СОДЕРЖАНИЕ

Том 58, номер 11, 2022

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ХРОНИКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1443–1452

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

ЛИНЕЙНЫЙ ВАРИАНТ АНТИПЕРРОНОВСКОГО ЭФФЕКТА СМЕНЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НА ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ

© 2022 г. Н. А. Изобов, А. В. Ильин

Реализован линейный вариант антиперроновского эффекта смены всех положительных характеристических показателей Ляпунова на отрицательные. Для произвольных чисел $\lambda_n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1 > 0$ и $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n < 0$ доказано существование n-мерных линейных систем: исходной $\dot{x} = A(t)x$, $t \geqslant t_0$, с характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$, и возмущённой $\dot{y} = A(t)y + Q(t)y$ с матрицей возмущения $Q(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и характеристическими показателями $\lambda_i(A+Q) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$. При этом матрицы коэффициентов исходной и возмущённой дифференциальных систем ограничены и бесконечно дифференцируемы на полуоси $[t_0, +\infty)$.

DOI: 10.31857/S0374064122110012, EDN: LZPTPQ

В качестве первого приближения рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{1_n}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$. В работе О. Перрона [1] (см. также [2, с. 50–51]) в двумерном случае установлено существование систем (1_2) с показателями $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) < 0$ и также бесконечно дифференцируемой вектор-функции

$$f(t,y) : (t,y) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

удовлетворяющей условию

$$\|f(t,y)\| \leqslant C_f \|y\|^m, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

при $m = 2$ таких, что все нетривиальные решения возмущённой системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{3}$$

бесконечно продолжимы вправо, и их показатели Ляпунова составляют множество $\{\lambda_2(A), \lambda\}$ с некоторым числом $\lambda > 0$. Этот эффект смены отрицательных показателей линейного приближения (1_2) на положительные для решений возмущённой системы (3) с m-возмущением (2) произвольного порядка $m > 1$ исследован в серии наших, в том числе и с С.К. Коровиным, работ и завершился (см. [3, 4]) полным описанием суслинскими множествами совокупностей $\Lambda_+(A,f)$ и $\Lambda_-(A,f)$ соответственно положительных и отрицательных показателей всех нетривиальных решений системы (3), в том числе и в необходимом случае $\Lambda_-(A,f) = \varnothing$.

Для возможных приложений (по превращению "абсолютно неустойчивых" дифференциальных систем в экспоненциально или условно устойчивые) бóльший интерес представляет противоположный антиперроновский эффект [5] смены малыми возмущениями (линейными, как исчезающими на бесконечности, так и экспоненциально убывающими; нелинейными высшего порядка малости) всех положительных характеристических показателей линейного приближения (1_n) на отрицательные для решений возмущённой системы. В работе [5] исследован этот эффект для экспоненциально убывающих линейных возмущений: доказано существование линейных систем (1_n) со всеми положительными показателями и возмущённой системы

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{4_n}$$

с бесконечно дифференцируемой $n \times n$-матрицей $Q(t)$, удовлетворяющей условию

$$\|Q(t)\| \leqslant C_Q e^{-\sigma t}, \quad \sigma > 0, \quad t \geqslant t_0, \tag{5}$$

и характеристическими показателями

$$\lambda_1(A+Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1}(A+Q) < 0 < \lambda_n(A+Q).$$

При этом остался открытым сформулированный в этой же работе вопрос о существовании системы (4_n) с возмущением (5) и отрицательным старшим показателем $\lambda_n(A+Q)$. Нельзя ли при более общем возмущении $Q(t) \to 0$, $t \to +\infty$, одновременно реализовать все необходимые неравенства $\lambda_i(A) > 0$, $\lambda_i(A+Q) < 0$, $i = \overline{1,n}$?

Утвердительный ответ содержит следующая, анонсированная в статье [6],

Теорема. *Для любых параметров*

$$\lambda_n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1 > 0, \quad \mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n < 0, \quad 2 \leqslant n \in \mathbb{N},$$

существуют:

1) линейная система (1_n) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$;

2) бесконечно дифференцируемая $n \times n$-матрица $Q(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, такие, что возмущённая система (4_n) имеет характеристические показатели $\lambda_i(A+Q) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$.

Доказательство этой теоремы сводится к доказательствам двух её частных вариантов, соответственно, в двумерном и трёхмерном случаях. При этом, как и в работе [5], сначала строится кусочно-постоянная и ограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$ матрица $A(t)$ коэффициентов системы (1_n) с показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$, и необходимая также кусочно-постоянная $n \times n$-матрица-возмущение $Q(t) \to 0$, $t \to +\infty$, такие, что возмущённая система (4_n) имеет характеристические показатели $\lambda_i(A+Q) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$. Затем с помощью соответствующих функций Гелбаума–Олмстеда матрицы $A(t)$ и $Q(t)$ переопределим на промежутках очень малой длины, содержащих их точки разрыва, так чтобы они стали бесконечно дифференцируемыми и по-прежнему остались ограниченными на полуоси $[t_0, +\infty)$ (как и в самом эффекте Перрона), сохранив при этом значения показателей как исходной, так и возмущённой систем.

1. Общие построения. С помощью величин

$$\theta_1 = \theta > e, \quad \theta_i = \theta\, \frac{\mu_{i-1} - \lambda_i}{\mu_i - \lambda_i} \geqslant \theta, \quad i = 2, 3, \tag{6}$$

введём последовательность $\{T_l\} \subset [t_0, +\infty)$ моментов T_l со свойствами

$$T_{3l+i} = T_{3l+i-1}(\theta\theta_i)^{k_i(l)}, \quad k_i(l) > l, \quad T_3 > e, \quad i = \overline{1,3}, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Заметим, что нетривиальные построения необходимых систем в двумерном случае будут вестись на промежутках $[T_{3l}, T_{3l+2})$ для всех $l \in \mathbb{N}$, а в трёхмерном – дополнительно и на промежутках $[T_{3l+2}, T_{3l+3})$, $l \in \mathbb{N}$.

Для определения элементов матриц $A(t)$ и $Q(t)$ понадобятся промежуточные моменты времени

$$t_0(i,l) = T_{3l+i-1}, \quad i = \overline{1,3}, \quad l \in \mathbb{N},$$
$$t_{2k}(i,l) = \theta\theta_i t_{2k-2}(i,l), \quad t_{2k-1}(i,l) = \theta t_{2k-2}(i,l)$$

для всех $k = \overline{1, k_i(l)}$ при всех $l \in \mathbb{N}$ и $i = \overline{1,3}$.

2. Двумерный случай. Нулевые значения кусочно-постоянных коэффициентов необходимой двумерной системы

$$\dot{x} = \operatorname{diag}[a_1(t), a_2(t)]x \equiv A_2(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{1_2}$$

определим для всех $l \in \mathbb{N}$ равенствами

$$a_1(t) = a_2(t) = 0, \quad t \in [t_k(i,l), l + t_k(i,l)) \equiv I_k^0(i,l), \quad k = \overline{0, 2k_i(l) - 1}, \quad i = 1, 2, \tag{8_1}$$

$$a_2(t) = 0, \quad t \in I_k^0(3,l), \quad k = \overline{0, 2_{k_3}(l) - 1}. \tag{8_2}$$

Ненулевые значения этих коэффициентов на оставшихся промежутках

$$I_0(i,l) \equiv [t_0(i,l), t_2(i,l)) \setminus \bigcup_{k=0,1} I_k^0(i,l), \quad i = \overline{1,3}, \quad l \in \mathbb{N},$$

$$I_2(i,l) \equiv [t_2(i,l), T_{3l+i}) \setminus \bigcup_k I_k^0(i,l), \quad k = \overline{2, 2k_i(l)}, \quad i = \overline{1,3}, \quad l \in \mathbb{N},$$

определим следующим образом:

$$a_1(t) = \alpha_1 \equiv -\theta\lambda_2 + \frac{\theta^2\mu_1 - \mu_2}{\theta - 1},$$

$$a_2(t) = \alpha_2 \equiv -\theta\lambda_1 + (1+\theta)\mu_1, \quad t \in I_0(i,l), \quad i = 1, 2, \quad l \in \mathbb{N}, \tag{9_1}$$

что позволит избежать на промежутках $I_0(i,l)$ возможного недопустимого роста норм решений соответствующей возмущённой системы при переходе с любого промежутка $[T_p, T_{p+1})$, $3 \leqslant p \in \mathbb{N}$, на аналогичный соседний;

$$a_i(t) = \lambda_i, \quad a_{3-i}(t) = \alpha_{3-i}, \quad t \in I_2(i,l), \quad i = 1, 2, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{9_2}$$

На последнем для фиксированного l промежутке $[T_{3l+2}, T_{3l+3})$ (используемом при последующем рассмотрении в п. 3 трёхмерного случая и не нарушающем необходимых параметров в двумерном случае) положим

$$a_1(t) = \alpha_1, \quad t \in [T_{3l+2}, T_{3l+3}),$$

$$a_2(t) = \alpha_3 \equiv -\theta\lambda_3 + \frac{\theta^2\mu_2 - \mu_3}{\theta - 1}, \quad t \in I_0(3,l) \bigcup I_2(3,l), \quad l \in \mathbb{N}. \tag{9_3}$$

Вычислим теперь характеристические показатели построенной линейной системы (1_2). По определениям (8_1), (8_2) и (9_1)–(9_3) коэффициентов этой системы и неравенств $\alpha_i < 0$, $i = \overline{1,3}$, справедливы оценки

$$a_i(t) \leqslant \lambda_i, \quad i = 1, 2, \quad t \in [T_3, +\infty),$$

из которых следуют очевидные неравенства $\lambda_i(A_2) \leqslant \lambda_i$, $i = 1, 2$. С другой стороны, в силу неравенств

$$T_{3l+i-1}T_{3l+i}^{-1} < \exp[-2k_i(l)], \quad k_i(l) > l, \quad l \in \mathbb{N}, \quad i = \overline{1,3},$$

вытекающих из определений (6) и (7), справедливы необходимые противоположные оценки

$$\lambda_i(A_2) \geqslant \varlimsup_{l\to\infty} T_{3l+i}^{-1}[\alpha_0 t_2(i,l) - 2\lambda_i l k_i(l) + \lambda_i(T_{3l+i} - t_2(i,l))] \geqslant$$

$$\geqslant \varlimsup_{l\to\infty} T_{3l+i}^{-1}[2\alpha_0\theta_1\theta_2 T_{3l+i-1} - 2\lambda_i k_i^2(l) T_{3l+i-1} + \lambda_i(T_{3l+i} - T_{3l+i-1})] =$$

$$= \lambda_i - 2\lambda_i \lim_{l\to\infty}[k_i^2(l)e^{-2k_i(l)}] = \lambda_i, \quad i = 1, 2,$$

в которых $\alpha_0 = \min\limits_j\{\alpha_j\}$, $j = \overline{1,3}$.

Таким образом, линейная система (1_2) с кусочно-постоянными ограниченными коэффициентами $a_i(t)$ имеет необходимые характеристические показатели $\lambda_i(A_2) = \lambda_i$, $i = 1, 2$.

Матрицу $Q_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$ (также кусочно-постоянную) возмущённой двумерной линейной системы

$$\dot{y} = A_2(t)y + Q_2(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{10}$$

определим равенством (см., например, [7])

$$Q_2(t) = q_2(t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \geqslant t_0 \equiv T_3, \tag{11_1}$$

с функцией

$$q_2(t)\begin{cases} (-1)^{k+i}\pi/(2l), & t \in I_k^0(i,l), \quad k = \overline{0, 2k_i(l)-1}, \quad i = 1, 2, \\ 0 & \text{для всех остальных } t \in [t_0, +\infty) \end{cases} \tag{11_2}$$

и её интегралом

$$\int\limits_{I_k^0(i,l)} q_2(\tau)\,d\tau = \frac{\pi}{2}(-1)^{k+i}, \quad k = \overline{0, 2k_i(l)-1}, \quad i = 1, 2. \tag{11_3}$$

У системы (10) на промежутках $I_k^0(i,l)$, $i = 1, 2$, $k = \overline{0, 2k_i(l)-1}$, $l \in \mathbb{N}$, матрица $A_2(t)$ тождественно равна нулевой, а матрица $Q_2(t)$ коэффициентов этой системы, определённая равенствами (11_1)–(11_3), обеспечивает на указанных промежутках повороты её решений (и тем самым сохранение их нормами постоянных значений) на угол $\pi/2$: 1) при $i = 1$ против часовой стрелки в случае равного нулю и чётного k и по часовой стрелке – для нечётного k; 2) при $i = 2$ для тех же k – в противоположных направлениях. Поэтому для норм решений $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ с начальными векторами

$$Y_j[t_k(i,l)] = \|Y_i[t_k(i,l)]\|(2-j, j-1)^{\mathrm{т}}, \quad j = 1, 2, \tag{12_{ik}}$$

при нулевом или чётном $k < 2k_i(l)$ на промежутках

$$I_s^0(i,l), I_s'(i,l) \equiv [l + t_s(i,l), t_{s+1}(i,l)) \subset [T_{3l+i-1}, T_{3l+i}), \quad i = 1, 2, \quad l \in \mathbb{N},$$

будем иметь при $j = 1, 2$ представления

$$\|Y_j(t)\| = \begin{cases} \|Y_j(t_s)\|, & t \in I_s^0(i,l), \quad s = k, k+1, \\ \|Y_j(l+t_s)\| \exp[\beta_s(i,j)(t - l - t_s)], & t \in I_s'(i,l), \quad s = k, k+1, \end{cases} \quad t_s \equiv t_s(i,l), \tag{13_{is}}$$

в случае $i = 1$. В них величины $\beta_s(1,j)$ определены равенствами

$$\beta_1(1,1) = \alpha_1, \quad \beta_s(1,1)\begin{cases} \alpha_2 & \text{для } s = 0 \text{ и чётных } s < 2k_1(l), \\ \lambda_1 & \text{для нечётных } s \in \{3, \ldots, 2k_1(l)-1\} \end{cases} \tag{14_{11}}$$

для первого решения $Y_1(t)$;

$$\beta_0(1,2) = \alpha_1, \quad \beta_s(1,2)\begin{cases} \alpha_2 & \text{для нечётного } s \leqslant 2k_1(l)-1, \\ \lambda_1 & \text{для чётного } s < 2k_1(l) \end{cases} \tag{14_{12}}$$

для второго решения $Y_2(t)$. При этом для рассматриваемых решений $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ справедливы и их значения $(12_{1,k+2})$. Тем самым при продолжении этих решений представления (12_{lk}) справедливы при всех чётных $k \leqslant 2k_1(l)$ и $k = 0$, а при всех нечётных $k < 2k_1(l)$ рассматриваемые решения системы (10) принимают значения

$$Y_j[t_k(1,l)] = \|Y_j[t_k(1,l)]\|(1-j, 2-j)^{\mathrm{т}}, \quad j = 1, 2.$$

Очевидно, что это же справедливо и для непрерывных рассматриваемых на всем промежутке $[T_{3l}, T_{3l+1})$ решений $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ системы (10), а также для них выполнены равенства (13_{1s}) при нулевом и всех чётных $s < 2k_1(l)$.

Заметим, что конечные значения $(12_{1,2k_1(l)})$ в момент $t = t_{2k_1(l)}(1,l) = T_{3l+1}$ построенных на отрезке $[T_{3l}, T_{3l+1}]$ непрерывных решений $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ возмущённой системы (10) будут являться начальными значениями (12_{20}) аналогичных решений на следующем отрезке $[T_{3l+1}, T_{3l+2}]$ с одним и тем же $l \in \mathbb{N}$.

На отрезке $[T_{3l+1}, T_{3l+2}]$ l-го временного цикла $[T_{3l}, T_{3l+3}]$, соответствующем значению $i = 2$, аналогичным образом построим непрерывные решения $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ возмущённой системы (10) с начальными значениями (12_{20}), совпадающими, как уже отмечалось, с конечными значениями $(12_{1,2k_1(l)})$. Тем самым они являются непрерывным продолжением построенных на предыдущем промежутке $[T_{3l}, T_{3l+1})$ также непрерывных одноименных решений. При этом следует учитывать, что направление поворотов на угол $\pi/2$ решений системы (10) на промежутках $I_k^0(2,l)$ противоположно аналогичным поворотам на промежутках $I_k^0(1,l) \subset \subset [T_{3l}, T_{3l+1})$.

В итоге будем иметь равенства: (12_{2k}) при всех нулевом и чётных $k \leqslant 2k_2(l)$;

$$Y_j[t_k(2,l)] = \|Y_j[t_k(2,l)]\|(j-1, j-2)^{\mathrm{т}}$$

для всех нечётных $k < 2k_2(l)$; (13_{2s}) с постоянными

$$\beta_0(2,1) = \alpha_2, \quad \beta_s(2,1) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{для нечётных } s < 2k_2(l), \\ \lambda_2 & \text{для чётных } s < 2k_2(l) \end{cases} \tag{14_{21}}$$

для первого решения $Y_1(t)$,

$$\beta_1(2,2) = \alpha_2, \quad \beta_s(2,2) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{для } s = 0 \text{ и чётных } s < 2k_2(l), \\ \lambda_2 & \text{для нечётных } s \subset \{3, \ldots, 2k_2(l) - 1\} \end{cases} \tag{14_{22}}$$

для второго решения $Y_2(t)$.

Последний промежуток $[T_{3l+2}, T_{3l+3})$ l-го временного цикла $[T_{3l}, T_{3l+3})$ построения необходимых исходной (1_2) и возмущённой (10) линейных систем является подготовительным для последующего рассмотрения трёхмерного случая. На нём первый коэффициент системы (1_2) определяется равенством $a_1(t) = \alpha_1$, а второй $a_2(t)$ – равенствами (8_2) и (9_3), матрица $Q_2(t)$ в системе (10) тождественно равна нулю. Тем самым решения $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ на этом промежутке имеют вид

$$Y_j(t) = \|Y_j(T_{3l+2})\| \exp\bigg(\int\limits_{T_{3l+2}}^{t} a_j(\tau)\, d\tau\bigg)(2-j, j-1)^{\mathrm{т}}, \quad t \in [T_{3l+2}, T_{3l+3}), \quad j = 1, 2,$$

и в силу значений $(12_{2,2k_2(l)})$ являются непрерывным продолжением одноименных решений, построенных на предыдущем промежутке $[T_{3l+1}, T_{3l+2})$.

Заметим, что построенные непрерывные на промежутке $[T_{3l}, T_{3l+3})$ решения $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ возмущённой системы (10) в любой момент этого промежутка являются ортогональными.

Приведённые построения на промежутке $[T_{3l}, T_{3l+3})$ с произвольно фиксированным индексом $l \in \mathbb{N}$ распространим индукцией по $l \in \mathbb{N}$ (в определённом смысле периодически) на всю полуось $[t_0, +\infty)$, $t_0 \equiv T_3$. В итоге будем иметь двумерные исходную линейную систему (1_2) с ограниченной кусочно-постоянной матрицей коэффициентов $A_2(t)$ и положительными показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, а также возмущённую систему (10) с кусочно-постоянной матрицей $Q_2(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ и нормальной (ортогональной в любой момент $t \geqslant t_0$) системой непрерывных решений $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ с начальными значениями

$$Y_1(t_0) = (2-j, j-1)^{\mathrm{т}}, \quad j = 1, 2.$$

Нормы этих решений в силу равенств (13_{is}) представимы в виде

$$\|Y_j(t)\| = \exp\biggl(\int\limits_{t_0}^{t} \beta_j(\tau)\,d\tau\biggr), \quad j=1,2, \quad t \geqslant t_0, \tag{15}$$

здесь кусочно-постоянные вспомогательные функции $\beta_j(t)$, $j=1,2$, на разных временных промежутках принимают значения

$$\beta_j(t) = \begin{cases} 0, & t \in I_s^0(i,l), \quad i=1,2, \quad l \in \mathbb{N}, \\ \beta_s(i,j), & t \in I_s'(i,l), \quad s=\overline{0,2k_i(l)-1}, \\ a_j(t), & t \in [T_{3l+2}, T_{3l+3}) \end{cases} \tag{16}$$

с величинами $\beta_s(i,j)$, определёнными равенствами (14_{ij}), $i,j=1,2$.

Вычислим теперь показатели решений $Y_j(t)$, $j=1,2$, нормы которых представлены равенствами (15), (16). Для этого вместо функций $\beta_j(t)$ используем более простые по определению кусочно-постоянные функции $b_j(t)$, $j=2$, имеющие представления

$$b_1(t) = \begin{cases} \alpha_{3-i}, & t \in [t_{2s+1-i}, t_{2s+2-i}), \quad s=\overline{1,k_i(l)+i-2}, \quad t_s = t_s(i,l), \\ \lambda_i, & t \in [t_{2s+2-i}, t_{2s+3-i}), \quad s=\overline{1,k_i(l)-1}, \quad i=1,2, \end{cases}$$

$$b_1(t) = \alpha_{2-s}, \quad t \in [t_s(i,l), t_{s+1}(i,l)), \quad s=0,1, \quad i=1,2,$$

$$b_j(t) = \alpha_{2j-1}, \quad t \in [T_{3l+2}, T_{3l+3}), \quad j=1,2, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Вторая функция $b_2(t)$ дополнительно определяется равенствами

$$b_2(t) = \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2-b_1(t), & t \in [t_0(i,l), t_2(i,l)), \quad i=1,2, \\ \alpha_{3-i}+\lambda_i-b_1(t), & t \in [t_2(i,l), T_i), \quad i=1,2. \end{cases}$$

Эти новые функции $b_j(t)$ связаны с прежними интегральными неравенствами

$$-\lambda_2 l + \int\limits_{t_{2s}}^{t} b_j(\tau)\,d\tau \leqslant \int\limits_{t_{2s}}^{t} \beta_j(\tau)\,d\tau \leqslant 2|\alpha_0| l + \int\limits_{t_{2s}}^{t} b_j(\tau)\,d\tau, \quad j=1,2,$$

$$\alpha_0 = -\theta\lambda_3 + \frac{\theta^2\mu_1-\mu_3}{\theta-1}, \quad t_{2s}=t_{2s}(i,l), \quad t \in [t_{2s}, t_{2s+1}), \tag{17}$$

для любых $s=\overline{0,k_i(l)-1}$, $i=\overline{1,3}$ и $l \in \mathbb{N}$. С помощью соотношений (17) установим равенства

$$\lambda[Y_i] \equiv \varlimsup_{t\to\infty} t^{-1}\int\limits_{t_0}^{t} \beta_i(\tau)\,d\tau = \varlimsup_{t\to\infty} \lambda_j(t), \quad \lambda_j(t) \equiv t^{-1}\int\limits_{t_0}^{t} b_j(\tau)\,d\tau, \quad j=1,2, \tag{18}$$

для вычисления характеристических показателей $\lambda[Y_j]$ решений $Y_j(t)$, $j=1,2$, возмущённой системы (10). Действительно, из правого неравенства (17) в силу произвола i,s и $l>1$ имеем оценку

$$\int\limits_{t_0}^{t} \beta_j(\tau)\,d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} b_j(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{\eta_t} [\beta_j(\tau)-b_j(\tau)]\,d\tau + 4l|\alpha_0|[s+m_t(i,l)], \tag{19}$$

в которой момент η_t и величина $m_t(i,l)$ определяются равенствами

$$\eta_t = T_{3l+i-2}, \quad m_t(i,l) = \begin{cases} k_3(l-1), & i=1, \\ k_{i-1}(l), & i=2,3. \end{cases}$$

Так как справедливы неравенства

$$t \geqslant t_{2s} \geqslant \theta^{2s} T_{3l+i-1} \geqslant \theta^{2[s+m_t(i,l)]} T_{3l+i-2} = \theta^{2[s+m_t(i,l)]} \eta_t(i,l)$$

и $m_t(i,l) \to +\infty$ (при $t \to \infty$ и $l \to \infty$), то из (19) верхним предельным переходом получаем первую необходимую оценку

$$\lambda[Y_j] \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \lambda_j(t), \quad j=1,2.$$

Аналогичным образом получаем и второе противоположное неравенство, устанавливающее необходимое равенство (18).

При вычислении характеристических показателей $\lambda[Y_j]$ построенных решений $Y_j(t)$ по формулам (18) (и функциям $b_j(t)$) воспользуемся следующим очевидным утверждением.

Утверждение. *Характеристический показатель $\lambda[Y]$ нетривиального решения*

$$Y(t) = \exp\biggl(\int\limits_{t_0}^{t} b(\tau)\,d\tau\biggr), \quad t \geqslant t_0,$$

скалярного уравнения $\dot y = b(t)y$, $y \in \mathbb{R}^1$, $t \geqslant t_0$, с кусочно-постоянным ограниченным коэффициентом

$$b(t) = b_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \geqslant 0,$$

вычисляется по последовательности $\{t_k\} \uparrow \infty$ по формуле

$$\lambda[Y] = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, t_k^{-1} \int\limits_{t_0}^{t_k} b(\tau)\,d\tau.$$

Его справедливость следует из знакопостоянства или тождественного равенства нулю производной $\lambda'(t)$ характеристической функции $\lambda(t) \equiv t^{-1}\ln|Y(t)|$ решения $Y(t)$ рассматриваемого уравнения на всяком интервале (t_k, t_{k+1}).

В соответствии с этим утверждением такой последовательностью для вычисления характеристических показателей $\lambda[Y_j]$ решений $Y_j(t)$, $j=1,2$, по функциям $b_j(t)$ (см. формулы (18)) является последовательность

$$\{t_s(i,l)\}, \quad s = \overline{0, 2k_i(l)}, \quad i = \overline{1,3}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

По этой последовательности с учётом определений функций $b_j(t)$ и построенных α_i и θ_i вычислим (а в некоторых случаях оценим) на промежутках $[T_{3l+i-1}, T_{3l+i})$ интегральные средние

$$J_{ij}(t_s, t_{s+2}) \equiv (t_{s+2} - t_s)^{-1} \int\limits_{t_s}^{t_{s+2}} b_j(\tau)\,d\tau, \quad s = \overline{2, 2k_i(l) - 2}, \quad i,j = 1,2, \quad l \in \mathbb{N},$$

для членов $t_s = t_s(i,l)$ указанной последовательности с чётными и нечётными номерами s, что позволит вычислить показатели решений $Y_j(t)$. Для $i=1$ и чётных s имеем равенство

$$J_{11}(t_s, t_{s+2}) = \frac{\alpha_2(t_{s+1} - t_s) + \lambda_1(t_{s+2} - t_{s+1})}{t_{s+2} - t_s} = \frac{\alpha_2 + \theta\lambda_1}{1+\theta} = \mu_1,$$

$$J_{12}(t_s, t_{s+2}) = \frac{\lambda_1 + \theta\alpha_2}{1+\theta} < J_{11}(t_s, t_{s+2}) = \mu_1 \leqslant \mu_2,$$

а для нечётных $s = \overline{3, 2k_1(l) - 3}$ – равенства

$$J_{11}(t_s, t_{s+2}) = \frac{\lambda_1 + \theta\alpha_2}{1+\theta} < \frac{\alpha_2 + \theta\lambda_1}{1+\theta} = \mu_1, \quad J_{12}(t_s, t_{s+2}) = \frac{\alpha_2 + \theta\lambda_1}{1+\theta} = \mu_1 \leqslant \mu_2.$$

На следующем промежутке $[T_{3l+1}, T_{3l+2})$, соответствующем значению $i = 2$, вычислим аналогичные интегральные средние $J_{2j}(t_s, t_{s+2})$ с моментами $t_s = t_s(2, l)$ и чётными и нечётными номерами $s = \overline{2, 2k_2(l) - 2}$. Для $j = 2$ и чётных s имеем с учётом значений α_1 и θ_2 равенства

$$J_{22}(t_s, t_{s+2}) = \frac{\alpha_1(t_{s+1} - t_s) + \lambda_2(t_{s+2} - t_{s+1})}{t_{s+2} - t_s} =$$

$$= \frac{(\theta - 1)\alpha_1 + \theta(\theta_2 - 1)\lambda_2}{\theta\theta_2 - 1} = \frac{\theta(\theta_2 - \theta)\lambda_2 + \theta^2\mu_1 - \mu_2}{\theta\theta_2 - 1} = \mu_2.$$

Для нечётных $s \in \{3, 2k_2(l) - 3\}$ имеем значение

$$J_{22}(t_s, t_{s+2}) = \frac{(\theta - 1)\lambda_2 + \theta(\theta_2 - 1)\alpha_1}{\theta\theta_2 - 1},$$

очевидно, строго меньшее значения J_{22}, вычисленного выше при чётных s, т.е. меньшее числа μ_2.

Воспользовавшись полученным выше представлением

$$\mu_2 = \frac{(\theta - 1)\alpha_1 + \theta(\theta_2 - 1)\lambda_2}{\theta\theta_2 - 1},$$

оценим теперь интегральное среднее $J_{21}(t_s, t_{s+2})$ с нечётными номерами $s \in \{3, \ldots, 2k_2(l) - 3\}$:

$$J_{21}(t_s, t_{s+2}) = \frac{(\theta_2 - 1)\alpha_1 + (\theta - 1)\theta_2\alpha_2}{\theta\theta_2 - 1} = \frac{(\theta_2 - \theta)(\alpha_1 - \lambda_2)}{\theta\theta_2 - 1} + \mu_2 =$$

$$= \frac{\theta_2(\mu_2 - \lambda_2) + \theta\lambda_2}{\theta - 1} = \frac{\theta(\mu_1 - \lambda_2) + \theta\lambda_2 - \mu_2}{\theta - 1} = \frac{\theta\mu_1 - \mu_2}{\theta - 1} \leqslant \mu_1.$$

Вычисляемые по чётным номерам $s \in \{2, \ldots, 2k_2(l) - 2\}$ значения

$$J_{21}(t_s, t_{s+2}) = \frac{(\theta - 1)\lambda_2 + \theta(\theta_2 - 1)\alpha_1}{\theta\theta_2 - 1},$$

очевидно, строго меньше аналогичных значений, вычисленных выше по нечётным номерам s, т.е. строго меньше μ_1. Поэтому в силу того, что вычисленные выше интегральные средние $J_{ij}(t_s, t_{s+2})$ в каждом отдельном случае принимают одно и то же значение при всех рассматриваемых s, а также ввиду неравенств $\alpha_i < \mu_1$, $i = 1, 2$, $\alpha_3 < \mu_2$ и свойства $T_{3l+i-1}/T_{3l+i} \to 0$ при $l \to \infty$, $i = \overline{1, 3}$, справедливы необходимые равенства $\lambda[Y_j] = \mu_j$, $j = 1, 2$, причём показатель решения $Y_j(t)$ реализуется, например, по последовательности $\{T_{3l+j}\}$, $j = 1, 2$.

Двумерный кусочно-постоянный вариант теоремы доказан.

3. Трёхмерный случай. Для построения необходимых исходной и возмущённой линейных систем используем их двумерные аналоги из п. 2 – линейные системы (1_2) и (10), дополнив их соответствующим образом. Исходную линейную систему возьмём в виде

$$\dot{x} = \operatorname{diag}[A_2(t)a_3(t)]x \equiv A_3(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geqslant t_0, \qquad (1_3)$$

с кусочно-постоянной функцией

$$a_3(t) = \begin{cases} 0, & t \in I_k^0(3, l), \quad k = \overline{0, k_3(l) - 1}, \quad l \in \mathbb{N}, \\ \lambda_3, & t \in I_2(3, l), \quad l \in \mathbb{N}, \\ \alpha_3, & t \in [T_{3l}, T_{3l+2}) \bigcup I_0(3, l), \quad l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Очевидно, что система (1_3) имеет необходимые характеристические показатели $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$.

Основываясь на двумерной возмущённой системе (10), в качестве необходимой возмущённой трёхмерной системы рассмотрим следующую:

$$\dot{y} = A_3(t)y + Q_3(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^3, \quad t \geqslant t_0, \tag{20}$$

с кусочно-постоянной 3×3-матрицей

$$Q_3(t) = \begin{cases} \operatorname{diag}[Q_2(t), 0], & t \in [T_{3l}, T_{3l+2}), \quad l \in \mathbb{N}, \\ -\operatorname{diag}[0, Q_2'(t)], & t \in [T_{3l+2}, T_{3l+3}), \quad l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Определение матрицы Q_2' второго порядка на промежутке $[T_{3l+2}, T_{3l+3})$ идентично определению (11_1)–(11_3) матрицы $Q_2(t)$ на промежутке $[T_{3l+1}, T_{3l+2})$ с заменой индекса $i=2$ на $i=3$. При этом знак минус в определении матрицы $Q_3(t)$ обеспечивает на промежутке $[T_{3l+2}, T_{3l+3})$ совпадение направлений поворотов на угол $\pi/2$ в пространстве y_2Oy_3 решений $Y_2(t)$ и $Y_3(t)$ системы (20) с направлением поворотов на тот же угол в пространстве y_10y_2 и на промежутке $[T_{3l+1}, T_{3l+2})$ решений $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ системы (10).

Сравнивая определения двумерной системы (10) на промежутке $[T_{3l+1}, T_{3l+2})$ и двумерной независимой подсистемы

$$\dot{y} = \operatorname{diag}[a_2(t), a_3(t)]y - Q_2'(t)y, \quad y = (y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [T_{3l+2}, T_{3l+3}), \tag{21}$$

системы (20) на промежутке $[T_{3l+2}, T_{3l+3})$, приходим к выводу об их эквивалентности. При этом в случае $i=3$ числа λ_3 и Q_3, функции $a_2(t)$ и $a_3(t)$ и матрица $-Q_2'(t)$ полностью аналогичны числам λ_2 и θ_2, функциям $a_1(t)$ и $a_2(t)$ и матрице $Q_2(t)$ в случае $i=2$. Повторяя построения решений $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ системы (10) на промежутке $[T_{3l+1}, T_{3l+2})$ и рассуждения по вычислению их показателей при построении решений $Y_2(t)$ и $Y_3(t)$ подсистемы (21) и затем вычисляя (оценивая) их "временны́е" показатели, получаем соотношения

$$\lambda[Y_3] = \frac{(\theta-1)\alpha_3 + \theta(\theta_3-1)\lambda_3}{\theta\theta_3 - 1} = \mu_3, \quad t^{-1}\ln\|Y_2(t)\| \leqslant \mu_2, \quad t \in [T_{3l+2}, T_{3l+3}).$$

Распространив приведённые построения индукцией на всю полуось $[t_0, +\infty)$ по параметру $l \in \mathbb{N}$, получим необходимые равенства $\lambda_i(A_3 + Q_3) = \mu_i$, $i = \overline{1,3}$ (заметим, что решение $Y_1(t)$ системы (10) является и решением системы (20)).

Трёхмерный кусочно-постоянный вариант теоремы доказан.

4. Бесконечная дифференцируемость и n-мерный случай. Для чётного $n \geqslant 4$ и параметров $0 < \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$, $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n < 0$ по доказанному двумерному варианту теоремы существуют $n/2$ двумерных систем-блоков: исходных $\dot{x} = A_j(t)x$ с ограниченными кусочно-постоянными на полуоси $[t_0, +\infty)$ матрицами $A_j(t)$ и показателями $0 < \lambda_{2j-1} \leqslant \lambda_{2j}$, $j = \overline{1, n/2}$, и возмущённых $\dot{y} = A_j(t)y + Q_j(t)y$ с показателями $\mu_{2j-1} \leqslant \mu_{2j} < 0$, $j = \overline{1, n/2}$, и кусочно-постоянной матрицей $Q_j(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Это доказывает теорему в кусочно-постоянном варианте и при чётном n. В случае нечётного $n \geqslant 5$ поступаем точно также, только один из блоков окажется трёхмерным.

Для завершения доказательства теоремы необходимо по уже определённым кусочно-постоянным матрицам $A(t)$ системы (1_n) (с показателями $0 < \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$) и $Q(t)$ системы (4_n) (с показателями $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n < 0$) построить такие бесконечно дифференцируемые ограниченные матрицы $\tilde{A}(t)$ и $\tilde{Q}(t) \to 0$ при $t \to \infty$, чтобы системы (1_n) и (4_n) с этими матрицами в качестве коэффициентов имели прежние показатели:

$$\lambda_i(\tilde{A}) = \lambda_i, \quad \lambda_i(\tilde{A} + \tilde{Q}) = \mu_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Для превращения, например, кусочно-постоянной функции $f : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^1$ с единственной (изолированной) точкой разрыва $t_0 \in (t_1, t_2)$ воспользуемся на очень малом по длине $\varepsilon(t_0) = \exp(-t_0^2)$ интервале (t_1, t_2) сглаживающей функцией Гелбаума–Олмстеда [8, с. 54]

$$e_{\alpha\beta}(t, t_1, t_2) = \alpha + (\beta - \alpha)\exp\{-(t-t_1)^{-2}\exp[-(t-t_2)^{-2}]\}, \quad t \in (t_1, t_2),$$

$f(t_1)=\alpha$, $f(t_2)=\beta$, принимающей на концах интервала значения α и β и нулевые значения своих односторонних производных любого порядка. Применив этот процесс сглаживания в любой точке разрыва (а они все изолированы и расположены на полуоси достаточно редко) каждого элемента указанных матриц, получим необходимые ограниченные бесконечно-дифференцируемые матрицы $\tilde{A}(t)$ и $\tilde{Q}(t)\to 0$, $t\to\infty$, для которых в силу равенства $\varepsilon(t)=\exp(-t^2)$, $t\geqslant t_0$, выполнено условие

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty}[\|A(\tau)-\tilde{A}(\tau)\|+\|Q(\tau)-\tilde{Q}(\tau)\|]e^{M\tau}\,d\tau<+\infty$$

для достаточно большого $M>0$. Поэтому согласно [9] на полуоси $[t_0,+\infty]$ будут асимптотически эквивалентными (приводимыми): система (1_n) – системе $\dot{x}=\tilde{A}(t)x$, $x\in\mathbb{R}^n$, а система (4_n) – системе $\dot{y}=\tilde{A}(t)y+\tilde{Q}(t)y$, $y\in\mathbb{R}^n$ (с сохранением прежних показателей). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Perron O.* Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen // Mathematische Zeitschrift. 1930. Bd. 32. H. 5. S. 702–728.
2. *Леонов Г.А.* Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.; Ижевск, 2006.
3. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 464–472.
4. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* Построение счётного числа различных суслинских множеств характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1585–1589.
5. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* О существовании линейных дифференциальных систем со всеми положительными характеристическими показателями первого приближения и экспоненциально убывающими возмущениями и решениями // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1450–1457.
6. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* Существование антиперроновского эффекта смены положительных характеристических показателей на отрицательные при исчезающих на бесконечности линейных возмущениях // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 6. С. 863–864.
7. *Миллионщиков В.М.* О неустойчивости особых показателей и о несимметричности отношения почти приводимости линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 4. С. 749–750.
8. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М., 1967.
9. *Изобов Н.А., Мазаник С.А.* Об асимптотически эквивалентных линейных системах при экспоненциально убывающих возмущениях // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 2. С. 168–173.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 25.07.2022 г.
После доработки 25.07.2022 г.
Принята к публикации 30.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1453–1460

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.952+517.977

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. II

© 2022 г. В. И. Елкин

Рассматривается вопрос использования дифференциально-геометрических и алгебраических методов теории динамических систем с управлением в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

DOI: 10.31857/S0374064122110024, EDN: LZVOCI

Введение. Рассматривается система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$\Lambda_\nu(t,y,p)=0,\quad \nu=\overline{1,l},$$

после приведения которой к специальному виду в параметрической форме, разрешённой относительно всех производных, получим систему

$$\partial_k y^i=g_k^i(t,y,u),$$

где $\partial_k=\partial/\partial_{t^k}$, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,s}$. В результате открывается возможность применения некоторых дифференциально-геометрических и алгебраических методов теории динамических систем с управлением, используя некоторую аналогию данных объектов. Эти методы позволяют исследовать некоторые вопросы декомпозиции, построения симметрий и др. В статье [1] на основе понятия первого интеграла с помощью замены координат, в которую входят первые интегралы, была получена простая декомпозиция вида

$$\partial_k z^i=0,\quad i=\overline{1,q},\quad \partial_k z^j=h_k^j(t,x,u),\quad j=\overline{q+1,n}.$$

В данной работе рассматривается более общая декомпозиция, которая также имеет аналог в теории динамических систем с управлением под названием агрегирование (факторизация).

1. Агрегирование (факторизация) динамических систем с управлением. Напоминаем, что *динамической системой с управлением* называется система уравнений вида

$$\dot y^i=g^i(t,y,u),\quad i=\overline{1,n},\quad (t,y)\in M\subset\mathbb{R}^{n+1},\quad u\in U\subset\mathbb{R}^r. \tag{1}$$

Предполагается, что функции g^i, $\partial f^i/\partial y^j$, $\partial g^i/\partial u^\alpha$ являются гладкими. Обычно y называют фазовыми переменными (состояниями), u – управлениями (внешними воздействиями). Множество M называется фазовым пространством. Управления могут быть кусочно-непрерывными функциями $u(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, в этом случае они называются допустимыми. Решением или фазовой траекторией системы (1) называется непрерывная кусочно-гладкая функция $y(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, для которой существует такое допустимое управление $u(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, что функции $y(t)$, $u(t)$ удовлетворяют соотношениям (1).

Под *декомпозицией* управляемой системы (1) в этом пункте понимается приведение этой системы с помощью замены фазовых переменных $y\mapsto z=\varphi(t,y)$ к виду

$$\dot z^k=h^k(t,z^1,\ldots,z^m,u),\quad k=\overline{1,m}, \tag{2}$$

$$\dot z^l=h^l(t,z^1,\ldots,z^n,u),\quad l=\overline{m+1,n}. \tag{3}$$

Представление (2), (3) характеризуется тем, что уравнения (2) образуют замкнутую систему, поэтому любое решение $z(t)$ системы (2), (3) может быть получено следующим образом. Сначала нужно найти решение $z^1(t),\ \ldots,\ z^m(t)$ системы (2) (соответствующее некоторому допустимому управлению $u(t)$), а затем, после подстановки $z^1(t),\ \ldots,\ z^m(t)$ в систему (3), которая становится замкнутой, найти оставшиеся функции $z^{m+1}(t),\ \ldots,\ z^n(t)$. Таким образом, декомпозиция (2), (3) позволяет свести процесс нахождения решения системы к нахождению решений для двух систем, фазовые пространства которых имеют размерности меньшие, чем n. Если существует такое представление, то говорят также, что система (1) допускает агрегирование порядка $n-m$. При этом среди функций

$$z^i = \varphi^i(t,y), \quad i=\overline{1,n}, \tag{4}$$

осуществляющих соответствующую замену фазовых координат

$$y \mapsto z = \varphi(t,y),$$

первые m функций называются *агрегатами*.

Для изучения возможностей такой декомпозиции в теории динамических систем применяется так называемый метод полных семейств векторных полей [2; 3; 4, с. 127]. Согласно этому методу отыскиваются условия, которым должны удовлетворять полные семейства векторных полей, для которых агрегаты (4) являются интегралами. Этот метод будем применять и для декомпозиции дифференциальных уравнений с частными производными далее в п. 2, где он будет подробно описан.

2. Декомпозиция дифференциальных уравнений с частными производными. Рассматриваются дифференциальные уравнения с частными производными специального вида, причём для упрощения и не ограничивая общности – "автономные", т.е с правыми частями, не зависящими от аргументов t:

$$\partial_k y^i = g_k^i(y,u), \tag{5}$$

$$t\in I\subset\mathbb{R}^s, \quad y\in L\subset\mathbb{R}^n, \quad u\in U\subset\mathbb{R}^s,$$

где $I,\ L,\ U$ – некоторые области. Речь пойдёт о декомпозиции системы (5) с помощью замены зависимых переменных y, точнее, о возможности преобразования системы с помощью замены переменных

$$z^i = \varphi^i(y), \quad i=\overline{1,n}, \tag{6}$$

к виду

$$\dot z^l = h^l(z^1,\ldots,z^m,u), \quad l=\overline{1,m}, \tag{7}$$

$$\dot z^i = h^i(z^1,\ldots,z^n,u), \quad i=\overline{m+1,n}. \tag{8}$$

Если такое представление возможно, то будем говорить, что система (5) допускает декомпозицию по зависимым переменным порядка $n-m$, причём первые m функций в замене переменных (6)

$$z^i = \varphi^i(y), \quad i=\overline{1,m}, \tag{9}$$

называются агрегатами. Далее рассматривается применение метода полных семейств для исследования возможности декомпозиции (7), (8) для систем (5). *Полным семейством* векторных полей или операторов называется семейство полей*)

$$Z_a = b_a^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad a=\overline{1,p}, \tag{10}$$

если:

1) $\operatorname{rank}\|b_a^i(y)\| = p$, т.е. векторы $Z_a(y)$, $a=\overline{1,p}$, линейно независимы в каждой точке $y\in M$ или, как ещё говорят, линейно несвязаны в области M;

*) По повторяющемуся индексу здесь и далее проводится суммирование.

2) выполняются равенства

$$[Z_a, Z_c] = h_{ac}^d(y)Z_d, \quad a, c, d = \overline{1, p},$$

т.е. все коммутаторы $[Z_a, Z_c]$ семейства выражаются линейно с переменными коэффициентами $h_{ac}^d(y)$ через остальные поля семейства.

Гладкая функция $\Phi(y)$, $y \in M$, называется *интегралом поля* Z_a или *корнем оператора* Z_a, если

$$Z_a(\Phi(y)) = b_a^i(y)\frac{\partial \Phi}{\partial y^i} = 0.$$

Теорема 1 [5, с. 12]. *Полное семейство (10),* $p < n$, *имеет в окрестности каждой точки* $m = n - p$ *функционально независимых интегралов (полный набор)*

$$\Phi^k(y), \quad \operatorname{rank}\left\| \frac{\partial \Phi^k}{\partial y^i} \right\|_{i=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,n-m}} = n - m, \tag{11}$$

причём любой интеграл $\Phi(y)$ *функционально выражается через полный набор*

$$\Phi(y) = F(\Phi^1(y), \ldots, \Phi^m(y)).$$

Теорема 2 [5, с. 20]. *Пусть в области* M *заданы независимые функции (11). Тогда в окрестности каждой точки* M *найдётся полное семейство (10),* $p = n - m$, *для которого функции (11) составляют полный набор интегралов.*

Доказательство. Рассмотрим систему однородных линейных алгебраических уравнений

$$\xi^i \frac{\partial \varphi^k}{\partial y^i} = 0, \quad k = \overline{1, m}, \tag{12}$$

относительно компонент векторного поля $\xi = \xi^i \partial/\partial y^i$. Для любой точки y найдётся окрестность, в которой некоторый минор m-го порядка матрицы системы уравнений (12) отличен от нуля. Фундаментальная система решений в этой окрестности определяет линейно несвязанное семейство векторных полей (10), для которого функции (11) являются интегралами. Любое поле $\xi = \xi^i \partial/\partial y^i$, удовлетворяющее (12), должно линейно выражаться через поля (10). В частности, так как коммутаторы $[\xi_a, \xi_b]$ в силу свойства

$$[\xi, \eta](\Phi) = \xi(\eta(\Phi)) - \eta(\xi(\Phi)) \tag{13}$$

удовлетворяют (12), справедливо свойство 2) семейства (10). Следовательно, построенное семейство (10) является полным. Функции (11) составляют максимальный набор независимых интегралов семейства (10), поскольку в противном случае получилось бы противоречие с теоремой 1. Теорема доказана.

Переходим к условиям существования декомпозиции (7), (8). Введём в рассмотрение операторы полного дифференцирования системы (5) по переменным t^l (без явного дифференцирования по t^l в силу "автономности")

$$X_l = g_l^i(y, u)\partial/\partial y^i, \quad l = \overline{1, s}. \tag{14}$$

Замена зависимых переменных (6) в системе (5) осуществляется следующим образом: нужно подействовать операторами (14) на функции (6)

$$X_l(\varphi^i(y)) = g_l^j(y, u)\frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j}, \quad i = \overline{1, n},$$

и выразить функционально полученные функции через (6):

$$g_l^j(y,u)\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j} = h^i(\varphi^1(y),\ldots,\varphi^n(y),u), \quad i=\overline{1,n}, \tag{15}$$

Функции $h^i(z^1,\ldots,z^n,u)$ являются новыми правыми частями системы, при этом декомпозиция (7), (8) возникает, когда первые m функций (15) функционально выражаются только через агрегаты (9), т.е.

$$g_l^j(y,u)\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j} = h^i(\varphi^1(y),\ldots,\varphi^m(y),u), \quad i=\overline{1,m}. \tag{16}$$

Непосредственное применение этого условия не даёт конструктивного метода нахождения агрегатов и проверки возможности декомпозиции. Поэтому применяется опосредованный подход, когда сначала с помощью решения некоторых систем дифференциальных уравнений отыскиваются полные семейства векторных полей, для которых агрегаты являются интегралами, а затем находятся агрегаты, т.е. интегралы этих семейств. При этом совместность упомянутых систем дифференциальных уравнений определяет возможность декомпозиции.

Теорема 3. *Система (5) тогда и только тогда локально приводится к виду (7), (8) с помощью замены переменных (6), когда существует такое полное семейство (10), $p=n-m<n$, что*

$$[X_l,Z_a] = \mu_{la}^b(y,u)Z_b, \quad l=\overline{1,r}, \quad a,b=\overline{1,p}, \tag{17}$$

причём агрегаты (9) составляют полный набор интегралов семейства (10).

Доказательство. Необходимость. Для агрегатов (9) по теореме 2 существует полное семейство (10). Подействуем коммутаторами $[X_l,Z_a]$ на эти функции, используя свойство коммутатора (13). Получим

$$[X_l,Z_a](\varphi^i(y)) = X_l(Z_a(\varphi^i(y))) - Z_a(X_l(\varphi^i(y))) = 0. \tag{18}$$

Здесь использовано то обстоятельство, что функции $X_l(\varphi^i(y))$ согласно формуле (16) функционально выражаются через полный набор интегралов семейства (10) и поэтому также являются интегралами этого семейства. В доказательстве теоремы 2 отмечено, что условие (18) влечёт за собой выполнение условия (17).

Достаточность. Для семейства (10) возьмём полный набор интегралов $\varphi^i(y)$, $i=\overline{1,n-p}$, и рассмотрим выражения (18). Из (18) вытекает, что функции $X_l(\varphi^i(y))$ являются интегралами семейства (10) и по теореме 1 функционально выражаются через полный набор интегралов и, следовательно, $\varphi^i(y)$ являются агрегатами для системы (5). Теорема доказана.

Выражения (18) можно трактовать как систему дифференциальных уравнений

$$X_l(b_a^i) = Z_a(g^i) + \mu_{la}^b(y,u)b_c^i, \quad i=\overline{1,n}, \quad a,c=\overline{1,p}, \quad u\in U, \tag{19}$$

относительно неизвестных компонент семейства (10). В (19) выражения X_l, Z_a представляют собой действия полей X_l, Z_a на функции $b_a^i(y)$, $f^i(y,u)$ как операторов. После решения этой системы нужно найти полный набор интегралов $\varphi^i(y)$, $i=\overline{1,n-p}$, полного семейства (10), что, согласно [5, с. 12], сводится к решению некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для нахождения правых частей фактор-системы следует функции $g^j(y,u)\partial\varphi^k/\partial y^j$ выразить функционально через функции $\varphi^i(y)$, $i=\overline{1,n-p}$, т.е. представить их в виде

$$g^j(y,u)\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j} = h^p(\varphi^1(y),\ldots,\varphi^m(y),u).$$

Построенные функции h^k и определяют искомую фактор-систему

$$\dot z^k = h^k(z,u), \quad k=\overline{1,m}.$$

Система (19) содержит помимо переменных $b_a^i(y)$ неизвестные параметрические переменные $\mu_{la}^b(y,u)$. Последнее обстоятельство усложняет дело. Кроме того, нужно добавить условие полноты $[Z_b, Z_a] = \kappa_{ba}^c(y)Z_c$ семейства (10), которое тоже представляет собой систему дифференциальных уравнений, причём с неизвестными параметрическими переменными $\kappa_{ba}^c(y)$. Рассмотрим метод исключения параметрических переменных с помощью использования якобиевых семейств. Сначала докажем одно утверждение, которое связывает полные семейства и их интегралы.

Для того чтобы исключить функции μ_{ua}^c из системы (19), следует задать некоторое свойство, которым должны обладать агрегаты (9). Это свойство заключается в определённом расположении базисного минора в якобиевой матрице $\|\partial\varphi^k/\partial y^i\|$.

Теорема 4. *Пусть (10) – полное семейство векторных полей, (11) – полный набор интегралов этого семейства, а I – некоторое подмножество из p элементов множества индексов $\{1,\ldots,n\}$, $\overline{I} = \{1,\ldots,n\}\setminus I$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) $|\xi_a^i|_{a=\overline{1,p}}^{i\in I} \neq 0$;

б) $\left|\dfrac{\partial\varphi^k}{\partial y^i}\right|_{i\in\overline{I}}^{k=\overline{1,m}} \neq 0.$

Доказательство. Пусть выполняется условие а). Рассмотрим семейство полей η_b, $b \in I$, которое получается из исходного семейства линейным невырожденным преобразованием: $\eta_b = \mu_b^a(y)\xi_a$, $b\in I$. Здесь функции μ_b^a составляют матрицу, обратную к матрице $\|\xi_a^i\|_{a=\overline{1,p}}^{i\in I}$. Построенное семейство полей будет иметь вид

$$\eta_b = \frac{\partial}{\partial y^b} + \eta_b^c(y)\frac{\partial}{\partial y^c}, \quad b\in I, \quad c\in\overline{I}, \tag{20}$$

где η_b^c – некоторые функции. Очевидно, что функции φ^k являются интегралами и полей η_b, т.е.

$$\frac{\partial\varphi^k}{\partial y^b} = -\eta_b^c\frac{\partial\varphi^k}{\partial y^c}.$$

Отсюда вытекает, что выполняется условие б).

Пусть теперь выполняется условие б). Рассмотрим систему линейных однородных уравнений относительно неизвестного векторного поля $\xi = \xi^i(y)\partial/\partial y^i$:

$$\xi^i\frac{\partial\varphi^k}{\partial y^i} = 0, \quad k=\overline{1,m}.$$

Очевидно, что поля ξ_a, $a=\overline{1,p}$, образуют фундаментальную систему решений этой системы уравнений. С другой стороны, нетрудно видеть, что существует фундаментальная система решений вида (20). Два семейства (10) и (20) должны быть связаны линейным невырожденным преобразованием. Отсюда вытекает справедливость условия а). Теорема доказана.

Предположим, что для искомых агрегатов (9) выполняется условие

$$\left|\frac{\partial\varphi^k}{\partial y^i}\right|_{i=\overline{p+1,n}}^{k=\overline{1,m}} \neq 0, \quad p = n-m. \tag{21}$$

Справедлива

Теорема 5. *Для того чтобы система (1) допускала (локальную) факторизацию порядка $p=n-m$, характеризующуюся свойством (21), необходимо и достаточно, чтобы была совместной система дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $b_a^l(y)$:*

$$X_l(b_a^l) = Z_a(f^l) - b_c^l Z_a(f^c), \tag{22}$$

$$Z_a(b_c^l) = Z_c(b_a^l), \tag{23}$$

где

$$Z_a = \frac{\partial}{\partial y^a} + b_a^l(y)\frac{\partial}{\partial y^l}, \quad u \in U, \quad a, c = \overline{1, p}, \quad l = \overline{p+1, n}. \tag{24}$$

Доказательство. Необходимость. Если система (1) допускает факторизацию со свойством (21), то, согласно доказательству теоремы 4, существует семейство вида (24). Семейство (24) должно удовлетворять соотношениям (17). Запишем эти соотношения покомпонентно:

$$\xi_u(\delta_a^i) - Z_a(f^i) = h_a^c\delta_c^i, \tag{25}$$

$$\xi_\beta(b_a^l) - Z_a(f^l) = h_a^c b_c^l, \tag{26}$$

где $i, a, c = \overline{1, p}$, $l = \overline{p+1, n}$, δ_a^i – символ Кронекера. Из (25) имеем $h_a^i = -Z_a(f^i)$. Подставив h_a^i в (26), получим (22). Равенства (23) представляют собой условие полноты семейства (24). Действительно, согласно доказательству теоремы 1, семейство (24) является полным тогда и только тогда, когда оно якобиево, т.е. $[Z_a, Z_c] = 0$, $a, c = \overline{1, p}$, что равносильно равенствам (23).

Достаточность. Если совместна система (22), (23), то семейство полей (24) является полным. Далее, положив $h_a^i = -Z_a(f^i)$, из (22) получим (25), (26), откуда вытекает (17). Следовательно, система (1) допускает факторизацию порядка p. Свойство (21) вытекает из вида семейства (24). Теорема доказана.

Уравнения (22) представляют собой систему уравнений относительно b_a^l без параметрических переменных.

При ином расположении базисного минора в матрице $\|\partial\varphi^k/\partial y^i\|$ условия факторизации (22), (23) преобразуются очевидным образом. Итак, задача решения системы дифференциальных уравнений (19) с параметрическими переменными сведена к задаче решения нескольких систем дифференциальных уравнений вида (22) без параметрических переменных. Решение системы (22), т.е. набор компонент семейства полей (24), следует подставить для проверки в уравнения (23), представляющие собой условия полноты семейства (24). Лишь те решения системы (22), которые одновременно являются и решениями системы (23), определяют семейство, порождающее факторизацию порядка p.

Система такого вида является частным случаем так называемых уравнений в частных производных с одинаковой главной частью

$$a_k^j(x)\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = b_k^i(x, y), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, r}. \tag{27}$$

Функции a_k^j, b_k^i гладкие в области $V \times U$, где $V \subset \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$.

Замечание. Системы (27) для $r = 1$ рассматривались в работе [4, с. 146]. Другой частный случай систем вида

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = b_j^i(x, y), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{28}$$

также хорошо известен (см., например, [4, с. 10]). Для проверки совместности следует рассмотреть равенство смешанных производных

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^s} = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^s \partial x^j}$$

в силу (28).

Если эти уравнения тождественно выполняются, то система (27) вполне интегрируема. В противном случае получаем систему конечных уравнений, устанавливающих условия на y, как функций от x. Если каждое из этих уравнений продифференцировать по x^i и заменить производные $\partial y^i/\partial x^i$ их значениями из (28), то данные уравнения либо будут следствиями полученных уравнений, либо составят новую систему. Продолжив этот процесс, получим ряд систем, которые должны быть совместны, если уравнения (28) имеют решения. В противном случае решений у системы (28) нет. Данные рассуждения и выводы можно применять и тогда, когда заданы какие-либо дополнительные функциональные соотношения между переменными y и x:

$$\eta^\alpha(y,x)=0, \quad \alpha=\overline{1,q}.$$

В работе [7] автором получен алгоритм проверки совместности и нахождения решений систем уравнений (27).

Наконец, рассмотрим один весьма общий случай систем, когда можно проверить совместность системы (22), (23), не решая предварительно (22). Данный случай собственно и называется случаем системы, находящейся в общем положении. Это такие системы, у которых отсутствуют нетривиальные первые интегралы. Вопрос о существовании первых интегралов был рассмотрен в статье [1]. Термин системы, находящейся в общем положении, был введён для динамических систем с управлением [8, с. 149]

$$\dot{y}^i=f^i(y,u), \quad i=\overline{1,n}, \quad y\in M\subset\mathbb{R}^n, \quad u\in U\subset\mathbb{R}^r. \tag{29}$$

В определённом смысле почти все системы вида (29) находятся в общем положении [8, с. 149].

Напомним алгоритм нахождения первых интегралов для системы (5) [1], который заключается в процессе пополнения. Операторы полного дифференцирования (14) после подстановки в них всевозможных постоянных $u\in U$ дают ассоциированное семейство векторных полей в M, компоненты которых зависят от Y. Далее нужно выделить в ассоциированном семействе максимальное число линейно несвязанных векторных полей, объединить эти поля и пополнить в области изменения переменных M. Процесс пополнения заключается в постепенном добавлении коммутаторов до тех пор, пока все новые коммутаторы не будут линейно выражаться через уже полученные. Если число полей s в полученном полном семействе меньше числа переменных n, то нетривиальные первые интегралы существуют, причём число функционально независимых интегралов равно $n-s$. Таким образом, нетривиальные первые интегралы отсутствуют, если $s=n$, т.е. полученное полное семейство состоит из n линейно несвязанных полей. Следовательно, матрица из компонент этого семейства является квадратной размерности $n\times n$ невырожденной матрицей. Теперь заметим, что ассоциированные поля удовлетворяют соотношениям (17). Прямым вычислением подтверждается, что коммутаторы этих полей также удовлетворяют (17), а следовательно, и поля построенного полного семейства, которые также удовлетворяют и соотношениям (22), так как эти соотношения являются следствиями соотношений (17). Для построенного полного семейства соотношения (22) характеризуются следующим обстоятельством: левую часть можно трактовать как умножение невырожденной матрицы на производные от b_a^l. В результате эти производные можно выразить через остальные члены уравнений и уравнения преобразуются в систему вида (28). После подстановки производных в равенство (23) эти дифференциальные связи заменяются на конечные связи.

Согласно замечанию, в этом случае при проведении алгоритма исследования на совместность системы (22) дополнительные дифференциальные связи типа (23) можно заменить на конечные связи и рассматривать их в рамках проведения данного алгоритма.

Заключение. Рассмотрена возможность применения методов теории управления в теории уравнений с частными производными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00625).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Елкин В.И.* Применение дифференциально-геометрических методов теории управления в теории дифференциальных уравнений с частными производными. I // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1474–1482.
2. *Павловский Ю.Н.* Групповые свойства управляемых динамических систем и фазовые организационные структуры. I. Группы, характеризующие динамические системы // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 4. С. 862–872.

3. *Павловский Ю.Н.* Групповые свойства управляемых динамических систем и фазовые организационные структуры. II. Фазовые организационные структуры // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 5. С. 1093–1103.
4. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Декомпозиция и инвариантность по возмущениям. М., 2003.
5. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. М., 1947.
6. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., 1964.
7. *Елкин В.И.* Общее решение систем уравнений в частных производных с одинаковой главной частью // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 8. С. 1389–1398.
8. *Лобри К.* Динамические полисистемы и теория управления // Математические методы в теории систем. М., 1979. С. 134–173.

Федеральный исследовательский центр
"Информатика и управление" РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 12.05.2022 г.
После доработки 12.05.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1461–1470

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ С НУЛЕВЫМ ФРОНТОМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© 2022 г. **А. Л. Казаков, П. А. Кузнецов**

Рассмотрена специальная краевая задача для нелинейной параболической системы, предложенной Дж. Мюрреем и применяемой для описания популяционной динамики. Краевые условия задачи предполагают наличие у возможных решений нулевого фронта – линии, на которой искомые функции обращаются в нуль, и происходит вырождение параболического типа системы. Частным случаем подобных решений для одиночных вырождающихся уравнений можно назвать нелинейные тепловые (фильтрационные, диффузионные) волны, рассмотренные в работах Я.Б. Зельдовича, Г.И. Баренблатта, А.А. Самарского. В настоящей статье доказана теорема существования и единственности нетривиального аналитического решения исследуемой задачи. В ходе доказательства построено решение в виде рядов Тейлора, записаны рекуррентные формулы коэффициентов, которые в дальнейшем могут быть использованы для верификации численных расчётов. Представлены некоторые точные решения системы, имеющие нулевой фронт. Отдельно рассмотрены примеры, иллюстрирующие поведение решения при отступлении от условий теоремы. В первом примере показана возможность существования решений исходной системы с двумя различными нулевыми фронтами. Второй пример – аналог известного контрпримера С.В. Ковалевской в рассмотренном случае.

DOI: 10.31857/S0374064122110036, EDN: LZWFJI

Введение. В статье исследуется одномерная система двух квазилинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка. Вырождение параболического типа происходит при равенстве нулю неизвестных функций. Уравнения при этом приобретают некоторые гиперболические свойства. Квазилинейные уравнения параболического типа [1, с. 473] и их системы достаточно часто используются при моделировании различных эволюционных процессов в теплофизике [2], механике сплошных сред [3, 4], математической биологии [5, 6] и др. Особое место среди них занимают уравнения и системы с вырождением [7], описывающие интересные (в том числе с точки зрения математики) нелинейные эффекты. Одним из таких эффектов может быть наличие нетривиальных решений, обращающихся в нуль на некоторой кривой, которая называется *нулевым фронтом*. Решения с нулевым фронтом, в частности, являются составной частью так называемых тепловых (фильтрационных, диффузионных) волн.

Точные решения с нулевым фронтом для описанных выше уравнений рассматривались Я.Б. Зельдовичем [8] в рамках исследования механизмов лучистой теплопроводности (тепловые волны), Г.И. Баренблаттом [9] при моделировании фильтрации политропного газа, проходящего через пористый грунт (волны фильтрации). В монографии акад. А.А. Самарского [2] представлены некоторые точные решения указанного типа, исследованы нелинейные эффекты, связанные с вырождением (при равенстве нулю искомой функции старшие производные обращаются в нуль, параболический тип вырождается, фронт движется с конечной скоростью). Добавим, что точные решения нелинейного уравнения теплопроводности (диффузии, фильтрации) также можно найти в справочнике [10], однако далеко не все из них имеют нулевой фронт.

В научной школе акад. А.Ф. Сидорова разработаны методы построения аналитических, точных и приближённых решений с нулевым фронтом, предложены постановки краевых задач, подразумевающих наличие такого фронта [11]. Особо выделим метод рядов, часто использующийся в гиперболических задачах [12] и адаптированный А.Ф. Сидоровым и его учениками для решения параболических задач с вырождением (характеристические [13] и специальные [14] ряды). Рассмотрены задачи о построении решений с нулевым фронтом в одномерных [15, 16], симметричных [17, 18] и существенно неодномерных [19, 20] постановках. Доказаны теоремы существования и единственности аналитических решений таких задач, решения построены в виде степенных рядов с рекуррентно определяемыми коэффициентами. Сходимость последних доказывается методом мажорант с использованием теоремы Коши–Ковалевской. В работах [16, 17] построены точные решения, имеющие нулевой фронт, при этом исходная задача, как правило, сводится к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (или системы [15]). Такой метод редукции нередко используется при построении точных решений (см., например, статьи [21, 22], а также справочник [10]). В ряде работ исследования дополнены численными расчётами, выполненными на основе метода граничных элементов [19, 23, 24].

В последнее время авторами предприняты усилия для распространения полученных ранее результатов на более сложные математические объекты. В частности, решения с нулевым фронтом удалось построить для нелинейной вырождающейся параболической системы, возникающей в математической биологии. Она отличается от реакционно-диффузионных систем [16] существенно более сложной взаимосвязью уравнений, что делает невозможным автоматическое перенесение ранее полученных результатов и накладывает свой отпечаток на построение решения, а также на доказательство сходимости. Настоящая статья обобщает и развивает результаты, полученные в статье [25], а именно, для системы более общего вида обоснована теорема существования и единственности аналитического решения с заданным нулевым фронтом; предложена конструктивная процедура построения решения в виде степенных рядов и доказана сходимость последних; представлены некоторые точные решения, имеющие нулевой фронт; рассмотрены примеры, иллюстрирующие поведение решения при отступлении от условий теоремы.

1. Постановка задачи. В монографии [26, с. 10] представлена нелинейная вырождающаяся система

$$u_t - [(\alpha_1 + \beta_1 v_x)u]_x = f(u,v), \quad v_t - [(\alpha_2 - \beta_2 u_x)v]_x = g(v,u), \quad \alpha_{1,2}, \beta_{1,2} \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

лежащая в основе двумерной модели “хищник–жертва” и представляющая собой обобщение хорошо известной модели Лотки–Вольтерры [27, с. 24]. Данная модель описывает популяционную динамику двух взаимодействующих видов – хищников v и жертв u. Константы α_1 и α_2 обозначают скорости движения жертв и хищников, соответственно, до начала их взаимодействия (т.е. пока хищники не заметили жертв и не начали преследование). С началом преследования скорости меняют значения на $\alpha_1 + \beta_1 v_x$ и $\alpha_2 - \beta_2 u_x$ (см. [26, с. 10, рис. 1.4.b]).

Замечание 1. Биологический смысл данной модели диктует следующие ограничения на константы: $\alpha_1\alpha_2 \geqslant 0$ и $\beta_{1,2} > 0$. В данной статье будет предполагаться лишь, что $\beta_{1,2} \neq 0$. Этого достаточно для корректного проведения планируемых исследований. Случай $\beta_{1,2} = 0$ также встречается в литературе, однако при этом система (1) становится полулинейной гиперболической системой первого порядка без вырождения.

Выполним в (1) дифференцирование и разрешим уравнения относительно u_t и v_t:

$$u_t = \alpha_1 u_x + \beta_1(uv_{xx} + v_x u_x) + f(u,v), \quad v_t = \alpha_2 v_x - \beta_2(vu_{xx} + u_x v_x) + g(v,u). \tag{2}$$

Пусть u, v – искомые функции, f, g – известные достаточно гладкие функции (в [25] они предполагаются степенными), причём $f(0,0) = g(0,0) = 0$. Согласно монографии [26, с. 10, рис. 1.4.b] целесообразно рассматривать решения, имеющие нулевой фронт. Поэтому для системы (2) представляют интерес краевые условия

$$u(t,x)|_{x=a(t)}, \quad v(t,x)|_{x=b(t)} = 0. \tag{3}$$

Аналитическое исследование задачи (2), (3) представляется весьма сложным, поскольку метод характеристических рядов для раскрытия особенностей здесь, по-видимому, неприменим. Отметим, что авторам неизвестны результаты аналитического исследования даже более простой задачи с условиями вида (3) для системы “реакция–диффузия”

$$u_t = uu_{xx} + u_x^2/\sigma + F(u,v), \quad v_t = vv_{xx} + v_x^2/\delta + G(v,u), \quad \sigma, \delta > 0. \tag{4}$$

В связи с этим в качестве первого шага исследований рассмотрим случай, когда нулевые фронты для искомых функций совпадают. Пусть $a(t) = b(t)$ и краевые условия имеют вид

$$u(t,x)|_{x=a(t)} = v(t,x)|_{x=a(t)} = 0. \tag{5}$$

Считаем, что нулевой фронт обеих искомых функций здесь определяется достаточно гладкой кривой $x = a(t)$, такой, что $a'(0) \neq 0$. Подобный пример при $\alpha_1 = \alpha_2$ рассмотрен в монографии [26, с. 11], где фронт предполагался линейным: $x = -\alpha_1 t$. Данная ситуация (совпадающий фронт) может возникнуть, когда хищники полностью "покрывают" жертв, делая невозможным продвижение переднего фронта последних дальше своего. Общий случай задачи (2), (3), когда каждая из функций u и v имеет свой фронт, на данном этапе исследований не рассматривается.

Параболичность первого уравнения системы (2) определяется группой старших производных v_{xx}. Однако вырождение параболического типа происходит при равенстве нулю (например, на линии фронта) другой функции – u. Кроме того, уравнение разрешено относительно u_t, что весьма характерно для эволюционных уравнений – весь процесс отслеживается относительно производной по времени. То же самое имеет место и для второго уравнения.

Для сравнения обратимся к системе типа "реакция–диффузия" (4), рассмотренной в статье [16]. Здесь при $F = F(u)$, $G = G(v)$ имеем два независимых одномерных уравнения типа нелинейной теплопроводности [2, с. 17] (фильтрации [11, с. 258]). Таким образом, исследование аналитической разрешимости задачи (2), (5) будет иметь ряд отличий от проводимых ранее. В дальнейшем это будет показано при построении решения в виде рядов и доказательстве их сходимости.

В завершении этого пункта добавим, что выполнение равенства $f(0,0) = g(0,0) = 0$ гарантирует существование хотя бы одного аналитического решения задачи (2), (5) – тривиального. В следующем пункте будет доказано существование и единственность нетривиального аналитического решения. Под аналитической (в точке) здесь и далее понимается функция, совпадающая в некоторой окрестности (точки) со своим тейлоровским разложением.

2. Теорема существования. Для задачи (2), (5) справедлива следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

1) $a(t)$ и f, g – аналитические функции в точках $t = 0$ и $(0,0)$ соответственно;

2) $a'(0) + \alpha_i \neq 0$, $i = 1,2$, $f(0,0) = g(0,0) = 0$.

Тогда задача (2), (5) имеет единственное нетривиальное аналитическое решение в окрестности кривой $x = a(t)$.

Доказательство. Доказательство проведём в два этапа: на первом этапе построим решение задачи в виде формальных рядов Тейлора по степеням $x - a(t)$, на втором докажем их сходимость с помощью метода мажорант. При этом получим конструктивные формулы решения с возможностью их использования для верификации численных расчётов, а также для оценки радиуса сходимости.

Для удобства введём новую переменную $z = x - a(t)$. Задача (2), (5) примет вид

$$u_t = (\alpha_1 + a')u_z + \beta_1(uv_{zz} + v_z u_z) + f(u,v), \quad v_t = (\alpha_2 + a')v_z - \beta_2(vu_{zz} + u_z v_z) + g(v,u), \tag{6}$$

$$u(t,z)|_{z=0} = v(t,z)|_{z=0} = 0. \tag{7}$$

Отметим, что такая замена глобально невырождена.

Решение задачи (6), (7) построим в виде рядов Тейлора

$$u(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\frac{z^n}{n!}, \quad u_n(t) = \left.\frac{\partial^n u}{\partial z^n}\right|_{z=0}, \quad v(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)\frac{z^n}{n!}, \quad v_n(t) = \left.\frac{\partial^n v}{\partial z^n}\right|_{z=0}. \tag{8}$$

Определим коэффициенты рядов. Из краевого условия (7) следует тождество $u_0, v_0 \equiv 0$. Положив в (6) $z = 0$, получим систему

$$(\alpha_1 + a')u_1 + \beta_1 v_1 u_1 = 0, \quad (\alpha_2 + a')v_1 - \beta_2 u_1 v_1 = 0, \tag{9}$$

из которой несложно выразить коэффициенты u_1, v_1.

Замечание 2. Рассмотрим систему (9). При $\alpha_{1,2}+a'\neq 0$ тождество $u_1\equiv 0$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется тождество $v_1\equiv 0$. Неравенство же $\alpha_{1,2}+a'\neq 0$ всегда справедливо в некоторой окрестности $t=0$, так как по условию теоремы $a(t)$ – аналитическая функция, причём $a'(0)\neq-\alpha_{1,2}$. Отсюда следует, что система (9) имеет лишь два решения: $u_1, v_1\equiv 0$ и

$$v_1=-\frac{\alpha_1+a'}{\beta_1},\quad u_1=\frac{\alpha_2+a'}{\beta_2}. \tag{10}$$

В дальнейшем будем предполагать выполнение равенств (10), так как случай $u_1, v_1\equiv 0$ приводит к тривиальному решению задачи (см. ниже).

Чтобы найти u_2, v_2, необходимо продифференцировать оба уравнения системы (6) по z и положить $z=0$. Первое уравнение запишется в виде

$$u_1'=(\alpha_1+a')u_2+\beta_1(u_1v_2+v_2u_1+v_1u_2)+f_1,$$

в котором $f_1=[f(u,v)]_z|_{z=0}$. Так как $(\alpha_1+a')u_2+\beta_1v_1u_2=0$, то из данного равенства можно выразить коэффициент $v_2=(u_1'-f_1)/(2\beta_1u_1)$. В то же время из тождества $u_1, v_1\equiv 0$ следует, что $v_2\equiv 0$.

Использовав обозначение $g_1=[g(v,u)]_z|_{z=0}$, повторим те же рассуждения для второго уравнения системы и получим формулы

$$v_2=\frac{u_1'-f_1}{2\beta_1u_1}=\frac{a''-f_1\beta_2}{2\beta_1(\alpha_2+a')},\quad u_2=\frac{v_1'-g_1}{-2\beta_2v_1}=-\frac{a''+g_1\beta_1}{2\beta_2(\alpha_1+a')}. \tag{11}$$

Остальные коэффициенты определяются аналогично, возрастает лишь порядок дифференцирования. Применив к каждому уравнению системы (6) оператор $\partial^n[\,\cdot\,]/\partial z^n|_{z=0}$, получим равенства

$$u_n'=(\alpha_1+a')u_{n+1}+\beta_1\biggl(\sum_{k=0}^{n}C_n^ku_kv_{n+2-k}+\sum_{k=0}^{n}C_n^kv_{k+1}u_{n+1-k}\biggr)+f_n,$$

$$v_n'=(\alpha_2+a')v_{n+1}-\beta_2\biggl(\sum_{k=0}^{n}C_n^kv_ku_{n+2-k}+\sum_{k=0}^{n}C_n^ku_{k+1}v_{n+1-k}\biggr)+g_n, \tag{12}$$

в которых использованы обозначения

$$f_n=\frac{\partial^nf(u,v)}{\partial z^n}\bigg|_{z=0},\quad g_n=\frac{\partial^ng(v,u)}{\partial z^n}\bigg|_{z=0}.$$

С помощью рекуррентной формулы (12) индукцией по n можно показать, что тождество $u_1, v_1\equiv 0$ приводит к равенству нулю всех коэффициентов.

Выразим из формул (12) коэффициенты v_{n+1} и u_{n+1}:

$$v_{n+1}=\frac{\beta_2}{\beta_1(\alpha_2+a')(1+n)}\biggl[u_n'-\beta_1\sum_{k=2}^{n}(C_n^k+C_n^{k-1})u_kv_{n+2-k}-f_n\biggr],$$

$$u_{n+1}=\frac{\beta_1}{\beta_2(\alpha_1+a')(1+n)}\biggl[v_n'+\beta_2\sum_{k=2}^{n}(C_n^k+C_n^{k-1})v_ku_{n+2-k}-g_n\biggr],\quad n\geqslant 2. \tag{13}$$

Замечание 3. Процедура построения решения наглядно демонстрирует взаимосвязь уравнений системы (6). При дифференцировании первого уравнения, разрешённого относительно u_t, находится коэффициент v_{n+1}, который выражается, в том числе, через коэффициенты ряда Тейлора функции u. То же самое можно сказать и о втором уравнении.

Решение задачи (6), (7) построено в виде рядов (8) с коэффициентами $u_0, v_0 \equiv 0,$ (10), (11) и (13). Первый этап доказательства завершен.

Второй этап доказательства разберём кратко. Сходимость рядов докажем методом мажорант. Перед построением мажорантной задачи сделаем в системе (6) замену

$$u(t,z) = u_1 z + z^2 U(t,z), \quad v(t,z) = v_1 z + z^2 V(t,z),$$

которая представляет собой частичное разложение искомых функций в ряды Тейлора (8). При такой замене отпадает необходимость рассматривать краевое условие (7), так как оно выполняется автоматически.

После приведения подобных членов и деления на z задачу (6), (7) можно свести к системе

$$4V + 5zV_z + z^2V_{zz} = \xi_0(t) + z\xi_1(t,U,V,U_t) + z^2\xi_2(t,U,V,U_z,V_z) + z^3\xi_3(z,t,U,V,U_z,V_z,V_{zz}),$$

$$4U + 5zU_z + z^2U_{zz} = \eta_0(t) + z\eta_1(t,V,U,V_t) + z^2\eta_2(t,V,U,V_z,U_z) + z^3\eta_3(z,t,V,U,V_z,U_z,U_{zz}). \quad (14)$$

В левых частях уравнений (14) собраны слагаемые, относительно которых могут быть выражены коэффициенты наивысшего порядка. Здесь также проявляют себя специфические свойства системы, описанные в замечании 3.

Вид функций ξ_i, η_i, $i = 0,1,2,3,$ не приводится в силу крайней громоздкости, отметим лишь, что все они будут аналитическими по своим переменным (в начале координат). Отсюда следует, что для них можно подобрать мажоранты.

При выполнении мажорантных оценок

$$U|_{z=0}, V|_{z=0} \ll W_0, \quad U_z|_{z=0}, V_z|_{z=0} \ll W_1, \quad \xi_0(t), \eta_0(t) \ll \psi_0(t),$$

$$\xi_1(t,U,V,U_t), \eta_1(t,V,U,V_t) \ll \psi_1(t,W,W,W_t),$$

$$\xi_2(t,U,V,U_z,V_z), \eta_2(t,V,U,V_z,U_z) \ll \psi_2(t,W,W,W_z,W_z),$$

$$\xi_3(z,t,U,V,U_z,V_z,V_{zz}), \eta_3(z,t,V,U,V_z,U_z,U_{zz}) \ll \psi_3(z,t,W,W,W_z,W_z,W_{zz})$$

решение задачи

$$W_{zz} = \frac{\partial \psi_1(t,W,W,W_t)}{\partial z} + \psi_2(t,W,W,W_z,W_z) + z\psi_3(z,t,W,W,W_z,W_z,W_{zz}), \quad (15)$$

$$W(t,z)|_{z=0} = W_0(t), \quad W_z(t,z)|_{z=0} = W_1(t) \quad (16)$$

мажорирует решение системы (14). В этом можно убедиться, построив решения в виде рядов Тейлора

$$U(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{z^n}{n!}, \quad V(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \frac{z^n}{n!}, \quad W(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \frac{z^n}{n!},$$

$$U_n = \frac{\partial^n U}{\partial z^n}\bigg|_{z=0}, \quad V_n = \frac{\partial^n V}{\partial z^n}\bigg|_{z=0}, \quad W_n = \frac{\partial^n W}{\partial z^n}\bigg|_{z=0}.$$

Задачу (15), (16) можно привести к задаче вида Ковалевской, продифференцировав уравнение (15) по z, разрешив его относительно W_{zzz} и добавив третье краевое условие $W_{zz}(t,0) = W_2(t)$. Все входные данные являются аналитическими, следовательно, согласно теореме Коши–Ковалевской, полученная задача имеет единственное аналитическое решение. Теорема доказана.

3. Точные решения. Приведём некоторые точные решения. Под точными решениями авторы в данном случае понимают решения задачи, которые представимы в виде суперпозиции элементарных функций, квадратур, или же их построение сведено к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Пусть в задаче (6), (7) фронт описывается линейной функцией $a(t)=\gamma t,\ \ \gamma\in\mathbb{R}$:

$$u_t=(\alpha_1+\gamma)u_z+\beta_1(uv_{zz}+v_zu_z)+f(u,v),\quad v_t=(\alpha_2+\gamma)v_z-\beta_2(vu_{zz}+u_zv_z)+g(v,u),\quad (17)$$

$$u(t,z)|_{z=0}=v(t,z)|_{z=0}=0. \quad (18)$$

Если задача (17), (18) удовлетворяет условиям теоремы, то, очевидно, имеет единственное нетривиальное аналитическое решение. Покажем, что это решение не зависит от переменной t, и задача допускает редукцию к задаче Коши для системы двух ОДУ второго порядка.

Исследуем коэффициенты рядов (8) в рассматриваемом случае. В силу линейности фронта первые коэффициенты постоянны и для них справедливы формулы

$$u_0,v_0\equiv 0,\quad v_1=-\frac{\alpha_1+\gamma}{\beta_1},\quad u_1=\frac{\alpha_2+\gamma}{\beta_2},\quad v_2=-\frac{f_1\beta_2}{2\beta_1(\alpha_2+\gamma)},\quad u_2=-\frac{g_1\beta_1}{2\beta_2(\alpha_1+\gamma)}.$$

Замечание 4. Здесь выбраны ненулевые коэффициенты u_1 и v_1, так как в противном случае получим тривиальное решение $u,v\equiv 0$.

С помощью формулы (13) индукцией по n можно доказать, что все остальные коэффициенты также являются константами:

$$v_{n+1}=\frac{-\beta_2}{\beta_1(\alpha_2+\gamma)(1+n)}\left[\beta_1\sum_{k=2}^{n}(C_n^k+C_n^{k-1})u_kv_{n+2-k}+f_n\right],$$

$$u_{n+1}=\frac{\beta_1}{\beta_2(\alpha_1+\gamma)(1+n)}\left[\beta_2\sum_{k=2}^{n}(C_n^k+C_n^{k-1})v_ku_{n+2-k}-g_n\right],\quad n\geqslant 2.$$

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Утверждение. *Задача (6), (7) при* $a(t)=\gamma t,\ \ \gamma\in\mathbb{R},\ \ \alpha_{1,2}+\gamma\neq 0,\ \ f(0,0)=g(0,0)$ *может быть сведена к задаче Коши для системы ОДУ*

$$\beta_1(uv''+v'u')+(\alpha_1+\gamma)u'+f(u,v)=0,\quad -\beta_2(vu''+u'v')+(\alpha_2+\gamma)v'+g(v,u)=0,\quad (19)$$

$$u(0)=v(0)=0,\quad v'(0)=-\frac{\alpha_1+\gamma}{\beta_1},\quad u'(0)=\frac{\alpha_2+\gamma}{\beta_2},\quad (20)$$

имеющей единственное нетривиальное аналитическое решение.

Система (19) наследует все характерные особенности исходной системы, в частности, оба уравнения не разрешимы относительно старшей производной. Для корректной постановки задачи Коши помимо преобразованного условия (7) добавлено значение первых производных (коэффициенты $u_1=(\alpha_2+\gamma)/\beta_2$ и $v_1=-(\alpha_1+\gamma)/\beta_1$). Существование нетривиального аналитического решения $v(z),\ u(z)$ задачи (19), (20) следует из доказанной теоремы.

Замечание 5. При выборе $f,g\equiv 0$ для всех $n\geqslant 2$ имеет место равенство $v_n,u_n=0$. При этом решение, также как и фронт, линейно:

$$v(z)=-\frac{\alpha_1+\gamma}{\beta_1}z,\quad u(z)=\frac{\alpha_2+\gamma}{\beta_2}z.$$

4. Примеры. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие поведение решения при отступлении от условий теоремы. В первом примере показана возможность существования решений системы (2) с двумя различными нулевыми фронтами. Второй пример – аналог известного контрпримера С.В. Ковалевской.

Пример 1. Рассмотрим систему (2) при $f,g\equiv 0$:

$$u_t=\alpha_1u_x+\beta_1(uv_{xx}+v_xu_x),\quad v_t=\alpha_2v_x-\beta_2(vu_{xx}+u_xv_x). \quad (21)$$

Пусть каждая из неизвестных функций имеет свой фронт, заданный линейной функцией, т.е.

$$u(t,x)|_{x=a_1t}=v(t,x)|_{x=a_2t}=0,\quad a_{1,2}\in\mathbb{R}. \quad (22)$$

Решение построим в виде плоскостей $u = A_1t + B_1x$, $u = A_2t + B_2x$, где $A_{1,2}, B_{1,2} \in \mathbb{R}$. Подставив эти конструкции в (22), получим равенства

$$A_1 + B_1a_1 = 0, \quad A_2 + B_2a_2 = 0. \tag{23}$$

Из (21) и (23) следуют формулы

$$u = \frac{a_2 + \alpha_2}{\beta_2}(x - a_1t), \quad v = \frac{a_1 + \alpha_1}{\beta_1}(x - a_2t). \tag{24}$$

При $a_2 > a_1$ функции u и v положительны в области

$$t \geqslant 0, \quad a_1t < x < a_2t. \tag{25}$$

Таким образом, задача (21), (22) имеет в области (25) аналитическое решение в виде двух диффузионных волн (24) с разными линейными фронтами.

Как уже упоминалось, общий случай, когда функции u и v имеют различные фронты, требует развёрнутого исследования. Очевидно, что обобщение полученных в этой статье результатов представляет собой нетривиальную задачу. Построение данного примера – первый пробный шаг в её решении.

Пример 2. Рассмотрим задачу

$$u_t = \beta(uv_{xx} + v_xu_x), \quad v_t = -\beta(vu_{xx} + u_xv_x), \tag{26}$$

$$u(t,x)|_{t=0} = u_0(x), \quad v(t,x)|_{t=0} = v_0(x). \tag{27}$$

Здесь (26) – это система (2) при $\beta_{1,2} = \beta$, $\alpha_{1,2} = 0$, $f, g \equiv 0$. Краевые условия (27) записаны относительно переменной t.

Построим решение задачи (26), (27) в виде рядов

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\frac{t^n}{n!}, \quad u_n(x) = \frac{\partial^n u}{\partial t^n}\bigg|_{t=0}, \quad v(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)\frac{t^n}{n!}, \quad v_n(x) = \frac{\partial^n v}{\partial t^n}\bigg|_{t=0}. \tag{28}$$

Процедуру, описанную в предыдущем пункте, повторим относительно переменной t. Коэффициенты $u_0(x)$, $v_0(x)$ известны, остальные коэффициенты определяются по формулам

$$u_1 = \beta(u_0v_0'' + v_0'u_0'), \quad v_1 = -\beta(v_0u_0'' + u_0'v_0'), \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad u_{n+1} = \beta\sum_{k=0}^{n} C_n^k(u_kv_{n-k}'' + v_k'u_{n-k}'), \quad v_{n+1} = -\beta\sum_{k=0}^{n} C_n^k(v_ku_{n-k}'' + u_k'v_{n-k}'). \tag{29}$$

Пусть теперь $u_0(x) = -v_0(x)$. В силу формул (29) индукцией по n несложно показать, что $u(t,x) = -v(t,x)$.

Наличие у рядов (28) ненулевого радиуса сходимости зависит от начальных данных. Для примера рассмотрим случай степенных функций $u_0(x) = -x^l$, $v_0(x) = x^l$, где $l \in \mathbb{N}$. При $l = 1$ ряды (28) являются полиномами первой степени, решение существует для всех $t, x \in \mathbb{R}$ и имеет вид

$$u(t,x) = -x - \beta t, \quad v(t,x) = x + \beta t.$$

В случае $l = 2$ коэффициенты могут быть записаны в явном виде $u_n = -\beta^n 6^n n! x^2$, $v_n = \beta^n 6^n n! x^2$. Эти формулы превращают ряды (28) в геометрические прогрессии, сходящиеся при $x \in \mathbb{R}$ и $t < 1/|6\beta|$ к функциям

$$u(t,x) = -\frac{x^2}{1 - 6\beta t}, \quad v(t,x) = \frac{x^2}{1 - 6\beta t}.$$

Расходимость же можно наблюдать при начальных данных $u_0(x) = -x^l$, $v_0(x) = x^l$, где $l \geqslant 3$. В частности, при $l = 3$ ряды (28) запишутся в виде

$$u(t,x) = -x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n b_n}{n!}(xt)^n, \quad v(t,x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n b_n}{n!}(xt)^n. \tag{30}$$

Коэффициент b_n определяется рекуррентно по формуле

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 15, \quad b_2 = 630, \quad \ldots, \quad b_{n+1} = (n+5)\sum_{k=0}^{n} C_n^k (n-k+3) b_k b_{n-k}.$$

Несложно показать, что последовательность b_{n+1} строго возрастает.

Пользуясь формулой Даламбера, определим радиус R сходимости суммы в формулах (30):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n\beta^n}{n!}\frac{(n+1)!}{b_{n+1}\beta^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)b_n}{|\beta|(n+5)\sum_{k=0}^{n} C_n^k(n-k+3)b_k b_{n-k}}.$$

Так как справедлива оценка

$$0 \leqslant \frac{b_n}{\sum_{k=0}^{n} C_n^k(n-k+3)b_k b_{n-k}} \leqslant \frac{b_n}{C_n^0(n+3)b_0 b_n} \equiv \frac{1}{n+3},$$

то по признаку существования предела последовательности имеем равенство

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)b_n}{|\beta|(n+5)\sum_{k=0}^{n} C_n^k(n-k+3)b_k b_{n-k}} = \frac{1}{|\beta|}\cdot 0 = 0.$$

Получили, что $R = 0$ и ряды (30) сходятся лишь при $xt = 0$. Остальные случаи при $l \geqslant 4$ рассматриваются аналогично.

Таким образом, при рассмотрении начальной задачи для системы (2) её аналитическая разрешимость обусловлена выбором краевых условий. Сходимость рядов (28) зависит от того, будет ли рост коэффициентов u_n, v_n выше факториального. Иначе говоря, задание начальных условий для рассмотренной системы в общем случае невозможно. Данный пример представляет собой аналог известного контрпримера к теореме Коши–Ковалевской [28, с. 163]. Добавим, что случай $a'(0) + \alpha_i = 0$, $i = 1, 2$, также не подпадающий под действие теоремы, представляет отдельный интерес и требует детального рассмотрения. Например, при $a'(t) \equiv \mathrm{const}$ (см. п. 3) решение, по-видимому, будет содержать произвольную функцию.

Заключение. Настоящей работой авторы продолжают цикл исследований аналитической разрешимости задач о построении решений с нулевым фронтом для нелинейных вырождающихся параболических уравнений и систем. Рассмотренный здесь математический объект примечателен тем, что существенно отличается от исследовавшихся ранее реакционно-диффузионных систем наличием более сложных нелинейностей.

Сказанное выше делает невозможным автоматическое перенесение полученных результатов на указанный случай и привносит в построение решения и доказательство теоремы существования определённые сложности, которые авторам удалось успешно преодолеть. Так, в статье доказана теорема существования и единственности нетривиального аналитического решения задачи с заданным нулевым фронтом для системы уравнений типа “хищник–жертва”. В ходе доказательства, которое носит конструктивный характер, построено решение в виде рядов Тейлора. Предложенные рекуррентные формулы коэффициентов могут быть использованы для верификации численных расчётов, выполненных, например, на основе метода граничных элементов (см. [19, 23, 24]). Отдельно рассмотрен случай линейного фронта, для которого удаётся найти точное решение, построение которого сводится к интегрированию задачи Коши для ОДУ. Подробно разобраны два примера.

Хотя рассматриваемая система возникает в математической биологии [26], прикладное значение найденных решений неочевидно, поскольку получить значимые результаты для наиболее содержательного случая при наличии двух различных нулевых фронтов пока не удалось. Построен только единичный пример. Тем не менее отрезки полученных рядов могут быть использованы для тестирования численных алгоритмов решения данной задачи, основанных на методе коллокаций [24] или граничных элементов [23].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект “Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа” № 121041300058-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
2. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., 1987.
3. *Vazquez J.L.* The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford, 2007.
4. *Cuesta C.M., Pop I.S.* Numerical schemes for a pseudo-parabolic Burgers equation: discontinuous data and long-time behaviour // J. of Comput. and Appl. Math. 2009. V. 224. P. 269–283.
5. *Perthame B.* Parabolic Equations in Biology. Growth, Reaction, Movement and Diffusion. New York, 2015.
6. *Achouri T., Ayadi M., Habbal A., Yahyaoui B.* Numerical analysis for the two-dimensional Fisher–Kolmogorov–Petrovski–Piskunov equation with mixed boundary condition // J. of Appl. Math. and Comput. 2021. № 1. P. 1–26.
7. *DiBenedetto E.* Degenerate Parabolic Equations. New York, 1993.
8. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., 1966.
9. *Баренблатт Г.И., Ентов В.Н., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М., 1984.
10. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. Boca Raton; London; New York, 2011.
11. *Сидоров А.Ф.* Избранные труды. Математика. Механика. М., 2001.
12. *Казаков А.Л.* Обобщённая задача Коши с данными на двух и трёх поверхностях для квазилинейной системы с особенностями в коэффициентах перед производными // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 4. С. 530.
13. *Filimonov M.Yu., Korzunin L.G., Sidorov A.F.* Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special construction of series // Rus. J. of Numer. Anal. and Math. Model. 1993. V. 8. Iss. 2. P. 101–125.
14. *Филимонов М.Ю.* Применение метода специальных рядов для построения новых классов решений нелинейных уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 6. С. 801–808.
15. *Казаков А.Л., Лемперт А.А.* Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением // Вычислит. технологии. 2012. Т. 17. № 1. С. 57–68.
16. *Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Lempert A.A.* Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type // Symmetry. 2020. V. 12. № 6. P. 999.
17. *Казаков А.Л., Орлов Св.С., Орлов С.С.* Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59. № 3. С. 544–560.
18. *Казаков А.Л.* О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 1057–1068.
19. *Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф.* Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 119–129.
20. *Казаков А.Л., Кузнецов П.А.* Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21. № 2 (74). С. 56–65.
21. *Кудряшов Н.А., Синельщиков Д.И.* Аналитические решения нелинейного уравнения конвекции–диффузии с нелинейными источниками // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Т. 23. № 3. С. 309–316.

22. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Reductions and exact solutions of Lotka–Volterra and more complex reaction–diffusion systems with delays // Appl. Math. Lett. 2022. V. 125. P. 107731.
23. *Казаков А.Л., Нефедова О.А., Спевак Л.Ф.* Решение задач об инициировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности методом граничных элементов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 6. С. 1047–1062.
24. *Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф.* Построение решений краевой задачи с вырождением для нелинейной параболической системы // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24. № 4 (88). С. 64–78.
25. *Кузнецов П.А.* Аналитические диффузионные волны в нелинейной параболической модели “хищник–жертва” // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28. № 2. С. 158–167.
26. *Murray J.D.* Mathematical Biology Ii: Spatial Models and Biomedical Applications. Interdisciplinary Applied Mathematics. V. 18. New York, 2003.
27. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 2012.
28. *Козлов В.В.* Софья Ковалевская: математик и человек // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55. Вып. 6 (336). С. 159–172.

Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 23.06.2022 г.
После доработки 15.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1471–1483

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32+517.984

ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЁННОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ: СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЙ И АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОДЫ

© 2022 г. И. С. Ломов

При минимальных условиях на исходные данные смешанной задачи для телеграфного уравнения двумя разными способами получено обобщённое решение в виде быстро сходящегося функционального ряда – аналога известной формулы Даламбера. Первый способ основан на секвенциальном методе: обобщённое решение задачи определяется как предел классических решений последовательности задач. Второй способ основан на аксиоматическом методе. Для построения обобщённого решения не привлекаются классические решения. Использована теория расходящихся рядов Л. Эйлера с дополненной системой аксиом. Особенность рассматриваемой задачи заключается в наличии нелокального краевого условия, в котором присутствует значение функции во внутренней точке интервала. Оба способа построения обобщённого решения приводят к одному и тому же быстро сходящемуся (экспоненциально) функциональному ряду.

DOI: 10.31857/S0374064122110048, EDN: MABMSA

Введение. Ряд математических моделей, используемых в задачах теории звука, теории упругости, электромагнитных процессов и др., содержит так называемое телеграфное уравнение $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t),$ для которого ставится смешанная задача. В простейшем случае, когда потенциал $q(x)$ – постоянная величина, решение этой задачи можно записать в виде известной формулы Даламбера. В общем случае решение можно найти методом Фурье – в виде ряда, методом функции Грина – в виде интеграла, методом функции Римана – в виде обобщённой формулы Римана, либо применить итерационные или численные методы. Каждый из этих методов накладывает свои ограничения на исходные данные задачи. До недавнего времени считалось, что метод Фурье является одним из самых "затратных" методов в плане требований на параметры задачи. Это связано с необходимостью двукратного почленного дифференцирования рядов, представляющих решение, которые при этом сходятся медленно.

В данной статье рассмотрен случай, когда потенциал q может зависеть от двух переменных: $q = q(x,t),$ что не позволит применить метод разделения переменных для нахождения решения задачи. Тем не менее метод Фурье будет использован как инструмент для построения как классического, так и обобщённого решений задачи в виде быстро сходящегося ряда. Этот метод применяется только для построения решения смешанной задачи для волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx}$.

Применим для построения обобщённого решения смешанной задачи два разработанных А.П. Хромовым метода: секвенциальный (см. работы [1–4]) и аксиоматический [5], преимущество которых перед методами, использованными ранее, в том, что на исходные данные задачи накладываются минимальные требования, обоснование результата требует минимального числа дополнительных утверждений, а решение даётся в виде быстро сходящегося функционального ряда. При разработке этих методов были привлечены идея А.Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье, связанных с дифференциальными операторами, и идея Л. Эйлера о работе с расходящимися рядами.

В работе [6] секвенциальный метод был использован для построения классического и обобщённого решений смешанной задачи с периодическими краевыми условиями для телеграфного уравнения с потенциалом $q = q(x),$ а в статье [7] – для построения решений смешанной задачи для этого же уравнения с нелокальными краевыми условиями Самарского–Ионкина.

1. Секвенциальный подход. Будем говорить, что функция $f(x,t)$ принадлежит классу $Q,$ если для любого числа $T > 0$ $f(x,t) \in \mathcal{L}(Q_T)$ – интегрируемая на множестве $Q_T = \{(x,t)\colon x \in [0,1],\ \ t \in [0,T]\} \equiv [0,1] \times [0,T]$ функция.

Рассмотрим в полуполосе $P=\{(x,t): x\in(0,1),\ \ t\in(0,+\infty)\}$ задачу

$$u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t)-q(x,t)u(x,t),\quad (x,t)\in P, \tag{1}$$

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)+u(\alpha,t)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=0,\quad x\in[0,1], \tag{3}$$

где q, φ – комплекснозначные функции; $\varphi(x)\in\mathcal{L}(0,1)$; $q(x,t)$ такова, что найдётся функция $q_0(x)\in\mathcal{L}(0,1)$ и будет справедливо неравенство $|q(x,t)|\leqslant q_0(x)$; $q(x,t)u(x,t)$ принадлежит классу Q; число $\alpha\in(0,1)$.

1.1. Построение классического решения задачи (1)–(3).

Определение 1. Под *классическим решением (решением почти всюду)* задачи (1)–(3) будем понимать функцию $u(x,t)$, непрерывную и непрерывно дифференцируемую по x и t в полуполосе $\overline{P}=[0,1]\times[0,\infty)$, причём функции $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$ абсолютно непрерывны по $x\in[0,1]$ и $t\in[0,\infty)$ соответственно, удовлетворяющую условиям (2), (3) и почти всюду по x и t уравнению (1).

Для существования классического решения задачи (1)–(3), очевидно, необходимо, чтобы начальная функция удовлетворяла условиям $\varphi(x)\in W_1^2(0,1)$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)+\varphi(\alpha)=0$. Будем считать далее, что эти условия выполнены.

Для того чтобы записать решение задачи (1)–(3) при $q=0$ используем метод Фурье. Рассмотрим оператор Штурма–Лиувилля, связанный с задачей (1), (2):

$$L:\quad ly=-y''(x),\quad x\in(0,1),\quad y(0)=0,\quad y(1)+y(\alpha)=0,$$

и запишем собственные функции оператора L и сопряжённого к нему оператора L^*, образующие биортогональную систему. Для упрощения записей рассмотрим случай простого спектра. В случае кратного спектра (например, при $\alpha=1/3$) нужно занумеровать собственные значения с учётом кратности, форма записи изменится, но рассуждения и общая схема преобразований останутся прежними.

Обозначим через $v[\alpha]=v(\alpha+0)-v(\alpha-0)$ скачок функции $v(x)$ в точке $x=\alpha$. Оператор L^* имеет следующий вид:

$$L^*:\quad l^*v=-v''(x), x\in(0,1),\quad v(0)=v(1)=0,\quad v[\alpha]=0,\quad v'[\alpha]=-v'(1).$$

Оба оператора L и L^* действуют в пространстве $\mathcal{L}^2(0,1)$.

Рассмотрим спектральную задачу для оператора L:

$$-y''(x)=\lambda y(x),\quad x\in(0,1),\quad y(0)=0,\quad y(1)+y(\alpha)=0.$$

Обозначим $\lambda=\varrho^2$, $\operatorname{Re}\varrho\geqslant 0$, тогда уравнение принимает вид $y''(x)+\varrho^2y(x)=0$. Решив задачу, получим две последовательности чисел ϱ_n и собственных функций u_n:

$$\varrho_{1n}=\frac{2\pi n}{1+\alpha},\quad n\geqslant 1,\quad u_{1n}(x)=\sin(\varrho_{1n}x);$$

$$\varrho_{2n}=\frac{\pi+2\pi n}{1-\alpha},\quad n\geqslant 0,\quad u_{2n}(x)=\sin(\varrho_{2n}x).$$

Собственные функции оператора L^*, соответствующие числам ϱ_{in}, имеют различный вид в зависимости от числа α. Запишем их для случая $\varrho_{in}\neq\pi/2+\pi n$, $i=1,2$, $n\geqslant 0$ (это условие нарушается, например, при $\alpha=1/3$):

$$v_{1n}(x)=\begin{cases} c_{1n}\sin(\varrho_{1n}x), & x\in[0,\alpha],\\ c_{1n}\dfrac{\cos(\varrho_{1n}\alpha)}{2(-1)^n\cos(\varrho_{1n}(1-\alpha)/2)}(\sin(\varrho_{1n}x)-\operatorname{tg}\varrho_{1n}\cos(\varrho_{1n}x)), & x\in(\alpha,1],\end{cases}$$

$$v_{2n}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,\alpha], \\ c_{2n}(\sin(\varrho_{2n}x) - \operatorname{tg}\varrho_{2n}\cos(\varrho_{2n}x)), & x \in (\alpha,1]. \end{cases}$$

Постоянные c_{1n} и c_{2n} подбираются так, чтобы при всех n выполнялись равенства $(u_{in}, v_{in}) = 1,\ \ i = 1,2.$

Нам потребуется далее задача, получаемая из задачи (1)–(3) при замене уравнения (1) на неоднородное уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x,t)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in P, \tag{4}$$

где $f(x,t)$ – функция из класса Q.

Обозначим через $Z(x,t;\varphi)$ формальное решение задачи (1)–(3). В работе [8] показано, что решение задачи (4), (2), (3) можно найти по формуле

$$u(x,t) = Z(x,t;\varphi) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{t-\tau} Z(x,\eta; f(x,\tau))\, d\eta. \tag{5}$$

Представим функцию $Z(x,t;\varphi)$ в виде

$$Z(x,t;\varphi) = u_{01}(x,t) + u_1(x,t), \tag{6}$$

где $u_{01}(x,t)$ – решение задачи (1)–(3) при $q(x,t)=0$. Применим метод Фурье и найдём формальное решение $u_{01}(x,t)$ в виде следующего ряда:

$$u_{01}(x,t) = (\varphi, v_{20})u_{20}(x)\cos\varrho_{20}t + \sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi,v_{1n})u_{1n}(x)\cos(\varrho_{1n}t) + (\varphi,v_{2n})u_{2n}(x)\cos(\varrho_{2n}t)] =$$

$$= (\varphi, v_{20})\sin\varrho_{20}x\cos\varrho_{20}t + \sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi,v_{1n})\sin(\varrho_{1n}x)\cos(\varrho_{1n}t) + (\varphi,v_{2n})\sin(\varrho_{2n}x)\cos(\varrho_{2n}t)] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{(\varphi,v_{20})\sin(\varrho_{20}(x+t)) + \sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi,v_{1n})\sin(\varrho_{1n}(x+t)) + (\varphi,v_{2n})\sin(\varrho_{2n}(x+t))] +$$

$$+ (\varphi,v_{20})\sin(\varrho_{20}(x-t)) + \sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi,v_{1n})\sin(\varrho_{1n}(x-t)) + (\varphi,v_{2n})\sin(\varrho_{2n}(x-t))]\Big\}. \tag{7}$$

Запишем разложение функции $\varphi(x)$ в ряд по системе функций $\{u_{in}(x), v_{in}(x)\}_{i=1,2}$:

$$(\varphi,v_{20})u_{20}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi,v_{1n})u_{1n}(x) + (\varphi,v_{2n})u_{2n}(x)] =$$

$$= (\varphi,v_{20})\sin(\varrho_{20}x) + \sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi,v_{1n})\sin(\varrho_{1n}x) + (\varphi,v_{2n})\sin(\varrho_{2n}x)] = \widetilde{\varphi}(x), \tag{8}$$

где $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$, функция $\widetilde{\varphi}(x)$ определена на всей числовой прямой и является продолжением функции $\varphi(x)$. Далее получим аналитические соотношения, позволяющие продолжить функцию $\varphi(x)$ с отрезка $[0,1]$ на всю числовую прямую. Эти соотношения нам потребуются в дальнейших построениях.

Сравнивая разложения (7) и (8), заключаем, что справедливо следующее представление:

$$u_{01}(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)], \quad x \in [0,1], \quad t \geqslant 0. \tag{9}$$

Правая часть равенства (9) определена при любых $(x,t)\in(-\infty,\infty)\times[0,\infty)$, и далее функцию $u_{01}(x,t)$ из (9) будем обозначать через $a_0(x,t)$.

Найдём аналитические соотношения для продолжения функции $\varphi(x)$ с отрезка $[0,1]$ на числовую прямую $\mathbb{R}$. Подставим функцию $u_{01}(x,t)$, представленную в виде (9), в краевые условия (2). Получим следующие два соотношения:

$$\widetilde{\varphi}(x)=-\widetilde{\varphi}(-x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{10}$$

т.е. функция $\widetilde{\varphi}(x)$ нечётная, и

$$\widetilde{\varphi}(1+x)=-\widetilde{\varphi}(1-x)-\widetilde{\varphi}(\alpha+x)-\widetilde{\varphi}(\alpha-x),\quad x\geqslant 0. \tag{11}$$

Формулы (10) и (11) позволяют продолжить функцию $\varphi(x)$ на всю числовую прямую. Действительно, продолжим $\varphi(x)$ на $[-1,0)$ нечётным образом. Пусть $x\in[0,1-\alpha]$, из (11) получим значения $\widetilde{\varphi}(x)$ для $x\in[1,2-\alpha]$. Продолжим $\widetilde{\varphi}(x)$ нечётно на $[\alpha-2,-1)$, рассмотрим $x\in\in[1-\alpha,2-2\alpha]$, из (11) получим $\widetilde{\varphi}(x)$ на $[2-\alpha,3-2\alpha]$, а следовательно, на $[0,3-2\alpha]$ и т.д. На n-м шаге доходим до точки $x=n-1-n\alpha=n(1-\alpha)+1\to+\infty$, $n\to+\infty$, так как $1-\alpha>0$. В итоге определим функцию $\widetilde{\varphi}(x)$ на всей прямой.

Замечание. Описанная выше схема применима для получения продолжения функции $\varphi(x)$ на всю числовую прямую в случае любого конечного числа внутренних точек в краевом условии (2).

Предложенный алгоритм построения продолжения $\widetilde{\varphi}(x)$ известной функции $\varphi(x)$ позволяет утверждать следующее.

Лемма 1. *Функция $\widetilde{\varphi}(x)$ определяется однозначно по $\varphi(x)$.*

Лемма 2. *Операция продолжения $\widetilde{\varphi}(x)$ линейна, т.е.*

$$\widetilde{\alpha\varphi_1(x)+\beta\varphi_2(x)}=\alpha\widetilde{\varphi}_1(x)+\beta\widetilde{\varphi}_2(x),\quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$

Доказательство. Обе операции в формулировке леммы нечётны, получены с использованием равенства (11). На отрезке $[0,1]$ они обе есть $\alpha\varphi_1(x)+\beta\varphi_2(x)$. Поэтому из леммы 1 следует утверждение леммы 2.

Ниже потребуется следующая оценка интеграла от функции $\widetilde{\varphi}(x)$.

Лемма 3. *Пусть функция $\varphi(x)\in\mathcal{L}(0,1)$ и $\widetilde{\varphi}(x)$ – продолжение функции $\varphi(x)$ с отрезка $[0,1]$ на всю прямую, полученное с помощью равенств (10) и (11). Зафиксируем произвольное число $T\geqslant 2$, пусть m – наименьшее натуральное число такое, что $T\leqslant m$. Справедливо следующее неравенство:*

$$\int\limits_{-m}^{m+1}|\widetilde{\varphi}(x)|\,dx\leqslant c_T\|\varphi\|_1,$$

где $\|\varphi\|_1=\int_0^1|\varphi(x)|\,dx$, $c_T>0$ – некоторая постоянная, зависящая от числа T.

Доказательство. В силу равенства (10) $\int_{-1}^1|\widetilde{\varphi}(x)|\,dx=2\|\varphi\|_1$. Рассмотрим $x\in[1,2-\alpha]$ и оценим интеграл от функции $\widetilde{\varphi}(x)$, использовав равенства (10), (11), по этому отрезку:

$$\int\limits_1^{2-\alpha}|\widetilde{\varphi}(x)|\,dx=\int\limits_0^{1-\alpha}|\widetilde{\varphi}(y+1)|\,dy=\int\limits_0^{1-\alpha}|\widetilde{\varphi}(1-y)+\widetilde{\varphi}(\alpha+y)+\widetilde{\varphi}(\alpha-y)|\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^{1-\alpha}|\widetilde{\varphi}(1-y)|\,dy+\int\limits_0^{1-\alpha}|\widetilde{\varphi}(\alpha+y)|\,dy+\int\limits_0^{1-\alpha}|\widetilde{\varphi}(\alpha-y)|\,dy=$$

$$=2\int\limits_\alpha^1|\widetilde{\varphi}(x)|\,dx+\int\limits_{2\alpha-1}^{\alpha}|\widetilde{\varphi}(x)|\,dx\leqslant 2\|\varphi\|_1+\int\limits_{-1}^1|\widetilde{\varphi}(x)|\,dx=4\|\varphi\|_1.$$

Таким образом, установлены неравенства

$$\int\limits_{1}^{2-\alpha}|\widetilde{\varphi}(x)|\,dx\leqslant 4\|\varphi\|_1,\quad \int\limits_{-1}^{2-\alpha}|\widetilde{\varphi}(x)|\,dx\leqslant 6\|\varphi\|_1,\quad \int\limits_{-2+\alpha}^{2-\alpha}|\widetilde{\varphi}(x)|\,dx\leqslant 10\|\varphi\|_1.$$

Далее действуем по этой же схеме. Рассмотрим $x\in[2-\alpha,3-2\alpha]$. Используя равенство (11) и последние полученные оценки, устанавливаем справедливость неравенств

$$\int\limits_{2-\alpha}^{3-2\alpha}|\widetilde{\varphi}(x)|\,dx\leqslant 12\|\varphi\|_1,\quad \int\limits_{-2+\alpha}^{3-2\alpha}|\widetilde{\varphi}(x)|\,dx\leqslant 22\|\varphi\|_1.$$

Полагая $x\in[3-2\alpha,4-3\alpha]$, получаем требуемые оценки интегралов и т.д. За конечное число шагов достигнем любого заранее зафиксированного числа m и установим оценку леммы 3 с некоторой постоянной c_T, зависящей от m. Лемма доказана.

Вернёмся к представлению (6) функции Z. Имея в виду, решением каких задач являются функции $Z(x,t;\varphi)$ и $u_{01}(x,t)$, функцию $u_1(x,t)$ будем искать как решение следующей неоднородной смешанной задачи с нулевой начальной функцией:

$$u_{1tt}(x,t)=u_{1xx}(x,t)-q(x,t)u_1(x,t)+f_0(x,t),\quad (x,t)\in P, \tag{12}$$

$$u_1(0,t)=0,\quad u_1(1,t)+u_1(\alpha,t)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{13}$$

$$u_1(x,0)=0,\quad u_{1t}(x,0)=0,\quad x\in[0,1], \tag{14}$$

где $f_0(x,t)=-q(x,t)a_0(x,t)$. Используем формулу (5) и получим представление решения $u_1(x,t)$ задачи (12)–(14):

$$u_1(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{t-\tau}Z(x,\eta;f_0(x,\tau))\,d\eta. \tag{15}$$

Представим функцию $Z(x,\eta;f_0(x,\tau))$ в следующем виде:

$$Z(x,\eta;f_0(x,\tau))=Z_0(x,\eta;f_0(x,\tau))+Z_1(x,\eta;f_0(x,\tau)),$$

где $Z_0(x,\eta;f_0(x,\tau))$ есть $Z(x,\eta;f_0(x,\tau))$ при $q(x,t)=0$. Но функция $Z_0(x,\eta;f_0(x,\tau))$ в силу (9) определяется по формуле

$$Z_0(x,\eta;f_0(x,\tau))=\frac{1}{2}[\widetilde{f}_0(x+\eta,\tau)+\widetilde{f}_0(x-\eta,\tau)],$$

где $\widetilde{f}_0(\eta,\tau)$ при каждом значении τ есть продолжение функции $f_0(\eta,\tau)$ с отрезка $\eta\in[0,1]$ на числовую прямую по формулам (10), (11).

Правая часть (15) с функцией Z_0 вместо функции Z определена теперь при любых $(x,t)\in$ $\in(-\infty,\infty)\times[0,\infty)$. Обозначим её через $a_1(x,t)$ и получим

$$a_1(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\widetilde{f}_0(\eta,\tau)\,d\eta.$$

На следующем шаге для функции $u_2(x,t)$ решаем задачу, аналогичную (12)–(14), где вместо $f_0(x,t)$ следует записать $f_1(x,t)=-q(x,t)a_1(x,t)$. Продолжив эти преобразования, получим решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3) в виде ряда

$$u(x,t)=A(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x,t), \tag{16}$$

здесь

$$a_0(x,t)=\frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t)+\widetilde{\varphi}(x-t)], \tag{17}$$

$$a_n(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\widetilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)\,d\eta,\quad n=1,2,\ldots, \tag{18}$$

где $\widetilde{f}_n(\eta,\tau)=f_n(\eta,\tau)=-q(\eta,\tau)a_n(\eta,\tau)$ при $\eta\in[0,1]$, $n\geqslant 0$, при каждом τ; далее $\widetilde{f}_n(\eta,\tau)$ по переменной η продолжается на всю числовую прямую по формулам (10), (11), как и функция $\widetilde{\varphi}(x)$; $\widetilde{f}_n(\eta,\tau)=-\widetilde{q(\eta,\tau)a_n}(\eta,\tau)$.

Отметим, что если потенциал $q(x,t)=0$, то ряд (16) превращается в обычную формулу Даламбера, что даёт основание назвать ряд (16) *обобщённой формулой Даламбера.*

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы существовало единственное классическое решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3), необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ были абсолютно непрерывны на отрезке $[0,1]$ и выполнялись условия $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)+\varphi(\alpha)=0$. Это решение даётся формулой (16).*

Доказательство теоремы 1 проводится по схеме, изложенной в статьях [6] и [4].

Теорема 2. *Если $\varphi(x)\in\mathcal{L}(0,1)$, то ряд $A(x,t)$ (16) сходится абсолютно и равномерно (с экспоненциальной скоростью) в прямоугольнике Q_T при любом фиксированном числе $T>0$.*

Доказательство. Из оценки общего члена ряда (16) непосредственно вытекает справедливость теоремы.

Лемма 4. *Пусть функция $\varphi(x)\in\mathcal{L}(0,1)$, T – произвольное фиксированное положительное число. Тогда справедливы оценки*

$$\|a_n(x,t)\|_{Q_T}\leqslant c_T^{n+1}\|q_0\|_1^n\|\varphi\|_1\frac{T^{n-1}}{(n-1)!},\quad n\in\mathbb{N}, \tag{19}$$

где c_T – постоянная из неравенства в лемме 3.

Доказательство. Заметим, что для $x\in[0,1]$, $t\in[0,T]$, $\tau\in[0,t]$ имеют место следующие вложения:

$$[x-t+\tau,x+t-\tau]\subseteq[x-t,x+t]\subseteq[-t,t+1]\subseteq[-T,T+1].$$

Воспользуемся методом математической индукции. Пусть $n=1$, тогда с учётом оценки леммы 3 справедливо неравенство

$$|a_1(x,t)|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{-T}^{T+1}|\widetilde{q(\eta,\tau)a_0}(\eta,\tau)|\,d\eta\leqslant c_T\int\limits_0^T d\tau\int\limits_0^1|q(\eta,\tau)a_0(\eta,\tau)|\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c_T}{2}\int\limits_0^1 q_0(\eta)\,d\eta\int\limits_0^T(|\widetilde{\varphi}(\eta+\tau)|+|\widetilde{\varphi}(\eta-\tau)|)\,d\tau=\frac{c_T}{2}\int\limits_0^1 q_0(\eta)\,d\eta\int\limits_{\eta-T}^{\eta+T}|\widetilde{\varphi}(\xi)|\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant c_T\|q_0\|_1\int\limits_{-T}^{T+1}|\widetilde{\varphi}(\xi)|\,d\xi\leqslant c_T^2\|q_0\|_1\|\varphi\|_1,$$

причём равномерно по $(x,t)\in Q_T$. Пусть $n\geqslant 2$. Тогда имеем

$$|a_n(x,t)|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-T}^{T+1}|\widetilde{f}(\eta,\tau)|\,d\eta\leqslant c_T\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^1 q_0(\eta)|a_{n-1}(\eta,\tau)|\,d\eta=$$

$$= c_T \int\limits_0^1 q_0(\eta)\, d\eta \int\limits_0^t |a_{n-1}(\eta,\tau)|\, d\tau \tag{20}$$

равномерно по $x \in [0,1]$ для каждого $t \geqslant 0$. Функции $a_n(x,t)$, $n \geqslant 1$, непрерывны в Q_T. Завершаем доказательство леммы по индукции. Как промежуточную получаем из формулы (20) оценку

$$|a_n(x,t)| \leqslant c_T^{n+1} \|q_0\|_1^n \|\varphi\|_1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n \geqslant 2, \quad x \in [0,1], \quad t \geqslant 0.$$

Лемма доказана. Теорема 2 доказана.

1.2. Построение обобщённого решения задачи (1)–(3).

Определение 2. Пусть последовательность $\{u_h(x,t)\}$ классических решений задачи (1)–(3), отвечающих начальным функциям $\{\varphi_h(x)\}$, сходится по норме пространства $\mathcal{L}(Q_T)$ к функции $u(x,t)$. Функцию $u(x,t)$ назовём *обобщённым решением* задачи (1)–(3).

Теорема 3. *Если функция $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$, а функции $\varphi_h(x)$, $h \geqslant 1$, удовлетворяют условиям теоремы 1 и $\|\varphi_h - \varphi\|_1 \to 0$ при $h \to \infty$, то соответствующие начальным функциям φ_h классические решения $u_h(x,t)$ задачи (1)–(3) сходятся по норме $\mathcal{L}(Q_T)$ к $A(x,t)$, т.е. в этом случае $u(x,t) = A(x,t)$ и ряд (16) является обобщённым решением задачи (1)–(3).*

Таким образом, из теорем 1 и 3 следует, что один и тот же ряд $A(x,t)$, быстро сходящийся, является классическим или обобщённым решением задачи (1)–(3) в зависимости от гладкости функции $\varphi(x)$.

Доказательство. Пусть начальная функция $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$. Пусть начальные функции $\varphi_h(x)$, $h \geqslant 1$, удовлетворяют условиям теоремы 1, им соответствуют классические решения $u_h(x,t)$ задачи (1)–(3), и $\|\varphi_h - \varphi\|_1 \to 0$ при $h \to \infty$. Обозначим ряд (16), отвечающий функции $u_h(x,t)$, через $A_h(x,t)$. Для функции $\varphi(x)$ построим ряд (16) $A(x,t)$, который в соответствии с теоремой 2 сходится абсолютно и равномерно в любом прямоугольнике Q_T. Рассмотрим разность этих рядов

$$u_h(x,t) - u(x,t) = A_h(x,t) - A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{nh}(x,t) - a_n(x,t)],$$

где

$$a_{0h}(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}_h(x+t) + \widetilde{\varphi}_h(x-t)], \quad a_{nh}(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}_{n-1,h}(\eta,\tau)\, d\eta,$$

$n \geqslant 1$. Используя схему доказательства леммы 4, оценим эту разность. Покажем, что имеют место следующие неравенства:

$$|a_{nh}(x,t) - a_n(x,t)| \leqslant c_T^{n+1} \|q_0\|_1^n \|\varphi_h - \varphi\|_1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad h,n \geqslant 1, \tag{21}$$

$(x,t) \in Q$, c_T – постоянная из оценки леммы 3.

Пусть $n = 1$. Используем оценку леммы 3. Равномерно по $(x,t) \in Q$ справедливы следующие преобразования:

$$|a_{1h}(x,t) - a_1(x,t)| \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_0^T d\tau \int\limits_{-T}^{T+1} |\widetilde{q(\eta,\tau)a_{0h}}(\eta,\tau) - \widetilde{q(\eta,\tau)a_0}(\eta,\tau)|\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^T d\tau \int\limits_{-T}^{T+1} |\widetilde{q(\eta,\tau)a_{0h}(\eta,\tau) - q(\eta,\tau)a_0(\eta,\tau)}|\, d\eta \leqslant c_T \int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^1 |q_0(\eta)||a_{0h}(\eta,\tau) - a_0(\eta,\tau)|\, d\eta \leqslant$$

$$
\leqslant c_T \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |q_0(\eta)|\,d\eta \int\limits_0^T (|\widetilde{\varphi}_h(x+t) - \widetilde{\varphi}(x+t)| + |\widetilde{\varphi}_h(x-t) - \widetilde{\varphi}(x-t)|)\,d\tau =
$$

$$
= \frac{C_T}{2}\int\limits_0^1 |q_0(\eta)|\,d\eta \int\limits_{\eta-T}^{\eta+T} |\widetilde{\varphi}_h(\xi) - \widetilde{\varphi}(\xi)|\,d\xi \leqslant c_T\|q_0\|_1 \int\limits_{-T}^{T+1} |\widetilde{\varphi}_h(\xi) - \widetilde{\varphi}(\xi)|\,d\xi \leqslant c_T^2\|q_0\|_1\|\varphi_h - \varphi\|_1.
$$

Получили оценку (21) при $n = 1$.

Пусть $n \geqslant 2$. Применив оценку леммы 3, устанавливаем соотношения

$$
|a_{nh}(x,t) - a_n(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-T}^{T+1} |f_{n-1,h}(\eta,\widetilde{\tau) - f}_{n-1}(\eta,\tau)|\,d\eta \leqslant
$$

$$
\leqslant c_T \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^1 |q_0(\eta)||a_{n-1,h}(\eta,\tau) - a_{n-1}(\eta,\tau)|\,d\eta = c_T \int\limits_0^1 |q_0(\eta)|\,d\eta \int\limits_0^t |a_{n-1,h}(\eta,\tau) - a_{n-1}(\eta,\tau)|\,d\tau.
$$

Продолжим эти преобразования для случая $n = 2$

$$
|a_{2h}(x,t) - a_2(x,t)| \leqslant c_T \int\limits_0^1 |q_0(\eta)|\,d\eta \int\limits_0^t |a_{1,h}(\eta,\tau) - a_1(\eta,\tau)|\,d\tau \leqslant c_T^3\|q_0\|_1^2\|\varphi_h - \varphi\|_1 t
$$

равномерно по $x \in [0,1]$ для каждого значения $t \geqslant 0$. Далее действуем по индукции и устанавливаем оценки (21).

Применим неравенства (21) для получения оценки разности рядов. Для всех $(x,t) \in Q_T$ справедливо соотношение

$$
|A_h(x,t) - A(x,t)| \leqslant |a_{0h}(x,t) - a_0(x,t)| + \|\varphi_h - \varphi\|_1 \sum_{n=1}^{\infty} c_T^{n+1}\|q_0\|_1^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} =
$$

$$
= |a_{0h}(x,t) - a_0(x,t)| + c_T^2\|q_0\|_1 e^{c_T\|q_0\|_1 t}\|\varphi_h - \varphi\|_1.
$$

Далее, применив оценку леммы 3 и использовав обозначение $\|\cdot\|_{1,Q_T} \equiv \|\cdot\|_{\mathcal{L}(Q_T)}$, получим

$$
\|a_{0h}(x,t) - a_0(x,t)\|_{1,Q_T} \leqslant \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x-T}^{x+T} |\varphi_h(\widetilde{y) - \varphi}(y)|\,dy \leqslant
$$

$$
\leqslant \int\limits_{-T}^{T+1} |\varphi_h(\widetilde{y) - \varphi}(y)|\,dy \leqslant c_T\|\varphi_h - \varphi\|_1, \quad h \geqslant 1.
$$

Таким образом, для разности рядов имеем оценку

$$
\|A_h(x,t) - A(x,t)\|_{1,Q_T} \leqslant c_T(1 + c_T\|q_0\|_1 T e^{c_T\|q_0\|_1 T})\|\varphi_h - \varphi\|_1, \quad h \geqslant 1,
$$

из которой следует, что если $\|\varphi_h - \varphi\|_1 \to 0$ при $h \to \infty$, то и $\|A_h(x,t) - A(x,t)\|_{1,Q_T} \to 0$ при $h \to \infty$, т.е. $\|u_h(x,t) - u(x,t)\|_{1,Q_T} \to 0$ при $h \to \infty$. Теорема доказана.

2. Аксиоматический подход. Рассмотрим последовательно четыре смешанные задачи, найдём их решения. Первые три из этих задач исследуем для того чтобы построить обобщённое решение четвёртой задачи – задачи (1)–(3).

2.1. Рассмотрим задачу (1)–(3) с потенциалом $q(x,t)=0$:

$$u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t), \quad (x,t)\in P,$$
$$u(0,t)=0, \quad u(1,t)+u(\alpha,t)=0, \quad t\geqslant 0,$$
$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=0, \quad x\in[0,1],$$

где $\varphi(x)\in\mathcal{L}(0,1)$. Формальное решение $u(x,t)$ этой задачи представлено формулой (7). Классическое решение задачи определяем так же, как в первой части.

Приведём теорему единственности классического решения рассматриваемой задачи.

Теорема 4. *Если $u(x,t)$ – классическое решение задачи (1)–(3) с $q(x,t)=0$ и с условием принадлежности $u_{tt}(x,t)$ классу Q, то оно единственно и находится по формуле (7), в которой ряды справа при любом фиксированном $t>0$ сходятся абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$.*

Доказательство теоремы проводится по схеме, изложенной в работе [3], и не зависит от конкретного вида краевых условий.

Определим как понимается смешанная задача при минимальных требованиях на начальную функцию. Заметим, что указанный ряд (7) имеет смысл для любой функции $\varphi(x)\in\in\mathcal{L}(0,1)$, хотя теперь он может быть и расходящимся. Тем не менее будем считать, что он является *формальным решением* исследуемой задачи, но понимаемой теперь *чисто формально.* Эту задачу будем называть *обобщённой смешанной задачей.* Найти решение обобщённой смешанной задачи – значит найти "сумму", вообще говоря, расходящегося ряда. "Сумма" означает, что это сумма именно расходящегося (в общем случае) ряда (см. [9, с. 101; 10, с. 6, 19]). В данном случае найти решение рассматриваемой обобщённой смешанной задачи – значит найти "сумму" расходящегося ряда (7).

Помимо трёх аксиом о расходящихся рядах [10, с. 19], следуя А.П. Хромову, будем пользоваться ещё следующим правилом интегрирования расходящегося ряда:

$$\int\sum=\sum\int, \tag{22}$$

где $\int$ – определённый интеграл.

Ряд (7) представим в виде

$$u(x,t)=\sum_{+}+\sum_{-}, \tag{23}$$

где $\sum_{\pm}=\sum_{n=1}^{\infty}(\ldots)(x\pm t)$. Сравнивая разложения (8) и (23), заключаем, что для нахождения "суммы" ряда (7) нужно найти "сумму" ряда (8).

Пусть "сумма" ряда (8) при $x\in[0,1]$ есть некоторая функция $g(x)\in\mathcal{L}(0,1)$. Тогда в соответствии с правилом (22) получим

$$\int_0^x g(\eta)\,d\eta=(\varphi,v_{20})\int_0^x\sin(\varrho_{20}\eta)\,d\eta+\sum_{n=1}^{\infty}\biggl[(\varphi,v_{1n})\int_0^x\sin(\varrho_{1n}\eta)\,d\eta+$$
$$+(\varphi,v_{2n})\int_0^x\sin(\varrho_{2n}\eta)\,d\eta\biggr], \quad x\in[0,1]. \tag{24}$$

Имеет место следующее обобщение на рассматриваемую систему $\{u_n(x)\}$ теоремы Лебега о почленном интегрировании тригонометрического ряда Фурье.

Теорема 5. *Пусть задана функция $\varphi(x)\in\mathcal{L}(0,1)$, имеющая ряд (8) своим биортогональным разложением по системе $\{u_n(x)\}$. Если отрезок $[A,B]\subseteq[0,1]$, то справедливо равенство*

$$\int_A^B\varphi(\eta)\,d\eta=(\varphi,v_{20})\int_A^B\sin(\varrho_{20}\eta)\,d\eta+\sum_{n=1}^{\infty}\int_A^B[(\varphi,v_{1n})\sin(\varrho_{1n}\eta)+(\varphi,v_{2n})\sin(\varrho_{2n}\eta)]\,d\eta.$$

Таким образом, биортогональный ряд (8) можно почленно интегрировать, полученный ряд сходится и его сумма равна $\int_A^B \varphi(\eta)\,d\eta$. При этом сам ряд (8) может и не сходиться.

Доказательство теоремы 5 проводится по схеме, изложенной в работе [11, с. 320–321].

Согласно теореме 5 суммой ряда (24) (обычной суммой) является функция $\int_0^x \varphi(\eta)\,d\eta$. Но тогда $\int_0^x g(\eta)\,d\eta = \int_0^x \varphi(\eta)\,d\eta$, т.е. справедливо равенство $g(x) = \varphi(x)$ почти всюду на отрезке $[0,1]$, тем самым найдена "сумма" ряда (8), который может быть и расходящимся.

Формальный ряд (8) определён для всех значений $x \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\widetilde{\varphi}(x)$ "сумму" ряда (8) для всех значений $x \in \mathbb{R}$. В силу (8) и (23) заключаем, что "сумма" $u(x,t)$ ряда (7) есть функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)]. \tag{25}$$

Доказана

Теорема 6. *Решением обобщённой смешанной задачи (1)–(3) с $q(x,t) = 0$ является функция $u(x,t)$ из класса Q, определяемая по формуле (25).*

Алгоритм продолжения функции $\widetilde{\varphi}(x)$ с отрезка $[0,1]$, где $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, на всю числовую прямую определён формулами (10), (11).

2.2. Рассмотрим следующую обобщённую смешанную задачу:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in P, \tag{26}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) + u(\alpha,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{27}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{28}$$

где $f(x,t)$ – функция класса Q.

Формальное решение задачи (26)–(28) методом Фурье определяется по формуле

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \bigg\{ \frac{1}{\varrho_{20}}(f, v_{20}) \sin(\varrho_{20}x) \sin(\varrho_{20}(t-\tau)) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \bigg[\frac{1}{\varrho_{1n}}(f, v_{1n}) \sin(\varrho_{1n}x) \sin(\varrho_{1n}(t-\tau)) + \frac{1}{\varrho_{2n}}(f, v_{2n}) \sin(\varrho_{2n}x) \sin(\varrho_{2n}(t-\tau)) \bigg] \bigg\}\, d\tau.$$

В этом соотношении выполним преобразование

$$\frac{1}{\varrho}\sin(\varrho x)\sin(\varrho(t-\tau)) = -\frac{1}{2\varrho}(\cos(\varrho(x+t-\tau)) - \cos(\varrho(x-t+\tau))) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sin(\varrho\eta)\,d\eta$$

и получим равенство

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \bigg\{ (f, v_{20}) \sin(\varrho_{20}\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} [(f, v_{1n}) \sin(\varrho_{1n}\eta) +$$

$$+ (f, v_{2n}) \sin(\varrho_{2n}\eta)] \bigg\}\, d\eta = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}(\eta,\tau)\,d\eta, \tag{29}$$

в котором выражение в фигурных скобках, как это следует из формулы (8), имеет "сумму" $\widetilde{f}(\eta,\tau)$, где $\widetilde{f}(\eta,\tau)$ – продолжение функции $f(\eta,\tau)$ по η с $[0,1]$ на всю числовую прямую по тем же формулам (10), (11), что и функция $\varphi(x)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Решение $u(x,t)$ обобщённой смешанной задачи (26)–(28) есть функция класса Q, определяемая по формуле*

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\widetilde{f}(\eta,\tau)\,d\eta. \tag{30}$$

Зафиксируем произвольное число $T>0$. Из формулы (30), использовав неравенство леммы 3, получим

$$|u(x,t)|\leqslant\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{-T}^{T+1}|\widetilde{f}(\eta,\tau)|\,d\eta\leqslant c_T\int\limits_0^T d\tau\int\limits_0^1|f(\eta,\tau)|\,d\eta=c_T\|f(x,t)\|_{1,Q_T},$$

откуда следует оценка $\|u(x,t)\|_{1,Q_T}\leqslant c_T T\|f(x,t)\|_{1,Q_T}$, $c_T=\mathrm{const}>0$, которая подтверждает, что $u(x,t)$ является функцией класса Q.

2.3. Рассмотрим обобщённую смешанную задачу

$$u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t)+f(x,t),\quad (x,t)\in P, \tag{26}$$

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)+u(\alpha,t)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{27}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=0,\quad x\in[0,1], \tag{31}$$

где $f(x,t)$ есть функция класса Q, $\varphi(x)\in\mathcal{L}(0,1)$.

Формальное решение задачи (26), (27), (31) по методу Фурье есть $u(x,t)=u_0(x,t)+u_1(x,t)$, где $u_0(x,t)$ – ряд (7), а $u_1(x,t)$ – ряд (29). Поэтому, исходя из пп. 2.1, 2.2, получаем

Теорема 8. *Обобщённая смешанная задача (26), (27), (31) имеет решение из класса Q, определяемое по формуле*

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t)+\widetilde{\varphi}(x-t)]+\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\widetilde{f}(\eta,\tau)\,d\eta.$$

2.4. Используем результат пп. 2.1–2.3 для решения задачи (1)–(3).

Из теоремы 8 следует, что нахождение решения задачи (1)–(3) в классе Q сводится к нахождению в этом классе решения интегрального уравнения

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t)+\widetilde{\varphi}(x-t)]-\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\widetilde{q(\eta,\tau)u(\eta,\tau)}\,d\eta, \tag{32}$$

где $\widetilde{q(\eta,\tau)u(\eta,\tau)}$ – продолжение по η на всю числовую прямую с отрезка $[0,1]$ при каждом τ функции $q(\eta,\tau)u(\eta,\tau)$ по тем же формулам (10), (11), что и функция $\varphi(x)$.

Интегральное уравнение (32) имеет единственное решение в классе Q, получаемое по методу последовательных подстановок. Это решение $u(x,t)$ даётся формулой (16), где функции $a_n(x,t)$, $n\geqslant 0$, определяются формулами (17), (18).

Теорема 9. *При $\varphi(x)\in\mathcal{L}(0,1)$ задача (1)–(3) имеет обобщённое решение, которое представляется формулами (16)–(18).*

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$Bf=-\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\widetilde{q(\eta,\tau)f(\eta,\tau)}\,d\eta,$$

где $f(x,t)\in C(Q_T)$, продолжение подынтегральной функции построено по формулам (10), (11).

Лемма 5. *Для линейного ограниченного в пространстве $C(Q_T)$ оператора B справедлива оценка*

$$\|Bf\|_{C(Q_T)} \leqslant c_T T\|q_0\|_1\|f(x,t)\|_{C(Q_T)},$$

где c_T – постоянная из неравенства леммы 3.

Доказательство. Линейность оператора B следует из леммы 2. Докажем его ограниченность. Как и в доказательстве леммы 4, имеем

$$|Bf| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau \int\limits_{-T}^{T+1} |\widetilde{q(\eta,\tau)f(\eta,\tau)}|\,d\eta \leqslant c_T\cdot T\cdot\|q_0\|_1\|f(x,t)\|_{C(Q_T)},$$

откуда следует требуемая оценка и ограниченность оператора B. Лемма доказана.

Рассмотрим ряд $A_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x,t)$, где $a_n(x,t)=Ba_{n-1}$, $n\geqslant 1$, и $a_0(x,t)=[\widetilde{\varphi}(x+t)+\widetilde{\varphi}(x-t)]/2$. Заметим, что функции $a_n(x,t)$ имеют вид (18), и ряд $A_1(x,t)$ есть ряд (16) $A(x,t)$ без слагаемого $a_0(x,t)$. Из теоремы 2 следует, что ряд $A_1(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в прямоугольнике Q_T.

Докажем, что уравнение (32) имеет решение $u(x,t)=A(x,t)=a_0(x,t)+A_1(x,t)$, получаемое с помощью метода последовательных подстановок.

Уравнение (32) имеет вид $u=a_0+Bu$. Положим $v(x,t)=u(x,t)-a_0(x,t)$, тогда $v=Bu=Bv+Ba_0=Bv+a_1$, и для $v(x,t)$ получаем интегральное уравнение

$$v(x,t)=a_1(x,t)+Bv(x,t). \tag{33}$$

Так как $a_1(x,t)\in C(Q_T)$, то уравнение (33) рассматриваем в пространстве $C(Q_T)$. Методом последовательных подстановок из (33) получаем ряд $A_1(x,t)$: $v_0=0$, $v_n=a_1+Bv_{n-1}$, $v_1=a_1$, $v_2=a_1+Ba_1=a_1+a_2$, $v_3=a_1+a_2+a_3$ и т.д. Поскольку B – линейный и ограниченный оператор в $C(Q_T)$ и $BA_1(x,t)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n(x,t)$, то $A_1(x,t)$ – решение уравнения (33).

Докажем, что уравнение (33) имеет единственное решение. Допустим, что кроме $A_1(x,t)$ есть ещё другое решение $w(x,t)$ этого уравнения. Тогда $z(x,t)=A_1(x,t)-w(x,t)$ – решение уравнения $z(x,t)=Bz(x,t)$, а значит, и уравнения $z(x,t)=B^nz(x,t)$ при любом натуральном n.

Запишем оценку (19) леммы 4 в другой форме. Поскольку $a_n(x,t)=Ba_{n-1}=B^2a_{n-2}=\ldots=B^{n-1}a_1(x,t)=B^na_0(x,t)$, то из доказательства леммы 4 следует, что

$$|a_n(x,t)|\leqslant c_T\int\limits_0^1|q_0(\eta_1)|\,d\eta_1\int\limits_0^t|a_{n-1}(\eta_1,\tau_1)|\,d\tau_1\leqslant$$

$$\leqslant c_T^2\int\limits_0^1|q_0(\eta_1)|\,d\eta_1\int\limits_0^t\Bigg[\int\limits_0^1|q_0(\eta_2)|\,d\eta_2\int\limits_0^{\tau_1}|a_{n-2}(\eta_2,\tau_2)|\,d\tau_2\Bigg]d\tau_1\leqslant\ldots$$

$$\ldots\leqslant c_T^{n-1}\int\limits_0^1|q_0(\eta_1)|\,d\eta_1\int\limits_0^t\cdots\int\limits_0^{\tau_{n-2}}|a_1(\eta_{n-1},\tau_{n-1})|\,d\tau_{n-1}\cdots d\tau_1\leqslant c_T^{n-1}\|q_0\|^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\|a_1(x,t)\|_{C(Q_t)},$$

где $Q_t=[0,1]\times[0,t]$. Таким образом, установлена оценка

$$\|a_n\|_{C(Q_T)}=\|B^{n-1}a_1\|_{C(Q_T)}\leqslant c_T^{n-1}\|q_0\|_1^{n-1}\frac{T^{n-1}}{(n-1)!}\|a_1\|_{C(Q_T)}, \tag{34}$$

которая остаётся верной, если в качестве $a_1(x,t)$ взять любую функцию из пространства $C(Q_T)$, например, функцию $z(x,t)$. Тогда из оценки (34) следует неравенство

$$\|z(x,t)\|_{C(Q_T)}=\|B^{n-1}z\|_{C(Q_T)}\leqslant\|z\|_{C(Q_T)}c_T^{n-1}\|q_0\|_1^{n-1}\frac{T^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Отсюда в силу произвольности n получаем, что $z(x,t) = 0$, и тем самым единственным решением уравнения (33) является ряд $A_1(x,t)$, а уравнения (32) – ряд $A(x,t)$. Теорема 9 доказана.

Как доказано в теореме 2, при $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$ ряд (16) $A(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно (с экспоненциальной скоростью) в прямоугольнике Q_T для любого $T > 0$.

Таким образом, во второй части статьи предложен отличный от рассмотренного в первой части метод построения обобщённого решения задачи (1)–(3). При этом оба решения определяются рядом (16).

Замечание. Отметим, что в работе [12] с помощью функции Римана получены формулы классического решения первой смешанной задачи для общего неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости (обобщённые формулы Римана).

Автор признателен А.П. Хромову за полезные обсуждения результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 2. С. 138–140.
2. *Хромов А.П.* О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2016. Т. 56. № 10. С. 1795–1809.
3. *Хромов А.П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 717–731.
4. *Хромов А.П., Корнев В.В.* Классическое и обобщённое решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 2. С. 286–300.
5. *Хромов А.П.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения // Соврем. проблемы теории функций и их приложения. Саратов, 2022. Вып. 21. С. 319–324.
6. *Ломов И.С.* Обобщённая формула Даламбера для телеграфного уравнения // Итоги науки и техники. Соврем. математика и её приложения. Тематич. обзоры. 2021. Т. 199. С. 66–79.
7. *Ломов И.С.* Эффективное применение метода Фурье для построения решения смешанной задачи для телеграфного уравнения // Вестн. Московского ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2021. № 4. С. 37–42.
8. *Хромов А.П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Соврем. проблемы теории функций и их приложения: материалы междунар. Саратовской зимней школы. Саратов, 2020. С. 433–439.
9. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М.; Л., 1949.
10. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М., 2006.
11. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М., 1957.
12. *Ломовцев Ф.Е.* Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой // Журн. Белорусского гос. ун-та. Математика. Информатика. 2021. № 1. С. 18–38.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 19.06.2022 г.
После доработки 19.06.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1484–1499

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.984.54

К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ НА ВСЕЙ ОСИ

© 2022 г. А. П. Солдатов

Приводятся достаточные условия, обеспечивающие справедливость основной теоремы Фаддеева–Марченко о восстановлении потенциала уравнения Штурма–Лиувилля на всей оси по заданным соотношениям между функциями Йоста. Эти условия сформулированы в терминах так называемого коэффициента отражения. В рамках теоретико-функционального подхода указанные соотношения записаны в форме краевой задачи для функций Йоста. Установлена однозначная разрешимость данной задачи и соответствующего ей сингулярного интегрального уравнения в соответствующих весовых классах Гёльдера. Как следствие, с помощью решения этой задачи получена явная формула для потенциала через уравнения Штурма–Лиувилля, альтернативная известной формуле Левитана–Фаддеева–Марченко.

DOI: 10.31857/S037406412211005X, EDN: MASQSN

1. Введение. Постановка задачи. Рассмотрим спектральную задачу Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = k^2 y, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

на всей оси в классической постановке, когда вещественный коэффициент q удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|x|)|q(x)|dx < \infty.$$

Хорошо известно [1, гл. 6], что в классе функций, исчезающих на бесконечности, эта задача имеет дискретный спектр в конечном числе точек $\lambda = -\varkappa_j^2$, $1 \leqslant j \leqslant n$, на отрицательной части вещественной оси $\lambda = k^2$, а непрерывный спектр заполняет положительную полуось. При этом все собственные значения $-\varkappa_j^2$ являются простыми.

Введём так называемые функции Йоста $f_j(x,k)$, $j = 1, 2$, как решения уравнения (1.1) с заданными асимптотиками на бесконечности:

$$f_1(x,k) - e^{ikx} \to 0 \ \text{ при } \ x \to +\infty, \quad f_2(x,k) - e^{-ikx} \to 0 \ \text{ при } \ x \to -\infty.$$

Они определяются однозначно и представляются формулами

$$f_1(x,k) = e^{ikx} + \int_x^\infty A_1(x,t)e^{ikt}\,dt, \quad f_2(x,k) = e^{-ikx} + \int_x^\infty A_2(x,t)e^{-ikt}\,dt$$

с определёнными вещественными ядрами $A_j(x,t)$, причём интегралы сходятся абсолютно. Таким образом,

$$f_1(x,k) = e^{ikx}[1 + g_1(x,k)], \quad g_1(x,k) = \int_0^\infty A_1(x, s+x)e^{iks}\,ds,$$

$$f_2(x,k) = e^{-ikx}[1 + g_2(x,k)], \quad g_2(x,k) = \int_0^\infty A_2(x, x-s)e^{iks}\,ds, \tag{1.2}$$

где при каждом фиксированном x функции $B_1(s) = A_1(x, s+x)$ и $B_2(s) = A_2(x, x-s)$ суммируемы на полуоси $(0,\infty)$. В частности, $g_j(x,k)$ непрерывно продолжаются до функций $g_j(x,\zeta)$, аналитических в верхней полуплоскости $D_+ = \{\operatorname{Im}\zeta > 0\}$ и исчезающих на бесконечности. По переменной x соответствующие функции $f_j(x,\zeta)$ удовлетворяют аналогичному (1.1) уравнению $-f_j'' + f_j = \zeta^2 f_j$.

При фиксированном вещественном $k \neq 0$ пары функций $\{f_j(x,k), \overline{f_j(x,k)}\}$ образуют две фундаментальные системы решений и, следовательно, связаны соотношением

$$f_1(x,k) = b(k) f_2(x,k) + a(k)\overline{f_2(x,k)} \tag{1.3}$$

с некоторыми коэффициентами $a(k)$, $b(k)$, обладающими свойствами (см., например, [1, гл. 6])

$$a(-k) = \overline{a(k)}, \quad b(-k) = \overline{b(k)}, \quad |a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2, \tag{1.4a}$$

$$a(k) = 1 + O(k^{-1}), \quad b(k) = O(k^{-1}) \ \text{ при } \ k \to \infty, \tag{1.4b}$$

$$k[a(k) + b(k)] \to 0 \ \text{ при } \ k \to 0. \tag{1.4c}$$

Кроме того, функция $a(k)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость D_+, имеет простые нули в точках $\zeta = i\varkappa_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, и за исключением их всюду отлична от нуля, причём

$$\widetilde{a}(\zeta) = \zeta a(\zeta) \in C(B_1), \quad B_1 = \{|\zeta| \leqslant 1, \ \operatorname{Im}\zeta \geqslant 0\}, \tag{1.5}$$

и $a(\zeta) \to 1$ при $\zeta \to \infty$.

В явном виде $2ika(k) = (f_1' f_2 - f_2' f_1)(x,k)$, где в силу (1.1) вронскиан в правой части этого равенства не зависит от x. Поэтому аналогичное выражение справедливо и для аналитического продолжения

$$2i\zeta a(\zeta) = f_1'(x,\zeta) f_2(x,\zeta) - f_2'(x,\zeta) f_1(x,\zeta)$$

этой функции.

Очевидно, что функцию $a(\zeta)$ можно представить в виде

$$a(\zeta) = a_1(\zeta)\left(\frac{\zeta - i\varkappa_1}{\zeta + i\varkappa_1}\right)\cdots\left(\frac{\zeta - i\varkappa_1}{\zeta + i\varkappa_1}\right), \tag{1.6}$$

где функция $a_1(\zeta)$ всюду отлична от нуля. Следовательно, в верхней полуплоскости определена аналитическая функция $\ln a_1(\zeta)$, исчезающая на бесконечности и непрерывная в её замыкании (за исключением точки $\zeta = 0$).

Обратная задача теории рассеяния состоит в восстановлении коэффициента q уравнения Штурма–Лиувилля по заданным набору $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ положительных чисел и паре функций a, b со свойствами (1.4)–(1.6). Опишем центральный результат этой теории, развитой Л.Д. Фаддеевым [2, 3] и В.А. Марченко [4].

Основная теорема Фаддеева–Марченко. *Пусть заданы: набор $\varkappa_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, положительных чисел, пары функций $a(t)$, $b(t)$ со свойствами (1.4)–(1.6), непрерывные при $t \neq 0$, и наборы чисел $m_{j,1}$, $m_{j,2}$, для которых имеет место равенство $m_{j,1} m_{j,2} = -[a'(i\varkappa_j)]^2$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Пусть функции*

$$F_1(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_{j,1}} e^{-\varkappa_j x} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{b(-t)}{a(t)} e^{ixt}\,dt,$$

$$F_2(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_{j,2}} e^{\varkappa_j x} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{b(t)}{a(t)} e^{-ixt}\,dt \tag{1.7}$$

непрерывны, дифференцируемы и для любого $y \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям

$$F_1(x), F_1'(x), xF_1'(x) \in L^1(y,+\infty), \quad F_2(x), F_2'(x), xF_2'(x) \in L^1(-\infty,y). \tag{1.8}$$

Тогда ядра A_j *в интегральном представлении (1.2) однозначно определяются как решения интегральных уравнений Гельфанда–Левитана*

$$A_1(x,y)+F_1(x+y)+\int\limits_x^\infty A_1(x,t)F_1(t+y)\,dt=0,\quad y\geqslant x,$$

$$A_2(x,y)+F_2(x+y)+\int\limits_{-\infty}^x A_2(x,t)F_2(t+y)\,dt=0,\quad x\geqslant y,$$

а функции $f_j(x,t)$ *удовлетворяют уравнению Штурма–Лиувилля с коэффициентом*

$$q(x)=-2[A_1(x,x)]'=2[A_2(x,x)]'. \tag{1.9}$$

Часто вместо коэффициента b используют отношение $r=b/a$, которое носит название *коэффициент отражения.* Из (1.4) видно, что он должен удовлетворять условиям

$$r(-t)=\overline{r(t)},\quad |r(t)|<1,\quad t\neq 0;\quad r(t)=O(t^{-1})\ \text{ при }\ t\to\infty, \tag{1.10}$$

$$|a(t)|^{-2}=1-|r(t)|^2. \tag{1.11}$$

Кроме того, в обозначениях (1.5) можем записать $t[a(t)+b(t)]=\widetilde{a}(t)[1+r(t)]$, так что при $\widetilde{a}(0)=0$ условие (1.4c) выполняется автоматически. С другой стороны, это условие приводит к пределу

$$\lim_{t\to 0} r(t)=-1\ \text{ при }\ \widetilde{a}(0)\neq 0.$$

Отметим, что при $\widetilde{a}(0)=0$ поведение $r(t)$ при $t\to 0$ до конца не выяснено.

Очевидно, что в равенстве (1.11) можно a заменить на функцию a_1, фигурирующую в формуле (1.6). В частности, для граничного значения $\ln a_1^+(t)$, $t\in\mathbb{R}$, аналитической функции $\ln a_1(\zeta)$ имеем соотношение $-2\ln a_1^+=\ln(1-|r|^2)$. Поэтому эту функцию с точностью до мнимой постоянной можем восстановить по формуле Шварца [5, с. 117]

$$-2\ln a_1(\zeta)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\ln[1-|r(t)|^2]\,dt}{t-\zeta},\quad z\in D_+. \tag{1.12}$$

2. Достаточные условия основной теоремы. Возникает вопрос, для каких коэффициентов отражения $r(k)$ и построенных по ним коэффициентов a и b функции (1.7) удовлетворяют условиям (1.8) основной теоремы. Этот вопрос подробно исследовался Б.М. Левитаном [6], результаты его можно уточнить и дополнить, основываясь на классических свойствах интеграла типа Коши

$$(I\varphi)(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-\zeta},\quad \zeta\in D_\pm, \tag{2.1}$$

определяющего аналитическую функцию в полуплоскостях $D_\pm=\{\pm\operatorname{Im}\zeta>0\}$, и сингулярного интеграла Коши

$$(S\varphi)(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},\quad t_0\in\mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Последний интеграл с граничными значениями $(I\varphi)^\pm$ функции $I\varphi$ связан формулами Сохоцкого–Племеля

$$2(I\varphi)^\pm=\pm\varphi+S\varphi. \tag{2.3}$$

Пусть $C^\mu(G)$, $0 < \mu < 1$, означает класс Гёльдера на замкнутом множестве $G \subseteq \mathbb{C}$. Напомним, что он состоит из всех функций $\varphi(z)$, $z \in G$, для которых конечна норма

$$|\varphi| = |\varphi|_0 + [\varphi]_\mu, \tag{2.4}$$

где

$$|\varphi|_0 = \sup_{z\in G} |\varphi(z)|, \quad [\varphi]_\mu = \sup_{z_1,z_2\in G} \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu}.$$

Полунорма $[\varphi]_\mu$ имеет смысл и для $\mu = 0$, в этом случае она означает колебание функции φ. Очевидное равенство

$$\frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu} = |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|^{1-\mu/\nu} \left(\frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\nu}\right)^{\mu/\nu}$$

приводит к интерполяционному неравенству

$$[\varphi]_\nu \leqslant [\varphi]_0^{1-\mu/\nu} [\varphi]_\nu^{\mu/\nu}, \quad 0 < \mu < \nu. \tag{2.5}$$

Из него, в частности, следует вложение банаховых пространств $C^\nu(G) \subseteq C^\mu(G)$. Если множество G ограничено, то с учётом теоремы Асколи это вложение является компактным.

Для неограниченных множеств G вводят также пространство функций $\varphi(z)$, удовлетворяющих условию Гёльдера с некоторым показателем μ по отношению к метрике сферы Римана $\mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$. Это условие можно выразить в форме

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leqslant \frac{C|z_1 - z_2|^\mu}{(1 + |z_1|)^\mu (1 + |z_2|)^\mu}, \quad z_1, z_2 \in G, \tag{2.6}$$

с некоторой постоянной $C > 0$. Оно равносильно тому, что $\varphi(z)$ вместе с функцией $\varphi(1/z)$ удовлетворяют условию Гёльдера на любых компактных подмножествах, соответственно, $\overline{G}$ и $\widetilde{G} = \{z,\ 1/z \in \overline{G}\}$. Этот класс обозначим $H(G)$, его элементы φ, очевидно, допускают предел $\varphi(\infty) = \lim \varphi(z)$ при $z \to \infty$. Условие $\varphi(\infty) = 0$ выделяет в нем класс, который обозначим $\mathring{H}(G)$.

Исходя из весовой функции $\rho_\lambda(z) = (1+|z|^2)^{\lambda/2}$ с вещественным показателем λ, $C^\mu_\lambda(G,\infty)$ – весовое пространство функций $\varphi(z)$, для которых конечна норма

$$|\varphi| = |\rho_{-\lambda}\varphi|_0 + [\rho_{\mu-\lambda}\varphi]_\mu. \tag{2.7}$$

В случае, когда G является некоторой замкнутой областью, пространство $C^{n,\mu}(G)$ дифференцируемых функций, все производные которого до n-го порядка включительно принадлежат $C^\mu(G)$, можно определить индуктивно условиями $\varphi, \varphi' \in C^{n-1,\mu}(G)$, где под φ' понимается пара частных производных. По аналогии пространство $C^{n,\mu}_\lambda(G,\infty)$ вводится индуктивно условиями

$$\varphi \in C^{n-1,\mu}_\lambda, \quad \varphi' \in C^{n-1,\mu}_{\lambda-1}. \tag{2.8}$$

Все эти пространства являются частным случаем аналогичных пространств с более общими весовыми функциями, введённых и изученных в работе [8]. В частности, умножение, как билинейное отображение, ограничено $C^{n,\mu}_{\lambda'} \times C^{n,\mu}_{\lambda''} \to C^{n,\mu}_{\lambda'+\lambda''}$, пространство $C^{n,\mu}_0$ является банаховой алгеброй по умножению, и оператор $\varphi \to \rho_\delta\varphi$ осуществляет изоморфизм банаховых пространств $C^{n,\mu}_\lambda \to C^{n,\mu}_{\lambda+\delta}$. Кроме того, семейство банаховых пространств $(C^{n,\mu}_\lambda)$ монотонно убывает (в смысле вложений банаховых пространств) по параметру μ и монотонно возрастает по λ. При этом для функций φ, заданных на множестве G и исчезающих на бесконечности, условие (2.6) равносильно принадлежности φ пространству $C^\mu_{-\mu}(G,\infty)$. В частности, имеют место вложение $C^\mu_\lambda \subseteq C^\varepsilon_{-\varepsilon}$ при $0 < \varepsilon \leqslant \min(\mu, -\lambda)$ и равенство

$$\mathring{H}(G) = \bigcup\nolimits_{0<\varepsilon<1} C^\varepsilon_{-\varepsilon}(G,\infty). \tag{2.9}$$

Отметим ещё вложение банаховых пространств

$$C^{\mu}(G) \subseteq C^{\mu}_{\mu}(G,\infty), \tag{2.10}$$

которое непосредственно следует из определения (2.7), так как

$$C^{\mu}(G) \subseteq C^{\mu}_{\mu}(G,\infty) = \{\varphi : [\varphi]_{\mu} < \infty\}.$$

В дальнейшем роль множества G будут играть в основном прямая $\mathbb{R}$ и полуплоскости $D_{\pm}$. В первом случае под φ' в (2.8) понимается обычная производная, а во втором случае под $C^{n,\mu}_{\lambda}$ понимается пространство аналитических в $D_{\pm}$ функций. Особо остановимся на пространстве $C^{n,\mu}_{0}(\mathbb{R},\infty)$.

Лемма 2.1. (a) *Пусть $\varphi \in C^{n,\mu}_{0}(\mathbb{R},\infty)$ и функция f аналитична в окрестности некоторого компакта K, содержащего множество значений φ. Тогда суперпозиция $f\circ\varphi \in \in C^{n,\mu}_{0}(\mathbb{R},\infty)$.*

(b) *Пусть последовательность функций φ_m, $m = 1,2,\ldots,$ ограничена в $C^{\nu}_{0}(\mathbb{R},\infty)$, и* $\sup -$ *нормы $|\varphi_m|_0 \to 0$ при $m \to \infty$.*

(c) *Для любой функции $\varphi \in C^{\nu}_{\alpha}(\mathbb{R},\infty)$, $\alpha < 0$, существует последовательность бесконечно дифференцируемых функций φ_1, φ_2, $\ldots$ с компактным носителем, которая при $0 < \mu < \nu$ сходится к φ по норме пространства $C^{\mu}_{0}(\mathbb{R},\infty)$.*

Доказательство. (a) Рассмотрим сначала случай $n = 0$. На компакте K функция f удовлетворяет условию Липшица

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant L|z_1 - z_2|$$

с некоторой постоянной $L > 0$. Поэтому применительно к введённой выше полунорме $\{\varphi\}_{\mu}$ имеем очевидную оценку $\{f\circ\varphi\}_{\mu} \leqslant L\{\varphi\}_{\mu}$, так что $f\circ\varphi \in C^{\mu}_{0}$.

В общем случае воспользуемся индукцией по n. Тогда согласно (2.8) функции $f\circ\varphi$ и $\rho_1 f'\circ\varphi$ принадлежат пространству $C^{n-1,\mu}_{0}$. Поэтому в правой части равенства

$$\rho_1(f\circ\varphi)' = (f'\circ\varphi)(\rho_1\varphi')$$

оба сомножителя принадлежат $C^{n-1,\mu}_{0}$, так что по определению $f\circ\varphi \in C^{n,\mu}_{0}$.

(b) Нетрудно видеть, что аналогичное (2.4) равенство

$$|\varphi| = |\varphi|_0 + \{\varphi\}_{\mu}, \quad \{\varphi\}_{\mu} = \sup_{t_1,t_2\in G} \frac{\rho_{\mu}(t_1)|\varphi(t_1) - \varphi(z_2)|}{|t_1 - t_2|^{\mu}}$$

определяет эквивалентную норму в пространстве $C^{\mu}_{0}(\mathbb{R},\infty)$. Поэтому имеет место аналогичное (2.5) интерполяционное неравенство

$$\{\varphi\}_{\nu} \leqslant [\varphi]_0^{1-\mu/\nu}\{\varphi\}_{\nu}^{\mu/\nu}, \quad 0 < \mu < \nu,$$

из которого утверждение леммы получается непосредственно.

(c) Предположим сначала, что функция $\varphi \in C^{n,\nu}$ имеет компактный носитель. Введём срезывающую функцию $\chi(t) \in C^{\infty}$, тождественно равную единице при $|t| \leqslant 1$ и нулю при $|t| \geqslant 2$. Утверждается, что последовательность

$$\varphi_m(t) = \chi(t/m)\varphi(t), \quad m = 1,2,\ldots,$$

сходится к φ в C^{μ}_{0}.

В самом деле эта последовательность, очевидно, ограничена в C^{ν}_{0} и $|\varphi - \varphi_m|_0 \to 0$ при $m \to \infty$. Поэтому на основании (b) последовательность $\varphi_m \to \varphi$ по норме пространства C^{μ}_{0}.

Итак, без ограничения общности можно считать, что функция $\varphi \in C^{\nu}$ имеет компактный носитель. В этом случае воспользуемся стандартной конструкцией свёртки с усредняющим ядром. Пусть неотрицательная функция $h \in C^{\infty}$ имеет компактный носитель и интеграл от неё по всей прямой равен единице. Тогда по отношению к $h_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}h(\varepsilon^{-1}t)$, $0 < \varepsilon < 1$, функции

$$\varphi_\varepsilon(t_0) = \int\limits_{\mathbb{R}} h_\varepsilon(t_0 - t)\varphi(t)\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}} h(t)\varphi(t_0 - \varepsilon t)\,dt$$

являются бесконечно дифференцируемыми и имеют компактный носитель, причём в этом равенстве можно φ заменить на $\varphi^{(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. При достаточно малых ε носитель функции $\varphi - \varphi_\varepsilon$ лежит внутри некоторого отрезка прямой. Поэтому на основании (2.5) при $\varepsilon \to 0$ функции $\varphi - \varphi_\varepsilon \to 0$ по норме пространства $C^\mu(I)$, что завершает доказательство (c) и леммы.

Исходя из отрицательного нецелого весового порядка λ, введём пространство $\widetilde{C}^\mu_\lambda(\overline{D}_\pm, \infty)$ как конечномерное расширение $C^\mu_\lambda(\overline{D}_\pm, \infty)$ многочленами переменной $u = (\zeta \pm i)^{-1}$. Очевидно, что при $-1 < \lambda < 0$ оно совпадает с $C^\mu_\lambda(\overline{D}_\pm, \infty)$, а при $-2 < \lambda < -1$ его элементы однозначно представляются в виде

$$\phi(\zeta) = \alpha(\zeta \pm i)^{-1} + \phi_0(\zeta), \quad \phi_0 \in C^{n,\mu}_\lambda(\overline{D}_\pm, \infty),$$

с некоторым $\alpha \in \mathbb{C}$. Аналогично при $-3 < \lambda < -2$ элементы этого пространства однозначно представляются в виде

$$\phi(\zeta) = \alpha(\zeta \pm i)^{-1} + \beta(\zeta \pm i)^{-2} + \phi_0(\zeta), \quad \phi_0 \in C^\mu_\lambda(\overline{D}_\pm, \infty),$$

с некоторыми $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и т.д.

В общем случае пространство $\widetilde{C}^\mu_\lambda(\overline{D}_\pm, \infty)$ при $-s-1 < \lambda < -s$ является расширением $C^\mu_\lambda(\overline{D}_\pm, \infty)$ на s измерений.

Аналогичное расширение $\widetilde{C}^\mu_\lambda(\mathbb{R}, \infty)$ можем ввести по отношению к многочленам переменной $v = t/(t^2+1)$, $t \in \mathbb{R}$, или, что равносильно, по отношению к многочленам переменной $u = (t \pm i)^{-1}$.

Наконец, соответствующие пространства $\widetilde{C}^{n,\mu}_\lambda$ дифференцируемых функций определяются индуктивно аналогичными (2.8) условиями

$$\varphi \in \widetilde{C}^{n-1,\mu}_\lambda, \quad \varphi' \in \widetilde{C}^{n-1,\mu}_{\lambda-1}.$$

Из определений видно, что операция $\phi \to \phi^\pm$ действует $\widetilde{C}^{n,\mu}_\lambda(\mathbb{D}_\pm, \infty) \to \widetilde{C}^{n,\mu}_\lambda(\mathbb{R}, \infty)$.

Обратимся к интегралу типа Коши (2.1) и связанному с ним сингулярному интегралу (2.2).

Теорема 2.1. *Для любого нецелого отрицательного* λ *оператор* I *ограничен и обратим* $\widetilde{C}^{n,\mu}_\lambda(\mathbb{R}, \infty) \to \widetilde{C}^{n,\mu}_\lambda(\overline{D}_\pm, \infty)$, *причём для кусочно-аналитической функции* ϕ, *принадлежащей* $\widetilde{C}^{n,\mu}_\lambda(\overline{D}_\pm, \infty)$ *в полуплоскостях* $D_\pm$, *равенство* $\phi^+ - \phi^- = \varphi$ *равносильно* $\phi = I\varphi$.

Сингулярный оператор S *ограничен в* $\widetilde{C}^{n,\mu}_\lambda(\mathbb{R}, \infty)$ *и совпадает со своим обратным, т.е.* $S^2 = 1$, *где* 1 *означает единичный оператор.*

Доказательство. Убедимся сначала, что оператор I ограничен:

$$C^{n,\mu}_\lambda(\mathbb{R}, \infty) \to \widetilde{C}^{n,\mu}_\lambda(\overline{D}_\pm, \infty).$$

Для определённости исследуем случай верхней полуплоскости и рассмотрим сначала случай $-1 < \lambda < 0$, когда волну в обозначениях пространств можно опустить. Для $n = 0$ это утверждение установлено в работе [8], при этом, как легко видеть, для $\phi \in C^\mu_\lambda(\overline{D}_+, \infty)$ справедлива формула Коши

$$\phi(\zeta) = (I\phi^+)(\zeta), \quad \zeta \in D_+. \tag{2.11}$$

Пусть $\varphi \in C^{n,\mu}_\lambda$, $n \geqslant 1$, тогда интегрированием по частям получим равенство

$$(I\varphi)'(\zeta) = (I\varphi')(\zeta), \quad \zeta \in D_+.$$

Поскольку

$$\frac{1}{t-\zeta}+\frac{1}{\zeta+i}=\frac{t+i}{\zeta+i}\,\frac{1}{t-\zeta},\quad \zeta\in D_+, \tag{2.12}$$

и интеграл от φ' по $\mathbb{R}$ равен нулю, имеем

$$(\zeta+i)(I\varphi)'(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{(t+i)\varphi'(t)\,dt}{t-\zeta}.$$

На основании формулы Сохоцкого–Племеля с учётом соотношения $[(I\varphi)^+]'=[(I\varphi)']^+$, вытекающего из (2.13), получим соответствующее равенство и для сингулярного интеграла:

$$(t_0+i)(S\varphi)'(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{(t+i)\varphi'(t)\,dt}{t-t_0}.$$

Таким образом, по отношению к операции $(\mathcal{D}\phi)(\zeta)=(\zeta+i)\phi'(\zeta)$ и аналогичной операции на прямой имеем равенства $\mathcal{D}I=I\mathcal{D}$, $\mathcal{D}S=S\mathcal{D}$. Так как соотношения (2.8) можем записать в форме $\phi,\mathcal{D}\phi\in C^{n-1,\mu}_{\lambda}(\overline{D}_+,\infty)$ и аналогично для пространств на прямой, отсюда по индукции приходим к справедливости теоремы и для пространства $C^{n,\mu}_{\lambda}$, $-1<\lambda<0$.

При $-2<\lambda<-1$ равенство (2.12) показывает, что

$$(\zeta+i)(I\varphi)(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,dt+(I\varphi_0)(\zeta)$$

с функцией $\varphi_0(t)=(t+i)\varphi(t)\in C^{n,\mu}_{\lambda+1}(\mathbb{R},\infty)$. Остаётся заметить, что по доказанному выше оператор I ограничен: $C^{n,\mu}_{\lambda+1}(\mathbb{R},\infty)\to C^{n,\mu}_{\lambda+1}(\overline{D}_+,\infty)$.

Пусть далее $-3<\lambda<-2$. Тогда согласно (2.12) можем записать

$$\frac{t+i}{\zeta+i}\,\frac{1}{t-\zeta}+\frac{t+i}{(\zeta+i)^2}=\left(\frac{t+i}{\zeta+i}\right)^2\frac{1}{t-\zeta},$$

так что

$$\frac{1}{t-\zeta}+\frac{1}{\zeta+i}+\frac{t+i}{(\zeta+i)^2}=\left(\frac{t+i}{\zeta+i}\right)^2\frac{1}{t-\zeta}.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям отсюда приходим к ограниченности оператора I для рассматриваемого случая весовых порядков λ.

Продолжая этот процесс, приходим к справедливости рассматриваемого утверждения для всех нецелых отрицательных λ. С другой стороны, формулу Коши (2.11) можно применить к многочленам переменной $u=(\zeta+i)^{-1}$, что в соответствии с определением приводит к ограниченности оператора $I:\widetilde{C}^{n,\mu}_{\lambda}(\mathbb{R},\infty)\to\widetilde{C}^{n,\mu}_{\lambda}(\overline{D}_+,\infty)$.

Пусть далее $\phi\in\widetilde{C}^{n,\mu}_{\lambda}(\widehat{D},\infty)$. Применяя к функции $\phi_0=\phi-I(\phi^+-\phi^-)$ формулы Сохоцкого–Племеля (2.3), получаем равенство $\phi_0^+=\phi_0^-$, поэтому функция ϕ_0 аналитична на всей плоскости и исчезает на бесконечности, что возможно только для $\phi_0=0$.

Тем самым первая часть теоремы установлена. Утверждение об ограниченности оператора S в пространстве $\widetilde{C}^{n,\mu}_{\lambda}(\mathbb{R},\infty)$ вытекает из первой части теоремы и формул (2.3). Равенство $S^2=1$ доказывается обычным образом (см. [7, с. 115]), записывая для $\phi=I\varphi$ формулу Коши (2.11) и снова пользуясь (2.3).

Обратимся к описанию коэффициентов отражения $r(k)$, обеспечивающих справедливость основной теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть функция $r(t)$ со свойствами (1.10) принадлежит классу $C^{2,\nu}_{\delta-\nu}(\mathbb{R},\infty)$, $0<\nu<1$, $-3<\delta<-2$, и подчинена одному из следующих двух предположений:*

(i) $|r(0)| < 1$;

(ii) $r(0) = -1$, $(|r|^2)''(0) \neq 0$, *причём функция* $r_0(t) = t^{-2}[1 - |r(t)|^2]$ *принадлежит классу* $C^{2,\nu}$ *в окрестности* $t = 0$.

Тогда функции a, *определяемая формулами (1.6), (1.12), и* $b = ra$ *удовлетворяют всем условиям (1.4), (1.5), причём*

$$a^{-1} - 1 \in \widetilde{C}^{\nu}_{\delta}(\overline{D}_{+}, \infty), \tag{2.13}$$

а функции F_1, F_2, *определяемые формулами (1.7), удовлетворяют условиям (1.8) основной теоремы.*

Доказательство. Для каждого из двух предположений (i), (ii) рассуждения проведём отдельно.

(i) В этом случае функцию $\ln(1 - |r|^2)$ можно представить в виде $|r|^2 h(|r|^2)$, где $h(s) = s^{-1}\ln(1 - s)$, $|s| < 1$. Поскольку $|r(t)|^2 = r(t)\overline{r(t)} \in C^{2,\nu}_{2\delta-2\nu} \subseteq C^{2,\nu}_{0}$, то на основании леммы 2.1 (a) заключаем, что $h(|r|^2) \in C^{2,\nu}_{0}(\mathbb{R}, \infty)$ и, следовательно,

$$\ln(1 - |r|^2) \in C^{2,\nu}_{2\delta-2\nu}(\mathbb{R}, \infty) \subseteq C^{2,\nu}_{\delta}(\mathbb{R}, \infty). \tag{2.14}$$

Поэтому в силу (1.12) и теоремы 2.1 функция $\ln a_1 \in \widetilde{C}^{2,\nu}_{\delta}(\overline{D}_{+}, \infty)$. С учётом леммы 2.1 (a), как и выше, отсюда выводим, что

$$e^{\pm \ln a_1} - 1 \in \widetilde{C}^{2,\nu}_{\delta}(\overline{D}_{+}, \infty)$$

и, следовательно,

$$a - 1 \in \widetilde{C}^{2,\nu}_{\delta}(\mathbb{R}, \infty), \quad a^{-1} - 1 \in \widetilde{C}^{2,\nu}_{\delta}(\overline{D}_{+}, \infty).$$

Обратимся к проверке условия (1.8) основной теоремы. Для первых слагаемых в правой части (1.7) это условие, очевидно, выполнено. Поэтому его достаточно проверить для преобразования Фурье функций

$$r(t) = b(t)/a(t), \quad \widetilde{r}(t) = b(-t)/a(t),$$

фигурирующих в (1.7).

Обозначим через $M(\mathbb{R})$ образ пространства $L^1(\mathbb{R})$ при преобразовании Фурье. Тогда с учётом хорошо известных свойств достаточно убедиться в том, что все функции $r(t)$, $r'(t)$, $tr(t)$ и $\widetilde{r}(t)$, $\widetilde{r}'(t)$, $t\widetilde{r}(t)$ принадлежат $M(\mathbb{R})$. Воспользуемся тем, что класс дифференцируемых функций, которые вместе со своей производной принадлежат $L^2(\mathbb{R})$, содержится в $M(\mathbb{R})$. Поэтому дело сводится к доказательству того, что

$$\varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t), t\varphi(t), t\varphi'(t) \in M(\mathbb{R}) \tag{2.15}$$

для каждой из функций $\varphi = r, \widetilde{r}$.

Для $\varphi = r \in C^{2,\nu}_{\delta-\nu}(\mathbb{R}, \infty)$ с учётом неравенства $\delta < -3/2$ эти условия очевидным образом выполнены. Что касается функции $\varphi = \widetilde{r}$, то в силу (1.4а) и (1.6), (1.12) можем записать $\widetilde{r}(t) = c_0(t)\overline{r(t)}$ с коэффициентом

$$c_0(t) = \frac{\overline{a(t)}}{a(t)} = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{t + i\varkappa_j}{t - i\varkappa_j}\right)^2 e^{-2i \arg a_1(t)}.$$

Из (1.12) и формулы Сохоцкого–Племеля следует, что $2\arg a_1 = iS[\ln(1 - |r|^2)]$. Поэтому на основании (2.14) и теоремы 2.1

$$\arg a_1(t) \in \widetilde{C}^{2,\nu}_{\delta}(\mathbb{R}, \infty) \subseteq C^{2,\nu}_{0}(\mathbb{R}, \infty).$$

С учётом леммы 2.1 (a) отсюда следует, что $c_0 \in C^{2,\nu}_{0}(\mathbb{R}, \infty)$ и, значит, $\widetilde{r} = c_0\overline{r} \in C^{2,\nu}_{\delta}(\mathbb{R}, \infty)$. Поэтому соотношения (2.15) имеют место и для $\varphi = \widetilde{r}$.

(ii) В этом случае для достаточно малого $\varepsilon > 0$ функция

$$g(t) = \ln[1 - |r(t)|^2] - 2\ln|t| \in C^{2,\nu}[-2\varepsilon, 2\varepsilon]. \tag{2.16}$$

Рассмотрим внутри полукруга $B_\varepsilon = \{|z| \leqslant \varepsilon,\ \operatorname{Re}\zeta \geqslant 0\}$ аналитическую функцию

$$\psi(\zeta) = \ln\zeta - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}\frac{\ln|t|\,dt}{t-\zeta}.$$

В силу формулы Сохоцкого–Племеля для её граничного значения имеем выражение

$$\psi^+(t_0) = i\arg t_0 - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}\frac{\ln|t|\,dt}{t-t_0}.$$

Таким образом, $\operatorname{Re}\psi^+ = 0$ и, следовательно, функция ψ аналитически продолжается внутрь круга $\{|\zeta| < \varepsilon\}$. Совместно с (1.12), (2.16) отсюда следует, что

$$-2\ln a_1(\zeta) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t|\geqslant 2\varepsilon}\frac{\ln[1-|r(t)|^2]\,dt}{t-\zeta} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}\frac{g(t)\,dt}{t-\zeta} + 2\ln z - 2\psi(\zeta),$$

так что с учётом теоремы 2.1

$$\ln a_1(\zeta) + \ln\zeta \in C^{2,\nu}(B_\varepsilon). \tag{2.17}$$

В частности, отсюда следует справедливость (1.5) с $\widetilde{a}(0) \neq 0$.

Запишем плотность $\ln(1-|r|^2)$ в виде суммы $\varphi_0 + \varphi_1$, где $\varphi_0(t) = 0$ при $|t| \geqslant \varepsilon/2$ и $\varphi_1 \in C^\nu_\delta(\mathbb{R}, \infty)$. Тогда на основании теоремы 2.1 в дополнение к (2.17) получим, что

$$\ln a_1(\zeta) \in \widetilde{C}^\nu_\delta(B'_\varepsilon, \infty)$$

во внешности полукруга $B'_\varepsilon = \{|\zeta| \geqslant \varepsilon,\ \operatorname{Im}\zeta \geqslant 0\}$. В результате приходим к справедливости всех утверждений первой части теоремы, включая соотношение (2.13).

Что касается условий (1.8), то они проверяются совершенно аналогично случаю (i).

3. Теоретико-функциональный подход. При выполнении условий основной теоремы обратная задача Штурма–Лиувилля однозначно разрешима и её решение может быть получено из интегрального уравнения Гельфанда–Левитана. Однако хорошо известен и теоретико-функциональный подход [9] к описанию этого решения, основанный на задаче Маркушевича для функций Йоста.

Пусть функция $r(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2 с построенными по ней коэффициентами a, b. Тогда в обозначениях (1.2) основное соотношение (1.3) между функциями Йоста перейдёт в равенство

$$a^{-1}(t)g_1(x,t) = c(t)g_2(x,t) + \overline{g_2(x,t)} + h_0(x,t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

с коэффициентом $c(x,t) = e^{-2ixt}r(t)$ и правой частью $h_0(x,t) = 1 - a^{-1}(t) + e^{-2ixt}r(t)$. Эти соотношения можно рассматривать как краевое условие для пары аналитических в области D_+ функций $g_j(\zeta) = g_j(x,\zeta)$, $j = 1,2$.

Заметим, что в силу (2.10) при фиксированном x осциллирующий множитель $e(t) = e^{-2ixt}$ принадлежит $C^\nu_\nu(\mathbb{R}, \infty)$ и, следовательно, с учётом (2.13) функции

$$c(x,t) = e^{-2ixt}r(t) \in C^\nu_\delta(\mathbb{R}, \infty), \quad h_0(x,t) \in \widetilde{C}^\nu_\delta(\mathbb{R}, \infty). \tag{3.2}$$

Опуская временно в обозначениях зависимость от x и полагая, что

$$\phi_1(\zeta) = a^{-1}(z)g_1(\zeta), \quad \phi_2(\zeta) = g_2(\zeta), \tag{3.3}$$

соотношения (3.1) для граничных значений ϕ_j^+ перейдут в равенство

$$\phi_1^+ = c\phi_2^+ + \overline{\phi_2^+} + h_0. \tag{3.4}$$

Полученную краевую задачу можно записать в форме задачи Маркушевича

$$\psi^+ - \psi^- = c\overline{\psi^-} + h_0 \tag{3.5}$$

по отношению к кусочно-аналитической функции

$$\psi(\zeta) = \begin{cases} \phi_1(\zeta), & \zeta \in D_+, \\ \overline{\phi_2(\bar\zeta)}, & \zeta \in D_-. \end{cases}$$

Удобно этот термин использовать и для исходной задачи (3.4). В соответствии с (3.2) её решение $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ будем искать в классе

$$\widetilde{C}^\mu_\lambda(\overline{D}_+, \infty), \quad 0 < \mu < \nu, \quad \delta < \lambda < -2. \tag{3.6}$$

Поскольку $\widetilde{C}^\nu_\delta \subseteq C^\nu_{-\nu}$, в соответствии с (2.9) коэффициент c и правая часть h задачи принадлежат и классу $\mathring{H}(\mathbb{R})$. Как установлено в статье [10], задача (3.4) однозначно разрешима в этом классе, однако его использование не даёт возможности восстановить потенциал q уравнения (1.1).

Заметим, что в случае, когда коэффициент c по модулю не превосходит некоторого числа, строго меньшего единицы, однозначная разрешимость задачи (3.4) в классе $\mathring{H}(\mathbb{R})$ была установлена Б.В. Боярским [11]. Поэтому основной вклад работы [10] в теорию этой задачи состоял в том, что в случае нарушения неравенства $|c(t)| < 1$ в единственной точке $t = 0$ при дополнительном условии $(|c|)''(0) \neq 0$ задача Маркушевича может быть эквивалентно редуцирована к аналогичной задаче с некоторым новым коэффициентом $\widetilde{c}(t)$, который уже по модулю меньше единицы для всех t. Эту редукцию можно осуществить и в рамках пространства $\widetilde{C}^\mu_\lambda(\overline{D}_+, \infty)$. В основе лежит следующая

Лемма 3.1. *Пусть функция $c(t) \in C(\mathbb{R})$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности $t = 0$, стремится к нулю на бесконечности и удовлетворяет условиям*

$$|c(0)| = 1, \quad |c(t)| < 1, \quad t \neq 0; \quad (|c|)''(0) \neq 0. \tag{3.7}$$

Тогда для любого натурального числа m существует такое $\alpha > 0$, что функция $\widetilde{c}(t) = c(t) - \alpha c(0)(1 - it)^{-m}$ по модулю меньше единицы для всех t.

Доказательство опирается на рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 2 в работе [10]. Не ограничивая общности, можно считать $c(0) = 1$. Утверждается, что для некоторых положительных ε_1 и ε_2 выполнено неравенство

$$|c(t) - \alpha c(0)(1 - it)^{-m}| < 1 \ \text{ при } \ 0 < \alpha \leqslant \varepsilon_1, \quad 0 < |t| \leqslant \varepsilon_2. \tag{3.8}$$

В самом деле, опять же не ограничивая общности, можно считать $c(0) = 1$. Поскольку функция $|c|^2 = c\overline{c}$ в точке $t = 0$ достигает максимума, равного единице, с учётом (3.7) имеем соотношения

$$(c\overline{c})'(0) = 2\mathrm{Re}\, c'(0) = 0, \quad (c\overline{c})''(0) = -2a < 0. \tag{3.9}$$

Запишем теперь

$$|c(t) - \alpha(1 - it)^{-m}|^2 = |c(t)|^2 - 2\alpha\gamma(t) + \alpha^2(1 + t^2)^{-m},$$

где $\gamma(t) = \operatorname{Re}[c(t)(1+it)^{-m}]$. С учётом (3.9) имеем соотношения $|c(t)|^2 = 1 - at^2 + o(t^2)$ и

$$\gamma(t) = 1 + b_1 t^2 + o(t^2), \quad (1+t^2)^{-m} = 1 + b_2 t^2 + o(t^2)$$

с некоторыми постоянными b_1, b_2. Поэтому

$$|c(t) - \alpha(1-it)^{-m}|^2 = (1-\alpha)^2 - (a_1 - 2\alpha a_2 - \alpha^2 a_3)t^2 + t^2\gamma_0(t),$$

где $\gamma_0(t) \to 0$ при $t \to 0$. Выбирая ε_1 из условия $|2\alpha b_1 + \alpha^2 b_2| \leqslant a/2$ при $\alpha \leqslant \varepsilon_1$, приходим к справедливости (3.8) для достаточно малого ε_2.

Зафиксируем теперь ε_2 и выберем ε_1 столь малым, что имеет место неравенство

$$|\rho(t) - \alpha\rho(0)(1-it)^{-m}| < 1 \ \text{ при } \ 0 < \alpha \leqslant \varepsilon_1, \quad |t| \geqslant \varepsilon_2.$$

Тогда утверждение леммы будет выполнено при $0 < \alpha \leqslant \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Теорема 3.1. *Пусть коэффициент* $c(t)$ *принадлежит классу* $C^{\nu}_{\delta}(\mathbb{R}, \infty)$ *с некоторым* $\delta < 0$ *и удовлетворяет условию (3.7). Тогда задача (3.4) однозначно разрешима в пространстве* $\widetilde{C}^{\mu}_{\lambda}(\overline{D}_+, \infty)$, *где* $0 < \mu < \nu$, $\delta < \lambda < 0$.

Доказательство. Покажем сначала, что оператор задачи (3.4), действующий по формуле $\phi = (\phi_1, \phi_2) \to \phi_1^+ - c\phi_2^- - \overline{\phi}_2^+$, является фредгольмовым $\widetilde{C}^{\mu}_{\lambda}(\overline{D}_+, \infty) \to \widetilde{C}^{\mu}_{\lambda}(\mathbb{R}, \infty)$, и его индекс равен нулю. С этой целью воспользуемся стандартной редукцией задачи (3.4) к матричной задаче линейного сопряжения, продолжая функции $\phi_j(\zeta)$ в нижнюю полуплоскость D_- по формуле $\phi_j(z) = \overline{\phi_j(\bar z)}$, $z \in D_-$, и добавляя к (3.4) комплексно-сопряжённое равенство. Тогда для пары $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ кусочно-аналитических функций получим краевую задачу линейного сопряжения

$$\phi^+ = C\phi^- + h, \tag{3.10}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} c & 1 - |c|^2 \\ 1 & -\overline{c} \end{pmatrix}, \quad h_1 = h_0 - c\overline{h}_0, \quad h_2 = -\overline{h}_0.$$

Заметим, что матрица C и правая часть h этой задачи удовлетворяют условию

$$\overline{C} = C^{-1}, \quad h + C\overline{h} = 0, \tag{3.11}$$

поэтому вместе с ϕ решением этой задачи служит и вектор-функция $\phi^*(\zeta) = \overline{\phi(\bar\zeta)}$. Таким образом, в предположении, что $\phi = \phi_*$ по отношению к $\mathbb{R}$-линейной операции $\phi_*(\zeta) = \overline{\phi(\bar\zeta)}$, задача (3.10) эквивалентна (3.4).

Введём в пространстве $\widetilde{C}^{\mu}_{\lambda}(\widehat{D}, \infty)$ аналитических в области $D = D_+ \bigcup D_-$ вектор-функций $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ подпространство $(\widetilde{C}^{\mu}_{\lambda})_{\mathbb{R}}$, линейное над полем $\mathbb{R}$, выделяемое условием $\phi = \phi_*$. Тот же символ $(\widetilde{C}^{\mu}_{\lambda})_{\mathbb{R}}$ сохраним и для класса вектор-функций $h = (h_1, h_2) \in \widetilde{C}^{\mu}_{\lambda}(\mathbb{R}, \infty)$, выделяемого условием $h + C\overline{h} = 0$ (различие в использовании этих обозначений будет видно из контекста). В обоих случаях имеем разложение каждого из этих двух $\mathbb{C}$-линейных пространств в прямую сумму подпространств

$$\widetilde{C}^{\mu}_{\lambda} = (\widetilde{C}^{\mu}_{\lambda})_{\mathbb{R}} \bigoplus i(\widetilde{C}^{\mu}_{\lambda})_{\mathbb{R}}. \tag{3.12}$$

Рассмотрим оператор $L\phi = \phi^+ - C\phi^-$ задачи линейного сопряжения (3.10), линейный над полем $\mathbb{C}$. В силу свойства (3.11) коэффициента C этот оператор связан с операцией $\phi \to \phi_*(\zeta) = \overline{\phi(\bar\zeta)}$ соотношением $(L\phi_*) = -\overline{L\phi}$. Таким образом, оператор L инвариантен в соответствующих подпространствах $(\widetilde{C}^{\mu}_{\lambda})_{\mathbb{R}}$ и его сужение обозначим как $L_{\mathbb{R}}$. В силу (3.12) операторы L и $L_{\mathbb{R}}$ обладают свойством фредгольмовости одновременно и их индексы (над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ соответственно) совпадают. Как было отмечено, в классе $(\widetilde{C}^{\mu}_{\lambda})_{\mathbb{R}}$ задача (3.10) эквивалентна задаче (3.4), поэтому утверждение о фредгольмовости достаточно установить по отношению к первой из них.

В силу теоремы 2.1 вектор-функция $\phi \in \widetilde{C}^{\mu}_{\lambda}$ единственным образом представима в виде $\phi = I\varphi$ с $\varphi = \phi^+ - \phi^-$. Поэтому задача (3.10) эквивалентна сингулярному интегральному уравнению $N\varphi = g$ в пространстве $\widetilde{C}^{\mu}_{\lambda}(\mathbb{R}, \infty)$ с оператором

$$2N = (1+S) + C(1-S), \tag{3.13}$$

где C рассматривается как оператор умножения $\varphi \to C\varphi$. Таким образом, дело сводится к аналогичному утверждению для оператора N, который согласно теореме 2.1 ограничен в этом пространстве.

Положим для краткости $X = \widetilde{C}^{\mu}_{\lambda}(\mathbb{R}, \infty)$ и покажем, что

$$CS \sim SC, \tag{3.14}$$

где эквивалентность означает равенство с точностью до оператора, компактного в пространстве X. Из выражения (3.10) видно, что матрицу C можно представить в виде суммы

$$C = E + C^0, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

с соответствующей матрицей $C^0 \in C^{\nu}_{\delta}(\mathbb{R}, \infty)$. На основании леммы 2.1 (c), применённой к $\rho_{-\lambda}G^0 \in C^{\nu}_{\alpha}(\mathbb{R}, \infty)$ с весовым порядком $\alpha = \delta - \lambda < 0$, существует последовательность бесконечно дифференцируемых функций C^0_m с компактным носителем, сходящаяся при $m \to \infty$ к C^0 по норме пространства $C^{\mu}_{\lambda}(\mathbb{R})$. Остаётся заметить, что для $C_m = E + C^0_m$ аналогичное соотношение (3.14) очевидно и последовательность $C_m \to C$ по операторной норме пространства X.

Очевидно также, что соотношение (3.14) справедливо и для матрицы G^{-1}, которая определяется тем же выражением по отношению к комплексно-сопряжённой функции $\bar{c}$. С учётом равенства $S^2 = 1$ теоремы 2.1 отсюда приходим к соотношению

$$RN \sim NR \sim 1,$$

где R определяется заменой в (3.13) коэффициента G на G^{-1}. Следовательно, операторы N и R фредгольмовы и их индексы противоположны.

Пусть для $0 \leqslant r \leqslant 1$ матрица $C_r(t)$ определяется как в (3.10) заменой $c(t)$ на $rc(t)$. Тогда оператор $N(r)$, полученный заменой G на G_r в (3.13), также фредгольмов и непрерывно зависит от r по операторной норме. Поэтому на основании известных свойств фредгольмовых операторов [12, гл. 7] его индекс не зависит от r. Но при $r = 0$ оператор $2N(0) = (1+S) + E(1-S)$ обратим и, следовательно, индекс оператора $N(1) = N$ равен нулю.

Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что однородная задача (3.4) имеет в пространстве C^{μ}_{λ} только нулевое решение. В силу леммы 3.1 эту задачу всегда можно свести к случаю, когда

$$|c|_0 = \max_{\mathbb{R}} |c(t)| < 1. \tag{3.15}$$

В самом деле, пусть $|c(0)| = 1$ и натуральное число $m > -\lambda$. Тогда замена

$$\widetilde{\phi}_1(\zeta) = \phi_1(\zeta) + \alpha c(0)(1 - i\zeta)^{-m}, \quad \widetilde{\phi}_2(\zeta) = \phi_2(\zeta)$$

не выводит из класса $\widetilde{C}^{\mu}_{\lambda}(\overline{D}_+, \infty)$ и сводит задачу (3.4) к аналогичной задаче с коэффициентом

$$\widetilde{c}(t) = c(t) - \alpha c(0)(1 - it)^{-m} \in C^{\mu}_{\lambda}(\mathbb{R}, \infty),$$

который на основании леммы 3.1 уже по модулю меньше единицы для всех t.

Как было отмечено выше, задача (3.4) однозначно разрешима в классе $\mathring{H}(G)$, который в силу (2.9) содержит класс $\widetilde{C}_\delta^\nu(\mathbb{R},\infty)$. Поэтому на основании фредгольмовости задачи в пространстве $\widetilde{C}_\lambda^\mu(\overline{D}_+,\infty)$ и равенства нулю индекса отсюда будет следовать и её однозначная разрешимость в этом пространстве. Однако нетрудно дать и прямое доказательство её однозначной разрешимости.

С этой целью рассмотрим вариант (3.5), (3.6) данной задачи, который аналогично предыдущему рассуждению редуцируется к эквивалентному сингулярному уравнению $N_0\varphi = h$ относительно плотности $\varphi = \psi^+ - \psi^-$ с оператором

$$N_0\varphi = \varphi - c\overline{S_+\varphi} = \varphi + cS_-\overline{\varphi},$$

где для краткости положили $2S_\pm = 1 \pm S$. Как было установлено выше, задача (3.5) фредгольмова в пространствах C_λ^μ, $-1 < \lambda < 0$, и её индекс равен нулю, так что этим свойством обладает и оператор N_0.

Введём далее на прямой $\mathbb{R}$ банахово пространство $L_\lambda^2(\mathbb{R},\infty)$ с конечной нормой

$$|\varphi| = \biggl(\int\limits_{\mathbb{R}} \rho_{-2\lambda-1}(t)|\varphi(t)|^2\,dt\biggr)^{1/2}.$$

Как обычно, функции, отличающиеся друг от друга на множестве меры нуль, отождествляются.

Очевидно, что $L_\lambda^2(\mathbb{R},\infty) = L^2(\mathbb{R})$ при $\lambda = -1/2$ и равенство

$$|\varphi| = \biggl(\int\limits_{|t|\leqslant 1} |\varphi(t)|^2\,dt\biggr)^{1/2} + \biggl(\int\limits_{|t|\geqslant 1} |t|^{-2\lambda-1}|\varphi(t)|^2\,dt\biggr)^{1/2}$$

определяет эквивалентную норму. Тогда семейство банаховых пространств $L_\lambda^2(\mathbb{R},\infty)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, монотонно возрастает по λ (относительно вложений). Очевидно также, что L_0^2 является L^2-пространством относительно меры $\rho_{-1}(t)\,dt$, так что имеет место неравенство Гёльдера

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(t)\psi(t)\rho_{-1}(t)\,dt \leqslant |\varphi|_{L_0^2}\psi_{L_0^2}.$$

Поэтому билинейная форма

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\psi(t)\,dt$$

ограничена на произведении $L_\lambda^2 \times L_{-\lambda-1}^2$. Отметим, что при $-1 < \lambda < 0$ весовой порядок $-\lambda-1$ меняется в том же интервале.

Относительно введённой $\mathbb{R}$-линейной формы операторы $J\varphi = \overline{\varphi}$ и S имеют самосопряжённые $J^* = J$ и $S^* = -S$. Поэтому сопряжённым к N_0 в (3.18) служит оператор

$$N_0^*\psi = \psi - S_-(\overline{c\psi}). \tag{3.16}$$

Совершенно аналогично случаю гёльдеровых пространств убеждаемся, что соотношение $cS\sim Sc$ справедливо и по отношению к пространству L_λ^2, поэтому

$$(cJS_+)^2 \sim cS_-JcJS_+ = cS_-\bar{c}S_+ \sim 0.$$

Следовательно, оператор $1 + cJS_+$ служит регуляризатором к $N_0 = 1 - cJS_+$, так что оба они являются фредгольмовыми. Заменяя здесь множитель c на rc, $1 \leqslant r \leqslant 1$, убеждаемся, что их индексы равны нулю.

То же самое верно и по отношению к сопряжённому оператору (3.16). По определению фредгольмовости уравнение $N_0\varphi = h$ разрешимо в пространстве L^2_λ тогда и только тогда, когда $\langle h, \psi\rangle = 0$ для всех решений $\psi \in L^2_{-\lambda-1}$ однородного уравнения $N_0^*\psi = 0$.

Полагая
$$s(\lambda) = \dim[\ker (N_0|L^2_\lambda)], \quad s^*(\lambda) = \dim[\ker (N_0^*|L^2_\lambda)],$$
равенство $\operatorname{ind}(N_0|L^2_\lambda) = 0$ в терминах размерности можем выразить в форме $0 = s(\lambda) - s^*(-\lambda-1)$. Поскольку целочисленная функция $s(\lambda)$ монотонно возрастает, а $s^*(-\lambda-1)$ монотонно убывает по λ, то это возможно только тогда, когда эти функции постоянны. Но при $\lambda = -1/2$ оператор N_0 обратим в пространстве $L^2_{-1/2} = L^2(\mathbb{R})$. Хорошо известно (см. [13, гл. 3]), что оператор S как преобразование Гильберта имеет в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ норму, равную единице, так что и норма оператора S_+ не превосходит единицы. Но тогда на основании (3.15) норма оператора cJS_+ не превосходит $|c|_0$, так что оператор N_0 действительно обратим.

Таким образом, $s(\lambda) = 0$ для всех λ в интервале $(-1, 0)$. Нетрудно видеть, что при $\varepsilon > 0$ пространство C^μ_0 содержится в L^2_ε и, значит, $C^\mu_\lambda \subseteq L^2_{\lambda+\varepsilon}$. Поэтому ядро $\ker(N_0|C^\mu_\lambda)$ также нулевое и, следовательно, оператор M обратим и в пространстве $C^\mu_\lambda(\mathbb{R},\infty)$, что завершает доказательство теоремы.

Напомним, что коэффициент $c(x,t) = e^{-2ixt}r(t)$ и правая часть $h(x,t)$ исходной задачи (3.4) зависят от параметра $x \in \mathbb{R}$. Возникает вопрос о характере зависимости от x её решения $\phi(x,t)$.

Лемма 3.2. *Пусть коэффициент $c(x,t)$ задачи (3.4) и её правая часть $h_0(x,t)$ зависят от $x \in \mathbb{R}$ и непрерывно дифференцируемы по этой переменной, а по переменной t удовлетворяют условиям*
$$c(x,t) \in C^\nu_\delta(\mathbb{R},\infty), \quad \frac{\partial c}{\partial x} \in C^\nu_{\delta+1}(\mathbb{R},\infty), \quad \delta < -1,$$
$$h_0(x,t) \in \widetilde{C}^\mu_\lambda(\mathbb{R},\infty), \quad \frac{\partial h_0}{\partial x} \in \widetilde{C}^\mu_{\lambda+1}(\mathbb{R},\infty), \quad \delta < \lambda < -1, \quad 0 < \mu < \nu. \tag{3.17}$$
Тогда и решение $\phi(x,t)$ задачи (3.4) обладает соответствующими свойствами:
$$\phi(x,t) \in \widetilde{C}^\mu_\lambda(\overline{D}_+,\infty), \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \in \widetilde{C}^\mu_{\lambda+1}(\overline{D}_+,\infty). \tag{3.18}$$

Доказательство. Положим для краткости $X = \widetilde{C}^\mu_\lambda(\overline{D}_+,\infty)$, $Y = \widetilde{C}^\mu_\lambda(\mathbb{R},\infty)$, и пусть X_1, Y_1 имеют аналогичный смысл по отношению к $\lambda+1$. В принятых предположениях задачу (3.4) можем рассматривать как в пространстве X, так и в X_1, причём согласно теореме 3.1 эта задача однозначно разрешима в пространствах X и X_1. Обозначим через $M(x)$ оператор этой задачи, действующий $X\times X \to Y$, он принадлежит банахову пространству $\mathcal{L}(X\times X, Y)$ и обратим. При этом операторное отображение $x \to M(x)$ непрерывно $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(X\times X, Y)$ и непрерывно дифференцируемо $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(X_1\times X_1, Y_1)$. Хорошо известно, что тогда аналогичным свойством обладает и отображение $x \to M^{-1}(x)$ [14, с. 278; 15, гл. 7], т.е. оно непрерывно $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(Y, X\times X)$ и непрерывно дифференцируемо $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(Y_1, X_1\times X_1)$. При этом производная этого отображения вычисляется по формуле
$$[M^{-1}(x)]' = -M^{-1}(x)M'(x)M^{-1}(x).$$
В соответствии с (3.17) отсюда заключаем, что отображение $x \to \phi(x,t) = M^{-1}(x)h_0(x,t)$ непрерывно $\mathbb{R} \to Y\times Y$ и непрерывно дифференцируемо $\mathbb{R} \to Y_1\times Y_1$, причём
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = [M^{-1}(x)]'h_0 + M^{-1}(x)\frac{\partial h_0}{\partial x}.$$
Тем самым соотношения (3.18) установлены.

4. Восстановление потенциала q. Теорема 3.1 совместно с леммой 3.2, применённые к задаче (3.1), позволяют восстановить потенциал q уравнения (1.1) по функциям Йоста.

Теорема 4.1. *В условиях теоремы 2.2 задача (3.1) для пары $g=(g_1,g_2)$ видоизменённых функций Йоста, фигурирующих в (1.2), однозначно разрешима в классе (3.6). Эти функции представимы в виде*

$$g_j(x,t)=\frac{\alpha_j(x)}{t+i}+\frac{\beta_j(x)}{(t+i)^2}+g_j^0(x,t),\quad g_j^0\in C_\lambda^\mu(\mathbb{R},\infty),\tag{4.1}$$

где $\alpha_j(x)$, $\beta_j(x)$ и $g_j^0(x,t)$ непрерывно дифференцируемы по x, причём

$$\frac{\partial g_j^0}{\partial x}\in C_{\lambda+1}^\mu(\mathbb{R},\infty),\quad j=1,2,\tag{4.2}$$

и определяют потенциал q уравнения (1.1) по формуле

$$q(x)=-\alpha_1'(x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\partial g_1^0}{\partial x}(x,t)\,dt=\alpha_2'(x)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\partial g_2^0}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Заметим, что согласно условию на λ в (3.6) интегралы в последней формуле имеют смысл.

Доказательство. Напомним, что с помощью подстановки (3.3) задача (3.1) записана в форме (3.4). По теореме 3.2 эта задача имеет единственное решение ϕ в классе (3.6). Однако в случае предположения (ii) теоремы 2.2 функция $a^{-1}(z)$ имеет в точке $z=0$ нуль первого порядка, так что этим же свойством обладает и $\phi_1(z)=a^{-1}(z)f_1^0(z)$. В рассматриваемом случае $r(0)=-1$ и, следовательно, правая часть $h_0(t)=1-a^{-1}(t)+e^{-2ixt}r(t)$ также имеет нуль первого порядка в точке $t=0$. Утверждается, что аналогичным свойством обладает и вторая компонента ϕ_2 решения задачи (3.4).

Введём функцию $\widetilde{h}(t)=t^{-1}h(t)\in\widetilde{C}_\lambda^\mu(\mathbb{R},\infty)$ и рассмотрим решение $\widetilde{\phi}$ задачи (3.4) с правой частью $\widetilde{h}$ в том же классе (3.6). Тогда обе функции $\phi(z)$ и $z\widetilde{\phi}(z)$ являются решениями задачи (3.4) и, значит, совпадают, что и требовалось доказать. Заметим попутно, что эта тонкость в работе [10] была упущена.

Итак, существует решение $g=(g_1,g_2)$ задачи (3.1), которое принадлежит классу (3.6). В частности, на граничной вещественной оси оно представимо в виде (4.1). На основании леммы 3.2 можем также утверждать, что функции $\alpha_j(x)$, $\beta_j(x)$ и $g_j^0(x,t)$ непрерывно дифференцируемы по x, причём справедливо соотношение (4.2).

Соотношения (1.2) для этих функций в области D_+ представляют собой преобразование Лапласа

$$g_j(x,\zeta)=\int\limits_0^\infty B_j(x,s)e^{i\zeta s}\,ds,\quad B_j(x,s)=\begin{cases}A_1(x,x+s), & j=1,\\ A_2(x,x-s), & j=2,\end{cases}$$

от функций $B_j(x,s)$ на полуоси, которые восстанавливаются обратным преобразованием Фурье:

$$B_j(x,s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}g_j(x,t)e^{-ist}\,dt,\quad s>0.\tag{4.3}$$

Поскольку (см. [16, с. 269])

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{-ist}\,dt}{t+i}=e^{-s},\quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{-ist}\,dt}{(t+i)^2}=-se^{-s},\quad s>0,$$

подстановка (4.2) в (4.3) приводит к выражению

$$2B_j(x,s)=e^{-s}[2\alpha_j(x)-\beta_j(x)s]+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}g_j^0(x,t)e^{-ist}\,dt,\quad s>0.$$

В силу условия на λ в (3.6) это равенство можно дифференцировать под знаком интеграла, так что

$$[B_j(x,0)]' = [A_j(x,x)]' = \alpha_j'(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial g_j^0}{\partial x}(x,t)(x,t)\,dt, \quad s>0.$$

Поскольку по теореме 2.2 можем воспользоваться основной теоремой Фаддеева–Марченко, формула (1.9) приводит к выражению потенциала

$$q(x) = (-1)^j\left[2\alpha_j'(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial g_j^0}{\partial x}(x,t)(x,t)\,dt\right], \quad j=1,2,$$

через видоизменённые функции Йоста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М., 1984.
2. *Фаддеев Л.Д.* Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шрёдингера // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1964. Т. 73. С. 314–336.
3. *Фаддеев Л.Д.* Обратная задача квантовой теории рассеяния. II // Итоги науки и техники. Сер. Совр. проблемы математики. 1974. Т. 3. С. 93–180.
4. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
5. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций. М., 1984.
6. *Левитан Б.М.* Достаточные условия разрешимости обратной задачи теории рассеяния на всей прямой // Мат. сб. 1979. Т. 108 (150). № 3. С. 350–357.
7. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
8. *Солдатов А.П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // Совр. математика. Фунд. направления. 2016. Т. 63. С. 1–179.
9. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной самомодуляции волн в нелинейной среде // Журн. эксп. и теор. физики. 1971. Т. 61. С. 118–134.
10. *Жура Н.А., Солдатов А.П.* О представлении решения обратной задачи Штурма–Лиувилля на всей оси // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 1027–1037.
11. *Боярский Б.В.* Об обобщенной граничной задаче Гильберта // Сообщ. АН ГрССР. 1960. Т. 25. № 4. С. 385–390.
12. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. М., 1970.
13. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., 1974.
14. *Рудин У.* Функциональный анализ. М., 1991.
15. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., 1971.
16. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М., 1969.

Федеральный исследовательский центр РАН
“Информатика и управление”, г. Москва,
Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 11.06.2022 г.
После доработки 11.06.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1500–1514

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.958

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ, ГЛОБАЛЬНЫЙ АТТРАКТОР ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

© 2022 г. А. Н. Куликов, Д. А. Куликов

Рассмотрена периодическая краевая задача для интегро-дифференциального комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау. Его можно интерпретировать как обобщённый вариант уравнения, известного в ряде физических приложений под названием “нелокальное уравнение Гинзбурга–Ландау”. Изучены два естественных варианта такого уравнения, одно из них может быть включено в класс абстрактных параболических уравнений. В этом случае показана глобальная разрешимость начально-краевой задачи и, главное, доказано существование конечномерного глобального аттрактора. Изучен вопрос о структуре такого аттрактора и указана евклидова размерность его компонент. Анализ этих вопросов базируется на возможности получения явных формул для всех решений соответствующих начально-краевых задач. Рассмотрен также слабодиссипативный вариант уравнения, для которого показано существование бесконечномерного глобального аттрактора.

DOI: 10.31857/S0374064122110061, EDN: MAXXXR

Введение. Комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау (КУГЛ) приобрело известность в математической физике благодаря широкому спектру приложений в современной физике [1]. Обычно его приводят в виде

$$u_t = u - (1+ic)u|u|^2 + (a+ib)u_{xx},$$

где $u = u(t,x)$ – комплекснозначная функция, $a \geqslant 0$, $c, b \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$ или $x \in [0,l]$, $l > 0$. Это уравнение следует дополнить соответствующими краевыми условиями. Для приложений представляют интерес частные варианты КУГЛ. Например, если $a = 0$, то уравнение называют слабодиссипативным вариантом КУГЛ или обобщённым кубическим уравнением Шрёдингера (см. [2], а также библиографию в ней). Если $c = b = 0$, $a > 0$, то получаем вариант уравнения, который принято называть вариационным КУГЛ (см., например, [1, 3, 4]).

Рассматривают и иные обобщённые варианты и модификации КУГЛ. Одним из таких следует считать следующее интегро-дифференциальное уравнение в частных производных:

$$u_t = u - (1+ic)uV(u) + (a+ib)u_{xx}, \tag{1}$$

где $u = u(t,x)$, $V(u) = l^{-1}\int_0^l |u(t,x)|^2\,dx$, если $x \in [0,l]$. Уравнение (1) и некоторые его модификации получили название “нелокальное уравнение Гинзбурга–Ландау” (НУГЛ). Они были получены в качестве математических моделей при изучении ферромагнетизма (см., например, статьи [5, 6], а также списки литературы, приведённые в них).

В работах [7, 8] была рассмотрена периодическая краевая задача (КЗ) для уравнения (1) и его слабодиссипативного варианта, когда $a = 0$. Для обоих рассмотренных КЗ был изучен вопрос о существовании решений при всех $t > 0$, доказано существование глобального аттрактора и изучены его свойства.

Определение глобального аттрактора, инерциального многообразия для достаточно широкого класса нелинейных эволюционных уравнений с частными производными было предложено в работах [9, гл. 1; 10; 11, гл. 1]. В большом цикле статей эти вопросы были изучены для многих известных эволюционных уравнений, например, для уравнения Курамото–Сивашинского, Кана–Хиллиарда, других уравнений параболического типа [12, 13] (см. также библиографию из этих работ и монографий [9, 11]).

В данной работе будут рассмотрены аналогичные вопросы для нелокального уравнения, которое можно интерпретировать как модификацию (обобщение) интегро-дифференциального уравнения (1), которое естественно также называть НУГЛ.

Отметим также, что термин "нелокальное" уравнение иногда применяют к уравнениям иного вида, в которых присутствуют нелокальные члены. Например, уравнение с отклоняющимся аргументом, содержащим кроме $u(t,x)$ неизвестную функцию $u(t,x+h)$, $h\in\mathbb{R}$ (см., например, [14–16]). Для этих уравнений изучался иной круг вопросов.

Приведём два примера таких уравнений:

$$u_t + u = au_{xx} + K(1+\gamma\cos v), \quad u_t = au_{xx} + cv_x + b(v_x^2),$$

где $a, K, \gamma > 0$, $c, h, b \in \mathbb{R}$, $u = u(t,x)$, $v = u(t,x+h)$. Содержательный случай предполагает, что коэффициенты b, h и c отличны от нуля.

1. Постановка задачи. Далее будем изучать интегро-дифференциальное уравнение с частными производными, которое следует называть обобщённым комплексным нелокальным уравнением Гинзбурга–Ландау или просто НУГЛ:

$$u_t = \gamma u - (\alpha + ic)uV(u) + (a+ib)u_{xx} - (d+ig)u_{xxxx}, \tag{2}$$

где $u(t,x)$ – комплекснозначная функция, $c, a, b, d, g \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\gamma = \pm 1$ или 0, и нужный вариант γ будет выбираться в процессе анализа уравнения (2). Основной вариант предполагает, что $d > 0$ или $d = 0$, $a > 0$. Если $d = g = 0$, то получим известное уравнение (1) (см. [5, 6]). Если $d^2 + g^2 \neq 0$, то уравнение (2) в некоторых случаях может быть проинтерпретировано как модельное уравнение для некоторых задач теории упругой устойчивости [17, 18].

Как и во многих работах (см., например, [1, 5, 6]), дополним уравнение (2) периодическими краевыми условиями

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x). \tag{3}$$

Краевая задача (2), (3) записана в нормированном виде и, в частности, этим объясняется, что период по пространственной переменной равен 2π, а нормировка $u \to \mu u$, $\mu > 0$, позволяет далее считать, что $\alpha = 1$. В уравнении (2) $V(u) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} |u(t,x)|^2\,dx$.

Особый вариант, который заслуживает отдельного изучения, возникает при $d = a = 0$. Тогда обычно уравнение (2) называют слабодиссипативной версией обобщённого уравнения Гинзбурга–Ландау. Отметим, что краевые условия (3) могут быть заменены на другие. Например, возможен вариант однородных краевых условий вида

$$u(t,0) = u(t,\pi) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\pi) = 0 \tag{4}$$

или

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = u_{xxx}(t,0) = u_{xxx}(t,\pi) = 0. \tag{5}$$

В данной работе сосредоточим внимание на варианте КЗ с периодическими краевыми условиями (3).

Дополним КЗ (2), (3) начальным условием

$$u(0,x) = f(x). \tag{6}$$

В первой части статьи будет показано, что начально-краевая задача (2), (3), (6) при $d > 0$ и соответствующем выборе $f(x)$ имеет "классическое" решение, если $t > 0$, а также что КЗ (2), (3) имеет глобальный аттрактор A. При $d > 0$ он имеет конечную евклидову размерность ($\dim A < \infty$), а при $d = a = 0$ – бесконечную размерность. Подчеркнём также что при $d > 0$ КЗ (2), (3) может быть включена в класс абстрактных параболических уравнений в смысле определения из работ [19; 20, с. 92], а при $a = d = 0$ КЗ может быть проинтерпретирована как "гиперболическая" (см. [21, 22]). Основная часть работы посвящена анализу КЗ (2), (3) при $d > 0$. Слабодиссипативный вариант будет рассмотрен отдельно в п. 4.

2. О глобальной разрешимости начально-краевой задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу (2), (3), (6), решения которой можно представить в виде

$$u(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_n(t)\exp(inx), \tag{7}$$

где коэффициенты Фурье $u_n(t)$ определены равенствами

$$u_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(t,x)\exp(-inx)\,dx.$$

Очевидно, что в силу равенства Парсеваля $V(u)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|u_n(t)|^2$ начально-краевая задача (2), (3), (6) может быть записана в виде бесконечной последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_n'=(a_n+ib_n)u_n-(1+ic)V(u)u_n, \tag{8}$$

где $a_n=\gamma-an^2-dn^4$, $b_n=-bn^2-gn^4$, $n\in\mathbb{Z}$. Система (8) дополняется начальными условиями

$$u_n(0)=f_n,\quad f_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x)\exp(-inx)\,dx. \tag{9}$$

Сразу отметим, что равенства $f_k=0$, где $k\in\mathbb{Z}_*$ ($\mathbb{Z}_*$ – некоторое подмножество целых чисел $\mathbb{Z}$), выделяют линейное подпространство, которое инвариантно для решений системы дифференциальных уравнений (8).

Положим

$$u_n(t)=\rho_n(t)\exp(i\varphi_n(t)),\quad f_n=r_n\exp(i\psi_n), \tag{10}$$

где $\rho_n(t),r_n\geqslant 0$, $\varphi_n(t),\psi_n\in\mathbb{R}$. В результате получим две последовательности задач Коши:

$$\rho_n'=a_n\rho_n-\rho_nV, \tag{11}$$

$$\rho_n(0)=r_n, \tag{12}$$

$$\varphi_n'=b_n-cV, \tag{13}$$

$$\varphi_n(0)=\psi_n, \tag{14}$$

где теперь $V=V(\rho)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\rho_n^2$. Уравнения (11) не зависят от φ_n и поэтому задачу Коши (11), (12) можно изучить отдельно.

Выберем какое-либо $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$, и рассмотрим два уравнения

$$\rho_k'=a_k\rho_k-\rho_kV,\quad \rho_0'=a_0\rho_0-\rho_0V. \tag{15}$$

Если первое из уравнений (15) умножить на ρ_0, а второе – на ρ_k, и почленно вычесть, то в результате получим равенство $\rho_k'\rho_0-\rho_k\rho_0'=\alpha_k\rho_k\rho_0$, где $\alpha_k=a_k-a_0=-ak^2-dk^4$. После преобразований последнего равенства имеем

$$\left(\frac{\rho_k}{\rho_0}\right)'=\alpha_k\frac{\rho_k}{\rho_0},$$

откуда следует, что

$$\rho_k=\frac{r_k}{r_0}\rho_0\exp(\alpha_kt). \tag{16}$$

Эти преобразования позволяют записать уравнение с номером $k=0$ системы (11) в следующем виде:

$$\rho_0' = a_0\rho_0 - \frac{\rho_0^3}{r_0^2}S(t), \tag{17}$$

где, естественно, $\rho_0(0)=r_0$, а

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k^2 \exp(2\alpha_k t), \quad r_k = |f_k|.$$

Если считать, что $f(x)\in \mathbb{L}_2(0,2\pi)$ при $x\in(0,2\pi)$, то последний ряд, разумеется, сходится. Уравнение (17) – это уравнение Бернулли и, следовательно, может быть проинтегрировано. После замены $1/\rho_0^2 = y$ стандартным образом получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение для $y(t)$:

$$y' = -2a_0 y + 2\frac{S(t)}{r_0^2}.$$

Если все $a_k \neq 0$, то у последнего линейного неоднородного дифференциального уравнения отсутствуют резонансные члены, и для $\rho_0(t)$ получаем формулу (если, конечно, учесть, что $\rho_0(0)=r_0$)

$$\rho_0(t) = \frac{r_0\exp(a_0 t)}{\sqrt{1+Q(t)}}, \tag{18}$$

где $a_0=\gamma$, $Q(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k^2(\exp(2a_k t)-1)/a_k$. Нетрудно убедиться в том, что $Q(t)>0$ при $t>0$. Действительно, $Q(0)=0$, а $Q'(t)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k^2\exp(2a_k t)>0$, если $t>0$. Ряд в правой части равенства для $Q'(t)$ при $t\geqslant t_0>0$ сходится равномерно, так как $\lim\limits_{|k|\to\infty} a_k/k^4 = -d<0$.

Если же при некоторых k выполнены равенства $a_k=0$, т.е. $\alpha_k=-a_0$ $(a_0=\gamma)$, то при интегрировании линейного неоднородного уравнения для $y(t)$ возникают резонансные случаи, когда сумма $S(t)$ содержит слагаемые с $\exp(-2a_0 t)$. Тогда следует заменить $Q(t)$ на другую функцию:

a) если существует только одна пара чисел $k=m$, $k=-m$, когда $\gamma - ak^2 - dk^4 = 0$, то $Q(t)$ следует в формуле (18) заменить на функцию

$$Q_1(t) = \sum_{k\neq\pm m} \frac{r_k^2}{a_k}(\exp(2a_k t)-1) + 2t(r_m^2 + r_{-m}^2);$$

b) если биквадратное уравнение имеет четыре корня: $k=\pm m_1$, $k=\pm m_2$, то $Q(t)$ следует заменить на

$$Q_2(t) = \sum_{k\neq\pm m_1,\pm m_2} \frac{r_k^2}{a_k}(\exp(2a_k t)-1) + 2t(r_{m_1}^2 + r_{-m_1}^2 + r_{m_2}^2 + r_{-m_2}^2);$$

c) если $m_1=0$ $(m_2>0)$, то получаем частный случай, и $Q(t)$ следует заменить на

$$Q_3(t) = \sum_{k\neq 0, k\neq\pm m_2} \frac{r_k^2}{a_k}(\exp(2a_k t)-1) + 2t(r_0^2 + r_{m_2}^2 + r_{-m_2}^2).$$

Далее будем считать, что реализовался основной вариант, когда $a_k\neq 0$ (т.е. $\gamma=\pm 1$) при всех целых k и, следовательно, для определения $\rho_0(t)$ можно использовать равенство (18).

Итак, из формулы (16) вытекает, что

$$\rho_k(t) = \frac{r_k\exp(a_k t)}{\sqrt{1+Q(t)}}.$$

Уравнения (13) приобретают вид

$$\varphi_n' = b_n - c\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{r_k^2\exp(2a_kt)}{1+Q(t)},$$

и $\varphi_n(t)$ находится интегрированием правой части последнего равенства, т.е.

$$\varphi_n(t) = \varphi_{n,0}(t) + \psi_n,$$

где $\varphi_{n,0}(t) = b_nt - (c/2)\ln(1+Q(t))$, а $\psi_n = \varphi_n(0)$. Наконец, получаем, что

$$u_k(t) = \frac{r_k\exp(a_kt)}{\sqrt{1+Q(t)}}\exp(i\varphi_k(t)) = f_k\frac{1}{\sqrt{1+Q(t)}}\exp(a_kt + i\varphi_{k,0}(t)).$$

Здесь учтено равенство $f_k = r_k\exp(i\psi_k)$. Используя формулу (7), получаем решение КЗ (2), (3) в явном виде

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\frac{1}{\sqrt{1+Q(t)}}\exp(a_kt + i\varphi_{k,0}(t))\exp(ikx). \tag{19}$$

Пусть $f(x)$ – периодическая функция и при $x\in(0,2\pi)$ принадлежащая классу $\mathbb{L}_2(0,2\pi)$. Тогда ряд в правой части формулы (19) при $t>0$ сходится равномерно и имеет частные производные любого порядка. Доказательство этих утверждений стандартно и повторяет, например, доказательство сходимости соответствующего функционального ряда при интегрировании методом Фурье первой КЗ для уравнения теплопроводности (см., например, [23, гл. 1, § 3]). Основным моментом здесь является то, что справедливо предельное равенство

$$\lim_{|k|\to\infty}\frac{a_k}{k^4} = -d < 0,$$

если вспомнить, что $a_k = \gamma - ak^2 - dk^4$, $d>0$.

Итак, доказана

Теорема 1. *Пусть $f(x)\in\mathbb{L}_2(0,2\pi)$ и имеет период 2π. Тогда начально-краевая задача (2), (3), (6) имеет решение $u(t,x)$, которое может быть определено формулой (19). При этом:*

1) $u(t,x)\in\mathbb{C}^\infty$ при всех $x\in\mathbb{R}$ и всех $t>0$;

2) $\lim\limits_{t\to+0} u(t,x) = f(x)$.

Последний предел следует понимать в смысле нормы в пространстве $\mathbb{L}_2(0,2\pi)$, т.е. выполнено предельное равенство

$$\lim_{t\to+0}\int_0^{2\pi}(u(t,x)-f(x))^2\,dx = 0.$$

Замечание 1. Если $f(x)\in\mathbb{H}_2^k$, $k=1,2,\ldots$ ($f(x)\in\mathbb{W}_2^k[0,2\pi]$ и имеет период 2π), то $\lim\limits_{t\to+0} u(t,x) = f(x)$ можно понимать в смысле нормы пространства Соболева $\mathbb{W}_2^k[0,2\pi]$, т.е.

$$\lim_{t\to+0}\sum_{m=0}^{k}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^m u(t,x)}{\partial x^m} - f^{(m)}(x)\right)^2 dx = 0, \quad f^{(0)}(x) = f(x).$$

Замечание 2. Аналогичный результат справедлив, если $d=0$, но $a>0$. В этом можно убедиться, повторив последовательно построения данного пункта. Случай когда $a=d=0$ будет изучаться отдельно в п. 4.

3. Инвариантные многообразия. Как и в п. 2 сначала изучим систему дифференциальных уравнений (11). Она, конечно, имеет нулевое состояние равновесия ($\rho_k = 0$ при любом $k \in \mathbb{Z}$). Для дальнейших построений у этой системы актуально рассмотреть вопрос о существовании ненулевых состояний равновесия.

Состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (11) следует искать как решения системы алгебраических уравнений $\rho_n(a_n - V) = 0$, где $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, ненулевые решения могут появиться, если $a_k - V = 0$ при некоторых или всех $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть $a_n \leqslant 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\rho_n(a_n - V) < 0$ при всех n, если хотя бы одно $\rho_m > 0$ $(\rho_m \neq 0)$. Но тогда $\rho_n' < 0$, т.е. функция $\rho_n(t)$ убывает до нуля при всех $t > 0$. Итак, справедливо утверждение.

Лемма 1. *Пусть при всех n справедливо неравенство $a_n \leqslant 0$. Тогда:*

1) система дифференциальных уравнений (11) не может иметь ненулевых состояний равновесия;

2) при всех n справедливо предельное равенство $\lim\limits_{t\to\infty} \rho_n(t) = 0$.

Из второй части последнего утверждения вытекает, что все решения системы дифференциальных уравнений (11) при $t \to \infty$ приближаются к нулевому состоянию равновесия.

Итак, система дифференциальных уравнений (11) может иметь ненулевые состояния равновесия, если существует набор индексов m, при которых $a_m > 0$. Очевидно, что $a_{-m} = a_m$ $(m \neq 0)$. Поэтому далее достаточно ограничиться индексами $m \geqslant 0$. Соответствующие наборы $\{m\}$, $\{a_m\}$ обозначим через $\mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{M}_+$. Оба множества имеют конечный набор элементов, так как $\lim\limits_{|n|\to\infty} (\gamma - an^2 - dn^4) = -\infty$, если $d > 0$ (или $d = 0$, $a > 0$).

Если $\gamma = 1$, $d > 0$, то $m \in [0, \xi)$, $\xi = \sqrt{(-a + \sqrt{a^2 + 4d})/2d}$.

Если $\gamma = 1$, $d = 0$, $a > 0$, то $m \in [0, \xi_0)$, где $\xi_0 = \sqrt{1/a}$. В обоих этих вариантах $\mathbb{M}_+ \neq \varnothing$, так как $a_0 = \gamma = 1 \in \mathbb{M}_+$.

Если $\gamma = -1$, $d > 0$, $a < 0$, $d > 0$, $a^2 - 4d > 0$, то $m \in (\xi_1, \xi_2)$, $\xi_{1,2} = \sqrt{(-a \mp \sqrt{a^2 - 4d})/2d}$.

Наконец, если $\gamma = 0$, $a < 0$, $d > 0$, то $m \in (0, \xi_0)$, $\xi_0 = \sqrt{-a/d}$.

В остальных случаях множества $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{M}_+$ будут пустыми.

Пусть реализовался один из вариантов, когда множества $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{M}_+$ не пусты и выбраны соответствующие элементы этих множеств. Возможны следующие варианты для определения координат состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (11).

1. Пусть $m_0 = 0$. Тогда

$$\rho_0(t) = \rho_0 = 1, \quad \rho_n(t) = 0, \quad n \neq 0.$$

2. Пусть $m_0 \neq 0$. Тогда $a_{-m_0} = a_{m_0} > 0$. Если же при всех остальных целых $n \neq \pm m_0$ выполнено условие $a_n \neq a_{m_0}$, то

$$\rho_{m_0}^2 + \rho_{-m_0}^2 = a_{m_0}, \quad \rho_k = 0 \quad \text{при} \quad n \neq \pm m_0.$$

3. Пусть $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$ и оказалось, что $a_{m_1} = a_{m_2}$ $(a_{-m_1} = a_{m_1},\ a_{-m_2} = a_{m_2})$. Тогда координаты состояний равновесия ρ_{m_1}, ρ_{m_2}, ρ_{-m_1}, ρ_{-m_2} находим из уравнения

$$\rho_{m_1}^2 + \rho_{-m_1}^2 + \rho_{m_2}^2 + \rho_{-m_2}^2 = a_{m_1} = a_{m_2},$$

а $\rho_n = 0$ для остальных n.

4. Пусть $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$ и $m_1 = 0$ $(a_{m_1} = a_0)$. Тогда ненулевые координаты находим из уравнения

$$\rho_0^2 + \rho_{m_2}^2 + \rho_{-m_2}^2 = a_0 = 1 \quad (\gamma = 1),$$

а для остальных n справедливы равенства $\rho_n = 0$.

Соответствующие состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (11) обозначим через S_0, S_{m_0}, S_{m_1,m_2}, S_{0,m_2}.

Уместно подчеркнуть, что иных состояний равновесия, отличных от нулевого (см. пп. 1–4), быть не может. Равенство $a_{m_*} = a_{m_{**}}$ для двух различных $m_*, m_{**} \in \mathbb{N}$ может быть реализовано максимум для одной пары натуральных чисел $m_* = m_1$, $m_{**} = m_2$, так как квадратное уравнение $\gamma - a\eta - d\eta^2 = \delta$ не может иметь более двух корней, $\delta \in \mathbb{R}$.

Использование равенств (7) и (10) позволяет перенести полученные для системы (11) результаты на систему обыкновенных дифференциальных уравнений (8) (задачу Коши (8), (9)) и КЗ (2), (3). При этом, конечно, следует найти соответствующие $\varphi_n(t)$ из уравнений системы (13) простым интегрированием.

Теорема 2. *1) Состоянию равновесия S_0 системы дифференциальных уравнений (11) соответствует цикл системы дифференциальных уравнений (8)*

$$C_0: \quad u_0(t) = \exp(i\omega_0 t + i\psi_0), \quad u_n = 0, \quad n \neq 0,$$

где $\omega_0 = -c$, $\psi_0 \in \mathbb{R}$, а также цикл A_0 КЗ (2), (3), $u(t,x) = u_0(t)$.

2) Однопараметрическому семейству состояний равновесия S_{m_0} соответствует трёхмерное инвариантное многообразие C_{m_0} системы (8), сформированное периодическими решениями вида

$$u_{m_0}(t) = \rho_{m_0}\exp(i\omega_{m_0} t + i\psi_{m_0}), \quad u_{-m_0}(t) = \rho_{-m_0}\exp(i\omega_{-m_0} t + i\psi_{-m_0}),$$

где $\rho^2_{m_0} + \rho^2_{-m_0} = a_{m_0}$, $\omega_{-m_0} = \omega_{m_0} = -ca_{m_0} - bm_0^2 - gm_0^4$, $\psi_{m_0}, \psi_{-m_0} \in \mathbb{R}$, $u_n(t) = 0$ при остальных n. КЗ (2), (3) в этом случае имеет трёхмерное инвариантное многообразие A_{m_0}, сформированное решениями следующего вида:

$$u(t,x) = u_{m_0}(t)\exp(im_0x) + u_{-m_0}(t)\exp(-im_0x).$$

3) Пусть система дифференциальных уравнений (11) имеет трёхпараметрическое семейство состояний равновесия S_{m_1,m_2}. Тогда система дифференциальных уравнений (8) и КЗ (2), (3) имеют инвариантные многообразия C_{m_1,m_2} и A_{m_1,m_2} размерности, равной семи, соответственно. Многообразия C_{m_1,m_2} имеют вид

$$u_{m_1}(t) = \rho_{m_1}\exp(i\omega_{m_1} t + i\psi_{m_1}), \quad u_{-m_1}(t) = \rho_{-m_1}\exp(i\omega_{-m_1} t + i\psi_{-m_1}),$$

$$u_{m_2}(t) = \rho_{m_2}\exp(i\omega_{m_2} t + i\psi_{m_2}), \quad u_{-m_2}(t) = \rho_{-m_2}\exp(i\omega_{-m_2} t + i\psi_{-m_2}),$$

$$u_n(t) = 0, \quad n \neq \pm m_1, \pm m_2,$$

а многообразие A_{m_1,m_2} содержит решения КЗ (2), (3) вида

$$u(t,x) = \sum_{k=\pm m_1, \pm m_2} u_k(t)\exp(ikx).$$

При этом

$$\rho^2_{m_1} + \rho^2_{-m_1} + \rho^2_{m_2} + \rho^2_{-m_2} = a_{m_1} \quad (a_{m_2} = a_{m_1} \text{ в данном случае}), \quad \psi_k \in \mathbb{R}, \quad k = \pm m_1, \pm m_2,$$

$$\omega_{\pm m_1} = -ca_{m_1} - bm_1^2 - gm_1^4, \quad \omega_{\pm m_2} = -ca_{m_2} - bm_2^2 - gm_2^4.$$

4) Пусть система дифференциальных уравнений (11) имеет двухпараметрическое семейство состояний равновесия

$$S_{0,m_2}: \quad \rho_0(t) = \rho_0, \quad \rho_{m_2}(t) = \rho_{m_2}, \quad \rho_{-m_2}(t) = \rho_{-m_2}, \quad \rho_n = 0, \quad \text{если} \quad n = 0, \pm m_2,$$

$$\rho_0^2 + \rho^2_{m_2} + \rho^2_{-m_2} = a_0 \quad (a_{m_2} = a_0 = 1).$$

Тогда система дифференциальных уравнений (8) имеет пятимерное инвариантное многообразие

$$C_{0,m_2}: \quad u_0(t) = \rho_0\exp(i\omega_0 t + i\psi_0), \quad u_{m_2}(t) = \rho_{m_2}\exp(i\omega_{m_2} t + i\psi_{m_2}),$$

$$u_{-m_2}(t) = \rho_{-m_2}\exp(i\omega_{-m_2}t + i\psi_{-m_2}), \quad u_n(t) = 0,$$

если $n \neq 0,\ \pm m_2,$ *а КЗ (2), (3) – пятимерное инвариантное многообразие*

$$A_{0,m_2}: \quad u(t,x) = u_0(t) + u_{m_2}(t)\exp(im_2x) + u_{-m_2}(t)\exp(-im_2x).$$

Здесь $\psi_0, \psi_{m_2}, \psi_{-m_2} \in \mathbb{R},\ \omega_0 = -c,\ \omega_{\pm m_2} = -ca_{m_2} - bm_2^2 - gm_2^4.$

Подчеркнём, что из предыдущих построений вытекает следующее. Пусть $k \in \mathbb{Z}_-,$ где $\mathbb{Z}_-$ содержит те индексы у элементов последовательности $\{a_k\}$, для которых $a_k < 0$. Если теперь рассмотреть те компоненты $\rho_k(t)$ системы (11), где $k \in \mathbb{Z}_-,$ то

$$\rho_k(t) = r_k\frac{\exp(a_kt)}{\sqrt{1+Q(t)}} \leqslant r_k\exp(a_kt),$$

т.е. $\rho_k(t) \to 0$ со скоростью экспоненты. При этом нетрудно показать, что для таких a_k справедливо неравенство $a_k \leqslant -\nu < 0$, где ν – некоторая положительная постоянная.

Следовательно, соответствующие $u_k(t)$ в формуле (7) таковы, что для них $\lim\limits_{t\to\infty} u_k(t) = 0$. Более того, линейное подпространство фазового пространства (пространства начальных условий), для которых $f_k = 0$ $(k \in \mathbb{Z}_-)$, инвариантно. Следовательно, это конечномерное линейное подпространство фазового пространства (пространства начальных условий) будет инерциальным для КЗ (2), (3) в смысле определения из работы [10]. Решения на нем задаются формулой

$$u(t,x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus Z_-} u_m(t)\exp(imx),$$

где справа находится сумма из конечного числа слагаемых.

Замечание 3. Пусть $\mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z}$ $(\mathbb{Z}_0 \neq \mathbb{Z})$ – множество тех индексов k, для которых $a_k \leqslant 0$. Из предыдущих фрагментов очевидно, что $\lim\limits_{t\to\infty}\rho_s(t) = 0$, если $s \in \mathbb{Z}_0$, и линейное подпространство, где $f_s = 0$, инвариантно. Все решения, которые не принадлежат этому подпространству, стремятся к нему, но не обязательно со скоростью экспоненты. Поэтому линейное подпространство $f_s = 0$ $(s \in \mathbb{Z}_0)$ не является инерциальным, если строго следовать определениям работы [10].

4. Глобальный аттрактор. Сформулируем сразу основной результат данного пункта, относящийся к вопросу о существовании глобального аттрактора КЗ (2), (3).

Теорема 3. *Пусть*

$$A_{ga} = \{0\}\bigcup B_1\bigcup B_2,$$

где $\{0\}$ *– нулевое состояние равновесия КЗ (2), (3),* $B_1 = \bigcup_j A_{m_j}$ *– объединение тех инвариантных многообразий КЗ (2), (3), существование которых гарантируют пп. 1) и 2) теоремы 2, а* $B_2 = \bigcup_j A_{m_{j_1}m_{j_2}}$, *существование которых гарантируют пп. 3), 4) теоремы 2.*

Тогда A_{ga} *– глобальный аттрактор для решений КЗ (2), (3) в смысле определений из [9, с. 20–27], т.е. все решения КЗ с течением времени приближаются к одной из компонент* A_{ga}.

Замечание 4. Не исключён вариант, когда $A_{ga} = \{0\}$, т.е. состоит только из нулевого состояния равновесия. Так будет, например, если все $a_n \leqslant 0$. При $\gamma = 1$ очевидно, что $a_0 = 1 > 0$ и поэтому существует по-крайней мере одна компонента A_0 и, следовательно, A_{ga} содержит не только нулевое состояние равновесия КЗ (2), (3).

Центральное место в обосновании справедливости утверждения теоремы 3 отводится доказательству следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть* S_* *– объединение всех существующих ненулевых состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (11) и* $S_{ga} = \{0\}\bigcup S_*$. *Тогда* S_{ga} *– глобальный аттрактор для решений системы дифференциальных уравнений (11).*

Напомним, что состояния равновесия системы (11) обозначены как S_0, S_{m_0}, S_{m_1,m_2}, S_{0,m_2}. Действительно, пусть $\mathbb{M}_+ \neq \varnothing$ и $\max\limits_{m\in\mathbb{M}_+} a_m = a_{m_*}$ $(a_{-m_*} = a_{m_*})$. Тогда в случае реализации максимума только на одной паре индексов $(m_*,-m_*)$ все решения, у которых $r^2_{m_*}+r^2_{-m_*}\neq 0$, с течением времени приближаются к S_{m_*}. Действительно, рассмотрим какую-либо функцию $\rho_s(t)$, где $s\neq m_*,-m_*$. Тогда можно показать, что $\lim\limits_{t\to\infty}\rho_s(t)=0$.

Пусть при всех s выполнено условие $a_s\neq 0$. Тогда

$$Q(t)=\sum_{s\neq\pm m_*}\frac{r_s^2}{a_s}(\exp(2a_st)-1)+\frac{r^2_{m_*}+r^2_{-m_*}}{a_{m_*}}(\exp(2a_{m_*}t)-1),$$

если учесть, что $a_{m_*}=a_{-m_*}$. При этом функции $1+Q(t)$ можно записать в виде

$$1+Q(t)=\exp(2a_{m_*}t)\biggl(\frac{r^2_{m_*}+r^2_{-m_*}}{a_{m_*}}+Q_0(t)\biggr),$$

где

$$Q_0(t)=\exp(-2a_{m_*}t)\biggl(1-\frac{r^2_{m_*}+r^2_{-m_*}}{a_{m_*}}+\sum_{s\neq\pm m_*}\frac{r_s^2}{a_s}(\exp(2a_st)-1)\biggr),$$

а значит, $\lim\limits_{t\to\infty}Q_0(t)=0$, так как все $a_s<a_{m_*}$. Но тогда

$$\rho_s(t)=r_s\frac{\exp(a_s-a_{m_*})t}{\sqrt{(r^2_{m_*}+r^2_{-m_*})/a_{m_*}+Q_0(t)}}\to 0$$

при $t\to\infty$ $(a_s-a_{m_*}<0)$.

Если $s=m_*$ или $s=-m_*$, то

$$\lim_{t\to\infty}\rho_{m_*}(t)=r_{m_*}\frac{\sqrt{a_{m_*}}}{\sqrt{r^2_{m_*}+r^2_{-m_*}}},\quad \lim_{t\to\infty}\rho_{-m_*}(t)=r_{-m_*}\frac{\sqrt{a_{-m_*}}}{\sqrt{r^2_{m_*}+r^2_{-m_*}}},$$

но

$$\biggl(r_{m_*}\frac{\sqrt{a_{m_*}}}{\sqrt{r^2_{m_*}+r^2_{-m_*}}}\biggr)^2+\biggl(r_{-m_*}\frac{\sqrt{a_{-m_*}}}{\sqrt{r^2_{m_*}+r^2_{-m_*}}}\biggr)^2=a_{m_*}.$$

Следовательно, все решения приближаются к S_{m_*}.

Если $r^2_{m_*}+r^2_{-m_*}=0$, то рассмотрим $\mathbb{M}_+\backslash\{a_{m_*},a_{-m_*}\}$. Так как множества (подпространства) $r_{m_*}=r_{-m_*}=0$ инвариантны для решений системы дифференциальных уравнений (11), то можно повторить предыдущие построения для системы (11), в которой “исключены” два уравнения с номерами m_*, $-m_*$.

Пусть теперь m_{**}, $-m_{**}$ – номера наибольших элементов множества $\mathbb{M}_+$, в которых исключены a_{m_*} и a_{-m_*}. Тогда при выполнении условия

$$r^2_{m_{**}}+r^2_{-m_{**}}\neq 0$$

все решения системы (11) стремятся к $S_{m_{**}}$ и т.д.

Если же оказалось, что все $r_s=r_{-s}=0$ при всех $s\in\mathbb{Z}_+$, то рассматриваем систему (11) без этих уравнений. У оставшейся подсистемы $a_k\leqslant 0$ и, следовательно, все решения приближаются к нулевому состоянию равновесия.

Вариант, когда $m_*=0$, разбирается аналогично и он проще. Здесь были рассмотрены случаи общего положения. Если, например, $\max\{a_s\}$ реализуется при $m=\pm m_1$, $m=\pm m_2$, то при выполнении условия

$$r^2_{m_1}+r^2_{-m_1}+r^2_{m_2}+r^2_{-m_2}\neq 0$$

все решения системы (11) приближаются к инвариантному многообразию S_{m_1,m_2} (см. его определение в п. 3).

Отметим, что при реализации $\max\{a_*\}$ при $m=0$ и $m=\pm m_2$ $(m_2\neq 0)$ и выполнения условия
$$r_0^2+r_{m_2}^2+r_{-m_2}^2\neq 0$$
все решения КЗ (2), (3) приближаются к инвариантному многообразию S_{0,m_2}.

Перейдём теперь к системе дифференциальных уравнений (8). Напомним, что в одной из возможных форм записи
$$u_k(t)=\rho_k(t)\exp(i\varphi_{k,0}t+i\psi_k),$$
где $\psi_k=\varphi_k(0)$, а $\varphi_{k,0}(t)=b_kt-(c/2)\ln(1+Q(t))$. При $k\neq\pm m_*$ (или $k\neq\pm m_1,\pm m_2$ в особом варианте) справедливо равенство $\lim\limits_{t\to\infty}u_k(t)=0$, так как $\lim\limits_{t\to\infty}\rho_k(t)=0$ (см. лемму 2).

При $k=m_*$ или $k=-m_*$ получаем, что
$$\lim_{t\to\infty}\rho_k(t)=\frac{\sqrt{a_{m_*}}r_{m_*}}{\sqrt{r_{m_*}^2+r_{-m_*}^2}},\quad \text{если}\quad k=m_*,$$
и
$$\lim_{t\to\infty}\rho_k(t)=\frac{\sqrt{a_{-m_*}}r_{-m_*}}{\sqrt{r_{m_*}^2+r_{-m_*}^2}},\quad \text{если}\quad k=-m_*.$$

Наконец, $\lim\limits_{t\to\infty}\ln(1+Q(t))/t=2a_{m_*}$. Поэтому достаточно стандартным образом проверяется, что
$$\lim_{t\to\infty}\bigg(u_{m_*}(t)-\frac{\sqrt{a_{m_*}}r_{m_*}}{\sqrt{r_{m_*}^2+r_{-m_*}^2}}\exp(i\omega_{m_*}t+i\psi_{m_*}+i\beta_{m_*})\bigg)=0,$$
$$\lim_{t\to\infty}\bigg(u_{-m_*}(t)-\frac{\sqrt{a_{-m_*}}r_{-m_*}}{\sqrt{r_{m_*}^2+r_{-m_*}^2}}\exp(i\omega_{-m_*}t+i\psi_{-m_*}+i\beta_{-m_*})\bigg)=0,$$
где $\psi_{m_*},\psi_{-m_*}\in\mathbb{R}$ и были указаны ранее (см. условия (14)), $\omega_{m_*}=\omega_{-m_*}=(b_{m_*}-ca_{m_*})$, $b_{m_*}=-bm_*^2-gm_*^4$, а
$$\beta_{m_*}=-\frac{c}{2}\ln\bigg(\frac{r_{m_*}^2+r_{-m_*}^2}{a_{m_*}}\bigg),\quad \beta_{-m_*}=-\frac{c}{2}\ln\bigg(\frac{r_{m_*}^2+r_{-m_*}^2}{a_{m_*}}\bigg).$$

Окончательно получаем
$$\lim_{t\to\infty}\bigg(u(t,x)-\frac{a_{m_*}}{\sqrt{r_{m_*}^2+r_{-m_*}^2}}\bigg(r_{m_*}\exp(i\omega_{m_*}t+i\psi_{m_*}+i\beta_{m_*})\exp(im_*x)+$$
$$+r_{-m_*}\exp(i\omega_{-m_*}t+i\psi_{-m_*}+\beta_{-m_*})\exp(-im_*x)\bigg)\bigg)=0,$$
т.е. $u(t,x)$ приближается к функции, принадлежащей A_{m_*} – одной из компонент A_{ga}. Разность между решением КЗ (2), (3) и некоторой функцией, принадлежащей компоненте A_{m_*} аттрактора A_{ga}, стремится к нулю по норме пространства $\mathbb{L}_2(0,2\pi)$ (и даже пространства $\mathbb{W}_2^p[0,2\pi]$ при любом p).

Здесь детально разобран случай общего положения, когда $\max\{a_m\}$ достигается на одной паре m_*, $-m_*$. Если этот максимум достигается на двух парах $\pm m_1$, $\pm m_2$, то последнюю формулу следует подкорректировать и повторить аналогичные рассуждения.

В этом случае соответствующую “предельную функцию” следует выбрать в следующем виде:
$$u_*(t,x)=\frac{a_{m_1}}{(r_{m_1}^2+r_{-m_1}^2+r_{m_2}^2+r_{-m_2}^2)^{1/2}}[r_{m_1}\exp(i\omega_{m_1}t+i\psi_{m_1}+i\beta_{m_1})\exp(im_1x)+$$

$$+ r_{-m_1}\exp(i\omega_{-m_1}t + i\psi_{-m_1} + i\beta_{-m_1})\exp(-im_1x) +$$
$$+ r_{m_2}\exp(i\omega_{m_2}t + i\psi_{m_2} + i\beta_{m_2})\exp(im_2x) + r_{-m_2}\exp(i\omega_{-m_2}t + i\psi_{-m_2} + i\beta_{-m_2})\exp(-im_2x)],$$

где величины β_{m_1}, β_{-m_1}, β_{m_2}, β_{-m_2} вычисляются аналогичным образом, как и ранее. Функция $u_*(t,x)$ принадлежит глобальному аттрактору A_{ga} (его компоненте A_{m_1,m_2}).

Напомним, что в этом особом случае, когда $a_{m_1} = a_{m_2}$ $(a_{-m_1} = a_{m_1},\ a_{-m_2} = a_{m_2})$, частоты ω_{m_1}, ω_{m_2}, ω_{-m_1}, ω_{-m_2} вычисляются по формулам

$$\omega_{m_1} = \omega_{-m_1} = -bm_1^2 - gm_1^4 - ca_{m_1}, \quad \omega_{m_2} = \omega_{-m_2} = -bm_2^2 - gm_2^4 - ca_{m_2}.$$

Решение $u_*(t,x)$ по переменной t зависит от двух частот ω_{m_1}, ω_{m_2}. В ситуации общего положения они несоизмеримы, т.е. $u_*(t,x)$ относительно переменной t будет почти-периодической функцией (по x, естественно, она имеет период 2π). Вариант, когда $m_1 = 0$, а $m_2 \neq 0$ и $a_0 = a_m$, разбирается аналогично двум предшествующим.

В заключение этого пункта подчеркнём ещё раз, что все решения КЗ (2), (3) при $d > 0$ $(d = 0,\ a > 0)$ с течением времени стремятся к одной из компонент A_{ga}. В ситуации общего положения для $f(x)$ $(u(0,x) = f(x))$ номер компоненты выбирается как m_* – это номер $a_{m_*} = \max\{a_m\}$, если $a_{m_*} > 0$. Функцию $f(x)$ можно выбрать таким образом, что компонента может быть и иной, включая нулевое состояние равновесия КЗ (2), (3). Так, например, если множества $\mathbb{M}_+$ и $\mathbb{Z}_+$ не пусты, но $f_k = 0$, если $k \in \mathbb{Z}_+$, то решение начально-краевой задачи (2), (3), (6) стремится к нулю.

5. Слабодиссипативный вариант нелокального уравнения Гинзбурга–Ландау. Рассмотрим КЗ

$$u_t = \gamma u - (1 + ic)uV(u) + ibu_{xx} - igu_{xxxx}, \tag{20}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t,x), \tag{21}$$

т.е. КЗ (2), (3), в которой $\alpha = 1$, $a = d = 0$. Последние два равенства характеризуют тот вариант уравнения Гинзбурга–Ландау, который принято называть слабодиссипативным. Без нарушения общности, если $\gamma > 0$, можно считать, что $\gamma = 1$. Это достигается нормировками t и неизвестной функцией $u(t,x)$. Случай $\gamma \leqslant 0$ не представляет интереса, так как тогда любое решение КЗ (20), (21) стремится к нулю.

Итак, далее считаем, что $\gamma = 1$. Как и ранее, решение КЗ (20), (21) можно искать в виде ряда Фурье

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)\exp(inx).$$

При этом

$$V(u) = (2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi} |u(t,x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n(t)|^2.$$

В данном случае для $u_n(t)$ получаем систему дифференциальных уравнений

$$u_n' = (a_n + ib_n)u_n - (1 + ic)u_nV(u), \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \tag{22}$$

где $a_n + ib_n = 1 + i(-bn^2 - gn^4)$, $u_n = u_n(t)$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Положим $u_n(t) = \rho_n(t)\exp(i\varphi_n(t))$. Система (22) может быть заменена на две действительные системы

$$\rho_n' = \rho_n(1 - V(\rho)), \tag{23}$$

$$\varphi_n' = b_n - cV(\rho), \tag{24}$$

где $b_n = -bn^2 - gn^4$, $V(\rho) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\rho_n^2$.

Если дополнить КЗ (20), (21) начальным условием

$$u(0,x) = f(x),$$

то систему (22) следует уже дополнить начальным условием

$$u_n(0) = f_n,$$

где $\{f_n\}$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$ при её разложении в ряд Фурье в комплексной форме. В свою очередь, систему (23), (24) следует дополнить начальными условиями

$$\rho_n(0) = r_n, \quad \varphi_n(0) = \psi_n, \tag{25}$$

где f_n, r_n, ψ_n связаны соотношением $f_n = r_n \exp(i\psi_n)$.

С одной стороны, очевидно, что КЗ (2), (3) и (20), (21) близки. Вторая КЗ может быть проинтерпретирована как основная КЗ (2), (3), в которой $a_n = 1$. Поэтому многие из аналитических результатов близки. Тем не менее есть существенное различие между этими КЗ. Как уже отмечалось, КЗ (2), (3) может быть включена в класс абстрактных параболических уравнений в смысле определения из работ [19; 20, с. 92]. В то же время КЗ (20), (21) может быть включена в класс абстрактных гиперболических уравнений в смысле определений из работ [21, 22].

Сначала отметим некоторые близкие моменты. Например, анализ системы дифференциальных уравнений (23), дополненной первым из условий (25), показывает, что

$$\rho_n(t) = \frac{r_n}{r_0}\rho_0(t).$$

Повторяя построения из п. 2, получаем формулу для решений КЗ (20), (21), которая имеет вид

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n v_n(t) \exp(inx), \tag{28}$$

где

$$v_n(t) = \frac{\exp(ib_n t - i(c/2)\ln(1 - Q_0 + \exp(2t)Q_0))}{\sqrt{(1-Q_0)\exp(-2t) + Q_0}}, \quad Q_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k^2.$$

Теорема 4. *Пусть $f(x) \in \mathbb{H}_2^4$, тогда формула (28) определяет решение КЗ (20), (21) при любом $t > 0$.*

Не считая вывода формулы (28), основным моментом обоснования теоремы 4 является доказательство сходимости ряда (28) при всех t вместе со своими производными до 4-го порядка включительно, а именно

$$u_{xxxx}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^4 f_n v_n(t) \exp(inx).$$

Ряд в правой части последнего равенства сходится в смысле сходимости в пространстве $\mathbb{L}_2(0, 2\pi)$. Действительно, справедливо неравенство

$$|v_n(t)|^2 \leqslant \frac{1}{(1-Q_0)\exp(-2t) + Q_0}.$$

С другой стороны,

$$(1-Q_0)\exp(-2t) + Q_0 \geqslant 1, \quad \text{если} \quad Q_0 \in [1, \infty),$$

и

$$(1-Q_0)\exp(-2t) + Q_0 \geqslant Q_0, \quad \text{если} \quad Q_0 \in (0, 1).$$

Поэтому имеют место оценки

$$|v_n(t)|^2 \leqslant \max\{1, 1/Q_0\},$$

т.е. $|v_n(t)|$ ограничены постоянной, которая не зависит от n.

В свою очередь, ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^8|f_n|^2$ сходится в силу предположения о том, что $f(x)\in\mathbb{H}_2^4$ ($f(x)\in\mathbb{H}_2^4$, если $f(x)$ имеет период 2π и $f(x)\in\mathbb{W}_2^4[0,2\pi]$).

Нетрудно заметить, что система дифференциальных уравнений (23) имеет семейство состояний равновесия

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\rho_n^2=1 \quad \text{или} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}|f_n|^2=1. \tag{29}$$

Если выполнены соотношения (29), то $\varphi_n(t)=b_nt-ct+\psi_n$. Следовательно, система (22) имеет инвариантное многообразие A_∞, выделяемое равенством $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f_n|^2=1$. Решения, принадлежащие A_∞, имеют вид

$$u(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\exp(i\varphi_{n,0}(t))\exp(inx), \tag{30}$$

где $\varphi_{n,0}(t)=b_nt-ct$, использованы равенства $f_n=\rho_n\exp(i\psi_n)$ и обозначение $b_n=-bn^2-gn^4$.

Теорема 5. *Инвариантное многообразие A_∞ является глобальным аттрактором для решений КЗ (20), (21).*

Для доказательства последнего утверждения необходимо показать, что все решения (28) при $t\to\infty$ приближаются к A_∞. Пусть $u_n(t)=f_nv_n(t)$. Элементарно проверяется, что $\lim\limits_{t\to\infty}|u_n(t)|=|f_n|/\sqrt{Q_0}$ и, следовательно,

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|u_n(t)|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{|f_n|^2}{Q_0}=1.$$

Подчеркнём, что КЗ (20), (21) имеет глобальный аттрактор A_∞ бесконечной размерности. Функция $f(x)\in A_\infty$, если

$$\|f(x)\|^2_{\mathbb{L}_2(0,2\pi)}=2\pi,$$

т.е. аттрактор является сферой радиуса $\sqrt{2\pi}$ в пространстве $\mathbb{L}_2(0,2\pi)$. Добавим, что это множество не только имеет бесконечную размерность, но и не является компактным (не является вполне ограниченным) (см. [24, гл. 2, §§ 6, 7]).

Последнее замечание в какой-то мере характеризует то обстоятельство, что КЗ (20), (21) не входит в класс абстрактных параболических уравнений.

Отметим ещё одну особенность аттрактора A_∞ КЗ (20), (21). Все решения на нем имеют вид, определённый равенством (30). При этом функции $u(t,x)$ таковы, что

$$\|u(t,x)\|_{\mathbb{L}_2(0,2\pi)}=\sqrt{2\pi},$$

но норма $\|u(t,x)\|_{\mathbb{H}_2^4}$ может быть сколь угодно большой. Действительно, положим $f(x)=$ $=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\exp(inx)$, где $f_n=1/\sqrt{k}$, если $n=\overline{1,k}$, и $f_n=0$, если n иное. Тогда $\|f\|^2_{\mathbb{L}_2(0,2\pi)}=$ $=2\pi(1/k+\ldots+1/k)=2\pi$, т.е. $f(x)$ и, следовательно, $u(t,x)$, соответствующее этому начальному условию, принадлежат A_∞. В то же время

$$\|f\|^2_{\mathbb{H}_2^4}\geqslant\|f^{(4)}\|^2_{\mathbb{L}_2(0,2\pi)}=2\pi\left(\frac{1^8}{k}+\frac{2^8}{k}+\ldots+\frac{k^8}{k}\right)\geqslant 2\pi k^7\to\infty \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Заключение. В работах [7, 8] был изучен вопрос о существовании глобального аттрактора для традиционного варианта нелокального уравнения Гинзбурга–Ландау, когда в уравнении (2) $d=g=0$. Если $d>0$, то получаем в целом аналогичные результаты (см. [7]), но тем не менее есть существенное различие. В обоих вариантах ($d=g=0$ и $d>0$) достаточно типична ситуация, когда глобальный аттрактор содержит несколько компонент, каждая из которых является инвариантным многообразием для решений рассматриваемой КЗ. Тем не менее основную роль играет одна из таких компонент, которая соответствует $a_* = \max a_n$. "Большинство" решений приближается к ней и, следовательно, типична ситуация, когда динамику определяют те решения, которые принадлежат ей. В стандартном варианте, когда $d = g = 0$, $a > 0$, это либо нулевое состояние равновесия, либо пространственно-однородный цикл.

В обобщённом варианте при $d > 0$ ситуация часто иная. "Основной" компонентой может оказаться инвариантное многообразие размерности 3 или 5, или даже 7. При этом такая компонента заполнена (сформирована) пространственно неоднородными решениями. В ситуации общего положения эти решения зависят от t и будут почти-периодическими. Нетрудно привести пример, когда реализуется такая ситуация. Пусть $\gamma = -1$, $d = 1/2$, $a = -5/2$, $c = \sqrt{2}$, $b = 1$, $g = 0$. В этом случае $a_1 = a_2 = 1$, остальные $a_j < 0$. Наконец, $\omega_1 = -(\sqrt{2}+1)$, $\omega_2 = -(\sqrt{2}+4)$ и отношение $\omega_2 : \omega_1$ иррационально.

В слабодиссипативном варианте, если $a = d = 0$, получаем вариант КЗ (2), (3), у которой глобальный аттрактор является бесконечномерным. В ситуации общего положения все решения, принадлежащие ему, будут почти-периодическими функциями переменной t. В этом случае результаты анализа КЗ (2), (3) $(a = d = 0)$ непринципиально отличаются от результатов, полученных в работе [8], где анализу подлежал "классический" вариант нелокального уравнения Гинзбурга–Ландау (1) в слабодиссипативной версии, когда $a = 0$.

Отметим также, что при анализе КЗ (2), (4) и (2), (5) следует ожидать аналогичных результатов. При $d > 0$ $(d = 0,\ a > 0)$ обе эти КЗ будут иметь конечномерные глобальные аттракторы, а при $a = d = 0$ – бесконечномерные. Тем не менее анализ КЗ (2), (4) и (2), (5) заслуживает отдельного изложения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета по соглашению № 075-02-2022-886.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aranson I.S., Kramer L.* The world of the complex Ginzburg–Landau equation // Rev. Mod. Phys. 2002. V. 74. P. 99–143.
2. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщённого кубического уравнения Шрёдингера // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 9. С. 1290–1299.
3. *Kulikov A.N., Kulikov D.A.* Equilibrium states of a variational formulation for the Ginzburg–Landau equation // IOP Conf. Ser. J. of Physics. 2017. V. 937. P. 012025
4. *Куликов Д.А.* Обобщённый вариант вариационного уравнения Гинзбурга–Ландау // Вестн. МИФИ. 2020. Т. 9. № 4. С. 329–337.
5. *Elmer F.J.* Nonlinear and nonlocal dynamics of spatially extended systems: stationary states, bifurcations and stability // Physica D. 1988. V. 30. № 3. P. 321–341.
6. *Duan J., Hung V.L., Titi E.S.* The effect of nonlocal interactions on the dynamics of the Ginzburg–Landau equation // ZAMP. 1996. V. 47. № 3. P. 432–455.
7. *Kulikov A., Kulikov D.* Invariant varieties of the periodic boundary value problem of the nonlocal Ginzburg–Landau equation // Math. Methods in the Appl. Sci. 2021. V. 44. № 15. P. 11985–11997.
8. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Инвариантные многообразия слабодиссипативного варианта нелокального уравнения Гинзбурга–Ландау // Автоматика и телемеханика. 2021. № 2. С. 94–110.
9. *Temam R.* Infinite Dimensional Systems in Mechanics and Physics. New York, 1997.
10. *Foias C., Sell G.R., Temam R.* Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations // J. of Differ. Equat. 1998. V. 73. P. 309–353.
11. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М., 1989.
12. *Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R.* Some global dynamical properties of the Kuramoto–Sivashinsky equations: nonlinear stability and attractors // Physica D. 1985. V. 16. P. 155–183.
13. *Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R.* Quelques proprietes des attracteurs pour l'equation de Kuramoto–Sivashinsky // C.R. Acad. Sci. Paris. 1984. V. 298. P. 23–25.
14. *Разгулин А.В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1993. Т. 33. № 1. С. 69–80.

15. *Скубачевский А.В.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71. № 5 (431). С. 3–112.
16. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Нелокальная модель формирования рельефа под воздействием потока ионов. Неоднородные наноструктуры // Мат. моделирование. 2016. Т. 28. № 3. С. 33–50.
17. *Paidoussis M.* Dynamics of flexible slender cylinders in axial flow. Part 1. Theory // J. of Fluid Mech. 1966. V. 26. № 4. P. 717–736.
18. *Куликов А.Н.* Бифуркации автоколебаний для сингулярно возмущённой краевой задачи гиперболического типа // Изв. РАЕН. Дифференц. уравнения. 2001. № 5. С. 74–76.
19. *Соболевский П.Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Тр. Московского мат. о-ва. 1961. Т. 10. С. 297–350.
20. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
21. *Якубов С.Я.* Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Тр. Московского мат. о-ва. 1970. Т. 23. С. 37–60.
22. *Segal I.* Nonlinear semigroups // Ann. of Math. 1963. V. 78. № 2. P. 339–364.
23. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М., 1977.
24. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1968.

Ярославский государственный университет
имени П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 21.11.2021 г.
После доработки 05.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1515–1524

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

СТРАТЕГИИ ПРИЦЕЛИВАНИЯ В НАПРАВЛЕНИИ КВАЗИГРАДИЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2022 г. Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин

Рассматривается задача оптимального управления, в которой движение динамической системы описывается дифференциальными уравнениями с запаздыванием, начальные условия определяются кусочно-непрерывной функций, оптимизируется показатель качества типа Больца. Предлагается конструкция позиционных стратегий управления, позволяющих получать кусочно-постоянные аппроксимации оптимального управления. В данных стратегиях используются квазиградиенты функционала оптимального результата. Стратегии вычисляются путём поиска точек экстремума на конечномерном множестве. Тот факт, что это множество может быть конечномерным, является основным результатом статьи.

DOI: 10.31857/S0374064122110073, EDN: MBCMGS

Введение. В задачах оптимального управления обыкновенными дифференциальными уравнениями установлено, что если функция оптимального результата непрерывно дифференцируема, то оптимальная позиционная стратегия может быть построена на базе прицеливания в направлении её градиента. Для случая, если гладкость этой функции не предполагается, рассматриваются различные подходы к построению оптимальных позиционных стратегий (см., например, [1–9]). Идея настоящей статьи основана на подходе из работы [6, с. 127], поскольку он представляется одним из наиболее общих с точки зрения достаточных условий. Согласно данному подходу почти оптимальные позиционные стратегии строятся с использованием квазиградиентов функции оптимального результата. Целью статьи является развитие этого подхода на системы с запаздыванием.

Отметим, что для систем с запаздыванием позиционные стратегии управления, использующие квазиградиенты, и близкие к ним изучались в статьях [10, 11]. Однако применение этих стратегий затруднительно, поскольку для их реализации необходимо искать точки экстремума на бесконечномерных множествах непрерывных функций – возможных историй движений системы. В настоящей работе предлагается способ построения почти оптимальных позиционных стратегий управления, использующих поиск точек экстремума лишь на конечномерном множестве возможных текущих состояний системы. Идеи, лежащие в основе этого результата, заключаются в следующем:

(i) Подобно [12] рассматриваются такие условия на систему и показатель качества, что функционал оптимального результата удовлетворяет определённому условию Липшица.

(ii) Следуя [13, 14], задача оптимального управления рассматривается на пространстве кусочно-непрерывных функций.

1. Задача оптимального управления. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и нормой $\|\cdot\|$. Функция $x(\cdot)\colon [a,b]\mapsto\mathbb{R}^n$ называется *кусочно-непрерывной*, если существуют числа $a=\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_l=b$ такие, что для каждого $i\in\overline{1,l-1}$ функция $x(\cdot)$ непрерывна на промежутке $[\xi_i,\xi_{i+1})$, и существует конечный предел $x(\xi)$ при ξ, стремящемся к ξ_{i+1} слева. Через $\mathrm{PC}([a,b],\mathbb{R}^n)$ обозначим линейное пространство кусочно-непрерывных функций $x(\cdot)\colon [a,b]\mapsto\mathbb{R}^n$.

Пусть $t_0<\vartheta$ и $h>0$. Положим $\mathrm{PC}=\mathrm{PC}([-h,0),\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{G}=[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n\times\mathrm{PC}$. Определим следующие нормы на пространстве PC:

$$\|w(\cdot)\|_1=\int\limits_{-h}^{0}\|w(\xi)\|\,d\xi,\quad \|w(\cdot)\|_\infty=\sup_{\xi\in[-h,0)}\|w(\xi)\|.$$

Пусть $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$. Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h), u(t)), \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{1}$$

при начальном условии

$$x(\tau) = z, \quad x(t) = w(t-\tau), \quad t \in [\tau - h, \tau). \tag{2}$$

Здесь t – время, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния в момент времени t, $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$, $u(t) \in \mathbb{U}$ – текущее воздействие управления, $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ – компактное множество.

Обозначим через $\Lambda(\tau, z, w(\cdot))$ множество функций $x(\cdot) \in \mathrm{PC}([\tau - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих начальному условию (2) и условию Липшица на промежутке $[\tau, \vartheta]$. Обозначим через $\mathcal{U}_\tau$ множество измеримых функций $u(\cdot)\colon [\tau, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$.

Пусть $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$. Движением $x(\cdot) = x(\cdot \mid \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ системы (1), (2) называется функция $x(\cdot) \in \Lambda(\tau, z, w(\cdot))$, которая удовлетворяет уравнению (1) при почти всех $t \in [\tau, \vartheta]$.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: требуется минимизировать показатель качества типа Больца

$$J(\tau, z, w(\cdot), u(\cdot)) = \sigma(x(\vartheta)) + \int\limits_{\tau}^{\vartheta} f^0(\xi, x(\xi), x(\xi - h), u(\xi))\, d\xi \tag{3}$$

по всем $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$, где $x(\cdot) = x(\cdot \mid \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ – движение системы (1), (2).

Обозначим

$$B(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x\| \leqslant \alpha\}, \quad \alpha > 0.$$

Предполагаем, что выполнены следующие условия:

(f_1) Функции $f(t, x, y, u) \in \mathbb{R}^n$ и $f^0(t, x, y, u) \in \mathbb{R}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{U}$, непрерывны.

(f_2) Для любого $\alpha > 0$ существует число $\lambda_f = \lambda_f(\alpha) > 0$ такое, что для всех $t \in [t_0, \vartheta]$, $x, y, x', y' \in B(\alpha)$ и $u \in \mathbb{U}$ справедливо неравенство

$$\|f(t, x, y, u) - f(t, x', y', u)\| + |f^0(t, x, y, u) - f^0(t, x', y', u)| \leqslant \lambda_f(\|x - x'\| + \|y - y'\|).$$

(f_3) Существует константа $c_f > 0$ такая, что для всех $t \in [t_0, \vartheta]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $u \in \mathbb{U}$ имеет место оценка

$$\|f(t, x, y, u)\| + |f^0(t, x, y, u)| \leqslant c_f(1 + \|x\| + \|y\|).$$

(σ_1) Для любого $\alpha > 0$ существует число $\lambda_\sigma = \lambda_\sigma(\alpha) > 0$ такое, что

$$|\sigma(x) - \sigma(x')| \leqslant \lambda_\sigma \|x - x'\|, \quad x, x' \in B(\alpha).$$

(σ_2) Существует константа $c_\sigma > 0$ такая, что

$$|\sigma(x)| \leqslant c_\sigma(1 + \|x\|), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Отметим, что при выполнении условий (f_1)–(f_3) для любых $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ существует единственное движение $x(\cdot) = x(\cdot \mid \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ системы (1), (2). Этот факт может быть установлен путём применения метода шагов работы [15, гл. 1, раздел 2] с опорой на факт существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [16, раздел 1]).

Функционал оптимального результата $\rho\colon \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$ в задаче (3) определяется по формуле

$$\rho(\tau, z, w(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau} J(\tau, z, w(\cdot), u(\cdot)). \tag{4}$$

Отметим, что этот функционал удовлетворяет условиям:

(ρ_1) Имеет место равенство

$$\rho(\vartheta, z, w(\cdot)) = \sigma(z), \quad (z, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times \mathrm{PC}.$$

(ρ_2) Для любых $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $t \in [\tau, \vartheta]$ справедливо равенство

$$\rho(\tau, z, w(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_\tau} (\rho(t, x(t), x_t(\cdot)) + x^0(t)),$$

где $x(\cdot) = x(\,\cdot|\tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ – движение системы (1), (2), а функция $x^0(\cdot) = x^0(\,\cdot|\tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ определяется следующим образом:

$$x^0(t) = \int\limits_\tau^t f^0(\xi, x(\xi), x(\xi - h), u(\xi))\, d\xi, \quad t \in [\tau, \vartheta]. \tag{5}$$

(ρ_3) Функционал оптимального результата $\rho(\tau, z, w(\cdot))$ непрерывен по τ, и для любого $\alpha > 0$ существует число $\lambda_\rho = \lambda_\rho(\alpha) > 0$ такое, что

$$|\rho(\tau, z, w(\cdot)) - \rho(\tau, z', w'(\cdot))| \leqslant \lambda_\rho(\|z - z'\| + \|w(\cdot) - w'(\cdot)\|_1)$$

для всех $(\tau, z, w(\cdot)), (\tau, z', w'(\cdot)) \in \mathbb{G}$, удовлетворяющих неравенству

$$\max\{\|z\|, \|w(\cdot)\|, \|z'\|, \|w'(\cdot)\|\} \leqslant \alpha. \tag{6}$$

(ρ_4) Существует константа $c_\rho > 0$ такая, что

$$|\rho(\tau, z, w(\cdot))| \leqslant c_\rho(1 + \|z\| + \|w(\cdot)\|_1), \quad (\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}. \tag{7}$$

Функционал оптимального результата ρ удовлетворяет условию (ρ_1) в силу своего определения (4). Условие (ρ_2) может быть доказано, например, по схеме из монографии [17, с. 553]. Условие (ρ_3) доказано в статье [14]. Условие (ρ_4) доказывается в лемме 3 далее.

2. Позиционные стратегии в гладком случае. Пусть $U\colon \mathbb{G} \mapsto \mathbb{U}$ и $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$. Определим разбиение промежутка $[\tau, \vartheta]$:

$$\Delta = \{t_i \in [\tau, \vartheta], i \in \overline{1, I}\colon t_i < t_{i+1}\}. \tag{8}$$

Обозначим

$$J(\tau, z, w(\cdot), U, \Delta) = J(\tau, z, w(\cdot), u(\cdot)), \tag{9}$$

где $u(\cdot)$ определяется по пошаговому правилу

$$u(t) = U(t_i, x(t_i), x_{t_i}(\cdot)), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i \in \overline{0, I-1}.$$

Тогда U называется *позиционной стратегией управления.*

Для того чтобы описать почти оптимальные позиционные стратегии в гладком случае, введём понятие коинвариантной дифференцируемости функционалов и подходящее понятие коинвариантной гладкости. Следуя работам [11] и [18, с. 20], функционал $\rho\colon \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$ называется *коинвариантно дифференцируемым* (*ci-дифференцируемым*) в точке $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$, если существуют $\partial^{ci}_{\tau,w}\rho(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{R}$ и $\nabla_z\rho(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ такие, что для любых $r \in \mathbb{R}^n$, $x(\cdot) \in \Lambda(\tau, z, w(\cdot))$ и $t \in [\tau, \vartheta]$ выполняется соотношение

$$\rho(t, r, x_t(\cdot)) - \rho(\tau, z, w(\cdot)) = \partial^{ci}_{\tau,w}\rho(\tau, z, w(\cdot))(t - \tau) + \langle r - z, \nabla_z\rho(\tau, z, w(\cdot))\rangle + o(|t - \tau| + \|r - z\|),$$

где величина $o(\cdot)$ зависит от тройки $\{\tau, z, x(\cdot)\}$, причём $o(\delta)/\delta \to 0$ при $\delta \downarrow 0$. Тогда $\partial^{ci}_{\tau,w}\rho(\tau, z, w(\cdot))$ называется ci-производной ρ по $\{\tau, w(\cdot)\}$ и $\nabla_z\rho(\tau, z, w(\cdot))$ – градиент ρ по z. Функционал $\rho\colon \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$ называется *ci-гладким*, если он ci-дифференцируем в каждой точке $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$, функционалы $\partial^{ci}_{\tau,w}\rho(\tau, z, w(\cdot))$ и $\nabla_z\rho(\tau, z, w(\cdot))$ непрерывны по τ, и для любого $\alpha > 0$ существует число $\lambda^*_\rho = \lambda^*_\rho(\alpha) > 0$ такое, что

$$|\partial^{ci}_{\tau,w}\rho(\tau, z, w(\cdot)) - \partial^{ci}_{\tau,w}\rho(\tau, z', w'(\cdot))| + |\partial^{ci}_{\tau,w}\nabla_z\rho(\tau, z, w(\cdot)) - \nabla_z\rho(\tau, z', w'(\cdot))| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_\rho^*(\|z-z'\|+\|w(\cdot)-w'(\cdot)\|_1)$$

для всех $(\tau,z,w(\cdot)),(\tau,z',w'(\cdot))\in\mathbb{G},\ \tau<\vartheta,$ удовлетворяющих неравенству (6).

По аналогии с [18, с. 123] рассмотрим предстратегию

$$p(t,x,y,s)=\arg\min_{u\in\mathbb{U}}(\langle f(t,x,y,u),s\rangle+f^0(t,x,y,u)).$$

В работе [13] было доказано, что если функционал оптимального результата ρ является ci-гладким, то для позиционной стратегии управления

$$U^\circ(\tau,z,w(\cdot))=p(\tau,z,w(-h),\nabla_z\rho(\tau,z,w(\cdot)))$$

и для любых $(\tau,z,w(\cdot))\in\mathbb{G}$ и $\zeta>0$ существует разбиение Δ (см. (8)) такое, что

$$J(\tau,z,w(\cdot),U^0,\Delta)\leqslant\rho(\tau,z,w(\cdot))+\zeta.$$

Ниже описывается построение почти оптимальной позиционной стратегии управления в случае, когда не предполагается, что функционал оптимального результата ρ удовлетворяет условию ci-гладкости.

3. Стратегии прицеливания в направлении квазиградиентов. Обозначим

$$\nu^{\lambda,\varepsilon}(\tau)=(e^{-\lambda(\tau-t_0)}-\varepsilon)/\varepsilon,\quad \tau\in[t_0,\vartheta],\quad \lambda,\varepsilon>0.$$

Пусть $\varepsilon_*(\lambda)>0$ таково, что

$$\nu^{\lambda,\varepsilon}(\tau)>c_\rho,\quad \tau\in[t_0,\vartheta],\quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_*(\lambda)], \tag{10}$$

где c_ρ – константа из условия (ρ_4). Определим функцию

$$\eta^{\lambda,\varepsilon}(\tau,z)=\nu^{\lambda,\varepsilon}(\tau)\mu^\varepsilon(z),\quad \mu^\varepsilon(z)=\sqrt{\varepsilon^4+\|z\|^2}, \tag{11}$$

где $(\tau,z)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n,\ \ \varepsilon\in(0,\varepsilon_*(\lambda)]$ и $\lambda>0$. Отметим, что эта функция непрерывно дифференцируема и имеют место равенства

$$\partial\eta_\varepsilon^\lambda(\tau,z)/\partial\tau=-\lambda(\nu_\varepsilon^\lambda(\tau)+1)\mu_\varepsilon(z),\quad \nabla_z\eta_\varepsilon^\lambda(\tau,z)=(\nu_\varepsilon^\lambda(\tau)/\mu_\varepsilon(z))z. \tag{12}$$

Рассмотрим функционал

$$r^{\lambda,\varepsilon}(\tau,z,w(\cdot))=\arg\min_{r\in\mathbb{R}^n}(\rho(\tau,r,w(\cdot))+\eta^{\lambda,\varepsilon}(\tau,z-r)), \tag{13}$$

где $(\tau,z,w(\cdot))\in\mathbb{G},\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_*(\lambda)]$ и $\lambda>0$. Отметим, что этот функционал корректно определён в силу леммы 4 ниже. Определим величину

$$\nabla_z^{\lambda,\varepsilon}\rho(\tau,z,w(\cdot))=\nabla_z\eta^{\lambda,\varepsilon}(\tau,z-r^{\lambda,\varepsilon}(\tau,z,w(\cdot))).$$

Теорема. *Для любых $(\tau,z,w(\cdot))\in\mathbb{G}$ и $\zeta>0$ существуют $\lambda,\varepsilon>0$ и разбиение Δ (см. (8)) такие, что для позиционной стратегии управления*

$$U^{\lambda,\varepsilon}(\tau,z,w(\cdot))=p(\tau,z,w(-h),\nabla_z^{\lambda,\varepsilon}\rho(\tau,z,w(\cdot))) \tag{14}$$

имеет место оценка

$$J(\tau,z,w(\cdot),U^{\lambda,\varepsilon},\Delta)\leqslant\rho(\tau,z,w(\cdot))+\zeta.$$

Доказательство теоремы приведено в п. 6.

4. Свойства динамической системы. Взяв константу c_f из условия (f_3), положим

$$\alpha(t,\tau,\alpha_0) = \frac{1}{2}((1+2\alpha_0)e^{2c_f(t-\tau)} - 1). \tag{15}$$

Лемма 1. *Пусть* $\tau \in [t_0, \vartheta]$ *и* $\alpha_0 \geqslant 0$. *Тогда для любых* $(z, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times \mathrm{PC}$ *таких, что* $\max\{\|z\|, \|w(\cdot)\|_\infty\} \leqslant \alpha_0$, *и любого* $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ *движение* $x(\cdot) = x(\,\cdot \mid \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ *системы (1), (2) и функция* $x^0(\cdot) = x^0(\,\cdot \mid t, z, w(\cdot), u(\cdot))$, *определяемая согласно (5), при всех* $t \in [\tau, \vartheta]$ *удовлетворяют оценкам*

$$\sup_{\xi\in[\tau-h,t]} \|x(\xi)\| \leqslant \alpha(t,\tau,\alpha_0), \quad |x^0(t)| \leqslant \alpha(t,\tau,\alpha_0). \tag{16}$$

Доказательство. В силу (1), (2) и условия (f_3) для $x(\cdot) = x(\,\cdot \mid \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ имеем

$$\|x(t)\| \leqslant \|z\| + \int\limits_\tau^t \|f(\xi, x(\xi), x(\xi-h), u(\xi), v(\xi))\|\,d\xi \leqslant \alpha_0 + c_f \int\limits_\tau^t \Big(1 + 2\sup_{\zeta\in[\tau-h,\xi]} \|x(\zeta)\|\Big)\,d\xi$$

при всех $t \in [\tau, \vartheta]$. Тогда, принимая во внимание, что правая часть этих оценок монотонна по t, получаем, что функция

$$\psi(t) = 1 + 2\sup_{\xi\in[\tau-h,t]} \|x(\xi)\|, \quad t \in [\tau, \vartheta], \tag{17}$$

удовлетворяет неравенству

$$\psi(t) \leqslant 1 + 2\alpha_0 + 2c_f \int\limits_\tau^t \psi(\xi)\,d\xi, \quad t \in [\tau, \vartheta].$$

Отсюда, применяя лемму Беллмана–Гронуолла (см., например, [19, с. 43]), выводим

$$\psi(t) \leqslant (1+2\alpha_0)e^{2c_f(t-\tau)}, \quad t \in [\tau, \vartheta]. \tag{18}$$

Тогда в силу формул (15) и (17) получаем первую оценку в (16).

Для функции $x^0(\cdot) = x^0(\,\cdot \mid t, z, w(\cdot), u(\cdot))$ из условия (f_3) и соотношений (15), (17), (18) имеем

$$|x^0(t)| \leqslant \int\limits_\tau^t \|f^0(\xi, x(\xi), x(\xi-h), u(\xi), v(\xi))\|\,d\xi \leqslant c_f \int\limits_\tau^t \psi(\xi)\,d\xi \leqslant \alpha(t,\tau,\alpha_0)$$

при всех $t \in [\tau, \vartheta]$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha_* \geqslant 0$. *Пусть* $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ *и* $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ *таковы, что движение* $x(\cdot) = x(\,\cdot \mid \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ *системы (1), (2) удовлетворяет оценке*

$$\|x(t)\| \leqslant \alpha_*, \quad t \in [\tau-h, \vartheta]. \tag{19}$$

Тогда выполняется неравенство

$$\|x(t) - x(t')\| \leqslant c_f(1+2\alpha_*)|t-t'|, \quad t, t' \in [\tau, \vartheta]. \tag{20}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $t \leqslant t'$. Тогда в силу (1), (2) и условия (f_3) имеем

$$\|x(t) - x(t')\| \leqslant \int\limits_t^{t'} \|f(\xi, x(\xi), x(\xi-h), u(\xi))\|\,d\xi \leqslant c_f \int\limits_t^{t'} (1 + \|x(\xi)\| + \|x(\xi-h)\|)\,d\xi.$$

Далее, используя неравенство (19), получаем (20). Лемма доказана.

5. Свойства функционала оптимального результата.

Лемма 3. *Функционал оптимального результата ρ удовлетворяет условию (ρ_4).*

Доказательство. Возьмём c_f и c_σ из условий (f_3) и (σ_2). Положим $c_x = e^{2c_f(\vartheta - t_0)}$, $c_\rho = (2c_\sigma + 1)c_x$.

Пусть $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$. Обозначим $\alpha_0 = \max\{\|z\|, \|w(\cdot)\|_\infty\}$, $\alpha_* = c_x(1+\alpha_0)$. Отметим, что $\alpha_* \geqslant 1$. Тогда в соответствии с (15) для каждого $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ движение $x(\cdot) = x(\,\cdot \mid \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ системы (1), (2) удовлетворяет оценке

$$\max\{\|x(t)\|, |x^0(t)|\} \leqslant \alpha(t, \tau, \alpha_0) \leqslant \alpha_*, \quad t \in [\tau, \vartheta].$$

Таким образом, получаем

$$|\sigma(x(\vartheta)) + x^0(\vartheta)| \leqslant c_\sigma(1+\alpha_*) + \alpha_* \leqslant (2c_\sigma + 1)\alpha_* = c_\rho(1+\alpha_0) \leqslant c_\rho(1 + \|z\| + \|w(\cdot)\|_\infty).$$

Из этой оценки и выражения (4) выводим (7). Лемма доказана.

6. Доказательства.

Определим функционал

$$\rho^{\lambda,\varepsilon}(\tau, z, w(\cdot)) = \min_{r\in\mathbb{R}^n}(\rho(\tau, r, w(\cdot)) + \eta^{\lambda,\varepsilon}(\tau, z - r)), \tag{21}$$

где $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*(\lambda)]$ и $\lambda > 0$.

Лемма 4. *В соотношении (21) минимум достигается.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\tilde\rho(r) = \rho(\tau, r, w(\cdot)) + \eta^{\lambda,\varepsilon}(\tau, z - r), \quad r \in \mathbb{R}^n.$$

В силу условия (ρ_3) эта функция непрерывна. По условиям (σ_2) и (10) имеем

$$\tilde\rho(r) \geqslant -c_\rho(1 + \|r\|) + \nu^{\lambda,\varepsilon}(\tau)\|r - z\| \geqslant c_\rho(\|r\| - 1 - 2\|z\|).$$

Следовательно, функция $\tilde\rho_-$ ограничена снизу и $\tilde\rho(r) \to +\infty$ при $\|r\| \to \infty$. Это означает, что минимум достигается. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $\zeta_1, \lambda > 0$. Существует число $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ и $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ движение $x(\cdot) = x(\,\cdot \mid \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ системы (1), (2) удовлетворяет неравенству*

$$\|r^{\lambda,\varepsilon}(t, x(t), x_t(\cdot)) - x(t)\| \leqslant \zeta, \quad t \in [\tau, \vartheta]. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $\zeta_1, \lambda > 0$. Взяв константу c_ρ из леммы 3 и функцию α из (15), обозначим $\alpha_0 = \max\{\|z\|, \|w(\cdot)\|_\infty\}$, $\theta = c_\rho(1 + (1 + h)\alpha(\vartheta, \tau, \alpha_0))$. Согласно (11) можно выбрать $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_*(\lambda))$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\eta^{\lambda,\varepsilon}(t_0, 0) \leqslant \theta, \quad \nu^{\lambda,\varepsilon}(\vartheta) \geqslant c_\varphi + 3\theta/\zeta, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_1].$$

Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$, $t \in [\tau, \vartheta]$, $x(\cdot) = x(\,\cdot \mid \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ – движение системы (1), (2). Обозначим

$$r = r^{\lambda,\varepsilon}(t, x(t), x_t(\cdot)), \tag{23}$$

где $r^{\lambda,\varepsilon}$ определяется по формуле (13). Тогда с учётом (11), (21) и леммы 3, с одной стороны, имеем

$$\rho^{\lambda,\varepsilon}(t, x(t), x_t(\cdot)) = \rho(t, r, x_t(\cdot)) + \eta^{\lambda,\varepsilon}(t, x(t) - r) \geqslant -c_\rho(1 + \|r\| + \|x_t(\cdot)\|_1) + \nu^{\lambda,\varepsilon}(\vartheta)\|x(t) - r\| \geqslant$$

$$\geqslant -c_\rho(1 + \|x(t)\| + \|x_t(\cdot)\|_1) + 3\theta/\zeta\|x(t) - r\| \geqslant -\theta + 3\theta/\zeta\|x(t) - r\|,$$

а с другой –

$$\rho^{\lambda,\varepsilon}(t,x(t),x_t(\cdot)) \leqslant \rho(t,x(t),x_t(\cdot)) + \eta^{\lambda,\varepsilon}(t_0,0) \leqslant c_\rho(1+\|x(t)\|+\|x_t(\cdot)\|_1) + \eta^{\lambda,\varepsilon}(t_0,0) \leqslant 2\theta.$$

Из этих оценок следует (22). Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $(\tau,z,w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ *и* $\zeta_2,\lambda > 0$. *Тогда существует число* $\varepsilon_2 > 0$ *такое, что для любых* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2]$ *и* $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ *движение* $x(\cdot) = x(\,\cdot \mid \tau,z,w(\cdot),u(\cdot))$ *системы (1), (2) удовлетворяет неравенству*

$$|\rho(t,x(t),x_t(\cdot)) - \rho^{\lambda,\varepsilon}(t,x(t),x_t(\cdot))| \leqslant \zeta, \quad t \in [\tau,\vartheta]. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $(\tau,z,w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $\zeta_2,\lambda > 0$. В соответствии с (15) и с условием (ρ_3) обозначим $\alpha_0 = \max\{\|z\|,\|w(\cdot)\|_\infty\}$, $\alpha_* = \alpha(\vartheta,\tau,\alpha_0)+\zeta_2$ и $\lambda_\rho = \lambda_\rho(\alpha_*)$. Согласно (11) и лемме 5 можно выбрать число $\varepsilon_2 > 0$ так, чтобы для любых $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2]$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ и $t \in [\tau,\vartheta]$ выполнялись неравенства

$$\eta^{\lambda,\varepsilon}(\tau,0) \leqslant \zeta_2, \quad \nu^{\lambda,\varepsilon}(t) > 0, \quad \|r^{\lambda,\varepsilon}(t,x(t),x_t(\cdot)) - x(t)\| \leqslant \zeta_2/\max\{\lambda_\rho,1\}, \tag{25}$$

где $x(\cdot) = x(\,\cdot \mid \tau,z,w(\cdot),u(\cdot))$ – движение системы (1), (2).

Пусть $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2]$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$, $t \in [\tau,\vartheta]$. Введём обозначение r согласно (23). В силу леммы 1 и выбора α_* и ε имеем

$$\|x(t)\| \leqslant \alpha_*, \quad \|r\| \leqslant \|x(t)-r\| + \|x(t)\| \leqslant \alpha_*.$$

Тогда в соответствии с выбором λ_ρ и r и неравенств (25), с одной стороны, выводим

$$\rho(t,x(t),x_t(\cdot)) - \rho^{\lambda,\varepsilon}(t,x(t),x_t(\cdot)) \leqslant \rho(t,x(t),x_t(\cdot)) - \rho(t,r,x_t(\cdot)) - \eta^{\lambda,\varepsilon}(t,x(t)-r) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_\rho\|x(t)-r\| \leqslant \zeta_2,$$

а с другой стороны, принимая во внимание (21), получаем

$$\rho^{\lambda,\varepsilon}(t,x(t),x_t(\cdot)) - \rho(t,x(t),x_t(\cdot)) \leqslant \eta^{\lambda,\varepsilon}(\tau,0) \leqslant \zeta_2.$$

Таким образом, неравенство (24) доказано. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* $(\tau,z,w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ *и* $\zeta_3 > 0$. *Тогда существуют* $\lambda,\varepsilon_3 > 0$ *такие, что выполняется следующее утверждение: для любого* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_3]$ *существует разбиение* Δ *(см. (8)) такое, что если* $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ *определяется согласно пошаговому правилу*

$$u(t) = U^{\lambda,\varepsilon}(t_i,x(t_i),x_{t_i}(\cdot)), \quad t \in [t_i,t_{i+1}), \quad i \in \overline{1,k-1}, \tag{26}$$

где $x(\cdot) = x(\,\cdot \mid \tau,z,w(\cdot),u(\cdot))$ *– движение системы (1), (2), а* $U^{\lambda,\varepsilon}$ *определяется согласно (14), то движение* $x(\cdot)$ *и функция* $x^0(\cdot) = x^0(\,\cdot \mid \tau,z,w(\cdot),u(\cdot))$, *определяемая согласно (5), удовлетворяют неравенству*

$$\rho^{\lambda,\varepsilon}(t_{i+1},x(t_{i+1}),x_{t_{i+1}}(\cdot)) + x^0(t_{i+1}) \leqslant \rho^{\lambda,\varepsilon}(t_i,x(t_i),x_{t_i}(\cdot)) + x^0(t_i) + (t_{i+1}-t_i)\zeta_3, \quad i \in \overline{1,k-1}. \tag{27}$$

Доказательство. Пусть $(\tau,z,w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $\zeta_3 > 0$. Определим $\alpha_0 = \max\{\|z\|,\|w(\cdot)\|_\infty\}$. Взяв функцию α из формулы (15) и константу $c_f > 0$ из условия (f_3), обозначим

$$\zeta_1 = \zeta_3/6, \quad \alpha_* = \alpha(\vartheta,\tau,\alpha_0+\zeta_1), \quad \lambda_* = (1+2\alpha_*)c_f. \tag{28}$$

В согласии с условием (f_2) положим $\lambda = \lambda_f(\alpha_*)$. По числу ζ_1 определим $\varepsilon_3 = \varepsilon_1$ в соответсвии с леммой 5. Пусть $\varepsilon \in (0,\varepsilon_3]$. Обозначим

$$\beta(t,x,y,s,u) = \langle f(t,x,y,u), \nabla_z\eta^{\lambda,\varepsilon}(t,s)\rangle + f^0(t,x,y,u). \tag{29}$$

В силу условия (f_1) и непрерывности $\nabla_z \eta^{\lambda,\varepsilon}$ (см. (12)) существует $\delta_\beta > 0$ такое, что для любых $t, t' \in [t_0, \vartheta]$, $x, x', y, y' \in B(\alpha_*)$, $s, s' \in B(2\alpha_*)$ и $u \in \mathbb{U}$, если

$$\max\{|t - t'|, \|x - x'\|, \|y - y'\|, \|s - s'\|\} \leqslant \delta_\beta,$$

справедливо неравенство

$$|\beta(t, x, y, s, u) - \beta(t', x', y', s', u)| \leqslant \zeta_1. \tag{30}$$

Поскольку $w(\cdot) \in \mathrm{PC}$, существуют $-h = \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_l = 0$ такие, что функция $w(\cdot)$ равномерно непрерывна на каждом промежутке $[\xi_i, \xi_{i+1})$, $i \in \overline{1, l-1}$. Тогда существует $\delta_w > 0$ такое, что для любых $i \in \overline{1, l-1}$ и $\xi, \xi' \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, если $|\xi - \xi'| \leqslant \delta_w$,

$$\|w(\xi) - w(\xi')\| \leqslant \delta_\beta/2. \tag{31}$$

Выберем $\lambda_\rho = \lambda_\rho(\alpha_*)$ в согласии с условием (ρ_3). Положим

$$\delta = \min\{\delta_w, \delta_\beta, \delta_\beta/(2\lambda_*), h, \zeta_1/(2\lambda_\rho\lambda_*)\}. \tag{32}$$

Возьмём разбиение Δ (см. (8)) такое, что

$$t_{i+1} - t_i \leqslant \delta, \quad i \in \overline{1, k-1}, \tag{33}$$

и функция $w(\cdot)$ непрерывна на промежутках $[t_i - \tau - h, t_{i+1} - \tau - h) \bigcap [-h, 0)$, $i \in \overline{1, k-1}$.

Пусть $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ удовлетворяет (26). Пусть $x(\cdot) = x(\cdot \mid \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ – движение системы (1), (2). Пусть $i \in \overline{1, k-1}$. Из леммы 1 и (15), (28) имеем

$$\|x(\xi)\| \leqslant \alpha(\xi, \tau, \alpha_0) \leqslant \alpha_*, \quad \xi \in [\tau - h, \vartheta]. \tag{34}$$

Тогда в силу леммы 2 и (28), (32), (33) выводим

$$\|x(t) - x(t_i)\| \leqslant \lambda_* |t - t_i| \leqslant \delta_\beta/2, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{35}$$

В случае $t_i - h \geqslant \tau$ аналогичным образом можно получить оценки

$$\|x(t - h) - x(t_i - h)\| \leqslant \delta_\beta/2, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \tag{36}$$

а при $t_i - h < \tau$ это неравенство выполнено в силу выбора разбиения Δ и (31)–(33).

Обозначим

$$r_i = r^{\lambda,\varepsilon}(t_i, x(t_i), x_{t_i}(\cdot)), \tag{37}$$

где $r^{\lambda,\varepsilon}$ взято из (13). Тогда по выбору ε имеем

$$\|r_i - x(t_i)\| \leqslant \zeta_1. \tag{38}$$

Ввиду условия (ρ_2) существует $v(\cdot) \in \mathcal{U}_{t_i}$ такое, что движение $y(\cdot) = x(\cdot \mid t_i, r_i, x_{t_i}(\cdot), v(\cdot))$ системы (1), (2) и функция $y^0(\cdot) = x^0(\cdot \mid t_i, r_i, x_{t_i}(\cdot), v(\cdot))$, определяемая согласно (5), удовлетворяют неравенству

$$\rho(t_{i+1}, y(t_{i+1}), y_{t_{i+1}}(\cdot)) + y^0(t_{i+1}) \leqslant \rho(t_i, r_i, x_{t_i}(\cdot)) + 2(t_{i+1} - t_i)\zeta_1. \tag{39}$$

В соответствии с (32), (33) справедливо равенство

$$y(t - h) = x(t - h), \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{40}$$

Отметим также, что в силу (34), (38) и леммы 1, принимая во внимание (15) и (28), имеем

$$\|y(t)\| \leqslant \alpha(t, t_i, \alpha(t_i, \tau, \alpha_0) + \zeta_1) \leqslant \alpha_*, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{41}$$

Тогда в силу леммы 2 и (28), (32), (33) выводим

$$\|y(t)-y(t_i)\| \leqslant \lambda_*|t-t_i| \leqslant \delta_\beta/2, \quad t\in[t_i,t_{i+1}]. \tag{42}$$

Обозначая

$$s(t)=x(t)-y(t), \quad t\in[t_i,t_{i+1}], \tag{43}$$

и учитывая (34), (35) и (41), (42), получаем оценки

$$\|s(t)\| \leqslant 2\alpha_*, \quad \|s(t)-s(t_i)\| \leqslant \delta_\beta, \quad t\in[t_i,t_{i+1}]. \tag{44}$$

Рассмотрим функцию

$$\kappa(t)=\eta^{\lambda,\varepsilon}(t,s(t))+x^0(t)-y^0(t), \quad t\in[t_i,t_{i+1}].$$

Тогда, принимая во внимание (1), (12) и (29), имеем

$$\dot\kappa(t)=\partial\eta^{\lambda,\varepsilon}(t,s(t))/\partial\tau+\beta(t,x(t),x(t-h),s(t),u(t))-\beta(t,y(t),y(t-h),s(t),v(t))$$

для всех $t\in(t_i,t_{i+1})$. Из (26), (29), (30), (32)–(36) и (44) выводим

$$\beta(t,x(t),x(t-h),s(t),u(t)) \leqslant \beta(t_i,x(t_i),x(t_i-h),s(t_i),u(t))+\zeta_1 \leqslant$$

$$\leqslant \beta(t_i,x(t_i),x(t_i-h),s(t_i),v(t))+\zeta_1 \leqslant \beta(t,x(t),x(t-h),s(t),v(t))+2\zeta_1$$

для всех $t\in(t_i,t_{i+1})$. Тогда в согласии с выбором λ и (29), (40), (43) получаем

$$\dot\kappa(t) \leqslant \partial\eta^{\lambda,\varepsilon}(t,s(t))/\partial\tau+\beta(t,x(t),x(t-h),s(t),v(t))-\beta(t,y(t),y(t-h),s(t),v(t))+2\zeta_1 \leqslant$$

$$\leqslant \partial\eta^{\lambda,\varepsilon}(t,s(t))/\partial\tau+\lambda(1+\|\nabla_z\eta^{\lambda,\varepsilon}(t,s(t))\|)\|s(t)\|+2\zeta_1.$$

Далее из (12) для всех $t\in(t_i,t_{i+1})$ выводим $\partial\eta^{\lambda,\varepsilon}(t,s(t))/\partial\tau+\lambda(1+\|\nabla_z\eta^{\lambda,\varepsilon}(t,s(t))\|)\|s(t)\| \leqslant 0$.

Таким образом справедливо неравенство

$$\eta^{\lambda,\varepsilon}(t_{i+1},s(t_{i+1}))+x^0(t_{i+1})-y^0(t_{i+1})=\kappa(t_{i+1}) \leqslant \kappa(t_i)=\eta^{\lambda,\varepsilon}(t_i,s(t_i))+x^0(t_i)+2(t_{i+1}-t_i)\zeta_1. \tag{45}$$

В силу выбора λ_ρ и (32)–(35), (38), (40)–(42) имеем

$$|\rho(t,x(t),x_t(\cdot))-\rho(t,x(t),y_t(\cdot))| \leqslant \lambda_\rho\int\limits_{t_i}^{t}\|y(\xi)-x(\xi)\|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant 2\lambda_\rho\lambda_*\delta(t-t_i)+\|r_i-x(t_i)\|(t-t_i) \leqslant 2(t-t_i)\zeta_1.$$

Тогда из (21), (28), (37), (39), (45) выводим (27). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $(\tau,z,w(\cdot))$ и $\zeta>0$. Пусть $\zeta_2=\zeta/3$ и $\zeta_3=\zeta/(3(\vartheta-\tau))$. В силу лемм 6 и 7 определим $\lambda,\varepsilon_2,\varepsilon_3>0$. Пусть $\varepsilon\in(0,\min\{\varepsilon_2,\varepsilon_3\}]$. В соответствии с леммой 7 возьмём разбиение Δ. Тогда, принимая во внимание (2), (3), (9) и условие (ρ_1), выводим

$$J(\tau,z,w(\cdot),U^{\lambda,\varepsilon},\Delta)=J(\tau,z,w(\cdot),u(\cdot))=\sigma(x(\vartheta))+x^0(\vartheta)=\rho(\vartheta,x(\vartheta),x_\vartheta(\cdot))+x^0(\vartheta) \leqslant$$

$$\leqslant \rho^{\lambda,\varepsilon}(\vartheta,x(\vartheta),x_\vartheta(\cdot))+x^0(\vartheta)+\zeta/3 \leqslant \rho^{\lambda,\varepsilon}(\tau,z,w(\cdot))+2\zeta/3 \leqslant \rho(\tau,z,w(\cdot))+\zeta,$$

где функция $u(\cdot)\in\mathcal{U}_\tau$ определяется в соответствии с пошаговым правилом (26), $x(\cdot)=x(\cdot\mid\tau,z,w(\cdot),u(\cdot))$ – движение системы (1), (2), $x^0(\cdot)=x^0(\cdot\mid\tau,z,w(\cdot),u(\cdot))$ – функция, определяемая согласно (5). Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
2. *Berkovitz L.* Optimal feedback controls // SIAM J. on Control and Optimiz. 1989. V. 27. № 5. P. 991–1006.
3. *Frankowska H.* Optimal trajectories associated with a solution of the contingent Hamilton–Jacobi equation // Appl. Math. and Optimiz. 1989. V. 19. P. 291–311.
4. *Rowland J.D.L., Vinter R.B.* Construction of optimal feedback controls // Syst. and Control Lett. 1991. V. 16. № 5. P. 357–367.
5. *Clarke F.H., Ledyaev Y.S., Subbotin A.I.* Universal feedback control via proximal aiming in problems of control under disturbance and differential games. Montreal, 1994 (Preprint/Centre de Recherches Mathematiques, Universitede Montreal, № 2386).
6. *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Berlin, 1995.
7. *Swiech A.* Sub- and superoptimality principle of dynamic programming revisited // Nonlin. Anal. Theor., Methods and Appl. 1996. V. 26. № 8. P. 1429–1436.
8. *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. Boston, 1997.
9. *Nobakhtian S., Stern R.J.* Universal near-optimal feedbacks // J. of Optimiz. Theor. and Appl. 2000. V. 107. № 1. P. 89–122.
10. *Осипов Ю.С.* Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 4. С. 779–782.
11. *Лукоянов Н.Ю.* Стратегии прицеливания в направлении инвариантных градиентов // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68. № 4. С. 629–643.
12. *Лукоянов Н.Ю.* Об условиях оптимальности гарантированного результата в задачах управления системами с запаздыванием // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 158–169.
13. *Plaksin A.R.* On Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equation for time-delay systems // IFAC-PapersOnLine. 2019. V. 52. № 18. P. 138–143.
14. *Plaksin A.R.* Minimax and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations for time-delay systems // J. Optimiz. Theor. Appl. 2020. V. 187. P. 22–42.
15. *Зверкин А.М., Каменский Г.А., Норкин С.Б., Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. № 2 (104). С. 77–164.
16. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.
17. *Evans L.* Partial Differential Equations. Rhode Island, 1998.
18. *Kim A.V.* Functional Differential Equations. Application of i-Smooth Calculus. Dordrecht, 1999.
19. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967.

Институт математики и механики
имени Н.Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург,
Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск

Поступила в редакцию 01.06.2022 г.
После доработки 01.06.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1525–1536

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977+519.633.9

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. В. И. Максимов

Рассматривается задача восстановления распределённых входных воздействий (возмущений) в линейных гиперболических уравнениях. Предлагается алгоритм решения этой задачи. В случае, когда входное воздействие – функция с ограниченной вариацией, устанавливается оценка сверху скорости сходимости. Алгоритм, основанный на соединении методов оптимального программного и позиционного управлений, позволяет осуществить процесс восстановления на основе неточных измерений решений уравнений в дискретные моменты времени.

DOI: 10.31857/S0374064122110085, EDN: MBCWVN

Введение. Пусть V и H – действительные гильбертовы пространства. Пространство V вложено в пространство H, плотно и непрерывно: $V \subset H = H^* \subset V^*$. Символы $|\cdot|_V$, $|\cdot|_{V^*}$ и $|\cdot|_H$ означают соответственно нормы в V, V^* и H, а символы $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ – соответственно скалярное произведение в H и двойственность между V и V^*.

Рассматривается гиперболическое уравнение

$$\ddot{x}(t) + Ax(t) = Bu(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = x_1.$$

Здесь $\vartheta \in (t_0, +\infty)$, $A : V \to V^*$ – линейный, непрерывный и симметричный оператор, удовлетворяющий (для некоторого $c > 0$) условию коэрцитивности

$$\langle Ay, y\rangle \geqslant c|y|_V^2 \quad \text{для любого} \quad y \in V, \tag{2}$$

U – гильбертово пространство с нормой $|\cdot|_U$ (пространство возмущений), производная $\dot{x}(\cdot)$ понимается в смысле пространства распределений [1, с. 95], B – линейный непрерывный оператор, действующий из пространства U в пространство H $(B \in L(U; H))$.

Следуя [1, с. 91], функцию $x(\cdot) \in C(T; V)$ такую, что $\dot{x}(\cdot) \in W(T; V) = \{z(\cdot) \in C(T; H) : \dot{z}(\cdot) \in L_2(T; V^*)\}$ и выполняется соотношение

$$\langle \ddot{x}(t), v\rangle + \langle Ax(t), v\rangle = (Bu(t), v) \quad \text{для любой} \quad v \in V \quad \text{при п.в.} \quad t \in T,$$

будем называть *решением (слабым) уравнения* (1) и обозначать

$$x(\cdot) = x(\,\cdot\,; t_0, x_0, x_1, u(\cdot)).$$

В дальнейшем полагаем, что вложение пространства V в пространство H компактно. Кроме того, $x_0 \in V$, $x_1 \in H$. Тогда (см. [1, с. 93]) при любой функции $u(\cdot) \in L_2(T; U)$ уравнение (1) имеет единственное решение (слабое).

Исследуемая в настоящей работе задача формулируется следующим образом. Имеется уравнение (1) с некоторым входным воздействием (возмущением) $u = u_*(\cdot)$. Заранее как это воздействие, так и отвечающее ему решение $x(\cdot) = x(\,\cdot\,; t_0, x_0, x_1, u_*(\cdot))$ уравнения не заданы. В дискретные, достаточно частые, моменты времени

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m \quad (\tau_0 = t_0, \quad \tau_m = \vartheta, \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta)$$

измеряются (с ошибкой) величины $x(\tau_i)$ и $\dot{x}(\tau_i)$. Результаты измерений – элементы $\psi_i^h \in V$ и $\xi_i^h \in H$ – удовлетворяют неравенствам

$$|\psi_i^h - x(\tau_i)|_V \leqslant h, \quad |\xi_i^h - \dot{x}(\tau_i)|_H \leqslant h, \quad i = \overline{0, m-1}. \tag{3}$$

Здесь число $h \in (0,1)$ характеризует “ошибку” вычислений $\{\dot{x}(\tau_i), x(\tau_i)\}$. Задача заключается в том, чтобы построить алгоритм приближённого восстановления неизвестного возмущения, порождающего решение $x(\cdot)$ уравнения (1).

Заметим, что одно и то же решение уравнения (1) может порождаться не единственным возмущением. Пусть символ $U(x(\cdot))$ означает множество всех возмущений, совместимых с выходом $x(t)$, $t \in T$, т.е.

$$U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in L_2(T;U) : (Bu(t), z) = \langle \ddot{x}(t) + Ax(t), z\rangle \ \text{ при п.в. } \ t \in T \ \text{ и всех } \ z \in V\}.$$

Как нетрудно видеть, множество $U(x(\cdot))$ выпукло и замкнуто в пространстве $L_2(T;U)$. Поэтому оно содержит единственный элемент минимальной $L_2(T;U)$-нормы – $u^*(\cdot)$. Следуя принятому в теории некорректных задач подходу, будем восстанавливать $u^*(\cdot)$.

Первый из алгоритмов динамической регуляризации, основанный на известном в теории гарантированного управления принципе экстремального сдвига [2, с. 57–59], был предложен в статье [3]. Впоследствии данный алгоритм был распространен на дифференциальные уравнения с распределёнными параметрами (см. [1, с. 44–51; 4, с. 10–29; 5; 6]). Здесь упомянуты лишь монографии и обзорные статьи, в которых можно найти дополнительные ссылки. Среди более поздних работ, в которых рассматривались гиперболические уравнения, отметим, например, [7–10]. В соответствии с описанным в этих работах методом задача восстановления неизвестного возмущения по результатам измерения заменяется некоторой другой задачей, а именно, задачей позиционного управления вспомогательной системой (уравнением) M, называемой *моделью*. При этом управление в модели определялось путём локальной регуляризации по методам сглаживающего функционала или невязки, известного в теории позиционных дифференциальных игр, экстремального сдвига. В настоящей работе будет предложен алгоритм решения рассматриваемой задачи, который можно трактовать как метод локальной регуляризации экстремального сдвига путём решения вспомогательной задачи оптимального программного управления с квадратичным критерием качества.

1. Алгоритм решения. Опишем алгоритм решения рассматриваемой задачи. Пусть имеется семейство разбиений $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$, $\tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h)$, $i = \overline{0, m_h - 1}$, $\tau_{h,0} = t_0$, $\tau_{h,m_h} = \vartheta$, $h \in (0,1)$, отрезка T, а также функция $\alpha = \alpha(h) : (0,1) \to (0,1)$. Всюду ниже для упрощения полагаем $t_0 = 0$, $h, \delta(h) \in (0,1)$.

До начала работы алгоритма фиксируются погрешность h, разбиение $\Delta_h = \{\tau_i\}_{i=0}^{m}$ $(\tau_i = \tau_{h,i},\ m = m_h)$ отрезка T с шагом $\delta = \delta(h)$ и число $\alpha = \alpha(h)$. Работа алгоритма разбивается на $m-1$ однотипных шагов. На i-м шаге $(i = \overline{1, m-1})$ алгоритма, осуществляемом на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, выполняются следующие операции. Сначала решается задача оптимального программного управления уравнением

$$\ddot{y}(\tau) + Ay(\tau) = Bf(\tau), \quad \tau \in [0, \delta], \quad y(0) = \psi_{i-1}^h, \quad \dot{y}(0) = \xi_{i-1}^h \tag{4}$$

с квадратичным критерием качества

$$I(f(\cdot), y(\cdot); \delta, \alpha, \xi_i^h, \psi_i^h) = \delta|\dot{y}(\delta) - \xi_i^h|_H^2 + \delta|y(\delta) - \psi_i^h|_V^2 + \alpha\int\limits_0^\delta |f(\tau)|_U^2\, d\tau. \tag{5}$$

Здесь $y(\cdot) = y(\cdot\,; 0, \psi_{i-1}^h, \xi_{i-1}^h, f(\cdot))$ – решение уравнения (4). Решением задачи (4), (5) является пара $\{f_{\text{opt}}^{(i-1)}(\cdot), y_{\text{opt}}^{(i-1)}(\cdot)\}$, где $y_{\text{opt}}^{(i-1)} = y(\cdot\,; 0, \psi_{i-1}^h, \xi_{i-1}^h f_{\text{opt}}^{(i-1)}(\cdot))$, такая, что

$$I(f_{\text{opt}}^{(i-1)}(\cdot), y_{\text{opt}}^{(i-1)}(\cdot); \delta, \alpha, \xi_i^h, \psi_i^h) =$$
$$= \min\{I(f(\cdot), y(\cdot); \delta, \alpha, \xi_i^h, \psi_i^h) : f(\cdot) \in L_2([0,\delta]; U), \quad y(\cdot) = y(\cdot\,; 0, \psi_{i-1}^h, \xi_{i-1}^h, f(\cdot))\}.$$

После этого вычисляется функция

$$u^h(t) = v_i^h(t - \tau_{h,i}), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \tag{6}$$

где

$$v_i^h(\tau) = \mathcal{U}_h(\tau_i, \psi_{i-1}^h, \psi_i^h, \xi_{i-1}^h, \xi_i^h) = \begin{cases} 0 & \text{при } \ \tau \in [0, \delta), \quad i = 0, \\ f_{\text{opt}}^{(i-1)}(\tau) & \text{при } \ \tau \in [0, \delta), \quad i = \overline{1, m-1}. \end{cases} \tag{7}$$

Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Замечание 1. Решение задачи оптимального программного управления с квадратичным критерием качества приведено, например, в монографии [11, гл. 4, §§ 2, 3].

Справедлива

Теорема 1. *Пусть* $\delta(h) \to 0$, $\alpha(h) \to 0$, $h\delta^{-2}(h) \to 0$, $\alpha(h)\delta^{-5/2}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда имеет место сходимость*

$$u^h(\cdot) \to u^*(\cdot) \ \text{ в } \ L_2(T; U) \ \text{ при } \ h \to 0. \tag{8}$$

Таким образом, для реализации описанного выше алгоритма модель не требуется, однако она необходима для обоснования его сходимости (см. доказательство теоремы 1, в котором используются оценки из теоремы 2).

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1 приведём вспомогательные построения. Следуя работам [1, с. 15; 7–10], введём вспомогательную управляемую систему (модель), описываемую уравнением

$$\ddot{w}^h(t) = \begin{cases} u^h(t) & \text{при п.в. } \ t \in [0, \delta(h)), \\ -Aw^h(t) + Bu^h(t) & \text{при п.в. } \ t \in [\delta(h), \vartheta]. \end{cases} \tag{9}$$

Начальное состояние модели определяют условия $w^h(0) = \psi_0^h$, $\dot{w}^h(0) = \xi_0^h$. Управление моделью осуществляется синхронно с процессом восстановления. На промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, на вход модели (9) подается управление $u^h(\cdot)$ вида (6). После этого формируется решение $w^h(t) = w^h(t; \tau_i, w^h(\tau_i), \dot{w}^h(\tau_i), u^h(\cdot))$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, уравнения (9), т.е. осуществляется корректировка памяти.

Имеет место следующая

Теорема 2. *Справедливы неравенства*

$$\varepsilon_{h,\delta} = \max\{|\dot{x}(\tau_i) - \dot{w}^h(\tau_{i+1})|_H^2 + c|x(\tau_i) - w^h(\tau_{i+1})|_V^2 : i \in [0 : m_h - 1]\} \leqslant C_*\chi(h, \alpha, \delta), \tag{10}$$

$$|u^h(\cdot)|_{L_2(T)} \leqslant |u^*(\cdot)|_{L_2(T)} + C_{**}h^{1/2}\alpha^{-1/2}. \tag{11}$$

Здесь $\chi(h, \alpha, \delta) = h\delta^{-2} + \alpha\delta^{-5/2} + h^{1/2}\delta^{-1} + \delta^{1/2}$, C_* *и* C_{**} *– некоторые постоянные, не зависящие от* h, α, δ, *символ* $|\cdot|_{L_2(T)}$ *означает норму в пространстве* $L_2(T; U)$.

Доказательство. Введём обозначение

$$z(t) = y_{\text{opt}}^{(i-1)}(t - \tau_{i-1}) \quad \text{при} \quad t \in \delta_i = [\tau_{i-1}, \tau_i).$$

Тогда функция $z(\cdot)$ на отрезке $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ является решением уравнения

$$\ddot{z}(t) + Az(t) = Bu^h(t) \tag{12}$$

с начальными условиями

$$z(\tau_{i-1}) = \psi_{i-1}^h, \quad \dot{z}(\tau_{i-1}) = \xi_{i-1}^h$$

и управлением

$$u^h(t) = f_{\text{opt}}^{(i-1)}(t - \tau_{i-1}) \ \text{ при п.в. } \ t \in [\tau_{i-1}, \tau_i). \tag{13}$$

Таким образом, из (9), (7), (6), (12) и (13) следует соотношение

$$\ddot{\mu}_\delta^h(t) + A\mu_\delta^h(t) = 0 \text{ при п.в. } t \in [\tau_{i-1}, \tau_i] \text{ и всех } i = \overline{1, m-1}, \tag{14}$$

где $\mu_\delta^h(t) = z(t) - w^h(t+\delta)$. Умножив правую и левую части равенства (14) на $\mu_\delta^h(t)$ (скалярно в H) и проинтегрировав полученное выражение, будем иметь

$$|\dot{\mu}_\delta^h(t)|_H^2 + \langle A\mu_\delta^h(t), \mu_\delta^h(t)\rangle = |\xi_{i-1}^h - \dot{w}^h(\tau_i)|_H^2 + \langle A\mu_\delta^h(\tau_{i-1}), \mu_\delta^h(\tau_{i-1})\rangle, \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]. \tag{15}$$

В свою очередь, учитывая правило определение функции $z(\cdot)$, а также условие (2), из (15) получаем

$$|\dot{y}_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\delta) - \dot{w}^h(\tau_{i+1})|_H^2 + e_i = |\xi_{i-1}^h - \dot{w}^h(\tau_i)|_H^2 + \nu_i, \tag{16}$$

где

$$e_i = \langle A(y_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\delta) - w^h(\tau_{i+1})), y_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\delta) - w^h(\tau_{i+1})\rangle \geqslant 0, \quad i = \overline{1, m-1},$$
$$\nu_i = \langle A(\psi_{i-1}^h - w^h(\tau_i)), \psi_{i-1}^h - w^h(\tau_i)\rangle \geqslant 0, \quad \nu_1 = 0.$$

Рассмотрим задачу оптимального управления уравнением (4) с начальными условиями

$$y(0) = x(\tau_{i-1}), \quad \dot{y}(0) = \dot{x}(\tau_{i-1})$$

и критерием качества $I(f(\cdot), y(\cdot); \delta, \alpha, \dot{x}(\tau_i), x(\tau_i))$ вида (5). Обозначим оптимальное управление в этой задаче символом $f_{i-1}^\delta(\cdot)$, а оптимальную траекторию через

$$y_{i-1}^\delta(\cdot) = y(\cdot\,; 0, x(\tau_{i-1}), \dot{x}(\tau_{i-1}), f_{i-1}^\delta(\cdot)).$$

Легко видеть, что верно неравенство

$$I(f_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\cdot), y_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\cdot); \delta, \alpha, \xi_i^h, \psi_i^h) = \delta|\dot{y}(\delta; 0, \psi_{i-1}^h, \xi_{i-1}^h, f_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\cdot)) - \xi_i^h|_H^2 +$$
$$+ \delta|y(\delta; 0, \psi_{i-1}^h, \xi_{i-1}^h, f_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\cdot)) - \psi_i^h|_V^2 + \alpha\int_0^\delta |f_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\tau)|_U^2\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \delta|\dot{y}(\delta; 0, \psi_{i-1}^h, \xi_{i-1}^h, f_{i-1}^\delta(\cdot)) - \xi_i^h|_H^2 + \delta|y(\delta; 0, \psi_{i-1}^h, \xi_{i-1}^h, f_{i-1}^\delta(\cdot)) - \psi_i^h|_V^2 + \alpha\int_0^\delta |f_{i-1}^\delta(\tau)|_U^2\,d\tau. \tag{17}$$

Заметим, что вложение пространства V в пространство H непрерывно, т.е. существует число $C_1 > 0$ такое, что для любых $x \in V:$ $|x|_H \leqslant C_1|x|_V$. Поэтому, учитывая линейность оператора A, а также (2), (3), нетрудно показать, что верно неравенство

$$|\dot{y}_{i-1}^\delta(\delta) - \dot{y}(\delta; 0, \psi_{i-1}^h, \xi_{i-1}^h, f_{i-1}^\delta(\cdot))|_H + |y_{i-1}^\delta(\delta) - y(\delta; 0, \psi_{i-1}^h, \xi_{i-1}^h, f_{i-1}^\delta(\cdot))|_V \leqslant C_2 h.$$

В таком случае из (17) и (3) следует, что

$$I(f_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\cdot), y_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\cdot); \delta, \alpha, \xi_i^h, \psi_i^h) \leqslant \delta\{|\dot{y}_{i-1}^\delta(\delta) - \dot{x}(\tau_i)|_H + C_3 h\}^2 +$$
$$+ \delta\{|y_{i-1}^\delta(\delta) - x(\tau_i)|_V + C_4 h\}^2 + \alpha\int_0^\delta |f_{i-1}^\delta(\tau)|_U^2\,d\tau. \tag{18}$$

Далее имеем

$$\alpha\int_0^\delta |f_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\tau)|_U^2\,d\tau \leqslant I(f_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\cdot), y_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\cdot); \delta, \alpha, \xi_i^h, \psi_i^h). \tag{19}$$

Кроме того, как нетрудно видеть,

$$\sup_{t\in T}\{|\dot{x}(t)|_H + |x(t)|_V\} \leqslant C_5. \tag{20}$$

Действительно, умножив правую и левую части уравнения (1) на $\dot{x}(t)$, будем иметь

$$0.5d|\dot{x}(t)|_H^2/dt + \langle Ax(t), \dot{x}(t)\rangle \leqslant |Bu(t)|_H |\dot{x}(t)|_H.$$

После интегрирования получим

$$|\dot{x}(t)|_H^2 + \langle Ax(t), x(t)\rangle \leqslant |\dot{x}(0)|_H^2 + \langle Ax(0), x(0)\rangle + \int\limits_0^\vartheta |Bu(t)|_H^2\, dt + \int\limits_0^t |\dot{x}(t)|_H^2\, dt \quad \text{для любого} \quad t \in T.$$

Отсюда, учитывая (2), включение $u(\cdot) \in L_2(T;U)$ и лемму Гроноулла, получаем неравенство (20). Пусть $y(\cdot)$ – решение уравнения

$$\ddot{r}(t) + Ar(t) = 0, \quad t \in [0,\delta], \tag{21}$$

с начальными условиями $r(0) = x(\tau_{i-1})$, $\dot{r}(0) = \dot{x}(\tau_{i-1})$. Умножив (скалярно) правую и левую части (21) на $\dot{r}(\cdot)$ и проинтегрировав, будем иметь

$$|\dot{r}(t)|_H^2 + \langle Ar(t), r(t)\rangle = |\dot{r}(0)|_H^2 + \langle Ar(0), r(0)\rangle.$$

Отсюда, воспользовавшись (2), получим

$$|\dot{r}(\delta)|_H^2 + c|r(\delta)|_V^2 \leqslant |\dot{x}(\tau_{i-1})|_H^2 + |A|_{L(V;V^*)}|x(\tau_{i-1})|_V^2.$$

Здесь $|A|_{L(V;V^*)}$ – норма линейного непрерывного оператора $A : V \to V^*$. Таким образом, ввиду последнего неравенства, а также (20),

$$\sup_{i\in[1:m_h]} \{|\dot{y}(\delta; 0, x(\tau_{i-1}), \dot{x}(\tau_{i-1}), u_0(\cdot))|_H, |y(\delta; 0, x(\tau_{i-1}), \dot{x}(\tau_{i-1}), u_0(\cdot))|_V\} \leqslant C_6, \tag{22}$$

где C_6 не зависит от h,

$$u_0(t) = 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0,\delta].$$

Далее, имеем

$$I(f_{i-1}^\delta(\cdot), y_{i-1}^\delta(\cdot); \delta, \alpha, \dot{x}(\tau_i), x(\tau_i)) \leqslant I(u_0(\cdot), y(\cdot\,; 0, x(\tau_{i-1}), \dot{x}(\tau_{i-1}), u_0(\cdot)); \delta, \alpha, \dot{x}(\tau_i), x(\tau_i)) =$$

$$= \delta|\dot{y}(\delta; 0, x(\tau_{i-1}), \dot{x}(\tau_{i-1}), u_0(\cdot)) - \dot{x}(\tau_i)|_H^2 + \delta|y(\delta; 0, x(\tau_{i-1}), \dot{x}(\tau_{i-1}), u_0(\cdot)) - x(\tau_i)|_V^2.$$

Отсюда и из (20) и (22) следует существование числа $C_7 \in (0, +\infty)$ такого, что

$$\sup\{|\dot{y}(\delta; 0, x(\tau_{i-1}), \dot{x}(\tau_{i-1}), f_{i-1}^\delta(\cdot))|_H,$$

$$|y(\delta; 0, x(\tau_{i-1}), \dot{x}(\tau_{i-1}), f_{i-1}^\delta(\cdot))|_V : \delta \in (0,1), \quad i = \overline{1,m}\} \leqslant C_7. \tag{23}$$

Поэтому, используя (20) и (23), выводим оценку

$$\{|\dot{y}_{i-1}^\delta(\delta) - \dot{x}(\tau_i)|_H + C_3 h\}^2 + \{|y_{i-1}^\delta(\delta) - x(\tau_{i-1})|_V + C_4 h\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant |\dot{y}_{i-1}^\delta(\delta) - \dot{x}(\tau_i)|_H^2 + |y_{i-1}^\delta(\delta) - x(\tau_{i-1})|_V^2 + C_8 h. \tag{24}$$

Таким образом, в силу (6), (7), (18), (19) и (24) получаем

$$\alpha \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u^h(\tau)|_U^2\, d\tau = \alpha \int\limits_0^\delta |f_{\text{opt}}^{(i-1)}(\tau)|_U^2\, d\tau \leqslant \tag{25}$$

$$\leqslant \delta|\dot{y}_{i-1}^\delta(\delta) - \dot{x}(\tau_i)|_H^2 + \delta|y_{i-1}^\delta(\delta) - x(\tau_i)|_V^2 + C_8\delta h + \alpha\int\limits_0^\delta |f_{i-1}^\delta(\tau)|_U^2\, d\tau.$$

Учитывая правило определения управления $f_{i-1}^\delta(\cdot)$, устанавливаем неравенство

$$\delta|\dot y_{i-1}^\delta(\delta)-\dot x(\tau_i)|_H^2+\delta|y_{i-1}^\delta(\delta)-x(\tau_i)|_V^2+\alpha\int\limits_0^\delta|f_{i-1}^\delta(\tau)|_U^2\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\alpha\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}|u^*(\tau)|_U^2\,d\tau=I(u^*(\cdot),\tilde y(\cdot);\delta,\alpha,\dot x(\tau_i),x(\tau_i)),\tag{26}$$

где $\tilde y(\cdot)=y(\cdot\,;\tau_{i-1},x(\tau_{i-1}),\dot x(\tau_{i-1}),u^*(\cdot))$. Воспользовавшись этим неравенством, а также (25), получаем

$$\alpha\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|u^h(\tau)|_U^2\,d\tau\leqslant\alpha\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}|u^*(\tau)|_U^2\,d\tau+C_8\delta h,\tag{27}$$

откуда следует неравенство (11). Осталось проверить неравенство (10). Оценим изменение величины $\varepsilon(\tau_i)=|\dot x(\tau_i)-\dot w^h(\tau_i+\delta)|_H^2+c|x(\tau_i)-w^h(\tau_i+\delta)|_V^2$ при изменении $i=\overline{0,m-1}$ и $t\in[\tau_i,\tau_{i+1})$ $(\tau_i=\tau_{h,i},\ \ m=m_h)$. Из (18) и (24) вытекает оценка

$$I(u_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\cdot),y_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\cdot);\delta,\alpha,\xi_i^h,\psi_i^h)\leqslant\delta|\dot y_{i-1}^\delta(\delta)-\dot x(\tau_i)|_H^2+\delta|y_{i-1}^\delta(\delta)-x(\tau_i)|_V^2+$$

$$+\alpha\int\limits_0^\delta|f_{i-1}^\delta(\tau)|_U^2\,d\tau+C_8\delta h.\tag{28}$$

В свою очередь, из (28) и (26) следует неравенство

$$\delta|\dot y_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\delta)-\xi_i^h|_H^2+\delta|y_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\delta)-\psi_i^h|_V^2\leqslant$$

$$\leqslant\delta|\dot y_{i-1}^\delta(\delta)-\dot x(\tau_i)|_H^2+\delta|y_{i-1}^\delta(\delta)-x(\tau_i)|_V^2+\alpha\int\limits_0^\delta|f_{i-1}^\delta(\tau)|_U^2\,d\tau+C_8\delta h\leqslant C_8\delta h+\alpha\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}|u^*(\tau)|_U^2\,d\tau.$$

Таким образом,

$$|\dot y_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\delta)-\xi_i^h|_H^2+|y_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\delta)-\psi_i^h|_V^2\leqslant C_8h+\alpha\delta^{-1}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}|u^*(\tau)|_U^2\,d\tau.\tag{29}$$

Умножим обе части уравнения (9) на $\dot w^h(t)$. После интегрирования полученного равенства в силу (2) будем иметь

$$|\dot w^h(t)|_H^2+c|w^h(t)|_V^2\leqslant\int\limits_0^t|Bu^h(\tau)|_H|w^h(\tau)|_H\,d\tau+|\dot w^h(0)|_H^2.$$

Отсюда в силу неравенства Гроноулла находим

$$\sup_{t\in T}\{|\dot w^h(t)|_H+|w^h(t)|_V\}\leqslant C_9,\quad h\in(0,1).\tag{30}$$

Из (16) и (30) также следует $(\delta=\delta(h),\ \ m=m_h)$, что

$$\sup_{i=\overline{1,m-1}}|y_{\mathrm{opt}}^{(i-1)}(\delta)|_V\leqslant C_{10},\quad h\in(0,1).\tag{31}$$

Далее, учитывая (29)–(31), выводим оценку

$$\nu_{i+1} = \langle A(y_{\text{opt}}^{(i-1)}(\delta) - w^h(\tau_{i+1})), \psi_i^h - w^h(\tau_{i+1})\rangle + \langle A(\psi_i^h - y_{\text{opt}}^{(i-1)}(\delta)), \psi_i^h - w^h(\tau_{i+1})\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \langle A(y_{\text{opt}}^{(i-1)}(\delta) - w^h(\tau_{i+1})), \psi_i^h - w^h(\tau_{i+1})\rangle + C_{11}\phi_i \leqslant e_i + C_{12}\phi_i, \tag{32}$$

где

$$\phi_i = \biggl(h + \alpha\delta^{-1}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |u^*(\tau)|_U^2\,d\tau\biggr)^{1/2}.$$

Воспользовавшись (16), (29), (32), получаем $(i = \overline{1, m-1})$ неравенства

$$|\xi_i^h - \dot w^h(\tau_{i+1})|_H^2 + \nu_{i+1} \leqslant (|\dot y_{\text{opt}}^{(i-1)}(\delta) - \dot w^h(\tau_{i+1})|_H + |\dot y_{\text{opt}}^{(i-1)}(\delta) - \xi_i^h|_H)^2 + e_i + C_{12}\phi_i \leqslant$$

$$\leqslant (1 + C_{13}\delta)\{|\xi_{i-1}^h - w^h(\tau_i)|_H^2 + \nu_i\} + (1+\delta^{-1})|\dot y_{\text{opt}}^{(i-1)}(\delta) - \xi_i^h|_H^2 + C_{12}\phi_i \leqslant$$

$$\leqslant (1 + C_{12}\delta)\{|\xi_{i-1}^h - \dot w^h(\tau_i)|_H^2 + \nu_i\} + (1+\delta^{-1})\biggl(C_8 h + \alpha\delta^{-1}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}|u^*(\tau)|_U^2\,d\tau\biggr) + C_{12}\phi_i,$$

откуда в силу леммы из работы [12] следует оценка

$$|\xi_i^h - \dot w^h(\tau_{i+1})|_H^2 + c|\psi_i^h - w^h(\tau_{i+})|_V^2 \leqslant \biggl\{|\xi_0^h - \dot w^h(\tau_1)|_H^2 + \nu_1 +$$

$$+ (1+\delta^{-1})\biggl(C_{13}h\delta^{-1} + \alpha\delta^{-1}\int\limits_0^{\tau_i}|u^*(\tau)|_U^2\,d\tau\biggr) + C_{14}\sum_{j=1}^i \phi_j\biggr\}\exp\{C_{12}\tau_i\}. \tag{33}$$

Заметим, что $\nu_1 = 0$ и

$$\phi_i \leqslant h^{1/2} + \alpha\delta^{-3/2} + \delta^{1/2}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}|u^*(\tau)|_U^2\,d\tau,$$

поэтому

$$\sum_{j=1}^i \phi_j \leqslant C_{14}\biggl\{h^{1/2}\delta^{-1} + \alpha\delta^{-5/2} + \delta^{1/2}\int\limits_0^{\tau_i}|u^*(\tau)|_U^2\,d\tau\biggr\}. \tag{34}$$

Из неравенств (33) и (34) получаем оценку

$$\varepsilon(\tau_i) \leqslant (h + |\xi_i^h - \dot w^h(\tau_{i+1})|_H)^2 + c(h + |\psi_i^h - w^h(\tau_{i+1})|_V)^2 \leqslant C_{15}\chi(h,\alpha,\delta).$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1. Покажем, что для произвольной последовательности $h_j \to \to 0+$ при $j \to \infty$ и любого семейства $\{\Delta_{h_j}\} = \{\tau_{h_j,i}\}_{i=0}^{m_h}$ разбиений промежутка T имеет место сходимость

$$u^{h_j}(\cdot) \to u^*(\cdot) \ \text{ в } \ L_2(T;U) \ \text{ при } \ j \to \infty.$$

Здесь и ниже управления $u^{h_j}(\cdot)$ определены по правилу (6), (7), в которых $h = h_j$. Предполагая противное, заключаем, что найдётся подпоследовательность последовательности $u^{h_j}(\cdot)$ (обозначим её для упрощения тем же символом $u^{h_j}(\cdot)$) такая, что

$$u^{h_j}(\cdot) \to f_0(\cdot) \ \text{ слабо в } \ L_2(T;U) \ \text{ при } \ j \to \infty, \tag{35}$$

$$f_0(\cdot) \neq u^*(\cdot). \tag{36}$$

Введём оператор $\mathcal{C} : L_2(T;U) \to L_2(T;V^*)$ по формуле

$$\mathcal{C}f(\cdot) = \dot{x}(\cdot\,;0,x_0,x_1,f(\cdot)),$$

где $x(\cdot)$ – решение уравнения (1). В силу неравенства (1.7) из работы [1], а также непрерывности вложения пространства H в пространство V^*, оператор $\mathcal{C}$ является линейным и непрерывным. Тогда, учитывая (35), имеем

$$\langle \dot{x}(\cdot\,;u^{h_j}(\cdot)),\phi\rangle^* = \langle \mathcal{C}u^{h_j}(\cdot),\phi\rangle^* = \langle u^{h_j}(\cdot),\mathcal{C}^*\phi\rangle_U \quad \text{при} \quad j\to\infty,$$

$$\langle f_0(\cdot),\mathcal{C}^*\phi\rangle_U = \langle \mathcal{C}f_0(\cdot),\phi\rangle^* = \langle \dot{x}(\cdot\,;f_0(\cdot)),\phi\rangle^* \quad \text{при всех} \quad \phi\in L_2(T;V).$$

Здесь $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle^*$ означает двойственность между пространствами $L_2(T;V)$ и $L_2(T;V^*)$, $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_U$ – скалярное произведение в пространстве U, $x(\cdot\,;f_0(\cdot)) = x(\cdot\,;0,x_0,x_1,f_0(\cdot))$, а $\dot{x}(\cdot\,;u^{h_j}(\cdot))$ – производную решения $x(\cdot\,;0,x_0,x_1,u^{h_j}(\cdot))$ уравнения (1). Таким образом,

$$\dot{x}(\cdot\,;u^{h_j}(\cdot)) \to \dot{x}(\cdot\,;f_0(\cdot)) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T;V^*). \tag{37}$$

Заметим, что $w^{h_j}(t-\delta(h_j)) = x(t;u_j^h(\cdot))$ при $t\in[\delta(h_j),\vartheta]$. Поэтому справедливо равенство

$$\int\limits_0^{\vartheta} \langle \dot{x}(t;u^{h_j}(\cdot)) - \dot{x}(t;f_0(\cdot)),\phi(t)\rangle\,dt = I_{h_j} + J_{h_j} \quad \text{для любой} \quad \phi\in L_2(T;V^*), \tag{38}$$

где

$$I_{h_j} = \int\limits_0^{\delta(h_j)} \langle \dot{x}(t;u^{h_j}(\cdot)) - \dot{x}(t;f_0(\cdot)),\phi(t)\rangle\,dt,$$

$$J_{h_j} = \int\limits_{\delta(h_j)}^{\vartheta} \langle \dot{w}^{h_j}(t-\delta(h_j)) - \dot{x}(t;f_0(\cdot)),\phi(t)\rangle\,dt.$$

В силу неравенства (11) аналогично оценке (20) устанавливается равномерная ограниченность в метрике пространства $C(T;H)$ множества $\{\dot{x}(\cdot\,;u^{h_j}(\cdot))\}_{j=1}^{\infty}$. Вследствие этого,

$$I_{h_j} \to 0 \quad \text{при} \quad j\to\infty. \tag{39}$$

Учитывая (37)–(39), непрерывность в среднем функции $\dot{x}(\cdot\,;f_0(\cdot))$, а также ограниченность в $C(T;H)$ множества $\{\dot{w}^{h_j}(\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$ (см. (30)), получаем

$$J_{h_j} = \int\limits_0^{\vartheta-\delta(h_j)} \langle \dot{w}^{h_j}(t) - \dot{x}(t+\delta(h_j);f_0(\cdot)),\phi(t)\rangle\,dt \to 0 \quad \text{при} \quad j\to\infty \quad \text{для любой} \quad \phi(\cdot)\in L_2(T;V).$$

Значит,

$$\dot{w}^{h_j}(\cdot) \to \dot{x}(\cdot\,;f_0(\cdot)) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T;V^*) \quad \text{при} \quad j\to\infty. \tag{40}$$

В силу теоремы 1 (см. (10)) получаем

$$\max_{t\in T} |\dot{w}^{h_j}(t) - \dot{x}(t)|_{V^*} \to 0 \quad \text{при} \quad j\to\infty, \tag{41}$$

где $\dot{x}(\cdot) = \dot{x}(\cdot\,;0,x_0,x_1,u^*(\cdot))$, т.е.

$$\dot{w}^{h_j}(\cdot) \to \dot{x}(\cdot) \quad \text{в} \quad C(T;V^*) \quad \text{при} \quad j\to\infty.$$

Из (40) и (41) следует равенство

$$\dot{x}(t;0,x_0,x_1,f_0(\cdot)) = \dot{x}(t;0,x_0,x_1,u^*(\cdot)) \ \text{ при всех } \ t \in T,$$

значит $f_0(\cdot) \in U(x(\cdot))$ и, следовательно,

$$|f_0(\cdot)|_{L_2} \geqslant |u^*(\cdot)|_{L_2}. \tag{42}$$

Символ $|\cdot|_{L_2}$ означает норму в пространстве $L_2(T;U)$. Кроме того, в силу известных свойств слабого предела из сходимости (35) вытекает, что

$$\varliminf_{j\to\infty} |u^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \geqslant |f_0(\cdot)|_{L_2}. \tag{43}$$

Ввиду (11) справедливо неравенство

$$|u^{h_j}(\cdot)|^2_{L_2} \leqslant |u^*(\cdot)|^2_{L_2} + C_{**} h_j^{1/2} \alpha^{1/2}(h_j),$$

откуда следует, что

$$\varlimsup_{j\to\infty} |u^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \leqslant |u^*(\cdot)|_{L_2}, \tag{44}$$

т.е. (см. (42)–(44))

$$\varlimsup_{j\to\infty} |u^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \leqslant |u^*(\cdot)|_{L_2} \leqslant |f_0(\cdot)|_{L_2} \leqslant \varliminf_{j\to\infty} |u^{h_j}(\cdot)|_{L_2}. \tag{45}$$

Так как множество $U(x(\cdot))$ содержит единственный элемент минимальной L_2-нормы (а именно $u^*(\cdot)$), то из (45) получаем равенство

$$f_0(\cdot) = u^*(\cdot). \tag{46}$$

Воспользовавшись (35), (46), заключаем, что

$$u^{h_j}(\cdot) \to u^*(\cdot) \ \text{ слабо в } \ L_2 \ \text{ при } \ j \to \infty. \tag{47}$$

Сходимость (47) противоречит (35) и (36). Теорема доказана.

Замечание 2. Пусть управления $f_{\text{opt}}^{(i-1)}(\cdot)$ находятся приближённо, т.е. вместо них вычисляются управления $\overline{f}_{\text{opt}}^{(i-1)}(\cdot) \in L_2([0,\delta];U)$ такие, что

$$|f_{\text{opt}}^{(i-1)}(\cdot) - \overline{f}_{\text{opt}}^{(i-1)}(\cdot)|_{L_2([0,\delta];U)} \leqslant \gamma(h).$$

Тогда естественно полагать (см. (7))

$$\mathcal{U}_h(\tau_i, \psi_{i-1}^h, \psi_i^h, \xi_{i-1}^h, \xi_i^h) = \begin{cases} 0 & \text{при } \ \tau \in [0,\delta], \quad i = 0, \\ \overline{f}_{\text{opt}}^{(i-1)}(\tau) & \text{при } \ \tau \in [0,\delta], \quad i = \overline{1, m-1}. \end{cases}$$

В этом случае справедливы неравенства

$$|\overline{f}_{\text{opt}}^{(i-1)}(\cdot)|^2_{L_2(\delta;U)} \leqslant (\gamma(h) + |f_{\text{opt}}^{(i-1)}(\cdot)|_{L_2(\delta;U)})^2 \leqslant (1+\alpha^{-1})\gamma(h)^2 + (1+\alpha)|f_{\text{opt}}^{(i-1)}(\cdot)|^2_{L_2(\delta;U)},$$

поэтому

$$\alpha \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u^h(\tau)|^2_U \, d\tau = \alpha \int\limits_0^\delta |\overline{f}_{\text{opt}}^{(i-1)}(\tau)|^2_U \, d\tau \leqslant \alpha(1+\alpha) \int\limits_0^\delta |f_{\text{opt}}^{(i-1)}(\tau)|^2_U \, d\tau + \alpha\gamma^2(h)(1+\alpha^{-1}).$$

Значит (см. (13), (27)),

$$\alpha \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u^h(\tau)|_U^2\, d\tau \leqslant \alpha(1+\alpha) \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |u_*(\tau)|_U^2\, d\tau + C_8\delta h + \alpha\gamma^2(h)(1+\alpha^{-1})$$

и, следовательно, вместо (11) выполняется неравенство

$$|u^h(\cdot)|_{L_2(T)} \leqslant (1+\alpha)|u_*(\cdot)|_{L_2(T)} + C_{**}(h^{1/2}\alpha^{-1/2} + \gamma^2(h)\delta^{-1})(1+\alpha^{-1}).$$

В свою очередь, нетрудно показать, что вместо неравенства (10) будет выполняться неравенство

$$\varepsilon(t) \leqslant C_*\{\chi(h,\delta,\alpha) + \gamma^2(h)\delta^{-1}\alpha^{-1}\} \quad \text{при} \quad t \in [0, \vartheta - \delta].$$

В таком случае имеет место сходимость (8), если выполнены условия теоремы 3, а также следующее условие: $\gamma^2(h)(\alpha(h)\delta(h))^{-1} \to 0$ при $h \to 0$.

Замечание 3. Рассмотрим систему

$$\ddot{x}(t) + Ax(t) = Bf(t) + v(t),$$

где $v(\cdot) \in L_2(T; H)$ – фиксированная функция. В этом случае уравнение модели имеет вид

$$\dot{w}^h(t) = \begin{cases} u^h(t) & \text{при п.в. } t \in [0, \delta(h)), \\ -Aw^h(t) + Bu^h(t) + v(t) & \text{при п.в. } t \in [\delta(h), \vartheta], \end{cases}$$

а управление $u^h(\cdot)$ находится по формуле

$$u^h(t) = \mathcal{U}_h(\tau_i, \psi_{i-1}^h, \psi_i^h, \xi_{i-1}^h, \xi_i^h) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \in [0, \delta), \quad i = 0, \\ f_0^{(i-1)}(\tau) & \text{при } \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = \overline{1, m-1}, \end{cases}$$

где пара функций $\{f_0^{(i-1)}(\cdot), y_0^{(i-1)}(\cdot)\}$ является решением задачи оптимального программного управления

$$\ddot{y}(\tau) + Ay(\tau) = Bf(\tau) + v(\tau), \quad \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad y(\tau_{i-1}) = \psi_{i-1}^h, \quad \dot{y}(\tau_{i-1}) = \xi_{i-1}^h$$

с квадратичным критерием качества

$$I(f(\cdot), y(\cdot); \delta, \alpha, \xi_i^h, \psi_i^h) = \delta|y(\tau_i; \tau_{i-1}, \psi_{i-1}^h, \xi_{i-1}^h, f(\cdot)) - \psi_i^h|_V^2 +$$

$$+ \delta|\dot{y}(\tau_i; \tau_{i-1}.\psi_{i-1}^h, \xi_{i-1}^h, f(\cdot)) - \xi_i^h|_H^2 + \alpha \int\limits_0^\delta |f(\tau)|_U^2\, d\tau.$$

2. Скорость сходимости алгоритма. Установим оценку скорости сходимости алгоритма. В дальнейшем нам понадобится

Лемма [13]. *Пусть заданы две функции: $t \to a(t) \in L_2(T; W^*)$ и $t \to b(t) \in W$, $t \in T$, причём $b(\cdot)$ является функцией с ограниченной вариацией. Если верны неравенства*

$$\Big| \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau \Big|_{W^*} \leqslant \varepsilon, \quad |b(t)|_W \leqslant d, \quad t \in T,$$

то справедлива оценка

$$\int\limits_{t_0}^{\vartheta} \langle a(t), b(t) \rangle_W\, d\tau \leqslant \varepsilon(\mathrm{var}_T b(t) + d).$$

Здесь W – банахово пространство с нормой $|\cdot|_W$, символ $\mathrm{var}_T b(t)$ означает полную вариацию функции $b(t)$ на промежутке T, а символ $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_W$ – двойственность между W^* и W.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, $U = V$, $B = I$ (тождественные оператор) и функция $t \to u^*(t) \in V$ является функцией с ограниченной вариацией. Тогда справедлива следующая оценка скорости сходимости алгоритма:*

$$\int\limits_0^{\vartheta-\delta} |u^*(t) - u^h(t+\delta)|_H^2\,dt \leqslant c\{\chi^{1/4}(h,\delta,\alpha) + h\alpha^{-1}\}. \tag{48}$$

Доказательство. Учитывая линейность и непрерывность оператора $A : V \to V^*$, заключаем, что при всех $t \in [0, \vartheta-\delta]$ имеет место оценка

$$\Big|\int\limits_0^t J(u^*(\tau) - u^h(\tau+\delta))\,d\tau\Big|_{V^*} = \sup_{|v|_V\leqslant 1}\Big\langle \int\limits_0^t \{\ddot{x}(\tau) - \ddot{w}^h(\tau+\delta) - A(x(\tau) - w^h(\tau+\delta))\}\,d\tau, v\Big\rangle \leqslant$$

$$\leqslant |x(t) - w^h(t+\delta)|_{V^*} + |x(0) - w^h(\delta)|_{V^*} + |A|_{L(V;V^*)}\int\limits_0^t |x(\tau) - w^h(\tau+\delta)|_V\,d\tau, \tag{49}$$

где $|\cdot|_{V^*}$ – норма в пространстве V^*, символ J означает оператор канонического вложения пространства V в пространство V^*. В свою очередь, в силу теоремы [1, с. 93] при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ верны неравенства

$$|\dot{x}(t) - \dot{x}(\tau_i)|_{V^*} \leqslant c_1(t-\tau_i)^{1/2}, \quad |\dot{w}^h(t) - \dot{w}^h(\tau_i)|_{V^*} \leqslant c_2(t-\tau_i)^{1/2}. \tag{50}$$

Поэтому из (10) в силу (50) вытекает оценка

$$\Big(\int\limits_0^{\vartheta-\delta} |\dot{x}(t) - \dot{w}^h(t+\delta)|_{V^*}^2\,dt\Big)^{1/2} \leqslant c_3\chi^{1/2}(h,\delta,\alpha).$$

Учитывая (2) и (3), заключаем, что при $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = \overline{1, m-1}$, справедливо соотношение

$$|\dot{x}(t) - \dot{w}^h(t+\delta)|_H^2 + c|x(t) - w^h(t+\delta)|_V^2 \leqslant |\dot{x}(0) - \dot{w}^h(\delta)|_H^2 +$$

$$+ |A|_{L(V;V^*)}|x(0) - w^h(\delta)|_V^2 + \int\limits_0^t |\dot{x}(\tau) - \dot{w}^h(\tau+\delta)|_{V^*}|\{|u^*(\tau)|_V + |u^h(\tau+\delta)|_V\}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c_4h^2 + \Big(\int\limits_0^t |\dot{x}(\tau) - \dot{w}^h(\tau+\delta)|_{V^*}^2\,d\tau\Big)^{1/2}\Big\{\Big(\int\limits_0^{\tau_i} |u^*(\tau)|_V^2\,d\tau\Big)^{1/2} + \Big(\int\limits_0^{\tau_{i+1}} |u^h(\tau)|_V^2\,d\tau\Big)^{1/2}\Big\}. \tag{51}$$

В силу (11) при выполнении условий теоремы 2 имеем

$$\Big(\int\limits_0^{\vartheta} |u^*(\tau)|_V^2\,d\tau\Big)^{1/2} + \Big(\int\limits_0^{\vartheta} |u^h(\tau)|_V^2\,d\tau\Big)^{1/2} \leqslant c_5(1 + h^{1/2}\alpha^{-1/2}) \leqslant c_6. \tag{52}$$

С учётом (52) и (10) из соотношения (51) имеем

$$|\dot{x}(t) - \dot{w}^h(t+\delta)|_H^2 + |x(t) - w^h(t+\delta)|_V^2 \leqslant c_7\chi^{1/2}(h,\delta,\alpha).$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^t |x(\tau) - w^h(\tau+\delta)|_V \, d\tau \leqslant \left(\vartheta^{1/2} \int\limits_0^t |x(\tau) - w^h(\tau+\delta)|_V^2 \, d\tau \right)^{1/2} \leqslant c_8 \chi^{1/4}(h, \delta, \alpha). \tag{53}$$

Далее, объединив (49) и (53), заключаем, что справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_0^t J(u^*(\tau) - u^h(\tau+\delta)) \, d\tau \right|_{V^*} \leqslant c_9 \chi^{1/4}(h, \delta, \alpha). \tag{54}$$

Воспользовавшись неравенством (11), получим

$$\int\limits_0^{\vartheta-\delta} |u^*(\tau) - u^h(\tau+\delta)|_H^2 \, d\tau \leqslant 2|u^*(\cdot)|_{L_2(T;H)}^2 - 2 \int\limits_0^{\vartheta-\delta} (u^*(\tau), u^h(\tau+\delta)) \, d\tau + C_{**} h\alpha^{-1} =$$

$$= 2 \int\limits_0^{\vartheta-\delta} \langle J(u^*(\tau) - u^h(\tau+\delta)), u^*(\tau) \rangle \, d\tau + C_{**} h\alpha^{-1}. \tag{55}$$

В силу леммы 1 из (55) и (54) следует неравенство (48). Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Уральского математического центра по соглашению № 075-02-20022-874.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М., 1999.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
3. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
4. *Maksimov V.I.* Dynamical Inverse Problems of Distributed Systems. Utrecht, 2002.
5. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Динамические обратные задачи для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 579–597.
6. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Метод экстремального сдвига Н.Н. Красовского и задачи граничного управления // Автоматика и телемеханика. 2009. Т. 4. № 5. С. 18–30.
7. *Maksimov V.I.* Some dynamical inverse problems for hyperbolic systems // Control and Cybern. 1996. V. 25. P. 465–481.
8. *Maksimov V., Pandolfi L.* The problem of dynamical reconstruction of Dirichlet boundary control in semilinear hyperbolic equations // J. of Inverse and Ill-Posed Probl. 2000. V. 8. № 4. P. 399–418.
9. *Максимов В.И.* О динамическом восстановлении правой части гиперболического уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2015. Т. 55. № 6. С. 1008–1019.
10. *Максимов В.И.* Об одном алгоритме динамического восстановления правой части уравнения с распределёнными параметрами второго порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2017. Т. 57. № 8. С. 13–27.
11. *Лионс Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., 1972.
12. *Максимов В.И.* Об отслеживании траектории динамической системы // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75. № 6. С. 951–960.
13. *Васильева Е.В., Максимов В.И.* О динамической реконструкции неограниченных управлений в параболическом уравнении // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 23–29.

Институт математики и механики
имени Н.Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 06.04.2022 г.
После доработки 06.04.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1537–1547

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

О ПОСТРОЕНИИ КУСОЧНО-АФФИННОГО СТАБИЛИЗАТОРА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

© 2022 г. П. А. Точилин

Рассмотрена задача стабилизации системы нелинейных по фазовым переменным обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющими параметрами. На допустимые значения позиционного управления наложены жёсткие поточечные ограничения. В предположении достаточной гладкости функций из правой части дифференциальных уравнений построена кусочно-аффинная система, аппроксимирующая исходную нелинейную систему на прямоугольной сетке в заданной области фазового пространства. Стабилизатор может быть найден также в кусочно-аффинной форме, ему соответствует непрерывная, но не везде дифференцируемая функция Ляпунова схожей структуры. Сформулирована и доказана основная теорема о достаточных условиях стабилизируемости системы при помощи кусочно-аффинного управления. Предложен алгоритм построения такого управления, а также функции Ляпунова в некоторой малой окрестности нулевого положения равновесия. Рассмотрен пример численного решения задачи стабилизации для конкретной модельной системы в трёхмерном пространстве.

DOI: 10.31857/S0374064122110097, EDN: MBOXCW

Введение. Работа посвящена приближённому решению задачи стабилизации для управляемой системы [1, с. 476–478], заданной при помощи нелинейных дифференциальных уравнений с гладкой правой частью. Необходимо построить позиционное управление – стабилизатор, для которого заведомо выполнены жёсткие поточечные ограничения и который делает нулевое положение равновесия замкнутой им системы локально асимптотически устойчивым. Необходимо также оценить область притяжения положения равновесия для замкнутой системы.

Указанную задачу можно решать с помощью кусочной линеаризации исходных нелинейных уравнений на заданной сетке из многогранников в фазовом пространстве. На этой сетке необходимо построить кусочно-аффинную функцию Ляпунова, а также соответствующее ей кусочно-аффинное позиционное управление.

Кусочно-аффинные функции Ляпунова успешно используются для изучения устойчивости нелинейных (в частности, кусочно-аффинных) систем. Так, в работе [2] показано, что для системы дифференциальных уравнений с гладкой правой частью и экспоненциально устойчивым нулевым положением равновесия всегда можно построить локальную непрерывную кусочно-линейную функцию Ляпунова. Данная функция может быть далее достроена до непрерывной кусочно-аффинной функции Ляпунова, позволяющей оценить область притяжения нулевого положения равновесия.

В работе [3] предложен алгоритм построения непрерывной кусочно-аффинной функции Ляпунова для задачи синтеза управлений в нелинейной системе дифференциальных уравнений. Задача стабилизации сведена к проблеме исследования слабой асимптотической устойчивости для вспомогательного дифференциального включения. Функцию цены, определённую на совокупности симплексов в фазовом пространстве, предлагается определять за счёт решения вспомогательной задачи линейного программирования. При этом используется кусочно-постоянное позиционное управление, относительно которого априори неизвестно, будет ли оно *допустимым*, т.е. порождающим траектории рассматриваемой системы. В упомянутой работе этот вопрос остался неисследованным.

Статья [4] посвящена построению непрерывной кусочно-аффинной функции Ляпунова, а также кусочно-аффинного позиционного управления для задачи стабилизации системы с переключениями – гибридной системы [5]. Условия переключений между несколькими разными дифференциальными уравнениями (режимами функционирования) являются частью управления совокупной гибридной системой. Предложен алгоритм построения указанных функций с разными областями притяжения положения равновесия замкнутой системы, получена оценка этой области. Обоснована допустимость построенного кусочно-аффинного управления.

В работе [6] рассмотрена задача оптимального управления нелинейной системой с интегральным функционалом на бесконечном отрезке времени. Для решения задачи использована функция цены, построенная на совокупности симплексов в фазовом пространстве, а искомое субоптимальное позиционное управление найдено в кусочно-аффинной форме. В отличие от предыдущих результатов здесь также предложен более общий подход к построению разрывной кусочно-аффинной функции цены. Этот метод может быть также применён и при решении задачи стабилизации для нелинейной системы.

В настоящей статье предложен альтернативный к упомянутым выше подход к параметризации кусочно-аффинных функций Ляпунова в задаче стабилизации нелинейной системы: вместо сетки из симплексов в фазовом пространстве используется совокупность прямоугольных параллелепипедов. Теперь функции цены и управления нельзя однозначно определить своими (независимыми) значениями в вершинах. В результате получаются другие формулы для расчёта указанных функций, более простые с точки зрения расчётов, поскольку не нужно вычислять матрицы перехода от глобальных декартовых координат к барицентрическим координатам в рамках каждого конкретного симплекса. При этом, однако, повышается размерность во вспомогательных задачах оптимизации, которые необходимо решать при построении функции цены. Для вычисления этой функции, а также позиционного управления, предложен алгоритм, основой которого является решение цепочки вспомогательных задач линейного программирования. Вычисления по такому алгоритму могут быть проведены достаточно эффективно, в том числе и для систем большой размерности. Работа этого алгоритма продемонстрирована на конкретном модельном примере.

1. Задача стабилизации для нелинейной системы. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющими параметрами

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, +\infty). \tag{1}$$

Здесь гладкие функции $f(x) \in C^2(\Omega)$, $f(x) \in \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$, $g(x) \in C^1(\Omega)$, $g(x) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ определены при $x \in \Omega = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Точка $x = 0$ является внутренней для множества Ω, т.е. $a_i < 0 < b_i$ для любых $i = \overline{1, n}$.

На допустимые значения позиционного управления $u = u(x) \in \mathbb{R}^m$ наложены жёсткие поточечные ограничения: $u \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^m$, где множество $\mathcal{P}$ является выпуклым компактом.

Допустимым управлением назовём такую функцию $u = u(x)$, которая удовлетворяет указанному выше поточечному ограничению, а также порождает траектории системы (1), т.е. для любого начального условия $x(0) = x_0 \in \Omega$ задача Коши для дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x) + g(x)u(x)$ должна иметь единственное решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, определённое при $t \geqslant 0$, по крайней мере до момента выхода траектории на границу Ω. Эти условия, в частности, будут выполнены, если функция $u(x)$ удовлетворяет условию Липшица при $x \in \Omega$. Также предположим, что для допустимого управления $u(x)$ должно быть выполнено условие $u(0) = 0$. Будем далее рассматривать траектории замкнутой системы лишь до момента возможного выхода на границу Ω, не накладывая в связи с этим никаких дополнительных априорных ограничений на допустимые управления.

Решаемая в данной работе задача стабилизации состоит в поиске таких множества $\mathcal{X} \subset \Omega$ и допустимого управления $u(x)$, определённого при $x \in \mathcal{X}$, что система дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x) + g(x)u(x)$ будет обладать асимптотически устойчивым нулевым положением равновесия с областью притяжения $\mathcal{X}$, т.е. для любых $x_0 \in \mathcal{X}$ и $t \geqslant 0$ должно быть выполнено условие существования предела

$$\lim_{t\to+\infty} \|x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)}\| = 0, \quad x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X},$$

где $x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)}$, $t \in [0, +\infty)$, – траектория системы $\dot{x} = f(x) + g(x)u(x)$, выпущенная из начальной позиции $x(0) = x_0$. Заметим, что данное определение асимптотической устойчивости является более сильным, чем традиционное, так как здесь сочетаются требования инвариантности множества $\mathcal{X}$ и принадлежности ему начальной позиции, т.е. не рассматриваются траектории, которые стартуют вне $\mathcal{X}$ и попадают в это множество в какой-то промежуточный момент времени. Даное ограничение связано с особенностями основного алгоритма, который будет приведён далее. Кроме того, это сильное требование позволяет не следить за возможным выходом траектории замкнутой системы за границу Ω в какие-то промежуточные моменты времени, так как $\mathcal{X} \subset \Omega$.

Для решения задачи стабилизации далее воспользуемся традиционным подходом, предполагающим поиск наряду с управлением $u(x)$ также соответствующей функции Ляпунова $V(x)$. Последняя может быть использована для доказательства асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия замкнутой системы.

2. Кусочная линеаризация дифференциальных уравнений. Каждый из отрезков $[a_i, b_i]$ разобьём на $N_i \in \mathbb{N}$ частей:

$$x_i \in [a_i, b_i] = \bigcup_{j=0}^{N_i-1} [x_i^{(j)}, x_i^{(j+1)}], \quad x_i^{(0)} = a_i, \quad x_i^{(N_i)} = b_i.$$

Будем считать, что для каждого $i = \overline{1,n}$ найдётся номер $j_i^* \in \{1, \ldots, N_i - 1\}$ такой, что $x_i^{(j_i^*)} = 0$, т.е. начало координат является одной из точек разбиения.

Для каждой пары индексов i, j введём обозначения

$$z_i^{(j)} = \frac{x_i^{(j)} + x_i^{(j+1)}}{2}, \quad \delta_i^{(j)} = \frac{x_i^{(j+1)} - x_i^{(j)}}{2}.$$

Для нумерации вершин и многогранных частей полученного разбиения области Ω будем далее использовать мультииндексы

$$\bar{j} = (j_1, \ldots, j_n) \in \{0, \ldots, N_1\} \times \ldots \times \{0, \ldots, N_n\}.$$

Множество всех таких индексов $\bar{j}$ обозначим через $\mathcal{J}$. Кроме того, через $\mathcal{J}_0$ обозначим совокупность всех мультииндексов $\bar{j} \in \mathcal{J}$, для которых $j_i < N_i$ при любом $i = \overline{1,n}$. Мультииндекс, соответствующий нулевому положению равновесия, обозначим через $\bar{j}^*$. Пусть $z^{(\bar{j})} \in \mathbb{R}^n$ – вектор с компонентами $z_i^{(j_i)}$, $i = \overline{1,n}$. Аналогично $\delta^{(\bar{j})} \in \mathbb{R}^n$ – вектор с компонентами $\delta_i^{(j_i)}$. Введём также обозначение для части области Ω:

$$\Omega^{(\bar{j})} = [x_1^{(j_1)}, x_1^{(j_1+1)}] \times \ldots \times [x_n^{(j_n)}, x_n^{(j_n+1)}] \quad \text{для любого} \quad \bar{j} = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathcal{J}_0.$$

Точка $x^{(\bar{j})} = (x_1^{(j_1)}, \ldots, x_n^{(j_n)})$ является вершиной многогранника $\Omega^{(\bar{j})}$, обладающей наименьшими координатами.

Рассмотрим теперь линеаризованную систему (1):

$$\dot{x}_i = f_i(z^{(\bar{j})}) + (f_i'(z^{(\bar{j})}))^{\mathrm{T}}(x - z^{(\bar{j})}) + g_i(z^{(\bar{j})})u + \nu_i^{(\bar{j})}(x), \quad \text{если} \quad x_i \in [x_i^{(j_i)}, x_i^{(j_i+1)}], \quad i = \overline{1,n}.$$

Здесь $f_i'(\cdot)$ – градиент функции $f_i(\cdot)$, $g_i(\cdot)$ – i-я строка матрицы $g(\cdot)$. Погрешность линеаризации $\nu_i^{(\bar{j})}(x)$, далее интерпретируемую как неопределённость, можно оценить следующим образом:

$$\nu_i^{(\bar{j})}(x) \in [R_{i,-}^{(\bar{j})}, R_{i,+}^{(\bar{j})}], \tag{2}$$

$$R_{i,-}^{(\bar{j})} = \frac{1}{2}\|\delta^{(\bar{j})}\|^2 \min_{\xi \in \Omega^{(\bar{j})}} \lambda_{\min}(f_i''(\xi)) - \|\delta^{(\bar{j})}\| \sum_{k=1}^{m} \max_{\eta \in \Omega^{(\bar{j})}} \|g_{ik}'(\eta)\| \rho(\mathbf{e}_k|\mathcal{P}),$$

$$R_{i,+}^{(\bar{j})} = \frac{1}{2}\|\delta^{(\bar{j})}\|^2 \max_{\xi \in \Omega^{(\bar{j})}} \lambda_{\max}(f_i''(\xi)) + \|\delta^{(\bar{j})}\| \sum_{k=1}^{m} \max_{\eta \in \Omega^{(\bar{j})}} \|g_{ik}'(\eta)\| \rho(\mathbf{e}_k|\mathcal{P}).$$

Здесь $f_i''(\cdot)$ – матрица из вторых производных функции $f_i(\cdot)$, $\lambda_{\min}(Q)$, $\lambda_{\max}(Q)$ – соответственно наименьшее и наибольшее собственные значения некоторой симметричной матрицы Q, $\rho(l|\mathcal{P})$ – значение опорной функции ко множеству $\mathcal{P}$ в направлении $l\in\mathbb{R}^m$, а $\mathbf{e}_k$ – k-й орт в пространстве $\mathbb{R}^m$.

3. Кусочно-аффинные функции $V(x)$ и $u(x)$. Для решения задачи стабилизации далее используем непрерывную кусочно-аффинную функцию Ляпунова, которая может быть задана следующей формулой:

$$V(x)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha^{(j_i)}(x_i)v_i^{(j_i)}+(1-\alpha^{(j_i)}(x_i))v_i^{(j_i+1)}),\quad \text{если}\ \ x_i\in[x_i^{(j_i)},x_i^{(j_i+1)}],\quad i=\overline{1,n}. \tag{3}$$

Здесь

$$\alpha^{(j_i)}(x_i)=\frac{x_i^{(j_i+1)}-x_i}{x_i^{(j_i+1)}-x_i^{(j_i)}},\quad i=\overline{1,n},\quad j_i=\overline{0,N_i-1},$$

а параметры $v_i^{(j)}\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{0,N_i}$, будут найдены далее. Эти величины однозначно задают непрерывную кусочно-аффинную функцию $V(x)$ на совокупности областей $\Omega^{(\bar{j})}$, $\bar{j}\in\mathcal{J}_0$. Данная функция является дифференцируемой по любому направлению в любой точке $x\in\operatorname{int}\Omega$. На границах множеств $\Omega^{(\bar{j})}$ эта функция может быть недифференцируема в обычном смысле.

На величины $v_i^{(j)}$ наложим следующие ограничения:

$$v_i^{(j_i^*)}=0\quad \text{для любого}\quad i=\overline{1,n},\quad \text{т.е.}\quad V(x^{(\bar{j}^*)})=V(0)=0, \tag{4}$$

$$V(x^{(\bar{j})})=\sum_{i=1}^{n}v_i^{(j_i)}>0\quad \text{для любого индекса}\quad \bar{j}\in\mathcal{J}\quad \text{такого, что}\quad \bar{j}\neq\bar{j}^*. \tag{5}$$

Заметим, что так как функция $V(x)$ является аффинной в каждой из областей $\Omega^{(\bar{j})}$, то при выполнении условий (4), (5) $V(x)>0$ при любом $x\neq 0$.

Далее будем использовать непрерывное кусочно-аффинное позиционное управление вида

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha^{(j_i)}(x_i)u_i^{(j_i)}+(1-\alpha^{(j_i)}(x_i))u_i^{(j_i+1)}),\quad \text{если}\ \ x_i\in[x_i^{(j_i)},x_i^{(j_i+1)}],\quad i=\overline{1,n}, \tag{6}$$

где векторы $u_i^{(j_i)}\in\mathbb{R}^m$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{0,N_i}$, необходимо определить. Кроме того, положим $u_i^{(j_i^*)}=0$ при всех $i=\overline{1,n}$. Пусть для любой вершины $x^{(\bar{j})}$ рассматриваемых многогранников

$$u(x^{(\bar{j})})=\sum_{i=1}^{n}u_i^{(j_i)}\in\mathcal{P}. \tag{7}$$

Поскольку каждая компонента вектор-функции $u(x)$ является аффинной в каждой области $\Omega^{(\bar{j})}$, то из условия (7) вытекает, что $u(x)\in\mathcal{P}$, $x\in\Omega$.

При любых фиксированных значениях $u_i^{(j_i)}$ кусочно-аффинная функция $u(x)$ удовлетворяет условию Липшица в области Ω, а потому данное управление является допустимым.

Пусть $x\in\operatorname{int}\Omega^{(\bar{j})}$ для некоторого индекса $\bar{j}$. Рассмотрим производную функции Ляпунова вдоль траектории линеаризованной системы, замкнутой кусочно-аффинным управлением $u(x)$ при $x\in\Omega^{(\bar{j})}$:

$$\dot{V}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i^{(j_i+1)}-v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_i+1)}-x_i^{(j_i)}}(f_i(z^{(\bar{j})})+(f_i'(z^{(\bar{j})}))^{\mathrm{T}}(x-z^{(\bar{j})})+g_i(z^{(\bar{j})})u(x)+\nu_i^{(\bar{j})}(x)). \tag{8}$$

Используя (8) и (2), запишем теперь достаточное условие определённой отрицательности полной производной функции цены в какой-либо вершине h многогранника $\Omega^{(\bar{j})}$:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i^{(j_i+1)}-v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_i+1)}-x_i^{(j_i)}}\bigg[f_i(z^{(\bar{j})})+\frac{R_{i,-}^{(\bar{j})}+R_{i,+}^{(\bar{j})}}{2}+\operatorname{sgn}(v_i^{(j_i+1)}-v_i^{(j_i)})\frac{R_{i,+}^{(\bar{j})}-R_{i,-}^{(\bar{j})}}{2}\bigg]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i^{(j_i+1)}-v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_i+1)}-x_i^{(j_i)}}((f_i'(z^{(\bar{j})}))^{\mathrm{T}}(h-z^{(\bar{j})})+g_i(z^{(\bar{j})})u(h))\leqslant-\varepsilon\min\{\|h\|,1\}. \tag{9}$$

Здесь $\varepsilon>0$ – малое фиксированное число.

Далее для некоторого множества $\mathcal{X}$ через $\partial\mathcal{X}$ обозначим множество его граничных точек, а через $\operatorname{int}\mathcal{X}$ – множество всех внутренних точек.

Приведённые выше предварительные построения позволяют теперь сформулировать основное утверждение, задающее достаточные условия для решения задачи стабилизации с использованием кусочно-аффинных функций $V(x)$ и $u(x)$.

Теорема. *Пусть* $\mathcal{J}^*\subset\mathcal{J}_0$ *– некоторое множество мультииндексов* $\bar{j}$, $\mathcal{X}_0=\bigcup_{\bar{j}\in\mathcal{J}^*}\Omega^{(\bar{j})}$. *Пусть найдены такие* $v_i^{(j_i)}$, $u_i^{(j_i)}$ *(для различных* i, j_i*), что для любых* $\bar{j}\in\mathcal{J}^*$, $i=\overline{1,n}$, *выполнены условия (4), (5), (7), (9) (последнее условие выполнено для любой вершины* h *множества* $\Omega^{(\bar{j})}$*). Построим множество*

$$\mathcal{X}=\{x\in\mathcal{X}_0: V(x)\leqslant V_{\min}\}, \tag{10}$$

$$V_{\min}=\min\{V(h): h \text{ – вершина } \Omega^{(j)},\ \ j\in\mathcal{J}^*,\ \ h\in\partial\mathcal{X}_0\}. \tag{11}$$

Предположим, что $0\in\operatorname{int}\mathcal{X}$. *Тогда кусочно-аффинное управление* $u(x)$, *определённое согласно формуле (6), решает задачу стабилизации для системы (1), причём областью притяжения нулевого положения равновесия замкнутой этим управлением системы является множество* $\operatorname{int}\mathcal{X}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x\in\Omega^{(\bar{j})}\bigcap\operatorname{int}\mathcal{X}_0$, $\bar{j}\in\mathcal{J}^*$, и оценим производную функции Ляпунова $V(x)$, построенной согласно формуле (3), вдоль траектории системы (1), замкнутой при помощи управления (6). Предположим, что x и $\bar{j}$ выбраны таким образом, что вектор $f(x)+g(x)u(x)$ указывает либо внутрь $\Omega^{(\bar{j})}$, либо вдоль границы этого многогранника. Для любого x всегда можно подобрать подходящий индекс $\bar{j}\in\mathcal{J}^*$.

Для оценки производной функции Ляпунова используем условие (9), а также оценку для погрешности линеаризации (2):

$$\dot{V}(x)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i^{(j_i+1)}-v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_i+1)}-x_i^{(j_i)}}\bigg(f_i(z^{(\bar{j})})+(f_i'(z^{(\bar{j})}))^{\mathrm{T}}(x-z^{(\bar{j})})+$$

$$+g_i(z^{(\bar{j})})\sum_{i=1}^{n}(\alpha^{(j_i)}(x_i)u_i^{(j_i)}+(1-\alpha^{(j_i)}(x_i))u_i^{(j_i+1)})\bigg)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\max\bigg\{R_{i,-}^{(\bar{j})}\frac{v_i^{(j_i+1)}-v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_i+1)}-x_i^{(j_i)}},R_{i,+}^{(\bar{j})}\frac{v_i^{(j_i+1)}-v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_i+1)}-x_i^{(j_i)}}\bigg\}.$$

Полученная функция является линейной относительно переменной x. Эта функция достигает своего максимума хотя бы в одной вершине многогранника $\Omega^{(\bar{j})}$. Кроме того, выражение в третьей строке можно записать через функцию sgn аналогично (9). В итоге получим, что

$$\dot{V}(x)\leqslant\max_h\bigg\{\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i^{(j_i+1)}-v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_i+1)}-x_i^{(j_i)}}\bigg[f_i(z^{(\bar{j})})+\frac{R_{i,-}^{(\bar{j})}+R_{i,+}^{(\bar{j})}}{2}+\operatorname{sgn}(v_i^{(j_i+1)}-v_i^{(j_i)})\frac{R_{i,+}^{(\bar{j})}-R_{i,-}^{(\bar{j})}}{2}\bigg]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i^{(j_i+1)}-v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_i+1)}-x_i^{(j_i)}}((f_i'(z^{(\bar{j})}))^{\mathrm{T}}(h-z^{(\bar{j})})+g_i(z^{(\bar{j})})u(h)) : h \text{ – вершина } \Omega^{(\bar{j})}\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant -\varepsilon \min_h(\min\{\|h\|, 1\}) \leqslant 0.$$

Заметим, что полученное выражение может быть равно нулю только в том случае, если $h = 0$ является одной из вершин $\Omega^{(\bar{j})}$. При этом в других вершинах этого многогранника анализируемая линейная функция принимает значения, отличные от нуля. Следовательно, равенство нулю этой линейной функции возможно только при $x = 0$, т.е. доказано, что

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ для любого } x \in \operatorname{int}\mathcal{X}_0, \quad x \neq 0.$$

Более того, можно показать, что для любого $\eta > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что $\dot{V}(x) \leqslant -\delta$ при всех $x \in \operatorname{int}\mathcal{X}_0$, $\|x\| \geqslant \eta$.

Из доказанного свойства монотонности функции $V(x)$ вдоль траекторий системы, а также из определения множества $\mathcal{X}$ следует, что если траектория замкнутой системы стартует из $\operatorname{int}\mathcal{X}$, то она не может достичь границы $\partial\mathcal{X}$, а значит, никогда не выйдет за пределы этого множества.

Заметим также, что из условий (4) и (5) следует, что $V(x)$ является определённо положительной функцией в $\mathcal{X}_0$. Далее, следуя схеме доказательства классической теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [7, с. 25; 8, с. 81–82], можно показать, что нулевое положение равновесия замкнутой системы является асимптотически устойчивым с областью притяжения $\operatorname{int}\mathcal{X}$.

4. Алгоритм построения кусочно-аффинных функций $V(x)$ и $u(x)$. Рассмотрим теперь конкретный алгоритм построения кусочно-аффинной функции Ляпунова $V(x)$, а также управления $u(x)$, удовлетворяющих условиям теоремы. Попутно будет построена, по возможности максимальная по включению, область притяжения $\mathcal{X}$ нулевого положения равновесия. Множество $\mathcal{X}$, вообще говоря, зависит от Ω, но в данной работе эта зависимость подробно не исследуется.

Основная идея алгоритм схожа с предложенной в работе [4], но с учётом другой структуры используемых кусочно-аффинных функций. В этом алгоритме проводятся многократные попытки добавлять совокупности соседних множеств $\Omega^{(\bar{j})}$ к ранее обработанным, подсчитывая значения $v_i^{(j_i)}$, $u_i^{(j_i)}$ в соответствующих вершинах. При этом на каждом шаге алгоритма следует проверять выполнение условий основной теоремы. Если на очередном шаге не удастся добавить (обработать) какие-либо новые множества $\Omega^{(\bar{j})}$, то алгоритм завершит работу.

Для упрощения расчётов будем далее считать, что множество допустимых значений управлений $\mathcal{P}$ является выпуклым многогранником в $\mathbb{R}^m$ и может быть задано при помощи совокупности линейных неравенств*⁾:

$$\mathcal{P} = \{u \in \mathbb{R}^m : Du \preceq \gamma\}, \quad D \in \mathbb{R}^{l\times m}, \quad \gamma \in \mathbb{R}^l.$$

Каждой вершине $x^{(\bar{k})}$ множеств $\Omega^{(\bar{j})}$ сопоставим вспомогательную величину $\sigma^{(\bar{k})}$, принимающую значения, равные нулю и единице, и показывающую, были ли уже в этой вершине подсчитаны значения $v_i^{(\bar{k})}$, $u_i^{(\bar{k})}$. Кроме того, каждому множеству $\Omega^{(\bar{j})}$ сопоставим вспомогательную величину $\eta^{(\bar{j})}$, которая может принимать три значения: $\eta^{(\bar{j})} = 0$, если данное множество ещё не было обработано алгоритмом; $\eta^{(\bar{j})} = 1$, если множество уже было успешно обработано алгоритмом и было добавлено ко множеству $\mathcal{X}_0$; $\eta^{(\bar{j})} = -1$, если множество уже было обработано алгоритмом, но за его счёт не удалось расширить область притяжения.

Будем говорить, что два разных множества $\Omega^{(\bar{j})}$ и $\Omega^{(\bar{k})}$ являются соседними, если они пересекаются по общей грани максимальной возможной размерности (т.е. имеют ровно n общих вершин). Множества $\Omega^{(\bar{j})}$, …, $\Omega^{(\bar{s})}$ назовём *соседними*, если их можно упорядочить так,

*⁾ Символ “ $\preceq$ ” соответствует покомпонентному неравенству для векторов одинаковой длины.

что в полученной цепочке каждое следующее множество является соседним по отношению к какому-либо предыдущему.

Зафиксируем также вспомогательный параметр – натуральное число S.

Шаг 1. Изначально положим $v_i^{(\bar{j}^*)}=0,\ u_i^{(\bar{j}^*)}=0$ для любого $i=\overline{1,n}$. Также пусть $\sigma^{(\bar{j}^*)}=1$. Для всех других вершин $\sigma^{(\bar{j})}=0$. Также пусть $\mathcal{J}^*=\varnothing,\ \mathcal{X}_0=\varnothing,\ V_{\min}=0$. Для каждого $\bar{j}$ пусть $\eta^{(\bar{j})}=0$.

Шаг 2. Возьмём некоторую совокупность соседних множеств $\Omega^{(\bar{j})},\ \bar{j}\in\hat{\mathcal{J}}\subset\mathcal{J}_0$, для которых либо $x^{(\bar{j}^*)}=0$ является одной из их вершин, либо хотя бы одно из этих множеств является соседним со множеством $\Omega^{(\bar{k})}$, для которого $\eta^{(\bar{k})}=1$. Кроме того, для каждого из таких множеств должно быть выполнено условие $\eta^{(\bar{j})}=0$. Если удовлетворяющих этим условиям множеств не существует, то алгоритм переходит к завершающему шагу 12. В противном случае начинается описанная ниже обработка найденных многогранников.

Шаг 3. Выполняется последовательный перебор разных вариантов значений функций sgn в формулах (9) для всех возможных $\bar{j}\in\hat{\mathcal{J}}$ только для ещё не найденных величин $v_i^{(j_i)}$ или $v_i^{(j_i+1)}$. Каждый такой вариант соответствует некоторой системе неравенств для искомых величин $v_i^{(\bar{k})}$, а выражения в квадратных скобках в (9) можно далее считать постоянными. Следующие четыре шага алгоритма выполняются отдельно для каждого такого варианта.

Шаг 4. Для каждого $\bar{j}\in\hat{\mathcal{J}}$ используем далее вспомогательный вектор $d^{(\bar{j})}\in\mathbb{R}^n$. Изначально пусть

$$d^{(\bar{j})}=\sum_{i=1}^n \operatorname{sgn}(v_i^{(j_i+1)}-v_i^{(j_i)})g_i(z^{(\bar{j})}).$$

Здесь учитывается, что значения функций sgn ранее были зафиксированы.

Если вектор $d^{(\bar{j})}$ не нулевой, то дополнительно нормируем его: $d^{(\bar{j})}=d^{(\bar{j})}/\|d^{(\bar{j})}\|$.

Положим $s=1$ (вспомогательный индекс).

Шаг 5. Поиск управлений. Определим значения $u_i^{(\bar{k})},\ i=\overline{1,n},\ x^{(\bar{k})}\in\bigcup_{\bar{j}\in\hat{\mathcal{J}}}\Omega^{(\bar{j})},\ \sigma^{(\bar{k})}=0$, решив вспомогательную задачу линейного программирования:

$$\sum_{\bar{j}}\sum_{\bar{k}}\left\{d^{(\bar{j})}\sum_{i=1}^n u_i^{(\bar{k})}: x^{(\bar{k})}\in\Omega^{(\bar{j})},\quad \sigma^{(\bar{k})}=0,\quad \bar{j}\in\hat{\mathcal{J}}\right\}\to\min$$

при линейных ограничениях

$$D\bigg(\sum_{i=1}^n u_i^{(\bar{k})}\bigg)\preceq\gamma\quad\text{для любого}\quad\bar{k}\quad\text{такого, что}\quad x^{(\bar{k})}\in\bigcup_{\bar{j}\in\hat{\mathcal{J}}}\Omega^{(\bar{j})},\quad\sigma^{(\bar{k})}=0.$$

Шаг 6. Поиск значений функции Ляпунова. Определим значения $v_i^{(\bar{k})},\ i=\overline{1,n},\ x^{(\bar{k})}\in\bigcup_{\bar{j}\in\hat{\mathcal{J}}}\Omega^{(\bar{j})},\ \sigma^{(\bar{k})}=0$, решив вспомогательную задачу линейного программирования. Задача оптимизации при этом имеет вид

$$\sum_{i=1}^n\sum_{\bar{k}}\left\{v_i^{(\bar{k})}: x^{(\bar{k})}\in\bigcup_{\bar{j}\in\hat{\mathcal{J}}}\Omega^{(\bar{j})},\quad\sigma^{(\bar{k})}=0\right\}\to\min. \qquad (12)$$

Линейные ограничения на искомые параметры $v_i^{(\bar{k})}$ определяются следующим образом:

(a) Условия положительности значений функции Ляпунова и одновременно расширения потенциальной области притяжения $\mathcal{X}_0$:

$$\sum_{i=1}^n v_i^{(\bar{k})}\geqslant\max\{\varepsilon\min\{\|x^{(\bar{k})}\|,1\},V_{\min}\}\quad\text{для любого}\quad x^{(\bar{k})}\in\bigcup_{\bar{j}\in\hat{\mathcal{J}}}\Omega^{(\bar{j})}\quad\text{такого, что}\quad\sigma^{(\bar{k})}=0.$$

(b) Ограничения на $v_i^{(\bar{k})}$ для вычисления sgn в (9) (см. шаг 3 алгоритма).

(c) Условия отрицательности производной функции Ляпунова вдоль траектории замкнутой системы (9) для каждого $\bar{j} \in \hat{\mathcal{J}}$ и каждой соответствующей вершины h (в том числе для вершин, уже обработанных на предыдущих итерациях). При этом в формулах (9) используются управляющие параметры $u_i^{(\bar{k})}$, найденные на предыдущем шаге 5, на данной итерации работы алгоритма.

Шаг 7. Если удалось решить задачи линейного программирования и найти значения $u_i^{(\bar{k})}$ и $v_i^{(\bar{k})}$, то проверяется выполнение следующего условия:

– либо $s = 1$ (т.е. это первая итерация работы);

– либо $s > 1$, и значение функционала (12), найденное на этой итерации, меньше аналогичного значения, найденного на предыдущей итерации, с номером $s - 1$.

Если указанное условие выполнено и $s < S$, то производятся следующие действия:

– значение s увеличивается на единицу;

– для каждого $\bar{j} \in \hat{\mathcal{J}}$ заново рассчитывается вектор

$$d^{(\bar{j})} = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i^{(j_i+1)} - v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_i+1)} - x_i^{(j_i)}} g_i(z^{(\bar{j})}),$$

если вектор $d^{(\bar{j})}$ не нулевой, то дополнительно нормируем его: $d^{(\bar{j})} = d^{(\bar{j})}/\|d^{(\bar{j})}\|$;

– алгоритм снова переходит к шагу 5.

В противном случае алгоритм переходит либо к обработке следующего варианта значений функций sgn в соответствующих формулах (9), либо к шагу 8, завершающему такую обработку.

Шаг 8. Задачи линейного программирования из шага 7 должны быть решены для разных вариантов значений функций sgn в соответствующих формулах (9). Среди задач, которые имеют решения, выделим ту, в которой значение функции (12) получилось наименьшим.

Шаг 9. Если в предыдущих шагах удалось найти решение задачи линейного программирования для оптимального варианта значений функций sgn в формулах (9), то ко множеству $\mathcal{X}_0$ добавляются многогранники $\Omega^{(\bar{j})}$, $\bar{j} \in \hat{\mathcal{J}}$, а ко множеству $\mathcal{J}^*$ – соответствующие индексы $\hat{\mathcal{J}}$. Для каждого обработанного на данном шаге множества $\Omega^{(\bar{j})}$ положим $\eta^{(\bar{j})} = 1$. Для каждой вершины $x^{(\bar{k})}$ указанных множеств положим $\sigma^{(\bar{k})} = 1$. Запоминаются значения $v_i^{(\bar{k})}$, $u_i^{(\bar{k})}$, полученные в результате решения задачи линейного программирования. Кроме того, необходимо заново пересчитать величину $V_{\min}$ по формуле (11).

Шаг 10. Если же выше не удалось найти решения задач линейного программирования, то для каждого рассмотренного на данном шаге множества $\Omega^{(\bar{j})}$ положим $\eta^{(\bar{j})} = -1$.

Шаг 11. Алгоритм переходит снова к шагу 2, т.е. к следующей попытке добавить какие-то множества $\Omega^{(\bar{j})}$ к конструируемому множеству $\mathcal{X}_0$.

Шаг 12. Завершение работы. На выходе имеем множества $\mathcal{X}_0$ и $\mathcal{J}^*$, задающие область притяжения нулевого положения равновесия, а также величины $v_i^{(\bar{j})}$, $u_i^{(\bar{j})}$, $i = \overline{1,n}$, $\bar{j} \in \mathcal{J}^*$. Теперь можно определить множество $\mathcal{X}$ согласно (10), а также построить кусочно-аффинные функции Ляпунова и позиционного управления (стабилизатора) по формулам (3), (6).

Для одной и той же системы (1) приведённый алгоритм может построить разные множества $\mathcal{X}_0$ и определённые на них кусочно-аффинные функции $V(x)$ и $u(x)$. Это связано с тем, что в шаге 2 можно выбирать очередные обрабатываемые области $\Omega^{(\bar{j})}$ разными способами. Одна из возможностей – обрабатывать эти множества по одному за шаг работы алгоритма (рис. 1, а) аналогично тому, как было описано в работе [4] для случая системы с переключениями и сетки из симплексов. Такой подход минимизирует сложность вычислений на каждом отдельном шаге работы алгоритма, однако количество таких шагов может быть больши́м. Возможны и другие подходы, когда за один шаг работы алгоритма обрабатывается сразу совокупность множеств $\Omega^{(\bar{j})}$, например, как показано на рис. 1, б.

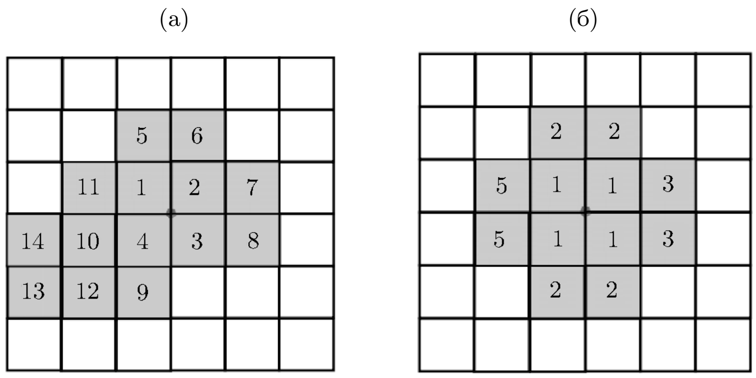

Рис. 1. Множества $\mathcal{X}$, полученные при разных правилах выбора очередных обрабатываемых многогранников $\Omega^{(\bar{j})}$. Числами обозначены номера итераций алгоритма, на которых $\Omega^{(\bar{j})}$ добавлены в $\mathcal{X}$.

Заметим, что поскольку на каждом шаге работы алгоритма отслеживается выполнение условий теоремы, то если $0 \in \operatorname{int}\mathcal{X}$, можно утверждать, что множество $\mathcal{X}$ является множеством притяжения для нулевого положения равновесия системы (1) при использовании построенного кусочно-аффинного стабилизатора вида (6).

Решаемые на каждом шаге работы алгоритма подзадачи линейного программирования могут быть решены эффективно (см. [9, с. 297–303]) за полиномиальное время в зависимости как от количества переменных $(v_i^{(\bar{k})}, u_i^{(\bar{k})})$, так и от количества линейных неравенств (ограничений). Это позволяет применять алгоритм для решения задач стабилизации сложных систем с большой размерностью вектора фазовых переменных.

5. Пример. В качестве примера рассмотрим задачу стабилизации угловых скоростей квадрокоптера, зависшего в заданной точке пространства. Для этого используем математическую модель, подробно описанную в статье [10]. Дифференциальные уравнения для трёх компонент угловой скорости выглядят следующим образом:

$$I_{xx}\dot{w}_\varphi = \frac{d}{\sqrt{2}}F_2 - w_\psi w_\theta(I_{zz} - I_{yy}), \quad I_{zz}\dot{w}_\psi = dF_4 - w_\varphi w_\theta(I_{yy} - I_{xx}),$$

$$I_{yy}\dot{w}_\theta = \frac{d}{\sqrt{2}}F_3 - w_\varphi w_\psi(I_{xx} - I_{zz}), \tag{13}$$

где $F_1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$, $F_2 = -p_1 + p_2 + p_3 - p_4$, $F_3 = -p_1 - p_2 + p_3 + p_4$, $F_4 = -p_1 + p_2 - p_3 + p_4$, p_i, $i = \overline{1,4}$, – тяги, создаваемые отдельными двигателями. На каждый из управляющих параметров p_i задано поточечное ограничение: $p_i \in [0, p_{\max}]$. Величина F_1 соответствует подъемной силе для центра масс аппарата и считается фиксированной: $F_1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = mg$. Другие величины F_2, F_3, F_4 могут изменяться, позволяя квадрокоптеру изменять ориентацию в пространстве.

Введём обозначения $x = (w_\varphi, w_\psi, w_\theta)^{\mathrm{т}}$ для вектора фазовых переменных и запишем систему (13) в виде

$$\dot{x} = f(x) + Bu, \quad u \in \mathcal{P},$$

где

$$f(x) = \begin{pmatrix} c_1x_2x_3 \\ c_2x_1x_3 \\ c_3x_1x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{\sqrt{2}I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{d}{I_{zz}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{d}{\sqrt{2}I_{yy}} \end{pmatrix},$$

$$c_1 = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}, \quad c_2 = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}, \quad c_3 = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}.$$

Множество $\mathcal{P}$ – выпуклый многогранник в пространстве переменных $u = (F_2, F_4, F_3)^{\mathrm{т}}$, который задаётся следующими неравенствами:

$$0 \leqslant mg - F_2 - F_3 - F_4 \leqslant 4p_{\max}, \quad 0 \leqslant mg + F_2 - F_3 + F_4 \leqslant 4p_{\max},$$

$$0 \leqslant mg + F_2 + F_3 - F_4 \leqslant 4p_{\max}, \quad 0 \leqslant mg - F_2 + F_3 + F_4 \leqslant 4p_{\max}.$$

Используемые при линеаризации уравнений градиенты функций f_i имеют вид

$$f_1'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1x_3 \\ c_1x_2 \end{pmatrix}, \quad f_2'(x) = \begin{pmatrix} c_2x_3 \\ 0 \\ c_2x_1 \end{pmatrix}, \quad f_3'(x) = \begin{pmatrix} c_3x_2 \\ c_3x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы вторых производных выглядят следующим образом:

$$f_1''(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2''(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_3''(x) = \begin{pmatrix} 0 & c_3 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно легко найти оценки на погрешности линеаризации:

$$R_{i,-}^{(\bar{j})} = -\frac{c_i}{2}\|\delta^{(\bar{j})}\|^2, \quad R_{i,+}^{(\bar{j})} = \frac{c_i}{2}\|\delta^{(\bar{j})}\|^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

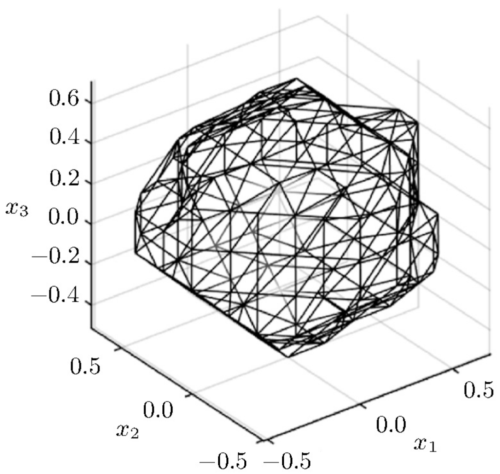

Рис. 2. Область притяжения $\mathcal{X}$.

Для расчётов используем параметры квадрокоптера из работы [10]: $d = 0.09$ м, $m = 0.5$ кг, $I_{xx} = I_{yy} = 0.0021435$ кг·м/рад, $I_{zz} = 0.001$ кг·м/рад, $p_{\max} = 1.33$ Н. При помощи приведённого выше алгоритма удалось построить кусочно-аффинные функции Ляпунова и управления в малой окрестности нулевого положения равновесия. На рис. 2 изображена полученная в результате расчётов область притяжения замкнутой системы, являющаяся множеством уровня кусочно-аффинной функции Ляпунова $V(x)$. В примере $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, отрезки $[0,1]$ были разбиты на $n = 10$ частей. Алгоритм проработал 100 итераций с максимальным количеством попыток решения подзадач линейного программирования $S = 3$. На каждой итерации обрабатывалась одна очередная многогранная область $\Omega^{(\bar{j})}$, соседняя по отношению к ранее обработанным.

Заключение. Рассмотрена задача стабилизации для нелинейной системы дифференциальных уравнений. Предложен метод приближённого построения непрерывного кусочно-аффинного управления, а также соответствующей функции Ляпунова. Доказана теорема о достаточных условиях решения задачи стабилизации при помощи такого управления. Предложенные в работе методы и идеи будут в дальнейшем использованы для решения задач стабилизации систем большой размерности, что потребует более тщательного анализа соответствующих численных методов и алгоритмов.

Результаты пп. 1–4 получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00042). Результаты п. 5 получены при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Дополнение 4. М., 1966. С. 475–515.
2. *Giesl P., Hafstein S.* Existence of piecewise linear Lyapunov functions in arbitrary dimensions // Discret. and Contin. Dyn. Syst. 2012. V. 32. № 10. P. 3539–3565.
3. *Baier R., Hafstein S.* Numerical computation of control Lyapunov functions in the sense of generalized gradients // 21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2014). Groningen, 2014. P. 1173–1180.
4. *Атанесян А.А., Точилин П.А.* Задача стабилизации системы с переключениями при помощи кусочно-линейного управления // Вестн. Московского ун-та. Сер. 15: Вычислит. математика и кибернетика. 2019. № 4. С. 22–32.
5. *Куржанский А.Б., Точилин П.А.* Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1523–1533.
6. *Точилин П.А.* О построении кусочно-аффинной функции цены в задаче оптимального управления на бесконечном отрезке времени // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 1. С. 223–238.
7. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М., 2014.
8. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
9. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. М., 1991.
10. *Каплунова Е.П., Точилин П.А.* Задача целевого управления квадрокоптером при движении в горизонтальной плоскости с огибанием препятствий // Вестн. Московского ун-та. Сер. 15: Вычислит. математика и кибернетика. 2021. № 4. С. 21–36.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне,
Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 03.06.2022 г.
После доработки 03.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1548–1556

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОСТРОЕНИЯ НЕЙРОРЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. А. С. Фурсов, Ю. М. Мосолова

Рассматривается задача стабилизации переключаемой линейной системы с медленными переключениями, недоступными для наблюдения. Решение ищется в классе регуляторов переменной структуры. Для обеспечения работоспособности такого регулятора необходимо построение наблюдателя переключающего сигнала. В качестве наблюдателя предлагается использовать нейросеть, теоретическим аспектам настройки которой и посвящена настоящая работа.

DOI: 10.31857/S0374064122110103, EDN: MCFCOP

1. Постановка задачи. Рассматривается непрерывная скалярная переключаемая линейная система
$$\dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma u, \quad \sigma \in S_\tau, \tag{1}$$
где $\sigma : \mathbb{R}_+ \to I = \{1, \ldots, m\}$ – непрерывная справа кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; S_τ – множество всех переключающих сигналов σ, для которых время между любыми двумя соседними переключениями не меньше τ $(\tau > 0)$; I – множество индексов, нумерующих режимы функционирования системы (1); $A_\sigma = A \circ \sigma$ – композиция отображения $A : I \to \to \{A_1, \ldots, A_m\}$ $(A_i \in \mathbb{R}^{n\times n})$ и переключающего сигнала σ, $b_\sigma = b \circ \sigma$ – аналогичная композиция для отображения $b : I \to \{b_1, \ldots, b_m\}$ $(b_i \in \mathbb{R}^n)$; пары матриц (A_i, b_i), $i = \overline{1, m}$, определяют режимы функционирования системы (1); $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^1$ – управляющий вход.

Задача. Требуется стабилизировать систему (1) в заданной окрестности нуля $D(0;\gamma) = = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant \gamma\}$, т.е. построить обратную связь $u = u(x)$ такую, что для некоторого $\bar{\gamma} > 0$ и любых $x(0) \in D(0;\gamma)$, $\sigma \in S_\tau$ норма соответствующего решения $x(t)$ удовлетворяет условиям:

1) $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$;

2) $\|x(t)\| \leqslant \bar{\gamma}$ при $t \in [0, \infty)$.

При этом вектор-функция $x(t)$ определяется как решение следующей нестационарной системы с кусочно-постоянными коэффициентами:
$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u(x), \quad x(0) = x_0, \quad \sigma \in S_\tau.$$
Далее для векторов будем рассматривать норму $\|x\| = \max_i |x_i|$, а для матриц – норму $\|A\| = = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.

Известные подходы к решению сформулированной выше задачи стабилизации можно разбить на две группы. К первой группе относятся методы, предполагающие построение единого регулятора для семейства динамических систем, включающего все различные режимы (A_i, b_i) переключаемой системы (1). Фактически в этом случае речь идет о нахождении одновременно стабилизирующего регулятора для конечного семейства линейных систем. При этом данный регулятор должен обеспечивать не только устойчивость каждого режима системы (1), но и устойчивость траекторий этой системы при любом переключающем сигнале из множества S_τ. Одним из наиболее известных методов, позволяющих синтезировать подобные регуляторы, является метод квадратичной стабилизации [1, с. 49], основанный на поиске регулятора в форме статической линейной обратной связи, обеспечивающий существование общей функции Ляпунова для системы (1), замкнутой этим регулятором. Популярность данного подхода обусловлена возможностью сведения задачи синтеза такого регулятора к задаче поиска решений системы линейных матричных неравенств, которая, в свою очередь, допускает численное решение. Также можно отметить метод сверхстабилизации [2], предполагающий поиск единой статической обратной связи и обеспечивающей свойство сверхустойчивости для всех замкнутых режимов системы (1). В этом случае поиск стабилизатора может быть сведён к решению задачи линейного программирования [3]. Отметим, что упомянутые методы имеют свои достоинства и недостатки. К достоинствам можно отнести тот факт, что регуляторы, найденные в соответствии с методом квадратичной стабилизации или методом сверхстабилизации, на самом деле решают более общую задачу, а именно, обеспечивают устойчивость переключаемой системы при произвольных переключениях (когда отсутствует ограничение снизу на время переключений для различных режимов). С другой стороны, с увеличением количества режимов шансы на нахождение единого регулятора существенно уменьшаются, поскольку его существование становится связанным с разрешимостью линейных неравенств большой размерности.

Качественно другой подход к решению поставленной задачи заключается в построении регулятора переменной структуры (переключаемого регулятора)

$$u = u_\sigma(x), \tag{2}$$

каждый режим которого является стабилизирующей обратной связью $u = u_i(x)$ для i-го режима $\dot{x} = A_i x + b_i u$ переключаемой системы (1), т.е. обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы

$$\dot{x} = A_i x + b_i u_i(x). \tag{3}$$

Отметим, что в предположении полной управляемости пары (A_i, b_i) стабилизирующую обратную связь для каждого режима системы (1) можно искать в форме линейной статической обратной связи $u = -k_i x.$ Известно [4, с. 249], что такая обратная связь всегда существует как решение задачи модального управления.

Таким образом, система (1), замкнутая регулятором (2), будет иметь вид

$$\dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma u_\sigma(x), \quad \sigma \in S_\tau.$$

Укажем теперь две основные проблемы, которые необходимо решать для обеспечения работоспособности указанного выше регулятора переменной структуры. Первая состоит в том, что для реализации указанного регулятора необходимо знать моменты переключения режимов и номера активных режимов в каждый момент времени, для того чтобы обеспечить синхронность переключений регулятора. Но, как правило, такая информация о переключаемой системе в режиме реального времени недоступна. Вторая проблема заключается в том, что устойчивость каждого режима (3) переключаемой системы в отдельности не является достаточным условием устойчивости самой переключаемой системы (1).

Одно из возможных решений первой проблемы, позволяющее использовать данный регулятор, заключается в построении наблюдателя переключающего сигнала (в дальнейшем будем называть его просто наблюдателем), который определял бы номер активного режима для текущего момента времени, что, в свою очередь, позволило бы обеспечить синхронность переключения регулятора с переключениями режимов. Учитывая известные оценки времени задержки τ для обеспечения устойчивости переключаемой системы с устойчивыми режимами (см., например, [5, с. 56; 6; 7]), решение второй проблемы естественно искать, используя эти оценки при построении регуляторов (2).

2. Подход к решению. В настоящей работе исследуются теоретические аспекты решения задачи из п. 1 на основе нейросетевого подхода, который заключается в том, что в качестве упомянутого выше наблюдателя режимов предлагается использовать нейронную сеть [8, с. 55]. Можно считать, что выходом такой нейросети является оценка $\hat{\sigma}(t)$ недоступного для измерения переключающего сигнала. При этом регулятор переменной структуры ищем в виде

$$u = -k_{\hat{\sigma}} x, \tag{4}$$

где $\hat{\sigma}(t)$ – оценка переключающего сигнала, $\hat{\sigma}(t) \in \{1, \ldots, m\},$ а векторы $k_i \in \mathbb{R}^n$ выбираются из условий устойчивости матриц $A_i - b_i k_i.$

Пару – переключаемый регулятор и нейронную сеть – далее будем называть *нейрорегулятором.* Систему (1), замкнутую нейрорегулятором, можно представить переключаемой системой следующего вида:

$$\dot{x} = (A_\sigma - b_\sigma k_{\hat{\sigma}})x, \quad \sigma \in S_\tau, \quad \hat{\sigma} \in [S]_{\varepsilon_p}, \tag{5}$$

где $\varepsilon_p = \tau/p$ – достаточно малая положительная константа, $p \in \mathbb{N}$ – некоторый фиксированный параметр алгоритма наблюдения, $[S]_{\varepsilon_p}$ – множество переключающих сигналов, для которых моменты переключений принадлежат множеству $\{l\varepsilon_p\}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ Перенумеруем (от 1 до m^2) все возможные режимы

$$\dot{x} = (A_i - b_i k_j)x \quad (i, j = \overline{1, m})$$

переключаемой системы (5), присвоив каждому (ij)-му режиму соответствующий номер $s = (i-1)m + j$. Введём функцию $\xi : \{1, \ldots, m^2\} \to \{1, \ldots, m\}$, отображающую каждый номер s в соответствующий ему индекс i, т.е. $\xi(s) = i$.

Работа нейронной сети в качестве наблюдателя переключающего сигнала осуществляется в процессе функционирования системы и состоит в следующем: для заданной дискретной последовательности моментов времени $l\varepsilon_p$, $l = 0, 1, 2, \ldots,$ по каждой паре измерений вектора состояния $(x(l\varepsilon_p), x((l+1)\varepsilon_p))$ нейронная сеть должна определять номер s текущего режима переключаемой системы (5) в момент $t = (l+1)\varepsilon_p$. Обозначим выход нейросети в момент $l\varepsilon_p$ через $N[l\varepsilon_p]$. На основе данной информации оценка $\hat{\sigma}[l\varepsilon]$ переключающего сигнала $\sigma(t)$ строится следующим образом:

$$\hat{\sigma}(t) \equiv \xi(N[l\varepsilon_p]) \ \text{ при } \ t \in [l\varepsilon_p, (l+1)\varepsilon_p), \quad l = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

В результате переключение векторов k_i стабилизирующей обратной связи задаёт переключающий сигнал (6) с некоторым заданным начальным условием $\hat{\sigma}(0) = \hat{\sigma}_0$ $(\hat{\sigma}_0 \in \{1, \ldots, m\})$. Описанный наблюдатель далее будем обозначать через $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$.

Таким образом, основная задача функционирования нейронной сети состоит в построении оценки $\hat{\sigma}$ неизвестного переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$. Дискретную ошибку оценивания $e_\sigma[l\tau]$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ сигнала $\sigma(t)$ определим по формуле

$$e_\sigma[l\tau] = \max_{i=\overline{0,l-1}} \mu_{i\tau}^{(i+1)\tau},$$

где $\mu_{i\tau}^{(i+1)\tau}$ – количество промежутков вида $[j\varepsilon_p, (j+1)\varepsilon_p) \subset [i\tau, (i+1)\tau]$, для которых $\sigma(t) \not\equiv \hat{\sigma}(j\varepsilon_p)$. Заметим, что такой выбор ошибки $e_\sigma[l\tau]$ удобен для дальнейшего оценивания окрестности положения равновесия (см. п. 5), используемой для формирования обучающей выборки для нейросетевого наблюдателя.

Можно выделить несколько основных шагов настройки нейрорегулятора:

1) выбор структуры нейросети;

2) выбор регуляторов $u = -k_i x$, обеспечивающих достаточно быстрое затухание переходных процессов замкнутых режимов переключаемой системы с учётом времени задержки τ;

3) выбор величины ε_p с учётом ограничений на ошибку оценивания и времени задержки τ;

4) расчёт величины $\bar{\gamma}$ (см. условие задачи в п. 1) с учётом ограничений на ошибку оценивания и размера окрестности $D(0; \gamma)$;

5) построение обучающей выборки для нейросети с учётом величины $\bar{\gamma}$;

6) обучение нейросети на промежутке $[0, \varepsilon_p]$;

7) проверка работоспособности нейросети по определению текущего активного режима;

8) моделирование переключаемой системы (1), замкнутой построенным нейрорегулятором.

Далее обсуждаются теоретические вопросы, связанные с настройкой и работоспособностью нейрорегулятора. К ним относятся, главным образом, задачи, сформулированные в перечисленных выше пп. 2)–5).

3. Выбор режимов переключаемого регулятора. Построение стабилизирующего регулятора переменной структуры для системы (1) в случае ненаблюдаемых переключающих сигналов включает два основных шага: построение стабилизирующих регуляторов для каждого режима в отдельности и настройка алгоритма их переключений. Рассмотрим первый шаг. Как было указано выше, необходимым условием устойчивости переключаемой системы является асимптотическая устойчивость каждого её режима. К сожалению, это условие не является достаточным и требует усиления в зависимости от класса допустимых переключающих сигналов. Поскольку в работе рассматривается случай медленных переключений с заданным временем задержки τ, то при синтезе регулятора переменной структуры, при построении стабилизаторов для каждого режима системы (1) можно использовать подход, основанный на достаточном условии устойчивости переключаемых линейных систем, сформулированный в работе [7].

Итак, в предположении полной управляемости пар (A_i, b_i), $i = \overline{1, m}$, для каждого режима

$$\dot{x} = A_i x + b_i u$$

построим обратную связь $u = -k_i x$, обеспечивающую простой вещественный и устойчивый спектр матрицы замкнутой системы

$$\dot{x} = (A_i - b_i k_i)x, \tag{7}$$

т.е. $\operatorname{Spec}(A_i - b_i k_i) \subset \mathbb{R}_-$ и для любых $s_j, s_m \in \operatorname{Spec}(A_i - b_i k_i)$ следует, что $s_j \neq s_m$.

В этом случае для нормы вектора решения системы (7) можно записать [9, с. 57] следующую оценку:

$$\|x(t)\| \leqslant \|e^{\Lambda_{ii}(t-s)}\| \cdot \|x(s)\| \leqslant c_{ii} e^{\alpha_{ii}(t-s)} \|x(s)\|, \quad t \geqslant s \geqslant 0,$$

где

$$\Lambda_{ii} = A_i - b_i k_i, \quad \alpha_{ii} = \max_{\lambda_k^i \in \operatorname{Spec}\{\Lambda_{ii}\}} \lambda_k^i < 0, \quad c_{ii} = \|M_{ii}^{-1}\| \cdot \|M_{ii}\|.$$

Здесь M_{ii} – матрица преобразования, приводящая матрицу Λ_{ii} к диагональному виду $J_{ii} = \operatorname{diag}\{\lambda_1^i, \ldots, \lambda_n^i\}$, т.е.

$$J_{ii} = M_{ii}^{-1} \Lambda_{ii} M_{ii}.$$

Заметим, что столбцами матриц M_{ii} являются собственные векторы соответствующих матриц Λ_{ii}.

Обозначим

$$\alpha = \max_{i=\overline{1,m}} \alpha_{ii}, \quad c = \max_{i=\overline{1,m}} c_{ii}.$$

В соответствии с достаточным условием устойчивости [7] переключаемая система с режимами (7) является устойчивой при любых переключающих режимах из множества S_τ, если

$$\tau > \frac{2}{\alpha} \ln \frac{1}{c} = \frac{2 \ln c}{|\alpha|}. \tag{8}$$

Для выполнения условия (8) можно рекомендовать строить регуляторы $u = -k_i x$, обеспечивающие достаточно большую величину α, что всегда возможно в силу предположения о полной управляемости пар (A_i, b_i). Известно, как правило, что $c = O(|\alpha|^{n-1})$.

4. Квантование времени работы наблюдателя переключающего сигнала. Как уже отмечалось выше, основная проблема при реализации регулятора переменной структуры состоит в том, что для его работоспособности нужна информация о текущем переключающем сигнале, что позволит обеспечить синхронность переключения режимов регулятора с переключениями режимов системы, и если переключающий сигнал недоступен для измерения, то необходимо использовать наблюдателя для оценки текущего значения переключающего сигнала. Выше (см. п. 2) был определён наблюдатель, работающий на основе нейросети. Фактически данный наблюдатель представляет собой дискретную систему, выход которой управляет переключением режимов регулятора переменной структуры. В идеале режимы регулятора должны переключаться синхронно с переключениями режимов системы (1). Однако моменты переключений системы (1), обусловленные переключающими сигналами $\sigma \in S_\tau$, совершенно не обязательно должны совпадать с дискретной последовательностью $\{l\varepsilon\}$ моментов срабатывания нейросети. В результате этого могут возникать ошибки нейросети в определении номера активного режима замкнутой системы (5), что, в свою очередь, влечёт за собой неверное включение очередного режима регулятора. Более того, нельзя исключать и того факта, что нейросеть может самопроизвольно выдавать ошибочное значение активного режима. Достаточно полную информацию о корректности работы нейросети содержит введённая выше ошибка оценивания переключающего сигнала $e_\tau[l\tau]$, на основе которой ниже будет сформулировано достаточное условие устойчивости переключаемой системы (1), замкнутой нейрорегулятором (4), (6).

Далее потребуется следующая лемма, доказательство которой аналогично рассуждениям теоремы 6 работы [7].

Лемма. *Пусть для системы*

$$\dot{x} = A_\sigma x, \quad \sigma \in S_\tau, \tag{9}$$

существуют константы $d > 1$ и $q > 0$ такие, что для любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ и начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ для соответствующего решения $x(t)$ справедливы неравенства:

1) $\|x((i+1)q)\| < \|x(iq)\|/d$ для всех $i = 0, 1, \ldots;$

2) $\|x(t)\| < \|x(iq)\|$ для всех $t \in [(i+1)q, (i+2)q]$, $i = 0, 1, \ldots$

Тогда для любого начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ норма соответствующего решения системы (9) стремится к нулю, т.е.

$$\|x(t)\| \to 0, \quad t \to \infty.$$

Далее будем использовать обозначение

$$\Lambda_{ij} = A_i - b_i k_j, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Пусть J_{ij} – жорданова нормальная форма для Λ_{ij}, а M_{ij} – матрица, приводящая Λ_{ij} к соответствующей жордановой форме J_{ij}. Положим

$$\alpha_{ij} = \max_{\lambda_k^{(ij)} \in \operatorname{Spec} \Lambda_{ij}} \operatorname{Re}(\lambda_k^{(ij)}).$$

Для систем

$$\dot{x} = (A_i - b_i k_j)x, \quad i \neq j,$$

можно записать следующие оценки для норм решений [8]

$$\|x(t)\| \leqslant \|e^{\Lambda_{ij}(t-s)}\| \|x(t)\| \leqslant c_{ij} e^{\alpha_{ij}(t-s)} P_{ij}(t-s) \|x(t)\|,$$

здесь $c_{ij} = \|M_{ij}^{-1}\| \|M_{ij}\|$, $P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{r_{ij}-1} (t^k/k!)$, r_{ij} – размер максимальной клетки Жордана в жордановой нормальной форме J_{ij} матрицы Λ_{ij}.

Обозначим

$$\rho = \max_{\substack{i,j=\overline{1,m} \\ i \neq j}} \alpha_{ij}, \quad \beta = \max_{\substack{i,j=\overline{1,m} \\ i \neq j}} c_{ij}, \quad r = \max_{\substack{i,j=\overline{1,m} \\ i \neq j}} r_{ij}.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\rho > 0$.

Сформулируем теперь достаточное условие устойчивости замкнутой системы (5).

Теорема 1. *Пусть для замкнутой системы (5) при любом переключающем сигнале $\sigma \in \in S_\tau$ и любом начальном условии $x(0) \in \mathbb{R}^n$ наблюдатель $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$ генерирует оценку $\hat{\sigma} \in [S]_{\varepsilon_p}$ с ошибкой, удовлетворяющей условию*

$$e_\sigma[l\tau] \leqslant \theta, \quad l = 1, 2, \ldots,$$

для некоторого $\theta \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \theta \leqslant [p/2]$.

Тогда, если

$$\tau > \frac{2}{\alpha}\ln\frac{1}{h},$$

где $h = c^{\theta+2}\beta^\theta P^\theta(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p}$, *для любого начального условия* $x(0)\in\mathbb{R}^n$ *и любого переключающего сигнала* $\sigma\in S_\tau$ *норма соответствующего решения системы (5) стремится к нулю:* $\|x(t)\|\to 0,\ t\to\infty$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $h>1$, а из определения наблюдателя $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$ следует, что $\theta\geqslant 1$. Далее, в силу условия теоремы на каждом отрезке $[i\tau,(i+1)\tau]$, $i=0,1,\ldots$, максимальное число промежутков $[l\varepsilon_p,(l+r)\varepsilon_p)$ $(l\in\mathbb{N}\bigcup\{0\},\ r\in\mathbb{N})$, на которых $\sigma(t)\not\equiv\hat\sigma[l\varepsilon_p]$, не более θ (при этом для каждого l число r фактически равно количеству "склеенных" промежутков длины ε_p, на которых выполнено указанное тождество), максимальное число промежутков вида $[l\varepsilon_p,(l+r)\varepsilon_p)$ $(l\in\mathbb{N}\bigcup\{0\},\ r\in\mathbb{N})$, на которых $\sigma(t)\equiv\hat\sigma[l\varepsilon_p]$, не более $\theta+1$ и не более одного промежутка вида $[l\varepsilon_p,(l+1)\varepsilon_p)$, содержащего точку разрыва переключающего сигнала $\sigma(t)$ (соответственно на таком промежутке $\sigma(t)\not\equiv\hat\sigma[l\varepsilon_p]$). Заметим, что для всех $l\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ верны следующие неравенства:

$$\|x((l+1)\varepsilon_p)\|\leqslant c\|x(l\varepsilon_p)\|e^{\alpha\varepsilon_p},\quad \text{если}\ \ \sigma(t)\equiv\hat\sigma[l\varepsilon_p],$$

$$\|x((l+1)\varepsilon_p)\|\leqslant \beta\|x(l\varepsilon_p)\|P(\varepsilon_p)e^{\rho\varepsilon_p},\quad \text{если}\ \ \sigma(t)\not\equiv\hat\sigma[l\varepsilon_p], \tag{10}$$

а если $\sigma(t)\not\equiv\hat\sigma[l\varepsilon_p]$ на промежутке $[l\varepsilon_p,(l+1)\varepsilon_p)$, внутри которого лежит точка разрыва переключающего сигнала $\sigma(t)$, то справедлива оценка

$$\|x((l+1)\varepsilon_p)\|\leqslant c\beta P(\varepsilon_p)e^{\rho\varepsilon_p}\|x(l\varepsilon_p)\|. \tag{11}$$

Из неравенств (10) и (11) нетрудно получить следующую оценку для решений системы (5):

$$\|x((i+1)\tau)\|\leqslant h\|x(i\tau)\|e^{\alpha\tau},\quad i=0,1,\ldots \tag{12}$$

Учитывая, что $\alpha<0$, в силу условия теоремы получаем цепочку неравенств

$$\tau>\frac{2}{\alpha}\ln h^{-1},\quad \alpha\tau<\ln h^{-2},\quad e^{\alpha\tau}<h^{-2},\quad \|x(i\tau)\|e^{\alpha\tau}<h^{-2}\|x(i\tau)\|,$$

откуда

$$h^2\|x(i\tau)\|e^{\alpha\tau}<\|x(i\tau)\|. \tag{13}$$

Далее из (12) и (13) имеем

$$h\|x((i+1)\tau)\|\leqslant h^2\|x(i\tau)\|e^{\alpha\tau}<\|x(i\tau)\|.$$

Отсюда окончательно получаем

$$\|x((i+1)\tau)\|<\frac{1}{h}\|x(i\tau)\|,\quad i=0,1,\ldots \tag{14}$$

Таким образом, показано, что для замкнутой системы (5) выполнен п. 1) леммы при $q=\tau$, $d=h$. Докажем теперь, что для этой системы выполняется также и п. 2) леммы.

Действительно, зафиксируем произвольное $t\in[(i+1)\tau,(i+2)\tau]$, $i=0,1,\ldots$, и рассмотрим два случая.

1) Пусть $t\in[l\varepsilon_p,(l+1)\varepsilon_p)\subset[(i+1)\tau,(i+2)\tau]$ и на этом промежутке $\sigma(t)\equiv\hat\sigma[l\varepsilon_p]$. Далее, пусть на отрезке $[(i+1)\tau,(i+2)\tau]$ левее t располагается $\varkappa$ промежутков вида $[l\varepsilon_p,(l+1)\varepsilon_p)$, для которых $\sigma(t)\not\equiv\hat\sigma[l\varepsilon_p]$ и r промежутков такого же вида, где $\sigma(t)\equiv\hat\sigma[l\varepsilon_p]$. Тогда, учитывая (10) и (11), получаем оценку

$$\|x(t)\|\leqslant c^{r+1}\beta^\varkappa P^\varkappa(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\varkappa\varepsilon_p}c\|x((i+1)\tau)\|e^{\alpha(t-(i+1)\tau)}.$$

Поскольку $e^{\alpha(t-(i+1)\tau)} < 1,$ то справедливо неравенство

$$\|x(t)\| \leqslant c^{r+2}\beta^{\varkappa}P^{\varkappa}(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\varkappa\varepsilon_p}\|x((i+1)\tau)\|. \tag{15}$$

Отсюда, учитывая (14), получаем

$$\|x(t)\| \leqslant c^{r+2}\beta^{\varkappa}P^{\varkappa}(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\varkappa\varepsilon_p}c\|x((i+1)\tau)\| <$$

$$< c^{r+2}\beta^{\varkappa}P^{\varkappa}(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\varkappa\varepsilon_p}\frac{1}{h}\|x(i)\tau)\| = \frac{c^{r+2}\beta^{\varkappa}P^{\varkappa}(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\varkappa\varepsilon_p}}{c^{\theta+2}\beta^{\theta}P^{\theta}(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p}}\|x(i)\tau)\|.$$

В силу того, что в рассматриваемом случае $r \leqslant \theta,\ \ \varkappa \leqslant \theta,$ дробь в последнем неравенстве не превосходит единицы и тогда окончательно имеем

$$\|x(t)\| < \|x(i\tau)\|. \tag{16}$$

2) Пусть теперь $t \in [l\varepsilon_p, (l+1)\varepsilon_p) \subset [(i+1)\tau, (i+2)\tau]$ и на этом промежутке $\sigma(t) \not\equiv$ $\not\equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p].$ Также, как и в случае 1), пусть на отрезке $[(i+1)\tau, (i+2)\tau]$ левее t располагается $\varkappa$ промежутков вида $[l\varepsilon_p, (l+1)\varepsilon_p),$ для которых $\sigma(t) \not\equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$ и r промежутков такого же вида, где $\sigma(t) \equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p].$ Тогда, рассуждая как и в случае 1) и учитывая (10) и (11), получаем оценку

$$\|x(t)\| \leqslant c^{r+1}\beta^{\varkappa}P^{\varkappa}(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\varkappa\varepsilon_p}\beta P(\varepsilon_p)\|x((i+1)\tau)\|e^{\rho(t-(i+1)\tau)} \leqslant$$

$$\leqslant c^{r+1}\beta^{\varkappa+1}P^{\varkappa+1}(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)(\varkappa+1)\varepsilon_p}\|x((i+1)\tau)\|. \tag{17}$$

Отсюда с учётом (14) имеем

$$\|x(t)\| \leqslant c^{r+1}\beta^{\varkappa+1}P^{\varkappa+1}(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)(\varkappa+1)\varepsilon_p}\|x((i+1)\tau)\| <$$

$$< c^{r+1}\beta^{\varkappa+1}P^{\varkappa+1}(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)(\varkappa+1)\varepsilon_p}\frac{1}{h}\|x(i\tau)\| = \frac{c^{r+1}\beta^{\varkappa+1}P^{\varkappa+1}(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)(\varkappa+1)\varepsilon_p}}{c^{\theta+2}\beta^{\theta}P^{\theta}(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p}}\|x(i\tau)\|.$$

В силу того, что в рассматриваемом случае $r \leqslant \theta,\ \ \varkappa+1 \leqslant \theta,$ дробь в последнем неравенстве не превосходит единицы, и в случае 2) также имеет место неравенство (16).

Таким образом, получили, что при выполнении условий теоремы 1 выполняются условия леммы, а тогда для любого начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ норма соответствующего решения замкнутой системы (5) стремится к нулю. Теорема 1 доказана.

5. Оценка окрестности положения равновесия для формирования обучающей выборки. Как было отмечено в п. 2, задача нейросети состоит в том, чтобы по каждой паре измерений вектора состояния $(x(l\varepsilon_p), x((l+1)\varepsilon_p))$ нейронная сеть определяла бы номер s текущего режима переключаемой системы (5) в момент $t = (l+1)\varepsilon_p.$ Причём считаем, что эту задачу нейросеть должна правильно решать в предположении, что на рассматриваемом отрезке $[l\varepsilon_p, (l+1)\varepsilon_p]$ отсутствуют точки разрыва сигнала $\sigma(t).$ И поскольку в этом случае на таких отрезках будет активен один из линейных стационарных режимов системы (5), то $x((l+1)\varepsilon_p) = x(\varepsilon_p),$ если $x(l\varepsilon_p) = x(0).$ Таким образом, нейронную сеть достаточно обучить на векторах вида $(x(0), x(\varepsilon_p)),$ построенных для всех возможных режимов системы (5). При этом необходимо решить вопрос об окрестности нуля, по которой будет строиться выборка для обучения нейросети. В качестве таковой можно выбрать окрестность $D(0;\bar{\gamma})$ (см. постановку задачи в п. 1). Следующая теорема даёт оценку величины $\bar{\gamma}$ по заданной ошибке оценивания переключающего сигнала $e_\sigma[l\tau].$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при любом начальном условии* $x(0) \in D(0;\gamma)$ *и любом переключающем сигнале* $\sigma \in S_\tau$ *выполнено неравенство*

$$\|x(t)\| \leqslant \bar{\gamma}, \quad t \in [0, +\infty),$$

где $\bar{\gamma} = h\gamma.$

Действительно, если выполнены условия теоремы 1, то из полученных в ходе её доказательства неравенств (14) и (16) следует, что для любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ и начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ для соответствующего решения $x(t)$ справедливы неравенства:

1) $\|x((i+1)\tau)\| < \|x(i\tau)\|/h$ для всех $i = 0, 1, \ldots$;

2) $\|x(t)\| < \|x(i\tau)\|$ для всех $t \in [(i+1)\tau, (i+2)\tau]$, $i = 0, 1, \ldots$

Из этих неравенств следует, что для расчёта величины $\bar\gamma$ достаточно оценить наибольшее значение нормы вектора $x(t)$ на промежутке $[0, \tau]$. Учитывая оценки (15) и (17), получаем

$$\|x(t)\| \leqslant c^{\theta+2}\beta^\theta P^\theta(\varepsilon_p)e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p}\|x(0)\| \leqslant h\gamma$$

при всех $t \in [0, \tau]$. Теорема доказана.

6. Численное моделирование. Полученные результаты продемонстрируем на численном примере. Рассмотрим задачу стабилизации (см. п. 1) для переключаемой линейной системы

$$\dot x = A_\sigma x + b_\sigma u, \quad \sigma \in S_\tau, \quad \sigma(t) \in I = \{1, 2, 3\}, \tag{18}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Считаем, что $\tau = 1$, $\gamma = 2$.

Стабилизирующий регулятор для системы (18) ищем в виде

$$u = -k_{\hat\sigma}x, \quad \hat\sigma(t) \in \{1, 2, 3\}. \tag{19}$$

Используя рассуждения п. 3, выберем следующие значения k_i: $k_1 = \begin{pmatrix} -0.4 & -0.1 \end{pmatrix}$, $k_2 = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, $k_3 = \begin{pmatrix} -1.4 & -1.8 \end{pmatrix}$. Пусть $p = 20$, тогда $\epsilon_p = 0.05$. В качестве наблюдателя $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$ выберем обобщённую регрессионную двухуровневую нейронную сеть. При условии, что наблюдатель $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$ генерирует оценку $\hat\sigma \in [S]_{\varepsilon_p}$ с ошибкой $e_\sigma[l\tau] \leqslant 1$ (априорная ошибка $\theta = 1$), рассчитаем величины h, $\overline{\gamma}$ в соответствии с результатами пп. 4, 5: $h = 24.3$, $\overline{\gamma} = 68.9$. Далее с использованием величины $\overline{\gamma}$ осуществляется обучение нейросети с помощью функции newgrnn пакета Matlab.

На рис. 1 представлены результаты численного моделирования в пакете Matlab решения замкнутой системы (18), (19) при начальных условиях $x_1(0) = 1.5$, $x_2(0) = 1$ и некотором переключающем сигнале σ (рис. 2).

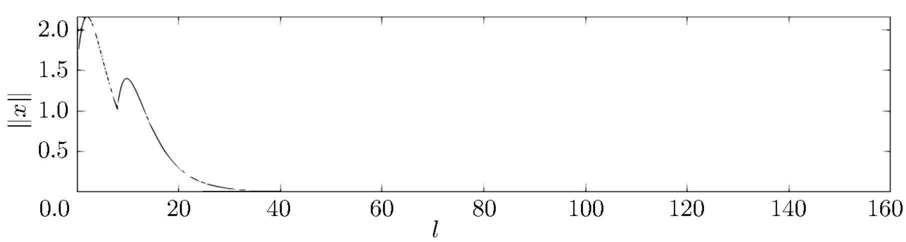

Рис. 1. Поведение нормы решения замкнутой системы.

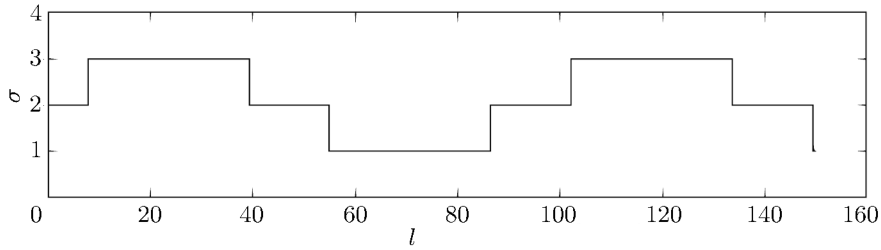

Рис. 2. Переключающий сигнал.

Моделирование проведено для $t \in [0,150]$. Его результаты показали, что апостериорная ошибка наблюдателя равна также единице, а норма решения стремится к нулю, что подтверждает работоспособность построенного стабилизатора.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00162).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М., 2007.
2. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // Автоматика и телемеханика. 2002. № 8. С. 37–53.
3. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И.* Цифровая сверхстабилизация переключаемой интервальной линейной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1516–1527.
4. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М., 1976.
5. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston, 2003.
6. *Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф.* К вопросу о стабилизации переключаемых линейных систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1522–1533.
7. *Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф.* Сверхстабилизация линейных динамических объектов при действии операторных возмущений // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 7. С. 865–876.
8. *Хайкин С.* Нейронные сети. М., 2006.
9. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

Электротехнический университет, г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации
имени А.А. Харкевича, г. Москва

Поступила в редакцию 31.05.2022 г.
После доработки 21.07.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1557–1561

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.4

О СТАБИЛИЗАЦИИ СРЕДНИХ ПО ВРЕМЕНИ ОТ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ПО И.Г. ПЕТРОВСКОМУ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. П. В. Денисов

Изучаются необходимые и достаточные условия стабилизации средних по времени от решения задачи Коши для параболической по И.Г. Петровскому системы уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064122110115, EDN: MCKNEG

Вопросы стабилизации решений параболических уравнений привлекают внимание многих исследователей. Из большого числа работ по данной теме отметим обзорные статьи [1–3]. Особую важность для случая параболических по И.Г. Петровскому систем уравнений имеют работы С.Д. Эйдельмана и Ф.О. Порпера [4–6] и монография С.Д. Эйдельмана [7], посвящённая параболическим системам.

Рассмотрим параболическую по И.Г. Петровскому систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k|=2b} A_k D^k u, \quad x \in E^N, \quad t > 0, \tag{1}$$

где $b \in \mathbb{N}$, A_k – $m \times m$-матрицы с постоянными элементами, для решений $u(x,t)$ которой выполняются начальные условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in E^N, \tag{2}$$

где $u_0(x) = (u_0^1(x), \ldots, u_0^m(x))$ – заданная в пространстве E^N ограниченная и непрерывная вектор-функция (верхний индекс здесь обозначает номер компоненты вектор-функции $u_0(x)$), оператор

$$D^k = (-i)^k \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_N^{k_N}}, \quad |k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_N.$$

Установлено (см. работу [4]), что для матрицы Грина системы (1)

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{E^N} \exp\left[i(x,y) - t \sum_{|k|=2b} A_k y_1^{k_1} y_2^{k_2} \ldots y_N^{k_N} \right] dy$$

имеет место оценка

$$\left| \frac{\partial^k G(x,t)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_N^{k_N}} \right| < C_1 t^{-(N+k)/(2b)} \exp(-C_2(|x| t^{-1/(2b)})^q), \tag{3}$$

где $(x,y) = x_1 y_1 + \ldots + x_N y_N$, $|x| = [x_1^2 + \ldots + x_N^2]^{1/2}$, $q = 2b/(2b-1)$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$.

Известно [7], что в классе единственности решение задачи Коши (1), (2), построенное по ограниченной и непрерывной начальной вектор-функции $u_0(x)$, задаётся интегралом Пуассона

$$u(x,t) = \int\limits_{E^N} G(x-\xi,t) u_0(\xi)\, d\xi, \quad d\xi = d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_N. \tag{4}$$

Из того, что единичная $m \times m$-матрица I удовлетворяет системе (1), следует равенство

$$\int\limits_{E^N} G(x-\xi,t)\,d\xi = I.$$

В настоящей работе будут изучаться необходимые и достаточные условия стабилизации предела средних по времени от решения задачи (1), (2)

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t u(x,\tau)\,d\tau = 0 \tag{5}$$

равномерно по x в пространстве E^N.

Теорема. *Если начальная вектор-функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна в пространстве E^N, то для того чтобы существовал предел (5) средних по времени t от решения задачи (1), (2) равномерно по x в E^N необходимо и достаточно, чтобы решение задачи (1), (2) стабилизировалось к нулю:*

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0 \tag{6}$$

равномерно по x в E^N.

Доказательство. Достаточность. Предположим, что $u_0(x)$ – ограниченная и непрерывная в E^N вектор-функция и что существует предел (6) решения $u(x,t)$ задачи (1), (2). Докажем, что тогда существует предел (5) средних по времени t от решения задачи (1), (2) равномерно по x в E^N. Так как предел (6) является равномерным по x в E^N, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $d = d(\varepsilon)$ такое, что при всех $t > d$ справедливо неравенство

$$|u(x,t)| < \varepsilon/2 \tag{7}$$

для всех $x \in E^N$.

В силу условия ограниченности функции $u_0(x)$, $x \in E^N$, получим для решения $u(x,t)$ задачи (1), (2), определяемого формулой (4), оценку

$$|u(x,t)| \leqslant M \tag{8}$$

для всех $x \in E^N$ и всех $t > 0$.

Представим интеграл в (5) в виде суммы двух интегралов:

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t u(x,\tau)\,d\tau = \frac{1}{t}\int\limits_0^d u(x,\tau)\,d\tau + \frac{1}{t}\int\limits_d^t u(x,\tau)\,d\tau = K_1 + K_2, \tag{9}$$

где $d > 0$.

Пусть $t > d$, тогда из (7)–(9) получим неравенства

$$|K_1| < \frac{M_1 d}{t}, \quad M_1 = \sup_{\substack{x\in E^N\\ t>0}} |u(x,t)|, \quad |K_2| < \frac{\varepsilon}{2t}\int\limits_d^t < \frac{\varepsilon}{2}\frac{t-d}{t} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

Выберем теперь $t > 2M_1 d/\varepsilon$, тогда из (9), (10) получим

$$\left|\frac{1}{t}\int\limits_0^t u(x,\tau)\,d\tau\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при всех $t > 2M_1 d/\varepsilon$ равномерно по x в E^N.

Необходимость. Пусть $u_0(x)$ – ограниченная и непрерывная в E^N вектор-функция и существует предел (5) средних по времени t от решения задачи (1), (2), равномерно по x в E^N. Докажем, что тогда существует предел (6) решения $u(x,t)$ равномерно по x в E^N. Предположим противное, т.е. что решение $u(x,t)$ задачи (1), (2) не имеет равномерного в E^N предела (6). Это означает, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и любых положительных t_k, $k \in \mathbb{N}$, найдутся $t > t_k$ и такие точки $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_k^N)$, что по крайней мере для одной из компонент вектор-функции $u(x,t)$, например для $u^1(x,t)$, справедливо неравенство

$$|u^1(x^k, t_k)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{11}$$

Докажем, что тогда не существует нулевого предела (5) средних по времени t от $u(x,t)$ равномерно по x в E^N.

Для доказательства (11) достаточно показать, что найдутся компонента $u_0^1(x)$ начальной вектор-функции $u_0(x)$ и положительное число $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для любого $R > 0$ найдутся $R_k > R$ и точки $x^k = (x_1^k, \ldots, x_N^k)$, для которых справедливы неравенства

$$\left|\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} u_0^1(\xi)\,d\xi\right| \geqslant \varepsilon_0 > 0. \tag{12}$$

Используя (12), докажем, что соответствующая компонента средних по времени t от $u(x,t)$

$$W^1(x,t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t u^1(x,\tau)\,d\tau \tag{13}$$

не стремится к нулю при $t_k \to \infty$ равномерно по x в E^N.

Замечание 1. Хорошо известно, что существование предела

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(2R)^N}\int\limits_{K_R^x} u_0(x)\,dx = 0$$

равномерно по x в E^N влечёт за собой существование равномерного в пространстве E^N предела (5) (см. [8, с. 349]) средних по времени от $u(x,t)$.

Напомним наше предложение о том, что не существует предела (13), равномерного по x в E^N. Покажем, что из (12) следует, что $W^1(x,t)$ в (13) не стремится к нулю при $t \to \infty$ равномерно по x в E^N.

Выберем временну́ю последовательность

$$t_k = \left(\frac{\varepsilon_0 R_k}{4B^{N+1}mN}\right)^{2b} \to +\infty, \tag{14}$$

где R_k – некоторая последовательность, стремящаяся к бесконечности, а $B > 0$ – постоянная, которая будет выбрана далее. Усредним функцию $W^1(x,t)$ в (13) по кубу $K_{R_k}^{x^k}$ следующим образом:

$$|\Delta| = \left|\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} W^1(x,t_k)\,dx\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2t_k}\int\limits_0^{t_k} d\tau\,\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} dx\int\limits_{E^N}\sum_{j=1}^m G_{1j}(x-\xi,\tau)[u_0^j(x) + u_0^j(\xi) - u_0^j(x)]\,d\xi\right|, \tag{15}$$

где t_k – последовательность (14). Учитывая, что

$$\int\limits_{E^N} \sum_{j=1}^{m} G_{1j}(x-\xi,\tau)\,d\xi = 1,$$

и производя замены переменных $\xi_k = x_k + y_k\tau^{1/2}$, $k=\overline{1,N}$, в интеграле по ξ, получаем в (15)

$$|\Delta| = \left|\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K^{x^k}_{R_k}} W^1(x,\tau_k)\,dx\right| = \left|\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K^{x^k}_{R_k}} u_0^j(\xi)\,d\xi + \frac{1}{t_k}\int\limits_0^{t_k}\tau^{N/2b}\,d\tau\int\limits_{|y|\leqslant B}\sum_{j=1}^{m} G_{1j}(y\tau^{1/2b},\tau)\,dy\,\times\right.$$

$$\times\left[\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K^{x^k}_{R_k}}(u_0^j(x-y\tau^{1/2b}) - u_0^j(x))\,dx)\right] + \frac{1}{t_k}\int\limits_0^{t_k}\tau^{N/2b}\,d\tau\int\limits_{|y|\geqslant B}\sum_{j=1}^{m} G_{1j}(y\tau^{1/2b},\tau)\,dy\,\times$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K^{x^k}_{R_k}}[u_0^j(x-y\tau^{1/2b}) - u_0^j(x)]\,dx)\right]\right| = |L_1+L_2+L_3| \geqslant |L_1| - |L_2| - |L_3|, \tag{16}$$

где в силу (12)

$$|L_1| = \left|\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K^{x^k}_{R_k}} u_0^j(\xi)\,d\xi\right| > \varepsilon_0 > 0. \tag{17}$$

Выберем теперь число $B>0$ настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$|L_3| < \varepsilon_0/4. \tag{18}$$

Это можно сделать в силу оценки (3). В самом деле, учитывая, что

$$|u_0^j(x-y\tau^{1/2b}) - u_0^j(x)| < 2$$

для всех x, y из E^N и для всех $t>0$, из (3) получим неравенства

$$|L_3| \leqslant 2t_k^{N/2b}\int\limits_{|y|\geqslant B}\sum_{j=1}^{m}\left|G_{1j}(y\tau^{1/2b},\tau_k)\right|dy < \frac{\varepsilon_0}{4},$$

где $\tau^{1/2b}\leqslant t_k^{1/2b}$. Таким образом, оценка (18) доказана.

Покажем, что

$$|L_2| < \varepsilon_0/4. \tag{19}$$

Действительно, так как функция $u_0^j(x-\tau^{1/2b}y)$ отличается от функции $u_0^j(x)$ на множестве, имеющим меру, не превосходящую $2^N N R_k^{N-1} B t_k^{1/2b}$ при $0<\tau<t_k$, то имеет место оценка

$$\left|\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K^{x^k}_{R_k}}(u_0^j(x-y\tau^{1/2b}) - u_0^j(y))dy)\right| < \frac{NBt_k^{1/2b}}{R_k},$$

в силу которой и в силу выбора t_k по формуле (14) получим

$$|L_2| < \frac{NBt_k^{1/2b}}{R_k}mB^N = \frac{mNB^{N+1}}{R_k}\,\frac{\varepsilon_0 R_k}{4B^{N+1}mN} = \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

С учётом оценок (17)–(19) получаем из (16), что

$$\left|\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} W^1(x,t_k)\,dx\right| > \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{20}$$

Таким образом, из неравенства (11) следует, что для некоторого числа $\varepsilon_0 > 0$ нашлись такая последовательность t_k из (14), $t_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, и такая последовательность точек x^k, что справедлива оценка (20). Из (20) вытекает, что для любого сколь угодно большого времени $T > 0$ можно указать такие $t_k > T$, а также точки x_0^k, лежащие внутри куба $K_{R_k}^{x^k}$, для которых выполняется неравенство

$$|W^1(x_0^k,t_k)| = \left|\frac{1}{t_k}\int\limits_0^{t_k} u^1(x_0^k,\tau)\,d\tau\right| > \frac{\varepsilon_0}{2},$$

т.е. доказано, что функция $W^1(x,t)$ в (13) не стремится к нулю при $t_k \to \infty$ равномерно по x в E^N. Полученное противоречие доказывает необходимость теоремы. Теорема доказана.

Замечание 2. Утверждение о необходимости в теореме доказано без применения тауберовой теоремы Н. Винера [8, с. 352–354].

Автор выражает глубокую благодарность проф. Шамолину М.В. за внимание и проявленный интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гущин А.К., Михайлов В.П., Муравей Л.А.* О стабилизации решений нестационарных граничных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Динамика сплошной среды. 1975. Т. 23. С. 57–90.
2. *Денисов В.Н., Репников В.Д.* О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 1. С. 20–41.
3. *Денисов В.Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60. № 4. С. 145–212.
4. *Эйдельман С.Д.* Оценки решений параболических систем и некоторые их приложения // Мат. сб. 1953. Т. 33. № 2. С. 359–382.
5. *Эйдельман С.Д.* Лиувиллевы теоремы и теоремы об устойчивости для решений параболических систем // Мат. сб. 1958. Т. 44. № 4. С. 481–508.
6. *Эйдельман С.Д., Порпер Ф.О.* О стабилизации решения задачи Коши для параболических систем // Изв. вузов. Математика. 1960. № 4. С. 210–217.
7. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М., 1964.
8. *Харди Г.Г.* Расходящиеся ряды. М., 2006.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 09.03.2022 г.
После доработки 09.03.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1562–1564

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.25

О СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ НАГРУЖЕННОЙ ЦЕПИ

© 2022 г. Н. Ю. Капустин

Рассматриваются две спектральные задачи для уравнений Бесселя нулевого и первого порядка с одним характеристическим уравнением. Одна задача содержит спектральный параметр в граничном условии, другая спектрального параметра в граничных условиях не содержит.

DOI: 10.31857/S0374064122110127, EDN: MCLHNZ

Постановка задачи. Рассмотрим спектральную задачу

$$xX''(x) + X'(x) + \lambda xX(x) = 0, \quad 0 < a < x < b, \tag{1}$$

$$X'(a) = 0, \quad X'(b) - \lambda dX(b) = 0, \tag{2}$$

с отличным от нуля действительным коэффициентом d. Решением задачи (1), (2) является система собственных функций, состоящая из постоянной $X_1(x) = 1$, соответствующей собственному значению $\lambda_1 = 0$, и функций

$$X_n(x) = Y_1(\sqrt{\lambda_n}a)J_0(\sqrt{\lambda_n}x) - J_1(\sqrt{\lambda_n}a)Y_0(\sqrt{\lambda_n}x), \quad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

отвечающих собственным значениям λ_n – корням характеристического уравнения

$$J_1(\sqrt{\lambda}a)[Y_1(\sqrt{\lambda}b) + \sqrt{\lambda}dY_0(\sqrt{\lambda}b)] = Y_1(\sqrt{\lambda}a)[J_1(\sqrt{\lambda}b) + \sqrt{\lambda}dJ_0(\sqrt{\lambda}b)], \tag{3}$$

где J_n и Y_n – функции Бесселя первого и второго рода, соответственно, порядка n.

Задача (1), (2) возникает при изучении смешанной задачи для уравнения колебания нагруженной цепи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((x+m)g\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} + f(x,t) = 0$$

в области $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 0 < x < l,\ t > 0\}$ с начальными условиями

$$U(x,0) = 0, \quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial^2 U(0,t)}{\partial t^2} = g\frac{\partial U(0,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} = u(t),$$

с гравитационной постоянной g и управлением $u(t)$ упругой силой. Функция $f(x,t)$ представляет собой воздействие внешних сил. Аналогичная задача в случае, когда проводилось управление смещением, рассматривалась в работе [1].

Задача (1), (2) содержит спектральный параметр в граничном условии. Наряду с ней, рассмотрим задачу

$$xv''(x) + v'(x) + \left(\lambda x - \frac{1}{x}\right)v(x) = 0, \quad 0 < a < x < b, \tag{4}$$

$$v(a) = 0, \quad dbv'(b) + (d+b)v(b) = 0, \tag{5}$$

которая спектрального параметра в граничных условиях не содержит и имеет такое же характеристическое уравнение (3).

Основные результаты. Решением задачи (4), (5) будет система функций

$$v_n(x) = Y_1(\sqrt{\lambda_n}a)J_1(\sqrt{\lambda_n}x) - J_1(\sqrt{\lambda_n}a)Y_1(\sqrt{\lambda_n}x), \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Для этой задачи число $\lambda_1 = 0$ собственным значением не является. Заметим, что

$$X_n'(x) = -\sqrt{\lambda_n}v_n(x)$$

в силу известных соотношений

$$J_0'(x) = -J_1(x), \quad J_1'(x) = J_0(x) - J_1(x)/x, \quad Y_0'(x) = -Y_1(x), \quad Y_1'(x) = Y_0(x) - Y_1(x)/x.$$

Согласно результатам работ [2, с. 99; 3, с. 247] задача (4), (5) имеет простые собственные значения, расположенные на действительной оси, а значит, тем же свойством обладает и задача (1), (2). Задача (4), (5) является самосопряжённой и её система собственных функций образует ортонормированный базис в соответствующем весовом пространстве $L_{2,x}(a,b)$: $(f,g) = \int_a^b xf(x)g(x)\,dx$. Для задачи (1), (2) доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если $d \neq (a^2 - b^2)/2b$, то система $\{X_n(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots$, собственных функций задачи (1), (2) без любой одной собственной функции $X_l(x)$ образует базис Рисса в весовом пространстве $L_{2,x}(a,b)$. Функции биортогонально сопряжённой системы $\{\Psi_n(x)\}$ к этой системе определяются по формуле*

$$\Psi_n(x) = \bigg(\int_a^b xX_n^2(x)\,dx + dbX_n^2(b)\bigg)^{-1}\bigg[X_n(x) - \frac{X_n(b)}{X_l(b)}X_l(x)\bigg].$$

Теорема 2. *Если $d = (a^2 - b^2)/2b$, то вся система $\{X_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, собственных функций задачи (1), (2) образует базис Рисса в весовом пространстве $L_{2,x}(a,b)$. Функции биортогонально сопряжённой системы $\{\Psi_n(x)\}$ к этой системе определяются по формуле*

$$\Psi_n(x) = \bigg(\int_a^b xX_n^2(x)\,dx + dbX_n^2(b)\bigg)^{-1}\bigg[X_n(x) - \frac{X_n(b)}{X_1(b)}X_1(x)\bigg], \quad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

$$\Psi_1(x) = \bigg(\int_a^b x(Z'(x))^2\,dx\bigg)^{-1}\bigg[Z(b) - Z(x)\bigg],$$

где

$$Z(x) = -\frac{a^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}.$$

Доказательства теорем проводятся по схемам, разработанным в статьях [4, 5]. Осцилляционные свойства устанавливаются с помощью теоремы Руше. Отметим, что даже задача для простейшего оператора Штурма–Лиувилля с граничными условиями третьего рода, одно из которых содержит спектральный параметр, может иметь ненулевое кратное собственное значение при действительных коэффициентах (см. [6]). В теории уравнений смешанного типа соответсвующая задача со спектральным параметром в граничном условии рассматривалась в статье [7]. При выводе точной априорной оценки решения было использовано его представление в виде билинейных рядов.

Коэффициент в формуле для функции $\Psi_n(x)$ биортогональной системы в нуль не обращается при отрицательном значении параметра d, так как имеет место равенство

$$\int\limits_a^b x(X'(x))^2\,dx = \lambda\biggl(\int\limits_a^b xX_n^2(x)\,dx + dbX_n^2(b)\biggr).$$

Автор выражает благодарность академику Е.И. Моисееву за проявленный интерес к настоящей работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284 и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-51-18006 Болг-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kapustin N., Polosin A.* On a mixed problem for oscillation of a heavy chain with loads // AIP Conf. Proc. 2015. V. 1690. P. 040014.
2. *Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М., 1964.
3. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М., 1984.
4. *Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю.* О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1357–1360.
5. *Капустин Н.Ю., Моисеев Т.Е.* О спектральной задаче со спектральным параметром в граничном условии в теории уравнения радиального распространения тепла // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 10. С. 1382–1386.
6. *Гуляев Д.А.* О задаче с граничным условием третьего рода, одно из которых содержит спектральный параметр: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2013.
7. *Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю.* Об оценке решения одной задачи для параболо-гиперболического уравнения с помощью рядов Фурье // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 5. С. 656–662.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 01.08.2022 г.
После доработки 01.08.2022 г.
Принята к публикации 30.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1565–1569

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.988.6+517.925.5

К АНАЛИЗУ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. В. Н. Лаптинский

Предложен конструктивный подход к доказательству существования решений операторных уравнений в банаховом пространстве. Этот подход применён к построению и анализу ограниченных на полуоси решений матричных уравнений Риккати, не содержащих линейного члена.

DOI: 10.31857/S0374064122110139, EDN: MCLWYC

Настоящая работа является продолжением исследований [1–5]. В ней развит операторный подход к изучению ограниченных на полуоси решений нелинейных матричных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$x = A(x), \tag{1}$$

где оператор A действует из банахова пространства X в банахово пространство X и определён в открытом шаре $S_\delta(0)\subset X$; 0 – нулевой элемент пространства X, $A(0)\neq 0$, $\delta>0$.

Пусть оператор $A(x)$ непрерывно дифференцируем в $S_\delta(0)$, при этом выполняется оценка

$$\|A'(x)\|\leqslant a\|x\| \quad \text{для любого} \quad x\in S_\delta(0), \tag{2}$$

где $a(s)\geqslant 0$ – неубывающая в промежутке $[0,\delta)$ функция класса $C[0,\delta)$.

Примем следующие обозначения:

$$b=\|A(0)\|, \quad \varphi(\rho,b)=\int\limits_0^\rho (a(s)-1)\,ds+b,$$

где $\rho\in[0,\delta)$.

Теорема. *Пусть уравнение $a(\rho)-1=0$ имеет в промежутке $(0,\delta)$ решение ρ^*, и пусть выполнено неравенство*

$$\varphi(\rho^*,b)<0. \tag{3}$$

Тогда уравнение (1) имеет в замкнутом шаре $\bar S_\rho(0)$ единственное решение x^* при любом

$$\rho\in[\rho_1(b),\rho^*), \tag{4}$$

где $\rho_1(b)$ – решение уравнения

$$\varphi(\rho,b)=0. \tag{5}$$

Решение x^* может быть получено как предел последовательности (x_k), члены которой определяются классическим методом последовательных приближений.

Доказательство. Для доказательства теоремы применим конструктивный способ (см. [1–5]), основанный на принципе Каччопполи–Банаха сжимающих отображений [6, с. 605].

На основании формулы Лагранжа (см., например, [7, с. 375]) имеем равенство

$$A(x)=A(0)+\int\limits_0^1 A'(\mu x)\,d\mu x. \tag{6}$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$x = \int_0^1 A'(\mu x)\, d\mu x + A(0).$$

Возьмём произвольный элемент $x \in \bar{S}_\rho(0)$. Затем, используя (2), найдём оценки по норме в (6) на шаре $\bar{S}_\rho(0)$:

$$\|A(x)\| \leqslant \left\| \int_0^1 A'(\mu x)\, d\mu \right\| \|x\| + \|A(0)\| \leqslant \int_0^1 \|A'(\mu x)\|\, d\mu \|x\| + b \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 a\mu\|x\|\, d\mu\|x\| + b \leqslant \int_0^1 a\mu\rho\, d\mu\rho + b = \int_0^\rho a(s)\, ds + b.$$

Рассмотрим уравнение (5). Из соотношения $\varphi(0,b) > 0$ и условия (3) следует, что оно имеет решение в промежутке $(0,\rho^*)$.

В промежутке $[0,\rho^*)$ справедливо неравенство

$$\frac{d\varphi(\rho,b)}{d\rho} \equiv a(\rho) - 1 < 0.$$

Поскольку функция $\varphi(\rho,b)$ непрерывна на отрезке $[0,\rho^*]$, то уравнение (5) имеет в промежутке $(0,\rho^*)$ единственное решение $\rho_1 = \rho_1(b)$. Из соотношения

$$\varphi(\rho,b) = \int_{\rho_1}^{\rho} (a(s) - 1)\, ds$$

видно, что для значений ρ, принадлежащих области (4), выполняются неравенства

$$\int_0^\rho (a(s) - 1)\, ds + b \leqslant \rho, \tag{7}$$

$$a(\rho) < 1, \tag{8}$$

которыми воспользуемся для анализа сжимаемости оператора A. Из уравнения (1) имеем для любых $x \in \bar{S}_\rho(0)$, $y \in \bar{S}_\rho(0)$ соотношение

$$A(x) - A(y) = \int_0^1 A'(y + \mu(x-y))\, d\mu(x-y),$$

выполнив в котором оценки по норме, получим последовательно

$$\|A(x) - A(y)\| \leqslant \int_0^1 \|A'(y + \mu(x-y))\|\, d\mu\|x-y\| \leqslant \int_0^1 a\|(1-\mu)y + \mu x\|\, d\mu\|x-y\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 a(1-\mu)\|y\| + \mu\|x\|\, d\mu\|x-y\| \leqslant a(\rho)\|x-y\|.$$

На основании неравенства (8) заключаем, что оператор A является сжимающим на шаре $\bar{S}_\rho(0)$. Для завершения доказательства этой части теоремы достаточно сослаться на теорему в работе [6, с. 605].

Для построения решений уравнения (1) воспользуемся известным алгоритмом (см., например, [6, с. 605])

$$x_{n+1} = A(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

где x_0 – произвольный элемент из $\bar{S}_\rho(0)$. В силу (7) нетрудно показать, что все члены последовательности (x_k) принадлежат $\bar{S}_\rho(0)$.

Далее получим оценку, характеризующую быстроту сходимости последовательности (x_k) к решению x^*. Из (9) имеем

$$x_{k+1} - x_k = A(x_k) - A(x_{k-1}) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

На основании формулы Лагранжа соотношение (10) можно записать в следующем виде:

$$x_{k+1} - x_k = \int\limits_0^1 A'(x_{k-1} + \mu(x_k - x_{k-1}))\, d\mu (x_k - x_{k-1}). \tag{11}$$

Выполним в (11) оценки по норме

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \int\limits_0^1 \|A'(x_{k-1} + \mu(x_k - x_{k-1}))\|\, d\mu \|x_k - x_{k-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 a\|(1-\mu)x_{k-1} + \mu x_k\|\, d\mu \|x_k - x_{k-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 a((1-\mu)\|x_{k-1}\| + \mu\|x_k\|)\, d\mu \|x_k - x_{k-1}\| \leqslant a(\rho)\|x_k - x_{k-1}\|.$$

Таким образом, получена оценка

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant a(\rho)\|x_k - x_{k-1}\| \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Используя (12), на основании (7), (8) нетрудно доказать, что последовательность (x_k) сходится к элементу $x^* \in \bar{S}_\rho(0)$, при этом справедлива оценка

$$\|x^* - x_k\| \leqslant \frac{a^k}{1-a}\|x_1 - x_0\| \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Замечание 1. Очевидно, в доказанной теореме вместо величины $b = \|A(0)\|$ можно принять оценку для $\|A(0)\|$.

Замечание 2. Уравнение $\alpha(\rho) - 1 = 0$ имеет единственное решение в промежутке $(0, \delta)$ при выполнении соотношения $\alpha(s_0) < 1 < \alpha(s_1)$, где $0 \leqslant s_0 < s_1 < \delta$.

С помощью теоремы изучим вопрос существования ограниченных на полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty)$ решений матричного уравнения Риккати (см. [8; 9, с. 165; 10, с. 158] и др.)

$$\frac{dY}{dt} = YP(t)Y + Q(t), \tag{14}$$

где $P(t)$, $Q(t)$ – непрерывные и ограниченные в $\mathbb{R}_+$ $n \times n$-матрицы, подчинённые условиям

$$\tilde{p} \equiv \int\limits_0^\infty \|P(\tau)\|\, d\tau < \infty, \quad \tilde{q} \equiv \sup_{t \geqslant 0} \|\tilde{Q}(t)\| < \infty,$$

здесь $\tilde{Q}(t) = \int_0^t Q(\tau)\, d\tau$.

Обозначим

$$\|Y\|_C \equiv \sup_{t\geqslant 0} \|Y(t)\|,$$

где $C = \mathfrak{B}(n)$ – конечномерная банахова алгебра матриц-функций, непрерывных и ограниченных на полуоси, $\|\cdot\|$ – определённая норма матриц, например, любая из норм, приведённых в [11, с. 21].

Для уравнения (14) будем исследовать задачу Коши с условием

$$Y(0) = \Lambda. \tag{15}$$

Вместо задачи (14), (15) рассмотрим эквивалентное ей интегральное уравнение

$$Y(t) = \Lambda + \int\limits_0^t Y(\tau)P(\tau)Y(\tau)\,d\tau + \tilde{Q}(t). \tag{16}$$

Исследуем разрешимость этого уравнения в $\mathfrak{B}(n)$; сходимость последовательности означает равномерную сходимость на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Для всякой $n\times n$-матрицы $X(t)$, принадлежащей шару $\|X\|_C \leqslant \rho$, имеем

$$\left\|\int\limits_0^t X(\tau)P(\tau)X(\tau)\,d\tau + \Lambda + \tilde{Q}(t)\right\|_C \leqslant \tilde{p}\rho^2 + \varepsilon + \tilde{q},$$

где $\varepsilon = \|\Lambda\|$.

Аналогично получим оценку

$$\left\|\int\limits_0^t (X(\tau)P(\tau)X(\tau) - Y(\tau)P(\tau)Y(\tau))\,d\tau\right\|_C \leqslant 2\tilde{p}\rho\|X-Y\|_C,$$

где $\|X\|_C \leqslant \rho$, $\|Y\|_C \leqslant \rho$.

Применительно к уравнению (16) имеем

$$a(\rho) = 2\tilde{p}\rho, \quad \varphi(\rho, b) = \tilde{p}\rho^2 - \rho + b,$$

где $b = \varepsilon + \tilde{q}$.

Так как $\rho^* = 1/(2\tilde{p})$, то условие (3) примет вид

$$\varphi(\rho^*, b) = b - \frac{1}{4\tilde{p}} < 0.$$

Из доказанной теоремы следует, что при выполнении условия

$$\tilde{q} - \frac{1}{4\tilde{p}} < 0$$

задача об ограниченных на полуоси решениях уравнения (14) однозначно разрешима для начальных значений, принадлежащих области

$$\|\Lambda\| < \frac{1}{4\tilde{p}} - \tilde{q},$$

при этом

$$\rho_1(\varepsilon) \leqslant \rho < \frac{1}{4\tilde{p}},$$

здесь

$$\rho_1(\varepsilon) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\tilde{p}(\varepsilon + \tilde{q})}}{2\tilde{p}} > \frac{1 - \sqrt{1 - 4\tilde{p}\tilde{q}}}{2\tilde{p}} = \rho_1(0).$$

Для построения решения уравнения (16) может быть использован алгоритм (9) вместе с оценкой (13).

Замечание 3. Приведённая теорема сформулирована и доказана в терминах функций $a(s)$, $\varphi(\rho, b)$; в этом состоит её конструктивность, что проиллюстрировано на примере уравнения Риккати (и ранее в работах [1–5]), для которого получены коэффициентные достаточные условия существования ограниченных на полуоси $\mathbb{R}_+$ решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаптинский В.Н.* Об ограниченных на полуоси решениях уравнения Риккати // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1995. № 2. С. 12–16.
2. *Лаптинский В.Н.* Об ограниченных на полуоси решениях нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 1. С. 131–132.
3. *Лаптинский В.Н.* Об ограниченных на полуоси решениях нелинейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 275–277.
4. *Лаптинский В.Н.* К задаче об ограниченных на полуоси решениях нелинейных дифференциальных систем // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2008. № 1. С. 13–15.
5. *Лаптинский В.Н.* Об асимптотическом поведении решений нелинейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 2. С. 205–210.
6. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1977.
7. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1980.
8. *Забрейко П.П., Лаптинский В.Н.* Принцип неподвижной точки и нелокальные теоремы о разрешимости для существенно нелинейных дифференциальных уравнений // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41. № 1. С. 5–9.
9. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М., 1975.
10. *Егоров А.И.* Уравнения Риккати. М., 2001.
11. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

Белорусско-Российский университет,
г. Могилёв

Поступила в редакцию 26.05.2022 г.
После доработки 15.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1570–1584

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ*)

Ниже публикуются**) аннотации докладов, заслушанных в осеннем семестре и летом 2022 г. (предыдущее сообщение о работе семинара см. в журнале "Дифференц. уравнения". 2022. Т. 58. № 6).

DOI: 10.31857/S0374064122110140, EDN: MCOHFS

И. И. Матвеева (Новосибирск) "Устойчивость решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием" (17 июня 2022 г.).

Рассмотрим системы дифференциальных уравнений с запаздыванием $(\tau > 0)$ вида

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\dot{y}(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau), \dot{y}(t-\tau)), \quad t > 0, \tag{1}$$

где непрерывные $(n\times n)$-матричные функции A, B, C T-периодичны $(T > 0)$, а непрерывная вектор-функция $F(t, u_1, u_2, u_3)$ удовлетворяет локальному условию Липшица по u_1 и неравенству

$$\|F(t, u_1, u_2, u_3)\| \leqslant q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2} + q_3\|u_3\|^{1+\omega_3}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{2}$$

где $u_j \in \mathbb{R}^n$, $q_j, \omega_j \geqslant 0$, $j = \overline{1,3}$. Наша цель – установить условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1), получить оценки на множество притяжения и оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности.

Введём матричные функции

$$\mathcal{H}(\cdot) \equiv \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}(\,\cdot\,,\cdot\,) \equiv \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_2^* & K_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}(\cdot) \equiv \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12}^* & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13}^* & Q_{23}^* & Q_{33} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющие для некоторой положительной T-периодической функции $h \in C(\mathbb{R}_+)$ условиям

$$\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}^*, \quad \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(t+T), \tag{3}$$

$$\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle \geqslant h(t)\|u\|^2, \quad u, v \in \mathbb{C}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4}$$

$$\mathcal{K} \in C^1(\mathbb{R}_+ \times [0,\tau]), \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}^*, \quad \mathcal{K}(t,\cdot\,) = \mathcal{K}(t+T,\cdot\,), \quad \mathcal{K} \geqslant 0, \tag{5}$$

$$Q_{11} \equiv -\dot{H}_1 - H_1A - A^*H_1 - K_1(\,\cdot\,,0) - K_2(\,\cdot\,,0)A - A^*K_2(\,\cdot\,,0) - A^*K_3(\,\cdot\,,0)A,$$

$$Q_{12} \equiv -\dot{H}_2 - H_1B - A^*H_2 - K_2(\,\cdot\,,0)B - A^*K_3(\,\cdot\,,0)B,$$

$$Q_{13}(t) \equiv -H_1C - H_2 - K_2(\,\cdot\,,0)C - A^*K_3(\,\cdot\,,0)C,$$

$$Q_{22} \equiv -\dot{H}_3 - H_2^*B - B^*H_2 + K_1(\,\cdot\,,\tau) - B^*K_3(\,\cdot\,,0)B,$$

$$Q_{23} \equiv -H_2^*C - H_3 + K_2(\,\cdot\,,\tau) - B^*K_3(\,\cdot\,,0)C, \quad Q_{33} \equiv K_3(\,\cdot\,,\tau) - C^*K_3(\,\cdot\,,0)C.$$

*) Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллионщиков, Н.Х. Розов. В настоящее время руководители семинара – И.Н. Сергеев, И.В. Асташова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара – В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

**) Составитель хроники И.Н. Сергеев.

Рассмотрим для системы (1) начальную задачу

$$\dot y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\dot y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau), \dot y(t-\tau)),$$
$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0), \tag{6}$$

где $\varphi \in C^1([-\tau, 0])$ – заданная вектор-функция.

Теорема 1. *Если $F \equiv 0$ и функции $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{Q}$ для некоторых T-периодических функций $p, k \in C(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяют условиям (3)–(5) и*

$$\left\langle \mathcal{Q}(t)\begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix}\right\rangle \geqslant p(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}\right\rangle, \quad u, v, w \in \mathbb{C}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{K}(t,s) + \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{K}(t,s) + k(t)\mathcal{K}(t,s) \leqslant 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad s \in [0, \tau], \tag{8}$$

$$\int_0^T \gamma(\xi)\, d\xi > 0, \quad \gamma(\xi) \equiv \min\{p(\xi), k(\xi)\}, \tag{9}$$

то нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво, и для решения задачи (6) имеет место оценка

$$\|y(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h(t)}}\exp\biggl(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)\, d\xi\biggr), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где

$$V(0,\varphi) \equiv \left\langle \mathcal{H}(0)\begin{pmatrix} \varphi(0)\\ \varphi(-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi(0)\\ \varphi(-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle + \int_{-\tau}^0 \left\langle \mathcal{K}(0,-s)\begin{pmatrix} \varphi(s)\\ \dot\varphi(s)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi(s)\\ \dot\varphi(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds. \tag{10}$$

Пусть теперь функция F удовлетворяет неравенству (2) при $q_1, \omega_1 > 0$ и $q_2 = q_3 = 0$, причём в условиях теоремы 1 для некоторой положительной функции $\sigma \in C(\mathbb{R}_+)$ обозначено

$$\beta_1 \equiv 2q_1(\|H_1\| + \|K_2(\,\cdot\,,0)\| + \|A\|\|K_3(\,\cdot\,,0)\|), \quad \beta_2 \equiv 2q_1(\|H_2\| + \|B\|\|K_3(\,\cdot\,,0)\|),$$

$$\beta_3 \equiv 2q_1\|C\|\|K_3(\,\cdot\,,0)\|, \quad \beta_4 \equiv q_1^2\|K_3(\,\cdot\,,0)\|, \quad \beta \equiv \frac{1}{4\sigma}(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) + \beta_4^2, \quad \mathcal{Q}^\sigma \equiv \mathcal{Q} - \sigma I.$$

Теорема 2. *Если функции $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{Q}^\sigma$ для некоторых T-периодических функций $p, k \in C(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяют условиям (3)–(5), неравенствам (7) для $\mathcal{Q}^\sigma$ (в качестве $\mathcal{Q}$), (8) и (9), а функция (10) удовлетворяет условию*

$$V(0,\varphi) < h_0\biggl(\frac{h_0}{\omega_1 R}\biggr)^{1/\omega_1}, \quad h_0 \equiv \min_{t\in[0,T]} h(t), \quad R \equiv \int_0^{+\infty} \beta(\xi)\exp\biggl(-\omega_1\int_0^\xi \gamma(s)\, ds\biggr) d\xi,$$

то для решения задачи (6) имеет место оценка

$$\|y(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h(t)}}\exp\biggl(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)\, d\xi\biggr)(1 - \omega_1(V(0,\varphi))^{\omega_1} h_0^{-1-\omega_1} R)^{-1/(2\omega_1)}.$$

При доказательстве теорем 1, 2 используются функционалы Ляпунова–Красовского, предложенные в статье [1] и обобщающие функционалы из работ [2–4]. Обобщение этого класса функционалов на случай переменного запаздывания и переменных матриц $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ позволяет устанавливать оценки на решения нелинейных систем с переменными коэффициентами и переменным сосредоточенным или распределённым запаздыванием [5, 6].

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики имени С.Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

Литература. 1. Матвеева И.И. Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22. № 3. С. 96–103. 2. Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5. № 3. С. 20–28. 3. Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55. № 5. С. 1059–1077. 4. Матвеева И.И. Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 2. С. 344–352. 5. Матвеева И.И. Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62. № 3. С. 579–594. 6. Matveeva I.I. Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. V. 18. № 2. P. 1689–1697.

И. В. Асташова (Москва) “Об асимптотической эквивалентности квазилинейных уравнений” (23 сентября 2022 г.).

Рассматривается задача об асимптотической эквивалентности двух уравнений:

$$y^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}a_j(x)y^{(j)}+p(x)|y|^k\operatorname{sgn}y=f(x), \tag{1}$$

$$z^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}a_j(x)z^{(j)}+p(x)|z|^k\operatorname{sgn}z=0, \tag{2}$$

где $2\leqslant n\in\mathbb{N}$, $k>1$, а функции a_j $(j=\overline{0,n-1})$, p и f непрерывны.

Уравнение (2) можно рассматривать как возмущение уравнения (1) функцией f, а уравнение (1) – как возмущение линейного уравнения нелинейным слагаемым с коэффициентом p. Естествен вопрос: насколько близки решения возмущённого и невозмущённого уравнений при различных типах возмущений? В работе [1] получены результаты об асимптотической эквивалентности уравнений (1) и (2) (где $a_j=0$) при экспоненциальной или степенной малости возмущения f, а в статье [2] при $f=0$ исследуется асимптотическая близость решений уравнения (2) (и его частных случаев) к решениям соответствующих линейных уравнений.

Результат [2, следствие 4] об асимптотическом представлении решений уравнения (2) уточняет

Теорема 1. *Если функции a_0, $\ldots$, a_{n-1}, p непрерывны и удовлетворяют условиям*

$$\int\limits_{x_0}^{\infty}x^{n-j-1}|a_j(x)|\,dx<+\infty,\quad j=\overline{0,n-1}, \tag{3}$$

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty}x^{n-1+(k-1)m}|p(x)|\,dx<+\infty\quad \text{для некоторого}\quad m\in\{0,\ldots,n-1\},$$

то для любого $C\neq 0$ существует решение y уравнения (2), удовлетворяющее при $x\to+\infty$ условиям

$$y^{(j)}(x)\sim C\frac{m!}{(m-j)!}x^{m-j},\quad j=\overline{0,m},$$

$$y^{(j)}(x)=o(x^{m-j}),\qquad \int^{+\infty}s^{j-m-1}|y^{(j)}(s)|\,ds<+\infty,\quad j=\overline{m+1,n-1}.$$

Асимптотическую эквивалентность решений уравнений (1) с экспоненциально близкими правыми частями описывает

Теорема 2. *Если функции* $a_0, \ \ldots, \ a_{n-1}, \ p, \ \varphi, \ \psi$ *непрерывны на луче* $[x_0, +\infty)$, *причём функции* $p, \ \varphi, \ \psi$ *ограничены и выполнены неравенства (3), а решение уравнения (1) с правой частью* $f(x) = \varphi(x)e^{-\gamma x}, \ \gamma > 0$, *удовлетворяет условию* $y(x) \to 0$ *при* $x \to +\infty$, *то существует единственное решение* $y = z(x)$ *уравнения (1) с правой частью* $f(x) = \psi(x)e^{-\gamma x}$, *удовлетворяющее соотношению*

$$|y(x) - z(x)| = O(e^{-\gamma x}), \quad x \to +\infty. \tag{4}$$

Следствие. *Если функции* $a_0, \ \ldots, \ a_{n-1}, \ p, \ f$ *непрерывны, причём функция* p *ограничена и выполнены неравенства (3), а для некоторых* $C, \gamma > 0$ *справедливо неравенство*

$$|f(x)| \leqslant Ce^{-\gamma x}, \quad x \geqslant x_0,$$

то для любого стремящегося к нулю при $x \to +\infty$ *решения* y *уравнения (1) найдётся единственное решение* z *уравнения (2), удовлетворяющее соотношению (4), и наоборот, для любого стремящегося к нулю при* $x \to +\infty$ *решения* z *уравнения (2) найдётся единственное решение* y *уравнения (1), удовлетворяющее соотношению (4).*

Подобный результат верен для уравнения (1) со степенной малостью f (для $a_j = 0$ см. [1]).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Astashova I. On asymptotic equivalence of n-th order nonlinear differential equations // Tatra Mt. Math. Publ. 2015. V. 63. P. 31–38. 2. Astashova I., Bartusek M., Dosla Z., Marini M. Asymptotic proximity to higher order nonlinear differential equations // Adv. in Nonlin. Anal. 2022. V. 11. № 1. P. 1598–1613.

А. Н. Ветохин (Москва) “Бэровская классификация локальной энтропии, рассматриваемой как функции от точки фазового пространства” (30 сентября 2022 г.).

Пусть (X, d) – локально компактное метрическое пространство, а $f : X \to X$ – непрерывное отображение. Наряду с исходной метрикой d определим на множестве X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leqslant i < n} d(f^i(x), f^i(y)), \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N},$$

где f^i $(i \in \mathbb{N})$ – i-я итерация отображения f, $f^0 \equiv \mathrm{Id}_X$. Зафиксировав точку $x \in X$, для всяких $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $\rho > 0$ обозначим через $N_d(f, r, n, x, \rho)$ максимальное число точек в шаре $B_d(x, \rho) = \{y \in X : d(x, y) < \rho\}$, попарные d_n^f-расстояния между которыми больше r. *Локальную энтропию* отображения f в точке x определим формулой (см. [1, с. 274])

$$h_d(f, x) = \lim_{r \to 0} \lim_{\rho \to 0} \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, r, n, x, \rho),$$

пределы в которой существуют, так как величина

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, r, n, x, \rho)$$

монотонна по каждой из переменных ρ и r. Функция

$$x \mapsto h_d(f, x), \quad x \in X, \tag{1}$$

может быть разрывной, как показывает следующий пример.

Пусть $X = [-1, 1]$ и

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0), \\ 4x(1 - x), & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Тогда $h_d(f, 0) = \ln 2$ и $h_d(f, x) = 0$ при $x \in [-1, 0)$, поэтому функция (1) разрывна в нуле. Возникает естественный вопрос о её наименьшем бэровском классе.

Теорема 1. *Для любого непрерывного отображения* $f : X \to X$ *функция (1) принадлежит второму классу Бэра, а множество точек её полунепрерывности снизу всюду плотное типа* G_δ *в пространстве* X.

На множестве всех последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $x_k \in \{0, 1\}$, введём метрику

$$d_{\Omega_2}(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ \dfrac{1}{\min\{i : x_i \neq y_i\}}, & x \neq y. \end{cases}$$

Полученное компактное метрическое пространство, гомеоморфное совершенному множеству Кантора, обозначим через Ω_2.

Теорема 2. *При* $X = \Omega_2 \times \Omega_2$ *с метрикой* $d((x, \alpha), (y, \beta)) = \max\{d_{\Omega_2}(x, y), d_{\Omega_2}(\alpha, \beta)\}$ *для непрерывного отображения*

$$f((x_1, x_2, \ldots), (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)) = ((x_{1+\alpha_1}, x_{2+\alpha_2}, \ldots), (\alpha_1, \alpha_2, \ldots))$$

функция (1) всюду разрывна на множестве X *и не принадлежит первому классу Бэра.*

Литература. 1. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем с обзором последних достижений. М., 2005.

И. Н. Сергеев (Москва) “О классах линейных приближений, обеспечивающих различные свойства ляпуновской, перроновской или верхнепредельной устойчивости дифференциальных систем” (7 октября 2022 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ и какой-либо окрестности нуля $G \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(\,\cdot\,, 0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}^+ \times G). \tag{1}$$

Через S_* или S_δ будем обозначать множество *непродолжаемых* решений x системы (1), удовлетворяющих начальному условию $|x(0)| \neq 0$ или $0 < |x(0)| < \delta$ соответственно.

Определение 1 [1, 2]. Скажем, что система (1) обладает *перроновской* (*верхнепредельной*):

1) *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t \to +\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon \quad \Bigl(\text{соответственно } \varlimsup_{t \to +\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon\Bigr), \tag{2}$$

предполагающему, что решение x определено на всей полуоси $\mathbb{R}_+$;

2) *частичной устойчивостью*, если для каждых $\varepsilon, \delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет требованию (2);

3) *частной устойчивостью*, если для каждого $\varepsilon > 0$ хотя бы одно решение $x \in S_*$ удовлетворяет требованию (2);

4) *асимптотической устойчивостью*, если для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет требованию (2) при $\varepsilon = 0$;

5) *глобальной устойчивостью*, если все решения $x \in S_*$ удовлетворяют требованию (2) при $\varepsilon = 0$.

Свойства перроновского и верхнепредельного типов из определения 1 являются аналогами соответствующих *ляпуновских* свойств (некоторые из них см. в [3, гл. II, § 1]), для описания которых достаточно теперь внести в определение 1 следующие поправки: в пп. 1)–3) заменить (2) требованием

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |x(t)| \leqslant \varepsilon,$$

после чего в пп. 4) и 5) с требованием (2) в скобках дополнительно потребовать от системы (1) ляпуновскую устойчивость, определённую с помощью указанной замены в п. 1).

Определение 2. Будем говорить, что система (1) имеет *линейное приближение*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

если выполнены условия

$$A(\cdot) \equiv f'_x(\,\cdot\,,0) \in C(\mathbb{R}_+), \quad \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t,x) - A(t)x| = o(x), \quad G \ni x \to 0.$$

Множество всевозможных линейных приближений для систем вида (1) обозначим через $\mathcal{M}^n$. Скажем, что данное линейное приближение (3) *обеспечивает* некоторое свойство, если им обладает всякая система (1) с этим линейным приближением. Введём пять *классов* линейных приближений вида (3)

$$\mathcal{S}^b_\pi,\ \mathcal{S}^c_\pi,\ \mathcal{S}^d_\pi,\ \mathcal{S}^a_\pi,\ \mathcal{S}^g_\pi,$$

обеспечивающих соответственно перроновские свойства устойчивости из пп. 1)–5) определения 1. Аналогичные классы для верхнепредельных или ляпуновских свойств обозначим теми же символами, но с заменой в них нижних индексов π на σ или λ соответственно.

Исследованию ляпуновской асимптотической устойчивости по первому приближению, составляющему суть *первого метода Ляпунова*, посвящено огромное число работ (см. [4, § 11]). Часть представляемых ниже утверждений анонсирована в докладах [5, 6]. Прежде всего, между классами из определения 2 существует естественная иерархия, которую описывает

Теорема 1. *Имеют место включения*

$$\mathcal{S}^g_\varkappa \subseteq \mathcal{S}^a_\varkappa \subseteq \mathcal{S}^b_\varkappa \subseteq \mathcal{S}^c_\varkappa \subseteq \mathcal{S}^d_\varkappa, \quad \varkappa = \pi, \sigma, \lambda,$$

$$\mathcal{S}^k_\lambda \subseteq \mathcal{S}^k_\sigma \subseteq \mathcal{S}^k_\pi, \quad k = g, a, b, c, d.$$

Как оказалось, общее число различных непустых классов, обеспечивающих всевозможные разновидности устойчивости, равно всего лишь двум – их совпадения как раз и обосновывают корректность обозначений в следующих теоремах.

Теорема 2. *Имеют место следующие совпадения:*

$$\mathcal{S}^g_\varkappa \equiv \mathcal{S}^g, \quad \mathcal{S}^a_\varkappa = \mathcal{S}^b_\varkappa \equiv \mathcal{S}^{ab}, \quad \mathcal{S}^c_\varkappa = \mathcal{S}^d_\varkappa \equiv \mathcal{S}^{cd}, \quad \varkappa = \pi, \sigma, \lambda. \tag{4}$$

Теорема 3. *Объединённые классы (4) удовлетворяют цепочке соотношений*

$$\varnothing = \mathcal{S}^g \subsetneq \mathcal{S}^{ab} \subseteq \mathcal{S}^{cd} \subsetneq \mathcal{M}^n.$$

Среднее из трёх включений в теореме 3 при $n > 1$ является строгим, а при $n = 1$, наоборот, обращается в равенство.

Теорема 4. *При $n > 1$ имеет место строгое включение*

$$\mathcal{S}^{ab} \subsetneq \mathcal{S}^{cd}.$$

Теорема 5. *При $n = 1$ имеет место равенство*

$$\mathcal{S}^{ab} = \mathcal{S}^{cd} \equiv \mathcal{S}^{abcb}.$$

Представляет интерес аналогичный полный список всех включений, а также совпадений и несовпадений для классов линейных приближений, обеспечивающих различные свойства неустойчивости, т.е. отрицания свойств устойчивости из определения 2.

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Сергеев И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557. 3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967. 4. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006. 5. Сергеев И.Н. Об исследовании перроновских и ляпуновских свойств устойчивости по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 897–899. 6. Сергеев И.Н. Об исследовании ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств устойчивости по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 857–858.

А. Н. Ветохин (Москва) “О бэровской классификации локальной энтропии, рассматриваемой как функция от параметра” (14 октября 2022 г.).

Пусть (X, d) – локально-компактное метрическое пространство. По метрическому пространству $\mathcal{M}$, непрерывному отображению

$$f : \mathcal{M} \times X \to X \tag{1}$$

и точке $x \in X$ образуем функцию

$$\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot\,), x), \quad \mu \in \mathcal{M}, \tag{2}$$

где $h_d(f, x)$ – *локальная энтропия* непрерывного отображения f в точке x, определение которой приведено в предыдущем докладе автора от 30 сентября 2022 г. (там же см. определение пространства Ω_2). В случае компактности метрического пространства X рассмотрим функцию

$$\mu \mapsto h_{\mathrm{top}}(f(\mu, \cdot\,)), \quad \mu \in \mathcal{M}, \tag{3}$$

где $h_{\mathrm{top}}(f)$ – топологическая энтропия непрерывного отображения f (см. [1]).

В работе [2] установлено, что при $X = [0, 1]$ для любого отображения (1) функция (3) полунепрерывна снизу, а значит, принадлежит первому классу Бэра (на $\mathcal{M}$). Вообще же говоря, при произвольных $\mathcal{M}$ и X для любого отображения (1) функция (3) принадлежит второму классу Бэра [3], а если $\mathcal{M}$ и X – множества Кантора, то для некоторого отображения (1), задающего гомеоморфизм из X в X при каждом фиксированном значении $\mu \in \mathcal{M}$, функция (3) всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра [4].

В статье [5] установлено, что для локально-компактного пространства X со счётной базой и любого отображения (1) функция (3) (в этом случае топологическая энтропия определяется как точная верхняя грань множества всех топологических энтропий компактов, содержащихся в пространстве X) принадлежит третьему классу Бэра. Там же представлены пространство X, множество $\mathcal{M}$ иррациональных точек на прямой (со стандартной метрикой) и отображение (1), для которых функция (3) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра.

В случае локальной компактности пространства X для функции (2) справедлива

Теорема 1. *Для любых отображения (1) и точки $x \in X$ функция (2) принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$.*

Теорема 2. *Если $\mathcal{M}$ и X – множества Кантора, то для каждого $i = \overline{0, 2}$ существует такое отображение (1), что для каждой точки $x \in X$ функция (2) принадлежит i-му классу Бэра, а при $i = 1, 2$ не принадлежит $(i-1)$-му классу Бэра.*

Построим локально-компактное метрическое пространство C, точками которого являются всевозможные пары (x, i), где $x \in \Omega_2$ и $i \in \mathbb{N}$, а расстояние между ними задаётся формулой

$$d_{\mathcal{C}}((x, i), (y, j)) = \begin{cases} d_{\Omega_2}(x, y), & i = j; \\ 1, & i \neq j, \end{cases} \quad x, y \in \Omega_2, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Если $\mathcal{M}$ – множество иррациональных точек на прямой и $X = C$, то для некоторого отображения (1) и любого $x \in X$ функция (2) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра.*

Теорема 4. *Если $\mathcal{M}$ – множество иррациональных точек на прямой и $X = C$, то для некоторого отображения (1) и каждого $i = \overline{0, 3}$ функция*

$$\mu \mapsto h_{d_C}(f(\mu, \cdot\,), ((0, 0, \ldots), i)), \quad \mu \in \mathcal{M},$$

принадлежит i-му классу Бэра, а при $i \neq 0$ ещё и не принадлежит $(i-1)$-му классу Бэра.

Литература. 1. Adler R.L., Konheim A.G., McAndrew M.H. Topological entropy // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 114. № 2. P. 309–319. 2. Misiurewicz M.T. Horseshoes for mappings of the interval // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astron. et Phys. 1979. V. 27. P. 167–169. 3. Ветохин А.Н. Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53.

№ 4. С. 448–453. 4. Ветохин А.Н. Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2018. № 5. С. 64–67. 5. Ветохин А.Н. О некоторых свойствах топологической энтропии семейства динамических систем, определённых на произвольном метрическом пространстве // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 10. С. 1005–1013.

И. Н. Сергеев (Москва) “Определение полных блуждаемости и неблуждаемости дифференциальной системы и их исследование по первому приближению” (21 октября 2022 г.).

Для области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ рассмотрим дифференциальную (нелинейную, вообще говоря) систему вида

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x \in G, \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G). \tag{1}$$

С системой (1) свяжем линейную однородную систему её *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f_l(t,x), \quad A(t) \equiv f'_x(t,0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

причём на нелинейную добавку $h(t,x) \equiv f(t,x) - A(t)x = o(x)$ $(x \to 0)$ обычное требование её равномерной малости по $t \in \mathbb{R}_+$ здесь не накладываем. Через $x_f(\,\cdot\,,x_0)$ будем обозначать непродолжаемое решение системы (1) с начальным условием $x_f(0,x_0) = x_0$, а через $S_\delta(f)$ – множество решений с начальными значениями x_0, удовлетворяющими условию $0 < |x_0| < \delta$.

Определение 1 [1]. *Функционал блуждаемости* $\mathrm{P}(u,t)$, определённый для чисел $t \in \mathbb{R}_+$ и непрерывно-дифференцируемых функций $u : [0,t] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, зададим формулой

$$\mathrm{P}(u,t) \equiv \int\limits_0^t |(u(\tau)/|u(\tau)|)^{\cdot}|\,d\tau, \quad \tau \in [0,t],$$

добавив, что всякий раз, когда функция u определена не на всём отрезке $[0,t]$, он принимает значение $+\infty$. Системе (1), моменту $t \in \mathbb{R}_+$ и невырожденному преобразованию $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ поставим в соответствие значения *нижнего* и *верхнего шаровых функционалов блуждаемости*, определяемых соответственно равенствами

$$\check{\mathrm{P}}_b(f,t,L) \equiv \varliminf_{x_0 \to 0} \mathrm{P}(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),t), \quad \hat{\mathrm{P}}_b(f,t,L) \equiv \varlimsup_{x_0 \to 0} \mathrm{P}(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),t). \tag{3}$$

Нижний (*слабый*) $\check{\rho}^\circ_b(f)$ и *верхний* (*сильный*) $\hat{\rho}^\bullet_b(f)$ *шаровые показатели блуждаемости* системы (1) зададим формулами

$$\check{\rho}^\circ_b(f) \equiv \varliminf_{t \to +\infty} \inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} t^{-1}\check{\mathrm{P}}_b(f,t,L), \quad \hat{\rho}^\bullet_b(f) \equiv \inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \varlimsup_{t \to +\infty} t^{-1}\hat{\mathrm{P}}_b(f,t,L), \tag{4}$$

а *верхний* (*слабый*) $\hat{\rho}^\circ_b(f)$ и *нижний* (*сильный*) $\check{\rho}^\bullet_b(f)$ показатели блуждаемости – теми же формулами (4) соответственно, но с переставленными в них местами пределом при $t \to +\infty$ и точной нижней гранью по $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$.

Показатели (4) оказываются соответственно наименьшим и наибольшим из четырёх показателей блуждаемости системы (1), введённых в определении 1.

Известны и другие функционалы, отвечающие за аналогичные свойства решений, не связанные с их нормой (см., например, [2–4]): *колеблемость* или *ориентированную, неориентированную, частотную* и *плоскую вращаемость*, а также *поворачиваемость* данного *ранга.* Помимо шаровых показателей можно рассматривать ещё и *сферические* [5] или *радиальные* [6].

Определяемая ниже полная блуждаемость дифференциальной системы (вблизи её нулевого решения, о чём мы для краткости больше не будем упоминать) отдалённо напоминает устойчивость по Ляпунову. В отличие от устойчивости, блуждаемость означает не то, что все решения, начинающиеся достаточно близко к нулю, так и остаются навсегда в заданной его окрестности, а то, что их средняя (по времени) угловая скорость положительна и даже отделена от нуля (равномерно по всем этим решениям сразу). Однако в нелинейном случае дело усложняется тем, что упомянутые решения могут оказаться определёнными не на всей полуоси времени. Аналогичным образом обстоит дело и с полной неблуждаемостью.

Определение 2. Будем говорить, что система (1) обладает:

1) *полной блуждаемостью*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $T \in \mathbb{R}_+$, что для каждых $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ и $t > T$ справедлива оценка

$$\check{\mathrm{P}}(f,t,L) > \varepsilon t;$$

2) *полной неблуждаемостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $T \in \mathbb{R}_+$ и $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$, что для каждого $t > T$ справедлива оценка

$$\hat{\mathrm{P}}(f,t,L) < \varepsilon t.$$

Наличие у системы полной блуждаемости или неблуждаемости однозначно определяется знаками её соответствующих шаровых показателей блуждаемости, как показывает

Теорема 1. *Полная блуждаемость и полная неблуждаемость системы (1) равносильны положительности её нижнего шарового показателя блуждаемости* $\check{\rho}_b^{\circ}(f) > 0$ *и, соответственно, равенству нулю её верхнего шарового показателя блуждаемости* $\hat{\rho}_b^{\bullet}(f) = 0$.

Все шаровые показатели блуждаемости системы совпадают с соответствующими показателями системы её первого приближения (которые подсчитываются существенно проще, так как в случае линейной системы в формулах (3) нижний и верхний пределы при $x_0 \to 0$ можно заменить точными нижней и верхней гранями по всем $x_0 \neq 0$ соответственно), т.е. справедлива

Теорема 2. *Для любой системы (1) и системы (2) её первого приближения справедливы равенства*

$$\tilde{\rho}_b^{*}(f) = \tilde{\rho}_b^{*}(f_\prime), \quad \sim\, = \,\check{}\,, \hat{}\,, \quad * = \circ, \bullet.$$

Таким образом, и полная блуждаемость, и полная неблуждаемость нелинейной системы однозначно определяются системой её первого приближения, что, в частности, и подтверждает

Теорема 3. *Полные блуждаемость и неблуждаемость системы (1) равносильны положительности показателя* $\check{\rho}_b^{\circ}(f_\prime) > 0$ *системы (2) её первого приближения и, соответственно, равенству нулю показателя* $\hat{\rho}_b^{\bullet}(f_\prime) = 0$ *системы (2).*

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 859–861. 2. Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219. 3. Сергеев И.Н. Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 325–348. 4. Сергеев И.Н. Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1353–1361. 5. Сергеев И.Н. Определение сферических показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 839–840. 6. Сергеев И.Н. Определение радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1560–1562.

Н. Л. Марголина, А. Е. Троскина, К. Е. Ширяев (Кострома) “О вспомогательных показателях Боля системы с неограниченными коэффициентами” (28 октября 2022 г.).

Для системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in C(\mathbb{R}^+, \operatorname{End}\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

при $k = \overline{1,n}$ *верхним* и *нижним вспомогательными показателями Боля* (см. [1, с. 331]) называются соответственно величины

$$\overline{\beta}_k(A) = \varlimsup_{T\to+\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} T^{-1} \ln d_k X_A(iT,(i-1)T), \tag{2}$$

$$\underline{\beta}_k(A) = \varliminf_{T\to+\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} T^{-1} \ln d_k X_A(iT,(i-1)T), \tag{3}$$

где $X_A(\cdot,\cdot)$ – оператор Коши системы (1), а d_kX – сингулярные числа оператора $X\in\operatorname{End}\mathbb{R}^n$, занумерованные в порядке нестрого убывания.

Из формул (2) и (3) вытекает неравенство $\underline{\beta}_k(A)\leqslant\overline{\beta}_k(A)$, причём [1, с. 332] в случае ограниченной функции A первые (старшие, при $k=1$) нижний и верхний вспомогательные показатели Боля системы (1) совпадают друг с другом, а также с генеральным $\varkappa_g(A)$ (см. [2, гл. 3, § 4]) и с особым $\Omega_0(A)$ (см. [3, гл. 3, § 8]) показателями системы (1):

$$\underline{\beta}_1(A)=\overline{\beta}_1(A)=\Omega_0(A)=\varkappa_g(A).$$

Теорема. *Для любого $n\in\mathbb{N}$ существует система (1), для которой выполнены неравенства*

$$\underline{\beta}_k(A)<\overline{\beta}_k(A),\quad k=\overline{1,n}.$$

Соотношения между верхним особым и генеральным показателями неограниченной системы обсуждаются в работе [4].

Литература. 1. Shiryaev K.E. Central exponent of a system with unbounded coefficients // J. of Math. Sci. 2015. V. 210. № 3. P. 331–332. 2. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970. 3. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. 4. Margolina N.L. Of the residual uniform stability of linear systems with unbounded coefficients // J. of Math. Sci. 2015. V. 210. № 3. P. 245–246.

С. С. Ежак, М. Ю. Тельнова (Москва) “Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с весовыми интегральными условиями на потенциал” (11 ноября 2022 г.).

Рассматривается задача Штурма–Лиувилля

$$y''+Q(x)y+\lambda y=0,\quad x\in(0,1),\quad y(0)=y(1)=0, \tag{1}$$

где потенциал Q для заданных $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\gamma\neq0$, принадлежит множеству $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ измеримых неотрицательных локально интегрируемых на интервале $(0,1)$ функций, удовлетворяющих интегральным условиям

$$\int\limits_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta Q^\gamma(x)\,dx=1,\quad \int\limits_0^1 x(1-x)Q(x)\,dx<+\infty. \tag{2}$$

Изучаются оценки (см. [1]) первого собственного значения задачи (1), (2):

$$m_{\alpha,\beta,\gamma}=\inf_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}}\lambda_1(Q),\quad M_{\alpha,\beta,\gamma}=\sup_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}}\lambda_1(Q).$$

Если второе условие (2) не выполняется, то ни для каких $\lambda\in\mathbb{R}$ и $p\in[0,+\infty]$ не существует нетривиального решения y уравнения (1), удовлетворяющего условиям $y(0)=0$ и $y'(0)=p$ [2], причём множество $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ пусто тогда и только тогда, когда $\gamma<0$ и $\alpha\leqslant2\gamma-1$ или $\beta\leqslant2\gamma-1$ [3]. При $\gamma<0$ и $\alpha,\beta>2\gamma-1$, а также при $\gamma>0$ для любой функции $Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеем [2, 4]

$$\lambda_1(Q)=\inf_{y\in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}}R[Q,y],\quad R[Q,y]\equiv\left(\int\limits_0^1 y'^2\,dx-\int\limits_0^1 Qy^2\,dx\right)\Bigg/\int\limits_0^1 y^2dx.$$

Теорема 1. *Для любых $\gamma>1$ и $\alpha,\beta<2\gamma-1$ (или $\gamma<-1$ и $\alpha,\beta>2\gamma-1$) существуют такие функции $Q_*\in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $0<u\in H_0^1(0,1)$, что $m_{\alpha,\beta,\gamma}=R[Q_*,u]$ (или, соответственно, $M_{\alpha,\beta,\gamma}=R[Q_*,u]$), и*

$$u''+mu=-x^{\alpha/(1-\gamma)}(1-x)^{\beta/(1-\gamma)}u^{(\gamma+1)/(\gamma-1)},\quad \int\limits_0^1 x^{\alpha/(1-\gamma)}(1-x)^{\beta/(1-\gamma)}u^{2\gamma/(\gamma-1)}(x)\,dx=1.$$

Теорема 2. *При* $\gamma = 1$ *имеем: если* $\alpha, \beta \leqslant 0$, *то* $m_{\alpha,\beta,\gamma} \geqslant 3\pi^2/4$, *а если* $\alpha, \beta \leqslant 1$ *и* $\alpha > 0$ *или* $\beta > 0$, *то* $m_{\alpha,\beta,\gamma} \geqslant 0$. *При* $\gamma \geqslant 1$ *имеем: если* $\alpha > \gamma$ *или* $\beta > \gamma$, *то* $m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant 0$, *а если* $\alpha, \beta \leqslant \gamma \neq 1$, *то* $m_{\alpha,\beta,\gamma} = 0$. *При* $0 \neq \gamma < 1$ *имеем* $m_{\alpha,\beta,\gamma} = -\infty$.

Теорема 3. *При* $\gamma > 1$, *а также при* $0 < \gamma \leqslant 1$ *и* $\alpha \leqslant 2\gamma - 1$ *или* $\beta \leqslant 2\gamma - 1$ *имеем* $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$. *При* $0 \neq \gamma \leqslant 1$ *и* $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$ *имеем* $M_{\alpha,\beta,\gamma} < \pi^2$.

Литература. 1. Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51. № 3. С. 73–144. 2. Ezhak S., Telnova M. On conditions on the potential in a Sturm–Liouville problem and an upper estimate of its first eigenvalue // Springer Proc. in Math. and Stat. 2020. V. 333. P. 481–496. 3. Куралбаева К.З. Об оценках первого собственного значения оператора Штурма–Лиувилля // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 6. С. 852–853. 4. Ezhak S., Telnova M. On some estimates for the first eigenvalue of a Sturm–Liouville problem // Int. Workshop QUALITDE–2021. Tbilisi, Georgia. P. 66–69.

В. В. Быков (Москва) “Функции, определяемые условными показателями Боля и их мажорантами” (18 ноября 2022 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами, а через $\mathcal{M}^n$ – его подмножество, состоящее из систем с ограниченными коэффициентами. Наделим пространство $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ *равномерной* метрикой

$$\rho_U(A, B) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \min\{|A(t) - B(t)|, 1\}, \quad A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n.$$

Обозначим через $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \bigsqcup \{-\infty, +\infty\}$ расширенную числовую прямую с естественным порядком и порядковой топологией.

Фундаментальное понятие показателя Боля (генерального показателя), введённое П. Болем [1] и независимо от него К.П. Персидским [2] (подробнее см. [3, с. 211–212]), также называют особым показателем [4, с. 116–117].

Определение 1 [3, гл. 3, § 4.2]. *Показателем Боля*, отвечающим нетривиальному подпространству $L \subset \mathbb{R}^n$ начальных значений решений системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, называется величина

$$\varkappa_g(A, L) = \inf\Bigg\{\lambda \in \mathbb{R} : \sup_{\substack{t \geqslant \tau \geqslant 0 \\ \xi \in L \setminus \{0\}}} e^{-\lambda(t-\tau)} |x(t,\xi)|/|x(\tau,\xi)| < +\infty\Bigg\},$$

где $x(\,\cdot\,, \xi)$ – решение системы (1), удовлетворяющее условию $x(0, \xi) = \xi$, причём $\inf \varnothing \equiv +\infty$.

Определение 2 [5]. *Условными показателями Боля* системы (1) и их минимальными полунепрерывными сверху *мажорантами* называются величины

$$\beta_i(A) = \inf_{L \in G_i(\mathbb{R}^n)} \varkappa_g(A, L), \quad \overline{\beta}_i(A) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup_{\rho_U(B,A) \leqslant \varepsilon} \beta_i(B), \quad i = \overline{1, n},$$

где $G_i(\mathbb{R}^n)$ – множество i-мерных подпространств векторного пространства $\mathbb{R}^n$.

Старший показатель β_n полунепрерывен сверху [3, теорема 4.6], но при $n \geqslant 2$ не полунепрерывен снизу [6] (причём уже на подпространстве $\mathcal{M}^n$), а остальные условные показатели Боля β_i, $i = \overline{1, n-1}$, не полунепрерывны даже сверху.

Для метрического пространства M рассмотрим семейство линейных систем

$$\dot{x} = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

с непрерывным отображением $A : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n \times n}$. В.М. Миллионщиков установил [5], что все условные показатели Боля, отвечающие семейству (2) и обозначаемые через $\beta_i(\,\cdot\,, A)$, $i = \overline{1, n}$, принадлежат второму классу Бэра как функции параметра, и поставил задачу (см. [7]) о наименьшем классе Бэра, которому принадлежат их мажоранты $\overline{\beta}_i(\,\cdot\,, A)$.

Определение 3. Будем говорить, что функция $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ является *верхнепредельной*, если она для некоторой последовательности непрерывных функций $f_k : M \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, представима в виде

$$f(\mu) = \overline{\lim_{k\to+\infty}} f_k(\mu), \quad \mu \in M.$$

Класс всех верхнепредельных функций $M \to \overline{\mathbb{R}}$ обозначим через $\mathfrak{U}(M)$.

Замечание. Принадлежность функции f классу $\mathfrak{U}(M)$ равносильна каждому из следующих условий:

1) функция f представима как поточечный предел убывающей последовательности функций первого бэровского класса;

2) прообраз любого луча $[r, +\infty]$ $(r \in \mathbb{R})$ при отображении f является множеством типа G_δ (функции, удовлетворяющие этому условию, составляют класс $(*, G_\delta)$ [8, § 37.1]).

Равносильность условий 1) и 2) установлена в монографии [8, § 37.1], а равносильность условия 2) и определения 3 – в работе [9, следствие 2].

Класс всех непрерывных отображений $A : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{C}}^n(M)$, а его подкласс ограниченных при каждом фиксированном $\mu \in M$ отображений – через $\mathcal{C}^n(M)$.

Задачу В.М. Миллионщикова полностью решает следующая

Теорема. *Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$ и $i = \overline{1,n}$ классы функций*

$$\{\beta_i(\,\cdot\,, A) : A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)\} \quad \text{и} \quad \{\overline{\beta}_i(\,\cdot\,, A) : A \in \widetilde{\mathcal{C}}^n(M)\}$$

совпадают с классом $\mathfrak{U}(M)$, а классы функций

$$\{\beta_i(\,\cdot\,, A) : A \in \mathcal{C}^n(M)\} \quad \text{и} \quad \{\overline{\beta}_i(\,\cdot\,, A) : A \in \mathcal{C}^n(M)\}$$

совпадают с его подклассом, состоящим из функций $M \to \mathbb{R}$, каждая из которых имеет конечную полунепрерывную сверху миноранту.

Литература. 1. Bohl P. Über Differentialungleichungen // J. Reine und Angew. Math. 1913. Bd. 144. Hf. 4. S. 284–318. 2. Персидский К.П. Об устойчивости движения по первому приближению // Мат. сб. 1933. Т. 40. № 3. С. 284–292. 3. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970. 4. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. 5. Миллионщиков В.М. Условные показатели Боля линейных систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 8. С. 1464. 6. Миллионщиков В.М. О неустойчивости особых показателей и о несимметричности отношения почти приводимости линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 4. С. 749–750. 7. Миллионщиков В.М. Нерешённая задача из теории условной устойчивости // Успехи мат. наук. 1991. Т. 46. № 6. С. 204. 8. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л., 1937. 9. Карпук М.В. Показатели Ляпунова семейств морфизмов обобщенных расслоений Миллионщикова как функции на базе расслоения // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2016. Т. 24. № 2. С. 55–71.

Н. А. Антонов (Москва) "Применение дробных степенных рядов к решению некоторых уравнений типа Эмдена–Фаулера с дробной производной" (25 ноября 2022 г.).

Дифференциальные уравнения с дробными производными описывают физические процессы [1–4]. Для их решения используются разные методы, в частности, метод RFPS (residual fractional power series), позволяющий находить решения в виде дробных степенных рядов (см., например, [5]). С его помощью строится решение задачи Коши для уравнения типа Эмдена–Фаулера с дробными производными, применяемого в задачах, описывающих радиационное охлаждение, кинетику процессов горения, концентрацию реактивов в химических реакторах, поведение изотермических газов и термоэлектронную эмиссию [6, 7].

Обозначим через C_μ, где $\mu \in \mathbb{R}$, пространство функций $f \in C(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})$, каждая из которых представима в виде $f(x) = x^p g(x)$ для некоторых $p > \mu$ и $g \in C(\mathbb{R}_+)$, а через C_μ^n, где $n \in \mathbb{N}$, – пространство таких функций f, что $f^{(n)} \in C_\mu$.

Определение 1. Для заданных $x_0 \geqslant 0$ и $n \in \mathbb{N}$ *оператором дробного дифференцирования в смысле Капуто* функции $f \in C_{-1}^n$ порядка $\alpha \in (n-1, n)$ или порядка n называется

$$ {}_{x_0}^{C}D_x^\alpha f \equiv \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt \quad \text{или, соответственно,} \quad {}_{x_0}^{C}D_x^n f \equiv f^{(n)}(x). $$

Определение 2. Для заданного $\alpha > 0$ *дробным степенным рядом* с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ называется функциональный ряд

$$ \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-x_0)^{n\alpha}, \quad x \geqslant x_0. $$

Свойства дробных степенных рядов см. в статье [8]. В случае $\alpha \in (1/2, 1]$, обозначив $D_x^\alpha \equiv \equiv {}_0^C D_x^\alpha$, рассмотрим задачу Коши

$$ D_x^{2\alpha} u + \frac{a}{x^\alpha} D_x^\alpha u + s(x) g(u) = h(x), \quad x > 0, \quad u(0) = \hat{u}_0, \quad D_0^\alpha u = 0, \tag{1} $$

где

$$ s(x) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}, \quad h(x) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} h_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}, \quad g(u) \equiv \sum_{k=0}^{K} a_k u^k, \quad K \in \mathbb{N}. $$

Решение задачи (1) ищем в виде дробного степенного ряда

$$ u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \quad \left(U_N(x) \equiv \sum_{n=0}^{N} u_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \right). \tag{2} $$

Теорема. *Для ряда (2) верны равенства* $u_0 = \hat{u}_0$, $u_1 = 0$ *и*

$$ u_N \left(1 + \frac{a\Gamma(1+(N-2)\alpha)}{\Gamma(1+(N-1)\alpha)} \right) = h_{N-2} - D_0^{(N-2)\alpha} \left(\sum_{n=0}^{N} s_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \sum_{k=0}^{K} a_k U_N^k(x) \right), \quad N \geqslant 2. $$

Следствие 1. *Если* $s(x) \equiv s$, $h(x) \equiv 0$ *и* $g(u) \equiv u$, *то решение задачи (1) представимо в виде суммы ряда*

$$ u(x) = \hat{u}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n s^n \hat{u}_0 \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(1+(2k-1)\alpha)}{\Gamma(1+(2k-1)\alpha) + a\Gamma(1+2(k-1)\alpha)} \right) \frac{x^{2n\alpha}}{\Gamma(1+2n\alpha)}, $$

сходящегося абсолютно и равномерно по $x \geqslant 0$.

В условиях следствия 1 для оператора целочисленного дифференцирования $(\alpha = 1)$ находим решения задачи (1) при $\hat{u}_0 = s(x) = 1$ и $a = \overline{1,5}$:

$$ u(x) = J_0(x), \frac{\sin x}{x}, \frac{2J_1(x)}{x}, \frac{3\sin x - 3x\cos x}{x^3}, \frac{8J_2(x)}{x^2}, $$

где $J_a(x)$ – функция Бесселя первого рода. Заметим, что в работе [9] при $a = 2$ другим методом (FDT) найдено такое же решение.

Следствие 2. *Если* $s(x) \equiv x^\alpha$ *и*

$$ h(x) \equiv \Gamma(1+2\alpha) + \frac{a\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} + x^\alpha (\hat{u}_0 + x^{2\alpha})^k, \quad g(u) = u^k, $$

где $k \in \mathbb{N}$, *то задача (1) имеет решение* $u(x) = \hat{u}_0 + x^{2\alpha}$.

Литература. 1. Podlubny I. Fractional Differential Equations // Math. in Sci. and Engin. 1999. V. 198. 2. Das S. Functional Fractional Calculus. Berlin, 2011. 3. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск, 2008. 4. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, 2006. 5. Syam M.I. Analytical solution of the fractional initial Emden–Fowler equation using the fractional residual power series method // Int. J. of Appl. and Comput. Math. 2018. V. 4 (106). P. 1–8. 6. Wang H.H., Hu Y. Solutions of fractional Emden–Fowler equations by homotopy analysis method // J. of Adv. in Math. 2017. V. 13 (1). P. 1–6. 7. Chandrasekhar S. Introduction to the Study of Stellar Structure. New York, 1967. 8. El-Ajou A., Abu Arqub O., Al Zhour Z., Momani S. New results on fractional power series: theories and applications // Entropy. 2013. V. 15. P. 5305–5323. 9. Rebenda J., Šmarda Z. A numerical approach for solving of fractional Emden–Fowler type equations // Intern. Conf. of Numer. Anal. and Appl. Math. (ICNAAM–2017). AIP Conf. Proc. 2018. V. 1978.

И. В. Асташова, Д. А. Лашин, А. В. Филиновский (Москва) “Об одной задаче двойного экстремума в параболической задаче управления с точечным наблюдением” (2 декабря 2022 г.).

Рассмотрим краевую задачу для параболического уравнения

$$u_t = (a(x,t)u_x)_x + b(x,t)u_x + h(x,t)u, \quad (x,t) \in Q_T \equiv (0,1)\times(0,T), \quad T>0, \tag{1}$$

$$u(0,t)=\varphi(t), \quad u_x(1,t)=\psi(t), \quad 0<t<T, \quad u(x,0)=\xi(x), \quad 0<x<1, \tag{2}$$

с гладкими в $\overline{Q}_T$ коэффициентами a, b, h, граничными функциями $\varphi, \psi \in W_2^1(0,T)$ и начальной функцией $\xi \in L_2(0,1)$. Поставим задачу управления с точечным наблюдением: фиксируя функции ξ, ψ и управляя температурой φ на левом конце отрезка, стараемся добиться того, чтобы температура $u(x_0,t)$ в заданной точке $x_0 \in (0,1)$ оставалась интегрально близкой к заданной функции $z(t)$ на всём интервале времени $(0,T)$. Другие типы экстремальных задач с финальным или распределённым наблюдением для параболических уравнений изучались в работах [1, 2]. Продолжая исследования [3–5], изучим задачу о двойном минимуме, дополнительно минимизируя функционал по некоторому классу весовых функций.

Пусть $V_2^{1,0}(Q_T)$ – банахово пространство функций $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \equiv \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)},$$

для которых отображение $t \mapsto u(\,\cdot\,,t)$ $([0,T] \to L_2(0,1))$ непрерывно [6, с. 15], а $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – множество функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta(\,\cdot\,,T)=\eta(0,\cdot\,)=0$. *Слабым решением* задачи (1), (2) будем называть функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(0,\cdot\,)=\varphi$ и для всех $\eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$ интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} f(x,t)\,dx\,dt = \int\limits_0^1 \xi(x)\eta(x,0)\,dx + \int\limits_0^T a(1,t)\psi(t)\,\eta(1,t)\,dt, \quad f \equiv au_x\eta_x - bu_x\eta - hu\eta - u\eta_t.$$

Теорема 1 [7]. *Задача (1), (2) имеет единственное слабое решение* $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, *причём существует такая константа* C_1 *(не зависящая от* φ, ψ *и* ξ*), что выполнено неравенство*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant C_1(\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\xi\|_{L_2(0,1)}).$$

Пусть $\Phi \subset W_2^1(0,T)$ – множество управляющих функций φ, которое далее считаем непустым, замкнутым, выпуклым и ограниченным, а $Z \subset L_2(0,T)$ – множество целевых функций z. Рассмотрим функционал

$$J[z,\rho,\varphi] \equiv \int\limits_0^T (u_\varphi(x_0,t)-z(t))^2\rho(t)\,dt, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in Z,$$

где u_φ – решение задачи (1), (2) с заданной управляющей функцией φ, а ρ – весовая функция из множества $P \equiv \{\rho \in L_\infty(0,T) : \operatorname*{ess\,inf}_{t\in(0,T)} \rho(t) > 0\}$. Зафиксировав функции z и ρ, рассмотрим задачу минимизации

$$m[z,\rho,\Phi] = \inf_{\varphi\in\Phi} J[z,\rho,\varphi].$$

Теорема 2 [5, 7, 8]. *Для любых функций* $z \in L_2(0,T)$ *и* $\rho \in P$ *существует единственная функция* $\varphi_0 \in \Phi$, *для которой*

$$m[z,\rho,\Phi] = J[z,\rho,\varphi_0].$$

При $\hat\rho > \check\rho > 0$ введём подкласс $\widetilde P \subset \{\rho \in P : \operatorname*{ess\,inf}_{t\in(0,T)} \rho(t) \geqslant \check\rho,\ \ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \rho(t) \leqslant \hat\rho\}$ и поставим задачу повторной минимизации

$$\mu[z,\widetilde P,\Phi] = \inf_{\rho\in\widetilde P} m[z,\rho,\Phi].$$

Определение [9]. Подмножество $Y \subset X^*$ пространства, сопряженного к банахову пространству X, называется *регулярно выпуклым*, если для любого $y \in X^* \setminus Y$ существует такое $x_0 \in X$, что $\sup_{f\in Y} f(x_0) < y(x_0)$.

Теорема 3. *Если множество* $\widetilde P$ *регулярно выпукло в* $L_\infty(0,T)$, *то для любой функции* $z \in L_2(0,T)$ *существуют функции* $\rho_0 \in \widetilde P$ *и* $\varphi_0 \in \Phi$, *для которых*

$$\mu[z,\widetilde P,\Phi] = J[z,\rho_0,\varphi_0].$$

В доказательстве теоремы 3 используются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1 [9, теорема 10]. *Если* X *– сепарабельное банахово пространство, то множество* $Y \subset X^*$ *регулярно выпукло тогда и только тогда, когда оно выпукло и* $*$*-слабо замкнуто.*

Лемма 2 [10, гл. 8, § 7]. *Для любой ограниченной последовательности* $\rho_1, \rho_2, \ldots \in L_\infty(0,T)$ *существуют подпоследовательность* $(\rho_{k_j})_{j\in\mathbb N}$ *и такая функция* $\rho_0 \in L_\infty(0,T)$, *что для любой функции* $\zeta \in L_1(0,T)$ *выполнено равенство*

$$\lim_{j\to+\infty} \int_0^T \rho_{k_j}(t)\zeta(t)\,dt = \int_0^T \rho_0(t)\zeta(t)\,dt.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Troltzsch F. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications, Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence, 2010. 2. Lurie K.A. Applied optimal control theory of distributed systems. Berlin, 2013. 3. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 9–25. 4. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations // Opuscula Math. 2019. V. 39. № 5. P. 595–609. 5. Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D. On the estimates in various spaces to the control function of the extremum problem for parabolic equation // WSEAS. J. Appl. Theor. Mech. 2021. V. 16. P. 187–192. 6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 7. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 258–274. 8. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об экстремальной задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 504. № 1. С. 28–31. 9. Krein M., Šmuljan V. On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space // Ann. of Math. 1940. V. 41. № 3. P. 556–583. 10. Банах С. Теория линейных операций. М.; Ижевск, 2001.