{-1}$, так как $M \leq B_a$, поэтому $M \leq H_1 \cap a_1 H a_1$. Отсюда $M \leq B_1$, где B_1 — подгруппа в G, образованная элементами из H_1, строго вещественными относительно a_1. Если $B_a \leq H_1$, то по лемме 2.3.1 $B_a \leq B_j$. Пусть $b_1 \in B_a$, но $b_1 \notin H_1$, тогда по лемме 2.3.5 M инвертируется некоторой внутренней инволюцией t_1 из H_1 и по лемме 2.3.3 $M \leq Z_1\ Z(O_2, (T_1))$, где $T_1 = \text{гр}(t_1^{h_1} \backslash h_1 \in H_1)$, а по лемме 2.3.6 $M \leq B_j$. Итак, всегда $M \leq B_j$.

По условию $rx \in B_a$ поэтому $ara = r^{-1}$, $axa = x^{-1}$, откуда $az^{-1}rza = r^{-1}x^{-1}$ или $y^{-1}r^{-1}y = r^{-1}x^{-1}$. Так как $y = pj$ и, кроме того, $jrxj = r^{-1}x^{-1}$, то $p^{-1}r^{-1}p = rx$. Далее, $p \in N_H(X)$, поэтому (p) обладает внутренней инволюцией t_1. По лемме 2.3.7 все элементы из X строго вещественны относительно t_1. Следовательно, либо t_1 действует регулярно на M, тогда $at_1 \in C_G(M)$, но $at_1 \notin H$, и, следовательно, вопреки теореме, по леммам 2.3.5 и 2.3.7, $M \leq X$, так как $M \leq B_a$; либо некоторый неединичный элемент из B_a централизуется t_1, что противоречит теореме 59. Отсюда $\bar{R}$ — группа Фробениуса с ядром $\bar{Z}$ и неинвариантным множителем $\bar{B}_a$.

Завершим доказательство теоремы 2.3.1. Предположим, что теорема неверна. Тогда, как показано ранее, в G существует внешняя инволюция a такая, что $Z \cap B_a = X \neq A$. По лемме 2.3.9, в H существует элемент $n \in C_H(t) \cap R$, но $n \notin Z$.

Пусть $N = Z \cdot (n)$. Тогда $t \in N_H(N) \cdot R/Z = B_a Z/Z$ и, значит, некоторой элемент $r_1 \in B_a$ имеет представление $r_1 = nz_1$, где $z_1 \in Z$. Отсюда $r_1 \in N$.Как показано ранее, N/X — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle r_1 X \rangle$, который по свойствам групп Фробениуса сопряжен с $\langle nX \rangle$. По выбору n, некоторый неединичный элемент в $\langle X, r_1 \rangle$ централизуется внутренней инволюцией t, а это противоречит теореме 59, так как $\langle x, r_1 \rangle \leq B_a$. Теорема доказана.

Условие существования в G инволюции со слабо сопряженно бипримитивно конечным централизатором, используемое при доказательстве лемм 2.3.1 – 2.3.5, можно заменить следующим: в G существует инволюция, в централизаторе которой любая бесконечная подгруппа нечетного порядка обладает неединичным элементом с бесконечным централизатором в этой подгруппе. Слабо сопряженно бипримитивно конечные группы по теореме 56 обладают этим свойством.

2.4. О 2-полных подгруппах в группе Шункова

В этом парагафе рассматривается вопрос о наличии 2-полных подгрупп в группе Шункова. В частности, будет доказана следующая теорема:

Напомним, что группа называется *2-полной*, если ее силовские 2-подгруппы полные.

Теорема 2.4.1 (А.К. Шлепкин [102]). *Если существует сопряженно бипримитивно конечная группа G с условием примарной минимальности и не обладающая периодической частью, то G не содержит полных 2-подгрупп, имеющих ранг больше 1.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда справедливы

Лемма 2.4.1. *Пусть $A = B \leftthreetimes D$ — бесконечная черниковская группа, где B — полная p-подгруппа, а D — конечная элементарная абелева q-группа и $p \neq q$. Если $C_B(D) \neq 1$, то $C_B(D)$ бесконечен.*

Лемма 2.4.2. *Все инволюции из G сопряжены.*

Лемма 2.4.3. *Пусть S — произвольная 2-подгруппа группы G. То-*

гда все инволюции из $\Im$ порождают элементарную абелеву нормальную подгруппу в S.

Доказательство леммы 2.4.1 дано в [10], а лемм 2.4.2, 2.4.3 — в [100]

Лемма 2.4.4. *Пусть H — собственная подгруппа группы G и H содержит бесконечную 2-подгруппу. Тогда все инволюции из H порождают элементарную абелеву нормальную подгруппу в H.*

Доказательство. Действительно, пусть Q — максимальная полная 2-подгруппа группы H. Ясно, что Q нормальна в H (предложение 91). Если все инволюции из H лежат в Q, то все доказано. Пусть $k \in H \setminus Q$. Так как $\langle Q, k\rangle$ 2-группа, то $k \in C_G(Q)$ (лемма 2.4.3). Обозначим через Q_k полную 2-подгруппу из G содержащую k (лемма 2.4.2). Из предложений 91 и 92 получаем, что $H_1 = \langle H, Q_k\rangle$ — собственная подгруппа группы G и инволюция k лежит в ее конечной элементарной абелевой нормальной подгруппе. Так как $H \subseteq H_1$ и $k \in H$, то k лежит в конечной элементарной абелевой подгруппе из H. Лемма доказана.

Лемма 2.4.5. *Пусть K — конечная нециклическая простая подгруппа группы G. Тогда K изоморфна одной из следующих групп:*

$$PSL_2(2^n), Sz(2^{2n}).$$

Доказательство. Из леммы 2.4.3 и [141] вытекает, что список

$$PSL_2(2^n), Sz(2^{2n}), PSU_3(2^{2n}), J_1,$$

$$Re(q), (q = 3^{2n+1}), PSL_2(q)((q \equiv 3, 5 mod(8)).$$

исчерпывает все возможные варианты изоморфизма для K.

Пусть K изоморфна одной из следующих групп:

$$J_1, Re(q), (q = 3^{2n+1}), PSL_2(q)((q \equiv 3, 5 mod(8)).$$

Тогда в K найдутся две различные силовские 2-подгруппы S_1 и S_2 такие, что $1 \neq d \in S_1 \cap S_2$. Т ак как $C_G(d)$ содержит бесконечную 2-подгруппу (лемма 2.4.2) и $S_1, S_2 \subset C_G(d)$, то $S_1 = S_2$ (лемма 2.4.4). Противоречие с тем, что S_1, S_2 различны. Пусть K изоморфна $PSU_3(2^{2n+1})$. Тогда в K найдутся две различные силовские 2-подгруппы S_1, S_2 и элемент $b \neq 1$ нечетного порядка такие, что $i, j \in C_G(b)$, i, j — некоторые инволюции из S_1, S_2 соответственно. лемме 2.4.1, $C_G(b)$ содержит бесконечную 2-подгруппу. Следовательно, инволюции i, j перестановочны (лемма 2.4.4) и

$$1 = S_1 \cap S_1^j$$

В группе $PSU_3(2^{2n})$ любые две различные силовские 2-подгруппы имеют тривиальное пересечение, и, следовательно $S_1 = S_1^j$. В эюм случае $j \in S_1$. Но тогда $1 \neq S_1 \cap S_1^j$ и $S_1 = S_2$ Противоречие с тем, что S_1 и S_2 различны. Лемма доказана.

Лемма 2.4.6. *Пусть H — собственная подгруппа группы Q- и H содержит бесконечную 2-подгруппу. Тогда H не может содержать подгруппу вида $N = \langle b \rangle \lambda \langle k \rangle$, где $|b| > 2$, $|k| = 2$, и $b^k = b^{-1}$.*

Доказательство вытекает из леммы 2.4.4.

Лемма 2.4.7. *Группа G не содержит конечяую подгруппу вида $M = R\lambda \langle k \rangle$, где R — простая нециклическая группа, а k — инволюция.*

Доказательство. Предположим обратное, и пусть S_1 — силовская 2-подгруппа группы M содержащая k. Тогда $S_1 = S\lambda \langle k \rangle$ где S силовская 2-подгруппа группы R. Пусть b — элемент простого порядка $p \neq 2$ из R такой, что $b \in N(S)$ (лемма 2.4.5). Из леммы 2.4.4 вытекает, что $b \in N(S_1)$ и $C_{S_1} \neq 1$. Но тогда $N(\langle b \rangle)$ одновременно содержит и бесконечную 2-подгруппу (лемма 2.4.1) и конечную подгруппу $N = \langle b \rangle \lambda \langle i \rangle$, где i — такая инволюция из R, что $b^i = b^{-1}$. Противоречие с утверждением леммы 2.4.6. Лемма доказана.

Пусть $1 \neq H$ — некоторая полная 2-подгруппа группы G, z — инволюция из H и b — элемент простого порядка $p \neq 2$ такой, что $b^z = b^{-1}$. Положим

$$\Upsilon = \{L_h = \left\langle b, b^h, z \right\rangle | h \in H\}.$$

Лемма 2.4.8. *Множество Υ бесконечно.*

Доказательство. Действительно, в противном случае $N(b)$ — бесконечная группа, и мы приходим к противоречию с утверждением леммы 2.4.6. Лемма доказана.

Лемма 2.4.9. *Пусть $1 \neq M_h$ — собственная минимальная нормальная подгруппа группы$L_h \in \Upsilon$. Тогда M_h не 2-группа.*

Доказательство. Рассмотрим $N(M_h)$. Очевидно, $\langle b \rangle N\lambda \langle z \rangle \subset (M_h)$. Если же $\pi(M_h) = \{2\}$, то последнее включение невозможно ввиду леммы 2.4.6. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.4.10. *Только для конечного числа $L_h \in \Upsilon$ подгруппа M_h разрешима.*

Доказательство. Предположим обратное, и пусть Υ_1 — требуемое бесконечное подмножество из Υ. Так как M_h — минимальная нормальная подгруппа группы $L_h \in \Upsilon$, то M_h — элементарная абелева q-группа и $q \neq 2$ (лемма 2.4.9). Положим $C = C_{L_h}(z)$. Тогда $2 \notin \pi(C/\langle z\rangle)$ и $L_h = R_1\lambda(C \times \langle z\rangle)$ — конечная группа Фробениуса с ядром R_1, содержащим M_h, и с неинвариантным множителем $C \times \langle z\rangle$. В этом случае $\pi(C) \cap \pi(R_1) = \emptyset$. Следовательно, $C = 1$. Отсюда $L_h = (\langle b\rangle \times \langle b^h\rangle)\lambda\langle z\rangle)$.

Рассмотрим периодическую часть из $N(\langle b\rangle)$. Обозначим ее через A. Из бесконечности Υ_1 следует, что A — бесконечная группа. Пусть $\tilde{A}$ полная часть A. Тогда, по лемме 2.4.6, $2 \notin \pi(\tilde{A})$ и для любого $g \in \tilde{A}\lambda\langle b^h\rangle$. Итак, если $b_h \in L_h \in \Upsilon_1$, то $b_h \in C_G(\tilde{A})$. С другой стороны, A — черниковская группа и содержит бесконечно много элементов b^h, что возможно только в случае, когда $b^h \notin C_G(\tilde{A})$ для некоторого $b^h \in A$. Противоречие. Лемма доказана.

В дальнейшем будем считать, что Υ не содержит L_H с разрешимой M_h.

Лемма 2.4.11. *Группа M_h проста.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть $1 \neq M_1$ — собственная минимальная нормальная подгруппа из M_h. Ясно, что M_1 неразрешима. Тогда

$$M_h = K_1 \times \ldots \times K_n,$$

где все K_l $(1 \leq l \leq n)$ сопряжены с M_1 в L_n и $n \geq 2$.Возьмем некоторую инволюцию k из K_1. Тогда $\langle K_2, \ldots, K_n\rangle \subset C_G(k)$. Последняя группа является собственной подгруппой в G. Отсюда и из леммы 2.4.4 получаем, что M_h — элементарная абелева 2-подгруппа. Противоречие с выбором M_h. Лемма доказана.

Лемма 2.4.12. *Если $L_h \in \Upsilon$, то L_h проста.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда некоторая L_h из Υ содержит M_h, которая, по лемме 2.4.11, проста. Так как группа G не может содержать подгруппу $M_h\lambda\langle z\rangle$ (лемма 2.4.7), то $z \in M_h$. Но тогда элементы b и b^h лежат в M_h. Следовательно, $L_h = M_h$, что противоречит выбору L_h. Лемма доказана.

Лемма 2.4.13. *Пусть $L_h \in \Upsilon$ и S_h ее силовская 2-подгруппа, содержащая z. Тогда множество*

$$\Lambda = \{\Omega_1(S_n) | S_h \subset L_h \in \Upsilon\}$$

конечно.

Доказательство. Действительно, в противном случае централизатор $C_G(z)$ содержал бы бесконечно много инволюций, что противоречит утверждению леммы 2.4.4. Лемма доказана.

По лемме 2.4.13,

$$\Lambda = \{\Omega_1^1, \ldots, \Omega_1^m\}$$

где Ω_1^i $(1 \leq I \leq m)$ — элемент множества Λ с номером i. Тогда и $\Upsilon = \Upsilon_1 \cup \ldots \cup \Upsilon_m$ и с тем свойством, что

$$\Omega_1^i = \Omega_1(S_h) = \Omega_1(S_g)$$

для любых двух L_h и L_g из Υ_i. Из определения множества Υ следует, что

$$b \in \cap L_h, L_h \in \Upsilon$$

Отсюда и из леммы 2.4.4 получаем, что $|\Upsilon_i| = 1$ для любого i и, следовательно, Υ конечно. Противоречие с утверждением леммы 2.4.7. Теорема 2.4.1 доказана.

§ 2.5. Свойства групп Шункова

В этом параграфе приведем некоторые свойства групп Шункова без доказательства со ссылкой на работу, в которой доказывается этот результат.

Теорема 2.5.1 (А.И. Созутов, В.П. Шунков [65]). *Во всякой сопряженно бипримитивно конечной группе без инволюций с бесконечным множеством элементов конечного порядка каждый элемент простого порядка содержится в бесконечной локально конечной подгруппе.*

Теорема 2.5.2. *Фактор-группа p-бипримитивно конечной группы G по черниковской подгруппе p-бипримитивно конечна* (см. стр. 75 в [56]).

Теорема 2.5.3. *Фактор-группа G/R сопряженно бипримитивно конечной группы G по черниковской подгруппе R сопряженно бипримитивно конечна.*

Эта теорема доказывается точно так же, как и предложение 7 из [44].

Теорема 2.5.4 (В.П. Шунков [125]. *Во всякой бесконечной периодической сопряженно бипримитивно конечной группе без инволюций, удовлетворяющей условию минимальности для абелевых p-подгрупп по всем p, каждый элемент простого порядка содержится в бесконечной локально конечной подгруппе.*

Теорема 2.5.5 (А.Н. Остыловский, В.П. Шунков [44]). *Если в сопряженно бипримитивно конечной группе некоторая силовская 2-подгруппа конечна, то все силовские 2-подгруппы конечны и сопряжены.*

Теорема 2.5.6 (В.П. Шунков [65]). *Пусть G — сопряженно бипримитивно конечная группа без инволюций с условием примарной минимальности. Тогда G обладает полной частью R и фактор-группа G/R сопряженно бипримитивно конечна с условием примарной минимальности и с конечными силовскими p-подгруппами для любого $p \in \pi(G)$* [125].

Теорема 2.5.7. *Пусть G — периодическая сопряженно бипримитивно конечная группа, нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы из G, содержащий инволюции, обладает черниковской периодической частью. Тогда G обладает черниковской периодической частью.*

Утверждение теоремы 2.5.7 вытекает из теоремы 3.1 из [129].

Теорема 2.5.8 (В.И. Сенашов [54]). *Всякая сопряженно бипримитивно конечная группа без инволюций либо почти слойно конечна, либо содержит собственную не почти слойно конечную подгруппу.*

Теорема 2.5.9 (В.П. Шунков [121]). *Бесконечная бипримитивно конечная группа G обладает бесконечной абелевой подгруппой.*

Теорема 2.5.10 (В.П. Шунков [125]. *Пусть G — сопряженно бипримитивно конечная группа, R — ее нормальная слойно конечная подгруппа. Тогда фактор-группа $\overline{G} = G/R$ также сопряженно бипримитивно конечна.*

Теорема 2.5.11 (В.П. Шунков [125]. *Всякая периодическая сопряженно бипримитивно конечная группа без инволюций с условием примарной минимальной локально конечна.*

ГЛАВА 3

Связь групп Шункова с другими классами групп

В третьей главе устанавливается связь между группами Шункова и другими классами групп: черниковскими группами, группам с условиями минимальности, почти слойно конечными группами, группами, насыщенными системами подгрупп.

§ 3.1. Группы Шункова и группы с условием минимальности

В.П. Шунковым в [117] поставлена проблема: будет ли локально конечной (сопряженно) бипримитивно конечная группа с условием минимальности для абелевых подгрупп? В этом параграфе проблема решается положительно для групп без инволюций. Как показывает пример группы $B(m,n)$, $m \geq 2$, $n \geq 665$ [2], этот результат не обобщается на произвольные периодические группы без инволюций. Ранее указанная проблема решена положительно В.П. Шунковым [115] для p-групп (в частности, 2-групп).

В параграфе будем использовать обозначения:

$\Omega(R)$ — подгруппа абелевой группы R, порожденная всеми элементами простых порядков;

условие min-ab — условие минимальности для абелевых подгрупп.

Теорема 3.1.1 (А.Н. Остыловский). *Всякая группа Шункова без инволюций, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, является черниковской [45].*

Предположим, что теорема неверна. Тогда класс $\mathfrak{N}$ нечерниковских групп Шункова, не содержащих инволюций и удовлетворяющих условию min-ab, непуст.

Определение. Тогда и только тогда $G \in \mathfrak{A}$, когда $G \in \mathfrak{N}$ и черниковский радикал $R(S)$ любой нечерниковской подгруппы $S < G$ конечен.

Лемма 3.1.1. *Класс $\mathfrak{A}$ непуст. Если $G \in \mathfrak{A}$ и K — конечная нормальная подгруппа из G, то $G/K \in \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $G = G_0 \in \mathfrak{N}$, $R_0 = R(G_0)$, $\bar{G}_0 = G_0/R_0$.

Предположим, что $\bar{G_0} > \bar{S_1}$, $\bar{S_1} \in \mathfrak{N}$ и $R(\bar{S_1})$ бесконечен. Обозначим через G_1 и R_1 прообразы $\bar{S_1}$ и $R(\bar{S_1})$ в G соответственно. Тогда R_1 — черниковская группа (теорема 63), индекс $[R_1 : R_0]$ бесконечен и $\bar{G_1} = G_1/R_1 \in \mathfrak{N}$. Рассуждая о $\bar{G_1}$ и далее так же, как и о $\bar{G_0}$, построим в G цепочку $R_0 < R_1 < ... < R_n < ...$ черниковских подгрупп с бесконечными индексами $|R_{n+1} : R_n|$ $(n = 0, 1, ...)$. В силу условия min-ab эта цепочка оборвется на конечном номере m. Тогда $G_m/R_m \in \mathfrak{A}$. Лемма доказана.

Определение. Пусть $F < G \in \mathfrak{A}$, $F \in \mathfrak{A}$ и K — конечная нормальная подгруппа из F. Фактор-группу F/K будем называть $\mathfrak{A}$-*сечением* группы G.

Лемма 3.1.2. *Пусть G — группа из $\mathfrak{A}$. Любая бесконечная черниковская подгруппа содержится в некоторой максимальной черниковской подгруппе, совпадающей со своим нормализатором. Если H — максимальная черниковская подгруппа из G, S — черниковская подгруппа из G и $S \bigcap H$ бесконечно, то $S < H$ [43].*

Лемма 3.1.3. *Пусть G — сопряженно бипримитивно конечная группа без инволюций. Если централизатор любого неединичного элемента из G есть черниковская группа, то и G есть черниковская группа.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда можно полагать, что $G \in \mathfrak{A}$ и $R(G) = 1$. Так как группа G не является локально конечной (теорема 62), то можно считать, что G конечно-порождена. Вложим бесконечную абелеву подгруппу A в максимальную черниковскую подгруппу H (теорема 67 и лемма 3.1.1). Пусть a — элемент простого порядка из $\tilde{H}$. Далее, почти дословно повторив рассуждения лемм 2.1.2 — 2.1.8 из параграфа 2.1, получим, что для всякого $g \in G \backslash H$ $\langle a, g^{-1}ag \rangle$ есть группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$. Тогда по теореме 69 G обладает нормальным делителем F, таким, что $G = F \lambda N_G(a)$. Отсюда $N_G(a) \simeq G/F$ — бесконечная черниковская конечно-порожденная группа, что невозможно. Лемма доказана.

Лемма 3.1.4. *Пусть $T \in \mathfrak{A}$ и F — бесконечная максимальная черниковская подгруппа в T. Тогда $\tilde{F}$ обладает элементом $g \neq 1$ таким, что $C_T(g) \in \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Предположим, $\tilde{F}$ не обладает элементом с указанным свойством. Допустим, что в подгруппе F существует элемент $b_1 \neq 1$ такой, что $C_F(b_1)$ бесконечен и $C_T(b_1) = T_1 \in \mathfrak{A}$. По предположению,

$b_1 \in F \backslash \tilde{F}$. Обозначим: $T_1 \bigcap F = F_1$, $\langle b_1 \rangle = B_1$, $T_1/B_1 = \bar{T}_1$, $F_1/B_1 = \bar{F}_1$. Допустим, в подгруппе $\bar{F}_1$ существует элемент $\bar{b}_2 \neq 1$, такой, что $C_{\bar{F}_1}(\bar{b}_2)$ бесконечен, $C_{\bar{T}_1}(\bar{b}_2) = S_2 \in \mathfrak{A}$. Обозначим: T_2 — прообраз S_2 в T_1, b_2 — прообраз $\bar{b}_2$ в T_1, $\langle B_1, b_2 \rangle = B_2$, $T_2 \bigcap F = F_2$, $T_2/B_2 = \bar{T}_2$, $F_2/B_2 = \bar{F}_2$. По предположению, $b_2 \in F \backslash \tilde{F}$. Рассуждаем о группе $\bar{T}_2$ и далее так же, как о группе $\bar{T}_1$. Описанный процесс обрывается на конечном номере m в силу конечности индекса $[F : \tilde{F}]$. Тогда бесконечная максимальная черниковская подгруппа $\bar{F}_m = H$ группы $\bar{T}_m = G \in \mathfrak{A}$ удовлетворяет следующему условию:

A1) если $1 \neq h \in H$ и $C_H(h)$ бесконечны, то $C_G(h)$ — черниковская группа и, в силу леммы 3.1.2, $C_G(h) < H$.

Пусть a — элемент простого порядка из $\tilde{H}$. Из условия A1 вытекает, что для всякого $g \in G \backslash H$ $\langle a, g^{-1}ag \rangle$ есть группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$ (леммы 2.1.2 — 2.1.8). Тогда G обладает подгруппой Φ такой, что $G = \Phi \lambda N_G(a)$ (теорема 69). По условию A1, $N_G(a)$ — черниковская группа. В силу теоремы Фробениуса для сопряженно бипримитивно конечных групп [63] $\Phi \lambda \langle a \rangle$ — группа Фробениуса. Из теоремы 70 вытекает, что $\Phi/Z(\Phi)$ не обладает бесконечной абелевой подгруппой. Тогда группа $\Phi/Z(\Phi)$ конечна (теорема 67). Следовательно, G — черниковская группа, что противоречит выбору G. Лемма доказана.

Лемма 3.1.5. *Пусть G — группа с условием min-ab и централизатор любой конечной подгруппы есть нечерниковская группа. Тогда G обладает нечерниковской подгруппой T, такой, что все конечные подгруппы из T абелевы.*

Доказательство. Предположим, в группе $G_0 = G$ существует неабелева конечная подгруппа K_0. По условию леммы, $C_{G_0}(K_0) = G_1$ — нечерниковская группа. Предположим, в G_1 существует неабелева конечная подгруппа K_1. Тогда $K_0 \not< K_1$, так как в противном случае $K_0 < K_1 < C_{G_0}(K_0)$ и K_0 абелева. С другой стороны, $K_1 \not< K_0$, так как в противном случае $K_1 < K_0 \bigcap C_{G_0}(K_0) < Z(K_0)$ и K_1 абелева. Таким образом,

$$[K_0, K_1] = 1, \qquad K_0 \cdot K_1 \neq K_i \ \ (i = 0, 1).$$

По условию леммы $G_2 = C_{G_1}(K_1) = C_{G_0}(K_0 \cdot K_1)$ — нечерниковская группа. Рассуждая о G_2 и далее так же, как и о G_1, построим конечные неабелевы подгруппы K_n, причем $K_n < G_n = C_{G_{n-1}}(K_{n-1}) = C_{G_0}(K_0 \cdot K_1 ... K_{n-1})$ — нечерниковская группа $(n = 2, 3, ...)$. Обозначим $B_n^m =$

$K_n \cdot K_{n+1}...K_m$, $B_n^\omega = \bigcup_{s=n}^{\infty} B_n^s$ $(m \geq n)$. Если описанный процесс не обрывается на конечном номере, то B_0^ω — бесконечная черниковская группа (теорема 62). Но цепочка $B_0^\omega > B_1^\omega > ... > B_n^\omega > ...$ убывает, так как $K_{n-1} \not< B_n^\omega$, и не обрывается на конечном номере, что противоречит черниковости группы B_0^ω. Следовательно, наш процесс обрывается на конечном номере m, и $G_m = T$ — искомая группа.

Лемма 3.1.6. *Пусть G — нечерниковская группа с условием min-ab. Тогда G обладает нечерниковской подгруппой T, удовлетворяющей условию:*

A2) если K — конечная подгруппа из T и $C_T(K)$ — нечерниковская группа, то K абелева.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.1.5.

Определение. Тогда и только тогда $G \in \mathfrak{L}$, когда $G \in \mathfrak{A}$ и G удовлетворяет условию A2).

По лемме 3.1.6 $\mathfrak{L} \neq \emptyset$. Если $C \in \mathfrak{L}$, то любое $\mathfrak{A}$ — сечение группы G — лежит в $\mathfrak{L}$.

Лемма 3.1.7. *Бесконечная неабелева сопряженно бипримитивно конечная группа G с условием min-ab обладает конечной неабелевой подгруппой.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда можно полагать, что группа G лежит в классе $\mathfrak{A}$ и порождается квазициклическими q-подгруппами B и D. Пусть b_n — элемент порядка q^n из B. Если a — элемент простого порядка из G, то для любого $g \in G$ $\left\langle a, g^{-1}ag \right\rangle$ абелева по предположению. Отсюда вытекает абелевость групп

$$R_n = \left\langle a, b_n^{-1}ab_n, ..., b_n^{-q^n+1}ab_n^{q^n-1} \right\rangle, n = 1, 2, ...$$

Цепь элементарных абелевых групп $R_1 < R_2 < ... < R_n < ...$ стабилизируется на конечном номере в силу условия min-ab. Тогда индекс $[B : N_B(\langle a \rangle)]$ конечен. Следовательно, $B < C_G(a)$ [18]. Аналогично доказывается, что $D < C_G(a)$. Отсюда $\langle a \rangle = A_1 < Z(G)$.

Пусть $\bar{G} = G/A_1$. В группе $\bar{G}$ все конечные подгруппы опять абелевы, и $\bar{G}$ порождается двумя квазициклическими группами. Повторив о $\bar{G}$ те же рассуждения, что и о G, и перейдя к прообразам, получим $A_1 < A_2 \triangleleft G$ и $A_1 \neq A_2$. Рассуждая аналогично о G/A_2 и далее, построим в G бесконечную центральную подгруппу $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, что противоречит условию $G \in \mathfrak{A}$. Лемма доказана.

Определение. Пусть $1 \neq g \in T < G \in \mathfrak{A}$. Если $G_T(g) \in \mathfrak{A}$ ($C_T(g)$ — черниковская группа), то элемент g назовем *“плохим” (“хорошим”)* в

T.

Замечание 3.1.1. Если сопряженно бипримитивно конечная группа G без инволюций не содержит "плохих" элементов, то по лемме 3.1.3 G есть черниковская группа.

Лемма 3.1.8. *Пусть $G \in \mathfrak{L}$. Тогда G обладает $\mathfrak{A}$-сечением G^*, удовлетворяющим условиям:*

A3) $Z(G^*) > A_{G^*}$ — конечная подгруппа, порожденная всеми "плохими" в G^* элементами простых порядков;

A4) если T — $\mathfrak{A}$-сечение (в частности, нечерниковская подгруппа) группы G^*, удовлетворяющее условию A3, то $A_T \simeq A_{G^*}$ (в частности, $A_T = A_{G^*}$).

Доказательство. Пусть $G = S_0 \ni a_0$ — элемент простого порядка и $C_{S_0}(a_0) = S_1 \in \mathfrak{L}$. Пусть $S_1 \backslash (a_0) \ni a_1$ — элемент простого порядка и $C_{S_1}(a_1) = S_2 \in \mathfrak{L}$. Тогда $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle < Z(S_2)$. Рассуждая и далее таким образом, построим возрастающую цепочку $\langle a_1 \rangle < \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle < ... < \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times ... \times \langle a_n \rangle < ...$ абелевых подгрупп. В силу условия min-ab эта цепочка должна оборваться на конечном номере m. Тогда S_m удовлетворяет условию A3. Среди всевозможных $\mathfrak{A}$-сечений группы G, удовлетворяющих условию A3, выберем сечение G_1, имеющее минимально возможный порядок своей особой подгруппы A_{G_1}.

Пусть $\bar{G}_2$ — $\mathfrak{A}$-сечение группы G_1, удовлетворяющее условию A3, G_2 и B — прообразы в G_1 групп $\bar{G}_2$ и $A_{\bar{G}_2}$ соответственно. Так как $B \triangleleft G_2$ и $G_2/C_{G_2}(B) < \mathrm{Aut}(B)$ — конечная группа, то $C_{G_2}(B)$ — нечерниковская группа. Тогда, по определению класса $\mathfrak{L}, B$ абелева. В силу включения $\Omega(B) < A_{G_1}, |A_{\bar{G}_2}| \leq |A_{G_1}|$. Но по выбору группы $G_1 |A_{G_1}| \leq |A_{\bar{G}_2}|$. Следовательно, $A_{\bar{G}_2} \simeq A_{G_1}$ и $G_1 = G^*$ — искомое сечение.

Определение. Тогда и только тогда $G \in \mathfrak{M}$, когда $G \in \mathfrak{L}$ и $G = G^*$, т. е. G удовлетворяет условиям A3) и A4).

По лемме 3.1.8, множество $\mathfrak{M}$ не пусто. Если $G^* \in \mathfrak{M}$ и T — нечерниковская подгруппа из G^*, то $T = T^* \in \mathfrak{M}$.

Лемма 3.1.9. *Пусть $G \in \mathfrak{L}$. Тогда в G существуют подгруппа $T \in \mathfrak{L}$ и элемент $g \in T$ такие, что $C_T(g)$ — черниковская группа.*

Доказательство. Предположим, лемма неверна. Пусть K — произвольная конечная подгруппа из G и $1 = K_0 < K_1 < \ldots < K_n = K$ — нормальный ряд группы K с абелевыми факторами [18]. Докажем, что $C_G(K) \in \mathfrak{L}$. Допустим, это неверно. Тогда существует номер i, такой, что $G_1 = N_G(K_i) \in \mathfrak{L}$ и $N_G(K_{i+1})$ — черниковская группа. Очевидно, $K < G_1$. Обозначим $\bar{G}_1 = G_1/K_i$, $\bar{k}_1$ — неединичный элемент из $\bar{K}_{i+1} = K_{i+1}/K_i$, k_1 — прообраз $\bar{k}_1$ в K_{i+1}. Если $\bar{F}_1 = C_{\bar{G}_1}(\bar{K}_1)$ — черниковская группа, то $C_{G_1}(k_1)$ — черниковская группа, что невозможно по предположению. Следовательно, $\bar{F}_1 \in \mathfrak{L}$. Очевидно, $\bar{K}_{i+1} < \bar{F}_1$. Пусть $\bar{k}_2$ — неединичный элемент из $\bar{K}_{i+1} \setminus (\bar{k}_1)$, k_2 — прообраз $\bar{k}_2$ в K_{i+1}, F_1 — прообраз $\bar{F}_1$ в G_1. Если $\bar{F}_2 = C_{\bar{F}_1}(\bar{k}_2) = C_{\bar{G}_1}(\langle \bar{k}_1, \bar{k}_2 \rangle)$ — черниковская группа, то $C_{F_1}(k_2)$ — черниковская группа, что невозможно. Следовательно, $\bar{F}_2 \in \mathfrak{L}$. Рассуждая аналогично далее, получим $\bar{F}_m = C_{\bar{G}_1}(\langle \bar{k}_1, \bar{k}_2, \ldots, \bar{k}_m \rangle) = C_{\bar{G}_1}(\bar{K}_{i+1}) \in \mathfrak{L}$, что противоречит черниковости группы $N_G(K_{i+1})$. Следовательно, $C_G(K) \in \mathfrak{L}$. По определению класса $\mathfrak{L}$ подгруппа K абелева. Однако это, в силу произвольности выбора K, противоречит лемме 3.1.7. Лемма доказана.

Лемма 3.1.10. *Пусть $G^* \in \mathfrak{M}$ и S — бесконечная максимальная черниковская подгруппа в G^*. Тогда выполняется условие:*

A5) $Z(S)$ бесконечен.

Доказательство. По лемме 3.1.4 $\tilde{S}$ обладает "плохими" элементами. Предположим, $\tilde{S}$ не содержит "плохих" элементов сколь угодно большого порядка. Тогда в $\tilde{S}$ существует конечная подгруппа B, такая, что $C_{G^*}(B) \in \mathfrak{M}$ и если $\tilde{S} > D > B$, $D \neq B$, то $C_{G^*}(D)$ — черниковская группа. В этом случае полная часть $\tilde{S}/B$ максимальной черниковской подгруппы $S \bigcap C_{G^*}(B)/B$ группы $C_{G^*}(B)/B = G_1 \in \mathfrak{L}$ не обладает "плохими" в G_1 элементами. Но это противоречит лемме 3.1.4. Следовательно, $\tilde{S}$ обладает "плохими" элементами сколь угодно большого порядка. В силу конечности ранга $\tilde{S}$ существует квазициклическая подгруппа $A < \tilde{S}$, содержащая лишь "плохие" элементы. Так как $R = \left\langle s^{-1}As | s \in S \right\rangle$ — полная абелева нормальная подгруппа в S и $\Omega(R) = \text{гр}(\Omega(s^{-1}As) | s \in S) < A_{G^*} < Z(G^*)$,то, по теореме 66 $R < Z(S)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.1.1. По лемме 3.1.9 в классе $\mathfrak{M}$ существует группа G^*, обладающая "хорошим" элементом a. Пусть $\langle b \rangle$ — силовская p-подгруппа в группе $\langle a \rangle$ и $\langle c \rangle$ — подгруппа, такая, что $\langle a \rangle = \langle b \rangle \times \langle c \rangle$. Можно полагать, что $C_{G^*}(c) = G_1^* \in \mathfrak{M}$. Тогда p — элемент b является "хорошим" в G_1^*. Будем полагать $G^* = G_1^*, a = b$.

Пусть R — подгруппа индекса p в группе $\langle a \rangle$. В нечерниковской группе $C_{G^*}(R)/R$ элемент aR имеет простой порядок и поэтому содержится в бесконечной черниковской подгруппе Q (теоремы 62, 68). Вложим полный прообраз подгруппы Q в максимальную черниковскую подгруппу H группы G^* (лемма 3.1.2). Тогда $a \in H$. По условию A5,

$Z(H)$ бесконечен. Из черниковости $C_{G^*}(a)$ и леммы 3.1.2 теперь следует, что $C_{G^*}(a) < H$.

Пусть g — некоторый элемент из $G^* \setminus H$ и $L = \langle a, g^{-1}ag \rangle$. Предположим, что L лежит в некоторой бесконечной максимальной черниковской подгруппе F. Из условия A5 следует, что $C_F(a)$ бесконечен. Тогда $F \bigcap H$ бесконечно и по лемме 3.1.2 $F < H$. Далее, $g^{-1}ag \in H$, $a \in gHg^{-1}, C_{gHg^{-1}}(a)$ бесконечен, $gHg^{-1} = H$. Отсюда по лемме 3.1.2 $g \in H$, что противоречит выбору элемента g. Следовательно, имеет место условие:

A6) $L \not< F$ (F — произвольная бесконечная максимальная черниковская подгруппа из G^*).

Пусть M_1 — минимальный нормальный делитель группы L. Из теоремы 37 следует, что M_1 есть элементарная абелева q-группа. Покажем, что $C_{G^*}(M_1) \in \mathfrak{M}$.

1. Пусть сначала $q \neq p$. По теореме Машке [18] $M_1 = C_{M_1}(0) \times D$, причем $a \in N_{G^*}(D)$. Допустим, $D \ni d \neq 1$. Тогда $C_{G^*}(d)$ — черниковская группа. Вложим элемент d в бесконечную максимальную черниковскую подгруппу F. Из бесконечности $Z(F)$, черниковости $C_{G^*}(d)$ и леммы 3.1.2 следует $M_1 < C_{G^*}(d) < F$, $L < N_{G^*}(M_1) < F$, т. е. $L < F$, что противоречит условию A6. Следовательно, $D = 1$. Тогда $M_1 = C_{M_1}(a) < H$. Так как $M_1 \triangleleft L$, то $M_1 < H \bigcap H^l$ $(l \in L)$. Из условий A5, A6 и выбора H вытекает, что $C_{G^*}(M_1) \in \mathfrak{M}$.

2. Пусть теперь $q = p$. Тогда группа $K = \langle M_1, a \rangle$ обладает верхним центральным рядом: $1 = Z_0 < Z_1 < \ldots < Z_n = K$. Так как $C_{G^*}(a) < H$, то $Z_1 < H$. Нормализатор $N_{G^*}(\langle Z_1, a \rangle)$ — черниковская группа, и, в силу условия A5, $N_H(\langle Z_1, a \rangle)$ бесконечен. Тогда по лемме 3.1.2 $Z_2 < N_{G^*}(\langle Z_1, a \rangle) < H$. Рассуждая аналогично, далее получим: $Z_n = K < H$, т. е. $M_1 < H$. Отсюда, как показано выше, следует, что $C_{G^*}(M_1) \in \mathfrak{M}$.

Включим M_1 в нормальный ряд $M_1 < M_2 < \ldots < M_n = L$ с элементарными абелевыми факторами M_{i+1}/M_i [18]. Ввиду нечерниковости $N_{G^*}(M_1)$ и черниковости $C_{G^*}(a)$ существует номер i $(1 \leq i < n)$, такой, что $G_1 = N_{G^*}(M_i) \in \mathfrak{M}$ и $N_{G^*}(M_{i+1})$ — черниковская группа. Обозначим $C_1/M_i = \bar{G}_1, M_{i+1}/M_i = \bar{M}_{i+1} = \langle \bar{m}_1 \rangle \times \ldots \times \langle \bar{m}_s \rangle$, m_j — прообраз $\bar{m}_j$ в M_{j+1} $(j = 1, 2, \ldots, s)$. Существует номер $j (0 \leq j < n)$, такой, что $G_2 = N_{\bar{G}_1}(\langle \bar{m}_1 \rangle \times \ldots \times \langle \bar{m}_j \rangle) \in \mathfrak{L}$ и $N_{G_2}(\langle \bar{m}_{j+1} \rangle)$ — черниковская группа. Вложим элемент m_{j+1} в бесконечную максимальную черниковскую подгруппу $\bar{F}_2$ группы G_2. Из условия A5 следует бесконечность $Z(\bar{F}_2)$. По лемме 3.1.2, $\bar{M}_{i+1} < \bar{F}_2$. Вложим прообраз подгруппы $\bar{F}_2$ в максимальную черниковскую подгруппу F группы G^*. Тогда $M_{i+1} < F$. По условию A5, $N_F(M_{i+1})$ бесконечен. Из черниковости $N_{G^*}(M_{i+1})$ и леммы 3.1.2 следует теперь, что $L < N_{G^*}(M_{i+1}) < F$, а это противоречит условию A6. Следовательно, множество $\mathfrak{N}$ пусто и теорема доказана.

Следствие 3.1.1 (В.П. Шунков). *Сопряженно бипримитивно конечная p-группа ($p \neq 2$) с условием минимальности для абелевых подгрупп является черниковской.*

§ 3.2. Группы Шункова без инволюций и условие минимальности для абелевых подгрупп

Ранее установлено, что группа G с условием минимальности для абелевых подгрупп будет черниковской, если G — локально разрешимая группа (С.Н. Черников [87]), локально конечная группа, бипримитивно конечная p-группа (В.П. Шунков [115, 116]), сопряженно бипримитивно конечная группа без инволюций (А.Н. Остыловский (теорема 4.1.1)). Как показали П.С. Новиков и С.И. Адян [2], произвольная группа с условием минимальности для абелевых подгрупп не обязана быть черниковской группой.

В этом параграфе будет доказана

Теорема 3.2.1 (Н.Г. Сучкова, В.П. Шунков). *Всякая сопряженно бипримитивно конечная группа, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, является черниковской* [75].

Заметим, что в контрпримере к теореме ввиду теоремы 3.2.1 должны быть инволюции. Наиболее важными узловыми участками в доказательстве теоремы 3.2.1 являются следующие результаты.

Теорема 3.2.2 (Н.Г. Сучкова, В.П. Шунков). *Пусть G — сопряженно бипримитивно конечная группа, обладающая инволюциями и $C_G(i)$ — черниковская подгруппа для любой инволюции $i \in G$. Если G удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, то она является черниковской группой* [75].

Теорема 3.2.3 (Н.Г. Сучкова, В.П. Шунков). *Всякая сопряженно бипримитивно конечная группа с конечной силовской 2-подгруппой и удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, является черниковской* [75].

Теорема 3.2.4 (Н.Г. Сучкова, В.П. Шунков). *Если G — нечерниковская сопряженно бипримитивно конечная группа с условием ми-*

нимальности для абелевых подгрупп, то в ней найдется такая нечерниковская секция H/Y (где Y — конечная 2-подгруппа из G), что H/Y содержит инволюцию с черниковским централизатором [75].

Теорема 3.2.5 (Н.Г. Сучкова, В.П. Шунков). *Контрпримера к теореме 3.2.1 не существует* [75].

Рассмотрим сначала контрпримеры с черниковскими централизаторами инволюций.

Сейчас мы начнем доказывать теорему 3.2.2. Заметим, что во всякой группе, которая удовлетворяет условию min-ab, силовские p-подгруппы для любого простого p являются черниковскими [115]. Предположим, что существуют контрпримеры к теореме 3.2.2.

Замечание 3.2.1. Во всякой группе, которая удовлетворяет условию теоремы 3.2.2, силовские 2-подгруппы сопряжены.

Это очевидным образом вытекает из условия теоремы 3.2.2 и теорем 71, 72.

Из всех контрпримеров к теореме 3.2.2 будем рассматривать такие, в которых ранги полных частей силовских 2-подгрупп наименьшие. В рассматриваемых контрпримерах выберем такой контрпример G с силовской 2-подгруппой S, что $|S/\tilde{S}|$ — минимальный.

Лемма 3.2.1. *Не нарушая общности рассуждения, можно считать, что $N_G(B)$ — черниковская подгруппа для любой неединичной полной абелевой подгруппы $B < G$.*

Доказательство. Пусть контрпример G не удовлетворяет условию леммы, а B_1 — такая полная абелева подгруппа, что $N_G(B_1)$ не является черниковской подгруппой. Тогда фактор-группа $\bar{G}_1 = N_G(B_1)/B_1$ также не является черниковской (теорема 41). Заметим,что $\bar{G}_1$ — сопряженно бипримитивно конечная группа (теорема 73). Кроме того, $\bar{G}_1$ удовлетворяет условию min-ab. Действительно, пусть $\bar{A}$ — абелева подгруппа из $\bar{G}_1$. Если A — полный прообраз $\bar{A}$ в G, то A — двуступенно разрешимая подгруппа и удовлетворяет условию min-ab. Поэтому она черниковская (теорема 23.2.2 из [18]). Но тогда A, а значит, и $\bar{A}$ удовлетворяют условию минимальности.

Далее, если B_1 содержит инволюцию j, то $C_G(j) > C_G(B_1)$ — черниковская подгруппа. Так как $|N_G(B_1) : C_G(B_1)| < \infty$ (теорема 74), то $N_G(B_1)$ — черниковская подгруппа (теорема 41), что противоречит нашему предположению. Поэтому B_1 является $2'$-подгруппой. Если tB_1 — инволюция из $\bar{G}_1$, то $t^2 \in B_1$, т. е. $|t| = 2 \cdot m$, $m = 2k + 1$. Отсюда заключаем, что $t = ib$, где i — инволюция из G, $b \in B_1$, а $tB_1 = iB_1$.

В силу условия и теоремы 75, $C_{\bar{G}_1}(tB_1) = C_G(i)B_1/B_1$ — черниковская подгруппа.

Итак, $\bar{G}_1$ — контрпример. Пусть и он не удовлетворяет условию леммы, т. е. G_1 содержит такую полную абелеву подгруппу $\bar{B}_2$, что $N_{\bar{G}_1}(\bar{B}_2)$ не является черниковской подгруппой. Заметим, что если B_2 — полный прообраз $\bar{B}_2$ в G, то $B_2 = B_1 \times C_1$, где $C_1 \simeq \bar{B}_2 = B_2/B_1$. Снова можно рассмотреть контрпример $N_{\bar{G}_1}(\bar{B}_2)/\bar{B}_2$. Продолжая этот процесс, мы либо придем к контрпримеру, который удовлетворяет условию леммы, либо получим строго возрастающую цепочку абелевых подгрупп $B_1 < B_2 < ... < B_k < ...$, в которой B_{k+1}/B_k полная абелева фактор-группа и $B_{k+1} = B_k \times C_k$. Но тогда

$$B = [\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k] = B_1 \times C_1 \times C_2 \times ...$$

— абелева подгруппа из G, которая не удовлетворяет, очевидно, условию минимальности, что невозможно. Следовательно, лемма верна.

Лемма 3.2.2. *Если $1 \neq V$ — произвольная 2-подгруппа из G, то $N_G(V)$ — черниковская подгруппа.*

Доказательство. Для инволюции $j \in V$ имеем $C_G(V) < C_G(j)$. Поэтому $C_G(V)$ — черниковская подгруппа. Так как $|N_G(V) : VC_G(V)| < \infty$ (теорема 74), то $N_G(V)$ черниковская подгруппа (теорема 41). Лемма доказана.

Лемма 3.2.3. *Группа G обладает такой строго убывающей цепочкой подгрупп*

$$G = H_1 > H_2 > H_3 > ..., \tag{6}$$

что $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n > S$.

Доказательство. В силу теоремы 4.4.3 группа G не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Поэтому она обладает собственной нечерниковской подгруппой C, которая содержит инволюцию [45]. Возьмем силовскую 2-подгруппу P из C,

Ввиду замечания 3.2.1, $r(\tilde{P}) \geq r(\tilde{S})$. С другой стороны, так как C — контрпример к теореме, то $r(\tilde{P}) \geq r(\tilde{S})$ по выбору G. Поэтому $r(\tilde{P}) = r(\tilde{S})$. По этой же причине $|P/\tilde{P}| = |S/\tilde{S}|$. Следовательно, P — силовская 2-подгруппа группы G, а значит, сопряжена с S (замечание 3.2.1), т. е. найдется такой элемент $g \in G$, что $P^g = S$. Обозначим теперь $C^g = H_2$. Тогда $H_2 > S$. Рассуждая теперь о H_2 так же, как о G, мы найдем в ней собственную нечерниковскую подгруппу $H_3 > S$. Продолжая этот процесс, мы построим цепочку (6) с нужным свойством. Лемма доказана.

Выберем в S такое множество элементарных абелевых 2-подгрупп $W = \{V_1, ..., V_n\}$, что любая элементарная 2-подгруппа из S сопряжена в S к одной из подгрупп этого множества. Существование W гарантируется теоремой 76 и тем очевидным фактом, что порядки элементарных абелевых 2-подгрупп в черниковской группе ограничены в совокупности. Для любой подгруппы $B > S$ обозначим

$$K(B, S) = \langle N_B(V_1), ..., N_B(V_n) \rangle.$$

Лемма 3.2.4. *Не нарушая общности рассуждения, можно считать, что $K(G, S) = K(S)$ — черниковская подгруппа.*

Доказательство. Пусть $K(G, S)$ не является черниковской подгруппой. По теореме 4.4.3, это равносильно тому, что $K(G, S)$ не удовлетворяет условию минимальности. В силу леммы 3.2.3 в $K(G, S)$ найдется собственная подгруппа $B_1 > S$, не удовлетворяющая условию минимальности. Заметим, что $K(B_1, S)$ не удовлетворяет условию минимальности, так как в противном случае мы вместо G взяли бы контрпример B_1, для которого лемма выполняется. Аналогично в $K(B_1, S)$ выберем собственную подгруппу $B_2 > S$, не удовлетворяющую условию минимальности, затем в $K(B_2, S)$ возьмем собственную подгруппу $B_2 > S$, не удовлетворяющую условию минимальности, и т.д.

Рассмотрим теперь цепочки подгрупп:

$$\begin{array}{c} N_G(V_1) > N_{B_1}(V_1) > N_{B_2}(V_1) > N_{B_3}(V_1) > ..., \\ N_G(V_2) > N_{B_1}(V_2) > N_{B_2}(V_2) > N_{B_3}(V_2) > ..., \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ N_G(V_n) > N_{B_1}(V_n) > N_{B_2}(V_n) > N_{B_3}(V_n) > ... \end{array}$$

В силу леммы 3.2.2 каждая подгруппа $N_G(V_i)$ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Поэтому, начиная с некоторого номера m_i, будем иметь

$$N_{B_{m_i}}(V_i) = N_{B_{m_{i+1}}}(V_i) = ...$$

Если $m = \max(m_1, m_2, ..., m_n)$, то для любого $i = 1, ..., n$ получаем

$$N_{B_m}(V_i) = N_{B_{m+1}}(V_i) = ..., \ i = 1, 2, ..., n.$$

Но, по построению, B_{m+1} — собственная подгруппа группы $K(B_m, S)$, с другой стороны,

$$K(B_m,S)=\langle N_{B_m}(V_1),...,N_{B_m}(V_n)\rangle =$$
$$=\left\langle N_{B_{m+1}}(V_1),...,N_{B_{m+1}}(V_n)\right\rangle) < B_{m+1}.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Обозначим для краткости $K(S)=K$.

Лемма 3.2.5. *$K>S$.*

Доказательство. Заметим, что $Z(S)\neq\{1\}$ (теорема 80). Пусть R — нижний слой $Z(S)$. Так как подгруппа R характеристична в S, то $S<N_G(R)$. Но R является одной из подгрупп V_i по определению множества W. Поэтому $N_G(R)<K$ по построению подгруппы K. Отсюда и получаем справедливость леммы.

Лемма 3.2.6. *Пусть $1\neq V<S$. Тогда $N_G(V)<K$.*

Доказательство. В самом деле, $N_G(V)<N_G(\bar{V})$, где $\bar{V}=\Omega(Z(V))$. По определению множества W найдутся такой элемент $h\in S$ и такой номер m, что $\bar{V}=V_m^h$. Поэтому $N_G(V)<N_G(\bar{V})=N_G(V_m^h)=(N_G(V_m))^h<K^h=K$ ввиду леммы 3.2.5. Лемма доказана.

Лемма 3.2.7. *Подгруппа K — бесконечная черниковская.*

Доказательство. Если $|K|<\infty$, i — инволюция из S, то $C_G(i)<K$, по лемме 3.2.6, а значит, $|C_G(i)|<\infty$. Но тогда G — почти разрешимая группа (теорема 77). В силу теоремы 23.2.2 из [18] и теоремы 41, G — черниковская группа. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3.2.8. *Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что*

$$K<[\textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty}H_n].$$

Доказательство. Так как $N_G(V_i)$ — черниковская подгруппа ($i=1,...,n$), то, начиная с некоторого номера k_i, имеем

$$N_{H_{k_i}}(V_i)=N_{H_{k_{i+1}}}(V_i)=N_{H_{k_{i+2}}}(V_i)=...$$

Пусть $k=\max(k_1,...,k_n)$. Тогда

$$N_{H_k}(V_i)=N_{H_{k+1}}(V_i)=N_{H_{k+2}}(V_i)=...$$

для всех $i=1,2,...,n$. Отсюда заключаем, что

$$K(H_k,S)=K(H_{k+1},S)=K(H_{k+2}S)=...$$

Взяв в качестве контрпримера G подгруппу H_k, а в качестве ряда (6) — цепочку $H_k > H_{k+1} > H_{k+2} > ...$, мы докажем лемму.

По лемме 3.2.4 K — черниковская подгруппа, а подгруппа $T = N_G(\tilde{K})$ — черниковская в силу леммы 3.2.1.

Лемма 3.2.9. *Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что* $T < \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$.

Доказательство. Так как T — черниковская подгруппа, то, начиная с некоторого номера l,

$$(T \bigcap H_l) = (T \bigcap H_{l+1}) = (T \bigcap H_{l+2}) = ...,$$

т. е.

$$N_{H_l}(\tilde{K}) = N_{H_{l+1}}(\tilde{K}) = N_{H_{l+2}}(\tilde{K}) = ...$$

Поэтому для обоснования леммы достаточно в качестве контрпримера G взять подгруппу H_l, а в качестве ряда (6) — цепочку

$$H_l > H_{l+1} > H_{l+2} > ...$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь черниковскую (по лемме 3.2.1) подгруппу $M = N_G(\tilde{T})$.

Лемма 3.2.10. *Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что*

$$M < \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n.$$

Доказывается точно так же, как лемма 3.2.9.

Рассмотрим некоторые свойства подгруппы M.

Лемма 3.2.11. $M > K$.

Доказательство. Действительно,

$$K < N_G(\tilde{K}) = T < N_G(\tilde{T}) = M.$$

Лемма 3.2.12. *Подгруппа* M *— максимальная черниковская подгруппа группы* G.

Доказательство. Пусть M_1 — черниковская подгруппа и $M_1 > M$. Тогда $\tilde{M}_1 > \tilde{M} > \tilde{T} > \tilde{K}$. Поэтому $T = N_G(\tilde{K}) > \tilde{M}_1$, т. е. $\tilde{T} > \tilde{M}_1$. Таким образом, $\tilde{M}_1 = \tilde{M} = \tilde{T}$. Но тогда $M_1 < N_G(\tilde{M}_1) = N_G(\tilde{T}) = M$. Итак, $M_1 = M$ и лемма доказана.

Лемма 3.2.13. *$N_G(\tilde{M}) = M$.*

Доказательство. При доказательстве леммы 3.2.12 было установлено, что $\tilde{M} = \tilde{T}$. Поэтому $N_G(\tilde{M}) = N_G(\tilde{T}) = M$. Следовательно, лемма верна.

Лемма 3.2.14. *Если U — нееединичная 2-подгруппа из M, то $N_G(U) < M$.*

Доказательство. В силу теоремы 41 найдется такой элемент $h \in M$, что $U^h < S$. По леммам 3.2.6, 3.2.11 $N_G(U^h) = (N_G(U))^h < M$. Но тогда и $N_G(U) < M$. Лемма доказана.

Лемма 3.2.15. *Подгруппа M сильно вложена в G.*

Доказательство. По лемме Фраттини

$$L = N_G(M) = M \cdot N_L(S).$$

Лемма Фраттини применима, так как силовские 2-подгруппы из M сопряжены в M (теорема 71). По лемме 3.2.14 $N_L(S) < M$. Таким образом, $N_G(M) = M$.

Покажем теперь, что подгруппа $D = M \bigcap M^g (g \in G \setminus M)$ не содержит инволюций. Пусть, наоборот, некоторая инволюция $k \in D$, а S_1 — силовская 2-подгруппа из M, содержащая k. В силу леммы 3.2.14 $C_G(k) < M$. Так как $k = a^g$ для некоторой инволюции $a \in M$ и $C_G(a) < M$, то $C_G(k) = C_G(a^g) = (C_G(a))^g < M^g$.

Таким образом, $C_G(k) < M \bigcap M^g = D$. Отсюда выводим, что $Z(S_1) < D$. Если i — инволюция из $Z(S_1)$, то по тем же рассуждениям $S_1 < C_G(i) < D$. Поэтому $S_1 = R^g$ для некоторой силовской 2-подгруппы R из M. Подгруппы S_1 и R сопряжены в M, т. е. найдется такой элемент $h \in M$, что $R = S_1^h$. Но тогда $S_1 = R^g = S_1^{hg}$, $hg \in N_G(S_1)$, а $N_G(S_1) < M$ по лемме 3.2.14. Таким образом, $hg \in M$, а значит, $g \in M$. Противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 3.2.16. *Если $G \neq H > M$, то H — сильно вложенная подгруппа.*

Доказательство. Установим сначала, что $N_G(H) = H$. Действительно, пусть $g \in N_G(H)$. Тогда $S^g = S_1 < H$. Но силовские 2-подгруппы S и S_1 из H сопряжены в H, поэтому найдется такой элемент $h \in H$, что $S^h = S_1$. Итак, $S^g = S^h$, $S^{gh^{-1}} = S$, $gh^{-1} \in N_G(S) < M$ (лемма 3.2.14), т. е. $gh^{-1} \in H$, а значит, $g \in H$.

Докажем теперь, что подгруппа $H \bigcap H^g (g \in G \setminus H)$ не содержит инволюций. Пусть, наоборот, некоторая инволюция $i \in H^g \bigcap H$, а S_1 — силовская 2-подгруппа из H, содержащая i. В силу сопряженности в

H подгрупп S и S_1 найдется такой элемент $h \in H$, что $S_1^h = S < M$. Тогда $i^h = m \in M$. Далее, так как $i \in H^g$, то $i = j^g$, $j \in H$. Инволюция j также сопряжена в H с некоторой инволюцией $m_1 \in S < M$, т. е. $m_1^{h_1} = j$ для $h_1 \in H$. Следовательно, $m = i^h = j^{gh} = m_1^{h_1gh}$. Таким образом, $m \in M \bigcap M^{h_1gh}$. Очевидно, что $h_1gh \notin M$. Но по лемме 3.2.15 M — сильно вложенная подгруппа. Противоречие доказывает лемму.

Перейдем к доказательству теорем 3.2.2, 3.2.3.

Теперь у нас есть все необходимое для доказательства теоремы 3.2.2. В силу леммы 3.2.10 $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n > M$. Поэтому по лемме 3.2.16 каждая подгруппа H_n цепочки (6) является сильно вложенной. Тогда (теорема 78)

$$H_n = C_G(i) \cdot D_n,\ n = 2, 3, ...,$$

где i — инволюция из M, а D_n — подгруппа без инволюций. Так как $H_2 > H_3 > H_4 > ...$, то (теорема 79)

$$H_3 = C_G(i) \cdot (D_2 \bigcap H_3),\ H_4 = C_G(i) \cdot (D_2 \bigcap H_4),\ ...$$

Заметим, что D_2 — черниковская подгруппа [45]. Следовательно, цепочка подгрупп $D_2 > (D_2 \bigcap H_3) > (D_2 \bigcap H_4) > ...$ стабилизируется на некотором номере. Но тогда и цепочка (6) должна стабилизироваться. Полученное противоречие доказывает теорему 3.2.2.

Осталось доказать теорему 3.2.3. Предположим, что существует нечерниковская сопряженно бипримитивно конечная группа G, которая удовлетворяет условию min-ab и обладает конечной силовской 2-подгруппой. Тогда в G все силовские 2-подгруппы имеют одинаковый порядок (теорема 74). В силу теоремы 3.2.2 найдется такая инволюция $i \in G$, что $C_G(i)$ — нечерниковская подгруппа. Поэтому $G_1 = C_G(i)/\langle i \rangle$ — также контрпример к теореме 3.2.3, причем порядок силовской 2-подгруппы из G_1 меньше порядка силовской 2-подгруппы из G. Рассуждая о G_1 и далее так же, как и о G, мы придем к нечерниковской группе без инволюций, которая удовлетворяет условию min-ab. Но это противоречит [45]. Теорема 3.2.3 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3.2.4. Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы 3.2.4. Установим сначала следующее утверждение. В группе G найдутся такая нечерниковская подгруппа B и конечная 2-подгруппа $A < B$, что $N_B(A)$ — черниковская подгруппа. Предположим, что это не так. Тогда справедлива

Лемма 3.2.17. *В группе G найдется нечерниковская подгруппа M с абелевыми силовскими 2-подгруппами.*

Доказательство. Пусть лемма неверна. Тогда в G найдется неабелева силовская 2-подгруппа S. Так как S — черниковская [115], а значит, локально конечная подгруппа, то в ней найдется конечная неабелева 2-подгруппа S_1. По предположению, $G_1 = C_G(S_1)$ — нечерниковская подгруппа. Выберем в ней конечную неабелеву 2-подгруппу S_2, затем в нечерниковской подгруппе $G_2 = C_{G_1}(S_2)$ возьмем конечную неабелеву 2-подгруппу S_2 и т.д. Пусть

$$T = \langle S_1, S_2, S_3, ...\rangle,\ T_1 = \langle S_2, S_3, ...\rangle,\ T_2 = \langle S_3, S_4, ...\rangle,\ ...$$

Так как $T_1 < G_1 = C_G(S_1)$ и S_1 — неабелева подгруппа, то T_1 — собственная подгруппа T. Далее, T_2 — собственная подгруппа T_1 в силу того, что неабелева подгруппа S_2 не содержится в подгруппе $T_2 < C_{G_1}(S_2)$ и т.д. Поэтому цепочка подгрупп $T > T_1 > T_2 > ...$ строго убывает. С другой стороны, по построению, $[S_i, S_j] = 1$ для любых $i \neq j$. Отсюда заключаем, что T — 2-подгруппа, а значит, черниковская [115] и удовлетворяет условию минимальности. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3.2.18. *Не нарушая общности рассуждения, можно считать, что любая элементарная абелева 2-подгруппа из M содержится в $Z(M)$.*

Доказательство. Пусть это не так, а V — некоторая максимальная элементарная абелева 2-подгруппа из M. Тогда вместо M мы рассмотрели бы нечерниковскую, по предположению, группу $M_1 = C_M(V)$.

Если V_1 — произвольная элементарная абелева 2-подгруппа из M_1, то $\langle V, V_1\rangle$ также является элементарной абелевой 2-подгруппой. Следовательно, $V_1 < V < Z(M_1)$ в силу выбора подгруппы V. Лемма доказана.

Лемма 3.2.19. *Любая конечная подгруппа K группы M разрешима и представима в виде $K = T\lambda R$, где R — силовская 2-подгруппа из K.*

Доказательство. Пусть R — силовская 2-подгруппа в K. Если $R = 1$, то лемма 3.2.19 справедлива по теореме Файта—Томпсона (теорема 37). Если же $R \neq 1$, то по лемме 3.2.17 R — абелева подгруппа, а по лемме 3.2.18 $\Omega(R) < Z(M)$. Из теоремы 81 вытекает, что $R < Z(N_k(R))$. По теореме Бернсайда (теорема 82) $K = T\lambda R$. Так как $|T| = 2k+1$, то T — разрешимая подгруппа. Но тогда и подгруппа K разрешима. Лемма доказана.

Теперь мы можем повторить рассуждения из [45] и убедиться, что сделанное относительно группы G предположение приводит к противоречию. Поэтому в группе G найдутся такая нечерниковская подгруппа B и конечная 2-подгруппа $A < B$, что $N_B(A)$ — черниковская подгруппа. Теперь мы можем легко получить теорему 3.2.4.

Действительно, рассмотрим такой инвариантный в A ряд подгрупп $1 = A_0 < A_1 < A_2 < ... < A_n = A$, что $|A_i : A_{i-1}| = 2$ $(1 \leq i \leq n)$. Очевидно, существует номер k $(k \geq 1)$, такой, что $N_B(A_k)$ — черниковская подгруппа, а $N_B(A_i)$ — нечерниковская подгруппа для $i < k$. Полагаем $Y = A_{k-1}$, $H = N_B(A_{k-1})$. Тогда инволюция из A_k/Y имеет по построению черниковский централизатор в H/Y и теорема 3.2.4 доказана.

Рассмотрим контрпримеры к теореме 3.2.1 с инволюциями 1-го и 2-го рода.

Предположим, что теорема 3.2.1 неверна и T_0 — контрпример. Тогда найдется такой контрпример T, что $N_T(B)$ — черниковская подгруппа для любой бесконечной полной абелевой подгруппы $B < T$. Для доказательства достаточно повторить рассуждения леммы 3.2.1. Заметим, что если M — бесконечная черниковская подгруппа группы T, то и $N_T(M)$ — черниковская подгруппа, так как $N_T(M) < N_T(\tilde{M})$.

Определение. Конечную 2-подгруппу $U < T$ назовем *подгруппой 1-го (2-го)* рода в T, если $N_T(U)$ — черниковская (нечерниковская) подгруппа. Инволюция $i \in T$ называется *инволюцией 1-го (2-го) рода* в T, если $C_T(i)$ — черниковская (нечерниковская) подгруппа.

Так как $|N_T(U) : C_T(U)| < \infty$, то, ввиду теоремы 41, $N_T(U)$ и $C_T(U)$ — одновременно либо черниковские, либо нечерниковские подгруппы.

По теореме 3.2.2 T содержит инволюцию 2-го рода. Возьмем в T максимальную абелеву подгруппу 2-го рода F периода 4. Тогда $E = C_T(F)$, $\bar{E} = E/F$ контрпримеры. В силу теоремы 3.2.3 в E найдутся такие конечная 2-подгруппа $Y > E$ и нечерниковская подгруппа $W < N_E(Y)$, что $G = W/Y$ обладает инволюцией 1-го рода. Выделим отдельно

Утверждение (*). Нормализатор любой бесконечной черниковской подгруппы из G есть черниковская подгруппа.

Пусть S — силовская 2-подгруппа из G, содержащая инволюцию 1-го рода i. По теореме 3.2.3 S — бесконечная подгруппа.

Лемма 3.2.20. *Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $i \in Z(S)$.*

Доказательство. Пусть $R_n = \left\langle g \in \tilde{S} \mid |g| = 2^n \right\rangle$; K_1 — максимальная нормальная в S подгруппа 2-го рода из R_1, $G_1 = N_G(K_1)$. Предположим, что $K_1 \neq R_1$. В контрпримере $\bar{G}_1 = G_1/K_1$ с силовской 2-подгруппой $\bar{S} = S/K_1$ рассмотрим инволюцию $\bar{r} \in (R_1/K_1 \bigcap Z(\bar{S}))$. Если $\bar{r}$ — инволюция 2-го рода в $\bar{G}_1$, то $K_1 \times (r)$ — подгруппа 2-го рода в G, где r — прообраз $\bar{r}$ в R_1. Это противоречит выбору K_1. Таким образом, $\bar{r}$ — инволюция 1-го рода в $\bar{G}_1$, и лемма 3.2.20 справедлива для $G = \bar{G}_1$, $i = \bar{r} \in Z(\bar{S})$.

Поэтому можно считать, что $R_1 = K_1$ — подгруппа 2-го рода. Рассуждая аналогично предыдущему, считаем, что R_2/R_1 — подгруппа 2-го рода в G_1/R_1, т. е. R_2 — подгруппа 2-го рода в G и т.д.

Покажем, что тогда $\tilde{S} < Z(S)$. Пусть Q — такая полная подгруппа из W, что $QY/Y = \tilde{S}$. Если V — полный прообраз S в W, то $Q \lhd V$. Положим $T = \langle g \in Q \mid |g| = 4\rangle$. Если R — такая максимальная подгруппа из Q, что $RY/Y = R_2$, то $T < R$ и $N_W(T) > N_W(R)$. Поэтому T — подгруппа 2-го рода и по определению подгруппы F $T < F < Z(W)$. По теореме 83 $Q < Z(V)$. Переходя к образам, получаем $\tilde{S} < Z(S)$.

Очевидно, $S = \tilde{S} \cdot C$ для некоторой конечной подгруппы $C \ni i$. Можно считать, что $S = \tilde{S} \times C$. Действительно, $X = C \bigcap \tilde{S}$ — подгруппа 2-го рода, так как X содержится в некоторой подгруппе 2-го рода R_n и $C_G(R_n) < C_G(X)$. Поэтому вместо G мы бы рассмотрели контрпример $N_G(X)/X$ с силовской 2-подгруппой $S/X = \tilde{S}/X \times C/X$ и инволюцией 1-го рода iX.

Итак, пусть $S = \tilde{S} \times C$. Очевидно, $Z(C) < Z(S)$. Если инволюция 1-го рода лежит в $Z(C)$, то лемма верна. Пусть в $Z(C)$ содержатся инволюции только 2-го рода, а j — одна из них. Тогда мы рассмотрим контрпример $C_G(j)/\langle j\rangle$ с силовской 2-подгруппой $S/\langle j\rangle = \tilde{S} \cdot \langle j\rangle / \langle j\rangle \times C/\langle j\rangle$ и инволюцией 1-го рода $i/\langle j\rangle \in C/\langle j\rangle$. Так как $|C/\langle j\rangle| < |C|$, то, продолжая наши рассуждения, мы придем к контрпримеру, в котором инволюция 1-го рода лежит в центре силовской 2-подгруппы. Лемма доказана.

Обозначим через H максимальную черниковскую подгруппу, содержащую $C_G(i)$. По лемме 3.2.20 $H > S$.

Лемма 3.2.21. *Если L — бесконечная подгруппа из H, то $N_G(L) < H$.*

Доказательство. Действительно, $N_G(L)$ — черниковская подгруппа (утверждение (*)), и $|H \bigcap N_G(L)| = \infty$. Осталось применить теорему 84.

Лемма 3.2.22. *Подгруппа S содержит инволюцию 2-го рода.*

Доказательство. Пусть лемма неверна. Так как силовские 2-подгруппы из H сопряжены в H, то и H содержит инволюции только 1-го рода. По теореме 3.2.2, в $G \setminus H$ найдется инволюция 2-го рода j. Обозначим

$$D = \langle i, j\rangle = \langle c\rangle \lambda \langle i\rangle = \langle c\rangle \lambda \langle j\rangle.$$

Если $|c| = 2n+1$, то инволюции i, j сопряжены в D, что невозможно. Поэтому (c) содержит инволюцию $k \in Z(D)$. По лемме 3.2.20 $i \in Z(S)$. Следовательно, ввиду теоремы 84, $k \in C_G(i) < H$, а значит, k — инволюция 1-го рода. Заметим, что $|C_S(k)| < \infty$. Действительно, в противном случае $|C_G(k) \bigcap H| = \infty$ и $C_G(k) < H$ (теорема 84), но $C_G(k) \ni j$. Из теоремы 85 вытекает, что k индуцирует на $\tilde{S}$ автоморфизм, который каждый элемент из $\tilde{S}$ переводит в обратный.

Пусть P — силовская 2-подгруппа в D, содержащая инволюции i, k. Поскольку силовские 2-подгруппы из D сопряжены, то в P найдется инволюция j_1 2-го рода. Вложим P в некоторую силовскую 2-подгруппу S_1 группы G. В силу теоремы 3.2.3, S_1 — бесконечная подгруппа. Так как S_1 содержит инволюцию 2-го рода j_1, то S_1 не содержится в H. Это означает (теорема 84), что $|C_{S_1}(i)| < \infty$. По теореме 85 $g^i = g^{-1}$ для любого $g \in \tilde{S}$.

Допустим, что в группе G найдется подгруппа $L = \langle i\rangle \times \langle k\rangle \times (m)$, $|m| = 2$. Так как $L < C_G(i) < H$, то все инволюции из L 1-го рода (ввиду ранее сделанного предположения относительно инволюций из H), а так как в H все силовские 2-подгруппы сопряжены, то найдется такой элемент $h \in H$, что $L < h^{-1}Sh = S_0$. Пусть $S_1 < H_1$ — максимальная черниковская подгруппа группы G. По теореме 86 в подгруппе $\langle i\rangle \times \langle k\rangle$ найдется такая инволюция y, что централизатор $C_S(y)$ бесконечен. Применяя теорему 84, заключаем, что $L < C_{S_1}(y) < H_1$. Поэтому $L < S_2 = h_1^{-1}S_1h_1$ для некоторого $h_1 \in H_1$.

В силу теоремы 90 найдется такая подгруппа 4-го порядка $B < L$, что $|C_{S_0}(B)| = \infty$. По теореме 86, существует инволюция $x \in B$ с бесконечным централизатором $C_{S_2}(x)$. Так как $C_{S_0}(B) < (C_G(x) \bigcap H)$, то $|C_G(x) \bigcap H| = \infty$. Поэтому $C_G(x) < H$ (теорема 84). Отсюда получаем, что пересечение $H \bigcap S_2$ бесконечно, а значит, $S_2 < H$, что невозможно (S_2 содержит инволюцию 2-го рода $h_1^{-1}j_1h_1$).

Итак, $M = \langle i\rangle \times \langle k\rangle$ — максимальная элементарная абелева 2-подгруппа в G. Если z — инволюция из $\tilde{S}$, то $[i, z] = [k, z] = 1$ ($i \in Z(S)$, $u^k = u^{-1}$ для любого $u \in \tilde{S}$). Ввиду максимальности M как элементарной абелевой 2-подгруппы в S получаем, что $z \in M$. Значит, $z = i$, $\tilde{S}$

— квазициклическая подгруппа. Пусть t — инволюция из $Z(S_1)\bigcap\tilde{S}_1$. Очевидно, $t\in M$. Так как $g^i=g^{-1}$ для любого $g\in\tilde{S}$, то либо $t=k$, либо $t=ki$, а $\tilde{S}_1$ — квазициклическая подгруппа. По теореме 87 инволюции t,ti сопряжены в $\tilde{S}\lambda\langle t\rangle$, а инволюции i,ti сопряжены в $\tilde{S}_1\lambda\langle i\rangle$. Следовательно, инволюции t,i сопряжены в G.

Так как $i\in Z(S)$, $t\in Z(S_1)$, $i=t^g$ для некоторого $g\in G$, то

$$S_1^g<(C_G(t))^g=C_G(t^g)=C_G(i)<H.$$

Но S_1^g содержит инволюцию 2-го рода j_1^g. Противоречие. Итак, лемма 3.2.22 верна.

Замечание 3.2.2. Очевидно, не нарушая общности рассуждений, можно предполагать:

1) если контрпример $G_1=G_2/L$, где G_2, $L<G$, L инвариантная в G_2 конечная 2-подгруппа и некоторая силовская 2-подгруппа S_1 из G_1 содержит центральную инволюцию 1-го рода, то $r(\tilde{S}_1)\geq r(\tilde{S})$, причем если $r(\tilde{S}_1)=r(\tilde{S})$, то $t(S_1)=|S_1:\tilde{S}_1|\geq t(S)$;

2) если $r(\tilde{S}_1)=r(\tilde{S})$, $t(S_1)=t(S)$ и H_1 — максимальная черниковская подгруппа из G_1, содержащая S_1, то $r(\tilde{H}_1)\geq r(\tilde{H})$, а если $r(\tilde{H}_1)=r(\tilde{H})$, то $t(H_1)=|H_1:\tilde{H}_1|\geq t(H)$.

Выбираем контрпример в соответствии с замечанием 3.2.2.

Лемма 3.2.23. *Если j — инволюция 2-го рода из S, то $j\in\tilde{S}$.*

Доказательство. Рассмотрим контрпример $G_1=C_G(j)$. Пусть S_1 — силовская 2-подгруппа из G_1, содержащая $C_S(j)\ni i$. Тогда возможны два случая:

1. $|C_S(j)|=\infty$. Тогда (теорема 84) $S_1<H$. В силу замечания 3.2.2, $\tilde{S}_1=\tilde{S}$, $t(S_1)=t(S)$. Если $j\notin\tilde{S}$, то в контрпримере $G_1/\langle j\rangle$ выполняется равенство $r(\tilde{S}_1/\langle j\rangle)=r(\tilde{S})$, но $t(S_1/\langle j\rangle)<t(S)$. Получили противоречие с замечанием 3.2.2. Следовательно, $j\in\tilde{S}$.

2. $|C_S(j)|<\infty$. В этом случае $S_1\bigcap H$ — конечная подгруппа, а значит, $|C_{S_1}(i)|<\infty$ (теорема 84). Таким образом, S и S_1 содержат почти регулярные инволюции. Докажем, что в этом случае их полные части $\tilde{S}$ и $\tilde{S}_1$ не содержат инволюций 2-го рода.

Действительно, пусть, например, инволюция 2-го рода $d\in\tilde{S}$. Напомним, что через Q мы обозначали такую полную подгруппу из W, что $QY/Y=\tilde{S}$. Если d_1 — прообраз d в Q, то d_1 — элемент 2-го рода и $(d_1)\bigcap F$ — циклическая подгруппа порядка 4 по построению $F<Z(W)$. Значит, прообраз j индуцирует автоморфизм подгруппы Q, который

оставляет на месте элемент порядка 4. По теореме 85 этот автоморфизм оставляет на месте и бесконечную подгруппу из Q. Переходя к образам, получаем, что j централизует бесконечную подгруппу из $\tilde{S}$. Это противоречит нашему предположению относительно j. Точно так же доказывается, что и $\tilde{S}_1$ не содержит инволюций 2-го рода.

Таким образом, $j \notin \tilde{S}_1$. Пусть k — инволюция из $\tilde{S}_1 \bigcap Z(S_1)$. По доказанному выше, k — инволюция 1-го рода. Образуем подгруппу $(k) \times \langle j \rangle < C_G(i) < H$. Если $|C_S \langle k \rangle| = \infty$, то $S_1 < C_G(k) < H$ (теорема 84). Это противоречит предположению, что $|C_S(j)| < \infty$. Поэтому k — почти регулярная инволюция в S. Тогда $t^k = t^j = t^{-1}$ для любого элемента $t \in \tilde{S}$ (теорема 85). Отсюда заключаем, что kj централизует $\tilde{S}$. Заметим, что kj централизует и $\tilde{S}_1$.

Если kj — инволюция 1-го рода, то $S_1 < H$ (теорема 84). Снова получаем противоречие с предположением $|C_S(j)| < \infty$. Следовательно, kj — инволюция 2-го рода. Тогда, по утверждению случая 1, $kj \in \tilde{S}$, но это невозможно, так как мы установили, что $\tilde{S}$ не содержит инволюций 2-го рода. Итак, случай 2 невозможен и лемма доказана.

Лемма 3.2.24. *Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $Z(S)$ — бесконечная подгруппа.*

Доказательство. Пусть X — подгруппа 2-го рода из нижнего слоя $\tilde{S}$, причем наибольшего порядка в множестве всех таких подгрупп. По леммам 3.2.22, 3.2.23 $X \neq (1)$. Рассмотрим контрпример $G_1 = C_G(X) > \left\langle \tilde{S}, i \right\rangle$. Если S_1 — силовская 2-подгруппа в G_1, содержащая $\left\langle \tilde{S}, i \right\rangle$, то $S_1 < H$ (теорема 84). В силу замечания 3.2.2, S_1 сопряжена с S в H. Поэтому можно считать, что $S_1 = S$. В контрпримере G_1/X с силовской 2-подгруппой S/X, которая содержит инволюцию 1-го рода iX, снова возьмем максимальную подгруппу 2-го рода $\bar{X}_1$ из нижнего слоя $\tilde{S}/X$. Если X_1 — полный прообраз $\bar{X}_1$ в G_1, то X_1 — подгруппа 2-го рода в G_1. Рассмотрим контрпример $G_2 = C_{G_1}(X_1)$. Снова можно считать, что $S < G_2$. Продолжая этот процесс, мы построим в $\tilde{S}$ строго возрастающую цепочку подгрупп 2-го рода

$$X < X_1 < X_2 < ... < X_n < ...$$

Ей будет соответствовать убывающая цепочка контрпримеров

$$G \geq G_1 \geq G_2 \geq ... \geq G_n \geq ...,$$

причем $X_n < Z(G_{n+1})$ при любом n. Начиная с некоторого номера n, $X_n^{m_2}$ обладает элементами порядка 4 (m_2 — параметр, введенный в теореме 88). Для доказательства леммы осталось заметить, что вместо G мы можем рассматривать контрпример G_{n+1}, для которого лемма верна (теорема 89).

Лемма 3.2.25. *Пусть L — неединичная 2 -подгруппа 1-го рода из H. Тогда $N_G(L) < H$.*

Доказательство. Так как силовские 2-подгруппы из H сопряжены в H, то можно считать, что $L < S$. Так как $N_G(L)$ — черниковская подгруппа и $N_G(L) > Z(S)$, то по предыдущей лемме $|N_G(L) \bigcap H| = \infty$. Ввиду теоремы 84, $N_G(L) < H$. Лемма доказана.

Лемма 3.2.26. *В $G \setminus H$ найдется хотя бы одна инволюция 2-го рода.*

Доказательство. Предположим, что все инволюции 2-го рода из G содержатся в H. Тогда по лемме 3.2.23 все они лежат в $\tilde{S}$, а значит, порождают неединичный (лемма 3.2.22) нормальный делитель группы G. Обозначим через K максимальный нормальный делитель из $\tilde{S}$ в G. В силу утверждения (*) $|K| < \infty$. Так как K — подгруппа 2-го рода, то $i \notin K$. Рассмотрим контрпример G/K, в котором S/K — силовская 2-подгруппа, $iK \in Z(S/K)$. Заметим, что G/K обладает инволюциями 2-го рода из $(G/K)\setminus(H/K)$. Действительно, в противном случае мы снова нашли бы неединичную нормальную в G/K подгруппу $K_1/K < \tilde{S}/K$. Но тогда ее прообраз $K_1 \lhd G$, $K_1 \neq K$ и $K_1 < \tilde{S}$. Это противоречит выбору K. Поэтому, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что в самой группе G существует инволюция 2-го рода из $G \setminus H$. Лемма доказана.

Пусть i — произвольная инволюция 1-го рода из S.

Лемма 3.2.27. *Пусть R — 2-подгруппа группы G и $R \ni i$. Тогда $R < H$.*

Доказательство. Так как R — черниковская (локально конечная) подгруппа, то достаточно рассмотреть случай, когда R — конечная подгруппа. Вспомним (лемма 3.2.24), что $|Z(S)| = \infty$. Следовательно, $|C_G(i) \bigcap H| = \infty$. Поэтому $C_G(i) < H$ (теорема 84). Отсюда выводим, что $Z(R) < H$. Можно считать, что $Z(R) < S$ (силовские 2-подгруппы из H сопряжены в H). Пусть a — инволюция из $Z(R)$. Если a — инволюция 1-го рода, то $R < C_G(a) < H$. Предположим теперь, что a — инволюция 2-го рода. По лемме 3.2.23 $a \in \tilde{S}$. Мы можем считать, что $a \in Z(G)$. Если $|R| = 2$, то лемма верна. Ведем доказательство леммы индукцией по $|R|$. Так как $|R/\langle k^g\rangle| < |R|$, то по индуктивному предположению $R/\langle k^g\rangle < H/\langle k^g\rangle$. Возвращаясь к прообразам, получим $R < H$, и лемма доказана.

Пусть t — инволюция 2-го рода из $G \setminus H$. Такая инволюция существует по лемме 3.2.26. Обозначим

$$D = \langle i, t\rangle = \langle b\rangle \lambda \langle i\rangle = \langle b\rangle \lambda \langle t\rangle.$$

Заметим, что $|b|$ — четное число, так как i, t не могут быть сопряжены. Если k — инволюция из $\langle b\rangle$, то $k \in Z(D)$. Пусть P — силовская 2-подгруппа из D, содержащая подгруппу $\langle i\rangle \times \langle k\rangle$. По теореме Силова в P найдется инволюция t_1, сопряженная с t.

Лемма 3.2.28. *В подгруппе S все инволюции содержатся в $\tilde{S}$ и в $Z(H)$.*

Доказательство. По лемме 3.2.27 $P < H$. Все инволюции 2-го рода из S содержатся в $\tilde{S}$ (лемма 3.2.23) и в $Z(H)$ (замечание 3.2.2). Остается установить справедливость леммы для произвольной инволюции 1-го рода $i \in S$. По лемме 3.2.27 инволюция $t_1 \in P < H$. Поэтому t_1 централизует подгруппу $\langle i\rangle \times \langle k\rangle$. Так как

$$D = \langle b\rangle \lambda \langle i\rangle,$$

то $\langle k\rangle \times \langle i\rangle$ — максимальная элементарная абелева 2-подгруппа в D. Значит, $t_1 \in (\langle k\rangle \times \langle i\rangle)$ и $t_1 = ki$. Заметим, что k — инволюция 2-го рода. Действительно, в противном случае $j \in C_G(k) < H$, что не так. Следовательно, $k \in \tilde{S}$, $Z(H)$. Но тогда $i = t_1 \cdot k \in \tilde{S}$, $Z(H)$. Лемма доказана.

Итак, S — бесконечная черниковская подгруппа, и в ней все инволюции содержатся в $\tilde{S}$, причем $\Omega(\tilde{S}) < Z(H)$.

Лемма 3.2.29. *В группе G все силовские 2-подгруппы, содержащие инволюции 1-го рода, сопряжены.*

Доказательство. Пусть S_1 — силовская 2-подгруппа группы G и S_1 содержит инволюцию 1-го рода t. Достаточно установить, что подгруппы S и S_1 сопряжены. Возьмем инволюцию 1-го рода $i \in S$. Обозначим $D = \langle t, i\rangle$. Так как D — конечная подгруппа, то по теореме Силова инволюция t сопряжена с инволюцией из некоторой 2-подгруппы $P \ni i$. В силу леммы 3.2.27, $P < H$.

Таким образом, найдется такой элемент $g \in G$ что пересечение $S_1^g \bigcap H$ содержит инволюцию 1-го рода. Снова по лемме 3.2.27 $S_1^g < H$.

Так как в H все силовские 2-подгруппы сопряжены, то S_1^g сопряжена с S. Следовательно, подгруппы S_1 и S сопряжены.

Перейдем к доказательству теоремы 3.2.5.

Замечание 3.2.3. Если теорема 3.2.5 неверна, то по предыдущим рассуждениям существует такой контрпример G_0 с силовской 2-подгруппой S_0, в которой есть инволюции 1-го и 2-го рода, причем все они лежат в $\tilde{S}_0$ и в $Z(H_0)$, где H_0 — максимальная черниковская подгруппа, содержащая S_0. Все силовские подгруппы группы G_0, содержащие инволюции 1-го рода, сопряжены. Если инволюция 1-го рода $i \in S_0$, то $C_{G_0}(i) < H_0$. Если 2-подгруппа P содержит i, то $P < H_0$.

Обозначим через X максимальную в S_0 элементарную абелеву подгруппу 2-го рода. Рассмотрим контрпримеры $T = N_{G_0}(X)$, $G = T/X$. Тогда $T > H_0$, и мы можем считать, что $T = G_0$. Пусть $H = H_0/X$, $S = S_0/X$.

Определение. Инволюцию в группе G назовем *сквозной*, если она является образом инволюции 1-го рода при естественном гомоморфизме $G_0 \longrightarrow G = G_0/X$.

Ввиду замечания 3.2.3 подгруппа S обладает сквозной инволюцией.

Замечание 3.2.4. Если k — инволюция 2-го рода в S, то полный прообраз $\langle k \rangle$ в G_0 содержит элемент порядка 4.

Лемма 3.2.30. *В группе G найдется такая возрастающая цепочка подгрупп $R_1 < R_2 < ... < R_n < ...$ из $\tilde{S}$, что $G_1 = N_G(R_1)$, $G_2 = N_{G_1}(R_2)$, ..., $G_n = N_{G_{n-1}}(R_n)$, ... — контрпримеры и цепочка $G > G_1 > G_2 > ... > G_n > ...$ строго убывает, причем $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n > H$.*

Доказательство. Пусть U — конечная подгруппа 2-го рода из $\tilde{S}$. Тогда по замечанию 3.2.2 $N_G(U) > H$.

Повторяя рассуждения леммы 3.2.22, можно показать, что $\tilde{S}/U$ содержит инволюцию 2-го рода. Поэтому в $\tilde{S}$ найдется строго возрастающая цепочка конечных подгрупп 2-го рода

$$U_1 < U_2 < ... < U_n < ...$$

Предположим, что $N_G(U_n) = G$ $(n = 1, 2, ...)$. Если $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, то $N_G(L) = G$, но L — бесконечная черниковская подгруппа. Получаем противоречие с утверждением (*). Следовательно, найдется такой номер k, что $N_G(U_k)$ — собственная подгруппа группы G. Полагаем $R_1 = U_k$.

Рассуждая о группе $G_1 = N_G(R_1)$ так же, как о G и т.д., мы построим требуемую в лемме цепочку подгрупп.

Обозначим через $\mathfrak{G}$ множество сквозных инволюций из G_1. Нам потребуется

Лемма 3.2.31. *Силовские 2-подгруппы группы G, содержащие сквозные инволюции, сопряжены. Если 2-подгруппа P группы G содержит сквозную инволюцию $i \in S$, то $P < H$. Сквозные инволюции из S лежат в $Z(H)$.*

Для доказательства леммы достаточно перейти к полным прообразам в G_0, вспомнить замечание 3.2.3 и вернуться к образам.

Лемма 3.2.32. *В множестве $G \setminus G_1$ есть сквозные инволюции.*

Доказательство. Пусть лемма неверна. Заметим, что если $x \in \mathfrak{G}$, то $g^{-1}xg$ — сквозная инволюция для любого $g \in G$. В силу нашего предположения, $g^{-1}xg \in \mathfrak{G}$, т. е. $\mathfrak{G}$ — инвариантное множество. Таким образом, $M = \langle \mathfrak{G} \rangle \triangleleft G$. Пусть P — силовская 2-подгруппа из M и $P \bigcap \mathfrak{G} \neq 0$. Подгруппы P и $P^g (g \in G)$ сопряжены в M. Действительно, если M — черниковская подгруппа, то это следует из теоремы 71. Если же M — контрпример, то это вытекает из замечания 3.2.2 и леммы 3.2.31. Следовательно, лемма Фраттини применима и

$$G = M \cdot N_G(P).$$

Так как P содержит инволюцию 1-го рода, то $N_G(P)$ — черниковская подгруппа. Поэтому M — контрпример. Действительно, в противном случае G — черниковская группа, что не так. Отсюда выводим, что P — бесконечная подгруппа (теорема 3.2.3). Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $P < H$ (лемма 3.2.31). Но тогда по лемме 3.2.21 $N_G(P) < H < G_1$. Итак, получаем, что $G = M \cdot N_G(P) < G_1$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3.2.33. *Пусть $i \in \mathfrak{G}$, k — сквозная инволюция из G/G_1. Если $D = \langle i, k \rangle = \langle c \rangle \leftthreetimes \langle i \rangle = \langle c \rangle \leftthreetimes \langle k \rangle$, то $|c| = 2n+1$, т. е. D — группа Фробениуса.*

Доказательство. В силу леммы 3.2.31, i сопряжена с инволюцией из S. Поэтому можно считать, что $i \in S$. Предположим, что $|c|$ — четное число. Если $\langle c \rangle$ содержит элемент x порядка 4, то $\langle x \rangle \leftthreetimes \langle i \rangle$ — группа диэдра. Но по лемме 3.2.31 $\langle x \rangle \leftthreetimes \langle i \rangle < H$, а $i \in Z(H)$. Противоречие.

Пусть t — инволюция из $\langle c \rangle$. Тогда

$$S_i = \langle i \rangle \times \langle t \rangle,\ S_k = \langle k \rangle \times \langle t \rangle$$

— силовские 2-подгруппы в D. По теореме Силова найдется такой элемент $h \in D$, что $l = k^h \in S_i < H$ (лемма 3.2.31). Так как $t \in Z(D)$, то $l \neq t$. Следовательно, либо $l = i$, либо $l = ti$.

Предположим, что $l = i$, т. е. $k^h = i$. Можно считать, что $h \in \langle c \rangle$. Имеем

$$h^{-1}kh = i,\ h^{-1}khk^{-1} \cdot k = i,\ h^{-2}k = i.$$

Отсюда заключаем, что $\left\langle h^{-2} \right\rangle = \langle c \rangle$, но это невозможно, так как $|c|$ — четное число.

Итак, $l = ti$. Заметим, что l — сквозная инволюция, так как она сопряжена со сквозной инволюцией k. Предположим, что инволюция t — 1-го рода. Тогда $C_G(t) < H < G_1$, а значит, $k \in G_1$. Это противоречит выбору k.

Таким образом, t — инволюция 2-го рода, и полный прообраз $l = ti$ в T содержит элемент порядка 4 (замечание 3.2.3). Это противоречит тому, что l — сквозная инволюция. Лемма доказана.

Лемма 3.2.34. *Справедливо равенство* $\mathfrak{G}^k \bigcap G_1 = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $i \in \mathfrak{G}$, $ik = c$. Тогда $k = ic$, $i^k = kik = c^{-1}iiic = c^{-1}ic = i(ic^{-1}i)c = ic^2$. Предположим, что $i^k = ic^2 \in G_1$. Так как $i \in G_1$, то $c^2 \in G_1$. По предыдущей лемме $\left\langle c^2 \right\rangle = \langle c \rangle$, т. е. $c \in G_1$. Но тогда $k = ic \in G_1$. Но k — инволюция из G/G_1. Противоречие доказывает лемму.

Обозначим через B_1 подгруппу, порожденную всеми элементами из G_1, строго вещественными относительно k.

Лемма 3.2.35. *Подгруппа* B_1 *черниковская.*

Доказательство. Допустим, что B_1 — контрпример, и рассмотрим подгруппу $B_1 \lambda \langle k \rangle = L$. Пусть P — силовская 2-подгруппа из L и $P > \langle k \rangle$. По лемме 3.2.31 найдется такой элемент $g \in G$, что $P^g < S$, причем $k^g \in Z(S)$. Следовательно, $P^g = (P \bigcap B_1)^g \times \langle k^g \rangle$. Так как квазициклическая подгруппа из S, которая содержит k^g, не входит в P^g, то $r(\tilde{P}^g) < r(\tilde{S})$. Это противоречит замечанию 3.2.2. Лемма доказана.

Лемма 3.2.36. *Справедливо равенство* $G_1 = H \cdot B_1$.

Доказательство. Пусть $i \in S \bigcap \mathfrak{G}$. Напомним, что через k мы обозначаем сквозную инволюцию из $G \setminus G_1$.

Если l — инволюция из смежного класса G_1k, то $l = sk$, причем $s = lk$. Отсюда выводим, что $s^k = s^{-1}$, т. е. $s \in B_1$.

Пусть теперь g_1 — произвольный элемент из G_1. Тогда $g_1ig_1^{-1} \in G_1$, $kik \in G \setminus G_1$ (лемма 3.2.34). В силу леммы 3.2.33 мы можем записать, что

$g_1 i g_1^{-1} kik = d^{-2}$. Так как $d^{kik} = d^{-1}$, то $d^{-1}kikd = g_1 i g_1^{-1}$. Следовательно, $g_1^{-1} d^{-1} k = r \in C_G(i) = H$, $d^{-1} = g_1 rk$. Заметим, что $l = g_1 i g_1^{-1} d^{-1}$ — инволюция и $l \in G_1 k$. Поэтому $g_1 i g_1^{-1} d^{-1} = sk$, $s \in B_1$. Отсюда выводим, что $g_1 i g_1^{-1} g_1 rk = sk$, т. е. $g_1 ir = s$, $g_1 = sr^{-1} i \in B_1 H$. Лемма доказана.

Лемма 3.2.37. *Контрпримера G не существует.*

Доказательство. В силу леммы 3.2.30 существует строго убывающая цепочка контрпримеров: $G > G_1 > G_2 > ... > G_n > ...$, причем $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n > H$. Обозначим через B_n подгруппу, порожденную всеми строго вещественными относительно k элементами из G_n $(n = 1, 2, 3, ...)$. Дословно повторяя доказательство леммы 3.2.36, можно установить, что $G_n = HB_n$ при всех натуральных n. По лемме 3.2.35 B_1 — черниковская подгруппа. Поэтому цепочка подгрупп $B_1 > B_2 > ... > B_n > ...$ стабилизируется на некотором номере k, т. е. $B_k = B_{k+1} = ...$ Но тогда $G_k = G_{k+1} = ...$ Противоречие. Лемма доказана.

Вместе с последней леммой доказана и теорема 3.2.5, а значит, и теорема 3.2.1.

§ 3.3. Группы Шункова и группы Черникова

В этом параграфе доказывается, что всякая группа Шункова с условием минимальности для подгрупп является группой Черникова. Также устанавливаются достаточные условия, при которых в 2-сопряженно бипримитивно конечной группе с инволюциями некоторый строго вещественный элемент содержится в бесконечной локально конечной подгруппе (теоремы 3.3.1, 3.3.2). В связи с этими результатами указан пример 2-сопряженно бипримитивно конечной группы с инволюциями, в которой нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы обладает конечной периодической частью, а сама группа не обладает периодической частью.

На основе теоремы 3.3.1 дается полное доказательство того, что всякая сопряженно бипримитивно конечная группа с условием минимальности для подгрупп является черниковской группой (см. теорему 3.3.3), ранее анонсированного в [124]. И.И.Павлюк [47] получил результат, из которого вытекает теорема 3.3.3. А.К. Шлепкин также получил результат, равносильный теореме 3.3.3. Как известно [41], для произвольных групп теорема 3.3.3 не имеет места.

Если G — черниковская группа, то через $\tilde{G}$ будем обозначать ее полную часть.

Теорема 3.3.1 (В.П. Шунков). *Пусть G — периодическая группа, содержащая инволюции и удовлетворяющая следующим условиям:*

1. Нормализатор любой нетривиальной локально конечной подгруппы — черниковская группа;

2. Группа G не является черниковской.

Если j — инволюция из G и B — максимальная локально конечная подгруппа из G и $C_G(j) \leq B$, то B содержит всякий строго вещественный относительно j элемент x нечетного порядка, для которого подгруппы $\langle x, x^s \rangle$ при всех $s \in C_G(j)$ конечны [127].

Так как всякая периодическая группа, очевидно, является и 2-сопряженно бипримитивно конечной группой, то вышеизложенный метод позволяет на самом деле получить более общий результат, чем теорема 3.3.1, а именно справедлива

Теорема 3.3.2 (В.П. Шунков). *Пусть G — 2-сопряженно бипримитивно конечная группа, содержащая инволюции и удовлетворяющая следующим условиям:*

1. Если нормализатор любой локально конечной нетривиальной подгруппы содержит инволюции, то он обладает периодической частью, являющейся черниковской подгруппой из G.

2. Если G обладает периодической частью, то последняя не является черниковской подгруппой.

3. Централизатор любой инволюции из G обладает бесконечной периодической частью, являющейся черниковской подгруппой.

Если j — инволюция из G и B — максимальная локально конечная подгруппа из G, содержащая периодическую часть из $C_G(j)$, то B содержит всякий строго вещественный относительно j элемент a, для которого все подгруппы $\langle a, a^s \rangle, s \in C_G(j)$, конечны [127].

Приведем пример 2-сопряженно бипримитивно конечной группы с инволюциями, удовлетворяющей условиям 1, 2, но не удовлетворяющей условиям 3.

Пример 3.3.1. В [2] построена группа без кручения вида $A = A(2,p) = \langle b, c \rangle$, где $b^p = c^p = d$ и $A/\langle d \rangle$ — группа Новикова—Адяна простого периода p. Рассмотрим группу $T = A \wr \langle i \rangle = (A \times A) \lambda \langle i \rangle$, где i — инволюция. Возьмем элемент $s = (d, d^{-1}) \in A \times A$. Очевидно, $s \in Z(A \times A)$ и $s^i = s^{-1}$. Введем обозначения: $G = T/(s),\ x = i(s),\ H = C_G(x), \mathfrak{M}$ – множество строго вещественных элементов из G относительно инволюции x. Легко показать, что $\mathfrak{M}$ состоит из элементов конечного нечетного порядка, $G = H\mathfrak{M}$ и G — 2-сопряженно бипримитивно конечная группа. Далее, используя структурные свойства группы Новикова—Адяна, нетрудно показать, что G удовлетворяет условиям 1, 2 и централизатор любой инволюции из G обладает конечной периодической частью, т. е. условие 3 не выполняется в G.

Теперь, опираясь на теорему 3.3.1, приведем полное доказательство результата, ранее анонсированного в [124], а именно справедлива

Теорема 3.3.3 (В.П. Шунков). *Всякая сопряженно бипримитивно конечная группа с условием минимальности для подгрупп является черниковской группой* [43].

Доказательство. Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы. Если G не содержит инволюций, то она – черниковская группа.

Пусть G содержит инволюции, и предположим, что G не является черниковской группой. Используя условие минимальности и теорему 3.3.3 из [114], легко показать, что в качестве G можно выбрать группу, удовлетворяющую условиям 1, 2 теоремы 3.3.1. Но тогда, ввиду лемм 3.3.4, 4.4.8, G обладает такой парой элементов a, j, где a — элемент простого порядка $p \neq 2$, j — инволюция, что подгруппа $\langle C_G(j), a\rangle$ не является черниковской группой. По условию группа G — сопряженно бипримитивно конечна, в частности, подгруппы $\text{гр}(a, a^s), s \in C_G(j)$ конечны. В этом случае по теореме 3.3.1 подгруппа $\langle C_G(j), a\rangle$ – черниковская, вопреки предположению. Следовательно, G — черниковская группа, и теорема доказана.

Теперь докажем теорему 3.3.1. Предварим доказательство теоремы 3.3.1 рядом вспомогательных лемм.

Пусть G — периодическая группа, содержащая инволюции и удовлетворяющая следующим условиям:

1) нормализатор любой нетривиальной локально конечной подгруппы — черниковская группа;

2) группа G не является черниковской.

Лемма 3.3.1. *Централизатор любой инволюции — бесконечная черниковская подгруппа.*

Доказательство леммы вытекает из основного результата [120], условий 1,2 и теоремы 23.1.1 из [18].

Лемма 3.3.2. *Если A, B — черниковские подгруппы и $A \bigcap B$ бесконечно, то $\langle A, B\rangle$ — черниковская группа.*

Доказательство легко получить, опираясь на условие 1.

Лемма 3.3.3. *G не является 2-группой.*

Доказательство. Очевидно, G удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп и если бы G являлась 2-группой, то она была бы черниковской группой [115] вопреки условию 2. Лемма доказана.

Пусть S и — некоторая силовская 2-подгруппа из G. По лемме 3.3.3, S — черниковская подгруппа. Пусть i — инволюция из (S). По лемме 3.3.1, $C_G(i)$ — черниковская подгруппа. Включим $C_G(i)$ в максимальную локально конечную подгруппу H. По условию 2, H — черниковская подгруппа.

Лемма 3.3.4. *Если централизатор любой инволюции из H бесконечен в H, то*

1) H — сильно вложенная подгруппа в G, все инволюции из H сопряжены в ней между собой и порождают конечную подгруппу;

2) силовские 2-подгруппы из G сопряжены с S;

3) существует в $G \setminus H$ элемент a нечетного простого порядка p, строго вещественный относительно некоторой инволюции $j \in H$.

Доказательство легко получить с помощью леммы 6 из [116] и леммы 3.3.3.

Лемма 3.3.5. *Пусть V — черниковская подгруппа, содержащая инволюции и являющаяся максимальной локально конечной подгруппой. Тогда*

1) все инволюции из V с бесконечными централизаторами в V порождают конечную подгруппу в V и они сопряжены в V;

2) если k — инволюция из V и $C_V(k)$ конечен, то k индуцирует автоморфизм в $\tilde{V}$, переводящий каждый элемент из $\tilde{V}$ в обратный.

Доказательство. Утверждение 1 доказывается с помощью метода, изложенного в доказательстве леммы 8 из [117]. Сопряженность таких инволюций в V доказывается так же, как и в доказательстве леммы 16 из [114]. Утверждение 2 вытекает из условий этой леммы и леммы 6 работы [114]. Лемма доказана.

Лемма 3.3.6. *Если S обладает инволюцией j с конечным $C_H(j)$, то*

1) максимальная элементарная абелева 2-подгруппа из $C_G(j)$ имеет порядок, равный 4;

2) $h^j = h^{-1}$ для всех $h \in \tilde{H}$.

Доказательство. Утверждение 1 фактически доказано в лемме 13 из [114], а утверждение 2 — это лемма 6 из [114]. Лемма доказана.

Лемма 3.3.7. *Если S — бесконечная подгруппа, обладающая инволюцией j с конечным $C_H(j)$, то S — бесконечная группа диэдра.*

Доказательство. Так как $\tilde{S} \triangleleft H$, то, ввиду лемм 3.3.5, 3.3.6, $\tilde{S}$ — квазициклическая подгруппа и все инволюции из $C_H(\tilde{S})$ содержатся в $\tilde{S}$. Но тогда, очевидно, $S = \tilde{S}\lambda \langle j \rangle$. Лемма доказана.

Лемма 3.3.8. *Пусть S обладает инволюцией k с конечным $C_H(k)$. Тогда в G существует элемент a нечетного простого порядка p, строго вещественный относительно некоторой инволюции $j \in S$ и такой, что $\langle a, C_G(j) \rangle$ не является черниковской и в $C_G(j)$ максимальная элементарная абелева 2-подгруппа имеет порядок, равный 4.*

Доказательство. По лемме 3.3.1, $C_G(k)$ — бесконечная черниковская подгруппа. Включим $C_G(k)$ в максимальную локально конечную подгруппу B. По условию 1, B — черниковская подгруппа.

Пусть H обладает элементом a простого нечетного порядка p и $kak = a^{-1}$. Используя лемму 3.3.6, легко показать, что $a \in C_H(\tilde{H})$. Если бы подгруппа $\langle a, C_G(k) \rangle$ являлась черниковской, то с помощью лемм 3.3.1, 3.3.2 заключили бы, что $a \in B$. По лемме 3.3.5 $k \in C_B(\tilde{B})$, а так $a^{-1}ka = ka^2$ и a — элемент нечетного порядка, то $a \in C_B(\tilde{B})$. Отсюда на основании условия 1 и леммы 3.3.2 получили бы $B = H$, что невозможно. Положим $k = j$, и мы получим пару (a, j), удовлетворяющую условиям леммы (лемма 3.3.6).

Теперь рассмотрим случай, когда H не обладает элементом нечетного простого порядка, строго вещественного относительно инволюции k. Очевидно, в этом случае S — бесконечная подгруппа и по лемме 3.3.7 она — группа диэдра, причем $H = \tilde{S}G_H(k)$. Так как $i \in C_G(k) \le B$ и $H \ne B$, то по лемме 3.3.2 $C_B(i)$ конечен. Если силовская 2-подгруппа из B бесконечна, то с помощью леммы 3.3.7 заключаем, что i и k сопряжены в G. Но тогда, как легко показать, нормализатор подгруппы $R = \langle i \rangle \times (k)$ имеет вид $N_G(R) = R\lambda((a)\lambda \langle j \rangle)$, где a — элемент порядка 3; j — инволюция из S, сопряженная с k в S, и $C_G(a) \bigcap R = 1$. Очевидно, пара (a, j) удовлетворяет всем условиям теоремы.

Если же силовская 2-подгруппа из конечна, то $\tilde{B} \ne 1$ и $\tilde{B}$ не содержит инволюций. Ввиду леммы 3.3.6, в качестве j можно взять $j = i$, а в качестве a — любой элемент простого порядка из $\tilde{B}$. Лемма доказана.

В дальнейших рассуждениях под символами a, j будут подразумеваться элементы из лемм либо 3.3.4, либо 3.3.8.

Рассмотрим подгруппы вида $L_s = \langle a, a^s, j \rangle\,,\ s \in C_G(j)$.

Во всех дальнейших леммах этого параграфа предполагается, что G

обладает элементом a нечетного простого порядка p, строго вещественным относительно инволюции j, определенной в леммах 3.3.4, 3.3.8, и таким, что $\langle a, C_G(j)\rangle$ не является черниковской подгруппой и все подгруппы вида $\langle a, a^s\rangle$ $(s \in C_G(j))$ конечны.

Лемма 3.3.9. *(А.Н. Измайлов). Подгруппы*

$$L_s = \langle a, a^s\rangle^j \ \ \textit{при} \ \ \textit{всех}\ s \in C_G(j)$$

конечны.

Доказательство. По предположению, $F = \langle a, a^s\rangle$ конечна, а так как $jaj = a^{-1},\ s \in C_G(j)$, то $F^j = (a^j, a^{sj}) = \left\langle a^{-1}, a^{-s}\right\rangle = F$ и $j \in N_G(F)$. Но тогда L_s — конечная подгруппа. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех подгрупп вида $L_s(s \in C_G(j))$ По лемме 3.3.9 все подгруппы из $\mathfrak{M}$ конечны.

Лемма 3.3.10. *Множество $\mathfrak{M}$ бесконечно.*

Доказательство. Если бы $\mathfrak{M}$ было конечным, то, очевидно, для некоторой бесконечной последовательности различных элементов

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

из $C_G(j)$ получили бы

$$a^{s_1} = a^{s_2} = \ldots = a^{s_n} \ldots$$

Отсюда $s_n s_1^{-1} \in C_G(a)$ и пересечение $C_G(a) \bigcap C_G(j)$ бесконечно.

Но тогда ввиду условия 1 и леммы 3.3.3 получили бы $a \in B$ вопреки определению пары (a, j), где B — максимальная черниковская подгруппа из G и $C_G(j) \leq B$. Лемма доказана.

Лемма 3.3.11. *В $\mathfrak{M}$ существует лишь конечное число подгрупп, не являющихся полупростыми.*

Доказательство. В соответствии с [24] конечная группа называется полупростой, если ее разрешимый радикал тривиален. Предположим, что лемма неверна, и пусть

$$L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$$

— бесконечная последовательность различных подгрупп, где $L_n = L_{s_n} = \langle a, a^{s_n}, j\rangle$ и L_n обладает нетривиальной элементарной абелевой подгруппой V_n, нормальной в $L_n, n = 1, 2, \ldots$ Представим V_n в виде $V_n = Z_n \times F_n$, где $Z_n = C_G(j) \bigcap V_n$, причем если $|F_n|$ нечетны, то $F_n = \left\langle h \in V_n | h^j = h^{-1}\right\rangle$.

Если в множестве подгрупп вида $V_n, n = 1, 2, \ldots$, существует лишь конечное число различных, то, очевидно, не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что

$$V = V_1 = V_2 = \ldots = V_n = \ldots$$

Рассмотрим $M = N_G(V)$. По условию 1 (см. начало параграфа) M – черниковская подгруппа и $L_n = \langle a, a^{s_n}, j\rangle < M$. С помощью леммы 3.3.5 и определения пары (a, j) легко получить, что

$$a^{s_n} \in C_M(\tilde{M}),\ n = 1, 2, \ldots$$

Но это невозможно, так как в противном случае в последовательности $L_1, L_2, \ldots$ для разных номеров были бы совпадающие подгруппы. Следовательно, не нарушая общности рассуждении, можно считать, что подгруппы вида V_n для $n = 1, 2, \ldots$ различны.

Пусть $Z_n \neq 1$ для любого n. Так как $Z_n < C_G(i)$ и $C_G(j)$ — черниковская группа, то, как известно [116], в множестве $\{Z_n | n = 1, 2, \ldots\}$ существует лишь конечное число подгрупп, не сопряженных в $C_G(j)$. А поэтому, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что

$$Z = Z^{t_1} = \ldots = Z_n^{t_n} = \ldots$$

Множество $\{t_n | n = 1, 2, \ldots$ может быть как конечным, так и бесконечным. Однако множество $\{L_n^{t_n} | n = 1, 2, \ldots\}$ всегда бесконечно. Рассмотрим $N_G(Z)$. По условию 1 $N_G(Z) = X$ черниковская подгруппа.

1. Порядки подгрупп $V_n, n = 1, 2, \ldots$, нечетны. Так как $F_n^{t_n} < X, F_n^{t_n} \lambda \langle j\rangle$ — группа Фробениуса и если $F_n^{t_n} \neq 1$, то по лемме 3.3.5 $F_n^t < C_X(\tilde{X}), n = 1, 2, \ldots$ Отсюда ввиду условия 1 и леммы 3.3.3 получим

$$L^{t_n} < N_G(V^{t_n}) \leq X,\ n = 1, 2, \ldots$$

Снова по лемме 3.3.5 и определению пары $(a, j), a^{t_n}, a^{s_n t_n} < C_X(\tilde{X})$. Однако это невозможно, так как среди элементов вида a^{t_n} или $a^{s_n t_n}, n = 1, 2, \ldots$, бесконечно много различных. Полученное противоречие означает, что если порядки подгрупп вида V_n нечетны, то $Z_n = 1$ почти для всех номеров n. Но тогда почти для всех номеров n подгруппа $V_n(a)\lambda \langle j\rangle$ — группа Фробениуса с дополнением $\langle j\rangle$. В этом случае, как известно, $V_n(a)$ — абелева группа почти для каждого номера n. Но тогда, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что

$$V_n < N_G((a)) = D,\ n = 1, 2, \ldots$$

По доказанному выше все элементы из V_n строго вещественны относительно j, а по условию 1 D — черниковская подгруппа. Но тогда по лемме 3.3.5 $V_n < C_D(\tilde{D}), n = 1, 2, \ldots$, что невозможно, так как по доказанному выше множество различных подгрупп вида $V_n, n = 1, 2, \ldots$, бесконечно.

Итак, остается рассмотреть случай, когда

2. V_n — 2-подгруппа, $n = 1, 2, \ldots$ Если пара (a, j) удовлетворяет условиям леммы 3.3.4, то $H \bigcap L_n$ — сильно вложенная подгруппа в L_n и, очевидно, $L_n < H$ и $a \in H$ вопреки выбору элемента a. Следовательно, пара (a, j) удовлетворяет условиям леммы 3.3.8. Но тогда V_n — элементарные подгруппы 4-го порядка.

Рассмотрим $X = N_G(Z)$. По условию 1 X — черниковская подгруппа и $V_n^{t_n} < X$. Случай, когда множество $\{V_n^{t_n} | n = 1, 2, \ldots\}$ конечно, исключается так же, как и уже рассмотренный случай, когда

$$V_1 = V_2 = \ldots = V_n = \ldots$$

Представим $V_n^{t_n}$ в виде $V_n^{t_n} = Z \times (k_n), n = 1, 2, \ldots$ Множество инволюций вида $k_n, n = 1, 2, \ldots$, бесконечно, и, значит, элементов вида $jk_n, n = 1, 2, \ldots$, также бесконечно много, и $|jk_n| = 4$. Если бы $j \notin C_X(\tilde{X})$, то по лемме 3.3.5 $jk_n \in C_X(\tilde{X}), n = 1, 2, \ldots$ Однако это невозможно, так как в $C_X(\tilde{X})$, очевидно, число элементов 4-го порядка конечно. Следовательно, $j \in C_X(\tilde{X})$. Но тогда $V_n^{t_n} < X \leq B$, где $\tilde{B} < C_G(j) \leq B$ и $\tilde{B} < C_G(Z) \leq B$. Очевидно, в этом случае, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $V = V_n^{l_n}, n = 1, 2, \ldots$, где $l_n \in C_G(j)$. Эта ситуация фактически уже рассматривалась выше, и она привела к противоречию с определением пары (a, j). Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 3.3.12. *Если H — сильно вложенная подгруппа из G, то $\mathfrak{M}$ обладает бесконечной последовательностью различных подгрупп*

$$L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots \tag{7}$$

такой, что $V_n = L_n \bigcap H = P_n \lambda D, n = 1, 2, \ldots$, где P_n — силовская 2-подгруппа из L_n, содержащая инволюцию j, D — подгруппа из H, не зависящая от номера n, и $N_G(D)$ обладает некоторой инволюцией k из $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} L_n \setminus H$.

Доказательство. Пересечение $H \bigcap L$, $L \in \mathfrak{M}$, сильно вложено в L и, ввиду лемм 3.3.4, 3.3.11 и теоремы Бендера [136], $\mathfrak{M}$ обладает бесконечной последовательностью различных подгрупп $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ такой, что

а) $L_n, n = 1, 2, \ldots,$ изоморфны одной из групп типа $SL(2, K)$, $Sz(K)$, $PSU(3, K), K$ — поле характеристики 2;

б) если R — максимальная элементарная абелева подгруппа из $\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n$, содержащая j, то $V_n = N_{L_n}(R) = H \bigcap L_n, n = 1, 2, \ldots$

Так как $L_n = \langle a, a^{s_n} \rangle$, где $S_n \in C_G(j) < H$, то по утверждению б

$$M = \langle a, R \rangle \leq \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n.$$

По свойствам линейных групп из утверждения а $N_M(R)$ обладает циклической подгруппой (c), индуцирующей в R группу автоморфизмов, действующую транзитивно на множество инволюций из R, причем c — строго вещественный элемент относительно некоторой инволюции k из $M \backslash N_M(R)$. Далее, по тем же соображениям $V_n = P_n \lambda(\langle c \rangle \lambda X_n)$, где P_n — силовская 2-подгруппа из $H \bigcap L_n$. Так как $V_n < H$, то $\langle c \rangle \lambda X_n < H$. Если бы множество различных подгрупп вида $X_n,\ n = 1, 2, \ldots$, было бесконечным, то и $N_H(c)$ был бы бесконечным. Но тогда по лемме 3.3.2 $k \in N_G((c)) < H$, а это невозможно, так как $k \in M \setminus N_M(R) = M \setminus (M \bigcap H)$. Следовательно, число различных подгрупп вида $X_n, n = 1, 2, \ldots$, конечно, а поэтому, не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $X = X_1 = \ldots = X_n = \ldots$ и $V_n = P_n \lambda(\langle c \rangle \lambda X)$, причем $k \in N_G(D)$, где $D = \langle c \rangle \lambda X$. Лемма доказана.

Лемма 3.3.13. *Пара (a, j) не удовлетворяет условиям леммы 3.3.4.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. В этом случае $j \in H$ и по лемме 3.3.4 $H \bigcap L$ — сильно вложенная подгруппа в $L \in \mathfrak{M}$. По лемме 3.3.12 $\mathfrak{M}$ обладает последовательностью (7) из леммы 3.3.12. Ввиду леммы 3.3.4 и теоремы Бендера, не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $L_n, n = 1, 2, \ldots,$ изоморфны одной из групп типа $SL(2, K), Sz(K), PSU(3, K)$ и $V_n = N_{L_n}(R),\ n = 1, 2, \ldots$, где R — некоторая элементарная абелева 2-подгруппа из H, содержащая j.

Если бы множество $\{P_n | n = 1, 2, \ldots\}$ было конечным, то конечным было бы и множество $\{V_n | n = 1, 2, \ldots\}$. А так как $L_n = \langle a, V_n \rangle$, то число различных подгрупп вида $L_n, n = 1, 2, \ldots$, было бы конечным вопреки лемме 3.3.12.

Рассмотрим подгруппу $M = \text{гр}(k, R, D)$ из L_n. Очевидно, $M \neq L_n$ начиная с некоторого номера m, а так как L_n изоморфна одной из групп

$SL(2,K), Sz(K), PSU(3,K)$, то $M/Z(M) \simeq SL(2,K)$. Отсюда сразу вытекает существование в D двух таких элементов b, d простых порядков q и r соответственно, что $q \neq r, bd = db$ и $k \in N_G(\langle b \rangle) \bigcap N_G(\langle d \rangle)$.

Если бы одно из пересечений $\tilde{H} \bigcap N_G(\langle b \rangle), \tilde{H} \bigcap N_G(\langle d \rangle)$ было бесконечным, то по лемме 3.3.2 получили бы $k \in H$, что невозможно. Следовательно, $\tilde{H} \bigcap N_G(\langle b \rangle), \tilde{H} \bigcap N_G(\langle d \rangle)$ конечны.

Пусть P — произвольная силовская подгруппа из $\tilde{H}$, и рассмотрим подгруппу PV_n из H. Легко заметить, что ни один из элементов d, b не централизует ни одного элемента 4-го порядка из V_n. А так как по лемме 3.3.4 $R < C_H(\tilde{H})$, то один из элементов dR, bR индуцирует регулярный автоморфизм в V_nP/R. По теореме Хигмана [146] V_nP — нильпотентная группа. Но тогда $V_n < C_H(P)$ а так как P — произвольная силовская подгруппа из $\tilde{H}$, то $V_n < C_H(\tilde{H}),\ n = 1, 2, \ldots$ Отсюда очевидно вытекает, что множество $\{V_n | n = 1, 2, \ldots\}$ конечно. Но, как было показано выше, конечность этого множества приводит к противоречию с бесконечностью множества $\{L_n | n = 1, 2, \ldots\}$. Следовательно, пара (a, j) не удовлетворяет условиям леммы 3.3.4, и лемма доказана.

В дальнейших леммах предполагается, что пара (a, j) удовлетворяет условиям леммы 3.3.8.

Лемма 3.3.14. *Если S — конечная подгруппа, то все инволюции из $C_H(\tilde{H})$ порождают абелеву подгруппу порядка ≤ 4.*

Доказательство. С учетом лемм 3.3.1, 3.3.2, 3.3.5, 3.3.6 лемма доказана в [114] (см. лемму 18).

Лемма 3.3.15. *Справедливо по крайней мере одно из утверждений:*

1) инволюции i и j сопряжены в G, и j — единственная инволюция в $C_B(\tilde{B})$;

2) инволюции i и j сопряжены в G, S — группа диэдра 8-го порядка, и все инволюции из $C_B(\tilde{B})$ порождают четверную подгруппу Клейна;

3) $V = S \bigcap B$ является силовской в B, и все инволюции из V порождают подгруппу $K = \langle i \rangle \times \langle j \rangle \leq Z(V)$.

Доказательство. Если S — бесконечная подгруппа, то ввиду лемм 3.3.5, 3.3.7 имеет место утверждение 1. Пусть S — конечная подгруппа. Ввиду лемм 3.3.2, 3.3.5, 3.3.6, 3.3.14 для случая, когда $j = g^{-1}ig$, утверждения 1, 2 доказаны в [114] (лемма 19).

Рассмотрим случай, когда i и j не сопряжены. По лемме 3.3.5 j не сопряжена ни с какой инволюцией из X (подгруппа X определена в лемме 3.3.14). По лемме 3.3.6 все инволюции из $C_V(j)$ содержатся в K. Если бы $C_V(j) \neq V$, то по нормализаторному условию (теорема 16.2.2

из [18]) для некоторого элемента $c \in V \setminus C_V(j)$ имело бы место $j^c = ji$. Но по лемме 3.3.5 $j \in C_B(\tilde{B})$ и, значит, $j^c = ji \in C_B(\tilde{B})$. Отсюда получили бы $i \in C_B(\tilde{B})$. Но тогда по лемме 3.3.2 $H = B$, что невозможно. Следовательно, $K \leq Z(V)$, и все инволюции из V содержатся в K. Имея в виду автоморфную допустимость K в V, аналогичными рассуждениями докажем, что V совпадает с силовской 2-подгруппой из B. Лемма доказана.

Перейдем к изложению основных результатов параграфа.

Лемма 3.3.16. *Пусть L — полупростая подгруппа из $\mathfrak{M}$. Если все инволюции из $B \bigcap L$ содержатся $C_B(\tilde{B})$, то $L \simeq SL(2,4)$.*

Доказательство. Так как $j \in B \bigcap L$, то $C_L(j) \leq B \bigcap L$. Ввиду теорем Файта–Томпсона [153] и Брауэра–Сузуки [139], $C_L(j)$ обладает инволюцией $k \neq j$. На основании утверждения 2 леммы 3.3.15 и условий доказываемой леммы заключаем, что $(k) \times \langle j \rangle$ является силовской в L и $B \bigcap L$ — сильно вложенная подгруппа в L. По теореме Бендера [136] и ввиду полупростоты L (лемма 3.3.11) получаем, что $L \simeq SL(2,4)$. Лемма доказана.

Введем множество $\mathfrak{L} = \{L \in \mathfrak{M} | L \bigcap (B \setminus C_B(\tilde{B}))$ обладает инволюцией $\}$. Пусть $\mathfrak{N}$ — произвольное бесконечное подмножество из $\mathfrak{L}$. Если силовская 2-подгруппа из $C_G(j)$ бесконечна, то по лемме 3.3.7 она — бесконечная группа диэдра и в ней все четверные подгруппы Клейна сопряжены между собой. Отсюда, используя сопряженность силовских 2-подгрупп в B, леммы 3.3.5, 3.3.15, определение множества $\mathfrak{L}$ и условие $a \notin B$, легко показать существование в $\mathfrak{N}$ такого бесконечного подмножества подгрупп $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$, а в B такой последовательности элементов $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, что множество

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \tag{8}$$

где $M_n = L_n^{c_n}, n = 1, 2, \ldots$, состоит из различных подгрупп и

$$\bigcap_{n=1,2,\ldots} (M_n \bigcap B)$$

обладает четверной подгруппой Клейна $(m) \times (f)$, где $f \in C_B(\tilde{B})$, $m \in B \setminus C_B(\tilde{B})$. Пусть R — четверная подгруппа Клейна из $\bigcap\limits_{n=1,2,\ldots} M_n$ вида $R = (t) \times (k)$, где $k \notin C_G(\tilde{B})$ назовем стандартной.

Для $x \in R \setminus (1)$ обозначим через A_x максимальную локально конечную подгруппу из G, содержащую $C_G(x)$. По лемме 3.3.1 и условию 1 A_x — черниковская подгруппа.

Предположим, что $\mathfrak{L}$ — бесконечное множество. В леммах 3.3.18, 3.3.19 под $\mathfrak{N}$ подразумевается бесконечное подмножество из $\mathfrak{L}$.

Лемма 3.3.17. *Справедливы утверждения:*

1) A_t, A_k, A_{tk} *— различные подгруппы;*

2) $N_G(R)$ *конечен.*

Доказательство. Так как $k \in A_t \setminus C_{A_t}(\tilde{A}_t)$, то по лемме 3.3.5 $C_{A_t}(k)$, $C_{A_t}(tk)$ конечны. С другой стороны, по лемме 3.3.1 $C_G(k), C_G(tk)$ бесконечны. Отсюда и из леммы 3.3.2 вытекает, что $A_t \neq A_k, A_{tk}$. По тем же соображениям $A_k \neq A_{kt}$. Утверждение 1 доказано. Конечность $N_G(R)$ вытекает из лемм 3.3.1, 3.3.2 и утверждения 1. Лемма доказана.

Лемма 3.3.18. *Если* v *— инволюция из* R, *то множество* $\{C_{M_n}(v) | n = 1, 2, \ldots\}$ *конечно.*

Доказательство. Предположим, что для некоторой инволюции x_1 из R множество $\{C_{M_n}(x_1) | n = 1, 2, \ldots\}$ бесконечно. Пусть F_1 максимальная локально конечная подгруппа из G, содержащая $C_G(x_1)$. Подгруппа F_1 является одной из подгрупп A_t, A_k, A_{kt}. Покажем, что порядки подгрупп $\tilde{F}_1 \bigcap M_n, n = 1, 2, \ldots$, не ограничены в совокупности. Представим F_1 в виде $F_1 = \tilde{F}_1 K$, где K — конечная подгруппа и $R < K$.

Если порядки подгрупп $\tilde{F}_1 \bigcap M_n, n = 1, 2, \ldots$, ограничены в совокупности, то по лемме 3.3.5 и порядки подгрупп вида $C_{M_n}(x_1),\ n = 1, 2, \ldots$, также ограничены в совокупности. Так как $R < C_{M_n}(x_1) < C_G(x_1) \leq F_1$, то инволюция u из R, отличная от x_1, индуцирует в $\tilde{F}_1$ автоморфизм, переводящий любой элемент из $\tilde{F}_1$ в обратный (лемма 3.3.5). Ввиду ограниченности порядков централизаторов $C_{M_n}(x_1), n = 1, 2, \ldots$, и бесконечности множества $\{C_{M_n}(x_1) | n = 1, 2, \ldots\}$ существует такой номер q, что $C_{M_q}(x_1)$ обладает элементом $d = b_r$, где $r \in K$ и $b^u = b^{-1}$. Далее, $u \in R < C_{M_q}(x_1)$ и $b^u = b^{-1}$. Отсюда получим $d^u d^{-1} = b^{-1} r^u r^{-1} b^{-1}$. Но $r^u r^{-1} \in C_{F_1}(\tilde{F}_1)$ и $b^{-1} \in \tilde{F}_1$, а поэтому $d^u d^{-1} = b^{-2} r^u r^{-1} \in C_{M_q}(x_1)$ и $r^u r^{-1} \in K \bigcap C_{F_1}(\tilde{F}_1)$. Но тогда $(d^u d^{-1})^{|K|} = b^{-2|K|} \in C_{M_q}(x_1)$, что невозможно.

Следовательно, порядки подгрупп $\tilde{F}_1 \bigcap M_n, n = 1, 2, \ldots$, не ограничены в совокупности. Так как $\tilde{F}_1$ удовлетворяет условию минимальности, то последовательность (8) обладает таким бесконечным подмножеством $\mathfrak{N}$, а $\tilde{F}_1$ такой подгруппой Z_1, что для любой подгруппы $L \in \mathfrak{N}_1$ подгруппа Z_1 совпадает с подгруппой из $\tilde{F}_1 \bigcap L$, порожденной всеми элементами простых порядков из $\tilde{F} \bigcap L$. По тем же соображениям $\mathfrak{N}_1$, обладает таким бесконечным подмножеством $\mathfrak{N}_2$, а $\tilde{F}$ такой подгруппой $Z_2 > Z_1$, что для любой подгруппы $L \in \mathfrak{N}_2$ фактор-группа Z_2/Z_1 совпадает с подгруппой, порожденной всеми элементами простых порядков из $\tilde{F}\bigcap L/Z_1$. Рассуждая таким образом, мы построим убывающую цепочку подмножеств последовательности (8)

$$\mathfrak{N}_1 \geq \mathfrak{N}_2 \geq \ldots \geq \mathfrak{N}_n \geq \ldots,$$

которой будет соответствовать строго возрастающая цепочка конечных подгрупп из $\tilde{F}_1$:

$$Z_1 < Z_2 < \ldots < Z_n < \ldots \tag{9}$$

Пусть x — инволюция из $R\backslash(x_1)$ и F — одна из подгрупп A_t, A_k, A_{tk}, содержащая $C_G(x)$. Предположим, что множество $\{C_L(x)|L \in \mathfrak{N}_n\}$ для любого n бесконечно. В этом случае, как показано выше, порядки подгрупп $\tilde{F}\bigcap L$, где $L \in \mathfrak{N}_n$, не ограничены в совокупности для любого n. Очевидно, это будет означать, что, начиная с некоторого номера q, абелева подгруппа $\tilde{F}$, удовлетворяющая условию минимальности, обладает нетривиальной подгруппой W, содержащейся в некоторой подгруппе L из $\mathfrak{N}_n$ для любого $n \geq q$. Если Z — объединение цепочки (9), то, очевидно, подгруппа $\langle Z, W, R\rangle$ локально конечна и по условию 2 (см. начало параграфа) является черниковской подгруппой. Но тогда по лемме 3.3.2 $W < F_1$, а так как все элементы из W строго вещественны относительно x_1, то $W < C_{F_1}(\tilde{F}_1)$ и по лемме 3.3.2 $F_1 = F$, что невозможно, следовательно, для любой инволюции $x \in R\backslash(x_1)$, начиная с некоторого номера q, множество $\{C_L(x)|L \in \mathfrak{N}_n,\ n \geq q\}$ конечно.

Пусть E_1 — некоторая подгруппа из $\mathfrak{N}_q$, E_2 — подгруппа из $\mathfrak{N}_{q+1}$ и т.д. В результате такого выбора подгрупп из $\mathfrak{L}$ построим последовательность

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots, \tag{10}$$

такую, что $R, Z_n < E_n$ и множество

$$\{C_{E_n}(x)|x \in R \setminus (x_1), n = 1, 2, \ldots\}$$

конечно. Но тогда, очевидно, не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что

$$C_x = C_{E_1}(x) = C_{E_2}(x) = \ldots = C_{E_n}(x) = \ldots$$

для любого $x \in R\backslash(x_1)$. Пусть $R\backslash(x_1) = \{x_2, x_3\}$. По доказанному выше подгруппа $\langle Z_n, C_{x_2}, C_{x_3}\rangle$ конечна, а $\langle Z, C_{x_2}, C_{x_3}\rangle$ локально конечна. По условию 1 $C_{x_2}, C_{x_3} < F_1$ Пусть $D_n = F_1 \bigcap F_n$, и докажем, что D_n — сильно вложенная подгруппа в E_n. По доказанному выше

$$C_{E_n}(x_1), C_{E_n}(x_2), C_{E_n}(x_3) < D_n.$$

Отсюда, ввиду лемм 3.3.6, 3.3.7, 3.3.15, силовская 2-подгруппа S_n, содержащая R, содержится в D_n. Так как $N_G(R)$ конечен, то, очевидно, не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что $P = S_1 = S_2 = \ldots = S_n = \ldots$ По лемме 3.3.15 $x_1 \in Z(P)$, и пусть l — инволюция из P. Если множество $\{C_{E_n}(l) | n = 1, 2, \ldots\}$ конечно, то легко показать, что, начиная с некоторого номера q, $C_{E_n}(l) \leq D_n, n = q, q+1, \ldots$ Пусть множество $\{C_{E_n}(l) | n = 1, 2, \ldots\}$ бесконечно. По условию 1 и лемме 3.3.1 $C_G(l)$ вкладывается в бесконечную максимальную черниковскую подгруппу N. Так как $x_1 \in C_G(l) \leq N$ и $C_G(l) \not\leq F_1$, то, ввиду лемм 3.3.2, 3.3.5, x_1 индуцирует в $\tilde{N}$ автоморфизм, переводящий каждый элемент из $\tilde{N}$ в обратный. Далее, повторяя для подгруппы $R_1 = (x_1) \times (l)$ и последовательности (10) те же рассуждения, что и при рассмотрении подгруппы R и последовательности (9), придем к противоречию с бесконечностью множества $\{C_{E_n}(l) | n = 1, 2, \ldots\}$. Следовательно, $C_{E_n}(l) \leq D_n$. Очевидно, $N_{E_n}(D_n)$ — сильно вложенная подгруппа в E_n, начиная с некоторого номера q. Ввиду лемм 3.3.6, 3.3.11, 15 и теоремы Бендера, получим $E_n \cong SL(2, 4)$ или $PSU(3, 4)$ $n = q, q+1, \ldots$ Однако это невозможно, так как порядки подгрупп вида $E_n, n = 1, 2, \ldots,$ не ограничены в совокупности. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 3.3.19. *Множество $\mathfrak{M}$ почти целиком состоит из подгрупп, изоморфных группе типа SL $(2, 4)$ или $PSL(3, 4)$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{L}$ — конечное множество, то ввиду леммы 3.3.16 утверждение доказываемой леммы справедливо. Пусть $\mathfrak{L}$ — бесконечное множество. Как показано выше, для любого бесконечного подмножества $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{L}$ существует последовательность (8), определенная выше. Возьмем из $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n = V$ произвольную стандартную подгруппу R. Ввиду лемм 3.3.5, 3.3.18 множество $\{A_x \bigcap M_n | x \in R \backslash (1),\ n = 1, 2, \ldots\}$ конечно при любом $x \in R \setminus (1)$, а по лемме 3.3.17 конечным является также множество $\{N_{M_n}(R) | n = 1, 2, \ldots\}$.

Очевидно, не нарушая общности рассуждений, можно считать $M_1 \bigcap A_x = M_2 \bigcap A_x = \ldots = M_n \bigcap A_x = \ldots$ для любого $x \in R \setminus (1)$:

$$N_{M_1}(R) = N_{M_2}(R) = \ldots = N_{M_n}(R) = \ldots \tag{11}$$

Представим $R \setminus (1) = \{x_1, x_2, x_3\}$ и обозначим

$$X = \text{гр}(M_n \bigcap A_x, M_n \bigcap A_{x_2}, M_n \bigcap A_{x_3}, N_{M_n}(R)).$$

Ввиду равенства (11) подгруппа X не зависит от номера n. Пусть S_n — силовская 2-подгруппа из M_n, содержащая R. Так как R — стандартная подгруппа, то по лемме 3.3.16 $Z(S_n) \bigcap R \neq 1$ и ввиду определения подгруппы X имеет место включение $S_n < X, n = 1, 2, \ldots$ Отсюда и из леммы 3.3.17 вытекает, что множество $\{N_{M_n}(S_n) | R < S_n, n = 1, 2, \ldots\}$ конечно. Но тогда, очевидно, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что

$$N_{M_n}(S_n) \leq \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n = V \quad \text{и } V \neq M_n, n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Теперь докажем, что V — сильно вложенная подгруппа в M_n. Так как по лемме Фраттини $N_{M_n}(V) = N_{M_n}(S_n)V$, то, согласно условиям (12), $N_{M_n}(V) = V \neq M_n$. Пусть $g \in M_n \setminus V$, и предположим, что $V \bigcap V^g$ обладает инволюцией b. Возьмем в V и V^g силовские 2-подгруппы соответственно P и P_1, содержащие b. Включим b в четверные подгруппы Клейна Q и Q_1, соответственно из P и P_1. Предположим, что Q — не стандартная подгруппа.

В этом случае $Q \neq P$, так как по теореме 11.1.1 из [18] P содержит подгруппу, сопряженную с R в V. По лемме 3.3.15 P — группа диэдра 8-го порядка и некоторая инволюция u из Q содержится в стандартной подгруппе из P. Но тогда, очевидно, $C_G(b) < A_u$ и $Q_1 < C_{M_n}(b) \leq A_u \bigcap M_n \leq V$ по определению подгруппы V. Если же Q — стандартная подгруппа, то по определению V также получим $Q_1 < C_{M_n}(b) \leq V$. Итак, доказано, что $Q_1 < V$.

Пусть P_3 — силовская 2-подгруппа из V и $Q_1 < P_3$. Если Q_1 — не стандартная подгруппа, то по лемме 3.3.16 P_3 и P_1 — группы диэдра порядка 8 и некоторая инволюция u_1, из Q_1 содержится в стандартной подгруппе из P_3. Но тогда $N_G(Q_1) = A_{u_1}$, а так как $Q_1 \triangleleft P_1$, то $P_1 < A_{u_1} \bigcap M_n$ и по определению подгруппы V получим $P_1 < V$. Если же Q_1 — стандартная подгруппа, то по лемме 3.3.6 $Q_1 \bigcap Z(P_1) \neq 1$. Отсюда, из сопряженности силовских 2-подгрупп и определения подгруппы V вытекает, что $P_1 < V \bigcap V^g$. Очевидно, элемент q можно выбрать так, что $g \in N_{L_n}(P_1)$. По доказанному выше $N_{L_n}(P_1) \leq V$ и, значит, $g \in V$ вопреки предположению $g \in L_n \setminus V$. Следовательно, V — сильно вложенная подгруппа в M_n. Ввиду леммы 3.3.11 и теоремы Бендера [136], $M_n \cong SL(2,4)$ или $PSU(3,4)$. Лемма доказана.

Лемма 3.3.20. *Группы G не существует.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда по лемме 3.3.19 существует последовательность (8), где $M_n \cong SL\ (2,4)$ или $PSU\ (3,4)$, такая, что $V = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n = P\lambda(\langle c\rangle \times D)$, где P — силовская 2-подгруппа в M_n и $V = N_{M_n}(P)$, c — строго вещественный элемент порядка 3 относительно некоторой инволюции $i_n \in M_n \setminus V$. Так как V — максимальная подгруппа в M_n, то $M_n = \langle V, i_n\rangle, n = 1, 2, \ldots$ Как известно, $M_n = V \bigcup V i_n V = \text{гр}(a_n, V)$, где $a_n = a^{c_n}$ (элементы $c_n, n = 1, 2, \ldots$ определены при построении последовательности (8)). Отсюда ввиду конечности V, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что инволюция i_n обладает представлением: $i_n = sa_n^h$, где s, h — элементы из V, не зависящие от номера n. Далее, очевидно, $t_n = i_1 i_n = a_1^{-h} a_n^h, n = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим $T = N_G((c))$. Подгруппа T — бесконечная черниковская подгруппа (условие 1), и $i_n \in T, n = 1, 2, \ldots$ Так как множество инволюций вида $i_n, n = 1, 2, \ldots$, бесконечно, то, очевидно, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что все они сопряжены с i в T.

Отсюда, ввиду лемм 3.3.2, 3.3.5, $t_n \in C_T(\tilde{T}), n = 1, 2, \ldots$, и множество $\{t_n | n = 1, 2, \ldots\}$ бесконечно. Следовательно, порядки элементов вида $t_n, n = 1, 2, \ldots$, не ограничены в совокупности. Но, с другой стороны, $t_n \in \left\langle a_1^h, a_n^h \right\rangle$, и по лемме 3.3.19 порядки подгрупп вида $\left\langle a_1^h, a_n^h \right\rangle$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничены в совокупности. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.3.1. Предположим, что теорема неверна, т. е. найдется в G элемент a нечетного порядка, строго вещественный относительно инволюции j, и $a \notin B$, для которого подгруппы $\langle a, a^s\rangle$ при всех $s \in C_G(j) \leq B$ конечны. В этом случае имеют место все предыдущие леммы и, в частности, по лемме 3.3.20 мы получаем противоречие с предположением, что $a \notin B$. Теорема доказана.

§ 3.4. О группах Шункова с условием примарной минимальности

В этом параграфе продолжается изучение групп Шункова с условием примарной минимальности, начатое А.К. Шлёпкиным и В.П. Шунковым в [125].

Доказаны следующие две теоремы:

Теорема 3.4.1 (А.К. Шлёпкин). *Периодическая сопряженно бипримитивно конечная группа с условием примарной минимальности локально конечна* [101].

Теорема 3.4.2 (А.К. Шлёпкин). *Сопряженно бипримитивно конечная группа с условием примарной минимальности и конечными силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi(G)$ обладает периодической частью* [101].

Доказательство теоремы 3.4.1. Предположим обратное, и пусть G — контрпример. Периодическая сопряженно бипримитивно конечная группа без инволюций с условием примарной минимальности лекально конечна [125, теорема 3], следовательно, $2 \in \pi(G)$. В силу условия $2 - min$ любая цепочка подгрупп $G_1 \subset ... \subset G_n \subset ...$ со свойством $2 \in \pi(G_n) \setminus G_{n+1})$ конечна. Тогда из [48], теоремы Шмидта [18, с. 204] и [125, теорема 3], получим, что G можно выбрать удовлетворяющей следующему условию:

1) G порождается 2 -элементами, но в любой собственной подгруппе $H \subset G$ все ее 2-элементы порождают локально конечную группу.

Из предложения 1 [48], теоремы 3 из [125] и теоремы Шмидта [18, с. 204] следует:

2) Все собственные подгруппы группы G локально конечны.

Так как G не локально конечна, то она содержит максимальную собственную нормальную подгруппу R (предложение 2 из [48]). Согласно теореме Шмидта [18, с. 204] и [48] , G/R — также контрпример. Положим $G \cong G/R$. Тогда

3) G проста.

Сопряженно бипримитивно конечная группа, в которой все собственные подгруппы черниковские, — черниковская [124, 43]. Следовательно, в G найдется максимальная собственная (предложение 2 из [48]) нечерниковская локально конечная подгруппа H с условием $N_G(H) = H$. Если $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in G \setminus H$, то, по теореме

Фробениуса [63, с. 503], $G = F\lambda H$, что противоречит предложению 3 из [48]. Значит, $1 \neq a \in h \cap H^g$ для некоторого $g \in G \setminus H$. Зафиксируем группу H и элементы a, g. Из описания локально конечных групп с условием примарной минимальности [48] и того факта, что локально конечные p-группы с условием минимальности черниковские [83, 84], получим:

4) Пусть $p\pi(H)$ и H_p — группа, порожденная всеми p-элементами группы H. Тогда группа H_p — черниковская.

Предположим, что $\pi(H) = \{p_1, ..., p_n$ — конечное множество. Тогда $H = H_{p_1} \cdot ... \cdot H_{p_n}$. Так как расширение черниковской группы при помощи черниковской снова черниковская группа [18, упражнение 19.3.3], то H черниковская, что противоречит выбору H . Следовательно, $\pi(H)$ — бесконечное множество. Из предложения 4 из [48] и [18, упражнение 19.3.3] получаем, что элементa лежит в некоторой черниковской нормальной подгруппе R группы H . Так как $\pi(H)$ — бесконечное множество и группа внешних автоморфизмов группы R почти вся без кручения , то:

5) Почти для всех $p\pi(H)$ имеет место $H_p \in C_G(a)$. Таким образом, найдется такое $q \in \pi(H)$, что группы H_q, H_q^g лежат в $C_G(a)$. Но $H = N_G(H_q)$ и $H^g = N_G(H_q^g)^g$ Из определения группы H_q следует, что $C_G(a) \subset H \cap H^g$. Значит, $H_q = H_q^g$ и $g \in H$ что противоречиворечит выбору g. Теорема доказана.

Из теоремы 3.4.1 и [48] получаем:

Следствие 3.4.1. *Периодическая сопряженно бипримитивно конечная группа с условием примарной минимальности обладает полной частью.*

Следствие 3.4.2. *Периодическая сопряженно бипримитивно конечная руппа с условием примарной минимальности почти, локально разрешима.*

Доказательство теоремы 3.4.2. Предположим обратное, и пусть G — контрпример. Тогда G содержит бесконечно много элементов конечного порядка.

Лемма 3.4.1. *Сопряженно бипримитивно конечная группа с бесконечным числом элементов конечного порядка содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Доказательство. Предположим обратное, и пусть R — контрпример. Положим $R_1 = R$ и для $n \geq 1$ определим $R_{n+1} = N_{R_n}(\overline{K}_n)/V$, где $\overline{K}_n$ — конечная подгруппа группы R , обладающая таким свойством, что $N_{R_n}(\overline{K}_n)$ содержит бесконечно много элементов конечного порядка. По [125, предложение 14], все R_n сопряженно бипримитивно конечны и содержат бесконечно много элементов конечного порядка. Обозначим через K_n полный прообраз группы $\overline{K}_n$ в группе R. Если последовательность групп $R_1, ..., R_n, ...$ бесконечна, то бесконечна и цепочка конечных групп $K_1, ..., K_n, ...$ Но тогда $K = \cap K_n$ бесконечная локально конечная подгруппа группы R . Противоречие с выбором R . Таким образом, последовательность$R_1, ..., R_n, ...$ конечна, и пусть R_m — ее последний член. Положим $R \cong R_m$. Следовательно:

1) для любой конечной подгруппы $K \subset R$ $N_G(R)$ содержит лишь конечное число элементов конечного порядка.

Используя аналогичные рассуждения и [125, предложение 9], выбираем R так, что выполняется

2) R не содержит нормальных периодических подгрупп. Предположим, что $\pi(R) = \{2\}$. Пусть i — инволюция из R. Положим

$$\mathfrak{N} = \{L_g = \langle i, g^{-1}ig \rangle | g \in R\}$$

Все L_g — конечные 2-группы. Если $\mathfrak{N}$ конечно, то $/V = \langle g^{-1}ig \rangle | g \in R\}$ — конечная нормальная подгруппа группы R (см. [11]. Противоречие с предложением 2 из [48]. Следовательно, $\mathfrak{N}$ бесконечно. Но тогда содержит бесконечно много элементов конечного порядка для некоторой конечной подгруппы D из R. Противоречие с предложением 1 из [48]. Итак,

3) $\pi(R) \neq \{2\}$. Пусть b — элемент простого порядка $p > 2$ группы R и H — ее максимальная периодическая подгруппа, содержащая b. Используя предложение 1 из [48], можно показать, что почти для всех элементов $g^{-1}bg$, $g \in R \setminus N_G(R)$

$$K_g = \{L_g = \langle b, g^{-1}bg \rangle = F_g \lambda T_g$$

— конечные группы Фробениуса с ядром F_g и неинвариантным множителем T_g. Так как T_g порождается двумя элементами простого порядка p, то из описания неинвариантных множителей конечных групп Фробениуса [7] следует, что T_g изоморфна одной из следующих трех групп: $\langle b \rangle$, $SL_2(3)$, $SL_2(5)$. Если $T_g \cong \langle b \rangle$ почти для всех T_g, то, по теореме из [65], $R = F \lambda N_G(\langle b \rangle)$, где $1 \neq F$ периодическая подгруппа. Противоречие с предложением 2 из [48]. Следовательно, для бесконечного числа T_g выполняется $T_g \cong SL_2(3)$ или $T_g \cong SL_2(5)$. Так как $(|T_g|, |F_g|) = 1$, то $|\pi(R)| > 3$ и без ограничения общности можно считать, что $p > 5$.

Теперь можно вернуться к случаю $T_g \cong \langle b\rangle$, чего, как показано выше, не может быть. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3.4.2. *Пусть R — сопряженно бипримитивно конечная группа и H — ее максимальная периодическая подгруппа. Тогда либо $H \trianglelefteq R$, либо $H \cap H^g \neq 1$ для некоторого $g \in R \setminus N_G(R)$.*

Доказательство. Предположим обратное, и пусть R — контрпример. Тогда в R найдется максимальная периодическая подгруппа H такая, что $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in R \setminus N_G(R)$. Зафиксируем группу H . Если $1 \neq N$ — нормальная периодическая подгруппа группы R, то ясно, что $N \subseteq H$ и для любого $g \in R$ имеет место $1 \neq N \subset H \cap H^g$. Противоречие с выбором H. Следовательно,

(1) если $N \lhd R$, то $\pi(N) =$.

Предположим, что $2 \notin \pi(H)$. Пусть b — элемент простого порядка p из H. Из свойств конечных групп Фробениуса [7] следует, что для любого $g \in R\setminus N_G(R)$ $K_g = \langle b, b^g\rangle$ —конечная группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle b\rangle$. Но тогда, по теореме из [65] $R = F\lambda N_G(\langle b\rangle)$, где$1 \neq F$ — периодическая подгруппа. Противоречие с предложением 1 из [48], Таким образом доказано (2) $2 \in \pi(H)$.

Если $\pi(R\setminus \cap_{g\in R} H^g) =$, то любой элемент конечного порядка группы R лежит в некоторой конечной подгруппе H^g. Пусть i инволюция из H (предложение 2 из [48]) и $c \in R \setminus N_G(H)$. Тогда $L = \langle i, c^{-1}ic\rangle$ $\langle d\rangle\lambda\langle i\rangle = \langle d\rangle\lambda\langle c^{-1}ic\rangle$, где $1 \neq d$ — элемент конечного порядка. Для некоторого $r \in R$ группа H^r содержит элемент d, а так как $d \in H^r \cap H^{ri}$ $d \in H^{ri} \cap H^{rc^{-1}ic}$, то $H^r = H^{ri} = H^{rc^{-1}ic}$ и, следовательно, группа $L = \langle i, c^{-1}ic\rangle$ лежит в H^r. Но тогда ясно, что $i \in H \cap H^r$ и $c^{-1}ic \in H^c \cap H^r$, а значит, $H = H^r = H^c$. Противоречие с выбором c, и мы получаем

(3) $\pi(R \setminus \cap_{g\in R} H^g) \neq$.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество элементов конечных порядков из $R \setminus \cap_{g\in R} H^g$. В силу предложения 3 из [48]), $\mathfrak{N} \neq$. Тогда для любого $b \in \mathfrak{N}$ и любой инволюции $i \in H^g$ $L_b = \langle b, i\rangle = \langle b\rangle\lambda\langle i\rangle$ — конечная группа Фробениуса с ядром $\langle b\rangle$ и неинвариантным множителем $\langle i\rangle$. Если теперь b_1, b_2 — два произвольных элемента из $\mathfrak{N}$ и $b_1 \neq b_2^{-1}$, то нетрудно убедиться, что их произведение также лежит в $\mathfrak{N}$. Следовательно, $N = \{1\} \cup \mathfrak{N}$ — нормальная периодическая подгруппа группы R. Противоречие с предложением 1 из [48]). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.4.2. Вернемся теперь к группе G. По теореме 3.4.1 периодические подгруппы группы G локально конечны. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать по предложению 14 из [125], что G не содержит нормальных периодических подгрупп. Все собственные ее подгруппы обладают периодической частью (условие примарной минимальности). Пусть H — бесконечная локально конечная (лемма 3.4.1) подгруппа группы G. Без ограничения общности можно считать, что H максимальная в указанном смысле. По [48], H — локально нормальная с конечными силовскими p-подгруппами для любого $p \in \pi(H)$. Через H_p будем обозначать подгруппу группы H, порожденную всеми ее p-элементами. Тогда H — периодическая часть в $N_G(H_p)$. По лемме 3.4.2, в $G \setminus N_G(H)$ найдется такой элемент g, что $1 \neq a \in H \cap H^g$. Так как группы H, H^g локально нормальны, то $|H : C_H(a)|$, $|H^g : C_{H^g}(a)|$ — конечные числа. Ввиду бесконечности $\pi(H)$, в нем найдется такое q что группы H_q, H_q^g лежат в $C_G(a)$. Так как G не содержит нормальных локально конечных подгрупп, то $C_G(a)$ — собственная подгруппа группы G. Следовательно, она обладает периодической частью, которая содержит группы H_q и H_q^g. Но тогда $H_q = H_q^g$ и, значит, $g \in N_G(H)$. Противоречие с выбором g. Теорема 3.4.2 доказана.

Из теоремы 3.4.2 и основного результата [99] получаем

Следствие 3.4.3. *Сопряженно бипримитивно конечная группа без инволюций с условием примарной минимальности обладает периодической частью.*

§ 3.5. Группы Шункова и почти слойно конечные группы

Слойно конечные группы впервые появились без названия в статье С.Н.Черникова [86], а затем в его последующих публикациях за ними закрепилось название слойно конечных групп. Группа называется *слойно конечной*, если множество ее элементов любого данного порядка конечно. *Почти слойно конечные группы* — это расширения слойно конечных групп при помощи конечных групп.

Здесь мы изучаем бесконечные группы с условием: нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью. Класс групп, удовлетворяющий этому условию, довольно широк. В нем содержатся свободные бернсайдовские группы нечетного периода ≥ 665 [2] и группы, построенные А.Ю.Ольшанским [42]. Рассматривается классический вопрос: как свойства системы подгрупп влияют на свойства всей группы? Показывается, что почти слойная конечность распространяется на периодическую часть группы G с периодических частей нормализаторов нетривиальных конечных подгрупп группы G, когда G является группой Шункова, обладающей сильно вложенной подгруппой с черниковской почти слойно конечной периодической частью.

Напомним, что *сильно вложенной* называется собственная подгруппа H группы G, если H содержит элемент порядка 2 (инволюцию) и для любого элемента $g \in G \setminus H$ подгруппа $H \cap H^g$ не содержит инволюций. Бесконечные группы с сильно вложенной подгруппой изучались также в работах [15, 16, 31, 32, 69, 70, 71, 74]. Ранее автором была установлена почти слойная конечность группы Шункова с сильно вложенной подгруппой при условии почти слойной конечности всех собственных подгрупп [55] и при условии периодичности группы [57]. В этом параграфе рассматривается случай смешанных групп, и условие почти слойной конечности накладывается только на периодические части нормализаторов конечных нетривиальных подгрупп.

В этом параграфе будут изучаться группы Шункова с сильно вложенной почти слойно конечной подгруппой, обладающей черниковской почти слойно конечной периодической частью.

Целью настоящего параграфа является доказательство следующей теоремы:

Теорема 3.5.1 (В.И. Сенашов). *Пусть группа Шункова G содержит сильно вложенную подгруппу, обладающую черниковской почти слойно конечной периодической частью. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью, то сама группа G обладает почти слойно конечной периодической частью* [59].

Доказательство теоремы 3.5.1. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы. Так как в G есть сильно вложенная подгруппа, то G обладает инволюциями. Обозначим через i некоторую инволюцию из центра силовской 2-подгруппы S группы G, такая найдется ввиду того, что силовские примарные подгруппы в G черниковские ввиду [57, лемма 1], и того, что всякая черниковская примарная группа обладает нетривиальным центром по [93, теорема 1.6].

Пусть в централизаторе $C_G(i)$ множество элементов конечных порядков конечно. Тогда по условиям теоремы и [130, теорема 1] либо

G обладает почти нильпотентной периодической частью, либо G — T_0-группа.

Напомним определение класса T_0-групп. Группа G с инволюцей i называется *T_0-группой*, если выполняются условия: (1) все подгруппы вида $\langle i, i^g \rangle$, $g \in G$, конечны; (2) силовские 2-подгруппы из G — циклические группы или обобщенные группы кватернионов; (3) централизатор $C_G(i)$ бесконечен и обладает конечной периодической частью; (4) нормализатор любой нетривиальной $\langle i \rangle$-инвариантной локально конечной подгруппы из G либо содержится в $C_G(i)$, либо обладает периодической частью, являющейся группой Фробениуса с абелевым ядром и конечным неинвариантным множителем четного порядка; (5) $C_G(i) \neq G$ и для всякого элемента c из $G \setminus C_G(i)$, строго вещественного относительно i, т. е. $c^i = c^{-1}$, в $C_G(i)$ существует такой элемент s_c, что подгруппа $\langle c, c^{s_c} \rangle$ бесконечна.

Если периодическая часть группы G почти нильпотентна, то G обладает периодической нильпотентной нормальной подгруппой K конечного индекса в периодической части группы G. Так как K обладает нетривиальным центром $Z(K)$, то централизатор любого неединичного элемента из $Z(K)$ по условиям теоремы обладает почти слойно конечной периодической частью, очевидно, содержащей K. Тогда K почти слойно конечна, а вместе с ней почти слойно конечна и периодическая часть группы G как расширение почти слойно конечной группы при помощи конечной группы. Таким образом, в случае, когда периодическая часть группы G почти нильпотентна, теорема доказана. T_0-группой группа G быть не может, так как в группе Шункова не выполняется условие (5) из определения T_0-группы.

Итак, в дальнейшем будем предполагать, что в централизаторе $C_G(i)$ множество элементов конечных порядков бесконечно.

Так как по [128, предложение 4.3] в группе с сильно вложенной подгруппой все инволюции сопряжены, то по условиям теоремы в группе G найдется сильно вложенная подгруппа H с черниковской почти слойно конечной периодической частью, содержащая $C_G(i)$.

Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что в группе G найдется нечерниковская почти слойно конечная подгруппа W с инволюциями, так как иначе по [129, теорема 3.1] и условиям доказываемой теоремы сама группа G обладала бы черниковской, и значит, почти слойно конечной периодической частью. Ввиду леммы Цорна и [58, теорема 1] группу W можем считать максимальной почти слойно конечной подгруппой. Обозначим через B нормализатор в G подгруппы W, а через $\mathfrak{M}$ — множество всех подгрупп группы G вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$, где a — элемент некоторого простого порядка p из B и $g \in G \setminus B$. Так как G является группой Шункова, подгруппы L_g конечны.

По [129, лемма 2.3] слойно конечный радикал $R(W)$ нечерниковской группы W является нечерниковской группой. По [93, теоремы 3.3, 3.7] $R(W)$ можно представить в виде произведения двух поэлементно перестановочных подгрупп A и B, где A — полная абелева группа, а B — локально нормальная группа с конечными силовскими подгруппами. Если бы множество $\pi(W)$ было конечным, то группа A являлась бы прямым произведением конечного числа квазициклических групп, а группа B — конечной группой, и тогда группа $R(W)$ была бы черниковской. Противоречие означает, что $\pi(W)$ бесконечно, и поэтому число p можно считать таким достаточно большим, что p не делит индекс $|W : R(B)|$, где $R(B)$ — слойно конечный радикал группы B. Будем также предполагать, что $p \notin \pi(H)$, это можно сделать ввиду черниковости периодической части группы H. Напомним, что через $\pi(H)$ обозначается множество простых делителей порядков элементов группы H.

Зафиксируем в дальнейшем введенные обозначения $i, S, B, W, H, \mathfrak{M}$.

Доказательству теоремы 3.5.1 предпошлем ряд лемм.

Лемма 3.5.1. *Пусть F и M — две различные бесконечные максимальные почти слойно конечные подгруппы группы $G, R(F)$ и $R(M)$ — их слойно конечные радикалы соответственно. Тогда пересечение $R(F) \cap R(M)$ единично.*

Доказательство повторяет доказательство [58, лемма 10] для групп без инволюций.

Лемма 3.5.2. *Если для некоторого элемента и конечного порядка из G пересечение $C_G(u) \cap W$ бесконечно, то периодическая часть группы $C_G(u)$ содержится в W.*

Доказательство повторяет доказательство [58, лемма 11] для групп без инволюций.

Лемма 3.5.3. *Любая группа L_g четного порядка из множества $\mathfrak{M}$ обладает сильно вложенной подгруппой.*

Доказательство. Ввиду сильной вложенности подгруппы H в группе G все инволюции в группе G сопряжены. Подберем элемент b из G таким образом, чтобы группа L_g^b содержала инволюцию i. Ввиду выбора числа p элемент a^b не принадлежит группе H. Таким образом, группа L_g^b не содержится в H, и пересечение $L_g^b \cap H$ содержит инволюцию i.

Ввиду сильной вложенности группы H в группе G подгруппа $L_g^b \cap H$ сильно вложена в L_g^b. Поэтому сильно вложенная подгруппа найдется и в группе L_g. Лемма доказана.

Лемма 3.5.4. *Можно считать, что p выбрано настолько большим, что группы из $\mathfrak{M}$ не содержат инволюций.*

Доказательство. Пусть V — произвольная группа четного порядка из $\mathfrak{M}$. По лемме 3.5.3 и [56, теорем 97] она обладает сильно вложенной подгруппой, так что группа $\overline{V} = V/O_{2'}(V)$ либо имеет единственную инволюцию, либо обладает нормальной подгруппой F нечетного индекса, которая изоморфна одной из групп $PSL(2,K), Sz(K), PSU(3,K)$, где K — конечное поле характеристики 2.

Рассмотрим сначала второй случай. Обозначим через $\mathfrak{N}$ подмножество подгрупп из $\mathfrak{M}$, для которых реализуется эта возможность. Так как силовские 2-подгруппы в G сопряжены и являются черниковскими, то по условиям теоремы порядки нижних слоев силовских 2-подгрупп в группах из множества $\mathfrak{N}$ ограничены (эти нижние слои — элементарные абелевы подгруппы). Поэтому по свойствам групп $PSL(2,K), Sz(K), PSU(3,K)$ порядок группы F ограничен некоторым числом, не зависящим от p. Ясно, что $F \leq \overline{V} \leq Aut(F)$.

Выберем число p настолько большим, что оно не делит $|Aut(F)|$. Но тогда порождающие элементы a и a^g группы V принадлежат $O_{2'}(V)$; противоречие с тем, что группа V четного порядка.

Итак, выполняется первый случай, т.е. $\overline{V}$ обладает единственной инволюцией. Тогда силовская 2-подгруппа в $\overline{V}$ либо циклическая группа, либо (обобщенная) группа кватернионов, откуда по [129, теорема 1.36] группа V имеет вид $V = O_{2'}(V) \cdot C_V(w)$, где w — некоторая инволюция из V, причем ввиду сопряженности инволюций в группе G можем считать, что $w \in H$. Ввиду включения $C_G(w) \leq H$ и выбора числа $p \notin \pi(H)$ порождающие элементы a и a^g группы V принадлежат $O_{2'}(V)$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3.5.5. *Если в группе W найдется почти регулярная инволюция, то группа W почти абелева. В этом случае можно считать, что число p выбрано так, что оно не делит индекс $|W : A(W)|$, где $A(W)$ — абелев радикал группы W.*

Доказательство. Пусть k — почти регулярная инволюция в W. Поскольку в бесконечной слойно конечной группе $R(W)$ централизаторы всех элеменов бесконечны, то $k \in W \setminus R(W)$. Так как слойно конечная группа обладает полной частью, содержащейся ввиду [93, теорема 3.3]в ее центре, то слойно конечный радикал $R(W)$ группы W обладает полной частью A, причем $A \le Z(R(W))$. В группе $R(W)\lambda(k)$, очевидно, A является нормальной подгруппой.

Рассмотрим фактор-группу $\overline{R(W) \leftthreetimes (k)} = R(W) \leftthreetimes (k)/A$. Так как в $\overline{R(W)} = R(W)/A$ нет бесконечных силовских подгрупп, то по [93, лемма 3.5] для каждого простого числа q в $\overline{R(W)}$ найдется q'-подгруппа $\overline{R_q(W)}$ конечного индекса, нормальная в $\overline{R(W) \leftthreetimes (k)}$. Рассмотрим пересечение $\overline{C}$ подгрупп $\overline{R_q(W)}$ по всем $q \in \pi(C_{\overline{R(W)}}(\overline{k})$. Подгруппа $\overline{C}$ имеет конечный индекс в $\overline{R(W)}$ ввиду почти регулярности инволюции $\overline{k}$ в $\overline{R(W) \leftthreetimes (k)}$. Так как множества $\pi(C_{\overline{R(W)}}(kA))$ и $\pi(\overline{C})$ не пересекаются, то $\overline{k}$ действует на $\overline{C}$ регулярно. По [56, теорема 2] локально конечная группа $\overline{C}$, обладающая регулярным автоморфизмом $\overline{k}$ порядка 2, абелева. Ввиду локальной конечности группы $\overline{C} \leftthreetimes (\overline{k})$ и свойств групп Фробениуса инволюция $\overline{k}$ инвертирует $\overline{C}$.

Так как A и $\overline{C}$ являются абелевыми 2-полными группами (группа называется 2-*полной*, если ее силовские 2-подгруппы полны или единичны), то по [128, предложение 3.2] полный прообраз C группы $\overline{C}$ в группе $R(W)$ является абелевой группой. Поскольку она имеет конечный индекс в W, это доказывает первое утверждение леммы.

Выбор числа p во втором утверждении леммы возможен ввиду конечности индекса $|W : A(W)|$ и бесконечности множества $\pi(W)$. Лемма доказана.

Лемма 3.5.6. *В дополнение к выбору числа p можно предполагать, что оно не принадлежит $\pi(C_W(b))$, где b пробегает элементы простых порядков из W с централизаторами, имеющими бесконечный индекс в W, и оно не является порядком регулярного автоморфизма никакой элементарной абелевой q-группы из W для всех простых чисел q, делящих $|W : R(W)|$.*

Доказательство. Так как по [18, теорема 2.5.6] централизатор любого элемента из слойно конечного радикала $R(W)$ почти слойно конечной группы W имеет конечный индекс в W, то с точностью до сопряженности в группе W найдется лишь конечное число элементов простых порядков с централизаторами, имеющими бесконечный индекс в W.

Так как группа W почти слойно конечна, то множество простых делителей индекса $|W : R(W)|$ конечно. Поэтому порядки элементарных абелевых q-подгрупп в почти слойно конечной группе W для всех простых чисел q из этого множества ограничены в совокупности. Следовательно, множество простых порядков регулярных автоморфизмов элементарных абелевых q-групп для всех простых чисел q, делящих индекс $|W : R(W)|$ также конечно. Поскольку выбор для числа p бесконечен, лемма доказана.

Лемма 3.5.7. *Можно считать, что в множестве $\mathfrak{M}$ нет подгрупп L_g, для которых нильпотентный радикал $F(L_g)$ является p-группой.*

Доказательство. Пусть для некоторой подгруппы $L_g = \langle a, a^g \rangle$ из $\mathfrak{M}$ нильпотентный радикал $F(L_g)$ является p-группой. Выберем из центра конечной p-группы $\langle a, F(L_g) \rangle$ элемент b порядка p. По лемме 3.5.2 периодическая часть централизатора $C_G(a)$ содержится в W вместе с элементом b. По выбору числа p элемент b содержится в $R(W)$, а по [18, теореме 2.5.6] централизатор $C_W(b)$ бесконечен. Следовательно, по лемме 3.5.2 периодическая часть централизатора $C_G(b)$ содержится в W. Так как элемент b принадлежит центру группы $\langle a, F(L_g) \rangle$, то и группа $F(L_g)$ содержится в W. Ввиду выбора числа p, группа $F(L_g)$ содержится в слойно конечном радикале $R(W)$ группы W.

Теперь выберем из пересечения подгруппы $F(L_g)$ с центром конечной p-группы $\langle a^g, F(L_g) \rangle$ элемент d порядка p. По лемме 3.5.2 и по [18, теорема 2.5.6] периодическая часть централизатора $C_G(d)$ содержится в W вместе с элементом a^g. По выбору числа p элемент a^g содержится в $R(W)$. Таким образом, группа L_g содержится в слойно конечном радикале $R(W)$ группы W. Так как группа $R(W)$ слойно конечна, то таких групп L_g в множестве $\mathfrak{M}$ лишь конечное число. Лемма доказана.

Лемма 3.5.8. *Пусть T — максимальная почти слойно конечная подгруппа с сильно вложенным нормализатором в G, V — подгруппа, сопряженная с T в G, h — нетривиальный примарный элемент из $D = T \cap V$. Если централизатор $C_V(h)$ бесконечен, то и централизатор $C_T(h)$ бесконечен.*

Доказательство проводится аналогично доказательству [54, лемма 9].

Лемма 3.5.9. *Если в группе W все инволюции имеют бесконечные централизаторы, то подгруппа B сильно вложена в G.*

Доказательство. Пусть в группе W все инволюции имеют бесконечные централизаторы. По лемме 3.5.2 периодические части централизаторов инволюций из W содержатся в B. Если пересечение $B \cap B^g$, где $g \in G \setminus B$, содержит некоторую инволюцию, то оно содержит и бесконечную периодическую часть ее централизатора, что невозможно, так как по лемме 3.5.1 максимальные почти слойно конечные подгруппы W и W^g могут пересекаться только по конечной подгруппе. Лемма доказана.

Лемма 3.5.10. *Простое число p можно выбрать таким достаточно большим, что силовские p-подгруппы в группах $L_g = \langle a, a^g \rangle$ из $\mathfrak{M}$ циклические.*

Доказательство. Рассмотрим подгруппы вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$ из $\mathfrak{M}$. Обозначим через P силовскую p-подгруппу из L_g, содержащую элемент a. Так как P обладает нетривиальным центром, то выберем элемент b простого порядка из $Z(P)$. Ввиду выбора числа p, не делящим индекс $|W : R(W)|$, централизатор $C_W(a)$ бесконечен. Ввиду леммы 3.5.2 $b \in B$, и значит, $b \in R(W)$ и периодическая часть C централизатора $C_B(b)$ бесконечна. Тогда по лемме 3.5.2 $C \leq B$. Следовательно, P содержится в B.

Предположим, что P не является циклической подгруппой. Обозначим через R элементарную абелеву подгруппу порядка p^2 из P, содержащую элемент a. Рассмотрим подгруппу $O_{p'}(L_g) \leftthreetimes R$ ($O_{p'}(L_g) \neq 1$ по леммам 3.5.4, 3.5.7 и теореме Файта-Томпсона). Согласно [128, теорема 1.21] $O_{p'}(L_g) \leq \langle C_G(r) \mid r \in R^{\#} \rangle$. Как отмечалось выше, элементы из $R^{\#}$ имеют бесконечные централизаторы в W, поэтому, в силу леммы 3.5.2, периодические части централизаторов этих элементов, а значит, $O_{p'}(L_g)$ содержатся в B.

Пусть в группе W все инволюции имеют бесконечные централизаторы. Тогда по лемме 3.5.9 подгруппа B сильно вложена в G. Проведя аналогичные рассуждения относительно подгруппы B^g вместо B и элемента a^g вместо a, видим, что $O_{p'}(L_g) < B^g$. Таким образом, $O_{p'}(L_g) < W \cap W^g$. Ввиду предположения и [128, теорема 1.21] в $O_{p'}(L_g)$ найдется элемент h простого порядка, перестановочный с некоторым неединичным элементом из R. По лемме 3.5.6 централизатор в W элемента h бесконечен, следовательно, по лемме 3.5.2 периодическая часть централизатора $C_G(h)$ содержится в B. Отсюда по лемме 3.5.8 централизатор в W^g элемента h также бесконечен и, следовательно, по лемме 3.5.1 $W = W^g$; противоречие с выбором элемента $g \in G \setminus B$.

Таким образом, в группе W найдется почти регулярная инволюция. Тогда по лемме 3.5.5 группа W почти абелева, и ввиду выбора числа p подгруппа R содержится в абелевом радикале $A(W)$ подгруппы W. Пусть Q — силовская q-подгруппа из $O_{p'}(L_g)$ для некоторого простого числа q. По лемме Фраттини [24] Q выберем таким образом, чтобы Q нормализовалась подгруппой R. Если $Q < A(W)$, то, очевидно, Q

централизует R. Если q — делитель индекса $|W : A(W)|$, то, по определению абелевого радикала, R нормализуется подгруппой Q. Таким образом, опять получаем, что Q централизует R. Так как это рассуждение проходит для любого $q \in \pi(O_{p'}(L_g))$, то $O_{p'}(L_g) < C_G(a)$. Отсюда и ввиду выбора числа p все элементы из $O_{p'}(L_g)$ имеют в W бесконечные централизаторы, так что по лемме 3.5.2 периодические части централизаторов этих элементов содержатся в B. Снова по [128, теорема 1.21] в $O_{p'}(L_g)$ найдется элемент c простого порядка, перестановочный с некоторым неединичным элементом r из элементарной абелевой p-подгруппы из L_g, содержащей элемент a^g. По лемме 3.5.6 централизатор $C_W(c)$ бесконечен, следовательно, по лемме 3.5.2 периодическая часть группы $C_G(c)$ содержится в B. Аналогично, периодическая часть группы $C_G(r)$ содержится в B. Отсюда получаем, что и элемент a^g содержится в B. Напомним, что элемент a принадлежит группе B. Снова по выбору числа p имеем $|C_G(a) \cap W| = \infty$ и $|C_G(a^g) \cap W| = \infty$, поэтому $|C_G(a^g) \cap W^g| = \infty$. Значит, по лемме 3.5.1 $W = W^g$; противоречие с выбором элемента $g \in G \setminus B$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 3.5.1. В силу леммы 3.5.10 считаем, что найдется элемент $a \in B$ порядка p такого, что силовские p-подгруппы в группе $L_g = \langle a, a^g \rangle$ из $\mathfrak{M}$ циклические. Поэтому ввиду лемм 3.5.4, 3.5.7 и теоремы Файта-Томпсона нильпотентный радикал N_g группы L_g есть неединичная p'-группа.

Предположим, что в $C_{L_g}(a)$ найдется элемент b простого порядка, который перестановочен с нетривиальным элементом c из N_g. По лемме 3.5.6 элемент b имеет бесконечный централизатор в W, значит, по лемме 3.5.2 периодическая часть централизатора элемента b содержится в B вместе с элементом c. Отсюда следует, что пересечение $D_g = N_g \cap B$ нетривиально, так как содержит элемент c. Поэтому подгруппа $O_q(D_g)$ нетривиальна для некоторого $q \in \pi(D_g)$. Рассмотрим нижний слой A_g центра группы $O_q(D_g)$. Тогда A_g — неединичная $\langle a \rangle$-допустимая характеристическая элементарная абелева q-подгруппа в D_g.

Обозначим через C периодическую часть группы $C_G(A_g)$ и покажем, что подгруппа C бесконечна и содержится в B. Если a действует регулярно на A_g, то по лемме 6 $A_g < R(W)$ и, следовательно, по лемме 3.5.2 C содержится в B, а тогда по [18, теорема 2.5.6] группа C бесконечна.

Пусть теперь элемент a перестановочен с нетривиальным элементом d из A_g. Снова по лемме 3.5.6 элемент d имеет бесконечный централизатор в W, а по лемме 3.5.2 периодическая часть централизатора элемента

d содержится в B. Поэтому C тоже содержится в B. Кроме того, группа C также бесконечна. Действительно, группу A_g можно представить в виде $A_g = C_g \times B_g$, где $C_g = C_{A_g}(a)$, а на B_g элемент a действует регулярно. Если подгруппа B_g неединична, то по лемме 3.5.6 $A_g < R(W)$ и снова, как и выше, получаем бесконечность группы C. Пусть теперь $B_g = 1$, т.е. $A_g = C_g$. Так как группа A_g конечна, а по лемме 3.5.6 централизатор $C_W(c)$ для любого элемента c из A_g имеет конечный индекс в W, то централизатор $C_W(A_g)$ также имеет конечный индекс в W. Таким образом, централизатор $C_W(A_g)$ бесконечен, и значит, бесконечна его периодическая часть C.

Итак, в любом случае периодическая часть C группы $C_G(A_g)$ бесконечна и содержится в B. Отсюда вытекает, что группа C почти слойно конечна (напомним, что периодическая часть W группы B почти слойно конечна). Ввиду конечности индекса $|N_G(A_g) : C_G(A_g)|$ периодическая часть F нормализатора $N_G(A_g)$ тоже почти слойно конечна (как расширение почти слойно конечной группы C с помощью конечной группы). Включая группу F в максимальную почти слойно конечную подгруппу H группы G, получаем, что две максимальные почти слойно конечные подгруппы W и H пересекаются по бесконечной подгруппе, содержащей C. По лемме 3.5.1 получаем совпадение подгрупп W и H и включение периодической части нормализатора $N_G(A_g)$ в B. Так как A_g является характеристической подгруппой в D_g, то периодическая часть группы $N_G(D_g)$ также содержится в B.

Если $N_g \neq D_g$, то ввиду нормализаторного условия в нильпотентных группах нормализатор подгруппы D_g в N_g отличен от D_g и по доказанному содержится в B, что противоречит построению подгруппы D_g. Поэтому $N_g = D_g$, откуда ввиду нормальности подгруппы N_g в L_g и доказанного выше включения периодической части нормализатора $N_G(D_g)$ в B получаем $L_g < B$, вопреки выбору группы L_g.

Таким образом, любой элемент простого порядка из $C_{L_g}(a)$ действует регулярно на N_g. Поэтому ввиду [128, лемма 4.27] и леммы 3.5.10 L_g — группа Фробениуса с неинвариантным множителем (a). По основной теореме из [65] группа G либо обладает нетривиальной нормальной локально конечной подгруппой, либо имеет вид $G = F \leftthreetimes N_G((a))$, где $F \leftthreetimes (a)$ — группа Фробениуса. В последнем случае ввиду теоремы Шмидта и [129, лемма 4.6] группа G обладает неединичным локально конечным радикалом.

Итак, в любом случае в группе G найдется нормальная неединичная локально конечная подгруппа, которая по [58, теорема 1] почти слойно конечна, следовательно, в этой подгруппе имеется конечная характеристическая подгруппа, нормализатор которой по условию теоремы обладает почти слойно конечной периодической частью. Теорема 3.5.1 доказана.

§ 3.6. Группы Шункова с сильно вложенной подгруппой

В этом параграфе будут изучаться группы Шункова с сильно вложенной почти слойно конечной подгруппой.

Целью настоящего параграфа является доказательство следующей теоремы:

Теорема 3.6.1 (В.И. Сенашов). *Пусть группа Шункова G содержит сильно вложенную почти слойно конечную подгруппу. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью, то сама группа G обладает почти слойно конечной периодической частью* [60].

В параграфе 3.4 исследовался случай сильно вложенной подгруппы с черниковской периодической частью. В этом параграфе предполагается, что в группе имеется сильно вложенная почти слойно конечная подгруппа, рассматривается случай смешанных групп и условие почти слойной конечности накладывается только на периодические части нормализаторов конечных нетривиальных подгрупп.

Доказательство теоремы 3.6.1. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы 3.6.1. Так как в G есть сильно вложенная подгруппа, то G обладает инволюциями. Обозначим через i некоторую инволюцию из центра силовской 2-подгруппы S группы G (такая найдется ввиду того, что силовские примарные подгруппы в G черниковские ввиду [57, лемма 1], и того, что всякая черниковская примарная группа обладает нетривиальным центром по [93, теорема 1.6].

Так как по [128, предложение 4.3] в группе с сильно вложенной подгруппой все инволюции сопряжены, то по условиям теоремы в группе G найдется сильно вложенная почти слойно конечная подгруппа H, содержащая $C_G(i)$.

Если группа H является черниковской, то утверждение теоремы доказано в [59], поэтому в дальнейшем будем предполагать, что группа H — нечерниковская. Вложим ее в максимальную почти слойно конечную подгруппу M. Такая подгруппа найдется ввиду леммы Цорна и [58, теорема 1]. Обозначим через M_1 нормализатор подгруппы M в группе G.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех подгрупп группы G вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$, где элемент a простого порядка p выбираем из H и $g \in G \setminus M_1$. Ввиду того, что G является группой Шункова, подгруппы L_g конечны.

Так как H — нечерниковская почти слойно конечная группа, то множество $\pi(H)$ бесконечно (напомним, что через $\pi(W)$ обозначают множество простых делителей порядков элементов группы W). Действительно, предположим, что множество $\pi(H)$ конечно. По [129, лемма 2.3] слойно конечный радикал $R(H)$ нечерниковской группы H является нечерниковской группой. По [93, теоремы 3.3, 3.7] $R(H)$ можно представить в виде произведения двух поэлементно перестановочных подгрупп A и B, где A — полная абелева группа, а B — локально нормальная группа с конечными силовскими подгруппами. Так как множество $\pi(H)$ предполагается конечным, то группа A является прямым произведением конечного числа квазициклических групп, а группа B — конечной группой, и тогда группа $R(H)$ была бы черниковской. Противоречие означает, что $\pi(H)$ бесконечно и для выбора порядка элемента a имеется бесконечно много возможностей.

Можем считать, не нарушая общности рассуждений, что множество $\mathfrak{M}$ бесконечно, так как иначе было бы конечным инвариантное множество элементов, сопряженных с элементом a, порождающее по лемме Дицмана [24] конечную нормальную подгруппу в группе G, и в этом случае теорема была бы доказана.

Ввиду бесконечности множества вариантов выбора порядка элемента a и строения почти слойно конечной группы выберем его порядок таким достаточно большим, что он не делит индекс $|M : R(M)|$, где $R(M)$ — слойно конечный радикал группы M (индекс $|M : R(M)|$ конечен ввиду почти слойной конечности группы M).

Зафиксируем в дальнейшем введенные обозначения $i, S, M, M_1, H, \mathfrak{M}$.

Доказательству теоремы 3.6.1 предпошлем ряд лемм.

Лемма 3.6.1. *Пусть F, W — две различные бесконечные максимальные почти слойно конечные подгруппы группы G, $R(F)$ и $R(W)$*

— их слойно конечные радикалы. Тогда пересечение $R(F) \cap R(W)$ единично.

Доказательство леммы 3.6.1 повторяет доказательство леммы 10 из [58].

Лемма 3.6.2. *Если для некоторого элемента w конечного порядка и максимальной почти слойно конечной подгруппы W пересечение $C_G(w) \cap W$ бесконечно, то периодическая часть группы $C_G(w)$ содержится в W.*

Доказательство леммы 3.6.2 повторяет доказательство леммы 11 из [58].

Лемма 3.6.3. *Пусть W — максимальная почти слойно конечная подгруппа группы G, b — элемент простого порядка и пересечения $C_G(b) \cap W$, $C_G(b) \cap W^g$ бесконечны. Тогда $W = W^g$.*

Доказательство. По лемме 3.6.2 периодическая часть C_1 группы $C_G(b)$ содержится в W,аналогично, $C_1 \subset W^g$. Следовательно, $C_1 \subset W \cap W^g$. Так как $C_W(b)$ бесконечен, то $R(W) \cap C_G(b)$ — бесконечная группа и $|C_W(b) : R(W) \cap C_W(b)| < \infty$. Точно так же $|C_W(b) : R(W^g) \cap C_W(b)| < \infty$. Тогда пересечение $R(W) \cap R(W^g)$ обладает неединичным элементом и ввиду леммы 3.6.1 получаем, что группы W и W^g не могут быть различными. Лемма доказана.

Лемма 3.6.4. *Никакая группа L_b из множества $\mathfrak{M}$ и никакая сопряженная с ней подгруппа не содержатся в группе M.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого элемента b и группы L_g из множества $\mathfrak{M}$ группа L_g^b содержится в M. Тогда ввиду выбора числа p элементы a^b, a^{gb} содержатся в слойно конечном радикале группы M и, централизаторы $C_M(a^b)$ и $C_M(a^{gb})$ бесконечны. Значит, элемент a принадлежит группе $M^{b^{-1}}$ и пересечение $C_G(a) \cap M^{b^{-1}}$ бесконечно. Так как элемент a содержится в группе H, то $a \in M$, и снова по выбору числа p элемент a содержится в слойно конечном радикале группы M, что влечет бесконечность пересечения $C_G(a) \cap M$. Следовательно, по лемме 3.6.3 $M = M^{b^{-1}}$. Аналогично, $a \in M^{b^{-1}g^{-1}}$, пересечение $C_G(a) \cap M^{b^{-1}}$ бесконечно и снова по лемме 3.6.3 $M = M^{b^{-1}g^{-1}}$. Окончательно получаем $b^{-1}, b^{-1}g^{-1} \in N_G(M) = M_1$, что влечет включение $g \in M_1$, но это противоречит выбору элемента g. Лемма доказана.

Лемма 3.6.5. *Любая группа L_g четного порядка из множества $\mathfrak{M}$ обладает сильно вложенной подгруппой.*

Доказательство леммы 3.6.5 повторяет доказательство леммы 7.1.3.

Лемма 3.6.6. *Можно считать, не нарушая общности рассужде-*

ний, что p выбрано настолько большим, что группы $V \in \mathfrak{M}$ не содержат инволюций.

Доказательство леммы 3.6.6 с учетом леммы 3.6.5 повторяет доказательство леммы 7.1.4.

Лемма 3.6.7. *В дополнение к выбору числа p можно предполагать, что оно не принадлежит $\pi(C_W(b))$, где b пробегает элементы простых порядков из W с централизаторами, имеющими бесконечный индекс в W, и оно не является порядком регулярного автоморфизма никакой элементарной абелевой q-группы из W для всех простых чисел q, делящих $|W : R(W)|$.*

Доказательство леммы 3.6.7 повторяет доказательство леммы 7.1.6.

Лемма 3.6.8. *Можно считать, что в множестве $\mathfrak{M}$ нет подгрупп L_g, для которых нильпотентный радикал $F(L_g)$ является p-группой.*

Доказательство леммы 3.6.8 повторяет доказательство леммы 7.1.7.

Лемма 3.6.9. *Пусть T — максимальная почти слойно конечная подгруппа с сильно вложенным нормализатором в G, V — подгруппа, сопряженная с T в G, h — нетривиальный примарный элемент из $D = T \cap V$. Если централизатор $C_V(h)$ бесконечен, то и централизатор $C_T(h)$ бесконечен.*

Доказательство проводится аналогично доказательству [54, лемма 9].

Лемма 3.6.10. *Если в группе M найдется почти регулярная инволюция, то группа M почти абелева. В этом случае можно считать, что число p выбрано так, что оно не делит индекс $|M : A(M)|$, где $A(M)$ — абелев радикал группы M.*

Доказательство леммы 3.6.10 повторяет доказательство леммы 7.1.5.

Лемма 3.6.11. *Если в группе M все инволюции имеют бесконечные централизаторы, то подгруппа M_1 сильно вложена в G.*

Доказательство леммы 3.6.11 повторяет доказательство леммы 9 из [59].

Лемма 3.6.12. *Простое число p можно выбрать таким достаточно большим, что во всех группах $L_g = \langle a, a^g \rangle$ из $\mathfrak{M}$ силовские p-подгруппы циклические.*

Доказательство. Рассмотрим подгруппы вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$ из $\mathfrak{M}$. Обозначим через P силовскую p-подгруппу из L_g, содержащую элемент a. Так как P обладает нетривиальным центром, то выберем элемент b простого порядка из $Z(P)$. Ввиду выбора числа p, не делящим индекс

$|M : R(M)|$, централизатор $C_M(a)$ бесконечен. Ввиду леммы 3.6.2 $b \in M$, и значит, $b \in R(M)$. Значит, пересечение $C_G(b) \cap M$ бесконечно и по лемме 3.6.2 периодическая часть централизатора $C_G(b)$ содержится в M. Следовательно, P содержится в M.

Предположим, что P не является циклической подгруппой. Обозначим через R элементарную абелеву подгруппу порядка p^2 из P, содержащую элемент a. Рассмотрим подгруппу $O_{p'}(L_g) \leftthreetimes R$ ($O_{p'}(L_g) \neq 1$ по леммам 3.6.4, 3.6.8 и теореме Файта-Томпсона). Согласно [128, теорема 1.21] $O_{p'}(L_g) \leq \langle C_G(r) \mid r \in R^{\#} \rangle$. Как отмечалось выше, элементы из $R^{\#}$ имеют бесконечные централизаторы в M, поэтому, в силу леммы 3.6.2, периодические части централизаторов этих элементов, а значит, и группа $O_{p'}(L_g)$ содержатся в M.

Проведя аналогичные рассуждения относительно подгруппы M^g вместо M и элемента a^g вместо a, видим, что $O_{p'}(L_g) < M^g$. Таким образом, $O_{p'}(L_g) < M \cap M^g$. Ввиду предположения и [128, теорема 1.21] в $O_{p'}(L_g)$ найдется элемент h простого порядка, перестановочный с некоторым неединичным элементом из R. По лемме 3.6.7 централизатор в M элемента h бесконечен, следовательно, по лемме 3.6.2 периодическая часть централизатора $C_G(h)$ содержится в M. Отсюда по леммам 3.6.9, 3.6.11 централизатор в M^g элемента h также бесконечен и, следовательно, по лемме 3.6.1 $M = M^g$; противоречие с выбором элемента $g \in G \setminus M_1$.

Таким образом, в группе M найдется почти регулярная инволюция. Тогда по лемме 3.6.10 группа M почти абелева, и ввиду выбора числа p подгруппа R содержится в абелевом радикале $A(M)$ подгруппы M. Пусть Q — силовская q-подгруппа из $O_{p'}(L_g)$ для некоторого простого числа q. По лемме Фраттини [24] Q выберем таким образом, чтобы Q нормализовалась подгруппой R. Если $Q < A(M)$, то, очевидно, Q централизует R. Если q — делитель индекса $|M : A(M)|$, то, по определению абелевого радикала, R нормализуется подгруппой Q. Таким образом, опять получаем, что Q централизует R. Так как это рассуждение проходит для любого $q \in \pi(O_{p'}(L_g))$, то $O_{p'}(L_g) < C_G(a)$. Отсюда и ввиду выбора числа p все элементы из $O_{p'}(L_g)$ имеют в M бесконечные централизаторы, так что по лемме 3.6.2 периодические части централизаторов этих элементов содержатся в M. Снова по [128, теорема 1.21] в $O_{p'}(L_g)$ найдется элемент c простого порядка, перестановочный с некоторым неединичным элементом r из элементарной абелевой p-подгруппы из L_g, содержащей элемент a^g. По лемме 3.6.7 централизатор $C_M(c)$ бесконечен, следовательно, по лемме 3.6.2 периодическая часть группы $C_G(c)$ содержится в M. Аналогично, периодическая часть группы $C_G(r)$ содержится в M. Отсюда получаем, что и элемент a^g содержится в M. Напомним, что элемент a принадлежит группе M. Снова по выбору числа p имеем $|C_G(a) \cap M| = \infty$ и $|C_G(a^g) \cap M| = \infty$, поэтому $|C_G(a^g) \cap M^g| = \infty$. Значит, по лемме 3.6.1 $M = M^g$; противоречие с выбором элемента $g \in G \setminus M_1$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 3.6.1. В силу леммы 3.6.12 считаем, что найдется элемент $a \in H$ порядка p такого, что во всех подгруппах $L_g = \langle a, a^g \rangle$ силовские p-подгруппы циклические для $g \in G \setminus M_1$. Поэтому ввиду лемм 3.6.6, 3.6.8 и теоремы Файта-Томпсона нильпотентный радикал N_g группы L_g есть неединичная p'-группа.

Предположим, что в $C_{L_g}(a)$ нашелся элемент b простого порядка, который перестановочен с нетривиальным элементом c из N_g. По лемме 3.6.7 элемент b имеет бесконечный централизатор в M, значит, по лемме 3.6.2 периодическая часть централизатора элемента b содержится в M вместе с элементом c. Отсюда следует, что пересечение $D_g = N_g \cap M$ нетривиально, так как содержит элемент c. Поэтому подгруппа $O_q(D_g)$ нетривиальна для некоторого $q \in \pi(D_g)$. Рассмотрим нижний слой A_g центра группы $O_q(D_g)$. Тогда A_g — неединичная $\langle a \rangle$-допустимая характеристическая элементарная абелева q-подгруппа в D_g.

Обозначим через C периодическую часть группы $C_G(A_g)$ и покажем, что подгруппа C бесконечна и содержится в M. Если a действует регулярно на A_g, то по лемме 3.6.7 $A_g < R(M)$ и, следовательно, по лемме 3.6.2 C содержится в M, а тогда по [18, теорема 2.5.6] группа C бесконечна.

Пусть теперь элемент a перестановочен с нетривиальным элементом d из A_g. Снова по лемме 3.6.7 элемент d имеет бесконечный централизатор в M, а по лемме 3.6.2 периодическая часть централизатора элемента d содержится в M. Поэтому C тоже содержится в M. Кроме того, группа C также бесконечна. Действительно, группу A_g можно представить в виде $A_g = C_g \times B_g$, где $C_g = C_{A_g}(a)$, а на B_g элемент a действует регулярно. Если подгруппа B_g неединична, то по лемме 3.6.7 $A_g < R(M)$ и снова, как и выше, получаем бесконечность группы C. Пусть теперь $B_g = 1$, т.е. $A_g = C_g$. Так как группа A_g конечна, а по лемме 3.6.7 централизатор $C_M(c)$ для любого элемента c из A_g имеет конечный индекс в M, то централизатор $C_M(A_g)$ также имеет конечный индекс в M. Таким образом, централизатор $C_M(A_g)$ бесконечен, и значит, бесконечна его периодическая часть C.

Итак, в любом случае периодическая часть C группы $C_G(A_g)$ бесконечна и содержится в M. Отсюда вытекает, что группа C почти слойно конечна (напомним, что группа M почти слойно конечна). Ввиду конечности индекса $|N_G(A_g) : C_G(A_g)|$ периодическая часть F нормализатора $N_G(A_g)$ тоже почти слойно конечна (как расширение почти слойно конечной группы C с помощью конечной группы). Включая группу F в максимальную почти слойно конечную подгруппу W группы G, получаем, что две максимальные почти слойно конечные подгруппы M и W пересекаются по бесконечной подгруппе, содержащей C. По лемме 3.6.1 получаем совпадение подгрупп M и W и включение периодической части нормализатора $N_G(A_g)$ в M. Так как A_g является характеристической подгруппой в D_g, то периодическая часть группы $N_G(D_g)$ также содержится в M.

Если $N_g \neq D_g$, то ввиду нормализаторного условия в нильпотентных группах нормализатор подгруппы D_g в N_g отличен от D_g и по доказанному содержится в M, что противоречит построению подгруппы D_g. Поэтому $N_g = D_g$, откуда ввиду нормальности подгруппы N_g в L_g и доказанного выше включения периодической части нормализатора $N_G(D_g)$ в M получаем $L_g < M$, вопреки лемме 3.6.4.

Таким образом, любой элемент простого порядка из $C_{L_g}(a)$ действует регулярно на N_g. Поэтому ввиду [128, лемма 4.27] и леммы 3.6.12 L_g — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a\rangle$. По [65, теорема 1] и лемме Дицмана [24] группа G либо обладает нетривиальной нормальной локально конечной подгруппой, либо имеет вид $G = F \leftthreetimes N_G(\langle a\rangle)$, где $F \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса. В последнем случае ввиду теоремы Шмидта и [129, лемма 4.6] группа G обладает неединичным локально конечным радикалом.

Итак, в любом случае в группе G найдется нормальная неединичная локально конечная подгруппа, которая по [58, теорема 1] почти слойно конечна, следовательно, в этой подгруппе имеется конечная характеристическая подгруппа, нормализатор которой по условию теоремы обладает почти слойно конечной периодической частью. Теорема 3.6.1 доказана.

§ 3.7. О ГРУППАХ ШУНКОВА, С УСЛОВИЕМ НАСЫЩЕННОСТИ

В последнее время появилось много результатов о насыщенности бесконечных групп системами конечных подгрупп. Группы Шункова с условием насыщенности интенсивно изучаются в работах А.А. Дуж, А. А. Кузнецова, А.Г. Рубашкина, К.А. Филиппова, А.К. Шлепкина. Обзор таких результатов можно найти в работе [23]. Группы с условием насыщенности изучались также В.Д. Мазуровым, Д.В. Лыткиной [33], Л.С. Казариным [134] и Б. Амбергом [134].

Такие результаты доказываются, как правило, в периодическом случае, а затем обобщаются, если это возможно на группы Шункова. В этом параграфе, в качестве иллюстрации, приведем один результат о группах Шункова, насыщенных простыми группами.

Группа G насыщена группами из множества групп X, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X [103].

В первоначальных исследованиях периодических групп с условием насыщенности предполагалось, что X — некоторое множество конечных простых неабелевых групп. Это привело к постановке вопроса 14.101 в Коуровской тетради [22]:

Верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, сама является простой группой лиева типа конечного ранга?

Здесь представлен результат, являющейся важным шагом для получения полного решения приведенного вопроса 14.101 из Коуровской тетради.

Условие насыщенности не предполагает периодичности группы G, в связи с чем вопрос о расположении элементов конечного порядка в группе G с условием насыщенности приходится решать отдельно для каждой конкретной группы.

Здесь мы приведем только один характерный результат, описывающий группы Шункова, насыщенные конечными простыми группами лиева типа ранга 1.

Теорема 3.7.1 (А.А.Шлёпкин). *Группа Шункова G,насыщенная группами из множества конечных простых групп лиева типа ранга 1, обладает периодической частью, которая изоморфна простой группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем* [98].

Нам понадобится ряд определений:

Пусть группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{R}$. Тогда множество $\mathfrak{R}$ называется *насыщающим множеством* для G.

Пусть G – группа, K – подгруппа G, $\mathfrak{X}$ – множество групп. Через $\mathfrak{X}_G(K)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы G, содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если 1 – единичная подгруппа группы G, то $\mathfrak{X}_G(1)$ будет обозначать множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно о какой группе идет речь, то вместо $\mathfrak{X}_G(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$, и соответственно вместо $\mathfrak{X}_G(1)$ будем писать $\mathfrak{X}(1)$.

Пусть G — группа, $\mathfrak{X}$ — множество групп. Запись

$$G \simeq \mathfrak{X}$$

означает, что G изоморфна некоторой группе из $\mathfrak{X}$.

Пусть G — группа. Если все элементы конечных порядков из G содержатся в периодической подгруппе группы G, то она называется *периодической частью группы* G и обозначается $T(G)$ ([18], с. 90, 150).

Перейдем к доказательству теоремы 3.7.1.

Положим

$$\mathfrak{M} = \{L_2(q), U_3(q), Sz(2^{2n+1}), Re(3^{2n+1})\},$$

где q, n не фиксируются (в случае $L_2(q), q > 3$). Тогда с точностью до изоморфизма $\mathfrak{M}$ — множество всех конечных простых групп лиева типа ранга 1 (теорема 120), и $\mathfrak{M}$ является насыщающим множеством) для группы G.

Лемма 3.7.1. *Силовская 2-подгруппа S группы G одного из следующих видов*:

1. $S = \langle a^{2^n} = v^2 = 1, a^v = a^{2^{n-1}-1}\rangle$ *— полудиэдральная группа (S изоморфна силовской 2-подгруппе $U_3(q)$, где $q \equiv 1 \pmod 4$).*

2. $S = \langle a, w | a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = 1, a^w = b, ab = ba\rangle$ *— сплетенная 2-группа. (S изоморфна силовской 2-подгруппе $U_3(q)$, где $q \equiv -1 \pmod 4$)*

3. S *— конечная элементарная абелева 2-группа ранга не менее трех.*

4. S *— группа диэдра.*

5. S *изоморфна силовской 2-подгруппе группы $Sz(2^{2n+1})$.*

6. S *изоморфна силовской 2-подгруппе группы $U_3(2^n)$.*

7. S *— бесконечная группа периода не более 4, и все инволюции из S лежат в $Z(S)$.*

8. *S — черниковская 2-группа ранга не более 2.*

Доказательство. Пусть S — конечная группа. Тогда S, ввиду теоремы 105 и условия насыщенности, одного из видов 1 – 6 утверждения леммы. В дальнейшем считаем, что S — бесконечная группа.

Пусть S содержит элементарную абелеву подгруппу D порядка 8. В силу теоремы 95, D вложима в бесконечную локально конечную подгруппу I группы S. Если I содержит элемент b порядка 8, то $\langle D, b\rangle$ — конечная 2-группа, которая по условию насыщенности является подгруппой группы D_1, где D_1 — одного из видов 1 ,2 ,4 из условия леммы. Так как D_1 содержит элементарную абелеву подгруппу порядка 8, то в виду теорем 113, 115, эта ситуация невозможна. Итак, I — подгруппа периода не более 4, и будем считать I максимальной в указанном смысле.

Покажем, что все инволюции из I лежат в $Z(I)$. Действительно, для любой инволюции $x \in I$ и любого элемента $y \in I$ $\langle D, x, y\rangle$ — конечная 2-группа, которая по условию насыщенности является подгруппой группы D_1, где D_1 — одного из видов 3, 5, 6 из условия леммы (поскольку порядок D можно взять сколь угодно большим, то D_1 не может быть вида 4). По теоремам 117, 114, 116 во всех указанных случаях $x \in Z(D_1)$ и $xy = yx$. В силу произвольности выбора x как инволюции из I, получаем что $Z(I)$ содержит все инволюции из I.

Покажем, что все инволюции из S лежат в $Z(I)$. Предположим, что $x \in S \setminus I \neq \varnothing$ и $|x| = 2$. Тогда группа $\langle x, z\rangle$ конечна для любой инволюции z из I. Пусть t — инволюция из $Z(\langle x, z\rangle)$. Если $t \in I$, то положим $z = t$. Если $t \notin I$, то положим $x = t$. Подгруппа $\langle z\rangle \times \langle x\rangle = K_1$, очевидно, не лежит в I и $K_1 \cap I = \langle z\rangle$. Возьмем в I инволюцию $t \neq z$. Ясно, что $tz = zt$. Рассмотрим конечную подгруппу $\langle z, x, t\rangle$. Данная подгруппа, очевидно, не лежат в I и

$$(\langle z\rangle \times \langle t\rangle) < \langle z, x, t\rangle \cap I)).$$

В силу теоремы 98 в $\langle z, x, t\rangle$ существует элемент v такой, что $v \in N_G(\langle z\rangle \times \langle t\rangle) \setminus I$ и $v^2 \in I$. Тогда группа $K_2 = \langle v, z, t, t_1\rangle$, где $t_1 \in I \setminus (\langle z\rangle \times \langle t\rangle)$, — конечная 2-группа. По условию насыщенности $K_2 \leq K_3 \in \mathfrak{M}(1)$. Так как K_2 содержит подгруппу $\langle z\rangle \times \langle t_1\rangle \times \langle t\rangle$, то из структуры $\mathfrak{M}$ вытекает, что K_2 — элементарная абелева 2-группа. В силу произвольности выбора t_1 из I получим, что v перестановочен с любой инволюцией из I. Пусть y — произвольный элемент из I. По условию насыщенности конечная 2-группа $\langle D, v, y\rangle < D_1$, и D_1 — одного из видов 3, 5, 6, указанных в условии леммы. Следовательно, $vy = yv$. Таким образом, $I\langle v\rangle$ — локально конечная 2-группа из S, периода не более 4, что противоречит максимальности I в указанном смысле. Итак, все инволюции из S лежат в $Z(I)$.

Из сказанного выше вытекает, что S периода не более 4, и значит, S локально конечная группа. Но тогда $S = I$ и лемма доказана.

Осталось рассмотреть случай, когда S не содержит элементарных абелевых групп порядка более четырех. По теореме 101 S — черниковская группа ранга не более 2 и в этом случае лемма также доказана. Лемма доказана.

Положим

$\mathfrak{N} = \{L_2(2^n); Re(3^{2n+1}); U_3(2^{2n}); Sz(2^{2n+1}); L_2(q), q \equiv 3, 5 \pmod 8\}$,

$\mathfrak{A} = \{L_2(q), q-$ нечетно и $q \not\equiv 3, 5 \pmod 8\}$,

$\mathfrak{B} = \{U_3(q), q-$ нечетно$\}$.

Тогда $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \cup \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$.

Лемма 3.7.2. *Для* $\mathfrak{M}(1)$ *возможны только следующие взаимоисключающие случаи:*

(A) $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{N}(1)$.

(B) $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{N}(1) \cup \mathfrak{A}(1)$, *где* $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$.

(C) $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{N}(1) \cup \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1)$, *где* $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$.

Доказательство. Утверждение леммы – непосредственное следствие определения множеств $\mathfrak{M}(1), \mathfrak{N}(1), \mathfrak{A}(1), \mathfrak{B}(1)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.7.1 для случая (A). Для данного случая теорема 3.7.1 доказана по теореме 112.

Доказательство теоремы 3.7.1 для случая (B). Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G. Расмотрим ситуацию когда S — конечная группа. По теореме 105 все силовские 2-подгруппы из G конечны и сопряжены с S. Следовательно, S — одного из видов 1–6, указанных в утверждении леммы 3.7.1. Так как $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, то S содержит конечную группу диэдра порядка более 4, и следовательно, S не может быть вида 3, 5, 6 (поскольку в этом случае S содержит неперестановочные инолюции). Если S — вида 1 или 2, то $\mathfrak{M}(1)$ содежит $X \simeq U_3(q)$ для некоторого нечетного q, что невозможно. Следовательно, для любого $X \in \mathfrak{M}(1), X \simeq L_2(q)$. По теореме 108 $T(G) \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q, и теорема 3.7.1 доказана для случая (B).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда S — бесконечная группа. Тогда все силовские 2-подгруппы из G бесконечны (лемма 3.7.1). Поскольку $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, а $\mathfrak{B}(1) = \varnothing$, то в G найдется силовская 2-подгруппа S_1 вида 8 из утверждения леммы 3.7.1, с полной частью $\tilde{S}$ ранга 1. Предположим, что в G найдется силовская 2-подгруппа S_2 вида 7. По теореме 106 можно считать, что $|S_1 \cap S_2|$ больше любого наперед заданного числа. Последнее означает, что $S_2 \cap S_1$ содержит элемент порядка 8, что невозможно, поскольку S_2 — периода 4. Таким образом, G не может содержать силовских 2-подгрупп вида 7. Поскольку любая конечная 2-подгруппа группы G лежит в некоторой силовской 2-подгруппе группы G, то любая конечная 2-подгруппа группы G лежит в некоторой силовской 2-подгруппе группы G типа S_1. Отсюда и из условия насыщенности вытекает, в частности, что любая конечная 2-подгруппа группы G является погруппой конечной группы диэдра. Но тогда $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1)$. По теореме 108 $T(G) \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q, и теорема доказана.

Теорема 3.7.1 для случая (B) доказана.

Доказательство теоремы 3.7.1 для случая (C). Предположим, что теорема неверна, и пусть G — контрпример к теореме 3.7.1.

Лемма 3.7.3. *G — содержит бесконечно много элементов конечного порядка.*

Доказательство. Действительно, в противном случае, по теореме 95, G обладает конечной периодической частью $T(G)$. По условию насыщенности $T(G) \tilde{\in} \mathfrak{M}$. Противоречие с выбором G. Лемма доказана.

Лемма 3.7.4. *Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда*

1. *S одного из видов 1, 2, 8 перечисленных в условии леммы 3.7.1.*

2. *Ранг S не более 2.*

Доказательство. 1.Так как $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$, то пусть $\langle e \rangle \neq K \in \mathfrak{B}(1)$ и S_K — силовская 2-подгруппа из K. Если S — конечная группа, то можно считать, что $S_K < S$, S содержит элемент порядка 8 (теорема 113 (пункт 8)), $Z(S)$ не содержит все инволюции из S, в этом случае S либо вида 1, либо вида 2 из условия леммы 3.7.1 и лемма доказана.

Если S — бесконечная группа, то все силовские 2-подгруппы из G бесконечны. Пусть S_1 — силовская 2-подгруппа из G содержащая S_K. В этом случае S_1 содержит элемент порядка 8 и следовательно S_1 вида 8 из леммы 3.7.1. Если в G найдется силовская 2-подгруппа S_2 вида 7 из леммы 3.7.1, то по теореме 106 можно считать, что $|S_1 \cap S_2| > m$ для любого наперед заданного натурального m. В этом случае всегда можно подобрать такое m, что $S_1 \cap S_2$ содержит элемент порядка 8 из S_1, что невозможно так как S_2 — группа периода 4. Итак, G не может содержать силовких 2-подгрупп вида 7 из леммы 3.7.1. Следовательно, S вида 8 из леммы 3.7.1.

2. Второе утверждение леммы вытекает из первого и леммы 3.7.1.

Лемма доказана.

Лемма 3.7.5. *Пусть S — вида 8 из утверждения леммы 3.7.1 и ранг $\tilde{S}$ равен 2. Тогда $S = (A \times A^w) \leftthreetimes \langle w \rangle$ — сплетение квазициклической 2-группы A при помощи инволюции w.*

Доказательство. В этом случае $\tilde{S} = A \times B$, где A, B — квазициклические группы. Возьмем в $\tilde{S}$ конечную подгруппу $R = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, где $a \in A, b \in B$, и $|a| = |b| > 2$. По условию насыщенности $R \subset K \in \Im(1)$. Следовательно, $K \simeq U_3(p^n)$ и $p \neq 2$. Пусть S_K — силовская 2-подгруппа из K, содержащая R. По теореме 113 (пункт 6) $S_K = (\langle c \rangle \times \langle\ d \rangle \leftthreetimes \langle w \rangle$ — сплетенная 2-группа, т.е. $|c| = |d| > 2$ и $c^w = d$. Ясно, что $R \leqslant (\langle c \rangle \times \langle d \rangle)$ и $R^w = R$. Возьмем в $\tilde{R} \setminus R$ элемент y со свойством $y^2 \in R$. Очевидно, такой элемент в силу структуры $\tilde{S}$ найдется. Ясно, что $y \in C_G(R)$. Следовательно, группа $\langle R, y, w \rangle$ конечна.

По условию насыщенности $\langle R, y, w \rangle < K_1 \in \Im(1)$ и $K_1 \simeq U_3(p_1^{n_1})$, где $p_1 \neq 2$. По теореме 113 (пункт 4) $\langle R_1, y, w \rangle \subset N_{K_1}(R) = (\langle c_1 \rangle \times \langle d_1 \rangle) \leftthreetimes \langle w \rangle$ — сплетенная группа. Здесь $|c_1| = |d_1| = (p_1^{n_1} - 1)^2$ и $c_1^w = d_1$. Кроме того, $C_{K_1}(R) = (\langle c_1 \rangle \times \langle d_1 \rangle)$. В частности, отсюда вытекает, что $\langle y^w, y \rangle \leqslant (\langle c_1 \rangle \times \langle d_1 \rangle)$. Пусть y_1 — другой элемент из $\tilde{S} \setminus R$ со свойством $y_1^2 \in R$ и $\langle y_1 \rangle \neq \langle y \rangle$. Пусть y_1 — другой элемент из $\tilde{S} \setminus R$ со свойством $y_1^2 \in R$ и $\langle y_1 \rangle \neq \langle y \rangle$. Покажем, что $y_1 y^w = y^w y_1$. Действительно, $\langle R, y, y^w \rangle$ — конечная группа.

По условию насыщенности $\langle R, y_1, y^w \rangle \leqslant K_2 \in \Im(1), K_2 \simeq U_3(p_2^{n_2})$, где $p_1 \neq 2$. По теореме 115 (пункт4) $C_{K_2}(R) = (\langle c_2 \rangle \times \langle d_2 \rangle)$, где $\langle |c_2| = |d_2| = (p^{n_2} - 1)^2$. Так как $\langle R, y_1, y^w \rangle < C_{K_2}(R)$, то $y_1 y^w = y^w y_1$, что и требовалось.

Пусть Y — множество элементов из $\tilde{S} \setminus R$ со свойством, что для любого $y \in Y, y^2 \in R$. Ясно, что Y — конечное множество. Из сказанного выше получаем, что $\langle Y, R \rangle$ — конечная абелева группа из $C_G(R)$, а $\langle R, Y, Y^w, w \rangle$ — конечная группа из $N_G(R)$. По условию насыщенности $\langle R, Y, Y^w, w \rangle \leqslant K_3 \in \Im(1), K_3 \simeq U_3(p_3^{n_3})$ и $p_3 \neq 2$. По теореме 115 (пункт 4) $N_{K_3}(R) = (\langle c_3 \rangle \times \langle d_3 \rangle) \leftthreetimes \langle w \rangle, \langle c_3 \rangle \times \langle d_3 \rangle) = C_{K_3}(R)$ и $R_1 = \tilde{S} \cap \langle c_3 \rangle \times \langle d_3 \rangle)$. По построению $R < R_1 = (\langle v_1 \rangle \times \langle u_1 \rangle)$, где $\langle v \rangle < A, \langle u \rangle < B$ и $v_1^w = u_1$. Действуя по описанному выше алгоритму, мы строим в S цепочку подгрупп

$$R < R_1 < R_2 < \ldots < R_i < \ldots$$

со следующими свойствами: $R_i = (\langle u_i \rangle \times \langle v_i \rangle)$ и $v_i^w = u$. Так как $\tilde{S}$ — полная 2–группа ранга 2, то, очевидно, $\cup R_i = \tilde{S}$ и $w \in N(\tilde{S})$.

Осталось показать, что $\tilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle = S$. Рассмотрим $N_G(S)/\tilde{S} = \overline{N}$. Очевидно, в $\overline{N}$ силовская 2–подгруппа конечна, значит, все силовские 2–подгруппы из $\overline{N}$ конечны и сопряжены (теорема 105), а силовские 2-подгруппы в N сопряжены. Поэтому с точностью до сопряженности можно считать, что $\tilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle < S$. Из теоремы 115 (пункт 4) получаем, что для любого $y \in S$, $y \in (\tilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle)$. Следовательно, $S < (\tilde{S} \leftthreetimes \langle\ w_n \rangle)$ и $\tilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle = S$. Лемма доказана.

Лемма 3.7.6. *Пусть S — вида 8 из условия леммы 3.7.1. Если $R_n < S$, где $R_n = \langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle$, $|a_n| = |b_n| > 2$, то S из утверждения леммы 3.7.5.*

Доказательство. Если S содержит бесконечную цепочку

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_n < \ldots,$$

то $\cup R_n$ — полная абелева группа ранга 2 и по пункту 3 все доказано. Предположим, что бесконечных цепочек указаного выше вида в S нет. Тогда $\tilde{S}$ — квазициклическая группа, и, очевидно $\tilde{S} < Z(S)$. Пусть R_n — максимальный элемент приведенной выше цепочки.

Пусть s – такой элемент из $\tilde{S} \setminus R_n$ что $s^2 \in R_n$. Тогда $\langle R_n, s \rangle$ — конечная группа, и по условию насыщенности $\langle R_n, s \rangle < K \simeq U_3(p^n)$, где $p \neq 2$. По теореме 115 (пункт 4) $s \in C_K(R_n)$. Следовательно, $sx = xs$ для любого $x \in C_K(R_n)$. Выберем $x \in C_K(R_n) \setminus S$ так, что $x^2 \in R_n$. Пусть $s_1 \in \tilde{S}$ и $s_1^2 = s$. По условию насыщенности, конечная группа $\langle s_1, x, R_n \rangle < K_1 \simeq U_3(p_1^n)$, для некоторого нечетного простого p_1. Так как $\langle s_1, x, R_n \rangle < C_{K_1}(R_n)$, то по 115 (пункт 4) $s_1 x = x s_1$. Далее, используя индукцию, получим, что $\tilde{S} < C_G(x)$, и $\langle \tilde{S}, x \rangle$ — абелева группа. Следовательно, $\tilde{S} R_n \langle x \rangle$ — абелева 2-подгруппа, содержащая подгруппу $R_{n_1} = \langle a_{n_1} \rangle \times \langle b_{n_1} \rangle$ со свойством $R_n < R_{n_1}$. Действуя подобным образом, строим бесконечную цепочку вложенных друг в друга подгрупп

$$\tilde{S} R_n < \tilde{S} R_{n_1} < \ldots < \tilde{S} R_{n_k} \subset \ldots$$

Положим $\tilde{S}_1 = \cup \tilde{S} R_{n_k}$. Несложно видеть. что $\tilde{S}_1$ — полная абелева группа ранга 2 и $w_n \in N_G(\tilde{S}_1)$. Положим $S_1 = \tilde{S}_1 \leftthreetimes \langle w_n \rangle$. Тогда S_1 — группа вида 8 из условия леммы. Лемма доказана.

Лемма 3.7.7. *Пусть S — вида 8 из условия леммы 3.7.1. Если $D_n < S$, где $D_n = \langle a^{2^n} = v^2 = 1, a^v = a^{2^{n-1}-1} \rangle$ — полудиэдральная группа, то либо S из утверждения леммы 3.7.5, либо $S = (\tilde{S} \times \langle x \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle$, где $\tilde{S}$ — квазициклическая 2-группа, для любого $s \in \tilde{S}, s^v = s^{-1}$, x — инволюция, и $x^v = xz$, z — инволюция из $\tilde{S}$.*

Доказательство. Если $\tilde{S}$ ранга 2, то лемма доказана в связи с утверждением леммы 3.7.5. Предположим, что $\tilde{S}$ — квазициклическая 2-группа. Тогда $S = \tilde{S}K$ для некоторой конечной подгруппы K группы S такой, что $D_n < K$. Будем считать K минимально возможной по порядку с таким свойством. Положим $\tilde{S_m} = \langle s_m \rangle$ — группа порядка 2^m в группе $\tilde{S}$ с образующим s_m. Возьмем m такое, что $|\tilde{S}_m| > |K|$.

По условию насыщенности $\tilde{S}_m K < R \,\tilde{\in}\, \mathfrak{M}(1)$. Пусть S_R — силовская 2-подгруппа группы R содержащая группу $\tilde{S}_m K$. Так как S_R содержит в качестве собственной подгруппы полудиэдральную группу D_n, то S_R не может быть полудиэдрально группой. Из условия насыщенности вытекает, что S_R — сплетенная группа. Поскольку $|D_n| > 8$, то $|S_R| > 16$, и $S_R = (R_1 \times R_2) \leftthreetimes \langle v \rangle$ — сплетенная группа (v — инволюция из условия леммы), и $|R_1 = |R_2| > 4$. Следовательно, $|\tilde{S}_m K : (\tilde{S}_m K \cap (R_1 \times R_2)| = 2$, $\tilde{S}_m K \cap (R_1 \times R_2)$ — абелева группа, и

$$\tilde{S}_m K = (\tilde{S}_m \times \langle x \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle,$$

где $\tilde{S}_m K \cap (R_1 \times R_2) = (\tilde{S}_m \times \langle x \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle)$, x — инволюция, $s_m^v = s_m^{-1}$ и $x^v = xs^{2^m}$. В этом случае $D_n 7 = \langle s_n x \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle$, а $K = (\tilde{S}_n \times \langle x \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle$. Тогда $S = (\tilde{S} \times \langle x \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle$. Лемма доказана.

Лемма 3.7.8. $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1)$, *где* $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, *и* $\mathfrak{M}(1)$ *содержит бесконечно много неизоморфных групп.*

Доказательство. По теореме 102 и лемме 3.7.3 G содержит бесконечную локально конечную подгруппу. Последнее означает, что порядки групп из множества $\mathfrak{M}(1)$ не ограничены в совокупности, т. е. $\mathfrak{M}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных конечных подгрупп.

Докажем второе утверждение леммы. Если силовская 2-подгруппа S группы G конечна, то из леммы 3.7.4 и того факта, что $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$ вытекает, что либо S — полудиэдральная группа, либо S — сплетенная группа. Следовательно, если для некоторой конечной подгруппы K группы G, $K \in \mathfrak{N}(1)$, то силовская 2-подгруппа S_K группы K является подгруппой либо сплетенной группы, либо полудиэдральной группы, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{N}(1) = \varnothing$.

Пусть S — бесконечная группа. Тогда S_K — группа 2-ранга два и по теореме 119
$$K \tilde{\in} \{L_2(r), U_3(q)\},$$
где $q, r > 3$ — нечетные. Лемма доказана.

Лемма 3.7.9. *Все инволюции в G сопряжены.*

Доказательство. Пусть x, y — две различные инволюции из G. Так как G — группа Шункова, то $\langle x, y\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle x, y\rangle \subset K \in \mathfrak{M}(1)$. По лемме 21 $K \simeq \{U_3(q), L_2(r)\}$, где q, r — нечётны. Так как K — группа лиева типа ранга 1, По леммам 113, 115 x, y сопряжены в K. Поскольку $K < G$, то x, y сопряжены в G. Лемма доказана.

Лемма 3.7.10. *Все четверные подгруппы из G сопряжены.*

Доказательство. Пусть A, B — две различные четверные подгруппы из G. По лемме 3.7.9 все инволюции из G сопряжены, следовательно, для некоторого $g \in G$, $A \cap B^g \neq e$. Если $A = B^g$, то все доказано. Пусть $A \neq B^g$. Но тогда фактор-группа $\langle A, B^g\rangle/(A \cap B^g)$ — конечная группа, как подгруппа группы Шункова, порожденная двумя инволюциями. Если $\langle A, B^g\rangle$ абелева группа, то она элементарная абелева порядка 8, что невозможно ввиду леммы 3.7.4. Следовательно, либо
$$\langle A, B^g\rangle = (A \cap B^g) \times (\langle f\rangle \leftthreetimes \langle t\rangle),$$
где t — инволюция, $\langle f\rangle$ содержит некоторую инволюцию f_1 и $f^t = f^{-1}$, либо
$$\langle A, B^g\rangle = \langle f\rangle \leftthreetimes \langle t\rangle$$
— группа диэдра. Первый случай невозможен по причине того, что
$$(A \cap B^g) \times \langle f_1\rangle \times \langle t\rangle,$$
— элементарная абелева группа порядка 8, что, как отмечалось выше, невозможно. Во втором случае, ввиду сопряженности силовских 2-подгрупп в группе $\langle A, B^g\rangle$, можно считать, что $\langle A, B^g\rangle$ — 2-группа диэдра порядка более 4. Если силовская 2-подгруппа S из G конечна, то она, поскольку $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$, одного из видов 1, 2 леммы 3.7.1 и $\langle A, B^g\rangle$ лежит в некоторой силовской 2-подгруппе конечной группы K, такой, что $K \simeq U_3(q)$, где q — нечетно. В этом случае все доказано ввиду теоремы 113 (пункт 8) Если силовская 2-подгруппа из G бесконечна, то $\langle A, B^g\rangle$ лежит в некоторой бесконечной силовской 2-подгруппе S_1 и она вида 8 из леммы 3.7.1. Если ранг $\tilde{S}_1$ равен 1, то $S_1 = \tilde{S}_1 \leftthreetimes \langle t\rangle$, где t —

инволюция и для любого $s \in \tilde{S}_1, s^t = s^{-1}$. В этом случае, как нетрудно видеть, $\langle A, B^g \rangle$ сопряжены в S_1. Если ранг полной части $\tilde{S}_1$ равен 2, то $\langle A, B^g \rangle$ лежит в некоторой $K \simeq U_3(q)$, где q — нечетно. По теореме 113 (пункт 7) A, B^g сопряжены в K. Поскольку $K \subset G$, то A, B сопряжены в G. Лемма доказана.

Лемма 3.7.11. $\mathfrak{B}(1)$ *содержит бесконечно много неизоморфных групп.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда порядки групп из $\mathfrak{B}(1)$ ограничены в совокупности.

1. Пусть x — инволюция из G. Тогда $C_G(x)$ содержит бесконечную локально конечную подгруппу.

По лемме 3.7.8 множество $\mathfrak{A}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных групп. По теореме 115 $C_G(x)$ содержит бесконечную локально конечную подгруппу.

Пункт 1 доказан.

2. Множество простых делителей порядков элементов из $C_G(x)$ конечно.

Поскольку множество $\mathfrak{B}(1)$ содержит конечное число неизоморфных групп, то существует такое натуральное m, что для любой группы $Y \in \mathfrak{B}(1)$, $|Y| < m$. Возьмем в $C_G(x)$ элемент b простого порядка $p > m$. Так как G — группа Шункова, то для любого $g \in C_G(x)$ группа $\langle x, b, b^g \rangle$ конечна. По условию насыщенности $\langle x, b, b^g \rangle < R_g$, где $R_g \in \mathfrak{M}(1)$. Так как $p > m$, то $R_g \simeq L_2(r)$ для некоторого нечетного r. В силу того, что $C_R(x)$ — группа диэдра (теорема 115), $\langle b \rangle = \langle b^g \rangle$, и $\langle b \rangle$ нормальная подгруппа в $C_G(x)$.

Так как $C_G(x)$ содержит $C_K(x)$, где $K \in \mathfrak{B}(1)$, то по теореме 113 $C_K(x) \simeq GU_2(q)$. Ввиду того, что $\langle b \rangle C_K(x)$ — конечная группа, то по условию насыщенности $\langle b \rangle C_K(x) < W$, где $W \in \mathfrak{M}(1) \setminus \mathfrak{B}(1)$, поскольку W содержит элемент b. В этом случае $W \simeq L_2(r)$ для некоторого нечетного r. Следовательно, $C_W(x)$ — группа диэдра, что невозможно поскольку $C_K(x) < C_W(x)$. Противоречие.

Пункт 2 доказан.

3. Силовские 2-подгруппы группы G конечны.

Действительно, (леммы 3.7.6, 3.7.7) и сопряжены (теорема 105). По лемме 3.7.8 множество $\mathfrak{A}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных групп. Пусть x — инволюция из G. Ввиду леммы 3.7.8 и теоремы 115 $C_G(x)$ содержит бесконечную локально конечную подгруппу.

Пункт 3 доказан.

4. В $C_G(x)$ существует квазициклическая p — подгруппа D, где p — простое нечетное число.

Возьмем в $C_G(x)$ бесконечную абелеву локально конечную подгруппу D (теорема 102, лемма 3.7.8). Так как силовская 2-подгруппа из G конечна, то силовская 2 подгруппа из D также конечна. В силу конечности множества простых делителей порядков элементов из D (пункт 1 доказанный выше) и того факта, что ранги конечных p-групп из D не более 2, D — черниковская группа (теорема 96). Следовательно, можно считать. что D — квазициклическая p-группа (p — простое нечетное число, так как силовская 2-подгруппа конечна).

Пункт 4 доказан.

5. Возьмем в D элемент b простого порядка p. Тогда имеет место одно из следующих двух утверждений.

i. В $C_G(x)$ найдется элемент c порядка p такой, что $\langle c\rangle \times \langle b\rangle$ — подгруппа в $C_G(x)$.

ii. В $C_G(x)$ найдется элемент c такой, что $c^2 = x$ и $b^c = b^{-1}$.

Так как G — группа Шункова, то для любого $g \in C_G(x)$ группа $\langle x, b, b^g\rangle$ конечна. По условию насыщенности $\langle x, b, b^g\rangle < R_g$, где $R_g \in \mathfrak{M}(1)$. Предположим, что для любого g, $R_g \simeq L_2(r)$ для некоторого нечетного r. В силу того, что $C_R(x)$ — группа диэдра (теорема 115), $\langle b\rangle = \langle b^g\rangle$, и $\langle b\rangle$ — нормальная подгруппа в $C_G(x)$. Так как $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$, то G содержит конечную подгруппу $K \in \mathfrak{B}(1)$. Ввиду леммы 3.7.9 можно считать, что $x \in K$. По теореме 113 $C_K(x) \simeq GU_2(q)$. Так как $C_K(x) < C_G(x)$, то $\langle b\rangle C_K(x)$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle b\rangle C_K(x) < M$, где $M \in \mathfrak{B}(1)$, поскольку R содержит $C_K(x)$. Следовательно, $M \simeq U_3(q_1)$ для некоторого нечетного q_1 и $|b|$ делит $q_1 + 1$ поскольку $\langle b\rangle$ нормальная подгруппа в $C_R(x)$. Следовательно, в $C_M(x)$ есть подгруппа $\langle b\rangle \times \langle c\rangle$, где $|b| = |c|$, и имеет место утверждение i.

Предположим, что для некоторого $g \in C_G(x)$, $R_g \simeq U_3(q_2)$ для некоторого нечетного q_2. Если $|b|$ делит $q_2 + 1$, то рассуждая как выше получаем, что имеет место утверждение i. Если $|b|$ не делит $q_2 + 1$, то $|b|$ делит $q_2 - 1$, и ввиду теорем (113, 115) имеет место утверждение ii.

Пункт 5 доказан.

6. Возьмем в D элемент b. Тогда имеет место одно из следующих двух утверждений.

i. В $C_G(x)$ найдется элемент c порядка p такой, что $\langle c\rangle \times \langle b\rangle$ — подгруппа в $C_G(x)$.

ii. В $C_G(x)$ найдется элемент c такой, что $c^2 = x$ и $b^c = b^{-1}$.

Предположим обратное. Ввиду пункта 5 доказанного выше будем считать, что $|b| > p$ и для $b^p = b_1$ имеют место утверждения i или ii.

Предположим, что для b_1 имеет место утверждение i. Группа $\langle x,\ b,\ b^c\rangle$ содержит конечную нормальную подгруппу $\langle x, b_1\rangle$. Тогда фактор группа $\langle x,\ b\ , b^c\ \rangle/\langle x, b_1\rangle = \langle \bar{b},\ \overline{b^c}\rangle$ — конечная группа. Следовательно, $\langle x,\ b,\ b^c\ \rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle x,\ b,\ b^c\ \rangle < R_1 \in \mathfrak{B}(1)$. Следовательно, $R_1 \simeq U_3(q_2)$ для некоторого нечетного q_2. По теореме 113 (10) либо $|b|$ делит $q_2 + 1$, либо $|b|$ делит $q_2 - 1$, $b_2 \in C_{R_1}(V) < C_G(x)$. В первом случае в R_1 найдется элемент c такой, что $|c| = |b|$ и $\langle c\rangle \times \langle b\rangle$ подгруппа в C_{R_1}. Во втором случае в R_1 найдется элемент c такой, что $c^2 = x$ и $b^c = b^{-1}$.

Предположим, что для b_1 имеет место утверждение ii. Тогда $\langle b, b^c\rangle$ конечная группа (поскольку G — группа Шункова). По условию насыщенности конечная группа $\langle x, b, b^c\rangle < M \in \mathfrak{B}(1)$, где $M \simeq U_3(q_3)$ для некоторого нечетного q_3. Поскольку $b \in C_M(x)$, то либо $|b|$ делит q_3+1, либо $|b|$ делит $q_3 - 1$ (теорема 115). В первом случае для b имеет место утверждение i. Во втором случае для b имеет место утверждение ii.

Пункт 6 доказан.

Завершим доказательство леммы. Возьмем в группе D (пункт 4) элемент b со свойством $|b| > m$ — число из пункта 2. По пункту 6 либо $C_G(x)$ содержит конечную группу вида $\langle x\rangle \times \langle c\rangle \times \langle b\rangle$, где $|c| = p$, либо $C_G(x)$ содержит конечную подгруппу вида $(\langle x\rangle \times \langle b\rangle)\langle c\rangle$, где $c^2 = x$, и $b^c = b^{-1}$. В первом случае по условию насыщенности $(\langle x\rangle \times \langle c\rangle \times \langle b\rangle) < T \in \mathfrak{B}(1)$, поскольку $C_T(x)$ содержит подгруппу не являющуюся подгруппой группы диэдра. Но $|T| > m$, что невозможно. В втором случае по условию насыщенности $(\langle x\rangle \times \langle b\rangle)\langle c\rangle < T \in \mathfrak{B}(1)$, поскольку $C_T(x)$ содержит подгруппу не являющуюся подгруппой группы диэдра. Но $|T| > m$, что невозможно. Полученные противоречия завершают доказательство леммы.

Лемма доказана.

По лемме 3.7.11 в $\mathfrak{B}(1)$ найдётся группа, изоморфная $U_3(q)$, где $q > 5$ и нечётно. Отождествим указанную группу с U из теоремы 21 и будем далее использовать обозначения этой теоремы: $i, j, w, b, d_1, d_2, A, V, B$. Пусть $N = N_G(A)$, $C_A = C_G(A)$, $C_B = C_G(B)$.

Лемма 3.7.12. $N = C_A \leftthreetimes V$.

Доказательство. Очевидно, $C_A \leftthreetimes V < N$. Докажем обратное включение. Пусть $g \in N$. Тогда для некоторого $v \in V, A^g = A^v$ и $a^g = a^v$ для любого $a \in A$. Следовательно, $a^{gv^{-1}} = a, gv^{-1} = c \in C_A, g = cv \in C_A \leftthreetimes V$. Лемма доказана.

Лемма 3.7.13. *C_A обладает периодической частью $T(C_A)$ которая является бесконечной абелевой счетной группой ранга 2.*

Доказательство. Пусть K — конечная подгруппа из C_A. По условию насыщенности $K < R \in \mathfrak{B}(1)$. По теореме 113 (пункт 4), $C_R(A)$ — абелева группа ранга 2, следовантельно, K — абелева группа ранга не более 2. В силу произвольности выбора K, как конечной подгруппы из C_A, получаем, что все конечные подгруппы из C_A абелевы ранга не более 2. По лемме 8 из [97] C_A обладает периодической частью $T(C_A)$. По леммам 3.7.10, 3.7.11 C_A содержит конечные подгруппы сколь угодно большого порядка. Следовательно, C_A содержит бесконечное множество элементов конечного порядка, а $T(C_A)$ является бесконечной абелевой группой ранга 2 и является счетной (теорема 102). Лемма доказана.

Лемма 3.7.14. *N обладает периодической частью $T(N) = T(C_A) \leftthreetimes V$.*

Доказательство. $T(C_A)$ — характеристическая подгруппа в N. По лемме 3.7.13 и теоремам 103, 104 фактор-группа $\overline{N} = N/T(C_A)$ является группой Шункова. Покажем, что $\overline{V} \lhd \overline{N}$. Пусть $\bar{b}$ — элемент порядка 3 из $\overline{V}$. Тогда $\langle \bar{b}, \bar{b}^{\overline{g}} \rangle$ — конечная подгруппа для любого $\overline{g} \in \overline{N}$. Пусть K — некоторый ее конечный прообраз в N, содержащий конечную подгруппу $\langle b, b^g, A \rangle$ в качестве подгруппы. По условию насыщенности $\langle b, b^g, A \rangle < K < R \in \mathfrak{B}(1)$. Ясно, что $b^g \in N_R(A) \subset N$. По теореме 113 (пункты 1–4) $b^g = cb^k$, где $c \in C_R(A) < T(C_A)$, $1 \leqslant k \leqslant 2$. Следовательно, $\langle \bar{b} \rangle = \langle \bar{b}^{\overline{g}} \rangle$ и $T(C_A) \leftthreetimes \langle b \rangle) \lhd N$. По теоремам 103, 104 $N/(T(C_A) \leftthreetimes \langle b \rangle)$ — группа Шункова, все конечные подгруппы которой имеют порядок 2 и совпадают с $\langle \overline{w} \rangle$, где $\overline{w} = w(T(C_A)) \leftthreetimes \langle b \rangle)$. По теореме 42 $T(C_A) \leftthreetimes V = T(N)$. Лемма доказана.

Лемма 3.7.15. *Если для любой конечной подгруппы K из $T(C_A)$ существует такая подгруппа R, что $K < R \in \mathfrak{B}(1)$ и*

$$R \,\tilde{\in}\, \{U_3(q) | (3, q+1) = 1\},$$

то $T(C_A) = C \times C^w$, где C — локально циклическая группа.

Доказательство. Рассмотрим конечную подгруппу $K < T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle$. По условию леммы $\langle A, K, w \rangle < R \in \mathfrak{B}(1)$, где R — из условия леммы. По теореме 113 (пункты 1–4) $K < C_R(A) \leftthreetimes \langle w \rangle = (\langle d_1 \rangle \times \langle d_1^w \rangle) \leftthreetimes \langle w \rangle$ — сплетение циклической группы $\langle d_1 \rangle$ при помощи группы $\langle w \rangle$. В силу произвольности выбора K, как конечной подгруппы из $T(C_A) \leftthreetimes \langle w\rangle$, получаем, что $T(C_A) \leftthreetimes \langle w\rangle$ насыщена сплетениями конечных циклических групп при помощи группы порядка два. По теореме 107 $T(C_A) \leftthreetimes \langle w\rangle{=}(C \times C^w) \leftthreetimes \langle w\rangle$ — сплетение бесконечной локально циклической группы C при помощи группы $\langle w\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 3.7.16. *Если в $T(C_A)$ существует конечная подгруппа K такая, что для любого R со свойством $K < R \in \mathfrak{B}(1)$ всегда*

$$R \tilde{\in} \{U_3(q) | (3, q+1) = 3\},$$

то $T(C_A) = CC^w$, где C — бесконечная локально циклическая группа, и $C \cap C^w = \langle d\rangle$ — циклическая группа порядка 3 такая, что фактор-группа $T(C_A)/\langle d\rangle = C/\langle d\rangle \times C^w/\langle d\rangle$.

Доказательство. Пусть K — конечная подгруппа из условия леммы. По условию насыщенности $\langle A, K, w\rangle < R \in \mathfrak{B}(1)$. Из условия леммы и теоремы 113 (пункт 2) вытекает, что $C_R(A) \leftthreetimes \langle w\rangle = (\langle d_1\rangle\langle d_1^w\rangle) \leftthreetimes \langle w\rangle$, где $C_R(A) = (\langle d_1\rangle\langle d_1^w\rangle)$, $\langle d_1\rangle \cap \langle d_1^w\rangle = \langle d\rangle$ — циклическая подгруппа порядка 3, $d^w = d^{-1}$, и фактор-группа $C_R(A)/\langle d\rangle = \langle d_1\rangle/\langle d\rangle \times \langle d_1^w\rangle/\langle d\rangle$. Поскольку $T(C_A)$ — абелева группа (лемма 3.7.13), то $\langle d\rangle$ — нормальная подгруппа в $T(C_A) \leftthreetimes \langle w\rangle$. Несложно видеть, что фактор-группа $(T(C_A) \leftthreetimes \langle w\rangle)/\langle d\rangle$ насыщена сплетениями конечных циклических групп при помощи группы порядка 2. По теореме 107 $(C_A \leftthreetimes \langle w\rangle)/\langle d\rangle = (\overline{C} \times \overline{C}^{\overline{w}}) \leftthreetimes \overline{\langle w\rangle}$, где $\overline{C}$ — бесконечная локально циклическая группа. Следовательно, $T(C_A) \leftthreetimes \langle w\rangle{=}(CC^w) \leftthreetimes \langle w\rangle$, где $C_A = CC^w$, C — бесконечная локально циклическая группа, и $C \cap C^w = \langle d\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 3.7.17. *В G существует бесконечная последовательность групп*

$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots$$

со следующими свойствами:

1. $A < M_n \in \mathfrak{B}(1)$ *для любого* $n = 1, 2, 3, \ldots$.
2. $N_{M_1}(A) < N_{M_2}(A) < \cdots < N_{M_n}(A) < \ldots$.
3. $T(N) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$.

Доказательство. Так как $T(C_A)$ — счетная группа (лемма 3.7.13), то

$$T(C_A) = \{c_1, c_2, \cdots, c_m, \cdots\}.$$

По лемме 3.7.14 $T(N)$ — локально конечная группа. Следовательно, $\langle A, c_1, V\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle A, c_1, V\rangle <$

$M_1 \in \mathfrak{B}(1)$. По теореме 113 (пункты 1–4)

$$N_{M_1}(A) = D^{(1)} \leftthreetimes V,$$

где $D^{(1)} = C_{M_1}(A)$. Возьмем элемент $c_{m_1} \in \{C_A \setminus C_{M_1}(A)\}$ с минимально возможным значением номера m_1. Поскольку $T(N)$ — локально конечная группа, то $\langle N_{M_1}(A), c_{m_1}\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle N_{M_1}(A), c_{m_1}\rangle < M_2 \in \mathfrak{B}(1).$$

По предложению 113 (пункты 1–4)

$$N_{M_2}(A) = D^{(2)} \leftthreetimes V,$$

где $D^{(2)} = C_{M_2}(A)$. Ясно, что $N_{M_1}(A) < N_{M_2}(A)$.

Предположим, что для $n \geqslant 2$ группа $M_n \in \mathfrak{B}(1)$ построена. Возьмем элемент $c_{m_{n-1}} \in \{T(C_A) \setminus C_{U^{(n)}}(A)\}$ с минимально возможным значением номера m_{n-1}. Следовательно, $\langle N_{M_n}(A), c_{m_{n-1}}\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle N_{M_n}(A), c_{m_{n-1}}\rangle < M_{n+1} \in \mathfrak{B}(1).$$

По теореме 113 (пункты 1–4)

$$N_{M_{n+1}}(A) = D^{(n+1)} \leftthreetimes V,$$

где $D^{(n+1)} = C_{M_{n+1}}(A)$. Ясно, что $N_{M_n}(A) < N_{M_{n+1}}(A)$. Действуя подобным образом, мы получаем последовательность

$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots,$$

обладающую свойством 1 из условия леммы. По построению

$$N_{M_1}(A) < N_{M_2}(A) < \cdots < N_{M_n}(A) < \ldots,$$

и свойство 2 также выполняется. Поскольку $c_m \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$ для любого m, и $V < N_{M_n}(A)$ для любого n, то $T(N) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$ и свойство 3 доказано. Лемма доказана.

Зафиксируем последовательность групп $\{M_1, M_2, \cdots M_n, \cdots\}$ из леммы 3.7.17.

Лемма 3.7.18. *Пусть $T(C_A)$ из леммы 3.7.15. Тогда*

1. *Для любой конечной подгруппы* $K = \langle f \rangle \times \langle g \rangle$ *из* $T(C_A)$ *такой, что* $|f| = |g| = m$, $K = H$, *где* $H = \langle r \rangle \times \langle r^w \rangle$ *— подгруппа из* $T(C_A)$, $r \in C$ *и* $|r| = m$.

2. *Без ограничения общности можно считать, что для любой*

$$M_k \in \{M_1, M_2, \cdots M_n, \cdots\},$$

$$M_k \,\tilde{\in}\, \{U_3(q) | (3, q+1) = 1\}.$$

Доказательство. 1. По лемме 3.7.15 $C_A = C \times C^w$, где C — локально циклическая группа. Следовательно, $f = c_1 c_2$ для некоторых $c_1 \in C$ и $c_2 \in C^w$, значит, $1 = f^m = c_1^m c_2^m$. Так как $C \cap C^w = 1$, то $c_1^m = c_2^m = 1$, $c_1 \in \langle r \rangle, c_2 \in \langle r^w \rangle$ и $f \in H$. Точно также показывается, что $g \in H$. Так как $|H| = |K|$, то $H = K$. Положим $r = c_1$.

2. Дословное поторение рассуждений леммы 3.7.17 с учетом того факта, что M_n выбирается согласно условия 3.7.15. Лемма доказана.

Лемма 3.7.19. *Пусть* $T(C_A)$ *из леммы 3.7.16. Тогда*

1. *Для любой конечной подгруппы* $K = \langle f \rangle \langle g \rangle$ *из* $T(C_A)$ *такой, что* $|f| = |g| = m$, *и* $\langle d \rangle = \langle f \rangle \cap \langle g \rangle$ *имеет место равенство* $H = K$, *где* $H = \langle r \rangle \langle r^w \rangle$ *— конечная подгруппа из* $T(C_A)$, $r \in C$, $|r| = m$ *и* $\langle d \rangle = \langle r \rangle \cap \langle r^w \rangle$.

2. *Без ограничения общности можно считать, что для любой*

$$M_k \in \{M_1, M_2, \cdots M_n, \cdots\},$$

$$M_k \,\tilde{\in}\, \{U_3(q) | (3, q+1) = 3\}.$$

Доказательство. 1. По лемме 3.7.16 $T(C_A) = CC^w$, где C — локально циклическая группа, фактор-группа $T(C_A)/\langle d \rangle = C/\langle d \rangle \times C^w/\langle d \rangle$ – прямое произведение двух изоморфных локально циклических групп. Так как $d \in H \cap K$, то $H/\langle d \rangle \simeq K/\langle d \rangle$. Далее, рассуждая как в предыдущей лемме, получаем, что $H/\langle d \rangle = K/\langle d \rangle$, следовательно, $H = K$.

2. Дословное поторение рассуждений леммы 3.7.17 с учетом того факта, что M_n выбирается согласно условия леммы 3.7.16. Лемма доказана.

Лемма 3.7.20. *В* G *существует подгруппа* M *такая, что*

1. $M \simeq U_3(Q)$ *для подходящего бесконечного локально конечного поля* Q *нечетной характеристики.*

2. $A < M$.

3. *Для любой четверной подгруппы $F < M$, $T(N_G(F)) = N_M(F)$.*

4. *Пусть S_M — силовская 2-подгруппа группы S_M. Тогда S_M — силовская 2-подгруппа из G.*

5. *Силовские 2-подгруппы из M сопряжены.*

Доказательство. 1. По построению $B = \langle w\rangle \times \langle j\rangle < M_n$ для любого n. Из леммы 3.7.10 вытекает, что для любого n $N_{M_n}(B) < T(N_G(B)) = T(C_G(B)) \leftthreetimes V_1$, где V_1 изоморфна группе V. Покажем, что

$$C_{M_1}(B) < C_{M_2}(B) < \cdots < C_{M_n}(B) < \dots .$$

Действительно, $C_{M_n}(A) < C_{M_{n+1}}(A) < T(C_A)$ для любого n. По лемме 3.7.10, $A^g = B$ для некоторого $g \in G$. Поскольку

$$(C_{M_n}(A))^g < (C_{M_{n+1}}(A))^g < T(C_A)^g,$$

$$(C_{M_n}(A))^g = C_{M_n^g}(A^g) = C_{M_n^g}(B),$$
$$(C_{M_{n+1}}(A))^g = C_{M_{n+1}^g}(A^g)) = C_{M_{n+1}^g}(B),$$
$$T(C_A)^g = C_{G^g}(A^g) = T(C_G(B)),$$

то

$$C_{M_n^g}(B) < C_{M_{n+1}^g}(B) < T(C_G(B)).$$

Так как $C_{M_n}(B) \simeq C_{M_n}(A) \simeq C_{M_n^g}(B)$ и $C_{M_n}(B) < T(C_G(B))$, то по леммам 3.7.18, 3.7.19 $C_{M_n}(B) = C_{M_n^g}(B)$ для любого n. Следовательно, $C_{M_n}(B) < C_{M_{n+1}}(B)$ для любого n, что и требовалось. В силу бесконечности последовательности $\{M_1, M_2, ...M_n, ...\}$ можно считать, что для любого n, M_n не изоморфна $U_3(5)$. Следовательно, $M_n = \langle N_{M_n}(A), C_{M_n}(B)\rangle$ (теорема 113 (пункт 9) и с учетом леммы 3.7.17 (пункт 2)

$$M_1 < M_2 \ \cdots < M_n \ \cdots .$$

По теореме 97 $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \simeq U_3(Q)$ для подходящего бесконечного локально конечного поля Q нечетной характеристики.

Пункт 1 доказан.

2. Данный пункт очевиден.

3. Поскольку A и F сопряжены в M, то для некоторого $x \in M$, $A = F^x$ и $N_M(A) = N_M(F^x) = (N_M(F))^x$. Из равенства $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ и леммы 3.7.17 (свойство 3) получаем, что $N_M(A) = N$. Следовательно, $N = (N_M(F))^x$,

$$N_M(F) = T(N)^{x^{-1}} = \langle a^{x^{-1}} \mid a \in N\rangle = N_G(F).$$

Пункт 3 доказан.

4. Предположим обратное $- S_M < S$, где S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G. Если S — конечная группа, то S то она либо вида 1, либо вида 2 из леммы 3.7.1. Поскольку полудиэдральная группа не может содержать в качестве собственной подгруппы полудиэдральную группу, то S — сплетенная 2-группа вида 2 из леммы 3.7.1 порядка не менее 32 и $S < T(N_G(F))$ для некоторой четверной подгруппы F из S. Так как все четверные подгруппы в G сопряжены (лемма 3.7.10), то можно считать. что $F < M$. По по пункту 3 $S < M$. Следовательно, $S_M = S$. Противоречие с выбором S.

Если S — бесконечная группа, тот она вида 8 из леммы 3.7.1, причем $\tilde{S}$ — полная абелева 2-группа ранга 2 и $S < T(N_G(F))$ для четверной подгруппы F из $\tilde{S}$. Так как все четверные подгруппы в G сопряжены, то можно считать. что $F < M$. По по пункту 3 $S < M$. Следовательно, $S_M = S$. Противоречие с выбором S.

Пункт 4 доказан.

5. Пусть $S_1,\ S_2$ — две различные силовские 2-подгруппы группы M. Если одна из них конечна, то вторая конечна и сопряжена другой по теореме 4. Если они бесконечны,то они сопряжены как силовские 2-подгруппы из нормализаторов четверных подгрупп лежащих в их полных абелевых подгруппах группы M.

Пункт 5 доказан. Лемма доказана.

Лемма 3.7.21. *Пусть $R \in \mathfrak{B}(1)$ и $R \cap M$ содержит четверную подгруппу C. Тогда $R < M$.*

Доказательство. По лемме 3.7.20 (пункт 3) $N_R(C) < R \cap M$. По теореме 113 (пункты 1–4), $N_R(C)$ содержит четверную подгруппу H, отличную от C и такую, что $\langle H, C\rangle$ — 2-группа. Следовательно, $H < N_R(H) < N_M(H) < M$. Таким образом, $S = \langle N_R(C), N_R(H)\rangle < M$ и поскольку $S \neq R$, то $R \simeq U_3(5)$ и $S \simeq A_7$ — максимальная подгруппа в R (теорема 113 (пункт 9). Пусть теперь T — силовская 2-подгруппа из S, содержащая C, H. Поскольку T является группой диэдра порядка 8, а силовская 2-подгруппа из R является полудиэдральной группой порядка 16, то возьмем $x \in (N_R(T) \backslash T)$ со свойством $x \notin M$, но $x^2 \in T$. Так как силовская 2-подгруппа из M имеет порядок больше 8 (лемма 3.7.20), то возьмем $y \in (N_M(T) \setminus T)$ со свойством $y^2 \in T$. Так как G — группа Шункова, то $\langle x, y, T\rangle$ — конечная группа. Силовская 2-подгруппа из $\langle x, y, T\rangle$ содержит полудиэдральную группу, следовательно, по условию насыщенности $\langle x, y, T\rangle \subset R_1 \in \mathfrak{B}(1)$. Поскольку $x \in R_1$, но $x \notin M$, то

R_1 не лежит в M. Очевидно, R_1 не изоморфна $U_3(5)$, следовательно, $R_1 = \langle N_{R_1}(C), N_{R_1}(H)\rangle < M$ (лемма 3.7.20 (пункт 3)), что невозможно. Лемма доказана.

Лемма 3.7.22. *Пусть z — инволюция из M, h — элемент простого нечетного порядка из $C_G(z)$. Тогда $h \in M$.*

Доказательство. Предположим обратное. Для любой, отличной от z, инволюции $x \in C_M(z)$ группа $\langle z, h, x\rangle$ конечна. По условию насыщенности и лемме 3.7.8 $\langle h, x, z\rangle < K$, где $K \in \mathfrak{M}(1)$. Если для некоторого $x, K \in \mathfrak{B}(1)$ то, поскольку четверная группа $\langle x, z\rangle < M \cap K, K < M$ (лемма 3.7.21). Следовательно, $h \in M$, и в этом случае все доказано. Пусть для всех инволюций $x \in C_M(z), K \in \mathfrak{A}(1)$. Тогда $C_K(z)$ — группа диэдра. Следовательно, $\langle h\rangle = \langle h^x\rangle = \langle h\rangle^x$ и $\langle h\rangle I(C_M(z))$, где $I(C_M(z))$ — подгруппа из $C_M(z)$, порожденная всеми ее инволюциями, есть локально конечная группа. Возьмем в $C_M(z)$ подгруппу K_1 содержащую z и $K_1 \simeq GU_2(q)$. Рассмотрим подгруппу $I(K_1)$, порожденную всеми инволюциями из K_1. По условию насыщенности конечная группа $\langle h\rangle I(K_1) < K_2 \in \mathfrak{B}(1)$, и $K_2 \cap M$ содержит четверную группу. Следовательно, $K_2 < M$ (лемма 3.7.21). Но тогда $h \in M$. Лемма доказана.

Лемма 3.7.23. *Пусть z — инволюция из M, h — элемент конечного нечетного порядка из $C_G(z)$. Тогда $h \in M$.*

Доказательство. Пусть P — подгруппа из $C_G(z)$ порожденная инволюцией z и всеми элементами простых нечетных порядков из $C_G(z)$. По лемме 3.7.22 $P < M$. Ясно, что P — локально конечная характеристическая подгруппа в $C_G(z)$. Пусть теперь $|h|$ — не простое нечетное число. Без ограничения общности можно считать, что для некоторого простого $l, h^l \in P$. Возьмем в $C_M(z)$ конечную неразрешимую подгруппу $W \simeq SL_2(q)$ (теорема 113, пункт 10). Так как W порождается элементами простых нечетных порядков, то $W < P$. Как отмечалось выше P — локально конечная характеристическая подгруппа в $C_G(z)$. Следвательно, $\langle z, h, W\rangle$ — конечная группа (теорема 42). По условию насыщенности и лемме 3.7.8 $\langle z, h, W\rangle < K$, где $K \in \mathfrak{M}(1)$. Ввиду того, что $\langle z, h, W\rangle < C_K(z)$, $K \simeq U_3(q_1)$ для некоторого нечетного q_1. По теореме 113 $C_K(z) = Z \cdot L \cdot \langle f\rangle$, где $L \simeq SL_2(q_1)$, $Z = Z(C_K(z))$ — циклическая группа порядка $q_1 + 1$, $\mid Z \cap L \mid = 2$, $f^2 \in Z$. Тогда $h = h_1 w_1$, где $h_1 \in Z,\ w_1 \in W_1$. Так как L порождается элементами простых нечетных порядков, то по лемме 3.7.22 $L \in P$. Ясно, что h_1 не лежит в P, но $1 \neq h_1^l \in P$. По теореме 115 порядок L делиться на $q + 1$. Следовательно в L найдется элемент d порядка $\mid b_1^l \mid$. По теореме 113 (пункты

1–4) группа $\langle z\rangle \times \langle d\rangle \times \langle b_1^l\rangle$ лежит в $C_K(F)$, где F некоторая четверная группа из K, содержащая инволюцию z. В этом случае $C_K(F) < C_M(z)$, в $C_M(z)$ найдется инволюция $x \neq z$ и $x \in C_M(h_1^l)$ (например инволюция $x \in F$ и $x \neq z$). Так как G — группа Шункова и фактор группа $\langle z,\ x\ h_1\rangle/\langle z,\ b_1^l\rangle$ порождается элементом простого порядка l и инволюцией, то по теореме 103 $\langle z,\ x\ h_1\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle h,\ z,\ x\ h_1\rangle < R \in \mathfrak{M}(1).$$

Так как элемент h_1^l, нечетного порядка, централизуется четверной группой $F = \langle z\rangle \times \langle x\rangle$, то $R \in \mathfrak{B}(1)$, и $R \cap M$ содержит четверную группу $\langle z\rangle \times \langle x\rangle$. По лемме 3.20 $R < M$. Следовательно, $h_1 \in M$. Как отмечалось выше $h = h_1 w_1$, где $w_1 \in M$. Таким образом $h \in M$. Лемма доказана.

Лемма 3.7.24. *Пусть z — инволюция из M. Тогда все инволюции из $C_G(z)$ лежат в M.*

Доказательство. Пусть P — подгруппа из $C_G(z)$ порожденная всеми элементами нечетных порядков из $C_G(z)$ и инволюцией z. По лемме 3.7.23 P характеристическая подгруппа в $C_G(z)$ и $P < M$. Возьмем в P такую конечную подгруппу L, что $z \in L$, и $L \simeq SL_2(r)$ (r — нечетное больше 3). Возьмем в $C_M(z)$ инволюцию $y \neq z$. Пусть x — произвольная инволюция из $C_G(z)$. Так как G — группа Шункова, то $\langle x, y\rangle$ — конечная группа и $P\cdot\langle x, y\rangle$ локально конечная группа. По условию насыщенности конечная группа $\langle L, y, x\rangle \leq R$, где $R \simeq U_3(q)$ для некоторого нечетного q. Так как $M \cap R$ содержит четверную подгруппу $\langle z\rangle \times \langle y\rangle$. то по лемме 3.7.21 $R < M$, и $x \in M$. В силу произвольности выбора x как инволюции из $C_G(x)$ получаем, что все инволюции из $C_G(z)$ лежат в M. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 3.7.1. Пусть $X \in \mathfrak{N}(1) \neq \varnothing$ и X не лежит ни в каком $Y \in \mathfrak{B}(1)$. По леммам 3.7.10, 3.7.20 (пункт 3) можно считать, что

$$X \cap M = N_X(F),$$

где F — четверная подгруппа из X. Если X не изоморфна A_5, то из теоремы 115, списка максимальных подгрупп X ([144], стр. 377) и леммы 3.7.24 вытекает равенство $X = \langle C_X(x), C_X(y)\rangle < M$. Следовательно, $X < K \in \mathfrak{B}(1)$. Противоречие с выбором X. Пусть $X \simeq A_5$. Возьмем элемент h порядка 3 из $N_X(A)$ и инволюции $v \in N_X(\langle h\rangle)$, $w \in N_M(\langle b\rangle)$ такие, что $b^v = b^{-1}, b^w = b^{-1}$. Ясно, что $\langle h, v\rangle \neq \langle h, w\rangle$. По условию насыщенности конечная группа $\langle v, w, h\rangle < R$, R не лежит в M и R не изоморфна A_5 (поскольку $\langle h, v\rangle \neq \langle h, w\rangle$). Если $R \in \mathfrak{A}(1)$, то $R = \langle C_R(bw), C_R(b^2w)\rangle$ и по лемме 3.7.24 $R < M$. Противоречие. Следовательно, $R \in \mathfrak{B}(1)$. Так как $C_R(w) \simeq GU_2(q)$, для некоторого нечетного q, то из теоремы 113 вытекает, что $R \cap M$ содержит четверную подгруппу и по лемме 3.7.21 $R < M$. Противоречие с выбором R. Таким образом, для любого $X \in \mathfrak{N}(1)$ найдется $Y \in \mathfrak{B}(1)$ такой, что $X < Y$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{B}(1)$ — насыщающее множества для G, и по теореме 109 G обладает периодической частью $T(G) \simeq U_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q. Противоречие с тем, что G — контрпример. Теорема 3.7.1 доказана.

ГЛАВА 4

Группы Шункова и близкие к ним классы групп

В этой главе рассматриваются классы групп, являющиеся обобщениями групп Шункова. А.В. Рожков ввел в рассмотрение класс n-конечных групп, близких по свойствам к группам Шункова. Также устанавливаются взаимоотношения этих классов групп и групп Шункова.

§ 4.1. Случаи совпадения групп Шункова и бипримитивно конечных групп

В этом параграфе устанавливается несовпадение классов бипримитивно конечных и бинарно конечных групп. Также будут доказаны две теоремы, устанавливающие условия, при которых совпадают классы групп Шункова и бипримитивно конечных групп.

Оказывается, что вопрос о разделении бипримитивной и сопряженно бипримитивной конечности решается отрицательно в классе разрешимых групп.

Теорема 4.1.1 (А.А. Череп). *Разрешимая группа Шункова бипримитивно конечна)* [80].

Доказательство. Пусть G — разрешимая сопряженно бипримитивно конечная группа, $H = \langle s, t\rangle$ — ее подгруппа, порожденная двумя несопряженными элементами одного и того же простого порядка. Пусть H бесконечна. Если T — максимальный периодический нормальный делитель в H, то фактор-группа $\overline{H} = H/T$ уже не содержит периодических нормальных подгрупп и порождается элементами $\overline{s} = sH$ и $\overline{t} = tH$. Если $\overline{H} = 1$, то подгруппа H локально конечна как расширение локально конечной группы при помощи локально конечной группы и вследствие 2-порожденности конечна, т.е. имеет место утверждение теоремы.

Предположим, что $H > T$ и $\overline{H} \neq 1$. Если $\overline{H}_1$ — первый нетривиальный член разрешимого ряда группы $\overline{H}$, то в силу максимальности T, $\overline{H}_1$ не имеет кручения. Пусть A — максимальный нормальный делитель $\overline{H}$, не имеющий кручения. Из условий $|\langle \overline{s}, a^{-1}\overline{s}a\rangle| < \infty$, $|\langle \overline{t}, a^{-1}\overline{t}a\rangle| < \infty$ ($a \in A$) получим, что $[\overline{s}, a] = [\overline{t}, a] = \overline{1}$ ($a \in A$) и следовательно $A \leq C(\overline{H})$. Так как центр группы $\overline{H}$ не может содержать периодических элементов, то его подгруппами исчерпываются все нормальные делители группы $\overline{H}$, не содержащие периодических элементов, и тогда $A = C(\overline{H})$. Пусть нормальная подгруппа $B > A$ и фактор-группа B/A абелева. Отсутствие в B кручения противоречило бы включению $A < B$, следовательно она содержит периодические элементы, которые составляют подгруппу в силу того, что в нильпотентной группе множество периодических элементов составляет подгруппу [18]. Полученное противоречие с максимальностью T опровергает предположение $H > T$. Как уже было показано выше, возможность совпадения подгруппы H со своим максимальным периодическим нормальным делителем приводит к противоречию с исходным предположением о бесконечности H.

Пусть теперь H — произвольная конечная подгруппа из G. Рассуждениями для $N(H)/H$ аналогичными проделанным выше для группы G, покажем, что и в фактор-группе $N(H)/H$ любые два элемента одного и того же простого порядка порождают конечную подгруппу. Теорема 4.1.1 доказана.

На самом деле в теореме 4.1.1 содержится больше, чем утверждается, фактически в ней показано, что если в разрешимой группе некоторый периодический элемент порождает с каждым своим сопряженным конечную подгруппу, то он лежит d локально конечном нормальном делителе.

Подход к доказательству теоремы 4.1.1 допускает некоторое обобщение.

Назовем группой с несмешанными факторами группу G, обладающую вполне упорядоченным нормальным рядом

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_\alpha = G,$$

факторы которого либо локально конечны, либо не имеют кручения. Непосредственно проверяется, что указанное свойство переносится на подгруппы и фактор-группы по периодическому нормальному делителю.

Лемма 4.1.1. *Если G — группа с несмешанными факторами, P — некоторое инвариантное множество периодических элементов и любые два сопряженных элемента из P порождают конечную подгруппу, то P лежит в локально конечном нормальном делителе.*

Доказательство. Предположим, подгруппа $H = \langle P \rangle$, T — ее максимальный периодический нормальный делитель и $H \neq T$. Фактор-группа $\overline{H} = H/T$ является группой с несмешанными факторами, порождена множеством $\overline{P} = PT/T$, не имеет периодических нормальных подгрупп и любые два сопряженных элемента из $\overline{P}$ порождают в ней конечную подгруппу. Отметим, что в силу предположения $H > T$, множество порождающих $\overline{P}$ непусто. Пусть

$$\overline{1} = \overline{H}_0 \leq \overline{H}_1 \leq ... \leq \overline{H}_\beta = \overline{H}$$

— нормальный ряд с несмешанными факторами. В силу максимальности T подгруппа $\overline{H}_1$ не имеет кручения, а из условия конечности подгрупп вида $\langle \overline{s}, h^{-1}\overline{s}h\rangle$ ($\overline{s} \in \overline{P}, h \in \overline{H}$), получbv, что коммутатор $[\overline{s}, h] = \overline{1}$ ($\overline{s} \in \overline{P}, h \in \overline{H}$), что влечет за собой включение $\overline{H}_1 \leq C(\overline{H}$. Пусть γ — первое порядковое число, для которого $\overline{H}_\gamma \leq C(\overline{H}$. Понятно, что γ не может быть предельным, а подгруппа $\overline{H}_\gamma$ должна быть смешанной. В этом случае фактор-группа $\overline{H}_\gamma/\overline{H}_{\gamma-1}$ может быть только локально конечной и в этом случае H_γ есть FC-группа и, так как в FC-группе периодические элементы составляют подгруппу [93], ее периодические элементы составляют нормальный делитель. Полученное противоречие с максимальностью T приводит к отсутствию в группе $\overline{H}$ периодических элементов, но тогда $\overline{P} = \overline{1}$ и $H = T$. В завершение доказательства заметим, что из инвариантности порождающего множества следует нормальность H в G, а локальная конечность подгруппы H есть следствие ее периодичности.

Теорема 4.1.2 (А.А. Череп). *Если G — группа с несмешанными факторами, то условия 1 – 3 эквивалентны:*

1. Группа G является группой Шункова.

2. Группа G бипримитивно конечна.

3. Для любой конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ элементы поостых порядков порождают локально конечную подгруппу [80].

Доказательство. Переходы 3 в 2 и 2 в 1 есть непосредственное следствие определений.

Докажем правомерность перехода 1 в 3. Если группа G удовлетворяет первому условию, H — ее конечная подгруппа, P — множество элементов простых порядков фактор-группы $N_G(H)/H$ то пара $(N_G(H)/H, P)$ удовлетворяет условию леммы 4.1.1.

Теорема 4.1.3 (А.А. Череп). *Если в группе G любые два элемента порождают подгруппу с несмешанными факторами, то сопряженно бипримитивная конечность G эквивалентна ее бипримитивной конечности* [80].

Доказательство. Пусть группа Шункова G удовлетворяет условию теоремы, H — ее конечная подгруппа, aH и bH — элементы простого порядка p из фактор-группы $N_G(H)/H$. Если a и b — прообразы aH и bH в $N_G(H)/H$, то по условию подгруппа $\langle a, b\rangle$ есть группа с несмешанными факторами, некоторой фактор-группе которой изоморфна подгруппа $\langle aH, bH\rangle$. Далее доказываемое утверждение прямо следует из теоремы 4.1.2.

А.А. Череп в 1987 г. построил пример бипримитивно конечной, но не бинарно конечной группы [79].

Рассмотрим прямое произведение $A = \prod\limits_{i\in\mathbf{Z}} \langle a_i\rangle$ циклических групп $\langle a_i\rangle$ второго порядка и группу $G = (A\lambda \langle h\rangle)\lambda \langle t\rangle$, где элемент h бесконечного порядка действует на порождающие из A по правилу $h^{-1}a_ih = a_{i+2}$, $i \in \mathbf{Z}$, а действие элемента t порядка 4 задается равенствами:

$$t^{-1}a_it = a_{-i} \text{ для } i \in \mathbf{Z}, t^{-1}ht = h^{-1}a_0a_1.$$

Очевидно, $t^{-4}a_it^4 = a_i$ для любого $i \in \mathbf{Z}$. Легко проверить также справедливость следующих равенств:

$$t^{-2}ht^2 = a_0a_1ha_0a_{-1} = ha_{-1}a_0a_2a_3,$$

$$t^{-3}ht^3 = h^{-1}a_0a_1a_0a_1a_{-2}a_{-3} = h^{-1}a_{-2}a_{-3},$$

$$t^{-4}ht^4 = a_0a_1ha_2a_3 = h.$$

Следовательно, группа G определена корректно. Положим $B = \left\langle A, t^2\right\rangle$, $L = \langle B, h\rangle$. Так как $t^2 \in C_G(A)$ и $t^2A \in Z(G/A)$, то B — элементарная абелева 2-подгруппа и периодические элементы из L лежат в B. Соотношение

$$(th^kB)^2 = t^2h^{-k}h^kB = B$$

в фактор-группе G/B показывает, что элементы из множества $G \setminus L$ имеют порядок 4.

Установим теперь бипримитивную конечность группы G. Ввиду ее разрешимости в случае, когда нормализатор $N_G(H)$ любой конечной подгруппы H не содержит элементов бесконечного порядка, $N_G(H)$ — локально конечная группа. Поэтому подгруппа $N_G(H)/H$ локально конечна. Непосредственно проверяется, что в группе G любые две инволюции порождают конечную подгруппу. Следовательно, G — бипримитивно конечная группа. Предположим, существует такая конечная подгруппа H, для которой нормализатор $N_G(H)$ содержит элемент g

бесконечного порядка. Поскольку любой элемент бесконечного порядка из G имеет вид t^2h^na, где $a \in A$, то, возводя при необходимости g в квадрат, можно считать, $g = h^ka$, где $a \in A$. Если b — неединичный элемент из $H \cap A$, то, согласно правилу действия h на A, множество $M = \{b^{g^n} \,|\, n \in \mathbf{Z}\}$ бесконечно. А так как $g \in N_G(H)$, то множество M обязано лежать в конечной подгруппе H. Полученное противоречие приводит к равенству $H \cap A = 1$.

Если в H найдется элемент $b \in G \backslash L$, т.е. имеющий вид $b = t^\beta h^n a, \beta \in \{1, 3\}, a \in A, n \in \mathbf{Z}$, то из равенства $(h^kB)^{-1}th^nB(h^kB) = th^nh^{2k}B$ в фактор-группе G/B следует, что $g^{-1}bg = bg^2a, a \in A$, и множество M также бесконечно. Аналогично рассмотренному выше случаю получим: множество $H \cap (G \setminus L)$ — пустое. Поскольку H — циклическая группа, лежащая в $\{L \setminus A\} \cup \{e\}$ (e — единичный элемент), и так как $|H| < \infty$, то произвольный элемент из H не может иметь вид t^2h^ka, $k \neq 0$ (иначе это был бы элемент бесконечного порядка). По тем же соображениям произвольный элемент из H не может иметь вид h^ka, $k \neq 0$. Таким образом, каждый элемент y из H может быть записан в виде $y = t^2b$, где $b \in A$.

Пусть y_1 — неединичный элемент подгруппы H, не совпадающий с y или y^{-1}. Тогда $yy_1 = bb_1 \in A\,(b \neq b_1)$ — противоречие с тем, что $A \cap H = 1$. Значит, $|H| = 2$ и $H = \langle t^2b \rangle$. Из включения $g = h^ka \in N_G(H)$ следует равенство $h^kat^2b = t^2bh^ka$ или, что то же самое, $h^kt^2b = t^2bh^k$. Из последнего равенства сразу видно, что

$$t^2(h^k)^{t^2}b = t^2h^kb^{h^k}, \text{ или } t^2(ha_{-1}a_0a_2a_3)^kb = t^2h^kb^{h^k}.$$

Так как

$$(ha_{-1}a_0a_2a_3)^k = h^k(a_{-1}a_0a_2a_3) \cdot (a_{-1}a_0a_2a_3)^h \cdot \ldots \cdot (a_{-1}a_0a_2a_3)^{h^{k-1}}$$

и $a_i^h = a_{i+2}$, то

$$(ha_{-1}a_0a_2a_3)^k = h^k(a_{-1}a_0a_2a_3) \cdot (a_1a_2a_4a_5) \cdot \ldots \cdot (a_{2k-3}a_{2k-2}a_{2k}a_{2k+1}).$$

Отсюда после очевидных упрощений получаем

$$(ha_{-1}a_0a_2a_3)^k = h^k(a_{-1}a_0a_1)(a_{2k-1}a_{2k}a_{2k+1}) = h^k(a_{-1}a_0a_1)(a_{-1}a_0a_1)^{h^k}.$$

Подставив вычисленное значение $(ha_{-1}a_0a_2a_3)^k$ в равенство

$$t^2(ha_{-1}a_0a_2a_3)^kb = t^2h^kb^{h^k},$$

будем иметь

$$t^2h^k(a_{-1}a_0a_1)(a_{-1}a_0a_1)^{h^k}b = t^2h^kb^{h^k}$$

или

$$(a_{-1}a_0a_1)b = h^{-k}((a_{-1}a_0a_1)b)h^k.$$

Поскольку $b \in A$, а элемент h^k при $k \neq 0$ не перестановочен ни с каким элементом из A, то отсюда вытекает, что $(a_{-1}a_0a_1)b = 1$. В этом случае $b = a_{-1}a_0a_1$. Поскольку никаких условий на число k не накладывается, то b — единственный элемент, для которого подгруппа $H = \left\langle t^2b \right\rangle$ нормализуется элементами бесконечного порядка.

Рассмотрим теперь, каковы порядки элементов в фактор-группе G/H. Порядок 2 имеют образы элементов подгруппы B, бесконечный порядок — образы элементов из L. Покажем теперь, что образ элемента из $G \setminus L$ не может иметь порядок 2. В самом деле, это равносильно тому, что квадрат некоторого элемента вида $t^\beta h^k a$, где $\beta \in \{1, 3\}$, $a \in A$, равен $t^2a_{-1}a_0a_1$.

Для $\beta = 1$ (случай $\beta = 3$ аналогичен) имеем

$$th^kath^ka = t^2(h^{-1}a_0a_1)^kh^ka^{th^k}a,$$

$$(h^{-1}a_0a_1)^kh^k = h^{-k}(a_0a_1)^{h^{1-k}} \cdot (a_0a_1)^{h^{2-k}} \cdot \ldots \cdot (a_0a_1)^{h^{-1}} \cdot (a_0a_1)^{h^k},$$

$$(h^{-1}a_0a_1)^kh^k = (a_0a_1)^h \cdot (a_0a_1)^{h^2} \cdot \ldots \cdot (a_0a_1)^{h^k} = \prod_{i=2}^{2k+1} a_i.$$

Для истинности равенства $(th^ka)^2 = t^2a_{-1}a_0a_1$ необходима истинность равенства

$$(\prod_{i=2}^{2k+1} a_i)a^{th^k}a = a_{-1}a_0a_1.$$

Пусть элементом a из A является произведение n порождающих a_i. Тогда элемент a^{th^k} есть также произведение n порождающих, а поскольку все порождающие имеют порядок 2, то элемент $a^{th^k}a$ — произведение четного числа порождающих. Проводя аналогичные рассуждения для элемента $(\prod_{i=2}^{2k+1} a_i)a^{th^k}a$, понимаем, что данный элемент является произведением четного числа порождающих, а поэтому равенство $(\prod_{i=2}^{2k+1} a_i)a^{th^k}a = a_{-1}a_0a_1$ невозможно. Следовательно, в фактор-группе G/H порядок 2 имеют только элементы вида bH, где $b \in H$. Ясно, что любые два из них порождают конечную подгруппу. Бипримитивная конечность группы G доказана.

Равенство $t^{-1}h^{-1}th = a_0a_1h^2$ показывает, что элементы t и $h^{-1}th$ четвертого порядка порождают бесконечную подгруппу, т.е. группа G не является бинарно конечной.

§ 4.2. Разделение классов сопряжённо n-конечных и бипримитивно конечных групп

В этом параграфе рассматриваются взаимоотношения классов групп, близких по свойствам к группам Шункова. В частности, устанавливаются условия, при которых эти классы различны и условия, при которых они совпадают.

Напомним, что группа называется *(сопряженно) r-конечной*, если любые ее r (сопряженных) элементов порождают конечную подгруппу. При $r = 2$ получаем определение сопряженно бинарно конечной группы. Для каждого простого числа p и каждого натурального числа $r \geq 2$ построен следующий пример сопряженно r-конечной, но не r-конечной финитно аппроксимируемой p-группы.

Пример 4.2.1 (А.И. Созутов.) Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — некоторая система порождающих построенной А.И. Созутовым в работе [67] (см., например, лемма 2.2.2 из [56]) алгебры A над полем K характеристики $p > 0$. Если 1 — присоединенная к A единица поля K, то относительно умножения множество $1+A$ является p-группой (ее называют присоединенной). Если J — идеал алгебры A, то $1 + J$ — нормальная подгруппа группы $1+A$. Поскольку в алгебре A каждый элемент содержится в идеале с нильпотентными r-порожденными подалгебрами, то каждый элемент группы $1+A$ принадлежит ее r-конечной нормальной подгруппе. В группе $1+A$ рассмотрим подгруппу $G = \langle 1 + x_1, \ldots, 1 + x_r\rangle$. Групповая алгебра $K[G]$ содержит алгебру A как подалгебру. Следовательно, алгебра $K[G]$ бесконечномерна, а r-порожденная p-группа G бесконечна. С другой стороны, поскольку каждый элемент группы $1 + A$ содержится в подходящей нормальной r-конечной подгруппе, то и в группе G любые r сопряженных элементов порождают конечную подгруппу.

Приведем здесь без доказательства результаты А.В. Рожкова [51] (доказательства этих результатов можно найти в [56]), которые разграничивают условие слабой сопряженной бипримитивной конечности с условиями сильной (a, b)-конечности, сопряженной бинарной конечности и слабой бипримитивной конечности.

Теорема 4.2.1 (А.В. Рожков). *Пусть p — простое число, $1 \leq n \leq k$ — натуральные числа. Тогда существует конечно порожденная финитно аппроксимируемая сопряженно k-конечная n-конечная, но не $(n+1)$-конечная p-группа. В частности, p-группа может быть не бинарно конечной, но сопряженно k-конечной, где k сколь угодно велико* [51].

Напомним, что если в группе G найдутся такие элементы a и b, что для каждого элемента $g \in G$ конечна подгруппа $\langle a, b^g \rangle$, то G удовлетвояет *сильному условию (a, b)-конечности.* Если же в группе любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу, группа называется *слабо сопряженно бипримитивно конечной.* А.В. Рожков разграничивает эти условия конечности для финитно аппроксимируемых p-групп.

В [51] (см. теорема 2.4.3 из [56]) А.В. Рожковым устанавливается существование группы удовлетворяющей условию сильной (a, b)-конечности для некоторого множества элементов a, b но не являющейся слабо сопряженно бипримитивно конечной.

Напомним, что группа называется *слабо бипримитивно конечной,* если любые два ее элемента простого порядка порождают конечную подгруппу.

Также в [51] (см. теорема 2.4.4 из [56]) А.В. Рожковым устанавливается существование слабо сопряженно бипримитивно конечной финитно аппроксимируемой p-группы, не являющейся сопряженно бинарно конечной и слабо бипримитивно конечной [51].

А.В. Рожков [52] поставил следующий

Вопрос. Пусть p — простое нечётное число, n — натуральное. Для всех ли пар p, n существуют финитно аппроксимируемые конечно порождённые p-группы, являющиеся сопряжённо n-конечными, но не бипримитивно конечными?

Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 4.2.2 (В.А. Середа, А.И. Созутов). *Пусть G — сопряжённо n-конечная группа. Тогда для всех $p \in \pi(G)$, не превышающих n, группа G является p-бипримитивно конечной* [53].

Доказательство. Если группа G сопряжённо n-конечна и $p \leq n$, то любая пара a, b элементов порядка p из G порождает в ней конечную подгруппу $\langle a, b \rangle = \left\langle a, a^b, ..., a^{b^{p-1}} \right\rangle \lambda \langle b \rangle$. Следовательно, G слабо

p-бипримитивно конечна. Условие сопряжённой n-конечности наследуется на все сечения группы G. Поэтому они все слабо p-бипримитивно конечны, и G является p-бипримитивно конечной. Если, дополнительно, G — p-группа, то она бипримитивно конечна.

Рассмотрим теперь случай пар p, n с условием $n < p$. Отметим, что любая 2-группа бипримитивно конечна. Следовательно, можно считать, что $p > 2$ и для исчерпывающего ответа на вопрос Рожкова достаточно рассмотреть случай $n = p - 1$, $p > 2$. Положительный ответ даёт следующий

Пример 4.2.2 (В.А. Середа, А.И. Созутов). *Для каждого простого $p > 2$ существует бесконечная сопряжённо $(p-1)$-конечная p-группа, порождённая двумя элементами порядка p* [53].

Для произвольных натуральных чисел d, n с условием $2 \leq d \leq n$, подгруппы G группы $GL_n(p) = GL(F_1)$, конечного множества M натуральных чисел, содержащего вместе с числом все его делители, в алгебре $F = U(x_1, ..., x_n)$, $U = GF(p)$, существует такой допустимый относительно G однородный идеал $J \subseteq F^{(1)}$, что выполняются следующие свойства: фактор-алгебра $A = F^{(i)}/J$ является бесконечномерной нильалгеброй, в которой все $(d-1)$-порождённые подалгебры конечны; группа G есть группа операторов алгебры $A = F^{(i)}/J$; если $g_1, ..., g_d$ — многочлены из $F^{(1)}$, однородные компоненты $f_1, ..., f_d$ степени 1 которых линейно независимы, то подалгебра B из $A = F/J$, порождённая образами многочленов $g_1, ..., g_d$, бесконечномерна.

Рассмотрим присоединённую группу алгебры A. При $U = GF(p)$, $n = p^2$, $p > 2$, $G = GL_n(p)$. Пусть $H = (a) \times (b)$ — элементарная абелева p-подгруппа из G, действующая регулярно на множестве $\{x_1, ..., x_n\}$, и $K = (1 + A)AH$. Используя заданное действие H на F_1, образуем конечную p-группу $Q = F_1 \lambda H$, изоморфную фактор-группе $K/(1 + A^2)$. Очевидно, что $|Q| = p^{n+2}$ и Q содержит подгруппу $M = (a^G, b)$ порядка p^{n-2}, в частности, $F_1 \cap M$ содержит $n-4$ линейно независимых элемента. Кроме того, любая подгруппа $R = (c, c_2, ..., c_{p-1}) < M$, где $c_2, ..., c_{p-1} \in c^M$, либо содержится в $1 + A$, либо имеет вид $(R \cap (1 + A)) \cdot \langle c \rangle$, причём $c \notin 1 + A$, $c^p \in 1 + A$. В последнем случае с учётом действия элемента c на образе подпространства F_1 при гомоморфизме $M \to \overline{M} = M/(1 + A^2)$ получаем

$$\overline{R} \cap \overline{F_1} = \left\langle c^p, c^{-1}c_i, c^{-1}c_i^c, ..., c^{-1}c_i^{c^{p-1}} | i = 2, ..., p-1 \right\rangle$$

и подгруппа $\overline{R} \cap \overline{F_1}$ порождается не более чем $p^2 - 2p + 1 = n - 2p + 1$

элементом. Если $p > 3$, то $p^2 - 2p + 1 < n - 4$ и $p - 1 < n - 4$. В теореме 94 положим $d = n - 4$, и пусть P — подгруппа группы $K = (1 + A)AH$, порождённая элементами a^G, b. Как показано выше, P содержит элементы $1 + g_1, ..., 1 + g_{n-4}$, при этом у многочленов $g_1, ..., g_{n-4}$ однородные компоненты $f_1, ..., f_{n-4}$ линейно независимы. По теореме 94 группа P бесконечна. С другой стороны, как вытекает из неравенств $p^2 - 2p + 1 < n - 4$ и $p - 1 < n - 4$, группа P сопряжённо $(p - 1)$-конечна.

Случай $p = 3$ требует отдельного рассмотрения. Пусть $p = 3$, $n = 3^6$, $G = GL_n(p)$, $H = (a, b)$ — силовская 3-подгруппа группы Шевалле $G_3(3)$, действующая регулярно на множестве $\{x_1, ..., x_n\}$, $|a| = |b| = 3$, $K = (1 + A)AH$, $Q = F_1 \lambda H \cong K/(1 + A^2)$. Имеем $|Q| = 3^{735}$, в Q есть подгруппа $M = \langle a^g, b\rangle$ порядка 3^{85}, и M накрывает подпространство размерности 81 из F_1. Поэтому при $d \leq 81$ соответствующая подгруппе M из Q подгруппа $P = (a^G, b)$ из K бесконечна. Для конечности подгрупп $R = \left\langle c, c^G \right\rangle$, где $c \in 1 + A$, достаточно в теореме 94 положить $d = 3$. Если же $c \in P \setminus (1 + A)$, то порядок фактор-группы $R/R \cap (1 + A)$ не превосходит 27. В этом случае с учётом действия элемента c на образе подпространства F_1 при гомоморфизме $P \to M < K/(1 + A^2)$ необходимо положить $d \geq 56$. Тогда при $56 \leq d \leq 81$ подгруппа P является бесконечной сопряжённо бинарно конечной финитно аппроксимируемой 3-группой, порождённой двумя элементами порядка 3. Теорема 4.2.2 доказана.

Отметим, что бесконечная сопряжённо бинарно конечная группа не может быть порождена ни двумя элементами порядка 2, ни элементом порядка 2 и элементом порядка 3. Первая комбинаторная возможность бесконечности группы возникает, когда оба порождающих имеют порядок 3, и она реализуется.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Периодические подгруппы группы внешних автоморфизмов черниковской группы конечны [90].*

Этот результат является следствием теоремы:

Теорема 2. *Группа внешних автоморфизмов черниковской группы почти вся без кручения [35].*

Теорема 3. *Всякая бипримитивно конечная p-группа, обладающая конечной максимальной элементарной абелевой подгруппой, черниковская группа [115].*

Этот результат получен в работе [115] на основании леммы 4, к доказательству которой нужно сделать следующее замечание: чтобы обосновать существование числа S (обозначение из [115]), необходимо сослаться на теорему 2 из [35] (см. теорему 2 выше).

Теорема 4. *Для периодических абелевых групп условие min и условие $min - inf$ эквивалентны [13].*

Доказательство. Эту теорему легко доказать, используя известные факты из теории абелевых групп [18]. Из теорем 3, 4 вытекает:

Теорема 5. *Для бипримитивно конечных p-групп условие $min - inf$ для абелевых подгрупп и условие min эквивалентны и такие группы черниковские.*

Теорема 6. *Бесконечная бипримитивно конечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой [121].*

Теорема 7. *Фактор-группа G/R q-бипримитивно конечной группы G по черниковской подгруппе R q-бипримитивно конечна.*

Доказательство. Так как конечное расширение черниковской группы снова черниковская группа [18], то, очевидно, для доказательства нашей теоремы достаточно показать, что любые два элемента a и B из G $(a^q, b^q \in R)$ порождают конечную подгруппу. Ввиду черниковости R ее можно представить в виде $R = \tilde{R}T$ где $\tilde{R}$ — полная часть группы R, T — конечная группа и $a^q, b^q \in T$. Подгруппа R обладает конечной характеристической подгруппой L, такой, что $T^a, T^b \subset TL$. Подгруппа TL конечна, и, очевидно, $a, b \in N_G(L)$. Но тогда из определения q-бипримитивной конечности группы и предположения $b^q \in R$ вытекает конечность $< a, b >$. Как отмечалось выше, это означает, что теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть G — группа, B — подгруппа и $|G : B|$ конечен. Если A — полная абелева подгруппа группы G, то $A \subseteq B$.*

Теорема 9. *В черниковской группе силовские p-подгруппы сопряжены.*

Доказательство. Теорему легко получить, используя определение черниковской группы и теорему Силова [18].

Теорема 10. *Фактор-группа q-бипримитивно конечной группы G с условием $min - inf$ для абелевых q-подгрупп по черниковской группе R снова q-бипримитивно конечна с условием $min - inf$ для абелевых q-подгрупп.*

Доказательство. G/R q-бипримитивно конечна (теорема 7), и если в G/R некоторая q-подгруппа не удовлетворяет условию $min - inf$, то G/R обладает бесконечной элементарной абелевой q-подгруппой $\overline{Q}$ (Q — полный прообраз $\overline{Q}$ в G) (теорема 5). Группа Q локально конечна (теорема Шмидта [90]) и является SF_q-группой (теорема 5). Но тогда $\overline{Q} = Q/R$ — черниковская группа [88], что невозможно. Следовательно, G/R удовлетворяет условию $min - inf$ для абелевых q-подгрупп, и теорема доказана.

Теорема 11. *Если в q-бипримитивно конечной группе G с условием $min - inf$ для абелевых q-подгрупп существуют несопряженные силовские q-подгруппы, то и в любой фактор-группе по черниковской подгруппе найдутся такие же подгруппы.*

Доказательство. Пусть и Q — силовские q-подгруппы группы G и P и Q не сопряжены. Подгруппы PR/R, QR/R содержатся в силовских q-подгруппах S и группы G/R.

Предположим, что $H^{\overline{x}} = \overline{S}$ для некоторого $\overline{x} \in G/R$ ($\overline{x}$ — прообраз x в G и S — полный прообраз S в G). Так как $\overline{S}$ —- черниковская группа (теоремы 1.3.5, 1.3.10), то и S — черниковская группа [18] и $P, Q^x \subset S$. Но тогда P и Q^x сопряжены в S (теорема 9), а, значит, P и Q сопряжены в G. Противоречие. Следовательно, $\overline{S}$ и H не сопряжены в G/R, и теорема доказана.

Теорема 12. *Пусть G — бесконечная p-группа с конечным центром и $G = P\lambda < a >$, где P — абелева группа, a — элемент порядка P. Тогда G — черниковская группа, $Z(G)$ — элементарная абелева группа, и все элементы вида ha ($h \in$) сопряжены с в G [119].*

Доказательство. Очевидно, a содержится в конечной максимальной элементарной абелевой подгруппе группы G, а поэтому G — черниковская группа (теорема 3). На основании леммы о коммутаторной лестнице [85] заключаем, что P обладает инвариантной в G подгруппой Q, такой, что факторы верхнего центрального ряда подгруппы $= Q\lambda < a >$ являются циклическими группами простых порядков, причем длина этого ряда равна $\omega + 1$ (ω — первое бесконечное трансфинитное число).

Предположим, $P = Q$ и пусть

$$1 = Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n \subset \ldots \subset Z_\omega = P \subset Z_{\omega+1} = G ---$$

верхний центральный ряд группы G. Если $1 \neq h \in Z_1$, то $Z_1 =< h >$. Пусть $R =< h > \times <\ >$ и r - некоторый элемент из $Z_2 \setminus Z_1$. Очевидно, и r можно выбрать таким образом, что $r^{-1}ar = ha$. Предположим, что нами уже доказана сопряженность элементов вида ha для всех $h \in Z_n$ и докажем это для элементов из Z_{n+1}.

Пусть $h \in Z_{n+1} \setminus Z_n$. Очевидно, G/Z_n удовлетворяет всем условиям леммы, и $Z_{n+1}/Z_n =< hZ_n >$. По индуктивному предположению, элементы $(hZ_n)(aZ_n) = haZ_n$ и aZ_n, сопряжены в G/Z_n, т.е. существует $SZ_n \in G/Z_n$ ($S \in P$) такой, что $S^{-1}hasZ_n = aZ_n$ или $S^{-1}has = ta$ (t — некоторый элемент из Z_n). Но, по индуктивному предположению, ta и a сопряжены в G, т.е. существует $b \in G$ такой, что $ta = b^{-1}ab$. Тогда $bs^{-1}hasb^{-1} = a$, и сопряженность ha и a в G доказана.

Пусть теперь $Q \neq P$ и $\overline{G} = G/Q$. Покажем, что центр $Z(G)$ конечен. Предположим, что $Z(G)$ бесконечен, и обозначим через R его полный прообраз в G. Тогда для каждого $r \in Rr^{-1}ar = ua$ (u — некоторый элемент из Q). По доказанному выше, существует $x \in Q$ такой, что $x^{-1}ax = ua$. Следовательно, $x^{-1}r^{-1}arx = aR \subset C_G(a)Q$. По предположению, $R/Q = Z(\overline{G})$ бесконечен, тогда и $C_G(a)$ бесконечен. Противоречие. Таким образом, $G = P/Q\lambda < aQ >$ удовлетворяет всем условиям леммы, и ранг ее полной части строго меньше ранга полной части группы G. Теперь сопряженность элементов вида ha ($h \in P$) с a будем доказывать индукцией по рангу полной части группы, удовлетворяющей условиям леммы. Предположим, что в $\overline{G}$ (а ранг $\overline{G}$ строго меньше ранга G) все элементы вида $hQaQ = haQ$ ($h \in P$) сопряжены с aQ, т. е. для каждого $h \in P$ существует $x \in G$ такой, что $(xQ)^{-1}(haQ)(xQ) = x^{-1}haxQ = aQ$.

Тогда $x^{-1}hax = au$ (u — некоторый элемент из Q). По доказанному выше au и a сопряжены в $Q\lambda < a >$, т.е. существует $y \in$Q$\lambda < a >$ такой, что $y^{-1}auy = a$. Из последних двух равенств вытекает $y^{-1}x^{-1}hax = a$, т. е. ha и a сопряжены в G. Докажем, что $Z(G)$ — элементарная абелева группа. Если бы $Z(G)$ обладал элементом порядка p^2, скажем, c, то элемент ca имел бы тоже порядок p^2 и, так как с P, то, по доказанному выше, a и ca были бы сопряжены в G, что невозможно. Лемма доказана.

Теорема 13. *Свободная периодическая группа $B(m, n)$ нечетного периода $n \geq 4581$ с конечным числом порождающих $m \geq 2$ (группа Новикова-Адяна) бесконечна и любой ее неединичный элемент почти регулярен [37, 39].*

Теорема 14. *В группе Новикова-Адяна всякая локально конечная подгруппа — циклическая группа [1].*

Теорема 15. *Теорема Бернсайда [140]. Всякая подгруппа порядка pq, где p и q — не обязательно различные простые числа, из дополнительного множителя конечной группы Фробениуса — циклическая.*

Из теоремы Бернсайда и теоремы 12.5.2 из [131] вытекает следующий результат.

Теорема 16. *Силовские p-подгруппы в дополнительном множителе конечной группы Фробениуса либо циклические, либо обобщенные группы кватернионов.*

Конечные группы, все силовские p-подгруппы которых циклические или обобщенные группы кватернионов, описаны Н. Цассенхаузом [154] и М. Сузуки [149]. Эту классификацию можно найти, например, в [7], [72].

Из теоремы 9.4.3 в книге [131] (или леммы 1 из [7]) и теоремы Бернсайда (теорема 15) вытекает такой результат.

Теорема 17. *Все элементы простых порядков в дополнительном множителе конечной группы Фробениуса, не содержащем инволюций, порождают циклическую группу.*

Теорема 18. *Пусть (G, H) — пара Фробениуса, L — некоторая подгруппа из G и $L \not\subseteq H$. Если $L \cap H \neq 1$, то $(L, L \cap H)$ — пара Фробениуса.*

Доказательство очевидно.

Теорема 19. *Пусть (G, H) — пара Фробениуса, G — конечная группа, H не содержит инволюций и a — некоторый элемент простого порядка p из H. Тогда для любого элемента $g \in G \setminus H$ $L_g = \langle a, g^{-1}ag \rangle = F_g \lambda \langle a \rangle$ и F_g не обладает парой Фробениуса.*

Доказательство. Теорема 19 вытекает из теоремы Фробениуса (см. начало параграфа), порождаемости L_g двумя элементами порядка p и теорема 17.

Теорема 20. *Пусть (G, H) — пара Фробениуса, a — некоторый элемент порядка p из H и k — произвольный элемент порядка p из $G \setminus H$. Если $L = \langle a, k \rangle$ конечна, то L — группа Фробениуса и $\langle a \rangle$, $\langle k \rangle$ сопряжены в L, причем если $|L \cap H|$ нечетен, то $\langle a \rangle$, $\langle k \rangle$ сопряжены с помощью элемента из ядра L.*

Доказательство. Теорема 20 вытекает из теоремы 18, теоремы Силова [18] и теоремы 19.

Теорема 21. *Пусть G — группа, i и k — ее инволюции. Тогда 1) $B = \langle i, k \rangle = \langle ik \rangle \lambda \langle i \rangle = \langle ik \rangle \lambda \langle k \rangle$; 2) если $\langle ik \rangle$ обладает инволюцией z, то $z \in C_G(i) \cap C_G(k)$; 3) если $|ik|$ конечен и нечетен, то $i = c^{-1}kc$, ($c^{-2} = ik$), $c \in \langle ik \rangle$.*

Теорема 22. *Пусть $G = A\lambda \langle i \rangle$, где A — периодическая группа, i — инволюция. Если $(G, \langle i \rangle)$ — пара Фробениуса, то A абелева и $iai = a^{-1}$ для любого элемента $a \in A$.*

Доказательство. Элемент $c = ig^{-1}ig$ имеет нечетный порядок (условия теорема и теоремы 21). Следовательно, $i = bg^{-1}igb^{-1}(b^{-2} = c)$ и $b \in A$ (теорема 21). Отсюда получим $g = hb$ и $h \in N_G(\langle i \rangle)$. Но $(G, \langle i \rangle)$ — пара Фробениуса, и, значит, $h \in \langle i \rangle$. Таким образом, если g — произвольный элемент из A, то $igi = g^{-1}$.

Пусть a, c — произвольные элементы из A. По доказанному выше, $i(a^{-1}ca)i = a^{-1}c^{-1}a$ и $ia^{-1}cai = ia^{-1}iiciiai = ac^{-1}a^{-1}$. Отсюда получим $a^{-1}c^{-1}a = ac^{-1}a^{-1}$, $c^{-1} = a^{-2}c^{-1}a^2$. Но $\langle a^2 \rangle = \langle a \rangle$, и, значит, $ac = ca$, а так как a, c — произвольные элементы из A, то A абелева. Теорема доказана.

Теорема 23. *Пусть (G, H) — пара Фробениуса, G — конечная группа и $|H|$ четен. Тогда $G = F\lambda H$, где $H = C_G(i)$, i — единственная инволюция из H, F — абелева группа.*

Известно элементарное доказательство теоремы 23, принадлежащее Бернсайду (см., например, [72]).

Теорема 24. *([147], теорема 8.7, а)). Ядра конечных групп из класса Φ нильпотентны.*

Теорема 25. *[146]. Если $G \in \Phi$ и F — локально нильпотентная группа, то F нильпотентна ступени не больше $f(p)$.*

В предложениях 26–28 используются следующие обозначения: Φ — класс всех групп G, в которых элемент a действует на ядре F регулярно, Ψ — класс всех групп G, в которых каждый элемент из $G \setminus F$ имеет порядок p, Θ — класс всех групп G, в которых любая пара элементов из $G \setminus F$ порождает конечную подгруппу.

Теорема 26. *(А.И. Созутов, А.К. Шлепкин [68], теорема 3.1.) Пусть $G \in \Psi \cap \Omega$, P и Q — подгруппы из F, порожденные соответственно всеми p-элементами и p'-элементами. Тогда $P \cap Ql < Z(F)$, $Q = O_{p'}(F)$ и $[P, Q] = 1$.*

Теорема 27. *(А.И. Созутов, А.К. Шлепкин [68], лемма 5.1.) Пусть G — бесконечная группа и $G \in \Psi \cap \Omega$. Тогда для любого $b \in F$ группа $C_F(b)$ бесконечна.*

Теорема 28. *(А.И. Созутов, А.К. Шлепкин [68], лемма 5.4.) Пусть* $G \in \Psi \cap \Omega$ *и* G *— бесконечная группа. Тогда каждая конечная a-допустимая подгруппа из* F *вложима в бесконечную локально конечную a-допустимую подгруппу из* F.

Теорема 29. *(А.И. Созутов [64], теорема) Пусть* G *– группа,* H *– ее собственная подгруппа и* a *– элемент из* H *такой, что* $a^2 \neq 1$ *, причем* $\langle a, g^{-1}ag \rangle$ *– группа Фробениуса с неинвариантным множителем* $\langle a \rangle$ *для любого* $g \in G \setminus H$.

Тогда в G *найдется нормальная подгруппа* H, *такая, что*

1) $G = F\lambda N_G(\langle a \rangle)$;

2) отображение $\alpha_a : F$ *в* F, *задаваемое формулой* $\alpha_a(f) = a^{-1}f^{-1}af$, *и его ограничение на* $H \cap F$ *взаимнооднозначны.*

Теорема 30. *(В.П. Шунков). Если существует нечерниковская группа* M *с условием* min, *то существует группа* G *такого же типа и удовлетворяющая следующим условиям:*

(i) G *— квазичерниковская группа;*

(ii) любая собственная бесконечная подгруппа из G *содержится в некоторой максимальной подгруппе группы* G;

(iii) G *— простая группа [108].*

Теорема 31. *Пусть* G *— группа,* B *— ее подгруппа конечного индекса. Если* A *— полная абелева подгруппа из* G, *то* $A \subseteq B$.

Теорема 32. *Если* H *— максимальная подгруппа простой квазичерниковской группы* G, *то* $\widetilde{H}$ *— максимальная полная абелева подгруппа группы* G.

Теорема 33. *Пусть* G *— бесконечная* $p-$*группа с конечным центром и* $G = P\lambda(a)$, *где* P *— полная абелева группа,* a *— элемент простого порядка* p. *Тогда* G *— черниковская группа,* $Z(G)$ *— элементарная абелева группа, и все элементы вида* ha $(h \in P)$ *сопряжены с* a *в* G *[44, 119].*

Теорема 34. *Пусть* $G = P\lambda R$ *— бесконечная p-группа,* P *— полная абелева группа и* R *— конечная элементарная абелева группа. Если* $C_P(r)$ *конечен* $(1 \neq r \in R)$, *то* G *— черниковская группа и* $|R| = p$.

Доказательство. Черниковость G следует из теоремы 33. Обозначим $G_r = P\lambda(r)$ $(1 \neq r \in R)$. Как указано в 33, G_r обладает абелевым расщеплением $G_r = P \cup_{i=1,\dots,p;x\in X} (r^i)^x)$, где X — множество представителей в разложении P на смежные классы по $Z(G_r)$ точно по одному из каждого класса. Тогда и G обладает абелевым расщеплением. Следовательно, $|R| = p$ [5, 6].

Теорема 35. *Пусть $G = P\lambda R$ — бесконечная черниковская группа, P — полная p-группа, R — конечная элементарная абелева q-группа и $q \neq p$. Если $C_P(R) \neq 1$, то $C_P(R)$ бесконечен [10].*

Из теоремы Силова [18] следует:

Теорема 36. *Примарные силовские подгруппы черниковской группы сопряжены.*

Теорема 37 *(W. Feit, J.G. Thompson). Конечная группа нечетного порядка разрешима [153].*

Теорема 38. *Пусть G — конечная группа вида $B\lambda A$ и A — группа регулярных автоморфизмов B. Тогда (G, A) — пара Фробениуса [7, 72].*

Теорема 39. *(W. Burnside). В группе регулярных автоморфизмов подгруппа порядка pq, где p и q не обязательно различны, циклическая см., например, [7].*

Теорема 40. *(В.П. Шунков). Пусть G — группа, H — собственная подгруппа, a — элемент простого порядка $p \neq 2$ из H, удовлетворяющие следующему условию:*

а) $L_g = \langle a, g^{-1}ag \rangle$ $(\forall g \in G \setminus H)$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем (a).

Тогда

1) $H = T\lambda N_G((a))$ и $K = T\lambda(a)$ — либо группа Фробениуса с неинвариантным множителем (a), либо $K = (a)$;

2) если $\mathfrak{M}$ — множество всех p-вещественных элементов из $G \setminus H$ относительно a, то $T\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$;

3) $F_a = T \cup \mathfrak{M}$ — нормальная подгруппа в G и $G = F_a\lambda N_G((a))$;

4) если L — множество всех таких элементов из T, каждый из которых p-вещественен относительно некоторого элемента из $\mathfrak{L} = \cup_{x\in G}(a^x) \setminus \{1\}$, то $E = T \setminus L$ — инвариантное множество в G [123].

Теорема 41. *(С.Н. Черников). Расширение черниковской группы с помощью черниковской снова черниковская группа [18].*

Теорема 42 *(Теорема Шмидта). Расширение локально конечной группы с помощью локально конечной группы является локально конечным [24].*

Теорема 43. *Абелева p-группа тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, когда она обладает конечной максимальной подгруппой периода p^m $(m \geq 1)$ и является конечным расширением полной абелевой группы [24].*

Теорема 44. *Пусть G — q-сопряженно бипримитивно конечная группа, R — нормальная в G подгруппа, удовлетворяющая одному из условий: R — черниковская группа; замыкание каждого элемента из R в G конечно. Тогда G/R — q-сопряженно бипримитивно конечная группа.*

Доказательство. Когда R — черниковская группа, это доказано в §1.2. Вторая возможность для R также осуществима; в этом нетрудно убедиться, используя определение q-сопряженно бипримитивной конечности группы.

Теорема 45. *Пусть G — сопряженно бипримитивно конечная группа без инволюций с условием примарной минимальности. Тогда G обладает полной частью R и фактор-группа G/R сопряженно бипримитивно конечна с условием примарной минимальности и с конечными силовскими p-подгруппами для любого $p \in \pi(G)$.*

Доказательство. По теореме 4.3.1, для каждого $p \in \pi(G)$ силовские p-подгруппы — черниковские. Ввиду следствия основного результата из [99], G обладает полной частью R. По теореме 44, G/R сопряженно бипримитивно конечна и, очевидно, G/R удовлетворяет условию примарной минимальности и силовские p-подгруппы из G/R для любого $p \in \pi(G/R)$ конечны. Теорема доказана.

Теорема 46. *Локально конечная группа G без инволюций с конечными силовскими p-подгруппами по всем p, удовлетворяющая условию примарной минимальности, локально нормальна.*

Доказательство. По теореме 37 G локально разрешима, а из предложения 7 из [48] и конечности силовских p-подгрупп для любого $p \in \pi(G)$ вытекает, что G — локально нормальная группа. Теорема доказана.

Теорема 47 *(В.П. Шунков). Пусть G — бесконечная периодическая группа нечетного порядка, c — элемент из G простого порядка p, такие, что для всех $q \in G$ подгруппы $L_q = (c, q^{-1}cq)$ конечны. Тогда либо $C_G(c)$ бесконечен, либо c содержится в бесконечной локально конечной подгруппе [65].*

Теорема 48 *(В.П. Шунков). Если в локально конечной группе централизатор некоторого элемента простого порядка p черниковский, то силовские p-подгруппы в группе тоже черниковские [110, 115].*

Теорема 49 *(В.П. Шунков). 2-группа, обладающая только одной инволюцией, является либо локально циклической группой (циклической или квазициклической), либо обобщенной группой кватернионов (конечной или бесконечной) [78, 115].*

Теорема 50 *(М.И. Каргаполов). Бесконечная локально конечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой [17].*

Теорема 51 *(С.Н. Черников). Если в периодической локально разрешимой группе G по некоторому $p \in \pi(G)$ силовские p-подгруппы черниковские, то $G/O_{p'}(G)$ — черниковская группа.*

Теорема 52 *(Ю.М. Горчаков). Если в локально конечной группе G по некоторому $p \in \pi(G)$ силовские p-подгруппы абелевы и существует элемент q простого порядка p, такой, что $q \in Z(G)$, то G обладает нормальным делителем N, причем $q \in N$ и G/N — абелева p-группа [10].*

Теорема 53 *(W. Burnside). Локально конечная группа, обладающая регулярным автоморфизмом порядка 2, абелева см., например,[7].*

Теорема 54 *(N. Blackburn). В нечерниковской локально конечной группе любой элемент порядка p имеет бесконечный централизатор [137].*

Теорема 55. *Пусть G — периодическая группа нечетного порядка, обладающая автоморфизмом a порядка 2. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) в каждом смежном классе $bC_G(a)$ существует один и только один элемент, строго вещественный относительно a;

2) $G = BC_G(a) = C_G(a)$, $B \cap C_G(a) = 1$, где B — подмножество элементов из G, строго вещественных относительно a;

3) подгруппа, порожденная всеми элементами B, нормальна в G.

Теорема 56. *Пусть G — бесконечная черниковская p-группа вида $P\lambda(a)$, где P — полная абелева группа, a — элемент простого порядка. Если $Z(G)$ конечен, то справедливы следующие утверждения:*

1) для любого элемента $g \in P$ имеет место $gg^a \dots g^{a^{p-1}} = 1$;

2) $Z(G)$ — элементарная группа.

Доказательство. Очевидно, $S = gg^a \dots g^{a^{p-1}} \in Z(G)$. Пусть $|Z(G)| = n$, тогда $s^n = g^n(g^n)^a \dots (g^n)^{a^{p-1}} = 1$.

Так как P — полная подгруппа, то для любого $c \in P$ уравнение $c = x^n$ разрешимо. Пусть $b \in P$ и $c = b^n \in P$. Тогда $b^n(b^n)^a \dots (b^n)^{a^{p-1}} = 1$ следовательно, $cc^a \dots c^{a^{p-1}} = 1$, но c — произвольный элемент P, и первое утверждение доказано.

Далее, пусть $t \in Z(G)$, тогда по первому утверждению $t^p = t \cdot t^a \dots t^{a^{p-1}} = 1$. Теорема доказана.

Теорема 57. *В бесконечной черниковской p-группе любая элементарная абелева подгруппа порядка p^2 обладает нееденичным элементом с бесконечным централизатором.*

Доказательство. Пусть P — полная абелева часть G. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $G = P\lambda A$, где A — элементарная абелева подгруппа порядка p^2.

Предположим, что теорема неверна. Тогда для G справедлива теорема 56. Подгруппа A содержит $p+1$ различных циклических p-подгрупп. Обозначим их $B_1, B_2, \dots B_p, B_{p+1}$.

Пусть $c \in P$ и $c^{p^2} \neq 1$. Рассмотрим $s = c \cdot c^{x_1} c^{x_2} \dots c^{x_{p^2-1}}$, где $x_i \in A \backslash \{1\}$. Очевидно, $s \in Z(G)$, и следовательно, по теореме 56 верно $s^p = 1$ и $c^{b_i} c^{b^2{}_i} \dots c^{b_i^{p-1}}$, где $b_i \in B_i$, $i = 1, 2, \dots, p+1$. Таким образом,

$s = c(c^{b_1} \dots c^{b_1^{p-1}})(c^{b_2} \dots c^{b_2^{p-1}}) \dots (c^{b_{p+1}} \dots c^{b_{p+1}^{p-1}}) = c^{-p}$, но $s^p = c^{-p^2} = 1$, следовательно, $|c| \leq p^2$. Противоречие с выбором c. Теорема доказана.

Теорема 58. *Пусть G — периодическая группа, H — сильно вложенная в G подгруппа. Тогда верны следующие утверждения:*

1) между множеством инволюций из H и некоторым множеством инволюций из любого смежного класса Hg, $g \in G$, можно установить взаимно-однозначное соответствие;

2) любой элемент $g \in G$ обладает представлением $g = hk$, где $h \in H$, k — некоторая инволюция из G.

3) для любой инволюции a из разности $G \backslash H$ в подгруппе H существует множество строго вещественных относительно a элементов той же мощности, что и мощность множества инволюций из H;

4) все инволюции из H сопряжены в H.

Доказательство см. в [111].

Теорема 59. *Пусть G — периодическая группа, H — сильно вложенная в G подгруппа, a — инволюция из $G \backslash H$. Тогда верны следующие утверждения:*

1) в каждом смежном классе $bC_H(t)$, где $b \in H$, t — некоторая инволюция из H, существует один и только один элемент, строго вещественный относительно a;

2) $H = B_a C_H(t)$, где B_a — подгруппа нечетного порядка из G, порожденная всеми элементами из H, строго вещественными относительно a, все инволюции из H сопряжены между собой элементами из B_a;

3) если b — строго вещественный относительно a неединичный элемент из H, то $C_H(b)$ не содержит инволюций;

4) если $D_a = H \cap H^a$, то D_a не содержит инволюций и $a \in N_G(D_a)$.

Доказательство см. в [116].

Теорема 60. *Пусть G — периодическая группа, H — сильно вложенная в G подгруппа. Тогда*

1) силовские 2-подгруппы из H являются силовскими 2-подгруппами в G;

2) все инволюции в G сопряжены между собой.

Доказательство. Докажем сначала 1. Предположим противное: силовская 2-подгруппа в G (обозначим ее через S) содержит элементы из H и из разности $G \setminus H$. Очевидно, ввиду сильной вложенности H в G, достаточно рассмотреть случай, когда эти элементы — инволюции. Пусть t — инволюция из H, а a — инволюция из $G \setminus H$. Группа

G по условию периодическая, поэтому t и a образуют конечную группу диэдра, причем их произведение $at \in S$. Отсюда at — 2-элемент. В силу свойств групп диэдра некоторая степень at является инволюцией, перестановочной с a и t одновременно, а ввиду сильной вложенности H в G, эта инволюция должна содержаться в H, но тогда и a должна принадлежать H, что противоречит нашему предположению.

Докажем 2. По теореме 58 все инволюции в H сопряжены между собой, следовательно, достаточно доказать, что инволюция s из H сопряжена с произвольной инволюцией k из $G \setminus H$.

Действительно, как показано выше, s и k порождают в G конечную группу диэдра, которая не содержит инволюции, перестановочной одновременно с k и s. Но тогда по свойствам групп диэдра s с k сопряжены некоторой степенью элемента sk. Теорема доказана.

Теорема 61. *Пусть G — периодическая бесконечная слабо сопряженно бипримитивно конечная группа нечетного порядка. Тогда в G существует неединичный элемент с бесконечным централизатором.*

Доказательство. Пусть x — элемент простого порядка из G. По условию все подгруппы $L_g = \langle x, g^{-1}xg \rangle$, $g \in G$, конечны. По теореме 47 получаем, что либо $C_G(x)$ бесконечен, и в этом случае все доказано, либо x принадлежит бесконечной локально конечной подгруппе из G. Отсюда по теореме 50 в G существует бесконечная абелева подгруппа. Теорема доказана.

Теорема 62. *Локально разрешимая группа с условием $min - ab$ является черниковской [87].*

Теорема 63. *Расширение черниковской группы при помощи черниковской группы есть черниковская группа [18].*

Теорема 64. *Пусть P — черниковская p-группа, $p \neq 2$, и $\Omega(\tilde{P}) \subset Z(P)$. Тогда $\tilde{P} \subset Z(P)$ [115, 14].*

Теорема 65. *Если p' — группа автоморфизмов A абелевой p-группы P действует тождественно на $\Omega(P)$, то $A = 1$ [10].*

Из теорем 64, 65 следует:

Теорема 66. *Пусть H — черниковская группа без инволюций и $\Omega(\tilde{H}) \subset Z(H)$. Тогда $\tilde{H} \subset Z(H)$.*

Теорема 67. *Бесконечная сопряженно бипримитивно конечная группа бесконечной абелевой подгруппой [43, 121, 122].*

Теорема 68. *Во всякой бесконечной периодической сопряженно бипримитивно конечной группе G без инволюций, удовлетворяющей условию минимальности для абелевых p-подгрупп по всем $p \in \pi(G)$, каждый элемент простого порядка содержится в бесконечной локально конечной подгруппе [125].*

Теорема 69. *Пусть G — группа, H — ее собственная подгруппа, a — элемент простого порядка $p \neq 2$ из H, удовлетворяющие следующему условию: для всякого $g \in G \setminus H\,гр(a, g^{-1}ag)$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем (a). Тогда G обладает подгруппой F_a, такой, что $G = F_a \lambda N_G(0)$ [123].*

Теорема 70. *Пусть G — бесконечная группа Фробениуса вида $G = F\lambda(a)$ с неинвариантным множителем (a) простого порядка, ядром F и G — сопряженно бипримитивно конечная группа. Тогда полная часть группы F лежит в $Z(F)$ [99].*

Теорема 71. *В черниковской группе силовские p-подгруппы сопряжены.*

Это вытекает из определения черниковской группы и теоремы Силова [18].

Теорема 72. *Пусть G — группа с условием минимальности для абелевых подгрупп. Если в централизаторе любого нецентрального 2-элемента силовские 2-подгруппы сопряжены, то и в G силовские 2-подгруппы сопряжены. Если в периодической группе G некоторая силовская 2-подгруппа конечна, то все силовские 2-подгруппы сопряжены в G [44].*

Теорема 73. *Фактор-группа G/R сопряженно бипримитивно конечной группы G по черниковской подгруппе R сопряженно бипримитивно конечна.*

Эта теорема доказывается точно так же, как и предложение 7 из [44].

Теорема 74. *Периодические подгруппы группы внешних автоморфизмов черниковской группы конечны [90].*

Теорема 75. *Пусть G — группа, P — конечная p-подгруппа из G, V — локально конечная нормальная p'-подгруппа из G. Тогда в $\overline{G} = G/V$ имеют место соотношения:*

$$N_{\overline{G}}(PV/V) = N_G(P) \cdot V/V, \;\; C_{\overline{G}}(PV/V) = C_G(P) \cdot V/V.$$

Теорема вытекает из теоремы Силова.

Теорема 76. *Пусть G — черниковская группа. Тогда в ней подгруппы порядка m распадаются на конечное число классов сопряженных подгрупп [81].*

Теорема 77. *Пусть G — периодическая группа, i — инволюция из G. Если $\mid C_G(i) \mid < \infty$, то G почти разрешимая группа [120].*

Теорема 78. *Пусть G — периодическая группа, H — ее сильно вложенная подгруппа, i — инволюция из H, тогда*

$$H = C_G(i) \cdot D,$$

где D — подгруппа без инволюций (лемма 6 из [116]).

Теорема 79. *Если $G = A \cdot B, H > A$, то $H = A \cdot (B \cap H)$ (см. [93]).*

Теорема 80. *Всякая черниковская p-группа является ZA-группой, в частности, обладает нетривиальным центром [24].*

Теорема 81. *Если p' — группа автоморфизмов A абелевой p-группы P действует тождественно на нижнем слое $\Omega(P)$ группы P, то $A = 1$ (см. [10]).*

Теорема 82 *(W. Burnside). Если силовская подгруппа P конечной группы G содержится в центре своего нормализатора, то $G = H\lambda P$ (см. [78]).*

Теорема 83. *Пусть S — черниковская 2-подгруппа, $\tilde{S}$ — ее полная часть. Если все элементы порядка 4 из $\tilde{S}$ содержатся в $Z(S)$, то $\tilde{S} < Z(S)$ [93].*

Теорема 84. *Пусть в группе G нормализатор любой бесконечной черниковской подгруппы является черниковской группой. Если H — максимальная черниковская подгруппа, T — черниковская подгруппа и пересечение $H \cap T$ бесконечно, то $T < H$ (см. [43]).*

Теорема 85. *Пусть S — бесконечная черниковская 2-подгруппа, a — инволюция из S и $\mid C_S(a) \mid < \infty$. Тогда a индуцирует такой автоморфизм на $\tilde{S}$, что каждый элемент из $\tilde{S}$ отображается в обратный [120].*

Теорема 86. *Пусть S — бесконечная черниковская 2-подгруппа и $S > T = (i) \times (j)$, $|i| = |j| = 2$. Тогда найдется такая инволюция $x \in T$, что $|C_S(x)| = \infty$.*

Это теорема вытекает очевидным образом из предыдущей.

Теорема 87. *Если $S = \tilde{S}\lambda(i)$ — бесконечная группа диэдра, т. е. $\tilde{S}$ — квазициклическая 2-подгруппа, $|i| = 2$, $t^i = t^{-1}$ для всех $t \in \tilde{S}$, то все инволюции из $S \setminus \tilde{S}$ сопряжены между собой.*

Для доказательства достаточно заметить, что все элементы вида $it (t \in \tilde{S})$ сопряжены с i. Действительно, в силу полноты $\tilde{S}$ найдется такой элемент $g \in \tilde{S}$, что $g^2 = t$. Тогда $g^{-1}ig = iig^{-1}ig = ig^2 = it$.

Теорема 88. *Пусть G — бесконечная полная абелева p-группа с условием минимальности. Введем параметр $m_p = m_p(G) = max|S|$, (S — силовская p-подгруппа из $Aut(G)$). Тогда m_p — конечное число [35] и $m_p = p^\alpha$. Число m_p называется параметром p-кручения [126].*

Теорема 89. *Пусть G — бесконечная черниковская p-группа, B — ее полная часть. Если $(B \cap Z(C))^{m_p(B)}$ обладает элементами порядка p^2, то $Z(C)$ бесконечен [126].*

Теорема 90. *Пусть S — бесконечная черниковская 2-группа, A — элементарная абелева 2-подгруппа из S порядка 8. Тогда A содержит подгруппу 4-го порядка B с бесконечным централизатором $C_S(B)$.*

Доказательство. По теореме 86 найдется такая инволюция $a \in A$, что централизатор $S_1 = C_S(B)$ бесконечен. Пусть $A = (a) \times D$, где D — элементарная абелева 2-подгруппа порядка 4. Снова применяя теорему

86, заключаем, что в D найдется инволюция b с бесконечным централизатором $C_{S_1}(b)$. Если $B = (a) \times (b)$, то $C_S(B) = C_{S_1}(b)$. Таким образом, теорема 90 доказана.

В [100] доказано, что если существует сопряженно бипримитивно конечная группа G с условием примарной минимальности и не обладающая периодической частью, то ее можно выбрать со следующими свойствами:

Теорема 91. *Любая собственная подгруппа группы G обладает периодической частью, которая является черниковской группой.*

Теорема 92. *Группа G не содержит неединичных нормальных периодических подгрупп.*

Теорема 93. *Группа G содержит конечные неразрешимые подгруппы.*

Теорема 94. *(В.А. Середа, А.И. Созутов). Для произвольных натуральных чисел d, n с условием $2 \leq d \leq n$, подгруппы G группы $GL_n(p) = GL(F_1)$, конечного множества M натуральных чисел, содержащего вместе с числом все его делители, в алгебре $F = U(x_1, ..., x_n)$, $U = GF(p)$, существует такой допустимый относительно G однородный идеал $J \subseteq F^{(1)}$, что выполняются следующие свойства:*

1) фактор-алгебра $A = F^{(1)}/J$ является бесконечномерной нильалгеброй, в которой все $(d-1)$-порождённые подалгебры конечны;

2) группа G есть группа операторов алгебры $A = F^{(1)}/J$;

3) если $g_1, ..., g_d$ — многочлены из $F^{(1)}$, однородные компоненты $f_1, ..., f_d$ степени 1 которых линейно независимы, то подалгебра B из $A = F/J$, порождённая образами многочленов $g_1, ..., g_d$, бесконечномерна [53].

Теорема 95. (лемма Дицмана). *Конечное инвариантное множество элементов конечного порядка в любой группе порождает конечную нормальную подгруппу* [11].

Теорема 96. (теорема Блекберна). *Локально кончная p-группа, обладающая максимальной конечной элементарной абелевой подгруппой, черниковская.* [137]

Из условия насыщенности и результатов работ Беляева, Боровика, Томаса, Хартли и Шюта [3, 4, 151, 148] вытекает следующее утверждение.

Теорема 97. *Пусть локально конечная группа G насыщена группами из множества конечных простых групп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности. Тогда G — простая группа Шевалле лиева типа конечного ранга над локально конечным полем.*

Теорема 98. *В бесконечной 2-группе T любая конечная подгруппа отлична от своего нормализатора В частности, T содержит бесконечную локально конечную подгруппу* ([27], предложение 4).

Теорема 99. *Бесконечная 2-группа, насыщенная сплетенными группами, изоморфна сплетению бесконечной локально циклической 2-группы и группы порядка 2* [94].

Теорема 100. *Бесконечная 2-группа, насыщенная группами диэдра, изоморфна локально диэдрльно группе* [94].

Теорема 101. *Пусть $p-$группа Шункова обладает конечной максимальной элементарной абелевой подгруппой. Тогда G является черниковской группой* [115, 25].

Теорема 102. *Группа Шункова с бесконечным числом элементов конечного порядка обладает бесконечной локально конечной подгруппой* [101].

Теорема 103. *Пусть G — группа Шункова, H — конечная нормальная подгруппа группы G. Тогда фактор-группа $\overline{G} = G/H$ — группа Шункова.*

Доказательство. Пусть $\overline{K}$ — конечная подгруппа в $\overline{G}$, $\overline{a}$ — элемент простого порядка из $N_{\overline{G}}(\overline{K})$, $\overline{g}$ — произвольный элемент из $\overline{G}$. Тогда $\overline{a} = aH$, $\overline{g} = gH, \overline{K} = KH$ для некоторых элементов $a, g \in G$ и конечной подгруппы $K \subset G$. Рассмотрим $N_G(KH)$. Очевидно, $a, g \in N_G(KH)$, а $a_1 = a(KH), b_1 = a^g(KH)$ элементы фактор-группы $N_G(KH)/KH$ имеют простой порядок и сопряжены в ней. Так как G — группа Шункова, то $\langle a_1, b_1\rangle$ — конечная группа, что и требовалось доказать.

Теорема 104. *Пусть G — группа Шункова,*

$$H_1 < H_2 < \ldots < H_a < \ldots$$

— цепочка ее нормальных подгрупп, такая, что для любой подгруппы из этой цепочки фактор-группа G/H_a является группой Шункова, и $H = \bigcup H_a$. Тогда G/H — группа Шункова ([105], следствие 2.4.4).

Теорема 105. *Если в группе Шункова G некоторая силовская 2-подгруппа конечна, то все силовские 2-подгруппы из G конечны и сопряжены.*

Доказательство. Предположим обратное, пусть R — конечная силовская 2-подгруппа группы G. Положим $\mathfrak{N} = \{R^g | g \in G\}$ и $\mathfrak{B}$ — множество всех силовских 2-подгрупп группы G, не сопряженных с R. Выберем такие $X \in \mathfrak{N}$ и $Y \in \mathfrak{B}$, что число $m = |X \cap Y|$ принимает максимально возможное значение. Используя нормализаторное условие в конечных 2-группах, выбираем элементы $x \in N_X(X \cap Y)$ и $y \in N_Y(X \cap Y)$ так, что $x^2, y^2 \in X \cap Y$. В конечной группе $\langle x, y, X \cap Y \rangle$ все силовские 2-подгруппы сопряжены, и пусть S одна из них. Так как $S \subseteq Z$ – некоторая силовская 2 – подгруппа из G, то $Z \in \mathfrak{N}$ или $Z \in \mathfrak{B}$. Но в первом случае для некоторого $g \in G$, $\langle x, X \cap Y \rangle \subseteq Z^g \cap Y$ и $|Z^g \cap Y| > m$, а во втором случае $\langle y, X \cap Y \rangle \subseteq Z^g \cap X$ и снова $|Z^g \cap Y| > m$. Противоречие свыбором m.

Теорема 106. *Пусть T — бесконечная силовская 2-подгруппа группы Шункова G. $\mathfrak{M}_T$ — множество всех силовских 2-подгрупп группы G, сопряженных с T. $\mathfrak{N}_T$ — множество всех силовских 2-подгрупп группы G, не сопряженных с T. Тогда существуют такие $X \in \mathfrak{M}_T$ и $Y \in \mathfrak{N}_T$, что $|X \cap Y| \geq t$, где t — наперед заданное натуральное число.*

Доказательство. Данная теорема доказывается аналогично лемме 6 из [29].

Теорема 107. *Пусть G — периодическая группа Шункова, насыщенная сплетенными группами. Тогда $G = (A \times B) \leftthreetimes \langle v \rangle$, где $A^v = B$, A — локально циклическая группа и $v^2 = e$* [94].

Теорема 108. *Пусть группа Шункова G насыщенна группами из множества $\{L_2(p^n)\}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, и $T(G) \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q* [77].

Теорема 109. *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества $\{\ U_3(p^n)\}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, и $T(G) \simeq U_3(Q)$, где Q — локально конечное поле* [97].

Теорема 110. *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества $\{Re(3^{2n+1})\}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, и*

$T(G) \simeq Re(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 3 [104].

Теорема 111. *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества $\{L_2(p^k),\ U_3(2^n)\}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, и $T(G) \simeq \{L_2(Q),\ U_3(P)\}$, где $P,\ Q$ — локально конечные поля* [95].

Теорема 112. *Пусть группа Шункова G насыщена конечными простыми неабелевыми группами, и в любой её конечной 2-подгруппе K все инволюции из K лежат в центре K. Тогда G обладает периодической частью, которая изоморфна одной из групп следующего множества*

$$\{J_1, L_2(Q), Re(P), U_3(R), Sz(F) | Q, P, R, F\ -\ \textit{локально конечные поля}\}$$

[94].

Теорема 113. *Пусть $U = U_3(q)$, где $q = p^n$, и p — нечетное простое число. Тогда выполняются следующие свойства:*

1.
$$|U| = \left(\frac{1}{(3, q+1)}\right) q^3(q^3+1)(q^2-1).$$

2. *U содержит подгруппу $D = D_1 \times D_2$, где $D_1 = \langle d_1 \rangle$, $D_2 = \langle d_2 \rangle$,*

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix},\ d_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

β – элемент порядка $q+1$ из $GF(q^2)$, $|D_1| = q+1$ и $|D_2| = \left(\frac{q+1}{(3,q+1)}\right)$.

3. *U содержит подгруппу $V = \langle b,\ w | b^3 = w^2 = e,\ b^w = b^{-1} \rangle$, где*

$$b = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. *U содержит подгруппы $A = \langle i \rangle \times \langle j \rangle$ и $B = \langle w \rangle \times \langle j \rangle$, где w — инволюция, определенная в пункте 2,*

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— инволюция из $\langle d_1 \rangle$,

$$j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— инволюция из $\langle d_2\rangle$, A *— четверная группа,* $N_U(A) = C_U(A) \leftthreetimes V$, *квадраты элементов из* $N_G(A)$, *порядок которых не равен трем, содержатся в* $C_U(A)$ *и* $C_U(A) = D$, $N_U(D) = N_U(A) = D \leftthreetimes V$.

5. *Существует* $v \in U$, *для которого* $j^v = j$, $i^v = w$, *где* i, j, w *определены в пунктах 2, 3.*

6. *Если* $q + 1$ *не делится на* 4, *то силовская* 2*-подгруппа группы* U *изоморфна полудиэдральной группе* $SD(m) = \{a,\ b \mid a^{2^{m+1}} = b^2 = e,\ a^b = a^{-1+2^m}\}$, *где* 2^m *делит* $q - 1$, 2^{m+1} *не делит* $q - 1$.

7. *Если* $q + 1$ *делится на* 4, *то силовская* 2*-подгруппа группы* U *изоморфна сплетённой группе* $W_r(m) = \{a_1,\ a_2,\ b \mid a_1^{2^m} = a_2^{2^m} = b^2 = e,\ a_1a_2 = a_2a_1,\ a_1^b = a_2,\ a_2^b = a_1\}$, *где* 2^m *делит* $q + 1$, 2^{m+1} *не делит* $q + 1$.

8. *Все четверные подгруппы из* U *сопряжены,* U *содержит элемент порядка* 8, *и любая* 2*-подгруппа из* U *порядка не менее* 32 *содержит элемент порядка* 8.

9. *Если* $q \neq 5$, *то* $U = \langle N_U(A), N_U(B)\rangle$. *Если* $q = 5$, *то* $\langle N_U(A), N_U(B)\rangle \simeq A_7$. *Здесь* A, B *— группы, определенные в пункте* 3.

10.

$$C_U(j) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} \\ 0 & |A|^{-1} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \mid A = ||a_{mn}|| \in GU_2(q) \right\} \simeq GU_2(q),$$

$$GU_2(q) = L \cdot R, |R| = \left(\frac{q+1}{(3, q+1)} \right), L \simeq SL_2(q).$$

Фактор-группа

$$GU_2(q)/R \simeq L_2(q).$$

Доказательство. Свойства 1–4 хорошо известны, их доказательство, например, можно найти в [27]. Свойства 6, 7, 8 доказаны в [132]. Свойство 5 вытекает из свойств 3, 8. Докажем свойство 9. Если $q \neq 5$, то $N_U(A), N_U(B)$ – различные максимальные подгруппы в U. Следовательно, $U = \langle N_U(A), N_U(B)\rangle$. Если $q = 5$, то $U \simeq U_3(5)$, и непосредственные вычисления показывают, что $A_7 \simeq \langle N_U(A), N_U(B)\rangle$ – максимальная подгруппа в U (см. [144] *с.* 379). Свойство 10 доказано в [145] (параграф 13.7).

Теорема 114. *Пусть* $G = U_3(2^n)$, P *— силовская 2-подгруппа группы* G *и* $B = N_G(P)$. *Тогда:*

1. *$G = B\langle v\rangle B$, где v — инволюция и $B \cap B^v = H$ — подгруппа Картана.*

2. *P — группа периода 4, ступени нильпотентности 2 и $P' = Z(P) = \Phi(P) = \Omega_1(P)$.*

3. *Любые две силовские 2-подгруппы группы G имеют тривиальное пересечение.*

4. *Все инволюции из G сопряжены. Если a — инволюция из P, то $C_G(a) = P \leftthreetimes H_1$, где H_1 — циклическая группа, причем $H_1 \leq B$ и $Z(P) \leq C_G(H_1)$.*

5. *$B = P \leftthreetimes H$, где H — циклическая группа порядка $\frac{2^{2n}-1}{d}$, где $d = 3$, если 3 делит число $2^n + 1$, и $d = 1$ в противном случае.*

6. *$H = H_0 \times H_1$, где H_1 — подгруппа из утверждения 4, $|H_0| = 2^n - 1$ и $|H_1| = \frac{2^n+1}{d}$, причем v инвертирует H_0 и централизует H_1.*

7. *$P \leftthreetimes H_0$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем H_0, действующим транзитивно на множестве инволюций группы P.*

8. *$C_G(H_1) = H_1 \times L$, где $L \simeq L_2(2^n)$ и $S = L \cap P$ — силовская 2-подгруппа в L.*

9. *$B/Z(P)$ — группа Фробениуса с ядром $P/Z(P)$ и дополнением $HZ(P)/Z(P)$, при этом фактор–группа $HZ(P)/Z(P)$ либо транзитивна на множестве неединичных элементов фактор-группы $P/Z(P)$, либо имеет ровно 3 орбиты.*

10. *G порождается любой парой своих силовских 2-подгрупп.*

11. *Для любого простого $2'$-элемента $a \in G$ подгруппа $N_G(\langle a\rangle)$ имеет четный порядок.*

12. *$|U_3(2^n)| = \frac{1}{(3,2^n+1)}2^{3n}(2^{2n}-1)(2^{3n}+1)$.*

[145].

Теорема 115. *Пусть $G = L_2(q)$, где q — нечётное число, большее 3. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) Силовская 2-подгруппа группы G является группой диэдра.

(2) Если a — инволюция из G, то $C_G(a)$ — группа диэдра.

(3) $Z(C_G(a)) = \langle a\rangle$.

(4) Все инволюции из G сопряжены.

(5) Четверные подгруппы из G самоцентрализуемы.

(6) Если a, b — две неперестановочные инволюции из G, то $G = \langle C_G(a), C_G(b)\rangle$.

(7) Если a, b — две различные инволюции из G и $q \notin \{5, 7, 9, 11\}$, то $G = \langle C_G(a), C_G(b)\rangle$.

Доказательство. Утверждения (1)–(5) хорошо известны, их доказательства можно найти, например, в [145]. Утверждения (6), (7) вытекают из утверждения (2) и списка максимальных подгрупп группы $L_2(q)$ (см. [144, стр. 377]).

Теорема 116. *Пусть $G = L_2(q)$, где $q = 2^n > 2$, P — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда*

1. *P — элементарная абелева группа, и любые две силовские 2-подгруппы группы G пересекаются тривиальным образом. В частности, $C_G(a) = P$ для любой инволюции $a \in P$.*

2. *$B = N_G(P) = P \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса с ядром P и циклическим неинвариантным множителем H порядка $q-1$, действующим транзитивно на множестве $P^{\#}$.*

3. *$N = N_G(H) = H \leftthreetimes \langle t \rangle$ — группа диэдра.*

4. *Если K — подгруппа в G и K обладает нормальной подгруппой нечетного порядка, то $N_G(K)$ — группа диэдра.*

5. *G порождается любыми двумя силовскими 2-подгруппами.*

6. *Все инволюции из G сопряжены* [145].

Теорема 117. *Пусть $G = Sz(q)$, P – силовская 2-подгруппа группы G, $B = P\lambda H$ — подгруппа Бореля, H — подгруппа Картана из B. Тогда*

1. *P — группа порядка q^2, периода 4, и $P' = Z(P) = \Omega_1(P)$.*

2. *Все инволюции группы G сопряжены, и $C_G(a) = P$ для любой инволюции $a \in P$.*

3. *Любые две силовские 2-подгруппы в G имеют тривиальное пересечение.*

4. *H действует транзитивно на множестве инволюций из P.*

5. *G порождается любой парой своих силовских 2-подгрупп* [150].

Теорема 118. *Пусть $G = Re(q)$, где $q = 3^{2n+1} > 3$, a – инволюция из G, T – силовская 2-подгруппа в G. Тогда:*

1. *T – элементарная абелева группа порядка 8, $C_G(T) = T$ и $H = N_G(T) = T \leftthreetimes (\langle b \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle)$, где $\langle b \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle$ – группа Фробениуса порядка 21;*

2. *$C_G(a) = \langle a \rangle \times L$, где $L \simeq L_2(q)$;*

3. *$G = \langle H, C_G(a) \rangle = \langle S, C_G(a) \rangle$, где S – произвольная силовская 2-подгруппа группы G, не содержащая инволюции a;*

4. *все инволюции из G сопряжены в G* [142].

Теорема 119.

Конечными простыми группами 2-ранга 2 (с точностью до изоморфизмов) являются следующие группы:

$$\{L_2(q),\ A_7,\ L_3(p),\ U_3(r),\ M_{11},\ U_3(4)\},$$

где q, p, r *— нечетные* [133].

Теорема 120.

Конечными простыми группами лиева типа ранга 1 с точностью до изоморфизмов являются следующие группы:

$$\{L_2(q),\ U_3(q),\ Sz(2^{2n+1}),\ Re(3^{2n+1}\},$$

где $q > 3$ [145].

Теорема 121.

Пусть G *— конечная простая неабелева группа, и все инволюции из ее силовской 2-подгруппы* S *лежат в центре* S*. Тогда*

$$G \simeq \{J_1;\ L_2(q),\ q > 3,\ q = 3,\ 5\ (mod\ 8);\ U_3(2^n);\ Sz(2^{2n+1};\ Re(3^{2n+1})\}.$$

При этом G *не содержит элементов порядка 8, и все инволюции из* G *сопряжены* [30, 142].

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Группой Шункова (*(сопряженно) бипримитивно конечной группой*) называется такая группа G, в которой для любой ее конечной подгруппы K в фактор-группе $N_G(K)/K$ любые два (сопряженных) элемента простого порядка порождают конечную подгруппу.

Группа называется (группой Черникова (*черниковской группой*), если она либо конечна, либо является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп.

Группа называется *слабо (сопряженно) бипримитивно конечной*, если два любых ее элемента простого порядка (сопряженных между собой) порождают конечную подгруппу.

Группа называется *слабо q-(сопряженно) бипримитивно конечной*, если два любых ее элемента простого порядка q (сопряженных между собой) порождают конечную подгруппу.

Группа называется *(сопряженно) r-конечной*, если любые ее r (сопряженных) элементов порождают конечную подгруппу. При $r = 2$ получаем определение сопряженно бинарно конечной группы.

Конечные расширения прямых произведений конечного числа (в частности, и равного нулю) квазициклических групп называются *черниковскими группами* или *группами Черникова.*

Локально конечная группа с черниковскими примарными силовскими подгруппами называется *SF-группой.*

Если порядки всех элементов группы конечны, то она называется *периодической.*

Группа *без кручения* — группа, в которой любой неединичный элемент имеет бесконечный порядок.

Смешанная группа — это группа, содержащая элементы конечного и бесконечного порядков.

Если множество элементов конечного порядка является подгруппой, то эта подгруппа называется *периодической частью* группы.

Группа G обладает *полной частью A*, если A — абелева группа, порожденная всеми полными абелевыми подгруппами из G, и G/A не обладает полными абелевыми подгруппами.

Элемент второго порядка называется *инволюцией*.

Группа, порожденная двумя инволюциями, называется *группой диэдра*.

Говорят, что элемент a является *строго вещественным относительно инволюций* i или i-*вещественным*, если $iai = a^{-1}$.

Пусть G — группа, H — ее собственная подгруппа. Говорят, что G и H составляют *пару Фробениуса*, если для любого элемента $x \in G \setminus H$ $H \cap H^x = 1$.

Элемент a группы G называется *фробениусовым*, если $G \neq N_G(a)$, и для любого элемента a^g, где $g \notin N_G(a)$, подгруппа $L_g = (a, a^g)$ является группой Фробениуса с неинвариантным множителем (a).

Элементарная абелева группа — это такая отличная от единицы абелева группа, все неединичные элементы которой имеют один и тот же простой порядок.

Локально конечной называется группа, в которой любое конечное множество элементов порождает конечную подгруппу.

Группа называется *локально нормальной*, если любое конечное множество ее элементов содержится в конечной нормальной подгруппе.

Элемент g группы G называется *почти регулярным*, если $C_G(g)$ — конечная группа.

Максимальная подгруппа — подгруппа группы G, отличная от G и не содержащаяся ни в какой отличной от G подгруппе.

Группа *почти вся обладает некоторым свойством*, если она содержит нормальную подгруппу конечного индекса, обладающую этим свойством.

Группа удовлетворяет *условию минимальности для подгрупп*, если всякая убывающая цепочка ее подгрупп $H_1 \geq H_2 \geq ...$ обрывается, т. е. $H_n = H_{n+1}$ при любом n, начиная с некоторого номера.

Группа удовлетворяет *условию* $min - inf$, если любая цепочка ее подгрупп $A_0 \supset A_1 \supset ... \supset A_n \supset ...$ с бесконечными индексами $[A_n : A_{n+1}]$ $(n = 0, 1, ...)$ обрывается на конечном номере.

Группа G называется *финитно аппроксимируемой*, если для всяких различных ее элементов существует гомоморфизм группы G на конечную группу, при котором образы этих элементов также различны.

Элемент a группы G назовем *конечным*, если все подгруппы $L_g = (a, a^g)$ группы G конечны.

(a, b) — *условием конечности* в группе называется ситуация, когда элемент a порождает почти с каждым элементом, сопряженным с b, конечную подгруппу.

Группа G называется *s-конечной*, если в ней любые s элементов порождают конечную подгруппу.

Если группа s-конечна группа при $s = 2$, то она называется *бинарно конечной.*

Группы, порядки всех элементов которых являются степенями фиксированного простого числа p, называются *примарными* по простому числу p или *примарными p-группами.*

Говорят, что группа G является *расширением* группы A посредством группы B, если в G существует такая нормальная подгруппа H, что $H \simeq A$, $G/H \simeq B$.

Обобщенная группа кватернионов — это группа, заданная соотношениями:

$$(x, y | x^{2^n} = y^2 = z, z^2 = 1, y^{-1}xy = x^{-1}).$$

Будем обозначать $\pi(G)$ — множество простых делителей порядков элементов группы G.

$O_{p'}(G)$ — максимальная нормальная подгруппа группы G, не содержащая элементов порядка p.

$\pi(G)$ — множество простых делителей порядков элементов группы G.

Условие min-ab — условие минимальности для абелевых подгрупп.

Через $\tilde{G}$ будем обозначать полную часть группы G, т. е. такую нормальную полную абелеву подгруппу, фактор-группа по которой не содержит полных подгрупп. Через $r(\tilde{H})$ будем обозначать ранг $\tilde{H}$. Аналогично определяется p — полная часть группы (p — простое число).

Группа G называется *q-бипрититивно конечной*, если для любой конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два элемента простого порядка q порождают конечную подгруппу.

Под *локально конечным радикалом группы* понимается ее максимальная нормальная локально конечная подгруппа.

Если множество всех элементов конечного порядка в группе является подгруппой, то эту подгруппу называют *периодической частью группы.*

Подгруппа H некоторой группы G называется *π-бесконечно изолированной* в G, если H содержит централизатор всякого своего нетривиального элемента, перестановочного с бесконечным множеством элементов из H и содержащего в своем централизаторе для любого $p \in \pi$

p-элементы из G. В частности, если $\pi = \pi(G)$, то подгруппа H называется бесконечно изолированной в G.

Группа называется *2-полной*, если ее силовские 2-подгруппы полные.

Подгруппа H группы G называется *сильно вложенной* в G, если H — собственная подгруппа группы G, содержащая инволюции, и $H \cap x^{-1}Hx$ не содержит инволюций для $x \in G \setminus H$.

Элемент с конечным централизатором в группе G называется *почти регулярным элементом* группы G.

Элемент второго порядка называется *инволюцией*.

Прямые произведения конечных групп, имеющие для каждого простого числа лишь конечное число множителей с делящимися на p порядками, и подгруппы таких произведений называются *слойно конечными прямыми произведениями конечных групп*.

Говорят, что группа G удовлетворяет *условию минимальности для подгрупп (абелевых подгрупп)*, если в G любая убывающая цепочка подгрупп (абелевых подгрупп) $H_1 > H_2 ...$ обрывается, т. е. $H_n = H_{n+1} = ...$ при некотором n.

Локально конечная группа с черниковскими силовскими p-подгруппами по некоторому простому числу p называется S_pF-группой. Группа G называется *SF-группой*, если она является S_pF-группой для любого $p \in \pi(G)$.

Группа называется *локально нормальной*, если в ней любое конечное множество элементов содержится в конечной подгруппе, нормальной в самой группе.

Группа называется *слойно конечной*, если она локально нормальна и является SF-группой.

Группа называется *почти слойно конечной*, если она является конечным расширением слойно конечной группы.

Группа G и ее некоторая собственная подгруппа H, такая, что $H \cap g^{-1}Hg = 1 \quad (\forall g \in G \setminus H)$, называется *парой Фробениуса* и обозначается (G, H).

Группа G вида $G = F\lambda H$ называется *группой Фробениуса,* если (G, H) — пара Фробениуса и $G \setminus \cup_{x \in G} x^{-1}Hx = F^* = F \setminus \{1\}$. Подгруппа H называется *неинвариантным (дополнительным) множителем*, F – *инвариантным множителем* или *ядром.*

Пусть G — локально конечная группа Фробениуса вида $G = F\lambda L$, где F — ядро, L — дополнение. В голоморфе (G) возьмем подгруппу вида $T = F\lambda H$, где $H = L\lambda(t)$, t — элемент порядка $m \geq 1$, индуцирующий в некоторой силовской p-подгруппе из L автоморфизм порядка m, не делящегося на p. Группу T назовем *квазифробениусовой (по модулю p).*

Элемент конечного порядка группы G называется *точкой*, если, во-первых, для любой нетривиальной (g)-инвариантной конечной подгруппы K из G множество конечных подгрупп из $N_G(K)$, содержащих элемент g, конечно, и, во-вторых, при $g = 1$ множество элементов конечных порядков из G конечно. Если $|g| = 2$, то g называется *инволютивной точкой.*

Сильно вложенной называется собственная подгруппа H группы G, если H содержит элемент порядка 2 (инволюцию) и для любого элемента $g \in G \setminus H$ подгруппа $H \cap H^g$ не содержит инволюций.

Элемент называется *строго вещественным* относительно инволюции, если он при сопряжении этой инволюцией переводится в обратный.

Некоторый элемент g из группы G назовем *p-вещественным* относительно некоторого элемента a простого порядка p из G, если гр(g, a) — группа Фробениуса и g содержится в ее ядре.

Группа G *насыщена группами из множества групп X*, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X [103].

Если в группе G найдутся такие элементы a и b, что для каждого элемента $g \in G$ конечна подгруппа $\langle a, b^g \rangle$, то G удовлетвояет *сильному условию (a, b)-конечности.*

Список литературы

[1] **Адян С.И.** О подгруппах вободных периодических групп нечетного показателя // Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1971. — Т. 62. — С. 64–72.

[2] **Адян С.И.** Проблема Бернсайда и тождества в группах. — М.: Наука, 1975. 336 с.

[3] **Беляев В.В.** Локально конечные группы Шевалле // Исследования по теории групп, УНЦ АН СССР. — Свердловск. — 1984. — С. 39–50.

[4] **Боровик А.В.** Вложения конечных групп Шевалле и периодические линейные группы // Сиб. математ. журн. — 1983. — № 6. С. 26–35.

[5] **Бусаркин В.М., Старостин А.И.** О расщепляемых локально конечных группах // Матем. сб. — 1963. — Т. 62, № 3. — С. 275–294.

[6] **Бусаркин В.М.** Изолированные покрытия и расщепления групп: Автореф. канд. дисс. — Уральский гос. ун-т, 1963.

[7] **Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М.** Конечные расщепляемые группы. — М: Наука, 1968. 111 с.

[8] **Виляцер В.Г.** К теории локально нильпотентных групп // Успехи мат. наук. — 1958. — Т. 13, № 2. — С. 163–168.

[9] **Голод Е.С.** О ниль-алгебрах и финитно аппроксимируемых p-группах // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1964. — Т. 28, № 2. — С. 273–276.

[10] **Горчаков Ю.М.** О локально нормальных группах // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 147, № 3. — С. 537–539.

[11] **Дицман А.П.** О центре p-групп // В сб. Труды семинара по теории групп. Москва: 1938. С. 30–34.

[12] **Дуж А.А., Шлепкин А.А.** О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями групп // Владикавказский математический журнал. — 2012. — Т. 14. Вып. 2. — С. 35–38

[13] **Зайцев Д.И.** Группы, удовлетворяпщие слабому условию минимальности // Укр. мат. журн. — 1968. — Т. 20, № 4. — С. 472–481.

[14] **Зайцев Д.И.** О дополняемости подгрупп в экстремальных группах // Исследования групп по заданным свойствам подгрупп / Институт математики АН УССР, 1974. — С. 72–130.

[15] **Измайлов А.Н., Шунков В.П.** Два признака непростоты групп с бесконечно изолированной подгруппой // Алгебра и логика. — 1982. — Т. 21, № 6. — С. 647–669.

[16] **Измайлов А.Н.** О сильно вложенной бесконечно изолированной подгруппе в периодической группе // Алгебра и логика. — 1983. — Т.22, № 2. — С. 128–137.

[17] **Каргаполов М.И.** О проблеме О.Ю. Шмидта // Сиб. мат. журн. — 1963. — Т. 4, № 1. — С. 232–235.

[18] **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. 4-е изд. — М.: Наука, 1996. 288 с.

[19] **Коуровская** тетрадь (нерешенные задачи теории групп). Изд. 1-е. Новосибирск: изд-во ИМ СО РАН, 1965.

[20] **Коуровская** тетрадь (нерешенные задачи теории групп). Изд. 3-е, Новосибирск: изд-во ИМ СО РАН,, 1969.

[21] **Коуровская** тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. 6-13-е издания. Новосибирск: изд-во ИМ СО РАН, 1978–1999.

[22] **Коуровская тетрадь**, Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 16 Новосибирск: изд-во ИМ СО РАН, 2006.

[23] **Кузнецов А.А., Филиппов К.А.** Группы, насыщенные заданным множеством групп // Сиб. электрон. мат. изв. — 2011. — Т. 8. — С. 230–246.

[24] **Курош А.Г.** Теория групп. 3-е изд. — М.: Наука, 1967. 648 с.

[25] **Ли Б.Дж., Лыткина Д.В.** О силовских 2-подгруппах периодических групп, насыщенных конечными простыми группами // Сиб. матем. журн. — 2016. — Т.57. № 6. — С. 1313–1319.

[26] **Лыткина Д.В.** Строение группы порядки элементов которой не превосходят числа 4 // Матем. сист. – Красноярск : КрасГАУ. — 2005. — № 4. — С. 54–59.

[27] **Лыткина Д.В., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А.** О периодических группах насыщенных конечным множеством конечных простых групп // Сиб. матем. журн. — 2008. — Т. 49, № 2. С. 395–400.

[28] **Лыткина Д.В.** О группах, насыщенных конечными простыми группами // Алгебра и логика.— 2009. — Т. 48. № 2. — С. 523–628.

[29] **Лыткина Д.В.** Периодические группы, насыщенные прямыми проиведениями конечных простых групп II // Сиб. матем. журн. — 2011. — Т. 52. — С. 1096–1112.

[30] **Мазуров В.Д.** Конечные группы // Алгебра. Топология. Геметрия. М.: ВИНИТИ, – 1976. — Т. 14. — С. 5–56.

[31] **Мазуров В.Д.** О дважды транзитивных группах подстановок // Сиб. мат. журн. — 1990. — Т. 31, № 4. — С. 102–104.

[32] **Мазуров В.Д.** О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика. — 2000. — Т. 39, № 1. — С. 74–86.

[33] **Мазуров В.Д., Лыткина Д.В.** Периодические группы, насыщенные группами $L_3(2^m)$ // Алгебра и логика. — 2007. — Т. 46, № 5. — С. 606—626

[34] **Мальцев А.И.** О группах конечного ранга // Там же. — 1948. — Т. 22. — С. 351–352.

[35] **Мерзляков Ю.И.** Матричное представление групп внешних автоморфизмов черниковских групп // Алгебра и логика. — 1969. — Т. 8, № 4. — С. 478–482.

[36] **Мухаммеджан Х.Х.** О группах с возрастающим центральным рядом // Мат. сборник. — 1951. — Т. 28, № 70, 185–196.

[37] **Новиков П.С., Адян С.И.** О бесконечных периодических группах // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1968. — Т. 32, № 1. — С. 212–244; Т. 32, № 2. — С. 251–523; Т. 32, № 3. — С. 708–731.

[38] **Новиков П.С., Адян С.И.** Определяющие соотношения и проблема тождества для свободных периодических групп нечетного порядка // Там же. — 1968. — Т. 32, № 4. — С. 971–979.

[39] **Новиков П.С., Адян С.И.** О коммутативных подгруппах и проблеме сопряженности в свободных периодических группах нечетного порядка // Там же. — 1968. — Т. 32, № 5. — С. 1176–1180.

[40] **Носков М.В.** О локальной конечности одного класса бипримитивно конечных групп // Исследования по теории групп Красноярск. Институт физики им, Л.В. Киренского СО АН СССР. 1975. С. 24–31.

[41] **Ольшанский А.Ю.** Бесконечные группы с циклическими подгруппами // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 245, № 4. — С. 785–787.

[42] **Ольшанский А.Ю.** Геометрия определяющих соотношений в группе. — М.: Наука, 1989. 448 с.

[43] **Остыловский А.Н., Шунков В.П.** О локальной конечности одного класса групп с условием минимальности // Исследования по теории групп. — Красноярск, 1975. — С. 32–48.

[44] **Остыловский А.Н., Шунков В.П.** О q-бипримитивно конечных группах с условием минимальности для q-подгрупп // Алгебра и логика. — 1975. — Т. 14, № 1. — С. 61–78.

[45] **Остыловский А.Н.** Локальная конечность некоторых групп с условием минимальности для абелевых подгрупп // Там же. — 1977. — Т. 16, № 1. — С. 63–73.

[46] **Остыловский Ал.Н.** О периодических группах со счетными подгруппами // Мат. заметки. — 1986. — Т. 40, вып. 6. — С. 722–725.

[47] **Павлюк И.И.** О периодических сопряженно бипримитивно конечных группах // 18-я Всесоюзн. алгебраич. конф. — Кишинев, 1985. — С. 80.

[48] **Павлюк И.И., Шафиро А.А., Шунков В.П.** О локально конечных группах с условием примарной минимальности для подгрупп // Алгебра и логика. — 1974. — Т. 13, № 3. — С. 324–336.

[49] **Панюшкин Д.Н., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А.** О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями циклических и проективных специальных линейных групп // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 2. — С. 177–185.

[50] **Подуфалов Н.Д.** Конечные простые группы без элементов порядка 6, 10 // Алгебра и логика. — 1975. — Т. 14, № 1. — С. 79–85.

[51] **Рожков А.В.** Условия конечности в группах автоморфизмов деревьев // Алгебра и логика. — 1998. — Т. 37, № 5. — С. 568—605.

[52] **Рожков А.В.** Условия конечности в группах автоморфизмов деревьев // Алгебра и логика. — 1998. — Т. 37, № 5. — С. 568–605.

[53] **Середа В.А., Созутов А.И.** Об ассоциативных нильалгебрах и группах Голода // Алгебра и логика. — 2006. — Т. 45, № 2. — С. 231–238.

[54] **Сенашов В.И.** Характеризация групп с условием минимальности для не почти слойно конечных подгрупп // Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, № 7–8. — С. 1002–1008.

[55] **Сенашов В.И.** Достаточные условия почти слойной конечности группы // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, № 4. — С. 472—485.

[56] **Сенашов В.И., Шунков В.П.** Группы с условиями конечности. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2001. 336 с.

[57] **Сенашов В.И.** Строение бесконечной силовской подгруппы в некоторых периодических группах Шункова // Дискретная математика. — 2002. — Т. 14, № 4. — С. 133–152.

[58] **Сенашов В.И., Шунков В.П.** Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискретная математика. — 2003. — Т. 15, № 3. — С. 91–104.

[59] **Сенашов В.И.** О группах Шункова с сильно вложенной подгруппой // Труды ИММ УрО РАН. — 2009. — Т. 15, № 2. — С. 203–210.

[60] **Сенашов В.И.** О группах Шункова с сильно вложенной почти слойно конечной подгруппой // Труды ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 2. — С. 234–239.

[61] **Сенашов В.И.** О силовских подгруппах некоторых групп шункова // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 3. — С. 397–405.

[62] **Сенашов В.И.** Характеризации групп с почти слойно конечной периодической частью // Укр. мат. журн. — 2017. — Т. 69. № 7. С. 964–973.

[63] **Созутов А.И., Шунков В.П.** Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Матем. сб. — 1976. — Т. 100, № 4. — С. 495–508.

[64] **Созутов А.И.** О группах с фробениусовыми парами сопряженных элементов // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 2. — С. 204–212.

[65] **Созутов А.И., Шунков В.П.** О бесконечных группах, насыщенных фробениусовыми подгруппами. Ч. 1, 2 // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 6. — С. 711–735; Алгебра и логика. — 1979. — Т.18, № 2. — С. 206–223.

[66] **Созутов А.И.** О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса // Сиб. мат. журн. — 1994. — Т. 35, № 4. — С. 893–901.

[67] **Созутов А.И.** О примарных финитно аппроксимируемых группах // Вестник Красноярской государственной архитектурно-строительной академии: Сб. научн. тр. под ред. В.Д. Наделяева / КрасГАСА. Вып. 2. Красноярск, 1999. — С. 73–83.

[68] **Созутов А.И., Шлепкин А.К.** О группах с нормальной компонентой расщепления // Сиб. матем. журн. — 1997. — Т. 38, № 4. — С. 897–914.

[69] **Созутов А.И.** О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой // Алгебра и логика. — 2000. — Т.39, № 5. — С. 602–617.

[70] **Созутов А.И., Сучков Н.М.** О бесконечных группах с заданной сильно изолированной 2-подгруппой // Мат. заметки. 2000. — Т.68, вып. 2. — С. 272–285.

[71] **Созутов А.И.** Два признака непростоты группы с сильно вложенной подгруппой и конечной инволюцией // Мат. заметки. 2001. — Т.69, вып. 3. — С. 443–453.

[72] **Старостин А.И.** О группах Фробениуса // Укр. мат. журн. — 1971. — Т. 23, № 5. — С. 629–639.

[73] **Струнков С.П.** Нормализаторы и абелевы подгруппы некоторых классов групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1967. — Т. 31, № 3. — С. 657–670.

[74] **Сучков Н.М.** О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций // Мат. сб. — 2002. — Т.193, № 2. — С. 153–160.

[75] **Сучкова Н.Г., Шунков В.П.** О группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. — 1986. — Т. 25, № 4. — С. 445–469.

[76] **Тимофеенко А. В.** О 2-порожденных p-группах Голода // Алгебра и логика. — 1985. — Т. 24, № 2. — С. 211–225.

[77] **Филиппов К.А.** О периодической части группы Шункова, насыщенной $L_2(p^n)$ // Вестник СибГАУ. — 2012. — № 1. — С. 611–617.

[78] **Холл М.** Теория групп. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

[79] **Череп А.А.** О множестве элементов конечного порядка в бипримитивно конечной группе // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26, № 4. — С. 518–521.

[80] **Череп А.А.** Об одном условии совпадения классов бипримитивно и сопряженно бипримитивной конечности // Деп. в ВИНИТИ 11.03.91, № 61015-В91.

[81] **Черников Н.С.** О бесконечно простых локально конечных группах. — Киев, 1982. — С. 3–20. (Препринт 82.37. — Институт математики АН УССР).

[82] **Черников С.Н.** Бесконечные специальные группы // Матем. сб. — 1939. — Т. 6, № 2. — С. 35–64.

[83] **Черников С.Н.** Бесконечные локально разрешимые группы // Там же. — 1940. — Т. 7, № 1. — С. 35–64.

[84] **Черников С.Н.** К теории бесконечных специальных групп // Там же. — 1940. — Т. 7, № 6. — С. 539–548.

[85] **Черников С.Н.** О бесконечных специальных группах с конечным центром // Там же. — 1945. — Т. 17, № 1. — С. 105–130.

[86] **Черников С.Н.** К теории бесконечных специальных p-групп // Докл. АН СССР. — 1945. — С. 71–74.

[87] **Черников С.Н.** О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп // Матем. сб. — 1951. — Т. 28, № 1. — С. 119–129.

[88] **Черников С.Н.** Условия конечности в общей теории групп // Успехи матем. наук — 1959. — Т. 14, № 5. — С. 45–96.

[89] **Черников С.Н.** О бесконечных локально конечных группах с конечными силовскими подгруппами // Матем. сб. — Т. 52, № 1. — С. 647–652.

[90] **Черников С.Н.** О периодических группах автоморфизмов экстремальных групп // Матем. зам. — 1968. — Т. 28, № 1. — С. 119–129.

[91] **Черников С.Н.** О группах с ограничениями для подгрупп // Группы с ограничениями для подгрупп. — Киев, 1971. — С. 96–105.

[92] **Черников С.Н.** О проблеме Шмидта // Укр. мат. журн. — 1971. — Т. 23, № 5. — С. 598–603.

[93] **Черников С.Н.** Группы с заданными свойствами системы подгрупп. — М.: Наука, 1980. 384 с.

[94] **Шлепкин А.А.** Периодические группы, насыщенные сплетенными группами // Сиб. электрон. матем. изв. – 2013. № 10, С 56–64.

[95] **Шлепкин А.А., Пронина Е.А.** Группы Шункова, насыщенные $L_2(p^n)$, $U_3(2^k)$ // Вестник СибГАУ. — 2015. Т. 57, № 3. — С. 611–617.

[96] **Шлепкин А.А.** О группе Шункова, насыщенной конечными простыми группами лиева типа 1 // Известия Иркутского госуниверситета. – 2016. – Т. 16 С. 102–116.

[97] **Шлепкин А.А.** О Периодических группах и группах Шункова, насыщенных унитарными группами степени 3 // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 3. — С. 299–307.

[98] **Шлепкин А.А.** Об одном достаточном условии существования периодической части в группе Шункова // Изв. иркутск. гос. универ., серия "Математика”. — 2017. — Т.22 — С. 90–105.

[99] **Шлепкин А.К.** О существовании q-полной части в группах с условием q-минимальности // Материалы XIV Всесоюзн. научн. студ. конф., математика. — Новосибирск, 1976. — С. 63–66.

[100] **Шлепкин А.К.** О сопряженно бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности и конечными разрешимыми подгруппами // Деп. ВИНИТИ № 2181-83 Деп.

[101] **Шлепкин А.К.** О сопряженно бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. — 1983. — Т. 22, № 2. — С. 226–231.

[102] **Шлепкин А.К.** О 2-полных подгруппах в сопряженно бипримитивно конечной группе с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. — 1985. — Т. 24, № 2. — С. 240-—245.

[103] **Шлепкин А.К.** Сопряженно бипримитивно конечные группы содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Третья междунар. конф. по алгебре, 23-28 авг. 1993: Сб. тез. Красноярск, 1993.

[104] **Шлепкин А.К.** О периодической части некоторых групп Шункова // Алгебра и логика. — 1999. – Т. 38, № 1. — С. 96–125.

[105] **Шлепкин А.К.** Группы Шункова с дополнительными ограничениями // Дисс. доктора физ.-мат. наук, Красноярск, 1999.

[106] **Шмидт О.Ю.** Локальная конечность одного класса бесконечных периодических групп // Избранные труды. Математика. — М., 1959. — С. 298–300.

[107] **Шунков В.П.** Об абстрактной характеризации простой проективной группы типа $PGL(2, K)$ над полем характеристики $p \neq 0, 2$ // Докл. АН СССР. — 1965. — Т. 164, № 4. — С. 837–840.

[108] **Шунков В.П.** К теории локально конечных групп // Там же. — 1966. — Т. 168, № 6. — С. 1272–1274.

[109] **Шунков В.П.** К теории периодических групп // Там же. — 1967. — Т. 175, № 6. — С. 1236–1237.

[110] **Шунков В.П.** О локально-конечной группе с экстремальными силовскими p-подгруппами по некоторому простому числу p // Сиб. мат. журн. — 1967. — Т. 8, № 1. — С. 213–229.

[111] **Шунков В.П.** О некотором обобщении теоремы Фробениуса на периодические группы // Алгебра и логика. — 1967. — Т. 6, № 3. — С. 113–124.

[112] **Шунков В.П.** О мощности периодической группы с абелевыми 2-подгруппами конечных рангов // Там же. — 1969. — Т. 8, № 5.— С. 601–618.

[113] **Шунков В.П.** Об абстрактных характеризациях некоторых линейных групп // Алгебра. Матрицы и матричные группы. — Красноярск, 1970. — С. 5–34.

[114] **Шунков В.П.** О проблеме минимальности для локально конечных групп // Алгебра и логика. — 1970. — Т. 9, № 2. — С. 220–248.

[115] **Шунков В.П.** Об одном классе p-групп // Там же. — 1970. — Т. 9, № 4. — С. 484–496.

[116] **Шунков В.П.** О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Там же. — 1970. — Т. 9, № 5. — С. 579–615.

[117] **Шунков В.П.** О локально конечных группах конечного ранга // Там же. — 1971. — Т. 10, № 2. — С. 199–225.

[118] **Шунков В.П.** О сопряженности силовских p-подгрупп в SF-группах // Алгебра и логика. —1971. — Т. 10, № 5. — С. 587–597.

[119] **Шунков В.П.** О некоторых вопросах теории локальнконечных групп : Дисс... доктора физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1972.

[120] **Шунков В.П.** О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. — 1972.— Т. 11, № 4.— С. 470–493.

[121] **Шунков В.П.** Об абелевых подгруппах бипримитивно конечных групп // Там же. — 1973. — Т. 12, № 5. — С. 603—614.

[122] **Шунков В.П.** О бесконечных централизаторах в группах // Там же. — 1974. — Т. 13, № 1. — С. 224–226.

[123] **Шунков В.П.** Об одном признаке непростоты групп // Там же. — 1975. — Т. 14, № 5. — С. 576–603.

[124] **Шунков В.П., Остыловский А.Н.** О проблеме минимальности Черникова в классе сопряженно бипримитивно конечных групп // Тез. докл. 5 Всесоюзн. симпозиума по теории групп. — Краснодар, 1976. — С. 109.

[125] **Шунков В.П.** О достаточных признаках существования в группе бесконечных локально конечных подгрупп // Алгебра и логика. — 1976. — Т. 15, № 6. — С. 716–737.

[126] **Шунков В.П.** M_p-группы // Алгебра и логика. — 1984. — Т. 23, № 4. — С. 445—475.

[127] **Шунков В.П.** Теоремы вложения для групп с инволюциями и характеризация черниковских групп // Там же. — 1988. — Т. 27, № 1. — С. 100–121.

[128] **Шунков В.П.** M_p-группы. — М.: Наука, 1990. 160 с.

[129] **Шунков В.П.** О вложении примарных элементов в группе. — Новосибирск: Наука, 1992. 148 с.

[130] **Шунков В.П.** T_0-группы. — Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 2000. 178 с.

[131] **Холл М.** Теория групп. — М.: ИЛ, 1962. 468 с.

[132] **Alperin J.L., Brauer R., Gorenstein D.** Finite groups wish quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroups // Trans. AMS. 1970. Vol. 151. P. 1–261.

[133] **Alperin J.L., Brauer R., Gorenstein D.** Finite simple groups of 2-rang two. Collection of articles dedicated to the memori of Abraham Adrian Albert // Scripta Math. — 1973. — Vol. 29, № 3–4. — P. 191—214.

[134] **Amberg B., Kazarin L.** Periodic groups saturated by dihedral subgroups // Book of abstracts of the international algebraic conference dedicated to 70-th birthday of Anatoly Yakovlev. – Saint-Petersburg, 2010. — P. 79—80.

[135] **Baer R.** Finiteness properties of groups // Duke Math. J. — 1948. — V. 15. — P. 1021–1032.

[136] **Bender H.** Transitive Gruppen geraden Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festlasst // J. Algebra. — 1971. — V. 17, N 4. — P. 525–554.

[137] **Blackburn N.** Some remarks on Chernikov's p-groups. 3 // J. Math. — 1962. — V. 6. — P. 421–433.

[138] **Brauer R., Suzuki M.** On finite groups with an abelian Sylow subgroups // Can. Jour. Math. — 1962. — V. 14. — P. 436–450.

[139] **Brauer R., Suzuki M.** On finite groups of even order whose 2-Sylow groups is a quaternion // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1966. — V. 45. — P. 403–420.

[140] **Burnside W.** Theory of Groups of Finite Order. — Cambridge University Press 1911.

[141] **Goldshmidt D.M.** 2-fusion in finite groups // Ann. Math. — 1999. — P. 70–117.

[142] **Gorenstein D.** Finite groups. — N. Y.: Harper and Row, 1968.

[143] **Kegel O.H., Wehrfritz B.A.F.** Locally Finite Groups. — Amsterdam; London: North Holland Publ. Co., 1973.

[144] **John N. Bray, Derek F. Holt, Colva M. Ronty-Dougal** The Maximal Subgroups of the Low-Dimensional Finite Classical groups // Cambridge university press. — 2013. — P. 319-–325.

[145] **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. — New York: Wiley and Sons, 1972.

[146] **Higman G.** Groups and rings having automorphisms without nontrivial fixed points // J. London Math. Soc. — 1957. — V. 32. — P. 321–334.

[147] **Huppert B.** Endliche Gruppen 1. Berlin etc.: Springer, 1967.

[148] **Hartley B., Shute G.** Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type // The Quaterly Journal of Mathematics Oxford, Ser. — 1984. — Vol. 137,№ 2. — P. 49–71.

[149] **Suzuki M.** On finite groups with cyclic Sylow subroups for ail odd primes, Amer. J. Math. — 1955. — Vol. 77. P. 657–691.

[150] **Suzuki M.** A new tipe of simple grops of finte order// Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1960. — № 46. — P. 868–870. Arch. Math. — 1983. — Vol. 41. P. 103—116.

[151] **Thomas S.** The classification of the simple periodic linear groups // Arch. Math. — 1983. — Vol. 41. P. 103–116.

[152] **Thompson J.G.** Finite groups with fixed point free automornhisms of prime order // Proc. Nat. Acad.Sci. USA. — 1959. — Vol. 45. — P. 578–581.

[153] **Feit W., Thompson J.G.** Solvability of groups of odd order // Pacif. J. Math. — 1963. — Vol. 13, N 3. — P. 775–1029.

[154] **Zassenhaus H.** Uber endliche Fastkorper, Hamb. Abh. — 1936. Vol. 11. — P. 187–220.

Монография

В.И. Сенашов

Группы Шункова

Формат 70 х 90 1/8
Гарнитура Times
Усл.-п. л. 27,5. Уч.-изд. л. 12,3
Тираж 300 экз.

Издатель – Российская академия наук

Отпечатано в экспериментальной цифровой типографии РАН

Издается по решению Научно-издательского совета Российской академии наук (НИСО РАН) и распространяется бесплатно