

М.А. Ильгамов, М.М. Шакирьянов



# **СТАТИКА И ДИНАМИКА ТРУБОПРОВОДОВ**



**Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М.**

**СТАТИКА И ДИНАМИКА  
ТРУБОПРОВОДОВ**

МОСКВА 2024

УДК 534.01  
ББК 22.2; 22.32/33  
И 45

Рецензенты:

доктор технических наук *Ю. С. Первушин*  
доктор физико-математических наук *С. Ф. Урманчеев*

**Ильгамов М. А., Шакирьянов М. М. Статика и динамика трубопроводов /**  
М. А. Ильгамов, М. М. Шакирьянов. – М.: РАН, Издательство «Наука», 2024. – 229 с. –  
ISBN 978-5-907645-39-4

Трубопроводы являются не только распространенными и ответственными элементами многих конструкций, но и весьма уязвимыми в реальных условиях. В монографии рассматриваются вопросы прочности и надежности трубопроводов, а также влияние на их состояние статических и динамических изгибов, пространственных колебаний. Приводятся задачи, модели, используемые при проектировании, сооружении и эксплуатации трубопроводов.

Для специалистов проектных, строительных и эксплуатационных организаций в области трубопроводных систем.

ISBN 978-5-907645-39-4

© Ильгамов М. А., Шакирьянов М. М., 2024

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	8
<b>ГЛАВА I</b>	
<b>СТАТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ТРУБОПРОВОДА .....</b>	<b>10</b>
<b>§ 1. ИЗГИБ ТРУБОПРОВОДА МЕЖДУ ДВУМЯ ГРУНТОВЫМИ ОПОРАМИ .....</b>	<b>10</b>
1. ВВЕДЕНИЕ .....	10
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	11
3. СЛУЧАЙ ВЫСОКОГО ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ В ТРУБОПРОВОДЕ И НЕГЛУБОКОГО ЗАЛЕГАНИЯ В ГРУНТЕ .....	15
4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ ГРУНТА НА ИЗГИБ ТРУБОПРОВОДА .....	17
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	20
<b>§ 2. ВСПЛЫТИЕ ПОДВОДНОГО ГАЗОВОГО ТРУБОПРОВОДА.....</b>	<b>21</b>
1. ВВЕДЕНИЕ .....	21
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	23
3. ПОДЪЕМ ПРИ ВЫСОКОМ ДАВЛЕНИИ ГАЗА И МАЛОМ ПРЕВЫШЕНИИ ВЕСА ТРУБОПРОВОДА НАД ПОДЪЕМНОЙ СИЛОЙ.....	28
4. ПОДЪЕМ ПРИ СВОБОДНОМ ПРОДОЛЬНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ТРУБОПРОВОДА НА ОПОРАХ .....	30
5. МАКСИМАЛЬНО ДОПУСТИМОЕ РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ОПОРАМИ .....	35
6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	36
<b>§ 3. СИЛЬНЫЙ ИЗГИБ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО КАБЕЛЯ .....</b>	<b>38</b>
1. ВВЕДЕНИЕ .....	38
2. УРАВНЕНИЯ СИЛЬНОГО ИЗГИБА КАБЕЛЯ .....	41
3. ИЗМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОТКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ДРУГИХ НАЧАЛЬНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ.....	44
4. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОБЛЕМ И НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ.....	46
5. ВЛИЯНИЕ НА ИЗГИБ СОБСТВЕННОГО ВЕСА ПРОВОДНИКА, ДАВЛЕНИЯ И СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ .....	50
6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	53

<b>§ 4. СИЛЬНЫЙ ИЗГИБ ТРУБОПРОВОДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ .....</b>	<b>54</b>
1. ВВЕДЕНИЕ.....	54
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	55
3. СИЛЬНЫЙ ИЗГИБ.....	57
4. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР .....	61
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	62
<b>§ 5. ВЛИЯНИЕ СРЕДНЕГО ДАВЛЕНИЯ И ОБЖАТИЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ НА ИЗГИБ ТРУБЫ .....</b>	<b>63</b>
1. ВВЕДЕНИЕ .....	63
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	65
3. СТАТИЧЕСКИЙ ЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ ПАНЕЛИ.....	69
4. ИЗГИБ ЗАМКНУТОЙ ОБОЛОЧКИ.....	71
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	75

## ГЛАВА II

<b>ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ТРУБОПРОВОДА В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ</b>	<b>77</b>
<b>§ 1. ДИНАМИКА ТРУБОПРОВОДА ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННЕГО УДАРНОГО ДАВЛЕНИЯ .....</b>	<b>77</b>
1. ВВЕДЕНИЕ .....	77
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	79
3. ДИНАМИКА ПРИ СТУПЕНЧАТОМ ВОЗРАСТАНИИ ДАВЛЕНИЯ.	82
4. ДИНАМИКА ПРИ СЛОЖНЫХ ЗАКОНАХ ИЗМЕНЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ.....	85
5. ДИНАМИКА ПРИ КРАТКОВРЕМЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ДАВЛЕНИЯ.....	88
6. ОЦЕНКИ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ.....	91
7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	92
<b>§ 2. КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ БЕГУЩИХ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В ТРАНСПОРТИРУЕМОЙ ЖИДКОСТИ.....</b>	<b>95</b>
1. ВВЕДЕНИЕ.....	95
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	96
3. МЕТОД РЕШЕНИЯ .....	98
4. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОКОЛО ПОЛОЖЕНИЙ СТАТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ.....	102
5. СВОБОДНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ.....	104

---

6. ЗАВИСИМОСТЬ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОТ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ И НАЧАЛЬНОГО ПОЛОЖЕНИЯ ТРУБЫ .....	107
7. ВЫНУЖДЕННЫЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ДАВЛЕНИЯ .....	110
8. РОЛЬ ДЛИНЫ ВОЛНЫ В ВОЗБУЖДЕНИИ ВЫСШИХ ГАРМОНИК	113
9. ХАОТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ .....	114
10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	120
<b>§ 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ И ПОДВИЖНЫХ ОПОР .....</b>	<b>123</b>
1. ВВЕДЕНИЕ.....	123
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	124
3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ.....	126
4. ЗАВИСИМОСТЬ ПРОГИБА ОТ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОСНОВАНИЯ .....	129
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	131
<b>§ 4. ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННЕЙ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА .....</b>	<b>132</b>
1. ВВЕДЕНИЕ .....	132
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	133
3. МЕТОД РЕШЕНИЯ .....	136
4. ЗАВИСИМОСТЬ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА ОТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СО СЛОЕМ ЖИДКОЙ ФАЗЫ .....	137
5. ЗАВИСИМОСТЬ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА ОТ АМПЛИТУДЫ И ЧАСТОТЫ ПЕРЕМЕННОГО ДАВЛЕНИЯ.....	138
6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	141
<b>§ 5. ВНЕШНЯЯ И ВНУТРЕННЯЯ ПРИСОЕДИНЕННЫЕ МАССЫ ТРУБОПРОВОДА.....</b>	<b>143</b>
1. ВВЕДЕНИЕ.....	143
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	144
3. МЕТОД РЕШЕНИЯ .....	146
4. ВЫЧИСЛЕНИЯ И ВЫВОДЫ .....	147
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	148
<b>§ 6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА.....</b>	<b>149</b>
1. ВВЕДЕНИЕ.....	149

## Статика и динамика трубопроводов

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	149
3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ .....	151
4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ .....	151
5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ.....	151
6. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ.....	152

### ГЛАВА III

<b>ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА .....</b>	<b>154</b>
<b>§ 1. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА ВСПЛОШНОЙ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ВНУТ- РЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ .....</b>	<b>154</b>
1. ВВЕДЕНИЕ .....	154
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	155
3. МЕТОД РЕШЕНИЯ .....	159
4. ЗАВИСИМОСТЬ КОЛЕБАНИЙ ОТ ЧАСТОТЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ И ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ .....	161
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	167
<b>§ 2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ВНУТ- РЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ .....</b>	<b>168</b>
1. ВВЕДЕНИЕ .....	168
2. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ СРЕДНЕГО ДАВЛЕНИЯ .....	171
3. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ АМПЛИТУДЫ ПЕРЕМЕННОЙ СОСТАВЛЯЮ- ЩЕЙ ДАВЛЕНИЯ .....	174
4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	178
<b>§ 3. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА С УПРУ- ГО-СМЕЩАЮЩЕЙСЯ ОПОРОЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННЕ- ГО УДАРНОГО ДАВЛЕНИЯ .....</b>	<b>180</b>
1. ВВЕДЕНИЕ .....	180
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	182
3. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ.....	183
4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ.....	187
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	191
<b>§ 4. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБО- ПРОВОДА ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННЕГО УДАРНОГО ДАВЛЕ- НИЯ .....</b>	<b>192</b>

---

1. ВВЕДЕНИЕ .....	193
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	192
3. ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ.....	196
4. ЗАВИСИМОСТЬ ПРОГИБА И УГЛА ПОВОРОТА ОТ ДИНАМИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ .....	198
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	201
<b>§ 5. ПОЛОЖЕНИЯ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ ТРУБОПРОВОДА С ВИБРИРУЮЩИМИ ОПОРАМИ .....</b>	<b>202</b>
1. ВВЕДЕНИЕ.....	202
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	203
3. ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ .....	206
4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАПИЦЫ .....	210
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	212
<b>§ 6. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА С ВИБРИРУЮЩИМИ ОПОРАМИ.....</b>	<b>213</b>
1. ВВЕДЕНИЕ .....	213
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	215
3. СРАВНЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ УГЛОВЫХ И ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИБЛИЖЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ И ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	218
4. ЗАВИСИМОСТЬ УГЛОВЫХ И ИЗГИБНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ И ВИБРАЦИЙ ОПОР .....	220
5. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРУБ.....	223
6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	228

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Трудно найти пример машины, аппарата, агрегата, предприятия, транспортных средств, где нет труб различного назначения. Представление о роли, в частности, магистральных трубопроводов дает оценка, по которой половина всех грузов по массе в России транспортируется по ним. В подводной лодке, атомной станции, в предприятиях нефтехимии их протяженность составляет порядка  $10^3$  км и более.

Трубопроводы являются не только чрезвычайно распространенными и ответственными элементами конструкции, но и уязвимыми в реальных условиях. К ним относятся изменение силовых и температурных факторов, дефекты в материалах, их коррозия, охрупчивание и трещинообразование со временем, отклонения от технологии изготовления, человеческий фактор при эксплуатации, в случае транспортировки нефти, газа, воды – еще и геологические изменения (опускание, подъем, сдвиги грунта, землетрясения и т.д.). В силу этих причин и большой общей протяженности трубопроводных систем вероятность потери их работоспособности остается достаточно высокой.

В результате повреждения продуктопровода «Западная Сибирь – Урал – Поволжье» и утечки газа произошел взрыв газового облака в момент прохождения встречных пассажирских поездов «Новосибирск-Адлер», унесших сотни жизней, причинив стране большой экономический и экологический ущерб (Башкирия, Улу-Телякская трагедия, июнь 1989 г.).

Считается, что начало катастрофических разрушений в конструкции подводного крейсера «Курск» (2000 год) связано с повреждением паропровода. Это известный сценарий в объектах энергетики: бьющая из трубы струя пара с высоким давлением, температурой и скоростью приводит к повреждению других конструкций, что может иметь более тяжелые последствия.

Естественно, вопросам прочности и надежности труб уделяется большое внимание. Существует обширная литература по напряженно-деформированному состоянию, устойчивости, по влиянию на них указанных выше факторов. Это относится, главным образом, к анализу в условиях статики. Меньше внимания уделено вопросам динамической прочности, ударных и резонансных явлений, взаимодействия вынужденных и параметрических колебаний, более полному учету давлений.

В строительных конструкциях, кораблестроении, в других крупных объектах основными силовыми факторами являются вес, растягивающие и сжимающие силы, изгибающие моменты. В оборудовании энергетики, нефтехимии, в аэрокосмической технике, в трубопроводном транспорте вдобавок к ним важным фактором является давление сред на обе поверхности тонкостенных элементов типа пластинок, оболочек, а в их динамической реакции — и присоединенные массы сред.

В хорошо развитой теории тонких пластинок и оболочек уделено недостаточно внимания более полному учету действующих давлений. Можно сказать, что основным отличием данной работы от многочисленных статей и монографий является более строгий учет действующих статических и динамических давлений на трубопроводы.

В книгу вошли главным образом результаты исследований, выполненных в последние годы в Институте машиноведения им. А. А. Благонравова РАН (Москва), Институте механики и машиностроения КНИЦ РАН (Казань) и Институте механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН (Уфа). Исследования были проведены в рамках государственных заданий и грантов Российского научного фонда.

При составлении монографии была принята форма изложения, несколько отличная от обычной и наиболее удобная для читателя. В каждом параграфе приводятся введение, постановка и решение задачи, параметрический анализ, заключение, литература, используется своя нумерация формул и рисунков. По ходу чтения определенного параграфа это позволяет не обращаться к другим частям монографии за необходимыми сведениями, например, какого-то соотношения между параметрами явления, формулой, уравнением, литературным источником и т. д. Хотя такой стиль изложения несколько увеличивает объем параграфа, но обеспечивает, по мнению авторов, большее удобство чтения и возможность ознакомления с каждым параграфом независимо от других.

Отклики на книгу могут быть присланы по адресам e-mail: [ilgamov@anrb.ru](mailto:ilgamov@anrb.ru), [shakmar9@mail.ru](mailto:shakmar9@mail.ru)

# Глава I

## СТАТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ТРУБОПРОВОДА

### § 1. ИЗГИБ ТРУБОПРОВОДА МЕЖДУ ДВУМЯ ГРУНТОВЫМИ ОПОРАМИ

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается статический линейный изгиб трубопровода на переходе через реки и овраги под действием собственного веса трубы и транспортируемой жидкости. Предполагается, что части трубопровода по обе стороны от провисающего участка заделаны в грунт с одинаковыми свойствами. Применяется простейшая модель упругости грунта, состоящая в его замене распределенной системой пружин с определенными жесткостями в продольном и поперечном направлениях трубопровода. Скорость движения транспортируемой жидкости не учитывается. Внутренний перепад давления оказывает неуравновешенное боковое усилие, направленное в сторону выпуклости искривленной осевой линии. Учитывается также влияние на изгиб осевого растяжения трубы, возникающего в результате ее осесимметричной деформации.

Прямая задача состоит в определении прогиба при заданных размерных, жесткостных и силовых характеристиках трубопровода и грунта. Определяется зависимость прогиба от отношения жесткостей грунта и трубопровода, а также от внутреннего давления. С увеличением давления возрастает прогиб. В частности, определяется критическое значение внутреннего давления, когда в линейной задаче прогиб возрастает неограниченно.

Обратная задача состоит в определении относительной жесткости грунта при приборном определении прогиба трубопровода или деформации его крайних волокон. Для этого применяется способ догружения трубопровода известной сосредоточенной силой и соответствующего приборного определения прогиба или деформации. В частности, догружение и соответствующие замеры осуществляются в средней точке пролета трубопровода. Определяется критическое значение относительной жесткости грунта, ниже которого прогибы возрастают неограниченно.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Трубопровод внутренним радиусом  $R$ , толщиной стенки  $h$ , свободно провисает на участке длиной  $L$  (рис. 1, а). Начало продольной координаты  $x$  принимается в середине этого участка. Участки  $-\infty < x < -L/2$  и  $L/2 < x < \infty$  находятся в грунте, свойства которого принимаются одинаковыми. Реакция грунта моделируется деформацией системы упругих пружин. При прогибе  $w(x)$  трубопровода со стороны системы пружин

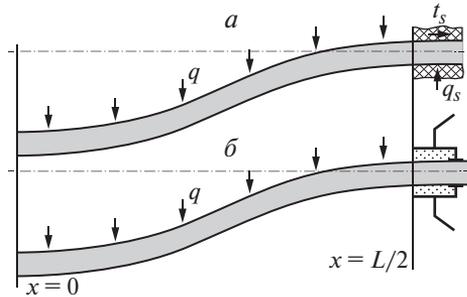


Рис. 1. Статический изгиб трубопровода между опорами

возникает распределенная сила, равная  $q_s w$ , а при продольном перемещении  $u(x)$  трубопровода – распределенная сила  $t_s u$ . Здесь через  $q_s$  и  $t_s$  обозначены жесткости системы пружин в поперечном и продольном направлениях. Реакция грунта на изгиб трубопровода более подробно рассматривается в [1–4]. В них, а также в [5–10], дается анализ прочности и устойчивости.

Учитывается влияние давления  $p$  транспортируемой жидкости на изгиб трубопровода. Теоретическое и экспериментальное изучение этого влияния содержится в [11, 12]. Скорость  $V$  движения жидкости, а также изменение  $p$  на длине  $L$  не учитывается. Такое допущение может быть приемлемым, если  $\rho_f V^2 \ll p$ , где  $\rho_f$  – плотность жидкости. Это условие выполняется, например, при данных  $p = 7.0$  МПа,  $\rho_f = 900$  кг/м<sup>3</sup>,  $V = 10$  м/с. В газовых трубопроводах это условие выполняется практически всегда.

Принимается допущение о повороте поперечного сечения так, что нормаль к осевой линии остается нормалью при изгибе и сохраняет свою круговую форму. Рассматривается статический линейный изгиб трубопровода.

1. Виноградов С. В. Расчет подземных трубопроводов на внешние нагрузки. М.: Стройиздат, 1980. 135 с.
2. Айнбиндер А. Б., Камерштейн А. Г. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. М.: Недра, 1982. 341 с.
3. Александров М. М. Взаимодействие колонны труб со стенками скважины. М.: Недра, 1982. 144 с.
4. Бородавкин П. П., Синоков А. М. Прочность магистральных трубопроводов. М.: Недра, 1984. 226 с.
5. Васильев Н. П. Балластировка и закрепление трубопроводов. М.: Недра, 1984. 166 с.
6. Морозов В. Н. Магистральные трубопроводы в сложных инженерно-геологических условиях. Л.: Недра, 1987. 121 с.
7. Перун И. В. Магистральные трубопроводы в горных условиях. М.: Недра, 1987. 175 с.
8. Зарипов Р. М., Коробков Г. Е., Чичелов В. А. Универсальный метод расчета на прочность магистральных газопроводов // Газовая промышленность. 1998. № 4. С. 44–55.
9. Харионовский В. В. Надежность и ресурс конструкции газопроводов. М.: Недра, 2000. 486 с.
10. Султанов М. Х. Основные положения расчета допустимого рабочего давления при эксплуатации магистральных нефтепродуктопроводов // Транспорт и хранение нефтепродуктов. 2002. № 2. С. 8–12.
11. Ильгамов М. А. Статические задачи гидроупругости. Казань: ИММ РАН, 1994. 208 с.
12. Tang D.M., Ilgamov M.A., Dowell E. H. Buckling and post-buckling behaviour of a pipe subjected to internal pressure // Journal of Applied Mechanics. 1995. V. 62. N 3. P. 595–600.

Нелинейный изгиб изучается, например, в работах [13–15]. Первые две из них посвящены анализу сильного изгиба пролета трубопровода при подъеме его сосредоточенной силой и сверхпроводящего кабеля, представляющего трубу с концентрическими слоями из разных материалов для прокачки охлаждающего жидкого азота. В [15] рассмотрен нелинейный изгиб двухслойного трубопровода с определяемой из решения задачи длиной пролета (модель укладки трубопровода на морское дно).

Приведенная модель трубчатой балки широко используется для описания поведения трубопровода [2, 4, 8, 10]. Рассматриваемая расчетная схема справедлива не только в случае трубопровода и грунта, но и в случае конструкций трубопровод-емкость, где более податливая сплошная среда уменьшает концентрацию напряжений в месте соединения трубопровода со стенкой емкости (рис. 1, б).

Различные подходы в обратных задачах упругой деформации стержней, балок, пластин рассматриваются, например, в [16, 17].

В работах [18–26] изучаются статический изгиб, свободные, вынужденные и параметрические колебания. Поведение трубы при ударном внутреннем давлении рассматривается в [27]. При этом влияние грунта не учитывается. В [24] дается обзор исследований.

- 
13. *Igatov M.A., Ratrouf R.A.* Large deflection of superconducting cable // *Int. J. Nonlinear Mech.* 1999. V. 34. N 5. P. 869–880.
  14. *Ильгамов М. А., Якупов Р. Г.* Сильный изгиб трубопровода // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 2003. № 6. С. 109–116.
  15. *Елисеев В. В., Зиновьева Т. В.* Нелинейно-упругая деформация подводного трубопровода в процессе укладки // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2012. № 1. С. 70–78.
  16. *Ахатов И. Ш., Ахтямов А. М.* Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // *Прикладная математика и механика.* 2001. № 2. С. 290–298.
  17. *Ахтямов А. М.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.
  18. *Глазков А. С., Климов В. П., Гумеров К. М.* Продольно-поперечный изгиб трубопровода на участках грунтовых изменений // *Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов.* 2012. № 1. С. 63–70.
  19. *Чужиков С. Н., Новиков П. А., Ларионов Ю. В.* Анализ прочности трубопровода на участках просадки грунта // *Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов.* 2012. № 4. С. 92–100.
  20. *Гимазетдинов И. Р., Климов В. П., Гумеров А. К.* Некоторые особенности напряженного состояния трубопроводов на переходах через реки и овраги // *Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов.* 2014. № 3. С. 55–65.
  21. *Kheiri M., Paidoussis, M.P., Pozo G. C. Del., Amabili M.* Dynamics of a pipe conveying fluid flexibly restrained at the ends // *Journal of Fluids and Structures.* 2014. V. 49. P. 360–385.
  22. *Chen LQ., Zhang YL., Zhang GC., Ding H.* Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed // *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 2014. V. 58. P. 11–21.
  23. *Saadelin R., Hu Y., Henni A.* Numerical analysis of buried pipes under field geo-environmental conditions // *International Journal of Geo-Engineering.* 2015. V. 2. P. 1–22.
  24. *Li S., Karney B.W., Liu G.* FSI research in pipeline systems – A review of the literature // *Journal of Fluids and Structures.* 2015. V. 57. P. 277–297.
  25. *Texier B.D., Dorbolo S.* Deformations of an elastic pipe submitted to gravity and internal fluid flow // *Journal of Fluids and Structures.* 2015. V. 55. P. 364–371.
  26. *Ильгамов М. А., Юлмухаметов А. А.* Прямая и обратная задачи изгиба трубопровода // *Вестник ПНИПУ. Механика.* 2017. № 3. С. 100–112.
  27. *Ганиев Р. Ф., Ильгамов М. А.* Упругая реакция трубопровода на внутреннее ударное давление // *ДАН.* 2016. Т. 470. № 2. С. 162–165.

Линейное уравнение статического изгиба имеет вид [2, 11]:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{d}{dx} \left( P \frac{dw}{dx} \right) = q, \quad D = EJ, \quad J = \frac{\pi}{4} \left( (R+h)^4 - R^4 \right), \quad (2.1)$$

$$q = \pi g \left( \rho \left( (R+h)^2 - R^2 \right) + \rho_f R^2 \right),$$

где  $E$ ,  $\rho$  – модуль упругости и плотность материала,  $q$  – распределенные внешние силы на трубопровод, которые состоят из собственных весов жидкости и материала трубопровода единичной длины,  $g$  – гравитационное ускорение. Для  $x > L/2$  в правой части (2.1) добавляется реакция грунта, равная  $-q_s w$ . В линейном приближении в уравнении изгиба (2.1) отсутствует продольное перемещение, однако более строгий учет внутреннего перепада давления приводит к появлению такой зависимости.

Величина  $P$  в (2.1) состоит из части, связанной с взаимодействием разности внутреннего и внешнего давлений  $p - p_s$  и изменения угла поворота осевой линии (кривизны), и части, обусловленной кольцевой и осевой силами  $N_\theta$ ,  $N_x$  в стенке трубы под действием  $p - p_s$  [26]. Здесь  $p_s$  – давление на стенке трубы со стороны грунта. Первая часть равна  $\pi[R^2 p - (R+h)^2 p_s] \approx \approx \pi R^2 (p - p_s)$ . В дальнейшем будем пренебрегать величиной  $h$  по сравнению с радиусом  $R$ . Как видно из (2.1), изгибная деформация трубы зависит от условия ее растяжения-сжатия. Но в линейной постановке продольное растяжение-сжатие отделяется от задачи изгиба и не зависит от прогиба.

Для получения второй части  $P$  рассмотрим продольную силу  $2\pi R N_x$ , где  $N_x$  – усилие на продольную полоску единичной ширины стенки трубы толщиной  $h$ , как было определено выше (рис. 2). Из закона Гука имеем

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta), \quad N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_x). \quad (2.2)$$

Окружная сила  $N_\theta$  на единичную ширину кольца равна

$$N_\theta = \int_0^{\pi/2} (p - p_s) \cos \theta \cdot R d\theta = (p - p_s) R.$$

Исключив деформацию  $\epsilon_\theta$  в (2.2), находим

$$N_x = (p - p_s) R \nu + Eh \epsilon_x. \quad (2.3)$$

Таким образом, с учетом (2.3) в уравнении (2.1) получаем:

$$P = \pi R^2 p - 2\pi R N_x = \pi R^2 p (1 - 2\nu) - 2\pi R h E \epsilon_x \quad (0 \leq x \leq L/2), \quad (2.4)$$

$$P = \pi R^2 (p - p_s) (1 - 2\nu) - 2\pi R h E \epsilon_x \quad (x > L/2).$$

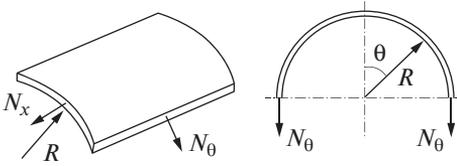


Рис. 2. Продольная и кольцевая силы в стенке трубы

Так как в пределах  $0 \leq x \leq L/2$  на трубу не действуют силы в осевом направлении, то из уравнения равновесия  $2\pi R dN_x/dx = 0$  следует постоянство  $N_x$  и в линейной постановке постоянство деформации  $\varepsilon_x = du/dx$ . Отсюда  $\varepsilon_x = C$  и  $u = Cx + G$  ( $0 \leq x \leq L/2$ ).

Для участка  $x > L/2$  деформацию  $\varepsilon_x$  определяем из равенства сил  $2\pi R h E (d\varepsilon_x/dx)$  и  $t_s u$  или

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \alpha^2 u = 0, \quad \alpha^2 = \frac{t_s}{2\pi R h E},$$

решение которого  $u = A \exp(\alpha x) + B \exp(-\alpha x)$  должно удовлетворять условиям  $u = 0$  ( $x \rightarrow \infty$ ), а также равенства продольных перемещений и сил левой и правой частей трубопровода в точке  $x = L/2$ . Определив  $A, B, C, G$  из указанных условий, выражения (2.4) приводим к виду

$$\begin{aligned} P &= \pi R^2 (1 - 2\nu) \left( p - \frac{2p_s}{2 - \alpha L} \right) \quad \left( 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right), \\ P &= \pi R^2 (1 - 2\nu) \left( p - p_s + \frac{p_s \alpha L}{2 - \alpha L} e^{-\alpha x_1} \right), \quad x_1 = x - \frac{L}{2} \quad \left( x > \frac{L}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из (2.5) видно, что учет радиального расширения трубы под действием внутреннего давления приводит к уменьшению продольной силы  $P$  по всей длине (когда это расширение не учитывается, в (2.5)  $\nu$  не входит, поэтому в этом случае результат можно получить, положив  $\nu = 0$ ). Учет продольного перемещения на участке  $x > L/2$  увеличивает здесь значение  $P$ , но уменьшает на участке  $0 \leq x \leq L/2$ . В случае неглубокого залегания трубопровода в грунте и высокого внутреннего давления ( $p_s \ll p$ ) выражение  $P$  для обоих участков является одинаковым  $P = \pi R^2 p (1 - 2\nu)$ . Такое допущение используется в [20]. С учетом (2.5) уравнению (2.1) придаем вид

$$\begin{aligned} D \frac{d^4 w}{dx^4} + \pi R^2 (1 - 2\nu) \left( p - \frac{2p_s}{2 - \alpha L} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} &= q \quad \left( 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right), \\ D \frac{d^4 w}{dx^4} + \pi R^2 (1 - 2\nu) \frac{d}{dx} \left( \left( p - p_s + \frac{p_s \alpha L}{2 - \alpha L} e^{-\alpha x_1} \right) \frac{dw}{dx} \right) + q_s w &= q \quad \left( x > \frac{L}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

### 3. СЛУЧАЙ ВЫСОКОГО ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ В ТРУБОПРОВОДЕ И НЕГЛУБОКОГО ЗАЛЕГАНИЯ В ГРУНТЕ

Отбрасывая в (2.6) члены, содержащие  $p_s$ , и вводя обозначения

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \mu^2 = \frac{\pi R^2(1-2\nu)p}{4L^2d}, \quad \beta^4 = \frac{q_s}{4d}, \quad d = \frac{D}{L^4}, \quad (3.1)$$

второе уравнение (2.6) запишем в виде

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4\mu^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + 4\beta^4 w = \frac{q}{d} \quad \left( \xi > \frac{1}{2} \right). \quad (3.2)$$

Для участка  $0 \leq \xi \leq 1/2$  в (3.2) отсутствует член  $4\beta^4 w$ .

Граничные условия состоят в равенстве нулю угла поворота и перерезывающей силы в средней точке трубы:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0 \quad (\xi = 0), \quad (3.3)$$

и в равенствах прогибов, углов поворота, изгибающих моментов, перерезывающих сил в месте перехода от провисающей части ( $0 \leq \xi \leq 1/2$ ) трубы к участку в грунте ( $\xi > 1/2$ )

$$w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = \frac{\partial w_2}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial \xi^3} \quad \left( \xi = \frac{1}{2} \right). \quad (3.4)$$

Кроме того, ставятся условия

$$w = \frac{q}{q_s}, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi \rightarrow \infty). \quad (3.5)$$

Отношение веса трубопровода  $q$  к жесткости пружин  $q_s$  в поперечном направлении представляет собой равномерную по  $x$  осадку трубы в грунте.

Решения уравнения (3.2), а также уравнения без члена  $4\beta^4 w$ , удовлетворяющие условиям (3.3) и (3.5), имеют вид:

$$w = C_1 \cos 2\mu\xi + \frac{q}{8d\mu^2} \xi^2 + C_2 \quad \left( 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \right),$$

$$w = e^{-\sqrt{\beta^2 - \mu^2} \xi_1} \left( C_3 \cos \sqrt{\beta^2 + \mu^2} \xi_1 + C_4 \sin \sqrt{\beta^2 + \mu^2} \xi_1 \right) + \frac{q}{q_s}, \quad (3.6)$$

$$\xi_1 = \xi - \frac{1}{2} \quad \left( \xi > \frac{1}{2} \right).$$

Таким образом, при удалении от провисающей части трубопровода прогиб стремится к равномерной осадке.

Удовлетворяя (3.6) условиям (3.4), получаем

$$C_1 = \frac{q}{16d\mu^3\Delta}(\beta^2 + 2\gamma_1),$$

$$C_2 = -\frac{q}{32d\beta^4\mu^3\Delta}\left[2\left((2\beta^4 + \beta^4\mu^2 - 8\mu^4)\gamma_1 + \beta^2(\gamma_3^4 + 3\mu^4)\right)\cos\mu + \right. \\ \left. + \mu\left(\beta^4(\gamma_2^2 - 4) - 8\mu^2(\beta^2\gamma_1 + \gamma_2^2)\right)\sin\mu\right],$$

$$C_3 = \frac{q}{8d\beta^2\mu^2\Delta}\left(\mu\gamma_2^2\cos\mu - (2\mu^2\gamma_1 + \beta^2)\sin\mu\right),$$

$$C_4 = -\frac{q}{8d\beta^2\mu^2\gamma_1\Delta}\left(\mu\gamma_1\gamma_2^2\cos\mu - (\beta^2\gamma_1 + \mu^4)\sin\mu\right),$$

$$\gamma_1^2 = \beta^2 - \mu^2, \quad \gamma_2^2 = \beta^2 - 2\mu^2, \quad \gamma_3^2 = \beta^2 + \mu^2, \quad \Delta = 2\mu\gamma_1\cos\mu + \gamma_2\sin\mu.$$

Зависимость относительного прогиба  $W = (24d/q)w$  в точке  $\xi = 0$  от относительной жесткости грунта для различных значений относительного внутреннего давления  $\mu$  показана на рис. 3.

С увеличением относительной жесткости  $\beta$  грунта происходит уменьшение относительного прогиба, причем тем быстрее, чем меньше относительное внутреннее давление  $\mu$ . С увеличением  $\mu$  возрастает относительный прогиб  $W$ . Таким образом, внутреннее давление вызывает дополнительный изгиб трубопровода.

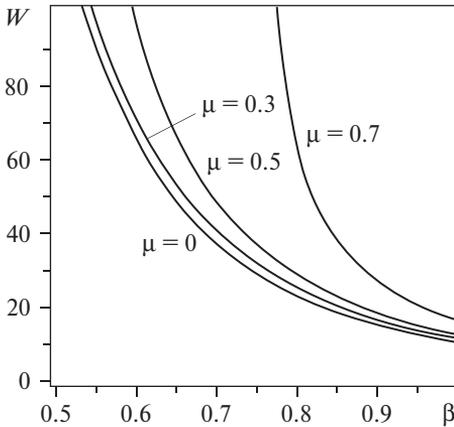


Рис. 3. Зависимость относительного прогиба  $W$  в середине ( $\xi = 0$ ) пролета трубопровода от относительной жесткости грунта  $\beta$

С уменьшением жесткости грунта происходит стремительный рост прогиба. То значение относительной жесткости грунта, когда прогиб возрастает неограниченно, назовем критическим  $\beta_{cr}$ . Оно определяется из уравнения  $\Delta(\beta, \mu) = 0$  или

$$\cos\frac{\mu}{2} = \frac{\mu}{\beta}. \quad (3.7)$$

В отсутствие внутреннего давления ( $\mu = 0$ ) из (3.7) следует  $\beta_{cr} = 0$ . Это означает, что неограниченное возрастание прогиба в линейной постановке может быть только при исчезающе малой жесткости грунта. При значе-

нии  $\mu \ll 1$  имеем  $\beta_{cr} \approx \mu$ . Отметим, что эта оценка остается справедливой даже при нарушении условия  $\mu \ll 1$ . Так, при  $\mu = 0.3, 0.5$  из (3.7) имеем  $\beta_{cr} \approx 0.303, 0.516$ .

Другой предельный случай  $\beta \rightarrow \infty$  соответствует большой жесткости грунта по сравнению с жесткостью на изгиб трубы. Тогда из (3.7) следует  $\cos(\mu/2) = 0$  или  $\mu_{cr} = \pi$ . С учетом (3.1) имеем значение критического внутреннего давления

$$p_{cr} = \frac{P_E}{\pi R^2 (1 - 2\nu)}, \quad P_E = \frac{4\pi^2 D}{L^2},$$

где  $P_E$  – эйлерово значение продольной сжимающей силы в случае защемленных концов трубы ( $w = dw/d\xi = 0$  при  $\xi = -1/2, 1/2$ ).

Для большого, но конечного значения  $\beta$  примем  $\mu = \pi - \varepsilon$ , где  $\varepsilon \ll \pi$ . Тогда из (3.7) находим  $\varepsilon \approx 2\pi/(2 + \beta)$ . Поэтому в этом случае  $\mu \approx \pi\beta/(2 + \beta)$  и

$$p_{cr} = \frac{P_E \beta}{\pi R^2 (1 - 2\nu)(2 + \beta)}.$$

Если, например,  $\beta = 8$ , то  $p_{cr}$  снижается на 20% по сравнению с предельным случаем абсолютной жесткости грунта.

В случае отсутствия транспортируемой жидкости или малого внутреннего давления ( $\mu = 0$ ) выражение для относительного прогиба имеет вид

$$W = \left( \xi^4 - \frac{\beta^2 + 6\beta + 12}{2\beta(\beta + 2)} \xi^2 + \frac{\beta^4 + 8\beta^3 + 24\beta^2 + 48\beta + 96}{16\beta^4} \right) \left( 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \right),$$

$$W = \left( \frac{\beta^2 + 6\beta + 6}{\beta^3(\beta + 2)} \cos \beta \xi_1 - \frac{\beta^2 - 6}{\beta^3(\beta + 2)} \sin \beta \xi_1 + \frac{6}{\beta^4} \right) e^{-\beta \xi_1} \left( \xi \geq \frac{1}{2} \right). \quad (3.8)$$

Зависимость  $W(\beta)$  по первому выражению (3.8) при  $\xi = 0$  также показана на рис. 3.

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ ГРУНТА НА ИЗГИБ ТРУБОПРОВОДА

Определение параметра  $q_s$  или относительной жесткости грунта  $\beta$  может быть осуществлено формально по замеру прогиба  $w$  трубопровода или деформации крайних волокон, например, в центре пролета ( $\xi = 0$ ). Для этого могут быть использованы выражения (3.6), (3.8). Однако такой способ практически нереализуем. Здесь предлагается способ догружения сосредоточенной силой  $Q$  в средней точке  $\xi = 0$  и замеров соответствующего дополнительного прогиба или деформации в этой же точке. Такая обратная задача, очевидно, сопряжена с повышенными требованиями к экспериментальным данным и с вопросом о ее корректности. Эти вопросы здесь не обсуждаются.

Снова рассмотрим случай  $p \gg p_s$ , когда справедливо уравнение (3.2). Тогда относительно прогиба  $w$ , вызванного силой  $Q$ , имеем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4\mu^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} &= \frac{1}{2d} Q \delta(\xi - 0) & \left( 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \right), \\ \frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4\mu^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + 4\beta^4 w &= 0 & \left( \xi > \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\delta(\xi - 0)$  – дельта-функция. Граничные условия и условия сопряжения те же (3.3)–(3.5), но в них функция  $w(\xi)$  означает дополнительный прогиб.

Решения уравнений (4.1), удовлетворяющие условиям (3.3) и (3.5), имеют вид

$$\begin{aligned} w &= \frac{Q}{8d\mu^2} \left( C_1(1 - \cos 2\mu\xi) - \frac{1}{4\mu} \sin 2\mu\xi - C_2 + \frac{1}{2}\xi \right) & \left( 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \right), \\ w &= e^{-\gamma_2 \xi_1} (C_3 \cos \gamma_3 \xi_1 + C_4 \sin \gamma_3 \xi_1), \quad \xi_1 = \xi - \frac{1}{2} & \left( \xi > \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

После удовлетворения условиям (3.4), находим

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{4\mu\Delta} (\gamma_2^2 \cos \mu + 2\mu\gamma_1 \sin \mu + \beta^2), \\ C_2 &= \frac{1}{3\beta^2\mu\Delta} \left[ 2(\beta^4 + \beta^2\mu^2\gamma_1 - 2\mu^2) \cos \mu + \mu(\beta^2\gamma_2^2 - 2(\gamma_3^2 + \mu^2)\gamma_1) \sin \mu - 2\beta^4 \right], \\ C_3 &= \frac{Q}{16d\beta^2\mu\Delta} (\gamma_2 \cos \mu - 2\mu\gamma_1 \sin \mu + \beta^2), \\ C_4 &= \frac{Q}{16d\beta^2\mu\gamma_3\Delta} (\mu\gamma_1(\gamma_3^2 + \mu^2) \cos \mu - 2\mu^3 \sin \mu - \beta^2\gamma_1). \end{aligned}$$

В связи с тем, что определение параметра  $\beta$  по замеренным значениям прогиба или деформации трубы по выражениям (4.2) весьма затруднительно, рассмотрим более простой случай нулевого перепада давления ( $\mu = 0$ ). Тогда решения (4.2) приобретают вид

$$\begin{aligned} w &= \frac{Q}{24d} \left( \xi^3 - \frac{3(\beta + 2)}{4\beta} \xi^2 + \frac{\beta^3 + 6\beta^2 + 12\beta + 24}{16\beta^3} \right) & \left( 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \right), \\ w &= \frac{Qe^{-\beta\xi_1}}{24d} \left( \frac{3(\beta + 2)}{4\beta^3} \cos \beta\xi_1 - \frac{3(\beta - 2)}{4\beta^3} \sin \beta\xi_1 \right) & \left( \xi > \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Зная экспериментальное значение прогиба  $[w]$  в точке  $\xi = 0$ , можем определить параметр

$$\beta = \frac{z^{2/3} + 2z^{1/3} + 64W}{(16W - 1)z^{1/3}}, \quad (4.4)$$

$$z = 8 \left( (16W - 1) \left( 24W + \sqrt{576W^2 - 16W + 1} \right) + 1 \right), \quad W = \frac{24d}{Q} [w], \quad (4.5)$$

откуда  $q_s = 4d\beta^4$ .

Пусть надземная часть стальной трубы  $L = 25$  м, а ее внутренний диаметр  $2R$  и толщина стенок  $h$  равны соответственно 0.309 м и 0.008 м. Примем также  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па. При этом  $d \approx 51.27$  Па. Определим прогиб трубы под действием груза  $Q = 500$  Н при жесткости грунта  $q_s \approx 16612$  Па ( $\beta = 3$ ). В соответствии с первой формулой в (4.3) получаем прогиб  $w \approx 0.13$  м.

В обратной задаче определяем жесткость грунта  $q_s$ , если известно, что под действием дополнительного груза  $Q = 500$  Н прогиб трубопровода возрастает на  $[w] = 0.13$  м. По формуле (4.5)  $W \approx 0.25$  м, а по формуле (4.4)  $\beta \approx 3.04$ , поэтому  $q_s \approx 17589.6$  Па (или  $q_s/E = 8.8 \cdot 10^{-8}$ ).

Анализ показывает, что малые ошибки замера значения  $[w]$  приводят в обратной задаче к значительным ошибкам в определении значения жесткости грунта  $q_s$ . Например, при  $[w] = 0.125$  м значение  $q_s \approx 19712.5$  Па ( $\beta \approx 3.13$ ), а при  $[w] = 0.135$  м значение  $q_s \approx 15795.8$  Па ( $\beta \approx 2.96$ ).

На рис. 4, а приведены значения  $\beta$  от  $W$  также при ненулевых  $\mu$  (этот график построен при задании  $\beta$ ).

В силу принятого допущения о нормали к изогнутой оси поперечного сечения трубы продольная деформация нижнего волокна наружной

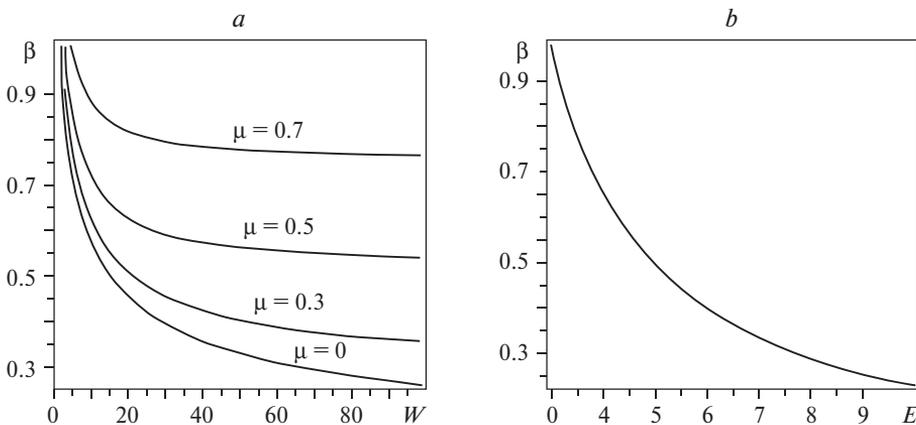


Рис. 4. а – Зависимость относительной жесткости грунта  $\beta$  от относительного прогиба трубопровода  $W$  для различных относительных давлений транспортируемой жидкости  $\mu$ ; б – зависимость относительной жесткости грунта  $\beta$  от относительной величины  $\epsilon'$

поверхности равна  $\varepsilon = -(R + h)(d^2w/dx^2)$ . С учетом выражения (4.3) при  $\xi = 0$  получаем

$$\varepsilon = \frac{Q(R + h)(2 + \beta)}{16L^2d\beta}.$$

Зависимость относительной жесткости грунта  $\beta$  от безразмерной величины  $\varepsilon' = (16L^2d/Q(R + h))[\varepsilon]$  показана на рис. 4, *b*.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В идеализированной системе труба – транспортируемая жидкость – грунт определяется прогиб трубопровода в зависимости от геометрических и механических характеристик трубы, от плотности и давления жидкости, упругой реакции грунта. Учитывается влияние на изгиб взаимодействия внутреннего перепада давления и кривизны осевой линии, а также возникающего продольного усилия в результате осесимметричной деформации трубы. Рассмотрен случай большого внутреннего давления в трубопроводе и неглубокого его залегания в грунте, когда задача существенно упрощается. С увеличением внутреннего перепада давления происходит рост прогиба пролета трубопровода. Определяются критическое значение жесткости грунта, ниже которого в линейной задаче происходит неограниченное возрастание прогиба, а также значение внутреннего перепада давления, выше которого происходит такое возрастание.

В обратной задаче по экспериментально определенным значениям прогиба или деформации трубы определяется значение жесткости грунта.

## § 2. ВСПЛЫТИЕ ПОДВОДНОГО ГАЗОВОГО ТРУБОПРОВОДА

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Всплытие подводного трубопровода сопровождается изгибом его некоторой части. Анализ этого изгиба и возможного всплытия является необходимым с практической точки зрения [1–3]. Такое равновесное положение сооружения является недопустимым для его безопасной эксплуатации.

Подъем более тяжелого трубопровода, чем подъемная сила воды, вызывается температурным удлинением при сезонном нагреве воды, изменением температуры перекачиваемого газа, отсутствием возможности изгибаться по дну водоема для компенсации указанного удлинения, изменением рельефа дна (подъем, опускание, сдвиги), донных течений и т.д. Наибольшая вероятность всплытия наступает при одновременной реализации указанных факторов. Возможно, играют роль малые на первый взгляд факторы, проявляющиеся одновременно с другими. В литературе отмечается недостаточная разработанность механизмов явления. Обычным является недостаток информации о причинах наступившего происшествия. В качестве примера можно привести всплытие двух обетонированных газовых трубопроводов «Бованенково – Ухта-2», проложенных рядом с другими трубопроводами и находящимися в равных условиях с ними в Байдарацкой бухте (залив Карского моря, глубина 20 м, внутренний диаметр стальной трубы 1.20 м, рабочее давление 12 МПа).

Свариваемые между собой секции трубопровода изготавливаются из стальной трубы, с которой с помощью вставок центрируется стальная цилиндрическая оболочка большего диаметра. Кольцевое пространство между ними заполняется бетонным раствором. Такая слоистая конструкция обеспечивает необходимые балластные, теплоизоляционные, антикоррозионные свойства, защищает от механических повреждений внутреннюю трубу [2–7].

Большое внимание уделено анализу прочности и статической продольной устойчивости трубопровода при различных условиях взаимодействия

1. Левин С. М. Подводные трубопроводы. М.: Недра, 1970. 280 с.
2. Астафьев В. Н. Проектирование подводных трубопроводов в условиях арктических морей. Уфа: УГНТУ, 2000. 76 с.
3. Palmer A. C., King R. A. Subsea pipeline engineering. Oklahoma: PWC, 2004. 570 p.
4. Айнбиндер А. Б. Расчет магистральных и промысловых трубопроводов на прочность и устойчивость: Справочное пособие. М.: Недра, 1991. 287 с.
5. Мансуров М. Н., Черный В. П. Методы расчета морских трубопроводов на прочность и устойчивость // Газовая промышленность. 2005. № 4. С. 47–51.
6. Peek R., Yun H. Flotation to trigger lateral buckles in pipelines on a flat seabed // Journal of Engineering Mechanics. 2007. V. 4. P. 442–451.
7. Зарипов Р. М., Масалимов Р. Б. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния подводного морского газопровода с учетом разжижения грунта и параметров эксплуатации // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 4. С. 152–166.

с основанием на земле, под землей, под водой [4–13]. Упругое выпучивание вверх подводного трубопровода является спусковым механизмом для его дальнейшего подъема. При этом важным является учет начальной кривизны осевой линии, так как ее наличие обуславливает дальнейший подъем сооружения [9, 10]. Кроме указанных выше, определяющими факторами являются осевые сжимающие силы, возможное уменьшение разности веса конструкции и подъемной силы воды в силу разных причин. Определенную роль играют колебания давления газа с частотой перекачивающих станций, возникающие ударные явления, землетрясения [14]. Изучается подъем трубопровода в результате вибрации опор. Задачи изгиба трубопровода ставятся в линейной и нелинейной постановке. Развита аналитические и численные методы. Обширный обзор литературы дан в [15].

При анализе явления представляется необходимым учет взаимодействия кривизны осевой линии трубопровода и давлений воды и газа [16]. В [17] предложена простейшая модель всплытия с учетом изменения давления воды и газа при подъеме трубопровода. В данной работе эта модель обобщается с учетом упругой реакции опор на продольное перемещение трубы, осевой силы, зависящей от угла поворота сечения, осевой и кольцевой деформации трубы, температурного расширения. Учет взаимодействия силы растяжения с кривизной осевой линии трубы приводит к уточнению распределенной поперечной силы. Кроме того, дается строгий вывод выражения поперечной силы в зависимости от давления воды и газа, подъема трубы и кривизны осевой линии. Такое обобщение позволяет описывать подъем трубопровода, в частности, под действием давления газа, превышающего критическое внутреннее давление в трубе. Могут быть рассмотрены также другие режимы всплытия, которые не описываются приближенной моделью [17].

Во всех указанных работах принимаются допущения о том, что при изгибе круговая форма поперечного сечения трубопровода не меняется, это сечение перпендикулярно осевой линии, напряжения в поперечном направ-

- 
8. Лантвева Т.И., Мансуров М.Н. Сравнительный анализ устойчивости морских и сухопутных трубопроводов // Газовая промышленность. 2009. № 4. С. 37–40.
  9. Hong Z., Liu R., Liu W., Yan S. Study on lateral buckling characteristics of a submarine pipeline with a single arch symmetric initial imperfection // Ocean Engineering. 2015. V. 108. P. 21–32.
  10. Chee J., Walker A., White D. Controlling lateral buckling of subsea pipeline with sinusoidal shape pre-deformation // Ocean Engineering. 2018. V. 151. P. 170–190.
  11. Wang Z., Tang Y. Study on symmetric buckling mode triggered by dual distributed buoyancy sections for subsea pipelines // Ocean Engineering. 2020. V. 216. P. 105–110.
  12. Chen Y., Dong S., Zang Z. Buckling analysis of subsea pipeline with idealized corrosion defects using homotopy analysis method // Ocean Engineering. 2021. V. 234. P. 25–35.
  13. Wang Z., Tang Y., Guedes S. C. Imperfection study on lateral thermal buckling of subsea pipeline triggered by a distributed buoyancy section // Marine Structures. 2021. V. 76. P. 10–29.
  14. Bi K., Hao H. Using pipe-in-pipe systems for subsea pipeline vibration control // Engineering Structures. 2016. V. 109. P. 75–84.
  15. Li S., Karney B. W., Liu G. FSI research in pipeline systems – A review of the literature // J. of Fluids and Structures. 2015. V. 57. P. 277–297.
  16. Игатов М.А. Static Problems of Hydroelasticity. М.: Fizmatlit. 1998. 208 p.
  17. Ильгамов М.А. Модель всплытия подводного трубопровода // ДАН. Физика, Технические науки. 2022. Т. 504. С. 12–16.

лении малы по сравнению с напряжением в продольном направлении (гипотезы Кирхгоффа). Эти допущения приемлемы, если диаметр трубопровода и его прогиб малы по сравнению с длиной волны изгиба. Как правило, указанные условия практически выполняются для магистральных и промышленных газовых трубопроводов.

При допущениях, указанных выше, жесткость растяжения  $K$  и изгибная жесткость  $D$  трубопроводов и других подобных сооружений (например, слоистого сверхпроводящего кабеля [18]) определяется суммой жесткостей  $n$  слоев со своими модулями упругости  $E_n$ , средними радиусами  $R_n$  и толщинами  $h_n$ . Также определяется общий вес  $\rho F$  на единицу длины трубопровода. В данном случае имеются три концентрических цилиндрических слоя, для которых

$$K = 2\pi \sum_{n=1}^3 E_n R_n h_n, \quad D = \pi \sum_{n=1}^3 E_n R_n^3 h_n, \quad \rho F = 2\pi \sum_{n=1}^3 \rho_n R_n h_n, \quad (1.1)$$

где  $\rho$  – средний удельный вес,  $\rho_n$  – удельный вес слоя,  $F$  – общая площадь поперечного сечения трубы. При записи (1.1) предполагается  $h_n \ll R_n$ . Используется следующее уравнение статического изгиба трубопровода

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{d}{dx} \left( N \frac{dw}{dx} \right) = -\rho F + q, \quad (1.2)$$

где положительное направление прогиба осевой линии  $w(x)$  принято вверх,  $x$  – координата вдоль оси,  $N$ ,  $q$  – продольная растягивающая и поперечная распределенная силы.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На рис. 1 приводится схема пролета трубопровода длиной  $L$  между опорами на дне водоема глубиной  $H$ . Имеется некоторый подъем дна между опорами, максимальное значение прогиба  $w$  не превышает глубины  $H$ . Будем предполагать, что  $L/H > 10$ , изогнутая форма трубопровода является пологой кривой, угол поворота поперечного сечения мал по сравнению с единицей, поперечное сечение остается круговым и перпендикулярным к осевой линии. Подъем трубопровода происходит медленно, поэтому инерционные силы в системе и гидродинамические силы в результате обтекания водой не учитываются. В этих предположениях будем пользоваться уравнением изгиба (1.2) и определять устойчивые изогнутые положения равновесия трубопровода.

Как противоположный пример, где существенны инерционные силы, внешнее обтекание водой, изменение объема, его формы и Архимедовой силы, приведем всплытие газового пузыря после подводного взрыва [19].

18. *Ilgamov M. A., Ratrouf R. A.* Large deflection of superconducting cable // International Journal of Nonlinear Mechanics. 1999. V. 34, No. 5. P. 869–880.

19. *Овсянников Л.В.* О всплытии пузыря // Некоторые проблемы математики и механики. К 70-летию М.А. Лаврентьева. Л.: Наука, 1970. С. 209–222.

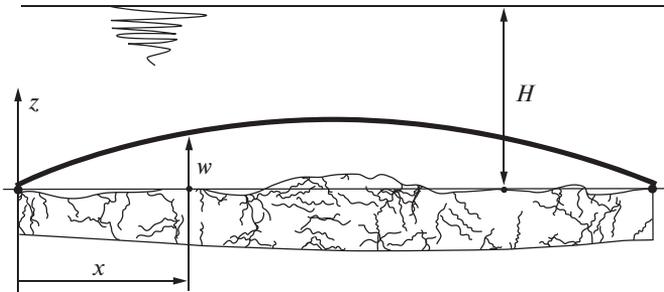


Рис. 1. Схема подводного трубопровода

Опоры находятся на одном уровне и неподвижны в вертикальном направлении. Одна из них обладает конечной жесткостью  $C$  в горизонтальном направлении, другая — абсолютно жесткая. Примем относительно функций продольного перемещения  $u(x)$  и прогиба  $w(x)$  условия

$$\begin{aligned} N = Cu, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = B \frac{d^2w}{dx^2} \quad (x = 0), \\ u = 0, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = B \frac{d^2w}{dx^2} \quad (x = L), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $B$  и  $C$  — жесткости опор на поворот сечения трубы и продольное перемещение.

Поперечная распределенная нагрузка  $q$ , входящая в (1.2), обусловлена воздействием сред на внешнюю и внутреннюю поверхности трубы ( $q = q_1 + q_2$ ). На рис. 2 изображен изогнутый элемент  $dx = \kappa^{-1}d\varphi$  трубы. Элементарная площадка на внешней поверхности равна  $(\kappa^{-1} - R_1 \sin \theta)R_1 d\varphi d\theta$ , где  $\kappa$  — кривизна осевой линии,  $R_1$  — радиус внешней поверхности трубы,  $\theta$  — центральный угол в поперечном сечении. Так как давление воды на уровне опор ( $z = 0$ ) и на уровне осевой линии с прогибом  $z = w$  равно соответственно  $\rho_l H$  и  $\rho_l(H - w)$ , то на внешней поверхности изогнутой трубы оно изменяется по закону  $\rho_l(H - w - R_1 \sin \theta)$ , где  $\rho_l$  — удельный вес. Элементарная поперечная сила от этого давления, приходящаяся на длину  $dx$  осевой линии, равна

$$q_1 R_1 dx d\theta = -\rho_l R_1 (\kappa^{-1} - R_1 \sin \theta) (H - w - R_1 \sin \theta) \sin \theta dx d\theta.$$

Ввиду показанного на рис. 2 начала угла  $\theta$  здесь в правой части взят знак минус. Из-за оговоренной выше пологости осевой линии трубопровода  $((dw/dx)^2 \ll 1)$  принято  $\cos(dw/dx) \approx 1$ . Проинтегрировав это выражение по  $\theta$  в пределах от 0 до  $2\pi$  и учитывая  $dx = \kappa^{-1}d\varphi$ , получаем

$$q_l = \rho_l F_l + \rho_l F_l (H - w) \kappa, \quad F_l = \pi R_l^2. \quad (2.2)$$

Как известно, давление и плотность газа по высоте убывают по экспоненте.

Но до высот порядка  $10^3$  м может быть взят линейный закон. Давление  $p_g(w)$  и плотность  $\rho_g(w)$  на уровне  $z = w(x)$  примем приближенно

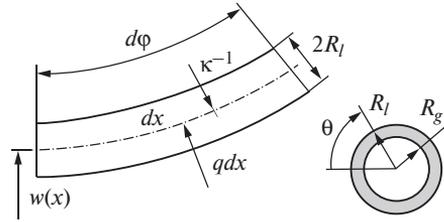


Рис. 2. Элемент  $dx$  с плоскими поперечными сечениями, перпендикулярными к изогнутой осевой линии

$$\frac{p_g(w)}{p_g} = 1 - \frac{\rho_g w}{p_g}, \quad \frac{\rho_g(w)}{\rho_g} = 1 - \frac{\rho_g w}{p_g}, \quad (2.3)$$

где  $\rho_g, p_g$  – значения их на уровне опор ( $z = 0$ ). Они связаны между собой изотермическим законом. Отметим, при  $w = 100$  м и атмосферных значениях параметров по (2.3) получаем уменьшение плотности и давления на 1% (известная оценка из аэростатики).

Для определения распределенной поперечной силы  $q_g$  нужно повторить приведенный выше вывод для  $q_l$ . С учетом (2.3) получаем давление на внутреннюю стенку трубы  $p_g - \rho_g(w + R_g \sin \theta)$ . Элементарная площадка определяется так же, что выше, но вместо  $R_l$  нужно подставить радиус внутренней поверхности  $R_g$ . Тогда вместо (2.2) имеем

$$q_g = -\rho_g F_g \left( 1 - \frac{\rho_g w}{p_g} \right) - (p_g - \rho_g w) F_g \kappa, \quad F_g = \pi R_g^2. \quad (2.4)$$

Первые члены в (2.2) и (2.4) дают подъемную силу воды (Архимедову силу) и вес газа в зависимости от высоты подъема. Второй член в скобках в (2.4) дает поперечную силу на уровне  $z = w$ . В выражении (2.4) сохранены члены с множителем  $w$  только в первой степени. С учетом  $q = q_l + q_g$ , выражений (2.2), (2.4) и связи кривизны осевой линии с прогибом  $\kappa \approx d^2 w / dx^2$  получаем

$$q = \rho_l F_l - \rho_g F_g \left( 1 - \frac{\rho_g w}{p_g} \right) + (\rho_l F_l H - p_g F_g - (\rho_l F_l - \rho_g F_g) w) \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (2.5)$$

При определении продольного усилия  $N$  нужно рассмотреть осесимметричную и продольную деформацию трубы под действием давлений воды и газа. Для этого привлекаем загон Гука в осесимметричном случае

$$N_x \approx \frac{K(\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta)}{2\pi R(1 - \nu^2)}, \quad N_\theta \approx \frac{K(\epsilon_\theta + \nu \epsilon_x)}{2\pi R(1 - \nu^2)},$$

$$R = \frac{1}{3}(R_1 + R_2 + R_3), \quad v = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3). \quad (2.6)$$

Здесь осевое и окружное усилия  $N_x$ ,  $N_\theta$  приходятся на единицу длины в окружном и осевом направлениях. Так как согласно (1.1) жесткость растяжения  $K$  записана для всей трубы, то в уравнениях (2.6) есть деление на  $2\pi R$ . Величины  $R$ ,  $v$  и  $\varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_x$  являются средними значениями радиуса, коэффициента Пуассона и деформаций в слоистой трубе. Они являются сугубо приближенными, как и выражения (1.1). Погрешности их уменьшаются с уменьшением отношения  $R_1/R_g$ .

Исключив  $\varepsilon_\theta$  в (2.6), получаем

$$N_x = \frac{K\varepsilon_x}{2\pi R} + vN_\theta. \quad (2.7)$$

Второй член в (2.7), содержащий коэффициент  $v$ , является поправочным, поэтому ограничиваемся приближенным определением силы  $N_\theta$ , не учитывая изменения ее в зависимости от  $w$ . Из уравнения равновесия  $(p_g R_g - p_l R_l) d\theta - 2N_\theta \sin(d\theta / 2) = 0$  (рис. 2) следует  $N_\theta = (p_g R_g - p_l R_l)$ . Исключив  $N_\theta$  в выражении (2.7), получаем

$$N_x = \frac{K\varepsilon_x}{2\pi R} + v(p_g R_g - p_l R_l) - \frac{KaT}{2\pi R}, \quad (2.8)$$

где учтена также температурная деформация с коэффициентом  $a$  [3, 4]. Здесь  $T$  – разность температур в рассматриваемое время и при монтаже сооружения. Значения  $a$  и  $T$  считаем постоянными по всей длине  $L$ .

С учетом средней упругой деформации по толщине стенки трубы

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2,$$

а также  $N \approx 2\pi RN_x$ ,  $\pi R(p_g R_g - p_l R_l) \approx p_g F_g - p_l F_l$ , выражение (2.8) запишем в виде

$$\frac{du}{dx} = \frac{N - 2v(p_g F_g - p_l F_l)}{K} - \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 + aT.$$

Проинтегрируем это выражение по  $x$  от 0 до  $L$ . При этом левая часть его равна  $u(L) - u(0)$ . Из условий (2.1) следует  $u(L) = 0$ ,  $u(0) = N/C$ . Тогда получаем следующее выражение для осевого усилия

$$N = \frac{K}{1 + \lambda} \left( \frac{1}{2L} \int_0^L \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx - aT \right) + \frac{2v(p_g F_g - p_l F_l)}{1 + \lambda}, \quad \lambda = \frac{K}{CL}. \quad (2.9)$$

Подставив (2.5) и (2.9) в уравнение (1.2), получаем уравнение

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \left( \alpha + \mu w - \eta \int_0^\pi \left( \frac{dw}{d\xi} \right)^2 d\xi \right) \frac{d^2 w}{d\xi^2} - \beta w = \gamma,$$

$$\alpha = \frac{(p_g F_g - \rho_l F_l H)(1 - \chi)}{P_*} + \frac{KaT}{(1 + \lambda)P_*}, \quad P_* = \frac{\pi^2 D}{L^2}, \quad (2.10)$$

$$\chi = \frac{2\nu}{1 + \lambda}, \quad \beta = \frac{\rho_g^2 F_g L^2}{\pi^2 \rho_g P_*}, \quad \mu = \frac{(\rho_l F_l - \rho_g F_g)L}{P_*},$$

$$\eta = \frac{\pi K}{2P_*(1 + \lambda)}, \quad \gamma = \frac{(\rho_l F_l - \rho F - \rho_g F_g)L}{\pi^2 P_*}, \quad \xi = \frac{\pi x}{L},$$

где прогиб  $w$  отнесен к длине  $L$ .

Независимые параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $\eta$ ,  $\gamma$ ,  $\chi$ ,  $\lambda$  и члены уравнения (2.10) являются безразмерными. Все параметры возрастают с уменьшением величины  $P_*$ , представляющей собой критическое значение осевой сжимающей силы на трубу (Эйлеровое значение). Параметр  $\alpha$  характеризует влияние давлений газа и воды, а также температурного расширения на изгиб трубопровода. В его составе параметром  $\chi$  учитывается отношение жесткостей трубы и опоры в продольном направлении (при малом их отношении  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\chi \rightarrow 2\nu$ , при большом отношении  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\chi \rightarrow 0$ ). Параметрами  $\beta$  и  $\mu$  учитываются влияние уменьшения веса газа и его давления на стенку трубы с подъемом на величину  $w$  (в составе  $\mu$  учитывается также уменьшение давления воды). Параметр  $\eta$  характеризует влияние на изгиб продольной растягивающей силы, возникающей в результате подъема трубы, зависит от жесткости на растяжение и указанного выше отношения жесткостей ( $\lambda$ ). Параметр  $\gamma$  представляет собой разность подъемной силы воды и веса трубы и содержащегося в ней газа, поделенную на критическую силу сжатия.

При решении уравнения (2.10) ограничимся случаем больших значений  $B$  в условиях закрепления (2.1) и примем  $d^2 w / d\xi^2 = 0$  ( $\xi = 0, \pi$ ). Такое приближение является приемлемым во многих случаях нелинейного изгиба [20]. Отметим, что условия относительно продольного перемещения выполнены при выводе уравнения (2.10). Решение (2.10) будем искать в виде ряда по  $\sin n\xi$ , где  $n = 1, 3, \dots$  ввиду симметрии изгиба относительно середины пролета. Этот ряд быстро сходится из-за наличия в (2.10) члена с четвертой производной. Например, при  $\alpha = \beta = \mu = \eta = 0$  сходимость  $n^{-5}$  (при указанных ненулевых параметрах она ухудшается). Поэтому ограничиваемся применением только аппроксимации  $w = W \sin \xi$ . Подставив ее в (2.10), умножив на  $\sin \xi$  и проинтегрировав в пределах от 0 до  $\pi$ , получаем приближенное уравнение относительно прогиба в середине пролета

$$\pi^2 \eta W^3 - 5\mu W^2 + 2\pi(1 - \alpha - \beta)W - 8\gamma = 0. \quad (2.11)$$

Анализ поведения трубопровода в общем случае со многими входными параметрами по (2.11) требует специального рассмотрения. Здесь ограничимся анализом некоторых характерных частных случаев. Исключим из рассмотрения влияние температурного расширения, так как оно затрагивается в работах [4–7, 13]. Основное внимание уделим выяснению роли давления газа. Температурный фактор усиливает эту роль при изгибе трубопровода.

### 3. ПОДЪЕМ ПРИ ВЫСОКОМ ДАВЛЕНИИ ГАЗА И МАЛОМ ПРЕВЫШЕНИИ ВЕСА ТРУБОПРОВОДА НАД ПОДЪЕМНОЙ СИЛОЙ

При высоком давлении газа предполагаем  $\alpha \gg 1 - \beta$ , а малом отличии веса трубопровода от Архимедовой силы  $-2\pi\alpha W \gg 8|\gamma|$ . Так как максимальное значение  $W = (H - R_1)/L$ , то последнее условие может быть записано  $\alpha H \gg |\gamma|L$ . Здесь учтено  $R_1 \ll H$ . Приближенное решение уравнения (2.11) примем в виде суммы  $W = W_\alpha + W_\gamma$  где  $W_\alpha$  – прогиб, обусловленный давлением газа и воды,  $W_\gamma$  – прогиб, обусловленный плавучестью трубопровода и другими параметрами. Исследуем случай преобладающего вклада давления газа на значение прогиба над вкладом веса и подъемной силы. В приближенном решении будем пренебрегать  $W_\gamma^2$  по сравнению с  $W_\alpha^2$ .

Подставляя указанную сумму в (2.11), получаем уравнения

$$\begin{aligned} W_\alpha [\pi\eta W_\alpha^2 + 2(1 - \alpha - \beta)] &= 0, \\ W_\gamma [3\pi^2\eta W_\alpha^2 - 10\mu W_\alpha + 2\pi(1 - \alpha - \beta)] &= 8\gamma + 5\mu W_\alpha^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Три корня первого уравнения (3.1) имеют вид

$$W_\alpha = 0, \quad W_\alpha = \pm \sqrt{\frac{2(\alpha + \beta - 1)}{\pi\eta}}. \quad (3.2)$$

Значение  $W_\gamma$  из второго уравнения (3.1), соответствующее корню  $W_\alpha = 0$ ,

$$W_\gamma = \frac{4\gamma}{\pi(1 - \alpha - \beta)} \quad (3.3)$$

представляет собой также решение линейного уравнения (2.11) при  $\eta = 0$ ,  $\mu = 0$  и условии  $\alpha < 1 - \beta$ . Им не охватывается поведение трубопровода, зависящее от параметров упругой нелинейности, препятствия опор изгибу и от изменения давления воды и газа при подъеме. Значение  $\alpha = 1 - \beta$  является критическим, при котором линейное решение (3.3) неограничен-

но возрастает. При соответствующем внутреннем перепаде давления теряется устойчивость прямолинейной формы трубы [16]. Корни  $W_\alpha = 0$  и (3.3) не удовлетворяют названным в начале раздела условиям и далее не рассматриваются.

Ненулевые значения  $W_\alpha$  соответствуют нелинейному изгибу после потери устойчивости. Знаки их определяются начальным отклонением трубы вверх или вниз от прямой, соединяющей опоры.

Вследствие принятого выше положительного направления прогиба и сил решение (3.2) со знаком плюс определяет подъем трубопровода под действием внутреннего давления в трубе. Подставив  $W_\alpha$  во второе уравнение (3.1), получаем выражение для  $W_\gamma$ . Поэтому общий прогиб равен

$$W = W_\alpha + W_\gamma = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi\eta}} + \frac{4\pi\eta\gamma + 5\mu\alpha}{2\pi^2\eta\alpha - 5\mu\sqrt{2\pi\eta\alpha}}. \quad (3.4)$$

Так как превышению веса над подъемной силой соответствует  $\gamma < 0$ , то в (3.4) значение  $W$  отличается от  $\sqrt{2\alpha/\pi\eta}$  в зависимости от соотношения членов в числителе и знаменателе второго члена (3.4). Такие устойчивые равновесные положения могут быть реализованы при дополнительных условиях, задаваемых в конкретных случаях.

Принимая для середины пролета трубопровода значение безразмерного прогиба, равным  $W \approx H/L$ , из (3.4) получаем критерий всплытия. В частности, из этого критерия может быть определено то значение параметра  $\alpha$  (внутреннего перепада давления), когда происходит всплытие трубопровода, при других известных входных параметрах. При отношении  $L/H$  порядка  $10^2$  и более критерий может быть упрощен. В исходных параметрах он может быть представлен в виде

$$\frac{H}{L} = \sqrt{\frac{2p_g F_g}{\pi^3 ERh}} + \frac{2L(\rho F - \rho_l F_l)}{\pi^3 p_g F_g}. \quad (3.5)$$

Значение  $W_\alpha$  с отрицательным знаком в (3.2) реализуется, если имеется углубление дна водоема между опорами и  $\gamma < 0$ . Тогда общий прогиб определяется выражением (3.4), в знаменателе второго члена в нем знак минус заменяется на плюс.

В зависимости от входных параметров опускание и подъем трубопровода отличаются по величине. Такое поведение определяется параметром  $\mu$ , которым учитывается изменение давления воды и газа на стенки трубы при ее изгибе. Если не учитывать это изменение (как в [6–13]), то получаются равные значения подъема и опускания трубопровода.

Верхний предел давления газа определяется прочностью трубы. Размеры стальных магистральных, технологических и промысловых труб определяются по ГОСТ 20295-74. Например, для трубы средним диаметром  $2R = 0.524$  м и толщиной  $h = 0.006$  м кольцевое растягивающее напряжение равно  $\sigma_\theta \approx p_g R/h = 44p_g$ . Должно быть  $m\sigma_\theta = \sigma_b$ , где предел прочности

$\sigma_b = 600$  МПа,  $m$  – запас прочности, который задается нормами в соответствующей области применения труб (примем  $m = 1.5$ ). Поэтому для данной трубы максимально допустимое давление газа  $p_g = 9.1$  МПа. Если ее толщина составляет  $h = 0.01$  м, то  $p_g = 16.6$  МПа. Для трехслойной трубы можно принять эти же оценки с большим запасом прочности, чем  $m = 1.5$ , за счет наличия двух внешних слоев.

В принятом выше условии  $\alpha \gg 1 - \beta$  примем  $T = 0$ . Оценки показывают, что  $\beta$  значительно меньше единицы. Тогда это условие приобретает вид  $p_g F_g \gg P_*$ . Для однослойной трубы  $P_* = \pi^2 D L^{-2} = \pi^3 E R^3 h L^{-2}$  и  $p_g F_g \gg \pi^2 E R h L^{-2}$ . Для рассматриваемой трубы приняв  $p_g \approx 10$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, получаем  $L^2 \gg 600$  м<sup>2</sup>. Таким образом, можно считать, что условие  $\alpha \gg 1$  выполняется при длине пролета порядка 100 м и выше. Этот результат объясняется тем, что критическая сила  $P_*$  уменьшается как  $L^{-2}$ .

#### 4. ПОДЪЕМ ПРИ СВОБОДНОМ ПРОДОЛЬНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ТРУБОПРОВОДА НА ОПОРАХ

При этом условии в (2.1) необходимо принять  $C = 0$ . Это приводит в (2.9) к значениям  $\lambda = \infty$  и  $N = 0$ , а в (2.10)  $-\chi = 0$ ,  $\eta = 0$ . Решение получающегося уравнения из (2.10) остается таким же, что выше. Поэтому в уравнении (2.11) не будет первого члена. Решение уравнения изгиба трубопровода в этом случае дано в [17].

Уравнение относительно прогиба в середине пролета

$$W^2 - \frac{3\pi(1 - \alpha - \beta)}{8\mu} W + \frac{3\gamma}{2\mu} = 0, \quad (4.1)$$

решение которого

$$W = \frac{3\pi(1 - \alpha - \beta)}{16\mu} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{128\mu\gamma}{3\pi^2(1 - \alpha - \beta)^2}} \right). \quad (4.2)$$

В случае малого отношения глубины  $H$  водоема к пролету  $L$  между опорами можно не учитывать изменение поперечной силы, зависящей от давления газа и воды, а также от прогиба. Кроме того, по постановке задачи максимальное значение безразмерного прогиба равно  $w = (H - R_1)L^{-1}$ . Поэтому отношение первого члена в (4.1) к третьему составляет приблизительно  $\pi^2 H L^{-1}$ . С такой погрешностью первый член в (4.1) может быть опущен. При этом безразмерный прогиб середины пролета равен

$$W = \frac{4\gamma}{\pi(1 - \alpha - \beta)}. \quad (4.3)$$

Как следует из (4.3), подъем ( $W > 0$ ) может быть только при превышении подъемной силы воды над весом трубопровода ( $\gamma > 0$ ). При этом пре-

вышение давления газа над давлением воды на уровне опор ( $\alpha > 0$ ) приводит к большему подъему, а при  $\alpha < 0$  – к меньшему подъему. Равенство  $\alpha + \beta = 1$  дает критическую комбинацию параметров, при которой решение (4.3) неограниченно возрастает. Для рассмотрения решения при  $\alpha + \beta \geq 1$  требуется учет нелинейности деформирования трубы. Будем рассматривать только случай  $\alpha + \beta < 1$ .

Определим комбинацию входных параметров, при которой происходит всплытие трубопровода, т.е. безразмерный прогиб равен  $W = (H - R_1)L^{-1}$ . Из (4.3) получаем

$$4L\gamma = \pi(H - R_1)(1 - \alpha - \beta).$$

В случае легких газов ( $\beta \ll 1$ ) необходимое превышение Архимедовой силы  $\rho_l F_l$  над весом  $\rho F$  через исходные параметры равно

$$\rho_l F_l - \rho F \approx \frac{\pi^3 H}{4gL^2} \left( \frac{\pi^2 D}{L^2} + g\rho_l H F_l - p_g F_g \right). \quad (4.4)$$

Таким образом, чем больше давление газа  $p_g$ , тем меньше необходимая разность сил  $\rho_l F_l - \rho F$  для всплытия трубопровода. Кроме того, эта разность уменьшается с уменьшением изгибной жесткости  $D$  и глубины водоема  $H$ , с увеличением длины пролета  $L$  между опорами. При давлении газа

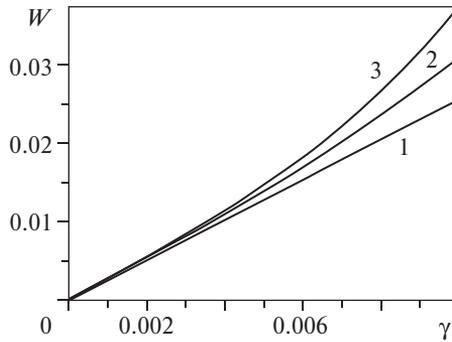
$$p_g = \frac{\pi^2 D}{L^2 F_g} + \frac{g\rho_l H F_l}{F_g}. \quad (4.5)$$

всплытие происходит и при нулевой плавучести. Согласно (4.4) это может происходить и при превышении давления  $p_g$ , определяемого формулой (4.5), когда вес трубопровода больше подъемной силы воды. Это не противоречит и решению (4.3), где в этом случае  $\alpha > 1$ ,  $\gamma < 0$ . Однако для более точного определения условия всплытия необходимо учитывать упругую нелинейность трубы и возможные продольные перемещения на опорах. Отметим, что согласно (4.5) давление газа  $p_g$  идет на преодоление изгибной жесткости трубы длиной  $L$  и давления воды  $p_l = g\rho_l H$ .

В предыдущем анализе не учитывалось увеличение поперечной силы с поднятием трубопровода. Теперь учтем этот фактор (параметр  $\mu$ ). При малой разнице между весом трубопровода и подъемной силой воды, считая второй член под корнем в (4.2) меньше единицы, сохраним три члена в разложении в степенной ряд. Верхний знак перед корнем дает результат, не имеющий физического смысла. С учетом нижнего знака получаем

$$W \approx \frac{4\gamma}{\pi(1 - \alpha - \beta)} \left( 1 + \frac{\mu\gamma}{(1 - \alpha - \beta)^2} \right). \quad (4.6)$$

Здесь первый член совпадает с линейным решением (4.3).



**Рис. 3.** Безразмерный прогиб  $W$  середины пролета в случае легкого газа ( $\beta \ll 1$ ) в зависимости от безразмерного параметра подъемной силы  $\gamma$ . Кривые 1, 2, 3 соответствуют формулам (4.3), (4.6), (4.2), в которых принято  $\alpha = 0.5$ ,  $\mu = 5$

Из рис. 3 следует, что при значениях параметра  $\gamma < 0.003$  все три решения совпадают. С повышением значения  $\gamma$  эти решения расходятся. Важный результат состоит в том, что учет убывания внешнего давления с поднятием трубопровода (параметр  $\mu$ ) и соответствующего решения нелинейного уравнения (4.2) показывает всплытие при меньших значениях  $\gamma$ .

В соответствии с (4.2) условием поднятия трубопровода ( $W > 0$ ) являются неравенства

$$\frac{1 - \alpha - \beta}{\mu} > 0, \quad \frac{4.3\mu\gamma}{(1 - \alpha - \beta)^2} < 1. \quad (4.7)$$

Как было указано выше,  $1 - \alpha - \beta > 0$ . Поэтому по первому неравенству должно быть  $\mu > 0$  или  $\rho_l F_l > \rho_g F_g$ , что практически всегда выполняется. Второе неравенство (4.7) дает комбинацию параметров для  $W > 0$ . Чем больше внутреннее давление (параметр  $\alpha$ ) и уменьшение внешнего давления при подъеме (параметр  $\mu$ ), тем меньше может быть превышение подъемной силы над весом трубопровода ( $\gamma$ ).

Отношение подъема при учете параметра  $\mu$  (4.6) и без его учета (4.3) равно  $1 + \mu\gamma(1 - \alpha - \beta)^{-2}$ . В исходных параметрах оно равно

$$\frac{W(\mu \neq 0)}{W(\mu = 0)} \approx 1 + \frac{g^2 L^2 (\rho_l F_l - \rho_g F_g)(\rho_l F_l - \rho F - \rho_g F_g)}{\pi (P_* + p_l F_l - p_g F_g + g^2 \rho_g^2 F_g L^2 (\pi p_g)^{-1})^2}.$$

Так как  $P_* = \pi^2 D L^2$ , то в знаменателе  $(\pi^3 D_E L^2)^2$ , где  $D_E$  – эффективная изгибная жесткость. В числителе можно ввести эффективную поперечную силу  $P_E$ . Таким образом,  $P_E$  зависит от плотностей воды и газа и ради-

усов контактных поверхностей, а  $D_E$  – кроме истинной изгибной жесткости слоистого трубопровода  $D$ , также от давления и плотностей сред. При  $\rho_g = 0, p_g = 0$  имеем более наглядное значение  $D_E = D + \pi^{-2} g \rho_l F_l L^2 H$ .

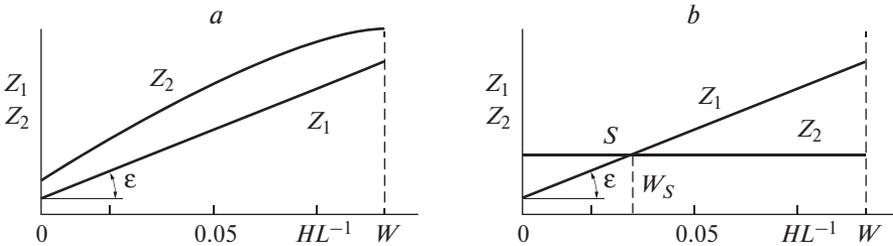
Далее рассмотрим поведение трубопровода в случае легкого газа ( $\rho_g F_g \ll \rho_l F_l, \beta \ll 1$ ). С некоторой погрешностью можно рассматривать и случай природных газов, для которых при давлении порядка 10 МПа удельный вес  $\rho_g$  меньше  $\rho_l$  на порядок.

Перепишем уравнение (2.11) без первого члена в исходных параметрах, пользуясь обозначениями  $\alpha, \mu, \gamma, P_*$  согласно (2.10),

$$\frac{\rho_l F_l}{\rho F} + \frac{\pi^3 p_g F_g}{4\rho FL} W = 1 + \frac{\pi^5 D}{4\rho FL^3} W + \frac{\pi^3 \rho_l F_l H}{4\rho FL} \left(1 - \frac{5LW}{2\pi H}\right) W, \quad (4.8)$$

где в левой части содержатся члены, соответствующие силам, направленным вверх (обозначим через  $Z_1$ ), а в правой части – вниз ( $Z_2$ ). Все члены отнесены к постоянной величине – весу трубопровода единичной длины.

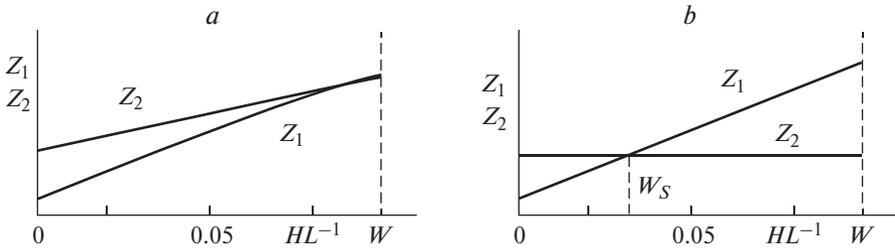
На рис. 4, *a* показаны зависимости  $Z_1(W)$  и  $Z_2(W)$  в случае, когда вес трубопровода единичной длины превышает подъемную силу воды ( $\rho F > \rho_l F_l$ ). При этом не происходит подъема трубопровода даже при наличии его начального искривления вверх (на рис. 4, *a*  $Z_1 < Z_2$ ). Картина может измениться при одновременном действии внутреннего давления и температурного расширения, как это видно по параметру  $\alpha$  (2.10).



**Рис. 4.** Изменение сил, направленных вверх ( $Z_1$ ) и вниз ( $Z_2$ ), по мере поднятия трубопровода, определяемой отношением прогиба середины пролета к его длине  $W$ , в случае  $\rho F > \rho_l F_l$ ; *a* – отсутствие всплытия, *b* – возможное всплытие

Однако могут быть исключения даже при  $T = 0$ . Рассмотрим случай большого давления газа  $p_g$ , малой глубины водоема  $H$ , большой длины пролета  $L$ . Тогда следующие члены уравнения (4.8) (при максимальном значении  $W = (H - R_l)/L \approx H/L$ )

$$\frac{\pi^5 DH}{4\rho FL^4} = \frac{\pi^5 ER^2 H}{8\rho L^4}, \quad \frac{\pi^3 \rho_l F_l H^2}{4\rho FL^2} \approx \frac{\pi H^2}{L^2}$$



**Рис. 5.** Изменение сил, направленных вверх ( $Z_1$ ) и вниз ( $Z_2$ ), по мере поднятия трубопровода, определяемой отношением прогиба середины пролета к его длине  $W$ , в случае  $\rho F < \rho_l F_l$ ;  $a$  – всплытие,  $b$  – возможное отсутствие всплытия, некоторый подъем

малы по сравнению с единицей. Здесь  $E, R, h$  – средние значения параметров трехслойной трубы. При оценках принято  $\pi^2 \rho_l F_l / (4\rho F) \sim 1$ . При этом  $Z_1$  остается без изменений, а  $Z_2 = 1$ .

На рис. 4,  $b$  точка пересечения  $S$  функций  $Z_1$  и  $Z_2$  показывает значение безразмерного подъема середины пролета. В соответствии с (4.8) угол  $\varepsilon = \pi^3 p_g F_g / (4\rho FL)$ . При уменьшении угла  $\varepsilon$  (и давления  $p_g$ ) точка  $S$  перемещается вправо, а прогиб  $W_S$  увеличивается. При увеличении угла  $\varepsilon$  точка  $S$  перемещается влево, трубопровод опускается.

Этот результат, парадоксальный на первый взгляд, объясняется тем, что при подъеме трубопровода его вес и Архимедова сила не изменяются, а поперечная распределенная сила от давления газа растет вместе с  $W$  (согласно (2.5) пропорционально кривизне осевой линии трубы). Из рис. 4,  $b$  видно также, что при заданном максимальном значении угла  $\varepsilon$  определяется необходимый начальный подъем трубопровода, обеспечивающий его дальнейший рост при снижении угла  $\varepsilon$  (и давления газа). Минимальное значение угла  $\varepsilon$  достигается при  $W_S = H/L$ . При дальнейшем уменьшении  $\varepsilon$  и давления газа  $p_g$  положение трубопровода не описывается данной моделью. В рассматриваемом простейшем случае критерием всплытия является равенство

$$\pi^3 p_g F_g H = 4L^2 (\rho F - \rho_l F_l).$$

При  $\rho F < \rho_l F_l$  создаются все предпосылки для всплытия трубопровода. При этом на рис. 5,  $a$  показано распределение сил, направленных вверх  $Z_1$  и вниз  $Z_2$ .

В случае большой глубины  $H$ , короткого пролета  $L$ , малого давления  $p_g$ , небольшой разницы между  $\rho F$  и  $\rho_l F_l$  кривые  $Z_1$  и  $Z_2$  показаны на рис. 5,  $b$ . При малых значениях  $W$  подъемная сила, превышающая вес, приводит к некоторому подъему  $W_S$ . Так как Архимедова сила не зависит от подъема, а сила упругости и сила от давления воды, направленные вниз, растут с подъемом (кривизной осевой линии), то устойчивым положением  $W_S$  может быть некоторое промежуточное состояние между  $z = 0$  и  $z = HL^{-1}$ .

После этого будет иметь место неравенство  $Z_2 > Z_1$ , когда дальнейший подъем исключается. Критерием всплытия в этом случае является уравнение

$$\frac{\rho_l F_l}{\rho F} = 1 + \frac{\pi^5 D H}{4 \rho F L^3} + \frac{\pi^3 \rho_l F_l H^2}{20 \rho F L^2}.$$

## 5. МАКСИМАЛЬНО ДОПУСТИМОЕ РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ОПОРАМИ

Все выпускаемые газовые однослойные трубы обладают положительной плавучестью ( $\gamma > 0$ ). Наибольшей плавучестью обладают пустые трубы, например, в период их прокладки. В период эксплуатации однослойной газовой трубы также  $\gamma > 0$ . Для их удержания в глубине водоема используются бетонные пригрузы, уложенные на расстоянии  $L$  друг от друга. Требуется определить максимально допустимое расстояние  $L$ , при котором подъем середины пролета не превышает некоторого предела  $W_S$ . Значение  $W_S$  должно быть меньше глубины  $H$  водоема. Оно определяется нормами в соответствующей области применения. Примем для дальнейших оценок  $W_S = H/(3L)$ .

Для наглядности перейдем к исходным параметрам и примем допущения: на опорах происходит свободное продольное перемещение трубопровода ( $\lambda = \infty$ ,  $\chi = 0$ ,  $\eta = 0$ ), труба стальная однослойная ( $n = 1$ ), газ отсутствует ( $p_g = 0$ ,  $\rho_g = 0$ ,  $\beta = 0$ ), температура не меняется ( $T = 0$ ). При этом в (2.11)

$$\alpha = -\frac{\rho_l F_l H}{P_*}, \quad \mu = \frac{\rho_l F_l L}{P_*}, \quad \gamma = \frac{(\rho_l F_l - \rho F)L}{\pi^2 P_*}, \quad P_* = \frac{\pi^3 E R^3 h}{L^2}.$$

При  $W = H/(3L)$  в исходных параметрах уравнение (2.11) относительно  $L$  приобретает вид

$$8\pi^2 \rho_l F_l H^2 L^2 - 2\pi^3 H(\pi^3 E R^3 h + \rho_l F_l H L^2) + 108 L^4 (\rho_l F_l - \rho F) = 0,$$

в решении которого

$$L^2 = \frac{5\pi^2 \rho_l F_l H^2}{54(\rho_l F_l - \rho F)} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{(\rho_l F_l - \rho F) E R^3 h}{90 \rho_l^2 F_l^2 H^3}} \right] \quad (5.1)$$

необходимо взять верхний знак.

Согласно (5.1), при заданной глубине  $H$  расстояние между опорами  $L$  тем больше, чем меньше разница между подъемной силой и весом трубы, больше ее диаметр и толщина стенки. Для относительно тонких труб и большой глубины водоема второй член под корнем в (5.1) становится меньше единицы.

Тогда из (5.1) следует

$$L^2 = \frac{2\pi^2 \rho_l F_l H^2}{27(\rho_l F_l - \rho F)} + \frac{\pi^2 E R^3 h}{1944 \rho_l F_l H}. \quad (5.2)$$

Для рассмотренной выше трубы с  $2R = 0.524$  и длиной 1 м вес  $\rho F = 760 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$  (при толщине  $h = 0.006$  м, гравитационном ускорении  $9.81 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ ) и  $\rho F = 1258 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$  (при  $h = 0.01$  м). Архимедова сила трубы длиной 1 м равна  $\rho_l F_l = 2164 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$ . Если  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $H = 30$  м, то из (5.2) получаем  $L^2 = (2538 + 14) \text{ м}^2$ .

Для такой трубы второй член (5.2) мал по сравнению с первым. Длина  $L$  определяется в основном глубиной водоема  $H$  и отношением веса трубы  $\rho F$  и подъемной силы  $\rho_l F_l$  воды, а изгибная жесткость  $ER^3h$  играет меньшую роль. Поэтому переход из (5.1) в выражение (5.2) а в данном примере является правомерным. Можно предложить простую формулу

$$L \approx 1.3H \left( 1 - \frac{\rho F}{\rho_l F_l} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.3)$$

Однако с увеличением диаметра трубы и ее толщины, уменьшение допустимого подъема  $W$  оба члена в (5.2) становятся сравнимыми.

При равных значениях  $L$  и постоянной глубине  $H$  прогибы между опорами равны, поэтому в условиях (2.1) жесткость  $B$  может быть меньше, чем при получении уравнения (2.10). В силу этого соотношения (5.1) – (5.3) являются сугубо приближенными (они точнее, если пролеты, чередуясь, прогибаются вверх и вниз при такой возможности по особенностям рельефа дна). Требуется дальнейшее изучение этого вопроса. Действительное значение жесткости  $B$  может быть найдено из решения обратной задачи, если известны экспериментальные данные по прогибам трубопровода [21]. Можно отметить, что при условии  $B \rightarrow \infty$  прогиб несколько больше, чем при  $B \rightarrow 0$  [20]. В рассматриваемом случае некоторая неопределенность с жесткостью  $B$  и соответствующим подъемом трубопровода может быть снята изменением принятой выше нормы  $W = H/(3L)$ , которая является достаточно произвольной. Приведенные выше результаты были получены в работе [22].

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенный более полный учет влияния давления газа и воды на изгиб трубопровода позволяет точнее описывать реальную картину его всплытия. Кроме веса трубы и транспортируемого газа, подъемной

21. Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.  
22. Ильгамов М. А. Всплытие подводного газового трубопровода // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2023. № 2. С. 147–159.

силы воды и температурного удлинения, учитываемых обычно при анализе всплытия, в данной работе распределенная поперечная сила определяется из рассмотрения взаимодействия изменения кривизны осевой линии и давлений на внутреннюю и внешнюю поверхности трубы. При этом учитывается также изменение давлений воды и газа с подъемом трубопровода. При определении осевых сил учитывается упругая реакция опор, изменение продольной деформации трубы за счет кольцевой деформации из-за перепада давления.

Полученное наиболее общее нелинейное уравнение относительно функции прогиба содержит безразмерные параметры, характеризующие влияние на изгиб всех входных параметров. Оно позволяет анализировать широкий спектр вопросов: линейный изгиб, устойчивость прямолинейного положения трубопровода, сверхкритический изгиб вплоть до всплытия, влияние на всплытие материала и размеров трубы, длины пролета между опорами, упругой реакции опор, давления газа, глубины водоема и т.д.

Определяется критерий в случае, когда высокое давление газа приводит к всплытию. В критерий входят все безразмерные параметры. Наиболее сильное влияние на процесс оказывают осевые растягивающие силы, зависящие от подъема трубопровода и условий закрепления на опорах. Предельное значение внутреннего перепада давления ограничивается прочностью на разрыв трубы. В случае свободного продольного перемещения на опорах возможно всплытие трубопровода, более тяжелого, чем подъемная сила воды. Определен критерий этого явления. Здесь необычным представляется результат, состоящий в том, что подъем и установление равновесного состояния тем выше, чем меньше давление газа. Возможно, такой режим не упоминается в литературе.

Естественным является всплытие, если Архимедова сила воды больше веса трубы. Однако и в этом случае может быть некоторый подъем, но не всплытие. Такой сценарий может быть реализован при большой глубине водоема, коротком пролете между опорами, низком давлении газа и небольшой плавучести. Объяснение состоит в том, что вес и подъемная сила воды остаются постоянными при подъеме, а другие силы (например, сила упругости), направленные вниз, растут при подъеме трубопровода.

Определяется необходимое расстояние между пригрузками для фиксации трубопровода на стадии прокладки, ремонтных работ, экспертизы и т.д. Это расстояние тем больше, чем больше глубина водоема и изгибная жесткость трубы, меньше отношение веса трубы и подъемной силы воды.

При анализе реального случая всплытия газового трубопровода приведенная здесь модель явления должна рассматриваться вместе с другими факторами, некоторые из которых названы в начале параграфа.

### § 3. СИЛЬНЫЙ ИЗГИБ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО КАБЕЛЯ

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

В течение последних десятилетий разрабатывались различные конструкции низкотемпературного сверхпроводящего кабеля, охлаждаемого жидким гелием при температуре 4 °К [1].

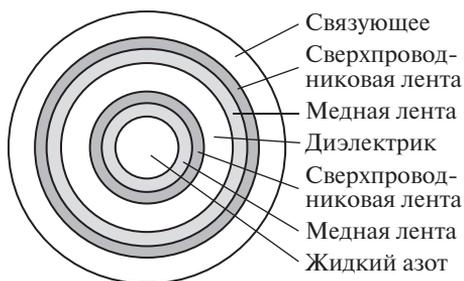
Исследования и разработки резко возросли после производства материалов со сверхпроводящими свойствами при температурах жидкого азота (явление высокотемпературной сверхпроводимости). Этот рост был вызван тем, что затраты на передачу энергии по высокотемпературным кабелям оцениваются в 30 раз меньше, чем при использовании низкотемпературных кабелей.

Сечение проводника, работающего при 77 °К, схематически представлено на рис. 1 [2]. Проводник рассматривается как система коаксиальных труб с различными физико-механическими свойствами. В нем есть центральный канал, в котором жидкий азот перекачивается между двумя охлаждающими станциями. В одну оболочку помещены три проводника. Оболочка состоит из слоя вакуумной изоляции, слоя нержавеющей стали и теплоизолятора. «Обратный» азот течет внутри оболочки и снаружи проводников. Такое расположение проводников в одной охлаждаемой оболочке диктуется стоимостными ограничениями.

Это краткое описание показывает, что сверхпроводящий кабель имеет сложную конструкцию. Как любой другой кабель, он может подвергаться большому прогибам при монтаже и эксплуатации. В то же время на его прогиб накладываются достаточно жесткие ограничения. В частности, существует максимальная кривизна, за пределами которой возможно механи-

ческое повреждение, например, в результате складкообразования наружной оболочки.

Здесь приводится простая модель для анализа большого прогиба высокотемпературного сверхпроводящего кабеля. Модель основана на учете эффективной жесткости, давления и скорости течения жидкости. Эффективные характеристики вводятся для одножильного кабеля.



**Рис. 1.** Схема поперечного сечения одиночного проводника

1. Garwin R. L., Matisoo J. Superconducting lines for the transmission of large amounts of electrical power over great distances // Proceedings of the IEEE. 1967. V. 55. N 4. P. 538–548.
2. Beals T. P. Towards a high temperature superconducting power transmission cable // J. Appl. Phys. Commun. 1993. V. 12. P. 205–220.

В случае одиночного проводника эффективная жесткость на растяжение  $B$ , эффективная жесткость на изгиб  $D$  и эффективный вес на единицу длины  $G$  равны [3]

$$B = 2\pi \sum_{n=1}^N E_n r_n h_n, \quad D = \pi \sum_{n=1}^N E_n r_n^3 h_n, \quad G = 2\pi \sum_{n=1}^N \gamma_n r_n h_n, \quad (1.1)$$

где  $r_n$  – средний радиус  $n$ -го слоя толщиной  $h_n$  ( $r_n \gg h_n$ ),  $E_n$ ,  $\gamma_n$  – модуль упругости и удельный вес материала соответственно,  $N$  – число слоев в проводнике. Параметры  $E_n$ ,  $\gamma_n$  считаются постоянными по толщине слоя.

Изгиб «сухого» проводника с эффективной жесткостью можно отождествить с изгибом гибкого стержня. Теория сильного изгиба гибкого стержня непрерывно развивалась, начиная с проблемы «эластики» Эйлера в XVIII веке. Исторические сведения и обзоры исследований представлены в работах Тимошенко [4], Попова [5], Хатчинсона и Койтера [6], Шмидта и Де Диппо [7]. Исследования, выполненные в разные годы, можно найти в [8–10]. Некоторые из последних исследований по поведению гибкого стержня после потери устойчивости даны в статьях [11, 12].

Сильный изгиб стержня обычно рассматривают под действием сосредоточенных сил и моментов, в том числе приложенных к его концам. Такая постановка задачи пригодна для анализа упругих элементов в некоторых устройствах, деталях машин, аппаратах и т.д. Особенностью сверхпроводящего кабеля является то, что его напряженно-деформированное состояние определяется не только сосредоточенными силами и моментами, приложенными к некоторым точкам его пролета или концов, но и веса трубы и жидкости, а также давлением и скоростью потока жидкого азота, тепловыми и электромагнитными эффектами.

Исследование потери устойчивости и поперечных колебаний трубы с текущей жидкостью было начато Эшли и Хэвилендом [13]. Центробежная

3. Ilgamov M. A., Ratrouf R. A. The characteristics of rigidity of superconducting cables // Proc. 17th Int. Conf. on the Theory of Shells and Plates. Kazan, 1996. P. 124–129.
4. Timoshenko S. P. History of Strength of Materials. New York, 1953. 452 p.
5. Попов Е. П. Нелинейные задачи статики тонких сердечников. М: Гостехиздат, 1948. 265 с.
6. Hutchinson J. W., Koiter W. T. Postbuckling theory // J. Appl. Mech. Rev. 1970. V. 23. P. 1353–1366.
7. Schmidt R., De Deppo D. O. A survey of literature on large deflection of non-shallow arches. Bibliography of finite deflections of straight and curved beams, rings and shallow arches // J. Int. Math. Soc. 1971. V. 21. P. 91–110.
8. Hymans F. Flat spring with large deflections // J. Appl. Mech. 1946. V. 13. P. 223–230.
9. Whitman A. B., Desilva C. N. Exact solution in a nonlinear theory of rods // Journal of Elasticity. 1974. V. 4. P. 265–280.
10. Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 296 с.
11. Levitas J., Weller T. Dynamic global post-buckling behaviour of beams by cell-to-cell mapping // Int. J. Non-Linear Mech. 1993. V. 28. P. 651–662.
12. Jounis C. J., Panayotounakos D. E. Elastica of an axially loaded column footing system resting on elastic base // Int. J. Non-Linear Mech. 1993. V. 28. P. 737–751.
13. Ashley H., Haviland G. Bending vibration of a pipe line containing flowing fluid // J. Appl. Mech. 1950. V. 17. P. 229–232.

и кориолисова силы, обусловленные течением жидкости, кривизна осевой линия и поворот поперечного сечения были исследованы теоретически и экспериментально. Обзоры можно найти в [14, 15].

Влияние постоянного давления жидкости на устойчивость и колебания трубы учтено в [14] и в более поздних публикациях. В линейной теории критическая комбинация скорости жидкости  $V$ , давления  $p$  и плотности  $\rho$  равна

$$p + \rho V^2 = \pi D / (r_1 L)^2, \quad (1.2)$$

где  $r_1$  – внутренний радиус трубы,  $L$  – длина трубы (расстояние между шарнирными концами).

Влияние внутреннего давления существенно для статики и динамики гибкого шланга [16] и длинной вертикальной трубы [17, 18]. Строгий учет давления и скорости жидкости в подобных задачах был выполнен в [19]. В [20] экспериментально исследовано уменьшение частоты колебаний трубы под действием внутреннего давления.

Здесь рассматривается статическая потеря устойчивости и сильный изгиб проводника между двумя опорами. Тепловые и электромагнитные эффекты не учитываются. Используются допущения: изгиб происходит в упругой области, осевая линия нерастяжима, поперечное сечение не изменяется, остается плоским и перпендикулярным осевой линии, жидкость остается идеальной и несжимаемой. Отклонение происходит в одной плоскости. Такая схема, как видно из предыдущих параграфов, применяется и к трубопроводам.

В разделе 2 выводятся уравнения сильного изгиба проводника, занимающего вертикальное положение в недеформированном состоянии. Далее выводятся уравнения для других начальных положений проводника и дается анализ уравнения в линейном приближении (раздел 3). Предложена также классификация задач и рассмотрены приближенные решения задачи о потере устойчивости сжатого вертикального проводника. Результаты, полученные приближенным методом, сравниваются с известными решениями (раздел 4). В разделе 5 выпучивание и сильный изгиб проводника рассматриваются с учетом веса, давления и скорости течения жидкости.

Изложение следует по работе [21].

- 
14. Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 182 с.
  15. Paidoussis M. P. Flow-induced instabilities of cylindrical structures // J. appl. Mech. Rev. 1987. V. 40. P. 163–175.
  16. Светлицкий В. А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 279 с.
  17. Bernitsas M. M., Kokkinis T. Asymptotic behaviour of heavy column and riser stability boundaries // J. Appl. Mech. 1984. V. 51. P. 1–6.
  18. Ильгамов М. А. Статические задачи гидроупругости. Казань: ИММ РАН, 1994. 208 с.
  19. Ilgamov M. A., Tang D. M., Dowell E. H. Flutter and forced response of a cantilevered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge, J. Fluids Structures 8 (1994) 139–156.
  20. Tang D. M., Ilgamov M. A., Dowell E. H. Buckling and post-buckling behaviour of a pipe subjected to internal pressure. J. Appl. Mech. 62 (1995) 595–600.
  21. Ilgamov M. A., Ratrouf R. A. Large deflection of superconducting cable // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1999. 34. P. 869–880.

## 2. УРАВНЕНИЯ СИЛЬНОГО ИЗГИБА КАБЕЛЯ

Пусть  $S$  – координата Лагранжа вдоль упругой линии,  $X, Y$  – координаты Эйлера в плоскости изгиба,  $\theta$  – угол между касательной к осевой линии и осью  $X$  (рис. 2, *a*). Поэтому

$$dX/dS = \cos\theta, \quad dY/dS = \sin\theta. \quad (2.1)$$

В поперечном сечении «сухого» проводника действуют осевая сила  $T$ , поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$  (рис. 2, *b*)

$$M = D d\theta/dS, \quad (2.2)$$

где  $D$  – эффективная изгибная жесткость проводника (1.1),  $d\theta/dS$  – местная кривизна. На элемент  $dS$  действует сила веса проводника  $GdS$  и сила  $Q_f dS$  со стороны жидкости обусловленная ее удельным весом  $g$ , давлением  $p$ , скоростью  $V$  и кривизной упругой линии (рис. 2, *c*). Эффективный удельный вес  $G$  определяется в уравнении (1.1). При проецировании всех сил, приложенных к элементу  $dS$ , на оси  $X$  и  $Y$  и с учетом  $\cos(\theta + d\theta) \approx \cos\theta - d\theta\sin\theta$  и  $\sin(\theta + d\theta) \approx \sin\theta + d\theta\cos\theta$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dS}(T \cos\theta) + \frac{d}{dS}(\sin\theta) + Q_f \sin\theta + G &= 0, \\ \frac{d}{dS}(T \sin\theta) + \frac{d}{dS}(\cos\theta) + Q_f \cos\theta &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Используя (2.2), можно записать из уравнения моментов

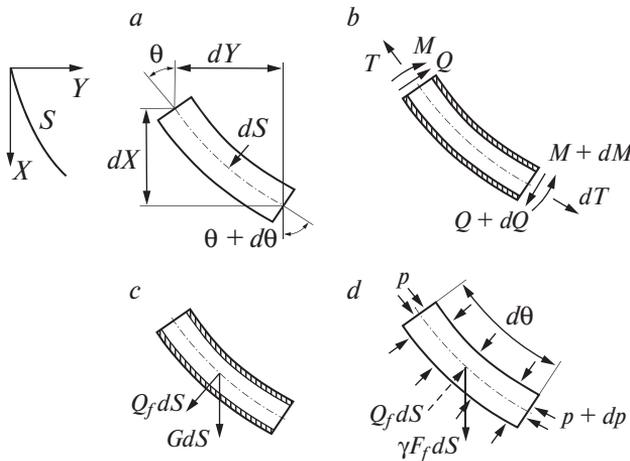


Рис. 2. Обозначения координатных линий, угла между касательной к упругой линии и вертикальной оси и сил

$$Q = \frac{dM}{dS} = D \left( \frac{d^2\theta}{dS^2} \right). \quad (2.4)$$

Распределенная сила  $Q_f(S)$  определяется из условия равновесия элемента жидкости длиной  $dS$ . На рис. 2,  $d Q_f dS$  есть равнодействующая давления, действующего на боковую поверхность изогнутого элемента жидкости. Очевидно  $Q_f dS = 0$ , если жидкий элемент прямой. Проецируя все силы, действующие на жидкий элемент площадью поперечного сечения  $F_f$  (рис. 2,  $d$ ) на касательную и нормаль, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dS} &= \gamma \cos \theta, \\ Q_f &= \gamma F_f \sin \theta + (p + \rho V^2) F_f \frac{d\theta}{dS}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Первое уравнение (2.5) вместе с (2.1) дает

$$p = \gamma \int \cos \theta dS + p_0 = \gamma X + p_0, \quad (2.6)$$

где  $p_0$  – давление в жидкости на уровне  $X = 0$ . При подстановке уравнения (2.6) во второе уравнение (2.5) имеем

$$Q_f = \gamma F_f \sin \theta + (p_0 + \rho V^2 + \gamma X) F_f \left( \frac{d\theta}{dS} \right). \quad (2.7)$$

Далее будем использовать следующие безразмерные величины

$$\begin{aligned} s &= \frac{S}{L}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{L}, \\ m &= \frac{ML}{D}, \quad t = \frac{TL^2}{D}, \quad q = \frac{QL^2}{D}, \quad q_f = \frac{Q_f L^3}{D}, \\ \varepsilon &= \frac{GL^3}{D}, \quad \varepsilon_\gamma = \frac{\gamma F_f L^3}{D}, \quad \varepsilon_p = \frac{p_0 F_f L^2}{D}, \quad \varepsilon_v = \frac{\rho V^2 F_f L^2}{D}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

После переписывания уравнений (2.1), (2.3), (2.4) в безразмерных переменных (2.8) получаем следующую систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(t \cos \theta + q \sin \theta) + q_f \sin \theta + \varepsilon &= 0, \\ \frac{d}{ds}(t \sin \theta - q \cos \theta) - q_f \cos \theta &= 0, \\ q &= \frac{d^2\theta}{ds^2}, \quad \frac{dx}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из уравнения (2.7) следует

$$q_f = \varepsilon_\gamma \sin \theta + (\varepsilon_p + \varepsilon_v + \varepsilon_\gamma x) \frac{d\theta}{ds}. \quad (2.10)$$

Интегрирование по  $s$  первых двух уравнений (2.9) дает

$$\begin{aligned} t \cos \theta + q \sin \theta + h + \varepsilon s &= a, \\ t \sin \theta - q \cos \theta - g &= b. \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$g(s) = \int_0^s q_f \cos \theta ds, \quad h(s) = \int_0^s q_f \sin \theta ds. \quad (2.12)$$

Константы  $a, b$  определяются из граничных условий.

Умножая первое уравнение (2.11) на  $\cos \theta$ , второе уравнение на  $\sin \theta$  и складывая их, находим выражение для осевой силы

$$t[a - \varepsilon s - h(s)] \cos \theta + [b + g(s)] \sin \theta. \quad (2.13)$$

Умножая первое уравнение (2.11) на  $\sin \theta$ , второе – на  $\cos \theta$ , сложив их и подставив выражение из (2.9) для  $q$ , имеем

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} - [a - \varepsilon s - h(s)] \sin \theta + [b + g(s)] \cos \theta = 0. \quad (2.14)$$

Из последних двух уравнений (2.9) получаем

$$x = \int_0^s \cos \theta ds + c, \quad y = \int_0^s \sin \theta ds + d, \quad (2.15)$$

где  $c$  и  $d$  – константы, определяемые кинематическими условиями.

По заданным граничным условиям и значениям параметров  $\varepsilon, \varepsilon_p, \varepsilon_v$  можно определить угол поворота  $\theta(s)$  и безразмерную координату  $x(s)$  кабеля из уравнения (2.14) и из первого уравнения (2.15). Форма линии упругости может быть построена с использованием второго уравнения. Безразмерная осевая сила  $t$  и боковая сила  $q$  находятся из уравнения (2.13) и третьего уравнения (2.9). Безразмерный изгибающий момент определяется как  $m = d\theta/ds$ .

В качестве примера определения постоянных  $a, b, c, d$  рассмотрим изгиб (выпучивание) вертикального проводника. Нижний конец ( $s = 1$ ) проводника шарнирно закреплен. Верхний конец  $s = 0$  представляет собой шарнир, подвижный вдоль оси  $x$ , на который действует вертикально направленная вниз сила  $R$  (рис. 3). Давление  $p_0$  поддерживается через абсолютно гибкий невесомый шланг, соединенный с верхним концом. Граничные условия задачи

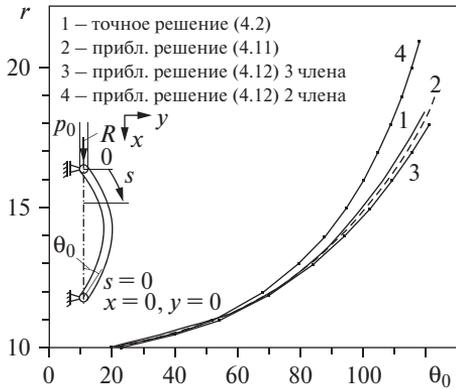


Рис. 3. Схема изогнутого проводника и графики зависимости конечного угла  $\theta_0$  в градусах от безразмерной торцевой силы  $r$  для различных решений

$$x = 1, \quad y = 0 \quad (s = 1), \quad (2.16)$$

$$t \cos \theta + q \sin \theta = -r,$$

$$t \sin \theta - q \cos \theta = 0 \quad (s = 0), \quad (2.17)$$

$$r = RL^2/D.$$

Удовлетворять условиям (2.17) удобнее с помощью системы (2.11). При  $s = 0$  интегралы в уравнениях (2.11) и (2.12) равны  $g(0) = h(0) = 0$ . Сравнивая уравнения (2.11) и (2.17), находим

$$a = -r, \quad b = 0. \quad (2.18).$$

Из уравнений (2.15) и (2.16) следует

$$c = 1 - \int_0^1 \cos \theta ds, \quad d = - \int_0^1 \sin \theta ds, \quad (2.19)$$

и поэтому в соответствии с уравнением (2.15) форма линии упругости определяется формулами

$$x = 1 + \int_0^s \cos \theta ds, \quad y = \int_0^s \sin \theta ds. \quad (2.20)$$

### 3. ИЗМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОТКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ДРУГИХ НАЧАЛЬНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ

Выведенные выше уравнения справедливы для проводника, занимающего вертикальное положение в ненапряженном состоянии. Их легко обобщить на случай, когда проводник изначально находится в произвольном положении под углом  $\theta_i$  с вертикалью. Однако, если  $\theta_i > 45^\circ$ , удобнее использовать уравнения, полученные для угла, отсчитываемого от горизонтального направления. Рассмотрим случай, когда проводник в ненапряженном состоянии занимает горизонтальное положение.

Повернем систему координат  $XU$  и все чертежи на рис. 2 на  $90^\circ$  по часовой стрелке. Силы веса  $Gds$  и  $F_f \gamma ds$  сохраняют свое вертикальное направление (теперь вдоль оси  $Y$ ). Уравнения (2.1) и (2.4) остаются без изменений. В (2.3) член  $G$  появляется во втором уравнении и исчезает в первом. Уравнения (2.5) приобретают вид

$$dp/ds = \gamma \sin \theta, \quad Q_f = -\gamma F_f \cos \theta + (p + \rho V^2) F_f (d\theta/ds).$$

Поэтому вместо уравнений (2.10) и (2.13) имеем

$$\begin{aligned} q_f &= -\varepsilon_\gamma \cos \theta + (\varepsilon_p + \varepsilon_v + \varepsilon_\gamma x) \frac{d\theta}{ds}, \\ t[a - h(s)] \cos \theta + [b - \varepsilon s + g(s)] \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Теперь  $q_f$  в уравнении (2.12) определяется выражением из (3.1). Уравнение (2.14) принимает вид

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} - [a - h(s)] \sin \theta + [b - \varepsilon s + g(s)] \cos \theta = 0. \quad (3.2)$$

Когда угол  $\theta$  мал по сравнению с единицей ( $\theta \ll 1$ ), то мы используем  $\cos \theta \approx 1$ ,  $\sin \theta \approx \theta \approx dw/ds$ , где  $w$  – прогиб. Из уравнения (2.15) находим, что  $x = s + c$ ,  $y = w + d$ , т.е. координаты  $s$  и  $x$ , а также прогиб  $w$  и координата  $y$  различаются друг от друга на константу. В уравнении (2.12) сохраняются только члены с  $\theta$  в первой степени. Тогда уравнение (2.14) принимает вид

$$\frac{d^3w}{dx^3} - [a - \varepsilon_p - \varepsilon_v - (\varepsilon + \varepsilon_\gamma)x] \frac{dw}{dx} = -b. \quad (3.3)$$

Линейное уравнение изгиба горизонтально расположенного проводника получается из уравнений (3.2), (3.1) и (2.12)

$$\frac{d^3w}{dx^3} - (a - \varepsilon_p - \varepsilon_v) \frac{dw}{dx} = -b + (\varepsilon + \varepsilon_\gamma)x. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) существенно отличается от уравнения (3.3), которое является таковым для задачи на собственные значения, если  $b = 0$ .

При пренебрежении весами трубы и жидкости ( $\varepsilon = \varepsilon_\gamma = 0$ ) и при граничных условиях (2.17), когда в соответствии с формулой (2.18)  $a = -r$ ,  $b = 0$ , оба уравнения (3.3) и (3.4) принимают один и тот же вид

$$\frac{d^3w}{dx^3} + \omega^2 \frac{dw}{dx} = 0, \quad \omega^2 = r + \varepsilon_p + \varepsilon_v.$$

В решении этого уравнения

$$w = A_1 + A_2 \sin \omega x + A_3 \cos \omega x$$

из условий  $w = d^2w/dx^2 = 0$  ( $x = 0$ ),  $d^2w/dx^2 = 0$  ( $x = 1$ ) находим  $A_1 = A_3 = 0$ ,  $A \neq 0$  и

$$\omega = \pi. \quad (3.5)$$

Следовательно, внутреннее давление, течение жидкости, а также сжимающая сила приводят к потере устойчивости прямолинейной формы (выпучиванию) проводника.

Выпучивание имеет место и для проводника, растянутого концевой силой  $-r$ , если  $\varepsilon_p + \varepsilon_v > r$ . В задаче с условиями (2.16), (2.17) возможен случай  $r = 0$ . Тогда уравнение (3.5) дает значение критической комбинации (1.2). Если внутреннее пространство проводника замкнуто на конце  $x = s = 0$ , то, очевидно,  $V = 0$  и  $R = -p_0 F_f$  (или в безразмерных переменных  $\varepsilon_v = 0, -r = \varepsilon_p$ ). Следовательно, прямолинейная форма невесомого проводника, растянутого внутренним давлением, всегда устойчива.

#### 4. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОБЛЕМ И НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Можно предложить следующую классификацию в теории больших прогибов одиночного проводника.

1. Прогиб в основном определяется граничными условиями; влияние веса проводника и жидкости, а также внутреннего давления и скорости течения жидкости при изгибе пренебрежимо малы, т.е.  $\varepsilon/a_m \sim \varepsilon_\gamma/a_m \sim \varepsilon_p/a_m \sim \varepsilon_v/a_m \ll 1$ , где  $a_m$  – максимальное значение между константами  $a$  и  $b$ . В этом случае решение системы нелинейных уравнений (2.14) и (2.15) можно найти методом возмущений, взяв в качестве малого параметра  $\varepsilon$ . Для проводников отношения  $\varepsilon_p/\varepsilon, \varepsilon_v/\varepsilon, \varepsilon_\gamma/\varepsilon$  конечны и меньше единицы. Уравнение первого приближения к (2.14) принимает вид  $d^2\theta/ds^2 - a\sin\theta + b\cos\theta = 0$ .

Решение этого уравнения известно для многих видов граничных условий. Оно определяется в эллиптических интегралах. Наиболее полное изложение этих результатов дано в [10].

2. Влияние граничных условий, сил веса, давления и скорости течения жидкости на изгиб сравнимо. В этом случае решение может быть получено только численными методами. Если максимальный угол поворота сечения не превышает  $2\pi/3$ , приближенное аналитическое решение может быть получено сочетанием метода Бубнова–Галеркина и разложения тригонометрических функций, например,  $\sin(\cos\eta) = \cos\eta - (1/6)\cos^3\eta + \dots$

Рассмотрим эту процедуру решения более подробно. Для оценок различных приближённых решений, которые будут получены ниже, воспользуемся уравнениями (2.14), (2.15), имеющими точное решение в случае, когда не учитываются собственный вес, внутреннее давление и скорость течения жидкости, т.е. когда  $a = -r, b = 0, \varepsilon = \varepsilon_\gamma = \varepsilon_p = \varepsilon_v = 0$ . Согласно данным (2.18) уравнение (2.14) принимает вид

$$d^2\theta/ds^2 + r\sin\theta = 0. \quad (4.1)$$

Точное решение (4.1) широко известно [5–7, 10]. Оно выражается в виде полных эллиптических интегралов первого рода  $K(k)$  и второго рода  $E(k)$ , где  $k = \sin(\theta_0/2), \theta_0 = \theta(s=0)$ . В частности, связь между параметром  $r$  торцевой сжимающей силы и углом поворота  $\theta_0$  верхнего торца ( $s=0$ ) определяется по формуле

$$r = 4K^2(k) \quad (4.2)$$

и максимальное отклонение в соответствии с формулой (2.20) равно

$$y(s = 0.5) = k/K(k). \quad (4.3)$$

Опускание верхнего конца ( $s = 0$ ) определяется по формуле

$$x(s = 0) = 2[1 - E(k)/K(k)]. \quad (4.4)$$

На рис. 3 показана функция  $r(\theta_0)$  по уравнению (4.2), на рис. 4 функция  $r(y)$  при  $s = 0.5$  по формулам (4.3) и (4.2). При  $\theta_0 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  имеем  $r = \pi^2$ , что соответствует критическому значению торцевой сжимающей силы.

Ряд приближенных решений уравнения (4.1) были предложены в литературе. Простейший их вывод состоит в том, что используется разложение полных эллиптических интегралов в степенной ряд по параметру  $k$

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{k^2}{4} + \dots \right), \quad E(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{k^2}{4} - \dots \right). \quad (4.5)$$

Подставляя уравнение (4.5) в уравнение (4.2), имеем

$$\frac{\sqrt{r}}{\pi} \approx 1 + \frac{k^2}{4}, \quad \frac{k}{2} \approx \sqrt{\frac{\sqrt{r}}{\pi}} - 1. \quad (4.6)$$

Из уравнений (4.3), (4.4), (4.6) получаем приближенные формулы

$$x(s = 0) = 4 \left( 1 - \frac{\pi}{\sqrt{r}} \right), \quad y(s = 0.5) = \frac{4}{\sqrt{r}} \sqrt{\frac{\sqrt{r}}{\pi}} - 1. \quad (4.7)$$

При умножении правой части второй формулы (4.7) на величину  $\left[ \sqrt{r}/2\pi + 1/2 \right]^{1/2}$ , которая при малых прогибах очень близка к единице, получаем

$$x(s = 0) = 4 \left( 1 - \sqrt{\frac{R_*}{R}} \right), \quad y(s = 0.5) = \sqrt{\frac{8}{\pi^2} \left( 1 - \frac{R_*}{R} \right)}, \quad (4.8)$$

где  $R_* = \pi^2 D/L^2$  – размерная критическая сила. Выражение (4.8) для прогиба называется формулой Р.В. Мизеса в одних работах (например, [10]), и формулой В. Т. Койтера в других (например, [11]).

График по выражению (4.8) также приведен на рис. 4. Можно сделать вывод, что приближенные формулы (4.8) удовлетворительны для безразмерного прогиба менее 0,3. Следует отметить, что по точной формуле (4.3) безразмерный прогиб достигает максимума около 0.4 при безразмерной нагрузке  $r = 15-20$  и при дальнейшем увеличении  $r$  плавно уменьшается.

Рассмотрим более полную систему уравнений (2.14) и (2.15). Необходимо отметить, что она не имеет решения в замкнутом виде. Можно попытаться найти приближенное решение методом Бубнова–Галеркина. Однако, как это следует из структуры функций  $g(s)$ ,  $h(s)$  в уравнении (2.12), соответствующие вычисления весьма сложны. Поэтому ограничим максимальные значения  $\theta(s)$ ,  $y(s)$ ,  $x(s)$  теми же пределами, что и при выводе выражений (4.6) и (4.7). С этой целью интегрирование уравнений (2.14) и (2.15) по методу Бубнова–Галеркина выполняется с использованием разложений

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 - \dots, \quad \cos \theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 - \dots. \quad (4.9)$$

Перед выполнением этой процедуры к уравнениям (2.14) и (2.15) применим ее к уравнению (4.1) и сравним полученные результаты с точными решениями уравнений (4.2)–(4.4) и приближенным решением уравнения (4.6). Возьмем приближенную функцию в виде

$$\theta = \theta_0 \cos \pi s. \quad (4.10)$$

При интегрировании уравнения (4.1) методом Бубнова–Галеркина с учетом (4.10) имеем

$$r = \frac{\pi^2 \theta_0}{2J_1(\theta_0)}, \quad (4.11)$$

где  $J_1(\theta_0)$  – функция Бесселя первого порядка. На рис. 3 кривая 2 – решение (4.11). Оно близко к точному решению даже при больших значениях угла поворота  $\theta_0$  сечения  $s = 0$ . Рассмотрим интегрирование уравнения (4.1) методом Бубнова–Галеркина с использованием (4.10) и разложения  $\sin \theta_0$  по (4.9). Сохраняя три слагаемых в разложении (4.9), находим

$$\frac{\pi^2}{r} = 1 - \frac{\theta_0^2}{8} + \frac{\theta_0^4}{192}. \quad (4.12)$$

Выражение (4.12) точно такое же, как и полученное из уравнения (4.11) разложением функции Бесселя  $J_1(\theta_0)$  с сохранением трех первых членов. На рис. 3 кривая 3 соответствует всему выражению (4.12), а кривая 4 соответствует (4.12) только с двумя первыми членами в правой части. Из рис. 3 следует, что решение (4.12) является удовлетворительным до  $\theta_0 = 110\text{--}120^\circ$ , а решение (4.12) с двумя слагаемыми в правой ча-

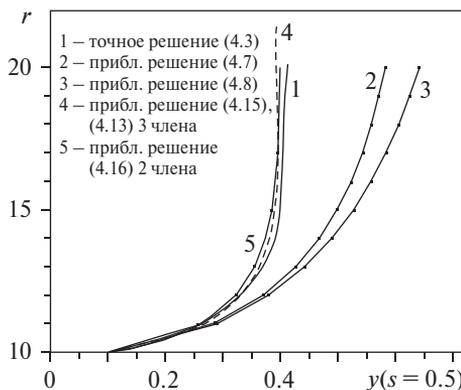


Рис. 4. Графики зависимости безразмерного прогиба  $r$  от безразмерной торцевой силы  $r$  для различных решений

сти до  $\theta_0 = 70-80^\circ$ . Таким образом, решение (4.12) удовлетворительно при  $r = 15-20$ , где прогиб достигает максимального значения (около 0.4, как следует из формулы (4.3)).

Функции  $\theta_0(r)$  по уравнению (4.12) с двумя и тремя членами разложения равны соответственно

$$\theta_0 = 2\sqrt{2\left(1 - \frac{\pi^2}{r}\right)}, \quad \theta_0 = 2\sqrt{3 - \sqrt{3\left(4\frac{\pi^2}{r} - 1\right)}}. \quad (4.13)$$

Из уравнений (2.20) и (4.9) имеем

$$\begin{aligned} x &= s + \frac{\theta_0^2}{4}\left(1 - s - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi s\right) - \frac{\theta_0^4}{64}\left(1 - s - \frac{2}{3\pi}\sin 2\pi s - \frac{1}{12\pi}\sin 4\pi s\right), \\ y &= \frac{\theta_0}{\pi}\left[\sin \pi s - \frac{\theta_0^2}{8}\left(\sin \pi s + \frac{1}{9}\sin 3\pi s\right) + \frac{\theta_0^4}{192}\left(\sin \pi s + \frac{1}{6}\sin 3\pi s + \frac{1}{50}\sin 5\pi s\right)\right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Тогда опускание верхнего конца проводника и максимальный прогиб равны

$$x(s = 0) = \frac{\theta_0^2}{4}\left(1 - \frac{\theta_0^2}{16}\right), \quad y(s = 0.5) = \frac{\theta_0}{\pi}\left(1 - \frac{\theta_0^2}{9} + \frac{\theta_0^4}{225}\right). \quad (4.15)$$

С использованием (4.13) уравнения (4.14) и (4.15) могут быть выражены через безразмерную нагрузку  $r$ . В частности, для двухчленного разложения из уравнений (4.15) и (4.13) имеем

$$x(s = 0) = 2\left(1 - \frac{\pi^2}{r}\right), \quad y(s = 0.5) = \sqrt{\frac{8}{\pi^2}\left(1 - \frac{\pi^2}{r}\right)}\left(\frac{1}{9} + \frac{8\pi^2}{9r}\right). \quad (4.16)$$

При введении размерных сил  $R$  и  $R_*$ , как в уравнении (4.8), уравнение (4.16) принимает вид

$$x(s = 0) = 2\left(1 - \frac{R_*}{R}\right), \quad y(s = 0.5) = \sqrt{\frac{8}{\pi^2}\left(1 - \frac{R_*}{R}\right)}\left(\frac{1}{9} + \frac{8R_*}{9R}\right). \quad (4.17)$$

Эти результаты также представлены на рис. 3 и 4. Они показывают, что предлагаемое решение не менее точно, чем известные приближенные решения. В некоторых аспектах это гораздо точнее. Например, при сохранении трех (или даже двух) членов в разложении максимальные прогибы (рис. 4) более точны, чем по формулам Мизеса (Койтера). Поэтому представленная выше процедура решения может быть полезна для более сложных задач. Более того, могут быть использованы методы компьютерной алгебры.

Отметим, что в работе [12] используются приближения  $\sin\theta \sim \theta$ ,  $\cos\theta \sim 1 - \theta^2/2$ .

## 5. ВЛИЯНИЕ НА ИЗГИБ СОБСТВЕННОГО ВЕСА ПРОВОДНИКА, ДАВЛЕНИЯ И СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим приведенную выше задачу о потере устойчивости вертикального проводника. Концы проводника закреплены так, чтобы выполнялись условия (2.16) и (2.17). Отличие в том, что теперь учитывается влияние собственного веса проводника, а также давления и скорости течения жидкости внутри проводника. Таким образом, рассматривается система уравнений (2.10), (2.12), (2.14), (2.15), (2.18) и (2.20).

В общем случае эта задача достаточно сложна. Поэтому ограничимся рассмотрением случаев, когда максимальный угол поворота пролета достигает порядка единицы ( $\theta \sim 1$ ). Используя разложения (4.9), подставим выражения (2.12) и (2.10) в уравнение (2.14) и сохраним члены со степенями  $\theta$  не выше трех. Тогда уравнение (2.14) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\theta}{ds^2} + (r + \varepsilon s) \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) + \theta \int_0^s \left[ \varepsilon_\gamma \theta + (\varepsilon_p + \varepsilon_v + \varepsilon_\gamma x) \frac{d\theta}{ds} \right] \theta ds + \\ & + \int_0^s \left[ \varepsilon_\gamma \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) + (\varepsilon_p + \varepsilon_v + \varepsilon_\gamma x) \frac{d\theta}{ds} \right] ds - \frac{\theta^2}{2} \int_0^s \left[ \varepsilon_\gamma \theta + \right. \\ & \left. + (\varepsilon_p + \varepsilon_v + \varepsilon_\gamma x) \frac{d\theta}{ds} \right] ds - \frac{1}{2} \int_0^s \left[ \varepsilon_\gamma \theta + (\varepsilon_p + \varepsilon_v + \varepsilon_\gamma x) \frac{d\theta}{ds} \right] \theta^2 ds = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Функция  $x(\theta)$  в уравнении (5.1) взята из уравнения (2.20) с различной степенью точности по  $\theta$ , что определяется наличием других множителей в соответствующих членах (5.1). Для этой задачи характерно, что влияние давления и скорости течения жидкости является совместным в уравнении (5.1) (имеем сумму  $\varepsilon_p + \varepsilon_v$ ). В этой задаче мы возьмем  $\theta$  в виде

$$\theta = \theta_1 \cos \pi s + \theta_2 \cos 2\pi s. \quad (5.2)$$

Функция (5.2) подходит для случая относительно короткого пролета кабеля ( $\varepsilon, \varepsilon_\gamma$  не сильно превышают 10), когда имеет место общая потеря устойчивости. В случае длинного пролета проводника, аналогичного для длинных труб [17] под преобладающим влиянием их веса, характерны местные потери устойчивости с образованием коротких волн в нижней сжатой части кабеля. Тогда подход следует несколько изменить [17]. Будем считать, что амплитуда  $\theta_2$  несимметричной формы прогиба мала по сравнению с амплитудой  $\theta_1$  симметричной формы. Берем  $\theta_2 \sim \theta_1^3$  и сохраняем в уравнении (5.1) слагаемые с  $\theta_1$  до третьей степени и слагаемые с  $\theta_2$  только в первой степени. При интегрировании уравнения (5.1) методом Бубнова–Галеркина с использованием уравнения (5.2) имеем следующие алгебраические уравнения

$$\begin{aligned}
 & \left[ 2r + \left( 1 + \frac{5}{3\pi^2} \right) \varepsilon + \left( 1 + \frac{5}{\pi^2} \right) \varepsilon_\gamma + 10(\varepsilon_p + \varepsilon_v) \right] \theta_1^3 + \\
 & + 16 \left[ \pi^2 - r - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2} \right) (\varepsilon + \varepsilon_\gamma) - (\varepsilon_p + \varepsilon_v) \right] \theta_1 + \frac{64}{9\pi^2} (5\varepsilon + \varepsilon_\gamma) \theta_2 = 0, \quad (5.3) \\
 & (41\varepsilon + 56\varepsilon_\gamma) \theta_1^3 - 225(\varepsilon + \varepsilon_\gamma) \theta_1 - 225 \frac{\pi^2}{4} \left( 8\pi^2 - 2r - \varepsilon - \frac{\varepsilon_\gamma}{2} - \varepsilon_p - \varepsilon_v \right) \theta_2 = 0.
 \end{aligned}$$

При  $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon_\gamma = 0$  система (5.3) распадается на независимые уравнения. Тогда линейное уравнение относительно  $\theta_1$  дает соотношение (3.5) для критического значения параметров в случае симметричной потери устойчивости. Последнее уравнение (5.3) дает критическую комбинацию для асимметричной формы  $2r + \varepsilon_p + \varepsilon_v = 8\pi^2$ .

Численные решения системы нелинейных уравнений (5.3) представлены на рис. 5 (для  $\theta_1$ ) и рис. 6 (для  $\theta_2$ ). Кривая 1 на рис. 5 соответствует кривой 4 на рис. 3. Это соответствие следует из того, что решение уравнения (2.14) находится при сохранении первых двух членов разложения (4.9) и использовании  $\varepsilon = \varepsilon_\gamma = 0$ ,  $\varepsilon_p + \varepsilon_v = 0$ . Следовательно, представленное решение справедливо для  $0 \ll \theta_1 \ll 70^\circ$ , а при дальнейшем увеличении угла  $\theta_1$  оно все больше отклоняется от точного решения, как это видно на рис. 3.

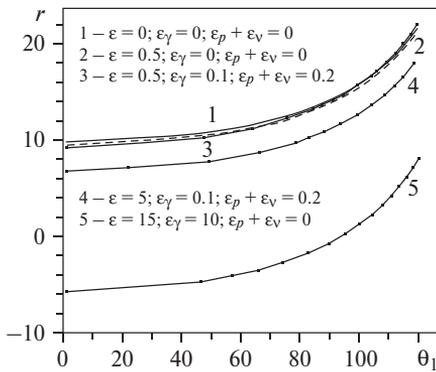
Для безразмерных весов  $\varepsilon \sim 1$ ,  $\varepsilon_\gamma \sim 1$  (кривые 2 и 3 на рис. 5) решение несколько отличается от решения для невесомого проводника. С увеличением веса такие же углы поворота  $\theta_1$  возникают при меньших значениях сжимающей концевой силы  $r$  (кривая 4). При  $\varepsilon \sim 10$ ,  $\varepsilon_\gamma \sim 10$  (кривая 5) изогнутое состояние равновесия кабеля возможно только в том случае, если концевая сила является растягивающей ( $r < 0$ ). Таким образом, выпучивание происходит при растяжении верхней части проводника (за счет усилия концевого растяжения) и при сжатии нижней части (за счет веса проводника). Влияние параметра  $\varepsilon_p + \varepsilon_v$  таково, что при его значениях порядка единицы решение несколько отличается от такового в случае  $\varepsilon_p + \varepsilon_v = 0$ . С увеличением значения этого параметра угол поворота поперечного сечения проводника также увеличивается.

Сравнение кривых на рис. 5 и 6 показывает, что принятая выше оценка  $\theta_2 \sim \theta_1^3$  верна. Поскольку  $\theta_2 < 0$ , то асимметричная составляющая в уравнении (5.2) уменьшает углы поворота сечения на верхнем конце ( $s = 0$ ) и увеличивает на нижнем конце ( $s = 1$ ).

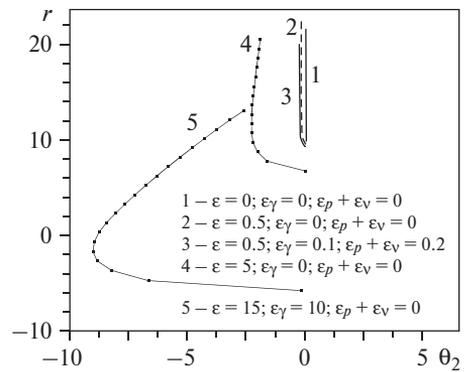
На рис. 7 представлена зависимость между безразмерной нагрузкой  $r$  и прогибом в середине проводника  $y(s = 0.5)$ . Видно, что влияние параметров  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_\gamma$ ,  $\varepsilon_p + \varepsilon_v$  на прогиб  $y(s = 0.5)$  такое же, как и их влияние на угол поворота сечения (рис. 5).

Выражения для  $y(s)$  и  $x(s)$  аналогичны уравнению (4.14) и здесь не приводятся из-за громоздкости. При их выводе члены порядка  $\theta_1^5$  и  $\theta_1^2 \theta_2$  также

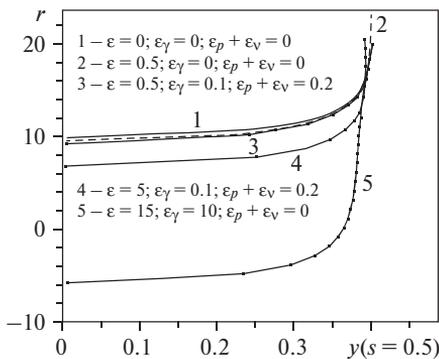
## Статика и динамика трубопроводов



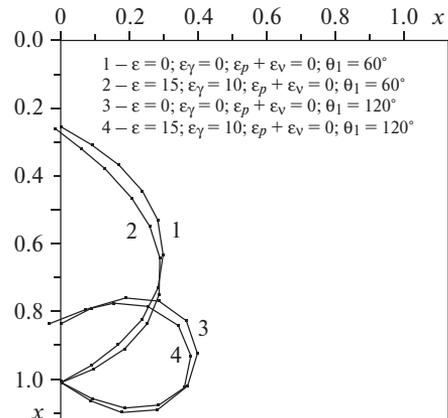
**Рис. 5.** Графики зависимости безразмерной нагрузки  $r$  от максимального угла  $\theta_1$  в градусах для несимметричной формы угловой функции при различных безразмерных массах проводника  $\varepsilon$  и жидкости  $\varepsilon_\gamma$ , давления  $\varepsilon_p$  и скорости потока  $\varepsilon_v$ .



**Рис. 6.** Графики зависимости безразмерной нагрузки  $r$  от максимального угла  $\theta_2$  в градусах для симметричной формы угловой функции при различных безразмерных массах проводника  $\varepsilon$  и жидкости  $\varepsilon_\gamma$ , давления  $\varepsilon_p$  и скорости потока  $\varepsilon_v$ .



**Рис. 7.** Графики зависимости безразмерной нагрузки  $r$  от прогиба  $y$  для различных безразмерных масс проводника  $\varepsilon$  и жидкости  $\varepsilon_\gamma$ , давления  $\varepsilon_p$  и скорости потока  $\varepsilon_v$ .



**Рис. 8.** Форма упругой линии для различных безразмерных масс проводника  $\varepsilon$  и жидкости  $\varepsilon_\gamma$ , давления  $\varepsilon_p$ , скорости потока  $\varepsilon_v$  и угла  $\theta_1$  в градусах.

сохраняются, так как их игнорирование приводит к потере точности. Выражение для  $x(s = 0)$  с указанной точностью совпадает с первой формулой уравнения (4.15). Прогиб в середине равен

$$y(s = 0.5) = \frac{\theta_1}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{9} \theta_1^2 + \frac{1}{225} \theta_1^4 + \frac{\pi}{16} \theta_1 \theta_2 \right). \quad (5.4)$$

Так как  $\theta_2 < 0$ , то учет второго слагаемого в (5.2) приводит, согласно (5.4), к уменьшению  $y(s = 0.5)$  по сравнению со случаем невесомого проводника.

Формы упругой линии показаны на рис. 8. При  $\theta > 70\text{--}80^\circ$  решение отклоняется от точного. Кривые 3 и 4 для больших углов дают лишь качественное представление о выпучивании.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана модель сильного изгиба сверхпроводящего кабеля, основанная на предположении о нерастяжимости его упругой линии и неизменности поперечного сечения. Отклонение происходит в одной плоскости. Кручение отсутствует. Учитываются эффективные жесткости и удельные массы, а также влияние давления и скорости течения криогенной жидкости в канале проводника.

Нелинейные уравнения равновесия записываются для угла поворота поперечного сечения, на величину которого не накладываются ограничения. При выводе уравнений необходимо учитывать положение кабеля в недеформированном состоянии (начальный угол). Уравнения для вертикального и горизонтального начального положения даны отдельно. Представлена классификация задач по влиянию на прогиб граничных условий и распределенных вдоль проводника силовых факторов. Предложена и подробно рассмотрена процедура решения. Эта процедура сочетает в себе метод Бубнова–Галеркина и разложение сложных тригонометрических функций в степенной ряд, в котором аргументами являются требуемые углы поворота. Результаты решения нелинейной задачи о выпучивании стержня продольной сжимающей силой по предложенной методике сравниваются с точным решением. Точность их оказывается удовлетворительной до углов поворота  $70\text{--}80^\circ$ , если используется двухчленное разложение, до  $120^\circ$ , если используется трехчленное разложение. В частности, несложные расчеты двухчленного разложения дают более точные результаты, чем известные формулы Мизеса–Койтера для выпученного состояния продольно сжатого стержня. Рассмотрено применение этой процедуры для решения более сложной задачи второго класса. Первоначально вертикальный проводник подвергается сжимающему (растягивающему) торцевому усилию, собственному весу проводника и жидкости, а также давлению и скорости течения жидкости в канале проводника. Из-за сложности задачи рассмотрение ограничено максимальными углами поворота сечения до  $60\text{--}70^\circ$ . Другое существенное ограничение накладывается на относительную длину пролета между опорами при реализации общей потери устойчивости.

## § 4. СИЛЬНЫЙ ИЗГИБ ТРУБОПРОВОДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследуется сильный изгиб пролета трубопровода при подъеме внешней сосредоточенной силой. Учитываются собственный вес трубы и транспортируемой жидкости, силы, обусловленные давлением и скоростью движения жидкости, а также осевое перемещение в концевых сечениях трубопровода. Дается параметрический анализ, в частности, сравнение результатов по линейной и нелинейной теориям.

Приведенная постановка задачи представляет собой идеализацию статического состояния участка магистрального трубопровода с транспортируемой жидкостью в условиях проседания под ним грунта, карстовых образований на поверхности земли или оползней [1–3]. К провисающему участку трубопровода могут подводиться опорные устройства, производиться ремонтно-восстановительные работы.

Теория сильного изгиба гибкого невесомого стержня сосредоточенными силами и моментами рассматривается во многих работах. Наиболее полное ее изложение содержится в монографиях [4, 5]. К исследованиям в этом направлении можно отнести работы [6, 7]. Статика и динамика трубопроводов и гибких шлангов с протекающей жидкостью изложена в [8]. В [9] приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований влияния внутреннего давления на изгиб трубы.

Для решения поставленной выше задачи применяется система уравнений относительно угла поворота сечения, эйлеровых координат точки упругой линии и внутренних силовых факторов. Эта система получена в предположении, что изгиб происходит в упругой области, упругая линия нерастяжима, поперечное сечение трубы не деформируется, остается плоским и перпендикулярным к упругой линии, протекающая жидкость иде-

1. Справочное руководство по нефтепромысловым трубам / И. С. Пивоваров, А. Е. Сараян, М. Д. Седюк и др. М.: Недра, 1967. 576 с.
2. *Айнбиндер А.Б., Камерштейн А.Г.* Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. М.: Недра, 1982. 342 с.
3. *Шаммазов А.М., Ченелов В.А., Зарипов Р.М., Коробков Г.Е.* Расчет магистральных трубопроводов в карстовой зоне. Уфа: Гилем, 1999. 213 с.
4. *Попов Е.П.* Нелинейные задачи статики тонких стержней. М.; Л.: Наука, 1948. 170 с.
5. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 296 с.
6. *Jounis C.J., Panayiotoumakos D. E.* Elastica of an axially loaded column/footing system resting on elastic base // Int. J. Nonlinear Mech. 1993. V. 28. N 6. P. 737–751.
7. *Астапов Н.С., Корнев В.М.* Выпучивание эксцентрично сжатого упругого стержня // ПИМТФ. 1996. Т. 37. № 2. С. 162–169.
8. *Светлицкий В.А.* Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
9. *Tang D. M., Ilgatos M. A., Dowell E. N.* Buckling and postbuckling behaviour of a pipe subjected to internal pressure // J. Appl. Mech. 1995. V. 62. P. 595–600.

альна и несжимаема. Эти уравнения получены в [10, 11] и приведены в предыдущем параграфе. Ниже излагаются результаты, приведенные в статьях [12–14]. Учитывается изменение осевых сил, опорных реакций и гидростатического давления в зависимости от изгиба трубы.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Трубопровод длиной  $L$ , радиусом срединной поверхности  $R$  и толщиной стенки  $h$  зашпелен в двух опорах с возможностью перемещения в осевом направлении без трения (рис. 1). Отношение  $R/L$  принимается малым по сравнению с единицей. Через трубопровод протекает жидкость удельным весом  $\gamma$  под давлением  $p$  и со скоростью  $V$ . Давление  $p$  поддерживается постоянным на уровне опорных устройств. К середине трубопровода прикладывается статическая сосредоточенная сила  $P$ , под действием которой происходит подъем пролета.

Рассматривается такой изгиб, когда возникают большие прогибы, но материал остается в пределах упругости. Величина горизонтального смещения в опоре зависит от внешней силы  $P$ , жесткости опорного устройства  $B$  и определяется в процессе решения. До приложения внешней силы трубопровод, провисающий между двумя опорами, деформирован под действием собственного веса и веса содержащейся в нем жидкости, прогибы направлены в сторону положительной оси  $y$  (рис. 1). После приложения внешней силы и по мере ее увеличения положение трубопровода приближается к горизонтальному, затем прогибы принимают отрицательные значения. Принимаем, что в концевых сечениях осевая сила на трубопровод со стороны жидкости отсутствует.

Ниже используются безразмерные величины

$$\varepsilon = \frac{GL^3}{D}, \quad \varepsilon_\gamma = \frac{\gamma FL^3}{D}, \quad \varepsilon_p = \frac{pFL^2}{D}, \quad \varepsilon_V = \frac{\rho V^2 FL^2}{D}, \quad \varepsilon_P = \frac{PL^2}{D}, \quad q_f = \frac{Q_f L^3}{D},$$

$$q = \frac{QL^2}{D}, \quad t = \frac{TL^2}{D}, \quad m = \frac{ML}{D}, \quad \beta = \frac{BL^3}{D}, \quad s = \frac{S}{L}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{L},$$

где  $G, D = pER^3h$  – вес трубы единичной длины и жесткость на изгиб,  $E$  – модуль упругости материала трубы,  $\rho$  – плотность,  $F$  – площадь попереч-

- 
10. Ильгамов М. А. Уравнения сильного изгиба сверхпроводящего кабеля // Докл. АН. 1996. Т. 348. № 6. С. 764–767.  
 11. Ilgamov M. A., Ratrouf R. A. Large deflection of superconducting cable // Int. J. Nonlinear Mech. 1999. V. 34. P. 869–880.  
 12. Ильгамов М. А., Якупов Р. Г. Сильный изгиб трубопровода // Изв. РАН, МТТ. 2003. № 6. С. 109–116.  
 13. Ильгамов М. А., Якупов Р. Г. Изгиб гибкого трубопровода // Вестник УГАТУ. 2000. № 2. С. 6–24.  
 14. Ильгамов М. А., Якупов Р. Г., Гумеров А. Г. Изгиб гибкого трубопровода // Сб. «Техника на пороге XXI века». Уфа, 1999. С. 6–24.

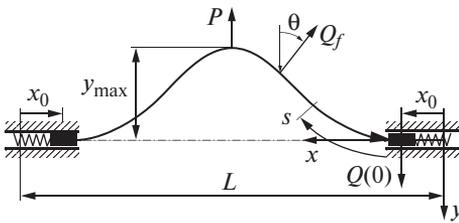


Рис. 1

1 равна  $t(0) = \beta x_0$ , где  $x_0$  – смещение конца трубопровода. Сила  $Q_f$  на трубопровод со стороны жидкости, обусловленная ее весом, давлением и скоростью движения, углом поворота и кривизной упругой линии, определяется по формуле

$$Q_f = \frac{D}{L^3} q_f, \quad q_f = -\varepsilon \cos \theta + (\varepsilon_p + \varepsilon_V + \varepsilon_\gamma y) \frac{d\theta}{ds}, \quad (2.1)$$

где  $\theta$  – угол между касательной к упругой линии трубопровода и горизонтальной осью.

Разрешающее уравнение задачи, учитывающее сосредоточенную силу, записывается в форме, приведенной в предыдущем параграфе,

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} - [a - h(s)] \sin \theta + \left[ b - \varepsilon s + \varepsilon_p H \left( s - \frac{1}{2} \right) + g(s) \right] \cos \theta = 0, \quad (2.2)$$

$$H \left( s - \frac{1}{2} \right) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq 1/2 \\ 1, & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

где  $a$  и  $b$  – константы, которые определяются из граничных условий с использованием выражений

$$\begin{aligned} a &= t \cos \theta + q \sin \theta + g(s), \\ b &= t \sin \theta - q \cos \theta - g(s) + \varepsilon s - \varepsilon_p H \left( s - 1/2 \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

а функции  $h(s)$  и  $g(s)$  – по формулам

$$h(s) = \int_0^s q_f \sin \theta ds, \quad y = \int_0^s q_f \cos \theta ds. \quad (2.4)$$

Связь между безразмерными лагранжевыми и эйлеровыми координатами записывается в форме

$$x = \int_0^s \cos \theta ds + c, \quad y = \int_0^s \sin \theta ds + d, \quad (2.5)$$

ного сечения жидкости,  $Q$ ,  $T$  – перерезывающая и продольная силы,  $M$  – изгибающий момент в поперечном сечении трубопровода,  $S$  – лагранжева координата,  $x$ ,  $y$  – эйлеровы координаты точки упругой линии.

Принимаем, что осевая сила на трубопровод со стороны опорного устройства в сечениях  $s = 0$ ;

где  $c$  и  $d$  – постоянные интегрирования, определяемые из кинематических граничных условий. Используя соотношения (2.5), можно построить форму упругой линии трубопровода.

Приведенные уравнения могут быть использованы для решения задач сколь угодно сильного изгиба прямолинейного гибкого трубопровода в одной плоскости, когда перемещения сравнимы с длиной упругой линии. При известном угле поворота сечения трубопровода безразмерный изгибающий момент, поперечная и продольная силы определяются по формулам

$$m = \frac{d\theta}{ds}, \quad q(s) = \frac{d^2\theta}{ds^2}, \quad (2.6)$$

$$t(s) = [a - h(s)]\cos\theta + \left[ b - \varepsilon s + \varepsilon_p H\left(s - \frac{1}{2}\right) + g(s) \right] \sin\theta.$$

Граничные условия задачи одинаковы на обоих концах

$$\theta = 0, \quad y = 0, \quad t = \beta x_0 \quad (s = 0, 1). \quad (2.7)$$

В случае малых углов поворота сечения по сравнению с единицей ( $\theta \ll 1$ ), принимая  $\cos\theta \approx 1$ ,  $\sin\theta \approx \theta \approx dw/dx$ , из (2.5) находим  $x = s + c$ ,  $y = w + d$  ( $w$  – прогиб). Если исключить перемещение трубопровода как твердого тела, то координаты  $x$  и  $s$ , прогиб  $w$  и  $y$  совпадают. Во всех соотношениях сохраняются только слагаемые, содержащие  $\theta$  в первой степени. С помощью (2.1) и (2.4) из (2.2) получаем линейное уравнение изгиба горизонтально расположенной прямолинейной трубы

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} - (a - \varepsilon_p - \varepsilon_V)\theta = -b + (\varepsilon + \varepsilon_V)s - \varepsilon_p H\left(s - \frac{1}{2}\right). \quad (2.8)$$

### 3. СИЛЬНЫЙ ИЗГИБ

Как видно из предыдущего параграфа, приведенная выше система нелинейных уравнений не имеет решения в замкнутой форме. Поэтому определим ее приближенное решение с помощью метода Бубнова–Галеркина. В последующем задаем функцию  $\theta(s)$  в виде

$$\theta = \theta_0 \sin 2\pi s + \theta_1 \sin 4\pi s + \dots, \quad (3.1)$$

удовлетворяющем условиям (2.7) относительно  $\theta$ , и используем разложения

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3, \quad \cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2. \quad (3.2)$$

Такое приближение удовлетворительно при значениях прогибов и углов поворота, характерных при подъемных работах с трубопроводными системами [2].

Подставляя разложения (3.2) и функцию (3.1) в формулы (2.5), после интегрирования имеем

$$x = s - \frac{\theta_0^2}{4} \left( s - \frac{1}{4\pi} \sin 4\pi s + \frac{1}{2} \right) - \frac{\theta_0 \theta_1}{3\pi} \sin^3 2\pi s + c, \quad (3.3)$$

$$y = \frac{\theta_0}{2\pi} (1 - \cos 2\pi s) + \frac{\theta_1}{2\pi} \sin^2 2\pi s - \frac{\theta_0^2 \theta_1}{8\pi} \sin^4 2\pi s + \frac{\theta_0^3}{12\pi} \left( \cos 2\pi s - \frac{1}{3} \cos^3 2\pi s - \frac{2}{3} \right) + d. \quad (3.4)$$

В выражениях (3.3), (3.4) и в последующем в соотношениях слагаемые, содержащие  $\theta_0$  в степени выше третьей и  $\theta_1$  в степени выше первой, отбрасываем, но оставляем слагаемые, содержащие произведения  $\theta_0 \theta_1$  и  $\theta_0^2 \theta_1$ .

Вследствие симметричности задачи  $x(s=1) = 1 - x_0$ , где  $x_0 = x(0)$ . Тогда с помощью граничных условий (2.7) из (3.3) и (2.4) находим  $c = x_0 = \theta_0^2/8$ ,  $d = 0$ . В частности, горизонтальное смещение трубы в опорах и прогиб под силой  $P$  в принятом приближении равны

$$x_{\max} = x_0 = \frac{\theta_0^2}{8}, \quad y \left( s = \frac{1}{2} \right) = \frac{\theta_0}{\pi} \left( 1 - \frac{\theta_0^2}{9} \right). \quad (3.5)$$

Должно соблюдаться неравенство  $\varepsilon_p + \varepsilon_\gamma (s=1/2) > 0$ , которое означает положительность давления в жидкости.

Обозначим опорную реакцию по оси  $y$  в сечении  $s=0$  через  $Q(0)$ . Ее определяем, проектируя на вертикальную ось силы, действующие на половину длины трубопровода. Имеем

$$Q(0) = \frac{P}{2} - \frac{GL}{2} + \int_0^{L/2} Q_f \cos \theta ds.$$

С помощью разложения (3.2) и функции (3.1) производим интегрирование и после приведения к безразмерной форме получаем

$$q(0) = Q(0) L^2/D = \varepsilon_p/2 - (\varepsilon + \varepsilon_\gamma)/2. \quad (3.6)$$

Выражения (2.4) для функций  $g$  и  $h$  имеют вид (3.7)

$$\begin{aligned}
 g(s) = & -\varepsilon_\gamma s + \frac{\varepsilon_\gamma \theta_0^2}{2\pi} \left( \sin 2\pi s - \frac{1}{2} \sin 4\pi s \right) + \\
 & + \frac{\varepsilon_\gamma \theta_0 \theta_1}{2\pi} \left( \frac{1}{4} \sin 2\pi s + \sin 4\pi s - \frac{3}{4} \sin 6\pi s \right) + \\
 & + (\varepsilon_p + \varepsilon_V) \left( \theta_0 \sin 2\pi s + \theta_1 \sin 4\pi s - \frac{\theta_0^3}{6} \sin^3 2\pi s - \frac{\theta_0^2 \theta_1}{2} \sin^2 2\pi s \cdot \sin 4\pi s \right), \\
 h(s) = & \frac{\varepsilon_\gamma \theta_0}{2\pi} (\cos 2\pi s - 1) - \frac{\varepsilon_\gamma \theta_1}{2\pi} \sin^2 2\pi s + \\
 & + \frac{\varepsilon_\gamma \theta_0^2 \theta_1}{2\pi} \left( \cos 2\pi s + \frac{1}{4} \cos 4\pi s - \cos 6\pi s + \frac{7}{16} \cos 8\pi s + 2 \sin^4 2\pi s - \frac{11}{16} \right) + \\
 & + \varepsilon_\gamma \theta_0^3 \left( \frac{1}{18\pi} - \frac{1}{3\pi} \cos 2\pi s + \frac{1}{4\pi} \sin^2 2\pi s + \frac{5}{18\pi} \cos^3 2\pi s \right) + \\
 & + (\varepsilon_p + \varepsilon_V) \left( \frac{\theta_0^2}{2} \sin^2 2\pi s + 2\theta_0 \theta_1 \sin^2 2\pi s \cdot \cos 2\pi s \right).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Используя граничные условия (2.7), соотношения (3.6) и (3.7), из выражений (2.3) находим с принятой точностью

$$a = t(0) = \beta x_0 = \frac{1}{8} \beta \theta_0^2, \quad b = -q(0) = \frac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon_\gamma - \varepsilon_p). \tag{3.8}$$

Применим к уравнению (2.2) процедуру Бубнова–Галеркина с учетом (3.1), (3.2), (3.7), (3.8). В силу симметрии задачи интегрирование производим в пределах половины длины трубопровода  $0 \leq s \leq 1/2$  (в уравнении (2.2) функция  $H = 0$ ). В результате приходим к системе алгебраических уравнений для  $\theta_0$  и  $\theta_1$

$$\alpha_1 \theta_0^3 + \alpha_2 \theta_0^2 + \frac{3}{16} (\varepsilon + \varepsilon_\gamma) \theta_0 \theta_1 + \alpha_3 \theta_0 + \alpha_4 = 0. \tag{3.9}$$

$$\theta_1 = \frac{\varepsilon + \varepsilon_\gamma}{32\pi^3 + \frac{\pi\beta\theta_0^2}{4} - 2\pi(\varepsilon_p + \varepsilon_V) \left( 1 - \frac{\theta_0^2}{4} \right) - \frac{16}{5} \alpha_4 \theta_0},$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{8} (\beta + \varepsilon_p + \varepsilon_V), \quad \alpha_2 = -\frac{1}{3} (2\varepsilon_p - \varepsilon - \varepsilon_\gamma), \tag{3.10}$$

$$\alpha_3 = \pi (4\pi^2 - \varepsilon_p - \varepsilon_V), \quad \alpha_4 = 2\varepsilon_p - \varepsilon - \varepsilon_\gamma.$$

## Статика и динамика трубопроводов

Для трубопровода, не содержащего жидкость, в выражениях (3.6)–(3.10) следует принять  $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_p = \varepsilon_V = 0$ . Из (3.9) и (3.10) в линейной задаче имеем

$$\theta_0 = -\frac{\alpha_4}{\alpha_3} = -\frac{2\varepsilon_p - \varepsilon - \varepsilon_\gamma}{\pi(4\pi^2 - \varepsilon_p - \varepsilon_V)}, \quad \theta_1 = \frac{\varepsilon + \varepsilon_\gamma}{2\pi(16\pi^2 - \varepsilon_p - \varepsilon_V)}. \quad (3.11)$$

Рассмотрим отношение  $\theta_1/\theta_0$  в случае  $\varepsilon_p + \varepsilon_V = 0$ . Из (3.11) находим

$$\frac{\theta_1}{\theta_0} = \frac{1}{8\left(1 - \frac{2\varepsilon_p}{\varepsilon + \varepsilon_\gamma}\right)}.$$

Отсюда следует, что, если  $2\varepsilon_p/(\varepsilon + \varepsilon_\gamma) \ll 1$ , то  $\theta_1/\theta_0 \approx 0.125$ . В случае  $2\varepsilon_p/(\varepsilon + \varepsilon_\gamma) \gg 1$  отношение  $|\theta_1/\theta_0| \approx (\varepsilon + \varepsilon_\gamma)/(16\varepsilon_p)$  также мало по сравнению с единицей. Первое неравенство удовлетворяется, когда трубопровод провисает между двумя опорами, деформирован под действием собственного веса и веса содержащейся в нем жидкости. Второе неравенство имеет место, когда он занимает положение выше горизонтальной оси после приложения внешней силы. Случай, когда отношение  $2\varepsilon_p/(\varepsilon + \varepsilon_\gamma)$  близко к единице, не рассматривается. Из первого выражения (3.11) следует, что в случае линейной задачи с приближением значения суммы  $\varepsilon_p + \varepsilon_V$  к величине  $4\pi^2$  угол  $\theta_0$  стремится к бесконечности. Принимая  $\varepsilon_p + \varepsilon_V = 4\pi^2$  и переходя к размерным величинам, запишем

$$p + \rho V^2 = \frac{4\pi D}{FL^2}. \quad (3.12)$$

Выражение (3.12) представляет собой критическое значение комбинации давления  $p$  и скорости течения  $V$  жидкости [15]. Это известная особенность линейной задачи.

Продольную силу определяем по формуле (2.6) с учетом (3.2), (3.7), (3.8)

$$\begin{aligned} t(s) = & \frac{\varepsilon_\gamma \theta_0}{2\pi} (1 - \cos 2\pi s) + \frac{\varepsilon_\gamma \theta_1}{2\pi} \sin^2 2\pi s \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{4} \sin^2 2\pi s \right) + \frac{\beta \theta_0^2}{8} + \\ & + \theta_0 \theta_1 \left[ 2(\varepsilon_p + \varepsilon_V) \sin^2 2\pi s \cdot \cos 2\pi s - \frac{\varepsilon_\gamma}{4\pi} \sin^4 2\pi s \right] + \\ & + \frac{\theta_0^2}{2} (\varepsilon_p + \varepsilon_V) \sin^2 2\pi s + \left[ (\varepsilon + \varepsilon_\gamma) \left( \frac{1}{2} - s \right) - \frac{\varepsilon_p}{2} \right] \times \end{aligned}$$

$$\times \left( \theta_0 \sin^2 2\pi s + \theta_1 \sin 4\pi s - \theta_0^2 \theta_1 \sin^3 2\pi s \cdot \cos 2\pi s - \frac{\theta_0^3}{6} \sin^3 2\pi s \right) - \\ - \frac{\varepsilon_\gamma \theta_0^3}{6\pi} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cos 2\pi s + \frac{1}{6} \cos^3 2\pi s \right) \quad \left( 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \right).$$

#### 4. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Определим деформации стальной трубы, имеющей наружный диаметр и толщину стенки соответственно 10.2 см и 0.2 см [15]. Модуль упругости материала трубы  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, предел текучести  $\sigma_T = 340$  МПа. Принимаем, что расстояние между опорами  $L = 50$  м, по трубе течет жидкость плотностью  $\rho = 98.1$  кг/м<sup>3</sup> под давлением  $p$ . Давление  $p$  и скорость  $V$  приняты  $p = 0.15$  МПа,  $V = 3$  м/с. Безразмерные значения жесткости опорного устройства принимаем равными  $\beta = 4000$  и  $8000$ .

Значения  $\theta_0$  и  $\theta_1$  определены из совместного численного решения уравнений (3.9) и (3.10). Графики  $\theta_0$  и  $\theta_1$  [град] приведены на рис. 2, где сплошные кривые относятся к случаю трубы с жидкостью, штриховые кривые – без жидкости. Кривые, отмеченные цифрой 1, соответствуют значению  $\beta = 4000$ , цифрой 2 – значению  $\beta = 8000$ . Наклонные тонкие прямые линии представляют графики  $\theta_0$  из решения линейной задачи. Из (3.11) видно, что в линейной задаче величина  $\theta_1$  от внешней силы непосредственно не зависит.

Напряжения в трубопроводе достигают предела текучести при условии

$$\left| \frac{t(s)}{2L} \right| + \left| \frac{m(s)}{R} \right| \leq \frac{\sigma_T L}{ER^2}. \quad (4.1)$$

После подстановки в (4.1) значений  $t$  и  $m$  в сечениях  $s = 0$  и  $s = 0.5$  имеем

$$\theta_0^2 + \frac{32\pi L}{\beta R} \theta_0 + \frac{64\pi L}{\beta R} \theta_1 \leq \frac{16L^2 \sigma_T}{\beta ER^2}, \quad (4.2)$$

$$\left( \frac{\varepsilon_\gamma}{\pi} + \frac{4\pi L}{R} \right) \theta_0 + \frac{\beta}{8} \theta_0^2 - \frac{\varepsilon_\gamma}{9\pi} \theta_0^3 + \left( \frac{\varepsilon_\gamma}{2\pi} - \frac{8\pi L}{R} \right) \theta_1 < \frac{2\sigma_T L^2}{ER^2}. \quad (4.3)$$

Предельные значения углов поворота  $\theta_0, \theta_1$  подчиняются условиям (4.2) и (4.3).

Из приведенных на рис. 2 данных следует, что линейная теория дает приемлемые результаты лишь в узком диапазоне изменения прогиба трубопровода около горизонтального положения. При увеличении отклонения трубы от горизонтального положения линейная теория дает завышенные значения  $\theta_0$ . Погрешности линейной теории зависят от безразмерных параметров внешней силы  $\varepsilon_p$  и жесткости опорного устройства  $\beta$ .

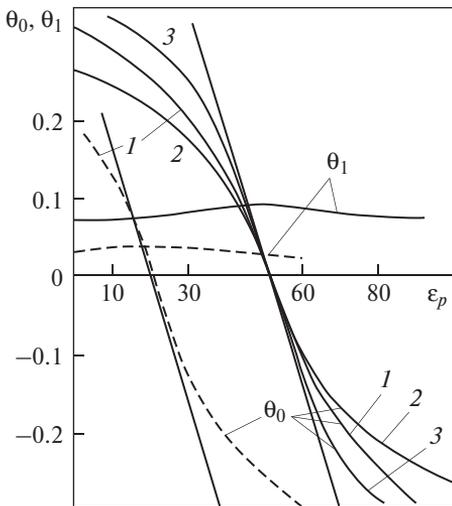


Рис. 2

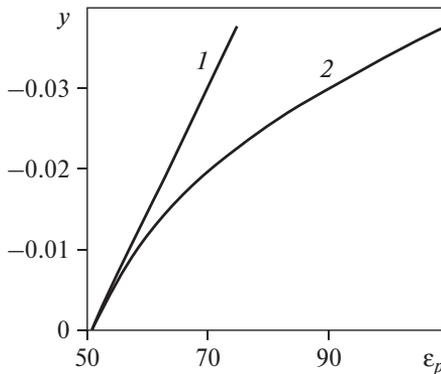


Рис. 3

Кривая 3 построена при давлении в трубе  $p = 0.15$  МПа. Сравнивая сплошные кривые 1 и 3, видим, что с увеличением внутреннего давления при постоянной внешней нагрузке  $\epsilon_p$  угол  $\theta_0$  возрастает. Влияние давления жидкости на изгиб равносильно действию продольной сжимающей силы  $pF$  и изгибающего момента  $pFy$ , стремящегося увеличить кривизну трубопровода. Явление выпучивания трубки под внутренним давлением изучено также экспериментально [9]. Наибольшее влияние на изгиб оказывает давление  $p$  в случае абсолютно податливых опор ( $\beta = 0$ ). Если принять безразмерную жесткость опор  $\beta = 4000$ , безразмерные давления  $\epsilon_p = 18.7$  и внешнюю силу  $\epsilon_p = 20$ , то значение угла  $\theta_0$  возрастает на 35%.

Коэффициенты  $\epsilon_p$  и  $\epsilon_v$ , характеризующие давление и скорость течения жидкости, содержатся в расчетных соотношениях в виде суммы  $\epsilon_p + \epsilon_v$ . Численное значение коэффициента  $\epsilon_v$  при скорости 3 м/с и давлении  $p = 0.15$  МПа на порядок меньше коэффициента  $\epsilon_p$ . Поэтому влияние течения жидкости со скоростью 3 м/с на напряженное и деформированное

состояние мало. Критическое значение комбинации давления и скорости течения жидкости  $p + \rho V^2$  для трубы по формуле (3.12) равно 0.32 МПа.

На рис. 3 приведены графики изменения прогиба посередине пролета при  $\beta = 4000$  в зависимости от безразмерной внешней силы  $\epsilon_p$ . Прямая линия 1 соответствует линейной теории, кривая линия 2 – нелинейной. Как видно, начиная с  $\epsilon_p > 60$  линейная теория дает значительное отличие по величине прогиба.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты расчетов могут быть использованы при проектировании новых технологий прокладки и ремонта магистральных трубопроводов.

## § 5. ВЛИЯНИЕ СРЕДНЕГО ДАВЛЕНИЯ И ОБЖАТИЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ НА ИЗГИБ ТРУБЫ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение поведения вертикальных колонн, труб, шлангов, кабелей под действием гидростатического давления имеет давнюю историю [1–5]. К этим работам примыкает исследование устойчивости упругой полосы при действии всестороннего давления (включая ее кромки) на основе соотношений трехмерной теории упругости. Обзор ранних исследований в этом направлении содержится, например, в [6]. Последний обзор по статике и динамике трубопроводов содержится в [7].

Особенностью изгиба круглых стержней, труб, контактирующих с жидкостью и газом, является появление поперечной распределенной силы

$$q = \pi R^2 p \kappa, \quad (1.1)$$

где  $R$  – радиус внешней поверхности,  $\kappa$  – кривизна осевой линии,  $p$  – давление. Сила  $q$  направлена в сторону вогнутости осевой линии. Вместе с продольной сжимающей силой от действия давления  $p$  на свободно перемещающиеся концевые сечения площадью  $\pi R^2$  сила (1.1) приводит к известному результату об абсолютной устойчивости стержня [6]. Если одно из концевых сечений свободно опертого круглого стержня длиной  $L$  изолировано от давления  $p$ , то сила (1.1) приводит к значению эффективной изгибной жесткости  $D(1 + \alpha)$ , где

$$D = \frac{\pi E R^4}{4}, \quad \alpha = \frac{p}{E} \left( \frac{2L}{\pi R} \right)^2. \quad (1.2)$$

В случае стального стержня с модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, отношением размеров  $2L/(\pi R) = 10^2$  при давлении окружающей среды  $p = 10$  МПа безразмерный параметр  $\alpha = 0.5$ . Таким образом, при таких реальных данных имеется сильное влияние равномерного давления окру-

- 
1. Peterson J. P. Axially loaded column subjected to lateral pressure // AIAA J. 1963. V. 1. No. 6. P. 1458–1459.
  2. Huang T., Dareing D. W. Buckling and frequency of long vertical pipes // J. Engineering Mechanics Division. 1967. V. 95. P. 167–181.
  3. Sugiyama Y., Ashida K. Buckling of long columns under their own weight // Trans. Japan Soc. Mech. Eng. 1978. 21(158). P. 1228–1235.
  4. Bernitsas M. M., Kokkinis T. Buckling of columns with movable boundaries // J. Structural Mechanics. 1983. V. 11. N. 3. P. 351–370.
  5. Светлицкий В. А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение. 1982. 280 с.
  6. Ilgamov M. A. Static Problems of Hydroelasticity. М.: Nauka, 1998. 208 p.
  7. Li S., Karney B. W., Liu G. FSI research in pipeline systems: a review of the literature // J. Fluids and Structures. 2015. 57. P. 277–297.

жающей среды на изгиб тонкого тела. Если такое же давление действует на концевое сечение, то, как указано выше, исчезает влияние его на изгиб.

Внутреннее давление  $p$  в трубе приводит к появлению поперечной силы по формуле (1.1), где под  $R$  подразумевается внутренний радиус трубы. Эта сила направлена в сторону выпуклости осевой линии трубы и поэтому дает уменьшение эффективной изгибной жесткости (в (1.2) безразмерный параметр  $\alpha$  с отрицательным знаком). Если, например, один конец изогнутой трубы неподвижно закреплен, а другой свободно перемещается в продольном направлении, причем закрыт днищем, то продольная растягивающая сила  $\pi R^2 p$  приводит к поперечной силе, направленной против силы  $q$ . Приведенные примеры показывают качественное влияние условий закрепления тела на его деформацию под действием давления.

В теории тонких пластин и оболочек принимается, что поперечная распределенная сила равна  $q = p_1 - p_2$ , где  $p_1, p_2$  – давления, действующие на их поверхности. Более точное выражение  $q$  зависит также от среднего давления  $p_m$  и прогиба  $w$  и в случае пластины толщиной  $h$  имеет вид

$$q = p_1 - p_2 + p_m h \nabla^2 w, \quad p_m = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad (1.3)$$

где  $\nabla^2$  – лапласиан. В теории статического и динамического изгиба микро- и нанопленок, резонаторов последний член формулы (1.3) трактуется как проявление поверхностного эффекта, который становится значительным для тонких пластин, проволок, струн. Его вклад сравним с другим поверхностным эффектом, обусловленным различием упругих характеристик приповерхностного слоя и основного объема тонкого тела. Отмеченное влияние распределенной силы (1.1), (1.3) на изгиб объясняется тем, что с уменьшением толщины  $h$  пластины или радиуса  $R$  стержня сила  $q$  уменьшается пропорционально  $h$  и  $R^2$ , а изгибная жесткость – пропорционально  $h^3$  и  $R^4$ .

Названные выше исследования выполнены в рамках модели балки и тонкой пластины. Это относится и к изгибу трубы, при рассмотрении которого предполагается, что ее поперечное сечение остается круговым и перпендикулярным к изогнутой осевой линии. Это предположение принято и в предыдущих параграфах.

Насколько известно, не изучено влияние среднего давления на изгиб цилиндрической панели с произвольным углом раствора. Этот параграф посвящен рассмотрению изгиба в окружном направлении длинной цилиндрической оболочки (без изгиба в продольном направлении) с учетом указанного влияния в более общей постановке. Отметим, что теории устойчивости длинной цилиндрической оболочки или арки в классической постановке (без учета взаимодействия среднего давления и изменения кривизны)

посвящена обширная литература, в частности [8–12]. Данный параграф изложен в соответствии с работами [13, 14].

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Равномерные статические давления  $p_1$  и  $p_2$  действуют на внутреннюю и внешнюю поверхности длинной тонкостенной цилиндрической оболочки радиусом  $R$  срединной поверхности и толщиной  $h$  стенки. Оболочка может быть замкнутой и незамкнутой (цилиндрическая панель). Предполагается, что давления действуют по нормали к деформированной поверхности, оболочка одинаково изгибается по длине и находится в плоском деформированном состоянии. Все искомые величины относятся к единичной длине вдоль оболочки.

При анализе изгиба с волнообразованием по окружности длинной цилиндрической оболочки обычно принимается допущение о неизменности длины  $ds$  элемента срединной поверхности [15]. При этом имеет место соотношение

$$ds = Rd\theta = R_*d\theta_*, \quad (2.1)$$

где радиус  $R$  и центральный угол  $d\theta$  относятся к состоянию до деформации, а  $R_*$ ,  $d\theta_*$  – после деформации (рис. 1).

Соотношение (2.1) следует также из равенства  $ds_* = (1 + \varepsilon_\theta) ds$ , где ввиду малости окружной деформации  $\varepsilon_\theta$  по сравнению с единицей принимается  $ds_* = ds$ . Элементарные длины на внутренней и внешней поверхностях изогнутой оболочки в соответствии с первой гипотезой Кирхгоффа–Лява равны

$$ds_1 = \left( R_* - \frac{h}{2} \right) d\theta_*, \quad ds_2 = \left( R_* + \frac{h}{2} \right) d\theta_*.$$

С учетом (2.1) и изменения кривизны

$$\kappa = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_*} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{\partial v}{R ds}, \quad (2.2)$$

- 
8. Николаи Е.Л. Об устойчивости кругового кольца и круговой арки, сжатых давлением // Труды по Механике. М.: Гостехиздат, 1955. 250 с.
  9. Штаерман И.Я. Устойчивость упругих круговых арок под действием сосредоточенной силы // ПММ. 1937. Т. 1. Вып. 3. С. 45–50.
  10. Джанелидзе Г.Ю., Радциг М.А. Динамическая устойчивость кольца под действием нормальных периодических сил // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 3. С. 37–41.
  11. Динник А.Н. Устойчивость арок. М.; Л.: ОГИЗ, 1946. 127 с.
  12. Муштари Х.М., Свицкий И.В. Определение больших прогибов цилиндрической панели под действием внешнего нормального давления // ПММ. 1953. Т. 17. В. 6. С. 755–760.
  13. Ильгамов М.А. Влияние среднего давления на изгиб длинной цилиндрической оболочки // Изв. УНЦ РАН. 2022. № 3. С. 5–11.
  14. Ильгамов М.А. Влияние среднего давления и жесткости закрепления на изгиб цилиндрической оболочки // ПММ. 2023. Т. 87. № 4. С. 696–708.
  15. Филли А.П. Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1975. 256 с.

## Статика и динамика трубопроводов

выраженного через компоненты перемещения в окружном и радиальном направлениях  $v$  и  $w$ , получаем

$$ds_1 = \left(1 - \frac{h}{2} \left(\frac{1}{R} - \kappa\right)\right) ds, \quad ds_2 = \left(1 + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{R} - \kappa\right)\right) ds.$$

Распределенная поперечная сила на элемент  $ds$  равна  $qds = p_1 ds_1 - p_2 ds_2$ . С учетом  $ds_1, ds_2$  имеем

$$q = p_1 - p_2 - \frac{p_m h}{R} (1 - R\kappa). \quad (2.3)$$

Если оболочка контактирует с жидкостью или газом, то давления взаимодействия  $\bar{p}_1, \bar{p}_2$  зависят от  $v, w$ , угла  $\theta$  и времени  $t$ . Тогда линейное выражение (2.3) приобретает вид

$$q = p_1 - p_2 + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - (p_m + \bar{p}_m) \frac{h}{R} + p_m h \kappa, \quad \bar{p}_m = \frac{1}{2} (\bar{p}_1 + \bar{p}_2). \quad (2.4)$$

Как указано выше, давления  $p_1$  и  $p_2$  являются постоянными по всей поверхности и времени. Так как  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$  зависят от прогиба, то нелинейным является член  $\bar{p}_m h \kappa$ , поэтому в (2.4) он не учтен.

В уравнениях динамического изгиба (рис. 1)

$$\begin{aligned} -N + N' \cos d\theta_* - Q' \sin d\theta_* - \rho h ds \ddot{v} \cos(d\theta_*/2) &= 0, \\ Q - Q' \cos d\theta_* - N' \sin d\theta_* + q ds \cos(d\theta_*/2) - \rho h ds \ddot{w} \cos(d\theta_*/2) &= 0, \\ M - M' + Q' ds &= 0. \end{aligned}$$

Точки над буквами обозначают производные по времени  $t$ ,  $q$  определяется выражением (2.4). Из (2.1) и (2.2) следует  $\partial\theta_*/\partial s = R^{-1} - \kappa$ . С учетом

$\cos d\theta_* = 1, \sin d\theta_* = d\theta_*$ ,  $N' = N + (\partial N/\partial s) ds, \dots$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial s} - Q \left(\frac{1}{R} - \kappa\right) - \rho h \ddot{v} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial s} + N \left(\frac{1}{R} - \kappa\right) - q + \rho h \ddot{w} &= 0, \\ Q &= \frac{\partial M}{\partial s}, \quad M = D\kappa. \end{aligned} \quad (2.5)$$

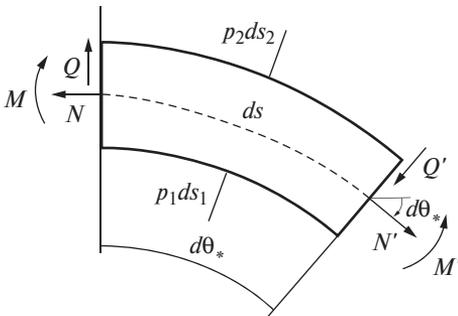


Рис. 1. Элемент оболочки длиной  $ds$  изогнутой срединной поверхности с перпендикулярными сечениями к ней

При определении  $N$ ,  $M$  через напряжение  $\sigma_\theta$  учтем обжатие по толщине средним давлением  $p_m$ . В условиях принятого плоского деформированного состояния ( $\varepsilon_x = 0$ ) из закона Гука

$$E\varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_x), \quad E\varepsilon_z = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_\theta), \quad \sigma_x = \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)$$

при  $\sigma_z = -p_m$  следует  $E\varepsilon_z = -\nu(1 + \nu)\sigma_\theta - (1 - \nu^2)p_m$ , а также

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2}\varepsilon_\theta - \frac{\nu}{1 - \nu}p_m. \quad (2.6)$$

Так как  $\varepsilon_\theta = dv/ds + w/R + \zeta\kappa$  [15], то с учетом (2.6) получаем

$$N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz = K \left( \frac{dv}{ds} + \frac{w}{R} \right) - \frac{\nu p_m h}{1 - \nu}, \quad K = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad (2.7)$$

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta \zeta dz = D\kappa, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

Таким образом, здесь не использована вторая гипотеза Кирхгоффа–Лява (силовая,  $\sigma_z = 0$ ). Результат этого будет рассмотрен далее. Сохранено обычное допущение для тонких оболочек о малости упругих деформаций по сравнению с единицей. Поэтому изменение толщины за счет деформации  $\varepsilon_z$  не учитывается в выражениях жесткостей  $K$  и  $D$ , однако в (2.6) и (2.7) вклад  $\varepsilon_z$  должен быть сохранен. Вопросы, связанные с точностью этих гипотез, рассмотрены во многих работах, в частности, в [16–19].

Для цилиндрической панели с углом раствора  $\Theta$  (с длиной дуги  $S$ ) примем следующие граничные условия (рис. 2)

$$N = Cv + P(p_1, p_2), \quad M = 0, \quad w = 0 \quad (\theta = 0), \quad (2.8)$$

$$\nu = 0, \quad M = 0, \quad w = 0 \quad (\theta = \Theta).$$

Здесь  $C$  – жесткость опоры (например, безмассовой пружины) в направлении угла  $\theta$ . Предполагается, что перемещение в левой опоре может происходить только по окружности радиуса  $R$ . Под  $P(p_1, p_2)$  подразумевается растя-

- 
16. Муитари Х.М. Об области применимости приближенной теории оболочек Кирхгоффа–Лява // ПММ. 1947. Т. 11. В. 5. С. 517–520.  
 17. Муитари Х.М. Об области применимости линейной теории упругих оболочек // ДАН СССР. 1947. Т. 58. № 6. С. 997–998.  
 18. Муитари Х.М., Терезулов И.Г. К теории оболочек средней толщины // ДАН СССР. 1959. Т. 128. № 6. С. 1144–1147.  
 19. Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. О роли поперечного обжатия в динамике оболочек // ПММ. 1996. Т. 6. Вып. 4. С. 644–650.

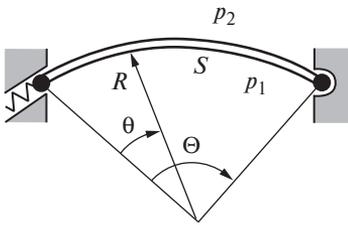


Рис. 2. Схема цилиндрической панели и опор

гибающая сила, действующая на площадку кромки  $\theta = 0$ . Если она образуется в результате действия давлений  $p_1, p_2$ , то  $P$  имеет отрицательный знак. В случае изолированной от давлений кромки  $P = 0$ , при действии среднего давления  $p_m$  на нее  $P = -p_m h$  и т.д. Конструкция правой опоры исключает появление окружной силы под действием давления на кромку.

Рассмотрим линейный статический изгиб панели по уравнениям (2.5)

$$\frac{dN}{ds} - \frac{dM}{Rds} = 0, \quad \frac{d^2M}{ds^2} + N\left(\frac{1}{R} - \kappa\right) = q,$$

где сохранен член  $N\kappa$ , так как в составе  $N$  по (2.7) есть составляющая, не содержащая  $v, w$ . Из этих уравнений следует

$$N = \frac{M}{R} + A, \quad \frac{d^2M}{ds^2} + \frac{M}{R^2} - \left(\frac{M}{R} + A\right)\kappa = q - \frac{A}{R}. \quad (2.9)$$

Константа  $A$  определяется из условий при  $\theta = 0$  в (2.8). Здесь  $M(0) = 0, w(0) = 0$  и поэтому  $N(0) = A$  по первому уравнению (2.9). При свободном движении левой кромки по углу  $\theta$  жесткость  $C = 0$  и  $A = P$ .

С учетом (2.7) первое уравнение (2.9) представим в виде

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{w}{R} + \frac{vp_m h}{K(1-v)} + \frac{D}{KR} \left( \frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) + \frac{A}{K}.$$

Так как в соответствии с допущением при записи (2.1) угловая деформация срединной поверхности  $\epsilon_\theta = dv/ds + w/R = 1$ , то приближение  $dv/ds \approx -w/R$  используется в выражении изменения кривизны  $\kappa$ . В то же время в выражениях (2.7) учитывается конечность  $\epsilon_\theta$ . При интегрировании этого выражения от 0 до  $S$  левая часть становится равной  $v(S) - v(0)$ . Согласно условиям (2.8)  $v(S) = 0, Cv(0) = A - P$ . Поэтому

$$(1 + \lambda)A = \frac{K\lambda}{RS} \int_0^S w ds - \frac{D\lambda}{RS} \int_0^S \left( \frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) ds + P - \frac{v\lambda p_m h}{1-v}, \quad \lambda = \frac{CS}{K}. \quad (2.10)$$

Отношение второго члена в правой части (2.10) к первому при функции прогиба  $\sin(\pi s/S)$  имеет порядок  $(h/R)^2$ . Поэтому для тонких оболочек второй член в (2.10) должен быть опущен. С учетом сказанного из второго уравнения (2.9) и выражений (2.3) и (2.10) получаем

$$\frac{d^4 w}{ds^4} + \frac{2}{R^2} \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^4} - \frac{1}{D} \left( p_m h (1 - \chi) + \frac{P}{1 + \lambda} \right) \left( \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) + \frac{K\lambda}{DR^2 S(1 + \lambda)} \int_0^S w ds = \frac{1}{D} \left( p_1 - p_2 - \frac{p_m h (1 - \chi)}{R} - \frac{P}{R(1 + \lambda)} \right), \quad (2.11)$$

$$\chi = \frac{\nu\lambda}{(1 - \nu)(1 + \lambda)}.$$

При большой жесткости опоры ( $\lambda \gg 1$ ) в (2.11) исчезают члены с  $P$ , что объясняется тем, что нет передачи на оболочку окружных сил, приложенных к ее кромке. Кроме того, параметр  $\chi = \nu(1 - \nu)^{-1}$ , а множитель в последнем члене левой части становится равным  $K(DR^2 S)^{-1}$ . Если жесткость опоры мала ( $\lambda \ll 1$ ), то  $\chi \approx 0$ , исчезает последний член в левой части (2.11). При этом в случае действия на кромку давления  $p_m$  ( $P = -p_m h$ ) члены, содержащие  $p_m$ , исчезают. Отказ от второй гипотезы Кирхгофа–Лява отражается в параметре  $\chi$ . Если принять  $\sigma_z = 0$ , а также допустить возможность свободно расширяться по окружности при обжатии по толщине стенки ( $\lambda = 0$ ) при выводе  $N$  в (2.7), то  $\chi = 0$ . Таким образом, условие  $\sigma_z = -p_m$  приводит к уменьшению влияния среднего давления  $p_m$  на изгиб. Наибольшее влияние  $p_m$  имеется при  $\lambda = 0$ ,  $P = 0$ . Тогда уравнение (2.11) приобретет вид

$$\frac{d^4 w}{ds^4} + \frac{2}{R^2} \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} - \frac{p_m h}{D} \left( \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) = \frac{1}{D} \left( p_1 - p_2 - \frac{p_m h}{R} \right). \quad (2.12)$$

Учет  $\sigma_z = -p_m$  оказывает значительное влияние на изгиб панели из материалов с большим коэффициентом Пуассона (некоторые композиты, резиноподобные материалы), малое влияние – с малым коэффициентом Пуассона (из пористых материалов). В частности, при  $\lambda \gg 1$ ,  $\nu = 0.5$  параметр  $\chi = 1$ , поэтому исчезает влияние на изгиб среднего давления.

Для случая пластинки ( $R = \infty$ ) из (2.12) следует уравнение, по которому было изучено влияние среднего давления  $p_m$  на изгиб.

### 3. СТАТИЧЕСКИЙ ЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ ПАНЕЛИ

Под преимущественным будем подразумевать изгиб, который происходит под действием в основном поперечных сил, а результат действия окружной силы мал. Такой изгиб имеет место, когда мал перепад давлений или левая кромка тонкой панели на рис. 2 легко перемещается по углу  $\theta$  (окружная сжимающая сила  $N$  меньше ее критического значения). С применением соотношения  $ds = R d\theta$  ( $S = R\Theta$ ) уравнение (2.11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w}{d\theta^4} + 2 \frac{d^2 w}{d\theta^2} + w - \frac{R^2}{D} \left( p_m h(1 - \chi) + \frac{P}{1 + \lambda} \right) \left( \frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right) + \\ + \frac{KR^2 \lambda}{D(1 + \lambda)} \int_0^\Theta w d\theta = \frac{R^4}{D} \left( p_1 - p_2 - \frac{p_m h(1 - \chi)}{R} - \frac{P}{R(1 + \lambda)} \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Примем приближенное решение уравнения (3.1) в виде  $w = W \sin(\pi\theta/\Theta)$ , удовлетворяющем последним условиям в (2.8). Отметим, что при выводе уравнения (2.11) уже удовлетворены первые два условия при  $\theta = 0$ ,  $\theta = \Theta$  в (2.8). Подставив эту функцию в уравнение (3.1), умножив на нее и проинтегрировав по  $\theta$  от нуля до  $\Theta$ , находим значение прогиба в средней линии панели

$$\begin{aligned} \frac{W}{R} = \frac{4R}{\pi B} \left( p_1 - p_2 - \frac{p_m h(1 - \chi)}{R} - \frac{P}{R(1 + \lambda)} \right), \\ B = \frac{D}{R^2} \left( \frac{\pi^2}{\Theta^2} - 1 \right)^2 + \left( p_m h(1 - \chi) + \frac{P}{(1 + \lambda)} \right) \left( \frac{\pi^2}{\Theta^2} - 1 \right) + \frac{8K\lambda}{\pi^2(1 + \lambda)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Член с  $p_m$  в числителе (3.2) соответствует распределенной поперечной силе, возникающей за счет разности площадей внешней и внутренней поверхностей панели до деформации и направленной к центру кривизны. Она не зависит от изгиба и уменьшается с увеличением радиуса  $R$  и обращается в нуль для пластины. Член с  $p_m$  в знаменателе (3.2) соответствует поперечной силе, возникающей при изгибе. Она направлена в сторону поверхности, подвергающейся деформации сжатия. Поэтому эта сила препятствует изгибу, меняя направление в зависимости от изменения кривизны при изгибе.

Как видно из (3.2), при  $p_1 > p_2$  среднее давление  $p_m$  приводит к уменьшению прогиба, так как  $\chi < 1$ . Если  $p_1 = p_2$ ,  $P = 0$  (изолированные от давления кромки), то давление  $p_m$  приводит только к отрицательному прогибу. При  $\lambda = 0$ ,  $P = -p_m h$  и  $p_1 > p_2$  получается наибольшее положительное значение прогиба, а в случае  $p_1 < p_2$  – отрицательное значение  $W/R$ . При всестороннем давлении ( $p_1 = p_2 = p$ ,  $\lambda = 0$ ,  $P = -ph$ ) прогиб обращается в нуль. Как указано в начале параграфа, для изгиба полосы и пластинки также имеется такой результат.

С увеличением угла раствора  $\Theta$  прогиб возрастает и достигает максимума при  $\Theta = \pi$ . Как видно по знаменателю (3.2), в последнем случае прогиб ограничивается только жесткостью опоры. Малая зависимость прогиба от жесткости  $K$  объясняется тем, что левая кромка (рис. 2) может перемещаться только по окружности радиуса  $R$ . В этом случае в решении отсутствует также влияние изгибной жесткости  $D$ . Она снова начинает сказываться при  $\Theta > \pi$ . Однако в этом случае принятое выше приближенное решение может

не отражать картину изгиба. При больших значениях угла раствора  $\Theta$  в решении нужно учитывать также более высокие гармоники.

Для построения графика зависимости  $W(\Theta)$  примем  $P = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0.31$ ,  $h/S = 10^{-2}$ ,  $p_1 = 5.025$  МПа,  $p_2 = 4.975$  МПа,  $p_m = 5$  МПа. Тогда выражение (3.2) имеет вид

$$\frac{W}{S} = \frac{20(1 - \Theta)}{\pi \left[ 2(\pi^2 - \Theta^2)^2 + 5(\pi^2 - \Theta^2) \right]}. \quad (3.3)$$

Рис. 3 построен по (3.3). Изгибу пластины соответствует угол раствора  $\Theta = 0$ . Как видно из рис. 3, с увеличением угла  $\Theta$  (или, например, уменьшением радиуса  $R$  при постоянной длине  $S$ ) при внутреннем перепаде давления ( $p_1 > p_2$ ) действительный прогиб меньше (кривая 1), чем по обычной теории (без учета  $p_m$ , кривая 2) и уменьшается с ростом  $\Theta$ . Если  $p_1 = 4.975$  МПа,  $p_2 = 5.025$  МПа, то происходит более быстрое увеличение прогиба к центру кривизны (кривая 3) по сравнению с результатом по обычной теории (кривая 4). При нулевом перепаде ( $p_1 = p_2$ ,  $p_m \neq 0$ ) изгиб происходит в направлении центра кривизны (в отличие от нулевого решения по обычной теории). Если условия опирания отличаются от принятых, то результаты могут измениться.

Отметим, при принятых выше числовых данных условия  $\sigma_z = 0$  и  $\sigma_z = -p_m h$  приводят к одинаковым результатам. Это объясняется тем, что параметру  $\lambda = 0$  ( $\chi = 0$ ) соответствуют нулевая жесткость опоры и свободное расширение оболочки по окружности при обжатии по ее толщине. В случае большой жесткости опоры ( $\lambda \gg 1$ ,  $\chi = \nu(1 - \nu)^{-1}$ ) проявляется наибольшее влияние на решение отказа от гипотезы  $\sigma_z = 0$  и учета обжатия по толщине средним давлением ( $\sigma_z = -p_m$ ). Это влияние тем больше, чем больше коэффициент Пуассона материала.

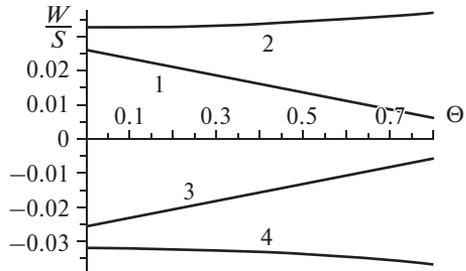


Рис. 3. Изменение безразмерной амплитуды прогиба  $W/S$  в зависимости от угла раствора  $\Theta$

#### 4. ИЗГИБ ЗАМКНУТОЙ ОБОЛОЧКИ

В случае большой жесткости опоры  $C$  может возникать значительная окружная сила  $N$  при нагружении панели давлениями  $p_1$  и  $p_2$  (параметр  $\lambda$  не является малым по сравнению с единицей). В линейной теории максимальную сжимающую силу  $N$  ограничиваем ее критическим значением. Решения уравнений (2.5) отличаются при  $p_1 > p_2$  и  $p_1 < p_2$ . В первом случае справедлива принятая выше аппроксимация прогиба  $\sin(\pi\theta/\Theta)$ , во втором необходимо принять  $\sin(2\pi\theta/\Theta)$  (задача устойчивости круговой формы).

С целью более наглядного определения влияния среднего давления  $p_m$  рассмотрим статический изгиб замкнутой цилиндрической оболочки. Обозначим через  $N_0, M_0, \kappa_0, q_0, v_0, w_0$  величины, относящиеся к осесимметричному статическому состоянию оболочки, а без индексов – к неосесимметричному динамическому и статическому изгибу. Подставив суммы  $N_0 + N, M_0 + M, \kappa_0 + \kappa, q_0 + q$  в уравнения (2.5), получаем две системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial N_0}{\partial s} - \frac{\partial M_0}{\partial s} \left( \frac{1}{R} - \kappa_0 \right) = 0, \\ \frac{\partial^2 M_0}{\partial s^2} + N_0 \left( \frac{1}{R} - \kappa_0 \right) = q_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial s} - \frac{\partial M}{R \partial s} - \rho h \ddot{v} = 0, \\ \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} - N_0 \kappa + \frac{N}{R} + \rho h \ddot{w} = q. \end{cases}$$

В соответствии с (2.2)  $\kappa_0 = 0$ . Так как  $M_0 = D\kappa_0 = 0$  по всей окружности оболочки, то и производные  $M_0$  по  $s$  равны нулю. Поэтому из (2.3) и первой системы (4.1) следует

$$N_0 = q_0 R = (p_1 - p_2) R - p_m h. \quad (4.2)$$

Ввиду свободного расширения по окружности замкнутой оболочки в (4.2) отсутствует параметр  $\chi$  (2.11).

С учетом (2.4) и (4.2) вторую систему (4.1) приводим к виду

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 N}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 M}{R \partial s^2} - \rho h \frac{\partial \ddot{v}}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} + \frac{N}{R} + \rho h \ddot{w} - (p_1 - p_2) R \kappa = p_1 - p_2 + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - \frac{h \bar{p}_m}{R}. \end{cases} \quad (4.3)$$

При определении  $N_0$  (4.2) не принимается во внимание малая динамическая составляющая. Поэтому давления  $\bar{p}_1, \bar{p}_2$  относятся только к неосесимметричному движению. Во втором уравнении (4.3) отсутствует член со средним давлением  $p_m$ .

Независимость изгиба замкнутой цилиндрической оболочки от среднего давления  $p_m$  (в отличие от изгиба цилиндрической незамкнутой оболочки) объясняется тем, что член  $p_m h \kappa$  в составе  $N_0 \kappa$  приводит к увеличению прогиба, например, по форме  $W_n \sin n\theta$ , а в составе  $q$  – к уменьшению на такую же величину.

Более наглядно покажем указанную независимость при  $p_1 = p_2 = p$ . Тогда сила  $q$  по (2.3) состоит из двух частей. Если принять  $w = W_n \sin n\theta$ , где  $n = 2, 3, \dots$ , то

$$q = -\frac{ph}{R} - \frac{phW_n(n^2 - 1)}{R^2} \sin n\theta.$$

Из-за кривизны  $R^{-1}$  есть постоянная распределенная сила, направленная к центру. На участке  $0 < n\theta < \pi$  поперечная сила, зависящая от изгиба по принятой форме и представленная вторым членом, также направлена к центру, а при  $-\pi < n\theta < 0$  – от центра (рис. 4, *a*). Такое воздействие силы препятствует изгибу.

При изгибе создается также поперечная сила, обусловленная окружной сжимающей силой  $N_0 = -ph$ , которая равна

$$-ph\kappa = \frac{phW_n(n^2 - 1)}{R^2} \sin n\theta.$$

Эта сила, направление которой показано на рис. 4, *b*, стремится увеличить изгиб. Ввиду равенства их с противоположными действиями, как это видно по рис. 4, нет влияния среднего давления  $pm$  на изгиб. Аналогом является цилиндрический изгиб пластины, на свободно перемещающиеся кромки которой действует сжимающая сила  $ph$ .

Таким образом, независимость от  $p_m$  является особенностью замкнутой оболочки, в которой под действием давлений на ее поверхности возникает окружная сила.

Исключив  $N$  из уравнений (4.3) и с учетом приведенного выше равенства  $\partial v/\partial s = -w/R$ , получаем следующее уравнение относительно функций изменения кривизны и прогиба

$$\frac{\partial^4 \kappa}{\partial s^4} + \frac{\partial^2 \kappa}{R^2 \partial s^2} - \frac{(p_1 - p_2)R}{D} \frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} + \frac{\rho h}{D} \left( \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial s^2} - \frac{\dot{w}}{R^2} \right) = \frac{\partial^2 (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{D \partial s^2}, \quad (4.4)$$

которое должно рассматриваться совместно с уравнением (2.2). Так как при динамическом взаимодействии изгибных движений оболочки и контактирующей жидкости давления  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$  имеют близкие значения с разными знаками, то среднее давление  $\bar{p}_m$  значительно меньше, чем  $\bar{p}_1 - \bar{p}_2$ . Поэтому в (4.4) отброшен член, содержащий  $\bar{p}_m$ .

Система уравнений (4.4) и (2.2) может быть успешно использована при анализе статической устойчивости оболочки. Рассмотрим, например, устойчивость круговой формы замкнутой оболочки с одной открытой трещиной (или узким надрезом глубиной  $h - h_0$ ) в точке  $\theta = 0$  (и  $\theta = 2\pi$ ). Ставятся условия

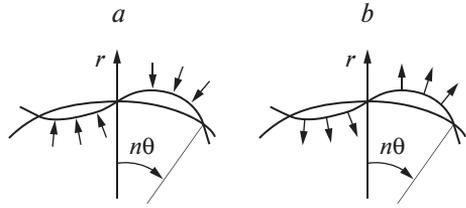


Рис. 4. Направления поперечных сил, возникающих при изгибе оболочки

$$w = 0, \quad v = 0, \quad \kappa = \mp (h_0/h)^3 \partial^2 w / \partial s^2 \quad (\theta = 0, 2\pi). \quad (4.5)$$

Последние условия являются приближенными. Они лучше описывают реальную картину с уменьшением отношения толщины  $h_0$  к длине надреза (при этом участок становится тонким). Как видно из (2.8),  $v = 0$  соответствует значениям  $C \rightarrow \infty$  и  $P = 0$ .

Решение уравнения (4.4) при  $p_2 > p_1$  и замене  $s$  на  $\theta = s/R$  имеет вид

$$\kappa = C_1 \sin \beta \theta + C_2 \cos \beta \theta + \frac{C_3 \theta}{\beta^2} + \frac{C_4}{\beta^2}, \quad \beta^2 = 1 + \frac{(p_2 - p_1)R^3}{D}. \quad (4.6)$$

Выразим константы  $C_2$  и  $C_3$  через  $C_1$  и  $C_4$  в соответствии с последними условиями (4.5). При этом для упрощения вычислений примем, что толщина  $h_0$  надреза значительно меньше толщины  $h$  оболочки, когда может быть принято  $\kappa \approx 0$  ( $\theta = 0, 2\pi$ ). Тогда с учетом указанного выше равенства  $\partial v / \partial s = -w/R$  из (2.2) имеем

$$\frac{d^2 w}{R^2 d\theta^2} + \frac{w}{R^2} = C_1 \sin \beta \theta + \frac{C_4}{\beta^2} (1 - \cos \beta \theta) - \frac{\theta}{2\pi} \left( C_1 \sin 2\pi \beta + \frac{C_4}{\beta^2} (1 - \cos 2\pi \beta) \right).$$

Проинтегрировав это уравнение и удовлетворив первым условиям (4.5), получаем

$$\frac{w}{C_4 R^2} = W_1 \sin \theta + \frac{\cos \theta}{1 - \beta^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{(1 - \cos 2\pi \beta) \sin \beta \theta}{\beta^2 (1 - \beta^2) \sin 2\pi \beta} - \frac{\cos \beta \theta}{\beta^2 (1 - \beta^2)}. \quad (4.7)$$

Здесь первый член в правой части соответствует перемещению вокруг надреза без деформации оболочки. Поэтому он далее не рассматривается.

Как указано выше, перемещение  $v$  по окружности выражается через прогиб  $w$  как  $v = -\int w d\theta + V$ , где  $V$  соответствует вращению по окружности без деформации и далее не рассматривается. Проинтегрировав это выражение с учетом (4.7) и удовлетворив условиям (4.5) относительно  $v$ , приходим к уравнению

$$\cos 2\pi \beta - \pi \beta (\beta^2 - 1) \sin 2\pi \beta - 1 = 0. \quad (4.8)$$

Численное решение (4.8) дает наименьший корень, равный  $\beta \approx 1.55$ . С учетом обозначения  $\beta$  в (4.6) получаем следующее критическое значение перепада давления

$$p_2 - p_1 = \frac{(\beta^2 - 1)D}{R^3} = \frac{1.4D}{R^3}. \quad (4.9)$$

Это известное критическое значение распределенной поперечной силы для кольца с шарниром. Как известно [8–11], критическое значение давле-

ния на замкнутую целостную оболочку (без надреза) определяется числом  $\beta = 2$ . Поэтому в этом случае в (4.9) вместо 1.4 коэффициент равен 3. Это число  $\beta = 2$  означает число волн, укладываемых по окружности целостной оболочки. Формы потери устойчивости в указанных двух случаях описываются функциями  $\cos 2\theta$  и (4.7), где  $W_1 = 0$ ,  $\beta = 1.55$ .

Отметим, при использовании последних условий (4.5) без упрощения значение  $\beta$  меняется от 1.55 при  $h_0/h \ll 1$  до  $\beta = 2$  при  $h_0/h = 1$ , причем  $\beta$  отличается незначительно от 1.55 до  $h_0/h = 0.4$ . При увеличении отношения до  $h_0/h = 1$  приближение к  $\beta = 2$  происходит по закону  $(h_0/h)^3$ .

Если в уравнении (4.6) перейти к углу  $\theta = s/R$  и функции  $w(\theta, t)$ , то оно приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{(p_1 - p_2)R}{D} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \\ + \frac{\rho h R^4}{D} \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial \theta^2} - \ddot{w} \right) = \frac{R^4 \partial^2 (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{D \partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Из этого уравнения, в частности, получаются известные собственные частоты колебаний замкнутого кольца, нагруженного давлением [10]. Низшая частота обращается в нуль при достижении внешним перепадом давления критического значения. Уравнения (4.4) и (4.10) могут быть применены и в случае незамкнутой оболочки, если жесткость опоры достаточно большая. Исключение составляет полая оболочка ( $\theta \ll 1$ ) при  $p_2 > p_1$ , когда необходимо учитывать изменение сжимающей силы при изгибе и недостаточно линейной постановки задачи устойчивости.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В параграфе приведены уравнения изгиба длинной тонкостенной оболочки в виде панели и замкнутого цилиндра с учетом статических и динамических давлений на обе ее поверхности. Первая гипотеза Кирхгоффа–Лява (геометрическая) применяется при определении не только внутренних деформаций и напряжений, но и внешней поперечной силы. Появление этой силы обусловлено взаимодействием среднего давления на поверхности оболочки с изменением кривизны ее срединной поверхности. Показано, что она может быть существенной в случае относительно высоких давлений на обе поверхности тонких тел, что имеет место в природе и технике, например, в глубоководной среде и в оборудовании нефтехимии, транспорта, энергетики и т.д.

Вторая гипотеза Кирхгоффа–Лява (силовая) о малости нормальных напряжений между слоями стенки, параллельными срединной поверхности,

не используется. Вводятся в рассмотрение обжатие по толщине стенки оболочки средним давлением и соответствующее расширение по ее окружности. Это приводит к зависимости уравнения изгиба от жесткости опоры в окружном направлении и от коэффициента Пуассона. Как известно, в обычной постановке линейного изгиба такая связь отсутствует. Другими словами, если в рассматриваемой задаче есть влияние среднего давления на изгиб, то нужно учитывать и обжатие по толщине стенки. Последний фактор становится заметным при высоких значениях коэффициента Пуассона материала и жесткости опор и оценивается безразмерными параметрами  $\lambda$  (2.10) и  $\chi$  (2.11). Если учитывается обжатие стенки, то нужно принимать во внимание и уточненное значение поперечной силы (2.3), (2.4).

Линейные уравнения относительно изменения кривизны и прогиба даются в условиях плоского деформированного состояния. Наиболее подробно изучен статический изгиб цилиндрической панели с произвольным углом раствора в случае относительно малой жесткости опоры. При нулевом угле раствора как частный случай следует известное уравнение цилиндрического изгиба пластины, где учитывается среднее давление на ее поверхности.

Показано, что при внутреннем перепаде давления с увеличением угла раствора панели ее прогиб уменьшается и в целом меньше, чем по классической теории. При внешнем перепаде с увеличением этого угла происходит более быстрый рост прогиба к центру кривизны, чем по обычной теории. Нулевому перепаду давления соответствует изгиб в направлении центра кривизны. Эти результаты справедливы при относительно малой жесткости одной из опор или малом перепаде давлений на поверхности, когда окружающая сила меньше ее критического значения.

В случае большой жесткости опоры может возникать значительная окружающая сила, обусловленная перепадом статических давлений. Это имеет место и в случае замкнутой оболочки. При этом необходимо рассматривать осесимметричное напряженное состояние оболочки под действием перепада давлений и неосесимметричный статический или динамический изгиб. В отличие от цилиндрической панели на изгиб замкнутой оболочки среднее давление не оказывает влияния. Кроме того, нет влияния обжатия стенки ввиду возможности свободного расширения по окружности. В таких случаях применение второй гипотезы Кирхгоффа–Лява не вносит погрешности в классическое уравнение изгиба. С этой точки зрения изгиб замкнутой оболочки представляет собой особый случай.

# Глава II

## ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ТРУБОПРОВОДА В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

### § 1. ДИНАМИКА ТРУБОПРОВОДА ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННЕГО УДАРНОГО ДАВЛЕНИЯ

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Динамические явления в трубопроводах и цилиндрических оболочках, наполненных жидкостью или газом, рассматривались во многих работах. К первым авторам относятся Р. Резаль (1876 г.), Д. Кортевег (1878 г.), И. С. Громека (1883 г.). Наиболее известной стала работа Н. Е. Жуковского (1899 г.) [1] с подробным описанием экспериментального изучения гидродинамического удара в трубопроводах и соответствующей теории. В ней учитывается сжимаемость жидкости, показывается, что в данной осесимметричной задаче несущественно влияние инерционных и моментных членов в уравнении движения трубы. В последующих работах учитывались различные факторы, уточняющие упрощенную модель. В числе их учет всех инерционных сил, поперечного сдвига, неосесимметричных деформаций, среднего течения жидкости, ее вязкости. Обзор ранней литературы приведен, например в [2]. Теория изгиба трубопроводов и шлангов в общей постановке развита в [3]. Большое внимание уделялось проблеме гашения ударных волн в трубопроводах [4, 5].

Здесь ограничимся кратким обзором только исследований по влиянию постоянного и переменного во времени внутреннего давления на изгиб трубопровода. Это влияние относительно мало изучено. В [6, 7] рассмотрено

- 
1. Жуковский Н. Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 107 с.
  2. Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 184 с.
  3. Светлицкий В. А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
  4. Ганиев Р. Ф., Низамов Х. Н., Дербуков Е. И. Волновая стабилизация и предупреждение аварий в трубопроводах. М.: Изд-во МГТУ, 1996. 290 с.
  5. Ганиев Р. Ф. Нелинейные резонансы и катастрофы. Надежность, безопасность и бесшумность. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2013. 592 с.
  6. Айбиндер А. Б., Камерштейн А. Г. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. М.: Недра, 1982. 342 с.
  7. Игатов М. А. Static Problems of Hydroelasticity. Moscow: Fizmatlit, 1998. 208 p.

влияние внутреннего перепада давления в трубе на ее статический изгиб и устойчивость. Экспериментальное изучение этого эффекта проводилось путем определения низшей частоты собственных колебаний в зависимости от ее внутреннего давления [8]. В [2] определен спектр частот прямой трубы с концевыми опорами, а также кругового трубчатого кольца – топливного коллектора газотурбинного двигателя. Самовозбуждение периодических и хаотических колебаний трубопровода при гармоническом изменении внутреннего давления рассмотрено в [9] и последующих работах. Для изучения этих режимов колебаний нужно исходить из нелинейных соотношений. Сильный изгиб сверхпроводящего кабеля, представляющего собой трубу с концентрическими слоями из разных материалов для прокачки жидкого азота, рассмотрен в [10] (изложен в предыдущей главе книги).

Критическая комбинация плотности  $\rho_0$ , давления  $p_0$  и скорости движения  $V_0$  жидкости, при которой отклоненная от прямолинейной форма является состоянием равновесия, равна [2]

$$p_0 + \rho_0 V_0^2 = \pi^2 D / R^2 L^2, \quad (1.1)$$

где  $D$  – изгибная жесткость,  $R, L$  – внутренний радиус и длина трубы. Концы ее свободно оперты и могут перемещаться в продольном направлении на опорах. Большое количество работ посвящено статике и динамике трубопроводов при  $p_0 \ll \rho_0 V_0^2$  (принимается  $p_0 = 0$ ). К последним исследованиям в этом направлении относятся [11–13], где приводится также обзор литературы.

Во всех указанных выше исследованиях принимается допущение о неизменности формы поперечного сечения трубы, которое остается плоским и перпендикулярным к деформированной осевой линии. Тогда при изгибе трубы с кривизной  $\kappa_*$  осевой линии под действием внутреннего перепада давления  $p_*$  образуется поперечная распределенная сила  $Fp_*\kappa_*$ , направленная в сторону выпуклости осевой линии [2, 3, 7]. Здесь  $F = \pi R^2$  – площадь проходного сечения с радиусом  $R$ . Кроме того, под действием перепада давления  $p_*$  происходит осесимметричное расширение трубы и ее продольное укорочение, что в зависимости от коэффициента Пуассона материала и условий закрепления трубы на опорах в продольном направлении приводит к образованию растягивающей продольной силы  $Fp_*\chi$  и, соответственно,

- 
8. Tang D. M., Ilgamov M. A., Dowell E. H. Buckling and post-buckling behaviour of a pipe subjected to internal pressure // Journal of Applied Mechanics: Transactions ASME. 1995. V. 62. № 3. P. 595–600.
  9. Ильгамов М. А., Мишин В. Н. Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 181–192
  10. Ilgamov M. A., Ratrouf R. // Large deflection of superconducting cable // Intern. J. of Non-Linear Mech. 1999. V. 34. № 5. P. 869–880.
  11. Нестеров С. В., Акуленко Л. Д., Коровина Л. И. Поперечные колебания трубопроводов с равномерно движущейся жидкостью // ДАН. 2009. Т. 427. № 6. С. 781–784.
  12. Акуленко Л. Д., Иванов М. И., Коровина Л. И., Нестеров С. В. Свободные колебания участка трубопровода // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 172–187.
  13. Акуленко Л. Д., Иванов М. И., Коровина Л. И., Нестеров С. В. Основные свойства собственных колебаний протяженного участка трубопровода // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 4. С. 119–134.

распределенной поперечной силы  $Fp_*\chi k_*$ , направленной в сторону вогнутости осевой линии. Величина  $\chi$  включает в себя указанные выше параметры. Общая распределенная поперечная сила равна

$$q_* = gM - Fp_*k_*(1 - \chi) \quad (0 < \chi < 1). \quad (1.2)$$

Здесь  $M$  – масса горизонтально расположенного трубопровода единичной длины,  $g$  – гравитационное ускорение, положительное направление которого принято вниз.

Данный параграф посвящен исследованию динамического поведения трубопровода под действием поперечной силы, представленной формулой (1.2). Он излагается по результатам статей [14, 15].

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Принимаются следующие допущения. Длина пролета  $L$  горизонтальной трубы между опорами (например, между двумя емкостями) на порядок и более превышает диаметр  $2R$ , а диаметр на порядок и более – толщину  $h$  стенки. Труба испытывает осесимметричную и изгибную упругие деформации. Поперечное сечение ее при изгибе сохраняет круговую форму, остается плоским и перпендикулярным к деформированной осевой линии. Следовательно, применяется модель изгиба балки, в которой учитываются продольные силы, возникающие вследствие осесимметричной деформации под действием внутреннего перепада давления.

Используется приближение несжимаемой идеальной жидкости, причем среднее течение ее не учитывается (в (1.1)  $\rho_0 V_0^2 \ll p_0$ ). Форма ударного давления в жидкости по времени разная, по длине пролета трубы устанавливается мгновенно в соответствии с моделью несжимаемой жидкости. Учитывается взаимодействие внутреннего давления и изменения кривизны, а также осесимметричной деформации, что приводит к появлению боковой распределенной силы, направленной в сторону выпуклости осевой линии трубопровода. Этот эффект выражается формулой (1.2). Используются линейные соотношения.

В уравнении изгиба относительно прогиба  $w_*$

$$D \frac{\partial^4 w_*}{\partial x^4} + M \frac{\partial^2 w_*}{\partial t^2} = q_*, \quad (2.1)$$

при допущении  $h/(2R) \ll 1$  можно принять

$$D = \pi E R^3 h, \quad M = \pi R(2h\rho + R\rho_0), \quad (2.2)$$

где  $E$ ,  $\rho$  – модуль упругости и плотность материала трубы.

14. Ганиев Р. Ф., Ильгамов М. А. Упругая реакция трубопровода на внутреннее ударное давление // ДАН. 2016. Т. 470. № 2. С. 162–165.

15. Ильгамов М. А. Динамика трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Изв. РАН, МТТ. 2017. № 6. С. 83–96.

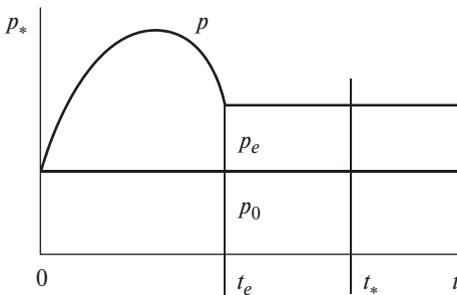


Рис. 1

Давление  $p_* = p_0 + p(t)$  состоит из постоянной и переменной частей (рис. 1). Прогиб  $w_*$ , положительное направление которого принято вниз, состоит из статической части  $w_0(x)$ , вызываемой собственным весом  $gM$  трубопровода и давлением  $p_0$ , и динамической части  $w(x, t)$ , обусловленной давлением  $p$ . Условиям свободно опирания по концам ( $x = 0, L$ ) удовлетворяют функции

$$w_0 = W_{0n} \sin n\beta x, \quad w = W_n \sin n\beta x \quad \beta = \pi L^{-1}. \quad (2.3)$$

При отсутствии нагрузок начальное ненапряженное состояние принимается прямолинейным. Начальные скорости движения равны нулю.

Общая кривизна  $\kappa_*$ , входящая в (1.2), состоит из частей  $\partial^2 w_0 / \partial x^2$  и  $\partial^2 w / \partial x^2$ . Член  $Fp_*\kappa_*$  в (1.2), умноженный на  $dx$ , определяется как равнодействующая (с обратным знаком) давления  $p_*$ , действующего на элемент жидкости длиной  $dx$  со стороны изогнутой внутренней поверхности трубы (рис. 2). Эта равнодействующая представляет собой проекцию на нормаль к упругой линии сил  $Fp_*$ , действующих на поперечных сечениях  $x = 0$  и  $x = dx$ . Она равна  $2Fp_* \sin(d\theta/2) = Fp_* (d\theta/dx) dx = Fp_*\kappa_* dx$ . Очевидно, для прямого элемента эта сила равна нулю.

Для определения величины  $\chi$  в (1.2) нужно рассмотреть осесимметричную деформацию под действием внутреннего давления  $p_*$ . При пренебрежении инерционностью окружная сила равна  $N_{*\theta} = p_*R$ . Из закона Гука

$$N_{*\theta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_{\theta*} + \nu\epsilon_*), \quad N_* = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_* + \nu\epsilon_{\theta*}),$$

где  $N_{*\theta}$  и продольная сила  $N_*$  принимаются приходящимися на единицу длины,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\epsilon_{\theta*}, \epsilon_*$  – деформации. Исключив  $\epsilon_{\theta*}$ , получаем

$$N_* = p_*R\nu + Eh\epsilon_*. \quad (2.4)$$

Как и при записи (2.1) и выражения  $N_{*\theta}$ , здесь пренебрегаются продольные и радиальные инерционные силы. Тогда продольная деформация будет постоянной по длине полета  $\epsilon_* = A(t)$  или

$$\epsilon_* = \frac{\partial u_*}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_*}{\partial x} \right)^2 = A, \quad u_* = Ax + B - \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial w_*}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (2.5)$$

Константы  $A$  и  $B$  определяем из условий  $N_* = Cu_*$  ( $x = 0$ ),  $u_* = 0$  ( $x = L$ ), где  $C$  – продольная жесткость опоры единичной дуги. В соответствии с выражениями (2.4), (2.5) полное осевое усилие по трубе равно

$$2\pi RN_* = \pi p_* R^2 \chi + \alpha \int_0^L \left( \frac{\partial w_*}{\partial x} \right)^2 dx,$$

$$\chi = \frac{2\nu}{1 + \lambda}, \quad \lambda = \frac{Eh}{CL}, \quad \alpha = \frac{\pi EhR}{(1 + \lambda)L}. \quad (2.6)$$

Коэффициент  $\lambda$  представляет собой отношение жесткостей трубы и опоры в продольном направлении. При малом отношении этих жесткостей параметр  $\chi \rightarrow 2\nu$ , при большем их отношении  $\chi \rightarrow 0$ . С учетом (2.6) поперечная распределенная сила (1.2) может быть представлена в более общей форме

$$q = gM - \left( \pi R^2 p_* (1 - \chi) - \alpha \int_0^L \left( \frac{\partial w_*}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w_*}{\partial x^2}. \quad (2.7)$$

В настоящем анализе нелинейный член в (2.7) не учитывается. Подставив в (2.1) и (2.7)  $w_* = w_0 + w$ ,  $\kappa_* = \partial^2(w_0 + w)/\partial x^2$ ,  $p_* = p_0 + p$ , получаем линейные уравнения статического и динамического изгиба

$$\frac{D}{M} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{\pi R^2 p_0 (1 - \chi)}{M} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = g, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{D}{M} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\pi R^2 (p_0 + p)(1 - \chi)}{M} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\pi R^2 p(1 - \chi)}{M} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}. \quad (2.9)$$

Решение уравнения (2.8) при принятой функции  $w_0(x)$  (2.3) имеет вид

$$w_0 = \sum_{n=1,3,\dots} W_{0n} \sin n\beta x, \quad (2.10)$$

$$W_{0n} = \frac{4gM}{\pi D \beta^4 (n^5 - n^3 \eta_0^2)}, \quad \eta_0^2 = \frac{p_0}{p_{cr}}, \quad p_{cr} = \frac{D \beta^2}{\pi R^2 (1 - \chi)},$$

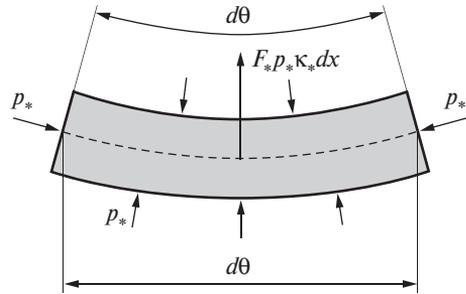


Рис. 2

где  $p_{cr}$  – критическое значение среднего давления  $p_0$ , при котором линейное решение по форме  $n = 1$  возрастает неограниченно. Будем принимать  $\eta_0 < 1$ . Для изучения случаев  $\eta_0 \geq 1$  требуется привлечение нелинейного уравнения изгиба [8–10].

При рассмотрении уравнения (2.9) необходимо задаваться видом динамического давления  $p(t)$ . Принимаются нулевые начальные условия.

### 3. ДИНАМИКА ПРИ СТУПЕНЧАТОМ ВОЗРАСТАНИИ ДАВЛЕНИЯ

В наиболее простом случае динамического давления  $p = p_e = \text{const}$  ( $t \geq 0$ ) (рис. 3, *a*) уравнение (2.9) может быть проинтегрировано точно. С учетом (2.3) уравнение (2.9) относительно амплитуд  $W_n$  представим в виде

$$\begin{aligned} \ddot{W}_n + (\omega_n^2 - \mu_n^2) W_n &= \mu_n^2 W_{0n}, \\ \omega_n^2 &= \Omega_n^2 \left( 1 - \frac{\eta_0^2}{n^2} \right), \quad \Omega_n^2 = \frac{Dn^4 \beta^4 t_e^2}{M}, \quad \mu_n^2 = \frac{(1 - \chi) \pi R^2 p_e n^2 \beta^2 t_e^2}{M}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где точка над буквой обозначает производную по  $\tau = t/t_e$ ,  $t_e$  – некоторое характерное время,  $\Omega_n$  – собственные частоты изгибных колебаний трубопровода

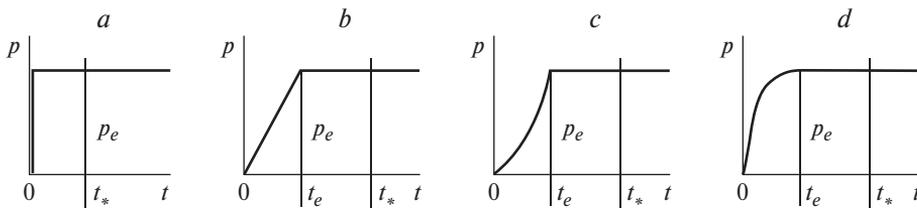


Рис. 3

при нулевом перепаде статического давления,  $\omega_n$  – собственные частоты при давлении  $p_0$ , умноженные на  $t_e$ ,  $\mu_n$  – параметр динамической нагрузки.

Решение уравнения (3.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{W_n}{W_{0n}} &= \frac{\mu_n^2}{k_n^2} (1 - \cos k_n \tau) \quad (k_n^2 = \omega_n^2 - \mu_n^2 > 0), \\ \frac{W_n}{W_{0n}} &= \frac{\mu_n^2}{k_n^2} (\text{ch} k_n \tau - 1) \quad (k_n^2 = \mu_n^2 - \omega_n^2 > 0). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Неравенства  $\omega_n^2 > \mu_n^2$ ,  $\omega_n^2 < \mu_n^2$  при учете обозначений (3.1) могут быть представлены в виде  $(p_0 + p_e)/p_{cr} < n^2$ ,  $(p_0 + p_e)/p_{cr} > n^2$ . Следовательно, при заданных конструктивных параметрах трубопровода относительно малое суммарное давление приводит к колебательному движению, а большое давление – к неограниченному росту прогибов. Как это следует из уравнения (3.1), при  $\omega_n^2 = \mu_n^2$  прогибы растут с постоянным ускорением. Из этого равенства получается число полуволн  $n_R = \sqrt{(p_0 + p_e)/p_{cr}}$ , разделяющее указанные режимы.

Важным является вопрос о возможности одновременного выполнения условий  $p_0 + p_e > n^2 p_{cr}$  и предела упругой окружной деформации трубы  $\sigma_e h > (p_0 + p_e)R$ , где  $\sigma_e$  – предел упругой деформации. Из них получаем  $\sigma_e h > Rn^2 p_{cr}$ . Так как согласно (2.10)  $(1 - \chi)L^2 p_{cr} = \pi^2 ERh$ , то

$$\frac{R}{L} < \frac{\sqrt{1 - \chi}}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_e}{E}}. \quad (3.3)$$

Для сталей  $\sigma_e/E \approx (1 \div 5) \cdot 10^{-3}$ . Наибольшее значение  $R/L \approx (1 \div 2.2) \cdot 10^{-2}$  достигается при  $\chi = 0$ ,  $n = 1$ . Таким образом, экспоненциальный рост прогиба реализуется в случае относительно тонких труб. При этом разрывающее кольцевое напряжение не превышает предела упругости. Если, например, выполняются условия  $\mu_1 > \omega_1$ ,  $\mu_3 < \omega_3$ , то динамическая часть решения с использованием (2.3), (2.10), (3.2) может быть записана

$$w = \frac{4gM}{\pi D\beta^4} \left[ \left( \frac{\mu_1}{k_1} \right)^2 \frac{(\text{ch}k_1\tau - 1)}{(1 - \eta_0^2)} \sin\beta x + \left( \frac{\mu_3}{\kappa_3} \right)^2 \frac{(1 - \text{cos}k_3\tau)}{3^3(3^2 - \eta_0^2)} \sin 3\beta x + O\left(\frac{1}{5^5}\right) \right]. \quad (3.4)$$

Таким образом, по первой гармонике ( $n = 1$ ) происходит экспоненциальный рост прогиба, по  $n = 3, 5, \dots$  – колебания во времени с уменьшающимися амплитудами около прогиба, возрастающего с ускорением.

Рост по различным гармоникам  $n$  происходит с различной интенсивностью. Наиболее быстро растет гармоника вблизи числа  $n_L = \sqrt{(p_0 + p_e)/(2p_{cr})}$ , определяемого из условия  $\partial k_n^2/\partial n^2 = 0$ . Если, например, значения  $p_0 = 3.0$  МПа,  $p_e = 15.0$  МПа и  $p_{cr} = 1.2$  МПа, то  $n_L = 2.74$ ,  $n_R = 3.9$ . Следовательно, гармоники  $n = 1, 3$  растут, причем интенсивнее  $n = 3$ . Начиная с  $n = 5$  происходят колебания.

В случае аргументов функций в (3.2) меньше единицы, сохраняя по три члена разложения в степенной ряд, получаем

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{\mu_n^2 \tau^2}{2} \left( 1 - \frac{(\omega_n^2 - \mu_n^2) \tau^2}{12} \right), \quad \dot{W}_n}{W_{0n}} = \mu_n^2 \tau \left( 1 - \frac{(\omega_n^2 - \mu_n^2) \tau^2}{6} \right). \quad (3.5)$$

При  $|\omega_n^2 - \mu_n^2| \tau_*^2 \leq 1/16$  с погрешностью около процента можно ограничиться первыми членами в (3.5). Так как при этом в решении отсутствует параметр  $\omega_n^2$ , то данное приближение означает, что в системе упругие силы малы по сравнению с инерционными силами в интервале времени  $0 < \tau \leq \tau_*$ . Из этого условия получаем

$$\tau_* = I_n \sqrt{\frac{n^2(1+m)}{8|n^2 - \eta_0^2 - \eta_e^2|}}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (3.6)$$

$$m = \frac{R\rho_0}{2h\rho}, \quad \eta_e^2 = \frac{p_e}{p_{cr}}, \quad I_n = \frac{L^2}{\pi^2 n^2 R c t_e},$$

где  $c$  – скорость распространения волны,  $m$  – отношение масс жидкости и трубы,  $\eta_e^2$  – отношение динамического давления к критическому статическому давлению,  $I_n$  – безразмерный параметр.

Это время инерционного сопротивления трубопровода действию внутреннего давления тем больше, чем длиннее пролет между опорами, меньше диаметр трубы и скорость распространения волны. Наибольшее значение (3.6) по гармоникам достигается для числа  $n$  вблизи  $\sqrt{\eta_0^2 + \eta_e^2}$  или  $\sqrt{(p_0 + p_e)/p_{cr}}$ , а наименьшее – при  $\sqrt{(p_0 + p_e)/(2p_{cr})}$ . Случай  $n^2 = \eta_0^2 + \eta_e^2$  исключается из рассмотрения. За это время  $\tau_*$  амплитуда динамического прогиба одинакова для обоих случаев ( $\omega_n > \mu_n$ ,  $\omega_n < \mu_n$ ) и достигает величины  $2W_n = W_{0n} \mu_n^2 \tau_*^2$  или

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{\eta_e^2}{16|n^2 - \eta_0^2 - \eta_e^2|}. \quad (3.7)$$

Примечательно, что эта величина зависит только от параметров давлений  $\eta_0$ ,  $\eta_e$  и номера гармоники, задаваемого начальными условиями.

Пусть  $L = 4$  м,  $R = 0.05$  м,  $h = 0,002$  м,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\chi = 0$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $p_0 = 3.0$  МПа,  $p_e = 15.0$  МПа. Тогда по (2.10)  $p_{cr} = 12.5$  МПа, а по (3.6)  $c = 5000$  м/с,  $t_* = t_e \tau_* = 0.0055$  с ( $n = 1$ ),  $t_* = 0.00045$  с ( $n = 3$ ).

При принятых данных для гармоники  $n = 1$  выполняется неравенство  $\mu_1 > \omega_1$  или  $(p_0 + p_e)/p_{cr} > 1$ . Поэтому по этой гармонике происходит экспоненциальный рост прогиба, а для  $n = 3$  выполняется обратное неравенство. Следовательно, решение имеет вид (3.4).

В обоих случаях  $\omega_n^2 > \mu_n^2$ ,  $\omega_n^2 < \mu_n^2$  выражения (3.5) при  $\tau = \tau_*$

$$2W_n = W_{0n} \mu_n^2 \tau_*^2, \quad \dot{W}_n = W_{0n} \mu_n^2 \tau_* \quad (3.8)$$

служат начальными условиями в задаче для  $\tau > \tau_*$ . Определяя константы интегрирования уравнения (3.1) по (3.8), получаем

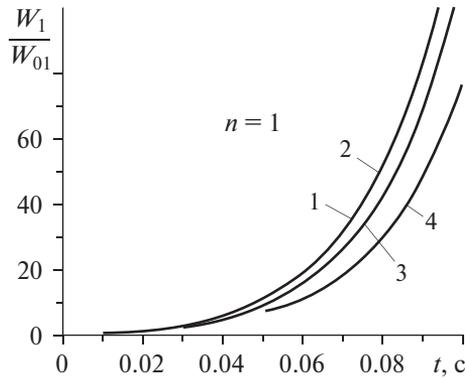


Рис. 4

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{\mu_n^2}{k_n^2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{k_n^2 \tau_*^2}{2} \right) \cos k_n (\tau - \tau_*) + \right. \\ \left. + (k_n \tau_*) \sin k_n (\tau - \tau_*) \right] \quad (k_n^2 = \omega_n^2 - \mu_n^2 > 0, \tau > \tau_*), \quad (3.9)$$

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{\mu_n^2}{k_n^2} \left[ \left( 1 + \frac{k_n^2 \tau_*^2}{2} \right) \operatorname{ch} k_n (\tau - \tau_*) + \right. \\ \left. + (k_n \tau_*) \operatorname{sh} k_n (\tau - \tau_*) - 1 \right] \quad (k_n^2 = \mu_n^2 - \omega_n^2 > 0, \tau > \tau_*). \quad (3.10)$$

На рис. 4 представлено сравнение точного решения (3.2) и приближенного решения (3.10) для данных, принятых выше. Хотя при этом  $t_* = 0.0055$  с ( $n = 1$ ), кривая 2 для  $t_* = 0.01$  с визуально совпадает с точным решением, показанным кривой 1. Только при сильном превышении значения  $t_*$ , диктуемого (3.6) (на рис. 4 кривая 3 при  $t_* = 0.03$  с, кривая 4 при  $t_* = 0.05$  с), наблюдается расхождение результатов. Можно сделать вывод, что значение динамического прогиба слабо зависит от нарушения условия (3.6).

#### 4. ДИНАМИКА ПРИ СЛОЖНЫХ ЗАКОНАХ ИЗМЕНЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ

Выделение начальной стадии динамического изгиба трубопровода, когда решение уравнения (2.9) с достаточной точностью можно представить в виде степенного ряда по времени, открывает возможность рассмотрения не только скачкообразного возрастания давления  $p$ , но и при более сложных

законах его изменения в пределах от нуля до некоторого времени  $t_e$ . Такое изменение давления характерно, например, в случае быстрого повышения давления в одной из емкостей, соединенных трубой. В частности, легко получить (3.5), (3.8), разыскивая решение в степенных рядах. Так как начальные условия являются нулевыми, то ряд начинается с члена  $\tau^2$ .

Если начальную стадию ограничить условием малости упругих сил по сравнению с инерционными, то ее будем называть инерционной стадией.

4.1. Рассмотрим случай динамического давления  $p = p_e \tau$  в интервале  $0 \leq \tau \leq 1$  и постоянного значения  $p_e$  при  $\tau > 1$  (рис. 3, *b*). Таким образом, здесь размерная продолжительность линейного роста давления составляет  $t_e$ . По координате  $x$  решение уравнения (2.9) принимается в виде (2.3). Обозначения коэффициентов  $\omega_n$  и  $\mu_n$  даны в (3.1), где в уравнении движения вместо  $\mu_n^2$  теперь будет фигурировать  $\mu_n^2 \tau$ . Тогда первые члены решения уравнения (2.9) в степенных рядах по  $\tau$  имеют вид

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{\mu_n^2 \tau^3}{6} \left( 1 - \frac{\omega_n^2 \tau^2}{20} \right), \quad \dot{W}_n = \frac{\mu_n^2 \tau^2}{2} \left( 1 - \frac{\omega_n^2 \tau^2}{12} \right) \quad (0 \leq \tau \leq 1). \quad (4.1)$$

Из условия  $\omega_n \tau_* = 1/3$  с учетом значения  $\omega_n$  по (3.1) находим

$$\tau_* = I_n \sqrt{\frac{2n^2(1+m)}{9|n^2 - \eta_0^2|}}, \quad (4.2)$$

где выражение  $I_n$  дано в (3.6). При определении  $\tau_*$  функция  $p = p_e \tau$  рассматривается и в области  $\tau > 1$ . Однако по физическому смыслу необходимо учитывать, что  $\tau_* \leq 1$ .

Множитель в виде корня в (3.6) и (4.2) мало отличается от единицы (для принятых выше числовых данных соответственно 0.86 и 0.87 при  $n = 1$ ). Поэтому продолжительность  $\tau_*$  инерционной стадии изгиба приблизительно определяется только параметром  $I_n$ , который представляет собой отношение квадрата полудлины изгибной волны  $L/n$  к десяти радиусам трубы  $\pi^2 R$  и расстоянию  $c t_e$ , пройденному продольной волной за время изменения внутреннего давления. При определении размерного времени  $t_* = t_e \tau_*$  параметру  $I_n t_e$  можно дать другую трактовку. Он представляет собой отношение  $L/n$  к  $\pi^2 R$  и времени прохождения продольной волной полудлины изгибной волны  $L/(nc)$ . Для случая газового трубопровода ( $m \ll 1, n = 1$ ) может быть введен поправочный коэффициент  $1/2$  перед  $I_n$ .

Решение уравнения (2.9) для времени  $\tau > 1$  (принято  $t_e = t_*$ ) при начальных условиях  $6W_n = W_{0n} \mu_n^2, 2\dot{W}_n = W_{0n} \mu_n^2$ , вытекающих из (4.1) при  $\tau = 1$ , для случая  $\mu_n > \omega_n$  имеет вид

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{\mu_n^2}{k_n^2} \left[ \left( 1 + \frac{k_n^2}{6} \right) \operatorname{ch} k_n (\tau - 1) + \frac{k_n}{2} \operatorname{sh} k_n (\tau - 1) - 1 \right] \quad (k_n^2 > 0, \tau > 1). \quad (4.3)$$

4.2. В случае давления  $p = p_e \tau^2 (0 \leq \tau \leq 1)$ ,  $p = p_e = \text{const} (\tau > 1)$  (рис. 3, *с*) решение уравнения (2.9) для интервала до  $\tau = 1$  имеет вид

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{\mu_n^2 \tau^4}{12} \left( 1 - \frac{\omega_n^2 \tau^2}{30} \right), \quad \dot{W}_n = \frac{\mu_n^2 \tau^3}{3} \left( 1 - \frac{\omega_n^2 \tau^2}{20} \right) \quad (0 \leq \tau \leq 1). \quad (4.4)$$

Полагая здесь  $(\omega_n \tau_*)^2 = 1/5$ , находим продолжительность инерционной стадии изгиба

$$\tau_* \approx I_n \sqrt{\frac{2n^2(1+m)}{5|n^2 - \eta_0^2|}}, \quad (4.5)$$

которая определяется главным образом безразмерным параметром  $I_n$  (сумма при  $n = 1$  и принятых выше данных равен 1.17).

Решение для  $\tau > 1$  получаем из уравнения (2.9), выражений (2.3) и условий, вытекающих из (4.4) при  $\tau = 1$ . Для  $\mu_n > \omega_n$  оно имеет вид

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{\mu_n^2}{k_n^2} \left[ \left( 1 + \frac{k_n^2}{12} \right) \text{ch } k_n(\tau - 1) + \frac{k_n}{3} \text{sh } k_n(\tau - 1) - 1 \right] \quad (k_n^2 > 0, \tau > 1). \quad (4.6)$$

4.3. При давлении, изменяющемся по закону  $p = p_e \tau(2 - \tau) (0 \leq \tau \leq 1)$ ,  $p = p_e = \text{const} (\tau > 1)$  (рис. 3, *д*), вместо (4.1) имеем

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{\mu_n^2 \tau^3}{3} \left( 1 - \frac{\tau}{4} - \frac{\omega_n^2 \tau^2}{20} \right), \quad \dot{W}_n = \mu_n^2 \tau^2 \left( 1 - \frac{\tau}{3} - \frac{\omega_n^2 \tau^2}{12} \right) \quad (0 \leq \tau \leq 1). \quad (4.7)$$

Полагая  $\omega_n \tau_* = 1/3$ , находим безразмерное время инерционной стадии изгиба равным приведенному в (4.2).

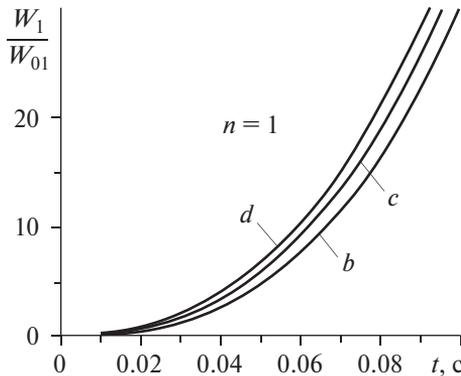


Рис. 5

Из (4.7) при  $\tau = 1$  следуют начальные условия для описания дальнейшего движения  $4W_n = W_{0n}\mu_n^2$ ,  $3\dot{W}_n = 2W_{0n}\mu_n^2$ . В согласии с ними и (2.3) решение уравнения (2.9) имеет вид

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{\mu_n^2}{k_n^2} \left[ \left( 1 + \frac{k_n^2}{4} \right) \operatorname{ch} k_n(\tau - 1) + \frac{2k_n}{3} \operatorname{sh} k_n(\tau - 1) - 1 \right] \quad (k_n^2 > 0, \tau > 1). \quad (4.8)$$

На рис. 5 приведено сравнение решений по формулам (4.3) (кривая *b*), по (4.6) (кривая *c*) и по формуле (4.8) (кривая *d*) при тех же данных, что при построении рис. 4. Буквенные обозначения кривых соответствуют вариантам изменения давления на рис. 3.

## 5. ДИНАМИКА ПРИ КРАТКОВРЕМЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ДАВЛЕНИЯ

В случае внутреннего давления в трубе, действующего в интервале времени  $0 \leq t \leq t_e$  (или  $0 \leq \tau \leq 1$ ) и обращающегося в нуль при  $t > t_e$  ( $\tau > 1$ ), для простоты будем принимать  $t_e$  равным времени инерционной стадии изгиба  $t_*$ . Если в действительности  $t_e \neq t_*$  ( $\tau_* \neq 1$ ), то полученное решение, как это следует из изложенного выше, является более точным, чем при  $\tau_* = 1$ . Если  $\tau_* < 1$ , но значение  $\tau_*$  не на порядок меньше единицы, то точность решения все еще может быть приемлемой, что было показано выше на числовом примере.

5.1. При ступенчатом возрастании давления в момент  $\tau = 0$ , постоянном его значении  $p_e$  в интервале  $0 < \tau < 1$  и обращении в нуль при  $\tau = 1$  (рис. 6, *a*) амплитуда прогиба определяется первым членом (3.5), причем это решение справедливо как для  $\mu_n < \omega_n$ , так и  $\mu_n > \omega_n$ . Так как при  $\tau > 1$  давление  $p$  равно нулю, то в уравнении (3.1) необходимо положить  $\mu_n = 0$ . Константы интегрирования (3.1) определяются по условиям (3.8), в которых  $\mu_n \neq 0$ . Это значение  $\mu_n$  далее определяется по (3.1). Решение представляется в виде

$$\begin{aligned} 2W_n &= W_{0n}\mu_n^2\tau^2 \quad (0 \leq \tau \leq 1), \\ \frac{W_n}{W_{0n}} &= \frac{\mu_n^2}{2} \left( \cos \omega_n(\tau - 1) + \frac{2}{\omega_n} \sin \omega_n(\tau - 1) \right) \quad (\tau > 1). \end{aligned} \quad (5.1)$$

5.2. Для случая изменения давления  $p$  по закону  $p_e\tau$  в пределах  $0 \leq \tau \leq 1$  и  $p = 0$  при  $\tau > 1$  (рис. 6, *b*) решение до времени  $\tau = 1$  имеет вид (4.1) и решение уравнения (3.1) при  $\mu_n = 0$  ( $\tau > 1$ ). Константы последнего определяются по условиям (4.1), в которых сохранены только первые члены и принято  $\tau = 1$ . Поэтому

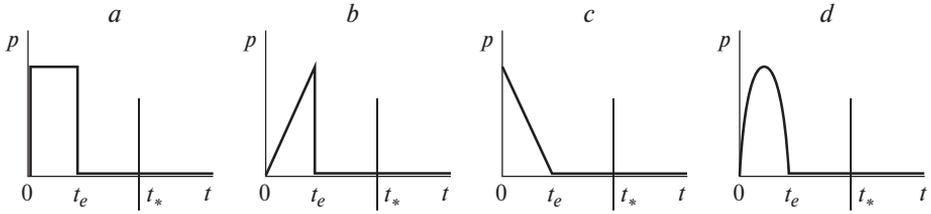


Рис. 6

$$6W_n = W_{0n}\mu_n^2\tau^3 \quad (0 \leq \tau \leq 1),$$

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{\mu_n^2}{6} \left( \cos \omega_n(\tau - 1) + \frac{3}{\omega_n} \sin \omega_n(\tau - 1) \right) \quad (\tau > 1). \quad (5.2)$$

5.3. В случае изменения давления по закону  $p = p_e(1 - \tau)$  ( $0 \leq \tau \leq 1$ ),  $p = 0$  ( $\tau > 1$ ) (рис. 6, c) решение для начальной стадии имеет вид

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{\mu_n^2\tau^2}{2} \left( 1 - \frac{\tau}{3} + \frac{(\mu_n^2 - \omega_n^2)\tau^2}{12} \right),$$

$$\frac{\dot{W}_n}{W_{0n}} = \mu_n^2\tau \left( 1 - \frac{\tau}{2} + \frac{(\mu_n^2 - \omega_n^2)\tau^2}{6} \right). \quad (5.3)$$

Инерционная стадия  $\tau_*$  изгиба определяется из условия  $16\tau_*^2(\mu_n^2 - \omega_n^2) = 1$ , вытекающего из второго выражения (5.3). При  $\tau = 1$  выражения (5.3), взятые без последних членов,  $3W_n = W_{0n}\mu_n^2$ ,  $2\dot{W}_n = W_{0n}\mu_n^2$  служат начальными условиями для определения дальнейшего поведения трубопровода. Таким образом, решением данной задачи является

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{\mu_n^2\tau^2}{2} \left( 1 - \frac{\tau}{3} \right) \quad (0 \leq \tau \leq 1),$$

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{\mu_n^2}{3} \left( \cos \omega_n(\tau - 1) + \frac{3}{2\omega_n} \sin \omega_n(\tau - 1) \right) \quad (\tau > 1). \quad (5.4)$$

5.4. При законе изменения давления  $p = 4p_e\tau(1 - \tau)$  ( $0 \leq \tau \leq 1$ ) и  $p = 0$  ( $\tau > 1$ ) (рис. 6, d) имеем решение для начальной стадии

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{2\mu_n^2\tau^3}{3} \left( 1 - \frac{\tau}{2} - \frac{\omega_n^2\tau^2}{20} \right), \quad \frac{\dot{W}_n}{W_{0n}} = 2\mu_n^2\tau^2 \left( 1 - \frac{2\tau}{3} - \frac{\omega_n^2\tau^2}{12} \right), \quad (5.5)$$

где  $\mu_n^2$ ,  $\omega_n^2$  даны в (3.1). Из второго выражения (5.5) следует  $\tau_* = 1/(3\omega_n)$ , что совпадает с условием (4.2). Как указано выше, в анализе принято  $\tau_* = 1$ . Амплитуда прогиба имеет вид

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{2\mu_n^2 \tau^3}{3} \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) \quad (0 \leq \tau \leq 1),$$

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{\mu_n^2}{3} \left( \cos \omega_n (\tau - 1) + \frac{2}{\omega_n} \sin \omega_n (\tau - 1) \right) \quad (\tau > 1). \quad (5.6)$$

На рис. 7 приведено сравнение решений (5.1) (кривая *a*), (5.2) (кривая *b*), (5.4) (кривая *c*), (5.6) (кривая *d*). Пунктирные части всех кривых построены по первым формулам, а сплошные части – по вторым формулам (5.1), (5.2), (5.4), (5.6). Буквенные обозначения кривых соответствуют рис. 6. Приняты те же числовые данные, что при построении рис. 4, 5. Как видно, чем больше площадь, занимаемая функцией  $p(t)$  в интервале  $0 \leq t \leq t_e$ , тем больше амплитуды колебаний при  $t > t_e$ .

Отметим, в [16] рассмотрен случай давления в виде  $p = 6.75p_e \tau(1 - \tau)^2$ , аппроксимирующем экспериментально полученную форму ударной волны в трубе с водой.

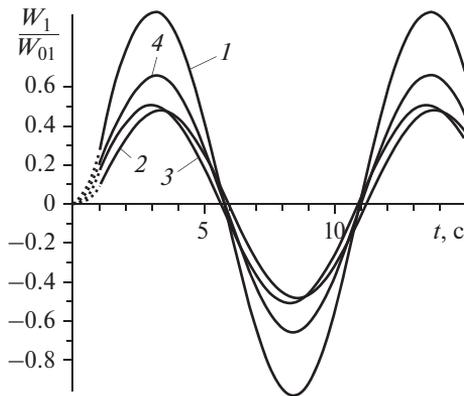


Рис. 7

## 6. ОЦЕНКИ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ

Для выявления смысла выделения начальной (или инерционной) стадии динамики сравним ее продолжительность  $t_*$  со временем резкого изменения давления  $t_e$  в различных средах. Во многих случаях время резкого повышения давления с последующим установлением и время воздействия ударных волн в жидкостных и газовых средах имеет порядок  $10^{-4} \div 10^{-3}$  с [4, 5, 16, 17] .

Если  $t_* \geq t_e$ , то изгиб происходит только при инерционном сопротивлении конструкции воздействию внутренней ударной волны или переходного периода перед установлением давления. Будем считать, что дальнейший процесс ( $t > t_e$ ), когда вступают в действие и упругие силы, происходит либо при постоянном ненулевом давлении, либо при нулевом давлении.

Рассмотрим более подробно случай нагружения на рис. 6, *b*. Из (4.2)  $t_* \approx I_n t_e$ . Оценки проведем для  $n = 1$  и нижнего предельного значения отношения  $L/(2R) \approx 10$  для справедливости уравнения (2.1). Тогда условие  $t_* \geq t_e$  приобретает вид

$$2L/c \geq 10^{-4} \div 10^{-3}. \quad (6.1)$$

Таким образом, чисто инерционное изгибное сопротивление трубопровода воздействию внутренних волн имеет место, если один период продольных колебаний  $2L/c$  трубопровода больше или равно времени изменения внутреннего давления. В случае стальной трубы ( $c = 5000$  м/с) условие (6.1) удовлетворяется при длинах  $L \geq 0.25 \div 2.5$  м. Для пластиков, некоторых композитов и других материалов с низким значением скорости  $c$  инерционное сопротивление имеет место, начиная с меньших длин трубопровода.

При меньших значениях  $L$  по сравнению с рассмотренным числовым примером продолжительность инерционной стадии может быть весьма малой. При этом выделение ее теряет смысл. Тогда для некоторого увеличения  $t_*$  можно сохранить больше членов в степенных рядах, описывающих начальную динамику. При этом в пределах  $t_*$  проявляются и упругие силы, процесс не является только инерционным [17].

В рассматриваемом случае давления  $p = p_e \tau$  ( $0 \leq \tau \leq 1$ ),  $p = 0$  ( $\tau > 1$ ) в скобках (4.1) учтем еще следующие члены:

$$\frac{\mu_n^2 \tau^3}{30} + \frac{\omega_n^4 \tau^4}{840}, \quad \frac{\mu_n^2 \tau^3}{15} + \frac{\omega_n^4 \tau^4}{360}.$$

При этом начальную стадию определим из условия  $\omega_n^4 \tau_*^4 = 4\dot{E}_n^4 \ddot{X}_*^4 = 4$ . Эта продолжительность  $\tau_* = \sqrt{2}/\omega_n$  превышает (4.2)  $\tau_* = 1/(3\omega_n)$

более четырех раз. Следовательно, условие (6.1) можно записать так  $8L/c \geq 10^{-4} \div 10^{-3}$ . В случае стальной трубы нижнее значение длины пролета для начальной стадии равно  $L \geq 0.06 \div 0.62$  м.

В таком обобщении начальные условия при  $\tau = 1$  для решения задачи при  $\tau > 1$  имеют вид

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{\mu_n^2}{6} \left( 1 - \frac{\omega_n^2}{20} + \frac{\mu_n^2}{30} \right), \quad \frac{\dot{W}_n}{\dot{W}_{0n}} = \frac{\mu_n^2}{2} \left( 1 - \frac{\omega_n^2}{12} + \frac{\mu_n^2}{15} \right). \quad (6.2)$$

Так как для  $\tau > 1$  давление  $p = 0$ , то уравнение (2.9) приобретает вид  $\ddot{W} + \omega_n^2 W_n = 0$ , где обозначение  $\omega_n^2$  дано в (3.1). Определяя константы интегрирования по (6.2), находим

$$\begin{aligned} \frac{W_n}{W_{0n}} &= \frac{\mu_n^2 \tau^3}{6} \left( 1 - \frac{\omega_n^2 \tau^2}{20} + \frac{\mu_n^2 \tau^3}{30} \right) \quad (0 \leq \tau \leq 1), \\ \frac{W_n}{W_{0n}} &= \frac{\mu_n^2}{6} \left[ \left( 1 - \frac{\omega_n^2}{20} + \frac{\mu_n^2}{30} \right) \cos \omega_n (\tau - 1) + \right. \\ &\left. + \frac{3}{\omega_n} \left( 1 - \frac{\omega_n^2}{12} + \frac{\mu_n^2}{15} \right) \sin \omega_n (\tau - 1) \right] \quad (\tau > 1). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Предложенный подход может быть развит путем учета дальнейших членов в степенных рядах, когда длина  $L$  пролета трубопровода меньше и изменение внутреннего давления занимает больше времени, чем приведенные выше.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для изучения статического и динамического изгиба трубопровода используется модель Кирхгоффа трубчатой балки, дополненная учетом радиальной и продольной деформаций, зависящих от внутреннего давления и граничных условий относительно продольного перемещения. Учитываются только изгибные инерционные силы. Давление в несжимаемой жидкости, заключенной в трубе, устанавливается по ее длине одновременно. В рамках этой модели линейный статический прогиб трубопровода под действием его собственного веса и постоянного внутреннего давления  $p_0$  возрастает неограниченно при приближении  $p_0$  к критическому значению давления  $p_{cr}$ , зависящему от упругих свойств, размеров трубы и граничных условий.

Динамическое поведение системы определяется в зависимости от уровня, продолжительности и формы ударного давления  $p(t)$ . Его высокий уро-

вень ( $p > p_{cr}$ ) приводит к экспоненциальному росту прогиба по низшим гармоникам (например, одной полуволны по длине пролета) и одновременно изгибным колебаниям по высоким гармоникам около возрастающего прогиба. Относительно низкий уровень давления ( $p < p_{cr}$ ) приводит к возбуждению только изгибных колебаний. Эти результаты приведены для случая ступенчатого возрастания давления  $p(t)$ , остающегося далее постоянным, когда возможно получение точного решения.

Выделение начальной стадии изгиба в начале процесса, когда упругие силы малы по сравнению с инерционными, позволяет получить решение задачи для этой стадии ( $0 \leq t \leq t_*$ ) в степенных рядах и в случае более сложных законов изменения давления  $p(t)$  в интервале времени  $0 \leq t \leq t_e$ , если  $t_e \leq t_*$ . При несильном нарушении этого условия приближенное решение остается удовлетворительным. Продолжительность инерционной стадии  $t_*$  пропорциональна параметру  $L^2/(\pi^2 n^2 R c)$ . Для каждой гармоники  $n$  она тем больше, чем больше относительная длина  $L/R$  и время прохождения продольной волной длины пролета  $L/c$ . Продолжительность  $t_*$  слабо зависит от формы давления  $p(0 \leq t \leq t_e)$ . Прогиб к концу инерционной стадии и при дальнейшем движении тем больше, чем больше площадь, занимаемая функцией динамического давления в интервале от начала до времени  $t_e$ .

Быстрое возрастание внутреннего давления с последующим установлением на максимальном уровне и кратковременное воздействие давления (типа ударной волны) при  $t_e \leq t_*$  воспринимаются только инерционными силами в трубопроводе. Продолжительность  $t_e$  в жидкостях и газах имеет порядок  $10^{-4} \div 10^{-3}$  с. Например, в случае отношения  $L/(2R) = 10$  и давления в виде треугольника (рис. 6, б) с продолжительностью  $4 \cdot 10^{-4}$  с его воздействие на стальной трубопровод воспринимается только инерционными силами, если  $L > 1$  м (далее проявляются и упругие силы, движение переходит в свободные колебания). Если  $L/(2R) = 10^2$ , то  $L > 0.1$  м. Таким образом, для принятого отношения  $L/(2R)$  и данного материала трубопровода имеется ограничение снизу на значение длины пролета  $L$ , когда введение в рассмотрение инерционной стадии изгиба может представлять интерес с точки зрения анализа динамики. Ниже этого значения  $L$  соответствующая продолжительность  $t_*$  может быть малой по сравнению с продолжительностью реальных процессов нагружения конструкции со стороны рабочей среды. Но и тогда может быть применен предложенный подход изучения динамики путем удержания большего числа членов в степенных рядах, что обеспечивает увеличение времени  $t_*$  в несколько раз. При этом начальная стадия перестает быть чисто инерционной, проявляется влияние также упругих сил.

Подход позволяет проводить анализ динамики трубопровода при сколь угодно сложном и быстром изменении внутреннего давления ( $t \leq t_e$ ) ввиду того, что для инерционной стадии в уравнении движения (2.1) можно не учитывать первый член. Это обстоятельство кардинально упрощает также анализ нелинейного поведения трубопровода (учет нелинейного члена

## Статика и динамика трубопроводов

в (2.7)), так как оно рассматривается при  $t > t_e$  в условиях нулевого (после прохождения ударной волны) или ненулевого медленного изменения давления (рис. 3 и 6). При этом происходят нелинейные свободные колебания, для описания которых существуют разработанные методы [18]. Предложенный подход может быть с успехом применен для приближенного анализа динамического поведения тонкостенных элементов конструкций типа стержней, пластин, оболочек в условиях ударного нагружения.

## § 2. КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ БЕГУЩИХ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В ТРАНСПОРТИРУЕМОЙ ЖИДКОСТИ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование упругой статической устойчивости прямолинейной трубки и ее поперечных колебаний под действием внутреннего потока несжимаемой идеальной жидкости началось с работы [1]. В этой и последующих работах изучена роль центробежных и кориолисовых сил, обусловленных движением жидкости, кривизной упругой линии и поворотом поперечного сечения. Имеется обзор [2] по данной проблеме.

Влияние постоянного по времени давления в жидкости на устойчивость и характер колебаний трубки учитывалось в работе [3] и в последующих публикациях. Найдено, например, что критическое значение внутреннего давления  $p_1$ , в прямой трубе длиной  $L$ , внутренним радиусом  $r_0$  и изгибной жесткостью  $EI$ , шарнирно закрепленной по концам, с возможностью свободного осевого перемещения, равно

$$p_1 = \frac{\pi EJ}{(r_0 L)^2}, \quad J = \frac{\pi(r^4 - r_0^4)}{4}, \quad (1.1)$$

где  $E$  – модуль упругости,  $r$ ,  $r_0$  – внешний и внутренний радиусы трубы.

При выводе (1.1) принято, что на концевые сечения трубы  $\pi(r^2 - r_0^2)$  давление не действует. Такой случай реализуется, например, для тонкостенной трубы, соединяющей две емкости. Труба, закрытая на обоих концах днищами и подвижная в осевом направлении, абсолютно устойчива под действием внутреннего давления. Влияние внутреннего давления особенно значительно для статики и динамики гибких шлангов [4], а также вертикальных длинных труб [5–7].

Нелинейной динамике статически выпученного стержня посвящено значительное количество работ, например, [8].

- 
- 1 Ashley H., Haviland G. Bending vibrations of pipe line containing flowing fluid // J. Appl. Mech. 1950. V. 17. N 3. P. 229–232.
  - 2 Paidoussis M. A. Flow – induced instabilities of cylindrical structures // Appl. Mech. Rev. 1987. V 40. No 2. P. 163–175.
  - 3 Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 182 с.
  - 4 Светлицкий В. А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 279 с.
  - 5 Huang T., Dareing D. W. Buckling and frequencies of long vertical pipe // J. Eng. Mech. Divis. 1969. V. 95. N 1. P. 167–181.
  - 6 Bemitsas M. M., Kokkinis T. Buckling of risers in tension due to internal pressure: nonmovable boundares // Trans. ASME. J. Energy Resour. Technol. 1983. V. 105. No 3. P. 277–281.
  - 7 Султанов Б. З. Управление устойчивостью и динамикой буровой колонны. М.: Недра, 1991. 208 с.
  - 8 Holmes P. J. A nonlinear oscillator with a strange attractor // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1979. No 1394. P. 419–448.

При достаточно сильном поперечном возбуждении выпученного стержня возможно возникновение как предельных циклов, так и хаотических поперечных колебаний. Режимы таких колебаний реализуются также в сжатой пластине, находящейся в сверхзвуковом потоке газа (флаттер) [9], и в других механических системах [10]. Общим для рассматриваемых систем является наличие в них взаимодействия бифуркаций и поперечных нелинейных колебаний.

В [11] осуществлен более точный учет влияния внутреннего давления на поперечные колебания консольной трубки, из которой вытекает жидкость. Действующие на стенки поперечные и продольные силы со стороны жидкости определяются в зависимости от отношения площадей отверстия плоского сопла, размещенного в выходном течении и поперечного сечения трубки. Кроме того, построенная модель позволяет определить силу воздействия свободной струи жидкости на концевое сечение. Изучены флаттер вертикальной консольной трубки и хаотические колебания при возбуждении внешней поперечной силой. Экспериментальные данные по пространственным колебаниям опертой трубы, находящейся под внутренним давлением газа, и сравнение с расчетами приведены в [12].

Нелинейные поперечные колебания трубопровода под воздействием бегущих волн давления в жидкости рассмотрены в [13–15]. Найдены режимы колебаний в зависимости от отношения длины волны давления в жидкости и расстояния между опорами, радиуса и толщины стенки, коэффициента затухания, амплитуды волны давления.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящем параграфе рассматриваются изгибные колебания горизонтальной трубы, заполненной жидкостью, в вертикальной плоскости. Со стороны левой опоры распространяется гармоническая волна давления  $p(x, t)$  в жидкости. Средняя скорость движения жидкости в трубе принимается равной нулю. При изгибе трубы возникает боковая распределенная сила,

- 
9. Dowell E. H., Ilgamov M. A. *Studies in Nonlinear Aeroelasticity*. New York; Tokyo: Springer-Verlag, 1988. 455 p.
  10. Moon F. C. *Chaotic Vibrations*. New York: Wiley, 1987. 309 p.
  11. Ilgamov M. A., Tang D. M., Dowell E. H. Flutter and forced response of a cantilevered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge // *J. Fluids and Structures*. 1994. V. 8. P. 139–156.
  12. Tang D. M., Ilgamov M. A., Dowell E. H. Buckling and postbuckling behavior of a pipe subjected to internal pressure // *J. Appl. Mech.* 1995. V. 62. N 3. P. 595–600.
  13. Ильгамов М. А., Мишин В. Н. Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости // *Изв. Академии наук. Механика твердого тела*. 1997. № 1. С. 181–192.
  14. Ильгамов М. А., Мишин В. Н. Хаотические колебания горизонтальной трубы под действием бегущих волн в жидкости // *Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах*. Казань. 1997. Вып. 1(5) С. 44–50.
  15. Ильгамов М. А., Мишин В. Н. О влиянии скорости движения жидкости внутри трубопровода на характер его колебаний // *Сб. Моделирование динамических процессов в сплошных средах*. Казань, Изд. Каз. мат. общества, 1997. С. 88–95.

зависящая от внутреннего давления. Предполагается, что давление не действует на торцевые сечения и поэтому не создает осевой силы. Принимается, что прогиб  $w(x, t)$  мал по сравнению с длиной трубы  $L$  между опорами, а угол поворота мал по сравнению с единицей. Используются известные допущения для тонких упругих тел.

С учетом инерционной силы общая распределенная боковая нагрузка на трубу со стороны жидкости равна [16]

$$q = -m_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - F_f \frac{\partial}{\partial x} \left( p(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad m_f = F_f \rho_f, \quad F_f = \pi r_0^2, \quad (2.1)$$

где  $\rho_f$  — плотность жидкости.

Избыточное давление в жидкости состоит из постоянной и переменной частей

$$p(x, t) = p_0 + P \sin(\omega t - \alpha x). \quad (2.2)$$

Здесь  $\alpha = 2\pi/l = \omega/c$  — волновое число,  $\omega$ ,  $c$ ,  $l$  — круговая частота, скорость и длина волны давления.

Нелинейное уравнение изгиба трубчатого стержня под действием поперечных сил имеет вид

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{EF}{2L(1+\lambda)} \left[ \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_0 + q, \quad (2.3)$$

$$q_0 = g(m + m_f), \quad m = F\rho, \quad F = \pi(r^2 - r_0^2),$$

где  $\varepsilon$  — коэффициент трения,  $q_0$  — постоянная распределенная нагрузка на горизонтальную трубу,  $g$  — гравитационное ускорение,  $\rho$  — плотность материала трубы. При выводе (2.3) учтено, что опоры допускают перемещение трубы в осевом направлении. Соответствующий коэффициент линейно-упругой податливости опор обозначен через  $\lambda$ . Таким образом, учтены граничные условия относительно осевого перемещения.

Граничные условия относительно функции прогиба принимаются в виде

$$w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0 \quad \text{при } x = 0, L. \quad (2.4)$$

В качестве начальных условий берутся нулевые, если труба начинает движение из прямолинейного положения без начальной скорости. Будут рассматриваться и другие начальные условия, в том числе и те, которые соответствуют равновесному положению трубы под действием распределенной нагрузки  $q_0$  и статического внутреннего давления  $p_0$ .

После введения новых безразмерных переменных

$$\xi = \beta x, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{m + m_f}}, \quad W = \frac{w}{r}, \quad \beta = \frac{\pi}{L}, \quad (2.5)$$

уравнение (2.3) примет вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - b \left[ \int_0^\pi \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right] \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \varepsilon^* \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ p^*(\xi, \tau) \frac{\partial W}{\partial \xi} \right] = f, \quad (2.6)$$

$$b = \frac{r^2 F}{2J(1 + \lambda)}, \quad \varepsilon^* = \frac{\varepsilon \omega_0}{\beta^4 EJ}, \quad f = \frac{g(m + m_f)}{\beta^4 EJ},$$

где

$$p^*(\xi, \tau) = p_0^* + p^* \sin \left( \frac{\omega}{\omega_0} \tau - \frac{\alpha}{\beta} \xi \right), \quad p^* = \frac{P}{p_1}, \quad p_0^* = \frac{p_0}{p_1}, \quad p_1 = \frac{\beta^2 EJ}{F_f}.$$

Граничное условие (2.4) примет вид

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\xi = 0, \pi), \quad (2.7)$$

кроме того, должны быть заданы начальные условия

$$W = \varphi(\xi), \quad \frac{\partial W}{\partial \tau} = \psi(\xi) \quad (\tau = 0). \quad (2.8)$$

### 3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения задачи (2.6)–(2.8) использован итерационный процесс, аналогичный приведенному в работах [17, 18]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 W^{k+1}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 W^{k+1}}{\partial \xi^4} = \\ & = f + b \left[ \int_0^\pi \left( \frac{\partial W^k}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right] \frac{\partial^2 W^k}{\partial \xi^2} - \varepsilon^* \frac{\partial W^k}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ p^*(\xi, \tau) \frac{\partial W^k}{\partial \xi} \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$W^{k+1} = \frac{\partial^2 W^{k+1}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\xi = 0, \pi), \quad (3.2)$$

17. Лукманов Р.Л. Итерационные процедуры и алгоритмы для нелинейных уравнений в частных производных // Сб. Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. Уфа, 1996. С. 91–97.

18. Лукманов Р.Л. Аппроксимация решения второй начально–краевой задачи в полупространстве для гиперболического уравнения // Исследование по теории аппроксимаций функций / БФАН СССР. Уфа, 1986. С. 62–70.

$$W^{k+1} = \varphi(\xi), \quad \frac{\partial W^{k+1}}{\partial \tau} = \psi(\xi) \quad (\tau = 0). \quad (3.3)$$

Использовать процедуру (3.1)–(3.3) можно различными способами. Удобно строить аппроксимации Галеркина функций  $W^k(\xi, \tau)$  собственными функциями оператора  $\partial^4/\partial \xi^4$  подчиненными граничным условиям (2.7). Система функций  $e_j(\xi) = \sqrt{2/\pi} \sin(j\xi)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) образует соответствующую полную ортонормированную систему собственных функций.

Обозначим через  $W_j^k(t)$  коэффициенты Фурье итерации  $W^k(\xi, \tau)$ . Умножив обе части уравнения (3.1) на  $e_j(\xi)$  и проинтегрировав по отрезку  $[0, \pi]$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_j^{k+1}(\tau)}{d\tau^2} + j^4 W_j^{k+1}(\tau) &= F_j - \varepsilon^* \frac{dW_j^k(\tau)}{d\tau} - \\ &- b \int_0^\pi \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^\infty W_i^k(\tau) e_i(\xi) \right)^2 d\xi j^2 W_i^k(\tau) - \\ &- \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \xi} \left( p^*(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^\infty W_i^k(\tau) e_i(\xi) \right) e_j(\xi) d\xi, \\ p_{ij}^* &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi p^*(\xi, \tau) \cos(i\xi) \cos(j\xi) d\xi. \end{aligned}$$

В результате получаем следующую систему уравнений

$$\frac{d^2 W_j^{k+1}(\tau)}{d\tau^2} + j^4 W_j^{k+1}(\tau) = F_j + R_j^k(\tau), \quad j = 1, 2, \dots, \infty, \quad (3.4)$$

$$W_j^{k+1}(0) = \Phi_j = (\varphi, e_j), \quad \frac{dW_j^{k+1}(0)}{d\tau} = \Psi_j = (\psi, e_j),$$

где обозначено

$$\begin{aligned} R_j^k(\tau) &= -\varepsilon^* \frac{dW_j^k(\tau)}{d\tau} - b \left( \sum_{i=1}^\infty i^2 (W_i^{k+1}(\tau))^2 \right) j^2 W_i^{k+1}(\tau) + j \sum_{i=1}^\infty i W_i^{k+1}(\tau) p_{ij}^*, \\ F_i = (f, e_j) &= \begin{cases} 0, & j = 2k, \\ \frac{g(m + m_f)}{\beta^4 EJ} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{2k + 1}, & j = 2k + 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Матрица  $p_{ij}^*$  приводится к виду

$$\begin{aligned}
 p_{ij}^* = p_0^* + \frac{p^*}{2\pi} \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} \tau\right) & \left\{ IC\left[\left(\frac{\alpha L}{\pi} + i + j\right)\xi\right] + IC\left[\left(\frac{\alpha L}{\pi} - i - j\right)\xi\right] + \right. \\
 & + IC\left[\left(\frac{\alpha L}{\pi} + i - j\right)\xi\right] + IC\left[\left(\frac{\alpha L}{\pi} - i + j\right)\xi\right] - \\
 - \frac{p^*}{2\pi} \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} \tau\right) & \left\{ IS\left[\left(\frac{\alpha L}{\pi} + i + j\right)\xi\right] + IS\left[\left(\frac{\alpha L}{\pi} - i - j\right)\xi\right] + \right. \\
 & + IS\left[\left(\frac{\alpha L}{\pi} + i - j\right)\xi\right] + IS\left[\left(\frac{\alpha L}{\pi} - i + j\right)\xi\right],
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$IC(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z\pi)}{z}, & z \neq 0, \\ \pi, & z = 0, \end{cases} \quad IS(z) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(z\pi)}{z}, & z \neq 0, \\ \pi, & z = 0. \end{cases}$$

При численной реализации ограничимся конечным числом собственных функций. Тогда ряды в правой части (3.4) заменятся конечными суммами.

Каждое из уравнений системы (3.4)–(3.5) решается явно

$$W_j^{k+1}(\tau) = \tilde{W}_j(\tau) + \frac{1}{j^2} \int_0^\tau \sin(\tau - z) j^2 R_j^k(z) dz, \tag{3.7}$$

$$\tilde{W}_j(\tau) = \cos(\tau j^2) \Phi_j + \frac{1}{j^2} \sin(\tau j^2) \Psi_j + \frac{1}{j^4} F_j [1 - \cos(j^2 \tau)].$$

Итерационный процесс (3.1)–(3.3) сходится на любом временном отрезке  $[0, T]$ , однако выгоднее строить решение послойно по времени, так как скорость сходимости сильно зависит от  $T$ : при больших  $T$  она медленная, а при  $T$ , близких к нулю, очень высокая. Поэтому счет проводится следующим образом. Сначала задача решается на достаточно малом отрезке времени  $[0, \tau_1]$ , причем коэффициенты Фурье нулевого приближения выбираются на основе начальных условий

$$W_j^0(\tau) = \Phi_j + \tau \Psi_j.$$

После применения процедуры (3.7) находим коэффициенты Фурье  $W_j(\tau)$  решения  $W(\xi, \tau)$  с нужной точностью на отрезке  $[0, \tau_1]$  как пределы  $W_j^k(\tau)$ .

Присутствующие в  $R_j^k(z)$  производные по времени находятся явно

$$\frac{d}{d\tau} W_j^k(\tau) = \frac{d}{d\tau} \tilde{W}_j(\tau) + \int_0^\tau \cos[(\tau - z)j^2] R_j^{k-1}(z) dz, \tag{3.8}$$

$$\frac{d\tilde{W}_j(\tau)}{d\tau} = -j^2 \sin(\tau j^2) \Phi_j + \cos(\tau j^2) \Psi_j + \frac{1}{j^2} F_j \sin(\tau j^2).$$

После этого решается задача на отрезке  $[\tau_1, 2\tau_1]$ . При этом начальными условиями будут уже значения найденного решения и его производной по времени при  $\tau = \tau_1$ . Аналогично строится решение на отрезке  $[2\tau_1, 3\tau_1]$  и на последующих отрезках.

Отметим, что для вычисления участвующих в формулах (3.7) и (3.8) интегралов по времени невыгодно использовать обычные квадратурные формулы, так как при больших значениях  $j$  будут большими модули производных подынтегральных выражений, что приводит к большим погрешностям. По этой причине была использована полиномиальная интерполяция (второй степени) функций  $R_j^k(z)$ , а соответствующие интегралы вычислялись явно. Это позволило избежать наведения густой сетки при вычислении интегралов при больших значениях  $j$ .

Приведем подробнее алгоритм вычисления интегралов вида

$$\int_0^{\tau} \sin[(\tau - z)j^2] R_j^k(z) dz,$$

который представим следующим образом

$$\sin(\tau j^2) \int_0^{\tau} \cos(zj^2) R_j^k(z) dz - \cos(\tau j^2) \int_0^{\tau} \sin(zj^2) R_j^k(z) dz. \quad (3.9)$$

Если на отрезке  $[0, \tau_1]$  функцию  $R_j^k(z)$  (при каждом фиксированном  $j = 1, 2, \dots$ ) заменить интерполяционным многочленом, построенным по ее значениям в некоторых узлах отрезка  $[0, \tau_1]$ , то интегралы в выражении (3.9) можно будет подсчитать явно. Построим интерполяционные многочлены по значениям функции  $R_j^k(z)$  в трех узлах:  $z_0 = 0, z_1 = \tau_1/2, z_2 = \tau_1$ . Как известно, такая интерполяция имеет погрешность третьего порядка малости по шагу  $h = \tau_1/2$ . Итак

$$R_j^k(z) \approx R_j^k(0) \frac{(z-h)(z-2h)}{2h^2} + R_j^k(h) \frac{z(z-2h)}{-h^2} + R_j^k(2h) \frac{z(z-h)}{2h^2}.$$

На основе описанной методики была составлена программа для решения уравнения (2.6) с граничными условиями (2.7) и произвольными начальными условиями. При шагах  $\tau \leq 0.1$  обычно требуется не более 3–5 итераций для вычисления коэффициентов Фурье  $W_j(\tau)$  решения.

В работе [13] решение по пространственной координате аппроксимируется первыми тремя гармониками. Результаты численных экспериментов показывают, что этого может оказаться недостаточно. На небольших

временных промежутках погрешности не успевают сильно исказить решение. Однако на больших временах отсутствие дальних гармоник может привести к значительным погрешностям. Особенно важно учитывать высшие гармоники в случае коротких волн давления, так как при этом происходит сильное «перемешивание» частот, и возбуждение может передаваться от первой гармоники к высшим.

Дальнейшее изложение приводится по работам [19–22].

#### 4. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОКОЛО ПОЛОЖЕНИЙ СТАТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Статический изгиб под собственным весом трубы с жидкостью, а также под действием внутреннего давления, приближенно описывается первой гармоникой. Соответствующее уравнение получается из (2.6), если в нем приравнять к нулю производные по времени и, умножив обе части на  $e_1(\xi)$ , проинтегрировать по отрезку  $[0, \pi]$

$$b_1 W_1 + b_3 W_1^3 = b_0. \quad (4.1)$$

Здесь

$$b_1 = (1 - p_0^*), \quad b_3 = \frac{F}{2J(1 + \lambda)\pi}, \quad b_0 = \frac{2g(m + m_f)}{EJ\beta^4} \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (4.2)$$

Запишем (4.1) в виде

$$W_1^3 + a_1 W_1 + a_0 = 0, \quad a_1 = b_1/b_3, \quad a_0 = -b_0/b_3. \quad (4.3)$$

Как известно, при  $Q = (a_1/3)^3 + (a_0/2)^2 > 0$  существует единственный действительный корень уравнения (4.3)

$$W_1^{(1)} = A + B, \quad A = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} - \sqrt{Q}}.$$

При  $Q = 0$  имеются два действительных корня, один из которых совпадает с приведенным выше, а второй равен  $W_1^{(2)} = -(A + B)/2$ . В этом случае  $A = B = (-a_0/2)^{1/3}$  и потому  $W_1^{(1)} = 2(-a_0/2)^{1/3}$ ,  $W_1^{(2)} = -W_1^{(1)}/2$ .

- 
19. Лукманов Р.Л. Итерационный метод решения гиперболических задач // Всесоюзный симпозиум по теории приближения функций. Тезисы докладов. Уфа, 1987. С. 103–104.  
 20. Ильгамов М.А., Лукманов Р.Л. Нелинейные колебания трубопроводов под действием бегущих волн в жидкости. Уфа: УГНТУ, 1998. № 4. 50 с.  
 21. Ilgamov M.A., Lukmanov R.L. Nonlinear vibrations of a pipeline under the action of pressure waves in fluid // Proc. Ninth Int. Offshore and Polar Engin. Conf. France, Brest, 1999. P. 145–152.  
 22. Ильгамов М.А., Лукманов Р.Л., Зарипов Д.М. Механизм возбуждения гидроупругих колебаний трубопровода // Труды Института механики УНЦ РАН. 2003. С. 21–52

При  $Q < 0$  действительных корней три:

$$W_1^{(1)} = 2\sqrt{-\frac{a_1}{3}} \cos \frac{\alpha}{3}, \quad W_1^{(2,3)} = -2\sqrt{-\frac{a_1}{3}} \cos \left( \frac{\alpha}{3} \pm \frac{\pi}{3} \right), \quad \cos \alpha = \frac{a_0}{2\sqrt{-a_1/3}}.$$

Можно выписать формулу для критического значения

$$p_{cr}^* = 1 + \frac{3}{L\beta^3 J} \sqrt[3]{\left[ \frac{gL(m + m_f)}{E} \right]^2 \frac{F}{\pi(1 + \lambda)}}, \quad (4.4)$$

при превышении которого появляются второе и третье статические положения.

Заметим, что при  $p_0^* < 1$  коэффициент  $a_1$ , а значит и  $Q$ , положительны, поэтому уравнение (4.3) заведомо имеет только один действительный корень. Следовательно, возможно только одно статическое положение равновесия.

Всюду в дальнейшем будем считать, что корни  $W_1^{(i)}$  пронумерованы в порядке убывания, то есть  $W_1^{(1)}$  соответствует нижнему положению равновесия,  $W_1^{(3)}$  – верхнему, а  $W_1^{(2)}$  – промежуточному. В одночленном приближении по первой гармонике величины  $W^{(i)} = W_1^{(i)} \sqrt{2/\pi}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) задают прогиб середины пролета в соответствующем положении равновесия.

Далее во всех примерах приняты следующие значения параметров:  $L = 1$  м,  $r_0 = 0.0095$ ,  $r = 0.01$ ,  $\rho_f = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 6.9 \cdot 10^3$  МПа.

Численные эксперименты показывают, что нижнее и верхнее положения равновесия являются устойчивыми, а промежуточное – неустойчивым. В частности, это проявляется в том, что при достаточном отклике от нуля положительного коэффициента  $\varepsilon^*$  происходит стабилизация свободных колебаний возле нижнего или верхнего положений равновесия, в зависимости от того, больше или меньше, чем  $W^{(2)}$  начальный прогиб середины пролета трубы (при нулевой начальной скорости).

Так, при  $p_0^* = 2$  получаются корни  $W_1^{(1)} = 1.969$ ,  $W_1^{(2)} = -0.699$ ,  $W_1^{(3)} = -1.270$ , которым соответствуют прогибы середины пролета  $W^{(1)} = 1.571$ ,  $W^{(2)} = -0.558$ ,  $W^{(3)} = -1.013$ . Поэтому при запуске программы с параметрами  $\lambda = 0$ ,  $\varepsilon^* = 1$ ,  $p_0^* = 2$ ,  $p^* = 0$  и начальным прогибом середины пролета, равным  $-0.557$ , решение быстро стабилизируется возле нижнего положения равновесия, но уже при значении начального прогиба  $-0.56$  решение устанавливается возле верхнего положения равновесия.

Если трубу отклонить от положения устойчивого равновесия на малую величину, то при отсутствии трения устанавливаются периодические колебания малой амплитуды. Частоту таких колебаний можно оценить аналитически. Ограничившись в (2.6) лишь первой гармоникой, получаем уравнение

$$\frac{d^2 W_1}{d\tau^2} + b_1 W_1 + b_3 W_1^3 = b_0. \quad (4.5)$$

Пусть  $W_1^0$  – коэффициент при первой гармонике одного из устойчивых положений равновесия (например,  $W_1^{(1)}$  или  $W_1^{(3)}$ ). Представим решение уравнения (4.4) в виде  $W_1(\tau) = W_1^0 + \bar{W}_1(\tau)$ , где  $\bar{W}_1(\tau)$  – периодическая функция малой амплитуды. Подставив это выражение в уравнение (4.5), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_1^0}{d\tau^2} + b_1 W_1^0 + b_3 (W_1^0)^3 + \frac{d^2 \bar{W}_1}{d\tau^2} + \\ + b_1 \bar{W}_1 + 3b_3 (W_1^0)^2 \bar{W}_1 + 3b_3 W_1^0 \bar{W}_1^2 + b_3 \bar{W}_1^3 = b_0. \end{aligned}$$

Так как первое слагаемое левой части равно нулю, сумма второго и третьего равна  $b_0$ , а сумма последних двух имеет второй порядок малости по  $\bar{W}_1$ , то получаем следующее линеаризованное уравнение

$$\frac{d^2 \bar{W}_1}{d\tau^2} + b_1 \bar{W}_1 + 3b_3 (W_1^0)^2 \bar{W}_1 = 0. \quad (4.6)$$

Начальные условия для функции  $\bar{W}_1(t)$  принимают вид

$$\bar{W}_1(\tau_0) = \varphi - W_1^0, \quad \frac{d}{d\tau} \bar{W}_1 \Big|_{\tau=\tau_0} = \psi. \quad (4.7)$$

Решение линейного уравнения (4.6) с постоянными коэффициентами с учетом начальных условий (4.7) выписывается явно

$$\bar{W}_1(t) = \cos[(\tau - \tau_0)\omega_1] (\varphi - W_1^0) + \frac{\sin[(\tau - \tau_0)\omega_1]}{\omega_1} \psi, \quad (4.8)$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{b_1 + 3b_3 (W_1^0)^2}. \quad (4.9)$$

Функция  $W_1(t)$ , отличаясь от  $\bar{W}_1(t)$  на постоянную величину  $W_1^0$ , имеет ту же частоту колебаний  $\omega_1$ .

Частота колебаний вблизи положения равновесия, подсчитанная по формуле (4.9), с большой точностью совпадает с результатами численных экспериментов.

## 5. СВОБОДНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим зависимость свободных колебаний ( $p^* = 0$ ) при различных фиксированных значениях постоянного давления  $p_0^*$  от начального прогиба трубы. Такой анализ позволяет объяснить резкие изменения в поведении трубы при периодическом изменении внутреннего давления.

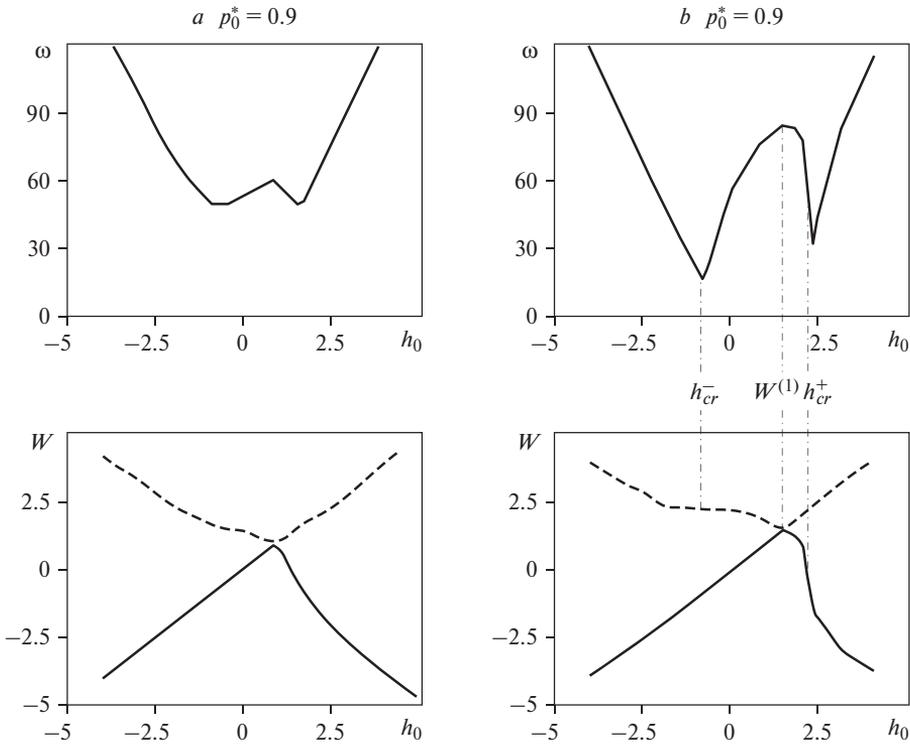


Рис. 1

Будем предполагать начальную скорость  $\psi(\xi)$  нулевой, а начальное отклонение имеющим вид  $\varphi(x) = h_0 \sin \xi$ . В частности, при  $h_0 = 0$  труба начинает колебания из горизонтального положения. Так как принято, что ось ординат направлена вниз, то при положительных  $h_0$  труба начинает движение снизу, а при отрицательных – сверху.

На рис. 1 даны графики зависимостей частот и крайних положений середины пролета трубы от начального прогиба  $h_0$  для значений давления  $p_0^* = 0.9, 1.9$  при  $\varepsilon^* = 0$ . Когда начальный прогиб совпадает с положениями устойчивого равновесия, колебания не возбуждаются. При этих значениях начального прогиба частоты колебаний принимаем равными их предельным значениям.

Увеличение модуля начального прогиба приводит к росту частоты колебаний. Поэтому существуют такие два значения начальных прогибов  $h_{cr}^-$  и  $h_{cr}^+$  (первое из которых левее, а второе правее всех положений равновесия), в которых график частот имеет локальный минимум. Отметим, что чем больше величина давления  $p_0^*$ , тем резче меняется частота вблизи этих точек минимума.

Проанализируем графики зависимостей крайних положений середины пролета трубы от начального прогиба  $h_0$ . Сначала рассмотрим случаи  $p_0^* < p_{cr}^*$ . Как видно из рис. 1,  $a$  и  $b$ , для докритических значений внутреннего давления характерны следующие моменты.

Во-первых, график крайнего верхнего положения при  $h_0 < W^{(1)}$  и крайнего нижнего при  $h_0 < W^{(1)}$  образуют биссектрису первого координатного угла. Это означает, что начальное положение трубы в процессе колебаний остается одним из его крайних положений. В дальнейшем эту часть совместного графика будем обозначать  $G1$ , а всю оставшуюся –  $G2$ .

Во-вторых, вблизи единственного положения статического равновесия крайние положения середины пролета примерно равноудалены от него. Чем дальше от положения равновесия, тем сильнее это нарушается. Более того, когда начальное положение трубы достаточно удалено от положения статического равновесия, колебания происходят между первоначальным положением и положением, симметричным ему относительно горизонтали. Другими словами, при постепенном удалении начального положения трубы от ее положения равновесия происходит переход от колебаний, симметричных относительно положения равновесия к колебаниям, симметричным относительно горизонтали.

Обратим внимание на то, что величина  $W^{(1)}$  монотонно возрастает при увеличении  $p_0^*$ . При этом с увеличением  $p_0^*$  график становится все более крутым в переходной зоне между  $W^{(1)}$  и  $h_{cr}^+$ . Это обстоятельство является важным при исследовании хаотических колебаний под воздействием периодических волн давления, когда небольшие изменения давления вблизи критических зон приводят к качественному изменению характера колебаний.

Сказанное справедливо и при  $p_0^* > p_{cr}^*$ , но по особому проявляют себя дополнительные положения равновесия  $W^{(2)}$  и  $W^{(3)}$ , а также значения  $h_{cr}^-$  и  $h_{cr}^+$ . В отличие от докритических значений внутреннего давления, в точках  $h_{cr}^-$ ,  $W^{(2)}$  и  $h_{cr}^+$  крайние положения середины пролета трубы меняются скачкообразно. Это говорит о том, что при  $p_0^* > p_{cr}^*$  есть больше возможностей для резкой смены характера колебаний при воздействии переменной волны давления.

Эти особенности системы будут рассмотрены в последующих разделах. Заметим, что при увеличении  $p_0^*$  значение  $h_{cr}^-$  уменьшается, а значение  $W^{(2)}$ , увеличиваясь, приближается к нулю. Поэтому увеличение постоянного внутреннего давления приводит к расширению зоны «провала» [ $h_{cr}^-$ ,  $W^{(2)}$ ], в которой происходит резкая смена диапазона колебаний. При этом амплитуда колебаний в этой зоне также увеличивается.

Положения равновесия являются точками экстремума графика зависимости частоты свободных колебаний от величины начального прогиба. При  $p_0^* < p_{cr}^*$  единственное положение равновесия  $W^{(1)}$  является точкой минимума. При  $p_0^* > p_{cr}^*$  положения  $W^{(1)}$  и  $W^{(3)}$  дают точки максимума, а  $W^{(2)}$  – точку минимума. Напомним, что второе и третье положения равновесия воз-

никают только при  $p_0^* > p_{cr}^*$  (для принятых нами значений параметров трубы  $p_{cr}^* = 1.92$ ). Значения частот колебаний относительно положений устойчивого равновесия совпадают со значениями, подсчитанными по формуле (4.9).

Как видно из рис. 1, при  $p_0^* > p_{cr}^*$  можно выделить три типа свободных колебаний. Первый тип (обозначенный  $T_1$ ), включает в себя колебания возле нижнего положения равновесия  $W^{(1)}$ , между  $W^{(2)}$  и  $h_{cr}^+$  (здесь и в дальнейшем речь идет о колебаниях середины пролета трубы). Такие колебания устанавливаются при значении начального прогиба  $h_0 \in (W^{(2)}, h_{cr}^+)$ . При изменении начального прогиба от значения  $W^{(1)}$  до  $W^{(2)}$  амплитуда колебаний увеличивается от нуля до некоторого предельного значения. Когда  $h_0 < W^{(2)}$ , то есть начальное положение выше промежуточного положения равновесия, колебания происходят возле верхнего положения равновесия между  $W^{(2)}$  и  $h_{cr}^-$  (этот тип колебаний назовем  $T_2$ ). Такие колебания устанавливаются при  $h_0 \in (W^{(2)}, h_{cr}^+)$ .

Переход от колебаний типа  $T_1$  к  $T_2$ , и наоборот, происходит при  $h_0 = W^{(2)}$ . При  $h_0 > h_{cr}^-$  колебания типа  $T_1$  также скачкообразно переходят в колебания типа  $T_3$  – почти симметричные относительно горизонтали и охватывающие  $h_{cr}^-$  и  $h_{cr}^+$ . При  $h_0 < h_{cr}^-$  происходит скачкообразный переход от колебаний типа  $T_2$  к  $T_3$ .

Итак, при каждом значении давления  $p_0^* > p_{cr}^*$  имеется три критических значения начального прогиба  $h_0$ , при которых происходит качественное изменение типа колебаний. Это является определяющим в объяснении того, почему при периодическом изменении давления жидкости в трубе происходят резкие смены типов колебаний.

При  $p_0^* < p_{cr}^*$  имеется лишь одно положение равновесия и потому имеют место колебания только типов  $T_1$  и  $T_3$ , причем переходы от одного типа к другому плавные, а потому и деление на типы в этом случае условное.

## 6. ЗАВИСИМОСТЬ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОТ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ И НАЧАЛЬНОГО ПОЛОЖЕНИЯ ТРУБЫ

Проанализируем теперь возможные изменения характера свободных колебаний при скачкообразном изменении давления в одном из крайних положений трубы. Итак, пусть имеют место свободные нелинейные колебания при постоянном давлении  $p_1^*$  и в момент нахождения трубы в одном из крайних положений (когда скорость середины пролета нулевая) значение давления становится равным  $p_2^*$ . Реально давление меняется непрерывно, однако такая идеализация позволяет проанализировать, в каких ситуациях происходят качественные изменения типов траекторий.

К чему приведет изменение давления, зависит от положения трубы в момент изменения давления и от величины  $\Delta p^* = p_2^* - p_1^*$  его изменения.

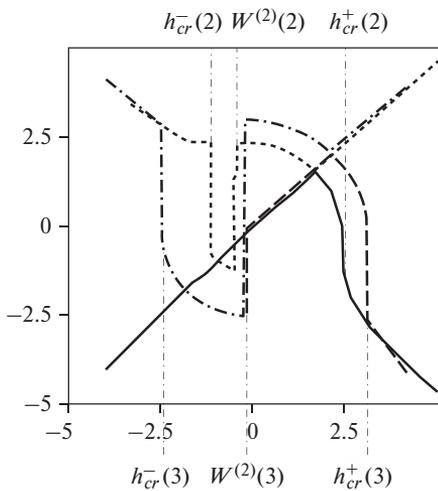


Рис. 2

На рис. 2 приведены зависимости крайних положений середины пролета трубы от начального прогиба для двух разных значений постоянного давления  $p_1^* = 2$  и  $p_2^* = 3$ . В данном случае они оба превышают критическое значение  $p_{cr}^*$ . Этот рисунок позволяет проанализировать, что произойдет, если в одном из крайних положений (когда скорость трубы нулевая) постоянное давление вместо  $p_1^*$  примет значение  $p_2^*$ . Заметим, что значение прогиба в крайнем положении можно интерпретировать как начальный прогиб  $h_0$  и потому ответ на поставлен-

ный вопрос зависит от величины прогиба в рассматриваемом крайнем положении.

Можно сформулировать следующее правило: если в момент, когда скорость трубы нулевая, а прогиб равен нулю, давление вместо  $p_1^*$  примет значение  $p_2^*$ , то в последующий момент равенства нулю скорости прогиб трубы в середине пролета изменится на величину  $OG2(p_2^*, h_0) - OG2(p_1^*, h_0)$ , где через  $OG2(p_i^*, h_0)$  обозначена ордината точки графика  $G2$  с абсциссой  $h_0$ , построенного для значения давления  $p_i^*$ . Другими словами, нужно по оси абсцисс отметить значение начального прогиба и посмотреть на изменение ординаты соответствующей точки графика  $G2$  при изменении давления. Именно на эту величину изменится величина прогиба в другом крайнем положении.

Как видно из рис. 2, при достаточно больших по модулю значениях начального прогиба, а именно при  $h_0 < h_{cr}^-(p_{min}^*)$  и  $h_0 > h_{cr}^+(p_{min}^*)$  точки графиков  $G2(p_1^*)$  и  $G2(p_2^*)$  отличаются мало и потому при больших по модулю значениях начального прогиба изменение давления мало влияет на размах колебаний. Здесь приняты обозначения  $p_{min}^* = \min\{p_1^*, p_2^*\}$ ,  $p_{max}^* = \max\{p_1^*, p_2^*\}$ .

При не слишком больших модулях начальных прогибов изменение диапазона колебаний вследствие изменения давления может быть значительным. Более того, когда начальный прогиб попадает в один из промежутков  $(W^{(1)}(p_{min}^*), W^{(1)}(p_{max}^*))$ ,  $(W^{(2)}(p_{min}^*), W^{(2)}(p_{max}^*))$  или  $(h_{cr}^-(p_{min}^*), h_{cr}^-(p_{max}^*))$ , меняется даже направление движения трубы, причем в двух последних промежутках изменение диапазона колебаний является наиболее значительным. При попадании начального прогиба в промежуток  $(W^{(1)}(p_{min}^*), W^{(1)}(p_{max}^*))$  наиболее резким является изменение диапазона колебаний

вблизи значения  $h_{cr}^+(p_{\min}^*)$ . Очень резким будет изменение диапазона колебаний при попадании начального прогиба в промежутки ( $h_{cr}^-(p_{\min}^*)$ ,  $h_{cr}^-(p_{\max}^*)$ ), ( $y^{(2)}(p_{\min}^*)$ ,  $y^{(2)}(p_{\max}^*)$ ) и ( $h_{cr}^+(p_{\min}^*)$ ,  $h_{cr}^+(p_{\max}^*)$ ).

Интересна ситуация, когда  $p_{\min}^* < p_{cr}$ ,  $p_{\max}^* > p_{cr}$ . В этом случае отсутствует «провал» графика  $G2(p_{\min}^*)$ , а у  $G2(p_{\max}^*)$  он есть. Поэтому, в отличие от предыдущего случая, резкое изменение диапазона колебаний будет при попадании начального прогиба в промежутки ( $h_{cr}^-(p_{\max}^*)$ ,  $W^{(2)}(p_{\max}^*)$ ) и ( $h_{cr}^+(p_{\min}^*)$ ,  $h_{cr}^+(p_{\max}^*)$ ).

Итак, при постоянном давлении  $p_1^*$  происходят колебания типа  $T_3(p_1^*)$  – колебания большой амплитуды с охватом положений  $h_{cr}^-(p_1^*)$  и  $h_{cr}^+(p_1^*)$  и примерно симметричные относительно горизонтали. В дальнейшем через  $h_u$  и  $h_d$  будем обозначать соответственно отклонения середины пролета в крайнем верхнем (КВП) и крайнем нижнем (КНП) положениях. Как видно из рис. 2, уменьшение давления ( $p_2^* < p_1^*$ ) в этом случае практически не влияет на характер колебаний.

При увеличении давления ситуация другая. Если увеличение  $\Delta p^*$  настолько незначительно, что  $h_{cr}^+(p_2^*) < h_d$  и  $|h_{cr}^-(p_2^*)| < |h_u|$ , то качественных изменений в типе колебаний не происходит.

При  $h_{cr}^+(p_2^*) > h_d$  увеличение давления в КНП приводит к установлению колебаний типа  $T_1(p_2^*)$  вокруг нижнего положения равновесия, причем чем ближе  $W^{(1)}(p_2^*)$  к  $h_d$ , тем меньше амплитуда колебаний. При  $|h_{cr}^-(p_2^*)| < |h_u|$  увеличение давления в КВП приводит к установлению колебаний типа  $T_2(p_2^*)$  вокруг верхнего положения равновесия, причем чем ближе  $W^{(3)}(p_2^*)$  к  $h_u$ , тем меньше амплитуда колебаний.

Колебания типа  $T_2(p_1^*)$  переходят в колебания типа  $T_2(p_2^*)$ , если в КВП давление возрастает настолько, что промежуточное положение равновесия опускается ниже КВП трубы  $|W^{(2)}(p_2^*)| < |h_u|$ . Соответственно, колебания типа  $T_2(p_1^*)$  переходят в колебания типа  $T_1(p_2^*)$ , если в КНП давление уменьшается настолько, что промежуточное положение равновесия поднимается выше КНП трубы  $|W^{(2)}(p_2^*)| > h_d$ .

Колебания типов  $T_1(p_1^*)$  и  $T_2(p_1^*)$  могут переходить в колебания типа  $T_3(p_2^*)$ . Колебания типа  $T_1(p_1^*)$  переходят в  $T_3(p_2^*)$ , если в КНП трубы давление уменьшается настолько, что  $|h_{cr}^+(p_2^*)|$  становится меньше величины  $h_d$ . Аналогичным образом, колебания типа  $T_2(p_1^*)$ , перейдут в  $T_3(p_2^*)$ , если в КВП трубы давление уменьшится настолько, что  $|h_{cr}^-(p_2^*)|$  становится меньше величины  $|h_u|$ .

Выше рассмотрен случай, когда оба значения давления  $p_1^*$  и  $p_2^*$  превосходят критическое значение  $p_{cr}^*$ . Пусть теперь одно из них меньше критического, а другое больше. В этом случае переход от колебаний типа  $T_1$  к типу  $T_2$ , и наоборот, происходит более плавно, то есть только при достаточно большом  $\Delta p^*$  возможны большие изменения амплитуд колебаний. Существенными будут изменения в характере колебаний в двух случаях.

Во-первых, если происходят колебания типа  $T_2(p_2^*)$  и в одном из крайних положений давление резко уменьшается с закритического значения до докритического  $p_1^* > p_{cr}^* > p_2^*$ , то устанавливаются колебания типа  $T_1(p_2^*)$  или  $T_3(p_2^*)$ . Во-вторых, если происходят колебания типа  $T_1(p_1^*)$  или  $T_3(p_1^*)$  и в одном из крайних положений давление резко увеличивается с докритического значения до закритического ( $p_1^* < p_{cr}^* < p_2^*$ ) при условии, что  $|W^{(2)}(p_2^*)| < |h_u|$ , то трубу «забрасывает» выше промежуточного положения равновесия  $W^{(2)}(p_2^*)$ .

Как видим, падение давления с закритического до докритического обязательно приводит к установлению колебаний с охватом нижнего положения равновесия. Обратный же переход к колебаниям вокруг верхнего положения равновесия над горизонталью при увеличении давления с докритического до закритического происходит лишь при дополнительном условии. Если оба значения  $p_1^*$  и  $p_2^*$  не превосходят критического, то резких изменений в характере колебаний не происходит.

Таким образом, достаточно резкие смены характера колебаний вследствие периодического изменения давления могут наблюдаться только при  $p_0^* + p^* > p_{cr}^*$ .

Приведенный анализ зависимости характера свободных нелинейных колебаний от начального положения трубы позволяет в некоторой степени объяснить возникновение различных режимов колебаний, в том числе хаотических, при варьировании длины волны давления. Определяющим в этом является наличие положений, в которых происходят скачкообразные изменения диапазона колебаний.

## 7. ВЫНУЖДЕННЫЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ДАВЛЕНИЯ

Если труба первоначально находилась в нижнем положении равновесия, зависящем от собственного веса трубы и постоянного давления  $p_0^*$ , то воздействие переменной волны давления приводит к возбуждению вынужденных и параметрических колебаний. Вынужденные колебания определяются величиной статического прогиба и переменной частью давления. Параметрические же колебания определяются взаимодействием полного давления и динамической составляющей прогиба.

Выясним, когда малые колебания давления могут приводить к возникновению колебаний достаточно большой амплитуды около нижнего статического положения равновесия.

Пусть в начальный момент времени труба имела прогиб  $h_0 = W^{(1)}(p_0^*)$ , то есть находилась в нижнем положении равновесия, которое зависит не только от собственных весов трубы и жидкости, но и от величины внутреннего давления  $p_0^*$ . В силу того, что гармоники с номерами выше первого

$$\lambda = 0, \varepsilon^* = 0.1, p_0^* = 2, p^* = 0.1$$

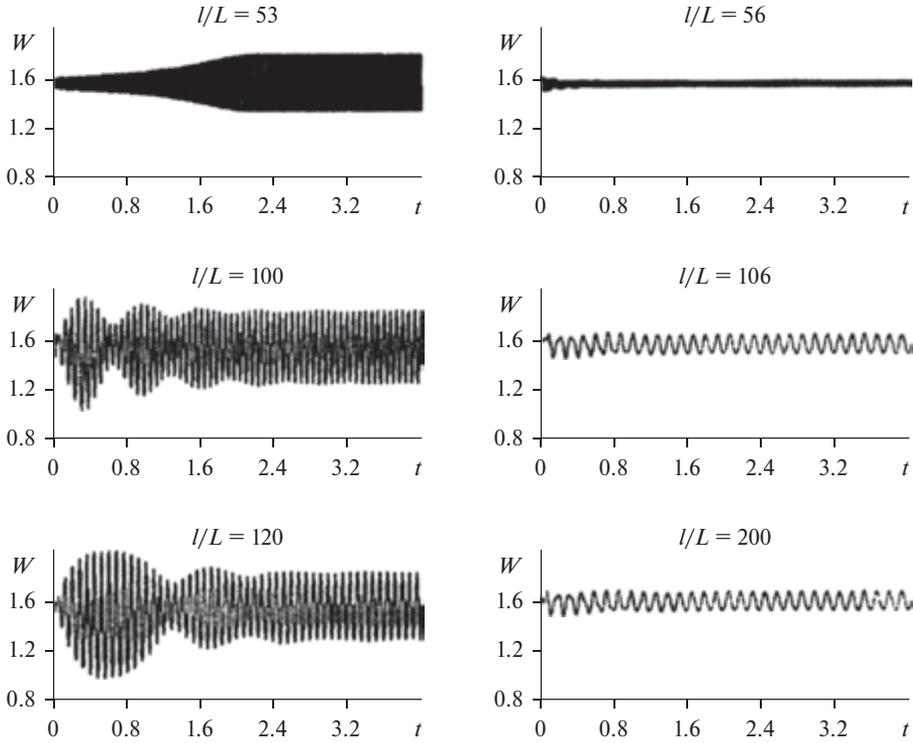


Рис. 3

имеют гораздо меньшие амплитуды, чем первая, то можно считать, что первоначально возбуждена только она. Заметим, что функция  $W^{(1)}(p_0^*)$  при фиксированных остальных параметрах системы является возрастающей, то есть чем больше постоянное давление  $p_0^*$ , тем ниже находится нижнее положение равновесия трубы. К примеру,  $W^{(1)}(1) = 0.961$ ,  $W^{(1)}(2) = 1.571$ ,  $W^{(1)}(3) = 2.058$ .

Численные эксперименты при различных значениях постоянной составляющей  $p_0^*$  внутреннего давления и малой переменной части  $p^*$  показали, что вынужденные колебания возникают при частоте изменения давления, близкой к частоте свободных колебаний трубы  $\omega(p_0^*, W^{(1)})$  вблизи нижнего статического положения равновесия  $W^{(1)}$ , определяемого общим весом трубопровода и постоянным давлением  $p_0^*$ . Так что соответствующая длина волны определяется равенством  $l_1 = 2\pi c / \omega(p_0^*, W^{(1)})$ . Диапазон частот, при которых возбуждаются вынужденные колебания, может быть довольно

$$\lambda = 0, \varepsilon^* = 0.1, p_0^* = 0.5, p^* = 0.1$$

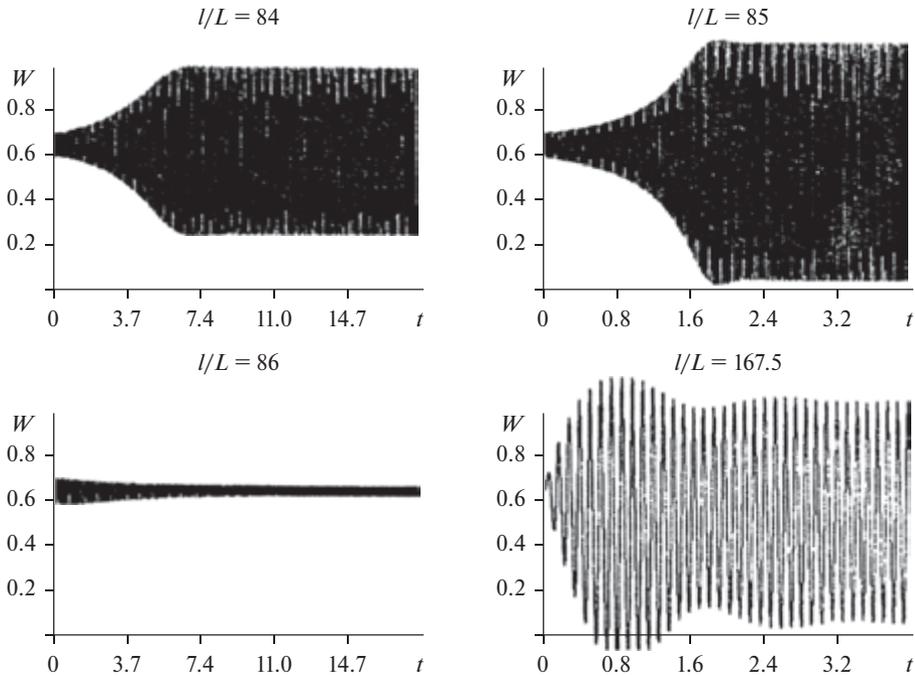


Рис. 4

широким. Например, при  $\lambda = 0$  и  $p_0^* = 2$  имеем  $W^{(1)} = 1.571$ ,  $\omega(2, W^{(1)}) = 88$  и потому вынужденные колебания при малой переменной части давления  $p^* = 0.1$  возникают при значениях  $l/L$ , близких к 106. В диапазоне  $l/L \in [100, 120]$  сохраняются колебания достаточно большой амплитуды. Вне диапазона  $l/L \in [80, 140]$  вынужденные колебания практически не возбуждаются. Отметим, что наибольшая раскачка происходит при значениях длины волны  $l$ , чуть больших, чем  $l_1$ , так как с увеличением амплитуды колебаний вблизи положения равновесия происходит некоторое уменьшение частоты свободных колебаний (рис. 1).

Параметрические колебания вблизи главного параметрического резонанса происходят при частоте изменения давления  $\omega$ , в два раза превосходящей частоту свободных колебаний трубы вокруг статического положения равновесия. Например, при  $\lambda = 0$  и  $p_0^* = 2$  главный параметрический резонанс возникает при  $l/L = 53$ , так как при этом  $\omega = 176$  вдвое превосходит частоту свободных колебаний  $\omega_2(W^{(1)}) = 88$ . Как видно из рис. 3, параметрический резонанс наступает только для очень узкого диапазона значений отношения

$l/L$  вблизи величины 53. К примеру, при  $l/L = 56$  параметрического резонанса уже нет.

Еще одно различие в возбуждении вынужденных и параметрических колебаний состоит в том, что вынужденные колебания возбуждаются за довольно короткий промежуток времени, а параметрические требуют для этого достаточно много времени. Отметим, что с ростом постоянной части давления  $p_0^*$  уменьшается амплитуда параметрических колебаний и увеличивается время наступления параметрического резонанса (рис. 4).

## 8. РОЛЬ ДЛИНЫ ВОЛНЫ В ВОЗБУЖДЕНИИ ВЫСШИХ ГАРМОНИК

Длина волны  $l$  и круговая частота  $\omega$  связаны соотношением  $2\pi/l = \omega/c$ , для воды  $c = 1485$  м/с. Таким образом, увеличение длины волны означает одновременное уменьшение круговой частоты, и наоборот.

В процессе колебаний может происходить обмен энергией между гармониками. Как видно из итерационной процедуры (3.4)–(3.6), интенсивность обмена определяется структурой матрицы  $(p_{ij}^*)_{i,j=1}^n$ , она тем больше, чем больше модули внедиагональных элементов.

Структура матрицы  $(p_{ij}^*)_{i,j=1}^n$ , в свою очередь, определяется величиной длины волны давления  $l$  по сравнению с длиной трубы  $L$ . При длинах волн  $l$ , во много раз превосходящих длину трубы  $L$ , справедливо

$$p^* \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} \tau - \frac{2L}{l} \xi\right) \approx p^* \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} \tau\right),$$

и матрица  $(p_{ij}^*)_{i,j=1}^n$  будет близка к диагональной. Это означает, что при  $l \gg L$  обмен энергией между гармониками весьма ограничен. Поэтому остаются невозбужденными четные гармоники и колебания будут симметричными относительно середины пролета. Кроме того, энергия первой гармоники будет мало рассеиваться по более дальним гармоникам.

Соответственно, уменьшение длины волны давления  $l$  по отношению к длине трубы  $L$  приводит к увеличению модулей вне диагональных элементов матрицы  $(p_{ij}^*)_{i,j=1}^n$ , что приводит к «перемешиванию частот» и к некоторому увеличению амплитуд второй и более дальних гармоник. Анализ элементов матрицы  $(p_{ij}^*)_{i,j=1}^n$  показывает, что наибольшее увеличение модулей вне диагональных элементов возможно при целых значениях величины  $2L/l$ . Численный эксперимент продемонстрировал, что фактически наибольшее возбуждение высоких гармоник происходит при  $2L/l = 1$ , причем в большей степени возбуждаются четные гармоники. При этом колебания становятся несимметричными относительно середины пролета. Примечательно то, что

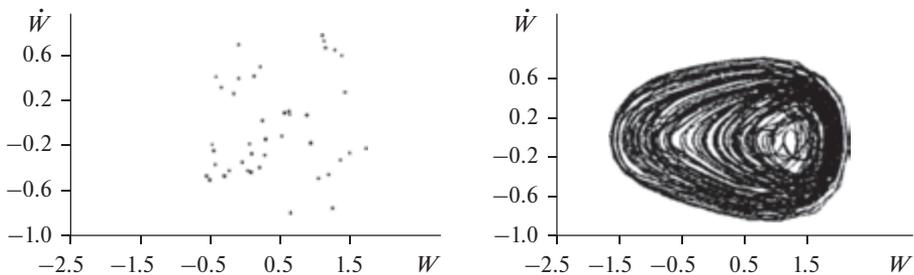
при наличии трения первая гармоника достаточно быстро стабилизируется, в то время как последующие совершают периодические колебания. Так, при  $\lambda = 0$ ,  $\varepsilon^* = 1$ ,  $p_0^* = 3$ ,  $p^* = 2$  и  $2L/l = 0.5$  амплитуды колебаний второй и шестой гармоник достигают десяти и более процентов от максимального прогиба середины пролета. Гармоники с номерами выше шестого в наших вычислительных экспериментах практически не возбуждались.

## 9. ХАОТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ

Выше были рассмотрены особенности свободных нелинейных колебаний, а также вынужденных и параметрических колебаний при малых амплитудах  $p^*$  переменной части волны давления. Увеличение амплитуды  $p^*$  приводит к большему разнообразию колебаний, в том числе, к возникновению квазипериодических и хаотических режимов. Особенно сильно это проявляется в случаях, когда величина  $p_0^* + p^*$  превосходит критическое значение  $p_{cr}^*$ , определяемое формулой (4.4).

Для хаотических режимов характерны наличие области сплошного спектра мощности колебаний и неповторяющееся облако точек в сечениях Пуанкаре (рис. 5 и 6). Период стробоскопирования при построении сечений Пуанкаре был выбран равным периоду колебаний давления.

$$\lambda = 0, \varepsilon^* = 0.1, p_0^* = 1.3, p^* = 0.5, l/L = 130$$



$$\lambda = 0, \varepsilon^* = 1, p_0^* = 3, p^* = 1, l/L = 97$$

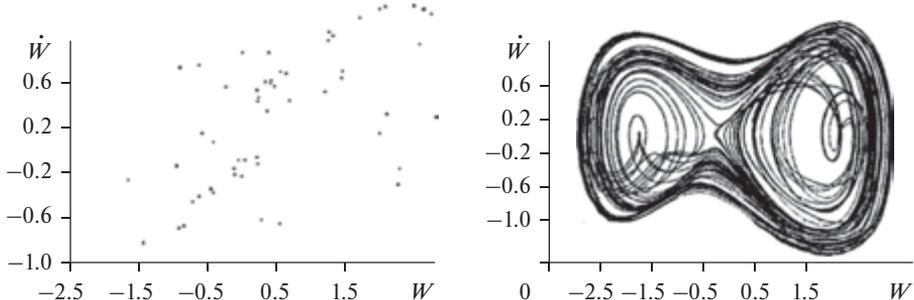


Рис. 5

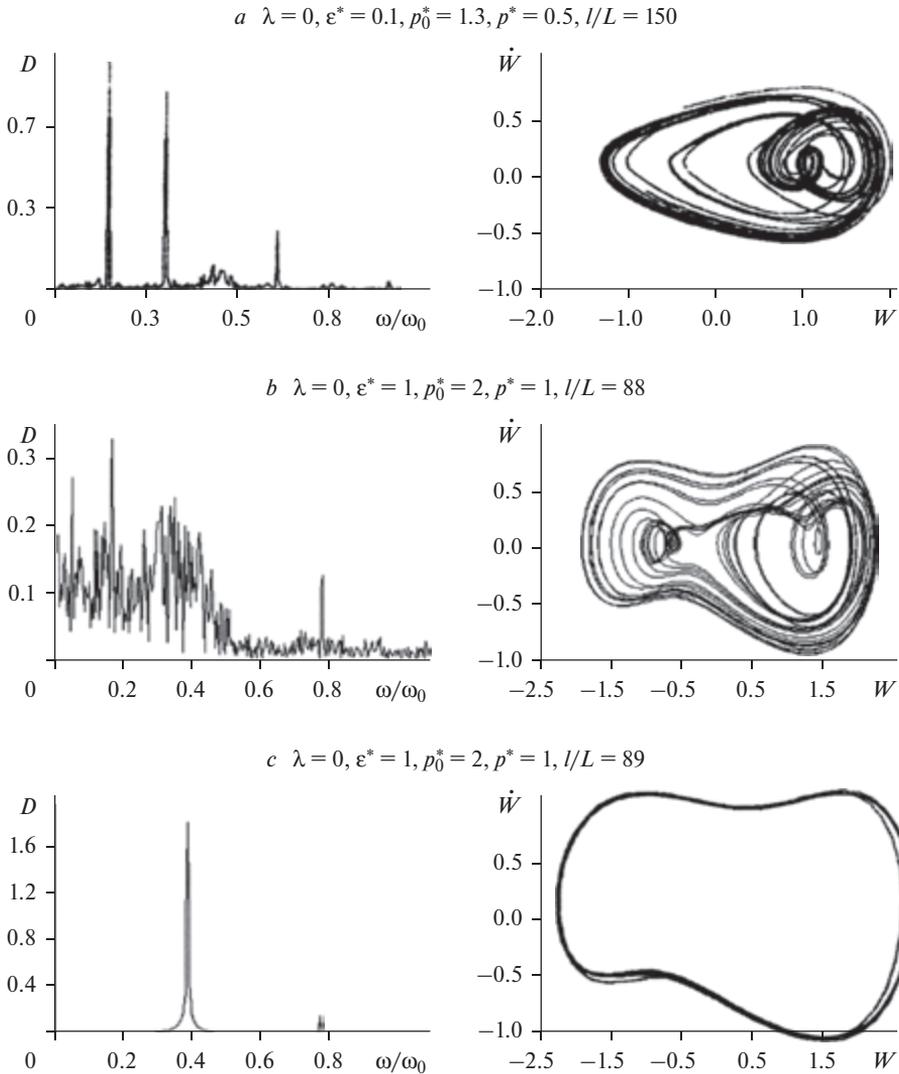


Рис. 6

Численные эксперименты при различных фиксированных значениях постоянной и переменной частей давления продемонстрировали сильную зависимость характера колебаний от величины длины волны давления  $l$  (определяющей частоту  $\omega$ ). Рис. 6 иллюстрирует, как варьирование длины волны при фиксированных остальных параметрах  $\lambda = 0, \varepsilon^* = 1, p_0^* = 2$  и  $p^* = 1$  приводит к возникновению различных режимов колебаний, в том

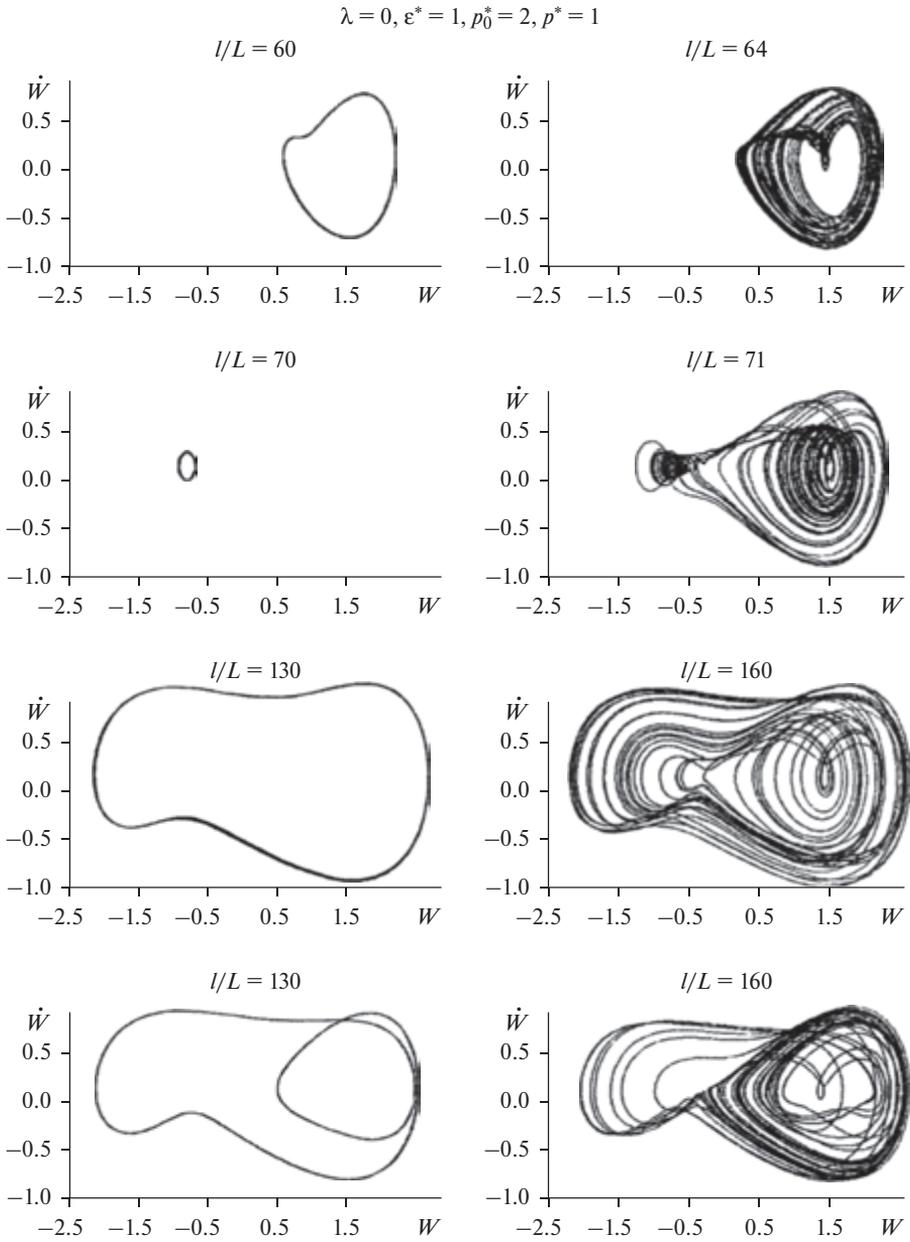
числе и хаотических. Соответственно, есть такие критические значения длин волн, при которых происходит резкая смена характера колебаний. Такие качественные переходы могут быть связаны с зависимостью характера свободных нелинейных колебаний от начального прогиба трубы, приведенными в п. 5 и 6.

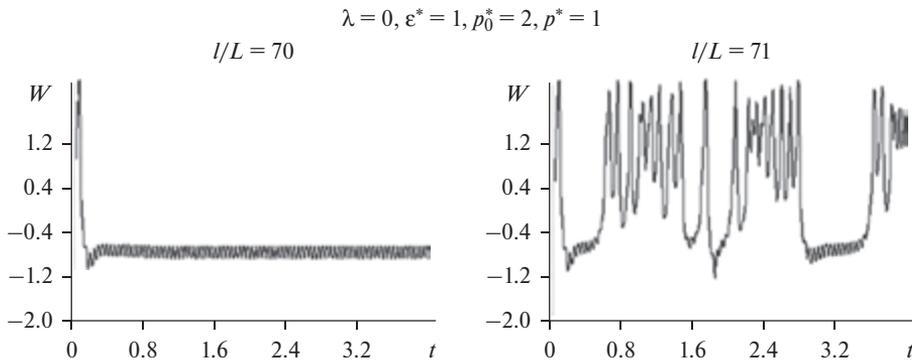
Отметим, что за пределами диапазона  $l/L \in [63, 165]$ , то есть интервала частот  $\omega \in [57, 150]$ , происходят только периодические колебания вокруг нижнего положения равновесия ниже горизонтали. Объясняется это тем, что эти частоты плохо согласованы с собственной частотой колебаний трубы вблизи нижнего положения равновесия и потому колебания трубы не могут преодолеть его притяжения. Слишком малые и большие длины волн приводят к возникновению периодических колебаний с частотой колебаний давления. При малых длинах волн их частота  $\omega$  сильно превосходит собственную частоту колебаний трубы и она, не успев завершить свое движение к одному из крайних положений, вынуждена менять направление движения из-за быстрых колебаний давления. Если длина волны давления слишком велика, то ее частота  $\omega$  мала по сравнению с собственной частотой колебаний трубы и потому труба успевает занять положение равновесия, соответствующее текущему значению давления. Например, при  $l/L = 500$  положение трубы в любой момент времени практически совпадает с положением равновесия, соответствующим значению давления в этот момент.

При  $l/L > 63$ , но меньшем некоторого предельного значения, возникает значительная раскачка трубы, в результате чего может быть преодолено притяжение нижнего положения равновесия. При превышении значения 63 возникает разброс траекторий, который можно характеризовать как предхаотический режим. Последующее увеличение длины волны давления приводит ко все большему забросу трубы вверх (выше горизонтальной линии, рис. 7).

Критической является ситуация, когда середина пролета оказывается выше промежуточного неустойчивого положения равновесия  $V^{(2)}$ . Если частота  $\omega$  не согласована с собственной частотой колебаний трубы в зоне между верхними положениями равновесия, то могут установиться периодические колебания небольшой амплитуды в этой зоне. Так происходит и при  $l/L \in [67, 70]$ .

Дальнейшее увеличение длины волны приводит к возникновению режима колебаний большой амплитуды, охватывающих нижнее и верхнее положения равновесия (рис. 8). В процессе колебаний они могут меняться двумя типами траекторий: проходящими под неустойчивым положением равновесия и над ним. Зона над неустойчивым положением равновесия мала и потому достаточно долгие задержки трубы в ней возможны только при очень жестких условиях на длину волны. При  $l/L \in [67, 70]$  устанавливаются периодические колебания над  $W^{(2)}$ , а дальнейшее увеличение длины волны приводит ко все меньшей задержке трубы в этой зоне. Если при  $l/L \in [71, 88]$  такие задержки встречаются и на больших временах, то при  $l/L > 89$  они присутствуют только на начальных стадиях колебаний.





В диапазоне  $l/L \in [90, 100]$  устанавливаются периодические колебания большой амплитуды с охватом нижнего и верхнего положений равновесия. Это связано с тем, что соответствующая частота  $\omega \in [93, 104]$  достаточно хорошо согласуется с собственной частотой свободных колебаний трубы в этой зоне и возникает резонанс.

При последующем увеличении длины волны периодичность постепенно нарушается и возникают траектории с меньшей амплитудой. По мере увеличения длины волны эти траектории трансформируются в уже встречавшиеся траектории, соответствующие колебаниям под положением равновесия  $W^{(2)}$ . Так, при  $l/L \in [105, 163]$  эти два типа траекторий сменяют друг друга. Последующее увеличение длины волны ввиду нарушения согласованности частот в зоне колебаний большой амплитуды приводит к их исчезновению. При  $l/L > 165$ , как уже было сказано, происходят только периодические колебания возле нижнего положения равновесия. Таким образом, варьирование длины волны давления, следовательно, ее частоты, приводит к возникновению как периодических, так и хаотических режимов.

Гораздо менее разнообразны случаи, когда  $p_0^* + p^* < p_{cr}^*$ . Это связано с тем, что при этом нет верхних положений равновесия. Была проведена серия численных экспериментов при  $\lambda = 0, \varepsilon^* = 0.1, p_0^* = 1.3, p^* = 0.5$ . При  $l/L < 71$  наблюдаются только периодические колебания возле положения равновесия, соответствующего  $p_0^*$ .

Увеличение длины волны приводит к появлению дополнительных траекторий большой амплитуды, почти симметричных относительно горизонтали. Возникают сложные колебания, для которых характерны постепенные переходы между этими двумя типами траекторий. При  $l/L = 180$  остаются только траектории большой амплитуды и наступает периодический режим. Последующее увеличение длины волны приводит к постепенному уменьшению амплитуды колебаний и при  $l = 199$  труба перестает забрасываться

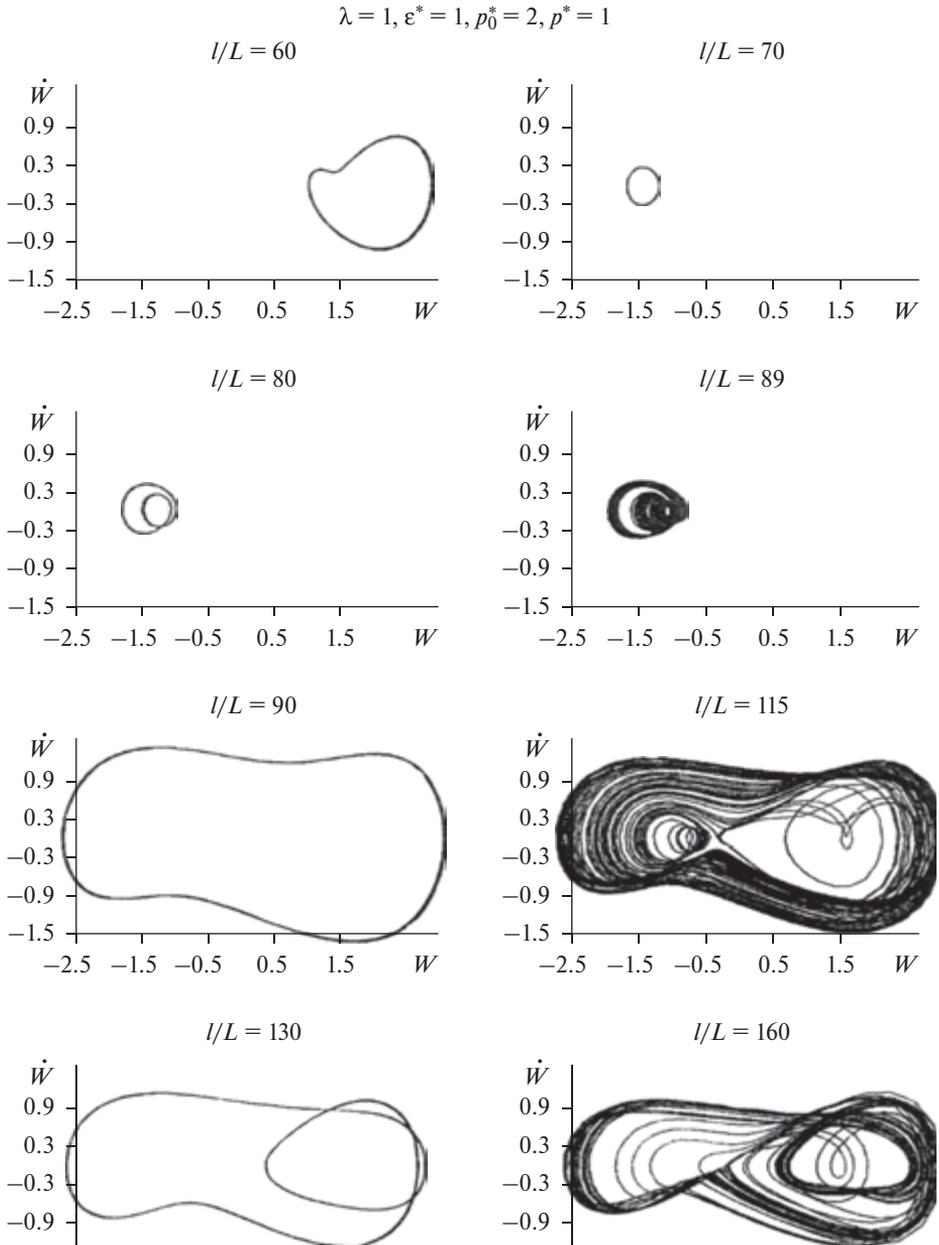


Рис. 9 ( $\lambda = 1, \varepsilon^* = 1, p_0^* = 2, p^* = 1$ )

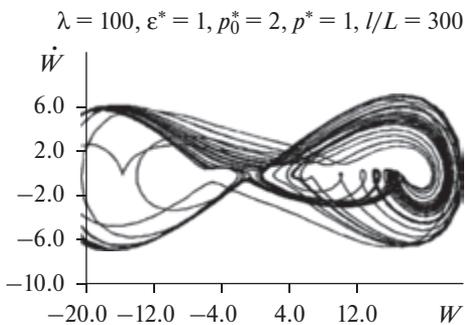


Рис. 10

мер, при  $\lambda = 0, \varepsilon^* = 1, p_0^* = 2$  и  $l/L = 150$  таким минимальным значением является  $p^* = 0.71$ . Это значение сильно зависит от длины волны.

Были проведены численные эксперименты при различных значениях коэффициента податливости опор  $\lambda$ . На рис. 9 представлена зависимость режимов колебаний от отношения  $l/L$  при  $\lambda = 1$  и тех же остальных параметрах, что на рис. 8. Как видно, амплитуды колебаний увеличились. Для достаточно большого диапазона  $l/L \in [68, 89]$  устанавливаются колебания возле верхнего положения равновесия, причем для  $l/L \in [68, 78]$  происходят простые периодические колебания. При  $\lambda = 0$  это наблюдалось для узкого диапазона значений  $l/L$ , близких к 70.

Дальнейшее увеличение  $\lambda$  приводит к росту амплитуд колебаний, но их зависимость от длины волны давления остается. На рис. 10 представлен один из режимов колебаний.

вверх. Начиная с этого значения длины волны давления происходят только периодические колебания под горизонталью.

При заданных значениях параметров  $\lambda, \varepsilon^*, p_0^*$  и  $l/L$  можно указать минимальное значение переменной части давления  $p^*$ , при которой труба начинает преодолевать притяжение нижнего положения равновесия и возникают сложные, в том числе хаотические, режимы. Напри-

## 10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены изгибные колебания в вертикальной плоскости горизонтальной трубы с жидкостью под воздействием гармонической волны давления в жидкости. Принимаются предположения о том, что средняя скорость движения жидкости в трубе равна нулю, давление не действует на торцевые сечения и потому не создает осевой силы, прогиб мал по сравнению с длиной трубы между опорами, а угол поворота мал по сравнению с единицей. При перечисленных предположениях колебания трубы описываются нелинейным дифференциальным уравнением (2.3), для решения которого предложена итерационная процедура (3.1)–(3.3), сходящаяся с любого начального приближения.

Численные эксперименты демонстрируют сильную зависимость характера колебаний от длины волны давления. Очень короткие и длинные по отношению к длине трубы между опорами волны порождают достаточно простые периодические колебания трубы.

В зависимости от параметров трубы и жидкости возможно возникновение диапазонов длин волн давления, приводящих к более сложным режимам колебаний, в том числе к хаотическим.

Для объяснения наблюдавшихся эффектов исследована зависимость амплитуды и частоты свободных нелинейных колебаний (при постоянном давлении в жидкости и нулевой начальной скорости) от начального отклонения трубы. Если безразмерное внутреннее давление в жидкости  $p_0^*$  не превосходит критической величины  $p_{cr}^*$ , определяющейся формулой (4.4), то имеется одно нижнее положение статического равновесия  $W^{(1)}$ . Отклонение начального условия от этого положения равновесия приводит к увеличению амплитуды колебаний и уменьшению частоты. Такая ситуация сохраняется до тех пор, пока начальный прогиб  $h_0$  находится в диапазоне  $[h_{cr}^-, h_{cr}^+]$ . За пределами этого диапазона происходит монотонное увеличение частоты колебаний. При этом с увеличением отклонения начального положения трубы от положения равновесия  $W^{(1)}$  происходит постепенный переход от колебаний, симметричных относительно положения равновесия  $W^{(1)}$ , к колебаниям, симметричным относительно горизонтали (рис. 1 а, б).

Если  $p_0^* > p_{cr}^*$ , то появляются еще два положения равновесия, причем верхнее  $W^{(3)}$  – устойчивое, а промежуточное  $W^{(2)}$  – неустойчивое. Верхнее положение равновесия  $W^{(3)}$ , как и нижнее  $W^{(1)}$ , является точкой максимума графика зависимости частоты колебаний от начального прогиба  $h_0$ . Промежуточное положение  $W^{(2)}$  является точкой минимума.

В зависимости от того, выше или ниже промежуточного положения равновесия было начальное положение трубы, устанавливаются периодические колебания возле верхнего или нижнего положений равновесия. При этом в обоих случаях увеличение модуля начального прогиба приводит к установлению колебаний большой амплитуды, симметричных относительно горизонтали. В отличие от случая  $p_0^* < p_{cr}^*$ , при значениях начального прогиба, равных  $h_{cr}^-$  и  $h_{cr}^+$ , происходит резкое изменение характера колебаний. Таким образом, при  $p_0^* > p_{cr}^*$  имеются три значения начального прогиба  $W^{(2)}, h_{cr}^-, h_{cr}^+$ , при которых происходит качественное изменение характера свободных нелинейных колебаний (рис. 1 в, д).

Вынужденные колебания возбуждаются при значениях частоты  $\omega$  волны давления, близких к частоте свободных колебаний трубы  $\omega(p_0^*, W^{(1)})$  возле нижнего положения равновесия  $W^{(1)}$  при значении безразмерного внутреннего давления  $p_0^*$ . Параметрические колебания вблизи главного параметрического резонанса возбуждаются при вдвое большей частоте изменения давления  $\omega$ .

Вынужденные колебания возбуждаются быстро, а параметрические колебания – медленнее. Кроме того, параметрические колебания происходят только для очень узкого диапазона значений частоты  $\omega$  (соответственно, длины волны давления  $l$ ), а вынужденные – для достаточно широкого диапазона значений частоты. С ростом постоянной части давления уменьшает-

## Статика и динамика трубопроводов

ся амплитуда параметрических колебаний и увеличивается время наступления параметрического резонанса.

Если амплитуда переменной волны давления  $p^*$  не мала, то при значениях частоты  $\omega$ , достаточно согласованных с частотой свободных колебаний  $\omega(p_0^*, W^{(1)})$ , могут возбуждаться хаотические колебания. Наиболее сложные режимы возникают при  $p_0^* + p^* > p_{cr}^*$ , когда друг друга сменяют колебания вокруг нижнего и верхнего положений равновесия и колебания большой амплитуды, симметричные относительно горизонтали. Резкие переходы от одного типа колебаний к другому объясняются разрывами в зависимости крайних положений середины пролета трубы от начального прогиба при значениях начального прогиба, равных  $W^{(2)}$ ,  $h_{cr}^-$  и  $h_{cr}^+$  (рис. 1).

### § 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ И ПОДВИЖНЫХ ОПОР

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Транспортировка жидкости или газа по трубопроводам осуществляется работой насосных станций, которые создают переменное внутреннее давление. Колебательные движения может совершать основание, с которым связаны опоры трубы. Примером подобной колебательной системы является участок между двумя зажимами топливной трубы газотурбинного двигателя. Частота движения основания определяется оборотами ротора двигателя, а частота колебаний давления – работой шестеренчатого или плунжерного топливного насоса. В одном из двухконтурных турбореактивных двигателей первая из этих частот равна 210 Гц, а вторая – 700 Гц [1]. При этом среднее (рабочее) давление за гидронасосом двигателя составляет 15 МПа, а амплитуда колебаний давления – 1.5 МПа. Внутренний диаметр труб изменяется в пределах от 0.004 до 0.06 м, а толщина стенки – от 0.0005 до 0.0025 м. Под действием переменного внутреннего давления и колебательных движений основания трубопровод совершает взаимодействующие между собой параметрические и вынужденные колебания. При определенных соотношениях между параметрами колебания трубопровода могут происходить в хаотическом режиме, для изучения которых нужно исходить из нелинейных уравнений.

Вопросы статики и динамики трубопроводов, заполненных транспортируемой жидкостью, рассматривались во многих работах [2–15]. Широкий обзор литературы по данной проблеме можно найти, например, в [11], где также приведено сравнение применяемых в исследованиях различных математических моделей и дано обсуждение их областей использования. В [14] изучены колебания трубы из вязкоупругого материала на подвижных опорах.

1. Старцев Н. И. Трубопроводы газотурбинных двигателей. М.: Машиностроение, 1976. 272 с.
2. Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.
3. Светлицкий В. А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
4. Ilgamov M. A., Tang D. M., Dowell E. H. Flutter and forced response of a cantilevered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge // J. of Fluids and Structures. 1994. V. 8. P. 139–156.
5. Tang D. M., Ilgamov M. A., Dowell E. H. Buckling and post-buckling behavior of a pipe subjected to internal pressure // J. of Appl. Mech. 1995. V. 62. № 3. P. 595–600.
6. Ганиев Р. Ф., Низамов Х. Н., Дербуков Е. И. Волновая стабилизация и предупреждение аварий в трубопроводах. М.: Из-во МГТУ, 1996. 258 с.
7. Ильгамов М. А., Мишин В. Н. Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 181–192.
8. Миронов М. А., Пятаков П. А., Андреев А. А. Вынужденные колебания трубы с потоком жидкости // Акустический журнал. 2010. Т. 56. № 5. С. 684–692.
9. Ibrahim R. A. Mechanics of pipes conveying fluids // ASME J. of Pressure Vessel Technology. 2010. Vol. 132. P. 1–32.

Настоящий параграф посвящен исследованию нелинейных изгибных колебаний трубопровода под действием переменного внутреннего давления и вибрирующих опор [15]. Здесь излагаются результаты этой работы.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются изгибные колебания двухопорного трубопровода и заключенной в нем идеальной несжимаемой жидкости при действии переменного внутреннего давления. Одна из опор жестко связана с подвижным основанием, а другая, прикрепленная к нему линейно-упругими элементами, может смещаться в продольном направлении. Крепление трубы на опорах – шарнирное. Предполагается, что основание совершает вертикальные поступательные движения по заданному закону  $s = s(t)$ . Учитывается взаимодействие внутреннего давления и изменения кривизны осевой линии, а также окружной и продольной деформаций трубы. При этом принимается, что внутреннее давление не создает растягивающую силу, что обеспечивается в трубе, которая протянута за пределы опор.

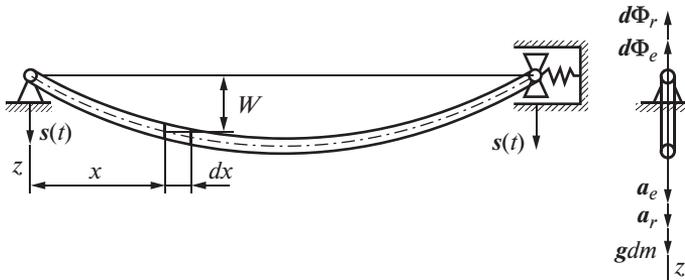


Рис. 1

Течением жидкости в трубопроводе пренебрегается. Расчетная схема трубы представлена на рис. 1, на котором изображены прогиб  $W$  элемента трубы длиной  $dx$  и массой  $dm = m_1 dx$ , его ускорения и силы, действующие

10. Chen L. Q., Zhang Y. L., Zhang G. C., Ding H. Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed // International J. of Non-Linear Mechanics. 2014. V. 58. P. 11–21.
11. Li S., Karney B. W., Liu G. FSI research in pipeline systems – A review of the literature // J. of Fluids and Structures. 2015. V. 57. P. 277–297.
12. Ганиев Р. Ф., Ильгамов М. А. Упругая реакция трубопровода на внутренне ударное давление // ДАН. 2016. Т. 470. № 2. С. 162–165.
13. Акуленко Л. Д., Гавриков А. А., Несеров С. В. Собственные колебания трубопровода на упругом основании, транспортирующего жидкость // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 123–133.
14. Luczko J., Czerwiński A. Nonlinear three-dimensional dynamics of flexible pipes conveying fluids // J. of Fluids and Structures. 2017. V. 70. P. 235–260.
15. Шакирьянов М. М., Ахмедьянов А. В. Нелинейные колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления и подвижных опор // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2020. № 1. С. 116–122.

на него. Здесь  $g$ ,  $a_r = \partial^2 W / \partial t^2$  и  $a_e = \partial^2 s / \partial t^2$  – гравитационное, относительное и переносное ускорения;  $gdm$  – сила тяжести,  $d\Phi_r = a_r dm$  и  $d\Phi_e = a_e dm$  – относительная и переносная силы инерции элемента,  $m_1 = \pi \{ \rho_0 R^2 + \rho [(R+h)^2 - R^2] \}$  – масса трубы единичной длины и заключенной в ней жидкости;  $L$ ,  $R$ ,  $h$  и  $\rho$ ,  $\rho_0$ ,  $p$  – длина, внутренний радиус, толщина стенки, плотности материала трубы и жидкости, внутреннее давление.

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний трубы на подвижном основании, учитывающее взаимодействия внутреннего давления и изменения кривизны осевой линии, окружной и продольной деформаций, запишется (§ 1) как

$$-EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} dx - \left[ Fp(1-\chi) - \alpha \int_0^L \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx + (g - a_e - a_r) dm = 0, \quad (2.1)$$

$$F = \pi R^2, \quad J = \frac{\pi}{4} [(R+h)^4 - R^4], \quad \chi = \frac{2\nu}{1+\lambda}, \quad \lambda = \frac{Eh}{CL}, \quad \alpha = \frac{\pi EhR}{(1+\lambda)L}.$$

Здесь  $E$  и  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала трубопровода,  $C$  – коэффициент упругости элементов крепления опоры к основанию.

Внутреннее давление  $p$  в трубе задается в виде

$$p = p_0 + p_a \sin \Omega_1 t, \quad \Omega_1 = 2\pi f_1, \quad (2.2)$$

где  $p_0$  – среднее давление в трубе, а  $p_a$  и  $f_1$  – амплитуда и частота его переменной части. Вертикальные перемещения подвижного основания определяются формулой

$$s = s_0 \sin \Omega_2 t \quad \Omega_2 = 2\pi f_2, \quad (2.3)$$

где  $s_0$  и  $f_2$  – амплитуда и частота перемещения основания.

Функция прогиба, удовлетворяющая условиям шарнирного крепления трубопровода, принимается в виде одночленной аппроксимации

$$W = (W_0 + w(t)) \sin \beta x \quad \beta = \pi / L, \quad (2.4)$$

где  $W_0$  и  $w(t)$  – амплитуды статической и динамической составляющих прогиба средней точки пролета. Первая часть прогиба зависит от гравитационных сил и среднего давления в трубе, а вторая – от параметров динамической составляющей внутреннего давления и перемещения подвижного основания. Заданием  $W$  в виде (2.4) ограничиваемся рассмотрением только первой гармоники колебаний.

Подставляя (2.2)–(2.4) в уравнение (2.1) и интегрируя его по  $x$  в пределах от 0 до  $L$  по методу Бубнова–Галеркина, получаем

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \omega^2(1 - 2\mu \sin \Omega_1 t)(W_0 + w) + \gamma(W_0 + w)^3 = \frac{4}{\pi}[g + s_0 \Omega_2^2 \sin \Omega_2 t],$$

$$\omega^2 = \frac{\beta^2 F(1 - \chi)(p'_0 - p_0)}{m_1}, \mu = \frac{p_a}{2(p'_0 - p_0)}, p'_0 = \frac{\beta^2 EJ}{F(1 - \chi)}, \gamma = \frac{\alpha \beta^4 L}{2m_1}, \quad (2.5)$$

где  $\omega$  – круговая частота собственных колебаний,  $p'_0$  – критическое внутреннее давление.

При  $w(t) \equiv 0$ ,  $p_a \equiv 0$ ,  $s_0 \equiv 0$  из (2.5) следует уравнение для определения статической составляющей  $W_0$  прогиба трубопровода

$$W_0^3 + \frac{2F(1 - \chi)}{\alpha \beta^2 L}(p'_0 - p_0)W_0 - \frac{8m_1 g}{\pi \alpha \beta^4 L} = 0. \quad (2.6)$$

Дифференциальное уравнение (2.5) с учетом (2.6) запишется

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \left[ \omega^2(1 - 2\mu \sin \Omega_1 t) + 3\gamma W_0^2 \right] w + \gamma(3W_0 w^2 + w^3) = \delta \sin \Omega_1 t + \frac{4}{\pi} s_0 \Omega_2^2 \sin \Omega_2 t, \delta = \frac{\beta^2 F(1 - \chi) p_a W_0}{m_1}. \quad (2.7)$$

Из уравнения (2.7) видно, что движения трубы складываются из параметрических и вынужденных колебаний.

Начальные условия для уравнения (2.7) следующие:

$$w = w_0, \quad dw/dt = 0 \quad (t = 0), \quad (2.8)$$

где  $w_0$  – начальное значение динамического прогиба средней точки пролета трубы.

Нелинейная задача Коши (2.7), (2.8) решается численно методом Рунге–Кутты. Далее к этому решению применяются дискретное преобразование Фурье и отображение Пуанкаре.

### 3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Для анализа динамики трубы рассмотрим также частный случай установившихся параметрических колебаний, когда значения амплитуды  $s_0$  перемещения основания и статической составляющей прогиба средней точки пролета  $W_0$  являются малыми. Это будет иметь место, например, для трубы с неподвижным основанием в условиях невесомости (или при строго вертикальном положении трубы). Таким образом, полагая в (3.1)  $s_0 = 0$  и  $W_0 = 0$ , имеем

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega^2(1 - 2\mu \sin \Omega_1 t)w + \gamma w^3 = 0. \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) определяет параметрические колебания средней точки пролета трубопровода. При этом наибольший интерес представляют значения амплитуд прогиба в резонансных режимах колебаний. Поэтому определим эти амплитуды при главном параметрическом резонансе ( $\Omega_1 \approx 2\omega$ ). В этом случае решение (3.1) можно записать [16]

$$w(t) = a \sin \frac{\Omega_1 t}{2} + b \cos \frac{\Omega_1 t}{2}, A^2 = a^2 + b^2, \quad (3.2)$$

где  $A$  – амплитуда установившихся колебаний,  $a$  и  $b$  – постоянные коэффициенты, которые определяются применением принципа гармонического баланса [17]. После подстановки (3.2) в (3.1) и несложных преобразований получаем

$$A = \frac{4\pi f}{\sqrt{3\gamma}} \sqrt{\frac{f_1^2}{4f^2} - 1 + \mu}. \quad (3.3)$$

Здесь  $f = \omega / (2\pi)$  – частота собственных колебаний трубопровода.

Область параметрического резонанса определяется параметром  $\mu$ . Поэтому в соответствии с (2.5) ее ширина тем больше, чем больше отношение амплитуды колебаний давления  $p_a$  к разности  $p'_0 - p_0$ .

Для зримого представления о зависимости амплитуды параметрических колебаний от исходных данных задачи формулу (3.4) запишем в виде

$$\frac{A}{L} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2R(1 + \lambda - 2\nu)}{3Eh} \left[ p_0 + \frac{p_a}{2} + \frac{L^2 m f_1^2}{\pi R^2 (1 - \chi)} - p'_0 \right]}. \quad (3.4)$$

Из этой формулы видно, что относительная амплитуда установившихся параметрических колебаний трубы находится в прямой зависимости от отношения длины  $L$  к внутреннему радиусу  $R$  трубы. Кроме того, относительная амплитуда колебаний прямо пропорциональна корню квадратному из отношения суммы давлений  $p_0 + p_a/2$  и продольной жесткости  $Eh$  трубы.

Если в (3.4) положить  $f_1 = 2f$ , то получим

$$\frac{A}{L} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{p_a R}{3Eh} (1 - 2\nu + \lambda)}. \quad (3.5)$$

Следовательно, в режиме главного резонанса амплитуда установившихся параметрических колебаний трубы не зависит от величины среднего

16. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.

17. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.

давления. Кроме того, в данном частном случае значение этой амплитуды также прямо пропорционально корню квадратному из отношения кольцевой силы  $p_a R$  к жесткости  $Eh$  трубы на растяжение. Выражение в круглых скобках указывает на зависимость амплитуды параметрических колебаний от взаимодействия осевой и окружной деформаций (коэффициента Пуассона  $\nu$ ), а также от отношения  $\lambda$  жесткостей трубы  $Eh$  и креплений опоры  $CL$  в продольном направлении. Если положить  $\nu = 0$ , то формула (3.5) дает завышенное значение амплитуды колебаний. В реальности под действием внутреннего перепада давления происходит окружное расширение трубы и ее продольное укорочение, что в зависимости от коэффициента Пуассона материала и условий закрепления трубы на опорах, приводит к образованию растягивающей продольной силы. Эта сила и обуславливает уменьшение амплитуды установившихся колебаний. Поэтому при постоянном значении продольной жесткости трубы с уменьшением жесткости упругих элементов крепления опоры к основанию значение отношения  $\lambda$  увеличивается. Вместе с ним, как это видно из (3.5), растет амплитуда установившихся параметрических колебаний. Следует отметить также, что значения отношения  $\lambda$  в указанном выше выражении в скобках могут изменяться от 0 (абсолютно жесткие элементы крепления опоры к основанию) до  $\infty$  (не закрепленная, свободно скользящая опора). При больших значениях  $\lambda$  нелинейный член в уравнении (2.1) исчезает. Анализ по данной модели перестает описывать реальную картину динамики.

Численное моделирование было проведено для стальной трубы, заполненной жидкостью, при следующих значениях входных данных:  $L = 1.4$  м,  $R = 0.01$  м,  $h = 0.0005$  м,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0.3$ ,  $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup>,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_0 = 800$  кг/м<sup>3</sup>,  $p_0 = 3.0$  и  $5.0$  МПа,  $p_a = 0.3$  МПа. Значения статического прогиба  $W_0$  средней точки пролета, частоты  $f$  собственных колебаний тру-

бопровода и параметра  $\mu$  для средних давлений 3.0, 5.0 МПа соответственно составили 0.00120, 0.00209 м, 16.2, 12.1 Гц и 0.0328, 0.0583. Отметим, что при таких значениях  $W_0$  статический прогиб может быть определен также без учета первого члена в уравнении (2.6).

На рис. 2 для принятых входных данных представлены графические зависимости амплитуды  $A$  установившихся параметрических колебаний от частоты  $f$  собственных колебаний, которые являются результатами численного

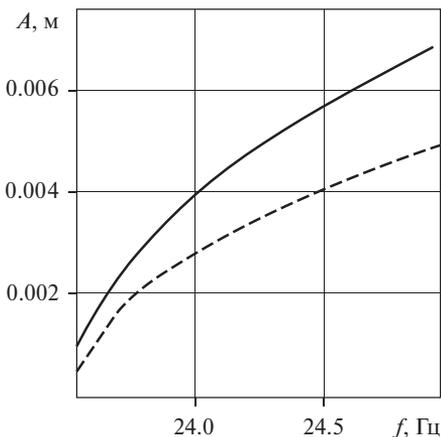


Рис. 2

интегрирования дифференциального уравнения (3.1) и приближенного аналитического решения (3.3) в окрестности частоты  $f_1 \approx 24.2$  Гц режима главного резонанса. При этом интегрирование уравнения (3.1) проводилось с начальным значением  $w_0 = 0.0001$  м динамического прогиба в условиях (2.8).

Сплошной линией на рис. 2 нанесены результаты численного интегрирования, а штриховой линией – приближенного аналитического решения. Видно, что в окрестности главного резонанса увеличение амплитуды параметрических колебаний приводит к увеличению частоты собственных колебаний трубы.

Таким образом, имеет место взаимное влияние параметрических и собственных колебаний трубопровода. Можно отметить также удовлетворительное взаимное расположение сплошной и штриховой линий. Расхождение между линиями составляет менее 29%. Это связано с тем, что в приближенном аналитическом решении не учтены гармоники более высокого порядка.

#### 4. ЗАВИСИМОСТЬ ПРОГИБА ОТ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОСНОВАНИЯ

Численное интегрирование уравнения (2.7) с начальными условиями (2.8) при принятых выше основных параметрах проводилось для двух значений амплитуд перемещения основания:  $s_0 = 0.003$  и  $0.005$  м. Частоты переменной части давления и колебаний основания были приняты по 50 Гц.

Результаты числовых расчетов представлены в виде графических зависимостей на рис. 3. Слева направо первый и второй столбцы графиков получены при амплитуде  $s_0 = 0.003$  м, а третий и четвертый – при амплитуде  $s_0 = 0.005$  м перемещения основания. При этом соответственно первый и третий столбцы графиков относятся к значению  $p_0 = 3.0$  МПа, а второй и четвертый – к значению  $p_0 = 5.0$  МПа среднего давления в трубе. На первой строке графиков изображены зависимости динамической части прогиба от времени. Вторая и последующие строки графиков представляют соответственно фазовые траектории, спектры частот и отображения Пуанкаре изгибных колебаний. Из первой строки графиков видно, что при одном и том же значении среднего давления в трубе увеличение амплитуды перемещений основания приводит к увеличению амплитуд динамической составляющей прогиба. Кроме того, из сравнения первого и второго, третьего и четвертого графиков первой строки можно видеть, что при значении амплитуды перемещения основания  $s_0 = 0.003$  м с увеличением среднего давления в трубе происходит незначительный рост амплитуды динамической части прогиба, а при значении  $s_0 = 0.005$  м этот рост может быть значительным. При этом области, занятые фазовыми траекториями (вторая строка графиков), заметно расширяются. На графиках второй строки также отчетливо просматриваются по два притягивающих центра колебаний. Это свидетельствует об

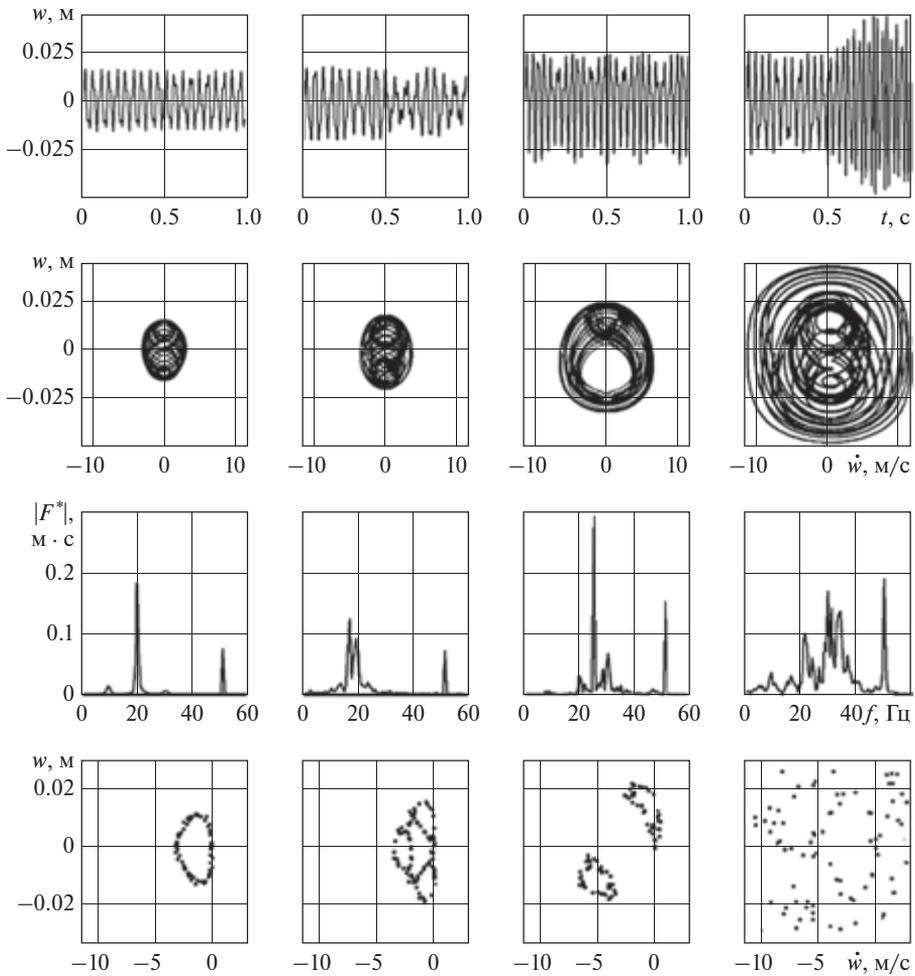


Рис. 3

усилении неперiodических колебаний трубопровода. Из спектров частот, изображенных на третьей строке графиков, следует, что изгибные колебательные движения трубы разделяются на колебания с частотой нелинейных собственных колебаний и с частотой перемещения основания (в принятом частном случае также и изменения внутреннего давления). Видно, что с увеличением амплитуды перемещения основания частота собственных изгибных колебаний трубопровода увеличивается. Последний результат можно объяснить взаимодействием собственных, параметрических и вынужденных колебаний трубопровода [15]. Такая связь подтверждается так-

же приближенным аналитическим решением (3.3). Кроме того, если на первом графике этой строки частоты еще локализованы, то на втором, третьем и четвертом графиках они постепенно принимают распределенный вид. Четвертая строка графиков представлена отображениями Пуанкаре. Можно видеть, что если на первом графике отображения лежат на замкнутом контуре, то на втором, третьем и четвертом графиках области отображений расширяются и носят все более беспорядочный характер. Это объясняется тем, что с увеличением амплитуды динамической части прогиба возрастает роль нелинейных членов в дифференциальном уравнении (2.7).

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные выводы параграфа следующие.

Приближенные аналитические значения амплитуды установившихся параметрических колебаний трубопровода в режиме главного резонанса и результаты численного интегрирования нелинейного уравнения находятся в качественном согласии.

В режиме главного резонанса увеличение амплитуды параметрических колебаний приводит к увеличению частоты собственных колебаний трубы.

При относительно малых значениях амплитуды перемещения основания увеличение среднего давления в трубопроводе приводит к незначительному росту амплитуды динамической части прогиба. С увеличением амплитуды перемещения основания этот рост может быть значительным. При этом области, занятые фазовыми траекториями и отображениями Пуанкаре, заметно расширяются.

Для принятых входных данных преобразование Фурье разделяет изгибные колебательные движения трубы на колебания с частотой собственных колебаний и с частотой перемещения основания (в принятом частном случае – изменения внутреннего давления).

Одновременное увеличение амплитуды перемещения основания и уменьшение разности между критическим и средним давлениями даже при небольшом значении амплитуды динамической части внутреннего давления может привести к хаотическому режиму колебаний трубопровода.

## § 4. ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННЕЙ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В результате взаимодействия внутреннего переменного или ударного давления и изменений кривизны осевой линии трубопровод совершает изгибные колебательные движения, которые происходят с ускорением. При определенных соотношениях между входными параметрами максимальное значение ускорения, например, средней точки пролета трубы, может достигать нескольких десятков величин ускорения гравитации. Ускоренные поперечные движения трубы могут быть обусловлены также другими механическими воздействиями. В общем случае ускоренного движения трубопровод испытывает силы сопротивления со стороны внешней сплошной и внутренней газожидкостной сред. При этом указанные силы принято учитывать путем прибавления к массе трубопровода внешней и внутренней присоединенных масс сред [1–3]. Величины присоединенных масс определяются из решения краевых задач взаимодействия трубы и среды.

Из опыта транспортировки газожидкостных сред по трубопроводам в них различают следующие структурные формы потоков: пузырьковую, пробковую, снарядную, вспененную, расслоенную и кольцевую [4]. Здесь же отмечено, что последняя форма течения смеси наиболее часто реализуется в трубопроводах, транспортирующих жирные нефтяные газы, и характеризуется большим содержанием газовой фазы. Приведены расчеты двухфазных газовых потоков в трубопроводных системах и теплообменниках. В [5] даны общие сведения о составе транспортируемого двухфазного газового конденсата, методы определения его основных параметров и обобщен опыт эксплуатации действующих магистральных трубопроводов.

В данном параграфе исследуется влияние внутренней присоединенной массы на нелинейные колебания участка трубы с газожидкостной средой, имеющей кольцевую структурную форму течения, под действием внутреннего переменного давления. В основе изложения параграфа лежит работа [6].

1. Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
3. Ильгамов М. А. Введение в нелинейную гидроупругость. М.: Наука. 1991. 200 с.
4. Чисхолм Д. Двухфазные течения в трубопроводах и теплообменниках: Пер. с англ. Пер. изд.: Великобритания. 1983. М.: Недра, 1986. 204 с.
5. Коршак А. А., Забазнов А. И., Новоселов В. В., Матросов В. И., Клюк Б. А. Трубопроводный транспорт нестабильного газового конденсата. М.: ВНИИОЭНГ, 1994. 224 с.
6. Шакирьянов М. М., Юлмухаметов А. А. Влияние внутренней присоединенной массы на нелинейные колебания трубопровода // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2020. № 2. С. 10–17.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуются колебания участка двухопорного трубопровода с заключенной в нем газожидкостной средой (рис. 1). Принимается шарнирное крепление трубопровода к обоим опорам. Одна из опор неподвижна относительно основания, другая может скользить по нему. При этом скользящая опора прикреплена к основанию с помощью линейно-упругих элементов. В статическом состоянии труба изогнута внутренним постоянным давлением, собственным весом и весом транспортируемого продукта. В момент времени  $t$  давление  $p_i$  в газожидкостной среде становится переменным и трубопровод начинает совершать изгибные колебания в вертикальной плоскости. Сплошная среда в трубопроводе состоит из несжимаемых жидкой и газовой фаз. Предполагается, что течение газа в осевом направлении происходит внутри жидкой круговой цилиндрической области с внутренним  $R_1$  и наружным  $R$  радиусами. Изменение толщины цилиндрического слоя из-за веса жидкости не учитывается. Это может быть приемлемо, когда труба располагается вертикально или в условиях невесомости и малой гравитации. При равномерном поступательном движении, направленном перпендикулярно оси трубы, размер внутреннего радиуса и форма жидкой области сохраняются. С ускорением движения трубопровода из-за течения жидкости в его поперечных сечениях указанные характеристики изменяются. Вследствие этого происходит изменение давления на внутренней поверхности трубы, обуславливающее эффект ее присоединенной массы.

Кроме того, на поверхность действует давление  $p_i$ , поддерживаемое источником давления (насосом).

Рассмотрим плоскую задачу об определении присоединенной массы несжимаемой идеальной жидкости плотностью  $\rho_0$  в трубе с внутренним радиусом  $R$  (рис. 2, слева). Здесь  $r$  и  $\theta$  – полярные координаты. Жидкость занимает кольцевую область  $R_1 \leq r \leq R$ . Недеформируемая в поперечном сечении труба движется с ускорением  $a = \partial^2 W / \partial t^2$ , где  $W$  – ее перемещение по вертикальной оси  $z$ . Плотность газа по сравнению с плотностью жидкости

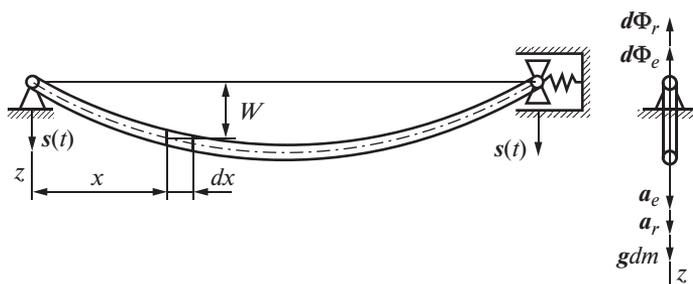


Рис. 1. Расчетная схема трубопровода

## Статика и динамика трубопроводов

предполагается малой. Осевым движением жидкости, обусловленным ее колебаниями в поперечном направлении, пренебрегаем.

Возмущения в кольцевой области, вызванные движением трубы, относительно потенциала скорости  $\phi$  описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2.1)$$

Компоненты скорости  $V_r$ ,  $V_\theta$  и возмущение давления  $p$  определяются формулами

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad V_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta}, \quad p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Перемещение трубы в радиальном направлении  $W_r = W \cos \theta$ . Поэтому граничными условиями являются

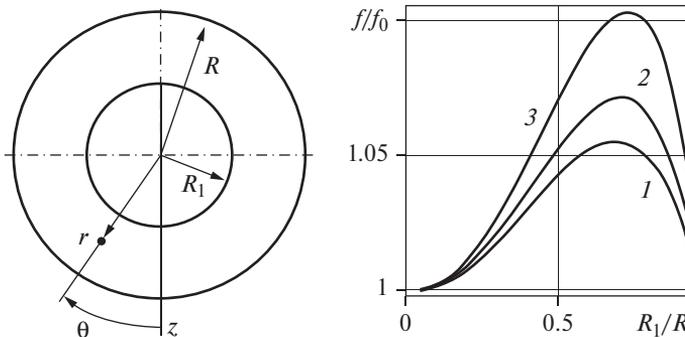
$$V_r = \partial W_r / \partial t \quad (r = R), \quad p = 0 \quad (r = R_1). \quad (2.3)$$

Решение уравнения (2.1) имеет вид:

$$\phi = (A_n r^{-n} + B_n r^n) \cos n\theta. \quad (2.4)$$

С учетом (2.2) из условий (2.3) имеем  $A_n = 0$ ,  $B_n = 0$  для гармоник  $n \geq 2$ , а для  $n = 1$  уравнения

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{R^2} - B_1 + \frac{\partial W}{\partial t} &= 0, \\ \frac{dA_1}{dt} + R_1^2 \frac{dB_1}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$



**Рис. 2.** Слева – поперечное сечение трубы ( $0 \leq r \leq R_1$  – газовая фаза,  $R_1 \leq r \leq R$  – жидкая фаза); справа – зависимости отношения  $f/f_0$  от  $R_1/R$  для трех значений плотности  $\rho_0$  жидкости (1 – 700, 2 – 1000, 3 – 1800 кг/м³)

Из (2.5) получаем

$$\frac{dA_1}{dt} = -\frac{R_1^2 a}{(1 + R_1^2 / R^2)}, \quad \frac{dB_1}{dt} = \frac{a}{(1 + R_1^2 / R^2)}. \quad (2.6)$$

В соответствии с (2.2), (2.4), (2.6) возмущения давления в жидкости, вызванные движением трубы, даются формулой

$$p = -\frac{\rho_0 a (1 - R_1^2 / r^2)}{(1 + R_1^2 / R^2) r \cos \theta}. \quad (2.7)$$

Как следует из (2.7), колебания давления происходят так, что линия  $\theta = -\pi/2, \pi/2$  является узловой. При  $\theta = 0, \pi$  располагаются пучности колебаний. Проекция  $\Phi_z$  равнодействующей давления на поверхности трубы  $r = R$  единичной длины равна

$$\begin{aligned} \Phi_z &= 2 \int_0^\pi p \cos \theta (R d\theta) = -m'_0 a, \\ m'_0 &= \frac{m_0 R^2}{(R^2 + R_1^2)}, \quad m_0 = \pi \rho_0 (R^2 - R_1^2), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $m'$  – представляет эффективную присоединенную массу жидкости. Если жидкость занимает половину объема ( $2\pi R_1^2 = \pi R^2$ ), то соответствующая присоединенная масса равна двум третьим частям массы жидкости, заключенной в этом объеме.

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний трубы, учитывающее взаимодействие внутреннего давления и изменения кривизны осевой линии трубы, имеет вид (§ 2, 3):

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \left[ F p_i - \alpha \int_0^L \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= g(m + m_0) + \Phi_z, \\ m = \pi \rho [(R + h)^2 - R^2], \quad J = \frac{\pi}{4} [(R + h)^4 - R^4], \\ \lambda = \frac{Eh}{CL}, \quad \alpha = \frac{\pi EhR}{(1 + \lambda)L}, \quad F = \pi R^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь  $E$  и  $\rho$ ,  $L$ ,  $h$  – модуль Юнга и плотность материала, длина, толщина стенки трубы.

Функция прогиба, удовлетворяющая условиям шарнирного крепления трубопровода к опорам, принимается в виде:

$$W(x, t) = [W_0 + w(t)] \sin \beta x, \quad \beta = \pi/L, \quad (2.10)$$

где  $W_0$  и  $w(t)$  – амплитуды статической и динамической составляющих прогиба средней точки пролета. Изменение давления в газовой части среды задается по гармоническому закону

$$p_i = p_0 + p_a \sin \Omega t, \quad (2.11)$$

где  $\Omega$ ,  $p_0$  и  $p_a$  – круговая частота, среднее давление и его амплитуда колебаний.

### 3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Подставляя выражения (2.8) и функции (2.10), (2.11) в уравнение (2.9) и применяя метод Бубнова–Галеркина, имеем

$$\begin{aligned} M\ddot{w} + EJ\beta^4(W_0 + w) - [F(p_0 + p_a \sin \Omega t) - \\ - \frac{1}{2}\alpha\beta^2 L(W_0 + w)^2] \beta^2(W_0 + w) = \\ = \frac{4gM_0}{\pi}, \quad M = m + m', \quad M_0 = m + m_0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь и далее точки над буквами обозначают производные по времени  $t$ ;  $M$ ,  $M_0$  – суммарные массы трубопровода и жидкости с учетом и без учета ее течения в поперечных сечениях.

Полагая в (3.1)  $w(t) \equiv 0$ ,  $p_a \equiv 0$ , получаем кубическое уравнение для определения статической составляющей  $W_0$  прогиба

$$W_0^3 + \frac{2F(p_* - p_0)}{\alpha\beta^2 L} W_0 - \frac{8M_0 g}{\pi\alpha\beta^4 L} = 0, \quad p_* = \frac{\beta^2 EJ}{F}. \quad (3.2)$$

Из этого уравнения видно, что, если  $g=0$ , то при  $p_0 \leq p_*$  и  $p_0 > p_*$  статический прогиб соответственно равен

$$W_0 = 0 \text{ и } W_0 = \sqrt{2F(p_0 - p_*) / (\alpha\beta^2 L)}.$$

Кроме того, если в (3.2)  $g \neq 0$  и  $p_0 = p_*$ , то  $W_0 = 2\sqrt[3]{M_0 g / (\pi\alpha\beta^4 L)}$ .

Уравнение (3.2) без первого члена имеет неограниченно возрастающее решение при значении среднего давления  $p_0 = p_*$ . Поэтому значение последнего может быть названо критическим. Из уравнений (3.1), (3.2) следует

$$\ddot{w} + \left( k^2 - \frac{\beta^2 F p_a}{M} \sin \Omega t \right) w + \frac{\alpha \beta^4 L}{2M} (3W_0 w^2 + w^3) = \frac{\beta^2 F p_a W_0}{M} \sin \Omega t, \quad (3.3)$$

$$k^2 = \frac{\beta^2 [2F(p_* - p_0) + 3\alpha \beta^2 L W_0^2]}{2M}.$$

Из (3.3) видно, что колебательные движения трубопровода в общем случае складываются из взаимодействующих вынужденных и параметрических колебаний. Кроме того, можно видеть, что квадрат круговой частоты  $k$  собственных колебаний трубопровода с транспортируемым продуктом обратно пропорционален суммарной массе  $M$ .

Принимаются следующие начальные условия:

$$w = 0, \quad \dot{w} = 0. \quad (3.4)$$

Нелинейная задача Коши (3.3), (3.4) решалась численно методом Рунге–Кутты. Далее к этому решению применялись дискретное преобразование Фурье и отображение Пуанкаре.

Для анализа динамики трубопровода рассмотрим также приближенное аналитическое решение уравнения (3.3). При установившихся вынужденных колебаниях в окрестности линейного резонанса ( $\Omega \approx \omega$ ) имеем

$$w = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t, \quad \omega = 2\pi f, \quad (3.5)$$

где  $f$  – частота собственных колебаний трубы. Методом гармонического баланса получаем  $b_1 = 0$ , а относительно  $a_1$  уравнение

$$3\alpha \beta^4 L a_1^3 + 8M(k^2 - \omega^2)a_1 - 8\beta^2 F p_a W_0 = 0. \quad (3.6)$$

Как следует из (3.2),  $W_0 = 0$  при  $g = 0$  и  $p_0 = p_*$ . Тогда из (3.6) имеем

$$a_1 = 2\omega \sqrt{2M / (3\alpha \beta^4 L)}.$$

Отметим, что в общем случае решения (3.2), (3.6) определялись численно.

#### 4. ЗАВИСИМОСТЬ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА ОТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СО СЛОЕМ ЖИДКОЙ ФАЗЫ

В результате перетекания частиц жидкой фазы в поперечных сечениях при колебаниях происходит изменение динамических характеристик трубопровода. Одной из таких характеристик является частота собственных колебаний. Из уравнения (3.3) можно видеть, что отношение квадратов собственных круговых частот колебаний трубопровода с учетом и без учета

изменений внутренней присоединенной массы жидкости обратно пропорционально массам  $M_0$  и  $M$ . Поэтому квадрат отношения собственных частот запишется формулой

$$\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 = \frac{(1 + h/R)^2 - 1 + \rho_0/\rho(1 - y^2)}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 - \frac{1 + \rho_0}{\rho(1 - y^2)}(1 + y^2)^{-1}}, \quad y = \frac{R_1}{R}, \quad (4.1)$$

где  $f_0$  – частота собственных колебаний, определенная без учета течения жидкой фазы в поперечных сечениях трубопровода. Видно, что отношение частот (4.1), в свою очередь, зависит от отношений трех пар параметров: плотностей  $\rho_0$  и  $\rho$ , толщины  $h$  и радиуса  $R_1$  к радиусу  $R$  трубы. Формула (4.1) позволяет сделать вывод о том, что частота собственных колебаний не изменяется, если трубопровод полностью заполнен жидкостью ( $y = 0$ ). Функция (4.1) имеет максимум при значении  $y_*$  отношения радиусов  $R_1$  и  $R$

$$y_*^2 = \frac{\frac{\rho_0}{\rho} + \frac{h(h + 2R)}{R^2} - \sqrt{\frac{2h(h + 2R)}{R^2} \left[ \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{h(h + 2R)}{R^2} \right]}}{\frac{\rho_0}{\rho} - \frac{h(h + 2R)}{R^2}}.$$

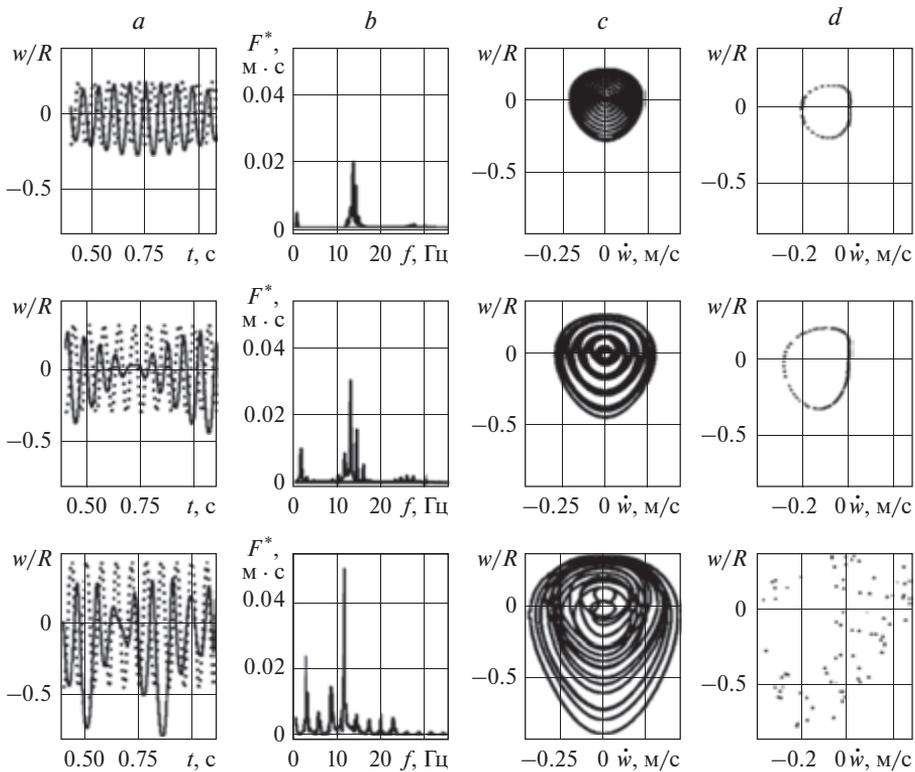
Расчеты проведены для стальной трубы, заполненной газоконденсатной средой, с параметрами:  $L = 1.2$  м,  $R = 0.01$  м,  $h = 0.0005$  м,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $C = 64.0$  МПа,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_0 = 700, 1000, 1800$  кг/м<sup>3</sup>,  $p_0 = 7.38$  МПа,  $p_a = 0.02, 0.06, 0.18, 0.9$  МПа,  $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup>. При принятых параметрах критическое давление  $p_* = 7.38$  МПа. Собственные частоты  $f$  и  $f_0$ : 14.3 и 13.7 Гц. Статическая составляющая  $W_0$  прогиба при плотности 1000 кг/м<sup>3</sup> жидкой фазы составляет 0.00502 м. На рис. 2 (справа) сплошными линиями изображены зависимости отношения (4.1) от  $R_1/R$  для трех значений плотности  $\rho_0$  жидкой фазы. Можно отметить, что с увеличением плотности жидкой фазы транспортируемого продукта отношение частот (4.1) собственных колебаний трубы увеличивается. Максимумы на графиках достигаются при значениях  $y_*$ , соответственно равных 0.701, 0.717 и 0.749.

## 5. ЗАВИСИМОСТЬ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА ОТ АМПЛИТУДЫ И ЧАСТОТЫ ПЕРЕМЕННОГО ДАВЛЕНИЯ

На рис. 3, 4 сплошными линиями нанесены результаты численного интегрирования, а точечными линиями – результаты приближенного аналитического решения уравнения (4.1). Разные столбцы графиков на рис. 3, 4 относятся к разным зависимостям, которые указаны сверху. Столбцы (а)

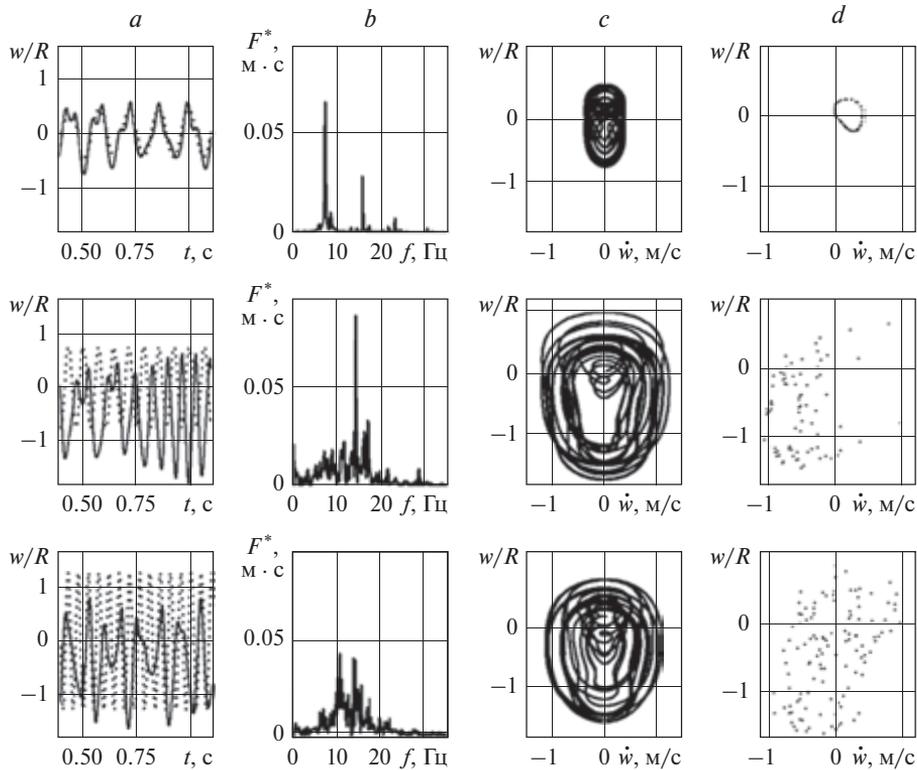
графиков представляют зависимости отношения динамической составляющей прогиба  $w$  к внутреннему радиусу  $R$  от времени  $t$ , с. Столбцы (б) графиков – спектры частот. Они являются результатом применения дискретного преобразования Фурье к численному решению задачи Коши (3.3), (3.4). На спектрах частот по вертикальным осям отложены модули комплексных амплитуд  $F^*$ , а по горизонтальным осям – частоты колебаний. Столбцы (в) и (г) графиков соответственно – фазовые траектории и отображения Пуанкаре изгибных колебаний. Здесь по вертикальным осям отложены отношения  $w/R$ , а по горизонтальным – скорости  $\dot{w}$  изгибных перемещений. Период обработки фазовых точек при отображении Пуанкаре  $\tau = 1/f$ . Рис. 3 и 4 построены для различных значений параметров переменной части давления. Графики на рис. 3 – результаты вычислений при частоте возбуждения  $f = 14.3$  Гц и амплитудах давления  $p_a = 0.02, 0.06$  и  $0.18$  МПа, а графики на рис. 4 – при частотах возбуждения  $f = 7.3, 14.3$  и  $21.3$  Гц и амплитуде давления  $p_a = 0.9$  МПа. На столбцах рисунков значениям каждого переменного параметра в порядке перечисления сверху вниз соответствуют первый, второй и третий фрагменты графиков. Для принятых входных данных частоты собственных колебаний трубопровода с учетом и без учета внутренней присоединенной массы отличаются на 4.38%.

Из сравнения фрагментов на первых столбцах рис. 3, а и 4, а видно, что с увеличением амплитуды и частоты переменной части давления происходит увеличение амплитуды изгибных перемещений трубы. Это можно объяснить увеличением притока механической энергии, передаваемой трубопроводу от газожидкостной среды. Кроме того, взаимное расположение сплошных и точечных линий на графиках позволяет сделать вывод о качественном согласии результатов численного и приближенного аналитического моделирования. На спектрах частот рис. 3, представленных вторым столбцом графиков, видна следующая закономерность. Наибольший вклад в колебательные движения трубы вносят колебания с основной частотой 14.3 Гц переменного давления. Если при  $p_a = 0.02$  МПа спектр частот имеет распределенный вид в окрестности основной частоты, то при  $p_a = 0.06$  и  $0.18$  МПа преобразование Фурье выделяет колебания как с основной, так и с дробными частотами. С увеличением амплитуды  $p_a$  происходит рост модулей комплексных амплитуд колебаний с дробными частотами. Кроме того, из графиков рис. 3 (второй столбец, второй фрагмент) видно, что при дальнейшем увеличении амплитуды динамической части давления ( $p_a = 0.9$  МПа) спектр частот принимает сплошной вид. При зрительном сравнении всех фрагментов второго столбца графиков рис. 3 между собой можно видеть, что они заметно отличаются друг от друга. На первом фрагменте данного столбца отчетливо видно, что преобразование Фурье выделяет два основных колебательных движения: вынужденные колебания с частотой 7.3 Гц и параметрические колебания с частотой 16 Гц. Второй и третий фрагменты второго столбца рис. 3 уже имеют сплошной вид.



**Рис. 3.** Зависимости динамической составляющей прогиба  $w$  от времени  $t$ , спектры частот, фазовые траектории и отображения Пуанкаре изгибных колебаний трубы для трех значений амплитуды переменной части давления

Фазовые траектории и отображения Пуанкаре динамического прогиба средней точки пролета трубы на рисунках приведены соответственно третьими и четвертыми столбцами графиков. Из третьих столбцов рис. 3 (все фрагменты) и рис. 4 (второй фрагмент) можно видеть, что с увеличением амплитуды  $p_a$  области, занятые фазовыми траекториями, расширяются. При относительно небольших значениях (0.02, 0.06, 0.18 МПа) амплитуды  $p_a$  (рис. 3, четвертый столбец графиков) фазовые траектории имеют один центр притяжения. Однако уже при  $p_a = 0.9$  МПа (рис. 4, четвертый столбец графиков) на фазовой плоскости заметно формирование двух и более центров притяжения. Из четвертых столбцов графиков рис. 3 и рис. 4 следует, что при  $p_a = 0.02$ , 0.06 МПа,  $f = 14.3$  Гц (рис. 3, первый и второй фрагменты) и  $p_a = 0.9$  МПа,  $f = 7.3$  Гц (рис. 4, первый фрагмент) отображения Пуанкаре лежат на одном замкнутом контуре (его границы во втором случае значительно расширены). При  $p_a = 0.18$  МПа,  $f = 14.3$  Гц (рис. 3, четвертый столбец, третий фрагмент)



**Рис. 4.** Зависимости динамической составляющей прогиба  $w$  от времени  $t$ , спектры частот, фазовые траектории и отображения Пуанкаре изгибных колебаний трубы для трех значений частоты переменной части давления

и  $p_a = 0.9$  МПа,  $f = 14.3, 21.3$  Гц (рис. 4, четвертый столбец, второй и третий фрагменты) картины Пуанкаре имеют беспорядочное распределение. Последнее обстоятельство в совокупности с формированием двух и более центров притяжения на фазовой плоскости характеризует переход рассматриваемой механической системы в режим хаотических колебаний.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При изгибных колебаниях трубопровода с кольцевой формой газожидкостной среды происходит перетекание жидкой фазы в поперечных сечениях. Это обуславливает изменение присоединенной массы жидкости в зависимости от поперечного движения трубы. Эта эффективная присоединенная масса меньше массы в кольцевой области, занятой жидкостью.

## Статика и динамика трубопроводов

Отношение частот собственных колебаний с учетом и без учета эффективной присоединенной массы зависит от отношений плотностей жидкости и материала, толщины стенки и внутреннего радиуса кольцевой области жидкой фазы к радиусу трубы. При полном заполнении трубы жидкостью указанные массы равны между собой.

Отношение частот собственных колебаний трубопровода с учетом и без учета эффективной присоединенной массы увеличивается с увеличением плотности жидкой фазы.

Увеличение амплитуды и частоты переменного давления в трубе приводят к увеличению амплитуд динамической части прогиба.

При определенных соотношениях между входными параметрами возможен переход к хаотическому режиму нелинейных колебаний трубопровода.

Результаты численного и приближенного аналитического моделирования находятся в качественном согласии.

## § 5. ВНЕШНЯЯ И ВНУТРЕННЯЯ ПРИСОЕДИНЕННЫЕ МАССЫ ТРУБОПРОВОДА

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Роль трубопроводных систем в хозяйстве страны трудно переоценить: они широко применяются в нефтегазовой и химической промышленности, атомной энергетике, авиационной и ракетно-космической технике и многих других машинах и аппаратах. Транспортировка нефти, газового конденсата, продуктов нефтепереработки или газа по трубопроводам осуществляется работой насосных станций, которые при этом создают внутреннее переменное или ударное давление. В результате взаимодействия этого давления и изменений кривизны осевой линии трубопровод может совершать изгибные колебательные движения, которые происходят с ускорением. При определенных соотношениях между входными параметрами максимальное значение ускорения, например, средней точки пролета трубы, может достигать нескольких десятков величин ускорения гравитации. Ускоренные поперечные движения трубы могут быть обусловлены также другими механическими воздействиями. В общем случае ускоренного движения трубопровод испытывает силы сопротивления со стороны внешней сплошной и внутренней газожидкостной сред. При этом указанные силы принято учитывать путем прибавления к массе трубопровода внешней и внутренней присоединенных масс сред [1–3]. Величины присоединенных масс определяются из решения краевых задач взаимодействия трубы с возмущенными ее ускоренным движением средами.

Экспериментальное исследование влияния присоединенной массы транспортируемой жидкости на колебания трубы проведено в [4]. Методом граничных элементов в [5] выполнены расчеты присоединенных масс кругового и эллиптического цилиндров, плавающих на границе раздела двухслойной невесомой жидкости конечной глубины. Точное решение задачи об определении внутренней присоединенной массы жидкости круговой деформируемой цилиндрической оболочки получено в [6]. В [7] приведены выражения присоединенных масс для различных судостроительных

- 
1. Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.
  2. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
  3. Ильгамов М. А. Введение в нелинейную гидроупругость. М.: Наука, 1991. 200 с.
  4. Sivak V. F., Sivak V. V. Experimental investigation into the vibrations of shells of revolution with added masses // Int. Appl. Mech. 2002. V. 38. No 5. P. 623–627.
  5. Стурова И. В. Присоединенные массы цилиндра, пересекающего границу раздела двухслойной невесомой жидкости конечной глубины // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 4. С. 76–82.
  6. Горелов Д. Н. Присоединенные массы жидкости, колеблющейся внутри кругового цилиндра при деформации его стенок // Вестн. Ом. ун-та. 2014. № 2. С. 17–20.
  7. Короткин А. И. Присоединенные массы судостроительных конструкций: справ. СПб.: Мор. Вест., 2007. 448 с.

конструкций. Влияние присоединенной массы текущей жидкости на устойчивость композитной цилиндрической оболочки изучено в [8]. Обширный обзор исследований по вопросам колебаний трубопроводных систем, транспортирующих жидкость и газ, приведен в [9].

В [10] представлены расчеты двухфазных газожидкостных потоков в трубопроводах и теплообменниках. Рассмотрены разнообразные структурные формы потоков, зависящие от процентного содержания в них газа и жидкости, их физических свойств, диаметра и угла наклона трубы к горизонту. Среди отмеченных форм течения наиболее вероятной является кольцевая форма, которая реализуется в трубопроводах, транспортирующих жирные нефтяные газы. В [11] даны общие сведения о составе нестабильного газового конденсата, методы определения его основных параметров и обобщен опыт эксплуатации действующих магистральных трубопроводов.

В данном параграфе по [12] излагается решение задачи об определении суммарной присоединенной массы сплошных сред, взаимодействующих с трубопроводом: окружающей и транспортируемой им газожидкостной, когда последняя имеет кольцевую форму течения.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается ускоренное поступательное движение бесконечно длинного недеформируемого трубопровода с заключенной в нем несжимаемой газожидкостной средой. Транспортируемая среда в трубопроводе состоит из несжимаемых газовой и жидкой фаз с плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Круговая труба с внутренним радиусом  $R$  окружена несжимаемой жидкостью плотности  $\rho_3$ . Предполагается, что течение газа в осевом направлении происходит внутри жидкой круговой цилиндрической области с внутренним  $R_1$  и наружным  $R$  радиусами. Изменениями формы и толщины цилиндрического слоя из-за веса газожидкостной среды пренебрегается. Это может быть приемлемо, когда труба располагается вертикально или в условиях невесомости и малой гравитации. При равномерном движении трубопровода суммарная сила сопротивления внешней и внутренней сред равна нулю. С ускорением движения трубопровода давления на его внешней и внутренней поверхностях изменяются. Вследствие этого возникает сопротивление движению трубы, обуславливающее эффект присоединенной массы.

8. Kovalchuk P.S., Pelykh V.A., Kruk L.A. Stability of composite cylindrical shells with added mass interacting with the internal fluid flow // Intern. Appl. Mech. 2014. V. 50. No 5. P. 566–574.
9. Li S., Karney B. W., Liu G. FSI research in pipeline systems – A review of the literature // J. of Fluids and Structures. 2015. V. 57. P. 277–297.
10. Chisholm D. Two-phase Flow in Pipelines and Heat Exchangers. London–NewYork, 1983. 304 p.
11. Коршаков А. А., Забазнов А. И., Новоселов В. В., Матросов В. И., Крюк Б. А. Трубопроводный транспорт нестабильного газового конденсата. М.: ВНИИОЭНГ, 1994. 224 с.
12. Шакирьянов М. М., Юлмухаметов А. А. Внешняя и внутренняя присоединенные массы трубопровода // Известия Уфимского научного центра РАН. 2020. № 3. С. 12–16.

На рис. 1 изображено поперечное сечение трубопровода. Здесь жидкая фаза газожидкостной среды занимает кольцевую ( $R_1 \leq r \leq R$ ), а газовая – круговую ( $0 \leq r \leq R_1$ ) области;  $r$  и  $\theta$  – полярные координаты. Сплошная среда, окружающая трубу с толщиной стенки  $h$ , ограничена пределами  $R + h \leq r < \infty$ . Недеформируемый в поперечном сечении трубопровод движется с ускорением  $a = \partial^2 W / \partial t^2$ , где  $W$  – его перемещение по вертикальной оси  $z$ .

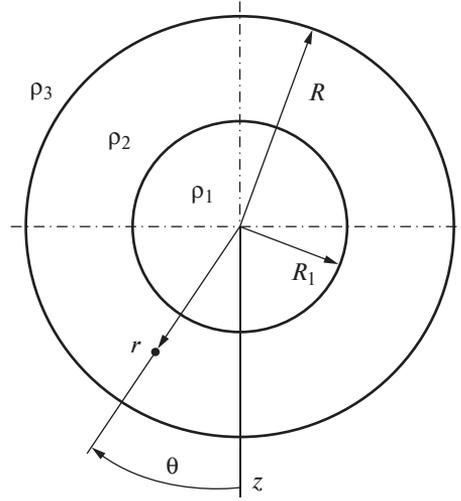


Рис. 1. Поперечное сечение трубы

Возмущенные движения внутренних газовой, жидкой и внешней сплошной сред, вызванные ускорением трубопровода, описываются уравнениями [3]

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2} + \frac{\partial \varphi_i}{r \partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{r^2 \partial \theta^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.1)$$

где  $\varphi_i$  – потенциалы скоростей в указанных средах.

Возмущения компонент скоростей  $V_{ri}$ ,  $V_{\theta i}$  и давления  $p_i$  определяются формулами

$$V_{ri} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial r}, \quad V_{\theta i} = \frac{\partial \varphi_i}{r \partial \theta}, \quad p_i = -\rho_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Перемещения трубы в радиальном и окружном направлениях  $W_r = \cos \theta$ ,  $W_\theta = W \sin \theta$ . В той же форме принимаются компоненты перемещения  $W_r' = W' \cos \theta$ ,  $W_\theta' = W' \sin \theta$  частиц сред на границе  $r = R_1$ . Поэтому граничными условиями являются равенства скоростей по нормали и давлений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}, \quad p_1 = p_2 \quad \left( r = R_1 + W_r', \quad \theta_* = \theta + W_r' / R_1 \right), \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} &= \frac{\partial W_r}{\partial t} \quad \left( r = R + W_r, \quad \theta_* = \theta + W_r / R_1 \right), \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} &= \frac{\partial W_r}{\partial t} \quad \left( r = R + h + W_r, \quad \theta_* = \theta + W_r / (R + h) \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решения уравнений (2.1) имеют вид

$$\varphi_1 = A_n r^n \cos n\theta, \quad \varphi_2 = \left( C_n r^{-n} + D_n r^n \right) \cos n\theta, \quad \varphi_3 = E_n r^{-n} \cos n\theta. \quad (2.4)$$

Сохраняя только первые члены в разложении в ряд Тейлора, условия (2.3) запишем в виде [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + W_r' \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{W_\theta'}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial \theta} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + W_r' \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} + \frac{W_\theta'}{R_1} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial \theta} \quad (r = R_1), \\ p_1 + W_r' \frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{W_\theta'}{R_1} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} &= p_2 + W_r' \frac{\partial p_2}{\partial r} + \frac{W_\theta'}{R_1} \frac{\partial p_2}{\partial \theta} \quad (r = R_1), \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + W_r \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} + \frac{W_\theta}{R} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial \theta} &= \frac{\partial W_r}{\partial t} \quad (r = R), \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} + W_r \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r^2} + \frac{W_\theta}{(R+h)} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial \theta} &= \frac{\partial W_r}{\partial t} \quad (r = R+h). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Оценки членов с множителями  $W_r'$ ,  $W_\theta'$ ,  $W_r$ ,  $W_\theta$  проведем для их максимальных значений, т.е.  $W'$  и  $W$  (при  $\theta = 0, \pi$ ) в случае гармоники  $n = 1$  в решениях (2.4). Отношение второго члена к первому в правой части первого условия с использованием выражения для  $\varphi_2$  из (2.4) имеет порядок  $2W'/R_1$ . Из третьего условия (2.5) также можно показать, что указанное отношение имеет порядок  $2W/R$ , а из последнего  $-2W/(R+h)$ . В дальнейшем принимаем, что эти отношения малы по сравнению с единицей. При этом условия (2.5) имеют вид (2.3), но при  $r = R_1$ ,  $r = R$ ,  $r = R+h$ ,  $\theta_* = \theta$ .

### 3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

С учетом (2.2) из условий (2.3) имеем  $A_n = C_n = D_n = E_n = 0$  для гармоник  $n \geq 2$ , а для гармоники  $n = 1$  — следующие уравнения:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{C_1}{R_1^2} + D_1, \quad \rho_1 \frac{dA_1}{dt} = \rho_2 \left( \frac{1}{R_1^2} \frac{dC_1}{dt} + \frac{dD_1}{dt} \right), \\ \frac{1}{R^2} C_1 + D_1 &= \frac{dW}{dt}, \quad -\frac{E_1}{(R+h)^2} = \frac{dW}{dt}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из системы (3.1) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= R_1^2 \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{dD_1}{dt}, \\ \frac{dD_1}{dt} &= R_2 \frac{\rho_1 + \rho_2}{R^2(\rho_1 + \rho_2) - R_1^2(\rho_1 - \rho_2)}, \\ \frac{dE_1}{dt} &= -(R+h)^2 a. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В соответствии с выражениями (2.2), (2.4), (3.2) возмущения давления в областях с жидкой фазой газожидкостной и обтекающей трубу сплошной средой даются формулами

$$p_2 = -\rho_2 \left( \frac{R_1^2}{r} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} + r \right) \frac{R^2(\rho_1 + \rho_2)}{R^2(\rho_1 + \rho_2) - R_1^2(\rho_1 - \rho_2)} a \cos \theta, \quad (3.3)$$

$$p_3 = -\frac{\rho_3}{r} (R + h)^2 a \cos \theta.$$

Проекция  $\Phi_z$  равнодействующей сил давления на поверхностях трубы единичной длины равна

$$\Phi_z = -m_s a, \quad m_s = \pi \left( \frac{\rho_2 R^2 (R^2(\rho_1 + \rho_2) - R_1^2(\rho_1 - \rho_2))}{R^2(\rho_1 + \rho_2) + R_1^2(\rho_2 - \rho_1)} + \rho_3 (R + h)^2 \right), \quad (3.4)$$

где  $m_s$  – представляет эффективную присоединенную массу внешней и внутренней сред.

Если не учитывать перетекание газа и жидкости в поперечных сечениях трубы, то суммарная присоединенная масса сред определяется формулой

$$m_* = \pi (\rho_1 R_1^2 + \rho_2 (R^2 - R_1^2) + \rho_3 (R + h)^2). \quad (3.5)$$

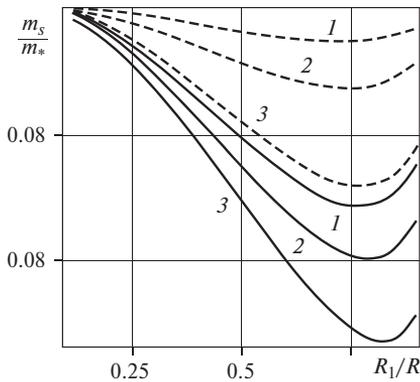
Тогда отношение присоединенных масс (3.4) и (3.5) запишется в виде

$$\frac{m_s}{m_*} = \frac{1 - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} y^2 + \frac{\rho_3}{\rho_2} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}{1 - y^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) + \frac{\rho_3}{\rho_2} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}, \quad y = \frac{R_1}{R}. \quad (3.6)$$

Из (3.6) видно, что при  $\rho_1 = \rho_2$  отношение  $m_s/m_* = 1$ ; при  $\rho_1, \rho_3 \ll \rho_2$   $m_s/m_* = 1/(1 + y^2)$ .

#### 4. ВЫЧИСЛЕНИЯ И ВЫВОДЫ

Расчеты проведены для трубы, заполненной газоконденсатной средой, с параметрами:  $R = 0.257$  м,  $h = 0.008$  м,  $\rho_1 = 100, 400$ ,  $\rho_2 = 700, 1000, 1800$ ,  $\rho_3 = 1.25$  кг/м<sup>3</sup>. Результаты вычислений для принятых двух значений плотности газовой фазы и трех значений плотности жидкой фазы внутренней среды трубопровода представлены на рис. 2 в виде графических зависимостей отношения (3.6) от отношения  $R_1/R$  радиусов.



**Рис. 2.** Зависимости отношений  $m_s/m_*$  присоединенных масс от отношений  $R_1/R$  радиусов

с уменьшением толщины жидкой области интенсивность перетекания частиц в поперечных сечениях трубопровода сначала увеличивается, затем становится максимальной и далее несколько уменьшается. Кроме того, можно видеть, что увеличение плотности  $\rho_2$  жидкой фазы внутренней среды приводит к значительному уменьшению минимальных значений функции (3.6). При этом минимумы функции сдвигаются в сторону увеличения отношения  $R_1/R$ . Из сравнения взаимного расположения соответствующих штриховых и сплошных линий можно сделать вывод о том, что с увеличением плотности  $\rho_1$  газовой фазы газожидкостной среды происходит значительное увеличение отношения (3.6). В предельном случае, когда  $\rho_1 = \rho_2$ , это отношение равно единице.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ результатов вычислений позволяет сделать следующие выводы.

Отношение присоединенных масс жидкости с учетом и без учета перетекания частиц газожидкостной среды в поперечных сечениях является функцией плотностей сред и геометрических размеров трубы.

С увеличением плотности газовой фазы внутренней среды функция отношения присоединенных масс увеличивается. При равенстве плотностей газовой и жидкой фаз суммарная присоединенная масса не изменяется.

Увеличение плотности жидкой фазы внутренней среды приводит к большему уменьшению функции отношения присоединенных масс. При этом минимумы функции сдвигаются в сторону уменьшения толщины жидкого слоя.

При пренебрежимо малых значениях отношения плотностей внешней и внутренней жидкой сред приближенно можно считать, что эффективная присоединенная масса полностью определяется перетеканием частиц транспортируемого продукта в поперечных сечениях трубопровода.

Сплошными линиями нанесены результаты расчетов при значении плотности  $\rho_1 = 400 \text{ кг/м}^3$ , а штриховыми – при значении плотности  $\rho_1 = 100 \text{ кг/м}^3$ . Цифрами 1, 2, 3 на графиках обозначены кривые, которые в указанном выше порядке перечисления относятся к трем значениям плотности  $\rho_2$ . Из рис. 2 видно, что с увеличением отношения  $R_1/R$  радиусов при сохранении значений остальных параметров отношения  $m_s/m_*$  присоединенных масс уменьшаются, достигают минимумов и далее незначительно увеличиваются. Это свидетельствует о том, что

## § 6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Теория и методы решения задач взаимодействия трубопроводов и шлангов с внутренним и внешним потоками жидкости или воздуха рассмотрены в монографии [1]. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ, исследованы в [2]. В [3] изучены нелинейные колебания консольного трубопровода, транспортирующего жидкость, механизм возникновения хаотических режимов. Параметрические колебания участка трубопровода изучены в [4]. Теоретическое и экспериментальное исследование вынужденных и параметрических изгибных колебаний трубы с внутренним потоком жидкости выполнено в [5, 6]. Влияние внешнего и внутреннего воздействия на изгибные колебания трубы, транспортирующей жидкость со сверхкритической скоростью, изучено в [7]. В [8] представлен широкий обзор литературы, посвященной исследованию динамических явлений в трубопроводных системах.

Взаимодействию вынужденных и параметрических колебаний трубопровода рассмотрено в [9]. В настоящем параграфе дается изложение результатов этого исследования.

### 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются изгибные колебания трубопровода под действием внутреннего переменного давления и горизонтального движения опор. Трубопровод заполнен идеальной несжимаемой жидкостью и шарнирно закреплен на двух опорах. Одна из опор ( $x = 0$ ) неподвижна относительно основания, а другая ( $x = L$ ) может скользить по нему. При этом скользящая опора прикреплена к основанию с помощью линейно-упругих элементов.

- 
1. Светлицкий В. А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
  2. Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.
  3. Ilgamov M. A., Tang D. M., Dowell E. H. Flutter and forced response of a cantilevered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge // J. of Fluids and Structures. 1994. V. 8. P. 139–156.
  4. Васина В. Н. Параметрические колебания участка трубопровода с протекающей жидкостью // Вестник МЭИ. 2007. № 1. С. 1–11.
  5. Panda L. N., Kar R. C. Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with combination, principal parametric and internal resonances // J. of Sound and Vibration. 2008. V. 309. P. 375–406.
  6. Миронов М. А., Пятаков П. А., Андреев А. А. Вынужденные колебания трубы с потоком жидкости // Акустический журнал. 2010. Т. 56. № 5. С. 684–692.
  7. Chen L. Q., Zhang Y. L., Zhang G. C., Ding H. Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed // International J. of Non-Linear Mechanics. 2014. V. 58. P. 11–21.
  8. Li S., Karney B. W., Liu G. FSI research in pipeline systems – A review of the literature // J. of Fluids and Structures. 2015. V. 57. P. 277–297.
  9. Ильгамов М. А., Шакирьянов М. М. Взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний трубопровода // ПМТФ. 2020. Т. 61. № 6. С. 66–69.

В статическом состоянии труба изогнута собственным весом и находится под действием внутреннего постоянного давления  $p_0$  (внешнее давление принимается равным нулю). В момент времени  $t = 0$  суммарное давление  $p$  в жидкости становится переменным и одновременно с ним опоры начинают совершать вертикальные поступательные перемещения  $s(t)$ .

Уравнение изгибных колебаний трубы относительно прогиба  $W(x, t)$ , учитывающее взаимодействия внутреннего давления и изменения кривизны осевой линии, окружной и продольной деформаций имеет вид [10]

$$\left(g - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{d^2 s}{dt^2}\right) dm - EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} dx - \left[ Fp(1 - \chi) - \alpha \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx = 0, \quad (2.1)$$

$$J = \frac{\pi}{4} [(R + h)^4 - R^4], \quad \chi = \frac{2\nu}{1 + \lambda}, \quad \lambda = \frac{Eh}{CL}, \quad \alpha = \frac{\pi EhR}{(1 + \lambda)L}, \quad F = \pi R^2.$$

Здесь  $g$  – гравитационное ускорение,  $E$  и  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала трубы,  $C$  – коэффициент упругости элементов крепления опоры к основанию,  $L$  – длина трубы,  $R$  – ее внутренний радиус,  $h$  – толщина стенки,  $m$  – суммарная масса однородной трубы и жидкости.

Суммарное внутреннее давление в трубе, вертикальные перемещения опор и функция прогиба задаются формулами

$$p = p_0 + p_a \sin \Omega_1 t, \quad s = s_0 \sin \Omega_2 t, \quad W = [W_0 + w(t)] \sin \beta x, \quad \beta = \pi/L, \quad (2.2)$$

где  $p_a$  и  $s_0$  – амплитуды динамической части давления и перемещения фундамента,  $\Omega_1, \Omega_2$  – круговые частоты.

Подставляя (2.2) в уравнение (2.1) и интегрируя его по  $x$  в пределах от 0 до  $L$  с использованием метода Бубнова–Галеркина, получаем

$$\ddot{w} + \omega^2 (1 - 2\mu \sin \Omega_1 t)(W_0 + w) + \gamma (W_0 + w)^3 = \frac{4}{\pi} (g + s_0 \Omega_2^2 \sin \Omega_2 t),$$

$$\omega^2 = \frac{\beta^2 F(1 - \chi)(p_* - p_0)}{m_1}, \quad \mu = \frac{p_a}{2(p_* - p_0)}, \quad \gamma = \frac{\pm \beta^4 L}{2m_1}, \quad (2.3)$$

$$p_* = \frac{\beta^2 EJ}{F(1 - \chi)}, \quad m_1 = m / L = \pi \left\{ \rho_0 R^2 + \rho [(R + h)^2 - R^2] \right\}.$$

Нелинейная задача Коши (2.3) с начальными условиями  $w = 0, \dot{w} = 0$  ( $t = 0$ ) решается численно методом Рунге–Кутты. Затем к этому решению применяется дискретное преобразование Фурье.

10. Ильгамов М. А. Динамика трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 83–96.

### 3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В случае только постоянного внутреннего давления ( $p_a = 0$ ) вынужденные колебания трубопровода происходят из-за вертикальных колебательных движений опор. Тогда приближенное решение (2.3) при установившихся вынужденных колебаниях трубы будем определять функцией  $w = a \sin \Omega_2 t + b \cos \Omega_2 t$ . При  $W_0 = 0$  с помощью метода гармонического баланса

$$a^3 + \frac{4(\omega^2 - \Omega_2^2)}{3\gamma} a = \frac{16s_0 \Omega_2^2}{3\pi\gamma}, \quad b = 0.$$

При частоте линейного резонанса ( $\Omega_2 = \omega$ ) амплитуда  $A$  нелинейных вынужденных колебаний вычисляется по формуле

$$A = 4 \left( \frac{\pi s_0 f^2}{3\gamma} \right)^{1/3}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (3.1)$$

### 4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

В случае действия переменного внутреннего давления и при неподвижных опорах ( $s_0 = 0$ ) приближенное решение уравнения (2.3) в окрестности главного параметрического резонанса можно представить в виде ( $\Omega_1 \approx 2\omega$ )  $w = a_2 \sin(\Omega_1 t/2) + b_2 \cos(\Omega_1 t/2)$ . С использованием метода гармонического баланса при  $W_0 = 0$

$$\begin{aligned} \left( \omega^2 - \frac{\Omega_1^2}{4} + \frac{3\gamma A^2}{4} \right) a_2 - \mu \omega^2 b_2 &= 0, \\ -\mu \omega^2 a_2 + \left( \omega^2 - \frac{\Omega_1^2}{4} + \frac{3\gamma A^2}{4} \right) b_2 &= 0, \quad A^2 = a_2^2 + b_2^2, \end{aligned}$$

откуда следует

$$A = 4\pi f \sqrt{\frac{1}{3\gamma} \left( \frac{f_1^2}{4f^2} - 1 + \mu \right)}, \quad f_1 = \frac{\Omega_1}{2\pi}. \quad (4.1)$$

### 5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Анализ будем проводить при  $\Omega_1 = 2\omega$  и  $\Omega_2 = \omega$ , когда реализуется наиболее сильное взаимодействие указанных колебаний. Принимая приближенное решение (2.3) в прежнем виде, но с другими постоянными  $a_3$  и  $b_3$ , после применения метода гармонического баланса имеем

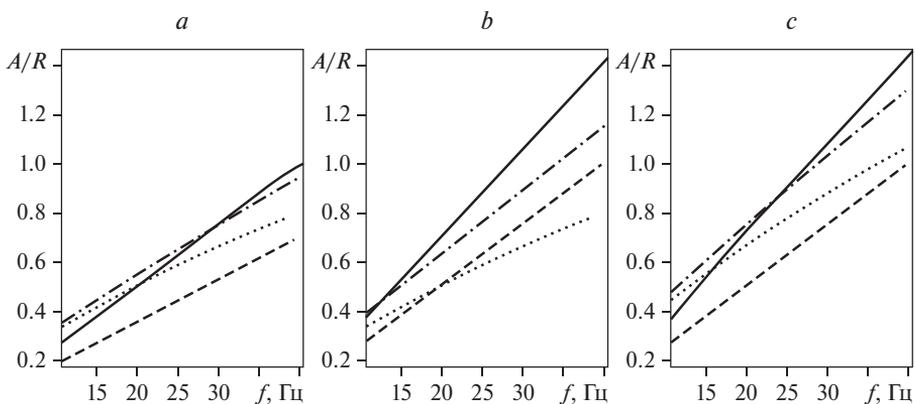
$$-4\mu\omega^2 a_3 + 3\gamma A^2 b_3 = \frac{16}{\pi} s_0 \omega^2, \quad 3\gamma A^2 a_3 - 4\mu\omega^2 b_3 = 0, \quad A^2 = a_3^2 + b_3^2. \quad (5.1)$$

Решение системы алгебраических уравнений (5.1) определено численно.

Расчеты проведены для стальной трубы с параметрами:  $L = 1.2$  м,  $R = 0.01$  м,  $h = 0.0005$  м,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho_0 = 800$  кг/м<sup>3</sup>,  $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup>,  $p_0 = 6.0$  МПа,  $p_a = 0.3, 0.6$  МПа,  $C = 64.0$  МПа,  $s_0 = 0.0003, 0.0007$  м. При принятых значениях параметров частота  $f$  находится по формулам (2.3), (3.1) и приблизительно равна  $f \approx 18$  Гц, критическое внутреннее давление равно  $p = 9.99$  МПа.

## 6. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 1 представлены зависимости амплитуд динамической составляющей прогиба от собственной частоты колебаний трубы. Видно, что относительные амплитуды  $A/R$  увеличиваются с ростом частоты собственных колебаний  $f$ . Кроме того, приближенное аналитическое и численное решения качественно согласуются. Увеличение амплитуды динамической части давления приводит к увеличению амплитуды параметрических колебаний. Поэтому их рост при взаимодействии вынужденных и параметрических колебаний происходит за счет усиления последних. С увеличением амплитуды перемещения опор увеличиваются амплитуды вынужденных колебаний. Увеличение амплитуды при взаимодействии колебаний является следствием

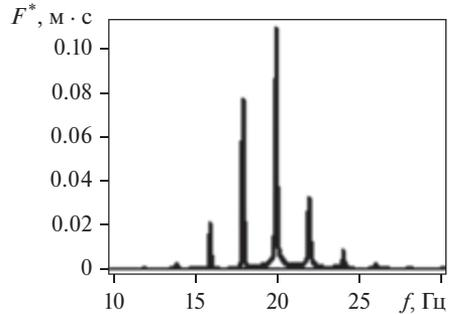


**Рис. 1.** Зависимость относительной амплитуды  $A/R$  от частоты  $f$  при различных значениях амплитуд перемещения опор и колебаний внутреннего давления:  $a - s_0 = 0.0003$  м,  $p_a = 0.3$  МПа;  $b - s_0 = 0.0003$  м,  $p_a = 0.6$  МПа;  $c - s_0 = 0.0007$  м,  $p_a = 0.6$  МПа; сплошные линии – результаты численного интегрирования, пунктирные, штриховые, штрихпунктирные – результаты расчетов по приближенным аналитическим формулам (3.1), (4.1) и (5.1) соответственно

увеличения амплитуды перемещения опор. При одновременном увеличении амплитуд колебаний динамической составляющей давления и перемещения опор взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний также становится более существенным.

Спектр частот при взаимодействии вынужденных и параметрических колебаний трубы изображен на рис. 2. С помощью преобразований Фурье можно выделить колебания не только с основной частотой перемещения опор ( $f = 18$  Гц), но и с дробными частотами, что является особенностью установившихся колебаний в нелинейных системах. В случае взаимодействия вынужденных и параметрических колебаний происходит существенное увеличение амплитуд колебаний с частотами  $f = 16; 20$  Гц.

Раздел написан в рамках гранта РНФ № 24-21-00106, <https://rscf.ru/project/24-21-00106/>.



**Рис. 2.** Зависимости модулей  $F^*$  комплексных амплитуд от частоты  $f$  при  $s_0 = 0.0007$  м и  $p_a = 0.6$  МПа

# Глава III

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА

### § 1. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Магистральные трубопроводы, надземные части контуров проходят через горные, водные, коммуникационные и другие препятствия, под действием переменного внутреннего давления могут совершать пространственные колебания. Такие же колебания трубопровода могут иметь место при работе энергетических установок и технологических машин. При определенных условиях колебания трубопровода могут быть как периодическими, так и непериодическими. Они могут усиливаться или ослабевать. Если амплитуды колебаний становятся выше предельных значений, то это может приводить трубопровод к потере работоспособности или вызывать его разрушение.

Вопросы пространственных колебаний механических систем рассматривались в [1], а стабилизации колебаний и предупреждения аварий в трубопроводах – в [2]. Общая постановка задачи о пространственных колебаниях трубопровода приведена в [3]. Влияние внутреннего перепада давления на динамику трубопровода теоретически и экспериментально изучено в [4, 5]. Поперечные колебания трубы в вертикальной плоскости под дей-

- 
1. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. Колебания твердых тел. М.: Наука. 1976. 432 с.
  2. Ганиев Р. Ф., Низамов Х. Н., Дербуков Е. И. Волновая стабилизация и предупреждение аварий в трубопроводах. М.: Изд-во МГТУ, 1996. 258 с.
  3. Светлицкий В. А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 279 с.
  4. Ilgamov M. A., Tang D. M., E. H. Dowell. Flutter and forced response of a cantilevered pipe: The influence of internal pressure and nozzle discharge // J. of Fluids and Structures. 1994. V. 8. P. 139–156.
  5. Tang D. M., Ilgamov M. A., E. H. Dowell. Buckling and post-buckling behavior of a pipe subjected to internal pressure // J. of Appl. Mech. 1995. V. 62. No 3. P. 595–600.

ствием бегущих волн в жидкости рассмотрены в [6–9]. Исследованию нелинейных свободных пространственных колебаний статически изогнутого трубопровода с рабочей средой посвящена работа [10]. Пространственные параметрические колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления рассмотрены в статьях [11, 12]. В этом параграфе рассматриваются пространственные изгибно-вращательные колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления. При этом скорость движения транспортируемой среды не учитывается. Изложение параграфа дается по [13].

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются пространственные колебания трубы и заключенной в ней жидкости относительно горизонтальной оси, проходящей через опоры (рис. 1, а). Длина трубы  $L$ , ее внутренний радиус  $R_i$  и толщина стенки  $h$ , а суммарная масса однородной трубы и жидкости  $m$ . Труба окружена вязкой несжимаемой средой. В статическом состоянии труба изогнута собственным весом и находится под действиями сил постоянного внутреннего давления и Архимеда. Предполагается, что из этого вертикального положения она выводится путем отклонения на угол  $\theta_0$  и сообщения начальной угловой скорости  $\omega_0$ . Далее совершается свободное вращение трубопровода вокруг оси, проходящей через опоры, поэтому его изогнутая ось является плоской кривой. При этом отсутствует деформация кручения. Учитываются силы инерции Кориолиса, силы сопротивления, пропорциональные первой степени скорости и силы, связанные с ускорением поперечного движения трубы в окружающей среде. Колебания трубы происходят под действием переменного внутреннего давления, изменяющегося по гармоническому закону.

- 
- Ильгамов М. А., Мишин В. Н. Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 181–192.
  - Ильгамов М. А., Мишин В. Н. Хаотические колебания горизонтальной трубы под действием бегущих волн в жидкости // Сб. Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. Казань, 1997. Вып. 1(5). С. 44–50.
  - Ильгамов М. А., Лукманов Р. Л., Зарипов Д. М. Механизм возбуждения гидроупругих колебаний трубопровода // Труды Института механики УНЦ РАН. Вып. 3. 2003. С. 21–52.
  - Лукманов Р. Л., Зарипов Д. М. Исследование колебательных процессов в трубопроводах // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2002 Т. 9. Вып. 3. С. 632–633.
  - Шакирьянов М. М. Свободные пространственные колебания статически изогнутого трубопровода // Труды Института механики УНЦ РАН. 2007. Вып. 5. С. 335–339.
  - Хакимов А. Г., Шакирьянов М. М. Пространственные параметрические колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления. Часть I // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». 2011. № 6. С. 130–146.
  - Хакимов А. Г., Шакирьянов М. М. Пространственные параметрические колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления. Часть II // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». 2013. № 1. С. 568–607.
  - Ганиев Р. Ф., Ильгамов М. А., Хакимов А. Г., Шакирьянов М. М. Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 3–13.

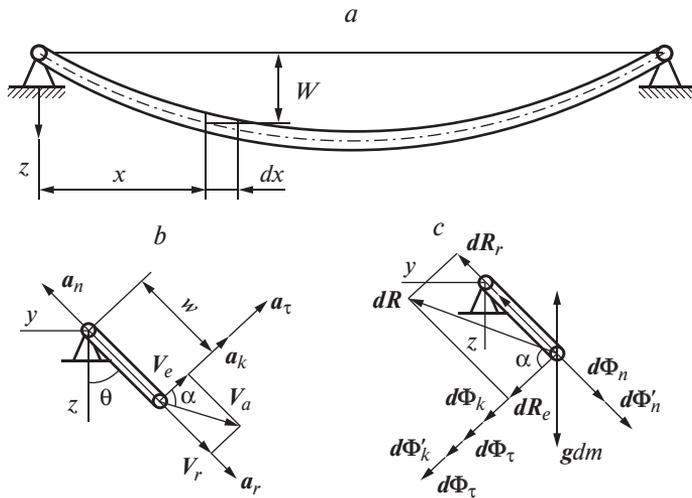


Рис. 1. Расчетная схема изгибно-вращательных колебаний трубопровода

Согласно принятым предположениям, пространственное движение трубопровода можно рассматривать как сложное, состоящее из переносного вращения вокруг оси  $x$ , проходящей через опоры, и относительного движения в плоскости изгиба.

На рис. 1, *a* изображены прогиб  $W$  элемента трубы длиной  $dx$  и массой  $dm = (m/L)dx$ , скорости и ускорения выделенного элемента на рис. 1, *б*, а также силы, действующие на него на рис. 1, *в*. Здесь  $V_a$  и  $a_a$  – абсолютные,  $V_r$  и  $a_r$  – относительные,  $V_e$  и  $a_\tau$ ,  $a_n$  – переносные скорости и ускорения,  $a_k$  – ускорение Кориолиса,  $gdm$  – сила тяжести,  $dA$  – сила Архимеда,  $d\Phi_r$ ,  $d\Phi_\tau$ ,  $d\Phi_n$  и  $d\Phi_k$  – относительная, касательная, нормальная силы инерции и сила инерции Кориолиса,  $d\Phi_r'$ ,  $d\Phi_\tau'$ ,  $d\Phi_n'$  и  $d\Phi_k'$  – относительная, переносные касательная, нормальная силы и сила Кориолиса сопротивления сплошной среде ускоренному движению элемента трубы,  $g$  – гравитационное ускорение. Абсолютное ускорение указанного элемента

$$a_a = a_r + a_\tau + a_n + a_k \quad (2.1)$$

состоит из относительного, переносных касательного, нормального и ускорения Кориолиса:

$$a_r = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad a_\tau = W \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad a_n = W \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad a_k = 2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right).$$

Здесь  $\theta$  – угол поворота трубы в произвольный момент времени  $t$ .

Таким образом, относительная  $d\Phi_r$ , касательная  $d\Phi_\tau$ , нормальная  $d\Phi_n$  силы инерции, сила инерции Кориолиса  $d\Phi_k$  и выталкивающая сила Архимеда  $dA$  выделенного элемента трубы запишутся

$$d\Phi_r = a_r dm, d\Phi_\tau = a_\tau dm, d\Phi_n = a_n dm, d\Phi_k = a_k dm, dA = \pi g \rho_c (R_i + h)^2 dx,$$

где  $\rho_c$  – плотность окружающей трубу среды.

Силу сопротивления окружающей среды  $d\Phi'$  движению элемента трубопровода с ускорением  $\mathbf{a}_a = dV_a/dt$  определяем по модели идеальной несжимаемой жидкости. Возмущения окружающей среды, вызванные движением трубы, в полярных координатах  $r$  и  $\gamma$  определяются уравнениями [14]

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma^2} = 0, \quad p = -\rho_c \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.2)$$

относительно потенциала  $\phi$  и давления  $p$ .

Решение (2.2), удовлетворяющее условиям равновесия радиальных скоростей окружающей среды трубопровода на его поверхности  $r = R_i + h$  и затухания возмущений на бесконечности, имеет вид  $\phi = -V_a (R_i + h)^2 r^{-1} \cos \gamma$ .

Давление окружающей среды на поверхности элемента трубы равно  $p = \rho_c (R_i + h) a_a \cos \gamma$ .

Ввиду симметрии распределения давления в возмущенной среде относительно оси, направленной вдоль вектора абсолютного ускорения выделенного элемента, проекция  $d\Phi'$  равнодействующей силы сопротивления окружающей среды ускоренному движению элемента на эту ось определится интегралом

$$d\Phi' = - \int_0^{2\pi} p (R_i + h) \cos \gamma dx d\gamma = -a_a dm', \quad (2.3)$$

где  $dm' = \pi \rho_c (R_i + h)^2 dx$  – элементарная присоединенная масса окружающей среды.

С учетом (2.1) и (2.3) составляющие силы, связанной с ускорением поперечного движения элемента трубы в окружающей среде, запишутся

$$d\Phi_r' = a_r dm', d\Phi_\tau' = a_\tau dm', d\Phi_n' = a_n dm', d\Phi_k' = a_k dm',$$

Силу  $dR$  вязкого сопротивления окружающей среды движению элемента трубы примем пропорциональной первой степени его абсолютной скорости  $V_a$  и применим формулу Стокса [15]  $dR = -\mu V_a ds$ , где  $ds = 2(R_i + h)dx$  – площадь миделевого сечения элемента,  $\mu$  – коэффициент сопротивления, зависящий от вязкости окружающей среды и режима обтекания трубопровода. Важно отметить, что в данной работе рассматривается такой диапазон

14. Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.

15. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 521 с.

изменения линейных скоростей, в котором относительное обтекание трубопровода окружающей средой является ламинарным.

Абсолютная  $V_a$ , относительная  $V_r$  и переносная  $V_e$  скорости элемента трубы равны

$$V_a = V_r + V_e, \quad V_r = \frac{\partial W}{\partial t}, \quad V_e = W \frac{d\theta}{dt}. \quad (2.4)$$

Ввиду взаимной перпендикулярности относительной и переносной скоростей модуль абсолютной скорости равен

$$V_a = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 + \left(W \frac{d\theta}{dt}\right)^2}. \quad (2.5)$$

Кроме того, из рис. 1, б видно, что

$$\cos \alpha = \frac{V_e}{V_a} = \frac{W(d\theta/dt)}{V_a}, \quad \sin \alpha = \frac{V_r}{V_a} = \frac{(\partial W/dt)}{V_a}. \quad (2.6)$$

Сила сопротивления  $dR$  состоит из двух взаимно перпендикулярных составляющих

$$dR = dR_r + dR_e, \quad (2.7)$$

которые с учетом равенств (2.4)–(2.7) определяются выражениями

$$dR_r = dR \sin \alpha = 2\mu(R_i + h) \frac{\partial W}{\partial t} dx, \quad dR_e = dR \cos \alpha = 2\mu(R_i + h)W \frac{d\theta}{dt} dx.$$

Внутреннее давление  $p_i$  в трубе задается в виде

$$p_i = p_0 + p_a \sin(\Omega t + \Phi_0), \quad (2.8)$$

где  $\Omega$ ,  $\Phi_0$ ,  $p_0$  и  $p_a$  – круговая частота, начальная фаза, среднее давление и его амплитуда колебаний.

Уравнение вращательного движения трубы относительно оси  $x$ , проходящей через опоры, имеет вид

$$\begin{aligned} & - \int_{(m)} W \sin \theta (dmg - dA) - M_u - \int_{(m)} W d\Phi_r - \int_{(m)} W d\Phi'_\tau - \\ & - \int_{(m)} W d\Phi_k - \int_{(m)} W d\Phi'_k - \int_{(m)} W dR_e = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $M_u = J_p d^2\theta/dt^2$  и  $J_p = \pi \rho_p L [(R_i + h)^4 - R_i^4]/2$  – главный момент сил инерции и момент инерции трубы относительно ее собственной оси,  $\rho_p$  – плотность материала трубы.

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний трубы в своей плоскости следующее:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} dm = -EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} dx + (T - p_i F_i) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx + g_1 \cos \theta dm + d\Phi_n - dR_r - d\Phi_r, \quad J = \frac{\pi[(R_i + h)^4 - R_i^4]}{4}, \quad F_i = \pi R_i^2, \quad g_1 = g - \pi \rho_c (R_i + h)^2 \frac{Lg}{m}, \quad (2.10)$$

где  $E$  – модуль Юнга материала.

В случае, когда расстояние между концевыми сечениями трубы на опорах остается неизменным, сила  $T$  натяжения трубопровода определяется интегралом

$$T = \frac{EF}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx, \quad F = \pi[(R_i + h)^2 - R_i^2]. \quad (2.11)$$

### 3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Частное решение, удовлетворяющее граничным условиям  $W(0, t) = W(L, t) = d^2 W(0, t)/dx^2 = d^2 W(L, t)/dx^2 = 0$ , принимается в виде

$$W(x, t) = [W_0 + w(t)] \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right), \quad (3.1)$$

где  $W_0$  и  $w(t)$  – амплитуды статической и динамической составляющих прогиба.

Подставляя выражения (2.8), (2.11) и функцию (2.12) в уравнения (2.9), (2.10) и применяя к последнему процедуру Бубнова–Галеркина, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \theta}{dt^2} \left\{ \frac{m + m'}{2} [W_0 + w(t)]^2 + J_p \right\} + \mu (R_i + h) L \frac{d\theta}{dt} [W_0 + w(t)]^2 + \\ & + [W_0 + w(t)] \left[ \frac{2mg_1}{\pi} \sin \theta + (m + m') \frac{d\theta}{dt} \frac{dw}{dt} \right] = 0, \\ & \frac{m + m'}{L} \frac{d^2 w}{dt^2} + 2\mu (R_i + h) \frac{dw}{dt} + \frac{\pi^4 EJ}{L^4} [W_0 + w(t)] = \\ & = \frac{m}{L} \left\{ \frac{4g_1}{\pi} \cos \theta + [W_0 + w(t)] \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} - \\ & - \left\{ \frac{\pi^2 EF}{4L^2} [W_0 + w(t)]^2 - F_i (p_0 + p_a \sin \Omega t) \right\} \frac{\pi^2}{L^2} [W_0 + w(t)]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

## Статика и динамика трубопроводов

Здесь  $m' = \rho_c \pi (R_i + h)^2 L$  – присоединенная масса окружающей среды.

При  $\theta(t) \equiv 0$ ,  $w(t) \equiv 0$ ,  $p_a \equiv 0$  из (3.2) следует уравнение для определения статической составляющей  $W_0$  прогиба трубопровода

$$W_0^3 + \frac{4(\pi^2 EJ - p_0 F_i L^2)}{\pi^2 EF} W_0 - \frac{16g_1 m L^3}{\pi^5 EF} = 0, \quad (3.3)$$

действительный корень которого равен

$$W_0 = \left[ b + \sqrt{b^2 + \frac{d^3}{27}} \right]^{1/3} + \left[ b - \sqrt{b^2 + \frac{d^3}{27}} \right]^{1/3}, \quad (3.4)$$

$$b = \frac{8g_1 m L^3}{\pi^5 EF}, \quad d = \frac{4(\pi^2 EJ - p_0 F_i L^2)}{\pi^2 EF}.$$

Из уравнения (3.3) без первого члена следует, что его решение неограниченно возрастает при значении среднего давления

$$p'_0 = \frac{\pi^2 EJ}{L^2 F_i}. \quad (3.5)$$

Значение давления (3.5) может быть названо критическим.

Линеаризация уравнений (3.2) относительно переменных  $\theta$ ,  $w$  и их производных с учетом малости амплитуды переменной составляющей внутреннего давления приводит к следующим уравнениям вращательных и изгибных колебаний трубы (3.6):

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + 2n_1 \frac{dw}{dt} + k_1^2 w = \frac{\pi^2 p_a F_i W_0}{(m + m')L} \sin(\Omega t + \varphi_0),$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2n_2 \frac{d\theta}{dt} + k_2^2 \theta = 0, \quad n = \mu(R_i + h), \quad n_1 = \frac{n}{(m + m')}, \quad (3.6)$$

$$k_1^2 = \frac{\pi^2 \left[ \pi^2 E (J + 0.75 F W_0^2) L^{-2} - p_0 F_i \right]}{(m + m')L},$$

$$J'_p = (m + m') W_0^2 + 2J_p, \quad n_2 = \frac{m W_0^2}{J'_p}, \quad k_2^2 = \frac{4g_1 m W_0}{\pi J'_p}.$$

Таким образом, собственные частоты изгибных и вращательных колебаний трубы равны

$$k_1^* = \sqrt{k_1^2 - n_1^2}, \quad k_2^* = \sqrt{k_2^2 - n_2^2}. \quad (3.7)$$

Из сравнения нелинейной (3.2) и линеаризованной (3.6) систем уравнений видно, что в первом случае имеет место взаимодействие вращательных и изгибных колебаний трубы, а во втором случае этого взаимодействия нет.

Система уравнений (3.2) решается при следующих начальных условиях

$$\theta = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_0, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{dt} = 0 \quad (t = 0). \quad (3.8)$$

В настоящем исследовании численное решение задачи Коши (3.2), (3.8) при  $\theta_0 = 0$  рад и  $\omega_0 = 1.0$  рад/с определялось методом Рунге–Кутты [16]. Затем к этому решению применялось дискретное преобразование Фурье.

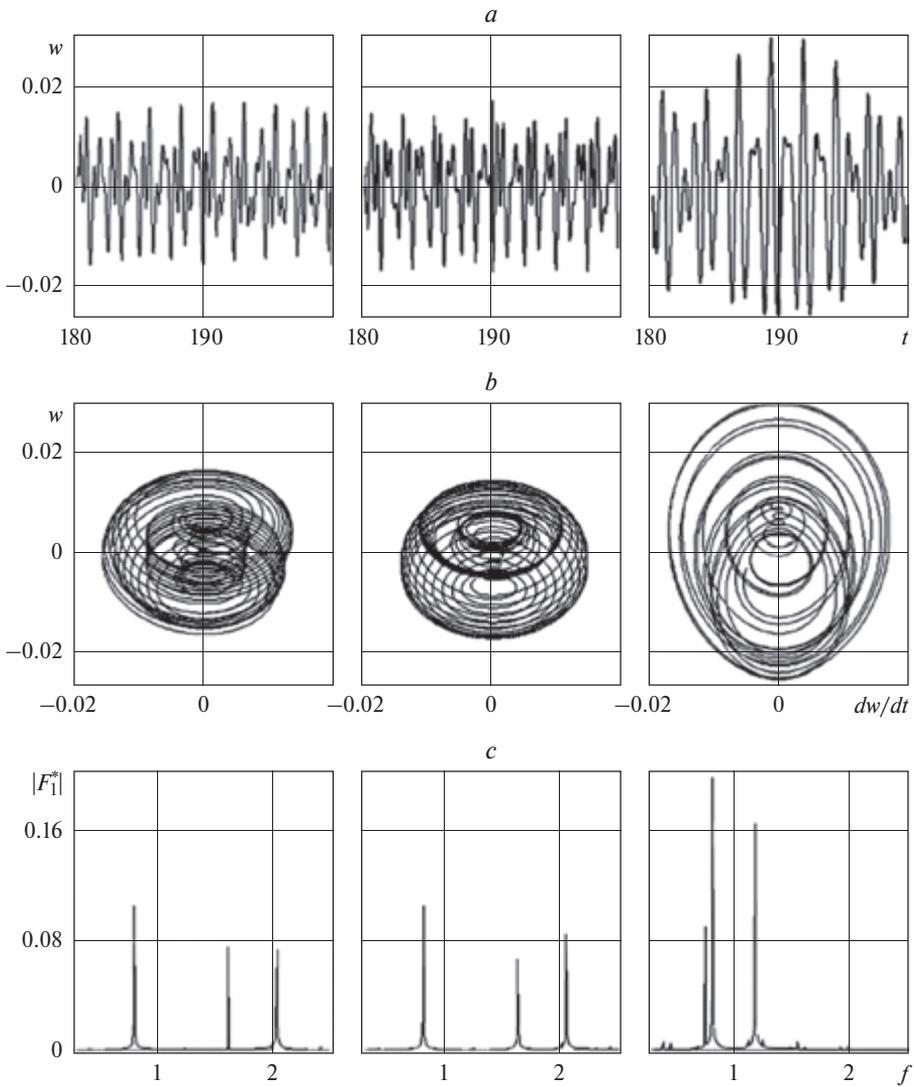
#### 4. ЗАВИСИМОСТЬ КОЛЕБАНИЙ ОТ ЧАСТОТЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ И ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Колебательные движения трубопровода зависят от большого числа параметров. В первой части данной статьи ограничимся обсуждением лишь пространственных колебаний трубопровода с учетом и без учета влияния окружающей среды при разных частотах переменного давления в транспортируемой среде.

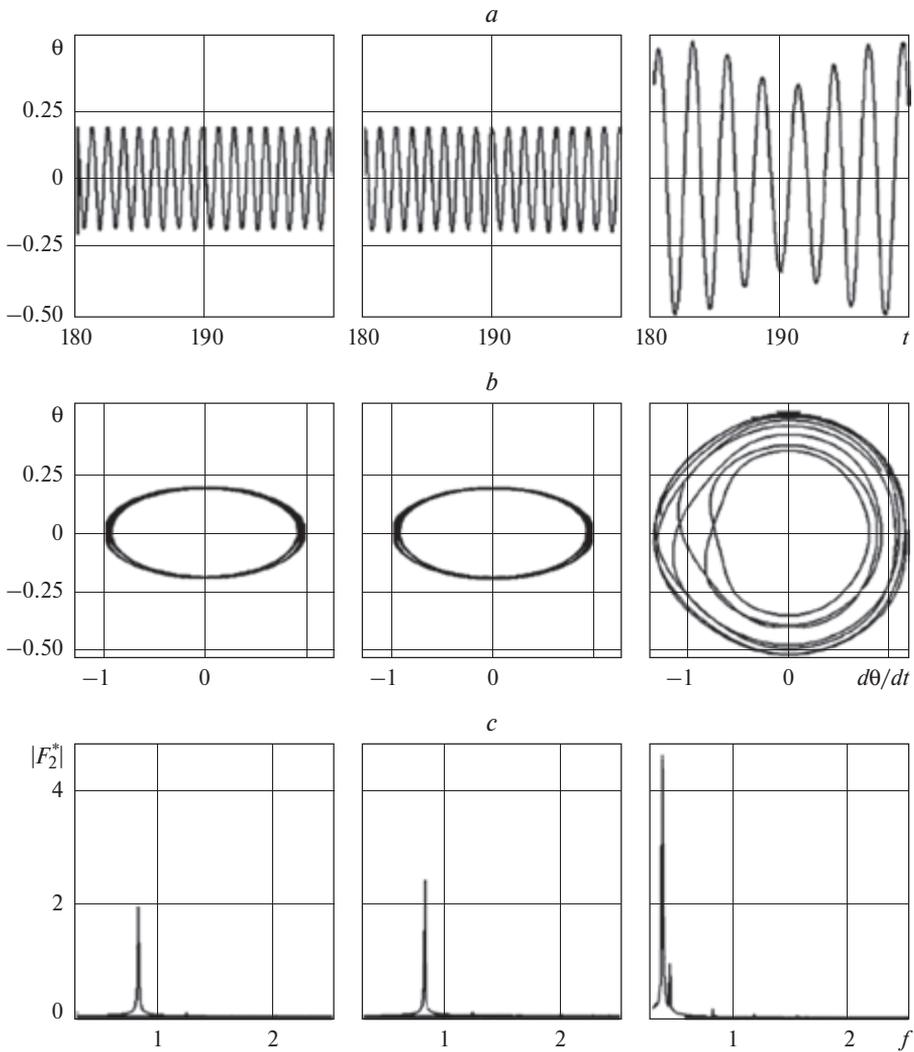
Вычисления были проведены для стальной трубы длиной  $L = 25$  м, с внутренним радиусом  $R_i = 0.259$  м и толщиной стенки  $h = 0.006$  м. Модуль Юнга материала  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па. Труба заполнена жидкостью с плотностью  $\rho_0 = 800$  кг/м<sup>3</sup>. Суммарная масса трубы и жидкости  $m = 6141$  кг. В качестве окружающей трубопровод среды рассматривались водная и воздушная среды с плотностями  $\rho_c = 800$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho_c = 1.25$  кг/м<sup>3</sup>, с коэффициентами сопротивления  $\mu = 0.256$  Пас/м и  $\mu = 0.460 \cdot 10^{-2}$  Пас/м соответственно. Приведены также для сравнения результаты без учета влияния окружающей среды. Отметим, что при принятых параметрах приближенные числовые значения статической составляющей прогиба, собственных круговых частот изгибных и вращательных колебаний трубы, определяемых соответственно формулами (3.4) и (3.7), следующие:  $W_0 = 0.281$  м,  $k_1^* = 7.30$  рад/с,  $k_2^* = 2.35$  рад/с – при колебаниях трубы в водной среде и  $W_0 = 0.353$  м,  $k_1^* = 12.7$  рад/с,  $k_2^* = 5.12$  рад/с – без учета влияния окружающей среды. Приближенное значение внутреннего критического давления, которое вычисляется по формуле (3.5)  $p_0 = 50.8 \cdot 10^5$  Па. Гравитационное ускорение  $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup>. Параметры давления в трубе  $p_0 = 70.8 \cdot 10^5$  Па,  $p_a = 2.0 \cdot 10^5$  Па,  $\Omega = 5.02$  рад/с,  $\Omega = 12.6$  рад/с,  $\Omega = 15.0$  рад/с,  $\varphi_0 = 0$  рад.

Результаты вычислений приведены на рис. 2–5 в виде графиков зависимостей динамической составляющей прогиба  $w$  средней точки пролета и угла  $\theta$  поворота трубы в отрезке времени  $t$  от 180 до 200 секунд, а также в виде фазовых траекторий и зависимостей модулей комплексных ампли-

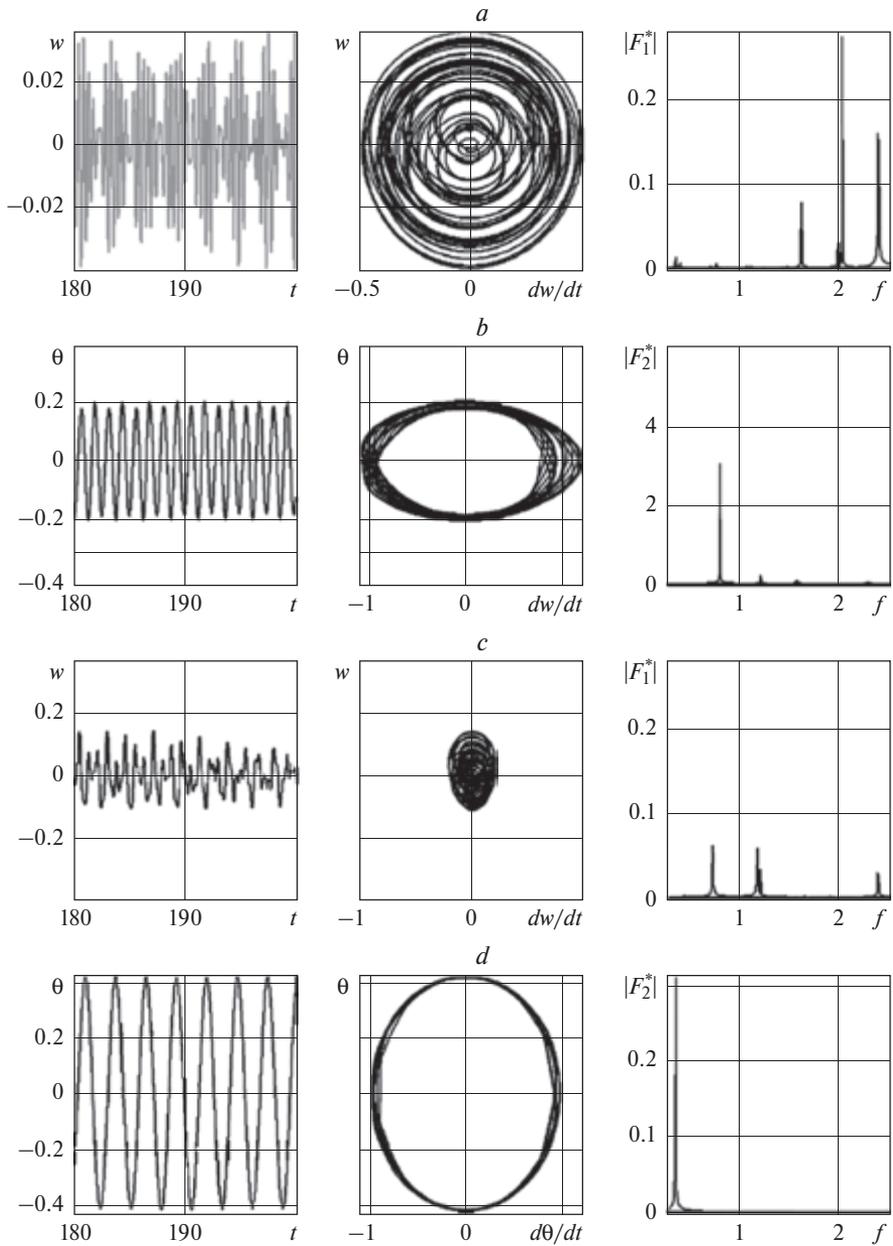
16. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. М.: Физматгиз. 2-е изд. 1963. 400 с.



**Рис. 2.** Зависимости прогиба  $w$  средней точки пролета трубы от времени  $t$ , фазовые траектории и спектры частот изгибных колебаний трубы при частоте  $\Omega = 5.02$  рад/с переменного внутреннего давления



**Рис. 3.** Зависимости угла  $\theta$  поворота трубы от времени  $t$ , фазовые траектории и спектры частот вращательных колебаний трубы при частоте  $\Omega = 5.02$  рад/с переменного внутреннего давления



**Рис. 4.** Зависимости прогиба  $w$  средней точки пролета и угла  $\theta$  поворота трубы от времени  $t$ , фазовые траектории и спектры частот изгибных и вращательных колебаний трубы при частоте  $\Omega = 15.0$  рад/с переменного внутреннего давления

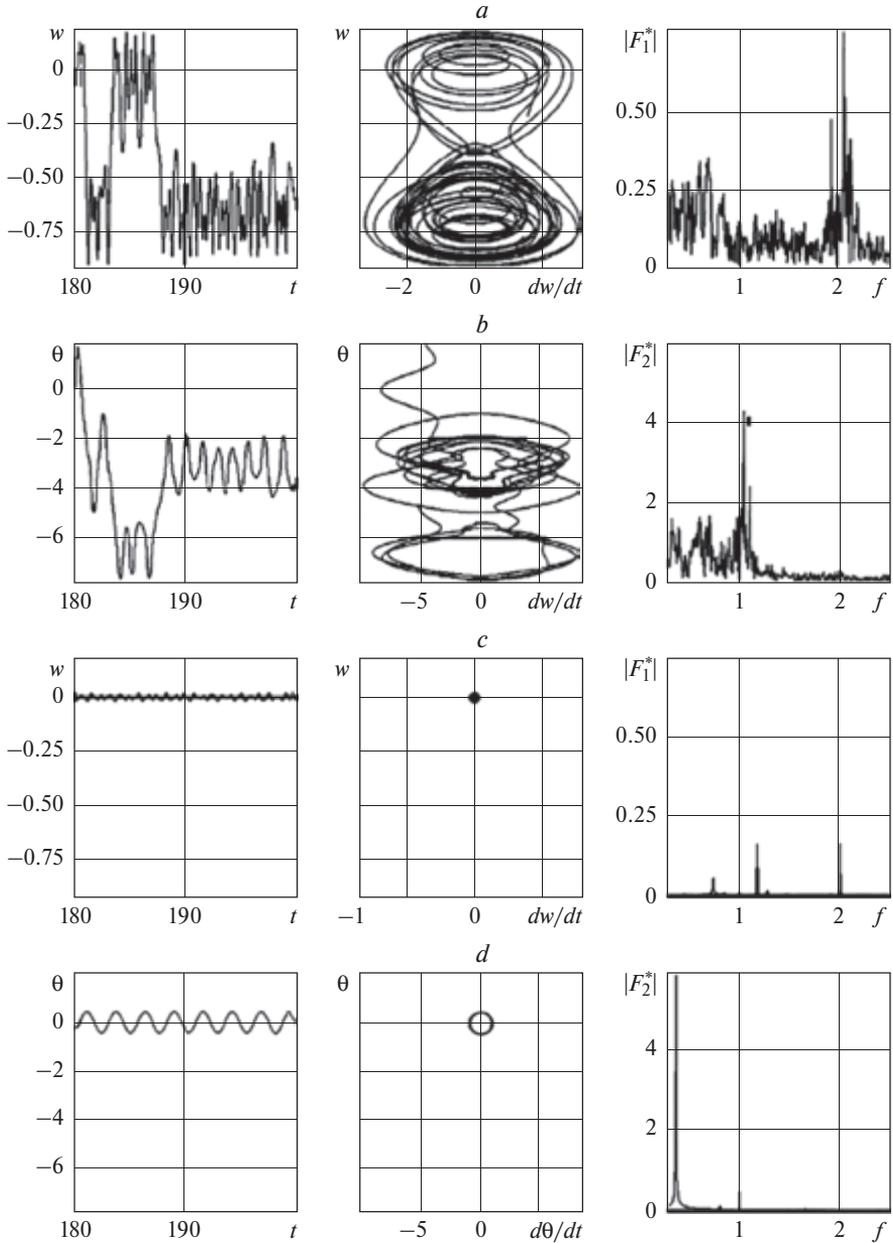


Рис. 5. Зависимости прогиба  $w$  средней точки пролета и угла  $\theta$  поворота трубы от времени  $t$ , фазовые траектории и спектры частот изгибных и вращательных колебаний трубы при частоте  $\Omega = 12.6$  рад/с переменного внутреннего давления

туд  $F_1^*$  изгибных и  $F_2^*$  вращательных колебаний от частоты  $f = \Omega / (2\pi)$ . Переменные на графиках измеряются в следующих единицах: время  $t$  – в секундах, прогиб  $w$  – в метрах, линейная скорость  $dw/dt$  – в метрах в секунду, угол  $\theta$  – в радианах, угловая скорость  $d\theta/dt$  – в радианах в секунду, частота  $f$  – в Герцах. Указанные выше графики сгруппированы для трех значений частот переменного внутреннего давления  $\Omega = 5.02$  рад/с (рис. 2 и 3),  $\Omega = 15.0$  рад/с (рис. 4) и  $\Omega = 12.6$  рад/с (рис. 5). На рис. 2 и 3 слева направо расположены графики, относящиеся к случаям отсутствия окружающей среды, воздушной среды, водной среды, соответственно. На рис. 4 и 5 представлены графики: ( $a$ ,  $b$ ) – в случае движения трубы в воздушной среде, ( $в$ ,  $г$ ) – в водной среде.

Из сравнения соответствующих графиков первых двух столбцов рис. 2 и 3 можно видеть, что для изгибных и вращательных колебаний трубы в воздушной среде и в ее отсутствии имеет место качественное и количественное совпадение результатов расчетов. Кроме того, из сравнения графиков ( $a$ ,  $б$ ,  $в$ ) рис. 2 и 3 видно, что амплитуды как изгибных, так и вращательных перемещений трубы в водной среде значительно больше соответствующих амплитуд перемещений трубы в воздушной среде. Это можно объяснить тем, что изгибные колебания трубопровода в водной среде происходят вблизи резонансного режима при значении круговой частоты переменного внутреннего давления  $\Omega = 5.02$  рад/с. Увеличение же амплитуды вращательных колебаний объясняется уменьшением момента сил сопротивления относительно оси вращения трубы ввиду уменьшения амплитуды  $W_0$  статической составляющей прогиба (было  $W_0 = 0.353$  м, стало  $W_0 = 0.281$  м). Отметим также, что при этом частоты изгибных и вращательных колебаний трубы в водной среде заметно меньше частот этих же колебаний в воздушной среде. Это уменьшение в большей степени обусловлено увеличением присоединенной массы окружающей трубу среды.

Из рис. 2,  $a$ ,  $в$  и 4,  $a$ ,  $в$  видно, что изгибные колебания трубы при принятых значениях основных параметров происходят в виде биений. Кроме того, на спектрах частот изгибных колебаний трубы без учета и с учетом влияния окружающей среды отчетливо наблюдаются по два, три или несколько максимумов. Причем эти максимумы имеют частоту, кратную основному максимуму. Видно также, что длины этих максимумов одного порядка. Наличие указанных максимумов можно объяснить влиянием нелинейных членов в дифференциальных уравнениях движения трубы. В данном случае нелинейные члены больше влияют на изгибные колебания трубы, чем на ее вращательные колебания.

Из рис. 5 ( $a$ ,  $б$ ) видно, что при значении  $\Omega = 12.6$  рад/с круговой частоты переменного давления в случае колебаний трубопровода в воздушной среде его движения становятся хаотическими. В рассматриваемом около-резонансном режиме спектры частот изгибных и вращательных колебаний трубы становятся сплошными. Можно видеть, что в этом случае амплитуды

динамической составляющей прогиба и угла поворота многократно больше соответствующих амплитуд колебаний трубы, чем при ее движении в воде. Это обусловлено тем, что при движениях трубопровода в воде принятое значение круговой частоты переменного давления не является резонансным.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При принятых значениях основных параметров изгибные колебания трубопровода происходят в виде биений.

Нелинейные члены в дифференциальных уравнениях больше влияют на изгибные колебания трубы, чем на ее вращательные колебания.

Частоты изгибных и вращательных колебаний трубопровода в водной среде заметно меньше этих же частот при его колебаниях в воздушной среде.

В рассмотренном околорезонансном режиме амплитуды изгибных и угловых колебаний трубопровода в водной среде значительно больше соответствующих амплитуд его перемещений в воздушной среде.

Вблизи резонансного режима колебаний трубопровода в воздушной среде его движения становятся хаотическими. Амплитуды динамической составляющей прогиба и угла поворота трубы в воздушной среде многократно больше этих же амплитуд, чем при движении трубы в водной среде.

## § 2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

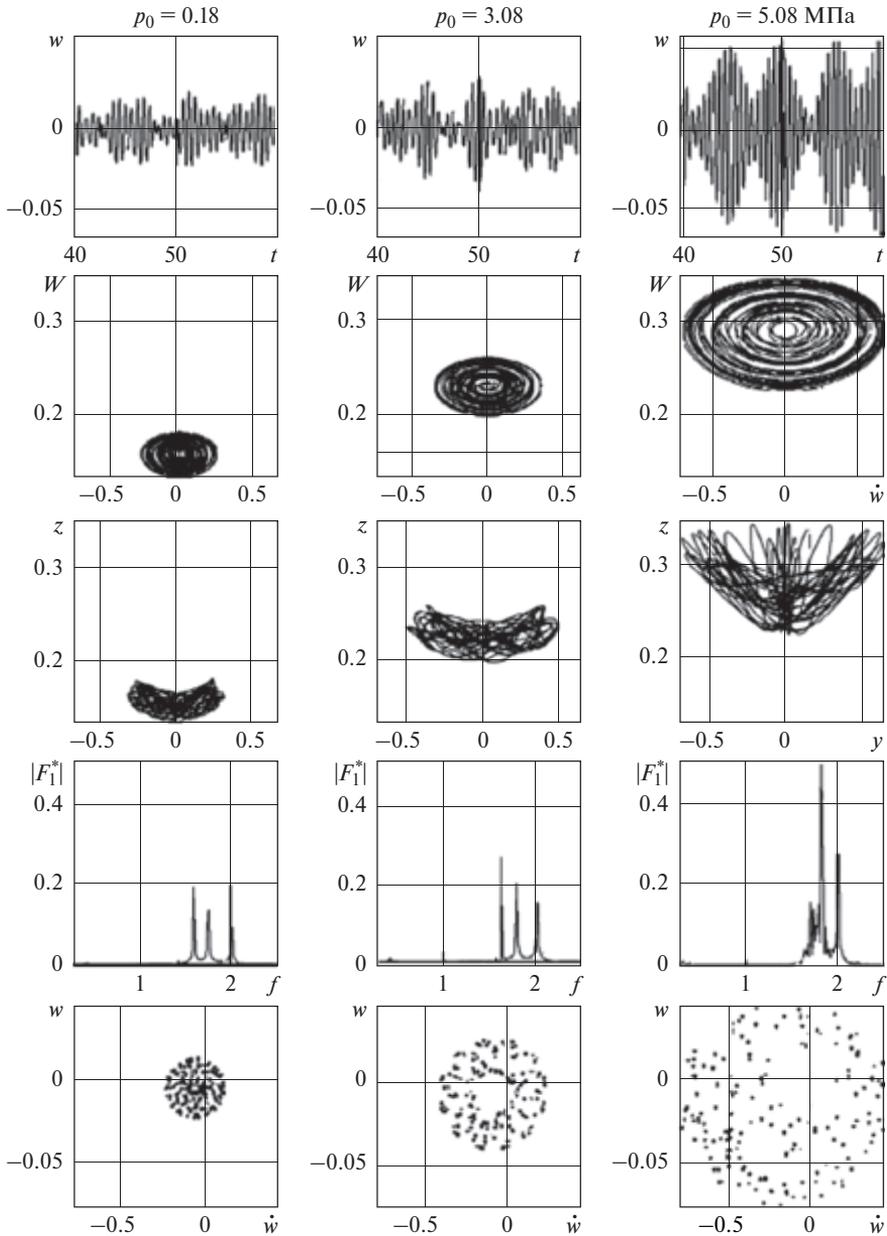
### 1. ВВЕДЕНИЕ

В § 1 данной главы был приведен вывод уравнений пространственных колебаний трубопровода, состоящих из изгибающей и вращательной частей. Дан их анализ в зависимости от входных параметров. Были установлены сложный характер колебаний, периодический и непериодический режимы, переход к хаотическим колебаниям. В работе [1] это изучение продолжено. При этом для обработки результатов используется такой информативный анализ, как отображение Пуанкаре [2]. Кроме того, для более ясного представления положения трубопровода в пространстве приводятся траектории средней точки пролета в рассматриваемом отрезке времени. Настоящий параграф излагается по [1].

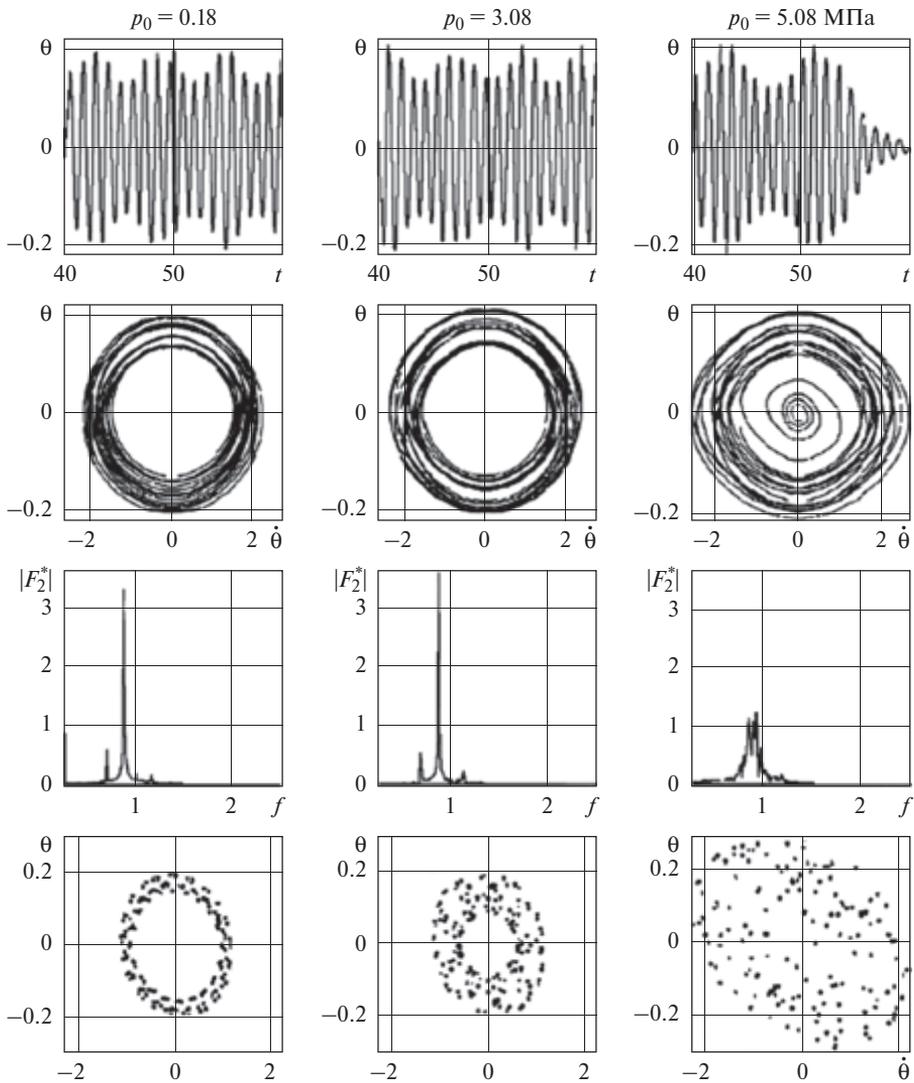
Согласно расчетной схеме трубопровода, представленной в [3] и предыдущем параграфе, координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  средней точки пролета запишем  $x = L/2$ ,  $y = -W\sin\theta$ ,  $z = W\cos\theta$ , где  $L$  – длина трубы,  $W = w + W_0$  – полный прогиб средней точки пролета, а  $W_0$  и  $w$  – статическая и динамическая составляющие этого прогиба. Максимальное время  $t_{\max}$ , в течение которого рассматривались движения трубопровода, составляло 100 секунд. Результаты вычислений представлены в виде графиков зависимостей динамической составляющей прогиба  $w$  средней точки пролета и угла  $\theta$  поворота трубы вокруг прямой, проходящей через опоры, в отрезке времени  $t$  от 40 до 60 с, фазовых траекторий и зависимостей модулей Фурье-спектров  $|F_1^*|$  изгибных и  $|F_2^*|$  вращательных колебаний от частоты  $f$  колебаний давления.

Переменные на графиках измеряются: время  $t$  – в секундах, координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  средней точки пролета, динамический  $w$ , статический  $W_0$  и полный  $W$  прогибы – в метрах, линейная скорость  $dw/dt = \dot{w}$  – в метрах в секунду, угол  $\theta$  – в радианах, угловая скорость  $d\theta/dt = \dot{\theta}$  – в радианах в секунду, частота  $f$  – в герцах. Размерности Фурье-спектров  $|F_1^*|$  – метр на секунду и  $|F_2^*|$  – радиан на секунду. Отметим, что при построении фазовых траекторий изгибных колебаний вместо динамической составляющей  $w$  прогиба по вертикальной оси откладывался полный  $W$  прогиб средней точки пролета трубопровода.

1. Ганиев Р. Ф., Ильгамов М. А., Хакимов А. Г., Шакирьянов М. М. Пространственные непериодические колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 2. С. 3–12.
2. Moon F. C. Chaotic Vibrations. New York: Wiley, 1987. 309 p.
3. Ганиев Р. Ф., Ильгамов М. А., Хакимов А. Г., Шакирьянов М. М. Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 3–13.



**Рис. 1.** Зависимости динамической составляющей прогиба  $w$  от времени  $t$ , фазовые траектории  $W, \dot{w}$ , траектории средней точки пролета  $y, z$ , спектры частот,  $|F_1^*|, f$  и отображения Пуанкаре изгибных колебаний трубы в воздушной среде при частоте  $f=2.005$  Гц, амплитуде  $p_a=0.15$  МПа, начальной фазе  $\varphi_0=0$  рад переменного внутреннего давления и разных величинах среднего давления  $p_0$



**Рис. 2.** Зависимости угла  $\theta$ , поворота трубы от времени  $t$ , фазовые траектории  $\dot{\theta}$ , спектры частот  $|F_1^*|$ ,  $f$  и отображения Пуанкаре вращательных колебаний трубы в воздушной среде при частоте  $f = 2.005$  Гц, амплитуде  $p_a = 0.15$  МПа, начальной фазе  $\varphi_0 = 0$  рад переменного внутреннего давления и разных величинах среднего давления  $p_0$

Числовые расчеты проводились для трубопровода с геометрическими и механическими характеристиками и начальными условиями, указанными в [3] и в § 1. Начальная фаза переменной составляющей внутреннего давления в трубе  $\varphi_0 = 0$  рад. В качестве окружающей трубопровод среды рассматривались воздушная и водная среды. Для того, чтобы особенности пространственных колебаний проявлялись более зримо, значение частоты  $f = \Omega/(2\pi)$  переменной составляющей внутреннего давления в трубе принималось около значения первой собственной частоты трубопровода:  $f = 2.005$  Гц при рассмотрении воздушной среды и  $f = 1.100$  Гц – водной среды.

Рис. 1, 2, 4, 5 относятся к случаю колебаний трубопровода в воздушной среде, а рис. 3 и 6 – в водной среде. Фрагменты сверху дают зависимости прогиба или угла поворота трубы от времени, ниже – соответствующие фазовые траектории, траектории средней точки пролета, спектры частот и отображения Пуанкаре.

Чтобы исключить начальный участок процесса колебаний трубопровода, обработка фазовых точек при построении отображений Пуанкаре производилась с момента времени  $t_0 = 20$  с. Период обработки фазовых точек равен  $\tau = 2\pi/\Omega$ . Числовые значения этого периода для принятых частот переменной части давления равны соответственно 0.50 и 0.91 секундам. В пределах рассматриваемого отрезка времени число точек, содержащихся в отображении Пуанкаре, в первом случае равняется 161, а во втором – 88.

Далее обсуждается влияние величины среднего давления  $p_0$  и амплитуды  $p_a$  переменной составляющей давления в трубопроводе на его изгибно-вращательные колебания.

## 2. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ СРЕДНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Влияние среднего давления  $p_0$  на колебательные движения трубы в воздушной среде иллюстрируется на рис. 1 и 2, а в водной среде – на рис. 3. Разные столбцы относятся к разным значениям давления  $p_0$ , которые указаны сверху. Амплитуда переменной составляющей внутреннего давления  $p_a = 0.15$  МПа.

Приближенные числовые значения статической составляющей прогиба  $W_0$ , собственных частот изгибных  $f_1 = k_1^*/(2\pi)$  и вращательных  $f_2 = k_2^*/(2\pi)$  колебаний трубы, определяемых приведенными в [3] формулами, сведены в таблицу (I – труба в воздушной среде, II – в водной среде). Верхние две строки в разделах относятся к докритическому статическому изгибу трубопровода, третьи – к случаю, когда среднее давление совпадает со значением критического давления  $p'_0 = 5.08$  МПа [3]. В данном случае решение (22) [3] сводится к  $W_0 = \sqrt[3]{2b}$ . Нижние строки относятся к закритическому изгибу.

Из таблицы видно, что с увеличением среднего давления статический прогиб возрастает в обоих случаях окружающей среды. Отметим, что при  $p_0 \rightarrow p'_0$  линейное решение возрастает неограниченно, а при  $p_0 \geq p'_0$  – не существует.

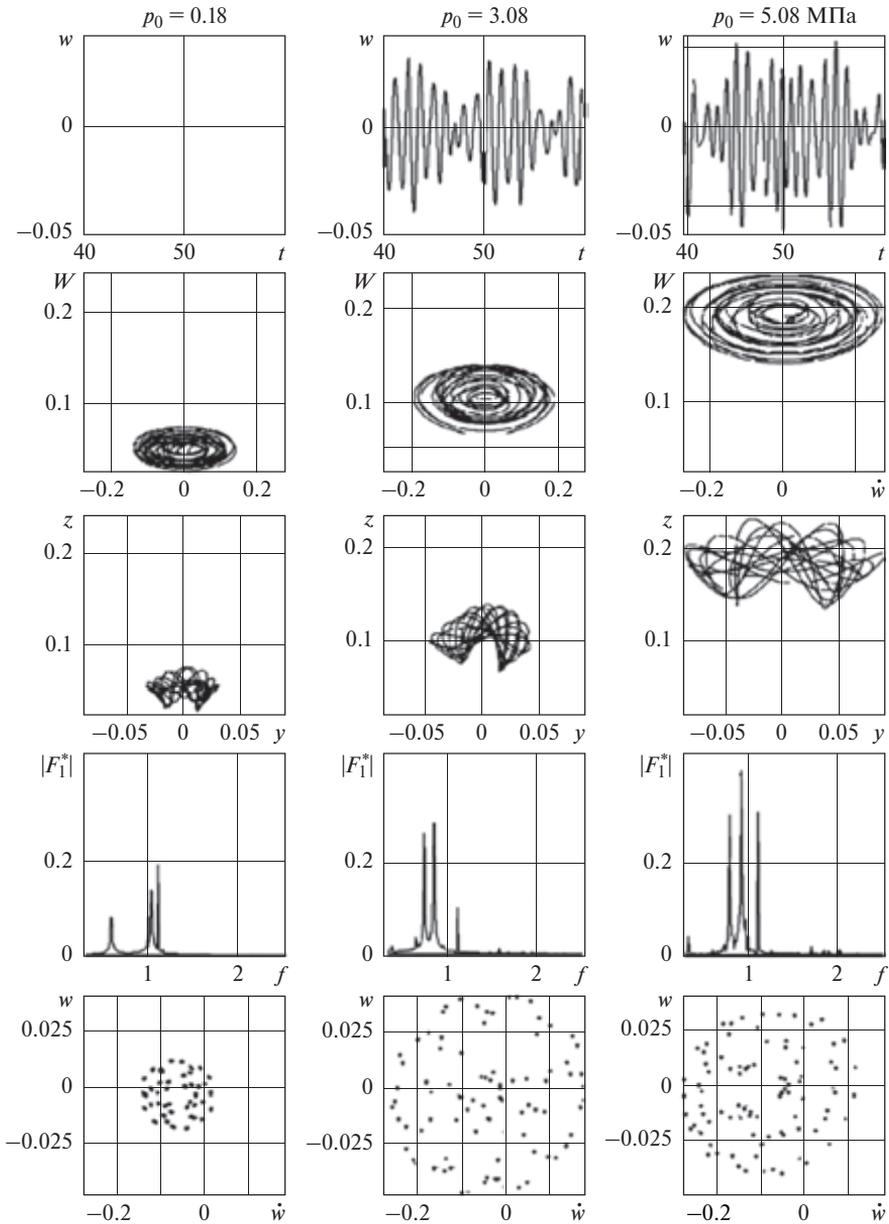
Таблица

Среднее давление $p_0$ , МПа		Статический прогиб $W_0$ , м	Частота изгибных колебаний $f_1$ , Гц	Частота вращательных колебаний $f_2$ , Гц
I	0.18	0.158	1.622	0.856
	3.08	0.231	1.650	0.870
	5.08	0.292	1.801	0.848
	7.08	0.353	2.013	0.815
II	0.18	0.052	1.019	0.311
	3.08	0.107	0.808	0.390
	5.08	0.191	0.901	0.401
	7.08	0.281	1.162	0.374

Зависимость собственных частот от  $p_0$  является более сложной. С увеличением  $p_0$  частота изгибных колебаний трубопровода в воздушной среде монотонно возрастает, а в водной среде сначала падает, потом возрастает. Известно, линейное решение при  $p_0 \rightarrow p'_0$  дает снижение собственных частот до нуля. Эксперименты, изложенные в работе [2], указывают на небольшое уменьшение собственных частот вблизи критического давления ( $p_0 \approx p'_0$ ).

Собственная частота вращательных колебаний трубопровода в обеих средах несколько возрастает с ростом  $p_0$ , а в закритической области уменьшается, что объясняется увеличением момента инерции относительно оси, проходящей через опоры.

Из рис. 1–3 видно, что при принятых значениях среднего давления колебания трубы в отрезке времени от 40 до 60 секунд имеют вид биений. С увеличением величины среднего давления в трубопроводе происходит увеличение амплитуды его изгибных колебаний, что имеет место при колебаниях трубопровода в воздушной и водной средах. Это обстоятельство объясняется увеличением произведения кривизны осевой линии и внутреннего давления  $p_0$ , что приводит к уменьшению эффективной жесткости трубопровода. Видно, что с увеличением среднего давления амплитуды вращательных колебаний трубы при ее движениях в воздушной среде изменяются незначительно, а при движениях трубы в водной среде эти амплитуды заметно уменьшаются. Уменьшение амплитуд вращательных колебаний трубы в водной среде обусловлено тем, что с увеличением среднего давления увеличивается статическая составляющая прогиба, что, в свою очередь, приводит к увеличению моментов силы вязкого сопротивления и силы, связанной с ускорением поперечного движения трубы в окружающей среде.



**Рис. 3.** Зависимости динамической составляющей прогиба  $w$  от времени  $t$ , фазовые траектории  $W$  и  $\dot{w}$ , траектории средней точки пролета  $x, y, z$ , спектры частот  $|F_1^*|, f$  и отображения Пуанкаре изгибных колебаний трубы в водной среде при частоте  $f = 1.100$  Гц, амплитуде  $p_a = 0.15$  МПа, начальной фазе  $\varphi_0 = 0$  рад переменного внутреннего давления и разных величинах среднего давления  $p_0$

Фазовые траектории изгибных колебаний почти равномерно заполняют всю круговую область охвата (известно, что при одночастотных колебательных движениях существует одна замкнутая траектория).

Траектории вращательных колебаний в воздушной среде являются более локализованными около внешней границы фазовой картины (рис. 2). Характер колебаний в водной среде в целом такой же, что на рис. 2. Это относится ко всем фрагментам. Основное отличие – более низкие частоты (см. таблицу), чем в случае воздушной среды.

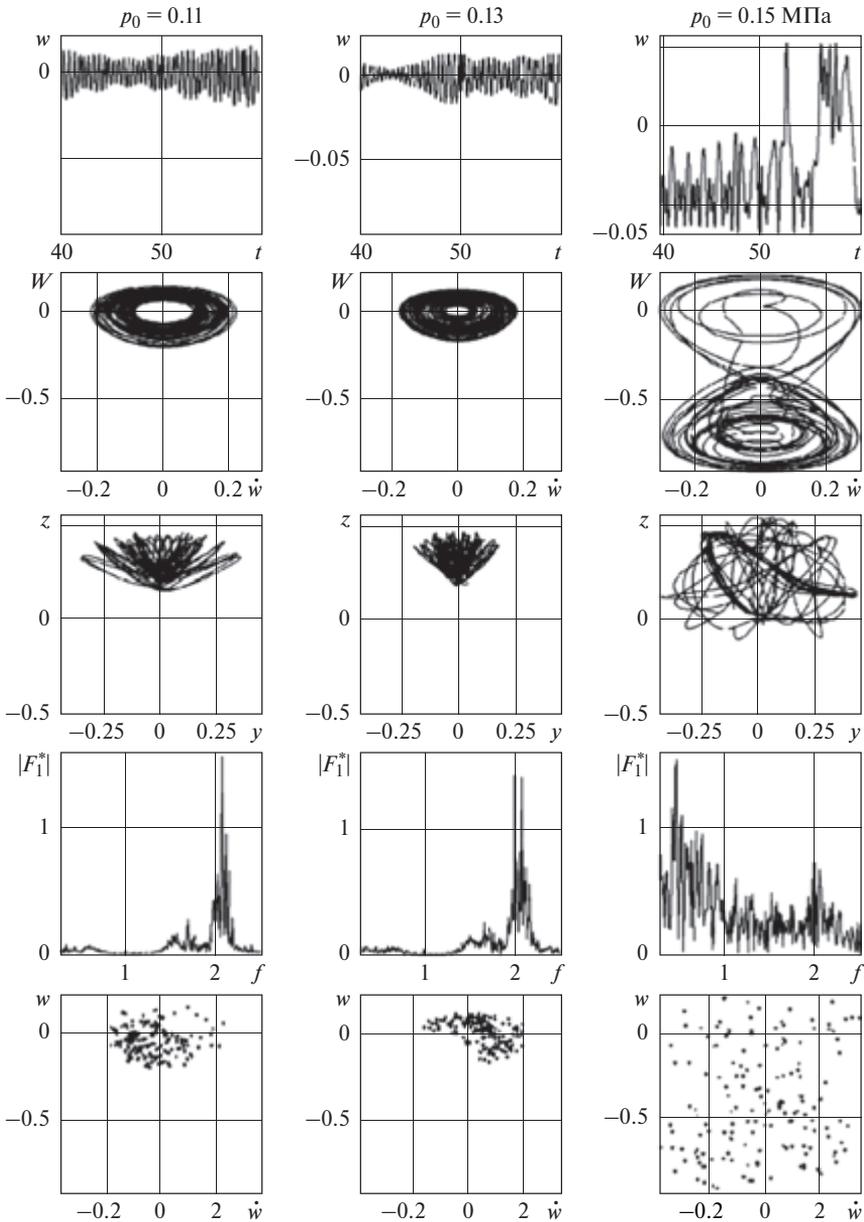
Из рис. 1 и 3 следует, что преобразование Фурье выделяет изгибные колебания с тремя частотами. Наибольшая из них (2.005 Гц в случае движений трубы в воздушной среде и 1.100 Гц – водной) совпадает с частотой колебаний давления, ниже – с первой собственной частотой изгибных колебаний, низшая частота – с удвоенной первой собственной частотой вращательных колебаний трубопровода. Появление на спектрах частот гармоник с низшей частотой объясняется взаимодействием изгибных и вращательных колебаний трубопровода. На один цикл последних приходится два цикла изгибных колебаний. Причем вращательные колебания в большей степени влияют на изгибные колебания трубопровода, чем последние на вращательные колебания. Это обусловлено тем, что центробежные силы инерции, действующие на трубопровод, изменяются прямо пропорционально второй степени угловой скорости вращательных движений, тогда как моменты сил сопротивления – первой степени суммарного прогиба. С возрастанием среднего давления происходит сдвиг последних из указанных частот к частоте возбуждения и их слияние, идет возрастание амплитуд. При достижении величины среднего давления критического значения  $p'_0 = 5.08$  МПа спектры частот изгибных и вращательных колебаний трубы постепенно становятся сплошными.

С увеличением среднего давления в трубе происходит также расширение области, занятой отображением Пуанкаре. Отметим, что на формирование конфигураций и размеров областей отображения Пуанкаре значительное влияние оказывают как нелинейности в дифференциальных уравнениях и изменения параметров переменного внутреннего давления, так и изменения значений моментов времени  $t_0$  и  $t_{\max}$ .

### 3. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ АМПЛИТУДЫ ПЕРЕМЕННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ДАВЛЕНИЯ

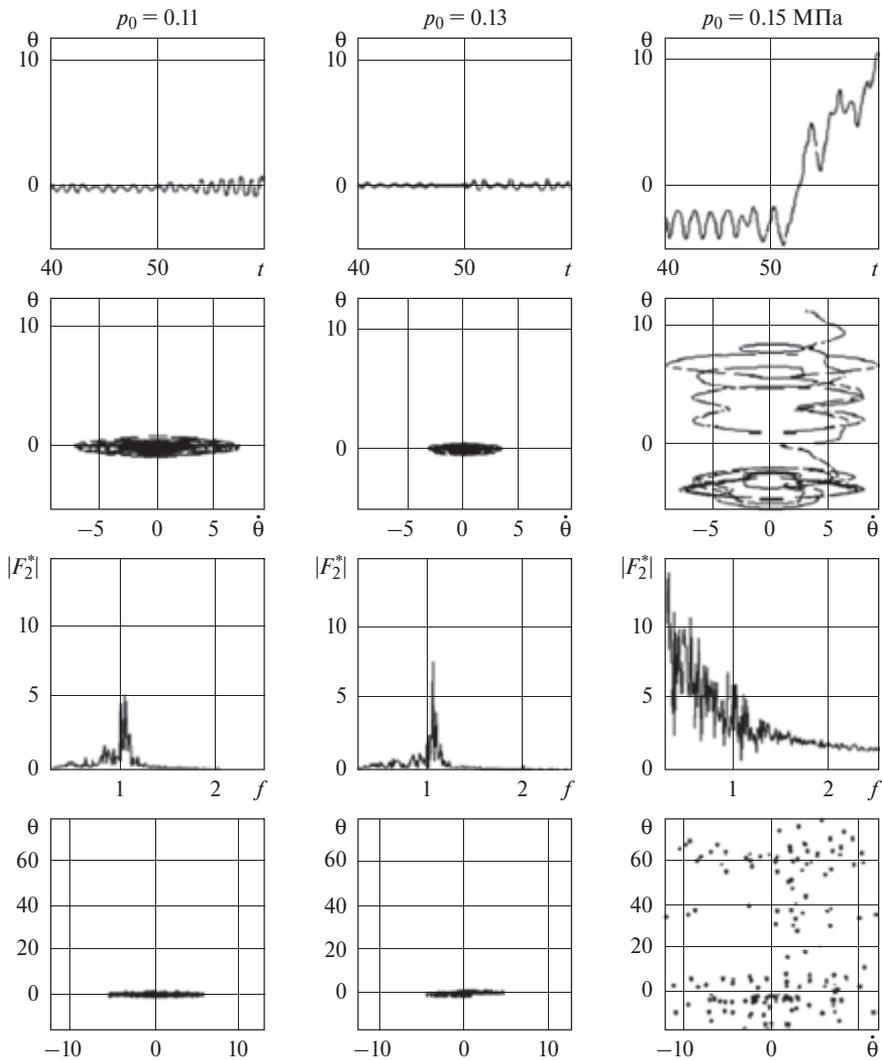
Влияние амплитуды переменной составляющей давления на пространственные колебания трубопровода при значении среднего давления  $p_0 = 7.08$  МПа представлено графиками на рис. 4–6. Слева направо расположены столбцы графиков для трех значений амплитуды переменной составляющей внутреннего давления  $p_a$ , которые также указаны сверху.

Из рис. 4 и 5 видно, что при  $p_0 = 7.08$  МПа изменение амплитуды переменного давления с  $p_a = 0.11$  МПа до  $p_a = 0.13$  МПа может привести к некото-

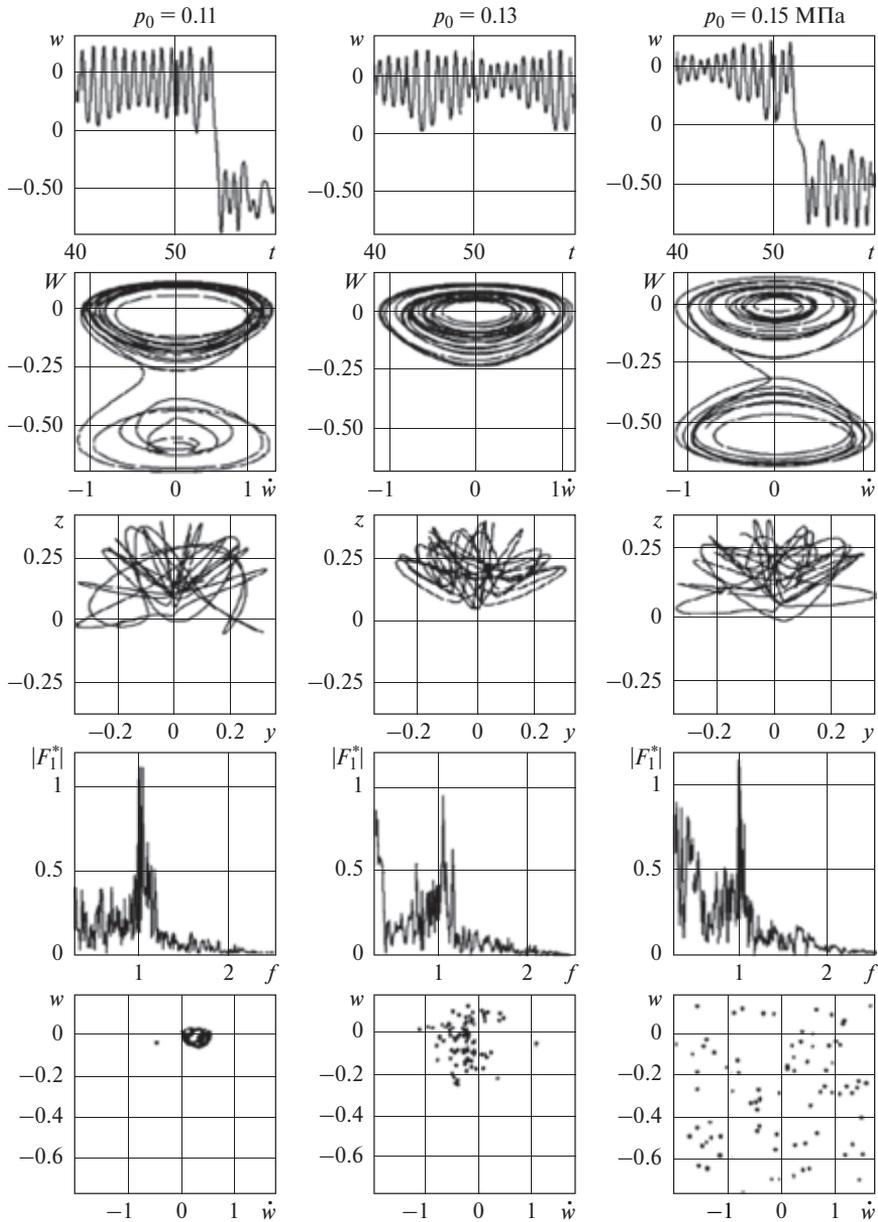


**Рис. 4.** Зависимости динамической составляющей прогиба  $w$  от времени  $t$ , фазовые траектории  $W$  и  $\dot{w}$ , траектории средней точки пролета  $x, y, z$ , спектры частот,  $|F_1^*|$ ,  $f$  и отображения Пуанкаре изгибных колебаний трубы в воздушной среде при среднем давлении  $p_0 = 7,08$  МПа, частоте  $f = 2,005$  Гц, начальной фазе  $\varphi_0 = 0$  рад и разных величинах амплитуды  $p_a$  переменного внутреннего давления

## Статика и динамика трубопроводов



**Рис. 5.** Зависимости угла  $\theta$  поворота трубы от времени  $t$ , фазовые траектории, спектры частот  $|F_2^*|$ ,  $f$  и отображения Пуанкаре вращательных колебаний трубы в воздушной среде, далее все по рис. 4



**Рис. 6.** Зависимости динамической составляющей прогиба  $w$  от времени  $t$ , фазовые траектории  $W$  и  $\dot{w}$ , траектории средней точки пролета  $x, y, z$ , спектры частот,  $|F_1^*|, f$  и отображения Пуанкаре изгибных колебаний трубы в водной среде при среднем давлении  $p_0 = 7,08$  МПа, частоте  $f = 1,100$  Гц, начальной фазе  $\varphi_0 = 0$  рад и разных величинах амплитуды  $p_a$  переменного внутреннего давления

рому уменьшению амплитуд изгибных и вращательных колебаний трубы в воздушной среде. Эти колебания остаются непериодическими несмотря на то, что значение среднего давления в трубе больше критического  $p'_0 = 5.08$  МПа [3].

Это обстоятельство означает, что при таких амплитудах внутреннего давления подводимой энергии недостаточно для дальнейшей раскачки трубопровода. Если амплитуда переменной составляющей давления равна  $p_a = 0.15$  МПа, то изгибные и вращательные колебания трубы становятся хаотическими, амплитуды многократно возрастают, их спектры частот приобретают сплошной вид и область отображения Пуанкаре существенно расширяется (рис. 4 и 5).

В отдельные моменты времени средняя точка трубопровода оказывается выше горизонтальной плоскости, проходящей через опоры.

Из рис. 6 видно, что при движении трубопровода в водной среде изгибные колебания являются хаотическими для всех трех значений амплитуды переменного давления:  $p_a = 0.11, 0.13$  и  $0.15$  МПа. Это объясняется значительным уменьшением величины статической составляющей прогиба  $W_0$  трубы вследствие действия выталкивающей силы Архимеда. При среднем давлении  $p_0 = 7.08$  МПа статическая составляющая прогиба равна  $W_0 = 0.353$  м для колебаний трубы в воздушной среде и  $W_0 = 0.281$  м – в водной среде. Уменьшение величины статической составляющей прогиба  $W_0$  приводит к существенному уменьшению моментов сил сопротивления, действующих на трубопровод со стороны окружающей среды. Видно, что траектории средней точки пролета также занимают значительную часть плоскости с положительными координатами  $z$  при колебаниях трубы в хаотических режимах. Вращательные колебания также являются хаотическими при всех принятых выше значениях амплитуды  $p_a$ .

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная модель пространственных колебаний трубопровода является наиболее простой. В ней исключены начальные пространственные искривления оси и сопротивление вращению трубопровода в опорах. Учет даже одного из этих факторов резко усложняет задачу, так как тогда необходимо рассматривать пространственный изгиб трубопровода, при котором ось не будет лежать в одной плоскости, и деформацию кручения вокруг этой оси. Тем не менее, указанная простейшая модель позволяет выявить важные свойства динамики.

При принятых значениях среднего давления в трубопроводе его изгибные и вращательные колебания являются непериодическими, имеют вид биений и складываются из гармонических колебаний с тремя частотами, соответствующими частоте переменного внутреннего давления и первым собственным частотам изгибных и вращательных колебаний.

С увеличением среднего давления происходит увеличение амплитуды изгибных колебаний и незначительное изменение амплитуды вращательных колебаний. Однако при достижении среднего давления критического значения и выше спектры частот изгибных и вращательных колебаний становятся сплошными, амплитуды их возрастают многократно.

Вращательные колебания трубопровода в большей степени влияют на его изгибные колебания, чем последние на вращательные колебания.

Анализ показывает, что динамическое поведение рассмотренной системы отличается большим разнообразием в зависимости от входных параметров. Ввиду большого числа последних не удастся определить разные режимы движения трубопровода через небольшое число безразмерных параметров. Поэтому для заданного набора входных параметров по использованной модели трубопровода необходимо проводить отдельный анализ.

### § 3. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА С УПРУГО-СМЕЩАЮЩЕЙСЯ ОПОРОЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННЕГО УДАРНОГО ДАВЛЕНИЯ

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

В оборудовании нефтегазовой и атомной промышленности, в энергетических установках, технологических машинах и других инженерных сооружениях для транспортировки жидкостей и газов широко используются трубопроводы. Поэтому исследование пространственных колебаний трубопровода при действии внутреннего переменного и ударного давлений представляет большой интерес.

Общие вопросы теории изгиба трубопроводов и шлангов рассматривались в [1]. Влияние внутреннего перепада давления в трубе на ее статический изгиб и устойчивость изучались в [2, 3], а механика колебаний труб, содержащих жидкость или газ, – в [4, 5]. Вопросы волновой стабилизации колебаний и предупреждения аварий в трубопроводах рассмотрены в [6, 7]. Динамические явления в кластере упругих труб, которые обтекаются осевым потоком жидкости, рассмотрены в [8]. Влияние внутреннего перепада давления на динамику трубопровода теоретически и экспериментально изучено в [9–11].

- 
1. *Светлицкий В. А.* Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1979. 280 с.
  2. *Ильгамов М. А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.
  3. *Ilgamov M. A.* Static problems of hydroelasticity. Moscow: Fizmatlit, 1998. 208 p.
  4. *Chen S. S.* Forced vibration of a cantilevered tube conveying fluid // *J. of the Acoustical Society of America*. 1970. V. 48. P. 773–775.
  5. *Ibrahim R. A.* Mechanics of pipes conveying fluids // *ASME J. of Pressure Vessel Technology*. 2010. V. 132. P. 1–32.
  6. *Ганиев Р. Ф., Низамов Х. Н., Дербуков Е. И.* Волновая стабилизация и предупреждение аварий в трубопроводах. М.: Из-во МГТУ, 1996. 258 с.
  7. *Ганиев Р. Ф.* Нелинейные резонансы и катастрофы. Надежность, безопасность и бесшумность. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2013. 592 с.
  8. *Paidoussis M. P.* The dynamics of clusters of flexible cylinders in axial flow: theory and experiments // *J. of Sound and Vibration*. 1979. V. 65. P. 391–417.
  9. *Ilgamov M. A., Tang D. M., Dowell E. H.* Flutter and forced response of a cantilevered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge // *J. of Fluids and Structures*. 1994. V. 8. P. 139–156.
  10. *Tang D. M., Ilgamov M. A., Dowell E. H.* Buckling and post-buckling behavior of a pipe subjected to internal pressure // *J. of Appl. Mech.* 1995. V. 62. № 3. P. 595–600.
  11. *Ильгамов М. А., Мишин В. Н.* Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости // *Изв. РАН. МТТ*. 1997. № 1. С. 181–192.

В [12–15] теоретически и экспериментально исследованы вынужденные и параметрические изгибные колебания трубы с внутренним потоком жидкости. Влияние внешнего и внутреннего воздействия на изгибные колебания трубы, транспортирующей жидкость со сверхкритической скоростью, изучено в [16–18]. Исследование колебаний газового трубопровода, состоящего из стального, композитного и цементного слоев, приведено в [19]. Нелинейные колебания трубы с учетом ее продольной деформации исследованы в [20].

В [21–23] рассмотрены пространственные колебания трубопровода в сплошной среде при действии внутреннего давления, изменяющегося по гармоническому закону. Динамическая реакция трубы на внутреннее ударное давление рассмотрена в [24, 25]. В [26] представлен широкий обзор литературы, посвященной исследованию динамического взаимодействия трубопроводных систем с транспортируемой жидкостью. Там же дан сравнительный анализ известных математических моделей, описывающих колебания в системе трубопровод–жидкость, и обсуждены исследования, в которых показывается влияние различных граничных условий и параметров системы на ее динамику.

- 
12. Миронов М. А., Пятаков П. А., Андреев А. А. Вынужденные колебания трубы с потоком жидкости // Акустический журнал. 2010. Т. 56. № 5. С. 684–692.
  13. McDonald R. J., Namchivaya N. Sri. Pipes conveying pulsating fluid near a 0:1 resonance: global bifurcations // J. of Fluids and Structures. 2005. V. 21. P. 665–687.
  14. Panda L. N., Kar R. C. Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with parametric and internal resonances // J. Nonlinear Dynamics. 2007. V. 49. P. 9–30.
  15. Panda L. N., Kar R. C. Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with combination, principal parametric and internal resonances // J. of Sound and Vibration. 2008. V. 309. P. 375–406.
  16. Zhang Y. L., Chen L. Q. Internal resonance of pipes conveying fluid in the supercritical regime // J. Nonlinear Dynamics. 2012. V. 67. P. 1505–1514.
  17. Zhang Y. L., Chen L. Q. External and internal resonances of the pipe conveying fluid in the supercritical regime // J. of Sound and Vibration. 2013. V. 332. P. 2318–2337.
  18. Chen L. Q., Zhang Y. L., Zhang G. C., Ding H. Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed // International J. of Non-Linear Mechanics. 2014. V. 58. P. 11–21.
  19. Zou G. P., Cheraghi N., Taheri F. Fluid-induced vibration of composite gas pipelines // J. of Solids and Structures. 2005. V. 42. P. 1253–1268.
  20. Modarres-Sadeghi Y., Paidoussis M. P. Nonlinear dynamics of extensible fluid conveying pipes, supported at both ends // J. of Fluids and Structures. 2009. V. 25. P. 535–543.
  21. Ганиев Р. Ф., Ильгамов М. А., Хакимов А. Г., Шакирьянов М. М. Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 3–13.
  22. Шакирьянов М. М. Пространственные хаотические колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления // Изв. УНЦ РАН. 2016. № 4. С. 35–47.
  23. Ганиев Р. Ф., Ильгамов М. А., Хакимов А. Г., Шакирьянов М. М. Пространственные неперiodические колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 2. С. 3–12.
  24. Ганиев Р. Ф., Ильгамов М. А. Упругая реакция трубопровода на внутреннее ударное давление // ДАН. 2016. Т. 470. № 2. С. 162–165.
  25. Ильгамов М. А. Динамика трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 83–96.
  26. Li S., Karney B. W., Liu G. FSI research in pipeline systems – A review of the literature // J. of Fluids and Structures. 2015. V. 57. P. 277–297.

В данном параграфе по [27] излагаются пространственные изгибно-вращательные колебания трубопровода при действии внутреннего ударного давления. При этом учитывается связь между осевой и окружной деформациями трубопровода; скоростью движения транспортируемой среды пренебрегается.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются пространственные колебания трубопровода и заключенной в нем идеальной несжимаемой жидкости относительно оси, проходящей через опоры, при действии внутреннего ударного давления. Горизонтальная труба прикреплена на концах к сферическим шарнирным опорам. Одна из опор считается неподвижной, а другая – прикрепленной к линейно-упругим элементам (рис. 1). Длина трубы, ее внутренний радиус и толщина стенки  $L$ ,  $R_i$  и  $h$ , а суммарная масса однородной трубы и жидкости –  $m$ . Труба, изогнутая под действием собственного веса и постоянного давления  $p_0$  заключенной в ней идеальной несжимаемой жидкости, находится в отклоненном на небольшой угол  $\theta_0$  от вертикали положении. В момент времени  $t = 0$  ее отпускают без начальной угловой скорости. В этот же момент происходит гидравлический удар и в течение его характерного времени  $t_e$  действия внутреннее давление  $p_i$  в трубе резко изменяется. Оно становится равным сумме статической  $p_0$  и динамической  $p$  составляющих.

Форма динамической составляющей давления по времени  $t$  может быть разной, но по всей длине трубы устанавливается мгновенно в соответствии с моделью несжимаемой жидкости. Деформации, в числе которых и деформация кручения, связанные с выходом оси трубопровода из плоскости изгиба, предполагаются малыми. Поэтому в каждый момент времени пространственное движение трубопровода можно рассматривать как совокупность изгибных пе-

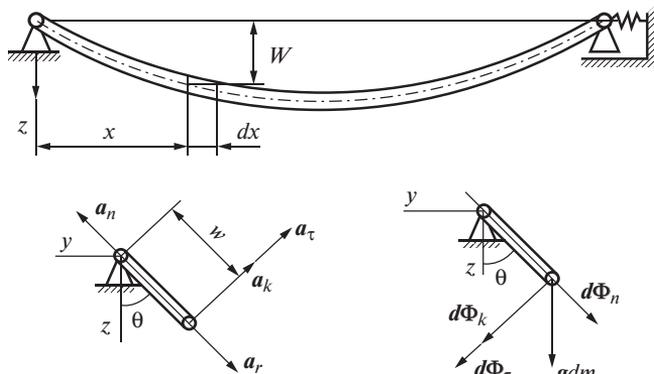


Рис. 1. Расчетная схема трубопровода с упруго-смещающейся опорой

27. Ганиев Р. Ф., Ильгамов М. А., Хакимов А. Г., Шакирьянов М. М. Пространственные колебания трубопровода с упруго-смещающейся опорой при действии внутреннего ударного давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. Т. 47. № 6. С. 3–12.

ремещений в одной плоскости и свободного поворота этой плоскости на угол  $\theta$  вокруг оси  $x$ , проходящей через опоры. Учитываются силы инерции Кориолиса.

На рис. 1 изображены прогиб  $W$  элемента трубы длиной  $dx$  и массой  $dm = (m/L)dx$ , его ускорения и силы, действующие на него. Здесь  $a_k$ ,  $a_r$ ,  $a_\tau$  и  $a_n$  – кориолисово, относительное, переносные касательное и нормальное ускорения;  $gdm$  – сила тяжести,  $d\Phi_r$ ,  $d\Phi_\tau$ ,  $d\Phi_n$  и  $d\Phi_k$  – относительная, касательная, нормальная силы инерции и сила инерции Кориолиса. Выражения для ускорений выделенного элемента, а также сил, приложенных к нему, приведены в [21] и в § 1 этой главы

$$a_r = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad a_\tau = W \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad a_n = W \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad a_k = 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$d\Phi_r = a_r dm, \quad d\Phi_\tau = a_\tau dm, \quad d\Phi_n = a_n dm, \quad d\Phi_k = a_k dm$$

Дифференциальное уравнение вращательного движения трубы, представленное согласно принципу Даламбера как уравнение ее условного равновесия относительно оси  $x$ , имеет вид

$$-\int_{(m)} W \sin \theta g dm - M_u - \int_{(m)} W d\Phi_\tau - \int_{(m)} W d\Phi_k = 0, \quad (2.2)$$

$$M_u = J_p \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad J_p = 2\rho L J, \quad J = \frac{\pi}{4} [(R_i + h)^4 - R_i^4],$$

где  $\rho_p$  – плотность материала трубы.

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний трубопровода, учитывающее связь между его осевой и окружной деформациями, следующее [24]

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} dm = -EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} dx -$$

$$-\left[ Fp_i(1 - \chi) - \alpha \int_0^L \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx + g \cos \theta dm + d\Phi_n, \quad (2.3)$$

$$F_i = \pi R_i^2, \quad J = \frac{\pi}{4} [(R_i + h)^4 - R_i^4], \quad \chi = \frac{2\nu}{1 + \lambda}, \quad \lambda = \frac{Eh}{CL}, \quad \alpha = \frac{\pi Eh R_i}{(1 + \lambda)L}.$$

Здесь  $E$  и  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала трубы,  $C$  – продольная жесткость упругих элементов креплений подвижной опоры.

### 3. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

Функция общего прогиба  $W$ , которая удовлетворяет условиям шарнирного закрепления на концах ( $x = 0, L$ ), может быть представлена в виде разложения

$$W = \sum_{n=1,3,\dots} [W_{0n} + w_n(t)] \sin n\beta x, \quad \beta = \frac{\pi}{L}. \quad (3.1)$$

Первая часть прогиба обусловлена действием собственного веса  $mg$  трубопровода с жидкостью и постоянного внутреннего давления  $p_0$ , а вторая – добавочного динамического давления  $p$ .

Так как нагрузки на трубопровод симметричны относительно плоскости, проходящей через середину его пролета, то рассматриваем симметричные деформации трубопровода относительно этой плоскости. Поэтому целое число  $n$  в разложении (3.1) принимает лишь нечетные значения. В нелинейной задаче учет двух-трех членов в разложении (3.1) приводит к большим математическим сложностям. Однако, как известно из теории колебаний упругих систем, отношения амплитуд  $W_{0n}/W_{01}$  и  $w_n/w_1$  имеют порядок  $1/n^5$ . Поэтому в настоящей работе в качестве функции  $W$  принимается одночленная аппроксимация

$$W = [W_{01} + w_1(t)] \sin \beta x. \quad (3.2)$$

Здесь  $W_{01}$  и  $w_1(t)$  – амплитуды статической и динамической составляющих прогиба средней точки пролета трубы. Далее индекс 1 у этих величин опускается.

Подставив выражения (2.1), (3.2) в уравнения (2.2), (2.3) и применив к последнему процедуру Бубнова–Галеркина, получаем нелинейные дифференциальные уравнения вращательных и изгибных колебаний трубопровода

$$\ddot{\theta} \left[ \frac{2J_p}{m} + (W_0 + w)^2 \right] + 2 \left( \dot{\theta} \dot{w} + \frac{2g}{\pi} \sin \theta \right) (W_0 + w) = 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w} + \frac{\beta^4 EJL}{m} (W_0 + w) &= \frac{4g}{\pi} \cos \theta + (W_0 + w) \dot{\theta}^2 + \\ + \frac{\beta^2 L}{m} \left[ F_i (1 - \chi) (p_0 + p) - \frac{\alpha \beta^2 L}{2} (W_0 + w)^2 \right] &(W_0 + w). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь и далее точки над буквами обозначают производные по времени  $t$ .

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (3.3), (3.4) следующие:

$$t = 0, \quad \theta = \theta_0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad w = \dot{w} = 0. \quad (3.5)$$

При  $\theta = \theta_0$ ,  $\dot{\theta}(t) = 0$ ,  $w(t) \equiv 0$ ,  $p \equiv 0$  из (3.3) следует уравнение для определения статической составляющей  $W_0$  прогиба трубопровода

$$W_0^3 + \frac{2}{\alpha \beta^2 L} \left[ \beta^2 EJ - F_i (1 - \chi) p_0 \right] W_0 - \frac{8mg \cos \theta_0}{\alpha \beta^4 \pi L^2} = 0. \quad (3.6)$$

Из (3.6) без первого члена видно, что решение линейного уравнения неограниченно возрастает при значении среднего давления

$$p'_0 = \frac{\pi^2 EJ}{L^2 F_i (1 - \chi)}. \quad (3.7)$$

Значение давления (3.7) приведено также в § 1 этой главы.

Так же, как и в [24, 25], для качественного и количественного анализа динамики начального процесса деформирования трубопровода введем рассмотрение инерционную стадию, переходящую с течением времени в инерционно-упругую стадию свободных колебаний. На обеих стадиях угловое  $\theta$  и изгибное  $w$  перемещения будут предполагаться малыми, поэтому  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$ ,  $w/W_0 \ll 1$ . Тогда с учетом (3.6) уравнения (3.3), (3.4) запишутся

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + k_2^2 \theta &= -\delta \dot{w} \dot{\theta}, \\ \ddot{w} + k_1 w + 3\gamma W_0 w^2 + \gamma w^3 &= \varepsilon W_0 p_e + W_0 \dot{\theta}^2, \\ \delta &= \frac{2W_0}{2J_p/m + W_0^2}, \quad k_1 = \varepsilon [p'_0 - (p_0 + p_e)], \\ k_2^2 &= \frac{2g\delta}{\pi}, \quad \varepsilon = \frac{\beta^2 L F_i (1 - \chi)}{m}, \quad \gamma = \frac{\alpha \beta^4 L^2}{2m}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Следует отметить, что, несмотря на свою ограниченность, продолжительность  $t_*$  инерционной стадии может быть значительно больше характерной продолжительности  $t_e$  ударной нагрузки. Это связано с тем, что время воздействия ударных волн в жидкостных и газовых средах имеет порядок  $10^{-4} \div 10^{-3}$  с [28]. Далее рассмотрим случай ступенчатого возрастания давления от значения  $p_0$  в момент времени  $t=0$  до постоянной величины  $p_0 + p_e$  в интервале  $0 < t < t_e$  и понижения давления до постоянного значения  $p_0$  при  $t \geq t_e$ .

Для простоты время  $t_*$  инерционной стадии процесса примем равным времени  $t_e$  ударной нагрузки. Поскольку инерционная стадия характеризуется малостью упругих и гравитационных сил по сравнению с инерционными силами, то в этом случае уравнения (3.8) примут вид

$$\ddot{\theta} = -\delta \dot{w} \dot{\theta}, \quad \ddot{w} = \varepsilon W_0 p_e + W_0 \dot{\theta}^2. \quad (3.9)$$

Из системы (3.9) следуют также линеаризованные дифференциальные уравнения вращательных и изгибных движений трубы. Имеем

$$\ddot{\theta} = 0, \quad \ddot{w} = \varepsilon W_0 p_e. \quad (3.10)$$

Решение системы (3.10) с начальными условиями (3.5) имеет известный вид

$$\theta = \theta_0, \quad w = \frac{\varepsilon W_0 p_e t^2}{2} \quad (0 < t < t_e). \quad (3.11)$$

В этом приближении за короткое время удара угол  $\theta$  заметно не уменьшается по сравнению с начальным углом  $\theta_0$ .

После прекращения действия ударной нагрузки ( $p_e = 0$  при  $t > t_e$ ) трубопровод совершает свободные изгибно-вращательные движения под действием постоянного внутреннего давления, инерционных, упругих и гравитационных сил. Ввиду малости начального угла поворота и нулевой начальной угловой скорости вращения трубопровода на этой стадии динамики следует ожидать, что вклад нелинейных членов  $\delta\dot{\theta}\dot{w}$ ,  $W_0\dot{\theta}^2$  в уравнениях (3.8) также будет незначительным. Поэтому на стадии  $t > t_e$  дифференциальные уравнения вращательных и изгибных движений трубы запишутся

$$\ddot{\theta} + k_2^2\theta = 0, \quad \ddot{w} + k_0w + 3\gamma W_0w^2 + \gamma w^3 = 0, \quad k_0 = \varepsilon(p'_0 - p_0). \quad (3.12)$$

Здесь и далее точки над буквами обозначают производные по времени  $\tau = t - t_e$ . Будем рассматривать изгибные колебательные движения трубы при значениях среднего внутреннего давления, меньших критического (3.7). В противном случае значение критического давления нужно определять по нелинейному уравнению (3.6). Если во втором уравнении (3.12) отбросить нелинейные члены, то получим линеаризованное уравнение изгибных колебаний

$$\ddot{w} + k_{10}^2w = 0, \quad k_{10}^2 = k_0, \quad (3.13)$$

где  $k_{10}$  – круговая частота линейных изгибных колебаний трубы.

Начальными условиями для уравнений (3.12), (3.13) служат функции и их производные решения (3.11) при  $t = t_e$ . Таким образом, при  $\tau = 0$  имеем

$$\theta = \theta_0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad w = \frac{\varepsilon W_0 p_e t_e^2}{2}, \quad \dot{w} = \varepsilon W_0 p_e t_e. \quad (3.14)$$

Функцию, аппроксимирующую решение нелинейного дифференциального уравнения (3.12), представляем в виде суммы [29]

$$w = A \cos k\tau + B \sin k\tau. \quad (3.15)$$

Здесь постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  определяются из начальных условий (3.14), а выражение для круговой частоты  $k$  свободных нелинейных изгибных колебаний трубы находится методом гармонического баланса

$$A = \frac{\varepsilon W_0 p_e t_e^2}{2}, \quad B = \frac{\varepsilon W_0 p_e t_e}{k}, \quad k = \sqrt{\varepsilon(p'_0 - p_0) + \frac{3}{4}\gamma(A^2 + B^2)}. \quad (3.16)$$

Решения линейных дифференциальных уравнений вращательных (3.12) и изгибных (3.13) колебаний с учетом начальных условий (3.14) запишутся

$$\theta = \theta_0 \cos k_2\tau, \quad w = A \left( \cos k_{10}\tau + \frac{2}{k_{10}t_e} \sin k_{10}\tau \right). \quad (3.17)$$

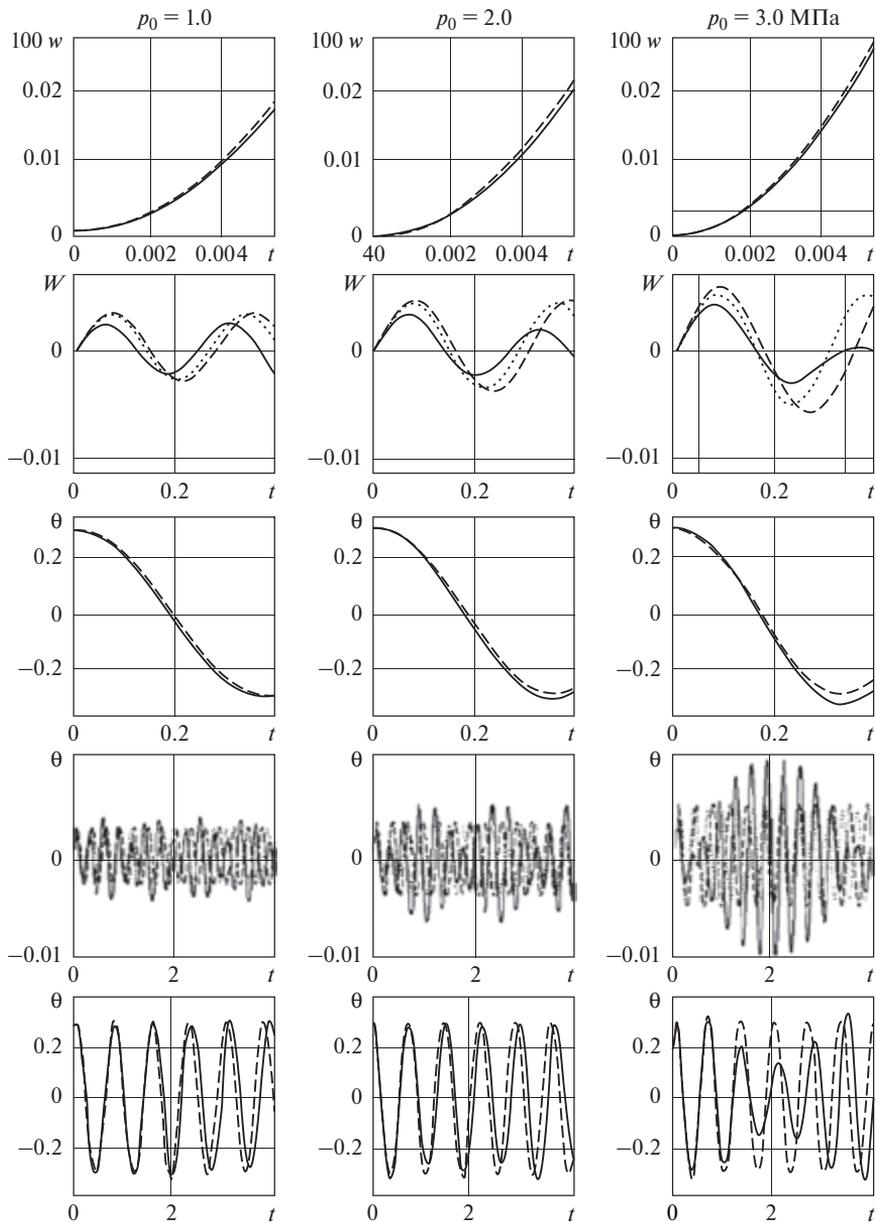
Из решений (3.11), (3.15)–(3.17) можно сделать вывод о том, что при определенных значениях основных параметров вращательные и изгибные колебания трубопровода могут происходить по гармоническому закону. При этом частота вращательных колебаний не зависит от начальных условий, а частота изгибных колебаний зависит от них.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Вычисления были проведены для стального трубопровода  $126 \times 3$ . Его длина, внутренний радиус и толщина стенки:  $L = 8.0$  м,  $R_i = 0.06$  м и  $h = 0.003$  м. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала трубы:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа и  $\nu = 0.3$ . Продольная жесткость упругих элементов крепления подвижной опоры:  $C = 16.0$  МПа. Начальный угол отклонения плоскости изгиба каждого трубопровода от вертикали равен  $\theta_0 = 0.3$  рад.

Рассматривались три величины среднего внутреннего давления:  $p_0 = 1.0, 2.0$  и  $3.0$  МПа. Приближенные значения амплитуд  $W_0$  статической составляющей прогиба средней точки пролета труб определялись из численного решения алгебраического уравнения (3.6). Для указанных величин среднего давления получены соответственно значения:  $W_0 = 0.0240, 0.0287, 0.0357$  м. Динамическая составляющая внутреннего давления имела одно значение:  $p_e = 6.0$  МПа. Продолжительность  $t_e$  действия ударной нагрузки принималась равной  $0.0055$  с.

Результаты вычислений приведены на рис. 2 в виде графических зависимостей амплитуды  $w$  динамической составляющей прогиба средней точки пролета и угла  $\theta$  поворота трубопровода от времени  $t$ . На рис. 2 разные столбцы относятся к разным значениям среднего давления  $p_0$ , которые указаны сверху. Первая строка графиков относится к зависимости  $w(t)$  на инерционной стадии, а последующие строки – к  $w(t)$  и  $\theta(t)$  при  $t > t_e$ . Переменные на графиках измеряются: время  $t$  – в секундах, динамическая составляющая прогиба  $w$  – в метрах, угол  $\theta$  – в радианах. На графиках сплошными линиями нанесены результаты вычислений, полученные численным интегрированием задачи Коши (3.3)–(3.5) методом Рунге–Кутты. Штриховыми и точечными линиями обозначены графические зависимости аналитических решений (3.11), (3.17) и (3.15), (3.16) соответственно линейных уравнений движения и нелинейного уравнения динамического изгиба трубопровода. Из первой строки графиков рис. 2 видно, что на инерционной стадии динамического процесса увеличение среднего давления приводит к значительному увеличению перемещения и скорости средней точки пролета трубы. Сказанное подтверждается как формулами (3.14), так и численным интегрированием нелинейной системы уравнений (3.3), (3.4) с начальными условиями (3.5). Увеличение перемещения и скорости средней точки пролета объясняется тем, что с увеличением среднего давления в трубопроводе происходит увеличение кривизны его осевой линии. В трубопроводе с внутренним давле-



**Рис. 2.** Зависимости динамической составляющей прогиба  $w$  и угла  $\theta$ , поворота трубы от времени  $t$ . Сплошные линии – результат численного интегрирования нелинейных уравнений движения (3.3), (3.4), штриховые – аналитического решения (3.17) линейных уравнений движения, пунктирные – аналитического решения (3.15), (3.16) нелинейного уравнения динамического изгиба трубы

нием изменение кривизны осевой линии вызывает дополнительную поперечную нагрузку [25]. Видно также, что на инерционной стадии процесса сплошные и штриховые линии на графиках практически сливаются в одну кривую. Отсюда следует, что на инерционной стадии динамики трубопровода можно успешно пренебрегать упругими и неударными силами.

Стадия свободных колебаний трубы начинается в момент времени, когда заканчивается время инерционной стадии. В общем случае развитие процесса деформирования на данной стадии во многом зависит от величин перемещений и скоростей, которые приобретают точки трубопровода в конце инерционной стадии. Приближенные значения динамической составляющей изгибного перемещения и скорости средней точки пролета, вычисленные по формулам (3.14):  $w = 1.79 \cdot 10^{-4}$  м и  $\dot{w} = 0.0651$  м/с ( $p_0 = 1.0$  МПа),  $w = 2.17 \cdot 10^{-4}$  м и  $\dot{w} = 0.0788$  м/с ( $p_0 = 2.0$  МПа),  $w = 2.71 \cdot 10^{-4}$  м и  $\dot{w} = 0.0985$  м/с ( $p_0 = 3.0$  МПа).

Таким образом, при всех принятых величинах среднего давления изгибные перемещения средней точки пролета близки к нулю, а ее скорости имеют конечные значения. Это особенность инерционной стадии. Поэтому при рассмотрении дальнейшего деформирования трубопровода начальные изгибные перемещения ( $t = t_e$ ) с достаточной точностью можно принять равными нулю. Зависимости динамической составляющей прогиба  $w$  и угла  $\theta$  поворота от времени  $0.4 \geq t \geq 0$  даны графиками на второй и третьей строках рис. 2. Здесь обе стадии представлены совмещенными. На графиках второй строки можно видеть, что с увеличением среднего давления происходит также увеличение амплитуды динамической составляющей прогиба. Причина та же: увеличение кривизны осевой линии, а вместе с ним и увеличение дополнительной поперечной нагрузки на трубу. На графиках второй строки видна также общая закономерность: в определенные отрезки времени, благодаря полученной от удара кинетической энергии, изгибные перемещения сначала увеличиваются, а затем уменьшаются. Такая динамика обусловлена тем, что в самом начале инерционно-упругой стадии ввиду малости изгибных деформаций малы и упругие силы. С увеличением изгибных деформаций растут также упругие силы. Далее большая часть кинетической энергии расходуется на работу гравитационных и возросших упругих сил и поэтому прогибы трубы уменьшаются.

На приведенных графиках можно видеть, что продолжительности вышеуказанных отрезков времени увеличиваются с увеличением среднего давления: 0.12 с ( $p_0 = 1.0$  МПа), 0.14 с ( $p_0 = 2.0$  МПа), 0.16 с ( $p_0 = 3.0$  МПа). Кроме того, в эти моменты времени амплитуды изгибных перемещений, вычисленные с использованием линейного решения (штриховые линии), всегда больше тех же амплитуд, полученных из нелинейных решений (точечная и сплошная линии). При этом разница в амплитудах изгибных перемещений линейного и нелинейных решений увеличивается с увеличением среднего давления в трубе. При всех принятых величинах среднего давления

с течением времени наблюдается значительное расхождение между сплошной, точечной и штриховой линиями. Причина расхождения – влияние вращательного движения трубы на ее изгибные перемещения.

Зависимости угла поворота трубы от времени на стадии свободных упругих колебаний даны третьей строкой графиков рис. 2. На графиках видно, что от начала инерционно-упругой стадии до времени 0.10 с ( $p_0 = 1.0$  МПа), 0.11 с ( $p_0 = 2.0$  МПа), 0.14 с ( $p_0 = 3.0$  МПа) сплошная и штриховая линии слиты в одну линию. За это время угол  $\theta$  от значения 0.3 рад. уменьшается приблизительно до значения 0.2 рад. Далее сплошная и штриховая линии все более расходятся с течением времени. Математически это можно объяснить следующим образом. Если сопоставить соответствующие сплошные линии второй и третьей строк графиков, то можно видеть, что в моменты времени 0.06 с ( $p_0 = 1.0$  МПа), 0.07 с ( $p_0 = 2.0$  МПа) и 0.08 с ( $p_0 = 3.0$  МПа) изгибные перемещения достигают своих максимумов. После этого становятся отрицательными знаки скоростей изгибных перемещений. По этой причине становятся отрицательными и моменты сил инерции Кориолиса в уравнении (3.3).

На третьей строке графиков сплошные линии располагаются ниже штриховых линий еще и потому, что в отрезках времени  $0.12 \div 0.25$  с ( $p_0 = 1.0$  МПа),  $0.14 \div 0.28$  с ( $p_0 = 2.0$  МПа) и  $0.16 \div 0.35$  с ( $p_0 = 3.0$  МПа) динамическая составляющая прогиба принимает отрицательные значения. Это приводит к уменьшению величины полного прогиба трубопровода ( $W = W_0 + w$ ). Поэтому в конце отмеченных отрезков времени, согласно взаимодействию относительного изгибного и переносного вращательного движений, трубопровод поворачивается в сторону, противоположную начальному отклонению, на больший, чем 0.3 рад угол.

Зависимости  $w(t)$  и  $\theta(t)$  на инерционно-упругой стадии в более продолжительное время ( $4.0 \geq t \geq 0$ ) представлены на четвертой и пятой строках графиков. На четвертой строке графиков видно, что свободные изгибные нелинейные колебания трубы имеют вид биений. В решении (3.17) линеаризованных уравнений биения отсутствуют, поскольку в этом случае нет взаимодействия между изгибными и вращательными колебаниями трубы. Из Фурье-анализа, приведенного в [23], следует, что в нашем примере изгибные нелинейные колебания трубопровода будут складываться из колебаний с двумя частотами: первой собственной частотой изгибных колебаний и с удвоенной первой собственной частотой вращательных колебаний трубопровода. При принятых параметрах круговые частоты собственных изгибных и вращательных колебаний имеют значения:  $k = 23.2$  и  $k_2 = 8.29$  рад/с ( $p_0 = 1.0$  МПа),  $k = 21.7$  и  $k_2 = 8.83$  рад/с ( $p_0 = 2.0$  МПа),  $k = 20.5$  и  $k_2 = 9.39$  рад/с ( $p_0 = 3.0$  МПа). Видно, что с увеличением среднего давления значения частот  $k$  и  $k_2$  сближаются. Кроме того, на третьем столбце пятой строки графиков отчетливо можно увидеть также, что нелинейные вращательные колебания трубопровода принимают вид биений.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный выше анализ позволяет сделать следующие выводы.

На инерционной стадии динамики трубопровода без заметной погрешности можно пренебрегать упругими и неударными силами.

Инерционно-упругая стадия деформирования трубопровода определяется главным образом скоростью, которая находится в конце инерционной стадии, в то время как соответствующий прогиб с достаточной точностью можно принять равным нулю.

Увеличение среднего давления приводит на инерционной стадии динамического процесса к значительному увеличению перемещения и скорости средней точки пролета трубы.

С увеличением среднего давления на инерционно-упругой стадии процесса также происходит увеличение амплитуды динамической составляющей прогиба.

На инерционно-упругой стадии с течением времени свободные изгибные и вращательные колебания трубы принимают вид биений.

На инерционно-упругой стадии деформирования амплитуды изгибных перемещений, вычисленные с использованием линейного решения, всегда больше тех же амплитуд, полученных из нелинейных решений.

При принятых величинах среднего давления на инерционно-упругой стадии по истечении определенного времени имеют место значительные расхождения линейного и нелинейного решений.

На инерционно-упругой стадии в отдельные моменты времени труба может поворачиваться на больший угол, чем начальный угол поворота.

## § 4. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННЕГО УДАРНОГО ДАВЛЕНИЯ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение пространственных колебаний трубопровода имеет практический интерес ввиду их частого возбуждения в трубопроводных системах.

Общие вопросы механики трубопроводов и шлангов рассмотрены в [1] и других изданиях. Статический изгиб и устойчивость трубы при действии внутреннего перепада давления теоретически и экспериментально изучались в [2, 3]. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ, исследованы в [4]. Свободные колебания участка трубопровода и их свойства рассмотрены в [5–7].

Теоретическое и экспериментальное исследование вынужденных и параметрических изгибных колебаний трубы с внутренним потоком жидкости проведено в [8–11]. Влияние внешнего и внутреннего воздействия на изгибные колебания трубы, транспортирующей жидкость со сверхкритической скоростью, изучено в [12–14]. Исследование колебаний трехслойного трубопровода для транспортировки газа приведено в [15]. Нелинейная динамика трубопровода, заполненного сжимаемой средой, рассмотрена

1. Светлицкий В. А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
2. Ilgamov M. A. Static problems of hydroelasticity. М.: Fizmatlit, 1998. 208 p.
3. Tang D. M., Ilgamov M. A., E. H. Dowell. Buckling and post-buckling behavior of a pipe subjected to internal pressure // J. of Appl. Mech. 1995. V. 62. № 3. P. 595–600.
4. Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.
5. Акуленко Л. Д., Иванов М. И., Коровина Л. И., Нестеров С. В. Свободные колебания участка трубопровода // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 172–187.
6. Акуленко Л. Д., Иванов М. И., Коровина Л. И., Нестеров С. В. Основные свойства собственных колебаний протяженного участка трубопровода // Изв. РАН МТТ. 2013. № 4. С. 119–134.
7. Акуленко Л. Д., Гавриков А. А., Нестеров С. В. Собственные колебания трубопровода на упругом основании, транспортирующего жидкость // Изв. РАН МТТ. 2018. № 1. С. 123–133.
8. Миронов М. А., Пятаков П. А., Андреев А. А. Вынужденные колебания трубы с потоком жидкости // Акустический журнал. 2010. Т. 56. № 5. С. 684–692.
9. McDonald R. J., Namchivaya N. Sri. Pipes conveying pulsating fluid near a 0:1 resonance: global bifurcations // J. of Fluids and Structures. 2005. V. 21. P. 665–687.
10. Panda L. N., Kar R. C. Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with parametric and internal resonances // J. Nonlinear Dynamics. 2007. V. 49. P. 9–30.
11. Panda L. N., Kar R. C. Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with combination, principal parametric and internal resonances // J. of Sound and Vibration. 2008. V. 309. P. 375–406.
12. Zhang Y. L., Chen L. Q. Internal resonance of pipes conveying fluid in the supercritical regime // J. Nonlinear Dynamics. 2012. V. 67. P. 1505–1514.
13. Zhang Y. L., Chen L. Q. External and internal resonances of the pipe conveying fluid in the supercritical regime // J. of Sound and Vibration. 2013. V. 332. P. 2318–2337.
14. Chen L. Q., Zhang Y. L., Zhang G. C., Ding H. Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed // International J. of Non-Linear Mechanics. 2014. V. 58. P. 11–21.
15. Zou G. P., Cheraghi N., Taheri F. Fluid-induced vibration of composite gas pipelines // J. of Solids and Structures. 2005. V. 42. P. 1253–1268.

в [16, 17]. Сейсмические колебания трубопровода с жидкостью в грунтовой среде исследованы в [18, 19]. В [20–22] изучена нелинейная динамика конькового трубопровода, транспортирующего жидкость.

Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде при действии внутреннего давления, изменяющегося по гармоническому закону, рассмотрены в [23–25]. В [26] представлен широкий обзор литературы, посвященной исследованию динамического взаимодействия трубопроводных систем с транспортируемой жидкостью. Упругая реакция трубы на внутреннее ударное давление рассмотрена в [27, 28]. Предложенная в [28] процедура аналитического решения задачи позволяет учитывать реальное изменение ударного давления по времени.

Данный параграф посвящен изучению пространственных нелинейных колебаний участка трубопровода со скользящей опорой при действии внутреннего ударного давления. Изложение параграфа дается по [29].

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются пространственные колебания трубопровода и заключенной в нем идеальной несжимаемой жидкости относительно горизон-

16. *Modarres-Sadeghi Y., Paidoussis M. P.* Nonlinear dynamics of extensible fluid conveying pipes, supported at both ends // *J. of Fluids and Structures*. 2009. V. 25. P. 535–543.
17. *Bai Y., Xie W., Gao X., Xu W.* Dynamic analysis of a cantilevered pipe conveying fluid with density variation // *J. of Fluids and Structures*. 2018. V. 81. P. 638–655.
18. *Ан Е. В., Рашидов Т. Р.* Сейсמודинамика подземных трубопроводов, взаимодействующих с водонасыщенным мелкодисперсным грунтом // *Изв. РАН МТТ*. 2015. № 3. С. 89–104.
19. *Исраилов М. Ш.* Связанные сейсмические колебания трубопровода в бесконечной упругой среде // *Изв. РАН МТТ*. 2016. № 1. С. 57–66.
20. *Ilgamov M. A., Tang D. M., Dowell E. H.* Flutter and forced response of a cantilevered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge // *J. of Fluids and Structures*. 1994. V. 8. P. 139–156.
21. *Modarres-Sadeghi Y., Semler C., Wadham-Gagnon M., Paidoussis M. P.* Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 3: Three-dimensional dynamics in the presence of an end-mass // *J. of Fluids and Structures*. 2007. V. 23. P. 589–603.
22. *Luczko J., Czerwiński A.* Nonlinear three-dimensional dynamics of flexible pipes conveying fluids // *J. of Fluids and Structures*. 2017. V. 70. P. 235–260.
23. *Ганиев Р. Ф., Ильгамов М. А., Хакимов А. Г., Шакирьянов М. М.* Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2016. № 6. С. 3–13.
24. *Шакирьянов М. М.* Пространственные хаотические колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления // *Известия Уфимского научного центра РАН*. 2016. № 4. С. 35–47.
25. *Ганиев Р. Ф., Ильгамов М. А., Хакимов А. Г., Шакирьянов М. М.* Пространственные неперiodические колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2017. № 2. С. 3–12.
26. *Li S., Karney B. W., Liu G.* FSI research in pipeline systems – A review of the literature // *J. of Fluids and Structures*. 2015. V. 57. P. 277–297.
27. *Ганиев Р. Ф., Ильгамов М. А.* Упругая реакция трубопровода на внутреннее ударное давление // *ДАН*. 2016. Т. 470. № 2. С. 162–165.
28. *Ильгамов М. А.* Динамика трубопровода при действии внутреннего ударного давления // *Изв. РАН МТТ*. 2017. № 6. С. 83–96.
29. *Шакирьянов М. М.* Пространственные нелинейные колебания трубопровода при действии внутреннего ударного давления // *Изв. РАН МТТ*. 2019. № 6. С. 76–84

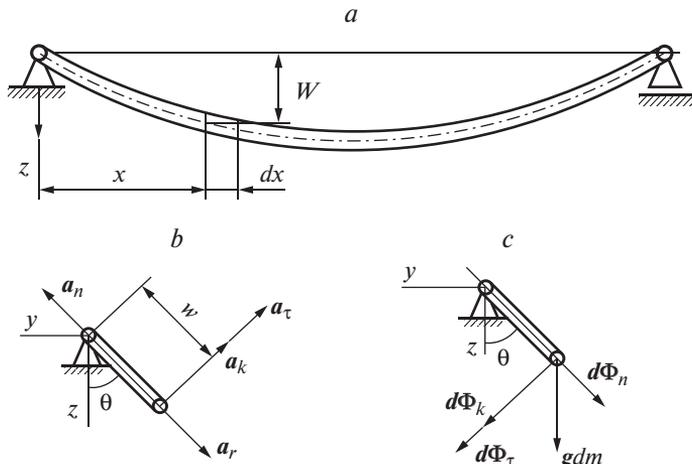


Рис. 1

тальной оси, проходящей через опоры, при действии внутреннего ударного давления. Крепления трубы на опорах – шарнирные. Одна из опор является неподвижной, а другая – может свободно смещаться в продольном направлении. Обе опоры допускают свободный поворот трубы вокруг оси. Расчетная схема трубопровода представлена на рис. 1, *a*. Длина, внутренний радиус, толщина стенки и плотность материала трубы обозначены через  $L$ ,  $R_i$ ,  $h$  и  $\rho$ , плотность заполняющей трубу жидкости – через  $\rho_0$ . Труба, изогнутая под действием собственного веса и постоянного давления  $p_0$  заключенной в ней жидкости находится в положении, отклоненном от вертикали на небольшой угол  $\theta_0$ . В момент времени  $t = 0$  начинается его изменение без начальной угловой скорости, а также происходит гидравлический удар. В течение характерного времени  $t_e$  внутреннее давление  $p_i$  в трубе становится равным сумме статической  $p_0$  и динамической  $p$  составляющих. Форма динамической составляющей давления по времени  $t$  может быть разной, но по всей длине трубы устанавливается мгновенно в соответствии с моделью несжимаемой жидкости. Предполагается, что при деформировании ось трубопровода всегда находится в одной плоскости, совершающей поворота на угол  $\theta$ .

Поскольку деформации, связанные с выходом оси трубопровода из плоскости изгиба, предполагаются малыми, то в каждый момент времени пространственное движение трубопровода можно рассматривать как совокупность изгибных перемещений в одной плоскости и свободного поворота этой плоскости на угол  $\theta$  вокруг оси  $x$ , проходящей через опоры. На рис. 1, *a*, *b*, *c* изображены прогиб  $W$  элемента трубы длиной  $dx$  и массой  $dm = \pi \{ \rho_0 R_i^2 + \rho [(R_i + h)^2 - R_i^2] \} dx$ , а также его ускорения и силы, действующие на него. Здесь  $g$ ,  $a_k$ ,  $a_r$ ,  $a_\tau$  и  $a_n$  – гравитационное, кориолисово, отно-

сительное, переносные касательное и нормальное ускорения;  $gdm$  – сила тяжести,  $d\Phi_r$ ,  $d\Phi_\tau$ ,  $d\Phi_n$  и  $d\Phi_k$  – относительная, касательная, нормальная силы инерции и сила инерции Кориолиса.

Выражения для ускорений выделенного элемента, а также сил, приложенных к нему, приведены в [23]:

$$a_r = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad a_\tau = W \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad a_n = W \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad a_k = 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$d\Phi_r = a_r dm, \quad d\Phi_\tau = a_\tau dm, \quad d\Phi_n = a_n dm, \quad d\Phi_k = a_k dm.$$

Дифференциальное уравнение вращательного движения трубопровода относительно оси  $x$  имеет вид

$$-\int_{(m)} W \sin \theta g dm - M_u - \int_{(m)} W d\Phi_\tau - \int_{(m)} W d\Phi_k = 0, \quad (2.2)$$

$$M_u = J_p \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad J_p = 2\rho L J, \quad J = \frac{\pi}{4} [(R_i + h)^4 - R_i^4].$$

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний трубы, учитывающее взаимодействие изменения кривизны ее осевой линии и внутреннего давления, следующее [23]:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} dm = -EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} dx - F_i p_i \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx + g \cos \theta dm + d\Phi_n, \quad F_i = \pi R_i^2. \quad (2.3)$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга материала трубы.

Функция прогиба трубопровода, удовлетворяющая условиям шарнирного крепления, принимается в виде

$$W = [W_0 + w(t)] \sin \beta x, \quad \beta = \frac{\pi}{L}. \quad (2.4)$$

Первая часть (2.4) обусловлена действием собственного веса  $mg$  трубопровода с жидкостью и постоянного внутреннего давления  $p_0$ , а вторая – добавочного динамического давления  $p$ .

Подставляя выражения (2.1), (2.4) в уравнения (2.2), (2.3) и применяя к последнему процедуру Бубнова–Галеркина, получаем нелинейные дифференциальные уравнения вращательных и изгибных колебаний трубопровода

$$\ddot{\theta} \left[ \frac{2J_p}{m} + (W_0 + w)^2 \right] + 2 \left( \dot{\theta} \dot{w} + \frac{2g}{\pi} \sin \theta \right) (W_0 + w) = 0, \quad (2.5)$$

$$\ddot{w} + \frac{\beta^4 E J L}{m} (W_0 + w) = \frac{4g}{\pi} \cos \theta + (W_0 + w) \dot{\theta}^2 + \frac{\beta^2 L F_i}{m} (p_0 + p) (W_0 + w). \quad (2.6)$$

## Статика и динамика трубопроводов

Здесь и далее точки над буквами обозначают производные по времени  $t$ .

Начальные условия

$$\theta = \theta_0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad w = \dot{w} = 0 \quad (t = 0). \quad (2.7)$$

Полагая в уравнении (2.6)  $\theta = \theta_0$ ,  $\dot{\theta}(t) \equiv 0$ ,  $w(t) \equiv 0$ ,  $p \equiv 0$ , определяем статическую составляющую прогиба середины пролета трубопровода. Имеем

$$W_0 = \frac{4gmL \cos \theta_0}{\pi^3 (\beta^2 EJ - F_i p_0)}. \quad (2.8)$$

Из (2.8) видно, что его решение неограниченно возрастает при значении среднего давления

$$p'_0 = \frac{\pi^2 EJ}{L^2 F_i}. \quad (2.9)$$

Значение давления (2.9) приведено также в § 1 и § 3 этой главы.

### 3. ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Для приближенного анализа динамики начального процесса деформирования трубопровода введем в рассмотрение инерционную стадию, переходящую с течением времени в инерционно-упругую стадию свободных колебаний [27, 28]. На обеих стадиях угловое  $\theta$  и изгибное  $w$  перемещения предполагаются малыми. Полагая в системе (2.5), (2.6)  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ ,  $w/W_0 \ll 1$  и учитывая равенство (2.8), имеем

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + k^2 \theta &= -\frac{2\delta}{W_0} \dot{\theta} \dot{w}, \quad \ddot{w} + \varepsilon(p'_0 - p_0 - p)w = W_0(\dot{\theta}^2 + \varepsilon p) - \frac{2g\theta^2}{\pi}, \\ k^2 &= \frac{2g\delta}{\pi W_0}, \quad \delta = \frac{2W_0^2}{W_0^2 + 2J_p/m}, \quad \varepsilon = \frac{\beta^2 L F_i}{m}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Далее рассмотрим случай ступенчатого возрастания давления от значения  $p_0$  в момент времени  $t = 0$  до постоянной величины  $p_0 + p_e$  в интервале  $0 < t < t_e$  и понижения давления до постоянного значения  $p_0$  при  $t \geq t_e$ . Для простоты время  $t_*$  инерционной стадии процесса примем равным времени  $t_e$  ударной нагрузки.

На инерционной стадии деформирования учитываются только ударные и инерционные силы. Кроме того, на этой стадии перемещения и скорости остаются малыми. Поэтому из (3.1) имеем

$$\ddot{\theta} = 0, \quad \ddot{w} = W_0 \varepsilon p_e. \quad (3.2)$$

Решение (3.2) с начальными условиями (2.7) следующее:

$$\theta = \theta_0, \quad w = \frac{\varepsilon W_0 p_e t^2}{2} \quad (0 \leq t \leq t_e). \quad (3.3)$$

Из (3.3) видно, что изгибные перемещения и их скорости находятся в прямой зависимости от амплитуды переменной составляющей внутреннего давления в трубе.

На инерционно-упругой стадии деформирования ( $p_e = 0$  при  $t > t_e$ ) трубопровод совершает свободные изгибно-вращательные движения под действием постоянного внутреннего давления, инерционных, упругих и гравитационных сил. Следовательно, на этой стадии первое уравнение системы (3.1) сохраняет свой вид, а во втором уравнении нужно исключить члены, содержащие  $p$ . Начальными условиями для этой системы служат функции и производные из (3.3) при  $t = t_e$ . Вводя время  $\tau = t - t_e$ , имеем

$$\theta = \theta_0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad w = \frac{\varepsilon W_0 p_e t_e^2}{2} \approx 0, \quad \dot{w} = \varepsilon W_0 p_e t_e \quad (\tau = 0). \quad (3.4)$$

Важно отметить, что время  $t_e$  воздействия ударных волн в жидкостных и газовых средах имеет порядок  $10^{-4} \div 10^{-3}$  с [28]. Поэтому в третьем из условий (3.4) в конце гидравлического удара изгибное перемещение без заметной погрешности можно принять равным нулю.

Рассмотрим лишь колебательные движения трубопровода, когда среднее давление  $p_0$  в жидкости меньше критического давления ( $p_0 < p'_0$ ). Для решения системы нелинейных уравнений (3.1) при  $p = 0$  воспользуемся методом последовательных приближений. При этом будем определять периодические решения. В первом приближении, пренебрегая нелинейными членами, имеем

$$\ddot{\theta} + k^2 \theta = 0, \quad \ddot{w} + \omega^2 w = 0, \quad \omega^2 = \varepsilon(p'_0 - p_0). \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что в линейном приближении вращательные и изгибные движения трубопровода являются независимыми. Решение (3.5) с учетом начальных условий (3.4) запишется

$$\theta = \theta_0 \cos k\tau, \quad w = \frac{\varepsilon W_0 p_e t_e}{\omega} \sin \omega\tau. \quad (3.6)$$

Система уравнений второго приближения имеет вид

$$\ddot{\theta} + k^2 \theta = \delta k \theta_0 \varepsilon p_e t_e \sin k\tau \cos \omega\tau, \quad \ddot{w} + \omega^2 w = \frac{2g\theta_0^2}{\pi} (\delta \sin^2 k\tau - \cos^2 k\tau). \quad (3.7)$$

Периодическое решение задачи Коши (3.4), (3.7) следующее ( $\omega \neq 0, 2k$ ):

$$\theta = \theta_0 \cos k\tau + \frac{\delta k \theta_0 \varepsilon p_e t_e}{2} \left[ \frac{2 \sin k\tau}{4k^2 - \omega^2} + \frac{\sin(k - \omega)\tau}{k^2 - (k - \omega)^2} + \frac{\sin(k + \omega)\tau}{k^2 - (k + \omega)^2} \right],$$

$$w = \frac{\varepsilon W_0 p_e t_e}{\omega} \sin \omega\tau + \frac{g\theta_0^2}{\pi} \left[ \frac{(\delta - 1)(1 - \cos \omega\tau)}{\omega^2} + \frac{(\delta + 1)(\cos \omega\tau - \cos 2k\tau)}{4k^2 - \omega^2} \right]. \quad (3.8)$$

Из сравнения решений (3.6) и (3.8) можно видеть, что в последнем присутствуют решения первого приближения и функции, учитывающие нелинейные члены.

#### 4. ЗАВИСИМОСТЬ ПРОГИБА И УГЛА ПОВОРОТА ОТ ДИНАМИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Вычисления проводились для стального трубопровода длиной  $L = 8.5$  м, внутренним радиусом  $R_i = 0.06$  м, толщиной стенки  $h = 0.003$  м и модулем Юнга  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Плотности материала трубы и заполняющей ее жидкости равны  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho_0 = 800$  кг/м<sup>3</sup>. Гравитационное ускорение  $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup>. Начальный угол отклонения плоскости изгиба трубопровода от вертикали  $\theta_0 = 0.1$  рад. Среднее внутреннее давление имеет только одно значение  $p_0 = 0.7$  МПа. При этом значение амплитуды  $W_0$  статической составляющей прогиба средней точки пролета трубы, согласно формуле (2.8), равно 0.0318 м. Приняты два значения амплитуды динамической составляющей ступенчатого внутреннего давления  $p_e = 2.8, 7.0$  МПа. Продолжительность  $t_e$  действия ударной нагрузки принята равной 0.0055 с.

Продолжительность инерционной стадии определяется по приближенной формуле [28]  $t_* = L^2/(\pi^2 R_i c)$ , где скорость волны растяжения–сжатия  $c = (E/\rho)^{1/2}$ . Для принятых данных  $t_* \approx 0.024$  с. Поэтому время действия ударного давления меньше, чем продолжительность инерционной стадии ( $t_e < t_*$ ). Это означает, что упругие силы в отрезке  $0 \leq t \leq t_e$  еще меньше, чем при  $t = t_*$ , а точность приближенного решения (3.4) повышается.

Результаты вычислений приведены в виде графических зависимостей (рис. 2–4) динамической составляющей прогиба  $w$  средней точки пролета и угла  $\theta$  поворота трубопровода от времени  $t$ . На каждом из рис. 2–4 слева направо попарно расположены графические зависимости, которые соответствуют указанным выше двум значениям амплитуды  $p_e$ . Для прогибов  $w$  эти зависимости снизу обозначены буквами  $a, b$ , а для углов  $\theta$  поворота –  $c, d$ .

Переменные на графиках измеряются время  $t$  – в секундах, динамическая составляющая прогиба  $w$  – в метрах, угол  $\theta$  – в радианах. На графиках толстыми и тонкими сплошными линиями нанесены результаты вычислений, полученные численным интегрированием методом Рунге–Кутта соответ-

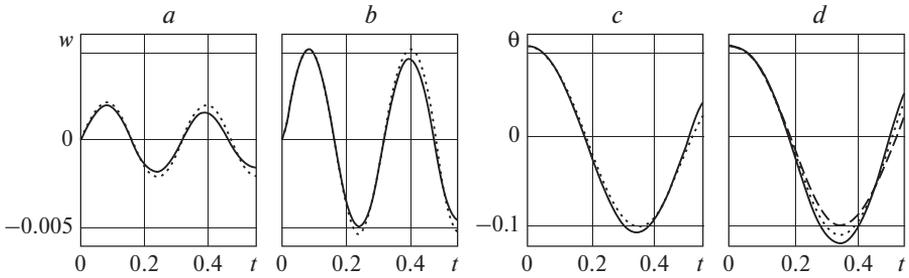


Рис. 2

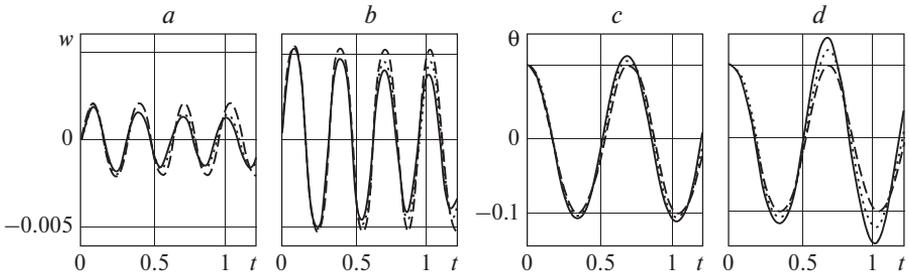


Рис. 3

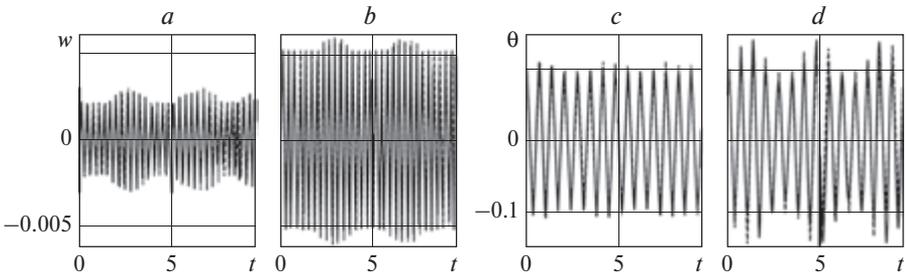


Рис. 4

ственно систем уравнений (2.5), (2.6) и (3.1) с начальными условиями (2.7). Штриховыми линиями обозначены зависимости, построенные на основе функций (3.3) и (3.6), а точечными – функций (3.8).

Из числовых расчетов следует, что на инерционной стадии динамического процесса в каждый момент времени значения изгибных перемещений и их скоростей, полученные по формулам (3.3) и методом Рунге–Кутты при одном и том же значении переменной части внутреннего давления,

практически совпадают. Таким образом, на инерционной стадии динамики трубопровода вполне пригодна решение (3.3). Вместе с тем следует отметить, что в течение времени удара изгибные перемещения точек трубы остаются очень малыми, а их скорости имеют конечные значения. Это подтверждается также численным решением задачи Коши (2.5)–(2.7). Например, в момент времени  $t_e$  прекращения действия ударной нагрузки имеют место следующие значения:  $w = 1.14 \cdot 10^{-4}$  м и  $\dot{w} = 0.0414$  м/с ( $p_e = 2.8$  МПа),  $w = 2.87 \cdot 10^{-4}$  м и  $\dot{w} = 0.1043$  м/с ( $p_e = 7.0$  МПа). Поэтому в (3.4) в конце времени удара изгибное перемещение принято равным нулю.

Приведенные на рис. 2–4 графические зависимости построены для трех отрезков времени:  $0 \div 0.55$  с (рис. 2),  $0 \div 1.2$  с (рис. 3) и  $0 \div 9.5$  с (рис. 4). Из графиков  $c, d$  рис. 2 видно, что после прекращения действия ударной нагрузки изгибные перемещения трубы растут. Вместе с ними растут и упругие силы. Далее кинетическая энергия, полученная трубой при ударе, в большей мере расходуется на работу возросших упругих сил. В результате скорости изгибных перемещений трубы уменьшаются и с течением времени они становятся равными нулю. Затем из-за действия упругих сил скорости изгибных перемещений изменяют свой знак и процесс повторяется. То есть при принятых значениях параметров изгибные перемещения трубы совершают колебательные движения, которые с течением времени принимают вид биений (графики  $c, d$  рис. 3, 4). Можно отметить также зримые расхождения между толстой сплошной и штриховой линиями. При этом сплошные и точечные линии практически сливаются в одну линию. Это свидетельствует, во-первых, о существенных расхождениях решений нелинейной и линейной задач, и, во-вторых, о возможности замены основной системы нелинейных уравнений (2.5), (2.6) приближенной системой уравнений (3.1) и о пригодности аналитического решения (3.8) задачи второго приближения.

Одновременно с изгибными перемещениями происходят вращательные движения трубопровода. В течение всего времени действия ударной нагрузки угол  $\theta$  поворота плоскости изгиба трубы остается почти равным начальному углу  $\theta_0$ . Из графиков  $c, d$  рис. 2 можно видеть, что после окончания действия ударной нагрузки угол поворота трубы, уменьшаясь, сначала становится равным нулю, а затем достигает минимального значения. В линейном приближении абсолютная величина этого значения равна начальному углу  $\theta_0$  отклонения трубопровода, так как в данном случае вращательные и изгибные движения трубопровода являются независимыми. В нелинейных же приближениях, как видно из графиков  $c, d$  рис. 2, с определенных моментов времени наблюдается расхождение штриховых и сплошных линий. При этом тонкая сплошная и точечная линии визуально сливаются и располагаются на незначительном удалении от толстой сплошной линии. Также отчетливо видно, что модули минимумов угла поворота трубы всегда больше начального угла отклонения  $\theta_0$ . Данный факт имеет такое объяснение. Если сопоставить графики  $a, b$  и  $c, d$  рис. 2, то можно видеть, что после

достижения своих максимумов изгибные перемещения с течением времени уменьшаются и далее принимают отрицательные значения. В результате сумма  $W_0 + w$  статической и динамической составляющих прогиба средней точки пролета трубы с течением времени уменьшается. Вследствие этого, согласно теореме об изменении момента количества движения механической системы, происходит увеличение модуля угловой скорости трубы, которое приводит к увеличению ее модуля угла поворота. Далее (графики  $c, d$  рис. 3, 4) вращательные движения трубы повторяются и также принимают вид биений.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, из результатов вычислений можно сделать следующие краткие выводы.

На начальной стадии реакции трубопровода на ударное давление в транспортируемой жидкости можно учитывать только инерционные силы и пользоваться линеаризованными уравнениями движения. В конце времени удара, являющегося началом инерционно-упругой стадии деформирования, изгибные перемещения трубы без заметной погрешности могут быть приняты равными нулю.

Скорости изгибных перемещений трубы за время удара достигают конечных значений. Они прямо пропорциональны амплитуде динамической составляющей внутреннего давления. При этом угловая скорость вращательного движения трубопровода может быть принята равной нулю.

С ростом амплитуды динамической составляющей внутреннего давления на инерционно-упругой стадии растут также амплитуды изгибных перемещений трубопровода. При этом модули минимумов угла поворота трубы всегда больше ее начального угла отклонения.

В рамках принятых в работе допущений для описания пространственных колебаний трубопровода можно использовать приближенную систему нелинейных уравнений.

На инерционно-упругой стадии колебаний положение трубы в пространстве с допустимой погрешностью может быть определено также аналитическим решением, полученным методом последовательных приближений. Для принятых входных данных приближенное аналитическое и численное решения находятся в удовлетворительном согласии.

## § 5. ПОЛОЖЕНИЯ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ ТРУБОПРОВОДА С ВИБРИРУЮЩИМИ ОПОРАМИ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Поведение механической системы значительно зависит от вибраций основания, на котором она установлена. Ярким примером является динамика маятника с вибрирующей точкой подвеса [1]. Его перевернутое положение при определенных условиях является устойчивым. К ним относятся, в частности, достаточная интенсивность вибрации точки подвеса. Нелинейное взаимодействие двух маятниковых часов, висящих симметрично относительно средней точки упругой балки, исследовано в [2]. В [3] изучена устойчивость вертикально расположенного гибкого стержня на вибрирующей нижней опоре. Вопросам динамики трубопроводов посвящено большое количество работ, например, [5–14].

Обзор соответствующих исследований приводится в [15].

В настоящем параграфе изучены устойчивые изогнутые положения трубопровода между двумя опорами, в случае, когда обе опоры совершают вертикальные синхронные колебания с равными амплитудами [15, 16].

1. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. С. 588–597.
2. Канунников А.Ю., Лампер Р.Е. Синхронизация хода маятниковых часов, подвешенных на упругой балке // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 5. (251). С. 177–181.
3. Морозов Н.Ф., Беляев А.К., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Устойчивость вертикального стержня на вибрирующей опоре // ДАН. 2018. Т. 482. С. 155–159.
4. Ilgamov M. A., Tang D. M., Dowell E. H. Flutter and forced response of a cantilevered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge // J. Fluids and Struct. 1994. V. 8. P. 139–156.
5. Tang D. M., Ilgamov M. A., Dowell E. H. Buckling and post-buckling behavior of a pipe subjected to internal pressure // J. of Appl. Mech. 1995. V. 62. No 3. P. 595–600.
6. Panda L. N., Kar R. C. Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with combination, principal parametric and internal resonances // J. Sound and Vibr. 2008. V. 309. P. 375–406.
7. Chen L. Q., Zhang Y. L., Zhang G. C., Ding H. Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed // International J. Nonlinear Mech. 2014. V. 58. P. 11–21.
8. Li S., Karney B. W., Liu G. FSI research in pipeline systems – A review of the literature // J. Fluids and Struct. 2015. V. 57. P. 277–297.
9. Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А., Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М. Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 3–13.
10. Łuczko J., Czerwiński A. Nonlinear three-dimensional dynamics of flexible pipes conveying fluids // J. Fluids and Struct. 2017. V. 70. P. 235–260.
11. Yan H., Dai H., Ni Q., Wang L., Wang Y. Nonlinear dynamics of a sliding pipe conveying fluid // J. Fluids and Struct. 2018. V. 81. P. 36–57.
12. Латифов Ф.С., Мехтиев М.А. Нелинейные параметрические колебания продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с наполнителем // ПМТФ. 2018. Т. 59. № 4 (350). С. 195–203.
13. Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М. Взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний трубопровода // ПМТФ. 2020. Т. 61. № 6 (364). С. 66–69.
14. Lu Z. Q., Zhang K. K., Ding H., Chen L. Q. Nonlinear vibration effects on the fatigue life of fluid-conveying pipes composed of axially functionally graded materials // Nonlinear Dyn. 2020. V. 100. No 2. P. 1091–1104.
15. Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М. Положения динамического равновесия изогнутого трубопровода с вибрирующими опорами // ДАН. Физика, Технические науки. 2021. Т. 496. С. 55–59.
16. Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М. Положения упругого равновесия трубопровода с вибрирующими опорами // ПМТФ. 2022. Т. 63. № 3. С. 183–192.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются пространственные колебания двухопорной трубы с заключенной в ней жидкостью относительно горизонтальной оси, проходящей через опоры (рис. 1). Предполагается, что опоры допускают свободное вращение трубы вокруг продольной оси. Труба, изогнутая собственным весом и действием постоянного внутреннего давления  $p_0$  и в момент времени  $t = 0$  отклоненная на угол  $\theta_0$  от вертикальной плоскости, освобождается от связей без начальной угловой скорости. С этого момента времени основание, с которым закреплены опоры, начинает совершать вертикальное вибрационное движение. Далее рассматривается установившееся движение.

Деформации трубы, связанные с ее выходом из плоскости изгиба, считаются малыми, нет деформации кручения. Поэтому изогнутая ось трубопровода является плоской кривой. Согласно этим допущениям, движение трубопровода рассматривается как совокупность относительных изгибных перемещений  $w(x, t)$  в плоскости качения и ее двух переносных движений: вращения  $\theta(t)$  вокруг оси  $x$  и поступательного вибрационного перемещения опор  $s(t)$ . Не учитываются продольные распределенные нагрузки (продольные силы инерции, трение потока). Расстояние  $L$  между концевыми сечениями трубы на опорах остается неизменным. На рис. 1 показаны элемент длиной  $dx$  и его прогиб  $w$ . Масса элемента  $dm = m dx$ , где  $m = \rho_0 F_0 + \rho F$ ,  $F_0 = \pi R^2$ ,  $F = \pi[(R + h)^2 - R^2]$ ,  $R$ ,  $h$ ,  $\rho$ ,  $\rho_0$  – внутренний радиус, толщина стенки, плотности материала трубы и заполняющей ее жидкости. Предполагается, что скоростной напор  $\rho_0 V_0^2/2$  мал по сравнению с давлением  $p_0$ , где  $V_0$  – скорость движения среды в трубе. В соответствии с принятой моделью деформации прогиб  $w(x, t)$  отсчитывается по радиусу в цилиндрической системе координат, а угол  $\theta(t)$  – от оси  $z$  до плоскости изгиба трубы.

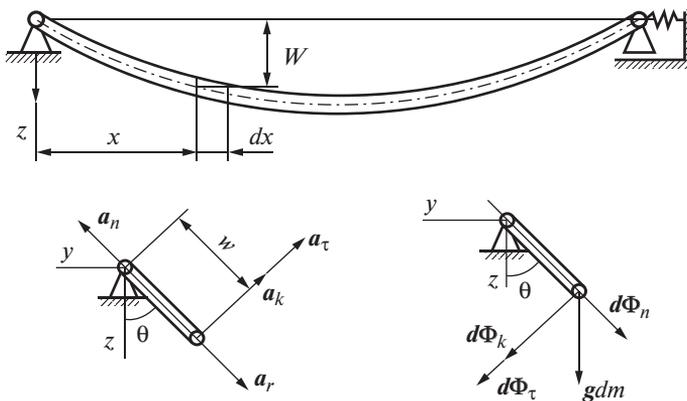


Рис. 1. Расчетная схема трубопровода с двумя опорами

Через  $g, a_k, a_r, a_\tau, a_n, a_V$  обозначены гравитационное, кориолисово, относительное, переносные касательное и нормальное, вибрационное ускорения,  $gdm$  – сила гравитации,  $d\Phi_r, d\Phi_\tau, d\Phi_n, d\Phi_V, d\Phi_k$  – относительная, касательная, нормальная, вибрационная силы инерции и сила инерции Кориолиса. Без учета вибраций опор выражения для ускорений выделенного элемента и сил, приложенных к нему, приведены в [10]. В данном случае они запишутся в виде

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{w}, & a_\tau &= w\ddot{\theta}, & a_n &= w\dot{\theta}^2, & a_k &= 2\dot{\theta}\dot{w}, & a_k &= \ddot{s}, \\ d\Phi_r &= a_r dm, & d\Phi_\tau &= a_\tau dm, & d\Phi_n &= a_n dm, & d\Phi_k &= a_k dm, & d\Phi_V &= a_V dm \end{aligned} \quad (2.1)$$

(точка над буквой обозначает дифференцирование по времени  $t$ ).

Уравнение вращательного движения трубы относительно оси  $x$  имеет вид

$$-\int_{(M)} W \sin \theta (gdm + d\Phi_V) - M_u - \int_{(M)} W d\Phi_\tau - \int_{(M)} W d\Phi_k = 0, \quad (2.2)$$

$$M_u = J_p \ddot{\theta}, \quad J_p = 2\rho LJ, \quad J = \frac{\pi}{4} \left( (R+h)^4 - R_i^4 \right), \quad M = mL.$$

В случае идеальной жидкости и газа в выражение для  $J_p$  плотность  $\rho_0$  не входит.

Уравнение изгибных колебаний трубопровода следующее [9]:

$$\begin{aligned} d\Phi_r + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx + (F_0 p_0 - T) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx &= d\Phi_n + (gdm + d\Phi_V) \cos \theta, \\ T &= \frac{EF}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $E$  – модуль Юнга материала трубы.

С учетом выражений (2.1) уравнения изгибных (2.3) и вращательных (2.2) движений запишем в виде

$$\begin{aligned} \ddot{w} &= (g + \ddot{s}) \cos \theta + w\ddot{\theta}^2 - H(w) + \frac{T}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \left( \frac{k^2 L}{2} + \int_0^L w^2 dx \right) \theta + 2\dot{\theta} \int_0^L w \dot{w} dx &= -(g + \ddot{s}) \sin \theta \int_0^L w dx, \\ H(w) &\equiv \frac{1}{m} \left( EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p_0 F_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad k^2 = \frac{4\rho J}{m}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Примем, что  $s = s_0 \sin \Omega t$ , где  $s_0, \Omega$  – амплитуда и круговая частота колебаний основания. Предполагается, что амплитуда  $s_0$  мала по сравнению с ам-

плитудой  $W_0$  статического прогиба трубопровода, а частота  $\Omega$  значительно больше частоты упругих колебаний.

Представим угол  $\theta$  и прогиб  $w$  в виде сумм

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2, \quad w = w_0 + w_1 + w_2, \quad (2.5)$$

где величины с индексами 0, 1, 2 соответствуют начальному состоянию (без маятникового качения и движения опор), вращательному движению трубы вокруг оси, проходящей через опоры, и движению, вызванному вибрацией опор. В соответствии с указанной выше моделью изгиба трубы углы  $\theta_0$ ,  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  отсчитываются в плоскости качения.

В окрестности положений динамического равновесия трубопровода скорость  $\dot{\theta}_1$  мала по сравнению с  $\dot{\theta}_2$  вследствие большой частоты  $\Omega$ , несмотря на то, что угол  $\theta_2$  мал по сравнению с  $\theta_1$ . Поэтому для указанных положений принимаем приближения

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 - \dot{\theta}_1 - 0, \quad \cos \theta &= \cos(\theta_0 + \theta_1) - \theta_2 \sin(\theta_0 + \theta_1), \\ \sin \theta &= \sin(\theta_0 + \theta_1) + \theta_2 \cos(\theta_0 + \theta_1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

С учетом (2.5), (2.6) систему (2.4) приводим к виду

$$\begin{aligned} \frac{T}{m} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - H(w_0) + g \cos \theta_1 &= 0, \\ \ddot{w}_1 = -H(w_1), \quad \ddot{w}_2 = \ddot{s} \cos \theta_1 + (w_0 + w_1) \dot{\theta}_2^2 - H(w_2), \\ \left( \frac{k^2 L}{2} + \int_0^L w^2 dx \right) \ddot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_2 \int_0^L w \dot{w} dx &= -(g + \ddot{s})(\sin \theta_1 + \theta_2 \cos \theta_1) \int_0^L w dx. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь для упрощения дальнейших преобразований значение угла  $\theta_0$  принято равным нулю. Кроме того, произведение  $T(\partial^2 w / \partial x^2)$  определено только с учетом только составляющей  $w_0$  суммы (2.5). В третьем уравнении отброшен нелинейный член  $w_2 \dot{\theta}_2^2$ . Принимаем также допущение, что первые две функции прогиба изменяются по длине трубы одинаково:

$$w_0 = W_0(\theta_1) \sin \beta x, \quad w_1 = W_1(\theta_1, t) \sin \beta x, \quad \beta = \pi L^{-1}. \quad (2.8)$$

Вследствие высокой частоты движения опор по длине трубы может возбуждаться не одна, а несколько полуволн прогиба  $w_2$ . Поэтому данную составляющую будем определять суммой

$$w_2 = \sum_{n=1,3,\dots} W_{2n}(\theta_1, t) \sin n\beta x. \quad (2.9)$$

Функции (2.8), (2.9) удовлетворяют граничным условиям  $w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0$  ( $x = 0, L$ ). Ввиду симметрии граничных условий и попе-

речной распределенной нагрузки относительно середины пролета число  $n$  полуволн в (2.9) принимает лишь нечетные значения.

Подставляя функции (2.8), (2.9) в первые три уравнения системы (2.7) и применяя метод Бубнова–Галеркина, получаем

$$\begin{aligned} W_0^3 - aW_0 - b \cos\theta_1 &= 0, \quad \ddot{W}_1 - \omega_1^2(p-1)W_1 = 0, \\ \ddot{W}_{21} - \left[ \omega_1^2(p-1) + \dot{\theta}_2^2 \right] W_{21} - (W_0 + W_1)\dot{\theta}_2^2 &= -\frac{4s_0\Omega^2 \cos\theta_1 \sin\Omega t}{\pi}, \\ \ddot{W}_{2n} - \left[ \omega_n^2(p-n^2) + \dot{\theta}_2^2 \right] W_{2n} &= -\frac{4s_0\Omega^2 \cos\theta_1 \sin\Omega t}{\pi n}, \quad a = \frac{4J}{F}(p-1), \quad b = \frac{4g}{\pi\gamma}, \\ p = \frac{p_0}{p_*}, \quad p_* = \frac{\beta^2 EJ}{F_0}, \quad \gamma = \frac{\beta^4 EF}{4m}, \quad \omega_1^2 = \frac{\beta^4 EJ}{m}, \quad \omega_n^2 = n^2\omega_1^2, \quad n = 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь  $p_*$ ,  $\omega_n$  – критическое давление и собственные частоты изгибных колебаний трубопровода при нулевом перепаде статического давления. Во втором, третьем и четвертом уравнениях (2.10) члены, содержащие функцию  $\dot{\theta}_2^2$ , согласно приближениям (2.6), отброшены.

### 3. ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Для оценки влияния внутреннего давления и силы веса на значение статического прогиба  $W_0$  при  $p > 1$ , когда необходимо учитывать член  $W_0^3$  в первом уравнении (2.10), рассмотрим приближенное решение данного уравнения. Для этого выражение для  $W_0$  представим в виде  $W_0 = W_p + W_g \cos\theta_1$ , где  $W_p$  и  $W_g$  – прогибы, обусловленные внутренним давлением и весом трубы. Исследуем случай, когда влияние давления в трубе на значение прогиба существенно больше влияния ее веса. В приближенном решении величину  $W_g^2$  будем считать пренебрежительно малой по сравнению с  $W_p^2$ . Это справедливо, если  $b^2/(4a^3) \ll 1$ . Подставляя указанную сумму в (2.10), получаем уравнения  $W_p(W_p^2 - a) = 0$ ,  $(3W_p^2 - a)W_g - b = 0$ . В первом из этих уравнений корень  $W_p = \sqrt{a}$  имеет физический смысл. Тогда

$$W_g = \frac{b}{2a}, \quad W_0 = \sqrt{a} + \frac{b}{2a} \cos\theta_1. \quad (3.1)$$

При  $g = 0$  приближенное решение (3.1) совпадает с точным решением кубического уравнения (2.10). Таким образом, в случае слабой гравитации и преобладающего влияния внутреннего давления статический прогиб, выраженный через входные параметры, равен

$$W_0 \approx W_p = R \sqrt{(p-1) \left[ \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 + 1 \right]}. \quad (3.2)$$

Для труб с размерами  $R/h \geq 10$  можно принимать значение  $W_0/R \approx \sqrt{2(p-1)}$ . Будем считать, что наибольшее значение  $W_0$  есть величина порядка диаметра трубы  $W_0/(2R) \sim \sqrt{(p-1)}/2$ .

На рис. 2 приведена зависимость относительного прогиба  $W_0/R$  от безразмерного параметра внутреннего давления  $A = a/R^2$ . Расчеты проводились для трубы, имеющей следующие размеры:  $L = 2$  м,  $R = 0.02$  м,  $h = 0.0005$  м, материал трубы – магниевый сплав, армированный проволокой из инструментальной стали ( $E = 0.64 \cdot 10^5$  МПа,  $\rho = 2400$  кг/м<sup>3</sup>). Труба заполнена метаном ( $p_0 = 1.98$  МПа,  $\rho_0 = 64.8$  кг/м<sup>3</sup>), кольцевые напряжения равны  $\sigma_\theta = p_0 R/h = 79.2$  МПа, предел прочности материала  $\sigma_s = 600$  МПа. Значения коэффициентов кубического уравнения (2.10) для рассматриваемого случая равны  $a/R^2 = 0.420$ ,  $b/R^3 = 0.059$ . Из рис. 2 следует, что приближенное решение (3.1) удовлетворительно описывает деформацию трубы.

Представляет интерес оценка величин  $k^2$  и  $W_0^2$ , характеризующих влияние вращения трубопровода вокруг своей оси и вокруг прямой, проходящей через опоры. При этом значения статической составляющей прогиба  $W_0$  могут быть определены по формулам (3.1) или (3.2). В первом случае отношение  $k^2/W_0^2$ , выраженное через входные параметры, имеет довольно громоздкий вид, поэтому в данной работе не приводится. Во втором случае с учетом (2.2), (2.4), (3.2) имеем

$$\frac{k^2}{W_0^2} = \frac{\rho h (2R + h)}{(p-1) [\rho_0 R^2 + \rho h (2R + h)]}. \quad (3.3)$$

На рис. 3 представлена зависимость параметра  $k^2/W_0^2$  от отношения  $p$  внутреннего и критического давлений. Видно, что с увеличением внутреннего давления значение  $k^2/W_0^2$  уменьшается. Такая закономерность наблюдается как при  $\theta_1 = 0$  (кривая 1), так и при  $\theta_1 = \pi$  (кривая 3), а также в случае расчета по формуле (3.3). Более того, при достижении значения

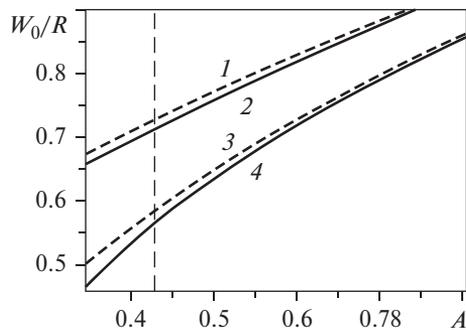
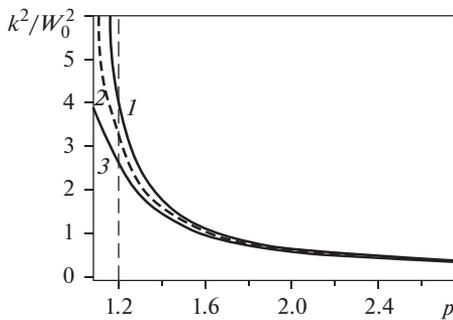


Рис. 2. Зависимость относительного прогиба  $W_0/R$  от безразмерного параметра внутреннего давления  $A = a/R^2$ :

- 1, 3 – приближенное аналитическое решение (3.1);
- 2, 4 – численное решение первого уравнения (2.10);
- 1, 2 – нижняя точка притяжения труб ( $\theta_1 = 0$ );
- 3, 4 – верхняя точка притяжения трубы ( $\theta_1 = \pi$ );
- вертикальная штриховая линия –  $a/R^2 = 0.426$



**Рис. 3.** Сплошные верхняя и нижняя линии – результаты вычислений по приближенному аналитическому решению (3.1) соответственно для верхнего и нижнего положений трубопровода. Пунктирная линия построена по формуле (3.3). Вертикальная штриховая линия соответствует принятому значению внутреннего давления ( $p_0 = 1.98$  МПа)

$p \approx 1.5$  кривые 1–3 практически сливаются и стремятся к горизонтальной асимптоте. При  $p < 1.8$  рассматриваемая система является скорее физическим маятником, чем математическим. При этом вклад вращения вокруг собственной оси трубы в общий момент инерции в четвертом уравнении (2.7) становится больше вклада вращения трубы относительно прямой, проходящей через опоры

$$\left( k^2 L > 2 \int_0^L w^2 dx, \text{ т.е. } k > W_0 \right).$$

Представляет интерес исследование возможности одновременного выполнения условий  $p > 1$  и условия прочности трубопровода по кольцевым напряжениям  $\sigma_\theta$ . Согласно (3.1), данные условия определяются неравенствами  $p_0 > p_* = \beta^2 EJ/F_0$ ,  $\sigma_* = pp_*R/h < \sigma_s$ , где  $\sigma_s$  – предел прочности материала трубы. Из этих неравенств с учетом принятых выше обозначений получаем

$$p < \frac{4\sigma_s hL^2}{\pi^2 ER^3} \left[ \left( 1 + \frac{h}{R} \right)^4 - 1 \right]^{-1}. \quad (3.4)$$

Согласно (3.4), для трубы с указанными выше геометрическими и механическими характеристиками наибольшее значение  $p \approx 9.15$ . Таким образом, в соответствии с данным критерием внутреннее давление  $p_0$  может превышать его критическое значение в девять раз.

Решением второго уравнения системы (2.10) является сумма гиперболических функций синуса и косинуса (при  $p > 1$ ). Согласно принятым нулевым начальным условиям, это решение – тривиальное:

$$W_1 = 0. \quad (3.5)$$

При установившихся вынужденных колебаниях

$$\dot{W}_{2n} = \Omega W_{2n}, \quad \ddot{W}_{2n} = \Omega^2 W_{2n}, \quad \dot{\theta}_2 = \Omega \theta_2, \quad \ddot{\theta}_2 = \Omega^2 \theta_2. \quad (3.6)$$

Так как  $\theta_2 \ll 1$ , то в третьем и четвертом уравнениях системы (2.10) членами, содержащими функции  $\theta_2^2$ , можно пренебречь. Исключим из рассмотрения резонансные режимы, согласно (3.5), (3.6) имеем

$$\begin{aligned} \pi n (\ddot{W}_{2n} + k_n^2 W_{2n}) &= -4s_0 \Omega^2 \cos \theta_1 \sin \Omega t, \\ \pi \ddot{W}_{21} &= -4s_0 \Omega^2 \cos \theta_1 \sin \Omega t, k_n^2 = \omega_n^2 (n^2 - p). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решения уравнений (3.7) имеют вид

$$W_{21} = \frac{4s_0 \cos \theta_1}{\pi} \sin \Omega t, \quad W_{2n} = \frac{\Omega^2 W_{21}}{n(\Omega^2 - k_n^2)} + V_n(\theta_1, t), \quad (3.8)$$

где  $V_n$  – общие решения однородных уравнений (3.7), зависящие от начальных условий. Решения (3.8) описывают собственные колебания с частотами  $k_n$ , затухающие со временем при наличии трения. Поэтому далее величина  $V_n$  не учитывается.

В середине пролета отношение  $W_2/W_{21}$  представляется в виде суммы

$$\frac{W_2}{W_{21}} = 1 + \sum_{n=3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \Omega^2}{n[\Omega^2 - n^2(n^2 - p)\omega_1^2]}. \quad (3.9)$$

На рис. 4 представлена зависимость (3.9) от параметра  $p$  внутреннего давления при  $\omega_1 \approx 147.4$  рад/с. В (3.9) учтены слагаемые с номерами  $n = 1, 3, 5, 7$ . Из (3.9) следует, что амплитуда  $W_2$  суммарного прогиба имеет порядок амплитуды  $W_{21}$ .

Преобразуем четвертое уравнение системы (2.7). Используя (2.8), (2.9), (3.8), вычисляем интегралы

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^L w dx = \frac{2L}{\pi} [W_0 + W_{21}(1 + S_1)], \quad S_1 = \sum_{n=3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n(1-f(n))}, \\ J_2 &= \int_0^L \dot{w} w dx = \frac{2Ls_0 \Omega \cos \theta_1 \cos \Omega t}{\pi} [W_0 + W_{21}(1 + S_2)], \\ f(n) &= \frac{n^2(n^2 - p)\omega_1^2}{\Omega^2}, \\ J_3 &= \int_0^L w^2 dx = \frac{L}{2} [W_0^2 + 2W_0 W_{21} + W_{21}^2(1 + S_2)], \\ S_2 &= \sum_{n=3,5,\dots} \frac{1}{n^2(1-f(n))^2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

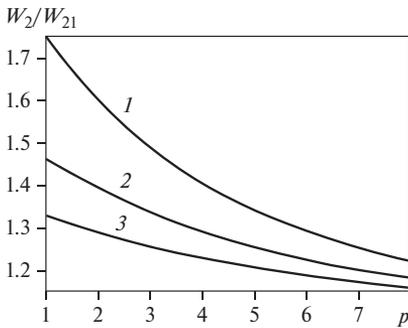


Рис. 4. Зависимость величины  $W_2/W_{21}$  от параметра  $p$  при  $\omega_1 = 147.4$  рад/с: 1 –  $\Omega = 4000$  рад/с, 2 –  $\Omega = 4200$  рад/с, 3 –  $\Omega = 4400$  рад/с

при вычислении члена  $T(\partial^2 w / \partial x^2)$  можно заменить ее составляющей  $w_0$ .

Подставляя (3.10), (3.11) в последнее уравнение (2.7) и пренебрегая с силу (3.6) вторым членом в его левой части, получаем

$$\pi(k^2 + W_0^2)\ddot{\theta}_2 = 4W_0(\Omega^2 s_0 \sin \Omega t - g)(\sin \theta_1 + \theta_2 \cos \theta_1). \quad (3.12)$$

#### 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАПИЦЫ

Следуя работе [1], уравнение (3.12) разбиваем на два уравнения:

$$\pi(k^2 + W_0^2)\ddot{\theta}_2 = 4W_0(s_0 \Omega^2 \sin \theta_1 \sin \Omega t - g \theta_2 \cos \theta_1), \quad (4.1)$$

$$-4W_0(s_0 \Omega^2 \cos \theta_1 \langle \theta_2 \sin \Omega t \rangle - g \sin \theta_1) = 0, \quad (4.2)$$

где угловые скобки обозначают операцию усреднения по времени за период  $2\pi/\Omega$ .

Вследствие большой частоты возбуждения  $\Omega$  из (4.1) получаем приближенное дифференциальное уравнение и его решение

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{4W_0 s_0 \Omega^2 \sin \theta_1}{\pi(k^2 + W_0^2)} \sin \Omega t, \quad \theta_2 = -\frac{4W_0 s_0 \sin \theta_1}{\pi(k^2 + W_0^2)} \sin \Omega t. \quad (4.3)$$

Далее можно оценить члены, отброшенные при определении  $W_2$  и  $\theta_2$ . Эти оценки, которые в данной работе не приводятся вследствие их громоздкости, подтверждают приемлемость принятых приближений.

Для того чтобы получить решение в окрестности положений динамического равновесия, подставляем (4.3) в (4.2). В результате находим

Поскольку образованные в (3.10) ряды  $S_1, S_2$  – сходящиеся, и  $s_0/W_0 \ll 1, W_{21}/W_0 \ll 1$ , имеем

$$\begin{aligned} \pi J_1 &\approx 2LW_0, \\ \pi J_2 &\approx 2LW_0 s_0 \Omega \cos \theta_1 \cos \Omega t, \quad (3.11) \\ 2J_3 &\approx LW_0^2. \end{aligned}$$

Таким образом, в выражении

$$W = W_0 + W_1 + \sum_{n=1,3,\dots} W_{2n}$$

в соответствии с (3.5)  $W_1 = 0$ , сумму  $w$  мала по сравнению с  $W_0$ . Поэтому в (2.7)

$$\sin \theta_1 \left[ \pi g (k^2 + W_0^2) + 2W_0 (s_0 \Omega)^2 \cos \theta_1 \right] = 0. \quad (4.4)$$

Из равенства  $\sin \theta_1 = 0$  получаем корни  $0$  и  $\pi$ , которые представляют собой нижнюю и верхнюю точки притяжения. При  $\sin \theta_1 \neq 0$  из равенства нулю выражения в квадратных скобках в (4.4) с учетом значения  $W_0$  в (3.1) следует

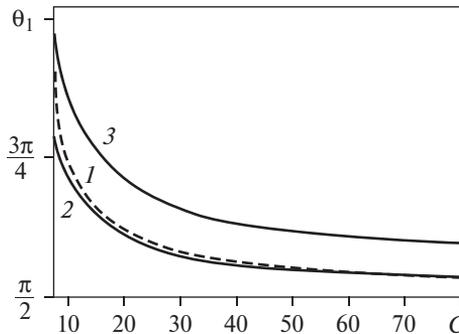
$$\cos \theta_1 = - \frac{\pi g (W_p + W_g \cos \theta_1)}{2(s_0 \Omega)^2} \left( 1 + \frac{k^2}{(W_p + W_g \cos \theta_1)^2} \right). \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) определяет значение угла  $\theta_1$ , при превышении которого изогнутый вверх трубопровод медленно приближается к вертикальному положению (к верхней точке  $\theta_1 = \pi$ ). При меньших значениях  $\theta_1$  изогнутый трубопровод приближается к естественному нижнему положению ( $\theta_1 = 0$ ). Применение формулы (4.5) обосновано при условии  $W_p > W_g$ , которое было использовано при получении решения (3.1).

В случае сильной вибрации опор и относительно малой гравитации правая часть (4.5) существенно меньше единицы и угол  $\theta_1$  будет близок к значению  $\pi/2$ . Приняв в этом случае  $W_p + W_g \cos \theta_1 \approx W_p$  и  $\theta_1 = \pi/2 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon^2 \ll \pi/2$ ,  $\cos(\pi/2 + \varepsilon) = -\sin \varepsilon \approx -\varepsilon$ , из уравнения  $\sin \varepsilon = \varepsilon$  находим значение  $\varepsilon$ . Тогда

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi g W_p}{2(s_0 \Omega)^2} \left( 1 + \frac{k^2}{W_p^2} \right). \quad (4.6)$$

Данный случай реализуется, в частности, для вертикального трубопровода при сохранении направления вибрации опор перпендикулярно его оси. При этом области притяжения к точкам  $0$  и  $\pi$  являются одинаковыми ( $0 < \theta_1 < \pi/2$ ,  $\pi/2 < \theta_1 < \pi$ ).



**Рис. 5.** Зависимость положения трубопровода  $\theta_1$  в случае относительно малой гравитации от параметра  $C = (s_0 \Omega)^2 / (g W_p)$ , характеризующего деформацию трубопровода и интенсивность колебаний опор: 1 – результаты вычислений по уравнению (4.5), 2, 3 – результаты вычислений по приближенным формулам (2 – расчет формулы (4.6), 3 – расчет формулы (4.7))

При относительно слабой вибрации величина  $\theta_1$  стремится к верхней точке ( $\theta_1 = \pi$ ) притяжения. Положив  $\theta_1 = \pi - \varepsilon$  и  $W_p + W_g \cos \theta_1 \approx W_p - W_g$ ,  $\cos(\pi - \varepsilon) = -\cos \varepsilon \approx -1 + \varepsilon^2/2$ , получаем приближение

$$\theta_1 = \pi - \sqrt{2} \left[ 1 - \frac{\pi g (W_p - W_g)}{(s_0 \Omega)^2} \left( 1 + \frac{k^2}{(W_p - W_g)^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (4.7)$$

На рис. 5 приведены зависимости по формулам (4.4)–(4.6), из которых следует, что в пределах своего применения они удовлетворительно описывают процесс.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Процесс изгибания вверх пролета трубопровода между вибрирующими опорами аналогичен движению маятника Капицы. В рассмотренном случае картина осложняется изменением общего прогиба, соответствующего длине маятника, в зависимости от сил гравитации и внутреннего давления, угла качения пролета вокруг оси, проходящей через опоры. Поэтому анализ явления может быть проведен только с помощью простейшей модели.

При вертикальных колебаниях опор рассмотрен случай преобладающего влияния на изгиб внутреннего давления. Предполагалось, что вибрации опор происходят с малой амплитудой по сравнению со статическим прогибом и с собственной частотой, превышающей частоту его изгибных колебаний. В этих условиях общий прогиб в принятом приближении определяется из нелинейного уравнения статического изгиба.

Условие равенства момента распределенных по длине трубопровода сил гравитации и момента сил вибрации опор определяет границу областей притяжения к нижнему и верхнему положениям. Вблизи этой границы влияние на изгиб центробежных и кориолисовых сил незначительно. В рамках принятых приближений нет влияния высших форм изгибных колебаний трубопровода на границу областей притяжения. Предельные размеры областей притяжения имеют место при малой гравитации и сильной вибрации опор или при большой гравитации и слабой вибрации. В случае преобладания веса над распределенной силой, обусловленной внутренним давлением, возможно только нижнее положение равновесия трубопровода. Существенное влияние на поведение системы оказывает критическое значение внутреннего давления, при достижении которого труба между опорами испытывает выпучивание (согласно линейной теории). Необходимым, но недостаточным условием существования верхнего положения динамического равновесия является превышение внутреннего давления над критическим значением.

## § 6. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА С ВИБРИРУЮЩИМИ ОПОРАМИ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Композитные и металлические трубопроводы широко применяются в нефтегазовой промышленности, энергетике, авиационной и ракетно-космической технике для транспортировки жидких и газообразных продуктов. Их транспортировка осуществляется работой насосных станций, которые создают в трубопроводе постоянное и переменное давление. Колебательные движения при этом может совершать также основание, с которым связаны опоры трубопровода. В результате указанных воздействий трубопровод может совершать пространственные колебания.

Теоретическому и экспериментальному изучению динамического поведения трубопроводных систем, транспортирующих жидкость или газ, посвящено большое количество работ. Обзор литературы по указанной обширной проблеме можно найти, например, в [1–5]. В данной работе ограничимся кратким обзором исследований по пространственным колебаниям трубопровода с транспортируемым продуктом. Эта часть динамики трубопроводных систем относительно мало изучена. Так как влияние внутреннего давления на колебательные движения трубы имеет место, как в пространстве, так и в одной плоскости, то в обзор включены также исследования, посвященные изучению плоских изгибных колебаний.

Трехмерная нелинейная динамика консольных труб, транспортирующих жидкость, исследовалась в [6–9]. Экспериментальное изучение влияния внутреннего давления на частоту свободных колебаний приведено в [10]. Показано качественное и количественное согласие результатов теории

- 
1. *Ильгамов М. А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.
  2. *Светлицкий В. А.* Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
  3. *Ганиев Р. Ф., Низамов Х. Н., Дербужов Е. И.* Волновая стабилизация и предупреждение аварий в трубопроводах. М.: Из-во МГТУ, 1996. 258 с.
  4. *Ibrahim R. A.* Mechanics of pipes conveying fluids // ASME J. of Pressure Vessel Technology. 2010. V. 132. P. 1–32.
  5. *Li S., Karney B. W., Liu G.* FSI research in pipeline systems – A review of the literature // J. of Fluids and Structures. 2015. V. 57. P. 277–297.
  6. *Ilgamov M. A., Tang D. M., Dowell E. H.* Flutter and forced response of a cantilevered pipe: The influence of internal pressure and nozzle discharge // J. of Fluids and Structures. 1994. Vol. 8. P. 139–156.
  7. *Wadham-Gagnon M., Païdoussis M. P., Semler C.* Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 1: Nonlinear equations of three-dimensional motion // J. of Fluids and Structures. 2007. V. 23. P. 545–567.
  8. *Païdoussis M. P., Semler C., Wadham-Gagnon M., Saaid S.* Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 2: Dynamics of the system with intermediate spring support // J. of Fluids and Structures. 2007. V. 23. P. 569–587.
  9. *Modarres-Sadeghi Y., Semler C., Wadham-Gagnon M., Païdoussis M. P.* Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 3: Three-dimensional dynamics in the presence of an end-mass // J. of Fluids and Structures. 2007. V. 23. P. 589–603.
  10. *Tang D. M., Ilgamov M. A., Dowell E. H.* Buckling and post-buckling behavior of a pipe subjected to internal pressure // J. of Appl. Mech. 1995. V. 62. No 3. P. 595–600.

с экспериментальными данными. Поперечные колебания трубы в вертикальной плоскости под действием бегущих волн давления рассмотрены в [11]. Исследование изгибных колебаний композитного (трехслойного) трубопровода для транспортировки газа приведено в [12]. Сейсмические колебания трубопровода с жидкостью в грунтовой среде изучены в [13, 14]. Влияние пульсаций давления в транспортируемой жидкости на трехмерные нелинейные колебания гибкой трубы исследованы в [15]. Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде при действии внутреннего давления, изменяющегося по гармоническому закону, рассмотрены в [16, 17]. Действие внутреннего ударного давления на пространственные движения трубы со смещающейся опорой изучено в [18–20]. В [21] проведено экспериментальное исследование пространственного распределения энергии вибрации при взрыве газопровода. Динамика трубопровода, транспортирующего жидкость, на вращающемся основании рассмотрена в [22]. Влияние нелинейных колебаний на усталостную прочность многослойного композиционного трубопровода с жидкостью исследовалось в [23]. Демпфирование изгибных колебаний труб при транспортировке жидкости с помощью нелинейных поглотителей кручения на опорах изучено в [24]. В [25] определены положения динамического равновесия изогнутого трубопровода с вибрирующими опорами. Кроме указанных работ большое количество исследований посвящено изучению свободных колебаний и устойчивости пролета трубопровода с движущейся жидкостью. К последним работам можно отнести статьи [26–28].

11. Ильгамов М. А., Мишин В. Н. Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 181–192.
12. Zou G. P., Cheraghi N., Taheri F. Fluid-induced vibration of composite gas pipelines // J. of Solids and Structures. 2005. V. 42. P. 1253–1268.
13. Ан Е. В., Рашидов Т. Р. Сейсמודинамика подземных трубопроводов, взаимодействующих с водонасыщенным мелкодисперсным грунтом // Изв. РАН МТТ. 2015. № 3. С. 89–104.
14. Исраилов М. Ш. Связанные сейсмические колебания трубопровода в бесконечной упругой среде // Изв. РАН МТТ. 2016. № 1. С. 57–66.
15. Luczko J., Czerwiński A. Nonlinear three-dimensional dynamics of flexible pipes conveying fluids // J. of Fluids and Structures. 2017. V. 70. P. 235–260.
16. Ганиев Р. Ф., Ильгамов М. А., Хакимов А. Г., Шакирьянов М. М. Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 3–13.
17. Ганиев Р. Ф., Ильгамов М. А., Хакимов А. Г., Шакирьянов М. М. Пространственные неперриодические колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 2. С. 3–12.
18. Ильгамов М. А. Динамика трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 83–96.
19. Ганиев Р. Ф., Ильгамов М. А., Хакимов А. Г., Шакирьянов М. М. Пространственные колебания трубопровода с упруго-смещающейся опорой при действии внутреннего ударного давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 6. С. 3–12.
20. Шакирьянов М. М. Пространственные нелинейные колебания трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 6. С. 76–84.
21. Huayuan Ma, Long, Y., Zhong, M. et al. Study on ground vibration mode of physical explosion of high pressure natural gas pipeline // Acoust. Phys. 2019. V. 65. P. 583–592.

В настоящем параграфе исследуются пространственные колебания трубопровода при горизонтальных вибрационных движениях его опор. Изложение параграфа дается по [29].

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются пространственные колебания пролета трубопровода между опорами и заключенной в нем жидкости под действием подвижного основания. Трубопровод имеет сферическое шарнирное крепление к опорам (рис. 1). Левая опора неподвижна относительно поступательно движущегося основания, а правая опора, связанная с ним линейно-упругими элементами, может скользить параллельно оси  $x$ . Начало правой системы осей координат  $xyz$  (рис. 1,  $a$ ) совмещено с левой опорой. Труба, изогнутая собственным весом, весом и постоянным давлением заключенной в ней жидкости, находится в покое. В момент времени  $t$  основание начинает совершать горизонтальные движения  $s = s(t)$ , направленные перпендикулярно оси  $x$ . Учитываются взаимодействия внутреннего давления и изменений кривизны осевой линии, продольной и окружной деформаций трубы. Деформации трубопровода, связанные с выходом его оси из плоскости изгиба, предполагаются малыми. Поэтому исследование проводится по модели изгибно-вращательных движений трубопровода. Согласно этой модели, пространственные движения трубы рассматриваются как совокупность относительных изгибных колебаний  $W(x, t)$  в одной плоскости, переносных вращений  $\theta(t)$  этой плоскости вокруг оси  $x$  и переносных поступательных перемещений  $s(t)$  подвижного основания. Длина, внутренний радиус, толщина стенки и плотность материала трубы соответственно равны  $L, R, h$  и  $\rho$ . Плотность несжимаемой жидкости –  $\rho_0$ . Скоростной напор  $\rho_0 V^2/2$  также считается малым по сравнению с давлением  $p_0$ , где  $V$  – скорость движения среды в трубе.

22. *Limarchenko V. O., Limarchenko O. S., Sapon N. N.* Dynamics of a pipeline with a liquid on a rotating base // *Int. Appl. Mech.* 2020. V. 56. P. 351–357.
23. *Lu Z. Q., Zhang K. K., Ding H., Chen L. Q.* Nonlinear vibration effects on the fatigue life of fluid-conveying pipes composed of axially functionally graded materials // *Nonlinear Dyn.* 2020. V. 100. No 2. P. 1091–1104.
24. *Mao X., Ding H., Chen L.* Bending vibration control of pipes conveying fluids by nonlinear torsional absorbers at the boundary // *Sci. China Technol. Sci.* 2021. V. 64. P. 1690–1704.
25. *Ильгамов М. А., Шакирьянов М. М.* Положения динамического равновесия изогнутого трубопровода с вибрирующими опорами // *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки.* 2021. Т. 496. № 1. С. 55–59.
26. *Акуленко Л. Д., Иванов М. И., Коровина Л. И., Нестеров С. В.* Свободные колебания участка трубопровода // *Изв. РАН МТТ.* 2011. № 1. С. 172–187.
27. *Акуленко Л. Д., Иванов М. И., Коровина Л. И., Нестеров С. В.* Основные свойства собственных колебаний протяженного участка трубопровода // *Изв. РАН МТТ.* 2013. № 4. С. 119–134.
28. *Акуленко Л. Д., Гавриков А. А., Нестеров С. В.* Собственные колебания трубопровода на упругом основании, транспортирующего жидкость // *Изв. РАН МТТ.* 2018. № 1. С. 123–133.
29. *Утяшев И. М., Шакирьянов М. М.* Пространственные колебания трубопровода с вибрирующими опорами // *Изв. РАН. МТТ.* 2023. № 3. С. 80–94.

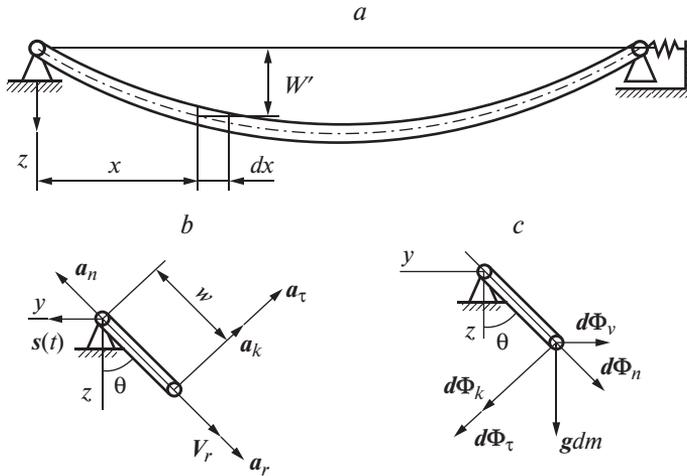


Рис. 1. Расчетная схема: виды на трубопровод соответственно с положительного конца оси  $y$  (а) и со стороны правой опоры (b, c)

На рис. 1, а символ  $W'$  представляет проекцию прогиба ( $W' = W \cos \theta$ ) элемента трубы длиной  $dx$  на координатную плоскость  $xz$ . Ускорения элемента массой  $dm = m_1 dx$  и силы, действующие на него, изображены на рис. 1, b, c. Здесь  $g, a_V, a_k, a_r, a_\tau$  и  $a_n$ ,  $m_1 = \pi \{ \rho_0 R^2 + \rho [(R+h)^2 - R^2] \}$  – гравитационное, вибрационное, кориолисово, относительное, переносные касательное и нормальное ускорения, масса элемента единичной длины;  $gdm$  – сила тяжести,  $d\Phi_V, d\Phi_r, d\Phi_\tau, d\Phi_n$  и  $d\Phi_k$  – вибрационная, относительная, касательная, нормальная и кориолисова силы инерции.

Выражения для ускорений выделенного элемента, а также сил, приложенных к нему, при неподвижном основании следующие [16]:

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{W}, & a_\tau &= W\ddot{\theta}, & a_n &= W\dot{\theta}^2, & a_k &= 2\dot{\theta}\dot{W}, & d\Phi_V &= a_V dm, \\ d\Phi_r &= a_r dm, & d\Phi_\tau &= a_\tau dm, & d\Phi_n &= a_n dm, & d\Phi_k &= a_k dm. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь и далее точка над буквой обозначает производную по времени.

Дифференциальное уравнение вращательного движения трубопровода относительно оси  $x$  имеет вид [19]

$$\begin{aligned} - \int_{(m)} W \sin \theta g dm - M_u - \int_{(m)} W d\Phi_\tau - \int_{(m)} W d\Phi_c - \int_{(m)} \sin \theta W d\Phi_k &= 0, \\ M_u &= J_p \frac{d^2 \theta}{dt^2}, & J_p &= 2\rho L J, & J &= \frac{\pi}{4} \left( (R+h)^4 - R^4 \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний, учитывающее взаимодействия внутреннего давления и изменений кривизны осевой линии, продольной и окружной деформаций трубы, следующее [18]:

$$\begin{aligned} \ddot{W}dm = -EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} dx - \left[ Fp_0(1 - \chi) - \alpha \int_0^L \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx + g \cos \theta dm + \\ + d\Phi_n + d\Phi_V \sin \theta, \quad F = \pi R^2, \quad \chi = \frac{2\nu}{1 + \lambda}, \quad \lambda = \frac{Eh}{CL}, \quad \alpha = \frac{\pi EhR}{(1 + \lambda)L}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга материала трубы,  $C$  – коэффициент продольной упругости единичной дуги элементов крепления скользящей опоры к основанию.

Горизонтальное перемещение основания задается в виде

$$s = s_0 \sin \Omega t, \quad \Omega = 2\pi f, \quad (2.4)$$

где  $s_0, f$  – амплитуда и частота колебаний основания.

Функция прогиба, удовлетворяющая условиям шарнирного крепления трубопровода к опорам, принимается по первой гармонике

$$W = [W_0 + w(t)] \sin \beta x, \quad \beta = \pi/L. \quad (2.5)$$

Здесь  $W_0$  и  $w(t)$  – амплитуды статической и динамической составляющих прогиба средней точки пролета. Первая часть прогиба зависит от сил гравитации и внутреннего давления в трубе, а вторая – от амплитуды и частоты колебаний опор.

Подставляя (2.4), (2.5) в (2.2), (2.3) и применяя в последнем вариационный принцип Бубнова–Галеркина, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} \left[ (W_0 + w)^2 + \frac{4\rho J}{m_1} \right] + 2 \left[ \frac{2}{\pi} (g \sin \theta + s_0 \Omega^2 \sin \Omega t \cos \theta) + \dot{\theta} \dot{w} \right] (W_0 + w) = 0, \\ \ddot{w} + \frac{\beta^4 EJ}{m_1} (W_0 + w) = \frac{4}{\pi} (g \cos \theta - s_0 \Omega^2 \sin \Omega t \sin \theta) + (W_0 + w) \dot{\theta}^2 + \\ + \frac{\beta^2}{m_1} \left[ F(1 - \chi)p_0 - \frac{\alpha \beta^2 L}{2} (W_0 + w)^2 \right] (W_0 + w). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (2.6) нулевые:

$$\theta = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad w = 0, \quad \dot{w} = 0 \quad (t = 0). \quad (2.7)$$

Полагая во втором уравнении (2.6)  $\theta = 0$ ,  $\dot{\theta} = 0$ ,  $w = 0$ ,  $\dot{w} = 0$ ,  $s_0 = 0$ , получаем уравнение для определения статической составляющей прогиба

$$W_0^3 + \frac{2F(p_* - p_0)(1 - \chi)}{\alpha\beta^2 L} W_0 - \frac{8m_1 g}{\pi\alpha\beta^4 L} = 0, \quad p_* = \frac{\beta^2 EJ}{F(1 - \chi)}. \quad (2.8)$$

Значение внутреннего давления  $p_*$  является критическим. При  $p_* = p_0$  решение линейного уравнения неограниченно возрастает. Для решения кубического уравнения (2.8) можно воспользоваться формулами Кардано или численным методом. При преобладающем влиянии на изгиб трубы сил внутреннего давления над силами гравитации возможно также применение приближенного аналитического способа [25]. В излагаемом исследовании [29] (2.8) находилось численно.

Решение нелинейной задачи Коши (2.6), (2.7) определяется численным методом Рунге–Кутты, представленным в программном математическом пакете Maple. Далее это решение подвергается дискретному преобразованию Фурье и отображению Пуанкаре.

### 3. СРАВНЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ УГЛОВЫХ И ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИБЛИЖЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ И ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В случае малых колебаний из (2.6) имеем линеаризованные уравнения

$$\ddot{\theta} + k_2^2 \theta = -\frac{s_0 \Omega^2 k_2^2}{g} \sin \Omega t, \quad \ddot{w} + k_1^2 w = -\frac{4s_0 \Omega^2}{\pi} \theta \sin \Omega t, \quad (3.1)$$

$$k_1^2 = \frac{\beta^4}{m_1} \left[ EJ(1 - p) + 3 \frac{\alpha L}{2} W_0^2 \right], \quad k_2^2 = \frac{4gW_0}{\pi(W_0^2 + 4\rho J/m_1)}, \quad p = \frac{p_0}{p_*},$$

где  $k_1$ ,  $k_2$  – циклические частоты собственных изгибных и угловых колебаний трубы,  $p$  – безразмерный параметр внутреннего давления.

Из (3.1) следует, что вынужденные угловые перемещения изогнутого трубопровода при нулевых начальных условиях (2.7) определяются только колебательными движениями опор. Кроме того видно, что в данном случае вынужденные изгибные перемещения находятся в прямой зависимости как от вращательных движений трубы, так и от колебаний ее опор. Нерезонансное решение (3.1) с учетом условий (2.7) запишется

$$\theta(t) = \delta \left( \frac{\Omega}{k_2} \sin k_2 t - \sin \Omega t \right), \quad w(t) = \frac{2\delta s_0 \Omega^2}{\pi} \left\{ \frac{1 - \cos k_1 t}{k_1^2} + \frac{\cos k_1 t - \cos 2\Omega t}{k_1^2 - 4\Omega^2} + \right.$$

$$+ \frac{\Omega}{k_2} \left[ \frac{\cos(\Omega + k_2)t - \cos k_1 t}{k_1^2 - (\Omega + k_2)^2} - \frac{\cos(\Omega - k_2)t - \cos k_1 t}{k_1^2 - (\Omega - k_2)^2} \right],$$

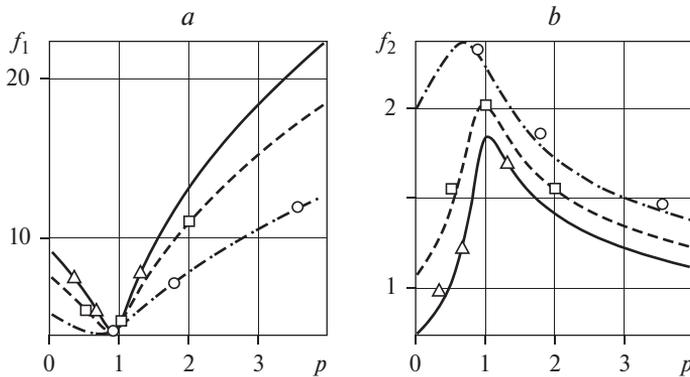
$$\delta = \frac{s_0 \Omega^2 k_2^2}{g(k_2^2 - \Omega^2)}, \quad k_2 \neq \Omega, \quad k_1 \neq 2\Omega, \quad k_1 \neq \Omega + k_2, \quad k_1 \neq \Omega - k_2. \quad (3.2)$$

Решение (3.2) позволяет сделать вывод о том, что малые вращательные и изгибные движения трубы складываются из собственных и вынужденных колебаний соответственно с частотами  $f_2 = k_2/(2\pi)$  и  $f, f_1 = k_1/(2\pi)$  и  $2f, f_3 = f - f_2, f_4 = f + f_2$ . При этом происхождение вынужденных изгибных колебаний с частотами  $2f, f_3, f_4$  обусловлено взаимодействием вращательных колебаний трубопровода и вибрационных движений опор.

Вычисления были проведены для трех труб, изготовленных из легированной стали, титанового сплава и композитного материала. У всех труб – равные геометрические размеры:  $L = 4.5$  м,  $R = 0.05$  м,  $h = 0.002$  м. Модули Юнга, коэффициенты Пуассона и плотности указанных материалов имеют следующие значения. Сталь:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Титановый сплав:  $E = 1.18 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0.35$ ,  $\rho = 4500$  кг/м<sup>3</sup>. Композитный материал (эффективные характеристики):  $E = 0.433 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0.4$ ,  $\rho = 2000$  кг/м<sup>3</sup>. Модуль упругости продольных элементов крепления подвижной опоры к основанию:  $C = 32$  МПа. Гравитационное ускорение:  $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup>. Частота и относительная амплитуда колебаний опор:  $f = 7, 10$  Гц,  $s_0/R = 0.02, 0.04, 0.06, 0.2$ . Наполнение труб – жидкость с плотностью  $\rho_0 = 900$  кг/м<sup>3</sup>. Внутреннее давление в трубах:  $p_0 = 4, 8, 9, 16$  МПа.

Величины критических давлений по (3.1) рассматриваемых стальной, титановой и композитной труб равной геометрии соответственно составляют:  $p_* = 12.3, 7.89, 4.48$  МПа. Результаты вычислений представлены на рис. 2–10 в виде графических зависимостей. Переменные на графиках измеряются:  $t$  – в секундах, линейная скорость  $\dot{w}$  – в метрах в секунду, угол  $\theta$  – в радианах, угловая скорость  $\dot{\theta}$  – в радианах в секунду, частота  $f$  – в Герцах. Размерности модулей комплексных амплитуд Фурье спектров:  $F_1$  – в метрах на секунду,  $F_2$  – в радианах на секунду.

На рис. 2 приведены графики изменения собственных частот  $f_1$  и  $f_2$  малых изгибных и вращательных колебаний трубы в зависимости от безразмерного параметра  $p$  внутреннего давления. Сплошные, штриховые и штрих-пунктирные линии соответственно относятся к трубам, изготовленным из стали, титанового сплава и композитного материала. Если на рис. 2, *a* данные линии в перечисленном порядке расположены одна под другой, то на рис. 2, *b* они имеют обратный порядок расположения. В первом случае такую закономерность можно объяснить различием в значениях изгибных жесткостей, а во втором – масс стальной, титановой и композитной труб. С увеличением отношения  $p$  собственные частоты  $f_1$  изгибных колебаний всех труб умень-



**Рис. 2.** Зависимости собственных частот изгибных  $f_1$  (Гц) и вращательных  $f_2$  (Гц) колебаний труб от безразмерного параметра  $p$  внутреннего давления

шаются, достигают минимальных значений, а далее, ввиду преобладания сил продольного натяжения над действиями сил гравитации и внутреннего давления, увеличиваются. При этом частоты  $f_2$  вращательных колебаний труб сначала растут, достигают своего максимума, а затем уменьшаются. Последнее обстоятельство объясняется тем, что до достижения определенного значения статической составляющей прогиба трубопровод проявляет свойства физического маятника, а после достижения этого значения – свойства математического маятника.

Точками в виде треугольников, прямоугольников и кружочков на графиках нанесены значения собственных частот угловых и изгибных колебаний соответственно стальной, титановой и композитной труб, полученные численным интегрированием (2.6), (2.7) при  $s_0/R = 0.02$ ,  $f = 10$  Гц,  $p_0 = 4, 8, 16$  МПа. Можно видеть, что указанные точки практически лежат на соответствующих кривых линиях.

#### 4. ЗАВИСИМОСТЬ УГЛОВЫХ И ИЗГИБНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ И ВИБРАЦИЙ ОПОР

Графические зависимости угловых  $q$  и относительных изгибных  $w/R$  перемещений от времени приведены на рис. 3–6. На них сверху буквами  $a$ ,  $b$  и  $c$  обозначены столбцы графиков, сгруппированные соответственно для стальной, титановой и композитной труб. На графиках сплошными линиями нанесены результаты численного решения задачи (2.6), (2.7), а пунктирными – результаты вычислений по формулам (3.2) в отрезке времени  $0 \leq t \leq 1.5$  с. Графики, расположенные сверху вниз соответственно на первой и второй строках, на рис. 3, 4 ( $s_0/R = 0.02$ ,  $f = 10$  Гц) относятся к двум

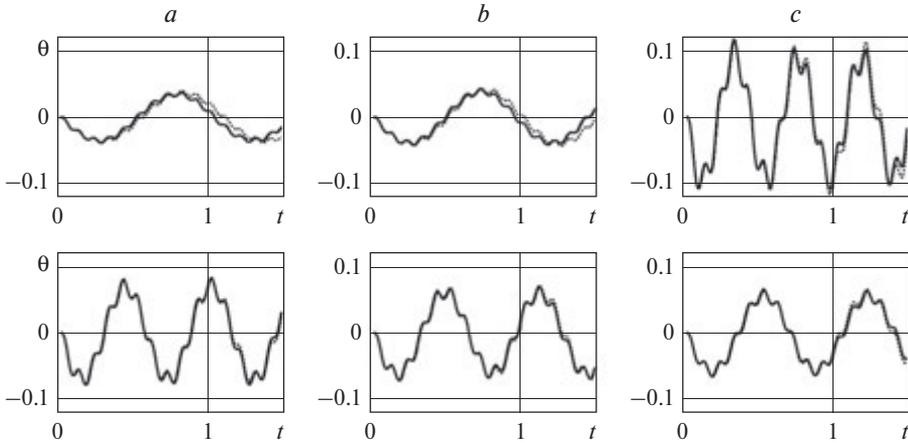


Рис. 3. Зависимости угла  $\theta$  от времени  $t$  при  $s_0/R = 0.02, f = 10$  Гц,  $p_0 = 4, 16$  МПа

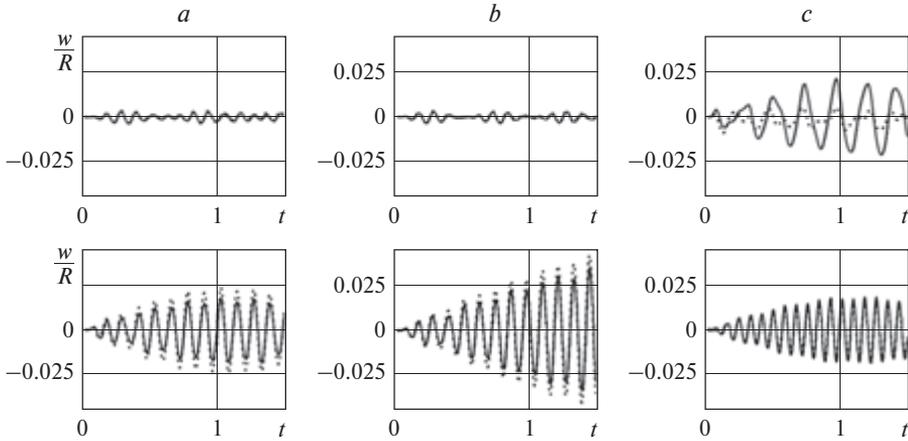


Рис. 4. Зависимости отношения  $w/R$  от времени  $t$  при  $s_0/R = 0.02, f = 10$  Гц,  $p_0 = 4, 16$  МПа

величинам внутреннего давления  $p_0$ : 4, 16 МПа, а на рис. 5, 6 ( $p_0 = 9$  МПа,  $f = 10$  Гц) – к двум значениям относительной амплитуды колебаний опор  $s_0/R$ : 0.04, 0.06. Численным решением кубического уравнения (2.8) при  $p_0 = 4, 9, 16$  МПа для рассматриваемых труб были получены следующие значения отношения  $W_0/R$ .

Стальная труба: 0.112, 0.274, 1.67; титановая труба: 0.128, 0.371, 1.83; композитная труба: 0.811, 1.96, 3.04. Сравнительный анализ обеих строк графиков рис. 3 и 4 позволяет сделать следующие выводы. При приня-

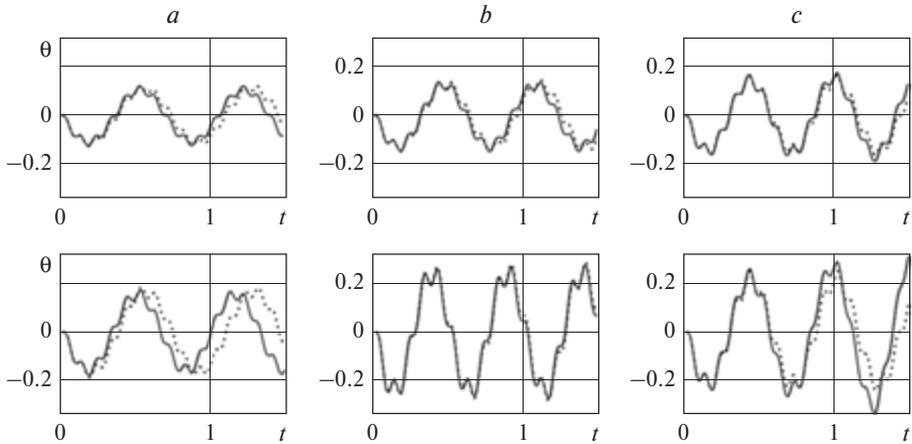


Рис. 5. Зависимости угла  $\theta$  от времени  $t$  при  $p_0 = 9$  МПа,  $f = 10$  Гц,  $s_0/R = 0.04, 0.06$

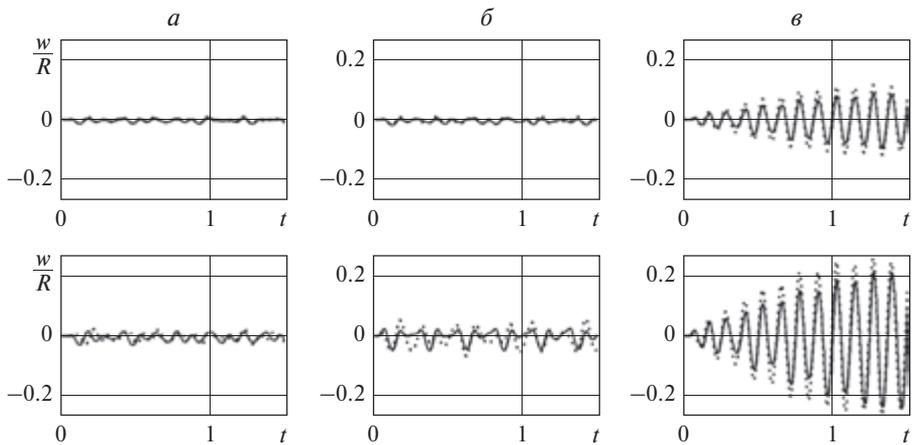


Рис. 6. Зависимости отношения  $w/R$  от времени  $t$  при  $p_0 = 9$  МПа,  $f = 10$  Гц,  $s_0/R = 0.04, 0.06$

тых входных данных увеличение внутреннего давления в трубе приводит к уменьшению разницы между результатами численного моделирования и приближенного аналитического решения как угловых, так и изгибных перемещений. Это уменьшение обусловлено тем, что с ростом давления  $p_0$  происходит увеличение статической составляющей  $W_0$  прогиба и, следовательно, уменьшение отношения  $w/W_0$ . А на малости последнего, совместно с углом  $\theta$ , основаны приближения (3.2). Наибольшее согласие в результатах

вычислений по приближенным формулам и численному интегрированию при  $p_0 = 16$  МПа можно отнести к трубе из композитного материала. Таким образом, в случае малых пространственных колебаний трубопровода сказанное выше подтверждает пригодность применения соотношений (3.1), (3.2).

Из сравнения первой и второй строк графиков рис. 5, 6 видно, что при принятых входных данных увеличение отношения  $s_0/R$  приводит как к росту амплитуд вращательных и изгибных колебаний, так и к значительным изменениям в относительных расположениях сплошных и пунктирных линий. Отсюда следует, что при достижении отношения  $s_0/R$  определенного значения формулы (3.2) могут также потерять свою применимость. Очевидно, что сказанное относится ко всем трубам, рассматриваемым в настоящей работе.

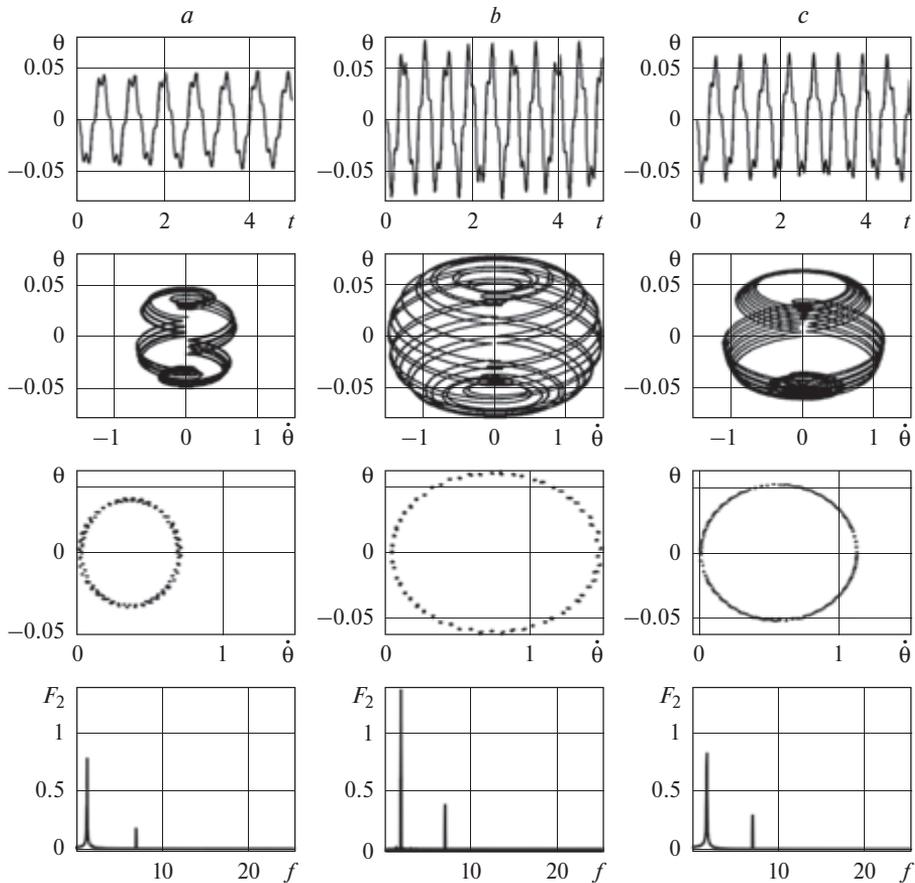
## 5. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРУБ

Результаты численного решения задачи (2.6), (2.7), полученные при  $p_0 = 9$  МПа,  $f = 7$  Гц, изображены на рис. 7, 8 ( $s_0/R = 0.02$ ) и 9, 10 ( $s_0/R = 0.20$ ) в виде графических зависимостей. Для построения последних рассмотрены два отрезка времени:  $0 \leq t \leq 5$  с (рис. 7, 8) и  $5 \leq t \leq 10$  с (рис. 9, 10). Так же, как на рис. 3–6, графики столбцами  $a$ ,  $b$  и  $c$  сгруппированы для стальной, титановой и композитной труб. Первыми строками сверху представлены графики зависимости угла  $\theta$  поворота и отношения  $w/R$  от времени ( $0 \leq t \leq 5$  с). На второй и последующих строках рисунков приведены фазовые траектории, отображения Пуанкаре и зависимости модулей комплексных амплитуд  $F_1, F_2$  изгибных и вращательных колебаний от частоты  $f$ . Выборка фазовых точек для картин Пуанкаре проводилась с периодом, равным периоду  $T = 1/f$  колебаний опор.

Из сравнения графиков первых строк рис. 7, 8 можно видеть, что при принятых входных данных наибольшие амплитуды угловых и изгибных колебаний имеет титановая труба, а наименьшие – стальная труба. При этом изгибные колебания совершаются в виде биений, частота которых у композитной трубы больше, чем у стальной и титановой.

Вторыми строками графиков приведены фазовые траектории угловых (рис. 7) и изгибных колебаний (рис. 8). При этом первые траектории имеют два центра притяжения, а последние – один центр притяжения. Общее для обоих колебательных движений состоит в том, что они являются периодическими.

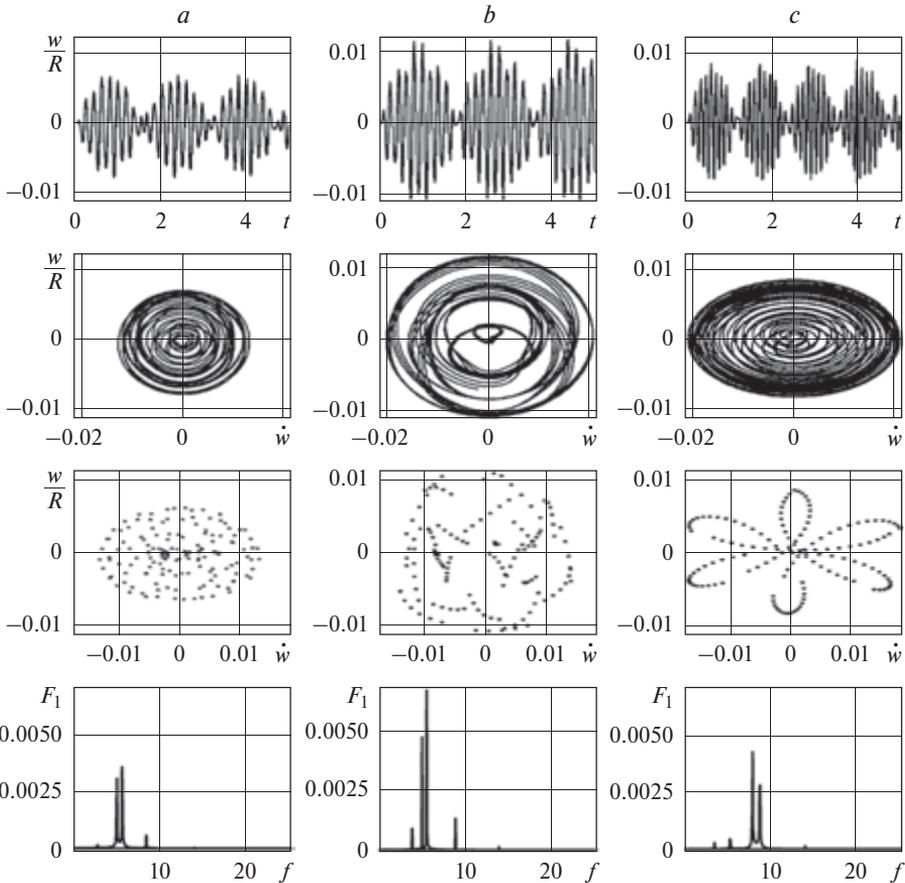
Картинами Пуанкаре на рис. 7, 8 заняты третьи строки графиков. На картинах видно, что фазовые точки вращательных движений труб имеют форму эллипсов (рис. 7). При этом наибольшие размеры имеет эллипс отображений Пуанкаре титановой трубы, а наименьшие – стальной трубы. Множество фазовых точек изгибных колебаний труб на картинах Пуанкаре



**Рис. 7.** Зависимости угла  $\theta$  от времени  $t$ , фазовые траектории и отображения Пуанкаре  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ , спектры частот  $F_2, f$  вращательных колебаний трубы при  $s_0/R=0.02$ ,  $p_0=9$  МПа,  $f=7$  Гц

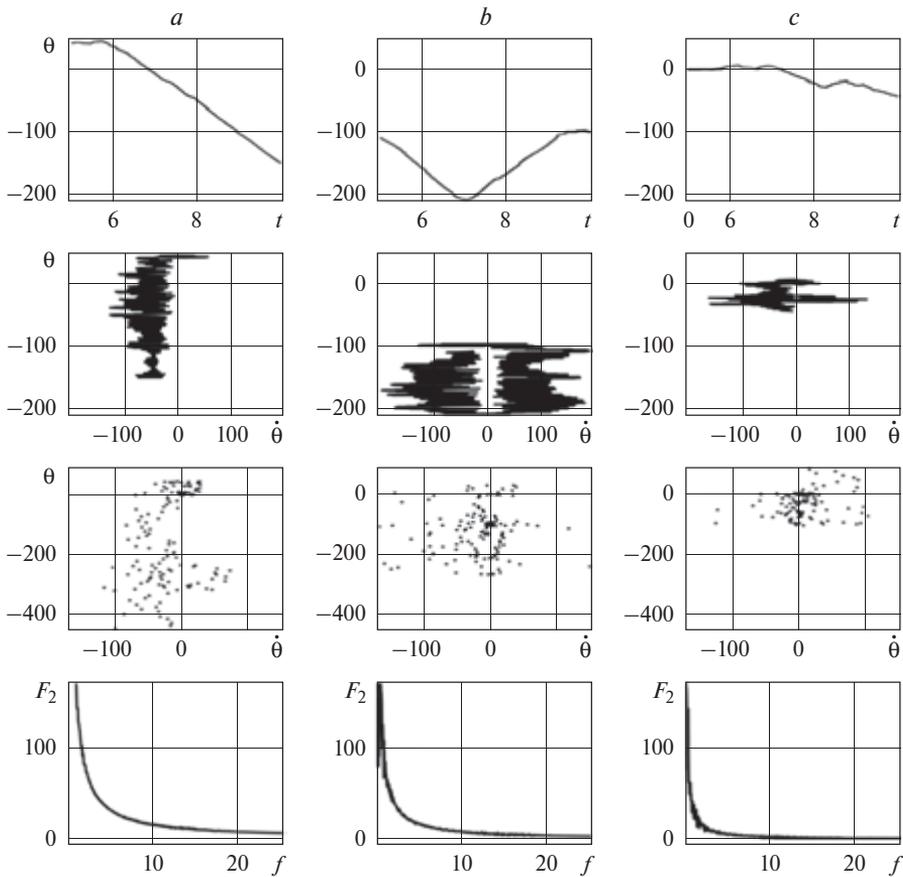
могут образовывать фигуры различных очертаний, которые характерны для каждой конкретной трубы (рис. 8).

На четвертых строках графиков рис. 7, 8 приведены спектры частот вращательных (рис. 7) и изгибных (рис. 8) колебаний. Из графиков видно, что дискретное преобразование Фурье у угловых движений выделяет колебания с частотами  $f_2, f$ , а у изгибных движений – колебания с частотами  $f_1, 2f_2, f_3, f_4, 2f$ . Ранее при анализе приближенного аналитического решения (3.2) такие выводы, за исключением отсутствия в изгибных перемещениях колебаний с частотой  $2f_2$ , уже были сделаны. Данный пробел в решении (3.2) может быть восполнен, если при линеаризации второго уравнения (3.1) в его пра-



**Рис. 8.** Зависимости отношения  $w/R$  от времени  $t$ , фазовые траектории и отображения Пуанкаре  $w/R, \dot{w}$ , спектры частот  $F_1, f$  изгибных колебаний трубы при  $s_0/R = 0.02, p_0 = 9$  МПа,  $f = 7$  Гц

вой части сохранить член  $W_0\theta^2$  и принять приближение  $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ . Из результатов числовых расчетов следует, что при принятых входных данных вращательные и изгибные движения труб суммируются в указанной выше последовательности из колебаний с частотами: 1.36, 7.0/10.0 и 2.72, 4.97, 5.64/8.64, 8.36/11.36, 14.0/20.0 Гц (стальная труба); 1.96, 7.0/10.0 и 3.92, 5.61, 5.04/8.04, 8.96/11.96, 14.0/20.0 Гц (титановая труба); 1.72, 7.0/10.0 и 3.44, 7.89, 5.28/8.28, 8.72/11.72, 14.0/20.0 Гц (композитная труба). Здесь косыми знаками дробей разделены значения частот составляющих колебаний, которые соответствуют принятым расчетным частотам 7.0 и 10.0 Гц вибраций основания. Можно констатировать, что в обоих случаях неравенства

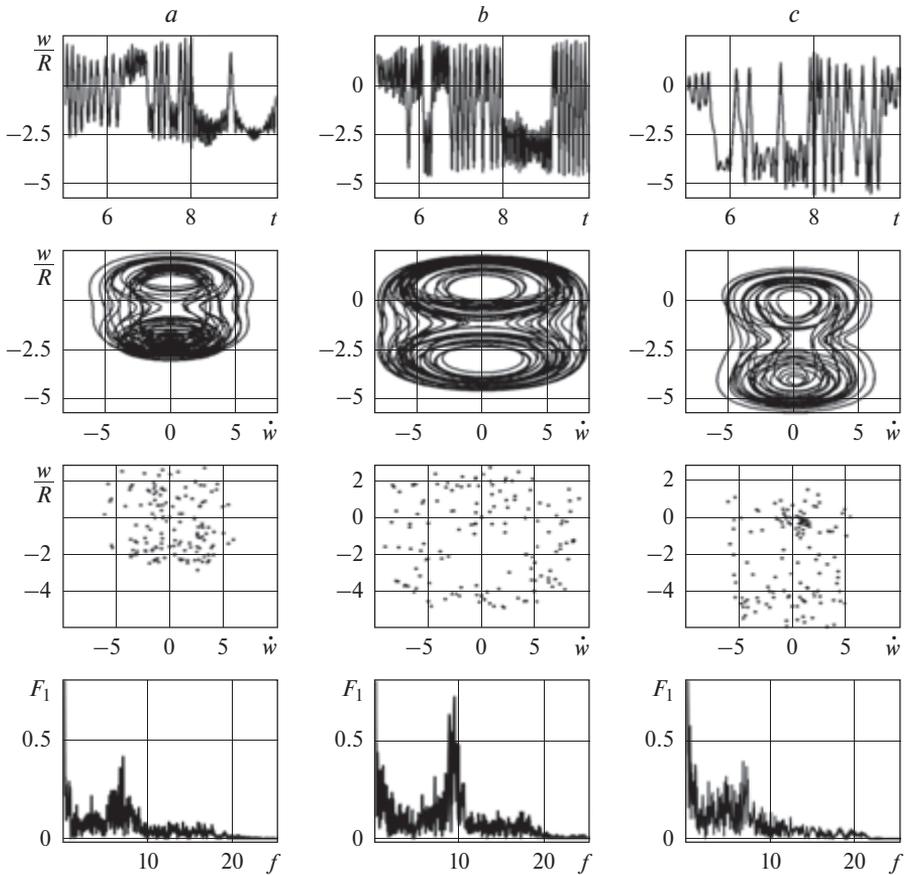


**Рис. 9.** Зависимости угла  $\theta$  от времени  $t$ , фазовые траектории и отображения Пуанкаре  $\theta, \dot{\theta}$ , спектры частот  $F_2, f$  вращательных колебаний трубы при  $s_0/R=0.02, p_0=9$  МПа,  $f=7$  Гц

$f_1 \neq 2f, f_2 \neq f, f_1 \neq f_3, f_1 \neq f_4$ , обуславливающие нерезонансные решения (3.2), соблюдаются.

Выше было отмечено, что с увеличением амплитуды перемещений опор происходит рост амплитуд как угловых, так и изгибных колебаний трубы. Графические зависимости рис. 9, 10 демонстрируют, что при определенных значениях параметров ( $s_0/R = 0.2$ ) возможны хаотические колебания рассматриваемых трубопроводов.

Из первой строки графиков рис. 9 видно, что угловые колебания труб перешли в непрерывное вращение вокруг оси, проходящей через опоры. Если на фрагменте стальной трубы вращение происходит по часовой стрелке, то на фрагментах титановой и композитной труб режим этого вращения на-



**Рис. 10.** Зависимости отношения  $w/R$  от времени  $t$ , фазовые траектории и отображения Пуанкаре  $w, \dot{w}$ , спектры частот  $F_1, f$  изгибных колебаний трубы при  $s_0/R = 0.02$ ,  $p_0 = 9$  МПа,  $f = 7$  Гц

блюдается с изменением направления. Это изменение идет в режиме нескольких колебаний около некоторого угла  $\theta$ . Из первой строки графиков рис. 10 следует, что в хаотическом режиме амплитуды изгибных колебаний труб увеличиваются многократно. При этом наибольшая амплитуда отношения  $w/R$  наблюдается у композитной трубы.

Фазовые траектории колебаний изображены на вторых строках рис. 9, 10. Можно видеть, что в данном отрезке времени ( $5 \leq t \leq 10$  с) изгибные колебания труб имеют по два центра притяжения. Они располагаются около  $w/R \approx 0$  и  $w/R \approx -2, -3, -4$ . Таким образом, колебания совершаются вокруг статического положения каждого трубопровода (стального, титанового, композитного):  $W_0/R = 0.274, 1.113, 1.964$  и  $\theta \approx 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$  Кроме

того, из вторых строк графиков рис. 9, 10 видно, что наибольшие модули скоростей угловых и изгибных перемещений имеет титановая труба.

Фазовые точки на картинах Пуанкаре (рис. 9, 10, третьи строки графиков) распределены беспорядочно, без определенных мест скопления и занимают на графиках разные площади. Это объясняется тем, что в работе не учитываются эффекты затухания.

Последними строками графиков рис. 9, 10 соответственно представлены спектры частот вращательных и изгибных движений. Видно, что они имеют сплошной вид.

Из вышеизложенного следует, что при принятых данных в рассматриваемых трубах возбуждаются непериодические колебания.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача о пространственных колебаниях изогнутого трубопровода на вибрирующих опорах представляется достаточно сложной. Ее решение может быть получено лишь на основе простейшей модели, например, изгибно-вращательных движений трубы. Модель предполагает, что отсутствуют деформации, связанные с выходом изогнутой оси трубопровода из плоскости изгиба (в частности, нет деформации кручения). Поэтому в каждый момент времени движения трубы рассматриваются как совокупность изгибных перемещений в одной плоскости, ее переносных вращений и поступательных вибраций опор. Вместе с тем модель учитывает взаимодействия внутреннего давления и изменений кривизны осевой линии, продольной и кольцевой деформаций трубы. Нелинейные уравнения изгибно-вращательных колебаний трубопровода решаются методами Бубнова–Галеркина и Рунге–Кутты. Результаты решения анализируются с помощью дискретных преобразований Фурье и отображений Пуанкаре.

Для случая малых угловых и изгибных колебаний трубопровода получено приближенное аналитическое решение системы линеаризованных уравнений. Сравнительный анализ результатов вычислений по формулам приближенного аналитического решения и численного моделирования позволил установить, что малые изгибно-вращательные движения стального, титанового и композитного трубопроводов складываются из колебаний с определенными частотами. Показано, что вращательные перемещения состоят из колебательных движений с двумя частотами, а изгибные – с пятью разными частотами. Кроме того, можно констатировать хорошее согласие в числовых значениях собственных частот угловых и изгибных колебаний, полученных по приближенному аналитическому и численному подходам. Установлено, что при относительно небольшой амплитуде перемещения опор с увеличением внутреннего давления в трубах их собственные частоты изгибных колебаний сначала уменьшаются, достигают минимума, а затем увеличиваются. При этом собственные частоты угловых колебаний сначала

растут, принимают максимальные значения, а далее уменьшаются. Следует подчеркнуть, что собственные частоты изгибных и угловых колебаний труб принимают экстремальные значения при внутренних давлениях, равных их критическим значениям. Важно также отметить, что с увеличением внутреннего давления в трубах графические зависимости изгибных и угловых перемещений от времени, полученные приближенным аналитическим и численным решениями, сближаются.

Результатами вычислений также подтверждено, что увеличение амплитуды перемещений опор приводит к увеличению амплитуд как изгибных, так вращательных колебаний трубы. При этом также увеличиваются расхождения в результатах приближенного аналитического и численного методов.

Показано, что при определенной совокупности входных данных и небольшом значении относительной амплитуды перемещения опор изгибно-вращательные колебания труб происходят в периодическом режиме. Десятикратное увеличение относительной амплитуды перемещения опор (при сохранении тех же входных данных) приводит к неперiodическим колебаниям труб.

Приведенный в настоящем параграфе анализ результатов числовых расчетов пространственных движений стальной, титановой и композитной труб дает возможность оценить их работоспособность по условиям прочности, жесткости и близости к резонансным и хаотическим режимам колебаний.

Учебное издание

**Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М.**

**СТАТИКА  
И ДИНАМИКА ТРУБОПРОВОДОВ**

Редактор *Л.В. Филиппова*

Художник *П. Э. Палей*

Корректоры *А. Ю. Обод, С. О. Розанова*

Издается по решению Научно-издательского совета  
Российской академии наук (НИСО РАН)  
от 11.04.2024 № 1 и распространяется бесплатно.

Оригинал-макет подготовлен ФГБУ «Издательство «Наука»  
в соответствии с контрактом с Российской академией наук  
№ 4У-ЕП-181-2-24.

Подписано к печати 22.11.2024. Формат 70×100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>  
Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная  
Усл.печ.л. 14,5. Уч.-изд.л. 13,5  
Тираж 300 экз. Тип. зак.

ФГБУ «Издательство «Наука»  
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6, стр. 1

E-mail: [info@naukapublishers.ru](mailto:info@naukapublishers.ru)  
<https://naukapublishers.ru>  
<https://naukabooks.ru>

ФГБУ «Издательство «Наука»  
(Типография «Наука»)  
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6, стр. 1

М.А. Ильгамов, М.М. Шакирьянов

# **СТАТИКА И ДИНАМИКА ТРУБОПРОВОДОВ**

Трубопроводы являются не только распространенными и ответственными элементами многих конструкций, но и весьма уязвимыми в реальных условиях. В монографии рассматриваются вопросы прочности и надежности трубопроводов, а также влияние на их состояние статических и динамических изгибов, пространственных колебаний

Приводятся задачи, модели, используемые при проектировании, сооружении и эксплуатации трубопроводов.

Для специалистов проектных, строительных и эксплуатационных организаций в области трубопроводных систем.

