

---

---

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 505, 2022

---

---

## МАТЕМАТИКА

Спектры консервативности и модель Йоостена–Фернандеса <i>Л. Д. Беклемишев</i>	5
Двойственная формулировка леммы о гомоморфизмах подстановки <i>Р. В. Гамкрелидзе, А. В. Овчинников</i>	11
О численном решении интегрального уравнения I рода со слабой особенностью в ядре на замкнутой поверхности <i>С. И. Смагин</i>	14
О распараллеливании метода частиц для гибридного суперкомпьютера <i>Б. Н. Четверушкин, М. Б. Марков, Р. В. Усков</i>	19
Математическое моделирование преодоления пандемии COVID-19 и восстановления экономического роста <i>В. А. Садовничий, А. А. Акаев, А. И. Звягинцев, А. И. Сарыгулов</i>	24
Условия диссипативности явной разностной схемы для линеаризованной многомерной квазигазодинамической системы уравнений <i>А. А. Злотник</i>	30
О многомерной задаче Зарембы для неоднородного уравнения $p$ -Лапласа <i>Ю. А. Алхутов, А. Г. Чечкина</i>	37
О приближенном суммировании рядов Пуанкаре в модели Шоттки <i>С. Ю. Лямаев</i>	42
Обобщение неравенств Ландау и Беккера–Поммеренке <i>О. С. Кудрявцева, А. П. Солодов</i>	46
Лучевая постановка задачи акустической томографии <i>В. Г. Романов</i>	50
О проблеме описания элементов эллиптических полей с периодическим разложением в непрерывную дробь над квадратичными полями констант <i>Г. В. Федоров</i>	56
Новые задачи теории трансцендентных полиадических чисел <i>В. Г. Чирский</i>	63
О топологической классификации регулярных гомеоморфизмов типа Данжуа <i>В. З. Гринес, Д. И. Минц</i>	66

---

## ИНФОРМАТИКА

Повышение качества томографических изображений при облучении среды импульсами различной длительности <i>И. В. Прохоров, И. П. Яровенко</i>	71
Моделирование образования и удаления известкового налета в системах водоочистки <i>Н. И. Тарасов, Т. А. Кудряшова, С. В. Поляков</i>	79

---

## ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

Условия экстремума при ограниченном скалярном управлении  
двумя несинхронными осцилляторами в задаче быстрогодействия

*Л. М. Берлин, А. А. Галяев*

86

Об оптимальном повороте твердого тела при помощи внутренних сил

*Г. М. Розенблат*

92

Траектория наблюдателя, отслеживающего движение объекта  
вокруг выпуклых препятствий в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$

*В. И. Бердышев*

100

---

---

# CONTENTS

---

---

Volume 505, 2022

---

---

## MATHEMATICS

Conservativity Spectra and Joosten-Fernández Model <i>L. D. Beklemishev</i>	5
Dual Formulation of the Lemma on Substitution Homomorphisms <i>R. V. Gamkrelidze and A. V. Ovchinnikov</i>	11
On Numerical Solving of the First Kind Integral Equation with a Weak Singularity in the Kernel on a Closed Surface <i>S. I. Smagin</i>	14
On the Parallelization of the Particle Method for Hybrid Supercomputer <i>B. N. Chetverushkina, M. B. Markova, and R. V. Uskova</i>	19
Mathematical Modeling of the Process of Overcoming the COVID-19 Pandemic and Restoring Economic Growth <i>V. A. Sadovnichiy, A. A. Akaev, A. I. Zvyagintsev, and A. I. Sarygulov</i>	24
Conditions for Dissipativity of an Explicit Finite-Difference Scheme for a Linearized Multidimensional Quasi-Gasdynamic System of Equations <i>A. A. Zlotnik</i>	30
On Many Dimensional Zaremba Problem for Inhomogeneous p-Laplace Equation <i>Yu. A. Alkhutova and A. G. Chechkina</i>	37
On the Approximate Summation of Poincaré Series in the Schottky Model <i>S. Yu. Lyamaev</i>	42
Generalization of Landau and Becker-Pommerenke Inequalities <i>O. S. Kudryavtseva and A. P. Solodov</i>	46
Ray Posing of the Acoustic Tomography Problem <i>V. G. Romanov</i>	50
On the Problem of Describing Elements of Elliptic Fields with a Periodic Expansion into a Continued fraction over Quadratic Fields <i>G. V. Fedorov</i>	56
New Problems of the Theory of Transcendental Polyadic Numbers <i>V. G. Chirskii</i>	63
On Topological Classification of Regular Denjoy Type Homeomorphisms <i>V. Z. Grines and D. I. Mints</i>	66

---

## COMPUTER SCIENCE

Improving Quality of Tomographic Images of Medium Using Irradiation with Pulses of Different Duration <i>I. V. Prokhorov and I. P. Yarovenko</i>	71
Modeling Formation and Removal of Limescale in Water Treatment Systems <i>N. I. Tarasov, T. A. Kudryashova, and S. V. Polyakov</i>	79

---

## CONTROL THEORY

Extremum Conditions for Limited Scalar Control of Two Non-Synchronous Oscillators  
in the Time-Optimal Control Problem

*L. M. Berlin and A. A. Galyaev*

86

On Optimal Rigid Body Rotation with Internal Forces Application

*G. M. Rozenblat*

92

Trajectory of the Observer Tracking Object Motion around Convex Obstacles in  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbb{R}^3$

*V. I. Berdyshev*

100

---

---

## СПЕКТРЫ КОНСЕРВАТИВНОСТИ И МОДЕЛЬ ЙООСТЕНА–ФЕРНАНДЕСА

© 2022 г. Академик РАН Л. Д. Беклемишев<sup>1,\*</sup>

Поступило 24.03.2022 г.

После доработки 05.06.2022 г.

Принято к публикации 07.06.2022 г.

Рассматривается обобщение понятия спектра консервативности арифметической теории на язык с трансфинитно итерированными определениями истинности. Установлено естественное соответствие между спектрами консервативности и точками специальной модели Крипке, введенной Д. Фернандесом–Дуке и Й. Йоостеном. Для итерированных схем рефлексии над теориями определений истинности установлены результаты о консервативности, аналогичные хорошо известным формулам Шмерля.

*Ключевые слова:* схема рефлексии, предикат истинности, консервативность

**DOI:** 10.31857/S2686954322040038

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья продолжает работу [1], в которой методы логики доказуемости и алгебр рефлексии применены к исследованию теорий предикативной силы. В частности, понятие *спектра консервативности* арифметической теории обобщается на языки, в которых определимы множества гиперарифметической иерархии и соответствующие определения истинности. Говоря неформально, спектр консервативности теории  $S$  есть трансфинитная последовательность ординалов  $\beta = \text{ord}_\alpha(S)$ , где  $\beta$  – максимальный ординал, для которого  $\beta$ -кратная итерация схемы рефлексии для формул класса  $\Pi_{1+\alpha}$  над некоторой фиксированной теорией содержится в  $S$ . Таким образом, спектр консервативности теории  $S$  несет информацию о силе теории  $S$  в смысле доказуемости в ней формул каждого класса логической сложности  $\Pi_{1+\alpha}$ .

Спектры консервативности, соответствующие уровням арифметической иерархии<sup>1</sup>, были введены Й. Йоостеном [8] под названием *разложения Тьюринга–Гейлора* арифметических теорий. Он установил каноническое взаимно-однозначное соответствие между  $\omega$ -спектрами консерватив-

ности и точками так называемого фрейма Игнатъева. Позже было показано [4], что фрейм Игнатъева может также рассматриваться как естественная алгебраическая модель исчисления рефлексий  $RC$ , расширенного операторами консервативности. Фрейм Игнатъева (в первоначальном его варианте) был введен в работе [7] как универсальная модель Крипке для замкнутого фрагмента логики доказуемости Джапаридзе  $GLP$ .

В данной работе мы распространяем результаты [8] на определенное в работе [1] понятие  $\lambda$ -спектра консервативности для любых конструктивных ординалов  $\lambda$ , относящиеся к существенно более широкому классу теорий. Д. Фернандес–Дуке и Й. Йоостен [6] ввели расширение фрейма Игнатъева для языка с трансфинитным числом модальностей. Основная теорема нашей работы показывает, что элементы этого фрейма, называемые в работе [6]  $\ell$ -последовательностями, совпадают с  $\lambda$ -спектрами консервативности. В силу результатов [6]  $\ell$ -последовательности имеют простую характеристику в терминах ординальных функций, связанных с иерархией Веблена. Таким образом, наш результат дает явный ответ на вопрос о том, какие последовательности ординалов реализуются как  $\lambda$ -спектры консервативности, и подтверждает гипотезу из работы [1].

Данная работа опирается на большой подготовительный материал, обозначения и результаты из работы [1]. Поэтому мы предполагаем знакомство читателя с указанной работой.

<sup>1</sup> Более точно, последовательности, называемые в данной работе  $\omega$ -спектрами консервативности.

<sup>1</sup> Математический институт им. В.А. Стеклова  
Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: bekl@mi-ras.ru









Рассмотрим любой ординал-последователь  $\delta < \gamma_2$ . По формуле Шмерля

$$\overline{R}_\alpha^{\gamma_1} \cup \overline{R}_{\alpha'}^{\delta} \equiv_{\alpha'} \overline{R}_{\alpha'}^{\delta + \overline{\varphi}_\beta(\gamma_1)}.$$

Поскольку  $\ell\gamma_2 \geq \overline{\varphi}_\beta(\gamma_1)$ , имеем  $\delta + \overline{\varphi}_\beta(\gamma_1) \leq \gamma_2$ . Так как это верно для всех достаточно больших ординалов  $\alpha' < \alpha$  и  $\delta < \gamma_2$ , получаем требуемое утверждение.

**Теорема 4.4.** *Любая  $\ell$ -последовательности длины  $\lambda$  есть спектр консервативности некоторой теории  $S$ .*

**Доказательство.** Заметим, что любая  $\ell$ -последовательность  $f$  не возрастает и поэтому принимает не более конечного числа различных значений, скажем  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  в порядке убывания. Положим

$$\alpha_i = \min\{\alpha : f(\alpha) = \gamma_{i+1}\}.$$

Тогда значение  $f$  есть константа  $\gamma_{i+1}$  на каждом интервале  $[\alpha_i, \alpha_{i+1})$ , где  $\alpha_0 = 0$  и  $\alpha_n := \lambda$ . Положим

$$S_n := \overline{R}_{<\alpha_n}^{\gamma_n} \cup \overline{R}_{<\alpha_{n-1}}^{\gamma_{n-1}} \cup \dots \cup \overline{R}_{<\alpha_1}^{\gamma_1}.$$

Мы утверждаем, что спектр консервативности теории  $S_n$  совпадает с  $f$ . Для доказательства нам понадобятся две дополнительные леммы.

**Лемма 4.5.** *Допустим  $\alpha_{i-1} \leq \alpha < \alpha_i$ . Тогда  $\overline{R}_{\alpha_i}^{\gamma_i} \equiv_{\alpha} \overline{R}_{\alpha}^{\gamma_i}$ .*

**Доказательство.** Мы можем представить  $\alpha_i$  в виде  $\alpha_i := \alpha + \omega^{\beta_1} + \dots + \omega^{\beta_k}$ . Положим  $\overline{\alpha}_j := \alpha + \omega^{\beta_1} + \dots + \omega^{\beta_j}$ , где  $\overline{\alpha}_0 := \alpha$ . Поскольку  $f$  есть  $\ell$ -последовательность и  $f(\overline{\alpha}_j) = \gamma_j$ , мы имеем  $\gamma_i \geq \ell(\gamma_i) \geq \overline{\varphi}_{\beta_j}(\gamma_i)$ . Следовательно,  $\gamma_i$  есть неподвижная точка функции  $\overline{\varphi}_{\beta_j}$  для каждого  $j$ . Тогда индукцией по  $j = k, \dots, 0$  из теоремы 3.1 (i) мы получаем

$$\overline{R}_{\alpha_i}^{\gamma_i} \equiv_{\overline{\alpha}_j} \overline{R}_{\overline{\alpha}_j}^{\gamma_i}.$$

Утверждение леммы получается для  $j = 0$ .  $\dashv$

**Лемма 4.6.** *Для любого  $i < n$ ,  $S_{i+1} \equiv_{<\alpha_i} S_i$ .*

**Доказательство.** Во-первых, по лемме 4.5,

$$\overline{R}_{<\alpha_{i+1}}^{\gamma_{i+1}} \equiv_{<\alpha_{i+1}} \overline{R}_{\alpha_{i+1}}^{\gamma_{i+1}} \equiv_{\alpha_i} \overline{R}_{\alpha_i}^{\gamma_{i+1}}.$$

Поскольку  $S_i$  есть множество формул сложности  $\Pi_{<\alpha_i}$ , отсюда следует, что

$$\begin{aligned} S_{i+1} &\equiv S_i \cup \overline{R}_{<\alpha_{i+1}}^{\gamma_{i+1}} \equiv_{\alpha_i} S_i \cup \overline{R}_{\alpha_i}^{\gamma_{i+1}} \equiv \\ &\equiv S_{i-1} \cup \overline{R}_{<\alpha_i}^{\gamma_i} \cup \overline{R}_{\alpha_i}^{\gamma_{i+1}}. \end{aligned}$$

Поскольку  $S_{i-1}$  имеет сложность  $\Pi_{<\alpha_{i-1}}$ , по лемме 4.3 получаем

$$S_{i-1} \cup \overline{R}_{<\alpha_i}^{\gamma_i} \cup \overline{R}_{\alpha_i}^{\gamma_{i+1}} \equiv_{<\alpha_i} S_{i-1} \cup \overline{R}_{<\alpha_i}^{\gamma_i} \equiv S_i.$$

Теперь индукцией по  $i = 0, \dots, n$  мы покажем, что  $\alpha_i$ -спектр консервативности теории  $S_i$  совпадает с  $f \upharpoonright \alpha_i$ . Теорема 4.4 получается отсюда при  $i = n$ . Для  $i = 0$  утверждение тривиально.

Допустим, что утверждение имеет место для  $i$  и докажем его для  $i + 1$ . По лемме 4.6  $\text{ord}_{\alpha}(S_{i+1}) = \text{ord}_{\alpha}(S_i)$  для всех  $\alpha < \alpha_i$ . Поэтому мы можем считать, что  $\alpha_i \leq \alpha < \alpha_{i+1}$ . В этом случае, поскольку сложность теории  $S_i$  есть  $\Pi_{<\alpha_i}$  и  $S_i$  корректна,

$$\text{ord}_{\alpha}(S_{i+1}) = \text{ord}_{\alpha}(S_i \cup \overline{R}_{<\alpha_{i+1}}^{\gamma_{i+1}}) = \text{ord}_{\alpha}(\overline{R}_{<\alpha_{i+1}}^{\gamma_{i+1}}).$$

Наконец, по лемме 4.5

$$\overline{R}_{<\alpha_{i+1}}^{\gamma_{i+1}} \equiv_{\alpha} \overline{R}_{\alpha}^{\gamma_{i+1}}.$$

Значит,  $\text{ord}_{\alpha}(\overline{R}_{<\alpha_{i+1}}^{\gamma_{i+1}}) = \gamma_{i+1} = f(\alpha)$ . Теорема 4.4 доказана.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00318, <https://rscf.ru/project/21-11-00318/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beklemishev L., Pakhomov F. Reflection algebras and conservation results for theories of iterated truth. *Annals of Pure and Applied Logic*, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.apal.2022.103093>
2. Beklemishev L.D. Proof-theoretic analysis by iterated reflection. *Archive for Mathematical Logic*. 2003. V. 42. P. 515–552.
3. Beklemishev L.D. Veblen hierarchy in the context of provability algebras. In P. Hájek, L. Valdés-Villanueva, and D. Westerståhl, editors, *Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the Twelfth International Congress* (Kings College Publications, London, 2005), p. 65–78.
4. Beklemishev L.D. Reflection calculus and conservativity spectra. *Russian Math. Surveys*. 2018. V. 73. № 4. P. 569–613. Russian original: *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*. 2018. V. 73. № 4 (442). P. 3–52.
5. Feferman S. Arithmetization of metamathematics in a general setting. *Fundamenta Mathematicae*. 1960. V. 49. P. 35–92.
6. Fernández-Duque D., Joosten J. Models of transfinite provability logic. *J. Symbolic Logic*. 2013. V. 78. № 2. P. 543–561.
7. Ignatiev K.N. On strong provability predicates and the associated modal logics. *The Journal of Symbolic Logic*. 1993. V. 58. P. 249–290.

8. *Joosten J.J.* Turing–Taylor expansions of arithmetical theories. *Studia Logica*. 2015. V. 104. P. 1225–1243. <https://doi.org/10.1007/s11225-016-9674-z>
9. *Schmerl U.R.* A fine structure generated by reflection formulas over Primitive Recursive Arithmetic. In M. Boffa, D. van Dalen, and K. McAloon, editors, *Logic Colloquium'78*. North Holland, Amsterdam, 1979, p. 335–350.
10. *Schmerl U.R.* A proof-theoretical  $\omega$ -ne structure in systems of ramified analysis. *Archive for Mathematical Logic*. 1982. V. 22. P. 167–186.

## CONSERVATIVITY SPECTRA AND JOOSTEN-FERNÁNDEZ MODEL

Academician of the RAS **Lev D. Beklemishev**

*<sup>a</sup> Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

We study a generalization of the notion of conservativity spectrum of an arithmetical theory to a language with transfinitely many truth definitions. We establish a natural correspondence of conservativity spectra and points of a special Kripke model introduced by D. Fernández-Duque and J. Joosten. For iterated reflection principles over theories of truth definitions we also establish conservation results analogous to the well-known Schmerl formulas.

*Keywords:* reflection principle, truth definition, conservativity

## ДВОЙСТВЕННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЛЕММЫ О ГОМОМОРФИЗМАХ ПОДСТАНОВКИ

© 2022 г. Академик РАН Р. В. Гамкредидзе<sup>1,2,\*</sup>, А. В. Овчинников<sup>3,2,\*\*</sup>

Поступило 14.03.2022 г.

После доработки 22.03.2022 г.

Принято к публикации 01.06.2022 г.

В данной заметке известная лемма анализа о гомоморфизмах подстановки сформулирована в виде утверждения о канонической двойственности между семейством всех гладких отображений одного гладкого многообразия в другое и семейством всех гомоморфизмов алгебр гладких скалярных функций на этих многообразиях. Указанная формулировка придает лемме максимальную возможную общность и одновременно явно фиксирует основную симметрию задачи: двойственность между “сопряжением” (переходом от отображений многообразий к гомоморфизмам алгебр гладких функций на них) и “косопряжением” (переходом от гомоморфизмов к отображениям).

*Ключевые слова:* гладкое многообразие, гладкая функция, гомоморфизм, двойственность

DOI: 10.31857/S2686954322040099

Настоящая заметка содержит нестандартную формулировку важной нетривиальной леммы анализа о гомоморфизмах подстановки. Лемма сформулирована как каноническая двойственность между семейством  $\overline{\text{Hom}}(M, N)$  всех гладких отображений гладкого многообразия  $M$  в гладкое многообразие  $N$  (многообразия действительные и конечномерные) и семейством  $\overline{\text{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N))$  всех гомоморфизмов алгебры гладких скалярных функций  $C^\infty(N)$  на  $N$  в аналогичную алгебру  $C^\infty(M)$  на  $M$ ; стрелки указывают направления действия отображений и гомоморфизмов: если  $f \in \overline{\text{Hom}}(M, N)$  – гладкое отображение  $M \xrightarrow{f} N$ , то каждая гладкая скалярная функция  $b \in C^\infty(N)$  может быть “перенесена” на многообразии  $M$  по правилу  $b \circ f \in C^\infty(M)$ , что порождает отображение  $C^\infty(N) \xrightarrow{f^\sharp} C^\infty(M)$ , которое будем записывать как  $f^\sharp : C^\infty(N) \leftarrow C^\infty(M)$ . Принятый нами подход придает лемме максимальную возможную общ-

ность и одновременно явно фиксирует в самой формулировке основную симметрию задачи: двойственность между “сопряжением” (переходом от отображений многообразий к гомоморфизмам алгебр гладких функций на них) и “косопряжением” (переходом от гомоморфизмов к отображениям), не делегируя этот решающий для всей рассматриваемой проблемы факт в скрытом виде в длинное доказательство. Мы знакомы с несколькими различными формулировками и независимыми доказательствами леммы (см. [1–4]); приведенное здесь доказательство можно рассматривать как несколько усовершенствованный вариант доказательства из [1].

Симметрия двойственности между семействами  $\overline{\text{Hom}}(M, N)$  и  $\overline{\text{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N))$  наглядно передается следующими нестандартными теоретико-множественными обозначениями, которых будем придерживаться в дальнейшем изложении. Мы считаем, что аргументом отображения  $f \in \overline{\text{Hom}}(M, N)$  является “бесструктурная переменная точка”  $q \in M$ , и аргумент в этом случае записывается справа от символа отображения, т.е. вместо общепринятого “ $q \mapsto f(q)$ ” будем писать “ $q \mapsto qf \in N$ ” или “ $q \mapsto q \cdot f \in N$ ”. Действие же гомоморфизма  $\varphi \in \overline{\text{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N))$  на “точки”  $b \in C^\infty(N)$  функционального пространства  $C^\infty(N)$  записывается как “действие слева”:  $b \mapsto \varphi b \in C^\infty(M)$  (или  $b \mapsto \varphi \cdot b \in C^\infty(M)$ ) для каждой функции  $b \in C^\infty(N)$ . Таким образом, действие гомоморфизма  $f^\sharp$ , со-

<sup>1</sup> Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup> Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>3</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: gam@ipsun.ras.ru

\*\*E-mail: ovchinnikov@viniti.ru

пряженного к отображению  $f$ , на произвольной функции  $b \in C^\infty(N)$  представляется как подстановка (суперпозиция)  $f \circ b$ :

$$q \cdot f^\sharp b := qf \cdot b = q \cdot f \circ b \quad \forall q \in M, \\ \forall b \in C^\infty(N),$$

и вся нетривиальная часть леммы сводится к доказательству обратимости оператора сопряжения  $\sharp$  и каноническому описанию обратного к нему оператора косопряжения  $\flat$ , канонически спаривающего произвольный гомоморфизм алгебр  $\varphi \in \overline{\text{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N))$  с соответствующим гладким отображением  $\varphi_b \in \overline{\text{Hom}}(M, N)$ .

**Л е м м а.** *Между семействами  $\overline{\text{Hom}}(M, N)$  и  $\overline{\text{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N))$  существует естественная двойственность, которая каждому произвольному гладкому отображению  $f \in \overline{\text{Hom}}(M, N)$  канонически ставит в соответствие сопряженный с ним гомоморфизм алгебр  $f^\sharp \in \overline{\text{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N))$  и, наоборот, произвольному гомоморфизму алгебр  $\varphi \in \overline{\text{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N))$  канонически ставит в соответствие косопряженное с ним гладкое отображение  $\varphi_b \in \overline{\text{Hom}}(M, N)$ :*

$$\overline{\text{Hom}}(M, N) \xrightarrow{\sharp} \overline{\text{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N)), \\ \overline{\text{Hom}}(M, N) \xleftarrow{\flat} \overline{\text{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N)). \quad (1)$$

Отображения (операторы)  $\sharp$  и  $\flat$  обращают друг друга:

$$\flat \circ \sharp = \text{id}_{\overline{\text{Hom}}(M, N)}, \quad \sharp \circ \flat = \text{id}_{\overline{\text{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N))},$$

где  $\text{id}_{\overline{\text{Hom}}(M, N)}$  — тождественный оператор

$$\text{id}_{\overline{\text{Hom}}(M, N)} : \overline{\text{Hom}}(M, N) \rightarrow \overline{\text{Hom}}(M, N), \quad f \mapsto f,$$

для любого гладкого отображения  $f \in \overline{\text{Hom}}(M, N)$  (аналогично для  $\text{id}_{\overline{\text{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N))}$ ).

Оператор сопряжения  $\sharp$  был определен выше; конструкция оператора косопряжения  $\flat$  существенно использует результат леммы о “гомоморфизмах вычисления” и приведена далее вместе кратким наброском доказательства.

Рассмотрим алгебру  $C^\infty(N)$  гладких скалярных функций на гладком вещественном многообразии  $N$ . Известно (см. [2]), что всякий гомоморфизм алгебр  $\psi \in \overline{\text{Hom}}(C^\infty(N), \mathbb{R})$  является гомоморфизмом вычисления, т.е. существует такая однозначно определенная точка  $r \in N$ , что значение гомоморфизма  $\psi$  на произвольной функции  $b \in C^\infty(N)$  совпадает со значением функции  $b$  в точке  $r$ :

$$\psi b = rb \quad \forall b \in C^\infty(N).$$

Для произвольной точки  $r \in N$  обозначим через  $\hat{r}$  гомоморфизм вычисления  $C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $r$ ; тогда сформулированное выше утверждение можно записать в виде формулы

$$\psi \in \overline{\text{Hom}}(C^\infty(N), \mathbb{R}) \Rightarrow \exists! r \in N : \psi = \hat{r}. \quad (2)$$

Пусть теперь  $\varphi$  — произвольный гомоморфизм алгебр  $C^\infty(N)$  и  $C^\infty(M)$ , т.е.  $\varphi \in \overline{\text{Hom}}(C^\infty(M), C^\infty(N))$ . Докажем существование однозначно определенного отображения  $\varphi_b$ , косопряженного с гомоморфизмом алгебр  $\varphi$ . Уравнение относительно  $\varphi_b$  имеет вид

$$q\varphi_b \cdot b = q \cdot \varphi b \quad \forall q \in M, \forall b \in C^\infty(N);$$

оно однозначно разрешимо, ибо его правая часть  $\varphi b$  при каждом фиксированном  $q$  является гомоморфизмом вычисления  $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  в некоторой однозначно определенной точке  $r_q \in M$ ; следовательно, полагая

$$q\varphi_b := \hat{r}_q \quad \forall q \in M,$$

приходим к завершающему нашу конструкцию тождеству

$$q\varphi_b \cdot b = \hat{r}_q b = q \cdot \varphi b \\ \forall q \in M, \quad \forall b \in C^\infty(N).$$

Соотношения (1) проверяются очевидным образом. Например, если  $\varphi = f^\sharp$ , то для произвольной точки  $q \in M$  и произвольной гладкой функции  $b \in C^\infty(N)$  имеем

$$qf \cdot b = q \cdot f^\sharp b = q \cdot \varphi b = q\varphi_b \cdot b,$$

так что  $f = \varphi_b = (f^\sharp)_b$ , т.е.  $\flat \circ \sharp = \text{id}_{\overline{\text{Hom}}(M, N)}$ . Аналогично, если  $f = \varphi_b$ , то

$$q \cdot \varphi b = q\varphi_b \cdot b = qf \cdot b = q \cdot f^\sharp b,$$

так что  $\varphi = f^\sharp = (\varphi_b)^\sharp$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агрacheв А.А., Гамкрелидзе Р.В., Вахрамеев С.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения на векторных расслоениях и хронологическое исчисление // Итоги науки техн. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. 1989. Т. 35. С. 3—107.
2. Агрacheв А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005. 392 с.
3. Бухштабер В.М., Рис Э.Г. Кольца непрерывных функций, симметрические произведения и алгебры Фробениуса // Усп. мат. наук. 2004. Т. 59. № 1 (355). С. 125—144.
4. Кириллов А.А. Лекции по методу орбит. Новосибирск: Научная книга. 2002. 289 с.

## DUAL FORMULATION OF THE LEMMA ON SUBSTITUTION HOMOMORPHISMS

Academician of the RAS **R. V. Gamkrelidze<sup>a,b</sup>** and **A. V. Ovchinnikov<sup>c,b</sup>**

<sup>a</sup> *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Science,  
Moscow, Russian Federation*

<sup>c</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

This paper contains a nonstandard formulation of the well-known lemma on substitution homomorphisms stated as the canonical duality between the family of all smooth mappings of one smooth manifold into another and the family of all homomorphisms of algebras of smooth scalar functions on these manifolds. This formulation gives the lemma the maximum possible generality and emphasizes the fundamental symmetry of the problem: the duality between “conjugation” (transition from mappings of manifolds to homomorphisms of algebras of smooth functions on them) and “skew conjugation” (transition from homomorphisms to mappings).

*Keywords:* smooth manifold, differentiable function, homomorphism, duality

УДК 519.642.3

## О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ I РОДА СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ЯДРЕ НА ЗАМКНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2022 г. член-корреспондент РАН С. И. Смагин<sup>1,\*</sup>

Поступило 09.12.2021 г.

После доработки 11.04.2022 г.

Принято к публикации 02.06.2022 г.

Рассматривается прямой метод (метод саморегуляризации) численного решения слабо сингулярного интегрального уравнения I рода на замкнутой поверхности. Данное уравнение представляет собой интегральную формулировку внутренней и внешней трехмерных задач Дирихле для уравнения Лапласа, если их решения искать в виде потенциала простого слоя. Оно аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений, которая решается численно. При этом применяется новый метод осреднения ядра интегрального оператора. Он сохраняет условную корректность дискретизованной задачи и существенно повышает скорость сходимости ее решения к точному решению интегрального уравнения.

*Ключевые слова:* интегральное уравнение, оператор, метод, осреднение, аппроксимация, численное решение

DOI: 10.31857/S2686954322040178

Изучается прямой метод (метод саморегуляризации) численного решения слабо сингулярного интегрального уравнения I рода на замкнутой поверхности. Такие уравнения получаются, например, при использовании методов теории потенциала для решения внутренних и внешних трехмерных краевых задач для эллиптических уравнений математической физики [1–3]. В общем случае задачи отыскания их решений являются некорректно поставленными и решаются с привлечением достаточно громоздких методов регуляризации [4, 5].

В данной работе исходное уравнение аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), для получения которой используется согласованный с шагом дискретизации новый метод осреднения ядра интегрального оператора. Его применение позволяет создавать достаточно простые схемы численного решения рассматриваемых слабосингулярных интегральных уравнений I рода с легко вычисляемыми коэффициентами. Присутствие слабой особенности в ядре интегрального оператора дает возможность не включать явно процедуру регуляризации

в алгоритмы численного решения таких уравнений.

Применяемый подход основан на результатах работы [6], но позволяет получать вычислительные схемы с более высоким порядком аппроксимации без существенного усложнения алгоритмов. Проведено исследование условно-корректной разрешимости дискретизованной задачи, аппроксимации и сходимости ее решения, получены оценки скоростей убывания невязки и сходимости приближенного решения к обобщенному решению исходной задачи в зависимости от порядка дискретизации.

### 1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим интегральное уравнение

$$(Aq)(x) \equiv \int_{\Gamma} \frac{q(y)}{r} d\Gamma_y = f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (1)$$

Здесь  $\Gamma$  – ограниченная замкнутая липшицева поверхность, которая делит трехмерное евклидово пространство  $R^3$  на внутреннюю область  $\Omega_i$  и внешнюю область  $\Omega_e$ ,  $\Omega_e = R^3 \setminus \bar{\Omega}_i$ ,  $r = |x - y|$ ,  $d\Gamma_y$  – элемент площади поверхности в точке  $y$ ,  $f$  – известная функция,  $q$  – искомое решение.

Уравнение (1) представляет собой уравнение Фредгольма I рода со слабой особенностью в ядре. К уравнениям вида (1) и системам, содержащим такие уравнения, приводятся многие трех-

<sup>1</sup> Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровский федеральный исследовательский центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровск, Россия

\*E-mail: smagin@ccfebras.ru

мерные задачи математической физики. Например, решение как внутренней, так и внешней задач Дирихле

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad x \in \Omega_{i(e)}, \quad u = f, \quad x \in \Gamma, \\ u &= O(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

может быть представлено в виде

$$u(x) = (Aq)(x), \quad x \in \Omega_{i(e)}, \quad (3)$$

где  $q$  – решение уравнения (1),  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Под обобщенным решением уравнения (1) с правой частью  $f \in H^{1/2}(\Gamma)$  будем подразумевать обобщенную функцию  $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ , удовлетворяющую равенствам

$$\langle g, Aq \rangle_{\Gamma} = \langle g, f \rangle_{\Gamma} \quad \forall g \in H^{-1/2}(\Gamma). \quad (4)$$

Здесь  $H^{\alpha}(\Gamma)$  – обобщенное пространство С.Л. Соболева функций на  $\Gamma$ ,  $\alpha > 0$ ,  $H^{-\alpha}(\Gamma)$  – сопряженное к  $H^{\alpha}(\Gamma)$  пространство,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$  – отношение двойственности на  $H^{-\alpha}(\Gamma) \times H^{\alpha}(\Gamma)$ , расширяющее скалярное произведение в  $H^0(\Gamma)$ .

Справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Оператор  $A$  – положительный оператор в  $H^0(\Gamma)$ . Его энергетическое пространство совпадает с  $H^{-\alpha}(\Gamma)$ .*

**Теорема 2.** *Уравнение (1) имеет единственное обобщенное решение  $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$  при любой правой части  $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ . При этом выполняется неравенство*

$$\|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \|f\|_{H^{1/2}(\Gamma)},$$

где  $C$  – положительная константа, не зависящая от  $f$ .

Доказательства теорем 1 и 2 имеются в [7, 8].

## 2. МЕТОД ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Пусть  $\{\Gamma_i\}$  – покрытие поверхности  $\Gamma$  системой окрестностей узловых точек  $x'_i \in \Gamma$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , лежащих внутри сфер радиусов  $h_i$  с центрами в  $x'_i$ , и  $\{\varphi_i\}$  – подчиненное ему разбиение единицы [9].

Тогда  $\text{supp} \varphi_i \subset \Gamma_i$ ,  $\sum_{i=1}^N \varphi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Gamma$ .

В качестве функций, образующих разбиение единицы, можно выбрать функции  $\varphi_i \in C^1(\Gamma)$ , равные

$$\varphi_{ix} = \varphi_i(x) = \varphi'_i(x) / \sum_{j=1}^N \varphi'_j(x),$$

где

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} (1 - r_{ix}^2/h_i^2)^3, & r_{ix} < h_i, \\ 0, & r_{ix} \geq h_i, \end{cases} \quad r'_{ix} = |x - x'_i|.$$

Приближенное решение уравнения (1) будем искать на сетке  $\{x_i\}$ , узлами которой являются “центры тяжести” функций  $\varphi_i$ ,

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{\bar{\varphi}_i} \int_{\Gamma} x \varphi_i(x) d\Gamma_x, \quad \bar{\varphi}_i = \int_{\Gamma} \varphi_i(x) d\Gamma_x, \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом будем предполагать, что для всех  $i = 1, 2, \dots, N$  выполняются неравенства

$$\begin{aligned} 0 < h' \leq r_{ij}, \quad i \neq j, \quad h' \leq h_i \leq h, \\ h/h' \leq p_0 < \infty, \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $h', h$  – положительные числа, зависящие от  $N$ ,  $p_0$  не зависит от  $N$ ,  $r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$ ,  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Результаты данной работы справедливы и в случае, когда

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \begin{cases} 1, & x \in \Gamma_i, \\ 0, & x \notin \Gamma_i, \end{cases} \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, \\ i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^N \bar{\Gamma}_i &= \Gamma. \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим через  $U_h$  пространство  $N$ -мерных векторов  $q_h = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ , где  $q_1, q_2, \dots, q_N$  – вещественные числа. Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\tilde{q}_h(y) = \sum_{j=1}^N \tilde{q}_j \varphi_j(y), \quad y \in \Gamma,$$

где  $\tilde{q}_h = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_N)$  – элемент пространства  $U_h$ , удовлетворяющий СЛАУ

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \tilde{q}_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{\alpha_i}{\bar{\varphi}_i} \delta_{ij} + S_{ij}, \quad \alpha_i = \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma_x}{r_{ix}} - \sum_{j=1}^N S_{ij} \bar{\varphi}_j, \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \\ S_{ij} &= S(r_{ij}) \equiv \int_{R^3} S_{jx} \psi_{ix} dx, \end{aligned} \quad (9)$$

$$S_{jx} = S_j(x) = \int_{R^3} \frac{\Psi_{jy}}{r} dy, \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\Psi_{ix} = \Psi(r_{ix}) = (\pi\sigma^2)^{-3/2} \exp(-r_{ix}^2/\sigma^2),$$

$$r_{ix} = |x - x'_i|, \quad f_i = \int_{\Gamma} \frac{\varphi_i}{\bar{\varphi}_i} f d\Gamma,$$

$\sigma$  – радиус осреднения, который выбирается из условия хорошей аппроксимации соответствующих интегральных уравнений [6],

$$c_1 h' \leq \sigma \leq c_2 h, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

$c_1, c_2$  – положительные числа, не зависящие от  $N$ .

В операторной форме уравнение (8) можно записать в виде

$$A_h \tilde{q}_h = f_h, \quad (11)$$

где  $A_h$  – матрица с коэффициентами  $A_{ij}$ ,  $f_h = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ .

### 3. РАЗРЕШИМОСТЬ ДИСКРЕТИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ

Введем в  $U_h$  скалярные произведения

$$(g_h, q_h) \equiv \sum_{i,j=1}^N q_i g_i \bar{\varphi}_i, \quad (12)$$

$$[g_h, q_h] \equiv (g_h, A_h q_h) = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} q_i \bar{\varphi}_i g_j \bar{\varphi}_j$$

и рассмотрим условия, при которых пространство  $U_h$  со скалярным произведением  $[g_h, q_h]$  является гильбертовым. Для этого достаточно доказать положительную определенность матрицы  $A_h$ .

Опуская промежуточные выкладки, выражения для  $S_{ix}$  и  $S_{ij}$  преобразуем к виду

$$S_{ix} = \int_{R^3} \frac{\exp(-r_{iy}^2/\sigma^2)}{\pi^{3/2} \sigma^3 r} dy = \frac{2}{\pi^{1/2} r_{ix}} \int_0^{r_{ix}/\sigma} \exp(-t^2) dt,$$

$$S_{ij} = 2 \int_{R^3} \frac{\Psi_{jx}}{\pi^{1/2} r_{ix}} \int_0^{r_{ix}/\sigma} \exp(-t^2) dt dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/2} r_{ij}} \int_0^{r_{ij}/\sigma} \exp(-t^2/2) dt, \quad i \neq j, \quad (13)$$

$$S_{ii} = \lim_{r \rightarrow 0} S(r) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/2} \sigma}.$$

**Лемма 1** [6]. Пусть выполняются условия (6) и  $q_1, q_2, \dots, q_N$  – произвольные вещественные числа, такие что

$$\sum_{i=1}^N q_i^2 \neq 0. \quad (14)$$

Тогда при любом  $\sigma > 0$  выполняются неравенства

$$(S_h q_h, q_h) \equiv \sum_{i,j=1}^N S_{ij} q_i \bar{\varphi}_i q_j \bar{\varphi}_j > 0. \quad (15)$$

**Лемма 2.** При выполнении условий (6) справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} \varphi_{jy} (S_{iy} - S_{ij}) d\Gamma_y \geq -C \frac{h^2}{\sigma}, \quad (16)$$

где положительная константа  $C$  не зависит от  $h$  и  $\sigma$ .

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия лемм 1 и 2. Тогда  $\forall q_h$  и достаточно малых  $\sigma$  и  $h/\sigma$  выполняется неравенство

$$(A_h q_h, q_h) \geq c_0 \sigma (q_h, q_h), \quad (17)$$

где положительная константа  $c_0$  не зависит от  $h$  и  $\sigma$ .

Введенные равенствами (12) скалярные произведения порождают в пространстве  $U_h$  нормы

$$\|q_h\|_0^2 = (q_h, q_h), \quad \|q_h\|^2 = [q_h, q_h]. \quad (18)$$

Первая из них согласована с нормой пространства  $H^0(\Gamma)$ , а вторая, при выполнении условий теоремы 3, – с энергетической нормой оператора  $A$ , которая эквивалентна норме пространства  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно при выполнении условий теоремы 3 перейти в (18) к пределам по  $h$  и  $\sigma$  при  $h, \sigma \rightarrow 0$ .

### 4. АППРОКСИМАЦИЯ И СХОДИМОСТЬ

Будем считать, что условия корректной разрешимости системы (8), сформулированные в теореме 3, выполняются. Тогда ее решение существует и единственно при любой правой части в силу положительной определенности матрицы этой системы, которая вытекает из неравенства (17).

Введем обозначения

$$(Aq)_i = \int_{\Gamma} \frac{\varphi_i(x)}{\bar{\varphi}_i} (Aq)(x) d\Gamma_x, \quad (19)$$

$$\tilde{f}_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} q_j \bar{\varphi}_j, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Из (2) и (8) следует, что

$$(Aq)_h = f_h, \quad A_h q_h = \tilde{f}_h. \quad (20)$$

С учетом (11), (18)–(20) имеем

$$\|\tilde{q}_h - q_h\|^2 = (\tilde{q}_h - q_h, A_h (\tilde{q}_h - q_h)) = (\tilde{q}_h - q_h, f_h - \tilde{f}_h).$$

Отсюда, используя неравенство Коши-Буняковского для сумм и соотношения (17), (18), получаем неравенство

$$\|\tilde{q}_h - q_h\|^2 \leq \|\tilde{q}_h - q_h\|_0 \|f_h - \tilde{f}_h\|_0 \leq C \sigma^{-1/2} \|q_h - \tilde{q}_h\| \|f_h - \tilde{f}_h\|_0.$$

Следовательно,

$$\|\tilde{q}_h - q_h\| \leq C \sigma^{-1/2} \|f_h - \tilde{f}_h\|_0, \quad (21)$$

где  $C$  – положительная константа, не зависящая от  $q$  и  $h$ .



Таким образом, для доказательства сходимости решения системы (8) к точному решению задачи (2) и оценки ее скорости достаточно получить оценку погрешности аппроксимации. Имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{f}_h - f_h)_i &= \sum_{j=1}^N A_{ij} q_j \bar{\varphi}_j - (Aq)_i = \\ &= \alpha_i q_i + \sum_{j=1}^N S_{ij} q_j \bar{\varphi}_{ij} - \int_{\Gamma} \frac{\varphi_{ix}}{\bar{\varphi}_i} \int_{\Gamma} \frac{q_y}{r} d\Gamma_y d\Gamma_x = \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\varphi_{ix}}{\bar{\varphi}_i} \int_{\Gamma} \left( \frac{q_x}{r_{iy}} - \frac{q_y}{r} \right) d\Gamma_y d\Gamma_x - \sum_{j=1}^N S_{ij} (q_i - q_j) \bar{\varphi}_j = \\ &= I_i + J_i + K_i \end{aligned} \quad (22)$$

и

$$\|f_h - \tilde{f}_h\|_0 \leq \|I_h\|_0 + \|J_h\|_0 + \|K_h\|_0, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{\Gamma} \frac{\varphi_{ix}}{\bar{\varphi}_i} q_x F_i(x) d\Gamma_x, \quad F_i(x) = \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{r_{iy}} - \frac{1}{r} \right) d\Gamma_y, \\ & \quad r = |x - y|, \quad r_{iy} = |x_i - y|, \\ J_i &= \int_{\Gamma} \frac{\varphi_{ix}}{\bar{\varphi}_i} \int_{\Gamma} (q_x - q_y) V(r) d\Gamma_y d\Gamma_x, \\ & \quad V(r) = 1/r - S(r), \\ K_i &= \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_{ixjy}}{\bar{\varphi}_i} (q_x - q_y) (S(r) - S_{ij}) d\Gamma_y d\Gamma_x, \\ & \quad \varphi_{ixjy} = \varphi_{ix} \varphi_{jy}. \end{aligned} \quad (24)$$

Следовательно, для получения нужной оценки порядка аппроксимации достаточно получить оценки сверху норм векторов  $I_h$ ,  $J_h$  и  $K_h$  с компонентами из (24). Объединив полученные результаты, приходим к теореме.

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия теоремы 3 и  $q, \tilde{q}_h$  – принадлежащие  $H^1(\Gamma)$  точное решение задачи (2) и, удовлетворяющее системе (8), ее приближенное решение. Тогда справедливы неравенства

$$\|\tilde{q}_h - q_h\| \leq Ch^{3/2-\varepsilon} \|q\|_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma)}, \quad (25a)$$

$$\|A_h(\tilde{q}_h - q_h)\|_0 = \|f_h - \tilde{f}_h\|_0 \leq Ch^{2-\varepsilon} \|q\|_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma)}, \quad (25b)$$

где  $C$  – положительная константа, не зависящая от  $q$  и  $h$ ,  $\varepsilon$  – сколь угодно малая константа  $\varepsilon > 0$ .

**Замечание 2.** Оценки (25) на 1 порядок лучше аналогичных оценок, полученных ранее в работе [6], где интегральное уравнение (1) аппроксимировалось СЛАУ, коэффициенты  $A_{ij}$  которой определялись формулами (9) без учета слагаемых, содержащих  $\alpha_i$ .

**Замечание 3.** Чтобы воспользоваться приближенным решением  $\tilde{q}_h$  интегрального уравнения (1) для интегрального представления приближенного решения  $\tilde{u}_h$  как внутренней, так и внешней краевой задачи (2) в произвольной точке  $x \in R^3 \setminus \Gamma$  соответствующий потенциал простого слоя можно вычислять по формуле

$$\tilde{u}_h(x) = (A\tilde{q}_h)(x) = \int_{\Gamma} \frac{\tilde{q}_h(y)}{r} d\Gamma_y, \quad x \in R^3 \setminus \Gamma \quad (26)$$

или, используя более простые соотношения,

$$\tilde{u}_h(x) = \sum_{j=1}^N S_j(x) \tilde{q}_j \bar{\varphi}_j, \quad x \in R^3 \setminus \Gamma. \quad (27)$$

**Замечание 4.** Оценки погрешностей приближенных решений внутренних и внешних краевых задач (2), вычисляемых по формуле (27), можно получить из неравенства

$$\begin{aligned} \|\nabla(\tilde{u}_h - u)\|_{H^0(R^3)}^2 &= \int_{R^3} \left( \nabla \sum_{j=1}^N S_j(x) (\tilde{q}_j - q_j) \bar{\varphi}_j \right)^2 dx = \\ &= 4\pi \sum_{ij=1}^N S_{ij} (\tilde{q}_i - q_i) \bar{\varphi}_i (\tilde{q}_j - q_j) \bar{\varphi}_j \leq \\ &\leq 4\pi \sum_{ij=1}^N A_{ij} (\tilde{q}_i - q_i) \bar{\varphi}_i (\tilde{q}_j - q_j) \bar{\varphi}_j = 4\pi \|\tilde{q}_h - q_h\|^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда и из (25a) имеем

$$\begin{aligned} \|\nabla(\tilde{u}_h - u_h)\|_{H^0(\Omega_{\varepsilon})} &\leq \|\nabla(\tilde{u}_h - u_h)\|_{H^0(R^3)} \leq \\ &\leq Ch^{3/2-\varepsilon} \|q\|_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Рассмотренная методика апробирована при численном решении трехмерных краевых задач для уравнения Гельмгольца и дифракции (трансмиссии) акустических волн в работах [10, 11]. Число точек дискретизации  $N$  варьировалось от 500 до 128 000. Полученные в результате дискретизации СЛАУ решались численно обобщенным методом минимальной невязки (GMRES) с применением мозаично-скелетонных аппроксимаций [12, 13]. Для выполнения расчетов были использованы вычислительные ресурсы ЦКП “Центр данных ДВО РАН”. Проведенные численные эксперименты показали достаточно высокую эффективность применяемого подхода. При этом при больших  $N$ , скорости сходимости приближенных решений интегральных уравнений и исходных дифференциальных задач имели те же порядки, что и в теореме 4.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00450).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука. 1976. 664 с.
2. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral equations. Cambridge: Cambridge University Press. 2000. 372 p.
3. *Beale J.T.* A grid-based boundary integral method for elliptic problems in three dimensions // *SIAM J. Numer. Anal.* 2004. V. 42. № 2. P. 599–620.
4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979. 284 с.
5. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: СО РАН. 2018. 511 с.
6. *Смагин С.И.* Численное решение интегрального уравнения I рода со слабой особенностью для плотности потенциала простого слоя // *ЖВМиМФ.* 1988. Т. 28. № 11. С. 1663–1673.
7. *Hsiao G.C., Wendland W.L.* A finite element method for some integral equations of the first kind // *J. Math. Anal. and Appl.* 1977. V. 58. № 3. P. 449–481.
8. Обобщенные решения интегральных уравнений I рода со слабыми особенностями на замкнутых поверхностях // *ДУ.* 1986. Т. 25. № 2. С. 340–341.
9. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит. 2007. 488 с.
10. *Каширин А.А., Смагин С.И.* О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // *ЖВМиМФ.* 2012. Т. 52. № 8. С. 1492–1505.
11. *Каширин А.А., Смагин С.И., Талтыкина М.Ю.* Применение мозаично-скелетонного метода при численном решении трехмерных задач Дирихле для уравнения Гельмгольца в интегральной форме // *ЖВМиМФ.* 2016. Т. 56. № 4. С. 625–638.
12. *Saad Y., Schultz M.* GMRES: A General Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems // *SIAM J. Sci Stat. Comput.* 1986. V. 7. № 3. P. 856–869.
13. *Савостьянов Д.В., Ставцев С.Л., Тыртышников Е.Е.* Об использовании мозаично-скелетных аппроксимаций при решении гиперсингулярных интегральных уравнений // Численные методы, параллельные вычисления и информационные технологии. М.: МГУ. 2008. С. 225–244.

## ON NUMERICAL SOLVING OF THE FIRST KIND INTEGRAL EQUATION WITH A WEAK SINGULARITY IN THE KERNEL ON A CLOSED SURFACE

Corresponding member of the RAS **S. I. Smagin**<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Khabarovsk Federal Research Centre of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russian Federation*

A direct method (self-regularization method) for the numerical solution of a weakly singular integral equation of the first kind on a closed surface is considered. This equation is an integral formulation of the internal and external three-dimensional Dirichlet problems for the Laplace equation, if their solutions are sought in the form of the potential of a simple layer. It is approximated by a system of linear algebraic equations, which is solved numerically. In this case, a new method of averaging the kernel of the integral operator is used. It preserves the conditional correctness of the discretized problem and significantly increases the rate of convergence of its solution to the exact solution of the integral equation.

*Keywords:* integral equation, operator, method, averaging, approximation, numerical solution

## О РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИИ МЕТОДА ЧАСТИЦ ДЛЯ ГИБРИДНОГО СУПЕРКОМПЬЮТЕРА

© 2022 г. Академик РАН Б. Н. Четверушкин<sup>1</sup>, М. Б. Марков<sup>1,\*</sup>, Р. В. Усков<sup>1</sup>

Поступило 21.03.2022 г.

После доработки 08.05.2022 г.

Принято к публикации 01.06.2022 г.

Представлена реализация алгоритма метода частиц на гибридном кластере с графическими процессорными устройствами (ГПУ) для моделирования объемной генерации, распространения и рассеяния электронов в самосогласованном электромагнитном поле. Предложены решения проблем синхронизации записи результатов и обмена данными при расчете параметров частиц, снижающие расход оперативной памяти ГПУ.

*Ключевые слова:* метод частиц, синхронизация вычислений, графическое процессорное устройство

DOI: 10.31857/S2686954322040063

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Преимуществом гибридных суперкомпьютеров с ГПУ является высокая скорость вычислений. Она обусловлена большой пиковой производительностью ГПУ при однотипной обработке большого объема данных. Поэтому ГПУ являются перспективным средством повышения эффективности математического моделирования физических процессов [1].

Архитектура ГПУ предъявляет особые требования к вычислительным алгоритмам. Поэтому большинство научных и технических проблем, требующих численного решения уравнений математической физики, по-прежнему решаются на центральных процессорных устройствах (ЦПУ).

Данная работа представляет реализацию вычисления распределений электронов в самосогласованном электромагнитном поле методом частиц [2] на гибридном кластере. Метод подразумевает расчет электронных координат и импульсов, изменяющихся под действием поля и столкновений, совместно с решением уравнений Максвелла с плотностью тока в правой части. Гибридный кластер состоит из вычислительных узлов, в которых на каждый ГПУ приходится  $n$  штук ЦПУ. ГПУ включает  $m$  потоковых мультипроцессоров – специализированных чипов, каждый из которых является независимым вычислителем.

Узел имеет общую оперативную память, доступную всем ЦПУ. Оперативная память ГПУ доступна всем его чипам. Объем вычислений динамических переменных и плотности тока превышает потребный для решения уравнений Максвелла. Поэтому использование ГПУ для реализации метода частиц является актуальной проблемой [3–8].

Данная работа представляет реализацию метода частиц на гибридном кластере для задач со следующей спецификой. Электроны генерируются во всей расчетной области и рассеиваются с малой передачей импульса. Длина пробега, лармовский и дебаевский радиусы электронов малы по сравнению с размером расчетной области.

### 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Рассмотрим кинетическое уравнение для зависящей от времени  $t$  функции распределения электронов  $f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  в фазовом пространстве координат  $\mathbf{r}$  и импульсов  $\mathbf{p}$  [9]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}f) + e \operatorname{div}_{\mathbf{p}} [(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{H}]/c)f] + \sigma' v f = Q + \int d\mathbf{p}' \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{p}') v' f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}'), \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{v}$  – скорость,  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{H}(t, \mathbf{r})$  – напряженности электрического и магнитного полей,  $\operatorname{div}_{\mathbf{p}}$  – дивергенция в пространстве импульсов,  $e$  – заряд электрона,  $c$  – скорость света,  $\sigma'$  и  $\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  – пол-

<sup>1</sup> Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша  
Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: m\_b\_markov@mail.ru

ное и дифференциальное макроскопические сечения рассеяния электронов,  $Q(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  – интенсивность генерации электронов в фазовом пространстве;  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = e \int \mathbf{v} f d\mathbf{p}$  – плотность электрического тока. Интеграл столкновений в (1) моделирует тормозное излучение, упругое рассеяние электронов, ионизацию и возбуждение среды. При низких энергиях учитывается прилипание к молекулам и рекомбинации с ионами [10–12].

Основу алгоритма решения уравнения (1) составляет представление решения суммой частиц  $\omega_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l^s) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_l^s)$ , где функции  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_l^s(t)$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_l^s(t)$  описывают траекторию частицы [13], появившейся в момент времени  $t_l$  с начальными координатами  $(\mathbf{r}_l, \mathbf{p}_l)$  в фазовом пространстве. Величина  $\omega_l$  определяет количество электронов, моделируемое частицей с номером  $l$ . Параметры  $t_l, \mathbf{r}_l, \mathbf{p}_l$  и  $\omega_l$  выбираются так, чтобы максимально точно аппроксимировать источник электронов  $Q$  минимальным количеством частиц. Алгоритм сочетает статистическое моделирование рассеяния электронов с решением уравнений их движения в электромагнитном поле между столкновениями [14]. Пусть в моменты времени  $t_l \in [t_n; t_{n+1}]$  в ячейке разностной сетки образуется  $L$  частиц, в том числе, оставшихся с предыдущего временного шага с  $t_l = t_n$ , генерируемых источником в течение интервала  $(t_n, t_{n+1})$ , прибывающих из соседних ячеек и образующихся при ударной ионизации. Алгоритм вычисляет функцию  $f(t_{n+1}, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ , удовлетворяющую уравнению (1) с источником

$$Q_n(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sum_{l=1}^L \omega_l \delta(t - t_l) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_l).$$

Выполнение алгоритма состоит в построении для частицы траектории, которую она проходит за время  $t_{n+1} - t_l$ . При этом моделируются события: выход из ячейки, поглощение, рассеяние, генерация вторичной частицы. Траектория разбивается на сегменты между событиями. Вычисляется время  $t_p$ , за которое частица проходит сегмент. Оно определяется как минимальное из интервала  $t_a = t_{n+1} - t_l$ , оставшегося до конца шага по времени; времени до пересечения границы ячейки  $t_m$ ; времени до столкновения  $t_c$ . После определения  $t_p$  интегрируются уравнения движения в заданном поле. Значения его компонент интерполируются в точку, где находится частица. Рассчитывается плотность тока, созданного частицей за время  $t_p$ . Значение  $t_a$  пересчитывается:  $t_a \rightarrow t_a - t_p$ . Если  $t_p = t_c$ , то после вычисления новых координат и импульсов моделируется столкновение. Импульс частицы мгновенно изменяется статистически в соответствии с дифференциаль-

ным сечением рассеяния. Если при столкновении возникла новая частица, то она заносится в список необработанных с координатами, весом и параметром  $t_a$  рассеянной частицы. Если после окончания построения сегмента величина  $t_a$  остается положительной, то алгоритм расчета повторяется для следующего сегмента, начиная с определения  $t_p$ . Если  $t_a = 0$ , то частица считается достигшей верхнего временного слоя и заносится в список обработанных с текущими параметрами. Моделирование столкновений, решение уравнений движения, расчет плотности тока рассмотрены в работах [9, 14, 15].

### 3. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА НА ГИБРИДНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Рассмотренный алгоритм решения уравнения (1) позволяет выделить основной объем логически простых вычислений – расчет параметров частиц, и выполнить их на ГПУ. Уравнения Максвелла (2) решаются с помощью явной разностной схемы [16] и требуют существенно меньшего объема вычислений. Поэтому задача совместного решения уравнений (1)–(2) разбивается на два этапа. Траектории частиц и плотность тока в заданном электромагнитном поле вычисляются на ГПУ под управлением ЦПУ. Затем ЦПУ вычисляют электромагнитное поле на следующем шаге. Каждое ЦПУ обрабатывает одну из прямоугольных подобластей расчетной области. Обмен данными на границах подобластей осуществляется в модели “матрица процессоров”.

Рассмотрим вычисление плотности тока. Оперативная память и чипы каждого ГПУ делятся между  $n$  ЦПУ. В части ГПУ, выделенной данному ЦПУ, обрабатываются частицы из его подобласти. На каждом временном слое ЦПУ присваивает вновь появившимся частицам параметры  $\omega, \mathbf{r}, \mathbf{p}, t_l$  и передает их на ГПУ. Также на ГПУ передаются значения сеточных компонент поля на данном слое, **используемые** вместе с сечениями рассеяния для моделирования движения частицы всеми чипами. На одном временном шаге используемые данные не меняются. Кроме того, каждому чипу отводится свой участок общей памяти ГПУ для хранения **вычисляемых** данных – сеточных значений плотности тока. Это исключает синхронизацию записи вкладов частиц, обрабатываемых отдельными чипами, в вычисляемые величины. При этом объем памяти, хранящей вычисляемые данные, резко увеличивается.

Рассмотрим выполнение вычислений на ГПУ. Под вычислительным ядром понимается задание на обработку некоторой совокупности частиц. Под обработкой понимается пересчет координат и импульсов частицы при построении очередного

сегмента траектории. Ядро есть совокупность исходных данных о координатах и импульсах частиц на текущем слое, применяемого алгоритма, параллельной конфигурации вычислителей. Кодом ядра называется последовательность арифметических операций над характеристиками частицы, реализующая алгоритм для каждой из них. Вычислительные потоки, выполняющие код, группируются в блоки в соответствии с конфигурацией ядра. Конфигурация задает количество вычислителей в блоке и количество блоков. Блок потоков целиком выполняется одним чипом. Чтобы потоки могли обрабатывать независимые данные, т.е. разные частицы, при выборе данных они ориентируются на номер блока и свой номер в нем. Каждый блок в комплекте вычисляемых данных хранит значения плотности тока в ячейках сетки. В процессе обработки потоки блока атомарно записывают вклады частиц в вычисляемые данные для соответствующих ячеек. Вклады частиц блоков по окончании моделирования на данном временном слое суммируются.

За один запуск ядра для частицы строится очередной сегмент траектории. Для отдельной частицы результатом запуска может быть: переход на следующий слой и окончание моделирования на данном шаге по времени; достижение границы ячейки или точки взаимодействия; поглощение и окончание моделирования. Количество обрабатываемых при однократном запуске ядра частиц есть произведение количеств потоков в блоке  $N_{\text{block}} = 512$  и числа мультипроцессоров  $N_{\text{mp}} = m/n$ , т.е. несколько тысяч. Для перевода всех частиц на следующий слой ядро запускается многократно. Вычислители, частицы которых после очередного запуска обработаны, при следующем запуске начинают обрабатывать другие частицы системы. Запуски ядра продолжаются до достижения всеми частицами данного ЦПУ следующего слоя.

Данные о частицах на ГПУ хранятся в трех доменах памяти. В первом домене хранятся данные частиц, оставшихся в подобласти с предыдущего шага по времени. Для каждого из потоков закладывается собственный домен под частицы, всего  $N_{\text{block}} * N_{\text{mp}}$  доменов. Второй и третий домены хранят данные входящих и выходящих частиц. К входящим относятся частицы, рожденные на текущем шаге по времени, а также прилетевшие из соседних подобластей сетки. К выходящим относятся частицы, вылетевшие за границу подобласти. Для входящих и выходящих частиц создается по отдельному домену — “корзине” на каждый чип, всего  $N_{\text{mp}}$  “корзин” каждого типа. Входные корзины равномерно заполняются на стороне ЦПУ в перерывах между запусками ядра. Аналогично на стороне ЦПУ опустошаются выходные корзины. Для каждого потока на ГПУ хранятся номер  $I_{\text{write}}$  элемента памяти, из которого берутся характери-

стики частицы для обработки при запуске ядра, и номер  $I_{\text{read}}$  элемента памяти, в который будут записаны изменившиеся характеристики обработанной частицы. Для каждого чипа на ГПУ также хранятся количества частиц во выходной ( $I_{\text{out}}$ ) и входной ( $I_{\text{in}}$ ) корзинах.

Последовательность вычислений (рис. 1) включает фрагментацию памяти в массиве, т.е. возникновения пустых элементов. Если частица достигает конца шага по времени, оставаясь в текущей подобласти, то указатели  $I_{\text{read}}$  и  $I_{\text{write}}$  одновременно перемещаются на следующий элемент памяти. Если частица выбывает из рассмотрения и в массиве и образуется свободная ячейка, то вперед двигается только указатель  $I_{\text{read}}$ . Таким образом, все последующие частицы после обработки сдвинутся в массиве данных и закроют “дыру”. Это позволяет автоматически балансировать количество частиц между потоками. Поток забирает на обработку частицы из входных корзин только после того, как все частицы, оказавшиеся в его домене на начало шага по времени, будут обработаны. Поэтому чем больше у потока частиц для обработки, тем позднее он начнет брать дополнительные частицы из входной корзины. Наполнение корзин балансируется на ЦПУ. После окончания обработки всех частиц на всех ГПУ вклады в плотности токов от всех блоков суммируются на каждом из ГПУ. Вклады от каждой подобласти отправляются на ЦПУ для решения уравнений Максвелла на верхнем слое. Проблемой данной реализации является необходимость хранения в памяти ГПУ отдельного комплекта вычисляемых данных для каждого чипа. Уменьшить объем памяти, занимаемой комплектом, позволяет управление каждым ГПУ не одним, а несколькими ( $n$ ) ЦПУ. Пусть ГПУ обрабатывает частицы в  $N$  ячейках сетки. Каждый ЦПУ управляет обработкой частиц на ячейках сетки в количестве  $N/n$ . На один ЦПУ приходится  $1/n$  памяти и  $m/n$  чипов ГПУ. Тогда расход памяти ГПУ на хранение вычисляемых данных пропорционален  $(Nm/n^2)$ .

Следующей проблемой является межпроцессорная синхронизация окончания шага по времени. Она необходима, поскольку частицы могут перемещаться между подобластями в рамках одного шага. При моделировании очередного шага на каждом ЦПУ одновременно происходят два параллельных процесса: запуск на ГПУ ядер с обменом частицами и координация MPI-обменов. При координации MPI-обменов итеративно проверяется готовность ЦПУ. Считается, что оно закончило моделирование, если все частицы его подобласти достигли конца шага по времени, а для всех частиц, отправленных в соседние подобласти, получено подтверждение о получении адресатом. В случае готовности ЦПУ выставляет асинхронный барьер, не блокирующий коорди-

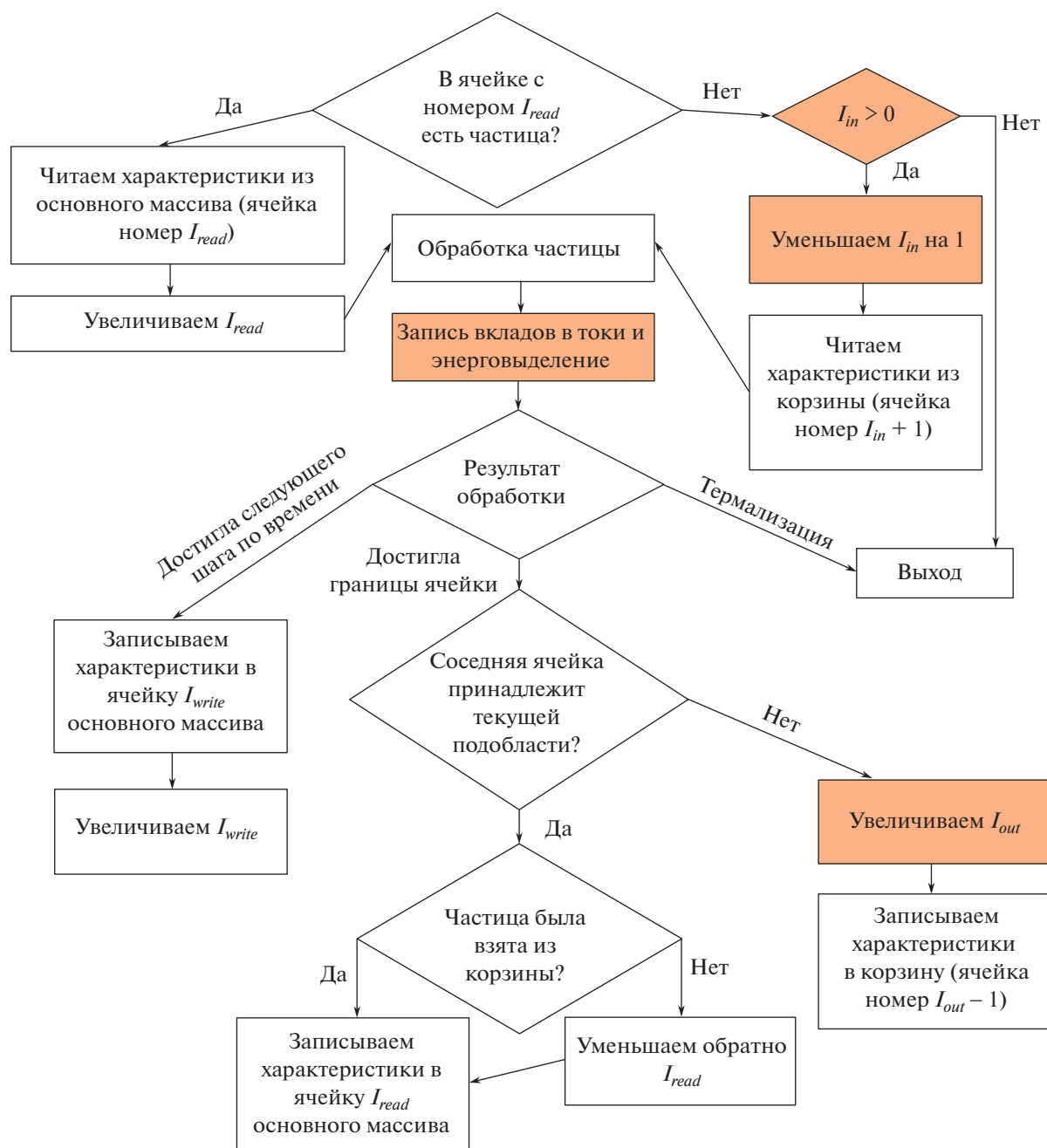


Рис. 1. Организация вычислений. Цветом отмечены операции, требующие синхронизации внутри блока потоков.

нацию MPI-обменов. Таким образом ЦПУ, закончивший моделирование, при получении новых частиц из соседней подобласти возобновляет их обработку. По достижении всеми ЦПУ барьера моделирование приостанавливается. Подсчитывается общее количество необработанных частиц. Если оно равно нулю, шаг по времени заканчивается.

Эффективность реализации решения уравнения (1) проверена в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН на одном узле вычислительного кластера К60. Он

включает 32 ядра ЦПУ в составе двух процессоров Intel Xeon Gold 6142 v4 и четыре ГПУ nVidia V100 GV100GL, 768 Gb RAM, 2 Тб HDD. Рассмотрена задача моделирования движения в постоянном магнитном поле электронов, образуемых однородным объемным источником. Параметры подобраны так, что частицам приходится многократно пересекать границы подобластей. Сравнились скорости расчета параметров 30 млн. частиц только на ЦПУ и в рассмотренной модели распараллеливания с использованием ГПУ. По-

казано, что применение ГПУ обеспечивает ускорение более, чем в 30 раз. С уменьшением числа частиц ускорение растет. Это связано со снижением затрат ресурсов на пересылку параметров частиц между подобластями. Также уменьшение числа частиц сохраняет равномерность их распределения в пространстве, т.е. по вычислителям ГПУ.

Авторы надеются, что предложенное решение проблемы синхронизации записи результатов и обмена данными при расчете параметров частиц поможет заинтересованным специалистам при решении практических задач моделирования объемной генерации, распространения и рассеяния релятивистских электронов в самосогласованном электромагнитном поле.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Четверушкин Б.Н. Суперкомпьютерные технологии: Проблемы и перспективы ближайшего будущего // Вестн. РАН. 2018. Т. 88. № 12. С. 1083–1089.
2. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование: Пер. с англ. // М.: Энергоатомиздат, 1989. 452 с. Charles K. Birdsall, A. Bruce Langdon. Plasma physics, via computer simulation // McGraw-Hill Book Company, 1985.
3. Dadyka D.I., Anisimov I.O. Implementation of the Modern Plasma Simulation Codes via PIC Method for Parallel Computing Systems // Problems of Atomic Science and Technology. 2017, № 1. Series: Plasma Physics (23). P. 64–67.
4. Myers A. et al. Porting WarpX to GPU-accelerated platforms // Parallel Computing. 2021. V. 108. 102833.
5. Fatemi S. et al. AMITIS: A 3D GPU-Based Hybrid-PIC Model for Space and Plasma Physics. // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2017. 837. 012017.
6. Романенко А.А., Снытников А.В. Оптимизация перепорядочивания модельных частиц при реализации метода частиц в ячейках на GPU // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2019. Т. 17. № 1. С. 82–89.
7. Bastrakov S., Donchenko R., Gonoskov A., Efimenko E., Malyshev A., Meyerov I., Surmin I. Particle-in-cell plasma simulation on heterogeneous cluster systems. // Journal of Computational Science. 2013. V. 3. P. 474–479.
8. Kelling J., Bastrakov S. et al. Challenges Porting a C++ Template-Metaprogramming Abstraction Layer to Directive-based Offloading. // arXiv-CS-Software Engineering (IF), 2021-10-16.
9. Berezin A.V., Markov M.B., Parot'kin S.V. On the Particle Method for Electrons in an Inhomogeneous Scattering Medium // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. T. 61. № 9. С. 1521–1531.
10. Мэсси Г., Бархон Е. Электронные и ионные столкновения. М.: МИР, 1958. S.W. Massey, E.H.S. Burhop. Electronic and Ionic Impact Phenomena // Oxford: Clarendon Press, 1969.
11. Kim Y.-K., Rudd M.E. Theory for Ionization of Molecules by Electrons. // Phys. Rev. 1994. A 50. P. 3954–3967.
12. Александров Н.Л. Трехчастичное прилипание электрона к молекуле // УФН. 1988. V. 154. № 2. С. 177.
13. Braun W., Hepp K. The Vlasov Dynamics and Its Fluctuations in the 1/N Limit of Interacting Classical Particles. Commun. math. Phys. 1977. V. 56.
14. Berezin A.V., Vortonsov A.S., Zhukovskiy M.E., Markov M.B., Paroy'kin S.V. Partical method for electrons in a scattering medium // Comput. Math. Math. Phys. 2015. V. 55. № 9. P. 1534–1546.
15. Андрианов А.Н., Березин А.В., Воронцов А.С., Ефимкин К.Н., Марков М.Б. Моделирование электромагнитных полей радиационного происхождения на многопроцессорных вычислительных системах. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 74, 2006.
16. Березин А.В., Марков М.Б., Плющенко Б.Д. Локально-одномерная разностная схема для электродинамических задач с заданным волновым фронтом. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 31, 2005.

## ON THE PARALLELIZATION OF THE PARTICLE METHOD FOR HYBRID SUPERCOMPUTER

Academician of the RAS B. N. Chetverushkin<sup>a</sup>, M. B. Markov<sup>a</sup>, and R. V. Uskov<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

An implementation of the particle method algorithm on a hybrid cluster with graphic processor units (GPU) for modeling volumetric generation, propagation and scattering of electrons in a self-consistent electromagnetic field is presented. Solutions to the problems of synchronization of recording results and data exchange in the calculation of particle parameters, which reduce the consumption of GPU RAM, are considered.

*Keywords:* particle method, synchronization of calculations, GPU

УДК 51-77+614.44+338.1+330.4

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕОДОЛЕНИЯ ПАНДЕМИИ COVID-19 И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

© 2022 г. Академик РАН В. А. Садовничий<sup>1,\*</sup>, Иностраный член РАН А. А. Акаев<sup>2,\*\*</sup>,  
А. И. Звягинцев<sup>3,\*\*\*</sup>, А. И. Сарыгулов<sup>4,\*\*\*\*</sup>

Поступило 01.04.2022 г.

После доработки 19.04.2022 г.

Принято к публикации 01.06.2022 г.

Предложена математическая модель, которая не только генерирует сценарные прогнозы, но и одновременно формирует конкретные управленческие меры, направленные на подавление пандемии и восстановление экономического роста. Разработанная модель взаимного влияния пандемии и экономики является не только инструментом эффективного и адекватного прогнозирования, но и способна имитировать различные сценарии, которые вполне могут соответствовать реальным эпидемиологическим процессам. Возможность практически управлять динамикой пандемии и ВВП с целью стабилизации социально-экономического развития — одно из преимуществ этой модели.

*Ключевые слова:* COVID-19, экономические системы, модели управления, восстановление экономики

**DOI:** 10.31857/S2686954322040166

Математические модели, описывающие распространение эпидемии COVID-19, начали разрабатываться практически одновременно с первой вспышкой заболевания в Китае в январе 2020 г. В основе таких моделей лежат различные подходы, обзоры которых содержатся, например, в работах [1–3]. Существенным недостатком большинства разработанных математических моделей является их неспособность имитировать циклические процессы, которые характерны для волнообразной динамики заболеваемости коронавирусом. Наконец, отсутствуют модели, которые генерируют конкретные математически обоснованные размеры и сроки осуществления мероприятий по преодолению пандемии и направленных на обеспечение экономического роста.

Данная работа посвящена математическому моделированию процессов преодоления пандемии и восстановления экономического роста, а также моделированию необходимых объемов антикризисных мер и эффективных сроков их проведения. В качестве базовых экономико-математических моделей были использованы модель Кермака–Маккендрика [4] и модель Сандерсона [5, 6].

Предложенная В. Кермаком и А. Маккендриком [4] модель является классической SIR-моделью распространения инфекции и состоит из 3 дифференциальных уравнений. Отдельные эксперты считают ошибочным использование SIR-моделей для описания пандемии коронавируса [7]. Действительно, в этой модели считается, что переболевшие индивиды приобретают иммунитет и не могут быть заражены вторично. Для пандемии COVID-19 это предположение не выполняется. Более того, в SIR-модели не учитывается процесс вакцинации от вирусной инфекции. В этой связи мы добавили в SIR-модель четвертое “вакцинное” уравнение и ввели поправочные компоненты, которые учитывают возможность повторного заражения и другие нюансы. Кроме того, поскольку при практическом моделировании приходится оперировать дискретными значениями статистики, то целесообразен переход от дифференциальных уравнений к разностным уравнениям. В результате мы получили эпидемио-

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup> Институт математических исследований сложных систем Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>3</sup> Михайловская военная артиллерийская академия, Санкт-Петербург, Россия

<sup>4</sup> Санкт-Петербургский государственный экономический университет, Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: info@rector.msu.ru

\*\*E-mail: askarakaev@mai.ru

\*\*\*E-mail: azvyagintsev@mail.ru

\*\*\*\*E-mail: dept.cfr@unecon.ru



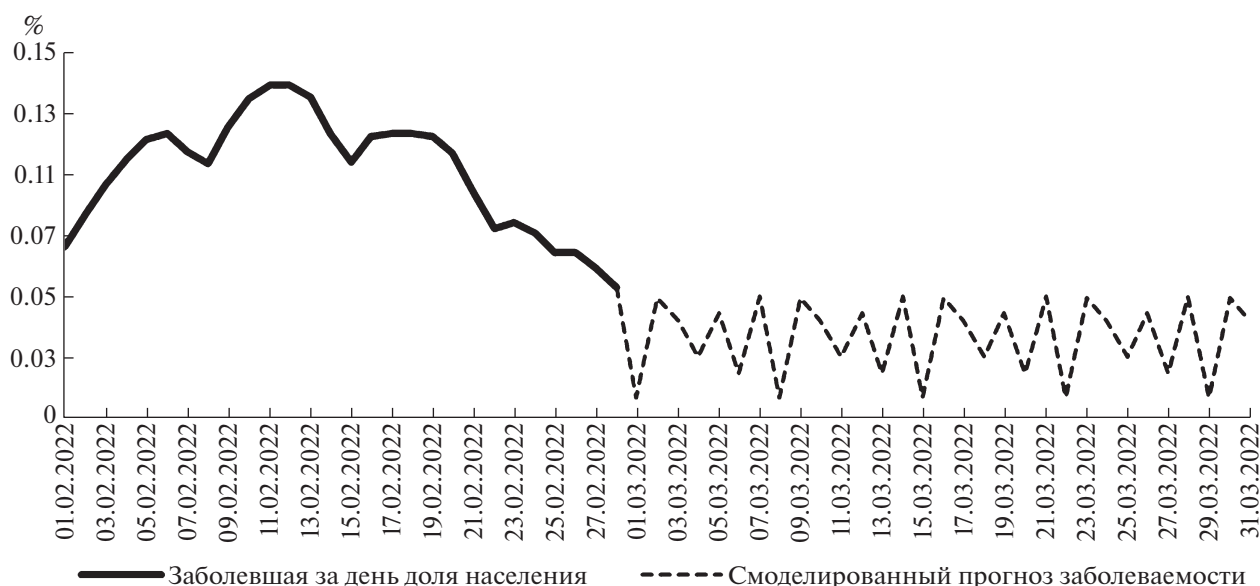


Рис. 1. Смоделированный прогноз заболеваемости коронавирусом в России.

математическую модель в виде дискретной системы уравнений:

$$\begin{cases} S_{j+1} = S_j(1 - rI_j - q + a) \\ I_{j+1} = I_j(1 + rS_j - v) + cR_j \\ R_{j+1} = R_j(1 - c) + vI_j + dV_j \\ V_{j+1} = V_j(1 - d) + qS_j + bR_j \end{cases} \quad (1)$$

$j = 0, 1, 2, \dots$

Здесь  $S_j$ ,  $I_j$ ,  $R_j$ ,  $V_j$  — соответственно численности восприимчивых к заражению (не болевших COVID, но и не сделавших вакцинацию), больных COVID, выздоровевших, полностью вакцинированных (двумя дозами) граждан;  $r$  — коэффициент скорости заражения COVID;  $v$  — коэффициент интенсивности выздоровления инфицированных индивидов;  $q$  и  $b$  — коэффициенты вакцинации соответственно для не болевших и переболевших COVID;  $d$  — коэффициент ревакцинации;  $c$  — коэффициент повторного заражения COVID;  $a$  — коэффициент флуктуации населения, который учитывает эффект изменения численности населения в результате рождаемости и смертности и в силу миграции граждан.

В качестве примера рассмотрим коронавиральную статистику по России [8]. Высший пик заболеваемости пришелся на февраль 2022 г., причем динамика заболеваемости имела “пилообразную” конфигурацию. Рисунок 1 содержит ежедневные показатели новых заражений коронавирусом среди граждан России в феврале. Динамика заболеваемости имеет четко прослеживаемую цикличность с периодом 7 дней.

Покажем, что модель (1) позволяет генерировать циклические траектории с требуемой перио-

дичностью. Из выше изложенного следует, что интерес представляют циклы с периодом 7 дней. В результате компьютерного эксперимента были подобраны численные значения параметров системы (1):

$$\begin{aligned} r &= 2.14970486321458; & v &= 1.80089137686731; \\ q &= 1.25507485843425; & \alpha &= 1.94597445654447; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 0.0247039444045711; \\ c &= 0.0619984179153856; \\ d &= 0.00807089279296773. \end{aligned}$$

С помощью приближенных методов были найдены начальные условия, при которых система (1) моделирует периодическую орбиту с периодом 7:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_0 &= 0.539753228690255; \\ \tilde{I}_0 &= 0.946101872256248; \\ \tilde{R}_0 &= 2.23329875094284; \\ \tilde{V}_0 &= 3.89439991609052. \end{aligned} \quad (2)$$

Осуществленная на основании статистических данных [8] верификация периодической орбиты, смоделированной системой (1) с начальными условиями (2), позволяет получать прогнозируемые циклы для COVID-19, адаптированные к эпидемиологическим реалиям. Рисунок 1 содержит график смоделированного краткосрочного прогноза для возможных колебаний коронавиральной динамики на март 2022 г.

Коронавирусная эпидемия спровоцировала глобальный экономический кризис. В России [9, 10] по итогам 2020 г. ВВП на душу населения упал на 2.07%, нарушив тенденцию к росту в



Рис. 2. Смоделированные прогнозы динамики заболеваемости и выздоровления.

предыдущие до пандемии годы. Для математической интерпретации взаимного влияния пандемии и экономики мы воспользовались двумя уравнениями из предложенной В. Сандерсоном [5, 6] дискретной модели, которая называется моделью Wonderland (“Чудесная страна”) и описывает взаимосвязь экономических, демографических и экологических процессов.

В итоге получена математическая модель взаимного влияния пандемии и экономики:

$$\begin{cases} S_{j+1} = S_j(1 - rI_j - q + a) \\ I_{j+1} = I_j(1 + rS_j - v) + cR_j \\ R_{j+1} = R_j(1 - c) + vI_j + dV_j \\ V_{j+1} = V_j(1 - d) + qS_j + bR_j \\ z_{j+1} = \frac{z_j e^{\delta z_j^{\rho} - \omega y_j I_j}}{1 - z_j + z_j e^{\delta z_j^{\rho} - \omega y_j I_j}} \\ y_{j+1} = y_j(1 + \gamma - (\gamma + \eta)(1 - z_j)^{\lambda}). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь коэффициенты  $\gamma, \eta, \lambda, \delta, \rho, \omega$  являются константами;  $y_j$  – ВВП на душу населения. Через  $z_j$  обозначается уровень преодоления пандемии ( $0 \leq z_j \leq 1$ ). В случае  $z_j = 1$  считается, что эпидемиологическая обстановка находится в идеальном состоянии и заражение COVID полностью отсутствует. Значение  $z_j = 0$  выражает противоположный предельный случай, когда размеры пандемии настолько велики, что возникает максимальная угроза для человеческого здоровья и экономики.

Государство заинтересовано в преодолении пандемии, восстановлении экономического роста и возвращении социально-экономической обстановки в устойчивый режим. С математической точки зрения устойчивому режиму соответствует неподвижная точка системы (3). Для нахождения неподвижной точки правые части в (3) приравниваются соответственно  $S_j, I_j, R_j, V_j, z_j, y_j$  и вычисляются координаты неподвижной точки  $w_{\#}$ .

Поскольку для показателей заболеваемости и выздоровления характерна хаотичность, то в целях преодоления хаотичной динамики осуществим модификацию модели (3), используя результаты из современной теории управления хаосом. Введем обозначения

$$\begin{aligned} w_1(j) &= S_j; & w_2(j) &= I_j; & w_3(j) &= R_j; \\ w_4(j) &= V_j; & w_5(j) &= z_j; & w_6(j) &= y_j \end{aligned}$$

и запишем систему (3) в векторной форме:

$$w(j + 1) = F(w(j)); \quad j \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (4)$$

где

$$w(j) = \begin{pmatrix} w_1(j) \\ w_2(j) \\ w_3(j) \\ w_4(j) \\ w_5(j) \\ w_6(j) \end{pmatrix};$$

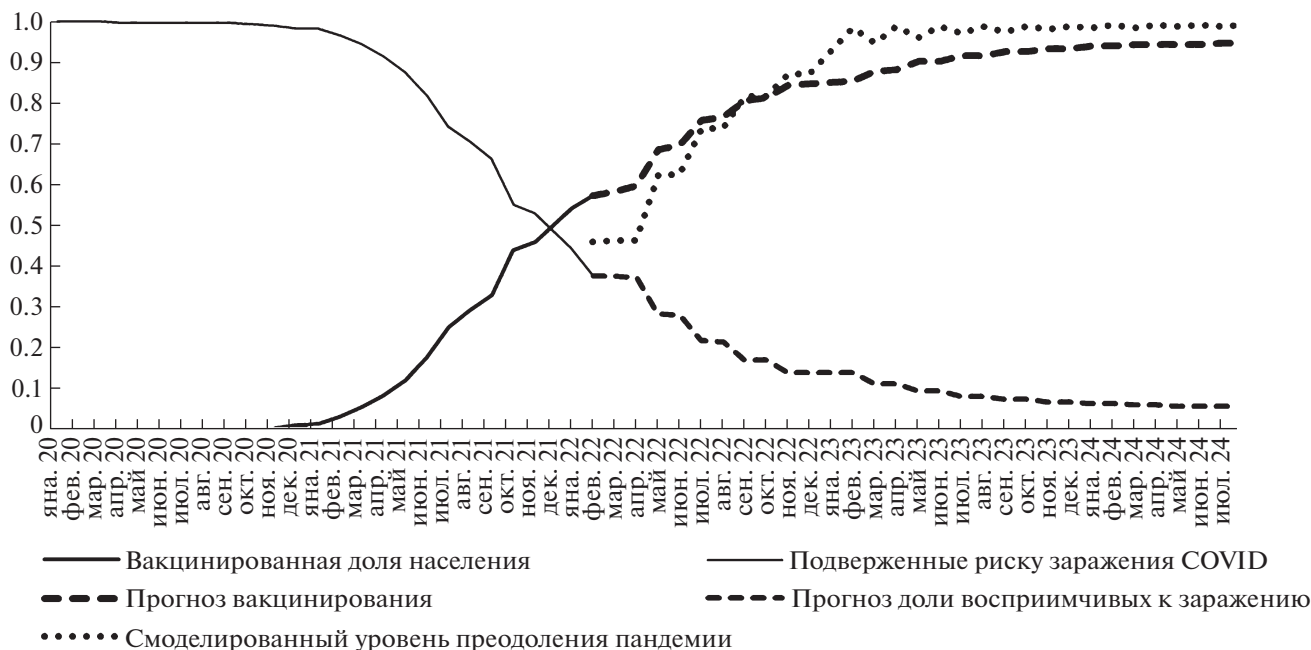


Рис. 3. Смоделированный прогноз динамики вакцинации.

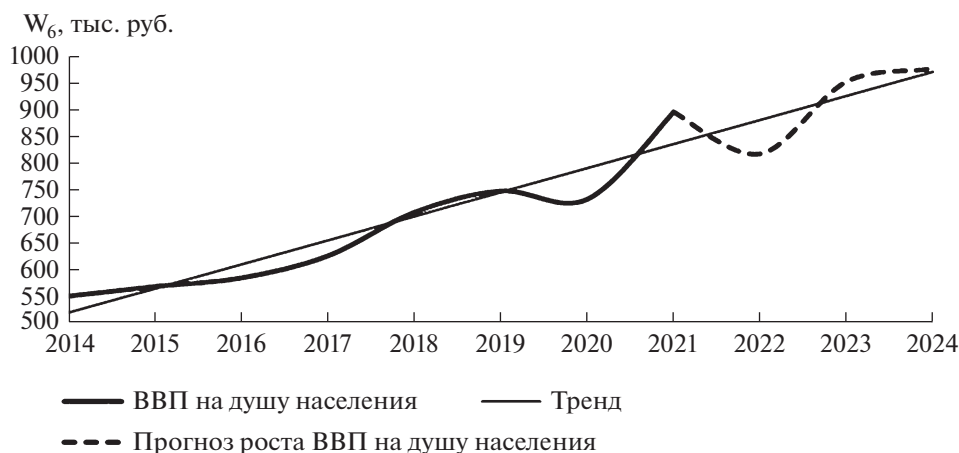


Рис. 4. Смоделированный прогноз восстановления роста ВВП на душу населения в России.

$$F(w(j)) = \begin{pmatrix} w_1(j)(1 - rw_2(j) - q + a) \\ w_2(j)(1 + rw_1(j) - v) + cw_3(j) \\ w_3(j)(1 - c) + vw_2(j) + dw_4(j) \\ w_4(j)(1 - d) + qw_1(j) + bw_3(j) \\ w_5(j)e^{\delta w_5^p(j) - \omega w_6(j)w_2(j)} \\ \frac{w_5(j)e^{\delta w_5^p(j) - \omega w_6(j)w_2(j)}}{1 - w_5(j) + w_5(j)e^{\delta w_5^p(j) - \omega w_6(j)w_2(j)}} \\ w_6(j)(1 + \gamma - (\gamma + \eta)(1 - w_5(j))^\lambda) \end{pmatrix}.$$

Совершив линеаризацию системы (4) в окрестности неподвижной точки  $w_{\#}$  и затем при-

менив метод Пирагаса [11], получим модифицированную систему:

$$w(j + 1) = F(w(j)) + U(j); \quad j \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (5)$$

где  $U(j)$  является функцией управления, предназначенной для стабилизации поведения решений системы. На основании результатов работ [12, 13] по стабилизации дискретных систем получается функция управления следующего вида:

$$U(j) = F(w_{\#}) - F(w(j)) + A(w_{\#})[w(j) - w_{\#}] + P(j)[w(j) - w(j - 1)]. \quad (6)$$

Таблица 1

Месяц	Масштабы вакцинации (% населения)	Дополнительные инвестиции в экономику (млрд. руб.)	Месяц	Масштабы вакцинации (% населения)	Дополнительные инвестиции в экономику (млрд. руб.)
мар.22	0.0	0.0	авг.23	0.0	1.3
апр.22	0.0	0.0	сен.23	1.1	146.0
май.22	10.7	2720.9	окт.23	0.0	0.7
июн.22	0.0	0.0	ноя.23	0.8	102.2
июл.22	7.5	2179.2	дек.23	0.0	0.3
авг.22	0.0	0.0	январ.24	0.6	71.6
сен.22	5.2	1646.1	февр.24	0.0	0.2
окт.22	0.0	0.0	мар.24	0.4	50.1
ноя.22	3.7	1211.4	апр.24	0.0	0.1
дек.22	0.0	0.0	май.24	0.3	35.1
январ.23	0.0	14.8	июн.24	0.0	0.0
февр.23	0.0	9.9	июл.24	0.2	24.5
мар.23	3.3	425.8	авг.24	0.0	0.0
апр.23	0.0	5.2	сен.24	0.1	17.2
май.23	2.3	298.1	окт.24	0.0	0.0
июн.23	0.0	2.6	ноя.24	0.1	12.0
июл.23	1.6	208.6	дек.24	0.0	0.0

Здесь  $P(j)$  – периодичная матрица, заданная формулой:

$$P(j) = \begin{cases} (kE - A^2(w_{\#}))(A(w_{\#}) - E)^{-1}, & j = 2n \\ O, & j \neq 2n, \quad n \in \{1, 2, \dots\} \end{cases},$$

где  $-1 < k < 1$ ,  $E$  – единичная матрица,  $O$  – нулевая матрица,  $A(w_{\#})$  – матрица Якоби для вектор-функции  $F$ ,  $w_{\#}$  – неподвижная точка.

Дискретная система (5) характеризуется сверхвысокой чувствительностью к изменениям параметров. Таким образом, за счет вариации коэффициентов модель (5) способна имитировать различные сценарии, которые вполне соответствуют реальным эпидемиологическим и экономическим процессам. При моделировании с помощью системы (5) будем использовать помесечную статистику.

В целях моделирования прогноза по преодолению пандемии и развитию экономики будем решать систему (5) с начальными условиями, которые соответствуют текущим реалиям. Согласно статистическим данным [8–10] на конец февраля 2022 г. имеем

$$\begin{aligned} w_1(0) &= 0.3748; & w_2(0) &= 0.031; & w_3(0) &= 0.0237; \\ w_4(0) &= 0.5705; & w_5(0) &= 0.4583; & & \\ w_6(0) &= 894.4 \text{ тыс. руб.} & & & & \end{aligned} \quad (7)$$

В результате компьютерного эксперимента были подобраны численные значения параметров системы (5):

$$\begin{aligned} a &= 0.001; & b &= 0.5; & c &= 0.3; & q &= 0.0011; \\ \gamma &= 0.00004; & \eta &= 0.4; & \omega &= -0.86; & \rho &= 3. \end{aligned}$$

По многочисленным экспертным оценкам, в 2022 г. ВВП России может снизиться на 7% и более в результате западных санкций, направленных против российской военной спецоперации на Украине. В этой связи при моделировании для 2022 г. использовались коэффициенты

$$\begin{aligned} d &= 0.0000066667; & \lambda &= 1; & r &= 0.7874015748; \\ v &= 0.3393700787; & \delta &= 0.1000958387, \end{aligned}$$

а для 2023 и 2024 г. применялись

$$\begin{aligned} d &= 0.0000052632; & \lambda &= 2; & r &= 1; \\ v &= 0.35; & \delta &= 0.0867999804. \end{aligned}$$

Решив систему (5) с начальными условиями (7) мы получили прогнозные траектории, графики которых представлены на рис. 2–4.

Графики рис. 2, 3 наглядно демонстрируют, что вакцинация населения является главным инструментом в борьбе с COVID-19. Кроме того, рис. 3, 4 указывают на существенную взаимосвязь между преодолением пандемии и восстановлением экономического роста. Коэффициент корреляции между полученными значениями  $w_5(j)$  и  $w_6(j)$  составляет 0.79.

Разработанная модель (5)–(6) является не только инструментом эффективного и адекватного прогнозирования. Основное достоинство этой модели заключается в том, что она дополни-

тельно дает возможность практического управления динамикой пандемии и ВВП в целях стабилизации социально-экономического развития. Полученная в явном виде аналитическая формула (6) дает возможность определять конкретные размеры и время проведения упреждающих корректировок.

В результате вычислений и верификации, проведенных на основе итогов моделирования, и с учетом инвестиционного мультипликатора [14] были получены помесечные значения для масштабов вакцинирования и объемов дополнительных инвестиций, необходимых для преодоления пандемии и обеспечения экономического роста. Эти значения сведены в табл. 1, которая по сути является графиком проведения превентивных антикризисных мер.

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что для преодоления пандемии и восстановления экономического роста необходимо своевременно осуществлять упреждающие корректирующие меры. Организацию и реализацию управленческих мер способны выполнить только государственные структуры. В соответствии с полученными в данной работе результатами моделирования, на среднесрочную перспективу первоочередными задачами государства являются полная реализация программы вакцинации и финансовая поддержка экономики в необходимых объемах и сроках.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в Институте математических исследований сложных систем МГУ им. М.В. Ломоносова при поддержке гранта Российского научного фонда № 20-61-46004 по проекту “Мировое развитие и “предделы роста” в 21 веке: моделирование и прогноз”.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vishnu Vyta, Sravanth Kumar Ramakuri, Anudeep Peddi, Kalyan Srinivas K.N. Nithish Ragav. *Mathematical Models for Predicting Covid-19 Pandemic: A Review* // Journal of Physics: Conference Series. 2021. 1797. 012009.
2. Куркина Е.С., Кольцова Э.М. // Прикладная математика и информатика № 66. – М.: Изд-во факультета ВМК МГУ. 2021. С. 41–66.
3. Еремеева Н.И. // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. Вып. 4. С. 14–27.
4. Kermack W.O., McKendrick A.G. // Proceedings of the Royal Society of London Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1927. V. 115. № 772. P. 700–721.
5. Sanderson W.C. / In Lutz W. [4], 1994. P. 33–71.
6. Lutz W., (Ed.). *Population, Development, Environment: Understanding Their Interactions in Mauritius*. – Berlin: Springer, 1994.
7. Comunian A., Gaburro R., Giudici M. // *Physica D*. 2020. 413. 132674.
8. Worldometer: <https://www.worldometers.info/coronavirus/>
9. Мировые Финансы: <http://global-finances.ru/vvp-rossii-po-godam/>
10. Мир Таблиц: <https://worldtable.info/gosudarstvo/chislennost-naselenija-rossii-po-godam>
11. Pyragas K. // *Physics Letters A*. 1992. V. 170. P. 421–428.
12. Леонов Г.А., Звягинцева К.А. // Вестник СПбГУ. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Т. 2. № 60. Вып. 3. С. 342–353.
13. Leonov G.A., Zvyagintseva K.A., Kuznetsova O.A. // *IFAC-PapersOnLine*. – 2016. V. 49 № 14. P. 56–61.
14. Николаев И.А., Марченко Т.Е., Точилкина О.С. // Институт стратегического развития. Москва. 2019. [https://www.fbk.ru/upload/docs/Investments\\_report.pdf](https://www.fbk.ru/upload/docs/Investments_report.pdf)

## MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESS OF OVERCOMING THE COVID-19 PANDEMIC AND RESTORING ECONOMIC GROWTH

Academician of the RAS V. A. Sadovnichiy<sup>a</sup>, Foreign member of the RAS A. A. Akaev<sup>b</sup>,  
A. I. Zvyagintsev<sup>c</sup>, and A. I. Sarygulov<sup>d</sup>

<sup>a</sup>Moscow State University, Moscow, Russian Federation

<sup>b</sup>Moscow State University Institute of Complex Systems Mathematical Research, Moscow, Russian Federation

<sup>c</sup>Mikhailovskaya Military Artillery Academy, St. Petersburg, Russian Federation

<sup>d</sup>St. Petersburg State University of Economics, St. Petersburg, Russian Federation

A mathematical model, which is proposed by authors, not only generates different scenario of development, but also simultaneously forms specific management measures aimed at suppressing the pandemic and restoring economic growth. The developed model of the mutual influence of the pandemic and the economy is not only a tool for effective and adequate forecasting, but is also capable of simulating various scenarios that may well correspond to real epidemiological processes. The possibilities to practically manage the dynamics of the pandemic and GDP in order to stabilize socio-economic development – one of the advantage of this model.

*Keywords:* COVID-19, economic systems, governance models, restoring economic growth

УДК 519.633.8+517.958:533.7

## УСЛОВИЯ ДИССИПАТИВНОСТИ ЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ МНОГОМЕРНОЙ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. А. А. Злотник<sup>1,2,\*</sup>

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным

Поступило 16.03.2022 г.

После доработки 23.05.2022 г.

Принято к публикации 03.06.2022 г.

Изучается явная двухслойная разностная схема для линеаризованной многомерной квазигазодинамической системы уравнений. Для начально-краевой задачи на неравномерной прямоугольной сетке впервые даются достаточные условия  $L^2$ -диссипативности типа Куранта энергетическим методом. Для задачи Коши на равномерной сетке усовершенствуются как необходимые, так и достаточные условия  $L^2$ -диссипативности в спектральном методе. Указывается новая форма задания параметра релаксации, гарантирующая равномерную ограниченность сверху и снизу числа типа Куранта как относительно сетки, так и числа Маха.

*Ключевые слова:* уравнения газовой динамики, квазигазодинамическая система уравнений, линеаризация, явная разностная схема, диссипативность

DOI: 10.31857/S2686954322040191

К настоящему времени разработан богатый набор численных методов решения системы уравнений газовой динамики [1–3]. В их число входят явные симметричные по пространству сеточные методы, основанные на предварительной квазигазодинамической (КГД) регуляризации этой системы [4–6]. Несмотря на многолетний успешный опыт практического применения таких методов, теория их устойчивости длительное время была развита слабо.

В данном сообщении изучается явная двухслойная симметричная по пространству разностная схема для линеаризованной на постоянном решении многомерной КГД системы уравнений. Для начально-краевой задачи на неравномерной прямоугольной сетке впервые даются достаточные условия  $L^2$ -диссипативности типа Куранта с помощью энергетического метода; одномерный случай см. в [7]. Для задачи Коши на равномерной сетке усовершенствуются как необходимые, так и достаточные условия  $L^2$ -диссипативности, недавно выведенные спектральным методом в [8]. Указывается новая форма задания параметра

релаксации  $\tau$ , гарантирующая равномерную ограниченность сверху и снизу числа типа Куранта как от сетки, так и от числа Маха как в достаточных, так и в необходимом условии. В нее входят отношения модулей компонент скорости газа к шагам сетки по отдельным координатным направлениям.

1. Выпишем линеаризованную КГД систему уравнений. Пусть  $\rho > 0$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\varepsilon > 0$  – плотность, скорость, удельная внутренняя энергия газа зависят от  $(x, t)$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$  и  $t \geq 0$ , а  $\Omega$  – область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Введем  $\mu = \alpha_s \tau p$ ,  $\lambda = \alpha_{1s} \tau p$ ,  $\tilde{\kappa} = \gamma \hat{\alpha}_p \tau p$  – искусственные коэффициенты динамической и объемной вязкости и нормированный коэффициент теплопроводности, где  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$  – давление,  $\tau > 0$  – параметр релаксации,  $\gamma > 1$  – показатель адиабаты,  $\alpha_s \geq 0$  и  $1/\hat{\alpha}_p$  – числа Шмидта и Прандтля с  $\hat{\alpha}_p \geq 0$ .

Рассмотрим постоянное решение  $(\rho, \mathbf{u}, \varepsilon)(x, t) = (\rho_*, \mathbf{u}_*, \varepsilon_*)$ , где  $\rho_* > 0$ ,  $\mathbf{u}_* = (u_{*1}, \dots, u_{*n})$ ,  $\varepsilon_* > 0$ . Введем фоновые значения  $\mu_* = \hat{\alpha}_s \tau p_* c_*^2$ ,  $\lambda_* = \hat{\alpha}_{1s} \tau p_* c_*^2$ ,  $\tilde{\kappa}_* = \hat{\alpha}_p \tau p_* c_*^2$ , где  $c_* = \sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon_*}$  – фоновая скорость звука,  $\hat{\alpha}_s = \frac{\alpha_s}{\gamma} \geq 0$ ,  $\hat{\alpha}_{1s} = \frac{\alpha_{1s}}{\gamma}$ ;

<sup>1</sup> Национальный исследовательский университет  
“Высшая школа экономики”, Москва, Россия

<sup>2</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша  
Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: azlotnik@hse.ru

пусть  $\hat{\alpha}_{1s} \geq -\frac{\hat{\alpha}_s}{3}$ . Для фонового значения  $\tau$  сохране-  
но прежнее обозначение. Введем малые возмущения

постоянного решения в виде  $\left( \rho_* \tilde{\rho}, \frac{c_*}{\sqrt{\gamma}} \tilde{\mathbf{u}}, \sqrt{\gamma - 1} \epsilon_* \tilde{\epsilon} \right)$ ,

где  $\mathbf{z} = (\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\epsilon})^T$  – вектор-столбец безразмерных  
малых возмущений. Тогда линеаризованная КГД  
система дифференциальных уравнений 2-го по-  
рядка по  $x$  с постоянными коэффициентами та-  
кова:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\rho} + c_* \left( \mathbf{M} \nabla \tilde{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} \right) &= \\ &= \tau c_*^2 \left[ \frac{1}{\gamma} \Delta \tilde{\rho} + (\mathbf{M} \nabla) \mathbf{M} \nabla \tilde{\rho} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\sqrt{\gamma}} (\mathbf{M} \nabla) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma \gamma_*}} \Delta \tilde{\epsilon} \right], \\ \partial_t \tilde{\mathbf{u}} + c_* \left( \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \nabla \tilde{\rho} + (\mathbf{M} \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_*}} \nabla \tilde{\epsilon} \right) &= \\ = \tau c_*^2 \left[ \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}} (\mathbf{M} \nabla) \nabla \tilde{\rho} + \hat{\alpha}_s \Delta \tilde{\mathbf{u}} + (\hat{a}_0 + 1) \nabla \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{M} \nabla) (\mathbf{M} \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}} (\mathbf{M} \nabla) \nabla \tilde{\epsilon} \right], \\ \partial_t \tilde{\epsilon} + c_* \left( \frac{1}{\sqrt{\gamma_*}} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{M} \nabla \tilde{\epsilon} \right) &= \\ = \tau c_*^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{\gamma \gamma_*}} \Delta \tilde{\rho} + \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}} (\mathbf{M} \nabla) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \hat{\alpha}_p + \frac{1}{\gamma_*} \right) \Delta \tilde{\epsilon} + (\mathbf{M} \nabla) \mathbf{M} \nabla \tilde{\epsilon} \right] \end{aligned}$$

в  $\Omega$  при  $t > 0$  аналогично [9]. Здесь операторы  $\operatorname{div}$   
и  $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$  берутся по  $x$ ,  $\partial_t = \partial/\partial t$ ,  $\partial_i = \partial/\partial x_i$   
и  $\mathbf{M} \nabla = \mathbf{M} \cdot \nabla$ ,  $\mathbf{M} \nabla \rho = \mathbf{M} \cdot \nabla \rho$  и т.д., а  $\cdot$  означает  
скалярное произведение векторов. Также  $\mathbf{M} =$   
 $= (M_1, \dots, M_n)^T$  и  $M_k = \frac{u_{*k}}{c_*}$ ,  $\gamma_* = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$ ,  $\hat{a}_0 =$   
 $= \frac{1}{3} \hat{\alpha}_s + \hat{\alpha}_{1s} \geq 0$ . Тогда  $M = |\mathbf{M}| = \frac{|\mathbf{u}_*|}{c_*}$  – фоновое  
число Маха.

Указанную систему уравнений перепишем в  
симметричной матричной форме

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{z} + c_* B^{(i)} \partial_i \mathbf{z} - \\ - \tau c_*^2 [A^{(ii)} \partial_i^2 \mathbf{z} + (1 - \delta^{(ij)}) \hat{A}^{(ij)} \partial_i \partial_j \mathbf{z}] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $B^{(i)}$  и  $A^{(ii)}$ ,  $\hat{A}^{(ij)}$  – матрицы конвективных и вяз-  
ких слагаемых (порядка  $n + 2$ ). Здесь и ниже по

повторяющимся индексам  $i, j$  (и только по ним)  
предполагается суммирование от 1 до  $n$ , а  $\delta^{(ij)}$  –  
символ Кронекера.

Запишем эти матрицы. Пусть  $\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{n+1}$  – век-  
торы-столбцы стандартного координатного бази-  
са в  $\mathbb{R}^{n+2}$ . Введем симметричные матрицы  $E^{(k,l)} :=$   
 $:= \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l^T + \mathbf{e}_l \mathbf{e}_k^T$ , тогда

$$\begin{aligned} B^{(k)} &= M_k I_{n+2} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} E^{(0,k)} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_*}} E^{(k,n+1)}, \\ D_\gamma &:= \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{\gamma}, \hat{\alpha}_s, \dots, \hat{\alpha}_s, \hat{\alpha}_p + \frac{1}{\gamma_*} \right\}, \\ A^{(kk)} &= D_\gamma + M_k^2 I_{n+2} + \frac{2}{\sqrt{\gamma}} M_k E^{(0,k)} + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}} M_k E^{(k,n+1)} + (\hat{a}_0 + 1) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T + \frac{1}{\sqrt{\gamma \gamma_*}} E^{(0,n+1)}, \\ \hat{A}^{(kl)} &= M_k M_l I_{n+2} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (M_k E^{(0,l)} + M_l E^{(0,k)}) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\gamma_*}} (M_k E^{(l,n+1)} + M_l E^{(k,n+1)}) + \frac{1}{2} (\hat{a}_0 + 1) E^{(k,l)} \end{aligned}$$

при всех  $k, l$  от 1 до  $n$  (так же, как и в [8]). Здесь и  
ниже  $I_l$  – единичная матрица порядка  $l$ ,  $\operatorname{diag}\{d_{11},$   
 $\dots, d_{(n+2)(n+2)}\}$  – диагональная матрица с перечис-  
ленными диагональными элементами. Матрицы  
 $B^{(k)}$ ,  $A^{(kk)}$ ,  $\hat{A}^{(kl)}$  – симметричные и  $\hat{A}^{(kl)} = \hat{A}^{(lk)}$ .

Матрицы  $A^{(kk)}$  и  $B^{(k)}$  связаны формулой [8]

$$A^{(kk)} = (B^{(k)})^2 + D + \hat{a}_0 \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T \geq 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (2)$$

где  $D := \operatorname{diag}\{0, \hat{\alpha}_s, \dots, \hat{\alpha}_s, \hat{\alpha}_p\}$  – матрица порядка  
 $n + 2$ .

Матрицы  $B^{(k)}$ ,  $A^{(kk)}$ ,  $\hat{A}^{(kl)}$  ( $k \neq l$ ) можно также  
записать в  $3 \times 3$ -блочном виде, см. [9] (где в диа-  
гональных элементах  $A^{(kk)}$  следует убрать  $\sqrt{\cdot}$  в  $\sqrt{\gamma}$ ,  
 $\sqrt{\gamma_*}$ ).

Для решения задачи Коши для системы урав-  
нений типа (1) известна оценка

$$\sup_{t \geq 0} \|\mathbf{z}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathbf{z}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall \mathbf{z}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

где  $\mathbf{z}|_{t=0} = \mathbf{z}_0$ ; аналогичная оценка верна и для на-  
чально-краевой задачи с однородным краевым  
условием Дирихле. Они явились исходными для  
анализа свойства диссипативности аппроксими-  
рующей явной симметричной разностной схемы.

2. Рассмотрим сначала условия диссипативно-  
сти абстрактной двухслойной явной разностной  
схемы. Пусть  $H_h$  – семейство евклидовых про-  
странств со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)_{H_h}$  и

нормой  $\|\cdot\|_{H_h}$ . Пусть  $\|\cdot\|$  – согласованная с  $\|\cdot\|_{H_h}$  норма в пространстве линейных операторов  $\mathcal{L}[H_h]$ , действующих в  $H_h$ . Пусть  $I$  – единичный оператор.

Введем неравномерную сетку  $\bar{\omega}^h$  с узлами  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{\bar{m}} = T$  на  $[0, T]$  и шагами  $h_m = t_m - t_{m-1}$ . Пусть  $\omega^h = \bar{\omega}^h \setminus T$  и  $y^m = y(t_m)$ . Определим сеточные операторы

$$\delta_t y^m = \frac{y^{m+1} - y^m}{h_{(m+1)}}, \quad \hat{y}^m = y^{m+1},$$

$$\tilde{I}_h^{m+1} y = \sum_{l=0}^m y^l h_{l(l+1)}, \quad 0 \leq m \leq \bar{m} - 1.$$

Рассмотрим явную двухслойную разностную схему

$$\delta_t y^m + G_m y^m = b^m \quad \text{в } H_h \text{ на } \omega^h \quad (3)$$

с  $G_m \in \mathcal{L}[H_h]$ . Функция  $y: \bar{\omega}^h \rightarrow H_h$  – искомая, а  $y^0 \in H_h$  и  $b: \omega^h \rightarrow H_h$  заданы.

**Теорема 1.** Пусть  $\max_{0 \leq m \leq \bar{m}-1} \|I - h_{(m+1)} G_m\| \leq 1$  или, эквивалентно,

$$h_{(m+1)} \|G_m w\|_{H_h}^2 \leq 2(G_m w, w)_{H_h} \quad \forall w \in H_h, \quad (4)$$

$$0 \leq m \leq \bar{m} - 1;$$

в частности,  $G_m \geq 0$ . Тогда для схемы (3) верна оценка

$$\max_{0 \leq m \leq \bar{m}} \|y^m\|_{H_h} \leq \|y^0\|_{H_h} + \tilde{I}_h^{\bar{m}} \|b\|_{H_h}, \quad (5)$$

а при  $b = 0$  схема  $H_h$ -диссипативна:  $\|y^{\bar{m}}\|_{H_h} \leq \|y^{\bar{m}-1}\|_{H_h} \leq \dots \leq \|y^0\|_{H_h}$  при всех  $y^0 \in H_h$ .

Если операторы  $I - h_{(m+1)} G_m$ ,  $0 \leq m \leq \bar{m} - 2$  обратимы, то условие (4) не только достаточно, но и необходимо для справедливости свойства  $H_h$ -диссипативности.

Если операторы  $G_m$ ,  $0 \leq m \leq \bar{m} - 1$  обратимы, то условие (4) можно переписать в виде

$$h_{(m+1)} \leq 2 \min_{v \neq 0} \frac{(G_m^{-1} v, v)_{H_h}}{\|v\|_{H_h}^2}, \quad 0 \leq m \leq \bar{m} - 1.$$

Ниже интерес представляет следующая запись явной двухслойной схемы (3)

$$\delta_t y + (c_* \mathcal{B} + c_*^2 \tau \mathcal{A}) y = b \quad \text{в } H_h \text{ на } \omega^h, \quad (6)$$

где  $\mathcal{B}, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(H_h)$  – операторы конвективных и вязких (без учета  $\tau$ ) слагаемых такие, что  $\mathcal{B}^* = -\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ . Они и  $\tau > 0$  могут зависеть от  $t_m$ . Также  $c_* > 0$  – нормировочный множитель.

Фактически здесь  $c_*^2 \tau \mathcal{A} = \frac{1}{2}(G + G^*)$ ,  $c_* \mathcal{B} = \frac{1}{2}(G - G^*)$ .

Пусть  $\lambda_{\max}(\mathcal{A})$  – максимальное собственное значение оператора  $\mathcal{A}$ .

**Теорема 2.** Пусть операторы  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{A}$  связаны неравенством

$$\|\mathcal{B} w\|_{H_h}^2 \leq c_A (\mathcal{A} w, w)_{H_h} \quad \forall w \in H_h \text{ на } \omega^h \quad (7)$$

и  $\lambda_{\max}(\mathcal{A}) \leq \tilde{\lambda}$ . Если также  $h_t$  подчиняется условию

$$(\sqrt{c_A} + \sqrt{\tilde{\lambda} c_* \tau})^2 \hat{h}_t \leq 2\tau \text{ на } \omega^h, \quad (8)$$

то оператор  $G = c_* \mathcal{B} + c_*^2 \tau \mathcal{A}$  удовлетворяет неравенству (4), и поэтому для решения явной схемы (6) верна оценка (5), а при  $b = 0$  – свойство  $H_h$ -диссипативности.

Операторный вид неравенства (7) таков:  $-\mathcal{B}^2 \leq c_A \mathcal{A}$ , где  $(-\mathcal{B}^2)^* = -\mathcal{B}^2 \geq 0$ .

В довольно типичном варианте шаг по времени  $h_t$  и параметр  $\tau$  задаются формулами  $h_t = \frac{\beta \hat{h}}{c_*}$ ,

$\tau_* = \frac{\alpha \hat{h}}{c_*}$  [4–6], где  $\hat{h}$  – некоторый характерный

шаг сетки по пространству, а  $\beta > 0$  (число типа Куранта) и  $\alpha > 0$  – параметры. Выбор  $\hat{h}$  отнюдь не очевиден заранее и должен определяться в результате анализа устойчивости схемы. Тогда условие (8) принимает вид

$$\beta \leq \beta_{\text{suf}}^{(0)}(\alpha) := \frac{2}{(\sqrt{c_A} \alpha^{-1} + \sqrt{\hat{h}^2 \tilde{\lambda} \alpha})^2} =$$

$$= \frac{2}{c_A \alpha^{-1} + 2\sqrt{c_A} \hat{h}^2 \tilde{\lambda} + \hat{h}^2 \tilde{\lambda} \alpha}, \quad (9)$$

т.е. форму условия на  $\beta$  в зависимости от  $\alpha$ . Обратим внимание на то, что

$$\max_{\alpha > 0} \beta_{\text{suf}}^{(0)}(\alpha) = \beta_{\text{suf}}^{(0)}(\alpha_{\text{opt}}) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{c_A} \hat{h}^2 \tilde{\lambda}} = \frac{\alpha_{\text{opt}}}{2c_A} \quad \text{при} \quad \alpha_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{c_A}{\hat{h}^2 \tilde{\lambda}}}. \quad (10)$$

Указанное значение  $\alpha_{\text{opt}}$  важно знать на практике как позволяющее максимально расширить условие на  $h_t$ . Отметим, что  $\beta_{\text{suf}}^{(0)}(\alpha)$  возрастает на  $(0, \alpha_{\text{opt}}]$ , убывает на  $[\alpha_{\text{opt}}, +\infty)$  и  $\beta_{\text{suf}}^{(0)}(\alpha) \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow +0$  и  $\alpha \rightarrow +\infty$ .

3. Выпишем разностную схему для линеаризованной КГД системы уравнений (1) и выполним энергетический анализ ее устойчивости. Пусть  $\Omega = (0, X_1) \times \dots \times (0, X_n)$ . При  $k = 1, \dots, n$  введем на  $[0, X_k]$  произвольную неравномерную сетку  $\bar{\omega}_{kh}$  по



переменной  $x_k$  с узлами  $0 = x_{k0} < x_{k1} < \dots < x_{kN_k} = X_k$  и шагами  $h_{kl} = x_{kl} - x_{k(l-1)}$ . Пусть  $\omega_{kh} = \bar{\omega}_{kh} \setminus \{0, X_k\}$ . Введем также сетку  $\omega_{kh}^*$  с узлами  $x_{k(l-1/2)} = \frac{1}{2}(x_{k(l-1)} + x_{kl})$ ,  $1 \leq l \leq N_k$  и шагами  $\hat{h}_{kl} = (h_{kl} + h_{k(l+1)})/2$ .

Введем разностные отношения

$$\delta_k v_{l-1/2} = \frac{v_l - v_{l-1}}{h_{kl}}, \quad \overset{\circ}{\delta}_k v_l = \frac{v_{l+1} - v_{l-1}}{2\hat{h}_{kl}},$$

$$\delta_k^* w_l = \frac{w_{l+1/2} - w_{l-1/2}}{\hat{h}_{kl}},$$

где  $v_l = v(x_{kl})$ ,  $w_{l-1/2} = w(x_{k(l-1/2)})$ , скалярные произведения

$$(v, \tilde{v})_{\omega_{kh}} = \sum_{1 \leq l \leq N_k-1} v_l \tilde{v}_l \hat{h}_{kl},$$

$$(w, \tilde{w})_{\omega_{kh}^*} = \sum_{1 \leq l \leq N_k} w_{l-1/2} \tilde{w}_{l-1/2} \hat{h}_{kl}$$

и отвечающие им нормы  $\|\cdot\|_{\omega_{kh}}$ ,  $\|\cdot\|_{\omega_{kh}^*}$ .

**Л е м м а 1.** Пусть функция  $v$  определена на  $\bar{\omega}_{kh}$ .

Верно неравенство  $\|\overset{\circ}{\delta}_k v\|_{\omega_{kh}} \leq \|\delta_k v\|_{\omega_{kh}^*}$  [9]. Если  $v|_{l=0, N_k} = 0$ , то верны также неравенства

$$\|\delta_k v\|_{\omega_{kh}^*} \leq 4\tilde{h}_{\min k}^{-1} \|v\|_{\omega_{kh}}, \quad \|\overset{\circ}{\delta}_k v\|_{\omega_{kh}} \leq \tilde{h}_{\min k}^{-1} \|v\|_{\omega_{kh}}, \quad (11)$$

где  $\tilde{h}_{\min k} := \min_{1 \leq l \leq N_k-1} \sqrt{h_{kl} h_{k(l+1)}} \geq h_{\min k} := \min_{1 \leq l \leq N_k} h_{kl}$ .

Введем  $n$ -мерные сетки  $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_{1h} \times \dots \times \bar{\omega}_{nh}$ ,  $\omega_h = \omega_{1h} \times \dots \times \omega_{nh}$ ,  $\partial\omega_h = \bar{\omega}_h \setminus \omega_h$  и  $\omega_{i^*, h}$ , отличающиеся от  $\omega_h$  заменой  $\omega_{ih}$  на  $\omega_{ih}^*$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Введем скалярные произведения функций  $(v, \tilde{v})_{\omega_h} = (\dots (v\tilde{v}, 1)_{\omega_{1h}}, \dots, 1)_{\omega_{nh}}$  и  $n+2$ -мерных вектор-функций  $(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})_{\omega_h} = (\dots (\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}}, 1)_{\omega_{1h}}, \dots, 1)_{\omega_{nh}}$ , а также отвечающие им нормы  $\|\cdot\|_{\omega_h}$  и  $\|\cdot\|_{\omega_h^*}$ . Пусть скалярные произведения  $(\cdot, \cdot)_{\omega_{i^*, h}}$  отличаются от  $(\cdot, \cdot)_{\omega_h}$  заменой  $(\cdot, 1)_{\omega_h}$  на  $(\cdot, 1)_{\omega_{i^*, h}}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Введем  $H_h$  – пространство вектор-функций-столбцов  $\mathbf{v}: \bar{\omega}_h \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$  с  $\mathbf{v}|_{\partial\omega_h} = 0$ , со скалярным произведением  $(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})_{H_h} = (v, \tilde{v})_{\omega_h}$ .

Введем операторы  $\mathcal{B}, \mathcal{A}: H_h \rightarrow H_h$  такие, что

$$\mathcal{B}\mathbf{v} := B^{(i)} \overset{\circ}{\delta}_i \mathbf{v}, \quad (12)$$

$$\mathcal{A}\mathbf{v} := -(A^{(ii)} \delta_i^* \delta_i \mathbf{v} + (1 - \delta^{(ij)}) \hat{A}^{(ij)} \overset{\circ}{\delta}_i \overset{\circ}{\delta}_j \mathbf{v}) \text{ на } \omega_h$$

для  $\mathbf{v} \in H_h$  [9]. В силу симметрии матриц  $B^{(k)}$ ,  $A^{(kk)}$ ,  $\hat{A}^{(kl)}$  для любых  $\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \in H_h$  имеем

$$(\mathcal{B}\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})_{H_h} = -(B^{(i)} \mathbf{v}, \overset{\circ}{\delta}_i \tilde{\mathbf{v}})_{\omega_h} = -(\mathbf{v}, \mathcal{B}\tilde{\mathbf{v}})_{H_h},$$

$$(\mathcal{A}\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})_{H_h} = (A^{(ii)} \delta_i \mathbf{v}, \delta_i \tilde{\mathbf{v}})_{\omega_{i^*, h}} +$$

$$+ (1 - \delta^{(ij)}) (\hat{A}^{(ij)} \overset{\circ}{\delta}_j \mathbf{v}, \overset{\circ}{\delta}_i \tilde{\mathbf{v}})_{\omega_h} = (\mathbf{v}, \mathcal{A}\tilde{\mathbf{v}})_{H_h},$$

т.е. верны свойства  $\mathcal{B}^* = -\mathcal{B}$  и поэтому  $(\mathcal{B}\mathbf{v}, \mathbf{v})_{H_h} = 0$  для  $\mathbf{v} \in H_h$ , а также  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ .

КГД систему уравнений (1) в  $\Omega \times (0, T)$  при краевом условии  $\mathbf{z}|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0$  аппроксимируем явной по  $t$  разностной схемой, трехточечной по каждому направлению  $x_1, \dots, x_n$ :

$$\delta_t \mathbf{y} + c_* \mathcal{B}\mathbf{y} + \tau c_*^2 \mathcal{A}\mathbf{y} = \mathbf{b} \text{ в } H_h \text{ на } \omega^h, \quad (14)$$

с искомой функцией  $\mathbf{y}: \bar{\omega}^h \rightarrow H_h$ . Функции  $y^0 \in H_h$  и  $\mathbf{b}: \omega^h \rightarrow H_h$  заданы, причем  $\mathbf{b}$  добавлена для полноты анализа устойчивости.

Введем вспомогательные матрицы [9]

$$\tilde{A}^{(kk)} := \hat{A}^{(kk)} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^T + \frac{1}{\gamma_*} \mathbf{e}_{n+1} \mathbf{e}_{n+1}^T +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\gamma\gamma_*}} E^{(0, n+1)} = (B^{(k)})^2 + \hat{a}_0 \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T \geq 0,$$

$$1 \leq k \leq n.$$

**Л е м м а 2.** Пусть  $\text{div}_h \mathbf{u} := \overset{\circ}{\delta}_i v_i$  и  $\mathbf{u} = (v_1, \dots, v_n)$ . Справедливы формула и неравенства

$$(\mathcal{A}\mathbf{v}, \mathbf{v})_{H_h} = (A^{(ii)} \delta_i \mathbf{v}, \delta_i \mathbf{v})_{\omega_{i^*, h}} + \|\mathcal{B}\mathbf{v}\|_{H_h}^2 +$$

$$+ \hat{a}_0 \|\text{div}_h \mathbf{u}\|_{\omega_h}^2 - (\tilde{A}^{(ii)} \overset{\circ}{\delta}_i \mathbf{v}, \overset{\circ}{\delta}_i \mathbf{v})_{\omega_h} \quad \forall \mathbf{v} \in H_h, \quad (16)$$

$$(\mathcal{A}\mathbf{v}, \mathbf{v})_{H_h} \geq (D\delta_i \mathbf{v}, \delta_i \mathbf{v})_{\omega_{i^*, h}} + \|\mathcal{B}\mathbf{v}\|_{H_h}^2 +$$

$$+ \hat{a}_0 \|\text{div}_h \mathbf{u}\|_{\omega_h}^2 \geq \|\mathcal{B}\mathbf{v}\|_{H_h}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in H_h. \quad (17)$$

Формула (16) следует из (13) и близкой формулы, выведенной в [9, доказательство теоремы 1]. Неравенства следуют из нее с помощью (2), (15) и первого неравенства леммы 1.

**Л е м м а 3.** Пусть  $\tilde{h}_{\min} = \min_{1 \leq k \leq n} \tilde{h}_{\min k}$ . Справедлива оценка

$$\lambda_{\max}(\mathcal{A}) \leq \tilde{\lambda} := (|M_i| + 1)^2 \frac{n+3}{\tilde{h}_{\min i}^2} +$$

$$+ \max \left\{ \hat{\alpha}_s \delta^{(ii)} \frac{4}{\tilde{h}_{\min i}^2} + \hat{a}_0 \frac{n+3}{\tilde{h}_{\min}^2}, \hat{\alpha}_p \delta^{(ii)} \frac{4}{\tilde{h}_{\min i}^2} \right\}. \quad (18)$$

Указанная оценка выводится на основе формулы Рэлея для  $\lambda_{\max}(\mathcal{A})$  и аккуратной оценки правой части формулы (16), в том числе с учетом неравенств (11) и формулы для спектральной нормы  $\|B^{(k)}\| = |M_k| + 1$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Устойчивость схемы (14) непосредственно следует из теоремы 2 с учетом (9) в силу свойств  $\mathcal{B}^* = -\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ , неравенства (17) (согласно которому  $c_A = 1$ ) и леммы 3.

**Теорема 3.** *При условии*

$$\beta \leq \beta_{\text{suf}}^{(0)}(\alpha) := \frac{2}{(\alpha^{-1} + \sqrt{\hat{h}^{22}\tilde{\lambda}})^2} = \frac{2}{\alpha^{-1} + 2\sqrt{\hat{h}^{22}\tilde{\lambda}} + \hat{h}^{22}\tilde{\lambda}} \quad (19)$$

для  $\mathbf{b} = 0$  схема (14) является  $H_h$ -диссипативной, а в общем случае для нее верна оценка

$$\max_{0 \leq m \leq \bar{m}} \|\mathbf{y}^m\|_{H_h} \leq \|\mathbf{y}^0\|_{H_h} + \bar{I}_{h_t}^{\bar{m}} \|\mathbf{b}\|_{H_h}.$$

Формулы (10) принимают вид

$$\max_{\alpha > 0} \beta_{\text{suf}}^{(0)}(\alpha) = \beta_{\text{suf}}^{(0)}(\alpha_{\text{opt}}) = \frac{1}{2\sqrt{\hat{h}^{22}\tilde{\lambda}}} = \frac{\alpha_{\text{opt}}}{2} \quad (20)$$

при  $\alpha_{\text{opt}} = \frac{1}{\sqrt{\hat{h}^{22}\tilde{\lambda}}}$ .

На основании леммы 3 естественно ввести характерный шаг  $\hat{h} > 0$  такой, что

$$\frac{1}{\hat{h}^2} = \frac{(|M_i| + 1)^2}{\hat{h}_{\min i}^2}, \quad (21)$$

$$\text{где } \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \hat{h} / \min_{1 \leq k \leq n} \frac{\hat{h}_{\min k}}{|M_k| + 1} \leq 1.$$

Для простоты (также обстоит дело на практике) он не зависит от параметров  $\hat{\alpha}_s$ ,  $\hat{\alpha}_{1s}$ ,  $\hat{\alpha}_p$ . Тогда верны двусторонние оценки  $n + 3 \leq \hat{h}^2\tilde{\lambda} \leq n + 3 + \max\{4\hat{\alpha}_s + (n + 3)\hat{\alpha}_0, 4\hat{\alpha}_p\}$ , равномерные относительно  $\bar{\omega}_h$  и  $M$ . Поэтому и  $\beta_{\text{suf}}^{(0)}(\alpha)$ ,  $\beta_{\text{suf}}^{(0)}(\alpha_{\text{opt}})$ ,  $\alpha_{\text{opt}}$  равномерно ограничены снизу и сверху относительно  $\bar{\omega}_h$  и  $M$ . Первое существенно для расчетов на сильно неравномерных сетках, а второе – для моделирования любых течений от дозвуковых до сверх- и гиперзвуковых. Возникают такие формулы для параметров  $\beta$  и  $\tau$

$$\beta = \left[ \left( \frac{|u_{*1}| + c_*}{\hat{h}_{\min 1}} \right)^2 + \dots + \left( \frac{|u_{*n}| + c_*}{\hat{h}_{\min n}} \right)^2 \right]^{1/2} h_t,$$

$$\tau = \alpha \left[ \left( \frac{|u_{*1}| + c_*}{\hat{h}_{\min 1}} \right)^2 + \dots + \left( \frac{|u_{*n}| + c_*}{\hat{h}_{\min n}} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

4. Перейдем к спектральному анализу разностной схемы на равномерной сетке. Пусть теперь  $\omega_{kh}$  и  $\bar{\omega}^h$  – равномерные сетки по  $x_k$  и  $t$  с узлами  $lh_k$ ,  $l \in \mathbb{Z}$  и  $t_m = mh_t$ ,  $m \geq 0$ , и шагами  $h_k > 0$  и  $h_t > 0$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Разностные операторы принимают упрощенный вид

$$\delta_t y = \frac{\hat{y} - y}{h_t}, \quad \delta_k v_l = \frac{v_{l+1} - v_{l-1}}{2h_k},$$

$$(\delta_k^* \delta_k v)_l = \frac{v_{l+1} - 2v_l + v_{l-1}}{h_k^2}.$$

Пусть  $\omega_h := \omega_{1h} \times \dots \times \omega_{nh}$  и  $h = (h_1, \dots, h_n)$ .

С использованием операторов (12) аппроксимируем линеаризованную КГД систему уравнений (1) в  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  явной двухслойной разностной схемой

$$\delta_t \mathbf{y} + c_* \mathcal{B} \mathbf{y} + \tau c_*^2 \mathcal{A} \mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \text{на } \omega_h \times \bar{\omega}^h. \quad (22)$$

Пусть  $\mathbf{H}_h$  – гильбертово пространство вектор-функций  $\mathbf{v}: \omega_h \rightarrow \mathbb{C}^{n+2}$ , суммируемых в квадрате на  $\omega_h$ , со скалярным произведением  $(\mathbf{v}, \mathbf{y})_{\mathbf{H}_h} = h_1 \dots h_n \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} (\mathbf{v}_{\mathbf{k}}, \mathbf{y}_{\mathbf{k}})_{\mathbb{C}^{n+2}}$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ . Будем изучать условия справедливости оценки

$$\max_{0 \leq m \leq \bar{m}} \|\mathbf{y}^m\|_{\mathbf{H}_h} \leq \|\mathbf{y}^0\|_{\mathbf{H}_h} + \bar{I}_{h_t}^{\bar{m}} \|\mathbf{b}\|_{\mathbf{H}_h} \quad \forall \bar{m} \geq 1 \quad (23)$$

при любых  $\mathbf{y}^0 \in \mathbf{H}_h$  и  $\mathbf{b}: \bar{\omega}^h \rightarrow \mathbf{H}_h$ . При  $\mathbf{b} = 0$  эта оценка принимает вид

$$\sup_{m \geq 0} \|\mathbf{y}^m\|_{\mathbf{H}_h} \leq \|\mathbf{y}^0\|_{\mathbf{H}_h} \quad \forall \mathbf{y}^0 \in \mathbf{H}_h, \quad (24)$$

и она эквивалентна как оценке  $\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{H}[\mathbf{H}_h]} \leq 1$  нормы ограниченного оператора перехода со слоя на слой  $\mathcal{T} = I - h_t(c_* \mathcal{B} + \tau c_*^2 \mathcal{A})$ , так и свойству  $\mathbf{H}_h$ -диссипативности

$$\|\mathbf{y}^m\|_{\mathbf{H}_h} \leq \|\mathbf{y}^{m-1}\|_{\mathbf{H}_h} \leq \dots \leq \|\mathbf{y}^0\|_{\mathbf{H}_h} \quad (25)$$

$$\forall \mathbf{y}^0 \in \mathbf{H}_h, \quad m \geq 1.$$

При условии  $\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{H}[\mathbf{H}_h]} \leq 1$  оценка (23) верна, и ниже можно ограничиться случаем  $\mathbf{b} = 0$ .

Пусть  $h_t$  и  $\tau$  задаются указанными выше формулами. В соответствии со спектральным методом, см. [10, 11] и [8], рассмотрим частные решения схемы (22) при  $\mathbf{b} = 0$  вида

$$\mathbf{y}_{\mathbf{k}}^m(\xi) = e^{ik\xi} \mathbf{w}^m(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in [-\pi, \pi]^n,$$

$$\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n, \quad m \geq 0,$$

где  $\mathbf{i}$  – мнимая единица, а  $\xi$  – параметр. Их подстановка в (22) приводит к рекуррентной формуле  $\hat{\mathbf{w}} = G_s \mathbf{w}$  на  $\bar{\omega}^h$ , где  $G_s$  – символ оператора  $\mathcal{T}$  с  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$  такой, что

$$G_s = I_{n+2} - \beta(4\alpha A_s + 2\mathbf{i}B_s), \quad B_s = d_i s_i B^{(i)},$$

$$A_s = d_i^2 A^{(ii)} + (1 - \delta^{(ij)}) d_i d_j s_i s_j \hat{A}^{(ij)},$$

$$d_k = r_k \sqrt{\sigma_k}, \quad r_k = \frac{\hat{h}}{h_k}, \quad \sigma_k = \sin^2 \frac{\xi_k}{2} \in [0, 1],$$

$$s_k = (\text{sgn} \xi_k) \sqrt{1 - \sigma_k} \in [-1, 1], \quad 1 \leq k \leq n.$$

Здесь  $\text{sgn} 0 = 1$ . Ниже  $\mathbf{s} \in S := [-1, 1]^n$  берется в качестве параметра вместо  $\xi$ ; ясно, что  $\sigma_k = 1 - s_k^2$ .

Введем вектор-строку  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  с  $\xi_k = d_k s_k, 1 \leq k \leq n$ . Пусть  $d = (d_1^2 + \dots + d_n^2)^{1/2}$ .

Следующие два важных результата взяты из [8, лемма 1 и теорема 2].

**Л е м м а 4.** 1. Матрицы  $B_s$  и  $A_s$  можно записать в  $3 \times 3$ -блочной форме

$$B_s = \begin{pmatrix} \xi \mathbf{M} & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \xi & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \xi^T & (\xi \mathbf{M}) I_n & \frac{1}{\sqrt{\gamma_*}} \xi^T \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma_*}} \xi & \xi \mathbf{M} \end{pmatrix},$$

$$A_s = a_M I_{n+2} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} d^2 & \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \mathbf{p} & \frac{1}{\sqrt{\gamma \gamma_*}} d^2 \\ \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \mathbf{p}^T & C_0 & \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}} \mathbf{p}^T \\ \frac{1}{\sqrt{\gamma \gamma_*}} d^2 & \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}} \mathbf{p} \left( \hat{\alpha}_p + \frac{1}{\gamma_*} \right) d^2 & \end{pmatrix}$$

с использованием обозначений

$$a_M := (\xi \mathbf{M})^2 + \mathbf{M}^T \mathbf{Q} \mathbf{M} = \mathbf{p} \mathbf{M},$$

$$\mathbf{p} := (\xi \mathbf{M}) \xi + \mathbf{M}^T \mathbf{Q},$$

$$C_0 := \hat{\alpha}_s d^2 I_n + \hat{a}_1 (\xi^T \xi + \mathbf{Q})$$

и  $\mathbf{Q} := \text{diag}\{q_1, \dots, q_n\}$  с  $q_k := d_k^2 \sigma_k = r_k^2 \sigma_k^2, 1 \leq k \leq n$ , а также  $\hat{a}_1 = \hat{a}_0 + 1$ .

2. Верно матричное неравенство:  $B_s^2 \leq A_s$  при всех  $\mathbf{s} \in S := [-1, 1]^n$ .

**Т е о р е м а 4.** Выполнение матричного неравенства

$$\beta \left[ 2\alpha A_s^2 + \frac{1}{2\alpha} B_s^2 + \mathbf{i}(A_s B_s - B_s A_s) \right] \leq A_s \quad \forall \mathbf{s} \in S \quad (26)$$

необходимо и достаточно, а выполнение числового неравенства

$$\beta \leq \beta_{\text{suf}}(\alpha) = \frac{1}{(\sqrt{2\alpha^{-1}} + \sqrt{2\bar{\lambda}\alpha})^2} = \frac{1}{(2\alpha)^{-1} + 2\sqrt{\bar{\lambda}} + 2\bar{\lambda}\alpha}, \quad (27)$$

с  $\max_{\mathbf{s} \in S} \lambda_{\max}(A_s) \leq \bar{\lambda}$  достаточно для справедливости свойства (25).

Новое необходимое условие выводится из критерия (26) анализом случаев  $\mathbf{s} = 0$  и  $\xi = 2\varepsilon \tilde{\xi}$  с  $\varepsilon \rightarrow +0, \tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n) \neq 0$  на основе леммы 4 (как и недавно в баротропном случае [12]).

**Т е о р е м а 5.** Пусть  $r_{\max} := \max_{1 \leq k \leq n} r_k$  и  $r^2 = r_1^2 + \dots + r_n^2$ . Выполнение неравенства

$$\beta \leq \beta_{\text{nec}}(\alpha) := \min \left\{ 2\alpha, \frac{1}{2\bar{\lambda}\alpha} \right\} \quad (28)$$

$$\text{с } \underline{\lambda} := r_i^2 M_i^2 + \max \left\{ \hat{\lambda}, \hat{\alpha}_s + \hat{a}_1 \frac{r_{\max}^2}{r^2} \right\} r^2,$$

где  $\hat{\lambda} := \frac{1}{2} \left[ 1 + \hat{\alpha}_p + \sqrt{(\hat{\alpha}_p - 1)^2 + \frac{4}{\gamma_*} \hat{\alpha}_p} \right] \geq \max \left\{ \hat{\alpha}_p + \frac{1}{\gamma_*}, 1 \right\}$ , необходимо для справедливости свойства (25). Здесь  $\frac{1}{n} \leq \frac{r_{\max}^2}{r^2} \leq 1$ .

Легко видеть, что верны формулы и двустороннее неравенство

$$\max_{\alpha > 0} \beta_{\text{suf}}(\alpha) = \beta_{\text{suf}}(\alpha_{\text{opt}}) = \frac{\alpha_{\text{opt}}}{2} = \frac{1}{4\sqrt{\bar{\lambda}}},$$

$$\frac{1}{4} \min \left\{ 2\alpha, \frac{1}{2\bar{\lambda}\alpha} \right\} \leq \beta_{\text{suf}}(\alpha) < \min \left\{ 2\alpha, \frac{1}{2\bar{\lambda}\alpha} \right\},$$

$$\max_{\alpha > 0} \beta_{\text{nec}}(\alpha) = \beta_{\text{nec}}(\alpha_*) = 2\alpha_* = \frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}}}.$$

Также  $\beta_{\text{suf}}(\alpha) \rightarrow 0$  и  $\beta_{\text{nec}}(\alpha) \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow +0$  или  $\alpha \rightarrow +\infty$ .

Для применения достаточного условия (27) укажем новую оценку сверху для  $\lambda_{\max}(A_s)$ . Она выводится на основе формулы Рэя для  $\lambda_{\max}(A_s)$  и аккуратной оценки квадратичной формы, отвечающей матрице  $A_s$  из леммы 4.

**Т е о р е м а 6.** При  $n = 2, 3$  верна оценка сверху

$$\max_{\mathbf{s} \in S} \lambda_{\max}(A_s) \leq \bar{\lambda} := c_n [(1 + \varepsilon) r_i^2 M_i^2 + \varepsilon^{-1} r_{\max}^2] + \max \left\{ \hat{\lambda}, \hat{\alpha}_s + \hat{a}_1 c_n \frac{r_{\max}^2}{r^2} \right\} r^2, \quad (29)$$

с  $c_2 = 1, c_3 = \frac{9}{8}$ , любым  $\varepsilon > 0$  и  $\hat{\lambda}$ , указанным в теореме 5.

Согласно указанным оценкам, естественен выбор  $\hat{h}$  (зависящий только от  $h$  и  $\mathbf{M}$ ) [12]

$$\frac{1}{\hat{h}^2} = \frac{M_1^2 + 1}{h_1^2} + \dots + \frac{M_n^2 + 1}{h_n^2},$$

$$\text{где } \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \hat{h} / \min_{1 \leq k \leq n} \frac{h_k}{\sqrt{M_k^2 + 1}} \leq 1.$$

Для него верны равенства  $r_i^2(M_i^2 + 1) = \frac{\hat{h}^2}{h_i^2}(M_i^2 + 1) + 1 = 1$ , благодаря которым правую часть оценки (29) можно оценить (взяв минимум по  $\varepsilon > 0$ ) как

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &\leq \frac{1}{2}[c_n + C + \sqrt{(C - c_n)^2 + 4c_n^2}] \leq \\ &\leq c_n + \max\{\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_s + \hat{a}_1 c_n\}, \end{aligned}$$

где  $C := \max\{\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_s + \hat{a}_1 c_n\} \geq c_n$ . Также  $\bar{\lambda} \geq 1$  в необходимом условии (28), что приводит к необходимому условию и достаточному условию, не зависящим от  $h$  и  $\mathbf{M}$ .

Отметим, что при этом возникают формулы для числа Куранта и параметра  $\tau$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{c_*}{\hat{h}} h_t = \left( \frac{u_{*1}^2 + c_*^2}{h_1^2} + \dots + \frac{u_{*n}^2 + c_*^2}{h_n^2} \right)^{1/2} h_t, \\ \tau &= \alpha \left( \frac{u_{*1}^2 + c_*^2}{h_1^2} + \dots + \frac{u_{*n}^2 + c_*^2}{h_n^2} \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Они несущественно отличаются от выписанных выше в случае неравномерной сетки. Для других схем подобная формула для  $\beta$  без степеней 2 (но с  $|u_{*1}|, \dots, |u_{*n}|$ ) и  $1/2$  имеется в [1, раздел 2.6].

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 19-11-00169 (пп. 2, 3) и 22-11-00126 (п. 4).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.
2. LeVeque R.J. Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
3. Abgrall R., Shu C.-W., eds. Handbook of numerical methods for hyperbolic problems: basic and fundamental issues. Amsterdam: North Holland, 2016.
4. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
5. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
6. Шертов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.—Ижевск: РХД, 2009.
7. Zlotnik A. // Appl. Math. Lett. 2019. V. 92. P. 115–120.
8. Zlotnik A., Lomonosov T. // Appl. Math. Lett. 2020. V. 103. Article 106198. P. 1–7.
9. Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. // Дифференц. уравн. 2020. Т. 56. № 7. С. 936–947.
10. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
11. Wesseling P. Principles of computational fluid dynamics. Berlin: Springer, 2009.
12. Zlotnik A. // Symmetry. 2021. V. 13. № 11. Article 2184. P. 1–17.

## CONDITIONS FOR DISSIPATIVITY OF AN EXPLICIT FINITE-DIFFERENCE SCHEME FOR A LINEARIZED MULTIDIMENSIONAL QUASI-GASDYNAMIC SYSTEM OF EQUATIONS

A. A. Zlotnik<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Higher School of Economics University, Moscow, Russian Federation

<sup>b</sup> Federal Research Center Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

We study an explicit two-level finite-difference scheme for a linearized multidimensional quasi-gasdynamic system of equations. For an initial-boundary value problem on a nonuniform rectangular mesh, the Courant-type sufficient conditions for  $L^2$ -dissipativity are given for the first time by the energy method. For the Cauchy problem on a uniform mesh, both necessary and sufficient conditions for  $L^2$ -dissipativity are improved in the spectral method. A new form of specifying the relaxation parameter is indicated which guarantees that the Courant-type number is uniformly bounded from above and below both with respect to the mesh and the Mach number.

**Keywords:** gas dynamics equations, quasi-gasdynamic system of equations, linearization, explicit finite-difference scheme, dissipativity

## О МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ $p$ -ЛАПЛАСА

© 2022 г. Ю. А. Алхутов<sup>1,\*</sup>, А. Г. Чечкина<sup>2,3,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 16.05.2022 г.

После доработки 10.06.2022 г.

Принято к публикации 15.06.2022 г.

Доказана повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы в ограниченной строго липшицевой области для неоднородного уравнения  $p$ -Лапласа.

*Ключевые слова:* задача Зарембы, оценки Мейерса,  $p$ -емкость, теоремы вложения, повышенная суммируемость

**DOI:** 10.31857/S2686954322040026

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследуются интегральные свойства обобщенных решений неоднородного уравнения  $p$ -Лапласа, где  $p > 1$ , решений задачи Зарембы в ограниченной строго липшицевой области  $D \subset \mathbb{R}^n$ , где  $n > 1$ . Для постановки задачи Зарембы введем соболевское пространство функций  $W_p^1(D, F)$ . Здесь  $F \subset \partial D$  – замкнутое множество,  $W_p^1(D, F)$  – пополнение бесконечно дифференцируемых в замыкании  $D$  функций, равных нулю в окрестности  $F$ , по норме пространства  $W_p^1(D)$ . Априори для функций  $v \in W_p^1(D, F)$  предполагается выполненным неравенство Фридрихса

$$\int_D |v|^p dx \leq C \int_D |\nabla v|^p dx, \quad (1.1)$$

о котором будет сказано ниже. Полагая  $G = \partial D \setminus F$ , рассмотрим задачу Зарембы

$$\begin{aligned} \Delta_p u &:= \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = l \quad \text{в } D, \\ u &= 0 \quad \text{на } F, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на } G, \end{aligned} \quad (1.2)$$

<sup>1</sup> Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>3</sup> Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия

\*E-mail: yurij-alkhutov@yandex.ru

\*\*E-mail: chechkina@gmail.com

где  $\frac{\partial u}{\partial n}$  означает внешнюю нормальную производную функции  $u$ , а  $l$  является линейным функционалом в пространстве, сопряженном к  $W_p^1(D, F)$ .

Под решением задачи (1.2) понимается функция  $u \in W_p^1(D, F)$ , для которой выполнено интегральное тождество

$$\int_D |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = -l(\varphi) \quad (1.3)$$

для всех пробных функций  $\varphi \in W_p^1(D, F)$ .

В силу неравенства Фридрихса (1.1) пространство  $W_p^1(D, F)$  можно снабдить нормой, в которой присутствует только градиент. Поэтому, пользуясь теоремой Хана-Банаха, можно показать, что функционал  $l$  записывается в виде

$$l(\varphi) = - \sum_{i=1}^n \int_D f_i \varphi_{x_i} dx, \quad (1.4)$$

где  $f_i \in L_{p'}(D)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $p' = p/(p-1)$ . В силу (1.3) для каждого конкретного функционала решение задачи (1.2) понимается в смысле интегрального соотношения

$$\int_D |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_D f \cdot \nabla \varphi dx \quad (1.5)$$

для всех пробных функций  $\varphi \in W_p^1(D, F)$ , в котором компоненты вектор-функции  $f = (f_1, \dots, f_n)$  являются функциями из  $L_{p'}(D)$ .

Методом теории монотонных операторов устанавливается, что задача (1.2) однозначно раз-

решима в соболевском пространстве функций  $W_p^1(D, F)$  (см., например, теорему 2.1 из второго раздела главы 2 монографии [1]).

Целью работы является вопрос о повышенной суммируемости градиента решений задачи (1.2) в предположении, что  $f \in L_{p+\delta}(D)$ , где  $\delta > 0$ .

Повышенная суммируемость градиента решений линейных дивергентных равномерно эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами на плоскости вытекает из результатов работы [2]. Позже в многомерном случае для уравнений такого же вида повышенная суммируемость градиента решения задачи Дирихле в области с достаточно регулярной границей была установлена в [3]. Оценки типа Боярского-Мейера решений задачи Зарембы в ограниченной липшицевой области для линейных эллиптических уравнений второго порядка известны из работ [4] и [5].

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Главную роль играет условие на структуру множества носителя данных Дирихле  $F$ . Для формулировки результата нам потребуется понятие емкости. Определим для компакта  $K \subset \mathbb{R}^n$  емкость  $C_q(K)$ , которая при  $1 < q < n$  определяется равенством

$$C_q(K) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi|^q dx : \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \phi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Величина показателя  $q$  связана со значением показателя  $p$  из (1.2), размерностью пространства  $n$  и определяется следующим образом: если  $p \in (1, n/(n-1)]$ , то  $q = (p+1)/2$ , а если  $p \in (n/(n-1), n]$ , где  $n > 2$ , то  $q = np/(n+p)$ .

Ниже  $B_r^{x_0}$  означает открытый шар радиуса  $r$  с центром в точке  $x_0$ . Сформулируем ограничение на множество  $F$ .

**А.** Если  $1 < p \leq n$ , то предполагается выполнение следующего условия: для произвольной точки  $x_0 \in F$  при  $r \leq r_0$  справедливо неравенство

$$C_q(F \cap \overline{B_r^{x_0}}) \geq c_0 r^{n-q}, \quad (2.6)$$

в котором положительная постоянная  $c_0$  не зависит от  $x_0$  и  $r$ .

**В.** Если  $p > n$ , то предполагается, что множество  $F$  не пусто:  $F \neq \emptyset$ .

В каждом из предполагаемых случаев выполнено неравенство Фридрихса (1.1). При выполнении условия (2.6) оно вытекает из неравенства Мазы [6] (теорема из § 10.1.2). Если же  $p > n$ , то нужно воспользоваться определением внутреннего (кубического) диаметра открытого множе-

ства (см. [2], конец § 10.2) и воспользоваться теоремой 1 из § 10.2.3 монографии [6].

Пусть  $mes_{n-1}(E)$  означает  $(n-1)$ - мерную меру Лебега множества  $E \subset \partial D$ . Заметим, что из условия  $mes_{n-1}(F \cap \overline{B_r^{x_0}}) \geq c_0 r^{n-1}$ , аналогичного (2.6), вытекает и само условие (2.6). Это следует из оценки предложения 4 [6, § 9.1].

## 3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для пояснения схемы доказательства основного утверждения нам потребуется более детально определить, как определяется понятие липшицевой области  $D$ . Будем называть область  $D$  липшицевой, если для каждой точки  $x_0 \in \partial D$  существует открытый куб  $Q$  с центром в  $x_0$ , грани которого параллельны координатным осям, длина ребра не зависит от  $x_0$  и в некоторой декартовой системе координат с началом в  $x_0$  множество  $Q \cap \partial D$  есть график липшицевой функции  $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$  с постоянной Липшица, не зависящей от  $x_0$ . Длину ребра таких кубов будем считать равной  $2R_0$ , а постоянную Липшица соответствующих функций  $g$  обозначим через  $L$ . При этом для определенности предполагаем, что множество  $Q \cap D$  расположено выше графика функции  $g$ .

Справедливо следующее утверждение, в котором постоянная  $r_0$  из условия (2.6) не превосходит константы  $R_0$ .

**Теорема 1.** Если  $f \in L_{p+\delta_0}(D)$ , где  $\delta_0 > 0$ , то существует положительная постоянная  $\delta(n, p, \delta_0) < \delta_0$  такая, что для решения задачи (1.2) справедлива оценка

$$\int_D |\nabla u|^{p+\delta} dx \leq C \int_D |f|^{p(1+\delta/p)} dx, \quad (3.7)$$

в которой константа  $C$  при  $1 < p \leq n$  зависит только от  $p, \delta_0, n$ , величины  $c_0$  из (2.6) и области  $D$ . При  $p > n$  зависимость  $C$  от  $c_0$  отсутствует.

**З а м е ч а н и е 1.** Сформулированное утверждение справедливо не только для оператора  $p$ -Лапласа, но и более общего оператора вида

$$Lu = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} A \nabla u)$$

с измеримой симметрической и равномерно положительно определенной матрицей  $A$  такой, что оператор  $L$  является монотонным. Условие на матрицу  $A$ , обеспечивающее монотонность оператора  $L$ , можно найти в работе [7]. Условие монотонности требуется только для однозначной разрешимости задачи Зарембы. Все остальные рассуждения опираются только на положительную определенность матрицы  $A$ .

Сначала оценка повышенной суммируемости градиента решения задачи (1.2) устанавливается в окрестности границы области  $D$ . Здесь используется техника локального распрямления границы  $\partial D$ . Полагая  $Q_{R_0} = \{x : |x_i| < R_0, i = 1, \dots, n\}$ , для произвольной граничной точки  $x_0 \in \partial D$  рассмотрим локальную декартову систему координат с началом в  $x_0$  такую, что часть границы  $\partial D$ , попадающая в куб  $Q_{R_0}$ , задается в этой системе координат уравнением  $x_n = g(x')$ , где  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ , а  $g$  – липшицевая функция с показателем Липшица  $L$ . Предполагается, что область  $D_{R_0} = Q_{R_0} \cap D$  расположена на множестве тех точек, где  $x_n > g(x')$ . Перейдем в  $Q_{R_0}$  к новой системе координат, совершив невырожденное преобразование переменных

$$y' = x', \quad y_n = x_n - g(x'). \quad (3.8)$$

Ясно, что часть границы  $Q_{R_0} \cap \partial D$  преобразуется в кусок гиперплоскости

$$P_{R_0} = \{y : |y_i| < R_0, i = 1, \dots, n-1, y_n = 0\}$$

и нетрудно показать, что образ области  $Q_{R_0}$  содержит куб

$$K_{R_0} = \{y : |y_i| < (1 + \sqrt{n-1}L)^{-1}R_0, i = 1, \dots, n\}. \quad (3.9)$$

В полукубе  $K_{R_0}^+ = K_{R_0} \cap \{y : y_n > 0\}$ , содержащимся в образе области  $D \cap Q_{R_0}$ , задача (1.2), за решением которой сохраним исходное обозначение, примет вид

$$L_1 u := \operatorname{div}(|\nabla_{y'} u + u_{y_n} \nabla_{y'} g|^{p-2} a(y) \nabla_{y'} u) = \tilde{l} \text{ в } K_{R_0}^+, \quad (3.10)$$

$$u = 0 \text{ на } \tilde{F}_{R_0}, \quad \frac{\partial u}{\partial \tilde{\nu}} = 0 \text{ на } \tilde{G}_{R_0}.$$

Здесь симметричная матрица  $a(y) = \{a_{ij}(y)\}$  равномерно положительно определена, а вектор-функция  $f$ , участвующая в записи функционала (1.4), преобразуется в вектор функцию  $\tilde{f}$ , компоненты которой определяются равенствами

$$\tilde{f}(y) = (\tilde{f}_1(y), \dots, \tilde{f}_n(y)),$$

$$\text{где } \tilde{f}_i(y) = f_i(y', y_n + g(y')) \text{ при } i = 1, \dots, n-1, \quad (3.11)$$

$$\tilde{f}_n(y) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g(y')}{\partial y_i} f_i(y', y_n + g(y')) + f_n(y', y_n + g(y')).$$

Множества  $\tilde{F}_{R_0}$  и  $\tilde{G}_{R_0}$  таковы, что  $\tilde{F}_{R_0} = \tilde{F} \cap P_{R_0} \cap K_{R_0}$  и  $\tilde{G}_{R_0} = \tilde{G} \cap P_{R_0} \cap K_{R_0}$ , где  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{G}$  – образы множеств  $F \cap Q_{R_0}$  и  $G \cap Q_{R_0}$  соответственно, а  $\frac{\partial u}{\partial \tilde{\nu}}$

означает внешнюю конормальную производную функции  $u$ , порожденную матрицей  $a$ .

Продолжим функцию  $u$ , удовлетворяющую (3.10), чётно относительно гиперплоскости  $\{y : y_n = 0\}$ . Продолженная функция, за которой вновь сохраним предыдущее обозначение, удовлетворяет соотношению

$$L_2 u = \operatorname{div}(|\tilde{\nabla} u|^{p-2} b(y) \nabla u) = l_h \quad (3.12)$$

и  $K_{R_0} \setminus \tilde{F}_{R_0}, \quad u = 0 \text{ на } \tilde{F}_{R_0}.$

Здесь  $\tilde{\nabla} u$  совпадает с  $\nabla u + u_{y_n} \nabla g$  при  $y_n > 0$ , а при  $y_n < 0$  совпадает с таким же выражением с учетом того, что частная производная  $u_{y_n}$  продолжается нечётно. Положительно определенная матрица  $b(y) = \{b_{ij}(y)\}$  такова, что  $b_{jn}(y) = b_{nj}(y)$  при  $j \neq n$  являются нечётными продолжениями  $a_{jn}(y)$  из (3.10), а все остальные элементы  $b_{ij}(y)$  – чётным продолжением  $a_{ij}(y)$ . Компоненты вектор-функции  $h = (h_1, \dots, h_n)$  в (3.12), участвующей в представлении функционала  $l_h$ , определяются равенствами: ее компоненты  $h_i(y)$  при  $i = 1, \dots, n-1$  – чётные продолжения компонент  $\tilde{f}_i(y)$  из (3.10), а  $h_n(y)$  – нечётное продолжение  $\tilde{f}_n(y)$ . Отметим, что  $C_1(L)|\nabla u| \leq |\tilde{\nabla} u| \leq C_2(L)|\nabla u|.$

Решением (3.12) является функция  $u \in W_p^1(K_{R_0})$ , для которой выполнено интегральное тождество (см. (1.5))

$$\int_{K_{R_0}} |\tilde{\nabla} u|^{p-2} b \nabla u \cdot \nabla \varphi dy = \int_{K_{R_0}} h \cdot \nabla \varphi dy \quad (3.13)$$

для всех пробных функций  $\varphi \in W_2^1(K_{R_0}, F_{R_0})$ , которые являются замыканием множества бесконечно дифференцируемых в замыкании  $K_{R_0}$  функций, равных нулю в окрестности  $\partial K_{R_0}$  и  $F_{R_0}$  по норме пространства  $W_p^1(K_{R_0})$ .

Обозначим через  $Q_R^{y_0}$  открытый куб с центром в точке  $y_0$  с ребрами длиной  $2R$ , параллельными координатным осям. Ниже предполагается, что

$$y_0 \in K_{R_0/2} \setminus \partial K_{R_0/2}, \quad \text{где } R \leq \frac{1}{2} \operatorname{dist}(y_0, \partial K_{R_0/2}),$$

и полагается

$$\int_{Q_R^{y_0}} f dx = \frac{1}{|Q_R^{y_0}|} \int_{Q_R^{y_0}} f dx,$$

где  $|Q_R^{y_0}|$  означает  $n$ -мерную меру куба  $Q_R^{y_0}$ .

Пользуясь условиями на множество  $F$ , после соответствующего выбора пробной функции в (3.13) с помощью неравенства Мазьи [6] (теорема из § 10.1.2) при выполнении условия (2.6), нера-

венством теоремы 1 из § 10.2.3 монографии [6] при  $p > n$ , а также неравенства Пуанкаре-Соболева устанавливается, что

$$\begin{aligned} & \left( \int_{Q_R^{x_0}} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p} \leq \\ & \leq C \left( \left( \int_{Q_{2R}^{x_0}} |\nabla u|^q dx \right)^{1/q} + \left( \int_{Q_{2R}^{x_0}} |h|^{p'} dx \right)^{1/p} \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Здесь постоянная  $q$  при  $1 < p \leq n$  определяется как и в § 2, а при  $p > n$  равна  $(p+n)/2$ . Постоянная  $C$  при  $1 < p \leq n$  зависит только от  $n, p, L$  и константы  $c_0$  из условия (2.6) а при  $p > n$  зависимости от  $c_0$  нет.

Из этой оценки, справедливой для всех рассматриваемых кубов  $Q_R^{x_0}$  и обобщенной леммы Геринга (см. [8], а также [9], гл. VII) с учетом длины ребра куба  $K_{R_0}$  (см. (3.9)) в предположении, что  $h \in L_{2+\delta_0}(K_{R_0})$ , где  $\delta_0 > 0$ , имеем

$$\|\nabla u\|_{L_{p+\delta}(K_{R_0/4})} \leq C \left( \|\nabla u\|_{L_p(K_{R_0/2})} + \|h\|^{p'/p} \right)$$

с положительной постоянной  $\delta = \delta(n, p, \delta_0)$  и дополнительной зависимостью  $C$  от  $R_0$ . В силу четности функции  $u$  относительно гиперплоскости  $\{y : y_n = 0\}$  ее можно переписать в виде (см. (3.10))

$$\begin{aligned} & \|\nabla u\|_{L_{p+\delta}(K_{R_0/4})} \leq \\ & \leq C \left( \|\nabla u\|_{L_p(K_{R_0/2})} + \|\tilde{f}\|^{p'/p} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Совершая здесь преобразование, обратное к (3.8), заметим что прообраз полукуба  $K_{R_0/2}^+$  содержится в множестве  $D_{R_0}$ , а прообраз полукуба  $K_{R_0/4}^+$  содержит множество  $D_{\theta R_0}$ , где  $\theta = \theta(n, L) > 0$ . Учитывая еще соотношение (3.11), в силу (3.15) будем иметь

$$\|\nabla u\|_{L_{p+\delta}(D_{\theta R_0})} \leq C \left( \|\nabla u\|_{L_p(D_{R_0})} + \|f\|^{p'/p} \right)$$

Переходя здесь к декартовой системе координат с началом в точке  $x_0 \in \partial D$ , из которой исходили с самого начала рассуждений, получим

$$\begin{aligned} & \|\nabla u\|_{L_{p+\delta}(D \cap Q_{\theta R_0}^{x_0})} \leq \\ & \leq C \left( \|\nabla u\|_{L_p(D \cap Q_{R_0}^{x_0})} + \|f\|^{p'/p} \right) \end{aligned}$$

Поскольку  $x_0 \in \partial D$  произвольная граничная точка, а граница  $\partial D$  компактна, то можно найти такое конечное покрытие  $\partial D$ , что замкнутое множество

$$\mathcal{D}_{\theta_1 R_0} = \{x \in D : \text{dist}(x, \partial D) \leq \theta_1 R_0\},$$

$$\theta_1 = \theta_1(n, L) > 0$$

содержится в объединении множеств  $D \cap Q_{\theta R_0}^{x_i}$ , где  $x_i \in \partial D$ . Поэтому, суммируя неравенства

$$\|\nabla u\|_{L_{p+\delta}(D \cap Q_{\theta R_0}^{x_i})} \leq C \left( \|\nabla u\|_{L_p(D \cap Q_{\theta R_0}^{x_i})} + \|f\|^{p'/p} \right),$$

придем к оценке

$$\|\nabla u\|_{L_{p+\delta}(\mathcal{D}_{\theta_1 R_0})} \leq C \left( \|\nabla u\|_{L_p(D)} + \|f\|^{p'/p} \right).$$

Внутренняя оценка

$$\|\nabla u\|_{L_{p+\delta}(D \setminus \mathcal{D}_{\theta_1 R_0})} \leq C \left( \|\nabla u\|_{L_p(D)} + \|f\|^{p'/p} \right)$$

не учитывает граничных условий и доказывается намного проще. В итоге, сочетая две последние оценки и пользуясь энергетическим неравенством для первого слагаемого в правых частях этих оценок, приходим к (3.7).

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом РНФ (проект 22-21-00292).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных задач. Москва: Издательство Мир, 1972.
2. Боярский Б.В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб. 1957. Т. 43(85). № 4. С. 451–503.
3. Meyers N.G. An  $L^p$ -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e série. 1963. V. 17. № 3. P. 189–206.
4. Алхутов Ю.А., Чечкин Г.А. Повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы для уравнения Пуассона // Доклады РАН. 2021. Т. 497. № 2. С. 3–6.
5. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A. The Meyer's Estimate of Solutions to Zaremba Problem for Second-order Elliptic Equations in Divergent Form // C R Mécanique. 2021. V. 349. № 2. P. 299–304.
6. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1985.
7. Лантнев Г.И. Условия монотонности для одного класса квазилинейных дифференциальных операторов, зависящих от параметров // Матем. заметки. 2014. Т. 96. № 3. С. 405–417.
8. Gehring F.W. The  $L^p$ -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. 1973. V. 130. P. 265–277.
9. Скрытник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.



**ON MANY DIMENSIONAL ZAREMBA PROBLEM  
FOR INHOMOGENEOUS  $p$ -LAPLACE EQUATION**

**Yu. A. Alkhutov<sup>a</sup> and A. G. Chechkina<sup>b,c</sup>**

<sup>a</sup> *A.G. and N.G. Stoletov Vladimir State University, Vladimir, Russian Federation*

<sup>b</sup> *M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

<sup>c</sup> *Institute of Mathematics with Computing Center –*

*Subdivision of the Ufa Federal Research Center of Russian Academy of Science, Ufa, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

A higher integrability of the gradient of a solution to the Zaremba problem in a bounded Lipschitz many dimensional domain is proved for the inhomogeneous  $p$ -Laplace equation.

*Keywords:* Zaremba problem, Meyers estimates,  $p$ -capacity, imbedding theorems, higher integrability

УДК 517.545

## О ПРИБЛИЖЕННОМ СУММИРОВАНИИ РЯДОВ ПУАНКАРЕ В МОДЕЛИ ШОТТКИ

© 2022 г. С. Ю. Лямаев

Представлено академиком РАН Е.Е. Тыртышниковым

Поступило 09.01.2022 г.

После доработки 16.04.2022 г.

Принято к публикации 12.05.2022 г.

Предложены модификации алгоритмов Богатырёва и Шмиза для приближенного суммирования рядов Пуанкаре в модели Шоттки вещественных гиперэллиптических кривых, позволяющие сократить число суммируемых членов без потери точности.

*Ключевые слова:* группы Шоттки, тета-ряды Пуанкаре, униформизация, вещественные гиперэллиптические кривые, римановы поверхности

DOI: 10.31857/S2686954322040129

Зафиксируем натуральное число  $g$  и разбиение  $\{1, 2, \dots, g\} = \Sigma^+ \sqcup \Sigma^-$ . На  $g$  непересекающихся отрезках положительной полуоси как на диаметрах построим окружности  $C_1, \dots, C_g$ . Нумерация окружностей – слева направо. На всякой окружности  $C_j$  отметим пару точек: при  $j \in \Sigma^+$  отметим точки пересечения с вещественной осью  $c_j \pm r_j$ , при  $j \in \Sigma^-$  – произвольную пару комплексно сопряженных точек  $c_j \pm ir_j$ . Обозначим за  $G_j$  дробно-линейную инволюцию, оставляющую на месте каждую из отмеченных на  $C_j$  точек. Отображение  $G_j$  переводит внешность окружности  $C_j$  в ее внутренность, следовательно, гиперболическое преобразование  $S_j u := G_j(-u)$  переводит внешность окружности  $C_{-j} := -C_j$  во внутренность  $C_j$ . Преобразования  $S_1, \dots, S_g$  свободно порождают группу Шоттки, которую обозначим за  $\mathfrak{S}$ . Ее стандартная фундаментальная область  $\mathcal{F}$  – это внешность  $2g$  окружностей  $C_{\pm 1}, \dots, C_{\pm g}$  в сфере Римана. Факторпространство  $\overline{\mathcal{F}}/\sim$ , где отношение эквивалентности склеивает пары окружностей  $C_{-j}, C_j$  посредством преобразований  $S_j$ ,  $1 \leq j \leq g$ , является вещественной гиперэллиптической кривой рода  $g$  с  $k$  вещественными и  $k$  ковещественными овалами, где  $k := |\Sigma^+| + 1$ , – и всякая такая кривая

может быть получена в результате проделанной геометрической конструкции [2].

Эффективная теория функций на кривой в модели Шоттки строится на основе тета-рядов Пуанкаре. Так, ключевой объект теории – нормированный абелев дифференциал третьего рода  $\eta_{zw}$  с полюсами в точках  $z, w \in \overline{\mathcal{F}}$  – получается усреднением по группе Шоттки рационального дифференциала на римановой сфере:

$$\eta_{zw}(u) = \sum_{S \in \mathfrak{S}} \left( \frac{1}{Su - z} - \frac{1}{Su - w} \right) d(Su).$$

Этот линейный ряд Пуанкаре абсолютно сходится, поскольку фундаментальная область  $\mathcal{F}$  удовлетворяет критерию Шоттки. Настоящее сообщение – о приближенном вычислении суммы такого ряда на компьютере. Вся техника прямо переносится и на другие бесконечные суммы и произведения, которыми записываются теоретико-функциональные объекты на кривой в модели Шоттки.

Введем обозначения  $\sigma_j := \pm 1$  при  $j \in \Sigma^\pm$  и  $S_{-j} := S_j^{-1}$ ,  $c_{-j} := -c_j$ ,  $r_{-j} := r_j$ ,  $\sigma_{-j} := \sigma_j$  при  $1 \leq j \leq g$ . Справедлива формула

$$S_j u = c_j - \frac{\sigma_j r_j^2}{u + c_j}, \quad j \in \Xi := \{\pm 1, \dots, \pm g\}.$$

Группа Шоттки  $\mathfrak{S}$  есть множество несократимых слов алфавита  $\{S_j \mid j \in \Xi\}$  с операцией конкатенации. Обозначим за  $|S|$  количество букв в несократимой записи слова  $S \in \mathfrak{S}$ . Определим на  $\mathfrak{S}$  отно-

шение строгого частичного порядка:  $S < T$ , если  $T = QS$ , где  $Q \neq id$  и  $|T| = |Q| + |S|$ .

Граф Кэли группы Шоттки имеет вид бесконечного дерева, вершины которого взаимно-однозначно соответствуют элементам группы. Всякая вершина  $S$  соединена ребрами с вершинами  $S_j S, j \in \Xi$ . Корень – вершина, отвечающая тождественному преобразованию  $id$ . Множество  $\{S \in \mathfrak{S} : |S| = n\}$  будем называть  $n$ -м уровнем дерева. Вершины, соединенные с  $S$  ребром и лежащие на следующем уровне по сравнению с  $S$ , – это дети вершины  $S$ . При  $S \neq id$  имеется одна вершина, соединенная с  $S$  ребром и лежащая на предыдущем уровне, – будем называть ее родителем  $S$ . Назовем вершины братьями, если у них общий родитель. Если  $T < S$ , то вершину  $S$  будем называть потомком вершины  $T$ , а вершину  $T$  – предком вершины  $S$ .

Для приближенного суммирования ряда Пуанкаре из бесконечного дерева Кэли нужно выделить конечное поддерево  $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$ , сумма по которому хорошо приближает точное значение. Скорость убывания членов ряда вдоль разных ветвей дерева Кэли значительно отличается, поэтому суммировать по нескольким первым уровням, взятым целиком, неэкономично. Для выделения конечного поддерева известны два эффективных подхода: алгоритм А.Б. Богатырёва [1, 2] и алгоритм М. Шмиза [3].

Существуют также другие подходы к вычислению теоретико-функциональных объектов в модели Шоттки, не связанные с непосредственным суммированием рядов Пуанкаре: метод В. Митюшева, Н. Рылко [4, 5] и метод Д. Крауди, Дж. Маршалла, Н. Трефтена [6]. В рамках настоящей работы сравнение с этими методами не проводилось.

Пусть точки  $u, z, w \in \overline{\mathcal{F}}$  лежат в разных орбитах действия группы  $\mathfrak{S}$ . Можем оценить

$$\left| \frac{\eta_{zw}(u)}{du} - \sum_{S \in \mathfrak{T}} f(S) \right| \leq \Upsilon \sum_{S \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}} |S'u|,$$

где  $f(S) := ((Su - z)^{-1} - (Su - w)^{-1})S'u$  – это член ряда,  $\Upsilon$  – сумма обратных расстояний от точек  $z$  и  $w$  до орбиты точки  $u$ . Пусть для каждого  $T \in \mathfrak{S}$  известно число  $\Phi(T)$  такое, что

$$\sum_{S \in \mathfrak{S}: S > T} |S'u|/|T'u| \leq \Phi(T).$$

Для простоты потребуем, чтобы  $\Phi(T)$  зависело только от первой слева буквы в несократимой записи слова  $T$ .

Алгоритм Богатырёва имеет апостериорную оценку точности. В каждый момент будем хранить в памяти путь от корня дерева Кэли до теку-

щей вершины  $T$  вместе со значениями  $Su$  и  $S'u$  для всякой вершины  $S$  на этом пути. При вычислении значений  $Tu$  и  $T'u$  для текущей вершины используем сохраненные в памяти значения для родительской вершины. Прибавим член ряда, отвечающий текущей вершине к приближенному значению суммы. Если число  $\Omega(T) := \Phi(T)|T'u|$  не меньше заранее выбранного малого параметра  $\mu$ , то продолжим движение по текущей ветви дерева Кэли – перейдем от вершины  $T$  к наибольшему в лексикографическом порядке ее ребенку. В противном случае исключим из счета все поддерево потомков вершины  $T$  и сместимся на соседнюю ветвь – перейдем к наибольшей в лексикографическом порядке вершине среди детей предков вершины  $T$ , меньших чем  $T$  в лексикографическом порядке. Если такой вершины нет, алгоритм останавливается – оценка погрешности равна сумме значений  $\Omega(S)$  по всем листьям  $S$  поддерева просуммированных вершин  $\mathfrak{T}$ . Стартует алгоритм с корня дерева Кэли.

Алгоритм Шмиза имеет априорную оценку точности и является жадным алгоритмом: на каждой итерации прибавляется вершина с наибольшей оценкой вклада в сумму. Реализовать эту идею можно, например, следующим образом. В каждый момент в памяти будем хранить все листья  $S$  поддерева просуммированных вершин, для них будем помнить значения  $Su, S'u, \Omega(S)$  и первую слева букву в несократимой записи слова  $S$ . На каждой итерации из памяти удаляется вершина  $T$  с максимальным значением  $\Omega(T)$ , вместо нее в память помещаются все ее дети и прибавляются к приближенному значению суммы. Текущая оценка погрешности равна сумме значений  $\Omega(S)$  по всем сохраненным в памяти вершинам  $S$  – алгоритм останавливается, как только она становится меньше требуемого значения  $\epsilon$ .

В обоих алгоритмах поддерево просуммированных вершин  $\mathfrak{T}$  заранее неизвестно и формируется непосредственно в процессе счета. Если за  $\mu$  в алгоритме Богатырёва положить минимальное значение  $\Omega(\cdot)$  среди всех нелистовых вершин поддерева, по которому просуммировал алгоритм Шмиза, то при условии, что в дереве Кэли есть только одна вершина с таким значением, алгоритм Богатырёва просуммирует ровно по тому же поддереву.

Заметим, что в обоих алгоритмах на основании значения  $\Omega(T)$  принимается решение об учете в сумме сразу всех детей  $T$ . Это приводит к тому, что часть листьев поддерева просуммированных вершин  $\mathfrak{T}$  вносит пренебрежимо малый вклад в сумму. При этом листовых вершин при  $\mathfrak{T} \supset \{S \in \mathfrak{S} : |S| < n\}$ ,  $n \rightarrow \infty$  и  $g > 1$  в  $2g - 2$  раз больше, чем нелистовых. Особенно много неэффективной работы ал-

горитмы производят в ситуациях, когда какие-либо из граничных окружностей фундаментальной области очень близки друг к другу – в этом случае в поддереве просуммированных вершин будут присутствовать длинные ветви, у большинства вершин которых ровно один из  $2g - 1$  детей вносит весомый вклад в сумму.

Предложим модификации алгоритмов на основе следующей идеи: решение об учете в сумме будем принимать по отдельности для каждого ребенка  $S_j T$  вершины  $T$  с использованием оценки

$$\left| \frac{(S_j T)' u}{T' u} \right| = \frac{r_j^2}{|Tu + c_j|^2} \leq \frac{r_j^2}{\rho^2(C_t, -c_j)} =: \Lambda_{jt},$$

где  $t \neq j$  – индекс первой слева буквы  $S$ , несократимого слова  $T \neq id$ ,  $\rho(\cdot, \cdot)$  – евклидово расстояние. Положим

$$\Psi(S_j T) := (\Phi(S_j T) + 1) \begin{cases} \Lambda_{jt}, & T \neq id, \\ r_j^2 / |u + c_j|^2, & T = id. \end{cases}$$

Будем добавлять ребенка  $S_j T$  вершины  $T$  в поддерево  $\mathfrak{L}$ , если  $\Theta(S_j T) := \Psi(S_j T) |T' u| \geq \mu$ , где  $\mu$  – фиксированный малый параметр. Для братьев  $T_1$  и  $T_2$  введем старшинство:  $T_1$  старше  $T_2$ , если  $\Psi(T_2) < \Psi(T_1)$ . Обозначим за  $\mathfrak{B}(S)$  множество, состоящее из самой вершины  $S$  и ее младших братьев. Для несократимых слов  $T_1$  и  $T_2$ , у которых подслово из  $n \geq 1$  первых справа букв являются братьями, определим старшинство так:  $T_1$  старше  $T_2$ , если указанное подслово у  $T_1$  старше, чем у  $T_2$ .

**Алгоритм 1.** (Модифицированный алгоритм Богатырёва). Зафиксируем  $\mu > 0$ . Присвоим  $\text{sum} := f(id)$  и  $\text{err} := 0$ . Будем хранить в памяти массив со следующей структурой: в момент перехода в вершину  $T = S_{i_{|T|}} \dots S_{i_2} S_{i_1}$  в  $n$ -й ячейке массива при  $1 \leq n \leq |T| - 1$  записаны буква  $S_{i_n}$  и вектор  $h(T_{[n]})$ , где  $h(S) := (Su, S'u, |S'u|)$ ,  $T_{[n]} := S_{i_n} \dots S_{i_2} S_{i_1}$ . Перейдем в самую старшую вершину первого уровня.

*Итерация.* Пусть  $T$  – вершина, в которую только что перешел алгоритм. Используя  $(|T| - 1)$ -ю ячейку массива, вычислим вектор  $h(T)$  и поместим его в  $|T|$ -ю ячейку вместе с буквой  $S_{i_{|T|}}$ . Присвоим  $\text{sum} := \text{sum} + f(T)$ . Найдем следующую вершину рекурсивной процедурой поиска. Вначале за  $\mathbb{U}$  обозначим множество, состоящее из детей вершины  $T$ , а также из младших чем вершина  $T$  детей ее предков. Пусть  $S$  – самая старшая вершина в  $\mathbb{U}$  среди лежащих на максимальном уровне в этом множестве. Если  $\Theta(S) \geq \mu$ , то поиск закончен – перейдем от  $T$  к  $S$ . Иначе учтем вершину  $S$  и всех ее младших братьев вместе с поддеревьями

потомков в оценке погрешности  $\text{err} := \text{err} + \sum_{B \in \mathfrak{B}(S)} \Theta(B)$ , переобозначим  $\mathbb{U} := \mathbb{U} \setminus \mathfrak{B}(S)$  и повторим процедуру поиска с новым  $\mathbb{U}$ . Если  $\mathbb{U} = \emptyset$ , алгоритм останавливается и имеем  $|\eta_{\text{эв}}(u)/du - \text{sum}| \leq Y \cdot \text{err}$ .

**Алгоритм 2** (Модифицированный алгоритм Шмица). Выберем целевую точность  $\varepsilon > 0$ .

Присвоим  $\text{sum} := f(id)$ ,  $\text{err} := \sum_{j \in \Xi} \Theta(S_j)$  и сохраним в памяти самую старшую вершину первого уровня. Для всякой сохраненной в памяти вершины  $S$  будем помнить вектор  $h(Q)$ , где  $Q$  – родитель  $S$ , а также  $\Theta(S)$  и две первых слева буквы несократимого слова  $S$ .

*Итерация.* Удалить из памяти вершину  $T$  с максимальным значением  $\Theta(T)$ , поместить в память ее старшего ребенка и, если  $T$  не самый младший среди братьев, следующего по старшинству брата. Присвоить  $\text{sum} := \text{sum} + f(T)$  и  $\text{err} := \text{err} - \Theta(T) + \sum_{j \in \Xi: S_j T > T} \Theta(S_j T)$ . Как только  $\text{err} < \varepsilon/Y$ , алгоритм останавливается.

Перед стартом Алгоритма 1 необходимо вычислить и запомнить значения  $\mu/\Psi(S_j T)$  и  $\sum_{B \in \mathfrak{B}(S, T)} \Psi(B)$  для всех комбинаций первых двух слева букв слова  $S_j T$ , перед стартом Алгоритма 2 – значения  $\Psi(S_j T)$  и  $\sum_{j \in \Xi} \Psi(S_j T)$ .

Если за  $\mu$  в Алгоритме 1 положить минимальное значение  $\Omega(\cdot)$  по всем вершинам, просуммированным Алгоритмом 2, то при условии, что в дереве Кэли есть только одна вершина с таким значением, Алгоритм 1 просуммирует ровно по такому же поддереву.

Результаты сравнения алгоритмов на шести численных примерах – в табл. 1. В алгоритмах с апостериорной оценкой точности для малого параметра  $\mu$ , подаваемого на вход, подбиралось максимальное значение, с которым на выходе алгоритма достигается нужная точность  $\varepsilon$ . Во всех примерах алгоритмы Богатырёва и Шмица суммировали одинаковое число вершин  $N_1$ , поэтому их результаты объединены в одну колонку. По этой же причине в одну колонку объединены Алгоритмы 1 и 2, для них число просуммированных вершин обозначено за  $N_2$ . В качестве  $\Phi(T)$  использовалась оценка Бернсайда [3, 7]  $\Phi(T) := \lambda_t / (1 - \lambda)$ , применяемая при условии  $\lambda < 1$ , где  $\lambda_t := \sum_{j \in \Xi \setminus \{t\}} \Lambda_{jt}$ ,  $\lambda := \max_{t \in \Xi} \lambda_t$ ,  $t$  – индекс первой слева буквы в несократимой записи слова  $T \neq id$ .

Таблица 1. Сравнение алгоритмов

№	$N_1$	$N_2$	$N_1/N_2$
1	9617	7129	1.35
2	43912	17629	2.49
3	52565	17910	2.93
4	14582	2899	5.03
5	23922	2007	11.92
6	15126	398	38.01

Во всех примерах использовались точки  $u = -1 + 2i$ ,  $z = 3 + i$  и  $w = -2$ .

Массивы  $c$  и  $r$  имеют длину  $g$  – в них объединены значения для индексов  $1, \dots, g$ . За  $\varepsilon$  обозначена требуемая оценка точности на выходе алгоритмов. Во всех примерах, кроме третьего,  $\sigma_j = 1$ ,  $1 \leq j \leq g$ . Пример 1:  $g = 3$ ,  $c = (0.1, 0.6, 1)$ ,  $r = 0.05 \cdot (1, 1, 1)$ ,  $\varepsilon = 10^{-10}$ . Пример 2:  $g = 3$ ,  $c = (0.1, 0.9, 1)$ ,  $r = (0.05, 0.04, 0.04)$ ,  $\varepsilon = 10^{-10}$ . Пример 3:  $g = 4$ ,  $\sigma = (1, -1, -1, 1)$ ,  $c = (0.1, 0.5, 0.8, 1)$ ,  $r = 0.01 \cdot (1, 1, 6, 8)$ ,  $\varepsilon = 10^{-10}$ , окружность  $C_2$  имеет центр  $\approx 0.5610$  и радиус  $\approx 0.06184$ , окружность  $C_3$  – центр  $\approx 0.8057$  и радиус  $\approx 0.06027$ . Пример 4:  $g = 8$ ,  $c = (0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.7, 0.75, 0.9, 1)$ ,  $r = 0.01 \cdot (0.1, 4, 4, 0.1, 0.1, 0.1, 4, 4)$ ,  $\varepsilon = 10^{-7}$ . Пример 5:  $g = 12$ ,  $c = (0.3, 0.4, 0.5, 0.52, 0.67, 0.78, 0.84, 0.88, 0.91, 0.96, 0.98, 1)$ ,  $r = 0.01 \cdot (2, 4.5, 1, 0.8, 3.6, 0.9, 1, 2, 0.5, 0.5, 0.5, 1)$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Пример 6:  $g = 100$ ,  $c_j = j/100$ ,  $r_j = 10^{-4}$ ,  $1 \leq j \leq 100$ ,  $\varepsilon = 10^{-10}$ .

С изменением точности  $\varepsilon$  при фиксированных остальных параметрах относительная разница

между алгоритмами мало меняется. К примеру, в Примере 4 при  $\varepsilon = 10^{-5}$  имеем  $N_1/N_2 \approx 5.05$ , при  $\varepsilon = 10^{-6}$  имеем  $N_1/N_2 \approx 4.85$ , при  $\varepsilon = 10^{-8}$  –  $N_1/N_2 \approx 5.00$ , при  $\varepsilon = 10^{-9}$  –  $N_1/N_2 \approx 4.99$ .

Предложенные алгоритмы по сравнению с алгоритмами Богатырёва и Шмиза позволяют суммировать меньшее число членов ряда для достижения той же оценки точности на выходе: на десятки процентов в обычных ситуациях и в несколько раз в ситуациях медленной сходимости.

#### ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом РФФ 21-11-00325. Методология модифицированных алгоритмов разработана при поддержке отделения ИВМ РАН Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение 075-15-2019-1624).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богатырёв А.Б. Матем. сб. 1999. Т. 190. № 11. С. 15–50.
2. Богатырёв А.Б. Матем. сб. 2003. Т. 194. № 4. С. 3–28.
3. Schmies M., Numerische Methoden für Riemannsche Flächen und Helikoide mit Henkeln. Ph.D. Thesis, Technische Universität Berlin, 2005.
4. Mityushev V., Rylko N. Mathematical and Computer Modelling. 2013. V. 57. P. 1350–1359.
5. Mityushev V. Analytic Number Theory, Approximation Theory, and Special Functions, Springer. 2014. P. 827–852.
6. Crowdy D.G., Marshall J.S. Comput. Methods Funct. Theory. 2010. V. 10. P. 501–517.
7. Burnside W. Proc. London Math. Soc. 1891. V. 23. P. 49–88.

## ON THE APPROXIMATE SUMMATION OF POINCARÉ SERIES IN THE SCHOTTKY MODEL

S. Yu. Lyamaev

Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russia Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS E.E. Tyrtshnikov

Modifications of the Bogatyrev and Schmiz algorithms for approximate summation are proposed. Poincaré series in the Schottky model of real hyperelliptic curves, allowing reduce the number of summed terms without loss of precision.

*Keywords:* Schottky groups, Poincaré theta series, uniformization, real hyperelliptic curves, Riemann surfaces

## ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ЛАНДАУ И БЕККЕРА–ПОММЕРЕНКЕ

© 2022 г. О. С. Кудрявцева<sup>1,2,\*</sup>, А. П. Солодов<sup>1,\*\*</sup>

Представлено академиком Б.С. Кашиным

Поступило 01.04.2022 г.

После доработки 30.04.2022 г.

Принято к публикации 27.05.2022 г.

Получено обобщение неравенств Ландау и Беккера–Поммеренке, лежащих в основе решения задачи о точных областях однолиственности на подклассах голоморфных отображений.

*Ключевые слова:* голоморфное отображение, неподвижные точки, угловая производная, область однолиственности

**DOI:** 10.31857/S2686954322040117

### ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Поиск области однолиственности как для одной голоморфной функции, так и на классе голоморфных функций является классической задачей геометрической теории функций. Длительная история исследования этой задачи накопила разнообразие методов и подходы к ее решению. В настоящей работе мы сосредоточимся на идейно близких подходах Ландау и Беккера–Поммеренке. Успешное решение Ландау задачи о точном радиусе круга однолиственности на классе ограниченных голоморфных функций с внутренней неподвижной точкой, а также недавние результаты Беккера, Поммеренке и Солодова об областях однолиственности для функций, имеющих неподвижную точку на границе, так или иначе связаны с получением точных неравенств на соответствующих классах. В упомянутых неравенствах оценивается общее значение функции в двух различных точках. В данной работе получены оценки общего значения функции в  $n$  различных точках, что может найти применение в теории  $n$ -листных функций.

Пусть  $\mathcal{B}$  – класс голоморфных отображений единичного круга  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  в себя. Обозначим через  $\mathcal{B}\{0\}$  подкласс функций с внутренней неподвижной точкой  $z = 0$ , а через  $\mathcal{B}\{1\}$  – подкласс функций с граничной неподвижной точкой  $z = 1$  и конечной угловой производной  $f'(1)$ :

$$\mathcal{B}\{0\} = \{f \in \mathcal{B} : f(0) = 0\},$$

$$\mathcal{B}\{1\} = \{f \in \mathcal{B} : \angle \lim_{z \rightarrow 1} f(z) = 1,$$

$$\angle \lim_{z \rightarrow 1} f'(z) = f'(1) < \infty\}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $f \in \mathcal{B}\{0\}$  и различные точки  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$  таковы, что  $f(a_1) = \dots = f(a_n) = c$ . Тогда

$$|c| \leq \prod_{k=1}^n |a_k|. \quad (1)$$

Неравенство (1) при  $n = 1$  – не что иное, как лемма Шварца. При  $n = 2$  неравенство (1) было получено Ландау и позволило ему найти единый круг однолиственности на классе  $\mathcal{B}_M\{0\} = \{f \in \mathcal{B}\{0\} : |f'(0)| \geq 1/M\}$ ,  $M > 1$ .

**Теорема А (Ландау [1]).** Пусть  $f \in \mathcal{B}_M\{0\}$ ,  $M > 1$ . Тогда  $f$  однолиственна в круге  $|z| < M - \sqrt{M^2 - 1}$ . При этом для любого  $R > M - \sqrt{M^2 - 1}$  найдется функция  $f \in \mathcal{B}_M\{0\}$ , не однолиственная в круге  $|z| < R$ .

На классе  $\mathcal{B}\{1\}$  имеет место неравенство, в некотором смысле аналогичное неравенству (1).

**Теорема 2.** Пусть  $f \in \mathcal{B}\{1\}$  и различные точки  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$  таковы, что  $f(a_1) = \dots = f(a_n) = c$ . Тогда

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

<sup>2</sup> Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

\*E-mail: kudryavceva\_os@mail.ru

\*\*E-mail: apsolodov@mail.ru

$$f'(1) \frac{1 - |c|^2}{|1 - c|^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1 - |a_k|^2}{|1 - a_k|^2}. \quad (2)$$

Неравенство (2) при  $n = 1$  — это хорошо известная лемма Жюлиа–Каратеодори (см. [2, гл. 1, § 1.4, теорема 1.5]). При  $n = 2$  это неравенство было получено Беккером и Поммеренке и применялось ими для нахождения области однолиственности для функции  $f \in \mathcal{B}\{1\}$ .

**Теорема В** (Беккер, Поммеренке [3]). Пусть  $f \in \mathcal{B}\{1\}$ . Тогда  $f$  однолистна в области

$$\left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1 - f(z)|^2 |1 - |z|^2|}{1 - |f(z)|^2 |1 - |z|^2} > \frac{f'(1)}{2} \right\}.$$

В [4] показано, что на классе  $\mathcal{B}\{1\}$  нет аналога теоремы А, т.е. нет единой области однолиственности. Однако ситуация меняется, если рассмотреть сужение класса  $\mathcal{B}\{1\}$ , добавив, например, условие неподвижности внутренней точки. Горяйнов [5], изучая влияние угловой производной на поведение функции внутри круга, рассмотрел класс  $\mathcal{B}[0, 1] = \mathcal{B}\{0\} \cap \mathcal{B}\{1\}$  и показал, что все функции из  $\mathcal{B}_\alpha[0, 1] = \{f \in \mathcal{B}[0, 1] : f'(1) \leq \alpha\}$ ,  $\alpha \in (1, 2)$ , однолистны в некоторой области. Окончательное решение задачи о точной области однолиственности на классе функций с двумя неподвижными точками опирается на следующую теорему.

**Теорема 3.** Пусть  $f \in \mathcal{B}[0, 1]$  и различные точки  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$  таковы, что  $f(a_1) = \dots = f(a_n) = c$ . Тогда

$$f'(1) \frac{1 - |c|^2}{|1 - c|^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1 - |a_k|^2}{|1 - a_k|^2} + \frac{\left| 1 - \lambda(c) / \prod_{k=1}^n \lambda(a_k) \right|^2}{1 - \left| \lambda(c) / \prod_{k=1}^n \lambda(a_k) \right|^2}, \quad (3)$$

где  $\lambda(z) = -z(1 - \bar{z}) / (1 - z)$ .

**Замечание 1.** В случае  $z = 1$  считаем, что  $|1 - z|^2 / (1 - |z|^2) = 0$ .

**Замечание 2.** Поскольку  $|\lambda(z)| = |z|$  для любого  $z \in \mathbb{D}$ , то в силу теоремы 1 верна оценка

$\left| \lambda(c) / \prod_{k=1}^n \lambda(a_k) \right| \leq 1$ . Это влечет неотрицательность второго слагаемого в неравенстве (3). Тем самым, теорема 3 является усилением теоремы 2 на классе  $\mathcal{B}[0, 1]$ .

Заметим, что отображение  $\lambda$  обладает рядом других интересных свойств, которые подробно изучены в [6]. В частности, в силу равенства

$$\frac{|1 - \lambda(c)|^2}{1 - |\lambda(c)|^2} = \frac{1 - |c|^2}{|1 - c|^2}$$

теорема 3 допускает переформулировку в симметричном виде.

**Теорема 3'.** Пусть  $f \in \mathcal{B}[0, 1]$  и различные точки  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$  таковы, что  $f(a_1) = \dots = f(a_n) = c$ . Тогда

$$f'(1) \frac{|1 - \lambda(c)|^2}{1 - |\lambda(c)|^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{|1 - \lambda(a_k)|^2}{1 - |\lambda(a_k)|^2} + \frac{\left| 1 - \lambda(c) / \prod_{k=1}^n \lambda(a_k) \right|^2}{1 - \left| \lambda(c) / \prod_{k=1}^n \lambda(a_k) \right|^2}.$$

Неравенство (3) при  $n = 1$  является уточнением леммы Жюлиа–Каратеодори в случае, если имеется дополнительная внутренняя неподвижная точка. При  $n = 2$  неравенство (3) фактически было получено Солодовым и использовалось для нахождения точной области однолиственности на классе  $\mathcal{B}_\alpha[0, 1]$ .

**Теорема С** (Солодов [6]). Пусть  $f \in \mathcal{B}_\alpha[0, 1]$ ,  $\alpha \in (1, 4]$ . Тогда  $f$  однолистна в области

$$\mathcal{U} = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1 - 2z + |z|^2|}{1 - |z|^2} < \frac{1}{\sqrt{\alpha - 1}} \right\}.$$

Какова бы ни была область  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{U} \subsetneq \mathbb{D}$ , найдется функция  $f \in \mathcal{B}_\alpha[0, 1]$ , не однолистная в области  $\mathcal{U}$ .

**Замечание 3.** Неравенства (1), (2) и (3) точные и достигаются на произведениях Бляшке порядка  $n$ .

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РЕЗУЛЬТАТОВ

В этом разделе мы докажем теоремы 1–3.

**Доказательство теоремы 1.** По функции  $f \in \mathcal{B}\{0\}$  составим дробно-линейное преобразование

$$g(z) = \frac{f(z) - c}{1 - \bar{c}f(z)}.$$

Очевидно, что  $g \in \mathcal{B}$ , причем  $g(a_1) = \dots = g(a_n) = 0$ . Тогда в силу леммы Шварца–Пика (см. [7, гл. VIII, § 1]) функция  $g$  представима в виде

$$g(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z} h(z),$$

где  $h \in \mathcal{B}$ , либо  $h$  — тождественная константа, по модулю не превосходящая единицы. Полагая в этом

представлении  $z = 0$ , получаем  $-c = \prod_{k=1}^n a_k h(0)$ , откуда следует доказываемое неравенство.

*Доказательство теоремы 2.* Пусть  $f \in \mathcal{B}\{1\}$ . Тогда функция

$$g(z) = \frac{1 - \bar{c} f(z) - c}{1 - c - \bar{c} f(z)}$$

также принадлежит классу  $\mathcal{B}\{1\}$ , причем  $g(a_1) = \dots = g(a_n) = 0$ . Согласно лемме Шварца–Пика функция  $g$  допускает следующее представление:

$$g(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - \bar{a}_k z - a_k}{1 - a_k - \bar{a}_k z} h(z),$$

где  $h \in \mathcal{B}\{1\}$ , либо  $h(z) \equiv 1$ . Если  $h(z) \equiv 1$ , имеем равенство в (2). Если  $h \in \mathcal{B}\{1\}$ , функция

$$h(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - a_k - \bar{a}_k z}{1 - \bar{a}_k z - a_k} \frac{1 - \bar{c} f(z) - c}{1 - c - \bar{c} f(z)}$$

имеет в точке  $z = 1$  положительную угловую производную. С другой стороны,

$$h'(1) = f'(1) \frac{1 - |c|^2}{|1 - c|^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1 - |a_k|^2}{|1 - a_k|^2}.$$

Теорема доказана.

*Доказательство теоремы 3.* Пусть  $f \in \mathcal{B}[0,1]$ . Как и при доказательстве теоремы 2, рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{1 - \bar{c} f(z) - c}{1 - c - \bar{c} f(z)}$$

из класса  $\mathcal{B}\{1\}$  со свойством  $g(a_1) = \dots = g(a_n) = 0$ . Более того,  $g(0) = \lambda(c)$  и угловая производная в точке  $z = 1$  имеют вид

$$g'(1) = f'(1) \frac{1 - |c|^2}{|1 - c|^2}. \quad (4)$$

В силу леммы Шварца–Пика функция  $g$  допускает представление

$$g(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - \bar{a}_k z - a_k}{1 - a_k - \bar{a}_k z} h(z), \quad (5)$$

где  $h \in \mathcal{B}\{1\}$ , либо  $h(z) \equiv 1$ . Если  $h(z) \equiv 1$ , имеем равенство в (3). Пусть  $h \in \mathcal{B}\{1\}$ . Из (5) видно, что

$$g(0) = \prod_{k=1}^n \lambda(a_k) h(0). \text{ Следовательно,}$$

$$h(0) = \frac{\lambda(c)}{\prod_{k=1}^n \lambda(a_k)}. \quad (6)$$

Из (4) и (5) находим значение угловой производной функции  $h$  в точке  $z = 1$

$$h'(1) = f'(1) \frac{1 - |c|^2}{|1 - c|^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1 - |a_k|^2}{|1 - a_k|^2}. \quad (7)$$

Поскольку  $h \in \mathcal{B}\{1\}$ , то согласно лемме Жюлиа–Каратеодори имеет место неравенство

$$\frac{|1 - h(0)|^2}{1 - |h(0)|^2} \leq h'(1). \quad (8)$$

Учитывая (6)–(8), получаем оценку

$$\frac{\left| 1 - \lambda(c) / \prod_{k=1}^n \lambda(a_k) \right|^2}{1 - \left| \lambda(c) / \prod_{k=1}^n \lambda(a_k) \right|^2} \leq f'(1) \frac{1 - |c|^2}{|1 - c|^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1 - |a_k|^2}{|1 - a_k|^2}.$$

Теорема доказана.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность П.А. Бородину за полезные обсуждения данной темы на семинаре по геометрической теории приближений.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00131) в МГУ им. М.В. Ломоносова.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Landau E. Der Picard–Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl. 1926. V. 32. P. 467–474.
2. Ahlfors L.V. Conformal invariants: Topics in geometric function theory. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.
3. Becker J., Pommerenke Ch. Angular derivatives for holomorphic self-maps of the disk // Comput. Methods Funct. Theory. 2017. V. 17. 487–497.
4. Кудрявцева О.С., Солодов А.П. Двусторонние оценки областей однолиственности классов голоморфных отображений круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2019. Т. 210. № 7. 120–144.
5. Горяинов В.В. Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 3. 54–71.
6. Солодов А.П. Точная область однолиственности на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85. № 5. 190–218.
7. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.



**GENERALIZATION OF LANDAU  
AND BECKER–POMMERENKE INEQUALITIES**

**O. S. Kudryavtseva<sup>a,b</sup> and A. P. Solodov<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics,  
Moscow, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin

A generalization of Landau and Becker–Pommerenke inequalities which are used in solving of the problem of sharp domains of univalence on subclasses of holomorphic maps is obtained.

*Keywords:* holomorphic map, fixed points, angular derivative, domain of univalence

## ЛУЧЕВАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ АКУСТИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ

© 2022 г. Член-корреспондент РАН В. Г. Романов<sup>1,\*</sup>

Поступило 27.04.2022 г.

После доработки 23.05.2022 г.

Принято к публикации 24.05.2022 г.

Для линейного уравнения акустики ставится и изучается лучевая постановка обратной задачи об определении трех неизвестных переменных коэффициентов, входящих в это уравнение. Предполагается, что искомые коэффициенты отличаются от заданных постоянных только внутри некоторой ограниченной области. На границе этой области располагаются точечные импульсные источники и приемники акустических сигналов. Временной импульс измеряется в приемниках в некоторой окрестности момента прихода сигнала от источника в приемник. Показывается, что эта информация позволяет однозначно найти все три искомых коэффициента. Алгоритмически исходная задача распадается на три последовательно решаемые задачи. Одна из них, об определении скорости звука, является хорошо известной обратной кинематической задачей, две другие приводят к одной и той же задаче интегральной геометрии на семействе геодезических линий, определяемых скоростью звука.

*Ключевые слова:* уравнение акустики, акустическая томография, лучевое разложение, обратная кинематическая задача, интегральная геометрия

DOI: 10.31857/S2686954322040142

Задачи акустической томографии были поставлены довольно давно (см., например, работы [1–4]). Исходной мотивацией для них явилось использование звуковых волн для возможной ранней диагностики рака молочной железы. В последнее время, в связи с распространением инфекции COVID-19, методы акустической томографии предложено использовать также для диагностики заболевания легких. Вычислительное моделирование задач акустической томографии выполнено в работах [5–9] (см. также многочисленные цитирования в них). Ниже мы рассматриваем один из возможных вариантов постановки задачи акустической томографии. В рассматриваемой задаче используются точечные импульсные источники возбуждения акустических сигналов расположенные вне той области, в которой разыскиваются переменные коэффициенты уравнения акустики, приемники акустических сигналов, размещены также вне этой области, а временные импульсы измеряются в небольшой окрестности момента прихода сигнала от источника в соответствующий приемник. Поставленная задача относится к классу лучевых обратных задач, введенных в монографии автора

[10]. Характерной особенностью таких задач является распад исходной задачи об определении нескольких коэффициентов на ряд последовательно решаемых задач об определении одного из искомых коэффициентов. В данном случае такими искомыми коэффициентами являются скорость звука  $c(x)$ , акустическое поглощение  $\sigma(x)$  и плотность среды  $\rho(x)$ . При этом определение  $c(x)$  сводится к решению хорошо известной обратной кинематической задачи, а определение  $\sigma(x)$  и  $\rho(x)$  приводится к решению некоторой задачи интегральной геометрии на семействе геодезических линий конформной римановой метрики, определяемой коэффициентом  $c(x)$ . В случае, когда  $c(x) \equiv 1$ , эта задача является обычной задачей рентгеновской томографии.

Рассмотрим задачу Коши:

$$c^{-2}(x)p_{tt} + \sigma(x)p_t - \Delta p - \nabla \ln \rho(x) \cdot \nabla p = \delta(x - y)\delta(t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^4; \quad p|_{t < 0} = 0, \quad (1)$$

в которой  $p = p(x, t)$  – звуковое давление,  $c(x) > 0$  – скорость звука,  $\sigma(x) \geq 0$  – акустическое поглощение,  $\rho(x) > 0$  – плотность среды. Уравнение (1) описывает распространение акустических волн в неоднородной поглощающей среде. Это уравнение лежит в основе акустической томографии. Основная проблема акустической томографии состоит в решении обратной задачи для уравнения (1), а именно, построении коэффициентов

<sup>1</sup> Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия  
\*E-mail: romanov@math.nsc.ru

$c(x)$ ,  $\sigma(x)$  и  $\rho(x)$  внутри ограниченной области по заданной вне этой области информации о решениях уравнения (1) на некотором временном интервале  $[0, T]$  и для некоторого множества точечных источников  $y$ . Ниже, для определенности, рассмотрим следующую модель.

Пусть  $B_R$  – шар радиуса  $R$  с центром в начале координат,  $S_R$  – его граница. Примем, что параметры  $c(x)$ ,  $\sigma(x)$ ,  $\rho(x)$  являются непрерывно дифференцируемыми функциями всюду в  $\mathbb{R}^3$  (см. ниже дополнительные условия (9)), неизвестны внутри шара  $B_{r_0}$ ,  $R > r_0 > 0$ , а вне его постоянны и заданы,

$$\begin{aligned} c(x) &= 1, & \sigma(x) &= 0, \\ \rho(x) &= \rho_0 > 0, & x &\in \mathbb{R}^3 \setminus B_{r_0}. \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим через  $S_R(y, r_0)$  проекцию шара  $B_{r_0}$  на сферу  $S_R$  от источника, расположенного в точке  $y \in S_R$ , т.е.  $S_R(y, r_0) = \{x \in S_R \mid |x - y| \geq 2\sqrt{R^2 - r_0^2}\}$ . Решение задачи (1) обозначим через  $p(x, t, y)$ , подчеркнув тем самым его зависимость от параметра  $y$ . Зафиксируем точки  $y \in S_R$  и  $x \in S_R(y, r_0)$ . Пусть  $T_0(x, y) := \sup\{\tau > 0 \mid p(x, t, y) \equiv 0, t \in (0, \tau)\}$ .

Рассмотрим следующую постановку задачи акустической томографии (АК).

**Задача АК.** Пусть  $p(x, t, y)$  – решение задачи (1) и известна функция

$$\begin{aligned} F(x, t, y) &= p(x, t, y) & \text{для всех } y \in S_R, \\ x &\in S_R(y, r_0), & t \in (0, T_0(x, y) + \varepsilon), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varepsilon > 0$  фиксировано и произвольно мало. По функции  $F(x, t, y)$  требуется найти  $c(x)$ ,  $\sigma(x)$ ,  $\rho(x)$  внутри  $B_{r_0}$ .

Введением новой функции  $u(x, t, y) = p(x, t, y)\rho^{1/2}(x)$  задача (1) при  $y \in S_R$  преобразуется к виду

$$\begin{aligned} Lu &\equiv c^{-2}(x)u_{tt} + \sigma(x)u_t - \Delta u + q(x)u = \\ &= \rho_0^{1/2}\delta(x - y)\delta(t), & (x, t) \in \mathbb{R}^4; & \quad u|_{t=0} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

в которой коэффициент  $q(x)$  вычисляется по формуле

$$q(x) = \rho^{-1/2}(x)\Delta\rho^{1/2}(x). \quad (5)$$

Если коэффициент  $q(x)$  известен, то, как следует из (5), функция  $m(x) = \rho^{1/2}(x)$  может быть найдена внутри  $B_{r_0}$  как решение следующей задачи Дирихле

$$\Delta m(x) - q(x)m(x) = 0, \quad x \in B_{r_0}; \quad m|_{r=r_0} = \rho_0^{1/2}, \quad (6)$$

в которой  $r = |x|$ . Более того, из условия (2) на функцию  $\rho(x)$  и условия ее непрерывной дифференцируемости всюду в  $\mathbb{R}^3$ , следует, что решение

задачи (6) должно удовлетворять требованию  $\frac{\partial m}{\partial r} = 0$

при  $r = r_0$ . Это дополнительное условие гарантирует единственность определения функции  $m(x)$ , следовательно, и  $\rho(x)$ , по заданной  $q(x)$ . Поэтому вместо задачи об определении  $c(x)$ ,  $\sigma(x)$ ,  $\rho(x)$  в  $B_{r_0}$  удобно рассматривать обратную задачу о нахождении в той же области коэффициентов  $c(x)$ ,  $\sigma(x)$  и  $q(x)$  для уравнения (4) по информации, аналогичной (3):

$$\begin{aligned} \Phi(x, t, y) &= u(x, t, y) & \text{для всех } y \in S_R, \\ x &\in S_R(y, r_0), & t \in (0, T_0(x, y) + \varepsilon). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\Phi(x, t, y) = F(x, t, y)\rho_0^{1/2}$ , а  $\varepsilon$  фиксировано и произвольно мало.

Подобные задачи рассмотрены в книге [10] для  $x \in \mathbb{R}^2$  в следующих случаях:

- 1)  $c(x) \equiv 1$ ,  $\sigma(x)$  и  $q(x)$  – неизвестны (раздел 5.2),
- 2)  $\sigma(x) \equiv 0$ ,  $c(x)$  и  $q(x)$  – неизвестны (раздел 5.3).

Кроме того, в [10] (в разделе 5.4) рассмотрена двумерная обратная задача электродинамики. В случае, когда свойства среды не зависят от координаты  $x_3$ , уравнение для компоненты  $E_3$  вектора электрической напряженности совпадает с уравнением (1), в котором роль функции  $\rho(x)$  играет магнитная проницаемость среды, а коэффициент  $\sigma(x)$  определяет электрическую проводимость среды. В этой обратной задаче определяются все три неизвестных коэффициента по динамической информации о решениях трех задач Коши, в которых вместо точечного источника  $\delta(x - y)$  используется источник типа плоской волны  $\delta(x \cdot v^{(k)})$ , в котором  $v^{(k)}$  – единичный вектор, и  $k = 1, 2, 3$ .

Рассмотрим риманову метрику, в которой элемент длины  $d\tau$  определяется формулой  $d\tau =$

$$= |dx|/c(x), \quad |dx| = \left( \sum_{k=1}^3 (dx_k)^2 \right)^{1/2}. \quad \text{Всюду в дальнейшем мы полагаем, что выполнено следующее}$$

Предположение. Риманова метрика  $d\tau =$

$= |dx|/c(x)$  является простой в  $\mathbb{R}^3$ , т.е. любые две точки  $x$  и  $y$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$  могут быть соединены единственной геодезической линией  $\Gamma(x, y)$ .

Заметим, что достаточным условием простоты комформной римановой метрики в  $\mathbb{R}^3$  является условие (см. [11]):

$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 (\ln c(x))}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j \leq 0, \quad \forall \xi, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

в котором  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

**З а м е ч а н и е 1.** На самом деле, в рамках лучевой постановки обратной задачи, сделанное выше предположение можно ослабить, а именно, требовать простоту римановой метрики нужно только внутри фиксированного шара  $B_R$  при  $R' > R$ . Мы ограничились более жестким предположением, чтобы не делать лишних оговорок в дальнейшем.

Предположим, что существуют конечные числа  $c_0$  и  $c_{00}$  такие, что

$$0 < c_0 \leq c(x), \quad x \in \mathbb{R}^3; \quad \|c\|_{C^2(\mathbb{R}^3)} \leq c_{00}, \quad (8)$$

и коэффициенты уравнения (4) обладают следующей гладкостью

$$c \in C^6(\mathbb{R}^3), \quad \sigma \in C^4(\mathbb{R}^3), \quad q \in C^2(\mathbb{R}^3). \quad (9)$$

Обозначим через  $\tau(x, y)$  риманово расстояние между точками  $x$  и  $y$ . С физической точки зрения,  $\tau(x, y)$  – время пробега акустического сигнала между точками  $x$  и  $y$ . Известно, что  $\tau(x, y)$  является решением следующей задачи Коши для уравнения эйконала:

$$|\nabla_x \tau(x, y)|^2 = \frac{1}{c^2(x)}; \quad \tau(x, y) \sim \frac{|x - y|}{c(y)}, \quad x \rightarrow y. \quad (10)$$

Чтобы найти  $\tau(x, y)$  и уравнения геодезических линий, надо поступить следующим образом. Ввести вектор  $\eta = \nabla_x \tau(x, y)$ , решить задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений Эйлера

$$\frac{d\xi}{ds} = \eta(\xi)c^2(\xi), \quad \frac{d\eta(\xi)}{ds} = -\nabla \ln c(\xi), \quad \frac{d\tau}{ds} = 1, \quad (11)$$

$$\xi|_{s=0} = y, \quad \eta|_{s=0} = \frac{v}{c(y)}, \quad \tau|_{s=0} = 0, \quad (12)$$

для всевозможных значений единичного вектора  $v = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ . Это можно сделать, и притом однозначно, в силу предположения о простоте римановой метрики и условий, наложенных на  $c(x)$ . В результате решения задачи (11), (12) определяются уравнение геодезических линий  $\xi = \xi(s, v, y)$ , а также касательный вектор  $\eta = \eta(s, v, y)$  к этой геодезической, и риманово расстояние  $\tau = \tau(s, v, y)$  вдоль геодезической. Решая уравнение  $x = \xi(s, v, y)$  относительно  $s, \theta, \varphi$ , находим  $s = s(x, y), v = v(x, y)$ , т.е. соответствия между парой точек  $x$  и  $y$  и значениями параметров  $s$  и  $v$ . При этом уравнение геодезической  $\Gamma(x, y)$  задается равенством  $\xi = \xi(s, v(x, y), y)$ ,  $s \in [0, s(x, y)]$ , а риманово расстояние  $\tau(x, y)$ , в силу соотношений (11), (12) для этой функции, совпадает с  $s(x, y)$ . Заметим, что, согласно [10] (см. стр. 35), и сделанному выше предположению о гладкости  $c(x)$ , функция  $\tau^2 \in C^6(\mathbb{R}^6)$ .

Для  $T > 0$  обозначим через  $D_T$  полосу

$$D_T = \{(x, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in [0, T]\}.$$

**Т е о р е м а 1.** Пусть выполнено предположение о простоте римановой метрики и условия (8), (9). Тогда решение задачи (4) представимо в области  $D_T$  виде

$$u(x, t, y) = \alpha(x, y)\delta(t - \tau(x, y)) + [\beta(x, y) + v(x, t, y)]H(t - \tau(x, y)), \quad (x, t) \in D_T, \quad (13)$$

в котором  $H(t)$  – функция Хевисайда:  $H(t) = 1$  для  $t \geq 0$  и  $H(t) = 0$  для  $t < 0$ , функции  $\alpha(x, y)$  и  $\beta(x, y)$  определены при  $x \neq y$  равенствами

$$\alpha(x, y) = \frac{c(x)\sqrt{\rho_0 J(x, y)}}{4\pi c^3(y)\tau(x, y)} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{\Gamma(x, y)} c^2(\xi)\sigma(\xi)ds\right), \quad (14)$$

$$\beta(x, y) = \frac{\alpha(x, y)}{2} \int_{\Gamma(x, y)} c^2(\xi) \left( \frac{\Delta\alpha(\xi, y)}{\alpha(\xi, y)} - q(\xi) \right) ds, \quad (15)$$

в которых  $\xi \in \Gamma(x, y)$  – промежуточная точка интегрирования, а  $ds$  – элемент римановой длины, функция  $v(x, t, y)$  непрерывна при  $t \geq \tau(x, y)$  и  $v(x, t, y) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \tau(x, y) + 0$ . Что представляет собой функция  $J(x, y)$ , будет объяснено ниже.

Чтобы получить формулы (14), (15), надо вначале найти для них дифференциальные уравнения и начальные условия. Эти уравнения находятся с помощью обычного метода подсчета сингулярной и конечной амплитуд решения задачи (4) (см., например, [10]). Для этого надо положить в (13)  $v(x, t, y) \equiv 0$ , подставить полученное равенство в (4) и приравнять нулю коэффициенты при  $\delta'(t - \tau(x, y))$  и  $\delta(t - \tau(x, y))$ . В результате этого возникают следующие уравнения

$$2\nabla\alpha \cdot \nabla\tau + \alpha(\sigma + \Delta\tau) = 0, \quad (16)$$

$$2\nabla\beta \cdot \nabla\tau + \beta(\sigma + \Delta\tau) - \Delta\alpha + q\alpha = 0. \quad (17)$$

Для однородной среды с параметрами  $c(x) \equiv c(y), \sigma(x) \equiv 0, q(x) \equiv 0$  имеет место формула

$$u(x, t, y) = \frac{\rho_0^{1/2}\delta(t - \tau_0(x, y))}{4\pi c(y)|x - y|}, \quad \tau_0(x, y) = \frac{|x - y|}{c(y)}.$$

Поэтому  $\alpha(x, y)$  и  $\beta(x, y)$  должны удовлетворять следующим условиям при  $x \rightarrow y$ :

$$\alpha(x, y) \sim \frac{\rho_0^{1/2}}{4\pi c(y)|x - y|}, \quad x \rightarrow y, \quad (18)$$

$$\beta(x, y) = O(1), \quad x \rightarrow y. \quad (19)$$

Уравнения (16), (17) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями вдоль геодезических  $\Gamma(x, y)$ . Действительно, согласно первому уравнению (11) и принятому обозначению  $\eta = \nabla_x \tau(x, y)$ , вдоль геодезической  $\Gamma(x, y)$  справедливо равенство

$$\nabla\alpha \cdot \nabla\tau = \frac{1}{c^2(x)} \frac{d\alpha}{d\tau}, \quad (20)$$

в котором  $d\tau = ds$  – элемент римановой длины. Удобно преобразовать выражение для  $\Delta\tau(x, y)$ , входящее в уравнение (17), используя формулу (2.2.35) из книги [10]. Эта формула справедлива вдоль геодезической  $\Gamma(x, y)$  и в данном случае имеет вид:

$$\operatorname{div}(c^2(x)\nabla_x\tau^2(x, y)) = 6 - 2\tau(x, y) \frac{d \ln J(x, y)}{d\tau}, \quad (21)$$

в котором

$$J(x, y) = \frac{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$$

– якобиан перехода от римановых нормальных координат  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \zeta$  к декартовым  $(x_1, x_2, x_3) = x$ . Напомним, что римановы нормальные координаты  $\zeta$  с центром в точке  $y$  могут быть вычислены по формуле  $\zeta(x, y) = -\frac{c^2(y)}{2} \nabla_y \tau^2(x, y)$ . Отсюда, в частности, находим, что  $J \in C^4(\mathbb{R}^6)$  и  $J(x, x) = 1$ .

Из формулы (21) следует, что

$$c^2(x)\Delta\tau(x, y) = 2 \frac{d}{d\tau} \ln \left( \frac{\tau(x, y)}{c(x)\sqrt{J(x, y)}} \right). \quad (22)$$

С учетом равенств (20), (22), уравнение (16) преобразуется к виду

$$\frac{d}{d\tau} \ln \left( \frac{\alpha(x, y)\tau(x, y)}{c(x)\sqrt{J(x, y)}} \exp \left( \frac{1}{2} \int_{\Gamma(x, y)} c^2(\xi)\sigma(\xi)ds \right) \right) = 0, \quad (23)$$

в котором  $\xi = \xi(s) \in \Gamma(x, y)$ , а  $ds$  – элемент римановой длины. Так как  $J(x, x) = 1$  и  $\tau(x, y) \sim |x - y|/c(y)$  при  $x \rightarrow y$ , то из равенств (18), (23) следует формула (14).

Уравнение (17) с помощью равенства (16) можно записать в виде

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\alpha(x, y)}{\beta(x, y)} = \frac{c^2(x)}{2} \left( \frac{\Delta\alpha(x, y)}{\alpha(x, y)} - q(x) \right).$$

Интегрирование этого уравнения с использованием условия (19) приводит к формуле (15). Очевидно, что  $(\alpha\tau) \in C^4(\mathbb{R}^6)$ ,  $\beta \in C^2(\mathbb{R}^6)$ .

Функция  $v(x, t, y)$  является решением задачи Коши:

$$Lv = f(x, t, y), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^4; \quad v|_{t < 0} = 0, \quad (24)$$

в которой оператор  $L$  определен формулой (4) и

$$f(x, t, y) = [\Delta\beta(x, y) - q(x)\beta(x, y)]H(t - \tau(x, y)). \quad (25)$$

Из равенств (24), (25) и конечности скорости звука следует, что  $v(x, t, y) \equiv 0$  для  $t < \tau(x, y)$ , а значит и справедливость представления (13). Кроме того,

фундаментальное решение  $G(x, t, \xi)$  для уравнения (24), т.е. решение задачи

$$LG(x, t, \xi) = \delta(x - \xi)\delta(t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^4; \quad G|_{t < 0} = 0,$$

имеет вид

$$G(x, t, \xi) = \rho_0^{-1/2} \alpha(x, \xi) \delta(t - \tau(x, \xi)) + G_0(x, t, \xi) H(t - \tau(x, \xi)),$$

в котором функция  $\alpha(x, y)$  определена формулой (14), а  $G_0(x, t, \xi)$  – регулярная непрерывная функция своих аргументов. Для решения задачи (24) справедливо интегральное представление решения в виде

$$v(x, t, y) = \int_{\mathbb{R}^4} f(\xi, t', y) [\rho_0^{-1/2} \alpha(x, \xi) \delta(t - t' - \tau(x, \xi)) + G_0(x, t - t', \xi) H(t - t' - \tau(x, \xi))] d\xi dt'. \quad (26)$$

Из формулы (25) следует, что  $f(x, t', \xi) = 0$  для  $t' \leq \tau(x, \xi)$ . Поэтому равенство (26) преобразуется к виду

$$v(x, t, y) = \int_{D(x, y, t)} [\Delta_\xi \beta(\xi, y) - q(x)\beta(\xi, y)] \rho_0^{-1/2} \alpha(x, \xi) d\xi + \int_{\tau(x, y) D(x, y, t)} [\Delta_\xi \beta(\xi, y) - q(x)\beta(\xi, y)] G_0(x, t - t', \xi) d\xi dt', \quad (27)$$

$$t \geq \tau(x, y),$$

в котором  $D(x, y, t)$  – множество

$$\{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \tau(x, \xi) + \tau(\xi, y) \leq t\},$$

представляющее собой внутренность риманова эллипсоида с фокусами в точках  $x$  и  $y$ . При  $t \rightarrow \tau(x, y)$  этот эллипсоид стягивается к геодезической  $\Gamma(x, y)$ , а объем множества  $D(x, y, t)$  стремится к нулю. Отсюда следует, что  $v(x, t, y) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \tau(x, y)$ . Непрерывность функции  $v(x, t, y)$  при  $t \geq \tau(x, y)$  следует из принадлежности  $\beta(x, y)$  пространству  $C^2(\mathbb{R}^6)$ .

**З а м е ч а н и е 2.** При выполнении условия (2) справедливы равенства

$$\alpha(x, y) = \frac{\sqrt{\rho_0}}{4\pi|x - y|}, \quad \Delta\alpha(x, y) = 0, \\ \beta(x, y) = 0, \quad \text{если } y \in S_R, \\ 0 < |x - y| \leq R - r_0.$$

Воспользуемся теоремой 1 для анализа обратной задачи об определении коэффициентов уравнения (4) по данным (7). Прежде всего, заметим, что эти данные однозначно определяют функцию  $\tau(x, y)$  для всех  $y \in S_R$  и  $x \in S_R(y, r_0)$ . Действитель-

но, в силу представления (13), при фиксированных  $x$  и  $y$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} \tau(x, y) &= \sup\{\tau > 0 \mid \Phi(x, t, y) \equiv 0, t \in (0, \tau)\} = \\ &= T_0(x, y), \quad y \in S_R, \quad x \in S_R(y, r_0). \end{aligned} \quad (28)$$

Далее, для тех же  $x$  и  $y$  по функции  $\Phi(x, t, y)$  находятся  $\alpha(x, y)$  и  $\beta(x, y)$ :

$$\alpha(x, y) = \lim_{t \rightarrow \tau(x, y) + 0} \int_0^t \Phi(x, \tau, y) d\tau, \quad (29)$$

$$y \in S_R, \quad x \in S_R(y, r_0),$$

$$\beta(x, y) = \lim_{t \rightarrow \tau(x, y) + 0} \Phi(x, t, y), \quad (30)$$

$$y \in S_R, \quad x \in S_R(y, r_0).$$

Доопределим найденные функции на множество  $S_R \times S_R$  с помощью формул

$$\tau(x, y) = |x - y|, \quad \alpha(x, y) = \frac{\sqrt{\rho_0}}{4\pi|x - y|},$$

$$\beta(x, y) = 0, \quad \text{при } y \in S_R, \quad x \in S_R \setminus S_R(y, r_0).$$

Тогда обратная задача об определении коэффициентов  $c(x)$ ,  $\sigma(x)$  и  $q(x)$  в  $B_{r_0}$  сводится к последовательному решению трех задач: 1) отысканию  $c(x)$  по заданной функции  $\tau(x, y)$ ,  $(x, y) \in S_R \times S_R$ , 2) определению коэффициента  $\sigma(x)$  по функции  $\alpha(x, y)$ ,  $(x, y) \in S_R \times S_R$ , 3) отысканию  $q(x)$  по заданной функции  $\beta(x, y)$ ,  $(x, y) \in S_R \times S_R$ .

Первая из этих задач является обратной кинематической задачей. Оценка устойчивости ее решения найдена в статьях [12, 13]. Эта оценка имеет вид

$$\|c_1 - c_2\|_{L^2(B_{r_0})} \leq C \|\tau_1 - \tau_2\|_{H^2(S_R \times S_R)},$$

в котором  $c_1(x)$  и  $c_2(x)$  – положительные функции, генерирующие простые римановы метрики,  $\tau_1(x, y)$  и  $\tau_2(x, y)$  – отвечающие им римановы расстояния, а  $C = C(c_0, c_{00})$  – некоторая положительная постоянная, зависящая от чисел  $c_0$ ,  $c_{00}$ , введенных в (8). Из приведенной выше оценки вытекает однозначность решения обратной кинематической задачи.

Вторая и третья задачи приводят к идентичной задаче интегральной геометрии. В самом деле, если функция  $c(x)$  найдена, то геодезические линии  $\Gamma(x, y)$ , а также функция  $J(x, y)$  становятся известными. Тогда из формулы (14) однозначно находятся интегралы

$$\int_{\Gamma(x, y)} c^2(\xi) \sigma(\xi) ds = g(x, y), \quad (x, y) \in S_R \times S_R, \quad (31)$$

в которых

$$g(x, y) = -2 \ln \frac{4\pi\alpha(x, y)\tau(x, y)}{\sqrt{\rho_0}J(x, y)}.$$

Задача об определении функции  $\hat{\sigma}(x) = c^2(x)\sigma(x)$  из уравнения (31) представляет собой задачу интегральной геометрии. Она исследована в работах [13, 14]. Оценка устойчивости решения этой задачи, найденная в цитированных работах, имеет вид, аналогичный оценке для решения обратной кинематической задачи с естественной заменой  $c$  и  $\tau$  на  $\hat{\sigma}$  и  $g$  соответственно. Решение задачи интегральной геометрии на семействе геодезических, определяемых простой римановой метрикой, единственно. Найдя  $\hat{\sigma}(x)$ , а следовательно и  $\sigma(x)$ , можно вычислить по формуле (14) функцию  $\alpha(x, y)$  для любых  $x$  и  $y$ . Тогда из формулы (15) однозначно вычисляются интегралы

$$\int_{\Gamma(x, y)} c^2(\xi)q(\xi)ds = h(x, y), \quad (x, y) \in S_R \times S_R, \quad (32)$$

в которых

$$h(x, y) = \int_{\Gamma(x, y)} c^2(\xi) \frac{\Delta\alpha(\xi, y)}{\alpha(\xi, y)} ds - \frac{2\beta(x, y)}{\alpha(x, y)}.$$

В результате для определения функции  $\hat{q}(x) = c^2(x)q(x)$  из уравнения (32) возникает в точности та же задача интегральной геометрии. Решив ее, находим затем и коэффициент  $q(x)$ . По нему, решая задачу (6), найдем  $m(x)$  и, наконец, определим плотность  $\rho(x) = m^2(x)$ .

Итогом предыдущих рассмотрений является

**Т е о р е м а 2.** При выполнении условий теоремы 1 и условия (2) обратная задача может иметь только одно решение.

Алгоритм решения обратной задачи фактически описан выше. В вычислительном отношении требуется, конечно, детализировать схему построения решений обратной кинематической задачи и задачи интегральной геометрии. К сожалению, в настоящее время не существует достаточно обоснованных эффективных алгоритмов и программ решения этих задач.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Norton S.J., Linzer M. Ultrason. Imaging. 1979. V. 2. P. 154–184.
2. Karson P.L., Meyer C.R., Scherzinger A.L., Oughton T.V. Science. 1981. V. 214. P. 1141–1143.
3. Natterer F., Wubbeling F. Inverse problems. 1995. V. 11. P. 1225–1232.
4. Natterer F. Wave motion. 2008. V. 45. P. 776–784.

5. *Jirik R., Peterlik I., Ruitter N. et al.* IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 2012. V. 59. P. 254–264.
6. *Burov V.A., Zotov D.I., Rumyantseva O.D.* Acoust. Phys. 2015. V. 61. P. 231–248.
7. *Baev A.V.* Comp. Math. Model. 2018. V. 29. P. 83–95.
8. *Wiskin J., Malik B., Natesan R., Lenox M.* Med. Phys. 2019. V. 46. P. 2610–2620.
9. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y.* Ultrasonics. 2016. V. 67. P. 136–150.
10. *Романов В.Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005. 296 с.
11. *Romanov V.G.* Eurasian J. of Math. and Comp. Appl. 2014. V. 2. № 3–4. P. 51–80.
12. *Мухометов Р.Г., Романов В.Г.* Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. № 1. С. 41–44.
13. *Бернштейн И.Н., Гервер М.Л.* Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. № 2. С. 302–305.
14. *Романов В.Г.* Докл. АН СССР. 1978. Т. 241. № 2. С. 290–293.

## RAY POSING OF THE ACOUSTIC TOMOGRAPHY PROBLEM

Corresponding Member of the RAS **V. G. Romanov**<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk 630090, Russian Federation*

For the linear acoustic equation a posing of an inverse problem of determination of three unknown variable coefficients entered in this equation is studied. It is assumed that these coefficients differ from given constants inside of a compact domain only. On the boundary of this domain a point pulse sources and acoustic receivers are installed. The acoustic signal is measured by a receiver at a vicinity of the arriving signal time from a source to the receiver. It is demonstrated that this information allows uniquely find all three desired coefficients. The original inverse problem is reduced to tree problems those can be solved successively. One of them is the well known inverse kinematic problem, two others are problems of the integral geometry for a family of geodesic lines determined by the speed of the sound.

*Keywords:* acoustic equation, acoustic tomography, ray expansion, inverse kinematic problem, integral geometry

УДК 511.6

## О ПРОБЛЕМЕ ОПИСАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РАЗЛОЖЕНИЕМ В НЕПРЕРЫВНУЮ ДРОБЬ НАД КВАДРАТИЧНЫМИ ПОЛЯМИ КОНСТАНТ

© 2022 г. Г. В. Федоров<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН В.П. Платоновым

Поступило 03.03.2022 г.

После доработки 11.03.2022 г.

Принято к публикации 01.06.2022 г.

Для всех квадратичных числовых полей  $K$  получено описание свободных от квадратов многочленов  $f(x) \in K[x]$  степени 4 таких, что  $\sqrt{f}$  имеет периодическое разложение в непрерывную дробь в поле формальных степенных рядов  $K((x))$ , а эллиптическое поле  $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$  обладает фундаментальной  $S$ -единицей степени  $m$ ,  $4 \leq m \leq 12$ ,  $m \neq 11$ , где множество  $S$  состоит из двух сопряженных нормирований, определенных на поле  $\mathcal{L}$  и связанных с униформизирующей  $x$  поля  $K(x)$ .

*Ключевые слова:* непрерывная дробь, фундаментальная  $S$ -единица, эллиптическое поле, группа классов дивизоров, круговые многочлены

DOI: 10.31857/S2686954322040087

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $f(x) \in K[x]$  – свободный от квадратов многочлен степени  $2g + 2$ ,  $g \geq 0$ , над полем  $K$  характеристики, отличной от 2. Дополнительно предположим, что старший коэффициент многочлена  $f$  является полным квадратом в мультипликативной группе  $K^*$  поля  $K$ . Проблема периодичности непрерывных дробей элементов гиперэллиптических полей  $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ , построенных в поле  $K((x^{-1}))$ , приобрела широкую известность еще с работ Абеля и Чебышева, и с тех пор проявлялась в различных разделах теории чисел, анализа и алгебраической геометрии. Современные результаты о периодичности непрерывной дроби  $\sqrt{f}$  и эквивалентных условиях изложены в [1–3]. В частности, из этих результатов следует, что в поле  $\mathcal{L}$  элемент  $\sqrt{f}$  и его разложение в непрерывную дробь играют ключевую роль в вопросах, связанных с поиском фундаментальных единиц и рациональных точек кручения в якобиане гиперэллиптической кривой, заданной уравнением  $y^2 = f(x)$ .

Пусть теперь  $f(x)$  – свободный от квадратов многочлен произвольной степени, и свободный

член многочлена  $f(x)$  является полным квадратом в группе  $K^*$ . В статье [4] доказано следующее утверждение: если для некоторого  $s \in \mathbb{Z}$  непрерывная дробь элемента  $\sqrt{f}/x^s$ , построенная в  $K(x)$ , квазипериодическая, то она периодическая. В статье [1] сформулирована естественная задача об исследовании периодичности непрерывной дроби элемента  $\sqrt{f}$ , построенной в поле формальных степенных рядов  $K((x))$ . А именно, в этой статье сформулирована проблема описания числовых полей  $K$  и многочленов  $f(x) \in K[x]$ , для которых элемент  $\sqrt{f}$  имеет периодическую непрерывную дробь, построенную в поле  $K((x))$ . В статьях [1] и [5] эта проблема полностью решена для эллиптических полей над полем  $K = \mathbb{Q}$  рациональных чисел. В [5] сформулирована гипотеза о конечности с точностью до естественного отношения эквивалентности многочленов  $f(x)$  над числовыми полями  $K$ , являющимися расширениями поля  $\mathbb{Q}$  ограниченной степени, с периодическим разложением элемента  $\sqrt{f}$  в непрерывную дробь в поле  $K((x))$ . В статьях [7, 8] эта проблема решена для кубических многочленов  $f(x)$ , определенных над полями  $K$ ,  $[K : \mathbb{Q}] \leq 4$ , а в случае  $[K : \mathbb{Q}] = 2$  в [6, 7] дано явное описание таких пар  $[K, f(x)]$ , что  $\deg f = 3$  и  $\sqrt{f}$  имеет периодическое разложение в непрерывную дробь в поле  $K((x))$ .

<sup>1</sup> Университет “Сириус”, Сочи, Россия

\*E-mail: fedorov@mech.math.msu.su



Определим множество  $S$ , состоящее из двух сопряженных нормирований, которые определены на поле  $\mathcal{L}$  и связаны с униформизирующей  $x$  поля  $K(x)$ . Мы продолжаем исследование периодических элементов вида  $\sqrt{f}$ ,  $f \in K[x]$  в случае квадратичных полей  $K$  и  $\deg f = 4$ . Найдено полное описание таких свободных от квадратов многочленов  $f$ , что  $\sqrt{f}$  имеет периодическое разложение в непрерывную дробь в поле формальных степенных рядов  $K((x))$ , а эллиптическое поле  $K(x)(\sqrt{f})$  обладает фундаментальной  $S$ -единицей степени  $m$ ,  $4 \leq m \leq 12$ ,  $m \neq 11$ .

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Для натуральных  $n$  определим две последовательности многочленов  $T_n, Q_n \in \mathbb{Z}[x]$ :

$$T_n(x) = \sum_{0 \leq j \leq n/2} \binom{n}{2j} x^j, \quad Q_n(x) = \sum_{0 \leq j < n/2} \binom{n}{2j+1} x^j. \quad (1)$$

Из определения следует, что  $\deg T_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,  $\deg Q_n = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ . Положим  $x = y^2$ , тогда справедливо тождество

$$T_n(y^2) + yQ_n(y^2) = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} y^k = (1+y)^n. \quad (2)$$

Если подставить вместо  $y$  значение  $-y$ , то имеем  $T_n(y^2) - yQ_n(y^2) = (1-y)^n$ . Отсюда получаем формулы, которые можно использовать как альтернативное определение многочленов  $T_n, Q_n$ :

$$T_n(y^2) = \frac{1}{2}((1+y)^n + (1-y)^n),$$

$$Q_n(y^2) = \frac{1}{2y}((1+y)^n - (1-y)^n).$$

При любом  $n \in \mathbb{N}$  многочлены  $T_n(x)$  и  $Q_n(x)$  взаимно просты и не имеют кратных корней.

Из (2) следует, что для любых  $n, m \in \mathbb{N}$  справедливо тождество

$$T_{nm}(x) = (T_n(x))^m \cdot T_m(z), \quad (3)$$

$$Q_{nm}(x) = (T_n(x))^{m-1} \cdot Q_n(x) \cdot Q_m(z),$$

где  $z = x(Q_n(x)/T_n(x))^2$ . В частности,

$$Q_{2n}(x) = 2T_n(x) Q_n(x). \quad (4)$$

Пусть  $K$  – числовое поле, и даны числа  $n, m \in \mathbb{N}$ . Из формул (3) следует, что, если у многочленов  $T_n(x), Q_n(x), T_m(x)$  и  $Q_m(x)$  нет корней в поле  $K$ , то у многочленов  $T_{nm}(x)$  и  $Q_{nm}(x)$  также нет корней в поле  $K$ .

## 3. МНОЖЕСТВО КОРНЕЙ $T_n(x)$ И $Q_n(x)$ , НАД КВАДРАТИЧНЫМИ ПОЛЯМИ

В статье [9] были найдены все рациональные корни многочленов  $T_n(x)$  и  $Q_n(x)$ , определенных в (1), при всех натуральных  $n$ : для многочленов  $T_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , корнями могут быть только  $x \in \{-1, -1/3\}$ , более точно,  $T_{2(2k-1)}(-1) = 0$ ,  $T_{3(2k-1)}(-1/3) = 0$  при всех  $k \in \mathbb{N}$ , причем указанные корни имеют кратность один и других рациональных корней нет; для многочленов  $Q_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , корнями могут быть только  $x \in \{-3, -1, -1/3\}$ , более точно,  $Q_{3k}(-3) = 0$ ,  $Q_{4k}(-1) = 0$ ,  $Q_{6k}(-1/3) = 0$  при всех  $k \in \mathbb{N}$ , причем указанные корни имеют кратность один и других рациональных корней нет.

Исследуем последовательности многочленов  $T_n(x)$  и  $Q_n(x)$ , на наличие корней в квадратичных полях. Запишем явные выражения для этих многочленов при  $n \leq 6$ :

$$T_1(x) = 1, \quad Q_1(x) = 1, \quad T_2(x) = x + 1, \quad Q_2(x) = 2,$$

$$T_3(x) = 3x + 1, \quad Q_3(x) = x + 3,$$

$$T_4(x) = x^2 + 6x + 1, \quad Q_4(x) = 4(x + 1),$$

$$T_5(x) = 5x^2 + 10x + 1, \quad Q_5(x) = x^2 + 10x + 5,$$

$$T_6(x) = (x + 1)(x^2 + 14x + 1),$$

$$Q_6(x) = 2(x + 3)(3x + 1).$$

По критерию Эйзенштейна из (1) при простых  $n$  многочлены  $T_n(x)$  и  $Q_n(x)$  неприводимы, причем при  $n \geq 7$  степени многочленов  $T_n(x)$  и  $Q_n(x)$  больше 3, поэтому при простых  $n$  многочлены  $T_n(x)$  и  $Q_n(x)$  корней в квадратичных полях не имеют. Обозначим множество различных корней многочленов  $T_n(x)$  и  $Q_n(x)$  при  $n \leq 6$  через  $M$ . Имеем

$$M = \left\{ -1, -\frac{1}{3}, -3, -3 \pm 2\sqrt{2}, \frac{-5 \pm 2\sqrt{5}}{5}, -5 \pm 2\sqrt{5}, -7 \pm 4\sqrt{3} \right\}. \quad (5)$$

Покажем, что других корней в квадратичных полях, кроме корней из множества  $M$ , многочлены  $T_n(x)$  и  $Q_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , не имеют.

Рассуждая по индукции по числу простых множителей числа  $n$ , с помощью формул (3) получаем следующее утверждение.

**Предложение.** При  $n \in \mathbb{N}$  таких, что  $n \not\equiv 0 \pmod{2}$ ,  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ ,  $n \not\equiv 0 \pmod{5}$ , многочлены  $T_n(x)$  и  $Q_n(x)$  в квадратичных полях корней не имеют.

Таким образом, корни многочленов  $T_n(x)$  и  $Q_n(x)$  из квадратичных полей могут быть только при  $n$ , кратных 2, 3 или 5.

**Теорема 1.** Множество корней последовательностей многочленов  $T_n(x)$  и  $Q_n(x)$ , принадлежащих квадратичным полям, исчерпывается множеством  $M$ , определенном в (4).

**Доказательство.** Пусть для некоторого  $n \in \mathbb{N}$  имеем  $T_n(a) = 0$ , причем  $a \notin M$  — элемент некоторого квадратичного поля. Представим  $n = n_1 \cdot m_1$ , где  $n_1 = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ , а число  $m_1$  не имеет простых делителей меньше 7. Предположим, что  $T_{n_1}(a) \neq 0$ , тогда из (3) следует, что  $T_{m_1}(b) = 0$ , где  $b = a(Q_{n_1}(a)/T_{n_1}(a))^2$ . Но этого не может быть, так как  $b$ , как и  $a$ , принадлежит квадратичному полю. Значит,  $T_{n_1}(a) = 0$  для  $a \notin M$ .

Если  $n_1$  четно, то представим  $n_1 = 2m_1$ . Так как  $T_2(a) \neq 0$ , ибо  $a \notin M$ , то из (3) следует, что  $T_{m_1}(b_1) = 0$ , где  $b_1 = a(Q_2(a)/T_2(a))^2$ . Покажем, что из того, что  $a \notin M$  следует, что  $b_1 \notin M$ . Предположим противное, т.е.  $b_1 \in M$ . Перебрав все возможные значения для  $b_1 \in M$ , видим, что значения  $a$ , удовлетворяющие уравнению  $b_1 = a(Q_2(a)/T_2(a))^2$ , либо принадлежат множеству  $M$ , либо не являются элементами квадратичных полей, что противоречит начальному предположению о корне  $a$  многочлена  $T_n(x)$ . Таким образом,  $b_1 \notin M$  и  $T_{m_1}(b_1) = 0$ . Если  $m_1$  четно, то снова представим  $m_1 = 2m_2$ , и, рассуждая аналогично, придем к тому, что должно существовать число  $b_2 \notin M$  такое, что  $T_{m_2}(b_2) = 0$ . Повторяя эти рассуждения необходимое количество раз, получаем, что должен существовать элемент  $b_\alpha \notin M$  некоторого квадратичного поля такой, что  $T_{m_\alpha}(b_\alpha) = 0$ , причем  $m_\alpha = 3^\beta 5^\gamma$ . Далее, если  $\beta > 0$ , то представим  $m_\alpha = 3k$ . Так как  $T_3(b_\alpha) \neq 0$ , ибо  $b_\alpha \notin M$ , то из (3) следует, что  $T_k(c) = 0$ , где  $c = b_\alpha(Q_3(b_\alpha)/T_3(b_\alpha))^2$ . Перебирая все возможные значения  $c \in M$ , приходим к выводу, что либо  $b_\alpha \in M$ , либо  $b_\alpha$  не является элементом квадратичного поля, что противоречит нашему предположению об элементе  $b_\alpha$ . Значит,  $c \notin M$  — такой элемент квадратичного расширения, что  $T_k(c) = 0$ . При необходимости рассуждая аналогично, можно считать, что  $k = 5^\gamma$ . Если  $\gamma > 1$ , то представим  $k = 5k_1$ . Так как  $T_5(c) \neq 0$ , ибо  $c \notin M$ , то из (3) следует, что  $T_{k_1}(c_1) = 0$ , где  $c_1 = c(Q_5(c)/T_5(c))^2$ . Перебирая все возможные значения  $c_1 \in M$ , приходим к выводу, что либо  $c \in M$ , либо  $c$  не является элементом квадратичного поля, что противоречит нашему предположению об элементе  $c$ . Значит,  $c_1 \notin M$  — такой элемент квадратичного расширения, что  $T_{k_1}(c_1) = 0$ . При необходимости рассуждая аналогично, можно считать, что  $k_1 = 5$ .

Но все корни  $T_5(x)$  лежат в  $M$ , что приводит нас к противоречию. Таким образом, у многочлена  $T_n(x)$  не может быть других корней из квадратичного поля, кроме корней, указанных в множестве  $M$ .

Для многочлена  $Q_n(x)$  рассуждения полностью аналогичны.

Теорема 1 доказана.

#### 4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через  $\mathcal{U}_0$  множество пар  $[K, f(x)]$ , состоящих из числового поля  $K$  и свободного от квадратов многочлена  $f \in K[x]$ ,  $\deg f = 4$ , имеющего периодическое разложение  $\sqrt{f}$  в непрерывную дробь в поле  $K((x))$ . Множество пар  $[K, f(x)]$  в  $\mathcal{U}_0$  будем рассматривать с точностью до отношения эквивалентности, определенного допустимыми заменами многочлена  $f(x)$  на  $a^2 f(bx)$  для  $a, b \in K^*$  и заменой  $f(x)$  на  $f^\sigma(x)$ , где  $\sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ .

Для  $[K, f(x)] \in \mathcal{U}_0$  в силу критерия из [1] (теорема 1) эллиптическое поле  $L = K(x)(\sqrt{f})$  обладает фундаментальной  $S$ -единицей степени  $N$ , где множество  $S = \{v_x^-, v_x^+\}$  состоит из двух сопряженных нормирований, являющихся продолжением нормирования  $v_x$  поля  $K(x)$ . Отсюда следует, что класс дивизора  $v_x^- - v_x^+$  имеет конечный порядок  $N$  в группе классов дивизоров  $\Delta^\circ(L)$ , причем в случае  $K = \mathbb{Q}$  из [10] следует, что  $N \leq 12$ ,  $N \neq 11$ , а в случае  $[K : \mathbb{Q}] = 2$  из [11] следует, что  $N \leq 18$ ,  $N \neq 17$ .

Обозначим за  $\mathcal{U}$  множество троек  $[K, f(x), N]$ , где  $[K, f(x)] \in \mathcal{U}_0$  и  $N$  — степень соответствующей фундаментальной  $S$ -единицы поля  $L = K(x)(\sqrt{f})$ .

**Теорема 2.** Пусть  $[K : \mathbb{Q}] \leq 2$ . Множество троек  $[K, f(x), N]$ , входящих в множество  $\mathcal{U}$  и определяющих эллиптическое поле  $L = K(x)(\sqrt{f})$ , содержащее фундаментальную  $S$ -единицу степени  $N$ ,  $4 \leq N \leq 12$ ,  $N \neq 11$ , описывается следующим образом

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbb{Q}, -\frac{3x^4}{4} - 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1, 4 \right], \\ & \left[ \mathbb{Q}(\sqrt{3}), \frac{36 - 21\sqrt{3}}{2}x^4 + (15 - 9\sqrt{3})x^3 + \right. \\ & \quad \left. + (4 - 3\sqrt{3})x^2 - 2x + 1, 4 \right], \\ & \left[ \mathbb{Q}, -1280x^4 + 192x^3 - 28x^2 + 4x + 1, 5 \right], \end{aligned}$$

$$\left[ \mathbb{Q}, \frac{128000x^4}{243} + \frac{1280x^3}{9} + \frac{368x^2}{27} - \frac{8x}{3} + 1, 6 \right],$$

$$\left[ \mathbb{Q}, -56000x^4 + 3360x^3 + 84x^2 + 4x + 1, 7 \right],$$

$$\left[ \mathbb{Q}(\sqrt{-7}), \frac{(35 - 9\sqrt{-7})x^4}{2} + \frac{(33 - 3\sqrt{-7})x^3}{2} + \frac{(41 + 5\sqrt{-7})x^2}{8} - \frac{(3 + \sqrt{-7})x}{2} + 1, 7 \right],$$

$$\left[ \mathbb{Q}(\sqrt{21}), \frac{(34383\sqrt{21} - 157563)x^4}{2} + (1938 - 423\sqrt{21})x^3 + \frac{(567\sqrt{21} - 2605)x^2}{8} + \frac{(11 - 3\sqrt{21})x}{2} + 1, 7 \right].$$

Обозначим через  $X_1(N)$  модулярную кривую, чьи  $K$ -точки отвечают с точностью до изоморфизма парам  $(E, P_N)$ , где  $E$  – эллиптическая кривая, определенная над  $K$ ,  $P_N$  –  $K$ -точка порядка  $N$  на  $E$ . Ограничение в теореме 2 на степень  $N$  фундаментальной  $S$ -единицы обусловлено тем фактом, что в случае  $N \leq 12$ ,  $N \neq 11$  кривые  $X_1(N)$  рациональны, и дают так называемую рациональную параметризацию множества пар  $(E, P_N)$  в зависимости от единственного параметра  $t$  (явное представление см. в [12]). Для  $N = 11$  и  $N \geq 13$  кривые  $X_1(N)$  перестают быть рациональными, и эти случаи являются темой для дальнейших исследований.

Доказательство теоремы 2 является обобщением доказательства основных результатов статьи [5], проведенных над полем  $\mathbb{Q}$ , на случай квадратичных полей констант. Отметим, что рассуждения нельзя назвать аналогичными, поскольку при расширениях поля  $\mathbb{Q}$  существенным образом изменяется множество  $M$  корней многочленов  $T_n(x)$  и  $Q_n(x)$ , определенных в (1). Для квадратичных расширений в теореме 1 явно найдены элементы множества  $M$  – их конечное число, что дает конечное число вариантов уравнений, связывающих параметры семейств эллиптических кривых, имеющих точку порядка  $N$ ,  $N \leq 12$ ,  $N \neq 11$ . Указанная связь возникает из условия периодичности разложения  $\sqrt{f}$  в непрерывную дробь в поле  $K((x))$ , и явно представлена в теореме 4 [5].

Кроме того, ввиду необходимости объемных символьных компьютерных вычислений над квадратичными полями, была существенно изменена программная реализация используемых алгоритмов.

### 5. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Пусть  $K$  – числовое поле. Для каждого  $4 \leq N \leq 12$ ,  $N \neq 11$ , в [13, 14] явно выписано полное параметрическое семейство приведенных многочленов  $F = F(X, c) \in \mathbb{Q}[X]$  четвертой степени с параметром  $c \in K$  таких, что класс дивизора – имеет порядок  $N$  в группе классов дивизоров степени ноль  $\Delta^0(\mathcal{L})$  поля  $\mathcal{L} = K(X)(\sqrt{F(X, c)})$ . Здесь приведенность многочлена  $F$  понимается в смысле дополнительных ограничений: коэффициент при  $X^3$  равен нулю, свободный член равен 1. При всевозможных значениях параметра  $c \in K$ , для которых дискриминант  $F(X, c)$  не обращается в ноль, указанные параметрические семейства содержат все приведенные многочлены  $F$  четвертой степени над полем  $K$ , такие, что выполнены равносильные условия:

- непрерывная дробь элемента  $\sqrt{F}$  в поле  $K((1/X))$  периодическая;
- норменное уравнение

$$\Omega_1^2 - \Omega_2^2 F = b \tag{6}$$

имеет решение  $\Omega_1, \Omega_2 \in K[X]$ ,  $\Omega_2 \neq 0$ , для некоторого  $b \in K^*$ .

Если пара многочленов  $\Omega_1, \Omega_2$  является решением норменного уравнения (6) с минимальной степенью  $\deg \Omega_1$ , причем  $\Omega_2 \neq 0$ , то  $\deg \Omega_1 = N$  и  $\Omega_1 + \Omega_2 \sqrt{F}$  является фундаментальной единицей поля  $\mathcal{L} = K(X)(\sqrt{F})$ . По теореме 4 [5] периодичность непрерывной дроби элемента  $X^s \sqrt{F}$  равносильна разрешимости норменного уравнения вида (6) с дополнительными условиями на значения  $v_X(\Omega_1)$  и  $v_X(\Omega_2)$ , но теперь  $\Omega_1 + \Omega_2 \sqrt{F}$  может не являться фундаментальной единицей, а может быть некоторой степенью  $k$  фундаментальной единицы, причем из теоремы 1 следует, что в случае  $[K : \mathbb{Q}] \leq 2$  степень  $k$  ограничена числом 6 (см. [15]).

Обозначим через  $p_j/q_j$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$ , подходящие дроби к  $\sqrt{F(X, c)}$ , причем  $p_j = p_j(X, c)$ ,  $q_j = q_j(X, c) \in \mathbb{Q}(c)[X]$ . Положим  $K = \mathbb{Q}(c)$ . Тогда фундаментальная единица поля  $\mathcal{L} = K(X)(\sqrt{F})$  имеет вид  $p_n + q_n \sqrt{F}$  для некоторого минимального  $n \in \mathbb{N}$  такого, что  $p_n^2 - q_n^2 F \in K^*$  (см. [2]). Обозначим  $\Omega_1^{(j)} + \Omega_2^{(j)} \sqrt{F} = (p_n + q_n \sqrt{F})^j$ , где  $\Omega_1^{(j)}, \Omega_2^{(j)} \in K[X]$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Положим  $r_j = v_X(\Omega_2^{(j)})$ , тогда согласно теореме 1 в силу (4) возможны только следующие 8 случаев:  $r_n > 0$  при том, что  $r_j = 0$ , если  $1 \leq j < n$ , для каждого  $n \in \Lambda = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$ . Отметим, что, если для некоторого  $n \in \mathbb{N}$  выполнено

$r_n > 0$ , то непрерывная дробь элемента  $\sqrt{F}/X^{r_n}$ , построенная в поле  $K((1/X))$  периодическая.

Замена  $X$  на  $X + t$  соответствует изоморфизму кривых  $C : Y^2 = F(X)$  и  $C_t : Y^2 = F(X + t)$ . Тем самым, с точностью до отношения эквивалентности, определяемого допустимыми заменами  $F(X)$  на  $a^2 F(bX)$  для некоторых  $a, b \in K^*$ , имеем полное описание всех многочленов  $F = F(c, t) \in \mathbb{Q}[X]$ ,  $\deg F = 4$ , для которых разложение  $\sqrt{F}$  в непрерывную дробь в поле  $\mathbb{Q}(c, t)((1/X))$  периодично. Наша задача сводится к поиску всех значений параметров  $c, t \in K$  для каждого из случаев  $v_X(\Omega_2^{(j)}) > 0$ ,  $n \in \Lambda$ , причем мы ограничиваемся квадратичными расширениями,  $K = \mathbb{Q}(c, t)$ ,  $[K : \mathbb{Q}] \leq 2$ .

Необходимым и достаточным условием периодичности непрерывной дроби  $\sqrt{F(X + t, c)}/X$  в  $K((1/X))$  является  $\Omega_2^{(n)}(t) = 0$  хотя бы для одно из  $n \in \Lambda$ . Для того, чтобы непрерывная дробь  $\sqrt{F(X + t, c)}/X^2$  была периодической, необходимо и достаточно, чтобы  $r_n = v_X(\Omega_2^{(n)}) \geq 2$  для некоторого  $j \in \Lambda$ , т.е.  $\Omega_2^{(n)}(t) = 0$  и  $\frac{d}{dt} \Omega_2^{(n)}(t) = 0$ , что возможно только тогда, когда дискриминант

$d = d^{(n)}(c)$  многочлена  $\Omega_2^{(n)}(t) \in \mathbb{Q}(c)[t]$  равен нулю. То есть задача сводится к поиску корней  $c_0$  дискриминанта  $d^{(n)}(c)$  и соответствующих кратных корней  $t_0$  многочлена  $\Omega_2^{(n)}(t) \in \mathbb{Q}(c_0)[t]$  для каждого из  $n \in \Lambda$ , причем ограничиваемся значениями параметров  $c_0, t_0$  из квадратичных полей и таких, что дискриминант многочлена  $F(X + t_0, c_0) \in \mathbb{Q}(c_0, t_0)[X]$  отличен от нуля. Если найдены все подходящие значения параметров  $c_0, t_0$ , то для доказательства теоремы 2 достаточно положить  $f(x) = x^4 F(1/x + t_0, c_0) \in K[x]$  и отобразить представителей с точностью до указанного в определении множества  $\mathcal{U}_0$  отношения эквивалентности.

Изложенная схема доказательства существенным образом опирается на большие символьные компьютерные вычисления. Программный код реализовывался на языке программирования Python с использованием библиотеки SymPy. Без подобных вычислений получить заявленные результаты не представляется возможным.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведем новые примеры непрерывных дробей, которые определены над полями  $K$ ,  $[K : \mathbb{Q}] = 2$ .

**Пример 1.** Рассмотрим  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$  и

$$f = \frac{36 - 21\sqrt{3}}{2}x^4 + (15 - 9\sqrt{3})x^3 + (4 - 3\sqrt{3})x^2 - 2x + 1.$$

Непрерывная дробь  $\sqrt{f}$  в поле  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})((x))$  имеет вид

$$\left[ 1, -x - \frac{3(1 - \sqrt{3})}{2}; \frac{2x(12 + 7\sqrt{3})}{9} - 5 - 3\sqrt{3}, \right. \\ \left. \frac{2x^4(3 - 2\sqrt{3})}{9} - \frac{2x^3(3 - 2\sqrt{3})}{9} + \frac{x^2(9 - 5\sqrt{3})}{3} + 2x(7 - 4\sqrt{3}) + 3(7 - 4\sqrt{3}), \right. \\ \left. \frac{2x(12 + 7\sqrt{3})}{9} - 5 - 3\sqrt{3}, -x - \frac{2 - 3\sqrt{3}}{2}, 4x + 2(2 - 3\sqrt{3}) \right]^{-1/4}.$$

Длина квазипериода равна 5, коэффициент квазипериода равен  $-1/4$ , длина периода равна 10. Степень фундаментальной  $S$ -единицы равна 4.

**Пример 2.** Рассмотрим  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$  и

$$f = \frac{(35 - 9\sqrt{-7})x^4}{2} + \frac{(33 - 3\sqrt{-7})x^3}{2} + \\ + \frac{(41 + 5\sqrt{-7})x^2}{8} - \frac{(3 + \sqrt{-7})x}{2} + 1.$$

Непрерывная дробь  $\sqrt{f}$  в поле  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})((x))$  имеет вид

$$\left[ 1, -\frac{x(3 + \sqrt{-7})}{4} + 1 - \sqrt{-7}; \frac{x(1 + \sqrt{-7})}{32} + \frac{3(1 - 3\sqrt{-7})}{64}, \right.$$

$$\frac{x^3(47 + 45\sqrt{-7})}{128} - \frac{x^2(67 - 23\sqrt{-7})}{32} - \frac{x(31 - 3\sqrt{-7})}{4} + 11 - \sqrt{-7},$$

$$\frac{x(1 + \sqrt{-7})}{32} + \frac{3(1 - 3\sqrt{-7})}{64}, - \frac{x(3 + \sqrt{-7})}{4} + \frac{(3 - 2\sqrt{-7})}{2},$$

$$\left. \frac{x(3 + \sqrt{-7}) - 2(3 - 2\sqrt{-7})^{-1/4}}{x(3 + \sqrt{-7}) - 2(3 - 2\sqrt{-7})^{-1/4}} \right].$$

Длина квазипериода равна 5, коэффициент квазипериода равен  $-1/4$ , длина периода равна 10. Степень фундаментальной  $S$ -единицы равна 7.

Пример 3. Рассмотрим  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{21})$  и

$$f = \frac{(34383\sqrt{21} - 157563)x^4}{2} + (1938 - 423\sqrt{21})x^3 + \frac{(567\sqrt{21} - 2605)x^2}{8} + \frac{(11 - 3\sqrt{21})x}{2} + 1.$$

Непрерывная дробь  $\sqrt{f}$  в поле  $\mathbb{Q}(\sqrt{21})(x)$  имеет вид

$$\left[ 1, - \frac{x(11 + 3\sqrt{21})}{17} + \frac{60(25 - 4\sqrt{21})}{289}, \frac{x(8807\sqrt{21} + 40377)}{7200} - \frac{3(209 + 45\sqrt{21})}{64}, \right.$$

$$\frac{32x^3(2811 + 371\sqrt{21})}{3758445} + \frac{128x^2(1566 - 239\sqrt{21})}{1252815} + \frac{128x(961 - 200\sqrt{21})}{83521} + \frac{480(9005 - 1961\sqrt{21})}{83521},$$

$$\frac{x(40377 + 8807\sqrt{21})}{7200} - \frac{3(209 + 45\sqrt{21})}{64}, - \frac{x(11 + 3\sqrt{21})}{17} + \frac{3289 - 480\sqrt{21}}{578},$$

$$\left. \frac{4x(11 + 3\sqrt{21}) - 2(3289 - 480\sqrt{21})^{-1/4}}{17} - \frac{2(3289 - 480\sqrt{21})^{-1/4}}{289} \right].$$

Длина квазипериода равна 5, коэффициент квазипериода равен  $-1/4$ , длина периода равна 10. Степень фундаментальной  $S$ -единицы равна 7.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Финансирование проекта осуществлялось из средств Университета “Сириус” в рамках научного проекта FMF-RND-2125.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Платонов В.П., Федоров Г.В. О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 4. С. 54–94.
2. Платонов В.П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69. № 1 (415). С. 3–38.
3. Adams W.W., Razar M.J. Multiples of points on elliptic curves and continued fractions // Proc. London Math. Soc. 1980. V. 41. № 3. P. 481–498.
4. Платонов В.П., Петрунин М.М. Группы  $S$ -единиц и проблема периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Тр. МИАН. 2018. Т. 302. С. 354–376.
5. Платонов В.П., Федоров Г.В. О проблеме классификации многочленов  $f$  с периодическим разложением  $\sqrt{f}$  в непрерывную дробь в гиперэллиптических полях // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2021. Т. 85. № 5. С. 152–189.
6. Платонов В.П., Жгун В.С., Федоров Г.В. О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях над квадратичным полем констант // ДАН. 2018. Т. 482. № 2. С. 137–141.
7. Платонов В.П., Петрунин М.М., Штейнников Ю.Н. О конечности числа эллиптических полей с заданными степенями  $S$ -единиц и периодическим разложением  $\sqrt{f}$  // ДАН. 2019. Т. 488. № 3. С. 237–242.
8. Платонов В.П., Петрунин М.М. О конечности числа периодических разложений в непрерывную дробь  $\sqrt{f}$  для кубических многочленов над полями алгебраических чисел // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. № 1. С. 48–54.

9. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* Критерий периодичности непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 1. С. 246–258.
10. *Mazur B.* Rational points on modular curves // Modular funct. one Var. V, Proc. Int. Conf., Bonn 1976. Lect. Notes Math. 1977. V. 601. P. 107–148.
11. *Kenku M.A., Momose F.* Torsion points on elliptic curves defined over quadratic fields // Nagoya Mathematical Journal. 1988. V. 109. P. 125–149.
12. *Kubert D.S.* Universal bounds on the torsion of elliptic curves // Proc. London Math.Soc. (3). 1976. Vol. 33. № 2. P. 193–237.
13. *Van Der Poorten A.J., Tran X.C.* Periodic continued fractions in elliptic function fields // International Algorithmic Number Theory Symposium. Springer, Berlin, Heidelberg. 2002. P. 390–404.
14. *Scherr Z.L.* Rational polynomial pell equations // Diss. The University of Michigan. 2013. P. 1–86.
15. *Федоров Г.В.* Об ограниченности длин периодов непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей над полем рациональных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 4. С. 321–334.

## ON THE PROBLEM OF DESCRIBING ELEMENTS OF ELLIPTIC FIELDS WITH A PERIODIC EXPANSION INTO A CONTINUED FRACTION OVER QUADRATIC FIELDS

**G. V. Fedorov<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> “Sirius University”, Sochi, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.P. Platonov

For all possible quadratic number fields  $K$ , we obtain a description of the square-free polynomials  $f(x) \in K[x]$  of degree 4 such that  $\sqrt{f}$  has a periodic expansion into a continued fraction in the field of formal power series  $K((x))$ , while the elliptic field  $K(x)(\sqrt{f})$  has the fundamental  $S$ -unit degree  $m$ ,  $4 \leq m \leq 12$ ,  $m \neq 11$ , where the set  $S$  consists of two conjugate valuations defined on the field  $\mathcal{L}$  and related to the uniformizing  $x$  of the field  $K(x)$ .

*Keywords:* continued fraction, fundamental  $S$ -unit, elliptic field, divisor class group, cyclotomic polynomials

УДК 511.36

## НОВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

© 2022 г. В. Г. Чирский<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 19.05.2022 г.

После доработки 10.06.2022 г.

Принято к публикации 12.06.2022 г.

Приведены теоремы об ограниченной бесконечной линейной независимости значений обобщенных гипергеометрических рядов, параметры которых – трансцендентные полиадические числа Лиувилля. Сформулированы представляющие интерес задачи теории полиадических чисел.

*Ключевые слова:* полиадические числа Лиувилля, бесконечная линейная независимость, аппроксимации Эрмита-Паде

DOI: 10.31857/S2686954322040075

Символ  $\text{ord}_p \alpha$  означает степень, в которой простое число  $p$  входит в каноническое разложение рационального числа  $\alpha$ .  $p$  – адическая норма рационального числа  $\alpha$  – определяется равенством  $|\alpha|_p = p^{-\text{ord}_p \alpha}$ . Поле  $p$  – адических чисел  $\mathbb{Q}_p$  – представляет собой пополнение поля рациональных чисел по  $p$  – адической норме. Кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых  $p$  – адических чисел по всем простым числам  $p$ . Каноническое представление элемента  $\theta$  кольца целых полиадических чисел имеет вид ряда  $\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n$ . Этот ряд сходится по всем полям  $p$  – адических чисел. Поэтому его можно рассматривать как бесконечномерный вектор, координаты которого в соответствующем кольце целых  $p$  – адических чисел обозначаем  $\theta^{(p)}$ .

Основы теории полиадических чисел изложены в [1]. Отметим, что эта теория имеет приложения к теории абелевых групп. Кроме того, в ряде прикладных задач используется так называемое факториальное разложение натуральных чисел (оно весьма короткое), представляющее собой частичную сумму ряда  $\theta$ .

Будем называть полиадическое число  $\theta$  *полиадическим числом Лиувилля* (или *лиувиллевым полиа-*

*дическим числом*), если для любых чисел  $n$  и  $P$  существует натуральное число  $A$  такое, что для всех простых чисел  $p$ , удовлетворяющих неравенству  $p \leq P$ , выполнено неравенство  $|\theta - A|_p < A^{-n}$ . Полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля  $p$  – адических чисел.

Одним из важных направлений в теории трансцендентных чисел является исследование арифметической природы значений обобщенных гипергеометрических рядов, т.е. рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n} z^n,$$

где символ Похгаммера  $(\gamma)_n$  определяется равенствами  $(\gamma)_0 = 1, (\gamma)_n = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)$  при  $n \geq 1$ . Если такие ряды имеют рациональные параметры, то они сводятся к  $E$  – или  $G$  – функциям Зигеля или к  $F$  – рядам. Это позволяет применить к ним метод Зигеля-Шидловского в теории трансцендентных чисел и его модификации. См., например, работы [2–8]. Этот краткий список не претендует на полноту, но позволяет получить представление о характере основных результатов.

Если среди параметров содержатся алгебраические иррациональные числа, то к исследованию арифметических свойств рядов применимы аппроксимации Эрмита-Паде, см., например, [9–11].

Во всех упомянутых выше работах параметры рядов являются алгебраическими числами. В статье описан новый подход к исследованию ариф-

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: vgchirskii@yandex.ru

метической природы значений обобщенных гипергеометрических рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_m)_n z^n, \tag{1}$$

параметры которых  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  – трансцендентные полиадические числа Лиувилля. Частные случаи этой задачи, относящиеся к рядам

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \lambda^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n \lambda^n$$

с лиувиллевым полиадическим параметром  $\lambda$ , рассмотрены в работах [12]–[14]. Во всех этих работах, включая и настоящую, существенно использованы аппроксимации Эрмита-Паде из работы Ю.В. Нестеренко [15].

**О п р е д е л е н и е.** *Бесконечная линейная независимость* полиадических чисел  $\theta_1, \dots, \theta_m$  означает, что для любой ненулевой линейной формы  $h_1x_1 + \dots + h_mx_m$  с целыми коэффициентами  $h_1, \dots, h_m$  существует бесконечное множество простых чисел  $p$  таких, что в поле  $\mathbb{Q}_p$  выполняется неравенство  $h_1\theta_1^{(p)} + \dots + h_m\theta_m^{(p)} \neq 0$ .

Вместе с тем представляют интерес задачи, в которых рассматриваются простые числа только из некоторых собственных подмножеств множества простых чисел. Будем говорить в таком случае о *бесконечной линейной независимости с ограничениями* на указанное множество. Пусть  $M$  – натуральное число. Рассмотрим приведенную систему вычетов по  $\text{mod}(M)$ . Как обычно, число элементов этой системы обозначается  $\varphi(M)$ , где  $\varphi(M)$  – функция Эйлера. Все простые числа принадлежат объединению арифметических прогрессий с разностью, равной числу  $M$ , первые члены которых образуют приведенную систему вычетов по  $\text{mod}(M)$ . Пусть произвольным образом выбраны  $\rho$  различных элементов  $a_1, \dots, a_\rho$  этой приведенной системы вычетов. Будем обозначать  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\rho$  множества натуральных значений, принимаемых прогрессиями  $a_i + Mk, i = 1, \dots, \rho, k \in \mathbb{Z}$ . Будем обозначать  $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\rho)$  множество простых чисел, входящих в объединение множеств  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\rho$ . В сформулированных ниже теоремах будет доказана бесконечная линейная независимость значений обобщенных гипергеометрических рядов с ограничениями на множество  $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\rho)$ . Этот подход был ранее использован в работе Т. Матала-ахо, А.-М. Эрнвалл-Хитонен, Т. Сеппала [16],

относящейся к так называемому ряду Эйлера

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(-z)^n.$$

Еще раз отметим, что цель работы – получение результата о значениях рядов (1), среди параметров которых – трансцендентные полиадические числа Лиувилля.

Сформулируем основные результаты работы. Пусть  $m$  – натуральное число,  $m \geq 2$ . Пусть  $\lambda_0$  – произвольное натуральное число, большее 1. Положим  $s_0 = [\text{exр}\lambda_0] + 1$ . Пусть  $\lambda_1$  – произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа  $p \leq s_0 + 2\lambda_0^2$  выполняется неравенство  $\text{ord}_p \lambda_1 \geq ms_0 \ln s_0$  и пусть  $s_1 = [\text{exр}\lambda_1] + 1$ . При  $k \geq 1$  пусть  $\lambda_{k+1}$  – произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа  $p \leq s_k + 2\lambda_k^2$  выполняется неравенство  $\text{ord}_p \lambda_{k+1} \geq ms_k \ln s_k$  и пусть  $s_{k+1} = [\text{exр}\lambda_{k+1}] + 1$ . Пусть  $\mu_{i,0}, i = 1, \dots, m$  – натуральные числа. Пусть для любых  $i = 1, \dots, m, k \geq 1$ , числа  $\mu_{i,k}$  – неотрицательные целые и удовлетворяют неравенству  $\mu_{i,k} \leq \lambda_k$ .

Пусть  $\alpha_i = \sum_{l=0}^{\infty} \mu_{i,l} \lambda_l, i = 1, \dots, m$ . Если при некотором  $k$  для всех  $l \geq k$  выполняются равенства  $\mu_{i,l} = 0$ , то  $\alpha_i$  – натуральное число. Иначе этот ряд представляет собой полиадическое число Лиувилля.

Будем рассматривать ряды

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_m)_n z^n, \\ f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_i + 1)_n (\alpha_{i+1})_n \dots (\alpha_m)_n z^n, \\ i = 1, \dots, m - 1, \\ f_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_m + 1)_n z^n.$$

**Т е о р е м а 1.** *Пусть  $m \geq 2, M, \rho$  – натуральные числа. Пусть  $(m + 1)\rho > \varphi(M)m$ . Тогда для любых целых чисел  $h_0, \dots, h_m$ , не равных нулю одновременно и любого натурального числа  $\xi$  существует бесконечное множество простых чисел  $p$  из множества  $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\rho)$  таких, что в поле  $\mathbb{Q}_p$  выполняется неравенство*

$$|L(\xi)|_p = |h_0 f_0(\xi) + \dots + h_m f_m(\xi)|_p > 0.$$

Пусть натуральные числа  $\mu_k$  удовлетворяют при любом  $k$  неравенству  $\mu_k \leq \lambda_k$ . Пусть  $\Xi = \sum_{l=0}^{\infty} \mu_l \lambda_l$ .



**Теорема 2.** Пусть  $t \geq 2$ ,  $M, p$  – натуральные числа. Пусть  $(t + 1)p > \varphi(M)t$ . Тогда для любых целых чисел  $h_0, \dots, h_m$ , не равных нулю, одновременно существует бесконечное множество простых чисел  $p$  из множества  $\mathbf{P}(a_1, \dots, a_p)$  таких, что в поле  $\mathbb{Q}_p$  выполняется неравенство

$$|L(\Xi)|_p = |h_0 f_0(\Xi) + \dots + h_m f_m(\Xi)|_p > 0.$$

В неравенствах заключений теорем символы  $f_i(\xi), f_i(\Xi), i = 0, \dots, m$  означают суммы этих рядов в поле  $\mathbb{Q}_p$ .

Можно высказать гипотезу о том, что значения рядов, рассмотренных в этих теоремах, линейно независимы в любом поле  $p$  – адических чисел, а значение любого рассмотренного в этих теоремах ряда является трансцендентным числом в любом поле  $p$  – адических чисел. При определенных естественных условиях на параметры естественно предположить алгебраическую независимость значений этих рядов в любом поле  $p$  – адических чисел.

Существующие методы теории трансцендентных чисел в полиадической области не позволяют пока получить такие результаты (с современным состоянием вопроса можно ознакомиться в [8]). Тем не менее планируется применить идеи настоящей работы для развития обобщенного метода Зигеля-Шидловского и получить общие теоремы, подобные теоремам из [8], но для класса рядов, коэффициенты которых – трансцендентные числа. Использование подходов работ [3] и [4] позволит доказать бесконечную алгебраическую независимость значений рядов вида (1) с трансцендентными параметрами.

Еще одно важное направление планируемых исследований – изучение статистических свойств цифр факториальных разложений.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971. 416 с.
2. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987. 448 с.
3. Салихов В.Х. Критерий алгебраической независимости одного класса гипергеометрических E – функций // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 2. С. 189–211.
4. Beukers F., Brownawell W.D., Heckman G. Siegel normality // Ann. Math. 1988. Ser. 127. P. 279–308.
5. Bombieri E. On G-functions // Recent Progress in Analytic Number Theory. V. 2. London: Academic Press. 1981. P. 1–68.
6. Галочкин А.И. Об алгебраической независимости значений E-функций в некоторых трансцендентных точках // Вестник МГУ. Сер. 1, матем., механ. 1970. № 5. С. 58–63.
7. Bertrand D., Chirskii V., Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. V. 13. № 2. P. 241–260.
8. Chirskii V.G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers // Russ. J. Math. Phys. 2019. V. 26. № 3. P. 286–305.
9. Chudnovsky G.V. On application of Diophantine approximations // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1985. V. 81. P. 7261–7265.
10. Иванков П.Л. О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 1. С. 53–62.
11. Matala-aho T., Zudilin W., Euler factorial series and global relations, J. Number Theory. 2018. V. 186. P. 202–210.
12. Чирский В.Г. Арифметические свойства рядов эйлера типа с полиадическим лиувиллевым параметром // ДАН. 2020. Т. 494. № 2. С. 69–70.
13. Chirskii V.G. Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouvillean Parameter // Russ. J. Math. Phys. 2021. V. 28. № 3. P. 294–302.
14. Чирский В.Г. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов с полиадическим лиувиллевым параметром // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 3. С. 156–167.
15. Нестеренко Ю.В. Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 3. С. 39–72.
16. Ernvall-Hytonen A.-M., Matala-aho T., Seppela L. Euler’s divergent series in arithmetic progressions // J. Integer Sequences. 2019. V. 22. Article 19.2.2. 10 p.

## NEW PROBLEMS OF THE THEORY OF TRANSCENDENTAL POLYADIC NUMBERS

V. G. Chirskii<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

Theorems on the bounded infinite linear independence of the values of generalized hypergeometric series whose parameters are transcendental polyadic Liouville numbers are presented. Problems of interest in the theory of polyadic numbers are formulated.

**Keywords:** polyadic Liouville numbers, infinite linear independence, Hermite-Pade approximations

## О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ РЕГУЛЯРНЫХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ТИПА ДАНЖУА

© 2022 г. В. З. Гринес<sup>1,\*</sup>, Д. И. Минц<sup>1,\*\*</sup>

Представлено академиком Д.В. Трещёвым

Поступило 17.03.2022 г.

После доработки 14.05.2022 г.

Принято к публикации 01.06.2022 г.

Рассматриваются регулярные гомеоморфизмы типа Данжуа двумерного тора, которые являются наиболее естественным обобщением гомеоморфизмов Данжуа окружности. Они, в частности, возникают как отображения Пуанкаре, индуцированные на глобальной секущей слоями одномерных ориентируемых неустойчивых слоений некоторых частично гиперболических диффеоморфизмов замкнутых трехмерных многообразий, обладающих двумерными аттракторами. Неблуждающее множество каждого регулярного гомеоморфизма типа Данжуа является множеством Серпинского, и каждый такой гомеоморфизм по определению полусопряжен минимальному сдвигу на двумерном торе. Вводится полный инвариант топологической сопряженности для регулярных гомеоморфизмов типа Данжуа, который характеризуется минимальным сдвигом тора, полусопряженным данному регулярному гомеоморфизму типа Данжуа, с отмеченным не более чем счетным множеством орбит.

*Ключевые слова:* топологическая классификация, гомеоморфизм типа Данжуа, множество Серпинского

DOI: 10.31857/S2686954322040105

Пусть  $X$  – топологическое пространство,  $f : X \rightarrow X$  – гомеоморфизм. Непустое подмножество  $M$  пространства  $X$  называется минимальным множеством гомеоморфизма  $f$ , если оно замкнуто, инвариантно относительно  $f$  (т.е.  $f(M) = M$ ) и не имеет непустых замкнутых инвариантных подмножеств, отличных от  $M$ . Если все пространство  $X$  является минимальным множеством гомеоморфизма  $f$ , то гомеоморфизм  $f$  называется минимальным. Хорошо известными примерами минимальных гомеоморфизмов являются минимальные повороты окружности и минимальные сдвиги на двумерном торе<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Поворотом окружности называется отображение  $R(x) = x + \alpha \pmod{1}$ . Поворот  $R$  является минимальным тогда и только тогда, когда  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Сдвигом на двумерном торе называется отображение  $g(x, y) = (x + \alpha, y + \beta) \pmod{1}$ . Сдвиг  $g$  является минимальным тогда и только тогда, когда числа  $\alpha, \beta$  и 1 независимы над полем рациональных чисел, т.е. когда  $k_1\alpha + k_2\beta$  не является целым числом ни для какой совокупности целых чисел  $k_1, k_2$ , кроме  $k_1 = k_2 = 0$ .

<sup>1</sup> Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Нижний Новгород, Россия

\*E-mail: vgrines@yandex.ru

\*\*E-mail: dmitriyminc@mail.ru

В [13] впервые рассмотрены гомеоморфизмы окружности без периодических точек, топологически несопряженные с минимальным поворотом. Позднее такие диффеоморфизмы (гомеоморфизмы) окружности были названы диффеоморфизмами (гомеоморфизмами) Данжуа. Неблуждающее множество гомеоморфизма Данжуа минимально и гомеоморфно канторову множеству. Кроме того, каждый такой гомеоморфизм полусопряжен с минимальным поворотом и полный прообраз каждой точки окружности относительно полусопрягающего отображения является либо точкой, либо гомеоморфен замкнутому интервалу. Топологическая классификация гомеоморфизмов Данжуа была получена в [9].

В [10–12] рассмотрены отображения двумерного тора, которые обладают свойствами, характерными для гомеоморфизмов Данжуа окружности. Согласно [11], введем следующее определение.

**Определение 1.** Гомеоморфизм  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  называется гомеоморфизмом типа Данжуа, если выполняются следующие условия:

1.  $f$  полусопряжен некоторому минимальному сдвигу  $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  посредством непрерывного гомеоморфизма  $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ .

топного тождественному отображения  $p: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  (т.е.  $p \circ f = g \circ p$ );

2. Множество  $B = \{x \in \mathbb{T}^2 : p^{-1}(x) \text{ содержит более одной точки}\}$  является непустым и счетным.

Мы будем называть множество  $B$  характеристическим множеством гомеоморфизма  $f$ . Заметим, что если точка  $x \in B$ , то все точки ее орбиты относительно отображения  $g$  также принадлежат множеству  $B$ .

Следует отметить, что прямое произведение двух гомеоморфизмов Данжуа окружности не является гомеоморфизмом типа Данжуа двумерного тора.

Пусть  $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  – гомеоморфизм типа Данжуа. Тогда в силу [11] полный прообраз каждой точки  $x \in \mathbb{T}^2$  относительно полусопрягающего отображения  $p$  связан и неблуждающее множество гомеоморфизма  $f$  является минимальным. Однако в отличие от гомеоморфизмов Данжуа окружности, неблуждающие множества гомеоморфизмов типа Данжуа могут быть не гомеоморфны (в индуцированных топологиях). В настоящей работе выделяется подкласс гомеоморфизмов типа Данжуа двумерного тора (см. определение 2 ниже), неблуждающие множества которых гомеоморфны. Рассматриваемые гомеоморфизмы являются наиболее естественным обобщением гомеоморфизмов Данжуа окружности и допускают полную топологическую классификацию, полученную в теореме 1 ниже.

**Определение 2.** Гомеоморфизм типа Данжуа  $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  называется регулярным, если полный прообраз каждой точки его характеристического множества относительно полусопрягающего отображения  $p$  является замкнутым вложенным диском<sup>3</sup> и диаметры этих дисков образуют последовательность, сходящуюся к нулю.

В [10] построен частично гиперболический диффеоморфизм  $h$  трехмерного тора  $\mathbb{T}^3$ , который обладает двумерным аттрактором и получен из алгебраического автоморфизма Аносова посредством бифуркации рождения инвариантной кривой (аналогичные конструкции также рассмотрены в [3, 5, 7]). Согласно [10], одномерное ориентированное неустойчивое слоение диффеоморфизма  $h$  имеет глобальную секущую (двумерный тор), и его слои индуцируют на ней отображение Пуанкаре, являющееся регулярным гомеоморфизмом типа Данжуа.

<sup>2</sup> Под  $p^{-1}(x)$  подразумевается полный прообраз точки  $x$ .

<sup>3</sup> Под замкнутым вложенным диском подразумевается образ замкнутого диска  $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$  относительно вложения  $\tau: D \rightarrow \mathbb{T}^2$ .

Далее опишем топологические свойства неблуждающих множеств регулярных гомеоморфизмов типа Данжуа, на которых основано доказательство результатов настоящей работы.

**Определение 3.** Множеством Серпинского на двумерном торе  $\mathbb{T}^2$  называется множество  $S = \mathbb{T}^2 \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \text{int } D_k$ , где  $\{D_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  – семейство множеств со следующими свойствами:

1. для каждого  $k \in \mathbb{Z}$  множество  $D_k$  является замкнутым вложенным диском;

2.  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \text{int } D_k$  плотно в  $\mathbb{T}^2$ ;

3.  $D_k \cap D_{k'} = \emptyset$  при  $k \neq k'$ ;

4.  $\text{diam}(D_k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , образуют последовательность, сходящуюся к нулю.

Пусть  $S = \mathbb{T}^2 \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \text{int } D_k$  – множество Серпинского на двумерном торе  $\mathbb{T}^2$ . Для каждого  $k \in \mathbb{Z}$  обозначим через  $L_k$  границу множества  $D_k$ . Поскольку  $D_k$  – это замкнутый вложенный диск, то  $L_k$  – это простая замкнутая кривая. Положим  $I = S \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} L_k$ . Каждую точку  $x \in I$  назовем внутренней точкой множества  $S$ , а множество  $I$  – множеством внутренних точек множества  $S$ .

Пусть  $Q$  – стандартный ковер Серпинского на квадрате  $V = [0; 1] \times [0; 1]$  (построение см., например, в [2], стр. 280–281). Определим на  $\mathbb{T}^2$  множество  $C$  как  $\pi|_V(Q)$ , где  $\pi|_V$  – это ограничение естественной проекции  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  на квадрат  $V$ . Тогда множество  $C$  является множеством Серпинского. Множество внутренних точек множества  $C$  обозначим через  $I_C$ . В силу [4, 14], для любого множества Серпинского  $S$  существует гомеоморфизм  $\theta: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  такой, что  $\theta(S) = C$ ,  $\theta(I) = I_C$ .

Следующую лемму мы приводим без доказательства.

**Лемма 1.** Неблуждающее множество регулярного гомеоморфизма типа Данжуа двумерного тора является множеством Серпинского.

Согласно [1], отображение  $\varphi: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  называется линейным, если его можно представить как суперпозицию алгебраического автоморфизма и сдвига на двумерном торе.

Пусть  $f_1, f_2$  – регулярные гомеоморфизмы типа Данжуа двумерного тора такие, что  $f_j$  ( $j \in \{1, 2\}$ ) полусопряжен минимальному сдвигу  $g_j: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  посредством отображения  $p_j: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ; пусть  $B_j$  – характеристическое множество гомеоморфизма  $f_j$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f_1, f_2$  – регулярные гомеоморфизмы типа Данжуа двумерного тора. Тогда гомеоморфизмы  $f_1$  и  $f_2$  топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существует линейное отображение  $\varphi: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  такое, что  $\varphi \circ g_1 = g_2 \circ \varphi$ ,  $\varphi(B_1) = B_2$ .

В доказательстве теоремы 1 основным элементом является доказательство достаточности, т.е. построение гомеоморфизма  $\psi: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , который сопрягает гомеоморфизмы  $f_1$  и  $f_2$  и является модификацией отображения  $\varphi$ . Изложим схему этого построения, состоящую из пяти шагов.

1. Обозначим через  $S_1$  и  $S_2$  неблуждающие множества гомеоморфизмов  $f_1$  и  $f_2$  соответственно, через  $I_1$  и  $I_2$  – множества внутренних точек множеств  $S_1$  и  $S_2$  соответственно. Непосредственно проверяется, что ограничение отображения  $p_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , на множество  $I_j$  является гомеоморфизмом  $I_j$  на образ  $p_j(I_j)$ .

2. Согласно [4, 14], существуют гомеоморфизмы  $\theta_1: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  и  $\theta_2: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  такие, что  $\theta_1(S_1) = C$ ,  $\theta_1(I_1) = I_C$  и  $\theta_2(S_2) = C$ ,  $\theta_2(I_2) = I_C$ . Тогда отображение  $h: I_C \rightarrow I_C$ , определенное как  $h(x) = \theta_2(p_2^{-1}(\varphi(p_1(\theta_1^{-1}(x)))))$ , где  $x \in I_C$ , является гомеоморфизмом.

3. Существует гомеоморфизм  $\zeta: C \rightarrow C$  такой, что  $\zeta(x) = h(x)$  для всех  $x \in I_C$ . Это следует из равномерной непрерывности отображения  $h$ , доказательство которой мы приводим ниже.

Определим отображение  $\kappa: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  следующим образом:  $\kappa(x) = \theta_1(p_1^{-1}(\varphi^{-1}(p_2(\theta_2^{-1}(x)))))$ , где  $x \in \mathbb{T}^2$ , под  $p_1^{-1}(\varphi^{-1}(p_2(\theta_2^{-1}(x))))$  подразумевается полный прообраз множества  $\varphi^{-1}(p_2(\theta_2^{-1}(x)))$ . Заметим, что  $\kappa(x) = h^{-1}(x)$  для всех  $x \in I_C$ .

Для каждого натурального числа  $n$  обозначим через  $Q_1^n, \dots, Q_{8^n}^n$  равные квадраты, получаемые на  $n$ -м шаге построения ковра Серпинского  $Q$  (см. [2], стр. 280–281), через  $K_1^n, \dots, K_{8^n}^n$  соответственно образы квадратов  $Q_1^n, \dots, Q_{8^n}^n$  под действием отображения  $\pi|_V$ . Так как  $Q \subset \bigcup_{i=1}^{8^n} Q_i^n$  (для каждого  $n \in \mathbb{N}$ ), то  $C \subset \bigcup_{i=1}^{8^n} K_i^n$  (для каждого  $n \in \mathbb{N}$ ).

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и выберем  $m \in \mathbb{N}$  ( $m \geq 2$ ) таким образом, что выполняется неравенство:

$\text{diam}(K_i^m) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Для каждого  $i$  определим множество  $\tilde{K}_i^m$  следующим образом:  $\tilde{K}_i^m = \kappa(K_i^m)$ .

Пусть  $A$  и  $B$  – множества на двумерном торе  $\mathbb{T}^2$ . Введем расстояние между множествами  $A$  и  $B$  следующим образом:  $\text{dist}(A, B) = \inf\{\rho(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ , где  $\rho$  обозначает расстояние между точками на  $\mathbb{T}^2$ , индуцированное римановой метрикой.

Для каждого множества  $\tilde{K}_i^m$  определим величину  $d_i$  следующим образом:  $d_i = \min_j(\text{dist}(\tilde{K}_i^m, \tilde{K}_j^m))$ , где  $\tilde{K}_j^m$  – множество, которое не имеет общих точек с множеством  $\tilde{K}_i^m$ . Выберем  $\delta > 0$  так, что  $\delta < \min_{i \in \{1, \dots, 8^m\}} d_i$ . Любые две точки  $x_1, x_2 \in I_C$  такие, что  $\rho(x_1, x_2) < \delta$ , находятся либо в одном множестве  $\tilde{K}_i^m$ , либо в двух разных множествах  $\tilde{K}_i^m$  и  $\tilde{K}_j^m$ , имеющих хотя бы одну общую точку. Тогда  $h(x_1)$  и  $h(x_2)$  лежат либо в одном множестве  $K_i^m$ , либо в двух разных множествах  $K_i^m$  и  $K_j^m$ , имеющих хотя бы одну общую точку. Отсюда и того, что  $\text{diam}(K_i^m) < \frac{\varepsilon}{2}$ , получаем  $\rho(h(x_1), h(x_2)) < \varepsilon$ . Таким образом, отображение  $h$  является равномерно непрерывным на множестве  $I_C$ .

4. Определим отображение  $\chi: S_1 \rightarrow S_2$  следующим образом:  $\chi(x) = \theta_2^{-1}(\zeta(\theta_1(x)))$ , где  $x \in S_1$ . Тогда выполняются следующие равенства:  $p_2 \circ f_2|_{I_2} = g_2 \circ p_2|_{I_2} = \varphi \circ g_1 \circ \varphi^{-1} \circ p_2|_{I_2} = \varphi \circ g_1 \circ p_1 \circ \chi^{-1}|_{I_2} = \varphi \circ p_1 \circ f_1 \circ \chi^{-1}|_{I_2} = p_2 \circ \chi \circ f_1 \circ \chi^{-1}|_{I_2}$ . Таким образом,  $\chi \circ f_1|_{I_1} = f_2 \circ \chi|_{I_1}$ . Из непрерывности отображений  $\chi, f_1, f_2$  и плотности  $I_1$  в  $S_1$  следует, что  $\chi \circ f_1|_{S_1} = f_2 \circ \chi|_{S_1}$ .

5. Из леммы 1 и равенства  $\varphi(B_1) = B_2$  следует, что гомеоморфизм  $\chi$  продолжается до гомеоморфизма  $\psi: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  такого, что  $\psi \circ f_1 = f_2 \circ \psi$ .

Таким образом, доказательство достаточности условий теоремы 1 завершено.

Из теоремы 1 вытекает следующий результат.

**Следствие 1.** Пусть  $f_1, f_2$  – регулярные гомеоморфизмы типа Данжуа двумерного тора такие, что характеристическое множество каждого из них состоит из одной орбиты. Тогда гомеоморфизмы  $f_1$  и  $f_2$  топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существует алгебраический автоморфизм  $\eta: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  такой, что  $\eta \circ g_1 = g_2 \circ \eta$ .

Необходимость немедленно следует из теоремы 1. Докажем достаточность.

Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — орбиты, являющиеся характеристическими множествами гомеоморфизмов  $f_1$  и  $f_2$  соответственно. Так как  $\eta \circ g_1 = g_2 \circ \eta$ , то  $\eta$  переводит орбиты  $g_1$  в орбиты  $g_2$ . Тогда можно выбрать сдвиг  $\gamma: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  такой, что отображение  $\varphi = \gamma \circ \eta$  переводит орбиту  $O_1$  в орбиту  $O_2$ . По построению отображение  $\varphi$  является линейным отображением. Также отображение  $\varphi$  сопрягает сдвиги  $g_1$  и  $g_2$ . Далее достаточность следует из теоремы 1.

Следуя [8], для любого минимального сдвига  $g$  и любого множества  $B$ , состоящего из  $n$  ( $n \geq 1$ ) орбит  $g$ , существует регулярный гомеоморфизм типа Данжуа, который полусопряжен сдвигу  $g$  и его характеристическое множество совпадает с множеством  $B$ . Из теоремы 1 и работы [8] следует существование стандартного представителя в каждом классе топологической сопряженности регулярных гомеоморфизмов типа Данжуа с характеристическими множествами, состоящими из конечного числа орбит. Авторам неизвестно, построен ли кем-нибудь пример регулярного гомеоморфизма типа Данжуа с характеристическим множеством, состоящим из счетного числа орбит<sup>4</sup>.

**Теорема 2.** *Для любого минимального сдвига  $g: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  и любого натурального числа  $n \geq 2$  существует континуальное множество попарно топологически несопряженных регулярных гомеоморфизмов типа Данжуа двумерного тора, каждый из которых полусопряжен сдвигу  $g$  и имеет характеристическое множество, состоящее из  $n$  орбит.*

Поясним идею доказательства теоремы 2.

Пусть  $g: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  — минимальный сдвиг и  $n \geq 2$  — натуральное число. В силу теоремы 1 и работы [8] достаточно показать, что существует континуум множеств  $B_\nu$ , обладающих следующими свойствами:

1. каждое множество  $B_\nu$  является объединением  $n$  орбит сдвига  $g$ .
2. для любых двух множеств  $B_{\nu_1}$  и  $B_{\nu_2}$  не существует линейного отображения  $\varphi: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  тако- го, что  $\varphi(B_{\nu_1}) = B_{\nu_2}$ .

Зафиксируем  $n - 1$  произвольных различных орбит  $O_1, \dots, O_{n-1}$  сдвига  $g$  и введем множество  $B_\nu = \bigcup_{i=1}^{n-1} O_i \cup O_\nu$ , где  $O_\nu$  — орбита сдвига  $g$ , отличная от орбит  $O_1, \dots, O_{n-1}$ . Непосредственно проверяется, что можно выбрать континуум различных орбит

<sup>4</sup> В одномерном случае, в соответствии с [6], можно построить гомеоморфизм Данжуа окружности с характеристическим множеством, состоящим из счетного числа орбит.

$O_\nu$  и, следовательно, континуум различных множеств  $B_\nu$  таким образом, что множества  $B_\nu$  удовлетворяют требуемым условиям.

## ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Окончательная версия работы выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ (проект 21-11-00010) с использованием материалов, полученных ранее при финансовой поддержке гранта РФФ (проект 17-11-01041). Кроме того, доказательство теоремы 2 было получено при финансовой поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2022-1101.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аров Д.З.* О топологическом подобию автоморфизмов и сдвигов компактных коммутативных групп // УМН. 1963. Т. 18. № 5 (113). С. 133–138.
2. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.
3. *Bonatti C., Viana M.* SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting // Israel J. Math. 2000. V. 115. P. 157–193.
4. *Borsuk K.* On embedding curves in surfaces // Fund. Math. 1966. V. 59. P. 73–89.
5. *Carvalho M.* Sinai–Ruelle–Bowen measures for N-dimensional derived from Anosov diffeomorphisms // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1993. V. 13. № 1. P. 21–44.
6. *Denjoy A.* Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. // J. Math. Pures Appl. 1932. V. 11. P. 333–376.
7. *Horita V., Viana M.* Hausdorff dimension for non-hyperbolic repellers II: DA diffeomorphisms // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2005. V. 13. № 5. P. 1125–1152.
8. *Kwakkel F.* Minimal sets of non-resonant torus homeomorphisms. // Fund. Math. 2011. V. 211. № 1. P. 41–76.
9. *Markley N.G.* Homeomorphisms of the circle without periodic points. // Proc. London Math. Soc. 1970. V. 3. № 20. P. 688–698.
10. *McSwiggen P.D.* Diffeomorphisms of the torus with wandering domains // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 117. № 4. P. 1175–1186.
11. *Norton A., Sullivan D.* Wandering domains and invariant conformal structures for mappings of the 2-torus // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1996. V. 21. № 1. P. 51–68.
12. *Norton A., Velling J.A.* Conformal irregularity for Denjoy diffeomorphisms of the 2-torus // Rocky Mountain J. Math. 1994. V. 24. № 2. P. 655–671.
13. *Poincaré J.H.* Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles (III). // J. Math. Pures Appl. 1885. V. 1. P. 167–244.
14. *Whyburn G.T.* Topological characterization of the Sierpiński curve. // Fund. Math. 1958. V. 45. P. 320–324.

## ON TOPOLOGICAL CLASSIFICATION OF REGULAR DENJOY TYPE HOMEOMORPHISMS

V. Z. Grines<sup>a</sup> and D. I. Mints<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *HSE University, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS D.V. Treschev

We consider regular Denjoy type homeomorphisms of the two-dimensional torus which are the most natural generalization of Denjoy homeomorphisms of the circle. In particular, they arise as Poincaré maps induced on global cross-sections by leaves of one-dimensional orientable unstable foliations of some partially hyperbolic diffeomorphisms of closed three-dimensional manifolds. The non-wandering set of each regular Denjoy type homeomorphism is Sierpiński set and each such homeomorphism by definition is semiconjugate to the minimal translation on the two-dimensional torus. We introduce the complete invariant of topological conjugacy for regular Denjoy type homeomorphisms that is characterized by the minimal translation, which is semiconjugate to the given regular Denjoy type homeomorphism, with distinguished at most countable set of orbits.

*Keywords:* topological classification, Denjoy type homeomorphism, Sierpiński set

## ПОВЫШЕНИЕ КАЧЕСТВА ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ СРЕДЫ ИМПУЛЬСАМИ РАЗЛИЧНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

© 2022 г. И. В. Прохоров<sup>1,\*</sup>, И. П. Яровенко<sup>1,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН М.А. Гузевым

Поступило 12.07.2021 г.

После доработки 28.04.2022 г.

Принято к публикации 10.05.2022 г.

В рамках математической модели, базирующейся на нестационарном уравнении переноса излучения, предложен новый экстраполяционный алгоритм улучшения качества томографических изображений коэффициента ослабления излучения, основанный на облучении исследуемой среды сериями импульсов различной длительности. Проведенный на известном тест-фантоме численный анализ предложенного алгоритма подтвердил его эффективность для подавления паразитного влияния рассеяния при рентгеновской томографии неоднородных сред.

*Ключевые слова:* импульсная томография, нестационарное уравнение переноса излучения, обратные задачи, коэффициент ослабления, экстраполяция

**DOI:** 10.31857/S2686954322040130

### 1. ВВЕДЕНИЕ

На качество рентгеновских томограмм оказывают влияние множество физических факторов и технологических ограничений: неполнота проекционных данных, фиксированные геометрические размеры детекторов и их угловой апертуры, паразитное влияние рассеянного излучения и др. Рентгеновское излучение, рассеянное исследуемым участком тела пациента, попадая на детектор, становится одним из основных факторов, ухудшающих диагностическое качество томографического изображения. Рассеянное излучение, смешиваясь с полезным сигналом, несущем информацию о внутреннем строении объекта, ухудшает контраст изображения, увеличивает его зашумленность, создает неравномерный фон, снижает резкость контуров исследуемых органов, поэтому необходимость подавления рассеянного излучения трудно переоценить.

В рентгеновской томографии существует множество алгоритмов подавления деструктивного влияния рассеяния. Основная часть из них основана на компенсационном учете рассеянного сигнала и коррекции проекционных данных [1–6].

Другая часть алгоритмов базируется на конструировании специальных источников излучения и последующей обработке прошедшего через среду излучения [7–13]. Обе группы алгоритмов являются приближенными и, либо требуют знания значительной априорной информации о характеристиках среды и больших вычислительных ресурсов, либо предъявляют высокие аппаратные требования к конструкции источников и детекторов излучения.

До последнего времени в рентгеновской томографии в основном преобладали стационарные модели процессов облучения. Прежде всего это обусловлено сложностью конструирования импульсных источников рентгеновского излучения и детектирующих устройств с достаточным временным разрешением. В настоящее время ведутся успешные перспективные исследования по разработке устройств, способных генерировать ультракороткие импульсы рентгеновского излучения [14], что в совокупности с достижениями условий детектирования сигнала с высоким временным разрешением открывает перспективы для новых схем томографического сканирования.

В работе предлагается алгоритм улучшения качества изображений путем серийного облучения среды короткими импульсами различной длительности, который обосновывается в рамках математической модели, основанной на нестационарном интегро-дифференциальном уравнении переноса излучения. В теоретическом пределе

<sup>1</sup>Институт прикладной математики

Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток, Россия

\*E-mail: prokhorov@iam.dvo.ru

\*\*E-mail: yarovenko@iam.dvo.ru

предлагаемая нами схема сканирования при стремлении ширины импульса входящего излучения к нулю позволяет выделить баллистическую компоненту, но практическая применимость полученного результата упирается в ограничения на существующие источники и детекторы излучения. Для преодоления данной проблемы предлагается использовать облучение среды серией импульсов с различной длительностью и последующим построением экстраполяционного приближения баллистической составляющей сигнала.

Идея использования ультракоротких импульсов для повышения качества томографических изображений не нова и подобные методы успешно используются в диффузионной оптической томографии [15]. Применение коротких импульсов либо серий коротких импульсов разных длительностей позволяет добиться увеличения пространственного разрешения томографических методов диффузионной томографии, что является критической проблемой для медицинского применения данных методов. В случае рентгеновской томографии проблема пространственного разрешения не столь критична и основное внимание направлено на повышение точности восстановления численных значений коэффициента ослабления. Существенный вклад в проекционные данные рассеянного излучения от неколлимированного источника приводит к тому, что реконструкция идентичных по химическому составу включений в зависимости от их пространственного расположения дает различные значения коэффициентов ослабления по шкале Хаунсфилда. Особенно остро проблема паразитного влияния рассеянного излучения стоит в конусно-лучевой компьютерной томографии, где эффект коллимации зондирующего излучения незначителен [16]. Преимуществом предлагаемого алгоритма над существующими является возможность повышения качества томографических изображений, оставаясь в рамках имеющейся на сегодняшний день приборной базы и вычислительных мощностей и, несмотря на необходимость проведения повторных просвечиваний, применение импульсов малой длительности понижает общую лучевую нагрузку в сравнении непрерывным режимом облучения.

## 2. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение, описывающее нестационарный процесс взаимодействия излучения с веществом, вида [17]

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_r + \mu(r)\right) I(r, \omega, t) = \sigma(r) \int_{\Omega} p(r, \omega \cdot \omega') I(r, \omega', t) d\omega'. \quad (1)$$

Функция  $I(r, \omega, t)$  интерпретируется как плотность потока частиц в момент времени  $t \in [0, T]$  в точке  $r \in R^3$ , движущихся со скоростью  $c$  в направлении единичного вектора  $\omega \in \Omega = \{\omega \in R^3 : |\omega| = 1\}$ . Функции  $\mu = \mu(r)$  и  $\sigma = \sigma(r)$  имеют смысл коэффициентов ослабления и рассеяния, а через  $p = p(r, \omega \cdot \omega')$  обозначена индикатриса рассеяния. Исследуемый объект содержится в шаре  $G$  с центром в начале координат и диаметром  $d$ ,  $G = \{r \in R^3 : |r| = d/2\}$ . Обозначим через  $\Pi_{\omega}$  плоскость, касательную к границе области  $G$  и перпендикулярную направлению  $\omega$ ,  $\Pi_{\omega} = \{r \in R^3 : r \cdot \omega = d/2\}$ . Очевидно, что плоскости  $\Pi_{-\omega}$  и  $\Pi_{\omega}$  параллельны и находятся на расстоянии  $d$  друг от друга. Сканирование объекта осуществляется путем синхронного поворота плоскостей с источниками излучения  $\Pi_{-\omega^*}$  и детекторами  $\Pi_{+\omega^*}$  в горизонтальных сечениях  $\omega^* \in \Omega^* = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega : \omega_3 = 0\}$ .

В задачах томографии обычно требуется определить хотя бы один из коэффициентов уравнения (1), если для каждого  $\omega^* \in \Omega^*$  его решение  $I_{\omega^*}$  известно на множестве  $\Pi_{-\omega^*} \times \Omega^* \times [0, T]$  и  $\Pi_{+\omega^*} \times \Omega^* \times [0, T]$ .

Рассматривая начально-краевую задачу для уравнения (1), мы будем опускать параметрическую зависимость решения уравнения  $I_{\omega^*}(r, \omega, t)$  от направления  $\omega^*$ . Для краткости изложения введем ряд обозначений:  $X = G \times \Omega \times [0, T]$ ,  $X_0 = G \times \Omega \times \{t = 0\}$ ,  $\Omega_{-\omega^*} = \{\omega \in \Omega : -\omega^* \cdot \omega > 0\}$ ,  $Y^- = \Pi_{-\omega^*} \times \Omega_{-\omega^*} \times [0, T]$ ,  $X^- = Y^- \cup X_0$ . Присоединим к уравнению (1) начальные и граничные условия

$$I|_{X_0} = h_0(r, \omega), \quad (2)$$

$$I|_{Y^-} = h_{ext}(z, \omega, t), \quad (3)$$

где  $h_0 = h_0(r, \omega)$  характеризует состояние процесса в начальный момент времени, а функция  $h_{ext} = h_{ext}(z, \omega, t)$  описывает плотность потока излучения, падающего на объект. На множестве  $X_0 \times Y^-$  построим функцию

$$h = h(z, \omega, t) = \begin{cases} h_0(z, \omega), & (z, \omega, t) \in X_0, \\ h_{ext}(z, \omega, t), & (z, \omega, t) \in Y^-, \end{cases}$$

и объединим условия (2) и (3) в одно начально-краевое условие следующего вида

$$I|_{X^-} = h(r, \omega, t). \quad (4)$$

В прямой задаче требуется определить функцию  $I$  из уравнения (1) при условии (4) при заданных функциях  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $p$ ,  $c$ ,  $h$ . Исследованию прямых задач для стационарных и нестационарных уравнений переноса излучения подобного рода посвя-



щено немало работ, отметим лишь несколько широко известных монографий по этой тематике [17–19].

Переходя к постановке обратной задачи для простоты изложения, предположим, что серийное облучение среды, зависящее от направления  $\omega^*$ , осуществляется прямоугольными импульсами длительностью  $\delta$  вида

$$h(\xi, \omega, t) = \begin{cases} 1/\delta, & (\xi, \omega, t) \in \Pi_{-\omega^*} \times \Omega_{-\omega^*} \times (0, \delta), \\ 0, & (\xi, \omega, t) \notin \Pi_{-\omega^*} \times \Omega_{-\omega^*} \times (0, \delta). \end{cases}$$

С физической точки зрения такое определение функции  $h$  накладывает ограничение только на длительность импульсов, не предполагая ни коллимацию зондирующего потока по направлению, ни пространственную локализацию источников излучения, что не редко используется в томографии для подавления паразитного влияния рассеяния в среде при нахождении коэффициента ослабления излучения.

Под обратной задачей будем понимать задачу определения функции  $\mu$  из соотношений (1), (4) и дополнительного условия

$$\int_{d/c}^{d/c+\delta} I(\eta, \omega^*, t) dt = H(\eta, \omega^*), \quad (5)$$

$$(\eta, \omega^*) \in \Pi_{\omega^*} \times \Omega^*,$$

в которых величины  $c, d, \delta$  и функции  $h(\xi, \omega^*, t), H(\eta, \omega^*)$  при  $(\xi, \omega^*, t) \in \Pi_{\omega^*} \times \Omega^* \times [0, T], (\eta, \omega^*) \in \Pi_{\omega^*} \times \Omega^*$  заданы. В условии переопределения (5) мы требуем знания лишь осредненных значений плотности потока по промежутку, равному ширине импульса, смещенному на время пробега баллистической оставляющей зондируемого сигнала от источника к приемнику, что несколько снижает требования к временному разрешению детекторов.

### 3. ОЦЕНКА ВКЛАДА РАССЕЯННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ. ПРОЦЕДУРА ЭКСТРАПОЛЯЦИИ

Обозначим через  $L_{r, \omega}$  луч, исходящий из точки  $r \in \mathbb{R}^3$  в направлении  $\omega, L_{r, \omega} = \{r + \omega\tau : \tau > 0\}$ , а через  $d(r, -\omega)$  расстояние от точки  $r \in G$  до плоскости  $\Pi_{-\omega^*}$  в направлении  $-\omega$ , и пусть  $d(r, -\omega, t) = \min\{d(r, -\omega), ct\}$ .

Для решения начально-краевой задачи (1), (4) справедливо представление в виде равномерно сходящегося ряд Неймана [17–19]

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} (AS)^n I_0, \quad (6)$$

где операторы  $A$  и  $S$  определяются выражениями

$$Af(r, \omega, t) = \int_0^{d(r, -\omega, t)} \exp\left(-\int_0^{\tau} \mu(\eta - \tau' \omega) d\tau'\right) \times \times f(r - \omega\tau, \omega, t - \tau/c) d\tau, \quad (7)$$

$$Sf(r, \omega, t) = \sigma(r) \int_{\Omega} p(r, \omega \cdot \omega') f(r, \omega', t) d\omega'. \quad (8)$$

В представлении (6) функция

$$I_0(r, \omega, t) = h(\eta - d(r, -\omega, t)\omega, \omega, t - d(r, -\omega, t)/c) \exp\left(-\int_0^{d(r, -\omega, t)} \mu(\eta - \tau\omega) d\tau\right) \quad (9)$$

имеет смысл интенсивности нерассеянного поля, а функция  $I_n = (AS)^n I_0$  при  $n = 1, 2, \dots$  описывает  $n$ -кратно рассеянное поле.

Можно показать, что для всех  $\eta \in \Pi_{\omega^*}$  для функции  $I_1$  справедлива оценка

$$I_1(\eta, \omega^*, t) \leq \frac{\bar{\sigma}}{2\delta} (ct - d) \ln \left| \frac{ct}{ct - d} \right| \quad (10)$$

при  $d/c \leq t \leq d/c + \delta$ , где  $\bar{\sigma} = \sup_{r \in G} \sigma$ . Из (10) находим

$$\int_{d/c}^{d/c+\delta} I_1(\eta, \omega^*, t) dt \leq C\Phi(\epsilon), \quad (11)$$

где

$$\Phi(\epsilon) = 1 + \epsilon \ln \left| 1 + \frac{1}{\epsilon} \right| - \frac{1}{\epsilon} \ln |1 + \epsilon|, \quad (12)$$

$\epsilon(\delta) = c\delta/d$  и  $C \leq \bar{\sigma}d/4$ . При осреднении функции  $I_0$  по промежутку времени  $[d/c, d/c + \delta]$  для всех  $\eta \in \Pi_{\omega^*}$  получаем

$$\int_{d/c}^{d/c+\delta} I_0(\eta, \omega^*, t) dt = \exp\left(-\int_0^d \mu(\eta - \tau\omega^*) d\tau\right). \quad (13)$$

Из неравенства (11) видно, что при уменьшении длительности зондирующего импульса осредненные значения функции  $I_1$  стремятся к нулю. Можно показать, что осредненные по промежутку времени значения функций  $I_2, I_3, \dots$  также сходятся к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ . Ограничимся приближением однократного рассеяния, оставляя в ряде Неймана только два первых слагаемых, и при проведении численных экспериментов мы покажем, что при зондировании импульсами небольшой длительности даже такое грубое приближение позволяет построить хорошую аппроксимацию решения уравнения переноса излучения в многократно рассеивающей среде.

Таким образом, из (10), (11), (13) в приближении однократного рассеяния получаем

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon) &= \int_{d/c}^{d(1+\varepsilon)/c} I(\eta, \omega^*, t, \varepsilon) dt = \\ &= \exp\left(-\int_0^d \mu(\eta - \tau\omega^*) d\tau\right) + C\Phi(\varepsilon). \end{aligned} \quad (14)$$

Константу  $C$  можно определить, например, если облучить среду двумя импульсами различной длительности  $\delta_1, \delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1, \varepsilon_j = \varepsilon(\delta_j)$ , а затем выразить интеграл от функции  $\mu$

$$\begin{aligned} \int_0^d \mu(\eta - \tau\omega^*) d\tau = \\ = -\ln\left|\Psi(\varepsilon_1) - \frac{\Psi(\varepsilon_1) - \Psi(\varepsilon_2)}{\Phi(\varepsilon_1) - \Phi(\varepsilon_2)}\Phi(\varepsilon_1)\right|. \end{aligned} \quad (15)$$

Левая часть соотношения (15) является лучевым преобразованием Радона искомой функции  $\mu(r)$ . Таким образом, решение обратной задачи свелось к обращению преобразования Радона и линейных интегралов на множестве  $\Pi_{\omega^*} \times \Omega^*$  достаточно для реализации алгоритма обращения [20].

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для тестирования вычислительного алгоритма были проведены численные эксперименты, результаты которых представлены в данном разделе.

Для описания серийного облучения среды использовался импульсный источник, зависящий от направления зондирования  $\omega^*$ , с длительностью импульсов 100 и 300 пикосекунд ( $\delta_1 = 300, \delta_2 = 100$ ).

Алгоритм тестировался в два этапа. На первом этапе задавались значения коэффициентов, описывающих среду и с помощью метода Монте-Карло [21] вычислялись значения функций  $\Psi(\varepsilon_j) = H(\eta, \omega^*, \varepsilon_j)$ . В экспериментах моделировался томограф, содержащий 101 детектор, а дискретизация по углу составляла 200 направлений. Для каждого детектора имитировалось  $10^5$  траекторий фотонов, при этом отслеживалось до 10 актов взаимодействия фотона с веществом, что соответствует  $n = 10$  в ряде Неймана (6) для решения уравнения переноса излучения. Выбранные параметры позволяют найти значения  $H(\eta, \omega^*, \varepsilon_j)$  с относительной погрешностью, не превышающей 0.2%.

На втором этапе выполнялась экстраполяция данных о выходящем излучении и согласно формуле (15) находилось преобразование Радона функции  $\mu$ . Также вычислялись значения преобразования Радона функции  $\mu$  без экстраполяции

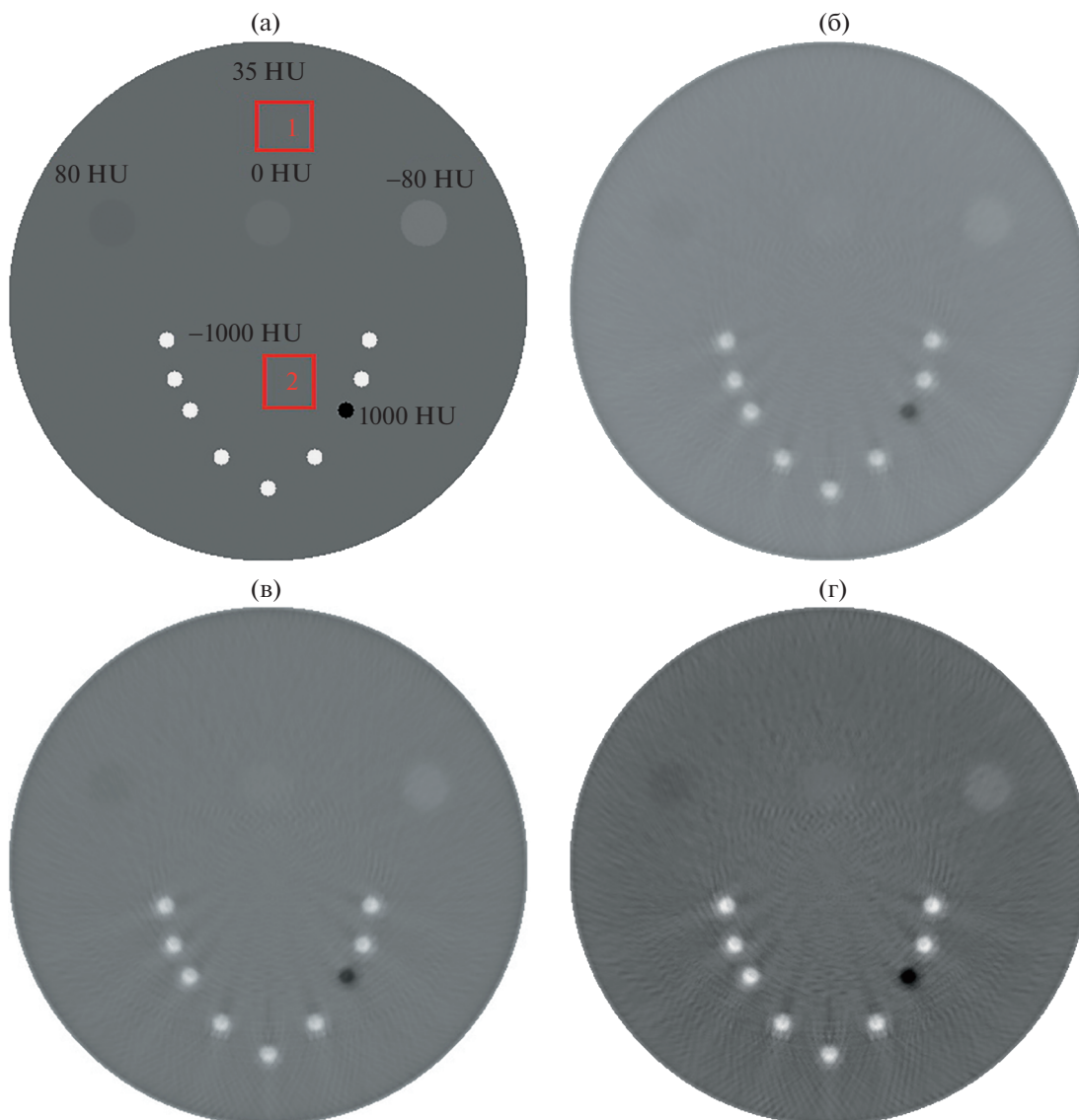
$$\int_0^d \mu(\eta - \tau\omega^*) d\tau = -\ln|\Psi(\varepsilon_j)|, \quad (16)$$

что соответствует формуле классической томографии без применения методов подавления рассеяния. После чего, применяя для обращения преобразования Радона алгоритм свертки [20], решалась задача восстановления коэффициента ослабления.

Традиционно значения коэффициента ослабления приводятся в единицах Хаунсфилда ( $HU$ ), связанных со значениями коэффициента ослабления вещества  $\mu$  следующим образом  $HU = \frac{\mu - \mu_{water}}{\mu_{water} - \mu_{air}} \times 1000$ , где  $\mu$  – коэффициент ослабления вещества, а  $\mu_{water}, \mu_{air}$  – коэффициенты ослабления для воды и воздуха соответственно.

Фантом, выбранный для тестирования алгоритма, был предложен в работе [22] и представлял собой цилиндр высотой и диаметром в 10 см. Внутренний объем цилиндра поделен на пять цилиндрических слоев, каждый из которых играет свою роль при тестировании различных качеств алгоритмов реконструкции. При тестировании было выбрано сечение, приведенное на рис. 1а, которое проверяет возможности предлагаемого нами подхода для восстановления слабоконтрастных включений в случае, когда поблизости находятся сильно-рассеивающие объекты.

Среда включает в себя цилиндр, заполненный полимером с коэффициентом ослабления около 35 единиц Хаунсфилда. В свою очередь, этот цилиндр содержал еще три цилиндрических включения диаметром 9 мм со значениями коэффициента ослабления в  $-80, 0$ , и  $80 HU$ . Цилиндрические включения имеют коэффициенты ослабления, близкие к фоновому значению, и представляют собой пример слабоконтрастных включений. Кроме того, фантом содержит 9 цилиндрических полостей диаметром 3 мм, расположенных в виде человеческой челюсти. Данные полости дают возможность устанавливать в них металлические штифты, играющие роль сильных рассеивателей, создавая тем самым плохие условия для реконструкции слабоконтрастных включений. В численных экспериментах мы ограничились случаем одного металлического включения, в то время как остальные полости оставались незаполненными и содержали воздух. Отметим, что подобный фантом достаточно тяжелый для реконструкции слабоконтрастных включений. Все дело в том, что он содержит в себе как материал с наименьшим значением в шкале Хаунсфилда ( $HU = -1000$ ), так и с максимальным ( $HU = 1000$ ), что не позволяет применять для выделения слабоконтрастных включений, например методы сжатия динамического диапазона.

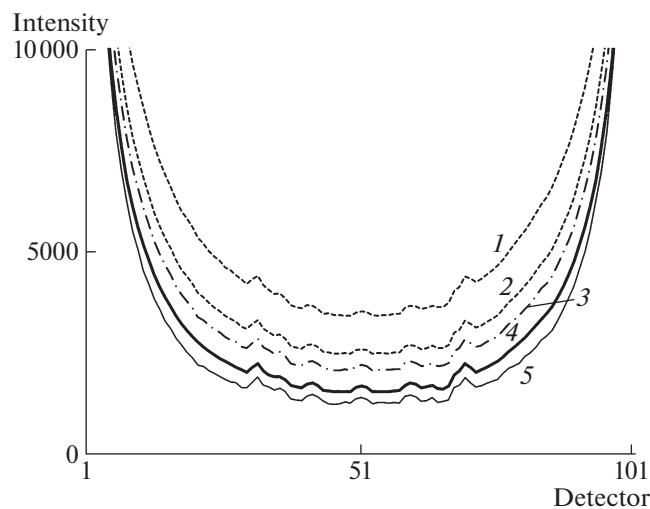


**Рис. 1.** На рисунке (а) изображено внутреннее строение структуры фантома в заданной плоскости. На рисунках (б), (в) приведены результаты реконструкции коэффициента ослабления при облучении импульсами длительности 300 и 100 пикосекунд соответственно. На рисунке (г) приведены результаты восстановления функции  $\mu$  с использованием процедуры экстраполяции выходящего сигнала.

Обработка выходящего излучения с помощью формулы (15) проводилась для каждой проекции независимо. Пример такой обработки для одной проекции приведен на рис. 2. Анализ графиков показывает, что отношение баллистической составляющей к суммарному сигналу составляет порядка 50% для импульса длительностью 100 пикосекунд, а для импульса длительностью 300 пикосекунд – менее 35%. Так как с увеличением длительности зондирующего импульса графики соответствующих проекций смещены вверх по оси ординат, то восстановленные по таким проекциям значения коэффициента ослабления будут заниженными. В свою очередь применение

формулы (15) дает график проекции, проходящий существенно ближе к “идеальной” проекции, нежели графики проекций без обработки, и находится ниже кривой, соответствующей проекции без рассеяния. Для сравнения на рисунке приведена кривая, полученная путем линейной экстраполяции функции  $\Psi(\epsilon)$ , т.е. в разложении (14) функция  $\Phi(\epsilon)$  заменена на  $\epsilon$ . Линейная экстраполяция дает несколько худшие результаты и ее применение оправдано при малых значениях параметра  $\epsilon$ , поэтому далее мы ее не использовали.

Результаты реконструкции фантома приведены на рис. 1б, в, г. Рисунок 1в содержит результаты восстановления фантома по данным о выходя-



**Рис. 2.** Пунктирными линиями 1, 2 изображены проекции, соответствующие выходящему излучению для источников излучения с длительностью импульсов 300 и 100 пс соответственно. Жирная непрерывная линия 4 соответствует “идеальной” проекции без рассеяния. Штрихпунктирная линия 3 получена в результате линейной экстраполяции проекции. Тонкая непрерывная линия 5 соответствует проекциям, полученным путем экстраполяции по формуле (15).

шем излучении, которые получены при зондирующих импульсах 100 и 300 пс. Увеличение длительности зондирующего импульса приводит к значительному снижению качества реконструкции. Даже визуально видно, что коэффициент поглощения восстановился с большой погрешностью. Более того центральное слабоконтрастное включение, имеющее значение коэффициента поглощения  $HU = 0$ , наиболее близкое к значению основной среды, стало практически не различимым. Рисунок 1г содержит результаты реконструкции, соответствующие данным, обработанным при помощи формулы (15).

Для количественной оценки качества реконструкции, следуя методике, предложенной в работе [22], нами вычислялись средние значения коэффициента ослабления для каждого из материалов,

входящих в фантом. Для каждой полости, заполненной воздухом, вычислялось среднее значений восстановленного коэффициента ослабления, после чего данные результаты усреднялись по всем таким включениям. После всех таких вычислений полученные значения сравнивались с эталонными значениями в единицах Хаунсфилда.

Как видно из томограмм, влияние сильно-рассеивающего включения особенно сильно вблизи него и приводит к появлению артефактов, которые вызваны наличием сильно-рассеивающего включения и недостаточным уровнем дискретизации по угловой переменной. Для анализа данной ситуации при подсчете средних значений восстановленного коэффициента ослабления нами дополнительно выделялись два региона, отмеченные красными прямоугольниками на рис. 1а. Первый из них, обозначенный 1, находился в непосредственной близости от включений, вызывающих появление артефактов. Вторым регионом, обозначенным на рис. 1а как 2, напротив, находился далеко от рассеивающих включений.

Получившиеся в результате экспериментов значения приведены в табл. 1. В первой строке содержатся эталонные значения коэффициентов. В последующих строках приведены средние значения коэффициентов ослабления, полученные в результате реконструкции фантома с помощью формулы (16) при  $\delta_1 = 300$  и  $\delta_2 = 100$  и при реконструкции фантома по данным, полученным после обработки выходящего излучения по формуле (15). Из табл. 1 видно, что фильтрация рассеяния существенно улучшает качество реконструкции значений коэффициента поглощения и, как и ожидалось, при анализе экстраполяции одиночных проекций, приведенных на рис. 2, восстановление фантома по экстраполированным данным приводит к завышению реальных значений коэффициента ослабления. Однако для включения, содержащего металлический штифт (1000 HU), данные значения оказались почти в два раза меньше оригинальных значений. Мы связываем данное обстоятельство с малыми размерами самого включения и недостаточной дискретизацией по угловой переменной.

**Таблица 1.** Средние значения восстановленных коэффициентов ослабления  $\mu$  в единицах Хаунсфилда. Для каждого включения приведено: в первой строке – точное значение  $\mu$ ; в двух следующих строках – полученные после обращения преобразования Радона без предварительной обработки выходящего излучения при  $\delta_1 = 300$ ,  $\delta_2 = 100$  по формуле (16); и в последней строке – полученное после фильтрации рассеяния по формуле (15)

Точное значение $\mu$	–80	0	80	–1000	1000	35	35
Приближенное значение $\mu$ ( $\delta_1 = 300$ пс)	–298	–247	–219	–565	66	–234	–238
Приближенное значение $\mu$ ( $\delta_1 = 100$ пс)	–198	–154	–97	–570	278	–135	–124
Приближенное значение $\mu$ (после фильтрации)	–1	56	131	–650	870	94	125

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен приближенный экстраполяционный алгоритм нахождения коэффициента ослабления уравнения переноса излучения и была рассмотрена его простейшая реализация по результатам двух измерений. Увеличение количества измерений различных по длительности импульсов, прошедших через среду, повысит качество экстраполяции и приведет к повышению точности решения обратной задачи. В то же время проведение дополнительных измерений увеличивает радиационную нагрузку на изучаемый объект, усложняет устройство томографа и делает его более дорогостоящим. Тем не менее теоретические исследования в этой области весьма перспективны, и мы связываем с данной тематикой наши дальнейшие планы. Интересен вопрос выбора устойчивого к ошибкам измерений и оптимального с точки зрения точности многопараметрического разложения функции  $\Psi(\epsilon)$  в выражении (14).

## ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках НИОКТР № АААА-А20-120120390006-0 при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00173).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rührnschopf E.-P., Klingenberg K.* A general framework and review of scatter correction methods in X-ray cone beam computerized tomography. Part 1: scatter compensation approaches // *Medical Physics*. 2011. V. 38. № 7. P. 4296–4311.
2. *Мазуров А.И., Потрахов Н.Н.* Влияние рассеянного рентгеновского излучения на качество изображения и методы его подавления // *Медицинская техника*. 2014. № 5. С. 12–15.
3. *Zhao C., Chen X., Ouyang L., Wang J., Jin M.* Robust moving-blocker scatter correction for cone-beam computed tomography using multiple-view information // *PLoS ONE*. 2017. V. 12. № 12. Article ID e0189620.
4. *Thanasupsombat C., Thongvigitmanee S.S., Aootaphao S., Thajchayapong P.* A Simple Scatter Reduction Method in Cone-Beam Computed Tomography for Dental and Maxillofacial Applications Based on Monte Carlo Simulation // *BioMed Research International*. 2018. V. 2018, Article ID 5748281.
5. *Maier J., Sawall S., Knaup M. et al.* Deep Scatter Estimation (DSE): Accurate Real-Time Scatter Estimation for X-Ray CT Using a Deep Convolutional Neural Network // *Journal of Nondestructive Evaluation*. 2018. V. 37. Article ID 57.
6. *Altunbas C., Park Y., Yu Z., Gopal A.* A unified scatter rejection and correction method for cone beam computed tomography // *Med Phys*. 2021. V. 48. № 3. P. 1211–1225.
7. *Аниконов Д.С., Прохоров И.В.* Определение коэффициента уравнения переноса при энергетических и угловых особенностях внешнего излучения // *Доклады АН*. 1992. Т. 327. № 2. С. 205–207.
8. *Anikonov D.S., Prokhorov I.V., Kovtanyuk A.E.* Investigation of scattering and absorbing media by the methods of X-ray tomography // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 1993. V. 1. № 4. P. 259–282.
9. *Antyufeev V.S., Bondarenko A.N.* X-ray tomography in scattering media // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1996. V. 56. № 2. P. 573–587.
10. *Kovtanyuk A.E., Prokhorov I.V.* Tomography problem for the polarized-radiation transfer equation // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2006. V. 14. № 6. P. 609–620.
11. *Prokhorov I.V., Yarovenko I.P., Nazarov V.G.* Optical tomography problems at layered media // *Inverse Problems*. 2008. V. 24. № 2. 025019.
12. *Kawagoe D., Chen I.-K.* Propagation of boundary-induced discontinuity in stationary radiative transfer // *Journal of Statistical Physics*. 2018. V. 170. № 1. P. 127–140.
13. *Chen I.K., Kawagoe D.* Propagation of boundary-induced discontinuity in stationary radiative transfer and its application to the optical tomography // *Inverse Problems and Imaging*. 2019. V. 13. № 2. P. 337–351.
14. *Фетисов Г. В.* Рентгеновские дифракционные методы структурной диагностики материалов: прогресс и достижения // *УФН*. 2020. Т. 190. № 1. С. 2–36.
15. *Konovalov A., Genina E., Bashkatov A.* Diffuse optical mamotomography: state-of-the-art and prospects // *Journal of Biomedical Photonics & Engineering*. 2016. V. 2. № 2. 020202-1.
16. *Pauwels R., Jacobs R., Singer S.R., Mupparapu M.* CBCT-based bone quality assessment: are Hounsfield units applicable? // *Dentomaxillofac Radiol*. 2015. V. 44. № 1. 20140238.
17. *Ершов Ю.И., Шухов С.Б.* Математические основы теории переноса. М.: Атомиздат, 1985.
18. *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // *Труды МИАН СССР*. 1961. Т. 61. С. 3–158.
19. *Гермогенова Т.А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986.
20. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
21. *Михайлов Г.А., Медведев И.Н.* Оптимизация весовых алгоритмов статистического моделирования. Омега Принт, 2011.
22. *Steiding C., Kolditz D., Kalender W.A.* A quality assurance framework for the fully automated and objective evaluation of image quality in cone-beam computed tomography // *Medical Physics*. 2014. V. 41. 031901.

## IMPROVING QUALITY OF TOMOGRAPHIC IMAGES OF MEDIUM USING IRRADIATION WITH PULSES OF DIFFERENT DURATION

**I. V. Prokhorov<sup>a</sup> and I. P. Yarovenko<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> *Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok, Russia*

Presented by Academician of the RAS M.A. Guzev

Within framework of the nonstationary radiation transfer equation, we propose a new extrapolation method to improve the quality of tomographic images. The method based on a medium irradiation with a series of different duration pulses. Numerical analysis of the proposed algorithm is carried out using the well-known test phantom. The results obtained show the algorithm is effective to suppress a negative influence of scattering in X-ray tomography of inhomogeneous media.

*Keywords:* pulse tomography, nonstationary radiation transfer equation, inverse problems, attenuation coefficient

УДК 519.6

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ И УДАЛЕНИЯ ИЗВЕСТКОВОГО НАЛЕТА В СИСТЕМАХ ВОДООЧИСТКИ

© 2022 г. Н. И. Тарасов<sup>1,\*</sup>, Т. А. Кудряшова<sup>1,\*\*</sup>, С. В. Поляков<sup>1,\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным

Поступило 31.03.2022 г.

После доработки 12.05.2022 г.

Принято к публикации 03.06.2022 г.

Моделирование процессов образования и удаления известкового налета, образующегося в системах очистки воды, рассматривается в рамках создания технологий замкнутого цикла. Твердые отложения, образующиеся со временем на поверхностях теплообменных аппаратов, приводят в негодность нагревательные элементы систем очистки и нивелируют их очищающую функцию. Для удаления осадочных фракций используются различные подходы, однако самые эффективные из них опираются на математическое моделирование. В работе проведен вычислительный эксперимент, воспроизводящий основные этапы очистки воды от твердых примесей. Для этого исследован процесс образования твердых осадков на теплонагревательном элементе (ТЭНе) сложной геометрии. Моделирование течения проводится на основе квазигидродинамической модели, дополненной уравнениями конвекции-диффузии-реакции. В выполненных трехмерных расчетах показана эволюция загрязнения ТЭНа, приводящая к падению эффективности его теплоотдачи и снижению качества очистки. В расчетах также исследован процесс восстановления характеристик ТЭНа при прокачке через систему соляной кислоты. Полученные результаты иллюстрируют уменьшение осадочного слоя на ТЭНе и восстановление его очищающей функции.

*Ключевые слова:* математическое моделирование образования известковых осадков в системах очистки воды, квазигидродинамическая модель, уравнения конвекции-диффузии-реакции

DOI: 10.31857/S268695432204018X

Настоящая работа посвящена математическому моделированию процессов образования и удаления известкового налета, образующегося в промышленных и бытовых системах очистки воды [1–4]. Твердые отложения, образующиеся со временем на поверхностях теплообменных аппаратов, возникают из-за чрезмерного количества растворенных в воде солей металлов. Как показывает практика, затраты на предупреждение солеотложения в десятки раз меньше, чем финансовые потери, возникающие при устранении последствий отложения солей [5–7]. Также натурные эксперименты показывают, что при толщине осадка 2 мм в зависимости от химического состава примеси, тепловой поток уменьшается на величину от 10 до 40%. В результате потребление электроэнергии таким элементом уве-

личивается, а стимуляция химической реакции по расщеплению солевых примесей значительно уменьшается [8–11]. В российском сегменте мировой экономики вследствие использования в системах очистки жесткой воды встречаются в основном карбонатные (углекислые соли кальция и магния –  $\text{CaCO}_3$ ,  $\text{MgCO}_3$ ), сульфатная ( $\text{CaSO}_4$ ) и силикатные (кремнекислые соединения кальция, магния, железа, алюминия) отложения. Однако и за рубежом эта проблема характерна для многих развивающихся и даже развитых стран [7, 11].

В настоящее время использование высокоочищенной питьевой и технической воды дополняется необходимостью всеобщего энергосбережения. Это связано с дефицитом основных энергоресурсов, возрастающей стоимостью их добычи, а также с глобальными экологическими проблемами. Экономия энергии – это эффективное использование энергоресурсов за счет применения инновационных решений, которые осуществлены технически, обоснованы экономически, приемлемы с экологической и социальной точек зрения, не изменяют привычного образа жизни множества людей и производств. Энергосбережение в любой сфере сводится по существу к снижению

<sup>1</sup> Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: nikita\_tarasow01@mail.ru

\*\*E-mail: kudryashova@imamod.ru

\*\*\*E-mail: serge@imamod.ru

бесполезных потерь энергии. Максимальный эффект от энергосбережения наблюдается при создании и использовании технологий замкнутого цикла. В контексте рассматриваемой проблемы этот цикл определяется чередованием двух основных этапов — очистки воды термическим способом и промывки системы растворами кислот. При удачном подборе параметров эта технология может стать практически безотходной.

Остановимся теперь на подходах к предотвращению солеобразования. Существующие методы в этой сфере можно разделить на механические, физические, химические, технологические [9], а также их комбинации. Механические методы удаления отложений заключаются в остановке процесса очистки воды и удалении солевых осадков путем разламывания и измельчения с помощью фрез, ударного инструмента, скребками. Как правило, такая технология позволяет удалить лишь крупные массивы отложений и используется после длительной эксплуатации очистной системы. Побочным негативным эффектом здесь является возможная порча очистного оборудования.

К физическим методам предотвращения солеобразования относятся: воздействие на водные растворы магнитными, электрическими и акустическими полями. Ряд исследователей отмечает эффективное влияние электромагнитного поля на процессы отложения солей кальция и бария в ходе проведения опытно-промышленных испытаний. Идея акустического метода состоит в создании излучателя акустического поля, который позволяет предотвратить или ослабить процесс солеобразования. В результате интенсивной кавитации образовавшиеся кристаллы солей находятся во взвешенном состоянии в объеме жидкости и не отлагаются на поверхности очистного оборудования [12–14]. Однако в этом случае повышается нагрузка на другие элементы очистной системы, например, фильтры или сорбенты.

Технологические методы воздействия на соли металлов предполагают применение различных видов покрытий для оборудования очистной системы, а также использование деталей из специальных композитных материалов. К таким покрытиям, обладающим низкой адгезией к выпавшим отложениям, относятся покрытия из полимеров, эмалей, лаков и стекла. Сложность нанесения на поверхность, недолговечность и высокая стоимость являются основными недостатками таких покрытий. В качестве примера можно привести оборудование Baker Hughes Centrilift, разработки фирмы “Дюпонт”. Из российских производителей известна фирма “Ижнефтепласт” [15].

Химические методы в настоящее время связаны с применением ингибиторов солевых отложе-

ний [16]. В частности, карбонатные отложения эффективно удаляются растворами кислот.

В последнее время реализация вышеперечисленных методов и систем очистки на их основе все больше использует предварительное математическое и компьютерное моделирование. В его рамках анализируются различные модели процессов, которые используются в технологиях очистки. Среди исследуемых математических моделей все больший вес приобретают гидродинамические описания течений очищаемой среды с учетом различных физико-химических факторов [17, 18]. В данной работе была поставлена задача разработать вычислительные основы и провести моделирование процессов образования и удаления известкового налета, образующегося в системах очистки воды. Для решения задачи была сформулирована математическая модель и разработана программа параллельного расчета, использующая специально подобранные алгоритмы [19–22].

Предлагаемое исследование ограничивается рассмотрением осаждения и удаления солей кальция —  $\text{CaCO}_3$ . Вследствие уменьшения растворимости  $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$  при повышении температуры, соли кальция активно образуются из водного раствора в результате нагрева жесткой воды в соответствии со следующей химической реакцией:



При этом, в результате отложения  $\text{CaCO}_3$ , снижается тепловой поток, выделяемый в среду нагревательным элементом.

Рассмотрим химический метод удаления солей кальция, состоящий в промывке очистной системы раствором соляной кислоты. В результате взаимодействия соли  $\text{CaCO}_3$  с  $\text{HCl}$  происходит образование водных растворов  $\text{CO}_2$  и  $\text{CaCl}_2$ , свободно покидающих загрязненный резервуар системы. Формула химической реакции имеет следующий вид:



Опишем подход, применяемый нами для моделирования процессов образования и удаления солей кальция из водного раствора в очистных системах замкнутого цикла, основанных на комбинации электромагнитного и химического способов. Для этого рассмотрим типичное устройство системы очистки, представленное на рис. 1. Оно представляет собой проточный резервуар, содержащий нагревательный элемент (ТЭН).

Моделирование рассматриваемых процессов было разделено на три стадии:

- 1) установление потока и необходимого температурного режима в резервуаре;
- 2) прохождение жесткой воды через резервуар и образование осадка на ТЭНе;



3) очистка ТЭНа с помощью пропускания раствора соляной кислоты.

Температурный режим на всех трех стадиях очистки регулируется электромагнитным способом [14]. Также электромагнитное поле может частично препятствовать образованию осадка и стимулировать его удаление на стадии промывки системы.

Для моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости в резервуаре с учетом процессов теплопроводности на всех этапах моделирования нами использовалась квазигидродинамическая (КГД) система уравнений [23–25]. В безразмерном виде она имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\nabla \cdot \mathbf{P}),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \operatorname{div}(\mathbf{u}(\rho \varepsilon + p)) + \operatorname{div}(\mathbf{q}) =$$

$$= (\mathbf{P} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} + Q,$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $\mathbf{u}$  – вектор скорости,  $\mathbf{P}$  – тензор давлений Навье–Стокса с аддитивными КГД-поправками,  $p$  – давление,  $\varepsilon$  – внутренняя энергия,  $\mathbf{q}$  – вектор теплового потока также с КГД-поправками,  $Q$  – объемная плотность источников тепла, например, джоулев нагрев.

Эти уравнения дополняются условиями неразрывности среды:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = \operatorname{div}(\mathbf{w}), \quad \mathbf{w} = \tau[(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} + \nabla p],$$

где  $\mathbf{w}$  – регуляризирующая поправка,  $\tau$  – параметр регуляризации,  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение.

В случае несжимаемой среды уравнение для импульса преобразуется в уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{\operatorname{Re}} \operatorname{div}[\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T] +$$

$$+ \operatorname{div}[\mathbf{w} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}] - \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nabla p,$$

где  $t$  – время,  $\operatorname{Re} = U_0 D_0 \rho / \mu_0$  – число Рейнольдса,  $(\cdot \otimes \cdot)$  – прямое произведение векторов,  $U_0$  – максимальная скорость на входе в систему,  $D_0$  – гидравлический диаметр,  $\mu_0$  – динамическая вязкость среды. Для расчета давления используется уравнение

$$\Delta p = \frac{1}{\tau} \operatorname{div}(\mathbf{u}) - \operatorname{div}[(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u}],$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа. Уравнение энергии преобразуется в уравнение теплопроводности:

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}(\rho c_V T + p)) + \operatorname{div}(\mathbf{q}) =$$

$$= (\mathbf{P} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} + Q.$$

Граничные условия для гидродинамических уравнений формулируются стандартным спосо-

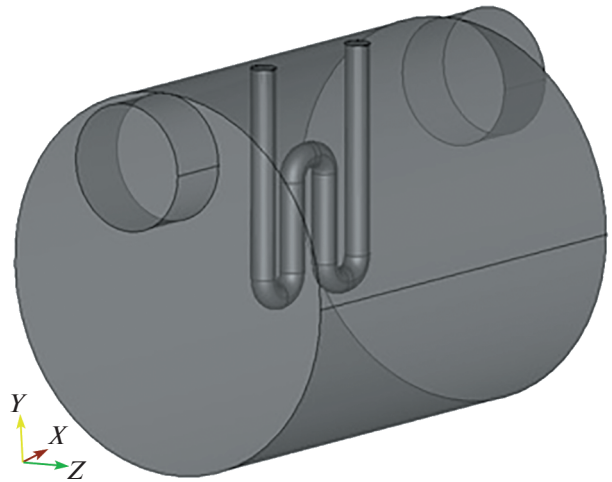


Рис. 1. Расчетная область.

бом [23–25], а именно: на входе в систему задается течение Пуазейля с температурой, равной температуре окружающей среды; на выходе задаются мягкие граничные условия; на стенках резервуара и на поверхности ТЭНа используются условия прилипания. Также на стенках резервуара задаются условия теплообмена с окружающей средой, на тепловыделяющем элементе – фиксированная температура.

Электромагнитная часть в квазистационарном варианте описывается следующими безразмерными уравнениями электростатики с заданным однородным и постоянным внешним магнитным полем с вектором магнитной индукции  $\mathbf{B}$ :

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_E, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi,$$

где  $\mathbf{E}$  – вектор напряженности электрического поля,  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $\varphi$  – электростатический потенциал,  $\rho_E$  – плотность зарядов, возникающая при химических реакциях в среде и изменяющаяся в результате разделения ионов и катионов электромагнитным полем [14]. Граничные условия для уравнений электростатики берутся в виде условий Дирихле на потенциал электрического поля.

В рамках расчета диффузионных и химических процессов в очищаемой среде на стадии осаждения рассматриваются следующие уравнения конвекции-диффузии-реакции (КДР) для концентраций  $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$  и  $\text{CO}_2$  (помечены индексами 1 и 2):

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) = w_i,$$

$$\mathbf{v}_i = D_i \nabla C_i - \mu_i \mathbf{F} C_i, \quad i = 1, 2.$$

Здесь  $\mathbf{v}_i$  – вектор диффузионной скорости, учитывающий также действие силы Лоренца  $\mathbf{F} =$

$= \mathbf{E} + [\mathbf{u} \times \mathbf{B}]$ ,  $D_i$  и  $\mu_i$  – безразмерные коэффициенты диффузии и подвижности зарядов,  $w_i$  – объемные функции химических реакций. Здесь имеется ввиду, что концентрацию второго продукта реакции в объеме –  $\text{CaCO}_3$  (концентрация  $C_3$ ) отдельно рассчитывать нет необходимости (она совпадает с  $C_2$  по величине).

Если учесть, что основной процесс химического превращения примеси происходит вблизи ТЭНа, то функции  $w_i$  в основной части среды можно считать равными нулю, и учитывать их только в граничных условиях (см. ниже). В этом случае процесс осаждения  $\text{CaCO}_3$  на поверхности ТЭНа можно учесть с помощью обыкновенного дифференциального уравнения по времени, записанного для концентрации  $C_3$ :

$$\frac{\partial C_3}{\partial t} = w_1 = \alpha_1(C_3^0 - C_3)C_1(T - T_0),$$

где  $\alpha_1$  – безразмерная скорость реакции,  $C_3^0$  – максимальная концентрация накипи, после достижения которой образование накипи прекращается.

С учетом сказанного граничные условия для уравнений КДР выглядят следующим образом. На входе в резервуар задается начальная концентрация  $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$  (т.е.  $C_1 = C_1^0$ ), остальные компоненты во входном потоке отсутствуют ( $C_2 = 0$ ,  $C_3 = 0$ ). На поверхности ТЭНа выполняются условия:

$$\frac{\partial C_1}{\partial n} = -w_1, \quad \frac{\partial C_2}{\partial n} = +w_1.$$

На выходе из резервуара задаются мягкие граничные условия.

На третьей стадии процесса (во время промывки системы) в водной среде появляется четвертый компонент, например,  $\text{HCl}$  (концентрация  $C_4$ ). При его воздействии на осадок образуется продукт  $\text{CaCl}_2$  (концентрация  $C_5$ ), который отделяется от поверхности ТЭНа и в итоге вымывается из резервуара. Для описания данного процесса используются аналогичные предыдущим уравнения КДР с нулевой правой частью для концентраций  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_4$  и  $C_5$ . Образование молекул воды не учитывается ввиду принципа детального химического равновесия.

Граничные условия на ТЭНе на данной стадии записываются следующим образом:

$$\frac{\partial C_1}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial C_2}{\partial n} = +w_2, \quad \frac{\partial C_3}{\partial t} = -w_2, \quad \frac{\partial C_4}{\partial n} = -2w_2, \\ \frac{\partial C_5}{\partial n} = +w_2, \quad w_2 = \alpha_2 C_3 C_4 (T - T_0),$$

где  $\alpha_2$  – безразмерная скорость реакции восстановления.

На каждом этапе расчета дискретизация уравнений по пространству строилась с помощью метода конечного объема, в котором контрольный объемом совпадал с сеточным элементом. Пересчет по времени производился по явной схеме. Подробнее этот подход обсуждался в работах [19–21].

В данной работе акцент был поставлен на расчет решения на основе гидродинамической части задачи и моделирование процессов осаждения примеси и последующей промывке системы. Расчеты проводились на тетраэдральной сетке, содержащей 140 634 элемента (сетка получена посредством пакета Gmsh). Перейдем к описанию полученных расчетных данных.

На рис. 2 и 3 представлены распределения параметров установившегося течения (стадия 1) при числах Рейнольдса и Прандтля –  $Re = 100$ ,  $Pr = 10$ . Число Грасгофа принималось равным  $Gr = 0$ . Как видно из рисунков, рассчитанное распределение вектора скорости соответствует теоретическим представлениям о ламинарном характере течения.

На рис. 4 и 5 представлены результаты моделирования потока жесткой воды, насыщенной  $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$  (стадия 2) при параметрах  $D_1 = D_2 = 0.005$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $C_1^0 = 1$ ,  $C_3^0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 10$ . Они показывают, что большая часть исходного вещества  $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$  превратилась в продукт реакции  $\text{CaCO}_3$ , который образовался на нижней части поверхности ТЭНа. В результате осаждения наблюдается существенное снижение температуры ТЭНа в нижней части, что и является проблемой для дальнейшей эффективной работы очистной системы.

На рис. 6 показаны результаты расчетов пропускания раствора  $\text{HCl}$  через резервуар с загрязненным ТЭНом (стадия 3) при дополнительных параметрах  $D_4 = 0.005$ ,  $D_5 = 0.001$ ,  $\alpha_2 = 10$ , спустя 40 безразмерных единиц времени. Как видно из рисунка, в результате промывки значительная часть ТЭНа освободилась от накипи.

В заключение отметим, что в данной работе в рамках моделирования технологии замкнутого цикла очистки жесткой воды от солей кальция рассмотрены процессы образования твердых осадков на теплонагревательном элементе сложной геометрии и их последующего удаления раствором соляной кислоты. Математическая модель включает уравнения квазигидродинамики, электростатики и конвекции-диффузии-реакции. Численная методика моделирования базируется на применении метода конечных объемов на неструктурированных сетках. Проведенные трехмерные численные расчеты показали эволюцию загрязнения ТЭНа, при которой существенно падает эффективность теплоотдачи. В каче-

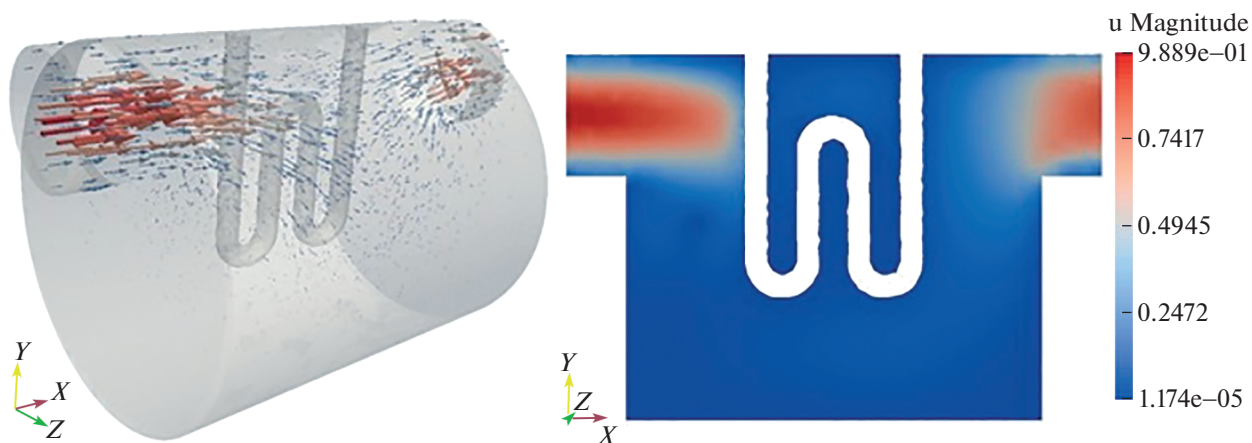


Рис. 2. Модуль скорости: общий вид (слева) и сечение  $Z = 0$  (справа).

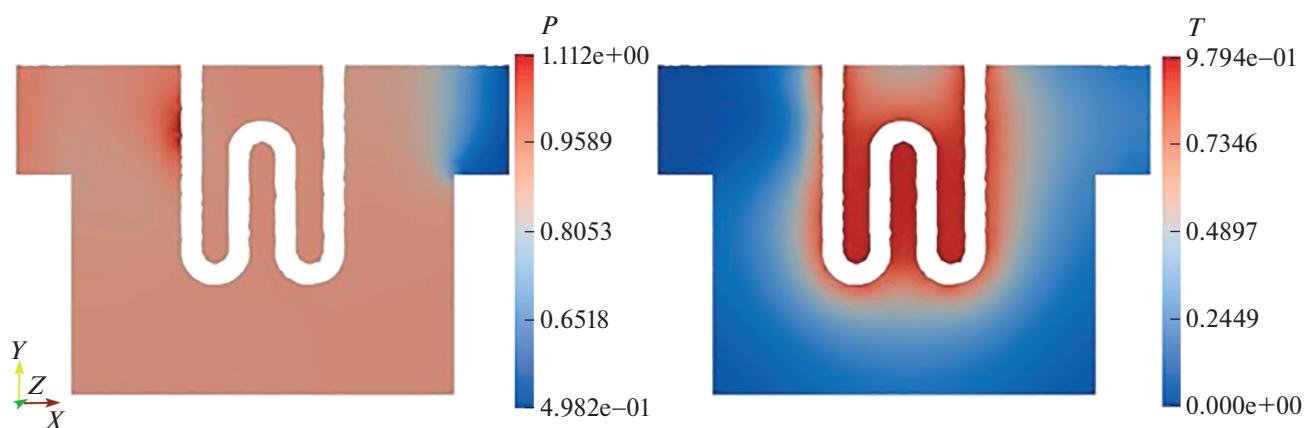


Рис. 3. Давление (справа) и температура (слева) в сечении  $Z = 0$ .

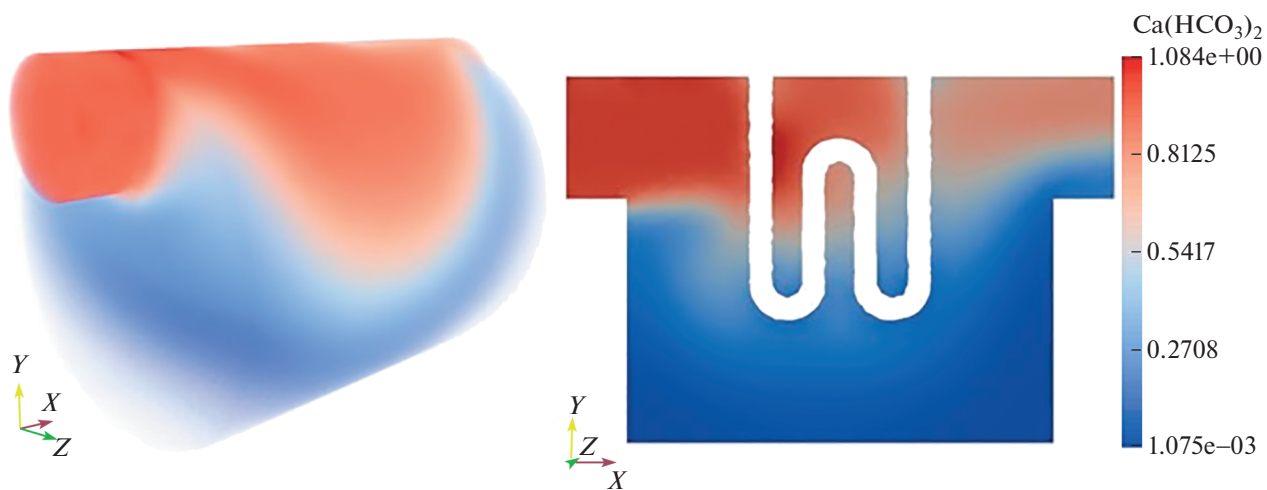


Рис. 4. Распределение  $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$  общий вид (слева) и в сечении  $Z = 0$  (справа).

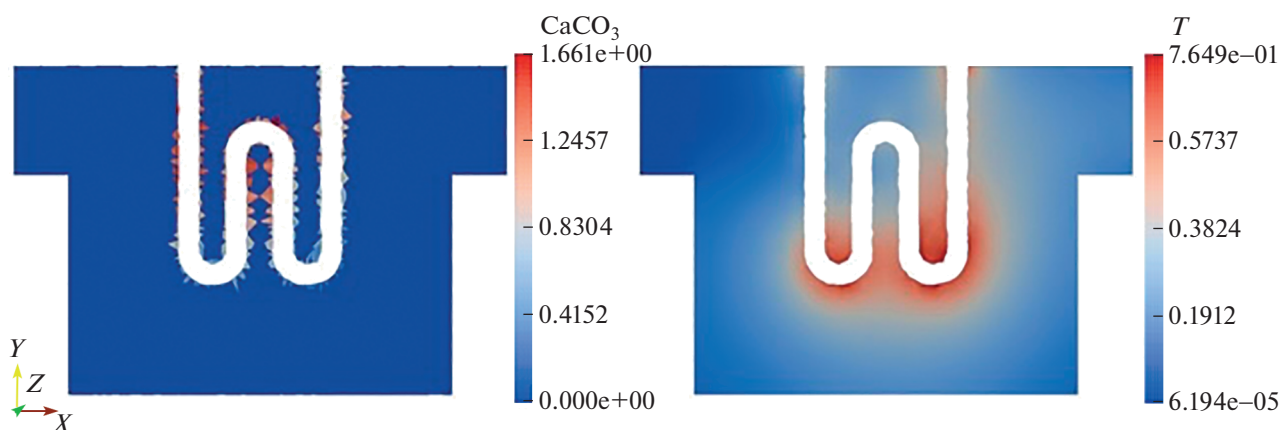


Рис. 5. Распределение  $\text{CaCO}_3$  (слева) и температуры (справа) в сечении  $Z = 0$ .

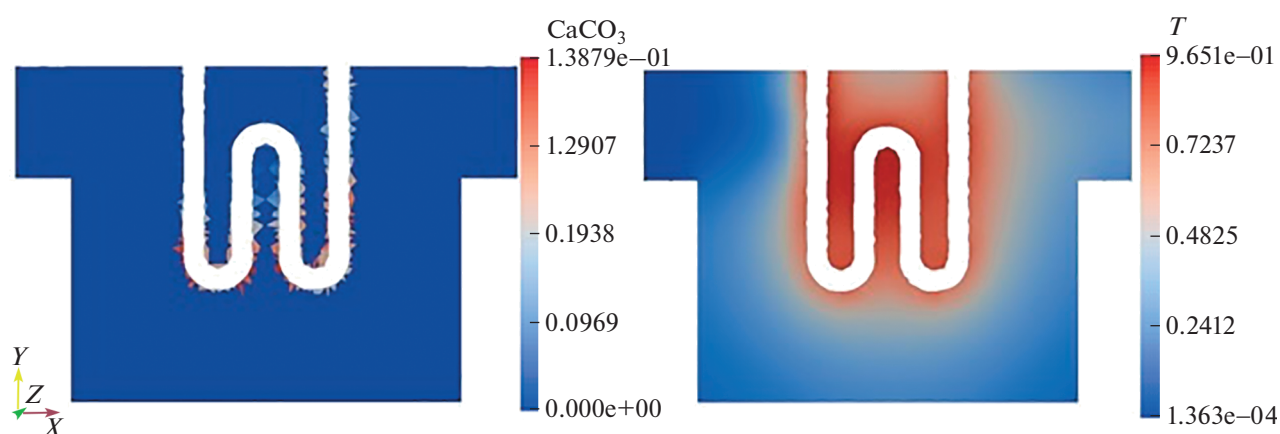


Рис. 6. Распределение  $\text{CaCO}_3$  (слева) и температуры (справа) в сечении  $Z = 0$  в результате промывки  $\text{HCl}$  в течение 40 безразмерных временных единиц.

стве восстановительного процесса была рассчитана промывка системы раствором соляной кислоты, в результате которой солевой осадок на ТЭНе был удален, а значение температуры на выходе из системы стало равным температуре ТЭНа.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елистратова Ю.В., Семиненко А.С., Минко В.А. Актуальность моделей загрязнения для диагностики состояния пластинчатых теплообменников. // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2020. № 10. С. 33–40. <https://doi.org/10.34031/2071-7318-2020-5-10-33-40>
2. Давидзон М.И. Образование накипи внутри трубок теплообменных устройств в условиях постоянной температуры стенки. // Теплоэнергетика. 2007. № 9. С. 61–64.
3. Присяжнюк В.А. Физико-химические основы предотвращения кристаллизации солей на теплообменных поверхностях // Сантехника, отопление, кондиционирование. 2003. № 10. С. 26–30.
4. Tatiana Kudryashova, Sergey Polyakov. Mathematical Modeling of Water Purification Process of Iron Containing Impurities. Proc. of The Tenth International Conference on Advanced Engineering Computing and Applications in Sciences. Published by IARIA XPS Press. pp. 35-40. Archived in the free access ThinkMind™ Digital Library ISSN: 2308-4499, ISBN: 978-1-61208-506-7, 2016.
5. Телин Н.В. Кинетика накипеобразования на поверхности теплообмена. Вестник Череповецкого государственного университета. 2015. № 8. С. 35–37.
6. Jitka MacAdam & Simon A. Parsons. Calcium carbonate scale formation and control. Reviews in Environmental Science and Bio/Technology 3: 159–169, 2004. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
7. Joshy N., Meera V. Scale Control on Pipe Materials: A Review, Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2020. H. Drück et al. (eds.), Green Buildings and Sustainable Engineering, Springer Transactions in Civil and Environmental Engineering. 2020. С. 421–429. [https://doi.org/10.1007/978-981-15-1063-2\\_35](https://doi.org/10.1007/978-981-15-1063-2_35)
8. Sergěj Y.M.H. Seepma, Sergio E. Ruiz-Hernandez, Ger-not Nehrke, Karline Soetaert, Albert P. Philipse, Bonny W.M. Kuipers, and Mariette Wolthers. Controlling  $\text{CaCO}_3$  Particle Size with  $\{\text{Ca}^{2+}\};\{\text{CO}_3^{2-}\}$  Ratios in Aqueous Environments. // Crystal Growth & Design. 2021. 21 (3). С. 1576–1590. <https://doi.org/10.1021/acs.cgd.0c01403>

9. Пучина Г.Р., Рагулин В.В., Телин А.Г., Алимбекова С.Р., Бахтизин Р.Н., Волошин А.И., Докичев В.А. Современная практика предупреждения и удаления солей-отложений. // Нефтегазовое Дело. 2020. Т. 18. № 2. С. 72–80.  
<https://doi.org/10.17122/ngdelo-2020-2-72-80>
10. Dobersek D., Goricanec D. Influence of Water Scale on Thermal Flow Losses of Domestic Appliances. // International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2007. Issue 2. V. 1. P. 55–61.
11. Линников О.Д. Механизм формирования осадка при спонтанной кристаллизации солей из пересыщенных водных растворов. // Успехи химии. 2014. Т. 83. № 4. С. 343–364.
12. Mosin O., Ignatov I. Magnetic Water Treatment for Elimination Scaling Salts. // Journal of Medicine, Physiology and Biophysics. Vol 11, ISSN 2422-8427. 2015. P. 86–100.
13. Saksono N., Gozan M., Bismo S., Krisanti E., Widaningrum R., Song S.K. Effect of magnetic field on calcium carbonate precipitation: Ionic and particle mechanisms. // Korean J Chem Eng. 2008. 25(5). С. 1145–1150.
14. Kudryashova T.A., Polyakov S.V., Tarasov N.I. Mathematical Modelling of Electrophysical Water Treatment // Defect and Diffusion Forum, vol. 412, Trans Tech Publications, Ltd., 12 Nov. 2021. P. 149–162.  
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/ddf.412.149>
15. Камалетдинов Р. С. Обзор существующих методов предупреждения и борьбы с солеотложением в погружном оборудовании // Инженерная практика. 2009. № 12. С. 12–15.
16. Zarga Y., BenBoubaker H., Ghaffour N., Elfil H. Study of calcium carbonate and sulfate co-precipitation // Chemical Engineering Science 96. 2013. С. 33–41.
17. Mohanty C.P., Sahu J., Mahapatra S.S. Thermal-structural Analysis of Electrical Discharge Machining Process // Procedia Engineering. Vol. 51. 2013, P. 508–513.
18. Ming W., Zhang G., Li H., Guo J., Zhang Z., Huang Yu, Chen Z. A hybrid process model for EDM based on finite-element method and Gaussian process regression // International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2014. V. 74. P. 1197–1211.
19. Tarasov N., Polyakov S., Kudryashova T. Computation of 3D Water Flows by the Double Potential Method for the Simulation of Electromagnetic Water Purification // EPJ Web of Conferences 226, 02021, 2020.  
<https://doi.org/10.1051/epjconf/202022602021>
20. Kudryashova T., Polyakov S., Tarasov N. Application of the Double Potential Method to Simulate Incompressible Viscous Flows. In: Rodrigues J. et al. (eds.) Computational Science – ICCS 2019. Lecture Notes in Computer Science, vol 11539. Springer, Cham. 2019. С. 568–579.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-030-22747-0\\_42](https://doi.org/10.1007/978-3-030-22747-0_42)
21. Поляков С.В., Кудряшова Т.А., Тарасов Н.И. Метод двойного потенциала для моделирования внутреннего течения вязкой несжимаемой жидкости. // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 494. № 1. С. 73–76.  
<https://doi.org/10.31857/S2686954320050410>
22. Поляков С.В., Кудряшова Т.А., Тарасов Н.И. Применение многомасштабного подхода для моделирования сорбционной фильтрации воздуха. // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 500. № 5. С. 92–96.  
<https://doi.org/10.31857/S268695432105009X>
23. Chetverushkin B.N. Kinetic schemes and quasi-gasdynamic system of equations. Barcelona: CIMNE, 2008. 298 p.
24. Elizarova T.G. Quasi-Gas Dynamic Equations. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2009. 286 p.
25. Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: ТвГУ, 2016, 222 с.

## MODELING FORMATION AND REMOVAL OF LIMESCALE IN WATER TREATMENT SYSTEMS

N. I. Tarasov<sup>a</sup>, T. A. Kudryashova<sup>a</sup>, and S. V. Polyakov<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

Modeling the processes of formation and removal of limescale formed in water treatment systems is considered to develop closed-loop technologies. Solid deposits that form over time on the surfaces of heat exchangers damage the heating elements of cleaning systems and neutralize their cleaning function. Various approaches are used to remove sedimentary fractions, but the most effective of them are based on mathematical modeling. In the work, a computational experiment was carried out, reproducing the main stages of water purification from solid impurities. For this purpose, the process of formation of solid deposits on a heating element of complex geometry was studied. The flow modelling is based on the quasi-hydrodynamic model supplemented with convection-diffusion-reaction equations. The performed three-dimensional calculations show the evolution of the heating element contamination, leading to a drop in the efficiency of its heat transfer and a decrease in the quality of cleaning. In addition, the process of restoring the characteristics of the heating element when pumping hydrochloric acid through the system is investigated in the calculations. The results illustrate the reduction of the sedimentary layer on the heating element and the restoration of its cleaning function.

**Keywords:** mathematical modeling lime scale formation in water purification systems, quasi-hydrodynamic model, convection-diffusion-reaction equations

УДК 517.977.5

## УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ СКАЛЯРНОМ УПРАВЛЕНИИ ДВУМЯ НЕСИНХРОННЫМИ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

© 2022 г. Л. М. Берлин<sup>1,\*</sup>, член-корреспондент РАН А. А. Галяев<sup>1,\*\*</sup>

Поступило 25.02.2022 г.

После доработки 12.03.2022 г.

Принято к публикации 12.04.2022 г.

Рассматривается задача оптимального управления двумя несинхронными осцилляторами при наличии скалярного ограничения на управление по критерию быстродействия в задаче разгона из состояния покоя. Особенность данной задачи заключается в том, что в терминальный момент фазовые координаты второго осциллятора снова становятся равными нулю. Для заданного количества неизвестных моментов переключения, определяющих оптимальное релейное управление, предложены необходимые условия экстремума в виде нелинейных матричных равенств. Исследование необходимых и достаточных условий экстремума позволило в фазовом пространстве первого осциллятора найти аналитический вид кривой, соответствующей классу двух переключений управления, которая также отделяет множества достижимости класса трех переключений управления.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, гармонический осциллятор, принцип максимума Понтрягина, ограниченное скалярное управление

**DOI:** 10.31857/S2686954322040051

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи с недостатком ресурса управления, когда размерность вектора управления меньше или значительно меньше размерности пространства состояний физической системы, имеют широкое применение на практике. Колебательные системы, такие как электрические контуры, механические системы, квантовые осцилляторы и другие физические системы, управляемые одной внешней силой, являются примерами подобных систем. Математические модели, описывающие динамику различных систем, представляют собой системы несинхронных осцилляторов с ограничением не только на размерность вектора управления, но и на его максимальную амплитуду [1–5]. В результате управления такими системами зачастую необходимо, чтобы одна из подсистем как можно быстрее пришла в требуемое положение, тогда как вторая система должна остаться в состоянии покоя в терминальный момент. Если в каждый осциллятор системы входит отдельное управление, тогда задача оптимального быстродействия может быть решена путем рассмотрения

отдельных одиночных осцилляторов, для которых В.Г. Болтянским в [6] был приведен синтез оптимального управления. Впервые подобные задачи оптимального управления системой многих маятников были исследованы академиком РАН Ф.Л. Черноусько в [1], где приведено доказательство существования решения задач об оптимальном по быстродействию гашении колебаний и об оптимальном по быстродействию разгоне системы маятников с различными частотами колебаний, и указано, что данная задача при некотором соотношении частот осцилляторов была исследована С.А. Михайловым. Условия экстремума в классе  $2N - 1$  переключений управления, где  $N$  – количество осцилляторов, приведены в [5], а синтез асимптотически оптимального управления для системы из произвольного числа линейных осцилляторов при общем ограниченном управлении был представлен в работах [7, 8]. Одним из ключевых вопросов при поиске решения является исследование достижимости и управляемости системы двух несинхронных осцилляторов с ограниченным и скалярным управлением, что может быть показано как на основе геометрической теории управления [9], а именно: теоремы Суссмана-Джарджевича и теоремы Пуанкаре, так и с использованием результата классической теории оптимального управления, теоремы ЛаСалля-Конта [10]. В настоящей работе будут предло-

<sup>1</sup> Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: berlin.lm@phystech.edu

\*\*E-mail: galaev@ipu.ru

жены условия экстремума, при помощи которых удается описать множество достижимости первого осциллятора в системе двух несинхронных осцилляторов, а также выделить в нем подмножества, соответствующие различным классам переключений управления.

## 2. ЗАДАЧА СКАЛЯРНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВУМЯ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

### 2.1. Уравнения ПМП

Рассматривается следующая задача быстрогодействия для системы, состоящей из двух несинхронных осцилляторов:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ -w_1^2 q_1 \\ p_2 \\ -w_2^2 q_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$x = (q_1, p_1, q_2, p_2)^T \in \mathbb{R}^4 = M, \quad u \in [-\varepsilon, \varepsilon] = U,$$

$$x(0) = x_0 = (0, 0, 0, 0)^T, \quad (2)$$

$$x(T_0) = x_{T_0} = (q_1^{T_0}, p_1^{T_0}, 0, 0)^T,$$

$$T_0 = \int_0^{T_0} dt \rightarrow \min. \quad (3)$$

Для исследования задачи (1)–(3) и получения решения применяется принцип максимума Понтрягина (ПМП). Поскольку динамика (1) описывается следующей системой векторных полей

$$\mathcal{F}(x, u) = \{f_1 + uf_2 \mid u \in U\}, \quad (4)$$

$$f_1 = p_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial q_2} - w_1^2 q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} - w_2^2 q_2 \frac{\partial}{\partial p_2}, \quad (5)$$

$$f_2 = \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_2},$$

то упростить запись условий принципа максимума можно, введя неканонические координаты, построенные по векторным полям управляемой системы и их коммутаторам. Соответствующие линейные на слоях кокасательного расслоения гамильтонианы имеют вид

$$h_i(\lambda) = \langle \lambda, f_i(x) \rangle, \quad (6)$$

где  $\lambda$  – элемент кокасательного пространства. Укороченный гамильтониан системы векторных полей (4) записывается в неканонических координатах в следующем виде

$$h_u(\lambda) = \langle \lambda, f_1 + uf_2 \rangle = h_1 + uh_2, \quad (7)$$

а условие максимума представляется в виде максимизации (7) по всем допустимым управлениям

$$h_1 + uh_2 \rightarrow \max_{u \in |e|}. \quad (8)$$

Установить соответствие между скобками Пуассона гамильтонианов (6) и скобками Ли соответствующих векторных полей (5) можно при помощи следующей леммы [9]

**Лемма 1.** Пусть  $f_i, f_j \in \text{Vec}(M), i \neq j$ . Тогда:

$$\bullet \{h_{f_i}, h_{f_j}\} = h_{[f_i, f_j]},$$

$$\bullet [\bar{h}_{f_i}, \bar{h}_{f_j}] = \bar{h}_{[f_i, f_j]}.$$

Согласно Лемме 1, можно выписать векторные поля, составляющие алгебру Ли, используя следующие ненулевые скобки Ли:

$$f_3 = [f_1, f_2] = -\frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\partial}{\partial q_2},$$

$$f_4 = [f_1, f_3] = -w_1^2 \frac{\partial}{\partial p_1} - w_2^2 \frac{\partial}{\partial p_2},$$

$$f_5 = [f_1, f_4] = w_1^2 \frac{\partial}{\partial q_1} + w_2^2 \frac{\partial}{\partial q_2}.$$

Скобка Ли  $[f_1, f_5]$  в свою очередь является линейной комбинацией векторных полей  $f_2, f_4$ .

$$[f_1, f_5] = w_1^4 \frac{\partial}{\partial p_1} + w_2^4 \frac{\partial}{\partial p_2} =$$

$$= (-w_1^2 w_2^2) f_2 + (-w_1^2 - w_2^2) f_4.$$

Для системы (4) выполнена теорема Суссмана-Джарджевича о сильной достижимости.

**Теорема 1** (Суссман-Джарджевич). *Аналитическая система  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  обладает свойством сильной достижимости в точке  $x$  тогда и только тогда, когда размерность идеала алгебры Ли, порожденной системой, совпадает с размерностью пространства состояний*

$$\dim \mathcal{L}_0(x) = n.$$

В силу линейной независимости векторов  $f_2, f_3, f_4, f_5$ , их линейная оболочка будет являться следующим идеалом алгебры Ли

$$\mathcal{L}_0(x) = \text{span}\{f_2, [f_1, f_2], [f_1, [f_1, f_2]], [f_1, [f_1, [f_1, f_2]]]\},$$

$\dim \mathcal{L}_0(x) = n$ . Поэтому справедлива следующая лемма.

**Лемма 2.** Система (1) с ограниченным и скалярным управлением является сильно достижимой.

Выполнение рангового условия управляемости Калмана и равенство нулю собственных значений структурной матрицы динамики системы позволяют применить теорему ЛаСалля-Конти [11] для доказательства леммы

**Лемма 3.** Система (1) с ограниченным и скалярным управлением является глобально управляемой.

Далее, согласно Лемме 1, вычисляются соответствующие скобки Пуассона для системы ПМП:

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \{h_u, h_1\} = \{h_1 + uh_2, h_1\} = \\ &= u\{h_2, h_1\} = -u\{h_1, h_2\} = -uh_3, \\ \dot{h}_2 &= \{h_u, h_2\} = \{h_1 + uh_2, h_2\} = \{h_1, h_2\} = h_3, \\ \dot{h}_3 &= \{h_u, h_3\} = \{h_1 + uh_2, h_3\} = \{h_1, h_3\} + u\{h_2, h_3\} = h_4, \\ &\text{т.к. } [f_2, f_3] = 0, \\ \dot{h}_4 &= \{h_u, h_4\} = \{h_1 + uh_2, h_4\} = \{h_1, h_4\} + u\{h_2, h_4\} = h_5, \\ &\text{т.к. } [f_2, f_4] = 0, \\ \dot{h}_5 &= \{h_u, h_5\} = \{h_1 + uh_2, h_5\} = \\ &= \{h_1, h_5\} + u\{h_2, h_5\} = (-w_1^2 w_2^2)h_2 + (-w_1^2 - w_2^2)h_4. \end{aligned}$$

Объединяя все полученные компоненты, формируется вертикальная система ПМП:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -uh_3, \\ \dot{h}_2 = h_3, \\ \dot{h}_3 = h_4, \\ \dot{h}_4 = h_5, \\ \dot{h}_5 = (-w_1^2 w_2^2)h_2 + (-w_1^2 - w_2^2)h_4. \end{cases} \quad (9)$$

2.2. Исследование вертикальной подсистемы

Последние четыре уравнения системы (9) составляют следующую систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{\bar{h}} = A\bar{h}. \quad (10)$$

После замены:  $a = -w_1^2 w_2^2, b = -w_1^2 - w_2^2$ , матрица  $A$  примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Л е м м а 4. Система (10) не имеет первых интегралов в виде линейной комбинации  $h_2, h_3, h_4, h_5$ , но обладает двумя первыми интегралами в виде квадратичных форм:

$$V_1 = \frac{a}{2}h_3^2 - \frac{b}{2}h_4^2 + \frac{1}{2}h_5^2 - ah_4h_2, \quad (11)$$

$$V_2 = -\frac{a}{2}h_2^2 - \frac{1}{2}h_4^2 - \frac{b}{2}h_3^2 + h_5h_3. \quad (12)$$

С л е д с т в и е 1. Из двух первых интегралов (11), (12) можно составить две неотрицательно определенные квадратичные формы:

$$V_1^+ = 2V_1 + 2w_1^2 V_2 = w_2^2(w_1^2 h_2 + h_4)^2 + (h_3 w_1^2 + h_5)^2, \quad (13)$$

$$V_2^+ = 2V_1 + 2w_2^2 V_2 = w_1^2(w_2^2 h_2 + h_4)^2 + (h_3 w_2^2 + h_5)^2. \quad (14)$$

Для поиска решения системы (10) вычисляются собственные значения матрицы, которые равны

$$\lambda_{1,3} = \pm w_1 i,$$

$$\lambda_{2,4} = \pm w_2 i.$$

Поэтому решение  $\bar{h}$  системы (10) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \bar{h} &= c_1 \begin{pmatrix} \cos(w_1 t) \\ -w_1 \sin(w_1 t) \\ -w_1^2 \cos(w_1 t) \\ w_1^3 \sin(w_1 t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin(w_1 t) \\ -w_1 \cos(w_1 t) \\ w_1^2 \sin(w_1 t) \\ w_1^3 \cos(w_1 t) \end{pmatrix} + \\ &+ c_3 \begin{pmatrix} \cos(w_2 t) \\ -w_2 \sin(w_2 t) \\ -w_2^2 \cos(w_2 t) \\ w_2^3 \sin(w_2 t) \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -\sin(w_2 t) \\ -w_2 \cos(w_2 t) \\ w_2^2 \sin(w_2 t) \\ w_2^3 \cos(w_2 t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно (8), вид оптимального управления определяется функцией  $h_2(t)$ , которая называется функцией переключения управления, следующим образом

$$u^*(t) = \varepsilon \text{sign}(h_2(t)) = \varepsilon \text{sign}(C_1 \cos(w_1 t) + C_2 \sin(w_1 t) + C_3 \cos(w_2 t) + C_4 \sin(w_2 t)). \quad (15)$$

Эта функция определяется однозначно и не может быть равна нулю на целом интервале, за исключением изолированных точек, что приводит к отсутствию особых режимов управления.

3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Управление  $u^*(t)$ , согласно (15), является релейным. Переключения управления происходят в моменты времени  $t_i, i = 1, K - 1$ . Пусть  $\tau_n$  — длительности  $n$ -го интервала постоянства управления,  $n = 1, K$ . Тогда  $u^*(t)$  с  $K - 1$  переключением и  $K \in \mathbb{N}$  интервалами постоянства управления имеет вид, представленный на рис. 1.

Решение системы (1) для двух несинхронных осцилляторов с граничными условиями (2) записывается следующим образом [1, 12]:

$$\begin{cases} q_1(T_0) = \frac{1}{w_1} \int_0^{T_0} \sin(w_1(T_0 - \tau)) u(\tau) d\tau = q_1^{T_0}, \\ p_1(T_0) = \int_0^{T_0} \cos(w_1(T_0 - \tau)) u(\tau) d\tau = p_1^{T_0}, \\ q_2(T_0) = \frac{1}{w_2} \int_0^{T_0} \sin(w_2(T_0 - \tau)) u(\tau) d\tau = 0, \\ p_2(T_0) = \int_0^{T_0} \cos(w_2(T_0 - \tau)) u(\tau) d\tau = 0. \end{cases} \quad (16)$$



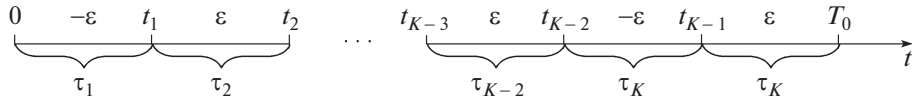


Рис. 1. Вид оптимального управления  $u^*(t)$ .

Учитывая вид оптимального управления  $u^*(t)$ , можно записать решение системы (16) при различных значениях  $K$ . Стоит также отметить, что управление на первом интервале может быть выбрано как  $\epsilon$ , так и  $-\epsilon$ , для чего вводится параметр  $k$ , равный 0 и 1 соответственно.

$$\begin{cases} 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \cos \left( w_1 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) - \cos \left( w_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) = \\ = (-1)^{K-1} + (-1)^{k+1} \frac{q_1^{T_0} w_1^2}{\epsilon}, \\ 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \sin \left( w_1 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) - \sin \left( w_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) = (-1)^k \frac{p_1^{T_0} w_1}{\epsilon}, \\ 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \cos \left( w_2 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) - \cos \left( w_2 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) = (-1)^{K-1}, \\ 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \sin \left( w_2 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) - \sin \left( w_2 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Функция  $h_2(t)$  равна нулю в моменты времени  $t_i, i = \overline{1, K-1}$ , когда происходят переключения управления.

$$h_2(t_i) = C_1 \cos(w_1 t_i) + C_2 \sin(w_1 t_i) + C_3 \cos(w_2 t_i) + C_4 \sin(w_2 t_i) = 0, \quad i = \overline{1, K-1}. \quad (18)$$

Уравнение (18) в матричной форме имеет вид

$$(C, \Omega_i) = 0, \quad i = \overline{1, K-1}, \quad (19)$$

где

$$C = (C_1, C_2, C_3, C_4), \quad \Omega_i = \begin{pmatrix} \cos(w_1 t_i) \\ \sin(w_1 t_i) \\ \cos(w_2 t_i) \\ \sin(w_2 t_i) \end{pmatrix}.$$

Объединяя все уравнения (19), можно записать следующую систему

$$\begin{pmatrix} \cos(w_1 t_1) & \cos(w_1 t_2) & \dots & \cos(w_1 t_{K-2}) & \cos(w_1 t_{K-1}) \\ \sin(w_1 t_1) & \sin(w_1 t_2) & \dots & \sin(w_1 t_{K-2}) & \sin(w_1 t_{K-1}) \\ \cos(w_2 t_1) & \cos(w_2 t_2) & \dots & \cos(w_2 t_{K-2}) & \cos(w_2 t_{K-1}) \\ \sin(w_2 t_1) & \sin(w_2 t_2) & \dots & \sin(w_2 t_{K-2}) & \sin(w_2 t_{K-1}) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \vec{0}. \quad (20)$$

Поскольку в моменты  $t_i = \sum_{n=1}^i \tau_n$  выполнено (19), то условие невырожденности вектора  $C$  эквивалентно  $K-4$  равенствам

$$\det(\Omega_i, \Omega_{i+1}, \Omega_{i+2}, \Omega_{i+3}) = 0, \quad i = \overline{1, K-4}. \quad (21)$$

Справедлива следующая теорема

**Теорема 2** (Необходимые условия экстремума). Любое решение задачи (1)–(3) в классе релейных управлений (15) удовлетворяет совместной системе (17) и (21).

**Замечание 1.** В случае, когда управление имеет три переключения, а число интервалов постоянства управления равно четырем, для нахождения интервалов  $\tau_i$  достаточно использовать только уравнения системы (17).

**Замечание 2.** В случае, когда  $K-1=4$ , получаем следующее условие невырожденности вектора  $C$

$$\det \begin{pmatrix} \cos(w_1 t_1) & \cos(w_1 t_2) & \cos(w_1 t_3) & \cos(w_1 t_4) \\ \sin(w_1 t_1) & \sin(w_1 t_2) & \sin(w_1 t_3) & \sin(w_1 t_4) \\ \cos(w_2 t_1) & \cos(w_2 t_2) & \cos(w_2 t_3) & \cos(w_2 t_4) \\ \sin(w_2 t_1) & \sin(w_2 t_2) & \sin(w_2 t_3) & \sin(w_2 t_4) \end{pmatrix} = 0. \quad (22)$$

Если  $K-1 > 4$ , получаем  $C_{K-1}^4$  условий невырожденности вектора  $C$

$$\det \begin{pmatrix} \cos(w_1 t_{m_1}) & \cos(w_1 t_{m_2}) & \cos(w_1 t_{m_3}) & \cos(w_1 t_{m_4}) \\ \sin(w_1 t_{m_1}) & \sin(w_1 t_{m_2}) & \sin(w_1 t_{m_3}) & \sin(w_1 t_{m_4}) \\ \cos(w_2 t_{m_1}) & \cos(w_2 t_{m_2}) & \cos(w_2 t_{m_3}) & \cos(w_2 t_{m_4}) \\ \sin(w_2 t_{m_1}) & \sin(w_2 t_{m_2}) & \sin(w_2 t_{m_3}) & \sin(w_2 t_{m_4}) \end{pmatrix} = 0, \quad (23)$$

$m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq m_4; \quad m_1, m_2, m_3, m_4 = \overline{1, K-1}$ ,

и для нахождения интервалов  $\tau_i$  совместно с (17) можно использовать  $K - 4$  уравнений из набора (23).

Используя теорему 2, можно вычислить все требуемые моменты переключения  $t_i, i = \overline{K-1}$ . Полученные значения позволят определить вектор  $C$  как вектор ядра соответствующего линейного отображения в (20). Отсюда следует еще одно необходимое условие экстремума, которое формулируется в виде следующей леммы.

**Лемма 5.** *Экстремальное управление  $u^*(t)$  с вектором  $C$ , полученным из (20) для случая  $K - 1$  переключения, содержит ровно  $K - 1$  переключение управления.*

**Предложение 1** (Достаточные условия оптимальности). *Существует единственный (с точностью до множителя) вектор  $C$ , определяющий по теореме 1 оптимальное управление  $u^*(t)$ .*

#### 4. ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ ПЕРВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Для иллюстрации полученных теоретических результатов приводится пример, когда управление имеет два, три и четыре переключения для различных конечных состояний первого осциллятора  $(q_1^T, p_1^T)$ . Выбраны следующие параметры системы:

$$\varepsilon = 0.4, \quad w_1 = 1, \quad w_2 = 1.4.$$

В [10] при исследовании зависимости количества классов переключений от значения  $\varepsilon$  наблюдалось обнуление интервала  $\tau_3$  в классе четырех переключений. Обнуление внутреннего интервала приводит к классу двух переключений, для которого справедлива следующая лемма

**Лемма 6.** *В классе двух переключений для интервалов постоянства управления  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  справедливы функциональные зависимости*

$$\begin{aligned} \cos(w_2\tau_1) &= \cos(w_2\tau_3), \\ \text{т.е. } \tau_1 &= \tau_3 + \frac{2\pi n}{w_2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \cos(w_2\tau_2) &= \frac{2\cos^2(w_2\tau_1) - 4\cos(w_2\tau_1) + 3}{5 - 4\cos(w_2\tau_1)}. \end{aligned}$$

Различные классы управления представлены на рис. 2. Голубая и красная области отвечают классу трех переключений с начальным управлением  $\varepsilon, -\varepsilon$  соответственно. Класс четырех переключений представлен оранжевой и зеленой областями с управлением на начальном интервале  $-\varepsilon, \varepsilon$  соответственно. Классы трех переключений управления разделяются между собой параметрическими кривыми, полученными по лемме 5. Обнуление внутреннего интервала управления в

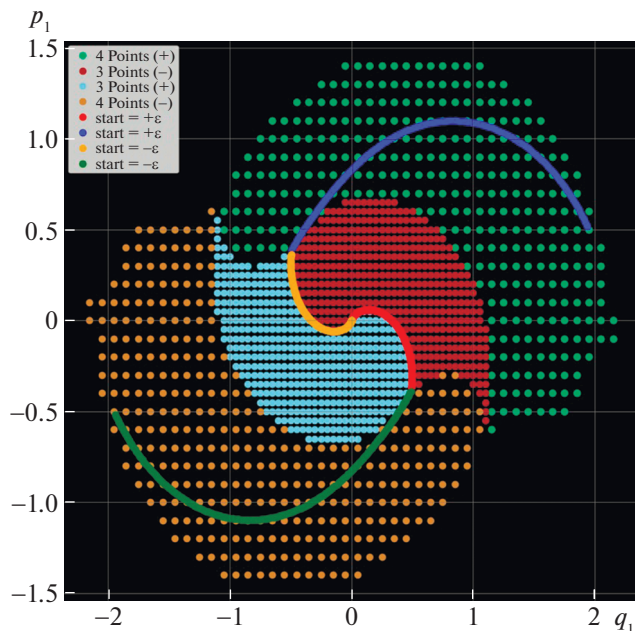


Рис. 2. Точки фазовой плоскости первого осциллятора.

классе четырех переключений приводит к кривым (синяя и зеленая), соответствующим классу двух переключений при различных начальных управлениях. Обнуление крайнего интервала управления в классе трех переключений также приводит к классу двух переключений (оранжевая и красная кривые).

#### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Необходимые условия экстремума задачи оптимального быстрогодействия в системе, состоящей из двух несинхронных осцилляторов, сформулированные в виде Теоремы 1, позволяют найти моменты переключения в любом классе переключений управления. Сформулирована Лемма 5, связывающая получаемое управление с выбранным классом переключений. Для заданных частот и фиксированного ограничения на управление построено множество достижимости на фазовой плоскости первого осциллятора для классов трех и четырех переключений. Получены аналитические выражения для описания кривой класса двух переключений, которая разделяет области трех переключений с различным управлением на начальном интервале. Предложенный в работе подход может быть распространен на системы, состоящие из произвольного числа осцилляторов, в том числе и с учетом произвольных терминальных условий второго и следующих осцилляторов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
2. Andresen B., Hoffmann K.H., Nulton J., Tsirlin A., Salamon P. Optimal control of the parametric oscillator // European Journal of Physics 2011. V. 32. No. 3. P. 827–843.
3. Hoffmann K.H., Andresen B., Salamon P. Optimal control of a collection of parametric oscillators // Physical Review E 2013. V. 87. Iss. 6:062106.
4. Andresen B., Salamon P., Hoffmann K.H., Tsirlin A.M. Optimal Processes for Controllable Oscillators // Automation and Remote Control 2018. V. 79. No. 12. P. 3–15.
5. Галаяев А.А. Скалярное управление группой несинхронных осцилляторов // Автоматика и телемеханика 2016. № 9. С. 3–18.
6. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
7. Федоров А.К., Овсеевич А.И. Асимптотически оптимальное управление в форме синтеза для системы линейных осцилляторов // Доклады Академии наук 2013. Том 452 №. 3. С. 266–270.
8. Fedorov A.K., Ovseevich A.I. Asymptotic control theory for a system of linear oscillators // Moscow Mathematical Journal 2016. V. 16. Iss. 3. P. 561–598.
9. Сачков Ю.Л. Введение в геометрическую теорию управления. М.: Ленанд, 2021.
10. Берлин Л.М., Галаяев А.А., Лысенко П.В. Геометрический подход к задаче оптимального скалярного управления двумя несинхронными осцилляторами // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, 2022, С. 1–9. (в печати)
11. La Salle J.P. The Time Optimal Control Problem // Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations (AM-45) 1960. V. 5. P. 1–24.
12. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005.

## EXTREMUM CONDITIONS FOR LIMITED SCALAR CONTROL OF TWO NON-SYNCHRONOUS OSCILLATORS IN THE TIME-OPTIMAL CONTROL PROBLEM

L. M. Berlin<sup>a</sup> and Corresponding member of the RAS A. A. Galyaev<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Institute of Control Sciences of the RAS, Moscow, Russian Federation

The time-optimal control problem of two non-synchronous oscillators with a restriction on a scalar control in the problem of acceleration from rest is considered. For a given number of unknown switching moments that determine optimal relay control, the necessary extremum conditions in the form of nonlinear matrix inequalities are proposed. The study of the necessary and sufficient conditions of the extremum made it possible to find an analytical form of the curve corresponding to the class of two switches in the phase space of the first oscillator.

*Keywords:* optimal control, harmonic oscillator, Pontryagin's Maximum Principle, limited scalar control

УДК 517.977

## ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПОВОРОТЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ ВНУТРЕННИХ СИЛ

© 2022 г. Г. М. Розенблат<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН В.Ф. Журавлёвым

Поступило 18.04.2022 г.

После доработки 10.05.2022 г.

Принято к публикации 17.05.2022 г.

В статье получен результат, касающийся решения задачи о максимальном повороте твердого тела на заданном интервале времени путем перемещения подвижной внутренней массы. Движения массы реализуются при помощи приложения ограниченной силы. Ранее рассматривались аналогичные задачи, в которых перемещения внутренней массы предполагались кинематическими с ограничениями на скорость точки. Полученный результат описывается аналитическими и легко проверяемыми формулами, оптимальная траектория подвижной массы является спиралью, которая накручивается на центр масс твердого тела с возрастающей до бесконечности частотой.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, принцип максимума Л.С. Понтрягина, динамика твердого тела

DOI: 10.31857/S2686954322040154

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача о максимальном угле поворота за заданное время плоского твердого тела при помощи ограниченных внутренних сил, реализуемых в процессе движения внутренней точечной массы.

Более точная постановка задачи следующая. Рассматривается плоское твердое тело, которое может совершать плоское движение и на которое не действуют никакие внешние силы. Внутри этого тела имеет возможность двигаться (в плоскости тела при помощи актюаторов) материальная точка. Перемещение точки осуществляется посредством управляющей внутренней силы, которая ограничена по модулю и может быть ориентирована в произвольном направлении в плоскости движения системы. На координаты и скорости точки (относительно твердого тела) не накладываются никакие ограничения (кроме условий дифференцируемости). Требуется выбрать такой допустимый закон изменения управляющей силы, чтобы повернуть тело на максимальный угол за заданное время.

Ранее подобного рода модели (твердое плоское тело, взаимодействующее с подвижной внутренней массой) рассматривались в качестве при-

меров, иллюстрирующих закон сохранения кинетического момента системы материальных точек (см., например, т. 2, пункт 333 на стр. 38 трактата П. Аппеля [1], учебник Я.В. Татаринова [2], задача 45 на стр. 226). Отметим, однако, что движение подвижной массы (насекомого, по терминологии П. Аппеля из [1]) рассматривалось с кинематической точки зрения, т.е. относительная скорость подвижной массы считалась заданной функцией времени (в частности, постоянной). В учебнике [2] ситуация аналогичная. При формулировке таких задач указывалось, что система “тело+точка” в начальный момент находилась в покое, а затем, в момент  $t = 0$ , точка начинала двигаться с некоторой постоянной относительной скоростью  $v = v_0$ . Ясно, что переход точки из состояния  $v = 0$  в состояние  $v = v_0$  не может произойти мгновенно и реализуется при помощи приложения к точке некоторой ограниченной силы. Это обстоятельство приводит к необходимости определенной коррекции как формулировок, так и полученных в [1, 2] ответов к указанным задачам.

В настоящее время аналогичные модели рассматриваются для исследования управляемых робототехнических устройств, предназначенных для перемещения тел при помощи подвижных внутренних масс (см. работы Ф.Л. Черноусько [3–5], А.М. Шматкова [6]). В этих работах также рассматриваются кинематические перемещения внутренних масс, для которых управлением является вектор скорости, реализующий необходимое

<sup>1</sup>Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Москва, Россия

\*E-mail: gr51@mail.ru

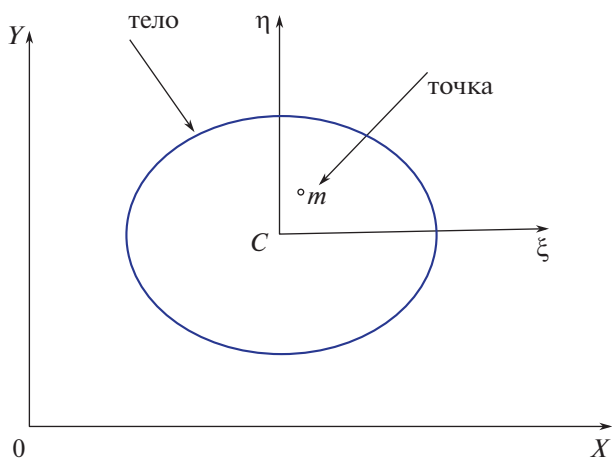


Рис. 1. Тело с движущейся внутренней точечной массой.

оптимальное перемещение объекта (капсюльно-го робота).

В настоящей работе рассмотренные выше модели применяются для оптимального поворота объекта при помощи подвижной внутренней массы, перемещение которой осуществляется ограниченной по модулю управляющей силой.

## 2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ, УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На рис. 1 изображено сечение твердого тела, центр масс которого находится в точке  $C$ .  $Oxy$  – неподвижная система координат,  $C\xi\eta$  – подвижная поступательная система координат, связанная с центром масс тела. Предполагаем, что оси этих систем координат все время параллельны друг другу. Внутри тела находится материальная точка  $m$ , которая имеет возможность двигаться посредством приложения внутренней силы  $F = (F_x, F_y)^T$ . Для модуля силы  $F$  должно соблюдаться следующее ограничение

$$F_x^2 + F_y^2 \leq F_0^2. \quad (2.1)$$

Пусть  $m$  – масса точки  $m$ ;  $M, J$  – масса тела и его момент инерции относительно центра масс  $C$  соответственно. Обозначим:

$x_C, y_C$  – координаты центра масс  $C$  тела в системе координат  $Oxy$ ;  $\varphi$  – угол поворота тела относительно неподвижной системы координат  $Oxy$ ;

$\xi, \eta$  – координаты точки  $m$  относительно подвижной системы  $C\xi\eta$ .

Учитывая, что при приложении к подвижной точке  $m$  силы  $F$ , на тело в той же точке пространства действует сила  $F' = -F$  (согласно третьему

закону Ньютона), запишем уравнения движения центра масс и уравнение кинетического момента тела относительно его центра масс.

$$M\ddot{x}_C = -F_x, \quad M\ddot{y}_C = -F_y, \quad J\ddot{\varphi} = \eta F_x - \xi F_y. \quad (2.2)$$

Движение точки  $m$  определяется уравнениями второго закона Ньютона.

$$m(\ddot{x}_C + \ddot{\xi}) = F_x, \quad m(\ddot{y}_C + \ddot{\eta}) = F_y. \quad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) получим три уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= \lambda F_x, & \ddot{\eta} &= \lambda F_y, & \ddot{\varphi} &= \mu (\xi \ddot{\eta} - \eta \ddot{\xi}), \\ \lambda &= \frac{M+m}{Mm}, & \mu &= \frac{1}{\lambda J}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Далее, для упрощения записи, будем полагать размерности системы единиц такими, что в (2.1) и (2.4)  $F_0 = 1, \lambda = 1, \mu = 1$ .

Третье уравнение в системе (2.4) можно проинтегрировать. Предполагая  $\dot{\varphi}(0) = 0$ , окончательно получаем следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= F_x, & \ddot{\eta} &= F_y, & \dot{\varphi} &= \xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi} + C \\ C &= -\dot{\xi}(0)\eta(0) + \xi(0)\dot{\eta}(0). \end{aligned} \quad (2.5)$$

В правой части полученного третьего уравнения в системе (2.5) добавлена константа  $C = -\dot{\xi}(0)\eta(0) + \xi(0)\dot{\eta}(0)$ , чтобы обеспечить выполнение условия  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Однако нетрудно показать, что эту константу, при решении рассматриваемой оптимальной задачи, можно опустить без ограничения общности.

Систему (2.5) перепишем в стандартной форме системы Коши, вводя обозначения

$$x_1 = \xi, \quad x_2 = \eta, \quad x_3 = \dot{\xi}, \quad x_4 = \dot{\eta}, \quad x_5 = \varphi. \quad (2.6)$$

Получаем систему дифференциальных уравнений в стандартной форме

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, & \dot{x}_2 &= x_4, & \dot{x}_3 &= F_x, \\ \dot{x}_4 &= F_y, & \dot{x}_5 &= x_2 x_3 - x_1 x_4. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для системы (2.7) ставится следующая задача оптимального управления.

Пусть заданы начальные условия  $x_i(0) = x_{i0}$ , ( $i = 1, 5$ ) и время  $t = T$ . Требуется определить такой закон изменения управляющих сил  $F_x, F_y$ , которые удовлетворяют ограничениям (2.1), и обеспечивают  $\max x_5(T) = \max \varphi(T)$ .

В классической формулировке задачи Л.С. Понтрягина последнее условие максимума можно заменить следующим

$$J = \int_0^T (x_2 x_3 - x_1 x_4) dt \rightarrow \max. \quad (2.8)$$

### 3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

В настоящем пункте приведены дифференциальные уравнения принципа максимума Л.С. Понтрягина для рассматриваемой оптимальной задачи и излагается полученный результат.

В соответствии с принципом максимума Л.С. Понтрягина [7], вводим сопряженные переменные  $p_k$  ( $k = 1, 5$ ), соответствующие фазовым переменным из (2.6), и гамильтониан  $H$  для исходной системы дифференциальных уравнений (2.7) по формуле

$$H = p_1 x_3 + p_2 x_4 + (p_3 F_x + p_4 F_y) + p_5 (x_2 x_3 - x_1 x_4). \quad (3.1)$$

Сопряженные переменные удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$\dot{p}_k = -\partial H / \partial x_k, \quad (k = 1, 5).$$

В данном случае, используя (3.1), получим уравнения

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= p_5 x_4, & \dot{p}_2 &= -p_5 x_3, \\ \dot{p}_3 &= -p_1 - p_5 x_2, & \dot{p}_4 &= -p_2 + p_5 x_1, & \dot{p}_5 &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из последнего уравнения системы (3.2) следует, что  $p_5 = \text{const} \geq 0$ . Тогда система (3.2) приобретает следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= p_5 x_4, & \dot{p}_2 &= -p_5 x_3, \\ \dot{p}_3 &= -p_1 - p_5 x_2, & \dot{p}_4 &= -p_2 + p_5 x_1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Согласно принципу максимума оптимальное управление  $F$  доставляет максимум функции  $H$  из (3.1), и при ограничениях (2.1) имеет вид

$$F_x = \frac{p_3}{\sqrt{p_3^2 + p_4^2}}, \quad F_y = \frac{p_4}{\sqrt{p_3^2 + p_4^2}}. \quad (3.4)$$

Кроме того, так как на конечные значения  $x_k(T)$ , ( $k = 1, 4$ ) не наложено никаких ограничений, должны быть выполнены условия трансверсальности

$$p_k(T) = 0, \quad (k = 1, 4). \quad (3.5)$$

Дифференцируя дважды последние два уравнения системы (3.3) и используя (2.7) и (3.4), получим следующие два уравнения для двух сопряженных переменных  $p_3, p_4$ :

$$\begin{aligned} \ddot{p}_3 &= -\lambda \frac{p_4}{\sqrt{p_3^2 + p_4^2}}, & \ddot{p}_4 &= \lambda \frac{p_3}{\sqrt{p_3^2 + p_4^2}}, \\ \lambda &= 2p_5 = \text{const} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, задача сводится к поиску решений системы 6-го порядка (3.6) на отрезке  $0 \leq t \leq T$ , которые удовлетворяют краевым условиям

$$p_3(T) = p_4(T) = 0. \quad (3.7)$$

Мы можем понизить на две единицы порядок системы (3.6), записав следующие два ее интеграла

$$\begin{aligned} p_3 \dot{p}_3 + p_4 \dot{p}_4 &= \frac{1}{2} (\dot{p}_3^2 + \dot{p}_4^2) + C_1, \\ -\dot{p}_4 \dot{p}_3 + \dot{p}_3 \dot{p}_4 &= \lambda \sqrt{p_3^2 + p_4^2} + C_2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные, определяемые начальными и конечными условиями для переменных  $p_3, p_4$ . Система (3.8) является уже системой 4-го порядка. Можно еще понизить порядок системы (3.8) на две единицы при помощи следующих замен

$$\begin{aligned} p_3 &= \rho \cos \alpha, & p_4 &= \rho \sin \alpha, \\ \dot{p}_3 &= v \cos \beta, & \dot{p}_4 &= v \sin \beta. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из (3.8) и (3.9), обозначая  $\gamma = \beta - \alpha$ , получаем следующие 4 уравнения первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v \cos \gamma, & \rho \dot{\alpha} &= v \sin \gamma, \\ \rho \dot{v} \cos \gamma - \rho v \dot{\beta} \sin \gamma &= \frac{1}{2} v^2 + C_1, \\ v^2 \dot{\beta} &= \lambda \rho + C_2, & (\gamma &= \beta - \alpha). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отсюда получаем замкнутую систему трех дифференциальных уравнений первого порядка относительно трех функций  $\{\rho, v, \gamma\}$  (уравнение для  $\beta$  “отщепляется”):

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v \cos \gamma, & v \rho \dot{\gamma} &= -v^2 \sin \gamma + \frac{\rho(\lambda \rho + C_2)}{v}, \\ \dot{v} \rho \cos \gamma &= \frac{\rho(\lambda \rho + C_2)}{v} \sin \gamma + \frac{v^2}{2} + C_1, \\ &(\sin \gamma \neq 0). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Если в системе (3.11) поделить второе и третье уравнения на первое и взять за независимое переменное функцию  $\rho$ , то получим систему второго порядка для двух переменных  $(v, \gamma)$ .

Таким образом, нам нужно найти такие решения системы (3.11) на отрезке  $0 \leq t \leq T$ , которые удовлетворяют краевому условию  $\rho(T) = 0$ , чтобы обеспечить условие трансверсальности (3.7). Аналитически эти решения удалось найти лишь в том частном случае, когда  $C_1 = C_2 = 0$ . Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Система (3.11) в случае  $C_1 = C_2 = 0$  имеет частное решение, которое дается соотношениями

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_0 = \pm \arcsin(1/\sqrt{I_0}) = \text{const}, \\ v(t) &= (\pm \sqrt{I_0} \lambda)^{1/3} [\rho(t)]^{2/3}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Справедливость утверждения 1 устанавливается непосредственной проверкой.

Далее, используя первые два уравнения системы (3.11) и соотношения (3.12), получим искомые

решения системы (3.6) как функции времени на отрезке  $0 \leq t \leq T$ :

$$\begin{aligned} p_3(t) &= p_*(1 - \tau)^3 \cos[\alpha_0 + \ln(1 - \tau)], \\ p_4(t) &= -p_*(1 - \tau)^3 \sin[\alpha_0 + \ln(1 - \tau)], \\ p_* &= \lambda T^3 / 10, \quad \tau = t/T, \\ \alpha_0 &= \text{const}, \quad \tau \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Используя формулы (3.6) и (3.13), получаем выражения для оптимальных управлений

$$\begin{aligned} F_x &= \cos[\alpha_0 + \ln(1 - \tau)], \\ F_y &= -\sin[\alpha_0 + \ln(1 - \tau)], \\ \tau &= t/T, \quad \alpha_0 = \text{const} \in [0, 2\pi], \quad \tau \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Подставляя функции из (3.14) в уравнения движения (2.7), находим соответствующие оптимальные траектории точки в системе координат  $C\xi\eta$  и максимальный угол поворота тела. Неложно получить, что эти траектории представляют собой спирали, закручивающиеся вокруг центра масс  $C$  бесконечное число раз. В конце этого процесса, при  $t \rightarrow T$ , направление управляющей силы  $F$  меняется с увеличивающейся до бесконечности частотой.

В формулах (3.14)  $\alpha_0$  – произвольная константа из интервала  $[0, 2\pi]$ . Используя (3.14), мы можем решить полную систему уравнений (2.7), (3.3) на отрезке  $0 \leq t \leq T$  и определить все те начальные условия  $x_k(0) = x_{k0}$ , ( $k = 1, 4$ ), при которых соблюдены условия трансверсальности  $p_k(T) = 0$ , ( $k = 1, 4$ ). Проводя элементарные выкладки, мы получаем следующий результат.

**Утверждение 2.** Если начальные условия в рассматриваемой задаче удовлетворяют следующим параметрическим соотношениям

$$\begin{aligned} x_{10} &= \xi(0) = \frac{T^2}{10}(\cos \alpha_0 + 3 \sin \alpha_0), \\ x_{20} &= \eta(0) = \frac{T^2}{10}(3 \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0), \\ x_{30} &= \dot{\xi}(0) = -\frac{T}{2}(\cos \alpha_0 + \sin \alpha_0), \\ x_{40} &= \dot{\eta}(0) = \frac{T}{2}(-\cos \alpha_0 + \sin \alpha_0), \\ \alpha_0 &\in [0, 2\pi], \end{aligned} \quad (3.15)$$

то при управляющих силах из (3.14) тело за время  $T$  повернется на максимальный угол. При этом оптимальные траектории спиралеобразно стремятся к точке

$$\xi(T) = \dot{\xi}(T) = \eta(T) = \dot{\eta}(T) = 0.$$

Справедливость утверждения 2 следует из принципа максимума Понтрягина и непосред-

ственного интегрирования системы уравнений (2.7), (3.3) при функциях  $F_x, F_y$ , вычисляемых по формулам (3.14).

**Замечание 1.** В силу однородности пространства в формулах (3.15) можно принять  $\alpha_0 = 0$ . Тогда искомые начальные условия будут такими

$$\begin{aligned} x_{10} &= \xi(0) = \frac{T^2}{10}, \quad x_{20} = \eta(0) = \frac{3T^2}{10}, \\ x_{30} &= \dot{\xi}(0) = -\frac{T}{2}, \quad x_{40} = \dot{\eta}(0) = -\frac{T}{2}. \end{aligned}$$

Оптимальное управление из (3.14) примет вид

$$\begin{aligned} F_x &= \cos[\ln(1 - s)], \quad F_y = -\sin[\ln(1 - s)], \\ s &= t/T, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Решая систему (2.5) при указанных начальных условиях и управлениях  $F_x, F_y$ , получим следующие формулы для координат и скоростей

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \xi(t) = \frac{T^2}{\sqrt{10}} \tau^2 \sin(\gamma_0 + \ln \tau), \\ x_2(t) &= \eta(t) = \frac{T^2}{\sqrt{10}} \tau^2 \cos(\gamma_0 + \ln \tau), \\ x_3(t) &= \dot{\xi}(t) = -\frac{T}{\sqrt{2}} \tau \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \tau\right), \\ x_4(t) &= \dot{\eta}(t) = -\frac{T}{\sqrt{2}} \tau \cos\left(\frac{\pi}{4} + \ln \tau\right), \\ \dot{x}_5(t) &= \phi(t) = -\frac{T^3}{10}(1 - \tau^3), \\ x_5(t) &= \varphi(t) = \frac{T^4}{10} \left( \frac{3}{4} - \tau + \frac{\tau^4}{4} \right), \\ \sin \gamma_0 &= \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \gamma_0 = \frac{3}{\sqrt{10}}, \\ \tau &= 1 - \frac{t}{T}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из (3.16) следует, что оптимальный угол поворота равен  $x_5(T) = \varphi(T) = \frac{3T^4}{40}$ , траектории точки по координатам и скоростям приближаются спиралеобразно в точку нуль. На рис. 2, 3 представлены графики траекторий точки, соответственно, по координатам и скоростям.

#### 4. РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТ

В предыдущем пункте решение задачи Л.С. Понтрягина осуществлялось в декартовых координатах. В настоящем пункте исходная задача оптимального управления решается с использованием полярных координат. Такой метод поз-

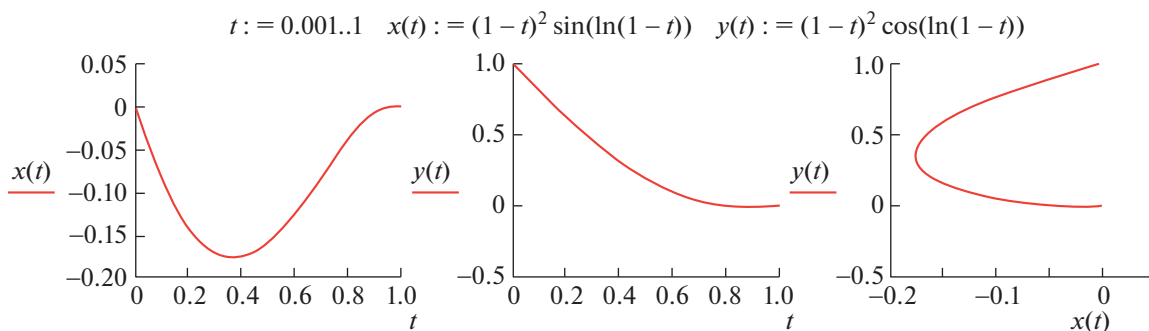


Рис. 2. Оптимальные траектории точки по координатам.

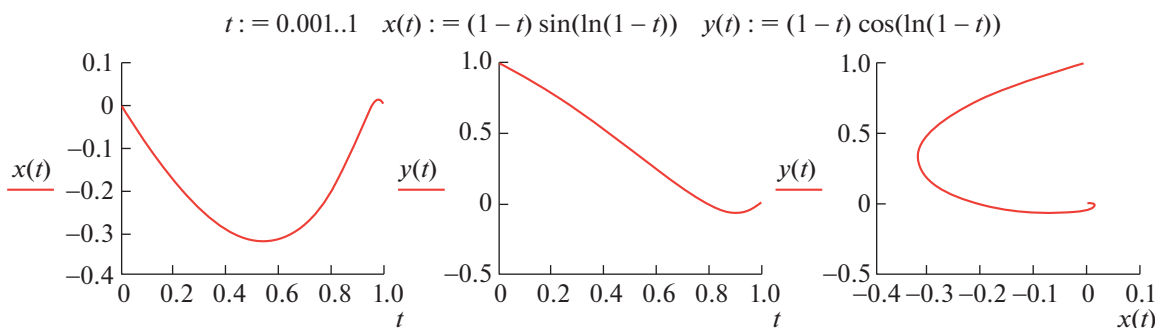


Рис. 3. Оптимальные траектории точки по скоростям.

воляет сократить выкладки и лучше прояснить механический смысл полученных результатов.

В системе (2.7) перейдем к полярным переменным по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \alpha, & x_2 &= \rho \sin \alpha, \\ x_3 &= v \cos \beta, & x_4 &= v \sin \beta. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Тогда система (2.7) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v \cos \gamma, & \rho \dot{\alpha} &= -v \sin \gamma, \\ \dot{v} &= F_v, & v \dot{\beta} &= F_\beta, & \dot{\phi} &= \rho v \sin \gamma. \end{aligned} \tag{4.2}$$

В (4.2) приняты следующие обозначения

$$\begin{aligned} F_v &= F_x \cos \beta + F_y \sin \beta, \\ F_\beta &= -F_x \sin \beta + F_y \cos \beta, & \gamma &= \alpha - \beta. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Согласно (4.3),  $F_v, F_\beta$  суть проекции управляющей силы  $F$  на оси скоростной системы координат (касательную и нормаль, соответственно, к траектории точки в декартовой системе координат  $C\xi\eta$ ). Ясно, что эти проекции также удовлетворяют ограничению

$$F_v^2 + F_\beta^2 \leq F_0^2 = 1. \tag{4.4}$$

Путем несложных преобразований можно сократить число уравнений в системе (4.2). В результате получаем следующую систему четырех диффе-

ренциальных уравнений для четырех переменных  $\{\rho, \gamma, v, \phi\}$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v \cos \gamma, & \dot{\gamma} &= -\frac{v}{\rho} \sin \gamma - \frac{1}{v} F_\beta, & \dot{v} &= F_v, \\ \dot{\phi} &= \rho v \sin \gamma, & t &\in [0, T]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Для системы (4.5) ставится аналогичная пункту 2 оптимальная задача. Найти функции  $F_v, F_\beta$ , которые при ограничениях (4.4) и заданных начальных условиях  $\{\rho(0), \gamma(0), v(0), \phi(0) = 0\}$  обеспечивают для решения системы (4.5)  $\max \phi(T)$ .

Используя принцип максимума Л.С. Понтрягина, вводим сопряженные переменные  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ , которые соответствуют исходным переменным  $\{\rho, \gamma, v, \phi\}$  в написанном порядке. Далее составляем гамильтониан, который запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} H &= v \left( p_1 \cos \gamma - \frac{p_2}{\rho} \sin \gamma + p_4 \rho \sin \gamma \right) + \\ &+ \left( -\frac{p_2}{v} F_\beta + p_3 F_v \right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

В соответствии с принципом максимума оптимальные функции  $F_v, F_\beta$  реализуют максимум функции  $H$  из (4.6), и при ограничениях (4.4) имеют вид



$$F_\beta = -p_2/p_0, \quad F_v = q/p_0, \quad (4.7)$$

где обозначено  $q = vp_3$ ,  $p_0 = \sqrt{p_2^2 + q^2}$ .

Из дифференциальных уравнений для сопряженных переменных следует, что  $\dot{p}_4 = 0$ , т.е.  $p_4 = \lambda = \text{const} \geq 0$ . Записывая уравнения для других сопряженных переменных, присоединяя к ним динамические уравнения (4.5) и используя равенства (4.7), получаем следующую систему шести дифференциальных уравнений для шести функций  $\{\rho, \gamma, v, p_1, p_2, p_3\}$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v \cos \gamma, & \dot{\gamma} &= -\frac{v}{\rho} \sin \gamma + \frac{p_2}{vp_0}, & \dot{v} &= \frac{q}{p_0}, \\ \dot{p}_1 &= -\left(\frac{p_2}{\rho^2} + \lambda\right)v \sin \gamma, \\ \dot{p}_2 &= v \left[ p_1 \sin \gamma + \left(\frac{p_2}{\rho} - \lambda\rho\right) \cos \gamma \right], \\ \dot{p}_3 &= -p_1 \cos \gamma + \left(\frac{p_2}{\rho} - \lambda\rho\right) \sin \gamma + \frac{p_2^2}{v^2 p_0}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$t \in [0, T]$ .

В системе (4.8) приняты обозначения из (4.7). Кроме того, так как на исходные переменные  $\rho(t)$ ,  $\gamma(t)$ ,  $v(t)$  при  $t = T$  не наложено никаких ограничений, то должны быть выполнены условия трансверсальности

$$p_1(T) = p_2(T) = p_3(T) = 0. \quad (4.9)$$

Таким образом, требуется решить систему дифференциальных уравнений (4.8) на отрезке  $0 \leq t \leq T$  при заданных начальных условиях для переменных  $\{\rho, \gamma, v\}$  и условиях трансверсальности (4.9) для переменных  $\{p_1, p_2, p_3\}$ . Для некоторых начальных условий это удалось сделать аналитически.

Перейдем в системе (4.8) к независимой переменной  $\rho$ . Для этого поделим обе части всех уравнений, начиная со второго, на первое уравнение. Получим систему пяти уравнений для пяти переменных  $\{\gamma, v, p_1, p_2, p_3\}$  (производная по  $\rho$  обозначается штрихом)

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{\text{tg}\gamma}{\rho} + \frac{p_2}{v^2 p_0 \cos \gamma}, & v' &= \frac{q}{v p_0 \cos \gamma}, \\ p_1' &= -\left(\frac{p_2}{\rho^2} + \lambda\right) \text{tg}\gamma, & p_2' &= p_1 \text{tg}\gamma + \frac{p_2}{\rho} - \lambda\rho, \\ p_3' &= -\frac{1}{v} \left[ p_1 - \left(\frac{p_2}{\rho} - \lambda\rho\right) \text{tg}\gamma \right] + \frac{p_2^2}{v^3 p_0 \cos \gamma}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Система (4.10) имеет два интеграла

$$p_1^2 + \left(\frac{p_2}{\rho} + \lambda\rho\right)^2 = h^2 = \text{const}, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} v \left( p_1 \cos \gamma - \frac{p_2}{\rho} \sin \gamma + \lambda\rho \sin \gamma \right) + \frac{p_0}{v} = H = \text{const}, \\ p_0 = \sqrt{p_2^2 + q^2}, \quad q = vp_3. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Интеграл (4.11) получается непосредственно из третьего и четвертого уравнений системы (4.10). Интеграл (4.12) следует из сохранения значения функции Гамильтона (4.6) при значениях  $F_v, F_\beta$  из (4.7) в силу уравнений (4.8). Константы  $h, H$  в (4.11) и (4.12) определяются заданными начальными условиями для  $\{\rho, \gamma, v\}$  и условиями трансверсальности (4.9).

Благодаря интегралу (4.11), можно понизить порядок системы (4.10). Введем вместо  $p_1, p_2$  новую переменную  $\sigma$  по формулам

$$p_1 = h \sin \sigma, \quad p_2 = \rho(h \cos \sigma - \lambda\rho), \quad \sigma \in [0, 2\pi]. \quad (4.13)$$

Тогда интеграл (4.11) соблюдается автоматически, а система (4.10) будет эквивалентна следующим четырем уравнениям для четырех переменных  $\{\gamma, \sigma, v, q\}$ , ( $q = vp_3$ )

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{\text{tg}\gamma}{\rho} + \frac{p_2}{v^2 p_0 \cos \gamma}, & v' &= \frac{q}{v p_0 \cos \gamma}, \\ \sigma' &= -\frac{\text{tg}\gamma}{\rho}, & q' &= -p_1 + \left(\frac{p_2}{\rho} - \lambda\rho\right) \text{tg}\gamma + \frac{p_0}{v^2 \cos \gamma}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

В уравнениях (4.14)  $p_1, p_2$  даются формулами (4.13), а  $p_0, q$  определяются обозначениями из (4.7).

Введем новую переменную  $p$  по формуле

$$q = vp_3 = pp_2 = p\rho(h \cos \sigma - \lambda\rho). \quad (4.15)$$

Тогда имеем  $p_0 = |p_2| \sqrt{1 + p^2}$ , и система уравнений (4.14) примет вид

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{\text{tg}\gamma}{\rho} + \frac{\text{sgn } p_2}{v^2 \cos \gamma \sqrt{1 + p^2}}, \\ v' &= \frac{p \text{sgn } p_2}{v \cos \gamma \sqrt{1 + p^2}}, & \sigma' &= -\frac{\text{tg}\gamma}{\rho}, \\ p_2 p' &= -h \sin \sigma - p h \sin \sigma \text{tg}\gamma + \\ &+ (h \cos \sigma - 2\lambda\rho)(\text{tg}\gamma - p) + \frac{|p_2| \sqrt{1 + p^2}}{v^2 \cos \gamma}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Рассмотрим такие начальные условия, для которых  $h = 0$ . В этом случае из интеграла (4.11) следует, что

$$p_1 \equiv 0, \quad p_2 = -\lambda\rho^2. \quad (4.17)$$

Уравнения (4.16) приобретают вид

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\rho} - \frac{1}{v^2 \cos\gamma \sqrt{1+p^2}}, \\ v' &= -\frac{p}{v \cos\gamma \sqrt{1+p^2}}, \\ -\lambda \rho^2 p' &= (-2\lambda\rho)(\operatorname{tg}\gamma - p) + \frac{\lambda \rho^2 \sqrt{1+p^2}}{v^2 \cos\gamma}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Далее полагаем  $u = v^2$ . Тогда система (4.18) примет вид

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\rho} - \frac{1}{u \cos\gamma \sqrt{1+p^2}}, \quad u' = -\frac{2p}{\cos\gamma \sqrt{1+p^2}}, \\ p' &= \frac{2}{\rho}(\operatorname{tg}\gamma - p) - \frac{\sqrt{1+p^2}}{u \cos\gamma}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Из формулы (4.12) для рассматриваемых начальных условий получим следующий интеграл системы (4.19)

$$2\rho\sqrt{u} \sin\gamma + \frac{\rho^2}{\sqrt{u}} \sqrt{1+p^2} = H = \text{const.} \quad (4.20)$$

Уравнения (4.19) имеют стационарные решения  $\gamma = \gamma_0, p = p_0, u = v^2 = k\rho$ , ( $k > 0$ ), для которых выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\gamma_0 &= \pm 1/2, \quad p_0 = \pm 1, \\ k &= -\frac{2p_0}{(\sqrt{1+p_0^2}) \cos\gamma_0}, \quad v = \sqrt{k\rho}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Эти решения удовлетворяют также интегралу (4.20) при  $H = 0$ . Так как  $k > 0$ , то из (4.21) получим

$$\begin{aligned} p &= p_0 = \pm 1, \quad \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\gamma_0 = \pm 1/2, \\ \cos\gamma_0 &= \mp 2/\sqrt{5}, \quad \sin\gamma_0 = -1/\sqrt{5}, \quad k = \sqrt{10}/2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Отметим, что в силу условий трансверсальности (4.9), формул (4.17) и обозначений (4.15), имеем  $\rho(T) = 0$ ,  $v(T) = \sqrt{k\rho(T)} = 0$ . В результате приходим к решениям, полученным в пункте 2.

**З а м е ч а н и е 2.** Нетрудно установить, используя (4.7), (4.15) и первое равенство из (4.22), что оптимальная сила  $F$  удовлетворяет соотношениям  $|F_v| = |F_\beta| = \sqrt{2}/2$ . Таким образом, сила  $F$  является постоянной по модулю (равным единице) и всегда направлена под углом  $45^\circ$  к касательной траектории подвижной точки в системе  $C\xi\eta$ . Эта сила является “следящей” по скорости точки. Отметим, что в монографии В.Ф. Журавлёва и Д.М. Климова [8] (см. пункт 3.5.2 на стр. 115) рассматривалась задача о “следящей” силе по позиции точки (сила была также постоянна по модулю и всегда перпендикулярна радиусу-вектору точки). Спиралеобразные траектории движения точ-

ки, полученные в монографии [8], вполне аналогичны траекториям в настоящей работе.

**З а м е ч а н и е 3.** В работе [9] численно исследовалась задача об оптимальной раскрутке плоской двухмассовой системы, где управлением являлся ограниченный внешний момент, приложенный к одному из тел.

**З а м е ч а н и е 4.** Аналитические выражения для оптимальных траекторий в рассматриваемой задаче удалось получить лишь для достаточно узкого класса начальных условий. При этом оказалось, что оптимальные траектории подвижной массы в конце интервала управления по спиралам приходят с нулевой предельной скоростью в центр масс тела. Весьма вероятно, что аналогичный эффект будет наблюдаться и для других начальных условий. Однако для доказательства этого факта потребуются дополнительные численно-аналитические исследования решений приведенных в статье дифференциальных уравнений.

**З а м е ч а н и е 5.** При исследовании, редукции и поиске первых интегралов дифференциальных уравнений настоящей статьи использовались идеи и методы, которые были развиты в работах [10, 11].

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает свою благодарность академику РАН В.Ф. Журавлёву за поддержку и внимание к работе, а также академику РАН Ф.Л. Черноуьско и всем участникам руководимого им семинара за ценные и конструктивные замечания к настоящей работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апель П.* Теоретическая механика. Т. 2: Динамика системы. Аналитическая механика. Пер. с фр. / Под науч. ред. С.М. Тарга. Предисл. В.Ф. Журавлёва и Г.М. Розенблата. Изд. 2-е, дополн. М.: ЛЕНАНД, 2021. 504 с.
2. *Татаринов Я.В.* Лекции по классической динамике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 296 с.
3. *Chernousko F.L.* Optimal Control of Two-Dimensional Motions of a Body by a Movable Mass. Preprints of the IX Vienna Intern. Conf. on Mathematical Modelling (MATHMOD). Vienna, February 21–23, 2018. Pap. WeD4.2. Vienna, 2018. P. 253–256.
4. *Черноуьско Ф.Л.* Оптимальное управление движением двухмассовой системы // Доклады Академии наук. 2018. Т. 480. № 5. С. 528–532.
5. *Черноуьско Ф.Л.* Изменение ориентации твердого тела при помощи вспомогательной массы // Доклады Российской академии наук. Физика. Технические науки. 2020. Т. 490. С. 79–81.
6. *Шматков А.М.* Поворот тела за кратчайшее время перемещением точечной массы // Доклады Академии наук. 2018. Т. 481. № 5. С. 498–502.
7. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптималь-

- ных процессов. М.: 1961. Государственное издательство физико-математической литературы. 391 с.
8. *Klimov D.M. and Zhuravlev V.Ph.* Group-Theoretic Methods in Mechanics and Applied Mathematics. Taylor & Francis. 2002. 230 p.
  9. *Решмин С.А.* Применение метода Ньютона при решении краевых задач принципа максимума на примере задачи об оптимальном раскручивании двухмассовой системы // Modern European Researches. 2021. V. 1. № 2. P. 114–122.
  10. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем. // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
  11. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. № 1. С. 95–101.

## ON OPTIMAL RIGID BODY ROTATION WITH INTERNAL FORCES APPLICATION

**G. M. Rozenblat**

*Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI), Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.Ph. Zhuravlev

The article describes the result obtained for the problem of a rigid body's maximum rotation in a given time interval by moving a movable internal mass. The mass movement is achieved by applying limited force. Previously, similar problems were considered in which the displacements of internal mass were assumed to be kinematic with restrictions on the point's speed. The obtained result is described by analytical, easily verifiable formulas. The optimal trajectory of the moving mass is a spiral that coils around the center of mass of a rigid body with a frequency increasing to infinity.

*Keywords:* optimal control, Pontryagin's maximum principle, rigid body dynamics

УДК 519.62

## ТРАЕКТОРИЯ НАБЛЮДАТЕЛЯ, ОТСЛЕЖИВАЮЩЕГО ДВИЖЕНИЕ ОБЪЕКТА ВОКРУГ ВЫПУКЛЫХ ПРЕПЯТСТВИЙ В $\mathbb{R}^2$ И $\mathbb{R}^3$

© 2022 г. Академик РАН В. И. Бердышев<sup>1,\*</sup>

Поступило 28.04.2022 г.

После доработки 14.05.2022 г.

Принято к публикации 28.05.2022 г.

Автономный объект, движущийся в условиях наблюдения с постоянной по величине скоростью по кратчайшему пути, обходит упорядоченную совокупность попарно непересекающихся выпуклых множеств. Задача наблюдателя состоит в поиске траектории движения такой, что в каждый момент времени он наблюдает объект, находится на заданном расстоянии от него и движется с возможно малой по величине скоростью. В работе предлагаются варианты траекторий движения наблюдателя с указанием скоростного режима.

*Ключевые слова:* навигация, автономный аппарат, траектория, наблюдатель

**DOI:** 10.31857/S268695432204004X

1. Автономный объект  $t$  движется с постоянной по величине скоростью  $V_t$  по кратчайшей траектории  $\mathcal{T}_t$ , последовательно огибающей выпуклые попарно непересекающиеся множества из заданного набора  $\{G_i\}_1^k$ . Порядок обхода множеств диктуется требованием минимума длины траектории  $\mathcal{T}_t$ . Начальная и конечная точки  $t_*, t^*$  траектории  $\mathcal{T}_t$  лежат вне  $\cup G_i$ . Задача наблюдателя  $f = f_\tau$  – поиск траектории  $\mathcal{T}_f$ , позволяющей ему двигаться с возможно малой скоростью  $V(f_\tau)$  и держать объект  $t = t_\tau$  в поле зрения в каждый момент времени  $\tau$  на заданном фиксированном расстоянии  $\delta > 0$ , позволяющей, в частности, реализовать взаимно однозначное отображение  $t \rightarrow f(t)$ ,  $t \in \mathcal{T}_t$ ,  $f(t) \in \mathcal{T}_f$ , т.е. указать вектор наблюдения  $t - f(t)$ . В работе предлагаются варианты траектории  $\mathcal{T}_f$  с указанием скоростного режима  $V(f)$  на разных ее участках.

Траектория объекта состоит (см. рис. 1) из набора дуг  $\Delta_i = \widehat{t_i, \bar{t}_i} \subset \partial G_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), и касательных к ним отрезков  $\Lambda_i = [\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}]$  ( $i = 0, \dots, k; \bar{t}_0 = t_*, \underline{t}_{k+1} = t^*$ ), где  $\partial G$  – граница множества  $G$ .

Наблюдателю приходится искать способы движения, учитывающие специфику слежения за объектом, преодолевающим дуги  $\Delta_i$  и отрезки  $\Lambda_i$ .

2. Случай пространства  $\mathbb{R}^2$ . Считаем, что соседние множества  $G_i, G_{i+1}$  разделяются прямой  $\overline{\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}}$ , содержащей точки  $\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}$ .

Простейший способ слежения за объектом, двигающимся по траектории  $\mathcal{T}_t$  – движение наблюдателя по траектории

$$\mathcal{T}_f = \left\{ f = t \pm \delta \frac{V_t}{|V_t|} : t \in \mathcal{T}_t \right\}, \quad (1)$$

вперед или за объектом с переменным вектором наблюдения  $\frac{V_t}{|V_t|}$  с величиной скорости, зависящей от кривизны траектории  $\mathcal{T}_t$ . Эта скорость может принимать большие значения даже в случае гладкой траектории. В самом деле, представив фрагменты траекторий  $\mathcal{T}_t$  и  $\mathcal{T}_f$  графиками функций  $t(\tau), f(\tau)$ , зависящих от времени  $\tau$ , получим выражение

$$V(f_\tau) = [1 + f'(\tau)^2]^{\frac{1}{2}} = \left\{ 1 + \left[ t'(\tau) \pm \delta \frac{t''(\tau)}{(1 + t'(\tau)^2)^{\frac{3}{2}}} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

<sup>1</sup> Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия  
\*E-mail: bvi@imm.uran.ru

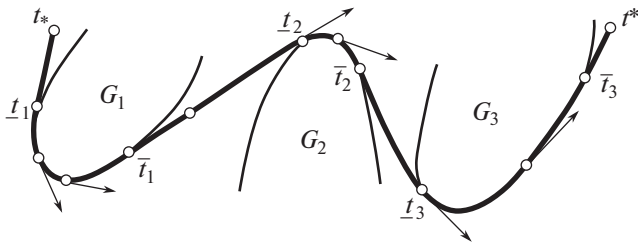


Рис. 1. На рисунке тонкими линиями отмечены границы множеств  $G_i$ , жирной линией изображена траектория  $\mathcal{T}_t$ , короткими отрезками – векторы скорости  $V(t)$ .

выгодна ему лишь, когда дуга  $\Delta_2$  имеет малую кривизну. Сказанное справедливо для любого вектора наблюдения

$$b = (1 - \lambda) \frac{V(\underline{t}_1)}{\|V(\underline{t}_1)\|} + \lambda \frac{\underline{t}_2 - \bar{t}_1}{\|\underline{t}_2 - \bar{t}_1\|} \quad (0 < \lambda < 1)..$$

В случае  $i > 1$  для слежения за объектом, преодолевающим дугу  $\Delta_i$ , предлагается (см. рис. 2 для  $i = 2$ ) два варианта траектории  $\mathcal{T}_f$ :

2б) дуга  $\mathcal{T}_f^{i,i+1}$ , составленная из фрагментов двух дуг

$$\mathcal{T}_f^{b_j} \quad (j = i, i + 1), \quad \text{где} \quad b_j = \frac{(\underline{t}_{j+1} - \bar{t}_j)}{\|\underline{t}_{j+1} - \bar{t}_j\|},$$

а именно

$$\mathcal{T}_f^{i,i+1} = (\widehat{\underline{t}_i, f_{i,i+1}}) \cup (\widehat{f_{i,i+1}, \bar{t}_i}),$$

где  $f_{i,i+1} = \mathcal{T}_f^{b_i} \cap \mathcal{T}_f^{b_{i+1}}$ .

2с)  $\mathcal{T}_f^{i,i+1}$  – совокупность точек  $f$  на отрезках  $[t, q]$ ,  $f - t = \delta$ , где  $q = \overline{\underline{t}_{i-1}, \underline{t}_i} \cap \overline{\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}}$ ,  $t \subset \partial G_i$ ,  $(t, q) \cap G_i = \emptyset$ .

В случае 2б) векторами наблюдения являются  $(1 - \lambda)b_i + \lambda b_{i+1}$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ), а в случае 2с) – векторы  $t - f$ . Нетрудно видеть, что  $V(f_\tau) \leq V_t$ . Если отрезки  $\Lambda_{i-1}, \Lambda_i$  параллельны, то наблюдатель движется по дуге  $\mathcal{T}_f^{b_i}$ .

Рассмотрим задачу наблюдения за объектом, движущимся по отрезку  $\Lambda_i$  после преодоления им дуги  $\Delta_i$  в предположении, что дуга  $\Delta_{i+1}$  имеет большую кривизну и выполняются условия

$$\min \{\|g - g'\| : g \in G_i, g' \in G_{i+1}\} \geq \delta, \quad \|\underline{t}_{i+1} - \bar{t}_i\| > 2\delta.$$

Положим  $i = 1$  и определим ортогональную систему координат  $(x, y)$  с началом  $\frac{\bar{t}_1 + \underline{t}_2}{2}$  и осью абс-

содержащее формулу кривизны кривой  $t(\tau)$  в точке  $\tau$ .

2а) Для отслеживания объекта, движущегося по дуге  $\Delta_i$  с большой кривизной, в частности, негладкой, можно использовать часть  $\mathcal{T}_t^b$  траектории  $\mathcal{T}_t$ , “освещенную” пучком лучей, сонаправленных с заданным вектором (наблюдения)  $b$ ,  $\|b\| = 1$ . Так, в случае  $i = 1$  (см. рис. 2),  $b = b_1 = \frac{\underline{t}_2 - \bar{t}_1}{\|\underline{t}_2 - \bar{t}_1\|}$ , будет  $\mathcal{T}_t^b = \Lambda_0 \cup \Delta_1$ , а в качестве фрагмента траектории наблюдателя предлагается использовать дугу

$$\mathcal{T}_f^{b_1} = \mathcal{T}_t^b - \delta \cdot b. \quad (3)$$

Наблюдатель  $f_\tau$ , отслеживая объект  $t_\tau = f_\tau + \delta \cdot b_1$ , движется с постоянным вектором наблюдения  $b_1$  и постоянной скоростью  $V_f = V_t$ , вне зависимости от наличия участков большой кривизны и угловых точек дуги  $\Delta_1$ , а расстояние от  $f_\tau$  до  $t_\tau$  равно  $\delta$ , и в этом преимущество дуги (3). Но после преодоления дуги (3) наблюдатель оказывается в позиции  $\bar{f}_1$ , позади объекта  $t = \bar{t}_1$  (см. рис. 2), которая

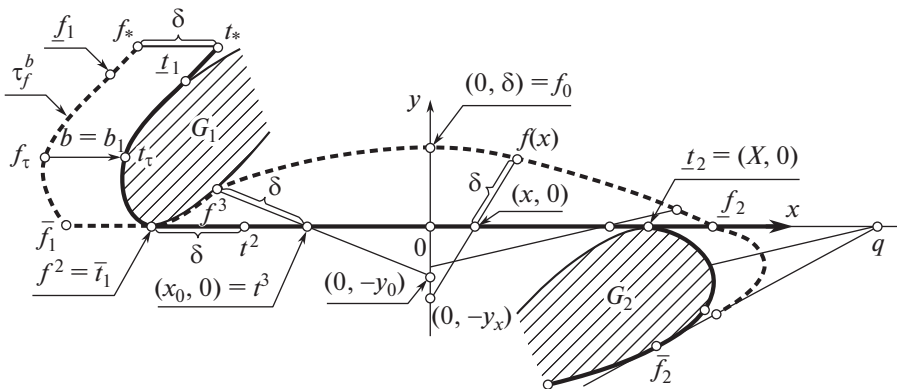


Рис. 2. На рисунке жирной сплошной линией обозначена траектория  $\mathcal{T}_t$ , жирной штриховой линией – траектория  $\mathcal{T}_f$ .

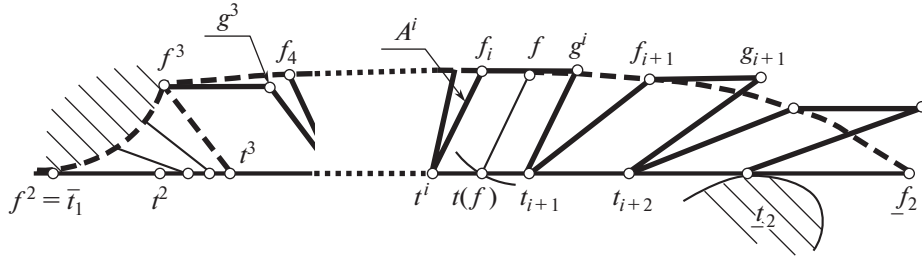


Рис. 3. На рисунке жирной штриховой линией изображена дуга траектории  $\mathcal{T}_f$ .

цисс  $\overline{t_1}, \underline{t_2}$ . После преодоления дуги  $\mathcal{T}_f^{b_1}$  наблюдатель занимает позицию (см. рис. 2)  $\overline{f_1}$  и затем  $f^2 = \overline{t_1}$ , а объект – позицию  $\overline{t_1}$  и затем позицию  $t^2 = \overline{t_1} + \delta b_1$  впереди наблюдателя. Далее одновременно движутся объект  $t_t$  по оси абсцисс до точки  $t^3 = (x_0, 0)$ , наблюдатель  $f_t$  по  $\delta G_1$  до точки  $f^3$  так, что  $\|f_t - t_t\| = \delta$ . Задача наблюдателя на этом этапе в момент прибытия объекта в точку  $\underline{t_2}$ , достичь пункт  $\underline{f_2} = \underline{t_2} + \delta b_1$ , опередив объект. Используем следующие два варианта дуги  $\widehat{f^3, \underline{f_2}} \subset \mathcal{T}_f$ .

2d) Пусть точка  $(0, -y_0)$ ,  $y_0 > 0$ , такова, что  $t^3 \in [f^3, (0, -y_0)]$  (см. рис. 2). Обозначим  $\underline{t_2} = (X, 0)$ ,  $Y = y_0 \cdot X \cdot (X - x_0)^{-1}$ . Для точки  $(x, 0)$ ,  $x_0 \leq x < X$ , определим число  $y_x = Y - \frac{Y}{X}x > 0$  и на луче с вершиной  $(0, -y_x)$ , содержащем точку  $(x, 0)$ , отметим точку  $f(x)$  такую, что  $(x, 0) \in [(0, -y_x), f(x)]$  и  $\|(x, 0) - f(x)\| = \delta$ . Двигаясь по дуге  $\{f(x) : x_0 \leq x \leq X\}$ , наблюдатель следит за объектом  $t = (x, 0)$ . Имеем

$$f(x) = \left( x \cdot \left( 1 + \frac{\delta}{\mathcal{D}} \right), \delta \cdot \frac{\left( Y - \frac{Y}{X}x \right)}{\mathcal{D}} \right), \quad \text{где} \quad (4)$$

$$\mathcal{D} = \left[ x^2 + \left( Y - \frac{Y}{X}x \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

что позволяет найти скорость движения наблюдателя по дуге  $\{f(x) : x_0 \leq x \leq X\}$ .

2e) Построим кусочно-линейную дугу  $\widehat{f^3, \underline{f_2}} \subset \mathcal{T}_f$ . Зададим  $\gamma > 1$  и разобьем отрезок  $[t^3, \underline{t_2}]$  (рис. 3) равномерной сеткой узлов  $t^i$  на частичные отрезки  $\Delta^i = [t^{i-1}, t^i]$ ,  $i = 1, \dots, k$ . На каждом отрезке  $\Delta^i$ , последовательно, начиная с  $i = 4$ , построим параллелограмм с основанием длины  $|\Delta| = |\Delta^i|$ , бо-

ковыми сторонами  $[t^{i-1}, f^{i-1}]$ ,  $[t^i, g^i]$  длины  $\delta$  и отметим точку  $f^i$  такую, что

$$\|f^{i-1} - f^i\| = \gamma \cdot |\Delta|, \quad \|t^i - f^i\| = \delta. \quad (5)$$

Обозначим через  $A^i = A^i(\delta, \gamma)$  угол между векторами  $g^i - t^i$ ,  $f^i - t^i$ . Легко устанавливаются

Л е м м а 1. Для любого  $i$  справедливы утверждения:

$$A^i(\delta, \gamma) < A^i(\delta, \gamma') \text{ при } \gamma < \gamma';$$

$$A^i(\delta', \gamma) < A^i(\delta, \gamma) \text{ при } \delta < \delta';$$

$$A^i(\delta, \gamma) > 0 \text{ при } \gamma > 1.$$

Л е м м а 2. Для любой  $f \in [f^{i-1}, f^i]$  существует единственная точка

$$t = t(f) \in [t^{i-1}, t^i], \quad \|f - t(f)\| = \delta \quad (6)$$

такая, что отображение  $f \rightarrow t(f)$  взаимно однозначно, непрерывно и сохраняет порядок.

Обратное к (6) отображение обозначается через  $f = f(t)$ . С помощью леммы 1 устанавливается, что угол между вектором  $f^i - t^i$  и осью абсцисс убывает с ростом  $i$  и в некоторой точке  $t = t_\gamma$ , ломаная  $\bigcup_i [f^{i-1}, f^i]$  пересекает ось абсцисс, при этом ломаная непрерывно зависит от  $\gamma$ . Пусть  $t = t(\gamma)$  – ближайшая к началу координат справа точка пересечения  $t_\gamma$ . Поскольку угол  $A^i(\delta, \gamma)$  – непрерывная монотонная функция от  $\gamma$ , то найдется единственное значение  $\gamma^*$ , при котором  $t(\gamma^*) = \underline{f_2}$ . Пусть отрезки  $[f^{i-1}, f^i]$  построены с использованием числа  $\gamma^*$  и  $i^*$  – номер, при котором  $\gamma^* \in [f^{i^*}, f^{i^*+1}]$ . Дуга  $\widehat{f^3, \underline{f_2}}$  траектории  $\mathcal{T}_f$ , двигаясь по которой наблюдатель следит за  $t \in [t^3, \underline{t_2}]$ , имеет вид

$$\left( \bigcup_3^{i^*-1} [f^i, f^{i+1}] \right) \cup [f^{i^*}, t(\gamma^*)]. \quad (7)$$

Пусть  $t^i f^i f^{i+1}, t^{i+1}$  – один из четырехугольников, использованных при построении кусочно-линейной дуги  $\widehat{f^3, f_2}$ , и угол  $\angle f^i f^{i+1} t^{i+1}$  острый. Для точек  $t^* \in (t^i, t^{i+1})$ ,  $f^* = f(t^*) \in (f^i, f^{i+1})$  найдем точку  $q$  такую, что отрезок  $[f^*, q]$  параллелен оси абсцисс, а отрезок  $[q, f^{i+1}]$  ортогонален отрезку  $[t^*, f^*]$ .

**Л е м м а 3.** *Отображение  $t \rightarrow f(t)$ ,  $t \in (t^i, t^{i+1})$  дифференцируемо и*

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=t^*} = \frac{\|f^* - f^{i+1}\|}{\|f^* - q\|}. \quad (8)$$

3. Траектория  $\mathcal{T}_f$  составлена из дуг  $\mathcal{D}_\Delta, \mathcal{D}_\Lambda$ , предназначенных для наблюдения за объектом, движущимся по дугам  $\Delta = \Delta_i$ , и, соответственно, отрезкам  $\Lambda = \Lambda_i$  траектории  $\mathcal{T}_t$ . Дуга  $\mathcal{D}_\Delta$  может иметь, в частности, вид (1) или (3), а дуга  $\mathcal{D}_\Lambda$  – вид (1), (4) или (7). Пусть

$\Phi$  – совокупность траекторий  $\mathcal{T}_t$  указанного вида;

$W(\Delta_i)$  – максимум величины скорости наблюдателя  $f = t + \delta V_t$ , отслеживающего движение объекта по дуге  $\Delta_i$ ;

$W(\Lambda_i)$  – наименьший из максимумов величины скоростей движения наблюдателя по дугам (4), (7) слежения за объектом, преодолевающим отрезок  $\Lambda_i$  после дуги  $\Delta_i$  с большой кривизной;

$W(\mathcal{T}_f)$  – максимум величины скорости наблюдателя, отслеживающего объект на всей траектории  $\mathcal{T}_t$ .

Для построения траектории  $\mathcal{T}_f$  вычислим величины

$$W(\Delta_i), \quad i = 1, \dots, k; \quad W(\Lambda_i), \quad i = 1, \dots, k - 1,$$

используя (2), (4), (8). Пусть  $|V_t| = 1$ . На нулевом шаге наблюдатель  $f = t + \delta V_t$ , стартуя в точке  $t_* + \delta V_t$ , движется до встречи с дугой  $\Delta_i$ . На первом шаге наблюдатель следит за движением объекта на объединении  $\Delta_1 \cup \Lambda_1$ . Имеем два случая:

$$W(\Delta_1) \geq W(\Lambda_1), \quad W(\Delta_1) < W(\Lambda_1).$$

В первом случае наблюдатель  $f_t$ , отслеживая движущийся по  $\Delta_1$  объект  $t_t$ , должен проследовать по дуге  $\mathcal{T}_f^{b_1}$  со скоростью  $V_t$ , где  $b_1 = \frac{t_2 - \bar{t}_1}{\|t_2 - \bar{t}_1\|}$ , а далее из дуг (4), (8) он выбирает дугу с меньшей величиной  $W(\Lambda_1)$ , и с нее следит за  $t_t \in \Lambda_1$ . Во втором случае наблюдатель следует по дуге  $\{f = t + \delta \cdot V_t : t \in \Delta_1 \cup \Lambda_1\}$ . Таким образом,  $W(\Delta_1 \cup \Lambda_1) =$

$= \min\{W(\Delta_1), W(\Lambda_1)\}$ . Первый шаг завершают объект в точке  $t_2$ , а наблюдатель – в точке  $f_2 = t_2 + \delta \cdot b_1$ . Такая позиция  $t_\lambda$  и  $f_\lambda$  выгодна наблюдателю. Вторым шагом алгоритма отличается от первого лишь тем, что наблюдатель вместо дуги  $\mathcal{T}^b$  использует дугу  $\mathcal{T}^{1,2}$  (см. п. 2b), 2c)). Следующие шаги выполняются по аналогии с первым. Построенную траекторию наблюдателя обозначим через  $\mathcal{T}_f^*$ . Имеет место

**Т е о р е м а.** *Имеет место равенство*

$$\min\{W(\mathcal{T}_f) : \mathcal{T}_f \in \Phi\} = W(\mathcal{T}_f^*).$$

*Для движущегося по траектории  $\mathcal{T}_f^*$  наблюдателя, отслеживающего объект, который преодолевает кратчайшую траекторию  $\mathcal{T}_t$  с постоянной скоростью  $V_t$ , максимум  $W(\Delta_i \cup \Lambda_i)$  величины скорости  $V_f$  удовлетворяет равенству*

$$W(\Delta_i \cup \Lambda_i) = \min\{W(\Delta_i), W(\Lambda_i)\}, \\ i = 1, \dots, k.$$

4. Случай пространства  $\mathbb{R}^3$ . Для построения дуги, двигаясь по которой наблюдатель может следить за объектом, преодолевающим дугу  $\Delta_i = \widehat{t_i, \bar{t}_i}$ , найдем точки  $q_j \in \overline{\bar{t}_{j-1}, t_j}$  ( $j = i, i + 1$ ), на которых достигается расстояние между скрещивающимися прямыми  $\overline{\bar{t}_{j-1}, t_j}$  ( $j = i, i + 1$ ), и обозначим  $q = \frac{q_i + q_{i+1}}{2}$ . Искомая дуга имеет вид  $\{f \in [t, g] : \|f - t\| = \delta, t \in \Delta_i\}$ , а  $t - f$  – вектор наблюдения. Задачу поиска дуги, с которой наблюдатель может следить за передвигающимся по отрезку  $\Lambda_{i-1} = [\bar{t}_{i-1}, t_i]$  объектом, можно свести к двумерной, решая ее в плоскости, которая касается множества  $G_i$  в точке  $t_i$  и содержит отрезок  $\Lambda_{i-1}$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berdyshev V.I.* The observer's trajectory following the object passing the obstacle on the shortest curve // Eurasian journal of mathematical and computer applications. 2021. V. 9. № 4. P. 4–16.
2. *Л ю В.* Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор) // Математика и мат. моделирование. 2018. № 1. С. 15–58.

## TRAJECTORY OF THE OBSERVER TRACKING OBJECT MOTION AROUND CONVEX OBSTACLES IN $\mathbb{R}^2$ AND $\mathbb{R}^3$

Academician of the RAS V. I. Berdyshev<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,  
Yekaterinburg, Russian Federation*

An autonomous object moving under observation conditions with a constant velocity along the shortest path bypasses an ordered collection of pairwise disjoint convex sets. The task of the observer is to find a trajectory of motion such that at each moment of time he observes the object, is at a given distance from it and moves at a possibly low speed. The paper proposes options for the observer's trajectories with an indication of the speed limit.

*Keywords:* navigation, autonomous vehicle, trajectory, observer