



Российская Академия Наук

А Т АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

8

АВГУСТ

Москва

2022

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С.,
Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Тематическая редакция»

© 2022 г. Л.Б. РАПОПОРТ, д-р физ.-мат. наук
(LBRapoport@gmail.com),

А.А. ГЕНЕРАЛОВ, канд. техн. наук (generalov.alexey@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕВЕРНУТЫМ МАЯТНИКОМ НА КОЛЕСЕ

Рассматривается механическая система, состоящая из колеса и маятника, подвешенного на его оси. Колесо катится по горизонтальной поверхности. Рассматривается задача одновременной стабилизации вертикального положения маятника и заданного положения колеса. Известная трудность, связанная с этой задачей, состоит в том, что использование одного управления служит для достижения двух целей — стабилизации угла отклонения маятника и угла поворота колеса. Применение метода линеаризации обратной связью по выходу, в качестве которого выбран угол отклонения маятника, приводит к появлению неустойчивой нулевой динамики в замкнутой системе.

Показано, что если в качестве выхода системы взять сумму угла отклонения маятника и угла поворота колеса, то нулевая динамика замкнутой системы оказывается устойчивой, хотя и не асимптотически. Предложен метод асимптотической стабилизации положения равновесия замкнутой системы и построена оценка области притяжения. Построение оценки сводится к задаче о разрешимости линейных матричных неравенств.

Ключевые слова: асимптотическая стабилизация, перевернутый маятник, оценка области притяжения, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231022080013, **EDN:** AFZSSB

1. Введение

Рассматривается механическая система, состоящая из колеса и маятника, подвешенного на его оси. Колесо катится по плоской поверхности, пересечение которой с вертикальной плоскостью рис. 1 образует ось ξ .

Эта система, также как и родственная ей система, состоящая из тележки с перевернутым маятником, исследуется во многих работах по теории управления, см., например, [1–14], и привлекает интерес как классическая нелинейная, неустойчивая и неминимально фазовая система. Синтез управления, стабилизирующего вертикальное положение маятника в линеаризованной системе, рассмотрен в работах [1, 2]. Легко решается задача синтеза нелинейного контроллера, стабилизирующего положение маятника с помощью метода

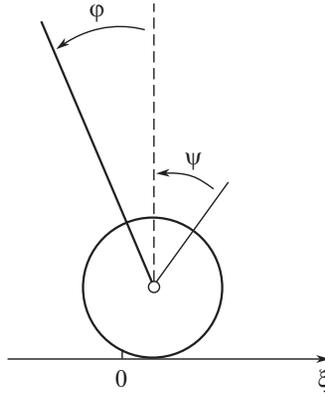


Рис. 1. Схема маятника на колесе.

линеаризации обратной связью [3] по выходу, в качестве которого выбран угол отклонения маятника. Однако это не решает полную задачу стабилизации по состоянию, поскольку нулевая динамика остается неустойчивой и положение центра колеса не стабилизируется. В [4] описан подход к построению так называемых виртуальных выходов, стабилизация по которым гарантирует также и стабилизацию по состоянию. Применение этого подхода в общем виде сложно. В [4] описывается метод построения виртуального выхода и метод асимптотической стабилизации состояния равновесия линеаризованной системы для случая перевернутого маятника на тележке.

Решение задачи в нелинейной постановке основано на использовании различных методов нелинейной теории управления. В книге [5] дается решение этой задачи с помощью разрывных управлений. За конечное время система приводится к движению, ограниченному целевым многообразием. Развитие метода скользящих режимов в применении к этой задаче для различных сценариев и различных постановок описано в большом количестве работ, см., например, [6]. Обзор методов управления механическими системами, построенными на основе перевернутого маятника, можно найти в книге [7].

В [8] рассматривается задача об одновременной стабилизации положения тележки и вертикального положения закрепленного на ней маятника. Предлагается новый закон управления, основанный на введении системы сравнения второго порядка, траектория которой принимается за целевую траекторию тележки с маятником. Проведен анализ линеаризованной замкнутой системы, определен диапазон значений параметров закона управления, гарантирующего локальную стабилизируемость системы, и предложен конструктивный метод их выбора.

Обычно задача синтеза стабилизирующего контроллера решается неоднозначно и допускает определенную свободу выбора параметров, которой можно распорядиться оптимальным образом. Постановка и решение такой задачи в применении к стабилизации маятника на колесе рассматриваются в [9].

В [10] используется теория малых коэффициентов усиления. Работа [11] дает решение, основанное на синтезе оптимального по быстродействию управления. В [12] решается задача глобальной стабилизации и предлагается комбинированный закон управления, в котором при больших начальных отклонениях применяется управление маятником, гарантирующее попадание в область локальной стабилизируемости. Большое значение имеет построение оценки такой области. Очевидно, что оценка, зависящая от построенного закона управления и выбранной функции Ляпунова, может быть консервативной. Актуальна задача построения такой оценки максимального размера в классе, определенном параметрами функции Ляпунова.

Этой задаче посвящена настоящая работа. В работе показано, что если в качестве выхода взять сумму угла отклонения маятника и приведенного угла поворота колеса (определение дано ниже) и синтезировать управление, стабилизирующее по этому выходу, то замкнутая система окажется устойчивой, хотя и не асимптотически. Стабилизация нулевого состояния получается добавлением к управлению слагаемого, пропорционального разнице угловых скоростей колеса и маятника и имеющего смысл момента вязкого трения в оси колеса. Получена оценка области притяжения состояния равновесия с помощью специально построенной функции Ляпунова, состоящей из квадратичной части и нелинейного слагаемого. Параметры функции Ляпунова находятся решением последовательности задач о совместности линейных матричных неравенств (ЛМН). Обсуждается метод асимптотической стабилизации положения равновесия замкнутой системы, сводящийся к приведению состояния системы в область притяжения. Статью завершает пример.

2. Модель системы

Перейдем к описанию математической модели системы. Начало оси ξ на рис. 1 обозначено через 0. Переменная ξ используется для обозначения положения центра колеса. Необходимо стабилизировать верхнее положение равновесия маятника и одновременно нулевое значение переменной ξ . Обозначим через φ угловое отклонение маятника от вертикальной оси, ортогональной оси ξ . Через ψ обозначим угол между вертикалью и некоторым выделенным радиусом колеса, причем нулевому значению ψ отвечает нулевое значение ξ . Положительное значение углов отсчитывается против часовой стрелки. Таким образом, на рисунке угол φ положителен, а угол ψ отрицателен, что соответствует положительному значению ξ . Пусть m — это масса, сосредоточенная на конце маятника длины l , M — масса колеса, J — момент инерции колеса и r — его радиус. Пусть

$$M_1 = \frac{J}{r^2}.$$

Обозначим

$$(2.1) \quad \beta = \frac{M + M_1}{m}.$$

Далее, для угловой переменной ψ и линейного отклонения ξ имеем связывающее их выражение

$$\psi = -\frac{\xi}{r}.$$

Наряду с угловой переменной ψ определим

$$(2.2) \quad \theta = -\frac{\xi}{l} = \psi \frac{r}{l}$$

и назовем приведенным углом поворота колеса. Пусть U — это момент силы, развиваемый приводом и приложенный между маятником и колесом. Положительному значению U отвечает усилие, отклоняющее маятник против часовой стрелки, увеличивающее значение φ и уменьшающее ψ . Переменная ψ не влияет на моменты инерции и на потенциальную энергию и, как будет видно дальше, является циклической. При условии плоского движения колеса без проскальзывания выражения для кинетической и потенциальной энергии системы принимают вид

$$(2.3) \quad T = \frac{1}{2}M\xi^2 + \frac{1}{2}J\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}m \left(r\dot{\psi} + l\dot{\varphi} \cos \varphi \right)^2 + \frac{1}{2}m (l\dot{\varphi} \sin \varphi)^2$$

и

$$(2.4) \quad \Pi = mgl \cos \varphi$$

соответственно, g — ускорение свободного падения. Точка над переменной означает взятие полной производной по времени. Раскрывая скобки в выражении (2.3), получим

$$T = \frac{1}{2}(M + M_1 + m)r^2\dot{\psi}^2 + mrl\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$$

или, с учетом обозначений (2.1) и (2.2),

$$(2.5) \quad T = \frac{1}{2}ml^2 \left[(\beta + 1)\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 \right].$$

Наряду с t введем новую независимую переменную $\tau = t\sqrt{g/l}$. Всюду далее штрих ' обозначает производную по переменной τ . Для кинетической энергии имеем

$$(2.6) \quad T = \frac{1}{2}mgl \left[(\beta + 1)\theta'^2 + 2\theta'\varphi' \cos \varphi + \varphi'^2 \right].$$

Для функции Лагранжа получаем следующее выражение:

$$(2.7) \quad L = mgl \left[\frac{1}{2}(\beta + 1)\theta'^2 + \theta'\varphi' \cos \varphi + \frac{1}{2}\varphi'^2 - \cos \varphi \right].$$

Управляющий момент U приложен между маятником и колесом. С учетом знака U уравнения Лагранжа второго рода принимают вид

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \varphi'} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= U, \\ \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \theta'} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -U. \end{aligned}$$

Используя в (2.8) выражение (2.7) и поделив левую и правую части уравнений на величину mgL , получим

$$(2.9) \quad \begin{bmatrix} 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & 1 + \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi'' \\ \theta'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi + u \\ \varphi'^2 \sin \varphi - u \end{bmatrix},$$

где u — это новая безразмерная переменная управления, $u = \frac{U}{mgL}$. Последнее уравнение разрешается относительно вторых производных угловых переменных, поскольку детерминант матрицы системы отличен от нуля

$$(2.10) \quad d = 1 + \beta - \cos^2 \varphi = \beta + \sin^2 \varphi > 0.$$

Из (2.9) получаем

$$(2.11) \quad \begin{bmatrix} \varphi'' \\ \theta'' \end{bmatrix} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} 1 + \beta & -\cos \varphi \\ -\cos \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \varphi + u \\ \varphi'^2 \sin \varphi - u \end{bmatrix}.$$

Обозначив угловые скорости $\omega = \varphi'$, $\delta = \theta'$ и $x = (\varphi, \omega, \theta, \delta)^T$, перепишем уравнения движения в виде

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \varphi' &= \omega, \\ \omega' &= f_1(x) + h_1(x)u, \\ \theta' &= \delta, \\ \delta' &= f_2(x) + h_2(x)u, \end{aligned}$$

где

$$(2.13) \quad \begin{aligned} f_1(x) &= \frac{\sin \varphi}{d} [-\omega^2 \cos \varphi + (1 + \beta)], \\ f_2(x) &= \frac{\sin \varphi}{d} (\omega^2 - \cos \varphi), \\ h_1(x) &= \frac{1}{d} (\cos \varphi + 1 + \beta), \\ h_2(x) &= \frac{1}{d} (-\cos \varphi - 1). \end{aligned}$$

Обозначив $f = (\omega, f_1, \delta, f_2)^T$ (символ зависимости от x для простоты опущен) и $h = (0, h_1, 0, h_2)^T$, перепишем систему (2.12) в виде

$$(2.14) \quad x' = f + hu.$$

Введем в рассмотрение безразмерную кинетическую энергию и полную энергию системы.

$$(2.15) \quad \tilde{T} = \frac{T}{mgl} = \frac{1}{2} [(\beta + 1)\theta'^2 + 2\theta'\varphi' \cos \varphi + \varphi'^2],$$

$$\tilde{E} = \tilde{T} + \frac{\Pi}{mgl} = \tilde{T} + \cos \varphi.$$

Теперь потребуются выражения для производной безразмерной полной и кинетической энергии системы. Для выполнения формальных алгебраических операций здесь и далее удобно воспользоваться каким-нибудь пакетом компьютерной алгебры, например [15]. Получим следующее

Утверждение 1. Справедливы следующие выражения для производных

$$(2.16) \quad \tilde{E}' = u(\omega - \delta),$$

$$(2.17) \quad \tilde{T}' = u(\omega - \delta) + \omega \sin \varphi.$$

3. Синтез управления, стабилизирующего нулевое состояние равновесия системы (2.12)

Управление системой (2.12) разобьем на два этапа.

1. Сначала система (2.12) приводится из произвольного начального состояния в некоторую окрестность нулевого положения равновесия.
2. Внутри указанной окрестности происходит переключение на другой закон управления, для которого эта окрестность является инвариантной областью притяжения.

Основная цель данной работы состоит в синтезе закона управления второго этапа. В настоящем разделе описан метод синтеза закона управления, стабилизирующего нулевое состояние системы (2.12). В следующем разделе 4 будет построена область притяжения, соответствующая этому закону управления. В разделе 5 будет описан один из методов приведения состояния системы в область притяжения, используемую на первом этапе. Этот метод будет описан без строгого доказательства, поскольку не является предметом настоящей работы, а приведен для полноты изложения.

Сделаем предположение относительно области изменения угла φ .

Предположение 1. Предположим, что на траекториях управляемой системы (2.12) выполняются условия

$$(3.1) \quad |\varphi| \leq \varphi_0 < \pi, \quad |\omega| \leq \omega_0,$$

где φ_0, ω_0 — это некоторые положительные константы. В силу этого предположения траектория системы не выходит за пределы слоя, внутри которого $\sin \varphi = 0$ только при $\varphi = 0$. При этом система имеет единственное положение равновесия $x = 0$. Далее это предположение будет снято.

Воспользуемся методом линеаризации обратной связью, см. [3, гл. 13]. Выберем в качестве выхода системы

$$(3.2) \quad y = \varphi + \theta$$

и синтезируем управление системой (2.12), гарантирующее асимптотическую устойчивость по этому выходу. Для этого продифференцируем y :

$$(3.3) \quad y' = \omega + \delta.$$

Убеждаемся, что y' не зависит от управления u , и берем вторую производную в силу системы (2.12):

$$(3.4) \quad y'' = f_1(x) + f_2(x) + (h_1(x) + h_2(x))u \doteq F + Hu,$$

где

$$(3.5) \quad F = \frac{\sin \varphi}{d} [(1 - \cos \varphi)(\omega^2 + 1) + \beta], \quad H = \frac{\beta}{d}.$$

Вторая производная зависит от управления. Для того чтобы обеспечить экспоненциальную устойчивость по выходу y с заранее заданной скоростью убывания, выберем положительное число λ (показатель экспоненциального убывания) и построим линейное дифференциальное уравнение, которому подчиним динамику изменения y :

$$(3.6) \quad y'' + 2\lambda y' + \lambda^2 y = 0.$$

Ограничения на допустимые значения λ будут даны далее. Подставив (3.3) и (3.4) в (3.6) и разрешив его относительно u , получим выражение для закона управления

$$(3.7) \quad u^*(x) = -\frac{\lambda^2 y + 2\lambda y' + F}{H} = \\ = -\frac{d\lambda^2(\varphi + \theta) + 2d\lambda(\omega + \delta) + \sin \varphi [(1 - \cos \varphi)(\omega^2 + 1) + \beta]}{\beta}.$$

Очевидно, что стабилизация по выходу y не решает задачу стабилизации по состоянию системы. Рисунок 2 иллюстрирует асимптотическую устойчивость замкнутой системы (2.12) по выходу y и его производной y' , в то время как движение фазовых переменных системы имеет колебательный характер, см. рис. 3. Причина такого поведения обсуждается ниже. Изменение энергии системы под действием управления (3.7) также имеет колебательный характер. Поставим цель синтезировать управление, обеспечивающее не только стабилизацию по выходу (3.7), но и “выкачивание” кинетической энергии из системы. Предположим, что это удалось. В соответствии с выражением (2.15) асимптотическое убывание величины \tilde{T} равносильно убыванию угловых скоростей ω и δ .

Имеет место следующее утверждение.

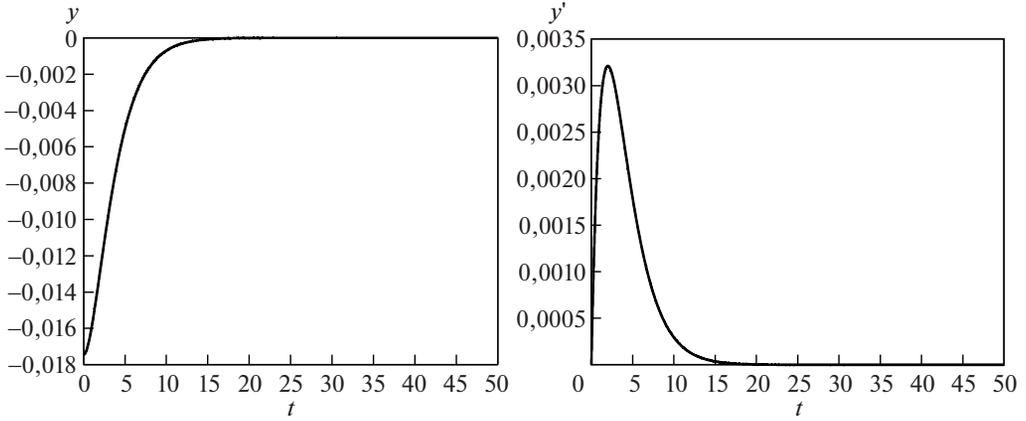


Рис. 2. График выхода $y(t)$ (слева) и его производной $y'(t)$ (справа) системы (2.12), замкнутой управлением (3.7), при начальных условиях $\varphi = -5^\circ, \theta = 4^\circ$ и $\omega = \delta = 0$. Величина β равна 3.

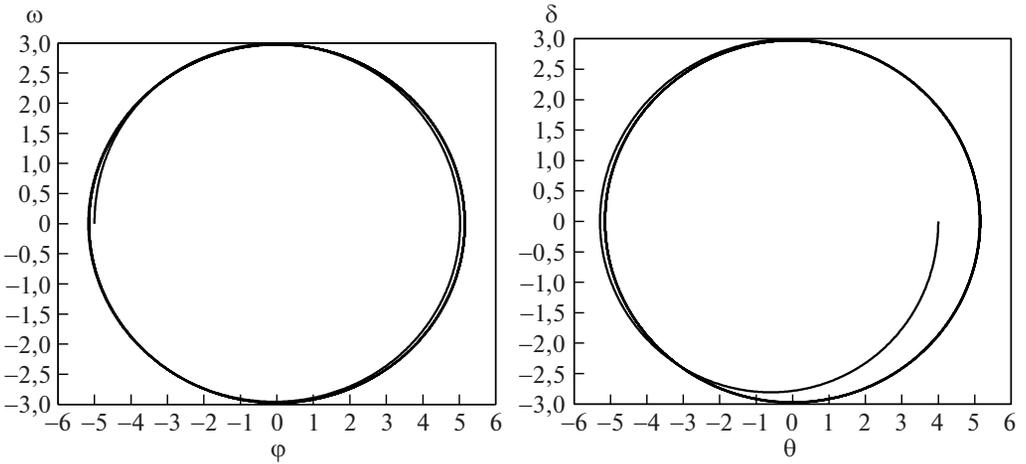


Рис. 3. Фазовый портрет системы (2.12), замкнутой управлением (3.7) в переменных φ, ω (слева) и θ, δ (справа). Начальные условия те же, что указаны на рис. 2.

Лемма 1. Предположим, что на траекториях управляемой системы (2.12), замкнутой законом управления $u(x)$, обеспечивающим асимптотическую устойчивость по выходу (3.2), выполняется соотношение

$$(3.8) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \omega(\tau) = 0.$$

Пусть закон управления $u(x)$ непрерывно зависит от своих аргументов. Тогда выполняются также и соотношения

$$(3.9) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \theta(\tau) = 0.$$

Доказательство вынесено в Приложение. Заметим, что в формулировке леммы 1 не предполагается, что управление $u(x)$ имеет вид (3.7).

Система (2.12), замкнутая управлением (3.7), принимает вид

$$(3.10) \quad x' = f(x) + h(x)u^*(x).$$

Очевидно, что $u^*(0) = 0$ и нулевое решение дифференциального уравнения (3.10) является состоянием равновесия. Система (3.10), линеаризованная в окрестности нуля, имеет вид

$$(3.11) \quad x' = \Phi x, \quad \Phi = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} + h(0) \left. \frac{\partial u^*(x)}{\partial x} \right|_{x=0}^T.$$

Имеем

$$(3.12) \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(\beta+2)\lambda^2+1}{\beta} & -2\lambda\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) & -\lambda^2\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) & -2\lambda\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2\lambda^2+1}{\beta} & 4\frac{\lambda}{\beta} & 2\frac{\lambda^2}{\beta} & 4\frac{\lambda}{\beta} \end{bmatrix}.$$

Сделаем линейную замену переменных $\zeta = Sx$, где

$$(3.13) \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Другими словами,

$$\zeta_1 = \varphi, \quad \zeta_2 = \omega, \quad \zeta_3 = y, \quad \zeta_4 = y'.$$

В новых переменных матрица (3.12) принимает вид

$$(3.14) \quad \Phi_\zeta = S\Phi S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\beta} & 0 & -\lambda^2\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) & -2\lambda\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & -2\lambda \end{bmatrix}.$$

Характеристические полиномы матриц Φ и Φ_ζ совпадают. Непосредственно из блочно-треугольного вида матрицы (3.14) следует, что ее спектр составлен из спектров двух диагональных блоков размера 2×2 . Таким образом, собственные числа матрицы (3.14) равны

$$(3.15) \quad \left\{ -\frac{i}{\sqrt{\beta}}, \frac{i}{\sqrt{\beta}}, -\lambda, -\lambda \right\},$$

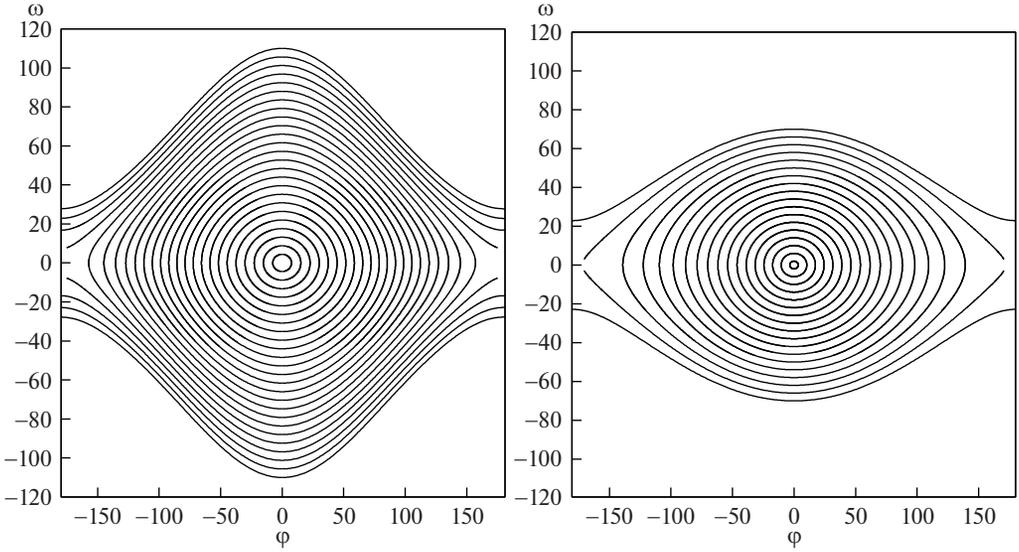


Рис. 4. Фазовый портрет системы (3.17) (слева) и системы $\varphi' = \omega$, $\omega' = -\sin \varphi \left(\frac{1}{\beta}\right)$ (справа). Изображена часть фазового портрета, состоящая из замкнутых траекторий, окружающих точку $(0, 0)$.

где i — это мнимая единица. Матрица Φ_ζ (так же как и Φ) имеет пару чисто мнимых корней и кратный отрицательный корень.

Управление (3.7) стабилизирует систему (2.12) по выходу y , обеспечивая $y(t) \rightarrow 0$ и $y(t)' \rightarrow 0$. Выясним, какой вид принимают первые два уравнения этой системы в пределе, при выполнении предельного соотношения $y = y' = 0$. Подставим в (3.10) выражение для управления (3.7) с учетом $y = y' = 0$:

$$(3.16) \quad \tilde{u}(x) = -\frac{\sin \varphi [(1 - \cos \varphi)(\omega^2 + 1) + \beta]}{\beta}.$$

Получим уравнения

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \varphi' &= \omega, \\ \omega' &= -\frac{\omega^2 + 1}{\beta} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Уравнения (3.17) совпадают с уравнениями обычного (не перевернутого) маятника, представленного в безразмерном виде, с добавлением эффекта увеличения ускорения свободного падения (равного 1 в безразмерном виде) на величину ω^2 . Фазовый портрет системы (3.17) изображен на рис. 4 слева. Подобный фазовый портрет приведен в [1]. Справа на том же рисунке изображен фазовый портрет обычного маятника.

Уравнения (3.17) допускают первый интеграл

$$(3.18) \quad V(\varphi, \omega) = 1 - \cos \varphi + \frac{\beta}{2} \ln(1 + \omega^2).$$

Внутри области, окружающей точку $(0, 0)$, решения (3.17) периодические. Фазовый портрет системы (3.17) содержит чередующиеся особые точки типа центр и седло. Сепаратрисной траектории, соединяющей седла $\varphi = \pm l\pi$, $\omega = 0$, $l = 1, 3, 5, \dots$, отвечает значение $V = 2$. Две сепаратрисные траектории, идущие из точки $-\pi, 0$ в точку $\pi, 0$ и в обратном направлении ограничивают инвариантную область Ω , в которой $V < 2$ и система (3.17) имеет единственное положение равновесия $(0, 0)$. На границе этой области величина $|\omega|$ достигает максимального значения $\bar{\omega}$ при $\varphi = 0$. При этом имеем $V(0, \bar{\omega}) = 2$ и, следовательно,

$$\frac{\beta}{2} \ln(1 + \bar{\omega}^2) = 2,$$

откуда следует

$$(3.19) \quad \bar{\omega} = \sqrt{e^{\frac{4}{\beta}} - 1}.$$

Очевидно, что в предположении 1

$$(3.20) \quad \omega_0 \leq \bar{\omega}.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Нулевое состояние равновесия системы (3.17) устойчиво в малом.

Для доказательства теоремы достаточно взять (3.18) в качестве функции Ляпунова и заметить, что $V(\varphi, \omega) > 0$ при $\varphi, \omega \neq 0$ внутри области Ω и $V'(\varphi, \omega) \equiv 0$.

Перейдем к синтезу управления, обеспечивающего асимптотическую стабилизацию системы (2.12). Наряду с управлением (3.7) введем в рассмотрение управление

$$(3.21) \quad u^{**}(x) = u^*(x) - k(\omega - \delta), \quad k > 0.$$

Первое слагаемое $u^*(x)$, как и раньше, обеспечивает стабилизацию по выходу y . Дополнительное слагаемое $-k(\omega - \delta)$, имеющее смысл момента силы вязкого трения в осевом соединении колеса и маятника, обеспечивает диссипацию полной энергии в силу (2.16), поскольку $\tilde{E}' = -k(\omega - \delta)^2 < 0$. Такой выбор управления мотивирован утверждением леммы 1, однако требуется строгое доказательство стабилизируемости нулевого состояния равновесия системы (2.12).

Матрица системы (2.12), замкнутой управлением (3.21) и линеаризованной в окрестности нуля, имеет вид

$$(3.22) \quad \Phi_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(\beta+2)\lambda^2+1}{\beta} & -\frac{(\beta+2)(2\lambda+k)}{\beta} & -\frac{(\beta+2)\lambda^2}{\beta} & -\frac{(\beta+2)(2\lambda-k)}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2\lambda^2+1}{\beta} & \frac{2(2\lambda+k)}{\beta} & \frac{2\lambda^2}{\beta} & \frac{2(2\lambda-k)}{\beta} \end{bmatrix}$$

и, после замены переменных,

$$(3.23) \quad \Phi_{k\zeta} = S\Phi_k S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\beta} & -2k\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) & -\lambda^2\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) & -(2\lambda-k)\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2k & -\lambda^2 & k-2\lambda \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином этой матрицы равен

$$(3.24) \quad N(\mu, k) = \det(\mu I - \Phi_k) = \mu^4 + \mu^3 \left(2\lambda + k\frac{4+\beta}{\beta}\right) + \mu^2 \left(\lambda^2 + \frac{1}{\beta}\right) + \mu\frac{(2\lambda-k)}{\beta} + \frac{\lambda^2}{\beta}.$$

Для его гурвицевости необходима положительность всех коэффициентов и, в частности, необходимо условие

$$(3.25) \quad 0 < k < 2\lambda.$$

Для исследования гурвицевости полинома (3.24) используем критерий Эрмита–Билера (см. [16, Теорема 1.2.3]). Имеем $N(i\omega, k) = A(\omega^2) + i\omega B(\omega^2)$, где

$$A(t) = \frac{\lambda^2}{\beta} - t \left(\lambda^2 + \frac{1}{\beta} \right) + t^2,$$

$$B(t) = \frac{(2\lambda-k)}{\beta} - t \left(2\lambda + k\frac{4+\beta}{\beta} \right)$$

и $t = \omega^2$. Корни полинома $A(t)$ равны $t_1 = \lambda^2$ и $t_3 = \frac{1}{\beta}$. Единственный корень полинома $B(t)$ равен

$$t_2 = \frac{2\lambda-k}{\beta \left(2\lambda + k\frac{4+\beta}{\beta} \right)}.$$

Для гурвицевости полинома (3.24) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$(3.26) \quad 0 < t_1 < t_2 < t_3 \quad \text{или} \quad 0 < t_3 < t_2 < t_1.$$

Из (3.25) и выражения для t_2 следует, что $t_2 < t_3$ и в (3.26) возможно только первое неравенство. Для его выполнения, в свою очередь, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$(3.27) \quad \lambda^2 < \frac{1}{\beta}$$

и $t_1 < t_2$ или, после несложных преобразований, выполнение условия

$$(3.28) \quad k < \bar{k} = 2\lambda \frac{1 - \lambda^2\beta}{1 + \lambda^2(4 + \beta)}.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Для гурвицевости полинома (3.24) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства (3.27) и (3.28).

Рассмотрим теперь поведение системы (3.10), замкнутой управлением (3.21), не в окрестности нуля. После перехода к переменным φ, ω, y, y' замкнутая система имеет вид

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \varphi' &= \omega, \\ \omega' &= -(\lambda^2 y + 2\lambda z) \frac{1 + \beta + \cos \varphi}{\beta} - k(2\omega - z) \frac{1 + \beta + \cos \varphi}{d} - \frac{\omega^2 + 1}{\beta} \sin \varphi, \\ y' &= z, \\ z' &= -\lambda^2 y - 2\lambda z - k(2\omega - z) \frac{\beta}{d}. \end{aligned}$$

Если положить $k = 0$, то получим утверждение, аналогичное утверждению теоремы 1, но справедливое для полной системы (3.29), а не только для предельной.

Теорема 3. При $k = 0$ нулевое состояние равновесия системы (3.29) устойчиво в малом.

Доказательство вынесено в Приложение.

Система (3.29) может быть переписана в виде

$$(3.30) \quad \zeta' = \Psi(\gamma)\zeta, \quad \Psi(\gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(\gamma_4 - 1)}{\beta} & -2k\gamma_3 & -\lambda^2\gamma_2 & -2\lambda\gamma_2 + k\gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2k\gamma_1 & -\lambda^2 & -2\lambda + k\gamma_1 \end{bmatrix},$$

где с учетом $d = \beta + \sin^2 \varphi$:

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\beta}{\beta + \sin^2 \varphi}, \\ \gamma_2 &= \frac{1 + \beta + \cos \varphi}{\beta}, \\ \gamma_3 &= \frac{1 + \beta + \cos \varphi}{\beta + \sin^2 \varphi}, \\ \gamma_4 &= 1 - \frac{\sin \varphi}{\varphi}(1 + \omega^2). \end{aligned}$$

Система (3.30), эквивалентная (3.29), нелинейна. Наряду с ней рассмотрим линейную нестационарную систему

$$(3.32) \quad \zeta' = \Psi(\gamma(t))\zeta,$$

где числа $\gamma_l(t)$, $l = 1, \dots, 4$, заданы не выражениями (3.31), а представляют собой произвольно меняющиеся во времени измеримые функции, стесненные только двусторонними ограничениями, следующими из выражений (3.31) и предположения 1:

$$(3.33) \quad \begin{aligned} \gamma_1(t) &\in \left[\frac{\beta}{\beta + \sin^2 \varphi_0}, 1 \right], \\ \gamma_2(t) &\in \left[\frac{1 + \beta + \cos \varphi_0}{\beta}, \frac{2 + \beta}{\beta} \right], \\ \gamma_3(t) &\in \left[\frac{1 + \beta + \cos \varphi_0}{\beta + 1}, \frac{2 + \beta}{\beta} \right], \\ \gamma_4(t) &\in \left[-\omega_0^2, 1 - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right]. \end{aligned}$$

Множество решений системы (3.32) при всевозможных значениях $\gamma_l(t)$ шире, чем множество решений нелинейной системы (3.29). Поэтому требование абсолютной устойчивости нулевого решения системы (3.32) в классе функций $\gamma_l(t)$, подчиненных ограничениям (3.33), обеспечит также и устойчивость нулевого решения системы (3.29). Такой метод погружения в более широкий в смысле множества решений класс систем дает, разумеется, достаточные условия устойчивости нулевого решения системы (3.29). Для получения таких условий выберем функцию Ляпунова, имеющую отрицательную производную одновременно для всех систем (3.32), (3.33).

В качестве кандидата выберем функцию

$$(3.34) \quad V(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta^T P \zeta + \alpha \left[1 - \cos \varphi + \frac{\beta}{2} \ln(1 + \omega^2) - \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\omega^2 \beta}{2} \right],$$

параметризованную положительно определенной матрицей $P \succ 0$ (знаки \succ , \prec , \succeq и \preceq означают положительную и отрицательную определенность и полуопределенность соответственно) и неотрицательным числом $\alpha \geq 0$. Разложение нелинейного слагаемого с множителем α в ряд Тейлора в выражении (3.34) начинается с членов третьего порядка и служит поправкой к квадратичной форме для лучшего учета нелинейных свойств системы (3.32).

Требование отрицательной определенности производной функции (3.34) в силу системы (3.32) при всевозможных значениях $\gamma_l(t)$, $l = 1, \dots, 4$, из интервалов (3.33) будет представлено в виде системы ЛМН (можно сказать одного ЛМН).

Производная функции (3.34) в силу системы (3.32) имеет вид

$$\begin{aligned}
 (3.35) \quad V' &= \zeta^T P \Psi(\gamma) \zeta + \\
 &+ \alpha \left[\sin \zeta_1 \zeta_2 + \frac{\beta \zeta_2}{1 + \zeta_2^2} \left(-\frac{1 + \zeta_2^2}{\beta} \sin \zeta_1 - 2k\gamma_3 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 y + (k\gamma_3 - 2\lambda\gamma_2) z \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \zeta_1 \zeta_2 - \beta \zeta_2 \left(-\frac{1 + \zeta_2^2}{\beta} \sin \zeta_1 - 2k\gamma_3 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 y + (k\gamma_3 - 2\lambda\gamma_2) z \right) \right] = \\
 &= \zeta^T \Psi(\gamma) P \zeta + \\
 &+ \alpha \left[\zeta_2 (-2k\gamma_3 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 y + (k\gamma_3 - 2\lambda\gamma_2) z) \left(\frac{1}{1 + \zeta_2^2} - 1 \right) \beta - \zeta_1 \zeta_2 \gamma_4 \right] = \\
 &= \zeta^T \Psi(\gamma) P \zeta + \alpha [\zeta_2 (-2k\gamma_3 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 y + (k\gamma_3 - 2\lambda\gamma_2) z) \gamma_0 \beta - \zeta_1 \zeta_2 \gamma_4],
 \end{aligned}$$

где

$$(3.36) \quad \gamma_0 = -\frac{\zeta_2^2}{1 + \zeta_2^2} \in \left[-\frac{\omega_0^2}{1 + \omega_0^2}, 0 \right].$$

Окончательно, определив

$$\begin{aligned}
 (3.37) \quad \gamma_5 &= \gamma_0 \gamma_2 \in \left[-\frac{\omega_0^2(2 + \beta)}{\beta(1 + \omega_0^2)}, 0 \right], \\
 \gamma_6 &= \gamma_0 \gamma_3 \in \left[-\frac{\omega_0^2(2 + \beta)}{\beta(1 + \omega_0^2)}, 0 \right],
 \end{aligned}$$

запишем

$$(3.38) \quad V' = \zeta^T \Psi(\gamma) P \zeta + \alpha [\zeta_2 (-2k\gamma_6 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 y + (k\gamma_6 - 2\lambda\gamma_5) z) \beta - \zeta_1 \zeta_2 \gamma_4].$$

Приняв во внимание, что в соответствии с выражениями (3.31) величины γ_2 и γ_3 принимают максимальные значения одновременно, то получаем, что и

величины γ_5 и γ_6 принимают минимальные значения $-\frac{\omega_0^2(2+\beta)}{\beta(1+\omega_0^2)}$ и максимальные значения 0 одновременно. Тогда в выражении (3.38) достаточно оставить одно значение γ_5 и записать

$$(3.39) \quad V' = \zeta^T \Psi(\gamma) P \zeta + \alpha [\zeta_2 (-2k\gamma_5 \zeta_2 - \lambda^2 \gamma_2 y + (k - 2\lambda)\gamma_5 z) \beta - \zeta_1 \zeta_2 \gamma_4].$$

В следующем разделе перепишем условие $V' < 0$ на языке ЛМН.

4. Оценка области притяжения нулевого положения равновесия

Выражение для функции Ляпунова (3.34) представим в виде

$$(4.1) \quad V(\zeta) = \frac{1}{2} \zeta^T Q(\alpha) \zeta + \alpha \left[1 - \cos \varphi + \frac{\beta}{2} \ln(1 + \omega^2) \right] \geq \frac{1}{2} \zeta^T Q(\alpha) \zeta,$$

где через $Q(\alpha)$ обозначена матрица

$$(4.2) \quad Q(\alpha) = P - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Потребуем выполнение неравенства

$$Q(\alpha) \succeq \varepsilon I,$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, получаем из (4.1), что функция $V(\zeta)$ положительно определена. Далее, выражение (3.39) для V' аффинно зависит от произвольно меняющихся параметров γ_l , $l = 1, \dots, 5$, каждый из которых принимает значения из отрезка. При этом вектор γ принимает значения из декартова произведения пяти отрезков. Это множество выпукло и имеет 32 крайние точки. Поэтому условие $V' < 0$ эквивалентно системе из тридцати двух ЛМН, получающихся приравниванием в выражении (3.39) значений произвольно меняющихся параметров γ_l , $l = 1, \dots, 5$, своим минимальным и максимальным значениям в отрезках (3.33) и (3.37). Для всевозможных $\gamma^i \in R^5$, $i = 1, \dots, 32$, получим систему ЛМН (одно ЛМН большой размерности)

$$(4.3) \quad P \Psi(\gamma^i) + \Psi^T(\gamma^i) P - \alpha Y(\gamma^i) \preceq 0,$$

где

$$Y(\gamma^i) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_4^i & 0 & 0 \\ \gamma_4^i & 4k\beta\gamma_5^i & \beta\lambda^2\gamma_2^i & \beta(2\lambda - k)\gamma_5^i \\ 0 & \beta\lambda^2\gamma_2^i & 0 & 0 \\ 0 & \beta(2\lambda - k)\gamma_5^i & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так, построенная система ЛМН может оказаться несовместной при заданных значениях φ_0 и ω_0 . Введем в рассмотрение параметр $a \in [0, 1]$ и выберем в качестве φ_0 и ω_0 величины

$$\varphi_0(a) = a\pi, \quad \omega_0(a) = a\bar{\omega},$$

где $\bar{\omega}$ определено выражением (3.19). Каждому значению $\varphi_0(a), \omega_0(a)$ отвечают значения границ интервалов (3.33) и (3.37) и, следовательно, 32 вектора $\gamma^i(a)$. Из выражений для границ интервалов видно, что векторы $\gamma^i(a)$ непрерывно зависят от a . При $a = 0$ нижние и верхние границы интервалов совпадают. Поэтому при $a = 0$ имеем

$$\gamma^i(0) \doteq \gamma^0 = \left[1, \frac{2+\beta}{\beta}, \frac{2+\beta}{\beta}, 0, 0 \right]^T.$$

Далее, $\Psi(\gamma^0) = \Phi_{k\zeta}$ в силу выражений для матриц (3.23), (3.30). Тогда теорема 2 гарантирует совместность системы ЛМН (4.3) при выполнении неравенств (3.27) и (3.28) для достаточно малых значений $a > 0$.

Пусть a^* — это точная верхняя грань тех a , при которых система ЛМН относительно переменных P и α

$$(4.4) \quad \begin{aligned} P\Psi(\gamma^i(a)) + \Psi^T(\gamma^i(a))P - \alpha Y(\gamma^i(a)) &\leq 0, \\ Q(\alpha) &\succeq \varepsilon I, \\ \text{tr}(Q(\alpha)) &= 1 \end{aligned}$$

совместна. Последнее линейное уравнение, приравнивающее след $Q(\alpha)$ единице, добавлено для нормировки решения, поскольку в противном случае множество решений ЛМН образовывало бы конус и вместе с любым решением P и α решением будет также σP и $\sigma \alpha$ при любых $\sigma > 0$, включая как угодно большие и как угодно малые значения.

Величина a^* получается последовательной проверкой совместности (4.4) для возрастающей последовательности значений a .

Итак, при выполнении предположения 1, где $\varphi_0 = a^*\pi$ и $\omega_0 = a^*\bar{\omega}$, функция Ляпунова (3.34) имеет отрицательно определенную производную в силу системы (3.30). Поэтому если удастся подобрать такую константу $c > 0$, что множество

$$(4.5) \quad \Omega_c = \{\zeta : V(\zeta) \leq c\}$$

окажется вписано внутрь множества

$$(4.6) \quad \Pi_0 = \{\zeta : |\varphi| \leq \varphi_0, |\omega| \leq \omega_0\},$$

то любая траектория замкнутой системы (3.30), начатая внутри множества Ω_c , остается внутри этого множества для любых моментов времени в силу отрицательности производной V' . В результате при выполнении

$$(4.7) \quad \Omega_c \subset \Pi_0$$

предположение 1 будет выполняться вдоль всей траектории замкнутой системы (3.30), начавшейся изнутри множества Ω_c . Таким образом, доказана

Теорема 4. Пусть выполнены условия (3.27) и (3.28), величина a^ выбрана как точная верхняя грань тех a , при которых ЛМН (4.4) совместно. Тогда если константа c выбрана таким образом, что выполняется условие (4.7), то множество Ω_c является областью асимптотической устойчивости системы (2.12), замкнутой управлением (3.21).*

Для практического использования теоремы 4 необходимо указать способ нахождения константы c , обеспечивающей выполнение (4.7). Более того, желательно найти наибольшее значение такой константы. Очевидно, что при наибольших значениях c граница множества Ω_c будет касаться плоскостей $\varphi = \pm\varphi_0$ или $\omega = \pm\omega_0$. Определим значение c_1 , при котором множество Ω_c (очевидно, центрально симметричное) касается плоскостей $\varphi = \pm\varphi_0$. Возьмем для определенности случай $\varphi = \varphi_0$. Обозначим через e_1 единичный вектор $(1, 0, 0, 0)^T$. В точке касания ζ градиент функции $V(\zeta)$ коллинеарен вектору e_1 и выполняется условие $\zeta^T e_1 = \zeta_1 = \varphi_0$. Другими словами, в точке касания выполняется система нелинейных уравнений

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \lambda_1 e_1 &= 0, \\ \zeta_1 - \varphi_0(a^*) &= 0, \end{aligned}$$

где λ_1 — это неизвестный множитель. Решение этой системы ζ_1^*, λ_1^* , получается, например, применением метода Ньютона. Если оказалось, что $\varphi_0(a^*) \leq \pi/2$, то, как легко показать, точка касания определяется единственным образом в силу выпуклости функции $V(\zeta)$ при $|\varphi| \leq \pi/2$. В противном случае, если $\varphi_0(a^*) > \pi/2$, то потребуются дополнительный анализ решений системы (4.8), который в данной работе не рассматривается. Окончательно,

$$c_1 = V(\zeta_1^*).$$

Аналогично получается

$$c_2 = V(\zeta_2^*)$$

после решения системы уравнений

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \lambda_2 e_2 &= 0, \\ \zeta_2 - \omega_0(a^*) &= 0, \end{aligned}$$

где $e_2 = (0, 1, 0, 0)^T$. Окончательно,

$$(4.10) \quad c = \min\{c_1, c_2\}.$$

Результаты вычислительных экспериментов приведены в разделе 6.

5. Синтез управления, обеспечивающего глобальную стабилизацию

Рассмотрим частную задачу стабилизации вертикального положения маятника, не обращая внимания на положение колеса. Рассматривая первые два уравнения в (2.12), зависящие от переменных φ, ω и управления u , как независимую систему, предположим, что нужно стабилизировать величину отклонения угла φ от вертикали на уровне $\varphi = \bar{\varphi}$. Стабилизирующее управление легко получается применением любого метода синтеза для системы с одним входом и одним выходом, см. [3]. Воспользуемся, например, методом линеаризации обратной связью. Выбрав в качестве выхода системы $y = \varphi - \bar{\varphi}$, продифференцируем его столько раз, сколько потребуется для получения явной зависимости очередной производной от управления. Взяв первые две производные y , получим с учетом двух уравнений (2.12)

$$(5.1) \quad y' = \omega, \quad y'' = f_1(z) + uh_1(z).$$

Для того чтобы обеспечить экспоненциальную устойчивость по выходу с заранее заданной скоростью убывания, подчиним динамику изменения y дифференциальному уравнению (3.6). Подставив (5.1) в (3.6) и разрешив его относительно u , получим выражение для закона управления

$$(5.2) \quad u = -\frac{d\lambda^2(\varphi - \bar{\varphi}) + 2d\lambda\omega + \sin\varphi[-\cos\varphi\omega^2 + (1 + \beta)]}{1 + \beta + \cos\varphi}.$$

Под действием управления (5.2) переменная φ будет асимптотически приближаться к значению $\bar{\varphi}$, а переменная ω будет стремиться к 0 со скоростью порядка $e^{-\lambda\tau}$. Более того, в силу (3.6) получим $\omega' \rightarrow 0$. В пределе при $\tau \rightarrow \infty$ получим из второго уравнения (2.12) следующее выражение

$$0 = \frac{\sin\bar{\varphi}}{\bar{d}}(1 + \beta) + \frac{\bar{u}}{\bar{d}}(\cos\bar{\varphi} + 1 + \beta), \quad \bar{d} = \beta + \sin^2\bar{\varphi},$$

и для асимптотического значения управления \bar{u} имеем

$$(5.3) \quad \bar{u} = -\frac{\sin\bar{\varphi}(1 + \beta)}{1 + \beta + \cos\bar{\varphi}}.$$

Это же выражение получается из (5.2) при подстановке $\varphi = \bar{\varphi}$, $\omega = 0$. Подставив выражение (5.3) в четвертое уравнение (2.12), получим

$$\delta' = \frac{\sin\bar{\varphi}}{\bar{d}}(-\cos\bar{\varphi}) - \frac{1 + \cos\bar{\varphi}}{\bar{d}} \left[-\frac{\sin\bar{\varphi}(1 + \beta)}{1 + \beta + \cos\bar{\varphi}} \right],$$

откуда после упрощения получаем

$$(5.4) \quad \delta' = \frac{\sin\bar{\varphi}}{1 + \beta + \cos\bar{\varphi}} = -\frac{\bar{u}}{1 + \beta}.$$

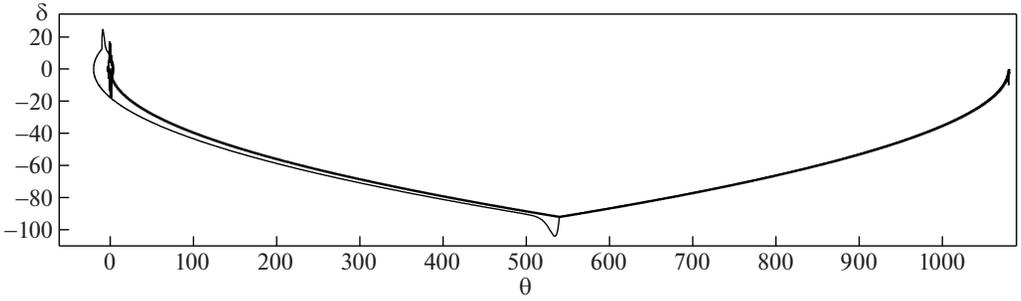


Рис. 5. Тонкой линией изображена траектория системы (2.12) в координатах θ, δ под действием управления (5.2), (5.6) при величине $\bar{\varphi} = 2^\circ$ и начальных условиях $\varphi = -5^\circ, \theta = 1080^\circ, \omega = \delta = 0$. В данном примере $\beta = 3$ и в (5.2) $\lambda = 10$. Для сравнения жирной линией изображена оптимальная траектория системы (5.5) при управлении (5.6).

После стабилизации угла отклонения маятника на уровне $\bar{\varphi}$ колесо движется с постоянным угловым ускорением (5.4). Уравнение (5.4) описывает движение системы второго порядка

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \theta' &= \delta, \\ \delta' &= w. \end{aligned}$$

Будем считать, что управление w принимает постоянные значения $\pm\bar{w}$, связанные с углом $\bar{\varphi} > 0$ выражением

$$\bar{w} = \frac{\sin \bar{\varphi}}{1 + \beta + \cos \bar{\varphi}}.$$

Поставим задачу перевода состояния системы (5.5) из начального положения θ_0, δ_0 в начало координат с помощью кусочно-постоянных управлений, принимающих значения $\pm\bar{w}$. Воспользуемся методом синтеза оптимального по быстродействию управления для системы (5.5), см. [17],

$$(5.6) \quad w(\theta, \delta) = \begin{cases} -\bar{w} & \text{при } \theta < 0, \delta \geq \sqrt{-2\bar{w}\theta} \\ & \text{или } \theta \geq 0, \delta > -\sqrt{2\bar{w}\theta}, \\ \bar{w} & \text{при } \theta > 0, \delta \leq -\sqrt{2\bar{w}\theta} \\ & \text{или } \theta \leq 0, \delta < \sqrt{-2\bar{w}\theta} \end{cases}$$

для управления движением системы (2.12) при больших начальных отклонениях $\xi = \theta l$. В качестве управления будем использовать (5.2), где вместо величины $\bar{\varphi} > 0$ используется величина $\pm\bar{\varphi}$ в зависимости от знака кусочно-постоянного управления $w(\theta, \delta)$ в (5.6). Пример применения этого закона управления приведен на рис. 5. Далее на всех рисунках угловые переменные будут представлены в градусах.

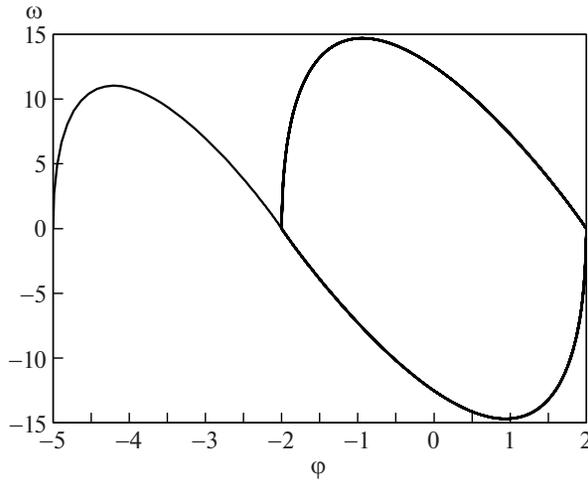


Рис. 6. Траектория системы (2.12) в координатах φ , ω .

Оптимальная траектория системы (5.5), замкнутой управлением (5.6), имеет одну точку переключения при выходе на линию переключения $\delta = \sqrt{-2\bar{w}\theta}$. С другой стороны, видно, что закон управления (5.2), (5.6) переводит траекторию системы θ , δ в некоторую окрестность начала координат, но не стабилизирует в нуле. Переменные θ , δ совершают колебания в окрестности нуля. Колебания вызваны тем, что величина угла φ не может быть установлена равной $\pm\bar{\varphi}$ мгновенно, поскольку система (5.1), замкнутая управлением (5.2), имеет некоторое время переходного процесса, какой бы большой ни была величина λ . На рис. 6 показана траектория замкнутой системы по переменным φ , ω . Видно, что эти переменные колеблются в окрестности 0.

Таким образом, синтез управления системой (2.12) разбивается на два этапа.

1. Сначала, управляя знаком угла $\bar{\varphi}$ в законе управления (5.2) в зависимости от знака кусочно-постоянного управления $w(\theta, \delta)$ в (5.6), состояние системы (2.12) приводится в окрестность нулевого состояния равновесия. Метод построения этой окрестности описан в разделе 4.
2. Внутри указанной окрестности происходит переключение на закон управления, описанный в разделе 3.

Основная цель данной работы состоит в синтезе закона управления второго этапа. Описанный выше метод приведения состояния системы в область притяжения дан без строгого доказательства, поскольку является предметом отдельной работы.

6. Пример

Рассмотрим пример, отвечающий значению $\beta = 3$. Параметры закона управления (3.21) выбраны удовлетворяющими условиям (3.27) и (3.28) и

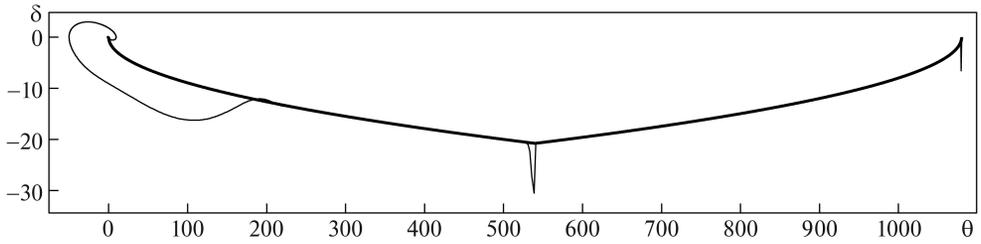


Рис. 7. Тонкой линией изображена траектория системы (2.12), замкнутой комбинированным законом управления при величине $\bar{\varphi} = 2^\circ$ и начальных условиях $\varphi = -5^\circ, \theta = 1080^\circ, \omega = \delta = 0$. Жирной линией изображена оптимальная траектория системы (5.5) при управлении (5.6).

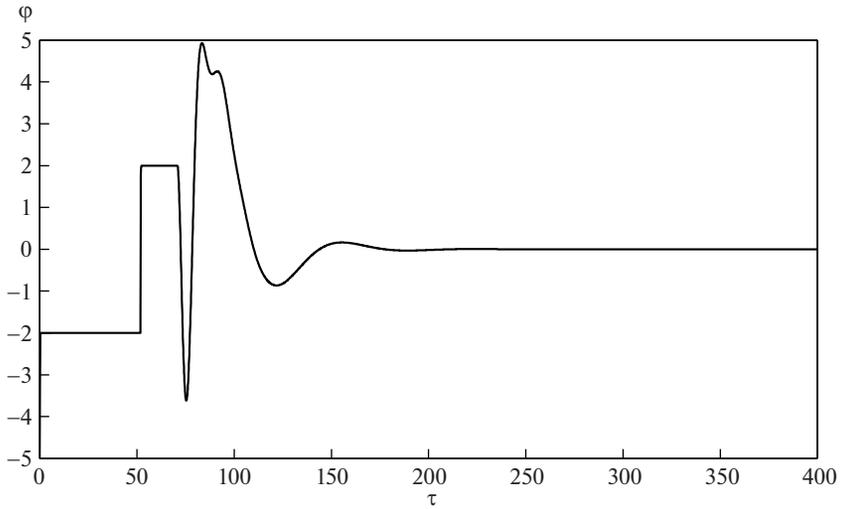


Рис. 8. График изменения переменной φ .

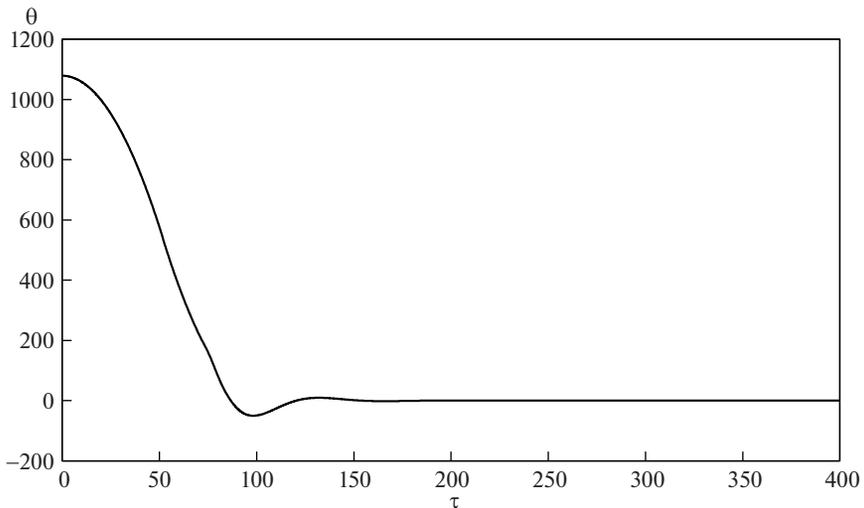


Рис. 9. График изменения переменной θ .

равными $\lambda = 0,1$ и $k = 0,1$. В результате применения теоремы 4 получены следующие параметры функции (3.34):

$$P = \begin{bmatrix} 0,105 & 0,012 & 0,013 & 0,183 \\ 0,012 & 0,225 & -0,005 & 0,046 \\ 0,013 & -0,005 & 0,010 & 0,035 \\ 0,183 & 0,046 & 0,035 & 0,906 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 0,062,$$

достигнутые при $a^* = 0,53$ и $c = 0,066$.

На рис. 7 приведена траектория замкнутой системы в координатах θ (ось абсцисс) и δ (ось ординат). В качестве управления применен комбинированный закон. Если состояние системы не попадает в область притяжения Ω_c , то применяется управление, описанное в разделе 5. Критерием пересечения границы области Ω_c является выполнение условия $V(\zeta^*) = 0,066$, которое для данного примера и данных начальных условий случается при $\zeta^* = (2; -0,18; 212,14; -13,13)^T$. Компоненты вектора показаны в градусах для угловых переменных и градусах в секунду для угловых скоростей. После попадания в область Ω_c происходит переключение на закон управления (3.21).

Графики углов φ и θ приведены на рис. 8 и 9.

7. Заключение

В работе рассмотрена задача стабилизации вертикального положения перевернутого маятника, закрепленного на колесе. Предложен закон управления, одновременно стабилизирующий угол отклонения маятника от вертикали и угол поворота колеса. Задача решается методом линеаризации обратной связью по выходу с последующим добавлением слагаемого, обеспечивающего диссипацию полной энергии системы. Дается оценка области притяжения нулевого положения равновесия в четырехмерном фазовом пространстве. Для построения оценки использована функция Ляпунова, состоящая из квадратичной части и нелинейной добавки.

Рассмотрены вопросы глобальной стабилизации, когда начальное положение центра колеса может быть как угодно далеко от целевого.

Приведен численный пример.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Из условия асимптотической стабилизации по выходу y и (3.6) следует также $y'(\tau) \rightarrow 0$. Тогда из условия (3.8) следует $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \delta(\tau) = 0$, и угловые переменные стремятся к постоянным значениям

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = \hat{\varphi}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \theta(\tau) = \hat{\theta}.$$

Поскольку закон управления $u(x)$ непрерывен по совокупности своих аргументов в точке $\hat{x} = (\hat{\varphi}, 0, \hat{\theta}, 0)^T$, то имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} u(x(\tau)) = \hat{u}.$$

Переходя к пределу при $\tau \rightarrow \infty$, получаем из выражений (2.12), (2.13), что выполняются равенства

$$\begin{aligned} \text{(П.1)} \quad 0 &= \sin \hat{\varphi}(1 + \beta) + \hat{u}(\cos \hat{\varphi} + 1 + \beta), \\ 0 &= -\sin \hat{\varphi} \cos \hat{\varphi} - \hat{u}(\cos \hat{\varphi} + 1). \end{aligned}$$

Если $\cos \hat{\varphi} = 0$, то из второго равенства (П.1) получим $\hat{u} = 0$. Если предположить, что $\cos \hat{\varphi} \neq 0$, то, умножив первое равенство (П.1) на $\cos \hat{\varphi}$, а второе на $(1 + \beta)$ и сложив, получаем

$$\text{(П.2)} \quad (\cos^2 \hat{\varphi} - 1 - \beta)\hat{u} = 0.$$

Поскольку $\cos^2 \hat{\varphi} - 1 - \beta = -\beta - \sin^2 \hat{\varphi} \neq 0$, то из условия (П.2) опять получаем $\hat{u} = 0$. Тогда в силу первого равенства (П.1) имеем $\sin \hat{\varphi} = 0$ и в силу предположения $1 + \hat{\varphi} = 0$. Поскольку по условиям леммы имеем также $y(\tau) = \varphi(\tau) + \theta(\tau) \rightarrow 0$, то $\hat{\theta} = 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Заметим прежде всего, что функция $V(\varphi, \omega)$, заданная выражением (3.18), непрерывна и положительно определена в окрестности 0. Поэтому для достаточно малых φ, ω выполняется оценка

$$\text{(П.3)} \quad \mu_1 \leq \frac{V(\varphi, \omega)}{\varphi^2 + \omega^2} \leq \mu_2$$

для некоторых положительных μ_1 и μ_2 .

Решение системы (3.29) при $k = 0$ по переменным y, z имеет вид

$$\begin{aligned} \text{(П.4)} \quad y(\tau) &= e^{-\lambda\tau} (y_0 + \tau(\lambda y_0 + z_0)), \\ z(\tau) &= e^{-\lambda\tau} (z_0 - \lambda\tau(\lambda y_0 + z_0)), \end{aligned}$$

и

$$\text{(П.5)} \quad \lambda^2 y(\tau) + 2\lambda z(\tau) = e^{-\lambda\tau} [(\lambda^2 y_0 + 2\lambda z_0) - \tau(\lambda^3 y_0 + \lambda^2 z_0)] \doteq e^{-\lambda\tau} [p + \tau q],$$

где $p = (\lambda^2 y_0 + 2\lambda z_0)$, $q = -(\lambda^3 y_0 + \lambda^2 z_0)$.

Для производной функции (3.18) в силу системы (3.29) при $k = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \text{(П.6)} \quad V' &= -\frac{\omega}{1 + \omega^2} e^{-\lambda\tau} (p + \tau q) \frac{1 + \beta + \cos \varphi}{\beta} \leq \\ &\leq \frac{|\omega|}{1 + \omega^2} \left| e^{-\lambda\tau} (p + \tau q) \right| \frac{\beta + 2}{\beta}. \end{aligned}$$

Для функции $\gamma(\omega) = \frac{|\omega|}{1+\omega^2}$ справедлива оценка

$$\gamma(\omega) \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда для $0 < \mu < \lambda$, достаточно близкого к λ , найдется такая функция $\alpha(y_0, z_0)$, непрерывно зависящая от своих аргументов и удовлетворяющая условию $\alpha(0, 0) = 0$, что из (П.6) следует оценка

$$(П.7) \quad V' \leq \frac{\beta + 2}{2\beta} e^{-\mu\tau} \alpha(y_0, z_0).$$

Интегрируя обе части (П.7) по τ , получим

$$(П.8) \quad \begin{aligned} V(\varphi(\tau), \omega(\tau)) &\leq V(\varphi_0, \omega_0) + \frac{\beta + 2}{2\beta\mu} (1 - e^{-\mu\tau}) \alpha(\zeta_0) \\ &\leq V(\varphi_0, \omega_0) + \frac{\beta + 2}{2\beta\mu} \alpha(y_0, z_0) \doteq \nu(\zeta_0), \end{aligned}$$

где $\zeta_0 = (\varphi_0, \omega_0, y_0, z_0)^T$ и функция $\nu(\zeta_0)$ непрерывно зависит от ζ_0 и удовлетворяет условию $\nu(0) = 0$. Тогда для любого достаточно малого $\epsilon > 0$ найдется такое малое $\Delta > 0$, что из условия $\|\zeta_0\|^2 < \Delta^2$ следует $V(\varphi(t), \omega(t)) < \epsilon^2/4$. Условие $y(\tau) \rightarrow 0, z(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ гарантирует, что найдется такое малое $\Delta_1 > 0$, что из условия $y_0^2 + z_0^2 < \Delta_1^2$ следует $y(\tau)^2 + z(\tau)^2 < \epsilon^2/4$. Тогда, определив $V_1(\zeta) = \frac{V(\varphi, \omega)}{\mu_1} + y^2 + z^2 > 0$, получим с использованием (П.3), что $\|\zeta(\tau)\| < \epsilon$ при $\|\zeta_0\| < \min\{\Delta, \Delta_1\}$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Управляемый маятник на подвижном основании // Механика твердого тела. 2013. № 1. С. 9–23.
2. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012.
3. Халил Х.К. Нелинейные системы. Москва-Ижевск: ИКИ-РХД, 2009.
4. Ткачев С.Б. Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем с использованием линеаризации по части переменных. Наука и образование. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. № 11. С. 1–29.
5. Utkin V.I., Guldner J., Shi J. Sliding mode control in electro-mechanical systems. CRC Press. 2009.
6. Jung-Su Ha, Ju-Jang Lee. Position Control of Mobile Two Wheeled Inverted Pendulum Robot by Sliding Mode Control // Proceedings of 12th International Conference on Control, Automation and Systems. 2012. P. 715–719.
7. Zhijun Li, Chenguang Yang, Liping Fan. Advanced Control of Wheeled Inverted Pendulum Systems. Springer, 2013.
8. Пестерев А.В., Морозов Ю.В. Стабилизация тележки с перевернутым маятником // АиТ. 2022. № 1. С. 95–112.

9. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V., Matrosov I.V.* On optimal selection of coefficients of a controller in the point stabilization problem for a robot-wheel // Commun. Comput. Inf. Sci. (CCIS). 2020. V. 1340. P. 236–249.
10. *Teel A.R.* A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation // Trans. Autom. Contr. IEEE. 1996. V. 41. No. 9. P. 1256–1270.
11. *Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Оптимальный по быстродействию синтез управления нелинейным маятником // Известия РАН. ТИСУ. 2007. № 1. С. 13–22.
12. *Srinivasan B., Huguenin P., Bonvin D.* Global stabilization of an inverted pendulum. Control strategy and experimental verification // Automatica. 2009. V. 45. P. 265–269.
13. *Gordillo F., Aracil J.* A new controller for the inverted pendulum on a cart // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2008. No. 18. P. 1607–1621.
14. *Неймарк Ю.И.* Математическое моделирование как наука и искусство. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. университета, 2010.
15. <https://wxMaxima-developers.github.io/wxmaxima/>.
16. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. Москва: URSS, 2019.
17. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд. Москва–М.: Наука, 1983.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 14.02.2022

После доработки 13.04.2022

Принята к публикации 28.04.2022

© 2022 г. Э.М. СОЛНЕЧНЫЙ, д-р физ.-мат. наук (solnechn@ipu.ru),
Л.А. ЧЕРЁМУШКИНА, канд. биол. наук (cheremushkina_l@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ПРИ ДВИЖУЩЕМСЯ ИСТОЧНИКЕ НАГРЕВА

Для одномерной системы теплопередачи с движущимся источником тепла вычисляются передаточные и импульсные переходные функции температуры в системе по отношению к температурам внешней среды на границах системы, а также реакция температуры на поток тепла от движущегося источника нагрева. Размеры источника нагрева по сравнению с размерами системы считаются в работе пренебрежимо малыми, что делает естественным использование аппарата обобщенных функций.

Ключевые слова: система теплопередачи, движущийся источник потока тепла, передаточная функция, импульсная переходная функция.

DOI: 10.31857/S0005231022080025, EDN: AGGMGI

1. Введение

Использование движущихся источников тепла для нагрева слитков металла перед прокаткой встречается в металлургии наиболее часто. Поэтому математическое описание процессов нагрева технических объектов и методов управления ими как распределенной системой является весьма актуальной проблемой современности.

Естественным аппаратом для исследования динамики распределенных систем является теория дифференциальных систем уравнений с частными производными. Наиболее фундаментальные результаты в этой области приведены, в частности, в [1, 2].

Одной из конкретных технических областей исследования распределенных систем является исследование методов нагрева массивных тел с помощью движущихся источников тепла. В этой области хорошо известны работы сотрудников А.Г. Бутковского [3–6], разрабатывавших методы формирования температурных полей, необходимых для работы технических объектов, с помощью движущихся источников тепла.

Переходные процессы в распределенных системах исследуются, в частности, в [7].

В настоящей работе проводится исследование динамических свойств температуры в одномерной распределенной системе, подверженной влиянию температур внешней среды на границах и тепловому воздействию, производимому движущимся источником тепла. При этом размерами самого источника тепла в сравнении с размерами нагреваемого объекта считается возможным пренебречь, и поэтому используется известный аппарат δ -функций Дирака [8, гл. VI, § 1, п. 83]. В настоящей работе получены выражения для передаточных функций и импульсных переходных функций системы по отношению к температурам внешней среды на границах системы и ко внешнему потоку тепла.

2. Уравнение передачи тепла в одномерной теплопередающей среде с движущимся источником тепла

Закон сохранения тепловой энергии в одномерной теплопередающей среде выражается уравнением [9, гл. II, § 6]

$$(2.1) \quad c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + Q(x, t),$$

где t – время, $x \in [0, l]$ – пространственная координата, T – температура, Q – внешний поток тепла (на единицу длины), q – тепловой поток в сечении x , ρ – плотность вещества среды (на единицу длины), c – теплоемкость вещества среды.

Согласно закону Фурье [9, гл. II, § 6] тепловой поток q определяется соотношением

$$(2.2) \quad q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x},$$

где λ – коэффициент теплопроводности среды (считаем его постоянной величиной).

Тогда из (2.1) и (2.2) следует дифференциальное уравнение процесса нагрева:

$$(2.3) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Q(x, t)}{c\rho},$$

где $a^2 = \lambda/c\rho$ – коэффициент температуропроводности.

Считая источник тепла движущимся с постоянной скоростью v (на активном участке движения) и пренебрегая его размерами, вносимый им тепловой поток $Q(x, t)$ можем выразить с помощью δ -функции Дирака [8, гл. VI, § 1, п. 83], записав уравнение (2.3) условно в виде

$$(2.4) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + M \frac{\delta(t - x/v)}{c\rho},$$

где M – интенсивность источника тепла; она принимается постоянной величиной.

Граничные условия задаем в виде

$$(2.5) \quad T(0, t) = \mu_0(t), \quad T(l, t) = \mu_l(t),$$

где μ_0, μ_l – заданные функции времени.

3. Решение дифференциального уравнения процесса нагрева (в изображениях по Лапласу)

Введем обозначение $\theta(x, p)$ для изображения по Лапласу функции $T(x, \cdot)$:

$$\theta(x, p) = \int_0^{\infty} T(x, p) \exp(-pt) dt.$$

Теорема 1. Изображение по Лапласу уравнения (2.4) имеет вид

$$(3.1) \quad a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x, p) - p\theta(x, p) = -\frac{M}{c\rho} \exp\left(-p\frac{x}{v}\right),$$

и решение его при преобразованных по Лапласу граничных условиях (2.5) имеет вид

$$(3.2) \quad \theta(x, p) = \theta(0, p) \frac{\sinh((l-x)\sqrt{p}/a)}{\sinh(l\sqrt{p}/a)} + \theta(l, p) \frac{\sinh(x\sqrt{p}/a)}{\sinh(l\sqrt{p}/a)} + \\ + \frac{M}{c\rho} \frac{v^2}{p(v^2 - a^2p)} \left(\exp\left(-p\frac{x}{v}\right) - \right. \\ \left. - \frac{\sinh((l-x)\sqrt{p}/a)}{\sinh(l\sqrt{p}/a)} - \frac{\sinh(x\sqrt{p}/a)}{\sinh(l\sqrt{p}/a)} \exp\left(-\frac{pl}{v}\right) \right).$$

Доказательство теоремы 1 см. в Приложении 1.

4. Реакции температуры в системе на входные воздействия

Теорема 2. Реакция температуры $T(x, \cdot)$ на граничное воздействие μ_α ($\alpha = 0, l$) определяется сверткой [8, гл. VI, § 1, п. 81] функций μ_α и импульсной переходной функции [1, гл. 2, § 8] $w_\alpha(x, \cdot)$ по каналу $\mu_\alpha \rightarrow T(x, \cdot)$:

$$(4.1) \quad (\mu_\alpha * w_\alpha(x, \cdot))(t) = \int_0^t \mu_\alpha(\tau) w_\alpha(x, t - \tau) d\tau.$$

Функция w_α вычисляется как сумма ряда

$$(4.2) \quad w_\alpha(x, t) = s(t) \sum_{n=1}^{\infty} b_{\alpha n}(x) \exp(p_n t),$$

где

$$b_{\alpha n}(x) = 2(-1)^{n+1} \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \pi n \sin\left(\frac{\xi_\alpha(x)}{l} \pi n\right),$$

$$\xi_0(x) = l - x, \quad \xi_l(x) = x, \quad s(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 2 см. в Приложении 2.

Теорема 3. Реакция $T_M(x, \cdot)$ температуры $T(x, \cdot)$ в системе на тепловое воздействие движущегося источника нагрева вычисляется следующим образом:

$$(4.3) \quad T_M(x, t) = \frac{M}{c\rho} \sum_{j=1}^3 R_j(x, t),$$

где

$$R_1(x, t) = s\left(t - \frac{x}{v}\right) \left(1 - \exp\left(\left(\frac{v}{a}\right)^2 \left(t - \frac{x}{v}\right)\right)\right),$$

$$R_2(x, t) = s(t) \left(r_{20}(x) + r_{2v}(x) \exp\left(\left(\frac{v}{a}\right)^2 t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} r_{2n}(x) \exp(p_n t)\right),$$

$$r_{20}(x) = -\frac{l-x}{l}, \quad r_{2v}(x) = \frac{\sinh((l-x)v/a^2)}{\sinh(lv/a^2)},$$

$$r_{2n}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi n} \frac{(lv)^2 \sin(\pi n(l-x)/l)}{a^4(\pi n)^2 + (lv)^2};$$

$$R_3(x, t) = s\left(t - \frac{l}{v}\right) \left(r_{30}(x) + r_{3v}(x) \exp\left(\left(\frac{v}{a}\right)^2 \left(t - \frac{l}{v}\right)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} r_{3n}(x) \exp\left(p_n \left(t - \frac{l}{v}\right)\right)\right);$$

$$r_{30}(x) = -\frac{x}{l}, \quad r_{3v}(x) = \frac{\sinh(xv/a^2)}{\sinh(lv/a^2)}, \quad r_{3n}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi n} \frac{(lv)^2 \sin(\pi nx/l)}{a^4(\pi n)^2 + (lv)^2}.$$

Доказательство теоремы 3 см. в Приложении 3.

Так как преобразование δ -функции по Лапласу, сдвинутой вправо на $\frac{x}{v}$, имеет вид [8, гл. VI, § 1, п. 83]

$$(П.1.1) \quad \int_0^{\infty} \delta\left(t - \frac{x}{v}\right) \exp(-pt) dt = \exp\left(-p\frac{x}{v}\right),$$

преобразование по Лапласу уравнения (2.4) имеет вид

$$(П.1.2) \quad a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x, p) - p\theta(x, p) = -\frac{M}{c\rho} \exp\left(-p\frac{x}{v}\right).$$

Как легко проверить, фундаментальную систему решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (П.1.2), могут составить гиперболические функции $\cosh(x\sqrt{p}/a)$ и $\sinh(x\sqrt{p}/a)$. Общее решение этого однородного уравнения можно представить в виде $A(p) \cosh\left(\frac{x}{a}\sqrt{p}\right) + B(p) \sinh\left(\frac{x}{a}\sqrt{p}\right)$, где A и B – произвольные функции от p . Частное же решение уравнения (П.1.2) ищем в виде

$$(П.1.3) \quad \varphi(x, p) = C(p) \frac{M}{c\rho} \exp\left(-p\frac{x}{v}\right),$$

где функция C определяется из условия удовлетворения функции $\varphi(x, p)$ уравнению (П.1.2). Так как $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x, p) = C(p) \frac{M}{c\rho} \left(\frac{p}{v}\right)^2 \exp\left(-p\frac{x}{v}\right)$, подстановка функции φ в (П.1.2) приводит к равенству

$$a^2 C(p) \frac{M}{c\rho} \left(\frac{p}{v}\right)^2 \exp\left(-p\frac{x}{v}\right) - p C(p) \frac{M}{c\rho} \exp\left(-p\frac{x}{v}\right) = -\frac{M}{c\rho} \exp\left(-p\frac{x}{v}\right),$$

из которого определяется функция C :

$$(П.1.4) \quad C(p) = -\frac{1}{a^2(p/v)^2 - p} = \frac{v^2}{p(v^2 - a^2p)}.$$

Таким образом, $\varphi(x, p) = \frac{M v^2 \exp(-px/v)}{c\rho p(v^2 - a^2p)}$, и общее решение системы (3.1) имеет вид

$$(П.1.5) \quad \theta(x, p) = A(p) \cosh\left(\frac{x}{a}\sqrt{p}\right) + B(p) \sinh\left(\frac{x}{a}\sqrt{p}\right) + \frac{M \exp(-px/v)}{c\rho p(v^2 - a^2p)}.$$

Функции A и B определяются с помощью граничных условий (2.5):

$$(П.1.6) \quad A(p) = \theta(0, p) - \frac{M}{c\rho} \frac{v^2}{p(v^2 - a^2p)},$$

$$(П.1.7) \quad B(p) = \frac{1}{\sinh(l\sqrt{p}/a)} \left[\theta(l, p) - \theta(0, p) \cosh\left(\frac{l\sqrt{p}}{a}\right) + \frac{M}{c\rho} \frac{v^2}{p(v^2 - a^2p)} \left(\cosh\left(\frac{l\sqrt{p}}{a}\right) - \exp\left(-\frac{pl}{v}\right) \right) \right].$$

Таким образом, решение уравнения (П.1.2), соответствующее граничным условиям (2.5), имеет вид

$$(П.1.8) \quad \theta(x, p) = \theta(0, p) \left[\cosh\frac{x\sqrt{p}}{a} - \coth\frac{l\sqrt{p}}{a} \sinh\frac{x\sqrt{p}}{a} \right] + \theta(l, p) \frac{\sinh(x\sqrt{p}/a)}{\sinh(l\sqrt{p}/a)} + \frac{Mv^2}{c\rho p(v^2 - a^2p)} \left[\exp\left(-\frac{px}{v}\right) - \cosh\frac{x\sqrt{p}}{a} + \frac{\sinh(x\sqrt{p}/a)}{\sinh(l\sqrt{p}/a)} \left(\cosh\frac{l\sqrt{p}}{a} - \exp\left(-\frac{pl}{v}\right) \right) \right].$$

В силу соотношения между гиперболическими функциями

$$\sinh(l\sqrt{p}/a) \cosh(x\sqrt{p}/a) - \cosh(l\sqrt{p}/a) \sinh(x\sqrt{p}/a) = \sinh((l-x)\sqrt{p}/a)$$

[10, п.2.5.2.3.3] получаем выражение (3.2) для решения уравнения (3.1), приведенное в формулировке теоремы 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Импульсная переходная функция оператора $\mu_\alpha \rightarrow T(x, \cdot)$ ($\alpha = 0, l$) определяется как оригинал передаточной функции (см. (3.2))

$$(П.2.1) \quad W_\alpha(x, p) = \frac{\sinh(\xi_\alpha(x)\sqrt{p}/a)}{\sinh(l\sqrt{p}/a)}, \quad \text{где } \xi_0(x) = l - x, \quad \xi_l(x) = x.$$

Функция $\sinh(l\sqrt{p}/a)$ имеет нули вида $p_n = -(a\pi n/l)^2$ ($n \geq 0$).

Построим *правильную* [8, гл. V, § 1, п. 71] систему $\{\mathbf{L}_n, n \geq 0\}$ контуров в виде окружностей с центром в нуле комплексной плоскости \mathbf{C} . Так как $W_\alpha(x, 0) = \xi_\alpha(x)/l$ и значения функций $W_\alpha(x, \cdot)$ на контурах \mathbf{L}_n стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, то, согласно теореме Коши [8, гл. V, § 1, п. 71], эти функции могут быть представлены суммами сходящихся рядов, составленных из главных частей этих функций в полюсах p_n ($n \geq 1$):

$$(П.2.2) \quad W_\alpha(x, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{\alpha n}(x)}{p - p_n},$$

где

$$\begin{aligned} b_{\alpha n}(x) &= \operatorname{res}_{p_n} W_\alpha(x, \cdot) = 2\frac{a}{l} \sqrt{p_n} \frac{\sinh(\xi_\alpha(x)\sqrt{p_n}/a)}{\cosh(l\sqrt{p_n}/a)} = \\ &= 2(-1)^{n+1} \left(\frac{a}{l}\right)^2 \pi n \sin\left(\frac{\xi_\alpha(x)}{l} \pi n\right). \end{aligned}$$

Таким образом, импульсная переходная функция $w_\alpha(x, \cdot)$ оператора $\mu_\alpha \rightarrow T(x, \cdot)$ может быть представлена в виде

$$(П.2.3) \quad w_\alpha(x, t) = s(t) \sum_{n=1}^{\infty} b_{\alpha n}(x) \exp(p_n t), \quad \text{где } s(t) \text{ — см. раздел 4.}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Изображение по Лапласу реакции температуры $T(x, \cdot)$ на воздействие $\frac{M}{c\rho} \delta(t - x/v)$ может быть представлено согласно (3.2) в виде

$$(П.3.1) \quad \theta_M(x, p) = \frac{Mv^2}{c\rho p(v^2 - a^2 p)} \sum_{j=1}^3 F_j(x, p),$$

где

$$F_1(x, p) = \exp\left(-p \frac{x}{v}\right), \quad F_2(x, p) = -\frac{\sinh\left(\frac{(l-x)\sqrt{p}}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{l\sqrt{p}}{a}\right)},$$

$$F_3(x, p) = -\frac{\sinh\left(\frac{x\sqrt{p}}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{l\sqrt{p}}{a}\right)} \exp\left(-\frac{pl}{v}\right).$$

Используя выражения для W_α в (П.2.1), получаем, что функция $F_2(x, p)$ может быть представлена в виде $-W_0(x, p)$, а функция $F_3(x, p)$ — в виде $-W_l(x, p) \exp(-pl/v)$.

1) Так как умножение функции $F(p)$ на $\exp(-p\tau)$ ($\tau \geq 0$) означает сдвиг графика оригинала этой функции вправо на τ [8, гл. VI, § 1, п. 80], оригинал функции $\frac{F_1(x, p)v^2}{p(v^2 - a^2 p)} = \exp(-px/v) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p - (v/a)^2}\right)$, входящей в выражение (П.3.1) для $\theta_M(x, p)$, имеет вид

$$(П.3.2) \quad R_1(x, t) = s\left(t - \frac{x}{v}\right) \left(1 - \exp\left(\left(\frac{v}{a}\right)^2 \left(t - \frac{x}{v}\right)\right)\right).$$

2) Так как функция $F_2(x, \cdot)$ имеет вид $-W_0(x, \cdot)$, функция $F_2(x, p)v^2/p(v^2 - a^2 p)$, также входящая в выражение (П.3.1) для $\theta_M(x, p)$, представляется в виде $f_2(x, p) = \frac{(v/a)^2}{p(p - (v/a)^2)} \frac{\sinh((l-x)\sqrt{p}/a)}{\sinh(l\sqrt{p}/a)}$ и потому может быть представлена суммой ряда, составленного из главных частей функции $f_2(x, \cdot)$:

$$(П.3.3) \quad f_2(x, p) = \frac{r_{20}(x)}{p} + \frac{r_{2v}(x)}{p - (v/a)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{2n}(x)}{p - p_n},$$

где

$$r_{20}(x) = \operatorname{res}_0 f_2(x, \cdot) = -\frac{l-x}{l}, \quad r_{2v}(x) = \operatorname{res}_{(v/a)^2} f_2(x, \cdot) = \frac{\sinh\left(\frac{(l-x)v/a^2}{a}\right)}{\sinh(lv/a^2)},$$

$$r_{2n}(x) = \operatorname{res}_{p_n} f_2(x, \cdot) = (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi n} \frac{(lv)^2 \sin(\pi n(l-x)/l)}{a^4(\pi n)^2 + (lv)^2}.$$

Следовательно, оригинал функции $F_2(x, p)v^2/p(v^2 - a^2p)$ может быть представлен в виде суммы ряда

$$(П.3.4) \quad R_2(x, t) = s(t) \left(r_{20}(x) + r_{2v}(x) \exp \left(\left(\frac{v}{a} \right)^2 t \right) + \sum_{n=1}^{\infty} r_{2n}(x) \exp(p_n t) \right).$$

3) Функция $F_3(x, p)$ представляется в виде $-W_l(x, p) \exp(-pl/v)$, где $W_l(x, p)$ — см. (П.2.1). Поэтому функция $F_3(x, p)v^2/p(v^2 - a^2p)$, также входящая в выражение (П.3.1) для $\theta_M(x, p)$, может быть представлена в виде $f_3(x, p) \exp\left(-\frac{pl}{v}\right)$, где

$$f_3(x, p) = \frac{(v/a)^2}{p(p - (v/a)^2)} \frac{\sinh(x\sqrt{p}/a)}{\sinh(l\sqrt{p}/a)}.$$

Функция $f_3(x, p)$ имеет вид, аналогичный виду функции f_2 , (отличие лишь в числителе) и потому может быть представлена суммой ряда, аналогичного ряду (П.3.3), чья сумма представляет функцию $f_2(x, p)$:

$$(П.3.5) \quad f_3(x, p) = \frac{r_{30}(x)}{p} + \frac{r_{3v}(x)}{p - (v/a)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{3n}(x)}{p - p_n},$$

где

$$r_{30}(x) = \operatorname{res}_0 f_3(x, \cdot) = -\frac{x}{l}, \quad r_{3v}(x) = \operatorname{res}_{(v/a)^2} f_3(x, \cdot) = \frac{\sinh(xv/a^2)}{\sinh(lv/a^2)},$$

$$r_{3n}(x) = \operatorname{res}_{p_n} f_3(x, \cdot) = (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi n} \frac{(lv)^2 \sin(\pi n x/l)}{a^4(\pi n)^2 + (lv)^2}.$$

Следовательно, оригинал функции

$$F_3(x, p) \frac{v^2}{p(v^2 - a^2p)} = \left(\frac{r_{30}(x)}{p} + \frac{r_{3v}(x)}{p - (v/a)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{3n}(x)}{p - p_n} \right) \exp\left(-\frac{pl}{v}\right)$$

имеет вид

$$(П.3.6) \quad R_3(x, t) = s \left(t - \frac{l}{v} \right) \left(r_{30}(x) + r_{3v}(x) \exp \left(\left(\frac{v}{a} \right)^2 \left(t - \frac{l}{v} \right) \right) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} r_{3n}(x) \exp \left(p_n \left(t - \frac{l}{v} \right) \right) \right).$$

4) Таким образом, реакция $T_M(x, \cdot)$ исследуемой системы вида (2.4) на внешнее воздействие $M\delta(t - x/v)/c\rho$ может быть представлена в следующем виде:

$$(П.3.7) \quad T_M(x, t) = \frac{M}{c\rho} \sum_{j=1}^3 R_j(x, t),$$

где $R_1(x, t)$ — см. (П.3.2), $R_2(x, t)$ — см. (П.3.4), $R_3(x, t)$ — см. (П.3.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
2. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. Перевод с французского. М.: Мир, 1972.
Lions J.L. Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des equations aux dérivées partielles. Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1968.
3. *Кубышкин В.А., Финягина В.И.* Оптимизация температурных режимов электродов плазматронов методами подвижного управления // Проблемы управления. 2009. № 5. С. 53–60.
4. *Финягина В.И.* Метод подстановки в решении двумерной задачи нагрева тел с помощью подвижных источников тепла // Проблемы управления. 2010. № 1. С. 57–63.
5. *Финягина В.И.* Расчет аппроксимирующих функций двумерных температурных полей в задачах управления подвижными источниками воздействий // Проблемы управления. 2010. № 4. С. 79–85.
6. *Финягина В.И.* Многоцикловое подвижное управляющее воздействие в решении двумерных задач нагрева тел // Проблемы управления. 2012. № 1. С. 47–54.
7. *Кадьмов Я.Б.* Переходные процессы в системах с распределенными параметрами. М.: Наука, 1968.
8. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Лань, 2002.
9. *Арсенин В.Я.* Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. М.: Наука, 1966.
10. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Совместное издание Лейпциг: Тойбнер, М.: Наука, 1981.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 28.10.2021

После доработки 27.03.2022

Принята к публикации 28.04.2022

Стохастические системы

© 2022 г. А.С. АРХИПОВ (ege3145@yandex.ru),
К.В. СЕМЕНИХИН, д-р физ.-мат. наук (siemenkv@rambler.ru)
(Московский авиационный институт)

МНОГОМЕРНАЯ ЧЕБЫШЕВСКАЯ ГРАНИЦА ТИПА СЕЛБЕРГА

Определена точная верхняя грань вероятности того, что случайный вектор с заданными математическим ожиданием и ковариационной матрицей окажется вне шара. Данная вероятностная граница определяется через решение скалярного уравнения, а в случае единичной ковариационной матрицы дается аналитическим выражением, которое представляет собой многомерное обобщение границы из неравенства Селберга. Показано, что при малых значениях вероятности более типична ситуация, когда искомая граница определяется новым выражением в сравнении с известной верхней оценкой из неравенства Маркова. Полученный результат применен к решению задачи о проверке гипотез с использованием общей альтернативы.

Ключевые слова: многомерная чебышевская граница, проблема моментов, неравенство Селберга, проверка гипотез.

DOI: 10.31857/S0005231022080037, **EDN:** AGMYRT

1. Введение

Об актуальности робастных оптимизационных моделей, учитывающих неопределенность в задании распределений случайных параметров и возмущений, можно судить по недавнему обзору [1]. В нем описаны теоретические основы и приложения оптимизационных постановок, в которых гарантированное значение целевой функции риска (потерь, ошибки и т.п.) определяется в результате максимизации по множеству распределений из некоторого класса. Весомую часть этих постановок составляют различные варианты проблемы моментов Маркова — задачи о нахождении супремума вероятностного функционала при ограничениях на моментные характеристики вектора, включающего все случайные параметры модели [2, 3].

Для указанных задач, рассматриваемых в многомерной формулировке, наиболее естественным выглядит задание класса распределений с известными (или частично известными) вектором математического ожидания и ковариационной матрицей [4]. К таким постановкам можно отнести задачи робастной оптимизации инвестиций с критериями в виде квантили [5] и математического ожидания [6], задачи минимаксного оценивания с вероятностными

критериями [7, 8], робастные версии задач стохастического программирования [9], в том числе с вероятностными ограничениями [10].

В данной статье рассматривается задача о нахождении верхней границы для вероятности того, что случайный вектор с фиксированными моментами второго порядка окажется вне шара. Такая постановка возникает при вычислении наихудшего значения вероятности ошибки в задаче векторного минимаксного оценивания [7], при построении робастных квадратичных классификаторов [11], при определении гарантированной надежности доверительного эллипсоида, построенного на выборочной ковариационной матрице [12]. Алгоритмическое решение указанной задачи (и даже более общей, когда событие задается системой квадратичных неравенств) получено в [13] путем сведения к задаче полуопределенного программирования. Однако явного выражения из полученного результата не следует даже для случая единичной ковариационной матрицы.

Принципиальной особенностью рассматриваемой в данной статье задачи является то, что математическое ожидание смещено относительно центра шара. К этой постановке наиболее близка работа [14], в которой получен аналог неравенства Селберга [2]. Однако в многомерном случае полученное неравенство дает лишь верхнюю оценку для искомой вероятностной границы. В [15] решалась аналогичная задача, но на более узком классе распределений, образованных смесями гауссовских векторов со случайной ковариационной матрицей. Вместе с тем вид искомой границы в несмещенном случае очевиден: он дается неравенством Маркова.

Отметим также, что точная верхняя грань вероятности попадания в шар, а равно и в любое другое выпуклое множество, получается по единой формуле Маршалла–Олкина [4]. Этот результат можно обобщить на случай объединения нескольких непересекающихся выпуклых множеств [16]. Поэтому вычисление верхней грани вероятности выхода за границы выпуклого многогранного множества может быть сведено к эффективной алгоритмической процедуре даже в том случае, если на распределение случайного вектора дополнительно накладывается условие унимодальности [17]. Без условий на моментные характеристики, но с ограниченным носителем унимодального распределения максимум вероятности непопадания в выпуклое множество достигается на равномерном распределении [18–20].

Тем самым данная статья посвящена получению точной вероятностной границы, явное выражение для которой до сих пор неизвестно.

Статья организована следующим образом: в разделе 2 приведены формулировка проблемы и предварительные замечания; в разделе 3 изложен вывод искомой вероятностной границы и дана формулировка основного результата; в разделе 4 представлен сравнительный анализ способов вычисления и оценки искомой границы; в разделе 5 рассмотрено приложение полученного результата к задаче проверки гауссовской гипотезы против альтернативы

с произвольным распределением; в Приложении даны доказательства вспомогательных утверждений.

2. Постановка задачи и предварительные замечания

Рассмотрим класс всевозможных распределений $\mathcal{P}(\mu, R)$ случайного вектора $X \in \mathbb{R}^n$ с заданными математическим ожиданием и ковариационной матрицей

$$(1) \quad \mathbb{M}X = \mu, \quad \text{cov}\{X, X\} = R.$$

Матрица R предполагается положительно определенной: $R \succ O$.

Цель данной работы — определить точную верхнюю грань вероятности того, что вектор с неизвестным распределением и указанными моментными характеристиками окажется вне шара

$$\mathcal{B}_t = \{x: \|x\| \leq t\},$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Задача 1. Для заданных $t > 0$, $\mu \in \mathbb{R}^n$ и $R \succ O$ определить

$$(2) \quad p_t(\mu, R) = \sup_{X \sim \mathcal{P}(\mu, R)} \mathbb{P}\{X \notin \mathcal{B}_t\}.$$

Указанную границу принято называть чебышевской по аналогии с неравенством Чебышева, которое дает наилучшую верхнюю оценку для вероятности выхода за границы интервала

$$\mathbb{P}\{|X - \mu| \geq t\} \leq \min\{\sigma^2/t^2, 1\}$$

для скалярных случайных величин $X \sim \mathcal{P}(\mu, \sigma^2)$.

Если же интервал смещен относительно математического ожидания μ , то известно неравенство Селберга [2]

$$(3) \quad \mathbb{P}\{|X| \geq t\} \leq \mathbf{s}_t^{(1)}(r, \sigma) = \begin{cases} \sigma^2 / (\sigma^2 + (t - r)^2), & \sigma^2 + r^2 \leq rt, & \text{(i)} \\ (\sigma^2 + r^2) / t^2, & rt \leq \sigma^2 + r^2 \leq t^2, & \text{(ii)} \\ 1, & \sigma^2 + r^2 \geq t^2, & \text{(iii)} \end{cases}$$

которое определяет точную вероятностную границу на том же классе распределений $\mathcal{P}(\mu, \sigma^2)$, где $r = |\mu|$.

Для случайных векторов $X \sim \mathcal{P}(\mu, R)$ аналог неравенства Чебышева (2) имеет вид соотношения

$$\mathbb{P}\{\|X - \mu\| \geq t\} \leq \mathbb{M}\|X - \mu\|^2 / t^2 = \text{tr } R / t^2,$$

которое получается применением неравенства Маркова к величине $\|X - \mu\|$.

Следовательно, при $\mu = 0$ граница (2) известна:

$$p_t(0, R) = \min \{ \operatorname{tr} R / t^2, 1 \}$$

(см. также лемму 3 из [7], где построено распределение, на котором достигается указанная граница).

Однако при $\mu \neq 0$ неравенство Маркова описывает лишь верхнюю оценку

$$(4) \quad p_t(\mu, R) \leq \min \{ (\operatorname{tr} R + \|\mu\|^2) / t^2, 1 \},$$

о которой неизвестно, является ли она точной.

Если шар \mathcal{B}_t заменить на эллипсоид

$$\mathcal{E}_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \|Ax\| \leq t\},$$

где A — невырожденная квадратная матрица, то в силу эквивалентности условий $X \sim \mathcal{P}(\mu, R)$ и $AX \sim \mathcal{P}(A\mu, ARA^*)$ проблема нахождения наибольшей вероятности выхода вектора X за границы эллипсоида приводится к задаче 1

$$\sup_{X \sim \mathcal{P}(\mu, R)} \mathbb{P}\{X \notin \mathcal{E}_t\} = p_t(A\mu, ARA^*).$$

Точная верхняя грань вероятности попадания внутрь шара при тех же условиях на моменты случайного вектора (1) вычисляется по известной формуле Маршалла—Олкина (см., например, [2, теорема 13.8.2] и [16, теорема 6.1]):

$$\sup_{X \sim \mathcal{P}(\mu, R)} \mathbb{P}\{X \in \mathcal{B}_t\} = \frac{1}{1 + \delta^2},$$

где величина δ^2 определяется двумя эквивалентными способами

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle R^{-1}x, x \rangle : x + \mu \in \mathcal{B}_t \} = \\ &= \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle Ra, a \rangle^{-1} : \langle a, x \rangle \geq 1 \forall x : x + \mu \in \mathcal{B}_t \right\}. \end{aligned}$$

При этом шар \mathcal{B}_t можно заменить на любое выпуклое множество.

Важно отметить, что задача о поиске чебышевской границы для вероятности попадания в множество, задаваемое несколькими квадратичными ограничениями, решена в [13] алгоритмически путем сведения к задаче полуопределенного программирования (SDP). Благодаря этому, при небольшой размерности случайного вектора численное решение задачи 1 может быть получено эффективными программными средствами [21, 22]. Вместе с тем запись в виде SDP не позволяет ответить на вопрос о точности

неравенства Маркова (4). Кроме того, открытым остается вопрос о применимости решения в виде SDP к задачам, где определение искомой чебышевской границы является лишь подзадачей в более общей постановке. К таким постановкам относится, например, задача минимаксного оценивания: в ней наихудшую вероятность ошибки необходимо максимизировать на множестве неопределенных характеристик модели наблюдения, а затем минимизировать на классе рассматриваемых оценок [7]. Даже если указанная вероятность вычисляется явно через среднеквадратичную ошибку, применение метода SDP к задаче минимаксного оценивания является нетривиальным [23].

3. Вывод общего решения и основные подзадачи

Будем рассматривать задачу 1 как проблему моментов. Для этого введем обозначения: \mathfrak{M}_+ — семейство всех неотрицательных конечных борелевских мер на \mathbb{R}^n , $I\{\dots\}$ — индикаторная функция, а также

$$\Gamma(x) = \begin{pmatrix} 1 & x^* \\ x & xx^* \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \text{diag}[1, R] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

Тогда границу (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} p_t(\mu, R) &= \sup_{X \sim \mathcal{P}(0, R)} \mathbb{P}\{X + \mu \notin \mathcal{B}_t\} = \\ &= \sup_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}_+} \left\{ \int I\{x + \mu \notin \mathcal{B}_t\} \mathbb{Q}(dx) : \int \Gamma(x) \mathbb{Q}(dx) = \text{diag}[1, R] \right\}, \end{aligned}$$

где интегралы берутся по всему \mathbb{R}^n .

Если ввести сопряженную переменную — произвольную симметричную матрицу

$$(5) \quad M = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda^* \\ \lambda & \Lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \Lambda \in \mathbb{R}_s^{n \times n},$$

то получаем максиминное выражение:

$$(6) \quad p_t(\mu, R) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}_+} \inf_M \int I\{\|x + \mu\| \geq t\} \mathbb{Q}(dx) + \text{tr} \left[M \left(\text{diag}[1, R] - \int \Gamma(x) \mathbb{Q}(dx) \right) \right].$$

В силу предположения $R \succ O$ матрица $\text{diag}[1, R]$ представляет собой внутреннюю точку множества моментов

$$\left\{ \int \Gamma(x) \mathbb{Q}(dx) : \mathbb{Q} \in \mathfrak{M}_+ \right\}$$

в пространстве симметричных матриц $\mathbb{R}_s^{(n+1) \times (n+1)}$ [2, с. 497]. Тогда по теореме 12.2.1 из того же источника получаем, что супремум и инфимум в (6) можно поменять местами. Далее нужно заметить, что супремум по \mathbb{Q} от интеграла $\int \dots d\mathbb{Q}$ равен нулю, только если подынтегральное выражение меньше или равно нулю, а в противном случае супремум равен $+\infty$. Это позволяет включить ограничение на подынтегральную функцию в задачу минимизации:

$$p_t(\mu, R) = \inf_{\lambda_0, \lambda, \Lambda} \{ \lambda_0 + \text{tr} [\Lambda R] : I\{\|x + \mu\| \geq t\} \leq q(x|M) \forall x \},$$

где обозначено

$$q(x|M) = \text{tr} [M\Gamma(x)] = \lambda_0 + 2\langle \lambda, x \rangle + \langle \Lambda x, x \rangle.$$

Теперь заметим, что ограничение снизу на квадратичную форму $q(x|M)$ гарантирует ее неотрицательность, что равносильно условию неотрицательной определенности матрицы: $M \succcurlyeq O$. Это видно из соотношения

$$\langle M\bar{x}, \bar{x} \rangle = x_0^2 q(x/x_0|M) \geq 0$$

при любом $\bar{x} = \text{col} [x_0, x]$, таком что $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Поэтому с учетом обозначений (5) и

$$(7) \quad q_t(M) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{ q(x|M) : \|x + \mu\| \geq t \}$$

получаем

$$(8) \quad p_t(\mu, R) = \min_{M \succcurlyeq O} \{ \lambda_0 + \text{tr} [\Lambda R] : q_t(M) \geq 1 \},$$

где минимум достигается в силу замкнутости и ограниченности множества $\{M \succcurlyeq O : q_t(M) \geq 1, \lambda_0 + \text{tr} [\Lambda R] \leq 1\}$, в которое дополнительное введено ограничение согласно $p_t(\mu, R) \leq 1$.

Наименьшее значение $q_0(M)$ квадратичной формы $q(x|M)$ на всем пространстве достигается в точках \tilde{x} , удовлетворяющих уравнению

$$(9) \quad \Lambda \tilde{x} + \lambda = 0.$$

Это уравнение разрешимо в силу условия $M \succcurlyeq O$, которое для блочной матрицы имеет вид [24, раздел 9.1.6]:

$$\Lambda \succcurlyeq O, \quad \lambda \in \text{im} [\Lambda], \quad \langle \Lambda^+ \lambda, \lambda \rangle \leq \lambda_0,$$

где im — образ линейного оператора (пространство столбцов матрицы).

Если матрица Λ вырожденная, то уравнение (9) описывает аффинное подпространство, которое заведомо пересекается с областью $\{x : \|x + \mu\| \geq t\}$.

Поэтому $q_t(M) = q_0(M) = \lambda_0 - \langle \Lambda^+ \lambda, \lambda \rangle$, что по условию должно быть больше или равно единице. Тогда значение минимизируемой в (8) функции тоже оценивается снизу единицей

$$\lambda_0 + \text{tr}[\Lambda R] \geq 1 + \langle \Lambda^+ \lambda, \lambda \rangle + \text{tr}[\Lambda R] \geq 1.$$

Следовательно, при $p_t(\mu, R) < 1$ случай вырожденной матрицы Λ можно заведомо исключить из оптимизации, т.е. определен минимум

$$(10) \quad p_t(\mu, R) = \\ = \min_{\lambda_0, \lambda \in \mathbb{R}^n, \Lambda \succ O} \{ \lambda_0 + \text{tr}[\Lambda R] : 1 - q_t(M) \leq 0, \langle \Lambda^{-1} \lambda, \lambda \rangle - \lambda_0 \leq 0 \}.$$

Оба ограничения в (10) удовлетворяют условию Слейтера, т.е. неравенства выполнены строго при определенном выборе переменных: например, при $\Lambda = I$, $\lambda = 0$ и достаточно большом λ_0 . Кроме того, функции в левой части обоих неравенств являются выпуклыми по блочной матричной переменной M , такой что $\Lambda \succ O$. Действительно, функция $1 - q_t(M)$ представляет собой супремум линейных форм, а надграфик функции $\langle \Lambda^{-1} \lambda, \lambda \rangle - \lambda_0 = y$ описывается линейным матричным неравенством $M + \text{diag}[y, O] \succeq O$.

Если $p_t(\mu, R) < 1$, то в силу (10) по теореме Куна–Таккера о седловой точке [25, с. 85] получаем

$$(11) \quad p_t(\mu, R) = \\ = \max_{k \geq 0, \ell \geq 0} \inf_{\lambda_0, \lambda \in \mathbb{R}^n, \Lambda \succ O} \{ \lambda_0 + \text{tr}[\Lambda R] + k(1 - q_t(M)) + \ell (\langle \Lambda^{-1} \lambda, \lambda \rangle - \lambda_0) \}.$$

Первая задача, возникающая на пути нахождения $p_t(\mu, R)$, состоит в минимизации квадратичной формы на дополнении к шару (7). Решение дано в следующей лемме.

Лемма 1. Для любых $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ и $\Lambda \succ O$ точная нижняя грань (7) равна

$$(12) \quad q_t(M) = q_t(-\mu | M) + \sup_{c \in [0, \sigma_\Lambda]} \left\{ t^2 c - \langle (\Lambda - cI)^{-1} \nu, \nu \rangle \right\},$$

где $\nu = \lambda - \Lambda \mu$, а σ_Λ — минимальное собственное значение матрицы Λ .

Доказательство леммы 1 дано в Приложении.

Благодаря тому, что в (11) перед $q_t(M)$ стоит отрицательный коэффициент, включим супремум по c во внутреннюю задачу минимизации, а также учтем замену переменной $\lambda = \nu + \Lambda \mu$, где ν пробегает все пространство \mathbb{R}^n :

$$p_t(\mu, R) = \max_{k \geq 0, \ell \geq 0} \inf_{\lambda_0, \nu, \Lambda \succ cI, c \geq 0} \left\{ \lambda_0 + \text{tr}[\Lambda R] + \right. \\ \left. + k \left[1 - \lambda_0 + 2 \langle \nu + \Lambda \mu, \mu \rangle - \langle \Lambda \mu, \mu \rangle - t^2 c + \langle (\Lambda - cI)^{-1} \nu, \nu \rangle \right] + \right. \\ \left. + \ell \left[\langle \Lambda^{-1} (\nu + \Lambda \mu), \nu + \Lambda \mu \rangle - \lambda_0 \right] \right\}.$$

Поскольку λ_0 входит линейно и пробегает всю действительную ось, точная нижняя грань по λ_0 будет равна нулю только при условии, что соответствующий коэффициент равен нулю: $1 - k - \ell = 0$. В противном случае инфимум будет равен $-\infty$, откуда

$$\begin{aligned} p_t(\mu, R) = \max_{0 \leq k \leq 1} \inf_{\nu, \Lambda \succ cI, c \geq 0} \left\{ \operatorname{tr} [\Lambda R] + \right. \\ \left. + k \left[1 - t^2 c + \langle \Lambda \mu, \mu \rangle + 2 \langle \mu, \nu \rangle + \langle (\Lambda - cI)^{-1} \nu, \nu \rangle \right] + \right. \\ \left. + (1 - k) \langle \Lambda^{-1} (\nu + \Lambda \mu), \nu + \Lambda \mu \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Выражение, стоящее под знаком \inf и рассматриваемое как функция переменной ν , представляет собой положительно определенную квадратичную форму, которая без учета свободного коэффициента имеет вид

$$\langle A \nu, \nu \rangle + 2 \langle \mu, \nu \rangle, \quad \text{где } A = k(\Lambda - cI)^{-1} + (1 - k)\Lambda^{-1} \succ O.$$

Поэтому ее минимум равен $-\langle A^{-1} \mu, \mu \rangle$. Тогда

$$p_t(\mu, R) = \max_{0 \leq k \leq 1} \inf_{\Lambda \succ cI, c \geq 0} \left\{ k - kt^2 c + \operatorname{tr} [\Lambda R] + \langle (\Lambda - A^{-1}) \mu, \mu \rangle \right\},$$

где

$$\Lambda - A^{-1} = kc \left(I + (1 - k)c(S + kcI)^{-1} \right).$$

Если обозначить $S = \Lambda - cI$, то инфимум по Λ от выражения, стоящего в фигурных скобках, будет равен

$$(13) \quad k + c \left(\operatorname{tr} R - kt^2 + k \|\mu\|^2 \right) + \\ + \inf_{S \succ O} \left\{ \operatorname{tr} [SR] + k(1 - k)c^2 \langle (S + kcI)^{-1} \mu, \mu \rangle \right\}.$$

Для дальнейшего нахождения искомой границы понадобится следующий факт.

Лемма 2. Для заданных $R \succ O$, $b \in \mathbb{R}^n$ и $\gamma > 0$ верно равенство

$$(14) \quad \inf_{S \succ O} \left\{ \operatorname{tr} [SR] + \langle (S + \gamma I)^{-1} b, b \rangle \right\} = \\ = \begin{cases} \|b\|^2 / \gamma, & \langle R^{-1} b, b \rangle \leq \gamma^2, \\ \langle (I - \xi^2 (R + \xi I)^{-2}) b, b \rangle / \gamma, & \langle R^{-1} b, b \rangle > \gamma^2, \end{cases}$$

где ξ — единственное положительное решение уравнения

$$(15) \quad \langle R(R + \xi I)^{-2} b, b \rangle = \gamma^2.$$

Доказательство леммы 2 дано в Приложении.

Если обозначить $bb^* = k(1 - k)c^2\mu\mu^*$, $\gamma = kc$ и

$$(16) \quad d_0 = \langle R^{-1}\mu, \mu \rangle,$$

то по лемме 2 получаем, что точная нижняя грань в (13) равна

$$\begin{cases} (1 - k)c\|\mu\|^2, & k \geq d_0/(d_0 + 1), \\ (1 - k)cf(k/(1 - k)), & 0 < k < d_0/(d_0 + 1), \end{cases}$$

где $f(\delta)$ — функция положительного аргумента, определяемая по правилу

$$(17) \quad f(\delta) = \langle (I - \xi^2(R + \xi I)^{-2})\mu, \mu \rangle$$

с учетом того, что ξ — это решение уравнения

$$(18) \quad \langle R(R + \xi I)^{-2}\mu, \mu \rangle = \delta.$$

Если еще учесть случай $k = 0$, то искомая граница

$$(19) \quad p_t(\mu, R) = \max \{0, p^{(1)}, p^{(2)}\}$$

выражается через

$$(20) \quad p^{(1)} = \sup_{k \in [d_0/(d_0+1), 1]} \inf_{c \geq 0} \{k + c(\operatorname{tr} R - kt^2 + \|\mu\|^2)\},$$

$$(21) \quad p^{(2)} = \sup_{k \in (0, d_0/(d_0+1))} \inf_{c \geq 0} \{k + c(\operatorname{tr} R - kt^2 + k\|\mu\|^2) + (1 - k)cf(k/(1 - k))\}.$$

В обоих выражениях инфимум по c будет либо равен нулю (когда соответствующий коэффициент неотрицателен), либо равен $-\infty$. Поэтому если ограничения

$$(22) \quad d_0/(d_0 + 1) \leq k \leq \min \{1, (\operatorname{tr} R + \|\mu\|^2)/t^2\}$$

совместны, то $p^{(1)}$ равно правой части; если же нет, то $p^{(1)} = -\infty$. Аналогично, $p^{(2)}$ равно точной верхней грани тех чисел $k \in (0, d_0/(d_0 + 1))$, которые удовлетворяют

$$(23) \quad \operatorname{tr} R - k(t^2 - \|\mu\|^2) + (1 - k)f(k/(1 - k)) \geq 0.$$

Дальнейшие сведения об этом неравенстве даны в следующей лемме.

Лемма 3. Обозначим

$$(24) \quad p = (\operatorname{tr} R + \|\mu\|^2)/t^2 \quad \text{и} \quad d_\xi = \langle R(R + \xi I)^{-2}\mu, \mu \rangle$$

и допустим, что $p < 1$ и $\mu \neq 0$, тогда:

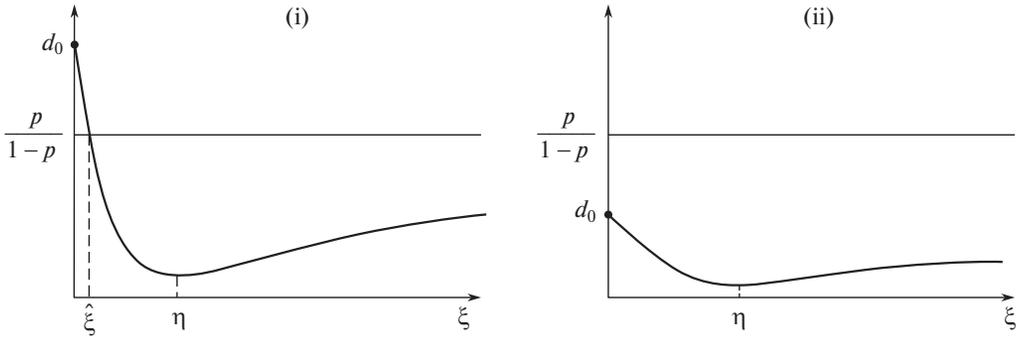


Рис. 1. Левая часть уравнения (25) как функция переменной ξ в случае (i) (слева) и в случае (ii) (справа).

(i) если ограничения (22) несовместны, то множество решений неравенства (23) имеет вид $(0, \hat{k}]$, где \hat{k} — единственное число k , на котором (23) обращается в равенство на интервале $(0, d_0/(d_0 + 1))$; это число равно $\hat{k} = d_\xi/(1 + d_\xi)$, где ξ — единственное решение уравнения

$$(25) \quad \langle (R + (\xi^2/\eta) I) (R + \xi I)^{-2} \mu, \mu \rangle = p/(1 - p) \\ \text{при } 0 < \xi < \eta = t^2(1 - p);$$

левая часть этого уравнения является гладкой убывающей функцией;

(ii) если же ограничения (22) совместны, то (23) выполнено для всех $k \in (0, d_0/(d_0 + 1))$.

Доказательство леммы 3 дано в Приложении.

Графическая иллюстрация утверждения леммы 3 представлена на рис. 1.

Итак, при $p < 1$ в случае (i) в силу $p^{(1)} = -\infty$ имеем $\mathbf{p}_t(\mu, R) = p^{(2)} = \hat{k}$, где \hat{k} описано в лемме 3, а в случае (ii) $p^{(1)} = p$ и $p^{(2)} = d_0/(d_0 + 1) \leq p$, откуда в силу (19) искомая граница совпадает с p . В случае $p \geq 1$ из (22) следует $\mathbf{p}_t(\mu, R) = p^{(1)} = 1$.

Отметим, что в случае (i) при $p \uparrow d_0/(d_0 + 1)$ решение ξ уравнения (25) стремится к нулю, откуда предел $d_\xi/(d_\xi + 1)$ при $\xi \downarrow 0$ совпадает со значением искомой границы, вычисленной в случае (ii) при $p = d_0/(d_0 + 1)$. Тем самым этот пограничный случай можно отнести к обоим ветвям решения (i) и (ii).

Теперь можно сформулировать окончательный результат о виде вероятностной границы (2).

Теорема 1. При произвольных $t > 0$, $\mu \in \mathbb{R}^n$ и $R \succ O$ вероятностная граница (2) в обозначениях (16) и (24) имеет вид

$$(26) \quad \mathbf{p}_t(\mu, R) = \begin{cases} d_\xi/(d_\xi + 1), & p \leq d_0/(d_0 + 1), & \text{(i)} \\ p, & d_0/(d_0 + 1) \leq p \leq 1, & \text{(ii)} \\ 1, & p \geq 1, & \text{(iii)} \end{cases}$$

где $\xi > 0$ находится из решения уравнения (25).

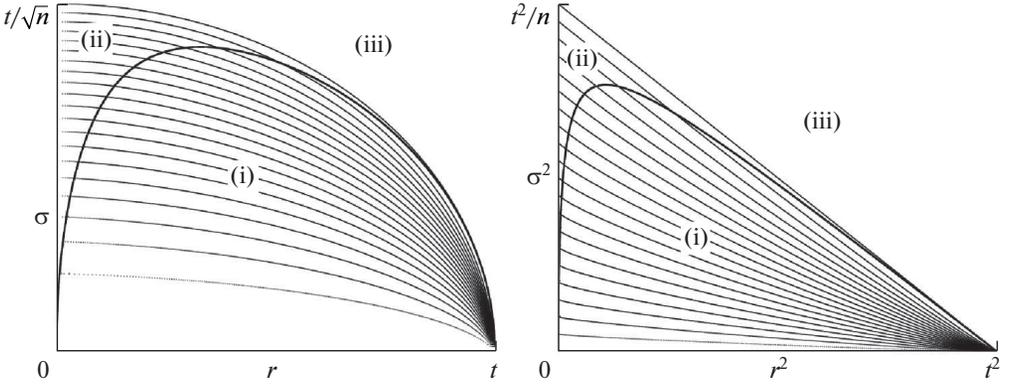


Рис. 2. Линии уровня вероятностной границы $s_t^{(n)}(r, \sigma) = k/20$ для $k = 1, \dots, 20$ в переменных r, σ (слева) и в переменных r^2, σ^2 (справа).

При достаточно большом радиусе, т.е. при

$$t^2 > (1 + 1/\langle R^{-1}\mu, \mu \rangle) (\text{tr } R + \|\mu\|^2),$$

дробь $p = (\text{tr } R + \|\mu\|^2)/t^2$, будучи правой частью неравенства Маркова (4), определяет для вероятностей $\mathbb{P}\{\|X\| \geq t\}$, $X \sim \mathcal{P}(\mu, R)$, завышенную оценку по сравнению с точной границей (26), (i). Вместе с тем в случае (ii) неравенство Маркова дает неулучшаемую границу для указанных вероятностей.

Формула (19) позволяет получить для найденной границы простую оценку снизу

$$(27) \quad p_t(\mu, R) \geq \begin{cases} \text{tr } R / (t^2 - \|\mu\|^2), & t^2 \geq \text{tr } R + \|\mu\|^2, \\ 1, & t^2 \leq \text{tr } R + \|\mu\|^2. \end{cases}$$

Действительно, каждое из выражений, стоящих в (20) и (21) под знаком $\sup \inf$, больше или равно величине $k + c(\text{tr } R - kt^2 + k\|\mu\|^2)$, которая после взятия операции $\sup_{k \in (0,1]} \inf_{c \geq 0}$ дает правую часть (27).

Как верхняя оценка (4), так и нижняя оценка (27) оказываются меньше единицы при одном и том же условии:

$$t^2 > \text{tr } R + \|\mu\|^2.$$

Если случайный вектор состоит из некоррелированных величин одинаковой дисперсии, то при наихудшем выборе его распределения вероятность выхода за границы шара определяется явными соотношениями, поскольку уравнение (25) имеет аналитическое решение.

Следствие 1. В случае $\|\mu\| = r$ и $R = \sigma^2 I_n$ вероятностная граница (26) равна

$$p_t(\mu, R) = s_t^{(n)}(r, \sigma),$$

где

$$(28) \quad \mathbf{s}_t^{(n)}(r, \sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma^2 n^2}{\sigma^2 n^2 + \left(t\sqrt{p + n(1-p)} - r\right)^2}, & p \leq r^2 / (r^2 + \sigma^2), & \text{(i)} \\ p, & r^2 / (r^2 + \sigma^2) \leq p \leq 1, & \text{(ii)} \\ 1, & p \geq 1, & \text{(iii)} \end{cases}$$

с учетом обозначения

$$p = (n\sigma^2 + r^2) / t^2.$$

Доказательство следствия дано в Приложении.

Таким образом, для случайного вектора $X \sim \mathcal{P}(\mu, \sigma^2 I_n)$ имеет место неулучшаемая оценка $\mathbb{P}\{\|X\| > t\} \leq \mathbf{s}_t^{(n)}(r, \sigma)$, которую можно считать многомерным аналогом неравенства Селберга (3).

Линии уровня многомерной границы Селберга $\mathbf{s}_t^{(n)}(r, \sigma)$ изображены на рис. 2 (для случая $n = 50$). Самая нижняя линия уровня соответствует вероятности 0,05, выше — 0,1, еще выше — 0,15 и т.д. Из представленных графиков можно сделать вывод, что при малых уровнях вероятности случай (i), соответствующий ранее не известной границе, является более типичным в сравнении со случаем (ii), описывающим привычную границу из неравенства Маркова.

4. Сравнительный анализ полученной вероятностной границы

4.1. Сравнение с методом SDP

Сравним аналитический способ определения вероятностной границы (см. теорему 1) с алгоритмическим методом, основанным на применении техники линейных матричных неравенств [13].

В указанной работе для искомой вероятностной границы предлагаются две эквивалентные формулировки в виде задач полуопределенного программирования:

а) нижняя граница

$$(29) \quad \underline{p}_t(\mu, R) = \sup_{Z, z, \lambda} \left\{ \lambda : \operatorname{tr}[Z] - t^2 \lambda \geq 0, \quad O \preceq \begin{pmatrix} Z & z \\ z^* & \lambda \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} R + \mu\mu^* & \mu \\ \mu^* & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

где

$$Z \in \mathbb{R}_s^{n \times n}, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

б) верхняя граница

$$(30) \quad \bar{\mathbf{p}}_t(\mu, R) = \inf_{P, q, s, \tau} \left\{ \text{tr}[(R + \mu\mu^*)P] + 2\langle \mu, q \rangle + s : \right. \\ \left. \begin{pmatrix} P & q \\ q^* & s \end{pmatrix} \succcurlyeq \begin{pmatrix} \tau I_n & 0 \\ 0 & 1 - \tau t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P & q \\ q^* & s \end{pmatrix} \succcurlyeq O, \tau \geq 0 \right\},$$

где

$$P \in \mathbb{R}_s^{n \times n}, \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad s, \tau \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что если в (29) убрать ограничения на переменную z , то неравенства на две другие переменные примут вид:

$$O \preccurlyeq Z \preccurlyeq R + \mu\mu^* \quad \text{и} \quad 0 \leq \lambda \leq \min\{\text{tr} Z/t^2, 1\}.$$

Следовательно, максимум достигается на правых частях этих соотношений, что дает границу Маркова (4). Если же в (30) ввести дополнительное ограничение $1 - \tau t^2 \geq 0$, то останется только первое матричное неравенство. Тогда с учетом этого неравенства минимизация по переменным P, q, s дает выражение $\tau \text{tr}[R + \mu\mu^*] + 1 - \tau t^2$, минимум которого по $\tau \in [0, 1/t^2]$ снова равен границе Маркова.

Несмотря на то что указанные преобразования не являются эквивалентными (из них следует лишь оценка сверху для обеих границ), приведенные рассуждения свидетельствуют о том, что сведение задачи 1 к SDP не дает возможности получить явное решение элементарными методами.

Рисунок 3 демонстрирует идентичность границы $\mathbf{p}_t(\mu, R)$, найденной с помощью теоремы 1, границам $\underline{\mathbf{p}}_t(\mu, R)$ и $\bar{\mathbf{p}}_t(\mu, R)$, определяемым через решение задач полуопределенного программирования (29) и (30). Участок кривой, соответствующий новому выражению (не совпадающему с границей Маркова), расположен правее жирной точки.

Вычисления были проведены для размерности $n = 30$, вектора математического ожидания μ с одинаковыми компонентами и ковариационной матрицы $R = \sigma^2 I_n$, где $\sigma = \|\mu\|$.

4.2. Анализ чувствительности доверительного эллипсоида

Для сравнения точной границы $\mathbf{p}_t(\mu, R)$ с известными верхними оценками рассмотрим задачу о расчете гарантированной надежности доверительного эллипсоида.

Предположим, что для неизвестного вектора параметров $\theta \in \mathbb{R}^n$ имеется точечная оценка $\tilde{\theta}$, с помощью которой построен доверительный эллипсоид

$$(31) \quad \Theta_t = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n : \langle K_0^{-1}(\theta - \tilde{\theta}), \theta - \tilde{\theta} \rangle \leq t^2 \right\}$$

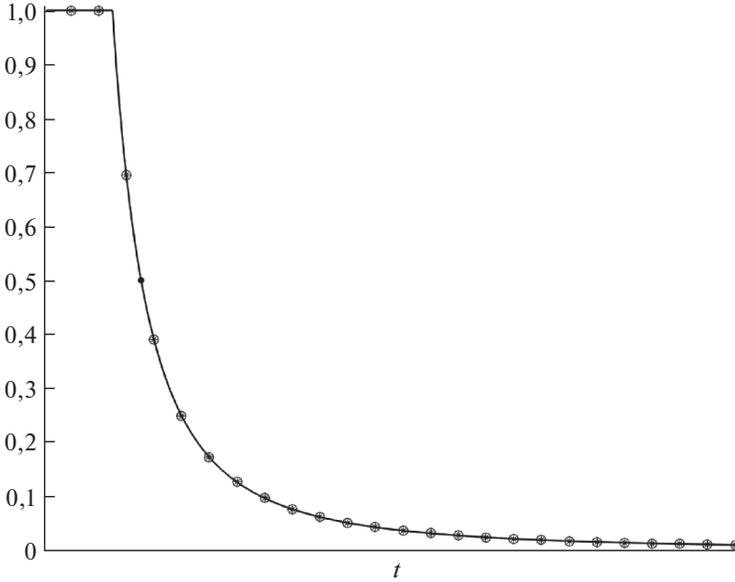


Рис. 3. Вероятностные границы $\mathbf{p}_t(\mu, R)$ (сплошная), $\underline{\mathbf{p}}_t(\mu, R)$ (звездочки) и $\bar{\mathbf{p}}_t(\mu, R)$ (кружочки).

из расчета на некоторую номинальную ковариационную матрицу K_0 и заданный размер эллипсоида $t > 0$. При этом оценка $\tilde{\theta}$ является смещенной, т.е. $b = M_{\theta}\tilde{\theta} - \theta \neq 0$, а истинная ковариационная матрица $\text{cov}\{\tilde{\theta}, \tilde{\theta}\} = K$ отличается от номинальной K_0 .

Задачу о расчете гарантированной надежности доверительного эллипсоида можно сформулировать так: определить нижнюю грань вероятностей $\mathbf{P}_{\theta}\{\theta \in \Theta_t\}$ при условии, что оценка $\tilde{\theta}$ имеет указанные выше моментные характеристики. Тогда искомая гарантированная надежность равна $1 - \alpha_t(b, K)$, где

$$\alpha_t(b, K) = \sup_{Y \sim \mathcal{P}(b, K)} \mathbf{P}\left\{\langle K_0^{-1}Y, Y \rangle > t^2\right\} = \mathbf{p}_t\left(K_0^{-1/2}b, K_0^{-1/2}K K_0^{-1/2}\right).$$

Пример 1. В качестве номинального случая возьмем $K_0 = I_n$, что можно интерпретировать двумя способами. В задачах оценивания регрессии вектор $X = \tilde{\theta} - \theta$ играет роль вектора остатков с ковариационной матрицей, близкой к единичной. В задачах фильтрации компоненты вектора X имеют смысл процесса невязки, который в номинальном случае должен быть стандартным белым шумом.

Требуется определить, насколько чувствителен доверительный эллипсоид (31) по отношению к отклонению смещения b и ковариационной матрицы K от номинального случая 0 и I_n соответственно. В качестве показателя чувствительности возьмем гарантированное значение вероятности, противо-

положительной надежности:

$$(32) \quad \alpha_t(b, K) = \sup_{X \sim \mathcal{P}(b, K)} \mathbb{P}\{\|X\| > t\} = \mathbf{p}_t(b, K).$$

Способ вычисления характеристики (32) предлагается сравнить с двумя другими методами ее оценки из [14, 15].

Первый из них получен в предположении, что случайный вектор описывается смесью нормальных распределений со случайной ковариационной матрицей. С учетом обозначений [15] имеем

$$X = \sqrt{A}(\sqrt{S}Z - a),$$

где Z — стандартный нормальный вектор, S — не зависящая от него случайная матрица с симметричными положительно определенными значениями, такая что $MS = \Sigma$, а параметры $A \succ O$ и $a \in \mathbb{R}^n$ должны удовлетворять условиям $MX = b$ и $\text{cov}\{X, X\} = K$. Нетрудно проверить, что $-\sqrt{A}a = b$, $\sqrt{A}\Sigma\sqrt{A} = K$, откуда

$$\langle Aa, a \rangle = \|b\|^2, \quad \text{tr}[\Sigma A] = \text{tr} K, \quad \langle A\Sigma Aa, a \rangle = \langle Kb, b \rangle.$$

Тогда в силу [15, теорема 2] получаем

$$(33) \quad \mathbb{P}\{\|X\| > t\} \leq \mathbf{p}_t^{\text{mix}}(b, K) = \\ = \min \left\{ \frac{C_n}{t^2 - \|b\|^2} \left(\text{tr} K \frac{t}{t - \|b\|} - \frac{\langle Kb, b \rangle}{\|b\|^2 + t\|b\|} \right), 1 \right\},$$

где C_n — известный коэффициент (например, $C_{10} \approx 0,50781$, $C_{100} \approx 0,74381$ и $C_{1000} \approx 0,89215$).

Второй способ оценки вероятности $\mathbb{P}\{\|X\| > t\}$ получен в [14, теорема 2.2] так же, как в настоящей статье на основе знания только двух моментов вектора X , т.е. на классе $\mathcal{P}(b, K)$, но дает возможность указать верхнюю границу

$$(34) \quad \mathbb{P}\{\|X\| > t\} \leq \mathbf{p}_t^{\text{up}}(b, K) = \\ = \begin{cases} \text{tr} K / \left(\text{tr} K + (t - \|b\|)^2 \right), & \text{tr} K + \|b\|^2 \leq t\|b\|, & \text{(i')} \\ \left(\text{tr} K + \|b\|^2 \right) / t^2, & \text{tr} K + \|b\|^2 > t\|b\|, & \text{(ii')} \\ 1, & \text{tr} K + \|b\|^2 \geq t^2, & \text{(iii')} \end{cases}$$

которая в многомерном случае не является точной.

Для анализа чувствительности рассмотрим отдельно два случая, которые определяют, что будет варьироваться, смещение или ковариационная матрица.

Пусть в случае а) имеются три варианта значения нормы смещения $r = \|b\|$: 0) номинальное (т.е. нулевое) $r = 0$, 1) умеренное $r = \sqrt{2n}$ и 2) большое смещение $r = 2\sqrt{2n}$. Сам вектор смещения b зададим в виде гармонического сигнала $b_k = c \cos(\nu k + \nu_0)$, $k = 1, \dots, n$, где частота $\nu = 10\pi/n$ и сдвиг

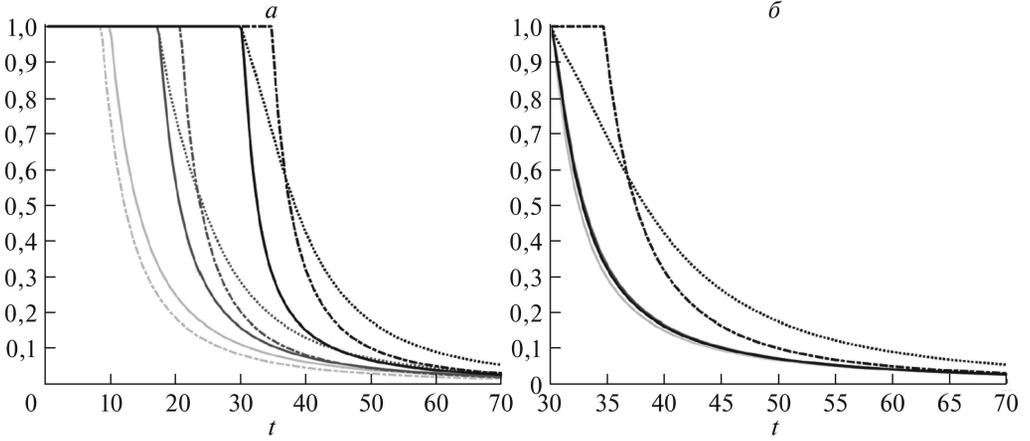


Рис. 4. Показатели чувствительности $p_t(b, K)$ (сплошные), $p_t^{\text{mix}}(b, K)$ (штрихпунктирные) и $p_t^{\text{up}}(b, K)$ (пунктирные) для трех вариантов данных: 0) – светло-серые, 1) – темно-серые, 2) – черные: случай а) – слева; случай б) – справа.

$\nu_0 = -\pi/4$ фиксированы, а амплитуда c варьируется в зависимости от вариантов 0), 1), 2). При этом ковариационная матрица соответствует номинальному случаю: $K = I_n$.

В случае б) возьмем ковариационную матрицу $K = \{K_{k,l}\}_{k,l=1,\dots,n}$, составленную из значений автокорреляционной функции процесса авторегрессии первого порядка: $K_{k,l} = a^{|k-l|}$, где a – коэффициент авторегрессии. Рассмотрим три варианта его значений: 0) нулевая корреляция $a = 0$, что соответствует белому шуму, т.е. номинальному случаю $K = I_n$; 1) слабая корреляция $a = 0,5$; 2) сильная корреляция $a = 0,9$. Вектор b здесь предполагается таким же, как в случае а) при умеренной величине смещения.

Оба случая а) и б) рассматриваются для размерности $n = 100$.

Рисунок 4 описывает зависимость показателя (32) и двух его оценок (33), (34) от выбора параметра t (размера доверительного эллипсоида). Эти зависимости изображены сплошными, штрихпунктирными и пунктирными линиями соответственно. Светло-серые кривые определяют то, что будет для номинального варианта данных ($b = 0$ или $K = I_n$). Темно-серые кривые соответствуют умеренному смещению (график слева) или слабой корреляции (график справа). Черным цветом изображены кривые, которые построены для случая большого смещения (график слева) или сильной корреляции (график справа).

Левый график свидетельствует о сильной чувствительности надежности доверительного эллипсоида к величине смещения. Правый же график показывает обратную картину: наличие даже сильной корреляции мало влияет на гарантированное значение надежности.

Важно отметить, что при наличии даже умеренного смещения новая вероятностная граница $p_t(b, K)$ существенно точнее, чем ее верхняя

граница $\mathbf{p}_t^{\text{up}}(b, K)$. Только в случае нулевого смещения они совпадают: $\mathbf{p}_t(0, K) = \mathbf{p}_t^{\text{up}}(0, K)$. Граница $\mathbf{p}_t^{\text{mix}}(b, K)$, которая построена для более узкого класса распределений, весьма чувствительна к увеличению смещения $\|b\|$, поэтому только при его малой величине, оказывается $\mathbf{p}_t(b, K) > \mathbf{p}_t^{\text{mix}}(b, K)$, а с ростом $\|b\|$ неравенство меняется на обратное. В этом случае при малых t может оказаться, что $\mathbf{p}_t^{\text{mix}}(0, K) = 1$ в то время, как $\mathbf{p}_t(b, K) \ll 1$. Отметим еще одну особенность границ (33) и (34): они не зависят (или почти не зависят) от корреляций. Поэтому на правом графике все три варианта данных как для (33), так и для (34) представлены одной кривой.

Таким образом, новая вероятностная граница $1 - \mathbf{p}_t(b, K)$ дает наиболее точную нижнюю оценку надежности доверительного эллипсоида.

5. Использование вероятностной границы в задаче проверки гипотез

Предположим, что случайный вектор $X \in \mathbb{R}^n$ содержит экспериментальные данные, по которым необходимо принять решение об их соответствии одной из двух конкурирующих гипотез H_0 или H_1 . Особенностью рассматриваемой постановки является то, что в случае альтернативы распределение вектора X имеет заданные моментные характеристики, но в остальном является полностью неопределенным.

Пример 2. Рассмотрим пару конкурирующих гипотез

$$H_0^N: X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2 I) \quad \text{и} \quad H_1: X \sim \mathcal{P}(\mu, \sigma^2 I), \quad \mu \in \mathcal{S}_r,$$

где $\mathcal{S}_r = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| = r\}$, $r = h\sqrt{n}$, а σ_0, σ, h — заданные положительные параметры. Тем самым согласно нулевой гипотезе H_0^N вектор X состоит из независимых центрированных гауссовских величин $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$ с дисперсией $D_0 X_i = \sigma_0^2$, в то время как альтернатива H_1 описывается весьма общими предположениями: совместное распределение величин $\{X_i\}$ является неопределенным с точностью до задания первых двух моментов, а именно, математические ожидания $M_1 X_i = \mu_i$ имеют «средний сдвиг» $h = \sqrt{(\mu_1^2 + \dots + \mu_n^2) / n}$ (это верно, например, при $\mu_i = \pm h$), дисперсии одинаковы $D_1 X_i = \sigma^2$, ковариации нулевые, т.е. $\text{cov}_1\{X_i, X_j\} = 0$ при $i \neq j$ (условие независимости не накладывается).

Будем исходить из того, что $\sigma_0 > \sigma$. Поэтому статистический вывод в пользу альтернативы можно интерпретировать как свидетельство о том, что в данных присутствует сдвиг, который нельзя списать на наличие бóльшей дисперсии.

Для задания критического множества воспользуемся результатом применения критерия отношения правдоподобия к задаче проверки исходной гипотезы H_0^N против гауссовской альтернативы

$$H_1^N: X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 I), \quad \mu \in \mathcal{S}_r.$$

Если $f_0(x)$, $f_1(x, \mu)$ — плотности распределений $\mathcal{N}(0, \sigma_0^2 I)$ и $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2 I)$ соответственно, то статистика отношения правдоподобия

$$T(x) = \sup_{\mu \in \mathcal{S}_r} f_1(x, \mu) / f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

позволяет задать критическое множество в виде

$$(35) \quad \mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : T(x) > \tau_\alpha\},$$

где число τ_α определяется из условия на заданный уровень ошибки первого рода $P_0\{X \in \mathcal{K}\} = \alpha$. Проверим, что критическое множество имеет форму шара.

Условие $T(x) > \tau_\alpha$ равносильно тому, что для некоторой константы будет верно

$$(36) \quad \max_{\mu: \|\mu\|=r} \{-\|x - \mu\|^2 / \sigma^2 + \|x\|^2 / \sigma_0^2\} > \text{const.}$$

Указанный максимум равен $(1/\sigma_0^2 - 1/\sigma^2)\|x\|^2 + 2r\|x\|/\sigma^2$ с точностью до аддитивной постоянной. Если обозначить $a = 1 - \sigma^2/\sigma_0^2 > 0$, то при подходящем выборе числа c неравенство (36) эквивалентно следующему:

$$(37) \quad a\|x\|^2 - 2r\|x\| - c < 0.$$

При неотрицательных c (и только при них) множество решений (37) имеет вид ограничения $\|x\| < t$, где $t = \{r + \sqrt{r^2 + ac}\} / a$. Следовательно, критическое множество (35) принимает форму шара $\mathcal{K} = \mathcal{B}_t$, если $t \geq 2r/a$, т.е.

$$(38) \quad t \geq 2\sqrt{n}h/a.$$

Тогда вероятность ошибки первого рода равна

$$\alpha_t^{\mathcal{N}} = P_0\{\|X\| < t\} = P_0\{\|X/\sigma_0\|^2 < (t/\sigma_0)^2\} = F_{\chi^2(n)}((t/\sigma_0)^2),$$

где $F_{\chi^2(n)}(\cdot)$ — функция распределения хи-квадрат с n степенями свободы.

В случае гауссовской альтернативы $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 I)$ ошибка второго рода определяется как

$$\beta_t^{\mathcal{N}} = \sup_{\mu \in \mathcal{S}_r} P_1\{\|X\| > t\}.$$

Используя представление $X = \sigma U + \mu$, где $U \sim \mathcal{N}(0, I)$, получаем

$$P_1\{\|X\| > t\} = P\{\|U + \mu/\sigma\|^2 > (t/\sigma)^2\},$$

откуда

$$\beta_t^{\mathcal{N}} = 1 - F_{\chi^2(n; (r/\sigma)^2)}((t/\sigma)^2),$$

где $F_{\chi^2(n;\delta)}(\cdot)$ — функция нецентрального распределения хи-квадрат с n степенями свободы и параметром нецентральности δ .

Выражение для ошибки второго рода относительно альтернативы H_1 дается формулой (28):

$$\beta_t = \sup_{\mu \in \mathcal{S}_r} \sup_{X \sim \mathcal{P}(\mu, \sigma^2 I)} \mathbf{P}_1\{\|X\| > t\} = \mathbf{s}_t^{(n)}(r, \sigma).$$

Для сравнения приведем еще два варианта вычисления ошибки второго рода: с помощью неравенства Маркова

$$(39) \quad \beta_t^M = \sup_{\mu \in \mathcal{S}_r} \min\{\mathbf{M}_1\|X\|^2/t^2, 1\} = \min\{n(h^2 + \sigma^2)/t^2, 1\}$$

и с помощью границы (33)

$$(40) \quad \beta_t^{\text{mix}} = \sup_{\mu \in \mathcal{S}_r} \mathbf{p}_t^{\text{mix}}(\mu, \sigma^2 I_n),$$

предложенной в [15] для более узкого по сравнению с семейством $\bigcup_{\mu \in \mathcal{S}_r} \mathcal{P}(\mu, \sigma^2 I_n)$ класса распределений.

Отметим, что при всех способах вычисления ошибки второго рода операция максимизации по $\mu \in \mathcal{S}_r$ может быть опущена.

Чтобы отделить вероятности обеих ошибок от единицы, предположим, что $\mathbf{M}_0\|X\|^2 > t^2$ и $\mathbf{M}_1\|X\|^2 < t^2$, т.е. $r^2 + n\sigma^2 < t^2 < n\sigma_0^2$, откуда

$$(41) \quad \sqrt{n(h^2 + \sigma^2)} < t < \sqrt{n}\sigma_0.$$

Тем самым ограничение

$$h^2 < \sigma_0^2 - \sigma^2$$

можно считать условием различимости пары конкурирующих гипотез, которое означает, что наличие неопределенного по направлению сдвига можно установить лишь при относительно небольшой его величине.

Теперь радиус t критической области $\mathcal{K} = \mathcal{B}_t$ можно рассматривать в качестве независимой переменной из диапазона (41) с учетом (38). Построим параметрические кривые (α_t^N, β_t) и (α_t^N, β_t^N) , отражающие взаимную зависимость вероятностей ошибок первого и второго рода для двух альтернатив H_1 и H_1^N (см. рис. 5). Для сравнения на тех же графиках изображены кривые (α_t^N, β_t^M) и $(\alpha_t^N, \beta_t^{\text{mix}})$, в которых вероятность ошибки второго рода оценивается с помощью выражений (39) и (40). Рисунки построены при следующем соотношении между параметрами: $\sigma/\sigma_0 = 0,3$, $h/\sigma = 0,7$ (для случая $n = 10$ и $n = 100$).

Из представленных рисунков можно сделать вывод о том, что на различимость гипотез кардинально влияет наличие условия независимости. Например, относительно гауссовской альтернативы H_1^N ошибка второго рода β_t^N

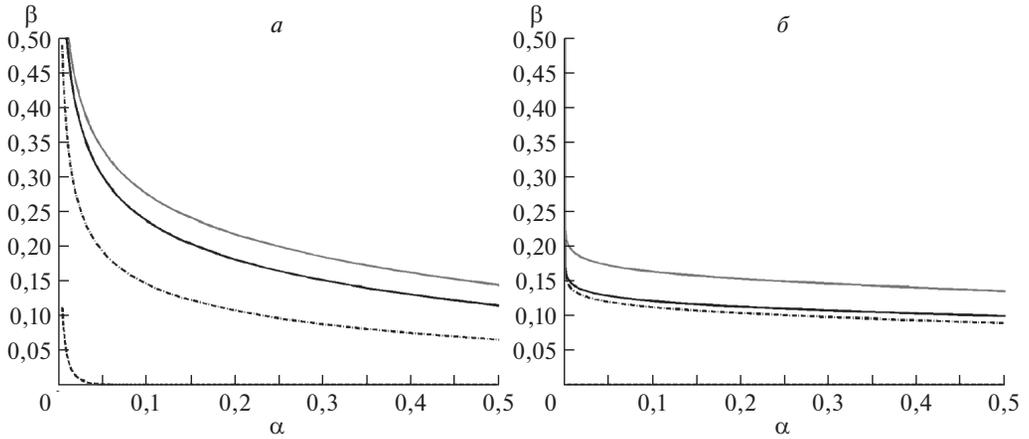


Рис. 5. Вероятности ошибок: (α_t^N, β_t) (сплошная черная), (α_t^N, β_t^N) (штриховая), (α_t^N, β_t^M) (сплошная серая), $(\alpha_t^N, \beta_t^{\text{mix}})$ (штрихпунктирная) для размерности $n = 10$ (слева) и $n = 100$ (справа).

быстро стремится к нулю при увеличении размерности n , которая здесь имеет смысл числа независимых наблюдений. Однако в случае общей альтернативы H_1 увеличение n не ведет к статистической избыточности, поскольку минимально возможное значение ошибки второго рода β_t отделено от нуля:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{t_n} \geq \frac{1}{(\sigma_0/\sigma)^2 - (h/\sigma)^2},$$

где t_n — любой критический уровень из диапазона (41).

Отметим, что такое положение дел остается в силе и для более узких классов распределений, например для смеси нормальных распределений со случайной ковариационной матрицей. Судя по рис. 5, на таком классе распределений известная граница ведет себя лишь немногим лучше, чем многомерная граница Селберга.

6. Заключение

В статье решена задача о точной верхней грани вероятности непопадания случайного вектора в шар при условии, что распределение — произвольное, моментные характеристики первого и второго порядков — заданные, а смещение математического ожидания относительно центра шара — ненулевое.

Если компоненты случайного вектора имеют одинаковую дисперсию и некоррелированы, то искомая чебышевская граница описывается аналитически и в одномерном случае совпадает с выражением, известным из неравенства Селберга. Для ковариационной матрицы общего вида решение поставленной задачи сводится к определению корня скалярного уравнения.

Если смещение достаточно мало, то вероятностная граница совпадает с известной верхней оценкой из неравенства Маркова, т.е. суммой вторых моментов, деленной на квадрат радиуса шара. Однако данная ситуация имеет место при весьма ограничительных условиях, что наиболее четко проявляется при сравнительно небольших дисперсиях. Поэтому более типичным оказывается случай, в котором искомая вероятностная граница определяется новым выражением, дающим существенно меньшее значение в сравнении с границей Маркова.

Полученные теоретические результаты подтверждены численными расчетами с использованием известного решения, основанного на технике линейных матричных неравенств. Для найденной вероятностной границы показано, что она может быть значительно точнее, чем известные ранее верхние оценки. Кроме того, приведены два примера ее использования: в задаче о гарантированной надежности доверительного эллипсоида и в задаче о проверке нормальной гипотезы против альтернативы с неопределенным распределением.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Заметим сначала, что $q(x | M) \rightarrow \infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$ в силу $\Lambda \succ O$. Поэтому в задаче (7) минимум достигается. Теперь сделаем замену переменных $u = x + \mu$:

$$\begin{aligned} q_t(M) &= \min_{u: \|u\| \geq t} \{ \lambda_0 + 2 \langle \lambda, u - \mu \rangle + \langle \Lambda (u - \mu), u - \mu \rangle \} = \\ &= q(-\mu | M) + \min_{u: \|u\| \geq t} \{ \langle \Lambda u, u \rangle + 2 \langle \nu, u \rangle \}, \end{aligned}$$

где $\nu = \lambda - \Lambda \mu$.

Если $\{u_k\}$ и $\{\nu_k\}$ — координаты векторов u и ν в разложении по собственному ортонормированному базису матрицы Λ , а $\{\ell_k\}$ — ее собственные значения, то

$$\langle \Lambda u, u \rangle + 2 \langle \nu, u \rangle = \sum_{k=1}^n (\ell_k u_k^2 + 2 \nu_k u_k) \geq \sum_{k=1}^n (\ell_k u_k^2 - 2 |\nu_k| |u_k|),$$

где нижняя оценка получается при $\text{sign } u_k = -\text{sign } \nu_k$.

Воспользуемся равенством Парсеваля $\|u\|^2 = u_1^2 + \dots + u_n^2$ и сделаем замену переменных $p = \text{col } [p_1, \dots, p_n]$, $p_k = u_k^2$. Тогда рассматриваемая задача минимизации превращается в задачу выпуклого программирования

$$\min_{u: \|u\| \geq t} \{ \langle \Lambda u, u \rangle + 2 \langle \nu, u \rangle \} = \min_{p \geq 0} \left\{ \sum_{k=1}^n (\ell_k p_k - 2 |\nu_k| \sqrt{p_k}) : \sum_{k=1}^n p_k \geq t^2 \right\},$$

к которой можно применить теорему Куна–Таккера о седловой точке:

$$\begin{aligned} \min_{u: \|u\| \geq t} \{ \langle \Lambda u, u \rangle + 2 \langle \nu, u \rangle \} = \\ = \max_{c \geq 0} \inf_{p \geq 0} \left\{ \sum_{k=1}^n (\ell_k p_k - 2 |\nu_k| \sqrt{p_k}) + c \left(t^2 - \sum_{k=1}^n p_k \right) \right\}. \end{aligned}$$

Точная нижняя грань равна сумме $t^2 c$ и n слагаемых следующего вида:

$$\inf_{p_k \geq 0} \{ (\ell_k - c) p_k - 2 |\nu_k| \sqrt{p_k} \} = \begin{cases} -\nu_k^2 / (\ell_k - c), & c < \ell_k, \\ 0, & c = \ell_k, \nu_k = 0, \\ -\infty, & c = \ell_k, \nu_k \neq 0 \text{ или } c > \ell_k. \end{cases}$$

Достаточно рассматривать только $c < \sigma_\Lambda = \min \ell_k$, а если максимум приходится на $c = \sigma_\Lambda$, то это можно учесть с помощью взятия точной верхней грани

$$\min_{u: \|u\| \geq t} \{ \langle \Lambda u, u \rangle + 2 \langle \nu, u \rangle \} = \sup_{0 \leq c < \sigma_\Lambda} \left\{ t^2 c - \sum_{k=1}^n \nu_k^2 / (\ell_k - c) \right\}.$$

После перехода к матричным обозначениям получаем (12), что и требовалось.

Доказательство леммы 2. В силу непрерывности функции

$$G(S) = \text{tr} [SR] + \langle (S + \gamma I)^{-1} b, b \rangle$$

ее точная нижняя грань на множестве $\{S: S \succ O\}$ будет такой же, как на замкнутом множестве $\mathbb{R}_+^{n \times n}$, на котором минимум достигается благодаря тому, что $G(S) \rightarrow \infty$ при $\text{tr} S \rightarrow \infty$.

В силу гладкости необходимое условие минимума в точке \hat{S} имеет вид

$$\text{tr} [\nabla G(\hat{S})(S - \hat{S})] \geq 0 \quad \forall S \succcurlyeq O,$$

где $\nabla G(S) = R - (S + \gamma I)^{-1} b b^* (S + \gamma I)^{-1}$ — градиент. Если H — любая симметричная матрица с нормой меньше минимального положительного собственного значения \hat{S} , а \hat{P} — ортопроектор на $\text{im} [\hat{S}]$, то $S = \hat{S} + \hat{P} H \hat{P} \succcurlyeq O$. Поэтому необходимое условие приводит к равенству $\hat{P} \nabla G(\hat{S}) \hat{P} = O$, т.е.

$$\hat{P} R \hat{P} = \hat{P} (S + \gamma I)^{-1} b b^* (S + \gamma I)^{-1} \hat{P}.$$

Но в правой части стоит матрица ранга не выше единицы, а слева ранг матрицы равен размерности $\text{im} [\hat{S}]$ в силу $\text{im} [R] = \mathbb{R}^n$. Следовательно, искомая матрица \hat{S} будет иметь ранг один (т.е. $\hat{S} = a a^*$, $a \neq 0$) или будет нулевой.

Поэтому достаточно искать минимум функции

$$g(a) = G(a a^*) = \langle R a, a \rangle + \langle (a a^* + \gamma I)^{-1} b, b \rangle, \quad a \in \mathbb{R}^n.$$

С помощью леммы об обращении матрицы

$$(aa^* + \gamma I)^{-1} = \gamma^{-1} \left(I - \frac{1}{\|a\|^2 + \gamma} aa^* \right)$$

получим

$$g(a) = \frac{\|b\|^2}{\gamma} + \langle Ra, a \rangle - \frac{\langle a, b \rangle^2}{\gamma(\|a\|^2 + \gamma)}$$

и

$$\frac{\nabla g(a)}{2} = Ra - \frac{\langle a, b \rangle b}{\gamma(\|a\|^2 + \gamma)} + \frac{\langle a, b \rangle^2 a}{\gamma(\|a\|^2 + \gamma)^2}.$$

Равенство градиента нулю дает систему уравнений

$$a = \sqrt{\xi/\gamma} (R + \xi I)^{-1} b, \quad \xi = \frac{\langle a, b \rangle^2}{\gamma(\|a\|^2 + \gamma)^2},$$

у которой есть тривиальное решение: $a = 0$, $\xi = 0$. Но если $a \neq 0$, то $\xi > 0$ и второе уравнение оказывается замкнутым относительно этой переменной:

$$\langle (R + \xi I)^{-1} b, b \rangle = \xi \langle (R + \xi I)^{-2} b, b \rangle + \gamma^2,$$

что равносильно уравнению (15).

Левую часть (15) можно представить через собственные значения $\{r_k\}$ матрицы R и координаты $\{b_k\}$ вектора b в собственном ортонормальном базисе:

$$\sum_{k=1}^n \frac{r_k b_k^2}{(r_k + \xi)^2}.$$

Следовательно, левая часть уравнения (15) является непрерывной убывающей функцией, причем ее предельные значения при $\xi \downarrow 0$ и $\xi \uparrow \infty$ равны соответственно $\langle R^{-1} b, b \rangle$ и нулю. Поэтому в случае, когда правая часть уравнения (15) находится между этими значениями, решение $\xi > 0$ существует и определено единственным способом.

Таким образом, если $\gamma^2 < \langle R^{-1} b, b \rangle$, то функция $g(a)$ имеет две критические точки: нулевую и найденную выше $a \neq 0$, причем

$$g(0) = \|b\|^2/\gamma > g(a) = \langle (I - \xi^2(R + \xi I)^{-2}) b, b \rangle / \gamma.$$

Если же $\langle R^{-1} b, b \rangle \geq \gamma^2$, то уравнение (15) не имеет положительных решений, поэтому ноль — единственная критическая точка.

Итак, в обоих случаях получаем, что искомая нижняя грань определяется выражением (14), что и требовалось доказать.

Доказательство леммы 3. Сделаем в (23) замену $k = d_\xi/(1 + d_\xi)$, которая является взаимно однозначной в силу того, что d_ξ убывает по $\xi > 0$. Поэтому ограничение $k \in (0, d_0/(d_0 + 1))$ равносильно условию $\xi \in (0, \infty)$.

С учетом (17) и (18) неравенство (23) преобразуется к виду

$$\operatorname{tr} R + \frac{d_\xi}{d_\xi + 1} (\|\mu\|^2 - t^2) + \frac{\|\mu\|^2 - \xi^2 \langle (R + \xi I)^{-2} \mu, \mu \rangle}{d_\xi + 1} \geq 0$$

или, что то же самое,

$$(d_\xi + 1)(\operatorname{tr} R + \|\mu\|^2) - d_\xi t^2 - \xi^2 \langle (R + \xi I)^{-2} \mu, \mu \rangle \geq 0.$$

С использованием обозначений (24) и $\eta = t^2 - (\operatorname{tr} R + \|\mu\|^2)$ получим равносильное неравенство

$$\operatorname{tr} R + \|\mu\|^2 \geq \langle (\eta R + \xi^2 I)(R + \xi I)^{-2} \mu, \mu \rangle,$$

которое принимает вид $G(\xi) \leq p/(1 - p)$, где $G(\xi)$ — левая часть уравнения (25).

Предел $G(\xi)$ при $\xi \uparrow \infty$ равен $\|\mu\|^2/\eta$, что меньше $p/(1 - p)$. Предел $G(\xi)$ при $\xi \downarrow 0$ равен d_0 , что больше $p/(1 - p)$ тогда и только тогда, когда ограничения (22) несовместны.

Рассмотрим этот случай. Тогда $G(0) > p/(1 - p) > G(\infty)$, что в силу гладкости $G(\xi)$ позволяет утверждать, что уравнение (25) имеет решение на интервале $(0, \infty)$.

Проверим, что оно будет единственным. Для этого вычислим производную:

$$\begin{aligned} G'(\xi) &= \left\langle \left\{ 2\xi\eta^{-1}(R + \xi I)^{-2} - 2(R + \xi^2\eta^{-1}I)(R + \xi I)^{-3} \right\} \mu, \mu \right\rangle = \\ &= 2(\xi\eta^{-1} - 1) \langle (R + \xi I)^{-3} R \mu, \mu \rangle, \end{aligned}$$

с помощью которой получаем, что левее точки η функция $G(\xi)$ убывает, а правее возрастает. Следовательно, $G(\eta) < G(\infty) < p/(1 - p)$, что с учетом $G(0) > p/(1 - p)$ позволяет утверждать, что точка $\hat{\xi}$, дающая решение уравнения $G(\xi) = p/(1 - p)$, принадлежит интервалу $(0, \eta)$ и является единственной.

Отсюда следует $\{\xi > 0: G(\xi) \leq p/(1 - p)\} = [\hat{\xi}, \infty)$. Тогда множество решений неравенства (23) имеет вид $(0, \hat{k}]$, где $\hat{k} = d_{\hat{\xi}}/(d_{\hat{\xi}} + 1)$ в силу обратной монотонности замены переменной.

Остается рассмотреть случай, когда ограничения (22) совместны. В этом случае $G(0) \leq p/(1 - p)$, откуда $G(\xi) \leq p/(1 - p)$ для всех $\xi > 0$, что равносильно тому, что неравенство (23) выполнено при любых $k \in (0, d_0/(d_0 + 1))$.

Лемма доказана.

Доказательство следствия. Заметим сначала

$$p = (n\sigma^2 + r^2)/t^2, \quad d_0 = r^2/\sigma^2, \quad d_\xi = \sigma^2 r^2 / (\sigma^2 + \xi)^2.$$

Достаточно разобрать только случай (i). Согласно (26) он реализуется при $p(\sigma^2 + r^2) < r^2$. При этом условии запишем уравнение (25)

$$r^2 (\sigma^2 + \xi^2/\eta) (\sigma^2 + \xi)^{-2} = p/(1-p), \quad 0 < \xi < \eta = t^2(1-p).$$

Перепишем его в виде $r^2((1-p)\sigma^2 + \xi^2/t^2) = p(\sigma^2 + \xi)^2$ и преобразуем к квадратному уравнению

$$(n/t^2) \xi^2 + 2p\xi + p\sigma^2 - (1-p)r^2 = 0.$$

Его свободный коэффициент отрицателен по условию. Следовательно, оба корня вещественные и разного знака. Тогда

$$\xi = t^2(-p + \sqrt{D/4})/n$$

— искомый положительный корень, где

$$\begin{aligned} D/4 &= p^2 - (n/t^2) (p\sigma^2 - (1-p)r^2) = \\ &= p^2 - (p - r^2/t^2) p + (1-p) nr^2/t^2 = (p + (1-p)n) r^2/t^2, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\sigma^2 + \xi = \left\{ -r^2 + rt\sqrt{p + (1-p)n} \right\} / n.$$

Теперь остается подставить это выражение в (26), (i):

$$\begin{aligned} p_t(\mu, \sigma^2 I_n) &= \frac{1}{1 + 1/d_\xi} = \frac{1}{1 + (\sigma^2 + \xi)^2/(\sigma^2 r^2)} = \\ &= \frac{1}{1 + \left\{ -r + t\sqrt{p + (1-p)n} \right\}^2 / (\sigma^2 n^2)}. \end{aligned}$$

Полученное выражение совпадает с (28), (i), что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lin F., Fang X., Gao Z.* Distributionally robust optimization: A review on theory and applications // Numerical Algebra, Control & Optimization. 2022. V. 12. No. 1. P. 159–212.
2. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
3. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
4. *Marshall A.W., Olkin I.* Multivariate Chebyshev inequalities // Ann. Math. Stat. 1960. V. 31. No. 4. P. 1001–1014.

5. *El Ghaoui L., Oks M., Oustry F.* Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach // *Operations Research*. 2003. V. 51. No. 4. P. 543–556.
6. *Popescu I.* Robust mean-covariance solutions for stochastic optimization and applications // *Operations Research*. 2007. V. 55. No. 1. P. 98–112.
7. *Панков А.Р., Семенikhин К.В.* О минимаксном оценивании по вероятностному критерию // *АиТ*. 2007. № 3. С. 66–82.
Pankov A.R., Semenikhin K.V. Minimax Estimation by Probabilistic Criterion // *Autom. Remote Control*. 2007. V. 68. No. 3. P. 430–445.
8. *Семенikhин К.В.* Минимаксность линейных оценок неопределенно-стохастического вектора по обобщенным вероятностным критериям // *АиТ*. 2007. № 11. С. 88–104.
Semenikhin K.V. Minimax Nature of the Linear Estimates of the Indefinite Stochastic Vector from the Generalized Probabilistic Criteria // *Autom. Remote Control*. 2007. V. 68. No. 11. P. 1970–1985.
9. *Delage E., Ye Y.* Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems // *Operations Research*. 2010. V. 58. P. 595–612.
10. *Zymler S., Kuhn D., Rustem B.* Distributionally robust joint chance constraints with second-order moment information // *Math. Program.* 2013. V. 137. P. 167–198.
11. *Kitahara T., Mizuno S., Nakata K.* Quadratic and convex minimax classification problems // *J. Operations Research Society Of Japan*. 2008. V. 51. No. 2. P. 191–201.
12. *Stellato B., Van Parys B.P.G., Goulart P.J.* Multivariate Chebyshev inequality with estimated mean and variance // *American Statistician*. 2017. V. 71. No. 2. P. 123–127.
13. *Vandenbergh L., Boyd S., Comanor K.* Generalized Chebyshev bounds via semidefinite programming // *SIAM Review*. 2007. V. 49. No. 1. P. 52–64.
14. *Csiszar V., Fegyverneki T., Mori T.F.* Explicit multivariate bounds of Chebyshev type // *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* 2014. V. 42. P. 109–125.
15. *Csiszar V., Mori T.F.* A Bienaymé–Chebyshev inequality for scale mixtures of the multivariate normal distribution // *Math. Inequalities & Applications*. 2009. V. 12. No. 4. P. 839–844.
16. *Bertsimas D., Popescu I.* Optimal inequalities in probability theory: A convex optimization approach // *SIAM J. Optimization*. 2005. V. 15. No. 3. P. 780–804.
17. *Van Parys B.P.G., Goulart P.J., Kuhn D.* Generalized Gauss Inequalities via Semidefinite Programming // *Math. Program.* 2016. V. 156. P. 271–302.
18. *Barmish B.R., Lagoa C.M.* The Uniform Distribution: A Rigorous Justification for Its Use in Robustness Analysis // *Math. Control Signal. Syst.* 1997. V. 10. P. 203–222.
19. *Кибзун А.И.* О наилучшем распределении в задачах стохастической оптимизации с функцией вероятности // *АиТ*. 1998. № 11. С. 104–116.
Kibzun A.I. On the Worst-Case Distribution in Stochastic Optimization Problems with Probability Function // *Autom. Remote Control*. 1998. V. 59. No. 11. P. 1587–1597.

20. *Кан Ю.С.* Об обосновании принципа равномерности в задаче оптимизации вероятностного показателя качества // *АиТ.* 2000. № 1. С. 54–70.
Kan Yu.S. On the Justification of the Uniformity Principle in the Optimization of a Probability Performance Index // *Autom. Remote Control.* 2000. V. 61. No. 1. P. 50–64.
21. *Sturm J.F.* Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones // *Optimization Methods & Software.* 1999. V. 11. No. 12. P. 625–653.
22. *Grant M.C., Boyd S.P.* The CVX Users' Guide. Release 2.1. CVX Research, Inc. 2018. [Online]. Available: <http://cvxr.com/cvx>.
23. *Платонов Е.Н., Семенikhин К.В.* Методы синтеза минимаксных оценок при наличии поэлементных ограничений на ковариационную матрицу // *АиТ.* 2016. № 5. С. 82–108.
Platonov E.N., Semenikhin K.V. Methods for Minimax Estimation under Element-wise Covariance Uncertainty // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 5. P. 817–838.
24. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.
25. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 03.02.2022

После доработки 17.03.2022

Принята к публикации 28.04.2022

Стохастические системы

© 2022 г. А.М. ГОРЦЕВ, д-р техн. наук (dekanat@fpmk.tsu.ru),
Л.А. НЕЖЕЛЬСКАЯ, д-р физ.-мат. наук (ludne@mail.ru)
(Национальный исследовательский Томский
государственный университет)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СМО С ВХОДЯЩИМ АСИНХРОННЫМ ПОТОКОМ СОБЫТИЙ

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с входящим асинхронным дважды стохастическим потоком запросов (ММРР-поток — Markovian Modulated Poisson Process) с двумя состояниями. Приводятся явные аналитические формулы для стационарного распределения вероятностей состояний системы, а также явные аналитические выражения для числовых характеристик системы: средней длины очереди, среднего числа запросов в системе, вероятности простоя системы. Приводятся численные результаты, представленные в виде таблиц, характеристик системы. Рассматривается частный случай входящего потока запросов — асинхронный альтернирующий поток с двумя состояниями (SPP-поток — Switched Poisson Process).

Ключевые слова: асинхронный поток (ММРР-поток) запросов, однолинейная система массового обслуживания (СМО), стационарное распределение вероятностей состояний системы, числовые характеристики.

DOI: 10.31857/S0005231022080049, **EDN:** AGTWDG

1. Введение

Системы и сети массового обслуживания (СМО и СеМО) широко применяются в качестве математических моделей различных технических, физических, экономических и других систем. Случайные потоки событий, являющиеся основными элементами СМО и СеМО, применяются в качестве математических моделей различных реальных процессов, протекающих в таких системах. В частности, случайные потоки событий служили и служат математическими моделями информационных потоков запросов в телекоммуникационных сетях.

Современными математическими моделями информационных потоков в телекоммуникационных сетях являются коррелированные потоки. Систематизированное изложение СМО и СеМО с коррелированными потоками приведено в монографии [1], в своем роде единственной в мировой литературе.

Здесь отметим, что в подавляющем большинстве работ по исследованию СМО и СеМО до 80-х гг. прошлого века в качестве входящих потоков собы-

тий рассматривались стационарные пуассоновские потоки событий. Однако в связи с интенсивным развитием вычислительной техники, спутниковых, компьютерных, беспроводных и мобильных сетей связи модель простейшего потока перестала быть адекватной реальным информационным потокам сообщений. Поэтому в это же время была предпринята успешная попытка создания адекватных математических моделей информационных потоков в телекоммуникационных системах и сетях — так называемых дважды стохастических потоков. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: первый класс составляют потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть непрерывный случайный процесс [2, 3]; второй — потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным (произвольным) числом состояний. Первые результаты исследований потоков второго класса были опубликованы практически одновременно в 1979 г. в [4–6]. В [4, 5] указанные потоки получили название МС(Markov chain)-потоки, в [6] — MVP(Markov versatile processes)-потоки. В [7, 8] описанные выше потоки названы МАР(Markovian Arrival Process)-потоками событий.

Зарубежными и отечественными авторами при описании подобных входящих коррелированных потоков событий в СМО и СеМО используются термины: дважды стохастические потоки событий, МАР-потоки, МС-потоки и др. В зависимости от того, каким образом происходит переход интенсивности из состояния в состояние, МС-потоки можно разделить на три типа: синхронные потоки (у которых состояние интенсивности меняется в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий) [9]; асинхронные потоки (с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий) [10]; полусинхронные потоки (у которых одна часть состояний интенсивности меняется в моменты наступления событий потока, другая часть — в произвольные моменты времени, не связанные с моментами наступления событий потока) [11]. Аналитическое исследование СМО и СеМО с коррелированными потоками — достаточно затруднительный процесс [1], тем более нахождение, скажем, характеристик СМО и СеМО в явном виде представляет собой сложную задачу, порой неразрешимую.

В настоящей статье проводится аналитическое исследование однолинейной СМО с входящим асинхронным потоком событий с двумя состояниями [10, 12–14] (ММРР-поток с двумя состояниями [1]), являющимся частным случаем МАР-потока, с бесконечным числом мест для ожидания и экспоненциальным обслуживанием.

Для стационарного режима функционирования СМО выводятся явные аналитические выражения средней длины очереди, среднего числа сообщений в системе и вероятности простоя системы.

Подчеркнем, что исследования, связанные с анализом СМО и СеМО с входящими ММРР-потоками запросов либо их модификациями, проводят-

ся с 80-х гг. прошлого века до настоящего времени. Кроме [10, 12–14] отметим статьи [15, 16], где рассматриваются СеМО с собственно входящими ММРР-потоками запросов. Начиная с 2010 г. по настоящее время рассматриваются в основном СМО и СеМО с входящими МАР-потоками запросов [17] либо с разновидностями ММРР-потоков [18]. Общим для работ [15–18] является проводимый в них численный анализ СМО и СеМО.

2. Математическая модель системы. Постановка задачи

Рассматривается однолинейная СМО с ожиданием и длительностью обслуживания, распределенной по экспоненциальному закону $F(\tau) = 1 - \exp\{-\mu\tau\}$, $\tau \geq 0$, с параметром μ ($\mu \geq 0$). На вход обслуживающего прибора поступает асинхронный поток событий (сообщений, запросов и т.д.), сопровождающий процесс (интенсивность) $\lambda(t)$ которого есть кусочно-постоянный случайный процесс с двумя состояниями: $\lambda(t) = \lambda_1$ (первое состояние) либо $\lambda(t) = \lambda_2$ (второе состояние) ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0$). Будем говорить, что имеет место j -е состояние процесса $\lambda(t)$, если $\lambda(t) = \lambda_j$, $j = 1, 2$. Если имеет место j -е состояние процесса $\lambda(t)$, то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_j$, имеет место пуассоновский поток событий с параметром (интенсивностью) λ_j , $j = 1, 2$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ (потока) в j -м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром $\alpha_j > 0$, $j = 1, 2$. Таким образом, переход из состояния в состояние процесса $\lambda(t)$ осуществляется в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события пуассоновского потока с параметром λ_j , $j = 1, 2$ (свойство асинхронных потоков). Описанное выше поведение входящего асинхронного потока определяет его как ММРР-поток событий со скачкообразно изменяющейся интенсивностью $\lambda(t)$ [1].

Рассматривается стационарный режим функционирования СМО. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ — сопровождающий стационарный кусочно-постоянный скрытый (принципиально ненаблюдаемый) транзитивный марковский процесс с двумя состояниями λ_1 и λ_2 .

Обозначим: $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, — значение длительности k -го интервала между соседними событиями потока ($\tau_k \geq 0$). Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятности значений длительности k -го интервала равна $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого $k \geq 1$. В силу этого момент времени t_k без потери общности можно положить равным нулю или, что то же самое, момент наступления события есть $\tau = 0$. В [19] получено явное выражение для плотности вероятности $p(\tau)$:

$$(1) \quad p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau},$$

$$\tau \geq 0, \quad \gamma = \frac{1}{z_2 - z_1} \left(z_2 - \frac{\lambda_1^2 \alpha_2 + \lambda_2^2 \alpha_1}{\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1} \right),$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2) \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2} \right].$$

В (1) z_1, z_2 — корни характеристического уравнения $z^2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2)z + (\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2) - \alpha_1\alpha_2 = 0$, при этом из вида z_1, z_2 следует, что $0 < z_1 < z_2$, γ — некоторый коэффициент.

Пусть $(t_k, t_{k+1}), (t_{k+1}, t_{k+2})$ — два смежных интервала, значения длительностей которых есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k, \tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$ соответственно; их расположение на временной оси в силу стационарности потока произвольно. Тогда, полагая $k = 1$, будем рассматривать два соседних интервала $(t_1, t_2), (t_2, t_3)$ с соответствующими значениями длительностей $\tau_1 = t_2 - t_1, \tau_2 = t_3 - t_2$; $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события потока; $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления следующего события потока. Соответствующая совместная плотность вероятности при этом есть [19]

$$(2) \quad p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2) + \frac{\lambda_1\lambda_2\alpha_1\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(z_2 - z_1)^2(\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1)^2} (z_1e^{-z_1\tau_1} - z_2e^{-z_2\tau_1}) \times \\ \times (z_1e^{-z_1\tau_2} - z_2e^{-z_2\tau_2}), \quad \tau_1 \geq 0, \quad \tau_2 \geq 0,$$

где $z_1, z_2, p(\tau_k)$ определены в (1) для $\tau = \tau_k, k = 1, 2$.

Подчеркнем, что из (2) следует, что в общем случае асинхронный поток является коррелированным потоком. Только в частных случаях он становится рекуррентным либо вырождается в простейший.

Частный случай 1: $\lambda_2 = 0$ — асинхронный альтернирующий поток с двумя состояниями [20] (SPP-поток [21]). Тогда $p(\tau)$ определяется формулой (1), где

$$\gamma = 1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{z_2 - z_1}, \\ z_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 + \alpha_1 + \alpha_2) \mp \sqrt{(\lambda_1 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2} \right]; \quad 0 < z_1 < z_2.$$

Из (2) получаем $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$. Так как моменты наступления событий в потоке t_1, \dots, t_k порождают вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, то нетрудно показать, что $p(\tau_1, \dots, \tau_k) = p(\tau_1) \dots p(\tau_k), k \geq 2$. Таким образом, асинхронный альтернирующий поток с двумя состояниями всегда является рекуррентным.

Частный случай 2: $\lambda_1 = \lambda_2$ — простейший поток с параметром λ_1 . Из (1) находим $z_1 = \lambda_1, z_2 = \lambda_1 + \alpha_1 + \alpha_2, \gamma = 1; p(\tau) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau}, \tau \geq 0$.

Частный случай 3: $\alpha_1 = 0$ — простейший поток с параметром λ_1 . Из (1) получаем $z_1 = \lambda_2 + \alpha_2, z_2 = \lambda_1, \gamma = 0; p(\tau) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau}, \tau \geq 0$.

Частный случай 4: $\alpha_2 = 0$ — простейший поток с параметром λ_2 . Из (1) находим $z_1 = \lambda_2, z_2 = \lambda_1 + \alpha_1, \gamma = 1; p(\tau) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau}, \tau \geq 0$.

Задача анализа рассматриваемой СМО заключается в нахождении явного аналитического вида числовых характеристик системы: а) среднего числа сообщений в очереди, б) среднего числа сообщений в системе, в) вероятности простоя обслуживающего прибора.

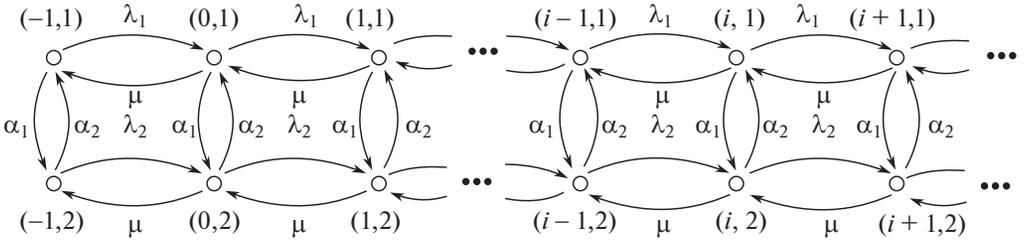


Рис. 1. Стохастический граф переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние.

Обозначим через $i(t)$ число сообщений в очереди в произвольный момент времени t ($i(t) = 0, 1, \dots$). Случайный процесс $i(t)$ не является марковским, так как входящий асинхронный поток обладает последствием. Для того чтобы построить марковский процесс, необходимо учесть состояние входящего потока.

Введем дополнительную переменную $j(t)$ — состояние входящего асинхронного потока (состояние сопровождающего процесса $\lambda(t)$ в произвольный момент времени t), $j(t) = 1, 2$. Если $j(t) = 1$, то $\lambda(t) = \lambda_1$; если $j(t) = 2$, то $\lambda(t) = \lambda_2$. Тогда двумерный процесс $(i(t), j(t))$ становится марковским. Так как рассматривается стационарный режим, то состояние системы будем обозначать как (i, j) , $i = 0, 1, \dots$, $j = 1, 2$. Отметим, что возможны еще два состояния: $(-1, 1)$, $(-1, 2)$, при которых в системе находится ноль сообщений (длина очереди равна нулю и прибор не обслуживает — прибор простаивает).

Сделанные предпосылки позволяют представить математическую модель исследуемой СМО в виде связанного стохастического графа [22], представленного на рис. 1.

Здесь вершинам графа соответствуют состояния СМО; каждой дуге графа поставлены в соответствие интенсивности переходов из состояния в состояние (инфинитезимальные характеристики), причем петли в каждом состоянии опущены; каждая вершина графа (каждое состояние) достижима и возвратна.

3. Вывод числовых характеристик системы

Обозначим через $P(i, 1)$, $P(i, 2)$ стационарные (финальные) вероятности состояний системы ($i = -1, 0, \dots$). Тогда для сечений стохастического графа $F_{i1} = \{(i-1, 1; i, 1), (i, 1; i-1, 1), (i, 1; i+1, 1), (i+1, 1; i, 1), (i, 1; i, 2), (i, 2; i, 1)\}$, $F_{i2} = \{(i-1, 2; i, 2), (i, 2; i-1, 2), (i, 2; i+1, 2), (i+1, 2; i, 2), (i, 2; i, 1), (i, 1; i, 2)\}$, $i = 0, 1, \dots$, имеет место бесконечная система разностных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$(3) \quad \begin{aligned} \mu P(i+1, 1) - (\lambda_1 + \alpha_1 + \mu)P(i, 1) + \lambda_1 P(i-1, 1) + \alpha_2 P(i, 2) &= 0, \\ \mu P(i+1, 2) - (\lambda_2 + \alpha_2 + \mu)P(i, 2) + \lambda_2 P(i-1, 2) + \alpha_1 P(i, 1) &= 0, \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Решение системы (3) будем искать в виде $P(i, 1) = \xi^i$, $P(i, 2) = C\xi^i$ ($i = 0, 1, \dots$). Тогда характеристическое уравнение для системы (3) примет вид

$$(4) \quad (\xi - 1) \left\{ \mu^2 \xi^3 - \mu(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2 + \mu) \xi^2 + \right. \\ \left. + [\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1(\alpha_2 + \mu) + \lambda_2(\alpha_1 + \mu)] \xi - \lambda_1 \lambda_2 \right\} = 0.$$

Сначала рассмотрим условия существования вероятностей $P(i, 1)$, $P(i, 2)$, $i = -1, 0, \dots$ (условия существования стационарного режима функционирования рассматриваемой СМО). Математическое ожидание случайной величины τ — длительности интервала между соседними событиями в асинхронном потоке — определится в виде

$$M(\tau) = \int_0^{\infty} \tau p(\tau) d\tau,$$

где плотность вероятности $p(\tau)$ задана в (1). Подставляя в выражение для $M(\tau)$ плотность $p(\tau)$, находим $M(\tau) = (\alpha_1 + \alpha_2)/(\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1)$. Тогда математическое ожидание числа событий во входящем коррелированном асинхронном потоке в единицу времени определится в виде $\lambda = 1/M(\tau) = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$, где π_j — стационарная вероятность j -го состояния потока, $j = 1, 2$; при этом $\pi_1 = \alpha_2/(\alpha_1 + \alpha_2)$, $\pi_2 = \alpha_1/(\alpha_1 + \alpha_2)$ [10].

Рассмотрим ситуацию, когда $\lambda = \mu$. Подставляя $\mu = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$ в (4), находим характеристическое уравнение для рассматриваемой ситуации:

$$(5) \quad (\xi - 1)^2 \left[(\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2)^2 \xi^2 - \right. \\ \left. - (\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2) (\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2) \xi + \lambda_1 \lambda_2 \right] = 0.$$

Характеристическое уравнение (5) имеет кратные корни. Тогда общее решение системы разностных уравнений (3), в которой $\mu = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$, выражается в виде

$$(6) \quad P(i, 1) = D_1 \xi_1^i + D_2 i \xi_2^i + D_3 \xi_3^i + D_4 \xi_4^i, \\ P(i, 2) = B_1 D_1 \xi_1^i + B_2 D_2 i \xi_2^i + B_3 D_3 \xi_3^i + B_4 D_4 \xi_4^i, \quad i = 0, 1, \dots$$

В (6) $P_s(i, 1) = D_s \xi_s^i$; $P_s(i, 2) = B_s D_s \xi_s^i$ — частные решения системы (3); B_s, D_s — некоторые константы, определяемые из граничных условий, $s = \overline{1, 4}$; $\xi_1 = \xi_2 = 1$,

$$\xi_{3,4} = \frac{(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2) \mp \sqrt{(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2)^2 - 4\lambda_1 \lambda_2}}{2(\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2)}, \quad 0 < \xi_3 < 1 < \xi_4.$$

Поскольку $P(i, 1)$, $P(i, 2)$ — вероятности, то для них должно выполняться условие нормировки $\sum_{i=-1}^{\infty} P(i, 1) + \sum_{i=-1}^{\infty} P(i, 2) = 1$. Тогда необходимым условием ее выполнения является выполнение предельных соотношений: $\lim_{i \rightarrow \infty} P(i, 1) = 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} P(i, 2) = 0$ при $i \rightarrow \infty$. В противном случае ряды $\sum_{i=-1}^{\infty} P(i, 1)$, $\sum_{i=-1}^{\infty} P(i, 2)$ будут расходиться. С учетом сказанного общее решение (6), где $D_1 = D_2 = D_4 = 0$, запишется в виде

$$(7) \quad P(i, 1) = D_3 \xi_3^i, \quad P(i, 2) = B_3 D_3 \xi_3^i, \quad i = 0, 1, \dots$$

Определим константу B_3 . Подставляя (7) в первое уравнение системы (3), в котором $\mu = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$, получаем

$$(8) \quad B_3 = [\lambda_1 + \alpha_1 + (\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2)(1 - \xi_3) - (\lambda_1 / \xi_3)] / \alpha_2.$$

Подставляя в (8) явные выражения для π_1, π_2, ξ_3 , находим

$$B_3 = -\frac{1}{2\lambda_2(\alpha_1 + \alpha_2)} \left[(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) \sqrt{(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2)^2 - 4\lambda_1 \lambda_2} \right].$$

Таким образом, $B_3 < 0$. Тогда из (7) следует, что $D_3 < 0$. Последнее, в свою очередь, приводит к противоречию: $P(i, 1) < 0$, $i \geq 0$; $P(i, 2) > 0$, $i \geq 0$. Противоречие устраняется, если положить $D_3 = 0$: $P(i, 1) = P(i, 2) = 0$, $i \geq 0$. Отсюда следует, что при $\lambda = \mu$ стационарное распределение $P(i, 1)$, $P(i, 2)$, $i \geq 0$, не существует и тем более не существует при $\lambda > \mu$.

Перейдем к случаю $\lambda < \mu$ ($\lambda = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$). Общее решение системы (3) с учетом (4) выпишется в виде

$$(9) \quad \begin{aligned} P(i, 1) &= A_1 \xi_1^i + A_2 \xi_2^i + A_3 \xi_3^i + A_4 \xi_4^i, \\ P(i, 2) &= C_1 A_1 \xi_1^i + C_2 A_2 \xi_2^i + C_3 A_3 \xi_3^i + C_4 A_4 \xi_4^i, \quad i = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где $P_s(i, 1) = A_s \xi_s^i$; $P_s(i, 2) = C_s A_s \xi_s^i$ — частные решения системы (3); C_s, A_s — некоторые константы, определяемые из граничных условий, $s = \overline{1, 4}$; $\xi_4 = 1$; ξ_1, ξ_2, ξ_3 — корни кубического уравнения

$$(10) \quad \begin{aligned} \mu^2 \xi^3 - \mu(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2 + \mu) \xi^2 + \\ + [\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1(\alpha_2 + \mu) + \lambda_2(\alpha_1 + \mu)] \xi - \lambda_1 \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Можно показать, что все корни уравнения (10) вещественные и положительные: $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1 < \xi_3$. Как отмечено выше, необходимо выполнение предельных соотношений $\lim_{i \rightarrow \infty} P(i, 1) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(i, 2) = 0$ при $i \rightarrow \infty$, откуда следует, что $A_3 = A_4 = 0$. Тогда общее решение (9) примет вид

$$(11) \quad P(i, 1) = A_1 \xi_1^i + A_2 \xi_2^i; \quad P(i, 2) = C_1 A_1 \xi_1^i + C_2 A_2 \xi_2^i, \quad i = 0, 1, \dots$$

Подставляя частное решение $P_s(i, 1) = A_s \xi_s^i$, $P_s(i, 2) = C_s A_s \xi_s^i$, $i = 0, 1, \dots$, $s = 1, 2$, в первое уравнение системы (3) сначала для $s = 1$, затем для $s = 2$, находим константу C_s в виде

$$(12) \quad C_s = [\lambda_1 + \alpha_1 + \mu - \mu \xi_s - (\lambda_1 / \xi_s)] / \alpha_2, \quad s = 1, 2.$$

Для определения констант A_i , $i = 1, 2$, и вероятностей $P(-1, 1)$, $P(-1, 2)$ нужно привлечь граничные уравнения и условие нормировки.

Сечения стохастического графа

$$F_{-1,1} = \{(-1, 1; 0, 1), (0, 1; -1, 1), (-1, 1; -1, 2), (-1, 2; -1, 1)\},$$

$$F_{-1,2} = \{(-1, 2; 0, 2), (0, 2; -1, 2), (-1, 2; -1, 1), (-1, 1; -1, 2)\},$$

$F = \{(i, 1; i, 2), (i, 2; i, 1), i = -1, 0, 1, \dots\}$ соответственно определяют граничные уравнения:

$$(13) \quad \begin{aligned} (\lambda_1 + \alpha_1)P(-1, 1) &= \mu P(0, 1) + \alpha_2 P(-1, 2), (\lambda_2 + \alpha_2)P(-1, 2) = \\ &= \mu P(0, 2) + \alpha_1 P(-1, 1), \alpha_1 P(-1, 1) + \alpha_1 \sum_{i=0}^{\infty} P(i, 1) = \\ &= \alpha_2 P(-1, 2) + \alpha_2 \sum_{i=0}^{\infty} P(i, 2). \end{aligned}$$

Присоединяя к (13) условие нормировки

$$P(-1, 1) + P(-1, 2) + \sum_{i=0}^{\infty} [P(i, 1) + P(i, 2)] = 1,$$

с учетом (11) получаем систему уравнений для определения неизвестных A_i , $i = 1, 2$, $P(-1, 1)$, $P(-1, 2)$. Решая (13), находим

$$(14) \quad P(-1, 1) = (\mu/a)(\lambda_2 + \alpha_2 + \alpha_2 C_1)A_1 + (\mu/a)(\lambda_2 + \alpha_2 + \alpha_2 C_2)A_2,$$

$$P(-1, 2) = (\mu/a)[\alpha_1 + (\lambda_1 + \alpha_1)C_1]A_1 + (\mu/a)[\alpha_1 + (\lambda_1 + \alpha_1)C_2]A_2,$$

$$A_1 = \lambda_1 \frac{(1/\xi_2) - (\mu/a)(\lambda_2 + \alpha_2 + \alpha_2 C_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2)(b_1 a_2 - a_1 b_2)},$$

$$A_2 = -\lambda_1 \frac{(1/\xi_1) - (\mu/a)(\lambda_2 + \alpha_2 + \alpha_2 C_1)}{(\alpha_1 + \alpha_2)(b_1 a_2 - a_1 b_2)},$$

$$a = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1; \quad a_1 = (\mu/a)(\lambda_2 + \alpha_2 + \alpha_2 C_1) + 1/(1 - \xi_1);$$

$$a_2 = (\mu/a)[\alpha_1 + (\lambda_1 + \alpha_1)C_1] + C_1/(1 - \xi_1);$$

$$b_1 = (\mu/a)(\lambda_2 + \alpha_2 + \alpha_2 C_2) + 1/(1 - \xi_2);$$

$$b_2 = (\mu/a)[\alpha_1 + (\lambda_1 + \alpha_1)C_2] + C_2/(1 - \xi_2),$$

C_1, C_2 определены в (12); ξ_1, ξ_2 – корни кубического уравнения (10), лежащие в интервале $(0, 1)$.

Таблица 1. Зависимость вероятности простоя $P(-1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $\alpha_1 = 0,1; 0,2; \dots; 0,5$

$\alpha_1 \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,1	0,875	0,833	0,792	0,750	0,708	0,667	0,625	0,583	0,542	0,500
0,2	0,889	0,861	0,833	0,806	0,778	0,750	0,722	0,694	0,667	0,639
0,3	0,896	0,875	0,854	0,833	0,812	0,792	0,771	0,750	0,729	0,708
0,4	0,900	0,883	0,867	0,850	0,833	0,817	0,800	0,783	0,767	0,750
0,5	0,903	0,889	0,875	0,861	0,847	0,833	0,819	0,806	0,792	0,778

Таблица 2. Зависимость средней длины очереди $M(I)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $\alpha_1 = 0,1; 0,2; \dots; 0,5$

$\alpha_1 \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,1	0,020	0,045	0,086	0,150	0,247	0,396	0,630	1,014	1,692	2,990
0,2	0,016	0,032	0,059	0,101	0,163	0,257	0,400	0,624	0,985	1,582
0,3	0,014	0,026	0,046	0,076	0,121	0,188	0,288	0,438	0,667	1,018
0,4	0,013	0,022	0,038	0,062	0,097	0,148	0,222	0,331	0,492	0,725
0,5	0,012	0,020	0,032	0,052	0,080	0,121	0,179	0,263	0,383	0,551

Таблица 3. Зависимость среднего числа сообщений в системе $M(I + 1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $\alpha_1 = 0,1; 0,2; \dots; 0,5$

$\alpha_1 \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,1	0,145	0,212	0,294	0,400	0,539	0,729	1,005	1,431	2,151	3,490
0,2	0,127	0,171	0,226	0,295	0,385	0,507	0,678	0,929	1,318	1,943
0,3	0,118	0,151	0,192	0,243	0,309	0,397	0,517	0,688	0,938	1,309
0,4	0,113	0,139	0,171	0,212	0,263	0,331	0,422	0,548	0,725	0,975
0,5	0,109	0,131	0,157	0,191	0,233	0,288	0,360	0,458	0,591	0,773

Формулы (11), (14) позволяют определить характеристики системы: $P(-1)$ — вероятность простоя обслуживающего прибора; $M(I)$ — среднюю длину очереди в системе; $M(I + 1)$ — среднее число сообщений в системе, здесь I — случайная величина: длина очереди в СМО.

$$(15) \quad P(-1) = (\mu/a)[(\lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2)(A_1 + A_2) + (\lambda_1 + \alpha_1 + \alpha_2)(C_1 A_1 + C_2 A_2)],$$

$$M(I) = A_1(1 + C_1) \frac{\xi_1}{(1 - \xi_1)^2} + A_2(1 + C_2) \frac{\xi_2}{(1 - \xi_2)^2},$$

$$M(I + 1) = \frac{A_1(1 + C_1)}{(1 - \xi_1)^2} + \frac{A_2(1 + C_2)}{(1 - \xi_2)^2},$$

где C_1, C_2 определены в (12); a, A_1, A_2 — в (14); ξ_1, ξ_2 — корни кубического уравнения (10), лежащие в интервале $(0, 1)$.

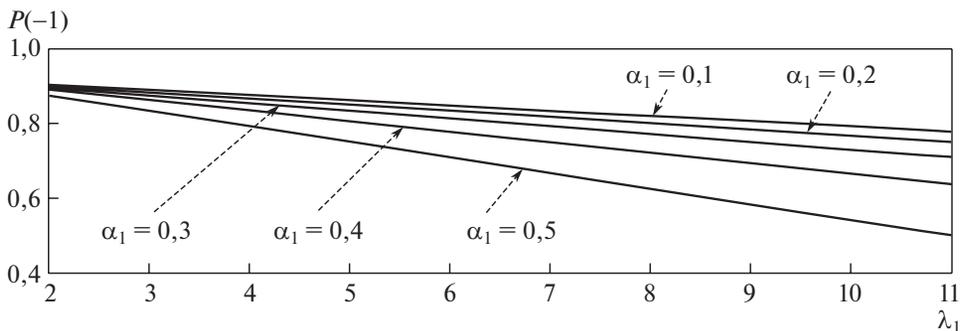


Рис. 2. Зависимость вероятности простоя $P(-1)$ от параметра λ_1 .

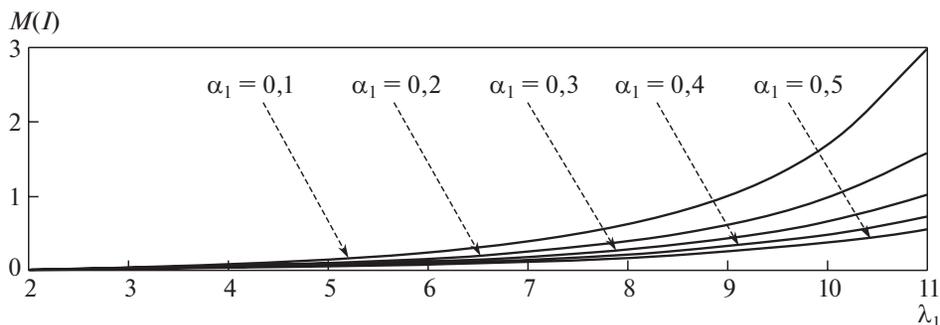


Рис. 3. Зависимость средней длины очереди $M(I)$ от параметра λ_1 .

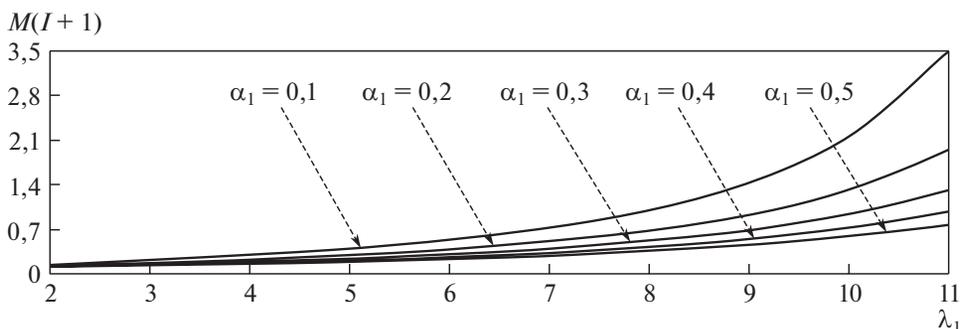


Рис. 4. Зависимость среднего числа сообщений в системе $M(I+1)$ от параметра λ_1 .

Исходные данные для численных примеров, приведенные здесь и далее, выбраны с тем расчетом, чтобы показать, насколько поведение характеристик (15) соответствует физическим представлениям о процессе обслуживания в рассматриваемой СМО.

В табл. 1–3 приведены зависимости $P(-1)$, $M(I)$, $M(I+1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $\alpha_1 = 0,1; 0,2; \dots; 0,5$ при фиксированных значениях параметров $\lambda_2 = 1$, $\alpha_2 = 0,1$, $\mu = 12$, вычисленные по формулам (15).

Поведение указанных характеристик в зависимости от параметра λ_1 соответствует физическим представлениям о процессе обслуживания в рассматриваемой однолинейной СМО с входящим коррелированным асинхронным потоком сообщений (ММРР-поток).

На рис. 2–4 приведены графические зависимости характеристик (15), построенные для числовых значений табл. 1–3 соответственно.

4. Частный случай. SPP-поток

Для рассматриваемого частного случая имеем $\lambda_2 = 0$. Тогда система (3) примет вид

$$(16) \quad \begin{aligned} \mu P(i+1, 1) - (\lambda_1 + \alpha_1 + \mu)P(i, 1) + \lambda_1 P(i-1, 1) + \alpha_2 P(i, 2) &= 0, \\ \mu P(i+1, 2) - (\alpha_2 + \mu)P(i, 2) + \alpha_1 P(i, 1) &= 0, \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Решение системы (16) будем по-прежнему искать в виде $P(i, 1) = \xi^i$, $P(i, 2) = G\xi^i$ ($i = 0, 1, \dots$). Тогда характеристическое уравнение для системы (16) примет вид

$$(17) \quad (\xi - 1) [\mu^2 \xi^2 - \mu(\lambda_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \mu)\xi + \lambda_1(\alpha_2 + \mu)] = 0.$$

Рассматривается случай $\lambda < \mu$, где $\lambda = 1/M(\tau) = \lambda_1 \pi_1$, $M(\tau) = (\alpha_1 + \alpha_2) / \lambda_1 \alpha_2$, $\pi_1 = \alpha_2 / (\alpha_1 + \alpha_2)$. Случай $\lambda \geq \mu$ приводит (аналогично общему случаю $\lambda_2 > 0$) к ситуации, когда стационарное распределение $P(i, 1), P(i, 2)$, $i = 0, 1, \dots$, не существует.

Обозначим через ξ_1, ξ_2, ξ_3 корни характеристического уравнения (17), где $\xi_3 = 1$,

$$(18) \quad \xi_{1,2} = \frac{1}{2\mu} \left[(\lambda_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \mu) \mp \sqrt{(-\lambda_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \mu)^2 + 4\lambda_1 \alpha_1} \right],$$

при этом $0 < \xi_1 < 1 = \xi_3 < \xi_2$. Тогда общее решение системы (16) с учетом (17) выпишется в виде

$$(19) \quad \begin{aligned} P(i, 1) &= R_1 \xi_1^i + R_2 \xi_2^i + R_3 \xi_3^i, \\ P(i, 2) &= G_1 R_1 \xi_1^i + G_2 R_2 \xi_2^i + G_3 R_3 \xi_3^i, \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

В общем решении (19), так как $\xi_2 > 1$, $\xi_3 = 1$, необходимо константы R_2, R_3 положить равными нулю. Тогда (19) примет вид

$$(20) \quad P(i, 1) = R_1 \xi_1^i, \quad P(i, 2) = G_1 R_1 \xi_1^i, \quad i = 0, 1, \dots$$

Подставляя решение (20) во второе уравнение системы (16), находим константу G_1 :

$$(21) \quad G_1 = \alpha_1 / [\alpha_2 + \mu(1 - \xi_1)].$$

Для нахождения константы R_1 и вероятностей $P(-1, 1), P(-1, 2)$ привлечем граничные уравнения (13), в которых $\lambda_2 = 0$, и условие нормировки.

Таблица 4. Зависимость вероятности простоя $P(-1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $\alpha_1 = 0,1; 0,2; \dots; 0,5$

$\alpha_1 \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,1	0,917	0,875	0,833	0,792	0,750	0,708	0,667	0,625	0,583	0,542
0,2	0,944	0,917	0,889	0,861	0,833	0,806	0,778	0,750	0,722	0,694
0,3	0,958	0,937	0,917	0,896	0,875	0,854	0,833	0,813	0,792	0,771
0,4	0,967	0,950	0,933	0,917	0,900	0,883	0,867	0,850	0,833	0,817
0,5	0,972	0,958	0,944	0,931	0,917	0,903	0,889	0,875	0,861	0,847

Таблица 5. Зависимость средней длины очереди $M(I)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $\alpha_1 = 0,1; 0,2; \dots; 0,5$

$\alpha_1 \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,1	0,016	0,041	0,082	0,145	0,242	0,390	0,623	1,005	1,678	2,961
0,2	0,011	0,027	0,054	0,095	0,157	0,250	0,392	0,613	0,969	1,556
0,3	0,008	0,020	0,040	0,070	0,114	0,180	0,279	0,427	0,652	0,995
0,4	0,006	0,016	0,031	0,054	0,089	0,139	0,213	0,320	0,477	0,705
0,5	0,005	0,013	0,025	0,044	0,072	0,112	0,170	0,252	0,368	0,532

Таблица 6. Зависимость среднего числа сообщений в системе $M(I + 1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $\alpha_1 = 0,1; 0,2; \dots; 0,5$

$\alpha_1 \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,1	0,100	0,166	0,248	0,354	0,492	0,682	0,956	1,380	2,095	3,420
0,2	0,066	0,110	0,165	0,234	0,323	0,444	0,614	0,863	1,247	1,862
0,3	0,050	0,082	0,123	0,174	0,239	0,326	0,445	0,614	0,860	1,224
0,4	0,040	0,066	0,098	0,138	0,189	0,256	0,346	0,470	0,643	0,888
0,5	0,033	0,055	0,081	0,114	0,156	0,210	0,281	0,377	0,507	0,685

Тогда получаем

$$(22) \quad P(-1, 1) = \frac{\mu}{\lambda_1} R_1 (1 + G_1), \quad P(-1, 2) = \frac{\mu}{\lambda_1 \alpha_2} R_1 [\alpha_1 + (\lambda_1 + \alpha_1) G_1],$$

$$R_1 = \lambda_1 \alpha_2 (1 - \xi_1) / (\alpha_1 + \alpha_2) [\lambda_1 + \mu (1 - \xi_1) (1 + G_1)],$$

где ξ_1 определена в (18), G_1 — в (21).

Формулы (20), (22) позволяют определить характеристики системы, введенные выше:

$$(23) \quad P(-1) = \frac{\mu}{\lambda_1 \alpha_2} [\alpha_1 + \alpha_2 + (\lambda_1 + \alpha_1 + \alpha_2) G_1] R_1,$$

$$M(I) = R_1 (1 + G_1) \frac{\xi_1}{(1 - \xi_1)^2}, \quad M(I + 1) = \frac{R_1 (1 + G_1)}{(1 - \xi_1)^2},$$

где R_1 определена в (22), G_1 — в (21), ξ_1 — в (18).

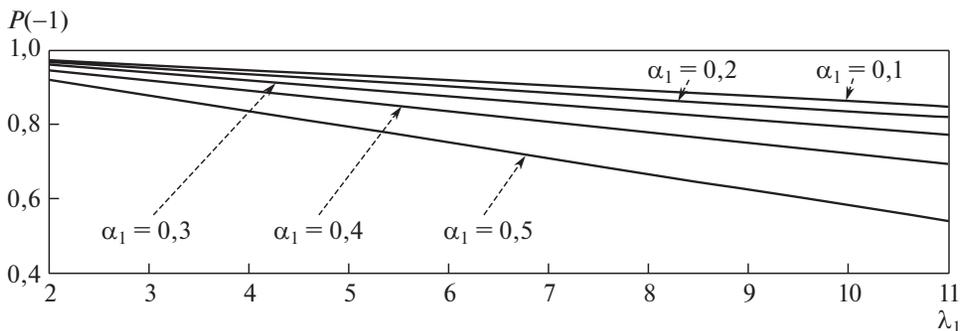


Рис. 5. Зависимость вероятности простоя $P(-1)$ от параметра λ_1 .

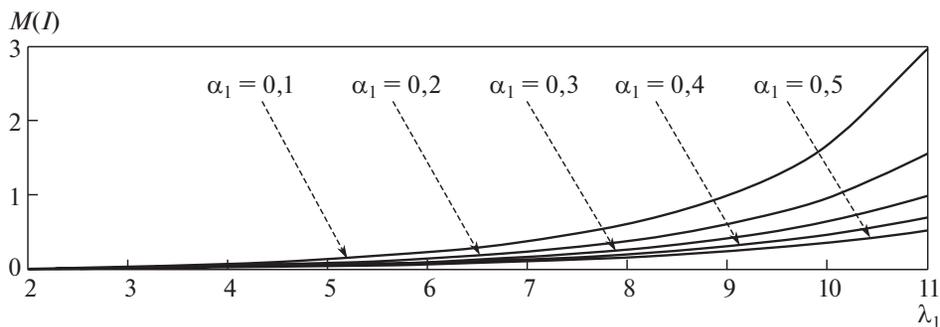


Рис. 6. Зависимость средней длины очереди $M(I)$ от параметра λ_1 .

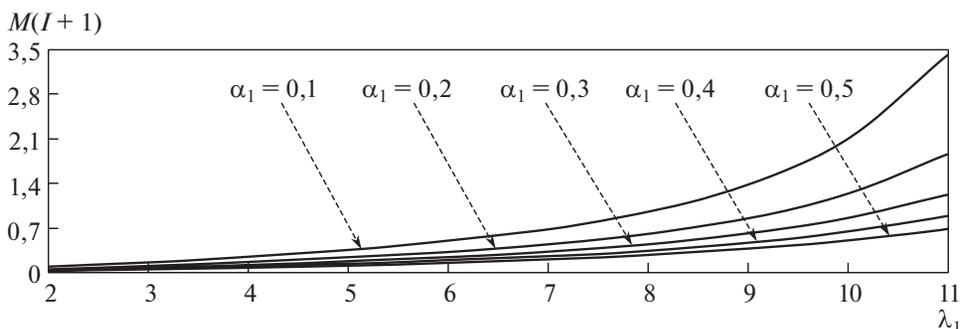


Рис. 7. Зависимость среднего числа сообщений в системе $M(I+1)$ от параметра λ_1 .

В табл. 4–6 приведены зависимости $P(-1)$, $M(I)$, $M(I+1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $\alpha_1 = 0,1; 0,2; \dots; 0,5$ при фиксированных значениях параметров $\alpha_2 = 0,1$, $\mu = 12$, вычисленные по формулам (23).

Поведение указанных величин в зависимости от параметра λ_1 соответствует физическим представлениям о процессе обслуживания в рассматриваемой однолинейной СМО с входящим асинхронным альтернирующим потоком (SPP-поток).

На рис. 5–7 приведены графические зависимости характеристик (23), построенные для числовых значений табл. 4–6 соответственно.

5. Заключение

В настоящей статье изучена однолинейная СМО с входящим асинхронным дважды стохастическим потоком событий (ММРР-поток) с двумя состояниями.

Немарковский процесс $i(t)$ — число запросов в очереди в момент времени t — путем введения дополнительной переменной $j(t)$ — состояние входящего асинхронного потока в момент времени t — сводится к двумерному процессу $(i(t), j(t))$, являющемуся марковским процессом.

С использованием метода диаграмм интенсивностей переходов находится явное аналитическое стационарное распределение вероятностей состояний процесса $(i(t), j(t))$ ($t \rightarrow \infty$). Приводятся явные аналитические формулы для числовых характеристик системы и построенные на основании этих формул зависимости числовых характеристик от параметров СМО, представленные в таблицах.

Рассмотрен также частный случай входящего потока запросов — асинхронный альтернирующий поток с двумя состояниями (SPP-поток).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишневецкий В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М.: Техносфера, 2018. 564 с.
2. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51. No. 3. P. 433–441.
3. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60. No. 4. P. 923–930.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
5. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
6. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. No. 4. P. 764–779.
7. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a bath Markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. No. 1. P. 1–46.
8. Lucantoni D.M., Neuts M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communications in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10. No. 3. P. 575–598.

9. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вест. Томск. гос. ун-та. 2002. № S1-1. С. 24–29.
10. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21. No. 3. P. 283–290.
11. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вест. Томск. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–29.
12. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // АиТ. 2002. № 3. С. 179–184.
Vasil'eva L.A., Gortsev A.M. Estimation of Parameters of a Double-Stochastic Flow of Events under Conditions of Its Incomplete Observability // Autom. Remote Control. 2002. V. 63. No. 3. P. 511–515.
13. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // АиТ. 2003. № 12. С. 69–79.
Vasil'eva L.A., Gortsev A.M. Estimation of the Dead Time of an Asynchronous Double Stochastic Flow of Events under Incomplete Observability // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 12. P. 1890–1898.
14. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вест. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
15. Heindl A. Decomposition of general tandem queueing networks with MMPP input // Performance Evaluation. 2001. V. 44. P. 5–23.
16. Heindl A. Decomposition of general queue networks with MMPP inputs and customer losses // Performance Evaluation. 2003. V. 51. P. 117–136.
17. Бинь Сунь, Дудин С.А., Дудина О.С., Дудин А.Н. Модель обслуживания мобильных пользователей в соте с адаптивной модуляцией, учитывающая влияние случайной среды // АиТ. 2021. № 5. С. 86–105.
Bin Sun, Dudin S.A., Dudina O.S., Dudin A.N. A Customer Service Model in an Adaptive-Modulation Mobile Communication Cell with Allowance for Random Environment // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 5. P. 812–826.
18. Алиева С.Г., Меликов А.З., Шахмалыев М.О. Численный анализ системы с гетерогенными серверами и мгновенной обратной связью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2021. № 3. С. 98–110.
19. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вест. Томск. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
20. Gortsev A.M., Nissenbaum O.V. Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period // Russian Physics J. 2005. V. 48. No. 10. P. 1039–1054.

21. *Дудин А.Н., Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: БГУ, 2000. 175 с.
22. *Медведев Г.А.* Анализ стохастических графов, описывающих поведение шаговых систем автоматического поиска // Автоматика и вычислительная техника. 1968. № 4. С. 27–30.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.

Поступила в редакцию 29.11.2021

После доработки 28.03.2022

Принята к публикации 28.04.2022

Стохастические системы

© 2022 г. С.П. МОИСЕЕВА, д-р физ.-мат. наук (smoiseeva@mail.ru),
Т.В. БУШКОВА (bushkova70@mail.ru)
(Национальный исследовательский Томский
государственный университет),
Е.В. ПАНКРАТОВА, канд. физ.-мат. наук (pankatya86@gmail.com),
М.П. ФАРХАДОВ, д-р техн. наук (mais@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
А.А. ИМОМОВ, д-р физ.-мат. наук (imomov_azam@mail.ru)
(Каршинский государственный университет, Узбекистан)

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕСУРСНОЙ ГЕТЕРОГЕННОЙ СМО $(MMP + 2M)^{(2,\nu)}/GI(2)/\infty$ ПРИ УСЛОВИИ ЭКВИВАЛЕНТНО РАСТУЩЕГО ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассматривается ресурсная гетерогенная система массового обслуживания с гибкой системой реагирования на запросы, состоящая из двух узлов. Каждый узел обладает некоторой емкостью ресурса для обслуживания (буферного пространства) и, следовательно, потенциальной возможностью отклика на поступившее требование, которое формирует запрос на предоставление некоторого случайного объема ресурсов на некоторое случайное время. Потоки требований являются стационарными пуассоновскими различной интенсивности. Если для обслуживания заявки требуется задействовать ресурс обоих узлов, то предполагается, что моменты прихода таких заявок образуют MMP-поток с разделением на два разнотипных запроса. Отличительной особенностью рассматриваемых систем является то, что ресурс освобождается в том же объеме, что и запрашивался. Для построения многомерного марковского процесса использован метод введения дополнительной переменной и динамических вероятностей. Решена задача анализа общего объема занимаемых ресурсов каждого типа при условии, что интенсивность обслуживания требований много меньше интенсивности входящего потока, и в предположении, что серверы имеют неограниченные ресурсы.

Ключевые слова: бесконечнолинейные гетерогенные системы массового обслуживания, ресурсные системы, параллельное обслуживание, марковский модулированный поток, асимптотический анализ.

DOI: 10.31857/S0005231022080050, EDN: AGWXXM

1. Введение

В настоящее время находят широкое применение многочисленные исследования по теории массового обслуживания (ТМО) и ее приложениям, в част-

ности для описания процессов в инфокоммуникационных системах [1–5], распределенных вычислительных и компьютерных сетях [6–8], многофункциональных центрах обслуживания населения [9–11], задачах управления транспортными потоками [12–14] и т.д.

Для повышения качества обслуживания и минимизации экономических потерь в информационно-сервисных системах (ИСС) целесообразно использовать модели различных конфигураций [15–17].

Подробный обзор современных приложений ТМО находит отражение в монографиях российских и зарубежных ученых [18, 19]. В классических системах массового обслуживания (СМО) роль дискретных ресурсов играют обслуживающие приборы или линии передачи информации. Однако в этом случае приходится пренебрегать фактором неоднородности потенциально требуемых услуг. Таким образом, неоспорима актуальность внедрения новых моделей СМО, позволяющих решать практические задачи по оценке потенциальной возможности отклика сервера на запросы, поступающие от различных категорий клиентов и отличающиеся как интенсивностью поступления, так и потребностями в предоставлении ресурсов для обслуживания. Пришедшая заявка может занять случайный объем ресурса на время ожидания начала обслуживания, на время обслуживания или на все время нахождения заявки в системе. В реальных системах в качестве ресурса может выступать объем памяти устройства или радиочастоты беспроводных сетей. Например, во время передачи высококачественного потокового видео ресурсы используются для обеспечения качества контента, а время обслуживания соответствует продолжительности процесса передачи данных.

Известно, что в классической ТМО определение почти всех характеристик производительности сводится к анализу случайного процесса — числа находящихся в системе заявок. Но этого недостаточно, если требуется, например, определить емкость буферного пространства узла сети связи, гарантирующую наименьшие потери передаваемой информации [20]. Каждый узел СМО имеет некоторую потенциальную буферную емкость, т.е. набор ресурсов определенного объема, который может быть выделен для обработки поступающих запросов. Поступающий запрос занимает на время своего обслуживания случайный объем ресурсов обслуживающего узла, который освобождается в том же объеме после того, как запрос покидает систему. Для описания указанной ситуации используют терминологию “СМО со случайным объемом требований” [21] или “Ресурсные СМО (РСМО)” [22, 23].

Интерес к РСМО объясняется актуальностью их применения для моделирования достаточно широкой области технических устройств и информационно-вычислительных систем, например в таких беспроводных сетевых технологиях, как LTE, New Radio или Wi-Fi. Рост популярности исследований таких систем обусловлен необходимостью создания эффективных инструментов оценки работы радиointерфейсов сетей связи нового поколения.

В [24, 25] исследования РСМО проводятся в предположении простейших входящих потоков (отличающихся интенсивностями поступления и обслуживания) и фиксированного запроса на ресурсы.

Для исследования ресурсных систем в настоящее время также не существует универсального метода, поэтому в данной работе применяются асимптотические методы исследования СМО, развиваемые в Томской научной школе по прикладному вероятностному анализу под руководством профессора А.А. Назарова [26]. Такие методы позволяют получить приемлемые для практического использования асимптотические выражения для искомых характеристик системы в случаях, когда их допредельное исследование невозможно. Как правило, при исследовании многолинейных систем обычно предполагается, что серверы идентичны и поступающие требования могут занимать произвольный прибор для своего обслуживания. Гораздо менее изучены СМО с разнородными серверами, которые являются более интересным объектом для исследования [27, 28]. Часто возникают довольно нетривиальные задачи оптимизации, связанные с назначением серверов на приходящие заказы в зависимости от соотношения ставок обслуживания средств и затрат на их использование. Например, в теории телетрафика используют понятия “быстрых” и “медленных” каналов связи. При этом возможна ситуация, когда для входящего требования создается копия, которая передается по другому каналу связи. В этом случае в качестве математической модели можно использовать СМО с параллельным обслуживанием. Такие модели для исследования числа занятых приборов были ранее рассмотрены как в бесконечнолинейных СМО [29, 30], так и в однолинейных системах [31]. Но в указанных работах поступающие в систему требования занимают один дискретный ресурс и не учитывают случайный размер передаваемых данных. Поэтому в настоящей работе предлагаются модели, существенно расширяющие область практического применения, а именно, СМО с двумя узлами параллельной обработки разнотипных данных (информации), требующих для своего обслуживания произвольные ресурсные емкости. Для исследования случайного процесса, описывающего суммарные объемы занимаемых ресурсных емкостей, вводятся динамические вероятности, смысл которых заключается в рассмотрении только тех заявок со своими объемами, которые не завершили свое обслуживание. Для решения задачи анализа общего объема занимаемых ресурсов каждого типа применяется метод асимптотического анализа при условии, что интенсивность обслуживания требований много меньше интенсивности входящего потока, и в предположении, что серверы имеют неограниченные ресурсы [32, 33].

2. Постановка задачи

Рассмотрим РСМО с двумя узлами, отличающимися характеристиками обслуживания (скорость, надежность), каждый из которых содержит достаточное количество (потенциальную емкость) необходимых ресурсов. Опре-

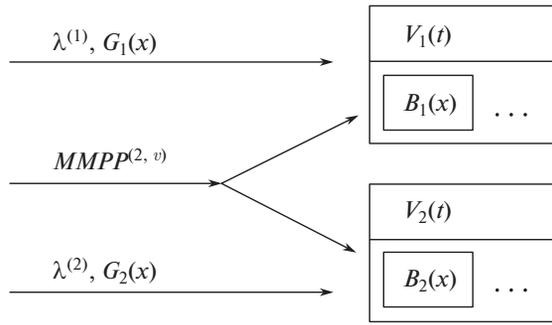


Рис. 1. Математическая модель $(\text{MMPP} + 2M)^{(2, \nu)} / \text{GI}(2) / \infty$.

делим входящие потоки: два пуассоновских с параметрами $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ и марковский модулированный пуассоновский поток (ММРР-поток), управляемый цепью Маркова с конечным числом состояний $k(t) = 1, \dots, K$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \|q_{ij}\|$, $i, j = 1, \dots, K$, и диагональной матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}$ с элементами $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, \dots, K$, на главной диагонали. Будем считать, что заявки входящих простейших потоков делятся на два типа по запросу на ресурсы и обслуживание (в первом простейшем потоке заявки первого типа, а во втором — второго), а заявки ММРР-потока одновременно требуют оба типа ресурсов, т.е. входящее требование “расщепляется” на две заявки разного типа. Поступающее требование занимает единицу дискретного ресурса (один прибор — в классических СМО) в блоке, соответствующем ее типу, в течение неотрицательного случайного времени $\xi_i \geq 0$, $i = 1, 2$, с произвольной функцией распределения вероятностей $B_i(\tau) = P\{\xi_i < \tau\}$, $i = 1, 2$, с конечными первым и вторым моментами. В терминах ТМО время обслуживания требования можно также интерпретировать как время передачи сообщения. В данной постановке каждое поступающее требование также формирует запрос на выделение дополнительного (в общем случае непрерывного) ресурса объема, который является неотрицательной случайной величиной $v_i \geq 0$, $i = 1, 2$, с функцией распределения вероятностей $G_i(x) = P\{v_i < x\}$, $i = 1, 2$, также имеющей конечные первые и вторые моменты. В отличие от моделей [34] запрашиваемые ресурсы от поступившей заявки освобождаются в разное время, в зависимости от типа ресурса. Поэтому рассматриваемую систему будем называть гетерогенной РСМО. По окончании обслуживания требование покидает систему. Отличительная особенность рассматриваемых систем заключается в том, что ресурс освобождается ровно в том же объеме, что и запрашивался, в то время как в большинстве работ [35] предполагается, что освобождается случайный объем, не обязательно совпадающий с объемом запроса. Учесть такой фактор, как правило, сложно, так как необходимо хранить информацию о всех случайных величинах, что приводит к увеличению размерности рассматриваемых процессов. В настоящей статье применяется авторский метод — метод динамического просеивания, позволяющий решить указанную проблему. Одним

серьезным допущением в настоящем исследовании является предположение о том, что объем занятого требованием ресурса и время обслуживания требования не коррелируют друг с другом.

На рис. 1 представлено схематичное изображение рассматриваемой системы. Используя символику Кендалла–Башарина, будем обозначать такую систему как $(\text{MMPP} + 2\text{M})^{(2,\nu)}/\text{GI}(2)/\infty$.

Определим $V_i(t)$ — общий объем ресурса i -го типа ($i = 1, 2$), занятый в момент времени t .

Очевидно, что $\mathbf{V}(t) = \{V_1(t), V_2(t)\}$ не является марковским случайным процессом, поэтому для его исследования применим метод многомерного динамического просеивания [36].

3. Метод динамического просеивания

Пусть в некоторый момент времени t_0 система пуста. Отметим на временной оси (рис. 2) под номером 0 моменты поступления требований входящих потоков. Далее зафиксируем произвольный момент времени в будущем $T > t_0$ и будем рассматривать только те требования на ресурсы, которые поступили в систему в некоторый момент времени $t > t_0$ и до фиксированного момента T не освободили выделенные ресурсы. Для этого определим динамические вероятности вида $S_i(t, T) = 1 - B_i(T - t)$, $S_i(t, T) \in [0, 1]$, $i = 1, 2$, в зависимости от типа обслуживания. Такие вероятности будем называть вероятностями просеивания. Очевидно, что с вероятностью $1 - S_i(t, T)$ выделенные в момент времени t ресурсы будут освобождены к моменту времени T . Далее, учитывая, что T — произвольный, но фиксированный момент времени, вероятности $S_i(t, T)$ будем обозначать как $S_i(t)$.

Обозначим через $W_i(t)$ объемы просеянных ресурсов i -го типа. В исходной постановке он будет соответствовать суммарному объему требований, не закончивших свое обслуживание к моменту времени T . Как показано в [36–38], законы распределения вероятностей значений случайного процес-

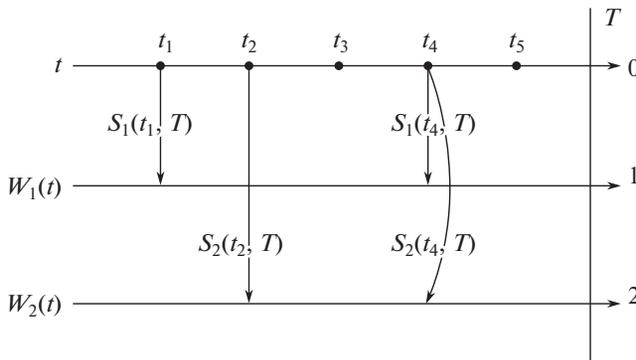


Рис. 2. Динамические вероятности просеивания требований на ресурсы.

са $\mathbf{W}(t) = \{W_1(t), W_2(t)\}$ и исходного процесса $\mathbf{V}(t) = \{V_1(t), V_2(t)\}$ в момент времени $t = T$ совпадают:

$$(1) \quad P\{V_1(T) < x_1, V_2(T) < x_2\} = P\{W_1(T) < x_1, W_2(T) < x_2\} \forall x_1, x_2.$$

Таким образом, в зависимости от типа обслуживания сформируем два новых потока — оси под номерами 1 и 2.

Для построения марковского процесса воспользуемся методом введения дополнительной переменной и построим трехмерный марковский процесс $\{k(t), W_1(t), W_2(t)\}$, где $k(t) = 1, \dots, K$ — состояния управляющей ММРР-потоком цепи Маркова. Введем обозначение для распределения вероятностей

$$P(k, w_1, w_2, t) = P\{k(t) = k, W_1(t) < w_1, W_2(t) < w_2\}.$$

Воспользовавшись формулой полной вероятности и Δt -методом, запишем следующие равенства для всех $k = 1, \dots, K$, $w_1 > 0$, $w_2 > 0$:

$$(2) \quad \begin{aligned} & P(k, w_1, w_2, t + \Delta t) = \\ & = P(k, w_1, w_2, t) (1 - \lambda_k \Delta t) \left(1 - \lambda^{(1)} \Delta t\right) \left(1 - \lambda^{(2)} \Delta t\right) (1 + q_{kk} \Delta t) + \\ & \quad + \lambda_k \Delta t S_1(t) (1 - S_2(t)) \int_0^{w_1} P(k, w_1 - y, w_2, t) dG_1(y) + \\ & \quad + \lambda_k \Delta t S_2(t) (1 - S_1(t)) \int_0^{w_2} P(k, w_1, w_2 - y, t) dG_2(y) + \\ & \quad + \lambda^{(1)} \Delta t S_1(t) \int_0^{w_1} P(k, w_1 - y, w_2, t) dG_1(y) + \\ & \quad + \lambda^{(2)} \Delta t S_2(t) \int_0^{w_2} P(k, w_1, w_2 - y, t) dG_2(y) + \\ & \quad + \left[\lambda_k (1 - S_1(t)) (1 - S_2(t)) + \lambda^{(1)} (1 - S_1(t)) + \right. \\ & \quad \left. + \lambda^{(2)} (1 - S_2(t)) \right] \Delta t P(k, w_1, w_2, t) + \\ & \quad + \lambda_k \Delta t S_1(t) S_2(t) \int_0^{w_1} \int_0^{w_2} P(k, w_1 - y_1, w_2 - y_2, t) dG_1(y_1) dG_2(y_2) + \\ & \quad + \sum_{\nu \neq k} q_{\nu k} \Delta t P(\nu, w_1, w_2, t) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Откуда после преобразований получаем систему интегрально-дифференциальных уравнений Колмогорова для $k = 1, \dots, K$, $w_1 > 0$, $w_2 > 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P(k, w_1, w_2, t)}{\partial t} = & \left(\lambda_k + \lambda^{(1)} \right) S_1(t) \int_0^{w_1} P(k, w_1 - y, w_2, t) dG_1(y) + \\
 & + \left(\lambda_k + \lambda^{(2)} \right) S_2(t) \int_0^{w_2} P(k, w_1, w_2 - y, t) dG_2(y) - \\
 & - \left(\lambda_k + \lambda^{(1)} \right) S_1(t) P(k, w_1, w_2, t) - \\
 (3) \quad & - \left(\lambda_k + \lambda^{(2)} \right) S_2(t) P(k, w_1, w_2, t) + \lambda_k S_1(t) S_2(t) \left[P(k, w_1, w_2, t) - \right. \\
 & - \int_0^{w_1} P(k, w_1 - y, w_2, t) dG_1(y) - \int_0^{w_2} P(k, w_1, w_2 - y, t) dG_2(y) + \\
 & \left. + \int_0^{w_1} \int_0^{w_2} P(k, w_1 - y_1, w_2 - y_2, t) dG_1(y_1) dG_2(y_2) \right] + \\
 & + \sum_{\nu} q_{\nu k} P(\nu, w_1, w_2, t).
 \end{aligned}$$

Начальное условие для решения $P(k, w_1, w_2, t)$ в момент времени t_0 определим в виде

$$(4) \quad P(k, dw_1, dw_2, t_0) = r(k) \delta_{(0,0)}(dw_1 \times dw_2),$$

где $r(k)$ — компоненты вектора $\mathbf{r} = [r(1), \dots, r(K)]$ стационарного распределения вероятностей состояний управляющей ММРР-потокот цепи Маркова $k(t)$, определяемого матрицей инфинитезимальных характеристик \mathbf{Q} и удовлетворяющего системе линейных уравнений

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{rQ} = 0, \\ \mathbf{re} = 1. \end{cases}$$

Здесь \mathbf{e} — единичный вектор-столбец.

Для решения системы (3) перейдем к уравнениям для частичных характеристических функций вида

$$(6) \quad h(k, \nu_1, \nu_2, t) = \int_0^{\infty} e^{j\nu_1 w_1} \int_0^{\infty} e^{j\nu_2 w_2} P(k, dw_1, dw_2, t),$$

где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, для которых можем записать систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(k, \nu_1, \nu_2, t)}{\partial t} = & h(k, \nu_1, \nu_2, t) \left[\left(\lambda_k + \lambda^{(1)} \right) S_1(t) (G_1^*(\nu_1) - 1) + \right. \\ & \left. + \left(\lambda_k + \lambda^{(2)} \right) S_2(t) (G_2^*(\nu_2) - 1) + \lambda_k S_1(t) S_2(t) \left[(1 - G_1^*(\nu_1)) (1 - G_2^*(\nu_2)) \right] \right] + \\ & + \sum_{\nu} q_{\nu k} h(\nu, \nu_1, \nu_2, t), \quad k = 1, \dots, K, \quad w_1 > 0, \quad w_2 > 0, \end{aligned}$$

где

$$G_i^*(\nu_i) = \int_0^{\infty} e^{j\nu_i y} dG_i(y).$$

Для более компактной записи перейдем к матричному виду

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t)}{\partial t} = & \mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t) \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) S_1(t) (G_1^*(\nu_1) - 1) + \right. \\ & + \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) S_2(t) (G_2^*(\nu_2) - 1) + \\ & \left. + \mathbf{\Lambda} S_1(t) S_2(t) (1 - G_1^*(\nu_1)) (1 - G_2^*(\nu_2)) + \mathbf{Q} \right] \end{aligned}$$

с начальным условием

$$(8) \quad \mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t_0) = \mathbf{r},$$

где $\mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t) = [h(1, \nu_1, \nu_2, t), \dots, h(K, \nu_1, \nu_2, t)]$ — вектор-строка; \mathbf{Q} — матрица инфинитезимальных характеристик управляющей цепи Маркова $k(t)$, $\mathbf{r} = [r(1), \dots, r(K)]$ — вектор стационарного распределения вероятностей состояний управляющей ММРР-потокот цепи Маркова $k(t)$, определяемый (5), $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица условных интенсивностей с элементами $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, \dots, K$, на главной диагонали,

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^{(1)} \end{pmatrix} = \lambda^{(1)} \mathbf{I}, \quad \mathbf{\Lambda}^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^{(2)} \end{pmatrix} = \lambda^{(2)} \mathbf{I}.$$

Для задачи (7)–(8) не представляется возможным использовать метод моментов, как в [39], так как получить аналитическое решение системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами не представляется возможным. Поэтому будем искать решение при асимптотическом условии

эквивалентного роста времени обслуживания на серверах. Это асимптотическое условие означает пропорциональный рост среднего времени обслуживания по отношению к среднему значению интервалов времени между приходами входящих запросов. В случае, если параметры обслуживания растут непропорционально, то исследуемые процессы являются слабо коррелированными и их исследование можно проводить отдельно.

4. Асимптотический анализ при условии эквивалентно растущего времени обслуживания

Обозначим среднее время обслуживания заявки в каждом блоке как

$$b_i = \int_0^{\infty} x dB_i(x) = \int_0^{\infty} (1 - B_i(x)) dx, \quad i = 1, 2.$$

Найдем асимптотическое решение задачи (7)–(8) при условии, что среднее время обслуживания в обоих каналах передачи будет расти пропорционально друг другу, т.е. $b_i \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$, и $\lim_{b_i \rightarrow \infty} \frac{b_1}{b_2} = q = \text{const}$.

4.1. Аппроксимация первого порядка

В задаче (7)–(8), определив $b_1 = 1/\varepsilon$, $b_2 = 1/q\varepsilon$, выполним замены

$$(9) \quad \begin{aligned} \varepsilon t = \tau, \quad \varepsilon t_0 = \tau_0, \quad S_i(t) = \bar{S}_i(\tau), \quad i = 1, 2, \\ \nu_1 = \varepsilon x_1, \quad \nu_2 = \varepsilon x_2, \quad \mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t) = \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon). \end{aligned}$$

Тогда для $\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)$ получаем матричное дифференциальное уравнение

$$(10) \quad \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) \bar{S}_1(\tau) (G_1^*(\varepsilon x_1) - 1) + \right. \\ \left. + \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) \bar{S}_2(\tau) (G_2^*(\varepsilon x_2) - 1) + \right. \\ \left. + \mathbf{\Lambda} \bar{S}_1(\tau) \bar{S}_2(\tau) (1 - G_1^*(\varepsilon x_1)) (1 - G_2^*(\varepsilon x_2)) + \mathbf{Q} \right] \end{aligned}$$

с начальным условием

$$\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau_0, \varepsilon) = \mathbf{r}.$$

Сформулируем и докажем (см. Приложение) следующую теорему.

Теорема 1. Асимптотическое решение $\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau)$ уравнения (10) при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет вид

$$(11) \quad \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau) = \mathbf{r} \exp \left\{ j \sum_{i=1}^2 \kappa_i x_i a_i \int_{\tau_0}^{\tau} \bar{S}_i(w) dw \right\},$$

где $\kappa_i = \mathbf{r}(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(i)})\mathbf{e}$ имеет смысл суммарной интенсивности требований, поступающих в i -й обслуживающий блок, $a_i = \int_0^{\infty} y dG_i(y)$ — средний объем запроса на выделение ресурса в i -м блоке, $i = 1, 2$.

Учитывая, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) \approx \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau)$, а также (11) и замены (9), можно записать асимптотическое выражение для характеристической функции $\mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t)$:

$$(12) \quad \mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t) = \mathbf{r} \exp \left\{ j \sum_{i=1}^2 \kappa_i \nu_i a_i \int_{t_0}^t S_i(w) dw \right\}.$$

Полагая $t_0 \rightarrow -\infty$, а $t = T$ и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^T [1 - B_i(T - w)] dw = \int_0^{\infty} [1 - B_i(w)] dw \doteq b_i,$$

для характеристической функции стационарного распределения вероятностей исследуемого двумерного процесса $h(\nu_1, \nu_2)$ получаем

$$(13) \quad h(\nu_1, \nu_2) = \mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, T)\mathbf{e} = \exp \left\{ j \sum_{i=1}^2 \kappa_i \nu_i a_i b_i \right\}.$$

Полученное приближение определяет только аппроксимацию средних значений занимаемых суммарных ресурсов. Чтобы построить качественно более точное приближение, проведем асимптотический анализ второго порядка.

4.2. Аппроксимация второго порядка

Определим решение системы уравнений (7) в виде

$$(14) \quad \mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t) = \mathbf{h}_2(\nu_1, \nu_2, t) \exp \left\{ j \sum_{i=1}^2 \kappa_i \nu_i a_i \int_{t_0}^t S_i(w) dw \right\}.$$

Учитывая (7), нетрудно показать, что $\mathbf{h}_2(\nu_1, \nu_2, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}_2(\nu_1, \nu_2, t)}{\partial t} = & \mathbf{h}_2(\nu_1, \nu_2, t) \left[(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)}) S_1(t) (G_1^*(\nu_1) - 1) + \right. \\ & + (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)}) S_2(t) (G_2^*(\nu_2) - 1) + \mathbf{\Lambda} S_1(t) S_2(t) (1 - G_1^*(\nu_1)) (1 - G_2^*(\nu_2)) + \\ & \left. + \mathbf{Q} - j \sum_{i=1}^2 \kappa_i \nu_i a_i S_i(t) \mathbf{I} \right] \end{aligned}$$

с начальным условием

$$\mathbf{h}_2(\nu_1, \nu_2, t_0) = \mathbf{r}.$$

Перейдем к обозначениям $b_1 = 1/\varepsilon^2$, $b_2 = 1/q\varepsilon^2$ и выполним в задаче (15) следующие замены:

$$(16) \quad \begin{aligned} \varepsilon^2 t = \tau, \quad \varepsilon^2 t_0 = \tau_0, \quad S_i(t) = \bar{S}_i(\tau), \quad i = 1, 2, \\ \nu_1 = \varepsilon x_1, \quad \nu_2 = \varepsilon x_2, \quad \mathbf{h}_2(\nu_1, \nu_2, t) = \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon). \end{aligned}$$

Получим систему дифференциальных уравнений

$$(17) \quad \begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) \bar{S}_1(\tau) (G_1^*(\varepsilon x_1) - 1) + \right. \\ \left. + \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) \bar{S}_2(\tau) (G_2^*(q\varepsilon x_2) - 1) + \right. \\ \left. + \mathbf{\Lambda} \bar{S}_1(\tau) \bar{S}_2(\tau) (1 - G_1^*(\varepsilon x_1)) (1 - G_2^*(q\varepsilon x_2)) + \right. \\ \left. + \mathbf{Q} - j\varepsilon \kappa_1 x_1 a_1 \bar{S}_1(\tau) \mathbf{I} - j\varepsilon \kappa_2 x_2 a_2 \bar{S}_2(\tau) \mathbf{I} \right] \end{aligned}$$

с начальным условием

$$\mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau_0, \varepsilon) = \mathbf{r}.$$

Сформулируем и докажем (см. Приложение) следующую теорему.

Теорема 2. Асимптотическое решение $\mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau)$ уравнения (17) при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau) = \mathbf{r} \exp \left\{ \frac{j^2}{2} (x_1^2 \kappa_1 \alpha_1 \bar{S}_1(\tau) + \theta_1 (x_1 a_1 \bar{S}_1(\tau))^2) + \right. \\ \left. + \frac{j^2}{2} (x_2 \kappa_2 \alpha_2 \bar{S}_2(\tau) + \theta_2 (x_2 a_2 \bar{S}_2(\tau))^2) + \frac{j^2 x_1 x_2}{2} \bar{S}_1(\tau) \bar{S}_2(\tau) a_1 a_2 \theta \right\}, \end{aligned}$$

где $\alpha_i = \int_0^\infty y^2 dG_i(y)$ — вторые начальные моменты запрашиваемого объема ресурса i -го типа, $\theta_i = 2\mathbf{g}_i(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(i)})\mathbf{e}$, $\theta = 2(\kappa + \mathbf{g}_1(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)})\mathbf{e} + \mathbf{g}_2(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)})\mathbf{e})$, $i = 1, 2$, $\kappa = \mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}$ — интенсивность входящего ММРР-потока, а вектор-функции \mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_2 определяются системой уравнений

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{g}_1 \mathbf{Q} &= \mathbf{r} [\kappa_1 \mathbf{I} - (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)})], \\ \mathbf{g}_2 \mathbf{Q} &= \mathbf{r} [\kappa_2 \mathbf{I} - (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)})], \\ \mathbf{g}_1 \mathbf{e} &= 0, \\ \mathbf{g}_2 \mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Учитывая (14), (16) и то, что $\mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) \approx \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau)$, можем записать приближенное выражение для характеристической функции $\mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t)$:

$$(19) \quad \mathbf{h}(\nu_1, \nu_2, t) = \mathbf{r} \exp \left\{ j \sum_{i=1}^2 \kappa_i \nu_i a_i \int_{t_0}^t S_i(w) dw + \frac{j^2}{2} \left(\nu_1^2 \kappa_1 \alpha_1 \int_{t_0}^t S_1(w) dw + \nu_2^2 \kappa_2 \alpha_2 \int_{t_0}^t S_2(w) dw + \nu_2^2 \theta_2 a_2^2 \int_{t_0}^t S_2^2(w) dw + \nu_1^2 \theta_1 a_1^2 \int_{t_0}^t S_1^2(w) dw + \nu_1 \nu_2 \theta a_1 a_2 \int_{t_0}^t S_1(w) S_2(w) dw \right) \right\}.$$

Полагая $t_0 \rightarrow -\infty$, а $t = T$, получаем следующее выражение для характеристической функции совместного распределения ресурсов, выделяемых в обоих блоках серверов в стационарном режиме:

$$(20) \quad h(\nu_1, \nu_2) = \exp \left\{ j(\kappa_1 \nu_1 a_1 b_1 + \kappa_2 \nu_2 a_2 b_2) + \frac{(j\nu_1)^2}{2} (\kappa_1 \alpha_1 b_1 + \theta_1 a_1^2 \beta_1) + \frac{(j\nu_2)^2}{2} (\kappa_2 \alpha_2 b_2 + \theta_2 a_2^2 \beta_2) + j\nu_1 j\nu_2 \theta a_1 a_2 \beta_{12} \right\},$$

где

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^T S_k^2(x) dx = \int_{-\infty}^0 [1 - B_k(T - x)]^2 dx = \int_0^{\infty} [1 - B_k(x)]^2 dx \doteq \beta_k, \quad k = 1, 2,$$

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^T S_1(x) S_2(x) dx = \int_{-\infty}^0 [1 - B_1(T - x)] [1 - B_2(T - x)] dx = \int_0^{\infty} [1 - B_1(x)] [1 - B_2(x)] dx \doteq \beta_{12}.$$

Итак, можно сделать вывод о том, что стационарное распределение вероятностей двумерного процесса $\{V_1(t), V_2(t)\}$ является асимптотически гауссовским с вектором средних

$$\mathbf{a} = [\kappa_1 a_1 b_1 \quad \kappa_2 a_2 b_2]$$

и матрицей ковариации

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \kappa_1 \alpha_1 b_1 + \theta_1 a_1^2 \beta_1 & \theta a_1 a_2 \beta_{12} \\ \theta a_1 a_2 \beta_{12} & \kappa_2 \alpha_2 b_2 + \theta_2 a_2^2 \beta_2 \end{bmatrix}.$$

5. Заключение

В статье проведено исследование неоднородной ресурсной СМО с разделением входящих запросов (двух пуассоновских потоков и ММРР-потока) на два типа, каждый из которых формирует требование случайного объема на ресурс. Решена задача анализа суммарного объема занимаемых ресурсов каждого типа при асимптотическом условии эквивалентного роста времени обслуживания в предположении, что серверы имеют неограниченные ресурсы. Доказано, что двумерный случайный процесс занимаемых ресурсов имеет гауссовское распределение вероятностей.

Очевидно, что на практике обычно нет бесконечного резерва ресурсов для использования, но в случае системы с ограниченными ресурсами можно использовать результаты для решения задачи выбора максимальных значений ресурсов, предоставляемых в каждом блоке и удовлетворяющих определенным условиям, например заданном уровне потерь запросов из-за отсутствия ресурсов для их обслуживания. Поскольку совместное распределение вероятностей занятых ресурсов является двумерным гауссовским, то оценка оптимальных значений ресурсов в каждом канале может быть найдена по правилу «трех сигм».

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Представив экспоненты в виде разложения в ряд

$$(П.1) \quad \begin{aligned} e^{j\varepsilon x_i} &= 1 + j\varepsilon x_i + O(\varepsilon^2), \\ 1 - G_i^*(\varepsilon x_i) &= j\varepsilon x_i \int_0^\infty y dG_i(y) + O(\varepsilon^2), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

выполним предельный переход в (10) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Получим, что $\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau)\mathbf{Q} = 0$, где $\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)$.

Учитывая (5), можно определить функцию $\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau)$ в виде

$$(П.2) \quad \begin{cases} \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau) = \mathbf{r}\Phi_1(x_1, x_2, \tau), \\ \Phi_1(x_1, x_2, \tau_0) = 1, \end{cases}$$

где $\Phi_1(x_1, x_2, \tau)$ — некоторая дифференцируемая скалярная функция.

Просуммируем все уравнения (10), домножив обе части на единичный вектор-столбец \mathbf{e} , и подставим в полученное выражение разложения (П.1) и (П.2):

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathbf{r} \frac{\partial \Phi_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{e} &= \mathbf{r}\Phi_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) \times \\ &\times \left[(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)}) \bar{S}_1(\tau) j\varepsilon x_1 a_1 + (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)}) \bar{S}_2(\tau) j\varepsilon x_2 a_2 \right] \mathbf{e} + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

где $a_i = \int_0^{\infty} y dG_i(y)$, $i = 1, 2$ — среднее значение суммарного объема занимаемого ресурса i -го типа.

Устремим $\varepsilon \rightarrow 0$ и получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{r} \frac{\partial \Phi_1(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau} \mathbf{e} = \\ & = \mathbf{r} \Phi_1(x_1, x_2, \tau) \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) \bar{S}_1(\tau) j x_1 a_1 + \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) \bar{S}_2(\tau) j x_2 a_2 \right] \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Обозначим $\kappa_i = \mathbf{r}(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(i)})\mathbf{e}$, $i = 1, 2$, и получим дифференциальное уравнение для функции $\Phi_1(x_1, x_2, \tau)$

$$\frac{\partial \Phi_1(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau} = \Phi_1(x_1, x_2, \tau) \left[\kappa_1 \bar{S}_1(\tau) j x_1 a_1 + \kappa_2 \bar{S}_2(\tau) j x_2 a_2 \right].$$

Учитывая начальные условия $\Phi_1(x_1, x_2, \tau_0) = 1$, получаем, что

$$(П.3) \quad \Phi_1(x_1, x_2, \tau) = \exp \left\{ j \left(\kappa_1 x_1 a_1 \int_{\tau_0}^{\tau} \bar{S}_1(w) dw + \kappa_2 x_2 a_2 \int_{\tau_0}^{\tau} \bar{S}_2(w) dw \right) \right\}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau) = \mathbf{r} \exp \left\{ j \sum_{i=1}^2 \kappa_i x_i a_i \int_{\tau_0}^{\tau} \bar{S}_i(w) dw \right\}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Подставим в (17) следующее разложение:

$$\begin{aligned} & e^{j\varepsilon x_i} = 1 + j\varepsilon x_i + \frac{(j\varepsilon x_i)^2}{2} + O(\varepsilon^3), \\ (П.4) \quad & 1 - G_i^*(\varepsilon x_i) = j\varepsilon x_i \int_0^{\infty} y dG_i(y) + \frac{(j\varepsilon x_i)^2}{2} \int_0^{\infty} y^2 dG_i(y) = \\ & = j\varepsilon x_i a_i + \frac{(j\varepsilon x_i)^2}{2} \alpha_i + O(\varepsilon^3), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где $\alpha_i = \int_0^{\infty} y^2 dG_i(y)$ — второй начальный момент суммарного объема занимаемого ресурса i -го типа ($i = 1, 2$).

В результате получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \\
 & = \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) \bar{S}_1(\tau) \left(j\varepsilon x_1 a_1 + \frac{(j\varepsilon x_1)^2}{2} \alpha_1 \right) + \right. \\
 (\text{П.5}) \quad & + \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) \bar{S}_2(\tau) \left(j\varepsilon x_2 a_2 + \frac{(j\varepsilon x_2)^2}{2} \alpha_2 \right) + \\
 & + \mathbf{\Lambda} \bar{S}_1(\tau) \bar{S}_2(\tau) j^2 \varepsilon^2 x_1 x_2 a_1 a_2 + \mathbf{Q} - \\
 & \left. - j\varepsilon \kappa_1 x_1 a_1 \bar{S}_1(\tau) \mathbf{I} - j\varepsilon \kappa_2 x_2 a_2 \bar{S}_2(\tau) \mathbf{I} \right] + O(\varepsilon^3),
 \end{aligned}$$

решение которого будем искать в виде разложения

$$\begin{aligned}
 (\text{П.6}) \quad & \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) = \\
 & = \Phi_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) \left\{ \mathbf{r} + j\varepsilon x_1 a_1 \bar{S}_1(\tau) \mathbf{g}_1 + j\varepsilon x_2 a_2 \bar{S}_2(\tau) \mathbf{g}_2 \right\} + O(\varepsilon^2),
 \end{aligned}$$

где $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ — неизвестные вектор-функции.

Подставив разложение (П.6) в (П.5), а также разделив на ε и устремив $\varepsilon \rightarrow 0$, получим выражение

$$\begin{aligned}
 0 = \Phi_2(x_1, x_2, \tau) \left\{ \mathbf{r} j \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) \bar{S}_1(\tau) x_1 a_1 - \kappa_1 x_1 \bar{S}_1(\tau) a_1 \mathbf{I} \right] + \right. \\
 + j \kappa_1 \bar{S}_1(\tau) a_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{Q} + \\
 \left. + \mathbf{r} j \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) \bar{S}_2(\tau) x_2 a_2 - \kappa_2 x_2 \bar{S}_2(\tau) a_2 \mathbf{I} \right] + j \kappa_2 \bar{S}_2(\tau) a_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{Q} \right\}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, для нахождения \mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_2 достаточно решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{r} j \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) \bar{S}_1(\tau) x_1 a_1 - \kappa_1 x_1 \bar{S}_1(\tau) a_1 \mathbf{I} \right] + j \kappa_1 \bar{S}_1(\tau) a_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{Q} = 0, \\
 \mathbf{r} j \left[\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) \bar{S}_2(\tau) x_2 a_2 - \kappa_2 x_2 \bar{S}_2(\tau) a_2 \mathbf{I} \right] + j \kappa_2 \bar{S}_2(\tau) a_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{Q} = 0, \\
 \mathbf{g}_1 \mathbf{e} = 0, \\
 \mathbf{g}_2 \mathbf{e} = 0,
 \end{array} \right.$$

которая преобразуется в систему линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{g}_1 \mathbf{Q} = \mathbf{r} \left[\kappa_1 \mathbf{I} - \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) \right], \\
 \mathbf{g}_2 \mathbf{Q} = \mathbf{r} \left[\kappa_2 \mathbf{I} - \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) \right], \\
 \mathbf{g}_1 \mathbf{e} = 0, \\
 \mathbf{g}_2 \mathbf{e} = 0.
 \end{array} \right.$$

Собирая слагаемые при второй степени ε , получим дифференциальное уравнение для функции $\Phi_2(x_1, x_2, \tau)$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi_2(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau} = \\ & = \Phi_2(x_1, x_2, \tau) \left\{ \frac{(jx_1)^2}{2} \left\{ \mathbf{r}(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)})\alpha_1 \bar{S}_1(\tau) + \mathbf{g}_1(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)})(a_1 \bar{S}_1(\tau))^2 \right\} + \right. \\ & \quad + \frac{(jx_2)^2}{2} \left\{ \mathbf{r}(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)})\alpha_2 \bar{S}_2(\tau) + \mathbf{g}_2(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)})(a_2 \bar{S}_2(\tau))^2 \right\} + \\ & \quad \left. + \frac{j^2 x_1 x_2}{2} \bar{S}_1(\tau) \bar{S}_2(\tau) a_1 a_2 \left\{ 2\mathbf{r}\mathbf{\Lambda} + 2\mathbf{g}_1(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)}) + 2\mathbf{g}_2(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)}) \right\} \right\} \mathbf{e}, \end{aligned}$$

решением которого, удовлетворяющим начальному условию $\Phi_2(x_1, x_2, \tau_0) = 1$, будет функция $\Phi_2(x_1, x_2, \tau)$ вида

$$\begin{aligned} (II.7) \quad \Phi_2(x_1, x_2, \tau) = \exp \left\{ \frac{j^2}{2} (x_1^2 \kappa_1 \alpha_1 \bar{S}_1(\tau) + \theta_1 (x_1 a_1 \bar{S}_1(\tau))^2) + \right. \\ \left. + \frac{j^2}{2} (x_2 \kappa_2 \alpha_2 \bar{S}_2(\tau) + \theta_2 (x_2 a_2 \bar{S}_2(\tau))^2) + \right. \\ \left. + \frac{j^2 x_1 x_2}{2} \bar{S}_1(\tau) \bar{S}_2(\tau) a_1 a_2 \theta \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \mathbf{r} \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(i)} \right) \mathbf{e}, \quad \theta_i = 2\mathbf{g}_i \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(i)} \right) \mathbf{e}, \\ \theta &= 2 \left(\kappa + \mathbf{g}_1 \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) \mathbf{e} + \mathbf{g}_2 \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) \mathbf{e} \right), \\ \kappa &= \mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau) = \mathbf{r} \exp \left\{ \frac{j^2}{2} (x_1^2 \kappa_1 \alpha_1 \bar{S}_1(\tau) + \theta_1 (x_1 a_1 \bar{S}_1(\tau))^2) + \right. \\ \left. + \frac{j^2}{2} (x_2 \kappa_2 \alpha_2 \bar{S}_2(\tau) + \theta_2 (x_2 a_2 \bar{S}_2(\tau))^2) + \frac{j^2 x_1 x_2}{2} \bar{S}_1(\tau) \bar{S}_2(\tau) a_1 a_2 \theta \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Erlang A.K. The Theory of Probabilities and Telephone Conversations // Nytt Tidsskrift for Matematik. Seria B. 1909. V. 20. P. 33–39.

2. *Erlang A.K.* Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges // *Elektroteknikeren*. 1917. V. 13. P. 5–13.
3. *Гайдамака Ю.В., Зарипова Э.Ю., Самуйлов К.Е.* Модели обслуживания вызовов в сети сотовой подвижной связи. М.: РУДН, 2008.
4. *Andrews J.G., Jo H., Sang Y.J., Xia P.* Heterogeneous Cellular Networks with Flexible Cell Selection: a Comprehensive Downlink SINR Analysis // *IEEE Trans. Wireless Communications*. 2012. V. 11. No. 10. P. 3484–3495.
5. *Lee W.C.Y.* Mobile Cellular Telecommunications: Analog and Digital Systems, 2nd ed. N.Y.: McGraw-Hill, 1995.
6. *Назаров А.А., Мусеев А.Н.* Распределенная система обработки данных физических экспериментов // *Известия вузов. Физика*. 2014. Т. 57. № 7. С. 112–117.
7. *Топорков В.В.* Модели распределенных вычислений. М.: Физматлит, 2004.
8. *Хорошевский В.Г., Павский В.А.* Расчет показателей эффективности функционирования распределенных вычислительных систем // *Автометрия*. 2008. Т. 44. № 2. С. 3–15.
9. *Brown L., Gans N., Mandelbaum A., Sakov A., Shen H., Zeltyn S., Zhao L.* Statistical Analysis of a Telephone Call Center: a Queueing-science Perspective // *J. Amer. Statist. Associat.* 2005. V. 100. P. 36–50.
10. *Gans N., Koole G., Mandelbaum A.* Telephone Call-centers: Tutorial, Review and Research Prospects // *Manuf. Serv. Manag.* 2003. V. 5. P. 79–141.
11. *Koole G., Mandelbaum A.* Queueing Models of Call Centers: An Introduction // *Ann. Oper. Res.* 2002. V. 113. P. 41–59.
12. *Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В.* Математические модели транспортных систем, основанные на теории очередей // *Труды Московского физико-технического института (государственного университета)*. 2010. Т. 2. № 4. С. 6–21.
13. *Задорожный В.Н.* Транспортная сеть массового обслуживания: теория и эксперименты // *Динамика систем, механизмов и машин*. 2014. № 3. С. 162–165.
14. *Fedotkin M.A.* On a Class of Stable Algorithms for Control of Conflicting Flows or Arriving Airplanes // *Problems of control and information theory*. 1977. V. 6. No. 1. P. 13–22.
15. *Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е.* Математическая теория телеграфика и ее приложения к анализу мультисервисных сетей связи следующих поколений // *Автоматика и вычислительная техника*. 2013. № 2. С. 11–21.
16. *Башарин Г.П., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В., Гудкова И.А.* Новый этап развития математической теории телеграфика // *АиТ*. 2009. № 12. С. 16–28.
Basharin G.P., Samouylov K.E., Yarkina N.V., Gudkova I.A. A New Stage in Mathematical Teletraffic Theory // *Autom. Remote Control*. 2009. V. 70. No. 12. P. 1954–1964.
17. *Borst S., Mandelbaum A., Reiman M.I.* Dimensioning Large Call Centers // *Operations Research*. 2004. V. 52. P. 17–34.
18. *Дудин А.Н., Клименок В.И., Вишневецкий В.М.* The Theory of Queueing Systems with Correlated Flows. Heidelberg, Germany: Springer, 2020.
19. *Степанов С.Н.* Теория телеграфика: концепции, модели, приложения. М.: Горячая линия-Телеком, 2015.

20. *Tikhonenko O., Ziolkowski M., Kempa W.M.* Queueing Systems with Random Volume Customers and a Sectorized Unlimited Memory Buffer // *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2021. V. 31. No. 3. P. 471–486.
21. *Tikhonenko O., Ziolkowski M.* Queueing Systems with Random Volume Customers and their Performance Characteristics // *JIOS*. 2021. V. 45. No. 1. P. 21–38.
22. *Горбунова А.В., Наумов В.А., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е.* Ресурсные системы массового обслуживания как модели беспроводных систем связи // *Информатика и ее применение*. 2018. Т. 12. No. 3. С. 48–55.
23. *Наумов В.А., Самуйлов К.Е.* Анализ сетей ресурсных систем массового обслуживания // *АиТ*. 2018. № 5. С. 59–68.
Naumov V.A., Samouylov K.E. Analysis of Networks of the Resource Queuing Systems // *Autom. Remote Control*. 2018. V. 79. No. 5. P. 822–829.
24. *Naumov V., Samouylov K.* Resource System with Losses in a Random Environment // *Mathematics*. 2021. V. 9. No. 21. P. 1–10.
25. *Moskaleva F., Lisovskaya E., Gaidamaka Y.* Resource Queueing System for Analysis of Network Slicing Performance with QoS-Based Isolation // *Dudin A., Nazarov A., Moiseev A. (eds.) Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2020. Communications in Computer and Information Science*. V. 1391. Springer, Cham, 2021.
26. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006.
27. *Ефросинин Д.В., Фархадов М.П., Степанова Н.В.* Исследование управляемой системы массового обслуживания с ненадежными неоднородными приборами // *АиТ*. 2018. № 2. С. 80–105.
Efrosinin D.V., Farkhadov M.P., Stepanova N.V. Study of a Controllable Queueing System with Unreliable Heterogeneous Servers // *Autom. Remote Control*. 2018. V. 79. No. 2. P. 265–285.
28. *Клименок В.И., Дудин А.Н., Вишневский В.М.* Priority Multi-Server Queueing System with Heterogeneous Customers // *Mathematics*. 2020. V. 8. № 9. С. 1501–1517.
29. *Ивановская И.А., Моисеева С.П.* Исследование математической модели параллельного обслуживания заявок смешанного типа // *Известия Томского политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2010. Т. 317. № 5. С. 32–34.
30. *Sinyakova I., Moiseeva S.* Investigation of Output Flows in the System with Parallel Service of Multiple Requests // *Problems of Cybernetics and Informatics*. Baku, Azerbaijan, 2012. P. 180–181.
31. *Мокров Е.В., Чукарин А.В.* Анализ показателей эффективности системы облачных вычислений с миграцией серверов // *T-Comm—Телекоммуникации и Транспорт*. 2014. № 8. С. 64–67.
32. *Pankratova E.V., Moiseeva S.P., Farhadov M.P., Moiseev A.N.* Heterogeneous System $MMPP/GI(2)/\infty$ with Random Customers Capacities / *Журн. СВУ. Сер. Матем. и физ.* 2019. 12:2 (2019). С. 231–239.
33. *Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П., Рагано М., Панкратова Е.В.* Heterogeneous System $GI/GI(n)/\infty$ with Random Customers Capacities // *Applied Probability and Stochastic Processes. Infosys Science Foundation Series*. Singapore: Springer, Singapore, 2020. С. 507–521.

34. *Galileyskaya A., Lisovskaya E., Pagano M.* On the Total Amount of the Occupied Resources in the Multi-resource QS with Renewal Arrival Process // CCIS. 2019. V. 1109. P. 257–269.
35. *Tikhonenko O., Kempa W.M.* The Generalization of AQM Algorithms for Queueing Systems with Bounded Capacity // PPAМ. Torun. Poland. 2011. LNCS. V. 7204. P. 242–251. Springer. Heidelberg (2012).
36. *Моисеев А.Н., Назаров А.А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2015.
37. *Lisovskaya E., Moiseeva S., Pagano M., Potatueva V.* Study of the MMPP/GI/ ∞ Queueing System with Random Customers' Capacities // Informatics and Applications. 2017. V. 11. Is. 4. P. 111–119.
38. *Moiseev A., Moiseeva S., Lisovskaya E.* Infinite-server Queueing Tandem with MMPP Arrivals and Random Capacity of Customers // European Conference on Modelling and Simulation. Budapest, 2017. P. 673–679.
39. *Bushkova T., Galileyskaya A., Lisovskaya E., Pankratova E., Moiseeva S.* Multi-service Resource Queue with the Multy-component Poisson Arrivals // Global and Stochastic Analysis. 2021. V. 8. No 3. P. 97–109.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.

Поступила в редакцию 19.01.2022

После доработки 24.03.2022

Принята к публикации 28.04.2022

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2022 г. И.А. КАЛЯЕВ, д-р техн. наук, академик РАН
(igor@kalyaev.net),
А.И. КАЛЯЕВ, канд. техн. наук (anatoly@kalyaev.net)
(Южный федеральный университет, Таганрог)

МЕТОД И АЛГОРИТМЫ АДАПТИВНОГО МУЛЬТИАГЕНТНОГО ДИСПЕТЧИРОВАНИЯ РЕСУРСОВ В ГЕТЕРОГЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СРЕДАХ¹

Настоящая статья посвящена созданию новых метода и алгоритмов диспетчирования ресурсов в гетерогенных распределенных вычислительных системах на примере облачных вычислительных сред (ОВС), обеспечивающих сокращение времени выполнения множества поступающих задач за счет использования тех вычислительных ресурсов, которые дают наиболее высокую реальную производительность применительно к конкретной полученной задаче. Для этого предлагается применять мультиагентный подход к организации процесса диспетчирования: в состав каждого элемента ОВС вводится программный агент, располагающий наиболее полной и актуальной информацией об особенностях своего вычислителя, множество таких агентов совместно осуществляют подбор наиболее подходящих задач и подзадач с учетом имеющейся информации. Описаны принципы построения и метод работы адаптивного мультиагентного диспетчера ресурсов ОВС, алгоритмы работы агентов ресурсов и задач, проведены исследования эффективности разработанных алгоритмов с использованием распределенной программной модели.

Ключевые слова: распределенная вычислительная среда, облачная вычислительная среда, теория мультиагентных систем, диспетчирование вычислений.

DOI: 10.31857/S0005231022080062, EDN: ANCSWSW

1. Введение

Наблюдаемое в последние годы бурное развитие технологий передачи данных привело к появлению новых подходов к организации вычислений, основанных на использовании множества распределенных в пространстве вычислительных ресурсов с применением сервис-ориентированного подхода, обес-

¹ Работа выполнена в рамках Государственного задания Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (проект № 075-01429-22-02).

печивающего «вычисления по требованию». Эти возможности породили новый класс распределенных вычислительных сред, базирующихся на парадигме облачных вычислений, предполагающей организацию распределенных вычислений на основе пула виртуализованных вычислительных ресурсов, предоставляемых по запросу внешним пользователям удаленно через сеть Интернет [1]. В настоящее время облачные вычислительные среды (ОВС) находят широкое применение при решении сложных вычислительных задач в различных предметных областях: физика; химия и биология; фармакология и фармацевтика; материаловедение; нефтегазодобыча и т.п. [2, 3]. При этом пользовательские задачи в общем виде являются достаточно трудоемкими, иначе пользователь мог бы решить их локально.

Одним из главных преимуществ ОВС является абстрагирование пользователя от выбора конкретных аппаратных ресурсов: он просто предоставляет свои задачи в облако и ожидает их скорейшего решения, при этом, когда говорим об облачных системах, речь обычно идет о минутах или часах. В общем виде ОВС состоит из множества различных вычислителей, это обусловлено растянутым во времени расширением парка вычислительной техники (когда нет возможности или становится невыгодно приобретать узлы, идентичные уже установленным), более низкой востребованностью определенных ускорителей (GPU, FPGA) и т.д. Такая гетерогенная структура, с одной стороны, позволяет повысить эффективность работы ОВС за счет использования тех вычислительных ресурсов, которые обеспечивают максимальную реальную производительность при решении определенных задач, но, с другой стороны, делает существенно более значимым распределение решаемых задач по разнотипным вычислительным ресурсам, входящим в состав гетерогенной ОВС [4].

Указанная проблема многократно усложняется следующими факторами:

- ОВС должна обеспечивать решение некоторого множества различных пользовательских задач, поступающих в произвольные моменты времени, при этом поступающие задачи в общем виде могут обладать сложной внутренней структурой (состоять из информационно взаимосвязанных подзадач, эффективность решения каждой из которых может в сильной степени зависеть от типа используемого вычислительного ресурса);

- узлы ОВС могут со временем изменять свои характеристики в зависимости от множества факторов, например с связи с изменением температуры процессоров вследствие ухудшения вентиляции или сезонных колебаний, деградацией или отказами оборудования и т.п.

Таким образом, можно сделать вывод о высокой важности учета актуальных параметров элементов ОВС при распределении задач для повышения эффективности их выполнения и об актуальности проблемы эффективного распределения задач в зависимости от параметров вычислителя даже для ОВС, состоящих из идентичных вычислителей.

Современные исследования в области распределения задач в гетерогенных средах с изменяющимися со временем параметрами в основном базируются на предсказаниях. Например, в [5] авторы описывают мультиагентный алгоритм Deep-Q-network (DQN), базирующийся на централизованном многоагентном обучении с подкреплением (Multiagent Reinforcement Learning — MARL), который предполагает обучение с подкреплением для оптимизации времени и стоимости распределения и выполнения задач, при этом агенты наследуют эвристики для применения в сформированных нейронных сетях. Авторы [6] представляют генетический алгоритм с эффективной настройкой (Genetic Algorithm with Efficient Tune-In — GAETI) для выполнения длительных вычислений на удаленных вычислительных системах с улучшением времени решения. В [7] авторы предлагают метод гибридной оптимизации роя частиц, предполагающий распределение на базе недоминирующей сортировки. Другим направлением публикаций по тематике распределения задач является применение теоретико-игровых моделей и других методик обучения с подкреплением [8–14], где совместно применяются концепция равновесия в теории игр и методы мультиагентного обучения для оптимизации с множеством ограничений и множеством целей. Общим недостатком рассмотренных подходов является необходимость наличия накопленной статистической информации, которая теряет актуальность при изменении состава распределенной системы.

В некоторых из рассмотренных подходов применяются мультиагентные методы поиска оптимальных распределений, показывающие высокую эффективность, однако указанный инструментарий применяется централизованно: виртуальные агенты узлов системы в рамках централизованного диспетчера составляют виртуальное расписание. В настоящей статье предлагается подход, позволяющий существенно расширить функциональность агентов при диспетчировании путем отказа от виртуальных агентов и превращения элементов ОВС в множество физически распределенных агентов, представляющих собой вычислительные узлы, управляемые программными агентами.

В [15, 16] описывается подход к мультиагентной организации диспетчирования ресурсов в гетерогенных ОВС, позволяющий реализовать распределение различных ресурсов в процессе выполнения множества поступающих сложных пользовательских задач. Показано, что такая мультиагентная организация диспетчера позволяет эвристически обеспечить квазиоптимальное распределение ресурсов ОВС, адаптивно учитывающее их актуальные параметры, что обеспечивает возможность применения широкого перечня оборудования. Другими преимуществами указанного подхода являются возможность оперативного масштабирования ОВС, а также увеличенная отказоустойчивость, достигаемая за счет децентрализации процесса диспетчирования.

Однако применение подхода, предложенного в [15, 16], предполагает, что пользователи должны указывать время, к которому необходимо решить зада-

чу. При этом, поскольку пользователи не обладают информацией о загрузке и параметрах ОВС, указание ими неадекватного времени решения приводит к невозможности выполнения задач, что, в свою очередь, приводит к снижению эффективности работы ОВС в целом [17]. Настоящая статья посвящена разработке нового метода и алгоритмов мультиагентного диспетчирования ОВС, позволяющих распределять задачи, требуемое время выполнения которых не задано, при этом целью работы диспетчера ОВС становится минимизация времени решения всех поступивших задач с помощью имеющихся вычислительных ресурсов.

2. Формальная постановка задачи

Как было сказано выше, множество пользователей в случайные моменты времени отправляют в ОВС множество различных задач $Z = \langle Z_1, \dots, Z_M \rangle$. Под задачей будем понимать некоторое множество информационно зависимых (взаимосвязанных) подзадач, каждая из которых имеет значительную вычислительную трудоемкость. Формально каждая такая задача $Z_l \in Z$ может быть представлена в виде ациклического графа $G_l(Q_l, X_l)$ (рис. 1), вершины $q_j \in Q_l$ которого соответствуют некоторым подзадачам O_j , принадлежащим множеству подзадач $O = \langle O_1, \dots, O_c \rangle$, а дуги $x(q_j, q_{j+1}) \in X_l$ определяют информационные взаимосвязи между подзадачами (т.е. если две вершины q_j и q_{j+1} соединены дугой $x(q_j, q_{j+1})$, то это означает, что данные, полученные в результате решения подзадачи O_j , приписанной вершине q_j , являются исходными данными для подзадачи O_{j+1} , приписанной вершине q_{j+1}). Будем считать, что каждой вершине $q_j \in Q_l$ приписаны тип решаемой подзадачи $O_j \in O$ и ее вычислительная трудоемкость v_j , оцениваемая числом эле-

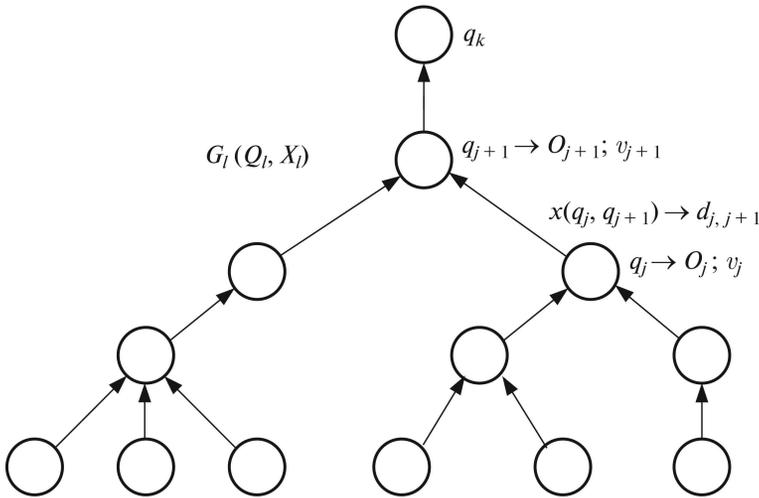


Рис. 1. Граф $G_l(Q_l, X_l)$ задачи Z_l .

ментарных вычислительных операций, выполняемых при ее решении; а дуге $x(q_j, q_{j+1}) \in X_l$ приписан объем данных $d_{j,j+1}$, передаваемых от подзадачи O_j , приписанной вершине q_j , подзадаче O_{j+1} , приписанной вершине q_{j+1} (рис. 1).

В состав ОВС входит множество гетерогенных вычислительных ресурсов $R = \langle R_1, \dots, R_N \rangle$. Будем считать, что каждый ресурс $R_i \in R$ может решать некоторый набор (подмножество) типов подзадач $O_i = \langle O_1, \dots, O_L \rangle \subseteq O$ ($i = 1, \dots, N$), причем реальная производительность ресурса R_i при решении подзадачи $O_j \in O_i$ ($j = 1, \dots, L$) составляет $S_i(O_j)$ (операций в секунду). В общем случае реальная производительность различных ресурсов ОВС при решении идентичных подзадач O_j может быть различной, т.е. $S_p(O_j) \neq S_c(O_j)$ ($p = 1, \dots, N$; $c = 1, \dots, p-1, p+1, \dots, N$). Будем считать, что известна пропускная способность Y_p (байт/с) канала связи ресурса R_i ($i = 1, \dots, N$) с облачной инфраструктурой.

Цель работы диспетчера заключается в минимизации суммарного времени решения задач множества Z $T_Z = \sum_{i=1}^M T(Z_i)$, где $T(Z_i)$ — время решения задачи Z_i путем выбора определенного распределения их подзадач по вычислительным ресурсам $R = \langle R_1, \dots, R_N \rangle$ с учетом оперативной оценки их текущей производительности при решении той или иной подзадачи и пропускной способности канала связи с облачной инфраструктурой.

Решение сформулированной таким образом задачи распределения ресурсов ОВС по поступающим задачам множества Z классическими методами, например методами динамического и линейного программирования [18–20], является сложной задачей из-за того, что вычислительные ресурсы гетерогенны, их число велико, задачи отличаются друг от друга, что приводит к экспоненциальному росту пространства перебора при распределении подзадач различных задач множества Z между ресурсами $R = \langle R_1, \dots, R_N \rangle$ с учетом их функциональных возможностей и производительности на той или иной подзадаче. Поэтому в данном случае предлагается применить мультиагентный подход, так как в этом случае каждый из узлов будет обладать актуальной информацией о своем узле и выполнять часть задачи диспетчирования [21].

3. Метод адаптивного мультиагентного диспетчирования ресурсов

Прежде чем приступить к описанию предложенного метода мультиагентного диспетчирования ОВС, расширим понятие «нити», введенное в [15, 16]. Как и раньше, под нитью, будем понимать некоторую последовательность вершин $H_f = \langle q_1^f, \dots, q_k^f \rangle$ графа $G_l(Q_l, X_l)$ задачи $Z_l \in Z$, в которой вершины q_j^f и q_{j+1}^f ($j = 1, \dots, k-1$) соединены дугой $x(q_j^f, q_{j+1}^f)$ (рис. 2).

Иными словами, нить определяет некоторую последовательность подзадач задачи Z_l , в которой каждая последующая подзадача использует в качестве

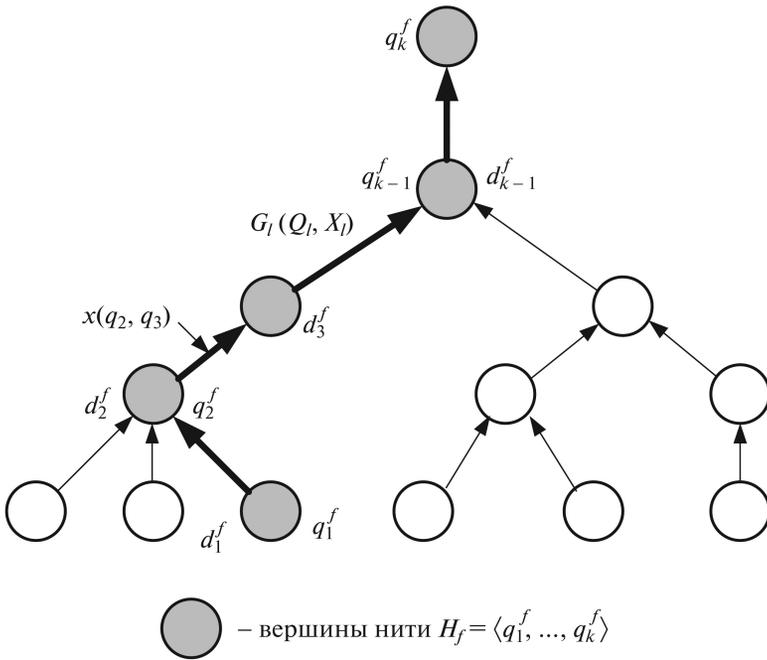


Рис. 2. Нить H_f в графе $G_l(Q_l, X_l)$ задачи Z_l .

исходных данных результат выполнения предыдущей подзадачи. При этом подзадачи, приписанные вершинам нити H_f , могут выполняться только последовательно. Под длиной T_f нити H_f будем понимать суммарное время, затрачиваемое на ее решение, определяемое как

$$T_f = \sum_{i=1}^k (T(O_i) + T_{i,i+1}),$$

где $T(O_i)$ — время решения подзадачи O_i , приписанной вершине $q_i^f \in H_f$ ($i = 1, \dots, k$); $T_{i,i+1}$ — время передачи данных, полученных в результате решения подзадачи O_i , ресурсу, решающему следующую подзадачу O_{i+1} , приписанную вершине $q_{i+1}^f \in H_f$, причем

$$T(O_i) = \frac{v_i}{S_p(O_i)},$$

где v_i — трудоемкость подзадачи O_i ; $S_p(O_i)$ — реальная производительность ресурса R_p , решающего подзадачу O_i ;

$$T_{i,i+1} = \begin{cases} 0, & \text{если подзадачи } O_i \text{ и } O_{i+1} \text{ решаются} \\ & \text{одним и тем же ресурсом } R_p \in \mathbf{R}, \\ \frac{d_{r,r+1}^f}{Y_p}, & \text{если подзадачи } O_i \text{ и } O_{i+1} \text{ решаются} \\ & \text{различными ресурсами } R_p \text{ и } R_c, \end{cases}$$

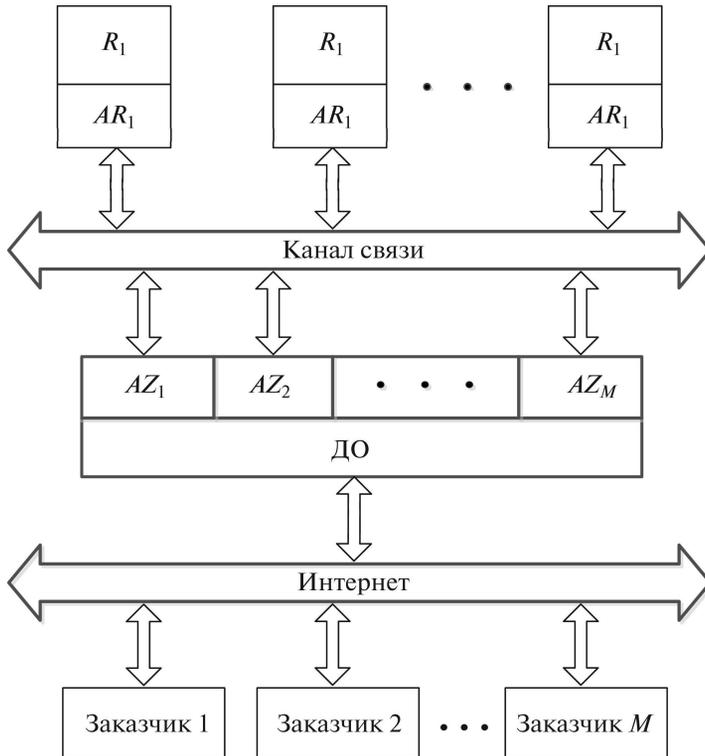


Рис. 3. Структура ОВС.

где $d_{i,i+1}^f$ — объем данных, передаваемых от подзадачи O_i подзадаче O_{i+1} ; Y_p — пропускная способность канала связи ресурса R_p .

Если вся нить H_f выполняется одним и тем же ресурсом R_p , то ее длина будет составлять

$$(1) \quad T_f = \sum_{i=1}^k \frac{v_i}{S_p(O_i)} + \frac{d_{k,k+1}^f}{Y_p},$$

где $d_{k,k+1}^f$ — объем данных, приписанный исходящей (конечной) дуге нити H_f (рис. 3).

При этом кратчайшее время выполнения задачи $Z_l \in Z$ будет, в первую очередь, зависеть от длины критического пути в графе $G_l(Q_l, X_l)$, т.е. нити, суммарная трудоемкость вершин которой максимальна [22].

В [15, 16] предложен мультиагентный подход к диспетчированию, предполагающий, что каждый ресурс R_j ($i = 1, \dots, N$) обладает программным агентом AR_i , осуществляющим поиск работы для «своего» ресурса R_j . Для этого агент AR_i периодически опрашивает выделенный ресурс — «доску объявлений» (ДО), на которой пользователи размещают свои задачи. В случае

обнаружения на ДО некоторой задачи $Z_l \in Z$ агент AR_j делает попытку войти в состав сообщества $R_l \subseteq R$ по его решению, принимая на себя исполнение наиболее длинной нити, что он может реализовать с помощью «своего» ресурса R_j к установленному пользователем моменту времени. Предложенный подход не может быть применен в случае, когда время выполнения задач не задано, поэтому, кроме агентов AR_i ($i = 1, \dots, N$), представляющих различные ресурсы $R_j \in R$ ($j = 1, \dots, N$), предлагается ввести в состав мульти-агентного диспетчера дополнительно к ним агентов задач AZ_j ($j = 1, \dots, M$), по сути являющихся «представителями пользователей» и ответственных за сокращение времени выполнения своей задачи (рис. 3).

Для решения пользовательской задачи в ОВС выполняются следующие шаги:

1. Пользователь формирует свою задачу $Z_l \in Z$ в виде графа $G_l(Q_l, X_l)$ и размещает на ДО.

2. Каждой задаче $Z_l \in Z$, поступившей на ДО, назначается агент AZ_l .

3. Агент AZ_l задачи Z_l с помощью алгоритмов поиска критического пути [23] выделяет в графе $G_l(Q_l, X_l)$ наиболее трудоемкую нить $H_1 = \langle q_1^1, \dots, q_k^1 \rangle$, для которой значение $V_1 = \left(\sum_{i=1}^k v_i^1 \right)$ максимально, где v_i^1 ($j = 1, \dots, k$) — трудоемкость подзадачи O_i , приписанной вершине $q_i^1 \in H_1$, и устанавливает возможный (желательный) момент времени начала ее исполнения $t_{н}^1 = t_{тек}$, где $t_{тек}$ — текущий момент времени. После этого нить H_1 выставляется на ДО для исполнения.

4. Агенты AR_j различных ресурсов R_j ($j = 1, \dots, N$) последовательно опрашивают ДО в поисках работы.

5. При обнаружении нити H_1 , выставленной агентом AZ_l , агент AR_j оценивает эффективность участия в ее решении.

6. Для этого агент AR_j выбирает в нити $H_1 = \langle q_1^1, \dots, q_k^1 \rangle$ поднять $H_{1j}^1 = \langle q_1^1, \dots, q_b^1 \rangle \subseteq H_1$ ($b \leq k$), вершинам которой приписаны подзадачи множества O_i , т.е. подзадачи, выполняемые ресурсом R_j (рис. 4).

Агент AR_j имеет на базе информацию о том, когда закончит выполнять запланированные задачи (момент времени $t_{нj}^1$), определяет момент, когда он сможет начать работу над поднитью H_{1j}^1 , и время $t_{кj}^1$ окончания исполнения поднити H_{1j}^1 , причем

$$(2) \quad t_{кj}^1 = t_{нj}^1 + \sum_{i=1}^b \frac{v_i^1}{S_j(O_i)} + \frac{d_{b,b+1}^1}{Y_j},$$

где v_i^1 — трудоемкость подзадачи O_i , приписанной вершине $q_i^1 \in H_{1j}^1$ ($i = 1, \dots, b$); $S_j(O_i)$ — производительность ресурса R_j при решении подзадачи O_i ; $d_{b,b+1}^1$ — объем данных, приписанных конечной дуге $x(q_b^1, q_{b+1}^1)$ поднити H_{1j}^1 ; Y_j — пропускная способность канала связи ресурса R_j .

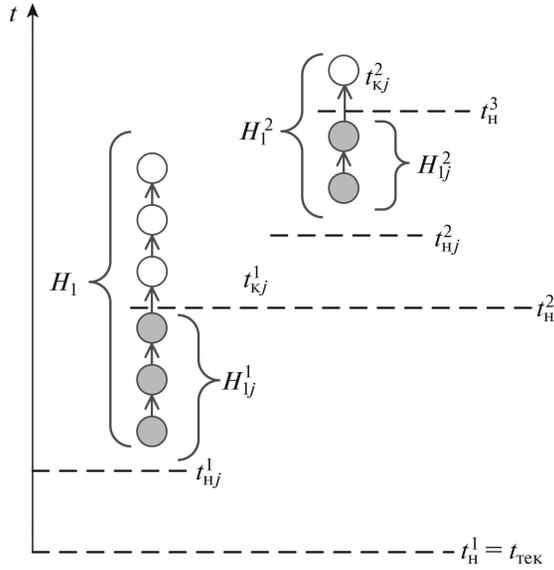


Рис. 4. Распределение операции нити H_1 между агентами AR_j ($j = 1, \dots, N$).

Выбранная поднить H_{1j}^1 , с присписанными ей моментами времени начала исполнения t_{Hj}^1 и окончания исполнения t_{kj}^1 , передается агентом AR_p агенту AZ_l задачи Z_l в качестве «оферты» по его участию в исполнении нити H_1 .

7. По прошествии некоторого таймаута агент AZ_l задачи Z_l среди всех поступивших «предложений» выбирает наиболее подходящее — поднить H_{1p}^1 , «предложенную» агентом AR_p , для которой значение величины

$$E_p = \frac{\sum_{i=1}^b v_i^1}{t_{kp}^1 - t_H^1}$$

максимально, где v_i^1 — трудоемкость подзадачи O_i ($i = 1, \dots, b$), присписанной вершине $q_i^1 \in H_{1p}^1$; t_H^1 — желательное время начала исполнения нити H_1 , установленное агентом задачи AZ_l ; t_{kp}^1 — момент времени завершения исполнения поднити H_{1p}^1 агентом AR_p .

8. Поднить H_{1p}^1 , для которой значение E_p максимально, закрепляется за агентом AR_p , о чем ему направляется соответствующее сообщение от агента AZ_l , и агент AR_p включается в состав сообщества R_l по выполнению задачи Z_l . В графе $G_l(Q_l, X_l)$ задачи Z_l каждой вершине q_j^1 ($j = 1, \dots, b$) поднити H_{1p}^1 присписывается номер p ресурса R_p , за которым закреплено ее исполнение, а также момент времени ее исполнения t_j^1 , определяемый как

$$(3) \quad t_j^1 = t_{np}^1 + \sum_{i=1}^j \frac{v_i^1}{S_p(O_i)},$$

где v_i^1 — трудоемкость подзадачи O_i , приписанной вершине q_i^1 ; $S_p(O_i)$ — производительность ресурса R_p при решении подзадачи O_i .

9. Агент AZ_l задачи Z_l исключает вершины q_1^1, \dots, q_b^1 поднити H_{1p}^1 из нити H_1 , в результате чего формируется новая (укороченная) нить $H_1^2 = \langle q_{b+1}^1, \dots, q_k^1 \rangle$ (рис. 4), а первой вершине q_{b+1}^1 этой нити приписывается номер агента AR_p , от которого должны поступить исходные данные для ее выполнения, а также возможное (желательное) время начала ее исполнения $t_n^2 = t_{kp}^1$, где t_{kp}^1 — время окончания исполнения поднити H_{1p}^1 , определяемое согласно выражению (2).

После этого нить H_1^2 выставляется агентом AZ_l на ДО для исполнения.

10. В дальнейшем агенты различных ресурсов R_j ($i = 1, \dots, N$) оценивают свои возможности по участию в исполнении нити H_1^2 . При этом агент AR_j ($j = 1, \dots, N$) выделяет поднить $H_{1j}^2 = \langle q_{b+1}^1, \dots, q_m^1 \rangle \subseteq H_1^2$ ($m \leq k$) (см. рис. 4), вершинам которой приписаны подзадачи подмножества $O_j \subseteq O$, выполняемого ресурсом R_j , а также определяет момент времени начала ее исполнения t_{nj}^2 , (т.е. момент, когда он может приступить к ее исполнению, причем $t_{nj}^2 \geq t_n^2$), а также момент времени окончания ее исполнения t_{kj}^2 , определяемый как

$$(4) \quad t_{kj}^2 = t_{nj}^2 + \sum_{i=b+1}^m \frac{v_i^1}{S_j(O_i)} + \frac{d_{m,m+1}^1}{Y_j}.$$

Выделенная таким образом поднить H_{1j}^2 направляется агентом AR_j агенту AZ_l задачи Z_l в качестве «предложения» по участию в выполнении нити H_1^2 .

11. По прошествии определенного таймаута агент AZ_l задачи Z_l выбирает наилучшее «предложение» того агента AR_c , предлагающего к исполнению поднить $H_{1c}^2 = \langle q_{b+1}^1, \dots, q_m^1 \rangle$ ($m \leq k$), для которой величина

$$(5) \quad E_c = \frac{\sum_{b+1}^m v_i^1}{t_{kc}^2 - t_n^2}$$

максимальна.

Вершины поднити H_{1c}^2 закрепляются за агентом AR_c , о чем ему направляется соответствующее сообщение, и агент AR_p включается в сообщество R_l по решению задачи Z_l . Кроме того, в каждой вершине q_j^1 ($i = b + 1, \dots, m$) графа $G_l(Q_l, X_l)$ приписывается номер c ресурса R_c , за которым закреплено ее исполнение, и момент времени t_{jc}^1 ее исполнения, определяемый как

$$(6) \quad t_j^1 = t_{nc}^2 + \sum_{i=b+1}^j \frac{v_i^1}{S_c(O_i)},$$

где v_i^1 — трудоемкость подзадачи O_i , приписанной вершине q_i^1 ; $S_c(O_i)$ — производительность ресурса R_c при решении подзадачи O_i .

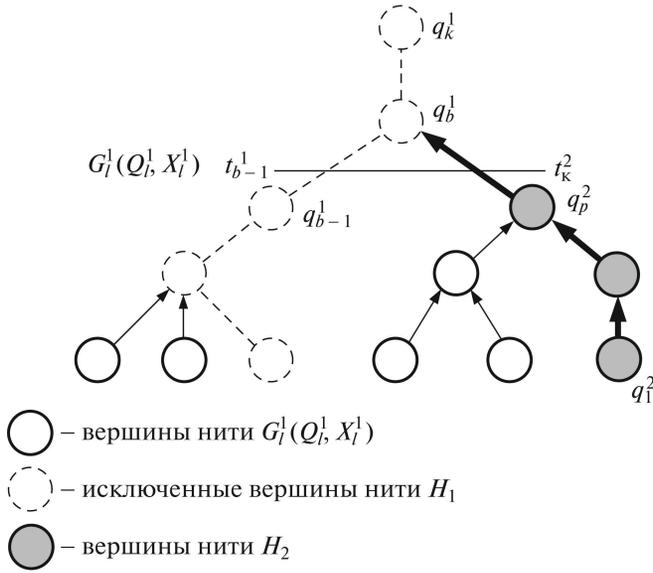


Рис. 5. Граф $G_l^1(Q_l^1, X_l^1)$ задачи Z_l , модифицированный агентом AZ_l .

12. После этого агент задачи AZ_l формирует новую нить $H_1^3 = \langle q_{m+1}^1, \dots, q_k^1 \rangle$, путем исключения из нити H_1^2 вершин поднити H_{1c}^2 , т.е. $H_1^3 = H_1^2 / H_{1c}^2$, и первой вершине q_{m+1}^1 этой нити приписывает возможное (желательное) время начала ее исполнения $t_n^3 = t_{kc}^2$, где t_{kc}^2 — момент времени завершения поднити H_{1c}^2 , определяемый согласно (4).

Далее нить H_1^3 вновь выставляется агентом задачи AZ_l на исполнение и т.д. до тех пор, пока не окажется, что очередная нить пуста $H_1^k = \emptyset$. Это говорит о том, что все вершины нити H_1 закреплены за агентами различных ресурсов R_j ($i = 1, \dots, N$).

13. После этого агент AZ_l задачи Z_l исключает нить H_1 из графа задачи $G_l(Q_l, X_l)$, в результате чего формируется новый граф $G_l^1(Q_l^1, X_l^1) = G_l(Q_l, X_l) / H_1$ (рис. 5).

В обновленном графе $G_l^1(Q_l^1, X_l^1)$ агентом AZ_l определяется наиболее трудоемкая нить $H_2 = \langle q_1^2, \dots, q_r^2 \rangle$ (рис. 5) для дальнейшего распределения между агентами ресурсов R_j ($i = 1, \dots, N$), в результате чего всем вершинам нити $H_2 = \langle q_1^2, \dots, q_r^2 \rangle$ в графе $G_l(Q_l, X_l)$ будут поставлены в соответствие номерам ресурсов R_j , за которыми закреплено их исполнение, а также моменты времени t_f^2 ($f = 1, \dots, r$) их исполнения.

14. Поскольку нить $H_2 = \langle q_1^2, \dots, q_r^2 \rangle$ является ветвью нити $H_1 = \langle q_1^1, \dots, q_k^1 \rangle$ (т.е. конечная вершина q_r^2 нити H_2 инцидентна одной из вершин q_b^1 нити H_1) (см. рис. 5), то требуется оценить погрешность времени завершения нити H_2 для определения актуальности времени начала работы над инцидентной ей вершиной q_b^1 нити H_1 . Поэтому агент AZ_l задачи Z_l сравни-

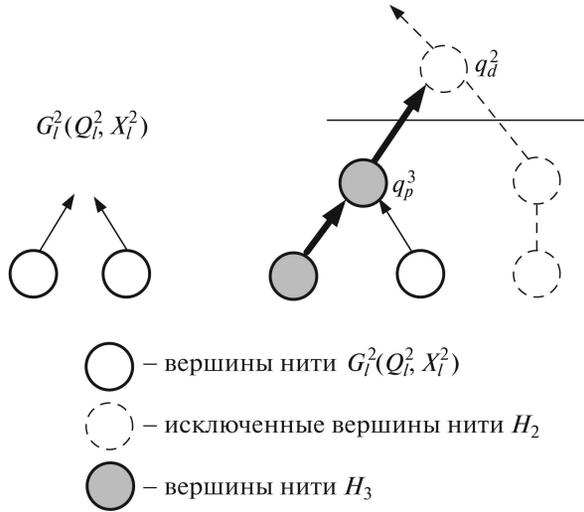


Рис. 6. Граф $G_l^2(Q_l^2, X_l^2)$, модифицированный агентом AZ_l .

вает момент времени t_{κ}^2 завершения исполнения нити H_2 , определяемый как

$$(7) \quad t_{\kappa}^2 = t_r^2 + \frac{d_{r,r+1}^2}{Y_j},$$

где t_r^2 — момент времени, приписанный конечной вершине q_r^2 нити H_2 ; $d_{r,r+1}^2$ — объем передаваемых данных, приписанный дуге, исходящей из вершины q_r^2 ; Y_j — пропускная способность канала связи ресурса R_j , приписанного вершине q_r^2 ;

с моментом времени t_{b-1}^1 , приписанным вершине q_{b-1}^1 нити H_1 . Если оказывается, что $t_{\kappa}^2 > t_{b-1}^1$, то это означает, что данные, получаемые в результате выполнения подзадачи нити H_2 и необходимые для решения подзадачи, приписанной вершине $q_b^1 \in H_1$, поступят позже, чем данные, также необходимые для решения подзадачи вершины q_b^1 и получаемые в результате выполнения подзадачи вершины q_{b-1}^1 нити H_1 . В этом случае агент задачи AZ_l производит корректировку графика исполнения нити H_1 путем смещения моментов времени, приписанных ее вершинам q_b, \dots, q_k , на величину $\Delta t = t_{\kappa}^2 - t_{b-1}^1$.

15. Агент AZ_l задачи Z_l формирует обновленный граф задачи

$$G_l^2(Q_l^2, X_l^2) = G_l^1(Q_l^1, X_l^1) / H_2$$

путем исключения из рассмотрения вершин нити H_2 (пометив их как решаемые), в этом графе (рис. 6) определяет наиболее трудоемкую нить H_3 и отправляет на ДО.

В процессе работы ОВС распределение вершин (подзадач) графа задачи $G_l(Q_l, X_l)$ продолжается далее до тех пор, пока они все не будут распределены, т.е. очередной граф будет пуст $G_l^d(Q_l^d, X_l^d) = \emptyset$. В результате всем вершинам $q_i \in Q_l$ графа задачи $G_l(Q_l, X_l)$ будут приписаны номера ресурсов R_j

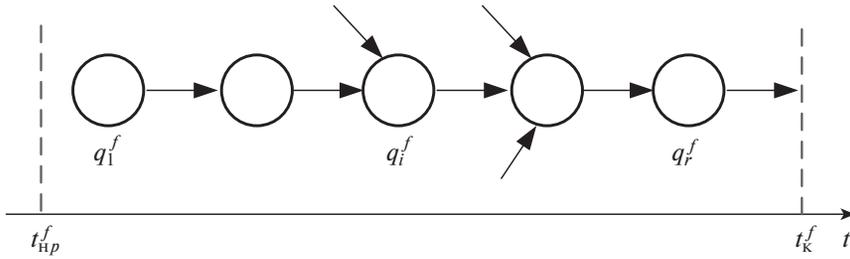


Рис. 7. Исполнение поднити H_f^m агентом AR_p .

($j = 1, \dots, N$), отвечающих за их исполнение, а также планируемые моменты времени t_i их исполнения, т.е. будет построен график решения задачи Z_l .

16. После этого агент задачи Z_l сообщает пользователю планируемый момент времени t_l^k выполнения его задачи Z_l , который определяется как

$$(8) \quad t_l^k = t_k + \frac{d_{k,k+1}}{Y_p},$$

где t_k — момент времени, приписанный конечной вершине q_k графа $G_l(Q_l, X_l)$; $d_{k,k+1}$ — объем результирующих данных, приписанный дуге, исходящей из вершины q_k ; Y_p — пропускная способность канала связи ресурса R_p , закрепленного за вершиной q_k .

В случае согласия пользователя агент AZ_l сообщает всем агентам ресурсов R_j ($i = 1, \dots, N$), задействованным в выполнении данной задачи (т.е. входящим в сообщество R_l), о необходимости выполнения принятых на себя подзадач согласно установленному плану (временному графику).

17. Когда агент AR_p ресурса R_p получает подтверждение от агента AZ_l задачи Z_l о необходимости выполнения закрепленной за ним поднити $H_f^m = \langle q_1^f, \dots, q_r^f \rangle$ графа задачи $G_l(Q_l, X_l)$, он включает подзадачи, приписанные вершинам поднити H_f^m , в свой график работы.

18. При наступлении момента времени t_{np}^f начала исполнения поднити H_f^m агент AR_p приступает к выполнению последовательности подзадач O_i^f ($i = 1, \dots, r$), приписанных вершинам $q_i^f \in H_f^m$ (рис. 7). Если для выполнения очередной подзадачи O_i^f необходимы исходные данные, поступающие от других ресурсов, то агент AR_j первым делом проверяет их наличие. Если требуемые исходные данные еще не поступили, агент AR_j переходит в режим ожидания.

19. По факту получения необходимых данных агент AR_p осуществляет решение подзадачи O_i^f ($i = 1, \dots, r$) с помощью «своего» ресурса R_p . После выполнения всех подзадач O_i^f , приписанных вершинам q_i^f ($i = 1, \dots, r$) поднити H_f^m , агент AR_p отправляет агенту AZ_l задачи Z_l сообщение о работе над последовательностью подзадач поднити H_f^m и передает результат ее следующему ресурсу R_p , исполняющему смежную с ней вершину графа $G_l(Q_l, X_l)$.

20. Агент AZ_l осуществляет проверку соблюдения временного графика выполнения агентом AR_p подзадачи нити H_f^m путем сравнения запланированного времени $t_{\text{к}}^f$ завершения поднити H_f^m , определяемого как $t_{\text{к}}^f = t_r^f + \frac{d_{r,r+1}^f}{Y_p}$ (рис. 7) (где t_r^f — момент времени, приписанный конечной вершине q_r^f поднити H_f^m ; $d_{r,r+1}^f$ — объем передаваемых данных, приписанных исходящей из вершины q_r^f дуге; Y_p — пропускная способность канала связи ресурса R_p), с текущим временем $t_{\text{тек}}$.

Если $t_{\text{тек}} > t_{\text{к}}$, то это означает, что возникла задержка в выполнении временного графика решения задачи Z_l , о чем агент AZ_l сообщает пользователю. Кроме того, агент AZ_l актуализирует временной график исполнения последующих вершин q_r, q_{r+1}, \dots, q_k графа задачи $G_l(Q_l, X_l)$ путем смещения моментов времени на величину $\Delta t = t_{\text{тек}} - t_{\text{к}}^f$ (см. рис. 5).

21. После того, как все подзадачи задачи Z_l решены (т.е. агент задачи получил подтверждения от всех агентов сообщества R_l об успешном завершении всех принятых на себя поднитей), агент AZ_l сообщает пользователю об успешном решении его задачи Z_l , после чего задача Z_l снимается с ДО.

Для применения на практике описанных ранее принципов мультиагентного диспетчирования гетерогенной ОВС были разработаны алгоритмы работы агентов задачи и вычислительного ресурса.

4. Алгоритм работы агента задачи при мультиагентном диспетчировании ресурсов

Как только граф $G_l(Q_l, X_l)$ задачи Z_l передается на ДО, ему назначается агент AZ_l , который находит в графе задачи $G_l(Q_l, X_l)$ самую трудоемкую нить $H_1 = \langle q_1^1, \dots, q_k^1 \rangle$ и устанавливает желательный (возможный) момент времени начала ее исполнения $t_{\text{н}}^1 = t_{\text{тек}}$, после чего выставляет нить H_1 на исполнение на ДО (см. рис. 4).

После того, как агенты ресурсов R_j ($i = 1, \dots, N$) проанализируют возможность своего участия в выполнении нити H_1 и направят свои «предложения» агенту AZ_l задачи Z_l , последний выбирает «предложение» того агента AR_p , который может обеспечить выполнение поднити $H_{1p}^1 = \langle q_1^1, \dots, q_b^1 \rangle \subseteq H_1$, имеющий наибольшее значение

$$E_p = \frac{\sum_{i=1}^b v_i^1}{t_{\text{кп}}^1 - t_{\text{н}}^1},$$

где v_i^1 ($i = 1, \dots, b$) — трудоемкость подзадачи O_i , приписанной вершинам $q_i^1 \in H_{1p}^1$; $t_{\text{кп}}^1$ — момент времени завершения исполнения поднити H_{1p}^1 агентом AR_p , определяемый с помощью выражения (2).

Агент AR_p включается в сообщество R_l по решению задачи Z_l , а в графе $G_l(Q_l, X_l)$ всем вершинам поднити H_{1p}^1 приписывается номер агента AR_p ,

отвечающего за их исполнение, а также моменты времени их исполнения, определяемые с помощью выражения (3).

Агент AZ_l исключает поднить H_1^1 из нити H_1 , в результате чего формируется новая нить $H_1^2 \subseteq H_1$, которой агент AZ_l приписывает возможный момент времени начала ее исполнения t_n^2 , определяемый временем исполнения поднити H_{1p}^1 , т.е. $t_n^2 = t_{kp}^1$ (см. рис. 4). После этого нить H_1^2 выставляется агентом AZ_l на ДО для исполнения.

После этого агент AZ_l ожидает предложения агентов AR_j ($j = 1, \dots, N$) по работе над нитью H_1^2 и выбирает «предложение» того агента AR_c , который обеспечивает выполнение такой поднити $H_{1c}^2 = \langle q_{b+1}^1, \dots, q_m^1 \rangle$ ($m \leq k$), для которой значение E_c (см. выражение (4)) максимально. Выбранный агент AR_c включается в сообщество R_l , а в графе $G_l(Q_l, X_l)$ вершинам этой поднити H_{1c}^2 приписываются его номер, время их исполнения t_i^1 , определяемое с помощью выражения (5).

Описанный процесс продолжается до тех пор, пока не будут распределены все вершины (подзадачи) нити H_1 , т.е. пока не окажется, что очередная поднить пуста $H_1^m = \emptyset$.

Далее агент задачи AZ_l исключает из графа $G_l(Q_l, X_l)$ нить H_1 , в результате чего формируется новый граф $G_l^1(Q_l^1, X_l^1) = G_l(Q_l, X_l)/H_1$, и выделяет в последнем наиболее трудоемкую нить H_2 , которая выставляется на ДО на исполнение (см. рис. 5). После того как все вершины (подзадачи) нити $H_2 = \langle q_1^2, \dots, q_r^2 \rangle$ будут разобраны агентами AR_j ($j = 1, \dots, N$), в графе $G_l(Q_l, X_l)$ им будут приписаны номера соответствующих агентов AR_p , а также время их исполнения t_i^2 ($i = 1, \dots, r$). После этого агент задачи AZ_l должен проверить согласованность времени поступления исходных данных для подзадачи O_b , приписанной вершине q_b^1 нити H_1 , инцидентной конечной вершине нити H_2 . Для этого агент задачи AZ_l сравнивает момент времени t_k^2 завершения исполнения нити H_2 , определяемый с помощью выражения (7), с моментом времени t_{b-1}^1 исполнения предыдущей вершины q_{b-1}^1 нити H_1 (см. рис. 5). Если $t_r^2 > t_{b-1}^1$, то это означает, что данные, получаемые в результате исполнения нити H_2 и необходимые для выполнения подзадачи O_b , поступят позже, чем данные, получаемые в результате выполнения операции O_{b-1} , приписанной вершине q_{b-1}^1 нити H_1 . В этом случае агент задачи AZ_l должен скорректировать моменты времени исполнения всех последующих вершин q_b^1, \dots, q_k^1 нити H_1 путем их увеличения на величину $\Delta t = t_k^2 - t_{b-1}^1$.

Далее нить H_2 исключается из графа задачи $G_l^1(Q_l^1, X_l^1)$, в результате чего формируется новый граф $G_l^2(Q_l^2, X_l^2) = G_l^1(Q_l^1, X_l^1)/H_2$, в котором вновь выделяется наиболее трудоемкая нить H_3 , которая выставляется агентом AZ_l на ДО для исполнения (см. рис. 6). Процесс продолжается до тех пор, пока все вершины графа задачи $G_l(Q_l, X_l)$ не будут закреплены за агентами AR_j ($j = 1, \dots, N$) и им будут приписаны планируемые моменты времени их исполнения. По завершению данного процесса агент AZ_l задачи Z_l сообщает

пользователю планируемый момент времени t_l^k решения его задачи Z_l , определяемый с помощью выражения (7).

Если предложенное время решения задачи удовлетворяет пользователя, то агент AZ_l отправляет всем агентам, включенным в сообщество R_l , команду на выполнение операций.

Формализуем алгоритм, соответствующий описанному выше процессу:

Алгоритм 1

1. $j = 1$; $G_l^j(Q_l^j, X_l^j) = G_l(Q_l, X_l)$; $R_l = \emptyset$.

2. В графе $G_l^j(Q_l^j, X_l^j)$ выделяется наиболее трудоемкая нить $H_j = \langle q_1^j, \dots, q_k^j \rangle$, для которой значение $V_j = \sum_{i=1}^k v_i^j$ максимально, где v_i^j — трудоемкость операции O_i^j , приписанной вершине q_i^j ($i = 1, \dots, k$).

3. $m = 1$; $H_j^m = H_j$; $t_{\text{н}}^m = t_{\text{тек}}$.

4. Нить H_j^m выставляется агентом AZ_l на ДО для исполнения.

5. $r = 1$; $p = 0$; $E_p = \infty$.

6. Агент AZ_l получает «предложение» от агента AR_r об исполнении поднити $H_{jr}^m = \langle q_1^j, \dots, q_b^j \rangle \subseteq H_j^m$ ($b \leq k$), а также моменты времени $t_{\text{нр}}^m$ начала и $t_{\text{кр}}^m$ завершения ее исполнения.

7. Если $E_r = \frac{\sum_{i=1}^b v_i^j}{t_{\text{кр}}^m - t_{\text{нр}}^m} \geq E_p$, где v_i^j — трудоемкость вершины q_i^j ($i = 1, \dots, b$), то перейти к 9, иначе

8. $E_p = E_r$; $p = r$.

9. $r = r + 1$; если $r \leq N$, то перейти к 6, иначе

10. Агент AR_p включается в сообщество R_l по выполнению задачи Z_l и за ним закрепляется выполнение нити H_{jp}^m . В графе $G_l(Q_l, X_l)$ вершинам нити H_{jp}^m приписывается номер агента AR_p , а также время их исполнения

$$t_f^j = t_{\text{нр}}^m + \sum_{i=1}^f \frac{v_i}{S_p(O_i)} \quad (f = 1, \dots, b).$$

11. $H_j^{m+1} = H_j^m / H_{jp}^m$; если $H_j^{m+1} = \emptyset$, то перейти к 13, иначе

12. $m = m + 1$; $t_{\text{н}}^m = t_f^j + \frac{d_{b,b+1}}{Y_p}$; перейти к 4.

13. Если $j = 1$ или $t_k^j \leq t_{f-1}^{j-1}$, где t_k^j — момент времени завершения нити H_j ; t_{b-1}^{j-1} — момент времени исполнения вершины q_{b-1}^{j-1} нити $H_{j-1} = \langle q_1^{j-1}, \dots, q_r^{j-1} \rangle$, вершина q_b^{j-1} которой инцидента конечной вершине q_k^j нити H_j , перейти к 15, иначе

14. В графе $G_l(Q_l, X_l)$ вершинам $q_b^{j-1}, q_{b+1}^{j-1}, \dots, q_r^{j-1}$, нити H_{j-1} приписывается новое плановое время их исполнения $t_i^{j-1} = t_i^{j-1} + \Delta T$ ($i = b, b+1, \dots, r$), где $\Delta T = t_k^j - t_{b-1}^{j-1}$.

О корректировке времени исполнения вершин $q_b^{j-1}, \dots, q_r^{j-1}$ нити H_{j-1} сообщается агенту AR_c , за которым закреплено их исполнение.

15. $G_l^{j+1}(Q_l^{j+1}, X_l^{j+1}) = G_l^j(Q_l^j, X_l^j)/H_j$, если $G_l^{j+1}(Q_l^{j+1}, X_l^{j+1}) = \emptyset$, то перейти к 17, иначе

16. $j = j + 1$, перейти к 2.

17. Отправить пользователю уведомление о расчетном времени $t_i^k = t_k + \frac{d_{k,k+1}}{Y_p}$ решения, где t_k — момент времени исполнения конечной вершины q_k графа $G_l(Q_l, X_l)$, $d_{k,k+1}$ — объем результирующих данных, приписанных дуге, исходящей из конечной вершины q_k ; Y_p — пропускная способность канала связи ресурса R_p , за которым закреплено выполнение вершины q_k .

18. В случае согласия пользователя с расчетным временем решения его задачи Z_l агент AZ_l отправляет всем сообществам R_l команду на исполнение их операций.

19. Если от агента $AR_p \subseteq R_l$ поступило сообщение о завершении исполнения закрепленной за ним нити $H_{jp}^m = \langle q_1^j, \dots, q_b^j \rangle$, то агент AZ_l сравнивает планируемый момент времени $t_{\text{к}}^j$ завершения данной нити, определяемый как $t_{\text{к}}^j = t_b^j + \frac{d_{b,b+1}^j}{Y_p}$ (где t_b^j — время исполнения, приписанное конечной вершине $q_b^j \in H_{ip}^m$; $d_{b,b+1}^j$ — объем данных, приписанный исходящей дуге нити H_{ip}^m), с текущим временем $t_{\text{тек}}$. Если $t_{\text{тек}} > t_{\text{к}}^j$, то пользователю сообщается о задержке времени решения его задачи Z_l на величину $\Delta t = t_{\text{тек}} - t_{\text{к}}^j$, а планируемое время исполнения всех последующих вершин графа $G_l(Q_l, X_l)$ увеличивается на величину Δt .

20. Если конечная вершина q_b^j нити H_{jp}^m является конечной вершиной q_k графа $G_l(Q_l, X_l)$, то пользователю направляется сообщение о завершении решения его задачи и результаты ее решения.

21. Задача Z_l помечается на ДО как решенная.

5. Алгоритм работы агента вычислительного ресурса при мультиагентном диспетчировании ресурсов

Основной целью работы агента вычислительного ресурса AR_p является поиск задач для загрузки «своего» ресурса R_p полезной работой. Для этого он периодически опрашивает ДО и в случае обнаружения новой нити H_j^m , выставленной на исполнение агентом AZ_l задачи Z_l , делает попытку включения в состав сообщества R_l по его выполнению. Для этого агент AR_p выделяет в нити $H_j^m = \langle q_1^j, \dots, q_k^j \rangle$ поднять $H_{jp}^m = \langle q_1^j, \dots, q_b^j \rangle$ ($b \leq k$) подзадачи, приписанные вершины которой входят в множество O_p , т.е. в множество подзадач, выполняемых ресурсом R_p (см. рис. 4).

Агент AR_p определяет момент времени $t_{\text{нр}}^m$, когда он может приступить к исполнению поднити H_{jp}^m , т.е. когда он освободится от исполнения ранее закрепленных за ним операций, а также момент времени $t_{\text{кр}}^m$ окончания исполнения поднити H_{jp}^m , определяемый согласно выражению (2).

Выделенная таким образом поднить H_{jp}^m направляется агенту AZ_l задачи Z_l в качестве «предложения» агента AR_p по участию в сообществе R_l по выполнению задачи Z_l . Если «предложение» агента AR_p наилучшее среди всех поступивших, т.е. значение E_p , определяемое с помощью выражения (5), для нее максимально, ему направляется подтверждение о закреплении поднить H_{jp}^m за ним.

Как только наступает запланированный момент t_{np}^m начала исполнения нити H_{jp}^m , агент AR_p осуществляет ее выполнение (см. рис. 7). Перед тем, как перейти к очередной подзадаче O_i^j , приписанной вершине q_i^j ($i = 1, \dots, b$) нити H_{jp}^m , агент AR_p проверяет наличие требуемых для ее исполнения исходных данных. Если какие-либо исходные данные еще не поступили, то агент AR_p переходит в режим ожидания. Как только все исходные данные, необходимые для решения подзадачи O_i^j , поступают, агент AR_p инициирует решение подзадачи O_i^j с помощью «своего» ресурса R_p . После выполнения всех подзадач, приписанных вершинам нити H_{jp}^m , агент AR_p сообщает агенту задачи Z_l о завершении исполнения нити H_{jp}^m .

Формализуем алгоритм, соответствующий описанному выше процессу:

Алгоритм 2

1. Агент AR_p опрашивает ДО в поисках работы для «своего» ресурса R_p .
2. Если агент AR_p обнаружил на ДО выставленную на исполнение агентом AZ_l нить $H_j^m = \langle q_1^j, \dots, q_k^j \rangle$ задачи Z_l , то он выделяет в нити H_j^m поднить $H_{jp}^m = \langle q_1^j, \dots, q_b^j \rangle$ ($b \leq k$), вершины которой удовлетворяют условию $O_i^j \subseteq O_p$ ($j = 1, \dots, b$), где O_i^j — подзадачи, приписанная вершине q_i^j нити H_{jp}^m .
3. Агент AR_p рассчитывает моменты времени t_{np}^m , когда он может приступить к исполнению нити H_j^m , и t_{kp}^m завершения нити как

$$t_{kp}^m = t_{np}^m + \sum_{i=1}^b \frac{v_i^j}{S_p(O_i)} + \frac{d_{b,b+1}^j}{Y_p}.$$

4. Полученные значения направляются агенту AZ_l .
5. Если агент AR_p получает от агента AZ_l подтверждение о его включении в сообщество R_l , то он в момент времени t_{np}^m приступает к выполнению вершин нити $H_{jp}^m = \langle q_1^j, \dots, q_b^j \rangle$.
6. Введем индекс $i = 1$.
7. Агент AR_p проверяет наличие всех исходных данных, необходимых для решения подзадачи O_i^j , приписанных вершине $q_i^j \in H_{jp}^m$. Если исходные данные еще не поступили, агент AR_p переходит в режим ожидания.
8. Как только все необходимые исходные данные поступили, агент AR_p решает подзадачу O_i^j с помощью «своего» ресурса R_p .
9. $i = i + 1$, если $i < b$, то перейти к 7, иначе

10. Агент AR_p сообщает агенту задачи Z_l о завершении выполнения подзадачи нити H_{jp}^m .
11. Переход к 1.

6. Исследование эффективности предложенных метода и алгоритмов

Для проведения экспериментальных исследований предложенных в статье метода и алгоритмов была разработана распределенная программная модель ОВС с мультиагентным диспетчером, состоящая из программных агентов ресурса и задачи, доски объявлений, визуальных оболочек пользователя и администратора.

Интерфейс визуальной оболочки пользователя представлен на рис. 8.

С целью развертывания разработанной распределенной программной модели ОВС с мультиагентным диспетчером был собран экспериментальный стенд, состоящий из 10 вычислительных модулей, включающих в себя от 1 до 16 физических процессорных ядер, объединенных общей сетью с пропускной способностью до 1000 мегабит в секунду.

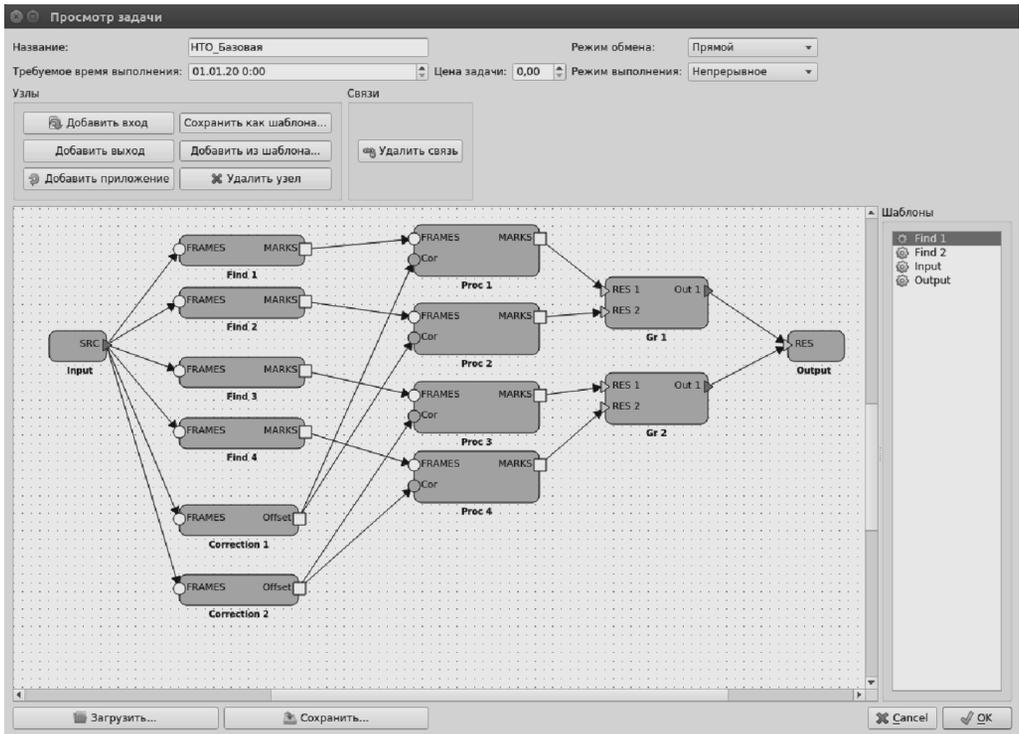


Рис. 8. Визуальная оболочка пользователя.

Для оценки эффективности предложенного метода и алгоритмов работы мультиагентного диспетчера ОВС при решении поступающих задач потребовалось провести исследование работы ОВС в различных режимах работы. В связи с тем, что моделируемая вычислительная среда представляет собой сложную систему, для полноценного исследования такой системы необходима целенаправленная организация эксперимента. При этом эффективность работы ОВС оценивалась с применением критерия Y — отношения суммарного времени решения всех задач множества Z с применением предложенных в настоящей статье алгоритмов к суммарному времени решения всех задач множества Z с применением распределения, полученного с помощью алгоритмов распределения задач, предложенных в [16], выраженного в процентах. Чем меньше будет значение критерия Y , полученного при исследовании, тем эффективнее работают предложенные алгоритмы.

Значение критерия Y будет в большой степени зависеть от таких параметров ОВС как: количество вычислительных ресурсов (ВР) в ОВС; производительность ВР; пропускная способность канала связи ВР с облачной инфраструктурой; частота появления новых пользовательских задач на ДО; количество пользовательских задач, направленных в ОВС; количество подзадач в пользовательской задаче; вычислительная трудоемкость подзадач; объемы данных, передаваемых между подзадачами.

Для того чтобы оценить эффективность разработанных алгоритмов мультиагентного диспетчирования ОВС, необходимо оценить значение критерия Y для всевозможных комбинаций перечисленных выше параметров. Однако сделать это будет крайне трудно, поскольку каждый из этих параметров может существенно измениться в рамках некоторого интервала, а общее число их комбинаций будет ограниченным. Поэтому была разработана методика проведения экспериментов, позволяющая сократить общее количество экспериментов, необходимое для оценки критериев и эффективности работы предложенных алгоритмов, без существенного снижения их достоверности [24]. При этом были предложены следующие интервалы изменения параметров моделирования (чтобы сделать процесс моделирования более близким к реальным условиям, было решено ввести 20%-ное значение возможной погрешности параметров): параметр P1 — количество вычислительных ресурсов в ОВС (10, 100, 500, 1000); параметр P2 — количество решаемых в ОВС пользовательских задач (10 (малое), 50 (среднее), 100 (большое)); параметр S1 — производительность ресурсов ОВС (низкая (–) — 10, высокая (+) — 100); параметр S2 — пропускная способность каналов связи между ресурсами ОВС (низкая (–) — 10, высокая (+) — 100); параметр S3 — трудоемкость пользовательских задач (низкая (–) — 10, высокая (+) — 100); параметр S4 — количество данных, передаваемых между подзадачами (низкая (–) — 10, высокая (+) — 100); параметр T1 — количество подзадач в задаче (от 5 до 25). Разбиение экспериментов было предложено реализовать следующим образом. Комбинации параметров P1 и P2 определяют серию экспериментов. В рамках каждой из серий проводится по 16 экспериментов (один эксперимент для

каждой из комбинаций параметров S1, S2, S3 и S4), каждый из экспериментов проводится по три раза с различными значениями параметра T1.

Наименьшее значение 14% критерия Y было получено при P1 = 50, P2 = 1000, S1 = 10, S2 = 10, S3 = 100, S4 = 10, что подтверждает высокую эффективность разработанных алгоритмов для небольших ОВС с высокой загрузкой. Наиболее высокое значение 84% критерия Y было получено при P1 = 1000, P2 = 10, S1 = 10, S2 = 100, S3 = 100, S4 = 100, что соответствует слабо загруженной задаче ОВС, содержащей большое количество вычислительных ресурсов, являющейся наименее подходящей для применения предложенных в статье эвристических методов и алгоритмов. Итоги всех проведенных экспериментов показывают, что среднее значение критерия Y составило 53%. Это позволяет сделать вывод, что в общем виде даже при большом количестве ресурсов в ОВС предложенные в настоящей статье алгоритмы позволяют сократить суммарное время решения всех задач множества Z.

7. Заключение

Проведенные исследования показали, что основным преимуществом предлагаемого мультиагентного метода диспетчирования ресурсов в ОВС является то, что вычислительный процесс адаптируется к актуальным вычислительным возможностям гетерогенных ресурсов, входящих в ее состав. По сравнению с классической централизованной организацией диспетчера облачной среды в данном случае упрощаются требования к служебным серверам (доскам объявлений), что позволяет существенно снизить стоимость облачных вычислений, а также упростить процесс масштабирования облачной среды.

Предложенные в статье метод и алгоритмы позволяют повысить эффективность и гибкость использования вычислительного оборудования в ОВС за счет возможности адаптивного распределения задач в множестве гетерогенных ресурсов с динамически изменяемыми параметрами, при этом не требуют от пользователей дополнительной информации о необходимом времени решения задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alam T.* Cloud Computing and its role in the Information Technology // IAIC Transactions on Sustainable Digital Innovation (ITSDI). 2020. Vol. 1. No. 2. P. 108–115.
2. *Батаев А.В.* Оценка мирового рынка облачных технологий в финансовой сфере // Вектор экономики. 2019. № 6. С. 91–91.
3. *Караев А.В., Емельянов Д.О., Барановская Т.П.* Актуальность и особенности внедрения ИТ-сервисов с применением облачных технологий // Информационное общество: современное состояние и перспективы развития. 2020. С. 387–390.

4. *Fink A., Homberger J.* An ant-based coordination mechanism for resource-constrained project scheduling with multiple agents and cash flow objectives // Flexible Services and Manufacturing Journal. 2013. Vol. 25. No. 1. P. 94–121.
5. *Verma A., Kaushal S.* A hybrid multi-objective Particle Swarm Optimization for scientific workflow scheduling // Parallel Comput. 2017. Vol. 62. P. 1–19.
6. *Yuan X., Liu J., Wimmers M.O.* A multi-agent genetic algorithm with variable neighborhood search for resource investment project scheduling problems // IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC). IEEE, 2015. P. 23–30.
7. *Bertsekas D.P.* Feature-based aggregation and deep reinforcement learning: A survey and some new implementations // IEEE/CAA J. Autom. Sin. 2019. Vol. 6. No. 1. P. 1–31.
8. *Habibi F., Barzinpour F., Sadjadi S.* Resource-constrained project scheduling problem: review of past and recent developments // J. Project Management. 2018. Vol. 3. No. 2. P. 55–88.
9. *Mao H., Alizadeh M., Menache I., Kandula S.* Resource management with deep reinforcement learning // HotNets 2016 – Proceedings of the 15th ACM Workshop on Hot Topics in Networks. 2016. P. 50–56.
10. *Xue L., Sun C., Wunsch D., et al.* An adaptive strategy via reinforcement learning for the prisoner's dilemma game // IEEE/CAA J. Autom. Sin. 2018. V. 5. No. 1. P. 301–310.
11. *Zhan Y., Ammar H.B., Taylor M.E.* Theoretically-grounded policy advice from multiple teachers in reinforcement learning settings with applications to negative transfer // IJCAI International Joint Conference on Artificial Intelligence. 2016. Vol. 2016-Janua. P. 2315–2321.
12. *Wang H., Huang T., Liao X., et al.* Reinforcement Learning for Constrained Energy Trading Games with Incomplete Information // IEEE Trans. Cybern. 2017. Vol. 47. No. 10. P. 3404–3416.
13. *Zheng L., Yang J., Cai H., et al.* Magent: A many-agent reinforcement learning platform for artificial collective intelligence // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2018. Vol. 32. No. 1. P. 8222–8223.
14. *Lowe R., Wu Y.I., Tamar A., et al.* Multi-agent actor-critic for mixed cooperative-competitive environments // Advances in neural information processing systems. 2017. Vol. 30. P. 1–12.
15. *Каляев И.А., Каляев А.И., Коровин Я.С.* Алгоритм мультиагентного диспетчирования ресурсов в гетерогенной облачной среде // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21. № 5. С. 38–53.
16. *Каляев А.И., Каляев И.А.* Метод мультиагентного диспетчирования ресурсов в облачных вычислительных средах // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2016. № 2. С. 51–57.
17. *Каляев И.А., Капустян С.Г.* Метод мультиагентного управления «умным» интернет-производством // Робототехника и техническая кибернетика. 2018. № 1. С. 34–48.
18. *Абляллимов О.С.* О решении задачи оптимизации методом динамического программирования // Universum: технические науки. 2020. № 9-1(78). С. 16–18.
19. *Канцедал С.А., Костикова М.В.* Динамическое программирование для задачи коммивояжера // Автоматизированные системы управления и приборы автоматки. 2014. № 166. С. 15–20.

20. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2002.
21. *Kalyaev A.I., Korovin Y.S.* Adaptive Multiagent Organization of the Distributed Computations / AASRI Procedia. 2014. Vol. 6. P. 49–58.
(URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aasri.2014.05.008>)
22. INTRODUCTION TO ALGORITHMS, Second Edition Thomas H. Cormen, Charles E Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein. (URL: <http://www.mif.vu.lt/~valdas/ALGORITMAI/LITERATURA/Cormen/Cormen.pdf>).
23. *Рейнгольд О., Нвергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980.
24. *Каляев А.И., Хисамутдинов М.В.* Программа и методики экспериментальных исследований методов и алгоритмов работы распределенной вычислительной системы с помощью программной модели // Наука и современность: сборник материалов V Международной научно-практической конференции. 2016. С. 44–45.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 15.10.2021

После доработки 14.02.2022

Принята к публикации 28.04.2022

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2022 г. М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)
(Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет)

АДАПТИВНОЕ H_∞ -ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ¹

Для линейных динамических объектов рассматривается новый класс регуляторов с настраиваемыми параметрами, синтезируемых с целью уменьшения интегральных показателей влияния начального и внешнего возмущений. Параметры регулятора настраиваются согласно дифференциальному уравнению в направлении убывания локальной целевой функции. Формулируются условия, при выполнении которых достигается цель управления, и приводятся потери по сравнению со стационарными линейно-квадратичным и H_∞ -оптимальным регуляторами, в том числе и в случае вырожденных функционалов. Показано, как эти регуляторы применяются в адаптивном линейно-квадратичном и H_∞ -оптимальном управлении для неопределенных объектов, параметры которых принадлежат заданному многограннику, а также в адаптивном отслеживании выхода эталонной модели.

Ключевые слова: адаптивное управление, H_∞ -оптимальное управление, линейно-квадратичное управление, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231022080074, EDN: ANHFHC

1. Введение

В статье развивается подход к синтезу законов управления в условиях неопределенности, берущий свое начало в работах Ю.И. Неймарка, связанных с адаптивным управлением по скорости убывания функции Ляпунова [1; 2, с. 304], и А.Л. Фрадкова по скоростному градиенту [3, 4]. Основная идея этого подхода состоит в следующем. Пусть динамическая система при некоторых постоянных значениях параметров допускает квадратичную функцию Ляпунова, обеспечивающую асимптотическую устойчивость состояния равновесия. Если параметры системы настраивать в направлении убывания производной этой функции Ляпунова по траектории системы, то ее состояние будет стремиться к тому же равновесию. Такой подход позволил с единых позиций рассмотреть многие из известных к тому времени алгоритмов адаптации

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего” (соглашение № 075-02-2021-1394).

и идентификации в задачах управления и наблюдения в условиях неопределенности. Из недавних обзоров [5, 6] можно узнать о конкретных результатах, полученных по этой теме за последние 40 с лишним лет.

Основное внимание в работах этого направления уделялось решению задач стабилизации или асимптотического отслеживания и лишь в некоторых из них рассматривались задачи адаптивного управления с оценкой функционала качества и, в частности, задачи оптимального гашения возмущений. Так, в [7] для квадратных систем, в которых размерности векторов управления и целевого выхода совпадают, синтезируется система адаптивного управления, обеспечивающая гарантированное значение H_∞ -нормы при асимптотическом отслеживании выхода эталонной модели. В [8] заданный уровень гашения возмущений при адаптивном управлении, основанном на методе пассивации (см. [9]), обеспечивается за счет введения дополнительного шунтирования в алгоритм настройки для ограничения роста настраиваемых параметров. В [10] показано, что при некоторых дополнительных условиях стандартное адаптивное управление гарантирует заданный уровень гашения возмущений для систем, в которых вектор управления не входит в целевой выход.

В настоящей работе адаптивное управление синтезируется на основе нестационарных регуляторов, предназначенных для минимизации максимального отношения L_2 -нормы целевого выхода z к L_2 -норме внешнего возмущения v и/или евклидовой норме начального возмущения x_0 . Это максимальное отношение называется уровнем гашения возмущений системы, а точнее: при внешнем возмущении и нулевых начальных условиях — H_∞ -нормой, при неизвестных начальных условиях в отсутствие внешнего возмущения — γ_0 -нормой и при неизвестных начальных условиях и внешнем возмущении — обобщенной H_∞ -нормой. В общих чертах синтез заключается в следующем. Если в объекте управления с линейной обратной связью уровень гашения возмущений меньше заданного числа γ , то найдется положительно определенная функция Ляпунова $V(x) = x^T P x$ такая, что по траектории замкнутой системы при любых возмущениях выполняется неравенство $\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0$, в котором \dot{V} — производная по времени функции $V(x)$ в силу системы. Левую часть этого неравенства, рассматриваемую как функцию параметров обратной связи, назовем локальной целевой функцией и будем настраивать параметры регулятора в направлении убывания этой функции. Оказывается, что если при каких-либо, вообще говоря, неизвестных значениях параметров локальная целевая функция является отрицательно определенной, уровень гашения возмущений в системе, замкнутой таким нестационарным регулятором, также будет меньше γ . Для этих регуляторов указываются оценки потерь по сравнению с соответствующими оптимальными регуляторами.

Статья структурирована следующим образом. После введения во втором разделе описывается синтез регуляторов с настраиваемыми параметрами для гашения возмущений и доказывается основная теорема. В третьем разделе приводится анализ нестационарной системы управления при измеряемом состоянии, решается обратная задача H_∞ -оптимального управления и находят-

ся условия, при которых система управления с данным алгоритмом настройки параметров обеспечивает требуемый уровень гашения возмущений. В четвертом разделе показано, как на основе предлагаемого подхода синтезировать адаптивные линейно-квадратичные, γ -оптимальные и H_∞ -оптимальные управления для неопределенной системы, у которой элементы матриц принадлежат заданному многограннику, а в пятом разделе – как синтезировать адаптивное оптимальное отслеживание выхода эталонной модели.

2. Синтез нестационарных регуляторов для гашения возмущений

Пусть уравнения управляемой системы имеют вид

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_u u + B_v v, \\ y &= C_y x, \\ z &= Cx + Du, \end{aligned}$$

в которых $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние системы, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ – управление, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ – измеряемый выход, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ – целевой выход, $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ – возмущение, принадлежащее классу L_2 на соответствующем интервале времени. Примем ради упрощения выкладок, что $C^T D = 0$.

Сформулируем следующее предположение, которое будет неоднократно применяться в дальнейшем.

Предположение А. Для системы (2.1) существует квадратичная функция $V(x) = x^T P x$ с постоянной положительно определенной матрицей P и стационарный закон управления $u_* = \Theta_* y$ такие, что выполняется условие

$$(2.2) \quad \dot{V} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0 \quad \forall x, v,$$

где \dot{V} обозначает производную по времени от функции $V(x)$ в силу уравнений замкнутой системы.

Известно, что если предположение А выполнено, то уровень гашения возмущений в замкнутой системе с учетом начальных условий меньше γ , т.е.

$$(2.3) \quad \|z\|_{[0,T]}^2 < \gamma^2 \|v\|_{[0,T]}^2 + x_0^T P x_0 \quad \forall T.$$

В этом случае в дальнейшем будем говорить, что функция $V(x)$ обеспечивает уровень гашения возмущений, меньший γ . Величина γ является верхней границей γ_0 -нормы, H_∞ -нормы и обобщенной H_∞ -нормы замкнутой системы, т.е.

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \gamma_0 &= \sup_{x_0 \neq 0, v \equiv 0} \frac{\|z\|}{\|x_0\|} < \gamma, \quad \|H\|_\infty = \sup_{v \neq 0, x_0 = 0} \frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma, \\ \|H\|_{g\infty} &= \sup_{x_0^T R x_0 + \|v\|^2 \neq 0} \frac{\|z\|}{\sqrt{x_0^T R x_0 + \|v\|^2}} < \gamma, \end{aligned}$$

где $R = R^T > 0$. Заметим, что при отсутствии внешнего возмущения из (2.3) следует, что $\|z\|^2 < x_0^T P x_0$. Поэтому для того, чтобы $\gamma_0 < \gamma$, нужно дополнительно потребовать выполнение неравенства $P < \gamma^2 I$. При наличии внешнего возмущения и ненулевых начальных условий из (2.3) следует, что для того, чтобы $\|H\|_{g\infty} < \gamma$, требуется дополнительное неравенство $P < \gamma^2 R$.

Рассмотрим закон управление вида $u = \Theta(t)y$, в котором матрица параметров $\Theta(t)$ настраивается с целью минимизации функции

$$\Phi(x, v, \Theta) = \dot{V} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2.$$

А именно, пусть в каждый момент времени скорость изменения матрицы настраиваемых параметров регулятора составляет острый угол с направлением наискорейшего убывания этой функции, т.е. определяется в соответствии с уравнением

$$(2.5) \quad \dot{\Theta} = -(1/2)M^{-1}\nabla_{\Theta} \left(\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 \right)$$

с начальным условием $\Theta(0) = \Theta_0$, где $(n_u \times n_u)$ -матрица $M = M^T > 0$ и ∇_{Θ} обозначает градиент по Θ , т.е. $(n_u \times n_y)$ -матрицу, элементы которой есть частные производные функции $\Phi(x, v, \Theta)$ по соответствующим элементам матрицы Θ . Задача заключается в нахождении условий, при которых в замкнутой системе при управлении $u = \Theta(t)y$, (2.5) уровень гашения возмущений будет меньше γ .

Запишем функцию

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \Phi(x, v, \Theta) = & 2x^T P (Ax + B_u \Theta y + B_v v) + \\ & + x^T C^T C x + y^T \Theta^T D^T D \Theta y - \gamma^2 v^T v \end{aligned}$$

и вычислим ее градиент

$$(1/2)\nabla_{\Theta}\Phi(x, v, \Theta) = B_u^T P x y^T + D^T D \Theta y y^T.$$

Допустим, что найдется постоянная $(n_u \times n_y)$ -матрица K , удовлетворяющая уравнению

$$(2.7) \quad K C_y = -B_u^T P.$$

Тогда уравнение настройки параметров (2.5) примет вид

$$(2.8) \quad \dot{\Theta} = -M^{-1} (D^T D \Theta - K) y y^T.$$

В случае $D^T D = S > 0$, который будем называть невырожденным, параметры настраиваются в соответствии с уравнением

$$(2.9) \quad \dot{\Theta} = -M^{-1} S (\Theta - \zeta) y y^T,$$

где матрица $\zeta = S^{-1}K$ согласно (2.7) удовлетворяет уравнению $\zeta C_y = -S^{-1}B_u^T P$. При $D = 0$ уравнение (2.8) записывается как

$$(2.10) \quad \dot{\Theta} = M^{-1}Kyy^T,$$

где матрица K удовлетворяет (2.7). Отметим, что уравнение (2.10) совпадает с уравнением настройки параметров по скорости убывания функции Ляпунова или с уравнением скоростного градиента.

Для того, чтобы представить, как выглядит уравнение (2.8) в вырожденном случае, когда $D^T D \geq 0$ и $D \neq 0$, используем известную декомпозицию

$$(2.11) \quad \begin{aligned} D^T D &= (W_1 \ W_2) \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1^T \\ W_2^T \end{pmatrix}, \\ S &= S^T > 0, \quad \begin{pmatrix} W_1^T \\ W_2^T \end{pmatrix} (W_1 \ W_2) = I, \end{aligned}$$

где столбцы матрицы W_1 образуют базис образа матрицы D^T , а столбцы матрицы W_2 – базис ядра матрицы D , т.е. $DW_2 = 0$. Обозначим

$$(2.12) \quad u_1 = W_1^T u, \quad u_2 = W_2^T u, \quad B_{u1} = B_u W_1, \quad B_{u2} = B_u W_2$$

и запишем уравнения системы (2.1) с управлением $u = \Theta(t)y$ как

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_{u1}u_1 + B_{u2}u_2 + B_v v, \\ y &= C_y x, \\ z &= Cx + S^{1/2}u_1, \end{aligned}$$

где $u_1 = \Theta_1(t)y$, $u_2 = \Theta_2(t)y$, $\Theta_1(t) = W_1^T \Theta(t)$, $\Theta_2(t) = W_2^T \Theta(t)$. При этом уравнение (2.8) с $M = \alpha I$ для матрицы $\Theta(t)$ трансформируется в следующие уравнения для матриц $\Theta_1(t)$ и $\Theta_2(t)$:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \dot{\Theta}_1 &= -\alpha^{-1}S(\Theta_1 - \zeta_1)yy^T, \\ \dot{\Theta}_2 &= \alpha^{-1}K_2yy^T, \end{aligned}$$

в которых $\zeta_1 = S^{-1}K_1$, а K_1 и K_2 удовлетворяют уравнениям

$$K_1 C_y = -B_{u1}^T P, \quad K_2 C_y = -B_{u2}^T P.$$

В следующей теореме находятся условия, при которых синтезируемый нестационарный регулятор обеспечивает уровень гашения возмущений, меньший γ .

Теорема 2.1. Пусть предположение А выполнено для $V(x) = x^T P x$ и существует матрица K , удовлетворяющая уравнению $K C_y = -B_u^T P$. Тогда в замкнутой системе (2.1), $u = \Theta(t)y$, (2.8) выполняется условие

$$(2.15) \quad \|z\|_{[0,T]}^2 + \|D(u - u_*)\|_{[0,T]}^2 < \gamma^2 \|v\|_{[0,T]}^2 + \psi_0 \quad \forall T,$$

где

$$(2.16) \quad \psi_0 = x_0^T P x_0 + \text{tr} [(\Theta_0 - \Theta_*)^T M (\Theta_0 - \Theta_*)].$$

Из доказательства теоремы 2.1, приведенного в Приложении, следует, что для функции

$$(2.17) \quad \Psi(x, \Theta) = V(x) + \text{tr} [(\Theta - \Theta_*)^T M (\Theta - \Theta_*)]$$

по траекториям замкнутой системы выполняется

$$\dot{\Psi} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 = \Phi(x, v, \Theta_*) - y^T (\Theta - \Theta_*)^T D^T D (\Theta - \Theta_*) y < 0.$$

В силу этого все переменные системы ограничены

$$\Psi(x(t), \Theta(t)) \leq \Psi(x_0, \Theta_0) + \gamma^2 \|v\|_{[0,t]}^2 \quad \forall t$$

и выполняются соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} D[u(t) - u_*(t)] = 0.$$

Для сходимости матрицы $\Theta(t)$ к Θ_* требуется выполнение дополнительных условий — в частности, так называемых условий неисчезающего возбуждения. Этот вопрос в данной статье не рассматривается.

Заметим также, что из (2.15) следует

$$\sup_{x_0, v, \Theta_0} \frac{\|z\|}{\sqrt{x_0^T R x_0 + \|v\|^2 + \text{tr} (\Theta_0 - \Theta_*)^T (\Theta_0 - \Theta_*)}} < \gamma$$

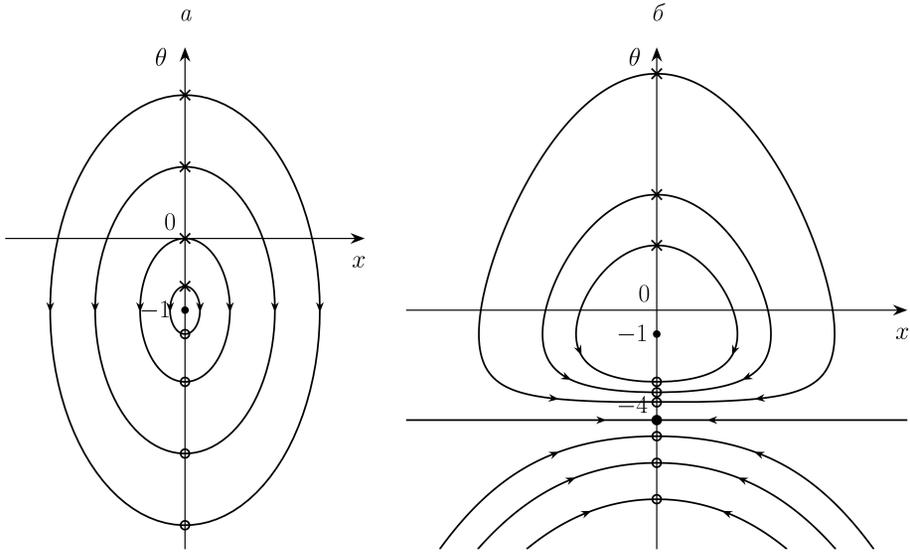
при условии $P < \gamma^2 R$, $M < \gamma^2 I$. По аналогии с обобщенной H_∞ -нормой (2.4) стационарной системы эту величину можно интерпретировать как уровень гашения внешнего возмущения и начальных возмущений по состоянию и настраиваемым параметрам в нестационарной системе (2.1), $u = \Theta(t)y$, (2.8). Таким образом, если обобщенная H_∞ -норма системы при некотором стационарном законе управления меньше γ , то указанный уровень гашения возмущений в рассматриваемой нестационарной системе будет также меньше γ .

Если возмущения отсутствуют, то для функции $\Psi(x, \Theta) > 0$, заданной в (2.17), верно неравенство

$$\dot{\Psi} + |z|^2 + |D(u - u_*)|^2 \leq 0,$$

означающее, что независимо от поведения настраиваемых параметров указанный нестационарный регулятор обеспечивает выполнение условия

$$\|z\|^2 + \|D(u - u_*)\|^2 \leq \psi_0.$$



Фазовые портреты замкнутой нестационарной системы управления:
 а) вырожденный случай $z = x$; б) невырожденный случай $z = \text{col}(x; 0, 5u)$.

Если $u_* = \Theta_* y$ является линейно-квадратичным законом управления, при котором $\min \|z\|^2 = x_0^T P x_0$, то “потери” соответствующего нестационарного регулятора $u = \Theta(t)y$, (2.8) по сравнению с оптимальным регулятором не превышают согласно (2.16) величину $\text{tr}[(\Theta_0 - \Theta_*)^T M(\Theta_0 - \Theta_*)]$.

Отметим, что в пространстве состояний (x, Θ) нелинейной динамической системы

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_u \Theta C_y)x, \\ \dot{\Theta} &= -M^{-1} (D^T D \Theta - K) C_y x x^T C_y^T, \end{aligned}$$

описывающей динамику замкнутой системы управления без возмущения, имеется многообразие состояний равновесия, в которых $x = 0$. Именно наличие целого многообразия равновесий по параметрам Θ делает необходимым дополнительные механизмы для обеспечения сходимости $\Theta(t)$ к Θ_* и в целом осложняет анализ динамики этой системы. Исследование линейной динамической системы, полученной путем линеаризации системы (2.18) в окрестности произвольной фиксированной точки $\hat{\Theta}$ этого многообразия, показывает, что для тех $\hat{\Theta}$, для которых матрица $A + B_u \hat{\Theta} C_y$ гурвицева, соответствующее равновесие системы (2.18) будет устойчивым по Ляпунову (но не асимптотически устойчивым), а там где эта матрица негурвицева — будет неустойчивым. Предположение А состоит в том, что множество устойчивых точек в этом многообразии не пусто, т.е. некоторая точка Θ_* должна принадлежать этому множеству.

Для иллюстрации на рисунке приведены фазовые портреты двумерной замкнутой системы, состоящей из одномерного объекта $\dot{x} = x + u$ с нестациона-

нарным регулятором $u = \theta(t)x$ при выборе $V(x) = x^2$ в двух случаях: а) вырожденный случай, когда целевой выход $z = x$, $\theta_* = -2$ и алгоритм настройки параметра регулятора $\dot{\theta} = -\alpha^{-1}x^2$; б) невырожденный случай, когда целевой выход $z = \text{col}(x; 0,5u)$, $\theta_* = -4$ и алгоритм $\dot{\theta} = -\alpha^{-1}(\theta + 4)x^2$. Здесь $\text{col}(a, b)$ обозначает вектор-столбец, состоящий из векторов a и b . Интегральные кривые в этих двух случаях задаются уравнениями: а) $\alpha^{-1}x^2 + (\theta + 1)^2 = \text{const}$; б) $(2\alpha)^{-1}x^2 + \theta - 3 \ln |\theta + 4| = \text{const}$. Все траектории стремятся к устойчивым состояниям равновесия $x = 0$, $\theta < -1$, отмеченным на рисунке кружочками. Крестиками отмечены неустойчивые состояния равновесия $x = 0$, $\theta \geq -1$.

3. Анализ нестационарной системы управления при измеряемом состоянии

В этом разделе выясняются условия, при которых синтезированный нестационарный регулятор приводит к достижению цели. В приводимом здесь анализе предполагается, что матрицы в уравнении объекта полностью известны. В последующих разделах будет показано, как эти регуляторы могут быть применены в адаптивном управлении.

В случае измеряемого состояния объекта (2.1), т.е. при $C_y = I$, вернемся к предположению А и выясним условия, при которых оно выполняется. Очевидно, что неравенство (2.2) при постоянной матрице Θ может быть записано как матричное неравенство

$$(3.1) \quad \begin{pmatrix} (A + B_u\Theta)^T P + P(A + B_u\Theta) & * & * \\ B_v^T P & -\gamma^2 I & * \\ C + D\Theta & 0 & -I \end{pmatrix} < 0.$$

Умножая это неравенство слева и справа на матрицу $\text{diag}(P^{-1}, I, I)$ и обозначая $Y = P^{-1}$, $Z = \Theta Y$, стандартным образом получим линейное матричное неравенство

$$(3.2) \quad \begin{pmatrix} AY + YA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & * & * \\ B_v^T & -\gamma^2 I & * \\ CY + DZ & 0 & -I \end{pmatrix} < 0$$

относительно $Y > 0$, Z и γ^2 . Следовательно, если Y удовлетворяет неравенству (3.2), то регулятор $u = \Theta(t)x$, в котором параметры настраиваются согласно уравнению

$$(3.3) \quad \dot{\Theta} = -M^{-1} (D^T D \Theta - K) x x^T$$

с матрицей $K = -B_u^T Y^{-1}$, обеспечивает достижение цели (2.15).

Покажем, что предположение А выполняется тогда и только тогда, когда существует такое $\mu > 0$, что регуляризованный центральный H_∞ -оптимальный закон управления

$$(3.4) \quad u = \Theta_p x, \quad \Theta_p = -\mathcal{D}_\mu^{-1} B_u^T P, \quad \mathcal{D}_\mu = D^T D + \mu^2 W_2 W_2^T > 0$$

обеспечивает уровень гашения возмущений, меньший γ . Заметим, что для функции $V(x) = x^T P x$ по траектории системы (2.1) при законе управления (3.4) выполняется условие

$$(3.5) \quad \dot{V} + |\hat{z}|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0 \quad \forall x, v,$$

где $\hat{z} = \text{col}(z, \mu W_2^T u)$ и μ — некоторый параметр. В частности, когда $D^T D = S > 0$, имеем $\mathcal{D}_\mu = D^T D$ и этот закон управления совпадает с так называемым центральным H_∞ -оптимальным законом управления

$$(3.6) \quad u = -(D^T D)^{-1} B_u^T P x,$$

где матрица P удовлетворяет соответствующему матричному неравенству, следующему из (2.2), и неравенству $P < \gamma^2 I$ или $P < \gamma^2 R$ для критерия γ или $\|H\|_{\infty}$ соответственно, а при $D = 0$ имеет вид $u = -\mu^{-2} B_u^T P x$.

Теорема 3.1. Следующие два утверждения относительно системы (2.1) эквивалентны:

- (i) *существует положительно определенная матрица P такая, что при некотором стационарном законе управления $u = \Theta x$ для всех x и v выполняется неравенство $\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0$, в котором $V(x) = x^T P x$;*
- (ii) *линейное матричное неравенство*

$$(3.7) \quad \begin{pmatrix} AY + Y A^T - B_u \mathcal{D}_\mu^{-1} B_u^T & * & * \\ B_v^T & -\gamma^2 I & * \\ CY & 0 & -I \end{pmatrix} < 0,$$

в котором $\mathcal{D}_\mu^{-1} = (D^T D)^+ + \mu^{-2} W_2 W_2^T > 0$ и верхний “+” обозначает псевдообращение, разрешимо относительно $Y = Y^T > 0$ и $\mu^{-2} > 0$. В этом случае при регуляризованном центральном H_∞ -оптимальном законе управления $u = \Theta_P x$, где $\Theta_P = -\mathcal{D}_\mu^{-1} B_u^T P$ и $P = Y^{-1}$, уровень гашения возмущений меньше γ .

Теперь с учетом теорем 2.1 и 3.1 приходим к следующему выводу.

Следствие 3.1. Если матрица $Y > 0$ удовлетворяет неравенству (3.7), то при законе управления $u = \Theta(t)x$, в котором параметры настраиваются согласно уравнению

$$(3.8) \quad \dot{\Theta} = -M^{-1} (D^T D \Theta - K) x x^T$$

с матрицей $K = -B_u^T Y^{-1}$, выполняется условие (2.15).

В рассматриваемом синтезе нестационарных регуляторов при измеряемом состоянии можно исключить матрицу P и непосредственно характеризовать множество всех матриц K в уравнении (3.8), при которых достигается цель. Для этого, подставляя равенство $K = -B_u^T P$ в (3.1), получим неравенство

$$(3.9) \quad \begin{pmatrix} A^T P + P A - \Theta^T K - K^T \Theta & * & * \\ B_v^T P & -\gamma^2 I & * \\ C + D \Theta & 0 & -I \end{pmatrix} < 0.$$

Таким образом, если при данной матрице K линейное матричное неравенство (3.9) разрешимо относительно постоянных матриц $P > 0$, Θ и γ^2 таких, что $K = -B_u^T P$, то нестационарный регулятор $u = \Theta(t)x$, (3.3) обеспечивает достижение цели.

Кроме того, можно поступить следующим образом. Если обозначить $\zeta = \mathcal{D}_\mu^{-1}K$, то для непосредственной характеристики множества всех матриц K , при которых достигается цель, согласно теореме 3.1 требуется выяснить, при каких условиях для заданной матрицы ζ существует решение Y неравенства (3.7) такое, что $\zeta = -\mathcal{D}_\mu^{-1}B_u^T Y^{-1}$. Так как в правой части последнего равенства стоит матрица параметров закона управления (3.4), то задача сводится к решению следующей обратной задачи центрального H_∞ -оптимального управления: при каких условиях закон управления $u = \zeta x$ с заданной матрицей ζ является центральным H_∞ -оптимальным управлением (3.4), при котором для системы (2.1) выполняется неравенство

$$(3.10) \quad \int_0^\infty (x^T Q x + u^T D_\mu u - \gamma^2 v^T v) dt \leq x_0^T P x_0$$

для некоторых $Q \geq C^T C$ и $P > 0$.

Введем матричные функции

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{W}(s) &= (\mathcal{W}_u(s) \ \mathcal{W}_v(s)), \quad \mathcal{W}_z(s) = C(sI - A)^{-1}(B_u \ B_v), \\ \mathcal{W}_u(s) &= I - \zeta(sI - A)^{-1}B_u, \quad \mathcal{W}_v(s) = -\zeta(sI - A)^{-1}B_v. \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{W}_u(s)$ является передаточной матрицей системы

$$(3.12) \quad \dot{x} = Ax + B_u u + B_v v$$

от входа u к выходу $u - \zeta x$, которая в теории управления называется возвратной разностью для заданного закона управления $u = \zeta x$, $\mathcal{W}_v(s)$ — передаточная матрица от входа v к выходу $-\zeta x$, а $\mathcal{W}_z(s)$ — передаточная матрица от входа $\text{col}(u, v)$ к выходу $z = Cx$.

Теорема 3.2. Для системы (2.1), в которой пара $(A, (B_u \ B_v))$ управляема, $C^T D = 0$ и матрица $D^T D$ представлена в виде декомпозиции (2.11), закон управления $u = \Theta(t)x$ с матрицей $\Theta(t)$, настраиваемой согласно уравнению (3.8) при заданной матрице K , обеспечивает достижение цели (2.15), если выполнено одно из следующих эквивалентных условий, в которых $\mathcal{D}_\mu = D^T D + \mu^2 W_2 W_2^T > 0$:

- (i) закон управления $u = \zeta x$ с $\zeta = \mathcal{D}_\mu^{-1}K$ является регуляризованным оптимальным законом управления вида (3.4), обеспечивающим уровень гашения возмущений меньше γ ;
- (ii) в предположении, что при $\zeta = \mathcal{D}_\mu^{-1}K$ матрица $A + B_u \zeta$ гурвицева, для передаточных матриц $\mathcal{W}(s)$ и $\mathcal{W}_z(s)$, определенных в (3.11), выполнено

обобщенное частотное условие возвратной разности:

$$(3.13) \quad \mathcal{W}^T(-j\omega)\mathcal{D}_\mu\mathcal{W}(j\omega) - \mathcal{W}_z^T(-j\omega)\mathcal{W}_z(j\omega) \geq \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\mu & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \quad \forall \omega.$$

Доказательство теоремы 3.2, приведенное в Приложении, основано на применении частотной теоремы [11] (леммы Калмана–Якубовича–Попова). Заметим, что частотное условие (3.13) дает решение обратной задачи центрального H_∞ -оптимального управления, сформулированной перед теоремой 3.2. В отсутствие возмущений частотное условие (3.13) принимает вид

$$\mathcal{W}_u^T(-j\omega)\mathcal{D}_\mu\mathcal{W}_u(j\omega) - \mathcal{W}_{zu}^T(-j\omega)\mathcal{W}_{zu}(j\omega) \geq \mathcal{D}_\mu \quad \forall \omega,$$

где $\mathcal{W}_{zu}(s) = C(sI - A)^{-1}B_u$. При $C = 0$ и в невырожденном случае, т.е. когда $\mu = 0$, это условие переходит в хорошо известное частотное условие возвратной разности [12]

$$(3.14) \quad \mathcal{W}_u^T(-j\omega)S\mathcal{W}_u(j\omega) \geq S \quad \forall \omega.$$

При выполнении (3.14) заданный закон управления $u = \zeta x$ является оптимальным по отношению к невырожденному квадратичному функционалу вида $J(u) = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T S u) dt$ для некоторой матрицы $Q \geq 0$ или, другими словами, этот закон управления обеспечивает выполнение неравенства $\dot{V} + u^T S u < 0$. Обратная задача минимаксного управления, в которой заданной является не только стратегия управления, но и стратегия возмущения, была рассмотрена в [13].

4. Синтез адаптивных H_∞ -оптимальных регуляторов

Применим управление $u = \Theta(t)x$, (3.3) для гашения возмущений в неопределенной системе. Предполагается, что матрицы B_u и D заданы, а остальные матрицы или их некоторые элементы, вообще говоря, не известны, начальные условия x_0 не определены и возмущения не измеряются. А именно, пусть в системе (2.1) матрицы A , B_v и C принадлежат симплексу

$$A = \left\{ (A \ B_v \ C) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i \ B_{vi} \ C_i), \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}$$

с известными вершинами. Допустим, что для каждой вершины этого симплекса найдется своя обратная связь $u = \Theta_i x$, при которой функция $V(x) = x^T P x$ обеспечивает уровень гашения возмущений, меньший γ . Согласно теореме 3.1 это означает, что линейные матричные неравенства

$$(4.1) \quad \begin{pmatrix} A_i Y + Y A_i^T - B_u \mathcal{D}_{\mu_i}^{-1} B_u^T & * & * \\ B_{vi}^T & -\gamma^2 I & * \\ C_i Y & 0 & -I \end{pmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

в которых $D_{\mu_i}^{-1} = (D^T D)^+ + \mu_i^{-2} W_2 W_2^T > 0$, разрешимы относительно $Y = Y^T > 0$ и $\mu_i^{-2} > 0$. Суммируя эти неравенства с коэффициентами α_i , получим, что для любой неопределенной системы с матрицами, принадлежащими симплексу \mathcal{A} , при законе управления $u = \Theta_\alpha x$, в котором $\Theta_\alpha = -D_\mu^{-1} B_u^T Y^{-1}$ при $D_\mu^{-1} = (D^T D)^+ + \mu^{-2} W_2 W_2^T$ и $\mu^{-2} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu_i^{-2}$, выполняется условие $\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0$, где $V(x) = x^T Y^{-1} x$. Следовательно, предположение \mathcal{A} выполняется и адаптивное управление с алгоритмом адаптации (3.3), в котором $K = -B_u^T Y^{-1}$, приводят к достижению цели для всех объектов из симплекса \mathcal{A} . Заметим, что здесь в отличие от синтеза робастного управления, основанного на существовании общей функции $V(x)$, не требуется, чтобы существовал единый для всех вершин симплекса закон управления, при котором уровень гашения возмущений меньше γ . Таким образом, адаптивное управление $u = \Theta(t)x$, (3.3) в этой задаче может обеспечить, вообще говоря, меньшее значение уровня гашения возмущений, чем указанное робастное управление.

Если внешнее возмущение в системе не принимается во внимание, то матрица Y в уравнении адаптивного регулятора находится при решении линейных матричных неравенств (4.1), в которых удалены вторые блочные строки и столбцы. Тогда для квадратичного функционала при адаптивном управлении верна оценка

$$\|z\|^2 \leq x_0^T Y^{-1} x_0 + \text{tr} [(\Theta_0 - \Theta_*)^T M (\Theta_0 - \Theta_*)].$$

Если в этом случае к неравенствам (4.1) с удаленными вторыми блочными строками и столбцами добавить неравенство $\text{diag}(Y, \gamma^2 I) > 0$ и найти минимальное γ^2 такое, что все эти неравенства разрешимы, то придем к адаптивному γ_0 -оптимальному управлению, при котором $\|z\|^2 < \gamma^2 |x_0|^2 + \text{tr} [(\Theta_0 - \Theta_*)^T M (\Theta_0 - \Theta_*)]$.

Для иллюстрации возьмем модель динамики ракеты, близкую к описанной в [15] уравнениями вида (2.1), в которых матрица A принадлежит многограннику с вершинами

$$A_i = \begin{pmatrix} -0,001 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \delta_i & 1 & 0 \\ 0 & -\eta_i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}, \quad B_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad B_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = (1 \quad 0 \quad 0,1 \quad 0), \quad D = 0,$$

где $(\delta_i, \eta_i) \in \{(0,2, 6), (0,2, 106), (4, 6), (4, 106)\}$. Минимальное значение уровня гашения возмущений, достигаемое в этой системе при робастном управлении, получилось $\gamma = 0,017$, в то время, как для рассматриваемого адаптивного управления эта величина равна $\gamma = 0,013$. Для расчетов использовался Matlab с дополнительным пакетом svx.

5. Адаптивное отслеживание выхода эталонной модели

Пусть неопределенный объект описывается уравнениями вида

$$(5.1) \quad \dot{x} = Ax + B_u u + B_v v, \quad y = C_y x, \quad z = Cx.$$

Цель управления состоит в том, чтобы обеспечить заданный уровень гашения возмущений по отношению к отклонению целевого выхода z объекта от целевого выхода z_m эталонной модели, заданной уравнениями

$$(5.2) \quad \dot{x}_m = A_m x_m, \quad y_m = C_y x_m, \quad z_m = Cx_m.$$

Будем предполагать, как это принято в теории адаптивного управления с эталонной моделью, что выполнено так называемое условие адаптируемости: для любой, вообще говоря, неизвестной матрицы объекта A найдется матрица Θ_* такая, что $A + B_u \Theta_* C_y = A_m$. Это условие определяет множество объектов, для которых требуется обеспечить указанный уровень гашения возмущений. При этом предположении отклонения состояния и выходов объекта от состояния и соответствующих выходов модели подчиняются уравнениям

$$(5.3) \quad \dot{e} = A_m e + B_u (\Theta - \Theta_*) y + B_v v, \quad e_y = C_y e, \quad e_z = Ce,$$

где $e = x - x_m$, $e_y = y - y_m$, $e_z = z - z_m$.

В соответствии с изложенным подходом выберем квадратичную функцию $V(e) = e^T P e$ и определим адаптивный закон управления в виде

$$(5.4) \quad u = \Theta y, \quad \dot{\Theta} = -(1/2) M^{-1} \nabla_{\Theta} \left(\dot{V} + |e_z|^2 - \gamma^2 |v|^2 \right),$$

где \dot{V} обозначает производную по времени функции $V(e) = e^T P e$ в силу системы (5.3). Вычисляя

$$\nabla_{\Theta} \left(\dot{V} + |e_z|^2 - \gamma^2 |v|^2 \right) = 2B_u^T P e y^T,$$

приходим к алгоритму адаптации

$$(5.5) \quad \dot{\Theta} = M^{-1} K e_y y^T$$

при условии, что найдется матрица K , удовлетворяющая уравнению $K C_y = -B_u^T P$. Предположение А в данном случае состоит в том, что для уравнения (5.3) при $\Theta = \Theta_*$, т.е. для уравнения

$$(5.6) \quad \dot{e} = A_m e + B_v v, \quad e_z = Ce,$$

должно выполняться неравенство $\dot{V} + |e_z|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0$ для всех e и v . Другими словами, функция $V(e) = e^T P e$ должна обеспечивать для эталонной модели уровень гашения возмущений, меньший γ . В результате, если находится матрица $P > 0$, удовлетворяющая соотношениям

$$(5.7) \quad \begin{pmatrix} A_m^T P + P A_m & * & * \\ B_v^T P & -\gamma^2 I & * \\ C & 0 & -I \end{pmatrix} < 0, \quad B_u^T P = -K C_y,$$

то при адаптивном управлении $u = \Theta(t)y$, (5.5) выполняется условие

$$\|e_z\|^2 < \gamma^2 \|v\|^2 + e_0^T P e_0 + \text{tr} [(\Theta_0 - \Theta_*)^T M (\Theta_0 - \Theta_*)].$$

6. Заключение

Для линейных динамических объектов рассмотрен новый класс законов управления: линейные регуляторы, имеющие вид статической обратной связи, параметры которых настраиваются в соответствии с дифференциальным уравнением в направлении убывания локальной целевой функции. Получены условия в терминах линейных матричных неравенств или частотных неравенств, при которых эти регуляторы обеспечивают уровень гашения возмущений в замкнутой системе, меньший заданного, и приведены потери по сравнению с соответствующими стационарными линейно-квадратичными и H_∞ -оптимальными регуляторами. Установлено и проиллюстрировано на примере, что для объектов, уравнения которых содержат неопределенные матрицы, принадлежащие многограннику, адаптивное управление, синтезируемое на основе этих регуляторов, обеспечивает уровень гашения возмущений, вообще говоря, меньший, чем при так называемом робастном квадратичном управлении, основанном на применении единой функции Ляпунова.

Автор выражает признательность анонимным рецензентам, замечания которых помогли улучшить рукопись.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2.1. Вычислим производную функции

$$\Psi(x, \Theta) = V(x) + \text{tr} [(\Theta - \Theta_*)^T M (\Theta - \Theta_*)]$$

в силу системы (2.1), $u = \Theta(t)y$, (2.8) и составим выражение

$$(II.1) \quad \dot{\Psi} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 = \Phi(x, v, \Theta) - 2\text{tr} [(\Theta - \Theta_*)^T (D^T D \Theta - K)y y^T].$$

Представим функцию $\Phi(x, v, \Theta)$, заданную в (2.6), в виде

$$(II.2) \quad \begin{aligned} \Phi(x, v, \Theta) &= 2x^T P (Ax + B_u \Theta y + B_v v) + x^T C^T C x + \\ &+ y^T \Theta^T D^T D \Theta y - \gamma^2 v^T v = \Phi(x, v, \Theta_*) - 2y^T K^T (\Theta - \Theta_*) y + \\ &+ y^T (\Theta^T D^T D \Theta - \Theta_*^T D^T D \Theta_*) y, \end{aligned}$$

где матрица K удовлетворяет уравнению (2.7). Подставляя в (II.1) представление функции $\Phi(x, v, \Theta)$ из (II.2), получим

$$\dot{\Psi} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 = \Phi(x, v, \Theta_*) - y^T (\Theta - \Theta_*)^T D^T D (\Theta - \Theta_*) y.$$

Так как согласно предположению А имеем $\Phi(x, v, \Theta_*) < 0$, то верно неравенство

$$\dot{\Psi} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 < -|D(u - u_*)|^2,$$

интегрирование которого показывает, что выполняются неравенства (2.15). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.1. (i) \rightarrow (ii) Если функция $V(x) = x^T P x$ обеспечивает уровень гашения возмущений, меньший γ при некотором законе управления $u = \Theta x$, то для всех x и v верно неравенство $\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0$. Тогда для достаточно малого $\mu > 0$ будет выполняться $\dot{V} + |\hat{z}|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0$, где $\hat{z} = \text{col}(z, \mu W_2^T u)$. Выделим в левой части последнего неравенства “полный квадрат” и придем к неравенству

$$\begin{aligned} A^T P + P A + \gamma^{-2} P B_v B_v^T P + C^T C - P B_u \mathcal{D}_\mu^{-1} B_u^T P + \\ + (\Theta + \mathcal{D}_\mu^{-1} B_u^T P)^T \mathcal{D}_\mu (\Theta + \mathcal{D}_\mu^{-1} B_u^T P) < 0. \end{aligned}$$

Если оно выполнено при некотором Θ , то

$$(П.3) \quad A^T P + P A + \gamma^{-2} P B_v B_v^T P + C^T C - P B_u \mathcal{D}_\mu^{-1} B_u^T P < 0.$$

Это значит, что для функции $V(x) = x^T P x$ выполняется неравенство $\dot{V} + |\hat{z}|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0$, а следовательно, и неравенство $\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0$ при законе управления $u = \Theta_P x$, где $\Theta_P = -\mathcal{D}_\mu^{-1} B_u^T P$ и

$$\mathcal{D}_\mu^{-1} = (W_1 \ W_2) \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & \mu^{-2} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1^T \\ W_2^T \end{pmatrix} = (D^T D)^+ + \mu^{-2} W_2 W_2^T.$$

Осталось заметить, что умножая неравенство (П.3) слева и справа на матрицу $P^{-1} = Y$ и применяя лемму Шура, получим неравенство (3.7).

(ii) \rightarrow (i) Если матрица Y удовлетворяет неравенству (3.7), то для функции $V(x) = x^T Y^{-1} x$ при законе управления $u = \Theta_P x$ выполняется $\dot{V} + |\hat{z}|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0$ и, значит, $\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.2. Если выполнены условия, сформулированные в пункте (i), то функция $V(x) = x^T Y^{-1} x$ с матрицей Y , удовлетворяющей неравенству (3.7), обеспечивает уровень гашения возмущений, меньший γ при законе управления $u = \zeta x$, где $\zeta = -\mathcal{D}_\mu^{-1} B_u^T Y^{-1}$. Таким образом, условия теоремы 2.1 выполнены при $K = \mathcal{D}_\mu \zeta$ и, следовательно, при законе управления $u = \Theta(t)x$, (3.8) достигается цель (2.15). Следовательно, остается установить эквивалентность пунктов (i) и (ii).

(i) \leftrightarrow (ii) По определению регуляризованного оптимального закона управления в (3.4) матрица его параметров ζ удовлетворяет уравнению $\mathcal{D}_\mu \zeta = -B_u^T P$ и неравенству (3.5). Запишем эти условия в виде неравенства

$$\begin{aligned} 2x^T P \left[(A + B_u \zeta)x + (B_u \ B_v) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right] + 2x^T (\zeta^T \mathcal{D}_\mu \ 0) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \\ + x^T C^T C x + y^T \zeta^T \mathcal{D}_\mu \zeta y - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leq 0 \quad \forall u, v, \end{aligned}$$

которое эквивалентно следующему:

$$2x^T P \left[Ax + (B_u \ B_v) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right] + 2x^T (\zeta^T \mathcal{D}_\mu \ 0) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \\ + x^T C^T C x - y^T \zeta^T \mathcal{D}_\mu \zeta y - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leq 0 \quad \forall u, v.$$

Согласно частотной теореме [11] (лемме Калмана–Попова–Якубовича) необходимым и достаточным условием существования матрицы $P > 0$, удовлетворяющей этому неравенству, является при сделанных предположениях выполнение для всех $\omega \in (-\infty, \infty)$ частотного условия

$$L^T(-j\omega) (\zeta^T \mathcal{D}_\mu \zeta - C^T C) L(j\omega) - 2\text{Re } L^T(-j\omega) (\zeta^T \mathcal{D}_\mu \ 0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geq 0,$$

где $L(s) = (sI - A)^{-1}(B_u \ B_v)$. С учетом обозначений (3.11) последнее неравенство преобразуется к виду (3.13). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неймарк Ю.И., Ронин Е.И., Берман В.Ш., Коган М.М.* Адаптивная стабилизация динамических объектов // Тезисы докладов VII Всесоюзного совещания по проблемам управления. Минск, 1977. С. 38–39.
2. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
3. *Фрадков А.Л.* Схема скоростного градиента в задачах адаптивного управления // Сб. тр. 9-й Всесоюзной школы-семинара по адаптивным системам, КазПТИ, Алма-Ата, 1979, С. 139–143.
4. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. М.: Наука, 1990.
5. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Метод скоростного градиента и его приложения // АиТ. 2021. № 9. С. 3–72.
Andrievskiy B.R., Fradkov A.L. Speed Gradient Method and Its Applications // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1463–1518.
6. *Annaswamy A.A., Fradkov A.L.* A Historical Perspective of Adaptive Control and Learning // Annual Reviews in Control. 2021. V. 52. P. 18–41.
7. *Ben Yamin R., Yaesh I., Shaked U.* Robust simple adaptive model following with guaranteed H_∞ -performance // Proc. 16th Mediterranean Conference on Control and Automation. 2008. P. 238–243.
8. *Peaucelle D., Fradkov A.* Robust adaptive L_2 -gain control of polytopic MIMO LTI systems — LMI results // Syst. Control Lett. 2008. V. 57. P. 881–887.
9. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Метод пассивации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации // АиТ. 2006. № 11. С. 3–37.
Andrievskii B.R., Fradkov A.L. Method of passification in adaptive control, estimation, and synchronization // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. P. 1699–1731.

10. *Allerhand L.* Stability of adaptive control in the presence of input disturbances and H_∞ performance // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48. No. 14. P. 76–81.
11. *Якубович В.А.* Частотная теорема в теории управления // Сиб. мат. журн. 1973. № 5. С. 1100–1129.
12. *Kalman R.E.* When is a Linear Control System Optimal? // Trans. ASME Ser. D: J. Basic Eng. 1964. V. 86. P. 1–10.
13. *Kogan M.M.* Solution to the Inverse Problem of Minimax Control and Worst Case Disturbance for Linear Continuous-Time Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1998. V. 43. No. 5. P. 670–674.
14. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
15. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M.* LMI Control Toolbox for Use with MATLAB. The Mathworks Inc. 1995.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.

Поступила в редакцию 23.12.2021

После доработки 11.04.2022

Принята к публикации 28.04.2022

Управление в социально-экономических системах

© 2022 г. М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р экон. наук (innovation@ssau.ru)
(Самарский национальный исследовательский университет
им. академика С.П. Королева)

АНАЛИЗ РАВНОВЕСИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ

Рассматривается теоретико-игровая проблема выбора оптимальных стратегий агентов рынка олигополии при линейной функции спроса и нелинейных функциях издержек агентов. Выведена вычислительная формула оптимального действия агента в виде дробной иррациональной функции, показано, что экстремумы этой функции соответствуют неподвижным точкам. Для нахождения неподвижной точки выведено иррациональное уравнение и получены приближенные формулы его решения. Доказаны необходимые условия существования и единственности или множественности равновесий в зависимости от параметров типа агентов.

Ключевые слова: олигополия, агрегативная игра, дробная иррациональная функция, неподвижная точка, множественность равновесий.

DOI: 10.31857/S0005231022080086, EDN: ANSHBT

1. Введение

Решение игры агентов на рынке олигополии находится в виде равновесия Курно–Нэша [1, 2]. С позиций вычисления равновесия особенно сложными являются постановки проблем с нелинейными функциями издержек агентов, в которых равновесия исследовались путем численных экспериментов. В частности, в таких случаях появляется неустойчивость равновесия вследствие роста числа агентов [3], при варьировании параметров агентов равновесие дестабилизируется через фазу двойной бифуркации [4], доказано, что локальная устойчивая область точки равновесия по Нэшу может сжиматься до нуля при определенных параметрах типа агентов [5, 6]. В случае линейной функции спроса и квадратичных функций затрат, отражающих убывающую отдачу от масштаба, подтверждено, что хаотическая динамика зависит от адаптационного поведения агентов, и показаны прерывистый переход к хаосу и кризис слияния аттракторов [7]. Даже в модели Курно с линейными функциями издержек при условии адаптации стратегий на базе фрактальных производных установлена хаотичная динамика равновесий [8].

Поэтому аналитическое исследование проблемы единственности аттракторов в игре олигополии является актуальной проблемой. Пути такого анализа были намечены в виде аналитического решения системы нелинейных уравнений равновесия [9].

В данной статье ставится задача аналитического подтверждения множественности равновесия Курно–Нэша в нелинейной постановке игры агентов рынка олигополии, относящейся к агрегативным играм. Вопрос количества равновесий актуален как теоретический базис нахождения равновесия в таких играх. Проблематика решения агрегативных игр отражена в обширном корпусе исследований, проведенных российскими учеными, из которых отметим наиболее свежие. Равновесия в агрегативных играх анализировались на основе наилучших ответов игроков при информационной рефлексии о значениях экзогенного параметра функции полезности [10]. Исследовалась игра олигополии Штакельберга при рефлексии агентов о параметрах функций издержек окружения [11]. Оценивалась эффективность лидерства по Штакельбергу по сравнению с представлением агента о рынке как о совершенной конкуренции [12]. В линейной модели олигополии исследовался динамический процесс формирования равновесия Курно [13] и Штакельберга [14] и доказаны условия сходимости процесса к аттрактору.

2. Методология

Рассмотрим следующую нелинейную модель рынка олигополии. Пусть агенты выбирают действия исходя из максимума своих функций полезности (прибыли)

$$(1) \quad \Pi_i(Q, Q_i) = P(Q)Q_i - C_i(Q_i), \quad Q_i \geq 0, \quad i \in N = \{1, \dots, n\}$$

при линейной функции цены спроса на товар от суммарного объема предложения всех агентов рынка

$$(2) \quad P(Q) = a - bQ, \quad a > b > 0, \quad Q = \sum_{i \in N} Q_i,$$

и нелинейных (степенных) функциях издержек агентов

$$(3) \quad C_i(Q_i) = C_{Fi} + B_i Q_i^{\beta_i}, \quad C_{Fi} > 0, \quad B_i > 0, \quad \beta_i \in (0, 2), \quad C'_Q < a, \quad i \in N,$$

где Q_i , Π_i — действие (объем выпуска) и функция полезности (прибыль) i -го агента; N — множество агентов рынка; n — количество агентов, т.е. количество элементов множества N ; P , Q — равновесная цена и суммарный объем рынка; C_{Fi} , B_i , β_i — коэффициенты функций издержек агентов, C_{Fi} интерпретируется как постоянные издержки; a , b — коэффициенты обратной функции спроса. Степенная функция издержек (3) в диапазоне коэффициентов $\beta_i \in (0, 2)$ обобщает три типа агентов: агент с постоянной отдачей от расширения масштаба описывается линейной функцией издержек ($\beta_i = 1$),

агент с положительным эффектом расширения масштаба — вогнутой функцией издержек при $0 < \beta_i < 1$, агент с отрицательным эффектом — выпуклой функцией при $1 < \beta_i < 2$.

Модели выбора оптимальных (символ «*») действий агентов с учетом условий (1)–(3) запишем в виде

$$(4) \quad Q_i^* = \arg \max_{Q_i \geq 0} \Pi_i(Q, Q_i) = \arg \max_{Q_i \geq 0} \left\{ (a - bQ)Q_i - C_{Fi} - B_i Q_i^{\beta_i} \right\}, \quad i \in N.$$

Равновесие Нэша в системе (4) представляет собой вектор оптимальных действий агентов при выбранных действиях окружения и определяется путем решения системы *уравнений реакций* следующего типа (при некотором известном векторе предположительных вариаций):

$$(5) \quad \frac{\partial \Pi_i(Q_i, \rho_{ij})}{\partial Q_i} = 0, \quad i, j \in N,$$

где $\rho_{ij} = Q'_{jQ_i}$ — предположительная вариация в уравнении реакции i -го агента, т.е. предполагаемое изменение выпуска j -го агента в ответ на единичный прирост выпуска i -го агента. Решение уравнений (5) было получено [9] в виде следующего выражения, зависящего от параметров x_i :

$$(6a) \quad y_i = \frac{\alpha_i \left[\prod_{j=1 \setminus i}^n (\delta_j - 1) + \sum_{j=1 \setminus i}^n \prod_{\gamma=1 \setminus j, i}^n (\delta_\gamma - 1) \right] - \sum_{j=1 \setminus i}^n \left[\alpha_j \prod_{\gamma=1 \setminus i, j}^n (\delta_\gamma - 1) \right]}{\prod_{j=1}^n (\delta_j - 1) + \sum_{j=1}^n \prod_{\gamma=1 \setminus j}^n (\delta_\gamma - 1)},$$

$$i \in N$$

с учетом обозначений

$$(6б) \quad y_i = \frac{Q_i}{Q_{\max}} \in (0, 1), \quad \alpha_i = \frac{\hat{a} - \hat{B}_i \beta_i (2 - \beta_i) x_i^{\beta_i - 1}}{\hat{b}},$$

$$\delta_i = 2 + \frac{\hat{B}_i \beta_i (\beta_i - 1)}{\hat{b}} x_i^{\beta_i - 2} + S_i, \quad Q_{\max} = \frac{a}{b},$$

$$\hat{a} = Q_{\max} a, \quad \hat{b} = Q_{\max}^2 b, \quad \hat{B}_i = Q_{\max}^{\beta_i} B_i, \quad i \in N,$$

причем параметры x_i удовлетворяют следующим условиям:

$$(6в) \quad y_i - x_i < \varepsilon_i, \quad x_i < y_i, \quad \Omega_i = x_i + \zeta_i (y_i - x_i),$$

$$\zeta_i, x_i \in (0, 1), \quad \varepsilon_i \in (0, \Omega_i), \quad i \in N,$$

где $y_i \in (0, 1)$ — нормированное значение действия агента, S_i — сумма предположительных вариаций i -го агента. В формулах (6б) переменные x_i представляют собой параметры линеаризации [9] системы уравнений оптимальных реакций агентов (5) на основе разложения степенных функций в ряды Тейлора,

поэтому в соответствии с (6в) имеют ту же размерность, что и равновесные действия y_i , и должны быть им равны с точностью до малых положительных чисел ε_i .

Поставим задачу анализа влияния параметров функций издержек агентов (т.е. параметров типа) на функцию равновесного действия агента (6а).

3. Результаты

Поскольку формула вычисления оптимального действия агента (6а) зависит от неизвестных априори параметров x_i , а также в силу сложной зависимости этого действия от других параметров игры исследуем эти особенности в виде следующих результатов, доказательство которых приведено в Приложении.

Представленные ниже утверждения касаются i -го агента, поэтому для упрощения записи опустим в (6а) и далее индекс i .

Утверждение 1. Функция (6а) для i -го агента является дробной иррациональной функцией вида

$$(7a) \quad y = \frac{a_0 + a_1 x^\theta}{b_0 + b_1 x^{\theta-1}},$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$(7b) \quad \begin{aligned} \theta &= \beta - 1 \in (-1, 1), \quad a_0 = \frac{1 - \lambda}{\bar{B}}, \quad a_1 = \theta^2 - 1 < 0, \\ b_0 &= \frac{1 + S + \tau}{\bar{B}}, \quad b_1 = \theta(\theta + 1) \begin{cases} > 0, & \theta \in (0, 1), \\ < 0, & \theta \in (-1, 0), \end{cases} \end{aligned}$$

и коэффициенты a_0 , b_0 зависят от переменных x , относящихся к другим агентам; в этих формулах

$$\bar{B} = \frac{B}{bQ_{\max}^{2-\beta}}, \quad \lambda = \frac{\sum_{j \neq i}^n \frac{\alpha_j}{\omega_j}}{1 + \sum_{j \neq i}^n \frac{1}{\omega_j}}, \quad \tau = \frac{1}{1 + \sum_{j \neq i}^n \frac{1}{\omega_j}}, \quad \omega = \delta - 1,$$

причем

$$(7в) \quad \lambda = \tau \sum_{j \neq i}^n \frac{\alpha_j}{\omega_j}, \quad \sum_{j \neq i}^n \frac{1}{\omega_j} = \frac{1}{\tau} - 1.$$

Утверждение 2. Функция $y(x)$

и) имеет разрыв второго рода в точке

$$(8a) \quad x_\infty = \left| \frac{b_0}{b_1} \right|^{\frac{1}{\theta-1}}$$

в случае $\theta \in (0, 1)$ при $b_0 < 0$ и в случае $\theta \in (-1, 0)$ при $b_0 > 0$, а в иных случаях непрерывна;

ii) имеет ноль при $a_0 > 0$ в точке

$$(86) \quad x^+ = \left| \frac{a_0}{a_1} \right|^{\frac{1}{\theta}};$$

iii) в интервале $x \in (0, 1)$ имеет следующие свойства в случаях:

1) $\theta \in (0, 1)$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$: непрерывная, неотрицательная в интервале $x \in (0, x^+)$, вогнутая и при условии $u(1) < 0$ унимодальная;

2) $\theta \in (0, 1)$, $a_0 < 0$, $b_0 > 0$: непрерывная, отрицательная;

3) $\theta \in (0, 1)$, $a_0 > 0$, $b_0 < 0$: при $x_\infty \notin (0, 1)$ аналогичны случаю 1; при $x_\infty \in (0, 1)$ неотрицательная в интервалах $x \in (0, x^+) \cap (0, x_\infty)$ и $x \in (x^+, 1) \cap (x_\infty, 1)$, при условиях $u(1) > 0$, $u(x_\infty) < 0$ вогнутая в интервале $x \in (0, x_\infty)$, выпуклая в интервале $x \in (x_\infty, 1)$, унимодальная в каждом из этих интервалов;

4) $\theta \in (0, 1)$, $a_0 < 0$, $b_0 < 0$: при $x_\infty \notin (0, 1)$ отрицательная в интервале $x \in (0, 1)$; при $x_\infty \in (0, 1)$ отрицательная в интервале $x \in (0, x_\infty)$, неотрицательная в интервале $x \in (x_\infty, 1)$, в последнем унимодальная и выпуклая при условии $u(1) > 0$;

5) $\theta \in (-1, 0)$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$: при $x_\infty \notin (0, 1)$ в интервале $x \in (0, x^+)$ неотрицательная, вогнутая и унимодальная при условии $u(1) > 0$; при $x_\infty \in (0, 1) \wedge x^+ \notin (0, 1)$ неотрицательная в интервале $x \in (0, x_\infty)$, возрастающая, экстремумов нет; при $x_\infty \in (0, 1) \wedge x^+ \in (0, 1)$ неотрицательная в интервале $x \in (0, x^+) \cup (x_\infty, 1)$, вогнутая в интервале $x \in (0, x_\infty)$ и выпуклая в интервале $x \in (x_\infty, 1)$, унимодальная в каждом интервале при условиях $u(x_\infty) > 0$, $u(1) < 0$;

6) $\theta \in (-1, 0)$, $a_0 < 0$, $b_0 < 0$: в интервале $x \in (0, 1)$ непрерывная, неотрицательная, вогнутая и при условии $u(1) > 0$ унимодальная;

7) $\theta \in (-1, 0)$, $a_0 > 0$, $b_0 < 0$: в интервале $x \in (0, x^+)$ непрерывная, неотрицательная, вогнутая и при условии $u(1) > 0$ унимодальная;

8) $\theta \in (-1, 0)$, $a_0 < 0$, $b_0 > 0$: в интервале $x \in (0, x_\infty)$ непрерывная, неотрицательная, возрастающая, экстремумов нет, а в интервале $x \in (x_\infty, 1)$ отрицательная,

iii) условие $u(x_\infty) > 0$ равносильно следующему условию:

$$(8B) \quad -\frac{a_0}{a_1} > \left| \frac{b_0}{b_1} \right|^{\frac{\theta}{\theta-1}},$$

где

$$u = a_0 - b_0 x - (b_1 - a_1) x^\theta, \quad u(1) = a_0 - b_0 - (b_1 - a_1),$$

$$u(x_\infty) = a_0 + a_1 \left| \frac{b_0}{b_1} \right|^{\frac{\theta}{\theta-1}}.$$

Следовательно, для существования экстремума функции $y(x)$ в непрерывном случае необходимо, чтобы функция $u(\cdot)$ удовлетворяла следующим условиям: значения $u(0)$ и $u(1)$ имели противоположные знаки, а при наличии разрыва второго рода функции $y(x)$, чтобы $u(x_\infty)$ и $u(1)$ имели разные знаки.

В дальнейшем обозначим случаи, описанные в утверждении 2(iii), индексом $t = 1, \dots, 8$. Поскольку условия (6в) соответствуют неподвижной точке функции (7а), то исследуем этот аспект.

Утверждение 3. Если $b_0 + b_1x^{\theta-1} \neq 0$, то функция $y(x)$ в интервале $x \in (0, 1)$ имеет неподвижную точку $y = x$, она совпадает со стационарной точкой и вычисляется из уравнения

$$(9a) \quad f(x) = k_1x + k_2x^\theta = 1,$$

где коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$(9б) \quad k_1 = \frac{b_0}{a_0}, \quad k_2 = \frac{b_1 - a_1}{a_0}.$$

Поэтому наличие неотрицательного экстремума (или экстремумов) функции $y(x)$ является основанием существования и единственности (или множественности) неотрицательного равновесия в игре с функциями полезности (4).

Обозначим решение уравнения (9а) символом $y^* = x^*$ и будем называть его точкой равновесия; число равновесий обозначим как n_E . Иррациональное уравнение (9а) не имеет аналитического решения, поэтому предложим следующее приближенное решение, которое обозначим через \tilde{y}^t , где верхний индекс соответствует случаям, описанным в утверждении 2, $t = 1, \dots, 8$.

Утверждение 4. Уравнение (9а) в интервале $x \in (0, 1)$ в случаях $t = 1, \dots, 8$ соответственно имеет с погрешностью $|1 - k_1\tilde{y} - k_2\tilde{y}^\theta|$ следующие приближенные решения:

$$(10a) \quad \tilde{y}^1 = \begin{cases} (\tilde{y}_{\theta=0})^{1-2\theta} (\tilde{y}_{\theta=0,5}^t)^{2\theta}, & \theta \in (0; 0,5), \quad k_2 < 1, \quad k_1 + k_2 > 1, \\ (\tilde{y}_{\theta=0,5}^t)^{2-2\theta} (\tilde{y}_{\theta=1})^{2\theta-1}, & \theta \in (0,5; 1), \quad k_1 + k_2 > 1, \end{cases}$$

при $k_1, k_2 > 0$,

$$(10б) \quad \tilde{y}^2 \text{ не существует при } k_1 < 0, \quad k_2 < 0,$$

$$(10в) \quad \tilde{y}^3 = \begin{cases} \tilde{y}_1^1, & \text{если } x_\infty \notin (0, 1), \quad k_1 + k_2 > 1, \\ \tilde{y}_1^1, & \text{если } x_\infty \in (0, 1), \quad k_1 + k_2 < 1, \quad f(x_\infty) > 1, \\ & k_2 \in (2\sqrt{|k_1|}, 2|k_1|) \wedge k_2 - |k_1| < 1, \end{cases}$$

при $k_1 < 0, \quad k_2 > 0$,

$$(10\Gamma) \quad \tilde{y}^4 = \begin{cases} \text{не существует, если } x_\infty \notin (0, 1), \\ \tilde{y}^1, \text{ если } x_\infty \in (0, 1) \text{ и } k_1 + k_2 > 1, |k_2| < 2k_1, \end{cases}$$

при $k_1 > 0, k_2 < 0$,

$$(10\Delta 1) \quad \tilde{y}^{5.1} = \begin{cases} (\tilde{y}_{\theta=0})^{1-2\theta} (\tilde{y}_{\theta=-0,5})^{-2\theta}, & \theta \in (0; -0,5), k_2 < 1, k_1 + k_2 < 1, \\ (\tilde{y}_{\theta=-0,5})^{2+2\theta} (\tilde{y}_{\theta=-1}^t)^{1-2\theta}, & \theta \in (-0,5; -1), \\ & k_1 k_2 < \frac{1}{4} \wedge k_1 + k_2 < 1, k_2^2 k_1 > \frac{4}{27}, \\ & \text{если } x_\infty \notin (0, 1) \text{ при } k_1, k_2 > 0, \end{cases}$$

$$(10\Delta 2) \quad \tilde{y}^{5.2} \text{ не существует, если } x_\infty \in (0, 1) \wedge x^+ \notin (0, 1) \text{ при } k_1, k_2 > 0,$$

$$(10\Delta 3) \quad \tilde{y}^{5.3} = \tilde{y}^{5.1}, \quad k_1 k_2 < \frac{1}{4}, k_1 + k_2 > 1 \wedge k_1 > \frac{1}{2}, f(x_\infty) < 1,$$

если $x_\infty \in (0, 1) \wedge x^+ \in (0, 1)$ при $k_1, k_2 > 0$,

$$(10\epsilon) \quad \tilde{y}^6 = \tilde{y}^{5.1}, \quad k_1 + k_2 > 1 \text{ при } k_1 > 0, k_2 < 0,$$

$$(10\text{ж}) \quad \tilde{y}^7 = \tilde{y}^{5.1}, \quad k_1 + k_2 < 1, \quad a_0 < 1 \wedge a_0 + |b_0| > 1 \text{ при } k_1 < 0, k_2 > 0,$$

$$(10з) \quad \tilde{y}^8 \text{ не существует при } k_1 < 0, k_2 < 0,$$

где $\varepsilon_{\max}^t > 0$ – максимальная погрешность в t -м случае,

$$\varepsilon_{\max}^1 = \varepsilon_{\max}^3 = \varepsilon_{\max}^4 = \frac{k_2}{k_1} (k_1 + k_2 - 1), \quad \varepsilon_{\max}^5 = \frac{\sqrt{1 - 4k_1 k_2} + k_2}{2},$$

$$\varepsilon_{\max}^6 = k_1 - k_2 - 1, \quad \varepsilon_{\max}^7 = \frac{1 - a_0}{a_0}, \quad \tilde{y}_{\theta=0}^1 = \frac{1 - k_2}{k_1},$$

$$\tilde{y}_{\theta=0,5}^1 = \left(\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2k_1} \right)^2, \quad \tilde{y}_{\theta=1}^1 = \frac{1}{k_1 + k_2},$$

$$\tilde{y}_{\theta=0,5}^3 = \left(\frac{-k_2 \pm \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2k_1} \right)^2, \quad \tilde{y}_{\theta=0,5}^4 = \left(\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2k_1} \right)^2,$$

$$\tilde{y}_{\theta=-0,5}^5 = \left(\sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}} \right)^2, \quad q = \frac{k_2}{2k_1},$$

$$D = \frac{27k_2^2 k_1 - 4}{108k_1^3}, \quad \tilde{y}_{\theta=-1}^{5.1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4k_1 k_2}}{2k_1},$$

$$\tilde{y}_{\theta=-1}^{5.3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4k_1 k_2}}{2k_1},$$

$$\tilde{y}_{\theta=-1}^6 = \frac{1}{k_1}, \quad \tilde{y}_{\theta=-1}^7 = \frac{a_0 - 1}{a_0 k_1}.$$

Формулы приближенного вычисления (10) актуальны в указанных диапазонах значений k_1, k_2 , а если в реальных задачах эти диапазоны не соблюдаются, то необходимо вычислять y^* путем непосредственного решения уравнения (9а) численными методами. Поскольку параметры a_0, b_0 зависят от переменных y , относящихся к другим агентам, то формулы (10) приводят к системе N уравнений с N неизвестными $y_i, i \in N$.

4. Комментарии к результатам

Графическая интерпретация условий экстремума функции $y(x)$ и соответствующих экстремумам неподвижных точек представлена на рис. 1–5. На этих рисунках функция $u(x)$ характеризует либо знак y' при $\theta \in (0, 1)$, либо противоположный знак при $\theta \in (-1, 0)$, функция $f(x)$ (с учетом $f = 1 - \frac{u}{a_0}$) показывает значение неподвижной точки при $f(x) = 1$, а функция $v(x) = b_0 + b_1 x^{\theta-1}$ есть знаменатель $y(x)$ и характеризует разрыв. Подобные разрывы были отмечены также для корней динамических уравнений Эйлера [15]. Иллюстрация оценки погрешности приближенного решения приведена на рис. 6.

От параметров типа агентов зависит не только значения их равновесных действий, но и существование, а также единственность (или множественность) равновесия. Обобщение этих свойств приведено в табл. 1.

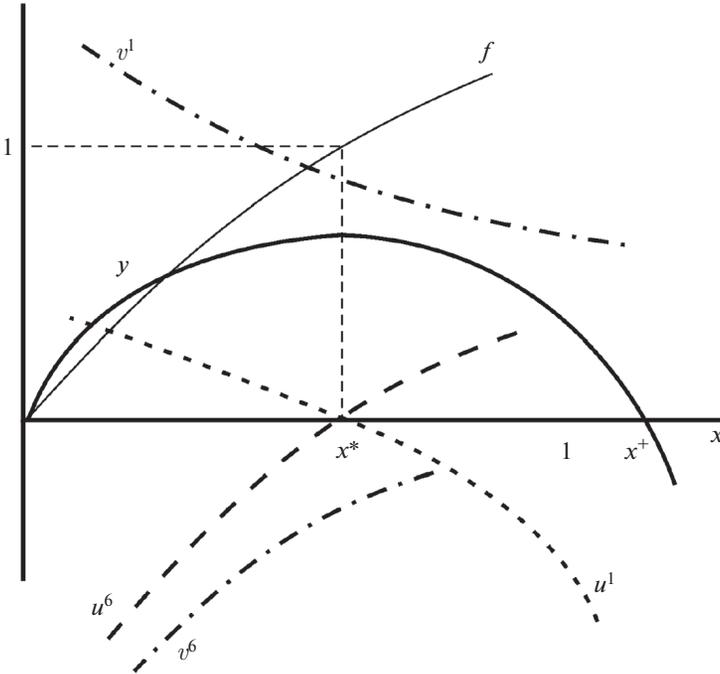


Рис. 1. Случай 1: $\theta \in (0, 1)$, $a_0 > 0, b_0 > 0, u^1 = \text{sgn } y'$; случай 6: $\theta \in (-1, 0)$, $a_0 < 0, b_0 < 0, u^6 = -\text{sgn } y'$.

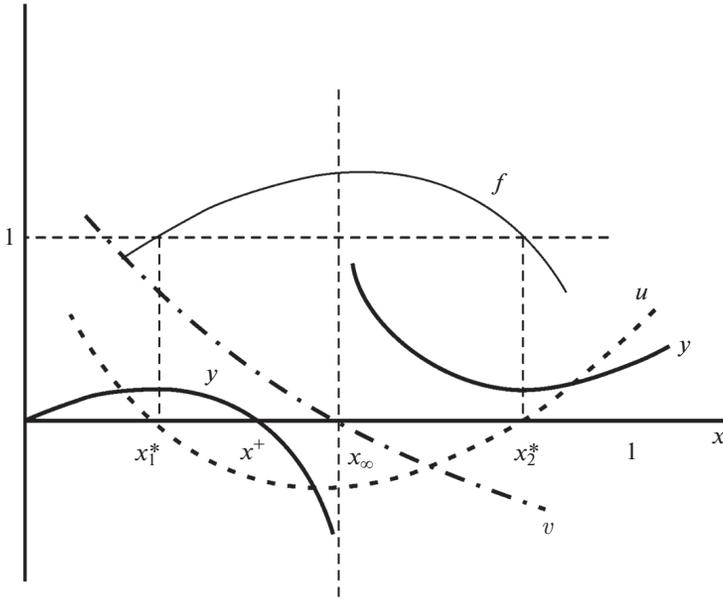


Рис. 2. Случай 3: $\theta \in (0, 1)$, $a_0 > 0$, $b_0 < 0$, $x_\infty \in (0, 1)$, $u = \text{sgn } y'$.

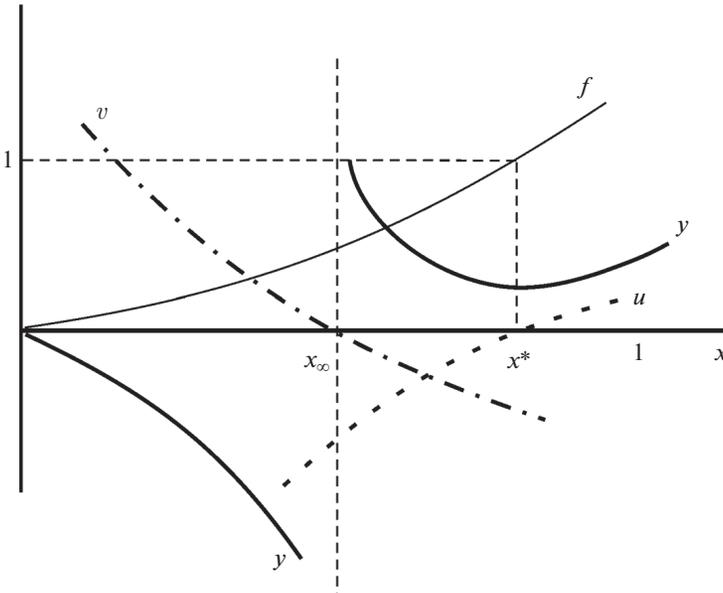


Рис. 3. Случай 4: $\theta \in (0, 1)$, $a_0 < 0$, $b_0 < 0$, $x_\infty \in (0, 1)$, $u = \text{sgn } y'$.

Факторы, влияющие на число и существование равновесий, следующие. Знак a_0 соответствует знаку $(1 - \lambda)$ и зависит главным образом от параметров типа окружения: $a_0 > 0$, если $\lambda < 1$. Знак b_0 совпадает со знаком $(1 + S + \tau)$ и зависит от типа агента через S и от типа окружения через τ :

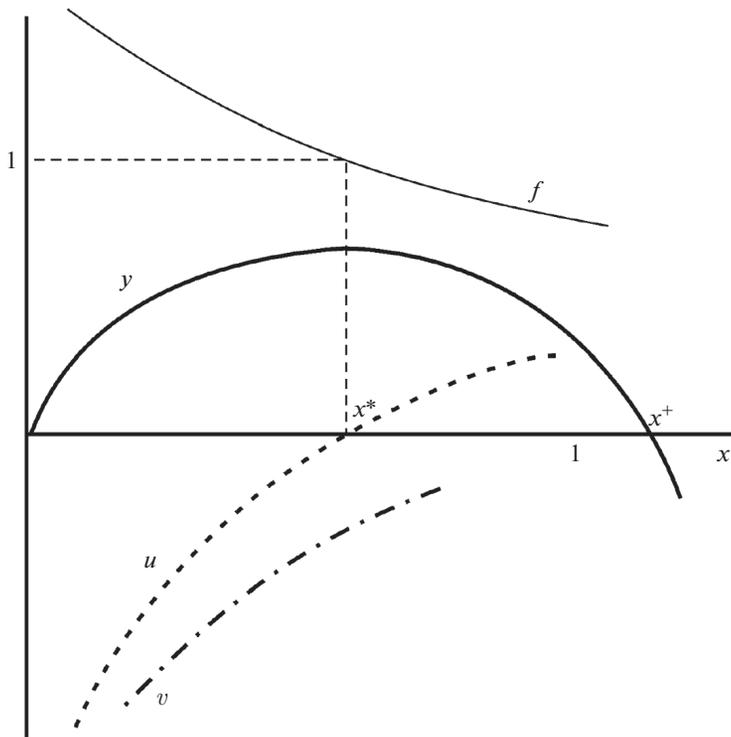


Рис. 4. Случай 5: $\theta \in (-1, 0)$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $x_\infty \notin (0, 1)$; случай 7: $\theta \in (-1, 0)$, $a_0 > 0$, $b_0 < 0$, $u = -\text{sgn } y'$.

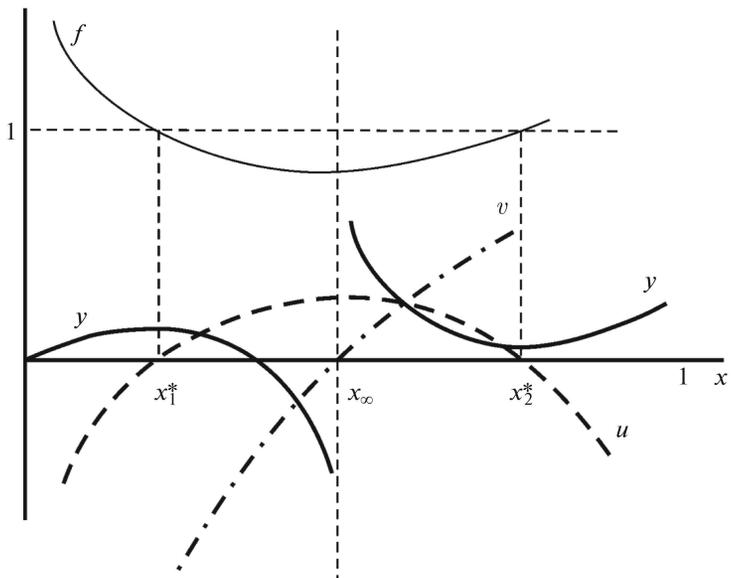


Рис. 5. Случай 5: $\theta \in (-1, 0)$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $x_\infty \in (0, 1) \wedge x^+ \in (0, 1)$, $u = -\text{sgn } y'$.

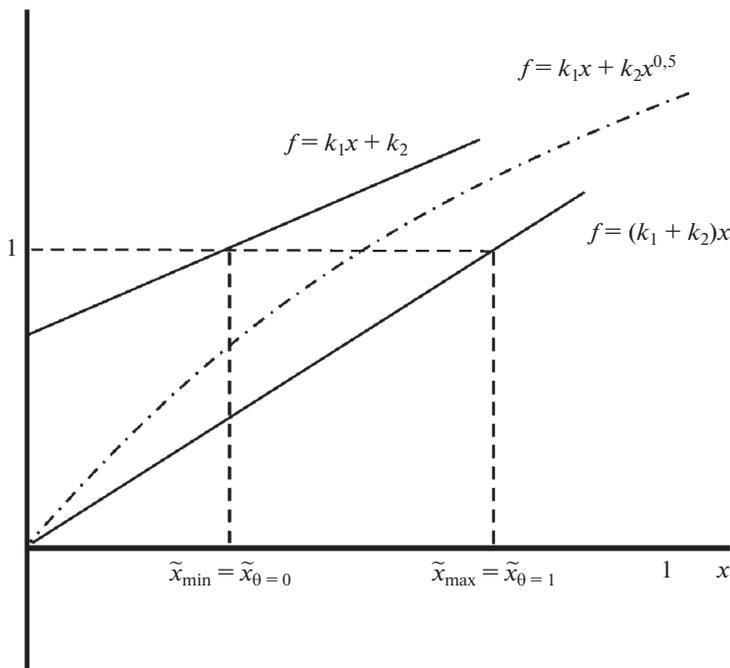


Рис. 6. Оценка погрешности приближенного решения в случае 1.

$b_0 < 0$, если $S < 0$, $|S| > 1 + \tau$, т.е. только при $\beta \in (0, 1)$ (поскольку $S \in (-1, 0]$ и $\tau > 0$ при $\beta \in (1, 2)$); $b_0 > 0$ в случае $S > -(1 + \tau)$, что возможно как при $\beta \in (0, 1)$, так и при $\beta \in (1, 2)$. Следовательно, случаи 3 и 4, в которых $b_0 < 0$ и $\beta \in (1, 2)$, не реализуются (выделены в табл. 1 курсивом).

Таблица 1. Свойства равновесий при различных параметрах типа агентов

t	β	$1 - \lambda$	$1 + S + \tau$	Вариант случая	n_E	Условия равновесия
1	$\in (1, 2)$	> 0	> 0	–	1	$a_0 - b_0 - \beta < 0$
2		< 0	> 0	–	0	–
3.1		> 0	< 0	$ b_0 < b_1 $	1	$a_0 - b_0 - \beta < 0$
3.2		> 0	< 0	$ b_0 > b_1 $	2	$a_0 - b_0 - \beta > 0, u_\infty < 0$
4.1		< 0	< 0	$ b_0 < b_1 $	0	–
4.2		< 0	< 0	$ b_0 > b_1 $	1	$a_0 - b_0 - \beta > 0$
5.1	$\in (0, 1)$	> 0	> 0	$ b_0 < b_1 $	1	$a_0 - b_0 - \beta > 0$
5.2		> 0	> 0	$ b_0 > b_1 , a_0 < a_1 $	0	–
5.3		> 0	> 0	$ b_0 > b_1 , a_0 > a_1 $	2	$a_0 - b_0 - \beta < 0, u_\infty > 0$
6		< 0	< 0	–	1	$a_0 - b_0 - \beta > 0$
7		> 0	< 0	–	1	$a_0 - b_0 - \beta > 0$
8		< 0	> 0	–	0	–

Локализация точки разрыва x_∞ и точки нуля x^+ функции $y(x)$ приводит к градации случаев: $x_\infty \notin (0, 1)$, если $|b_0| < |b_1|$; $x^+ \notin (0, 1)$, если $|a_0| > |a_1|$ при $\beta \in (1, 2)$, а при $\beta \in (0, 1)$ наоборот.

Существование единственного равновесия зависит от знака параметра $u(1) = a_0 - b_0 - \beta$. Существование двух равновесий (случаи 3.2 и 5.3) зависит от противоположности знаков параметров $u(1)$, $u(x_\infty)$; в табл. 1 запишем последнее условие на базе (8в) и обозначим как $u_\infty = u(x_\infty)$. Равновесие не существует, если функция $y(x)$ отрицательная в интервале $(0, 1)$, т.е. в случаях 2 и 4.1, или не имеет экстремумов (случаи 5.2 и 8).

5. Заключение

Исследована игровая проблема выбора оптимальных стратегий агентов рынка олигополии при линейной функции спроса и нелинейных функциях издержек агентов. Найдена зависимость оптимального действия агента от параметров типа, т.е. коэффициентов функций издержек агента и его окружения, а также их предположений о стратегиях конкурентов, в виде дробной иррациональной функции, неподвижная точка которой определяет равновесие в игре. Для этой функции доказано нетривиальное свойство совпадения неподвижной точки и стационарной точки, причем показано, что стационарная точка является именно точкой экстремума. Анализ числа и свойств экстремумов исследуемой функции при различных сочетаниях ее коэффициентов позволил установить количество равновесий в различных игровых ситуациях, а анализ иррационального уравнения неподвижной точки привел к приближенным формулам расчета равновесий.

Число равновесий зависит от типа эффекта расширения масштаба, т.е. выпуклости или вогнутости функции издержек агента. Для агента с отрицательным эффектом расширения масштаба (т.е. выпуклой функцией издержек) возможно только два случая — существование единственного равновесия или несуществование равновесия. Для агента с положительным эффектом расширения масштаба (т.е. вогнутой функцией издержек) может существовать одно равновесное действие, два равновесия или не существовать равновесия.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Введем следующие обозначения:

$$\omega = \delta - 1, \quad D = \prod_{j=1}^n \omega_j + \sum_{j=1}^n \prod_{\gamma \neq j} \omega_\gamma, \quad \Delta = \prod_{j \neq i} \omega_j,$$

$$\psi = \prod_{j \neq i} \omega_j + \sum_{j=1}^n \prod_{\gamma \neq j} \omega_\gamma = \frac{D - \Delta}{\omega}, \quad \varphi = \sum_{j \neq i} \alpha_j \prod_{\gamma \neq i, j} \omega_\gamma.$$

В этом случае формулу (6а) можно записать следующим образом:

$$(II.1) \quad y = \frac{\alpha\psi - \varphi}{D} = \frac{\alpha\psi - \varphi}{\omega\psi + \Delta} = \frac{\alpha - \varphi/\psi}{\omega + \Delta/\psi} = \frac{\alpha - \lambda}{\omega + \tau},$$

где $\lambda = \varphi/\psi$, $\tau = \Delta/\psi$. Поскольку, например, при $n = 4$,

$$\lambda_4 = \frac{\alpha_1\omega_2\omega_3 + \alpha_2\omega_1\omega_3 + \alpha_3\omega_2\omega_1}{\omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_3} = \frac{\frac{\alpha_1}{\omega_1} + \frac{\alpha_2}{\omega_2} + \frac{\alpha_3}{\omega_3}}{1 + \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_3}},$$

$$\tau_4 = \frac{\omega_1\omega_2\omega_3}{\omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_3} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_3}},$$

то эти параметры можно представить в следующем виде:

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq i}^n \frac{\alpha_j}{\omega_j}}{1 + \sum_{j \neq i}^n \frac{1}{\omega_j}}, \quad \tau = \frac{1}{1 + \sum_{j \neq i}^n \frac{1}{\omega_j}},$$

т.е.

$$\lambda = \tau \sum_{j \neq i}^n \frac{\alpha_j}{\omega_j}, \quad \sum_{j \neq i}^n \frac{1}{\omega_j} = \frac{1}{\tau} - 1.$$

Отсюда следует, что в формуле (II.1) параметры λ и τ не зависят от переменной x данного агента, а зависят от x_j , $j \neq i$. Подставим формулы (7б) в (II.1):

$$(II.2) \quad y = \frac{\hat{a} - \hat{B}\beta(2 - \beta)x^{\beta-1} - \hat{b}\lambda}{\hat{b} + \hat{B}\beta(\beta - 1)x^{\beta-2} + \hat{b}S + \hat{b}\tau} = \frac{\bar{a} - \bar{B}\beta(2 - \beta)x^{\beta-1} - \lambda}{1 + \bar{B}\beta(\beta - 1)x^{\beta-2} + S + \tau},$$

где

$$\bar{a} = \frac{\hat{a}}{\hat{b}} = \frac{a}{bQ_{\max}} = 1, \quad \bar{B} = \frac{\hat{B}}{\hat{b}} = \frac{B}{bQ_{\max}^{2-\beta}}.$$

Обозначим:

$$\theta = \beta - 1, \quad a_0 = \frac{1 - \lambda}{\bar{B}}, \quad a_1 = 1 - \theta^2, \quad b_0 = \frac{1 + S + \tau}{\bar{B}}, \quad b_1 = \theta(\theta + 1).$$

Тогда (II.2) можно записать в виде (7а).

Доказательство утверждения 2. В формуле производной функции (7а)

$$(II.3) \quad y' = \frac{a_1\theta x^{\theta-1}(b_0 + b_1x^{\theta-1}) - b_1(\theta - 1)x^{\theta-2}(a_0 + a_1x^\theta)}{(b_0 + b_1x^{\theta-1})^2} =$$

$$= \frac{x^{\theta-2}\theta(1 - \theta^2)(a_0 - b_0x - (b_1 - a_1)x^\theta)}{(b_0 + b_1x^{\theta-1})^2}$$

обозначим $u = a_0 - b_0x - (b_1 - a_1)x^\theta$, $v = b_0 + b_1x^{\theta-1}$, т.е. параметр u характеризует знак производной:

$$\operatorname{sgn} y' = \begin{cases} \operatorname{sgn} u, & \text{если } \theta \in (0, 1), \\ -\operatorname{sgn} u, & \text{если } \theta \in (-1, 0). \end{cases}$$

Тогда вторая производная равна:

$$y'' = \frac{x^{\theta-3}\theta(1-\theta^2)}{v^3} [u(-\theta v + 2b_0(\theta-1)) - xv^2].$$

Разрыв второго рода функция $y(x)$, а также ее производные имеют только в точке x_∞ при $v = 0$, если b_0 и b_1 противоположны по знаку, т.е. при (8а), в остальных точках интервала $x \in (0, 1)$ функция и производные непрерывны.

Рассмотрим различные случаи сочетаний параметров θ , a_0 , b_0 , с учетом знаков a_1 , b_1 согласно (7б). Отметим, что $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$ как в случае $\theta \in (0, 1)$, так и в случае $\theta \in (-1, 0)$, когда при обозначении $\sigma = |\theta|$ имеем $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 + a_1x^{-\sigma}}{b_0 + b_1x^{-(\sigma+1)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0x^{\sigma+1} + a_1x}{b_0x^{\sigma+1} + b_1} = 0$. Кроме того, заметим, что $u(0) = a_0$ при $\theta \in (0, 1)$, и $\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} (a_0 - b_0x - (b_1 - a_1)x^{-\sigma}) = -\infty$ при $\theta \in (-1, 0)$, так как $b_1 - a_1 = \theta + 1 > 0$.

Случай 1: $\theta \in (0, 1)$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$. Функция (7а) непрерывная, неотрицательная в интервале $x \in (0, x^+)$. Функция вогнута, поскольку $v > 0$ и $u(-\theta v + 2b_0(\theta-1)) < xv^2$, и в этом случае $y'' \begin{cases} < 0, & \text{если } u > 0, \\ < 0, & \text{если } u < 0. \end{cases}$ Поскольку $u(0) = a_0 > 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0} y' > 0$, $y'(1) < 0$ при условии $u(1) < 0$, значит, в этом случае функция (7а) унимодальная.

Случай 2: $\theta \in (0, 1)$, $a_0 < 0$, $b_0 > 0$, при этом $y < 0$ в интервале $x \in (0, 1)$.

Случай 3: $\theta \in (0, 1)$, $a_0 > 0$, $b_0 < 0$. Функция (7а) имеет разрыв, есть два варианта:

3.1) $x_\infty \notin (0, 1)$, т.е. $b_1 > |b_0|$, тогда свойства аналогичны случаю 1;

3.2) $x_\infty \in (0, 1)$, т.е. $b_1 < |b_0|$, тогда $y > 0$ в интервалах $x \in (0, x^+) \cap (0, x_\infty)$ и $x \in (x^+, 1) \cap (x_\infty, 1)$; в этом случае функция v знакопеременная, $v \begin{cases} > 0, & \text{если } x < x_\infty, \\ < 0, & \text{если } x > x_\infty; \end{cases}$ поскольку $u(0) = a_0 > 0$, то при условиях $u(1) > 0$,

$u(x_\infty) < 0$ (когда $x^+ < x_\infty$) функция u унимодальная и знакопеременная; заметим, что $u(x_\infty) = a_0 - b_0 \left| \frac{b_0}{b_1} \right|^{\frac{1}{\theta-1}} - (b_1 - a_1) \left| \frac{b_0}{b_1} \right|^{\frac{\theta}{\theta-1}} = a_0 + a_1 \left| \frac{b_0}{b_1} \right|^{\frac{\theta}{\theta-1}}$; поэтому при $a_0 > 0$, $b_0 < 0$ и при $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, т.е. в случаях 3 и 5, $u(x_\infty) < 0 \Leftrightarrow -\frac{a_0}{a_1} < \left| \frac{b_0}{b_1} \right|^{\frac{\theta}{\theta-1}}$; причем функция (7а) вогнута в интервале $x \in (0, x_\infty)$,

поскольку $y'' \begin{cases} < 0, & \text{если } u > 0, \\ < 0, & \text{если } u < 0, \end{cases}$ и, соответственно, выпукла в интервале $x \in (x_\infty, 1)$.

Случай 4: $\theta \in (0, 1)$, $a_0 < 0$, $b_0 < 0$. Аналогично случаю 2 разрыв дает два варианта:

4.1) $x_\infty \notin (0, 1)$, т.е. $b_1 > |b_0|$, тогда $y < 0$ в интервале $x \in (0, 1)$;

4.2) $x_\infty \in (0, 1)$, т.е. $b_1 < |b_0|$, тогда $y > 0$ в интервале $x \in (x_\infty, 1)$; так как $u(0) = a_0 < 0$ и при этом если $u(1) > 0$, то при условии $u(x_\infty) < 0$, которое при $a_0 < 0$, $b_0 < 0$ выполняется для всех $x \in (0, 1)$, функция y унимодальная и выпуклая в интервале $x \in (x_\infty, 1)$.

Случай 5: $\theta \in (-1, 0)$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$. Разрыв приводит к следующим вариантам:

5.1) $x_\infty \notin (0, 1) \wedge x^+ \notin (0, 1)$, тогда $y > 0$ в интервале $x \in (0, 1)$ и, поскольку $u(0) < 0$ при условии $u(1) > 0$, функция (7а) вогнутая и унимодальная;

5.1') $x_\infty \notin (0, 1) \wedge x^+ \in (0, 1)$, свойства функции (7а) аналогичны варианту 5.1, но $y > 0$ в интервале $x \in (0, x^+)$, поэтому эти варианты рассмотрим как один;

5.2) $x_\infty \in (0, 1) \wedge x^+ \notin (0, 1)$, тогда $y > 0$ в интервале $x \in (0, x_\infty)$, но $u(x) < 0 \forall x \in (0, 1)$, поэтому функция (7а) возрастающая, экстремумов нет;

5.3) $x_\infty \in (0, 1) \wedge x^+ \in (0, 1)$, тогда $y > 0$ в интервалах $x \in (0, x^+) \cup (x_\infty, 1)$, и при условиях $u(x_\infty) > 0$ и $u(1) < 0$ функция (7а) унимодальная; поскольку $v < 0 \forall x \in (0, x_\infty)$, $v > 0 \forall x \in (x_\infty, 1)$, $-\theta v + 2b_0(\theta - 1) = -\theta b_1 x^{\theta-1} + b_0 \theta - 2b_0 < 0$, $u(-\theta v + 2b_0(\theta - 1)) - xv^2 > 0$, то в интервале $(0, x_\infty)$ $y'' =$

$$= \begin{cases} < 0, & \text{если } u < 0, \\ < 0, & \text{если } u > 0, \end{cases}$$
 т.е. функция $y(x)$ вогнута, а в интервале $(x_\infty, 1)$ имеет место $y'' = \begin{cases} > 0, & \text{если } u < 0, \\ > 0, & \text{если } u > 0, \end{cases}$ т.е. $y(x)$ выпукла; отметим, что если

обозначить $\sigma = |\theta|$, то $v = (b_0 x^{\sigma+1} + b_1) x^{-(\sigma+1)}$ и $y = \frac{a_0 + a_1 x^{-\sigma}}{b_0 + b_1 x^{-(\sigma+1)}} = \frac{a_0}{v} + \frac{a_1}{vx^\sigma}$, поэтому $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$ (так как $\lim_{x \rightarrow 0} v = -\infty$), $\lim_{x \rightarrow x_0-0} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} y = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} vx^\sigma = -\infty$.

Случай 6: $\theta \in (-1, 0)$, $a_0 < 0$, $b_0 < 0$. Функция (7а) непрерывная, неотрицательная в интервале $x \in (0, 1)$. Функция (7а) вогнутая и при условии $u(1) > 0$ унимодальная.

Случай 7: $\theta \in (-1, 0)$, $a_0 > 0$, $b_0 < 0$. Функция (7а) непрерывная, неотрицательная в интервале $x \in (0, x^+)$. Функция (7а) вогнута и при условии $u(1) > 0$ унимодальная.

Случай 8: $\theta \in (-1, 0)$, $a_0 < 0$, $b_0 > 0$. Если $x_\infty \notin (0, 1)$, то $y > 0$ в интервале $x \in (0, 1)$, а если $x_\infty \in (0, 1)$, то $y > 0$ в интервале $x \in (0, x_\infty)$, функция (7а) возрастающая, $u(x) < 0$ в интервале $x \in (0, 1)$, экстремумов нет.

Доказательство утверждения 3. Функция $y(x)$ непрерывна на компактном выпуклом множестве $x \in (0, 1)$ при условии $b_0 + b_1 x^{\theta-1} \neq 0$, поэтому по теореме Брауэра она имеет неподвижную точку. Найдем уравнение неподвижной точки функции (7а): $y = \frac{a_0 + a_1 x^\theta}{b_0 + b_1 x^{\theta-1}} = x = \frac{x^\theta}{x^{\theta-1}}$, откуда следует

$a_0x^{-1} - b_0 = (b_1 - a_1)x^{\theta-1}$, $a_0 - b_0x - (b_1 - a_1)x^\theta = 0$, или $k_1x + k_2x^\theta = 1$. Если обозначить $f = k_1x + k_2x^\theta$, то $\frac{u}{a_0} = 1 - f$, или $f = 1 - \frac{u}{a_0}$.

С другой стороны, уравнение стационарной точки получим, приравняв производную (П.3) к нулю: $y' = \frac{x^{\theta-2}\theta(1-\theta^2)(a_0-b_0x-(\theta+1)x^\theta)}{(b_0+b_1x^{\theta-1})^2} = 0$, откуда также следует $a_0 - b_0x - (b_1 - a_1)x^\theta = 0$.

Доказательство утверждения 4. Рассмотрим случаи $t = 1, \dots, 8$.

$t = 1$ ($k_1, k_2 > 0$): поскольку функция (7а) унимодальная при условии $u(1) < 0$, то по утверждению 3 в интервале $x \in (0, 1)$ существует одна стационарная точка, значит, $x^* \in (0, 1)$ и равновесие единственно, т.е. $n_E = 1$. Условие $u(1) < 0$ равносильно условию $k_1 + k_2 > 1$. Поскольку $y(x)$ вогнутая, то функция $f(x)$ монотонно возрастающая (так как $f = 1 - \frac{u}{a_0}$ и $k_1 > 0, k_2 > 0$), поэтому аппроксимируем (9а) следующими частными случаями: i) $k_1x + k_2 = 1$ при $\theta = 0$, решение $\tilde{x}_{\theta=0} = \frac{1-k_2}{k_1}$; для $x \in (0, 1)$ необходимо, чтобы $0 < 1 - k_2 < k_1$, т.е. $k_2 < 1 \wedge k_1 + k_2 > 1$;

ii) $k_1x + k_2x^{0,5} = 1$ при $\theta = 0,5$ имеет корень $\tilde{x}_{\theta=0,5}^1 = \left(\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2k_1} \right)^2$, для $x \in (0, 1)$ необходимо, чтобы $k_1 + k_2 > 1$ (второй корень в этот интервал не входит);

iii) $k_1x + k_2x = 1$ при $\theta = 1$, решение $\tilde{x}_{\theta=1} = \frac{1}{k_1+k_2}$; для $x \in (0, 1)$ необходимо, чтобы $k_1 + k_2 > 1$. Если рассматривать приближенное решение в виде $\tilde{x} = \begin{cases} (\tilde{x}_{\theta=0})^{1-2\theta}(\tilde{x}_{\theta=0,5})^{2\theta}, & \theta \in (0; 0,5), \\ (\tilde{x}_{\theta=0,5})^{2-2\theta}(\tilde{x}_{\theta=1})^{2\theta-1}, & \theta \in (0,5; 1), \end{cases}$ то при этом решении $\lim_{\theta \rightarrow 0} f = 1, \lim_{\theta \rightarrow 0,5} f = 1, \lim_{\theta \rightarrow 1} f = 1$, т.е. на границах отрезка $[0, 1]$ и при $x = 0,5$ уравнение (9а) решается точно. Во внутренних точках погрешность этого решения $|x^* - \tilde{x}| \leq \tilde{x}_{\max} - \tilde{x}_{\min} = \tilde{x}_{\theta=1} - \tilde{x}_{\theta=0} = \frac{k_2(k_1+k_2-1)}{k_1(k_1+k_2)} < 1$ при вышеуказанных условиях (см. рис. 6), поэтому погрешность равенства (9а) $\varepsilon = |f(|x^* - \tilde{x}|) - 1|$, и наибольшая погрешность при $\theta = 1$ равна $\varepsilon_{\max} = \frac{k_2}{k_1}(k_1 + k_2 - 1) < 1$.

$t = 2$ ($k_1 < 0, k_2 < 0$): неотрицательное равновесие отсутствует, $n_E = 0$, поскольку $y < 0$.

$t = 3$ ($k_1 < 0, k_2 > 0$): при $x_\infty \notin (0, 1)$ решение аналогично $t = 1$; при $x_\infty \in (0, 1)$ существуют две точки равновесия $x_1^* \in (0, x_\infty)$ и $x_2^* \in (x_\infty, 1)$, т.е. $n_E = 2$. Условие $u(1) > 0$ равносильно условию $k_1 + k_2 < 1$, соответственно $u(x_\infty) < 0 \Leftrightarrow f(x_\infty) > 1$. Как и в случае $t = 1$ рассмотрим частные случаи, но случай (ii) в виде $k_1x + k_2x^{0,5} = 1$ имеет решение $\tilde{x}_{\theta=0,5}^3 = \left(\frac{-k_2 \pm \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2k_1} \right)^2$, действительные корни могут быть при $k_2 > 2\sqrt{|k_1|}$, поэтому для $x \in (0, 1)$ необходимо, чтобы $k_2 \in (2\sqrt{|k_1|}, 2|k_1|) \wedge k_2 - |k_1| < 1$, тогда решение получим в виде, аналогичном $t = 1$, и погрешность вычисляется аналогично.

$t = 4$ ($k_1 > 0, k_2 < 0$): при $x_\infty \notin (0, 1)$ неотрицательное равновесие отсутствует, $n_E = 0$; при $x_\infty \in (0, 1)$, если выполняется условие $u(1) > 0 \Leftrightarrow k_1 + k_2 > 1$, то существует одно неотрицательное равновесие $x^* \in (x_\infty, 1)$,

т.е. $n_E = 1$, поскольку при этих условиях $f(x) > 0$ и возрастающая, то решение вычисляется аналогично $t = 1$, только корень $\tilde{x}_{\theta=0,5}^4 = \left(\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2k_1} \right)^2$ входит в интервал $(0, 1)$ при $|k_2| < 2k_1$ и соответствует условию $k_1 + k_2 > 1$.

$t = 5$ ($k_1 > 0, k_2 > 0$): при $x_\infty \notin (0, 1)$ точка равновесия либо $x^* \in (0, 1)$, если $x^+ \notin (0, 1)$, либо $x \in (0, x^+)$, если $x^+ \in (0, 1)$, и при условии $u(1) > 0 \Leftrightarrow k_1 + k_2 < 1$ равновесие единственно, т.е. $n_E = 1$, при этих условиях $f(x) > 0$ и убывающая. Сделаем приближение аналогично $t = 1$, но случай (ii) при $\theta = -0,5$ в виде $k_1 x + k_2 x^{-0,5} = 1$ приводит к уравнению $k_1 z^3 - z + k_2 = 0$ при $z = x^{0,5}$, которое имеет единственное действительное решение $z = \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}$, где $q = \frac{k_2}{2k_1}$, $D = \frac{27k_2^2 k_1 - 4}{108k_1^3}$, при условии $D > 0$, т.е. $k_2^2 k_1 > \frac{4}{27}$; поэтому $\tilde{x}_{\theta=-0,5}^5 = \left(\sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}} \right)^2$. Случай (iii) при $\theta = -1$ в виде $k_1 x + k_2 x^{-1} = 1$ приводит к уравнению $k_1 x^2 - x + k_2 = 0$, из корней которого $\tilde{x} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4k_1 k_2}}{2k_1}$ при условии $k_1 k_2 < \frac{1}{4}$ в интервал $(0, 1)$ входит $\tilde{x}_{\theta=-1}^{5,1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4k_1 k_2}}{2k_1}$, т.е. условия следующие: $k_1 k_2 > \frac{1}{4} \wedge k_1 + k_2 < 1$. Наибольшая погрешность равенства (9а) вследствие отклонения $\tilde{x}_{\theta=-1}^5 - \tilde{x}_{\theta=0}^5 = \frac{\sqrt{1 - 4k_1 k_2} - k_2}{2k_1}$ при $\theta = 0$ равна $\varepsilon_{\max} = \frac{\sqrt{1 - 4k_1 k_2} + k_2}{2} < 1$.

при $x_\infty \in (0, 1) \wedge x^+ \notin (0, 1)$, поскольку $y(x)$ экстремумов не имеет, то равновесие отсутствует, т.е. $n_E = 0$;

при $x_\infty \in (0, 1) \wedge x^+ \in (0, 1)$, если выполняются условия $u(1) < 0 \Leftrightarrow k_1 + k_2 > 1$ и $u(x_\infty) > 0 \Leftrightarrow f(x_\infty) < 1$, функция $y(x)$ имеет интервалы вогнутости и выпуклости и два экстремума, значит, существуют две точки равновесия $x_1^* \in (0, x_\infty)$ и $x_2^* \in (x_\infty, 1)$, т.е. $n_E = 2$, решение вычисляется аналогично $t = 5$ для $x_\infty \notin (0, 1)$, но случай (iii) при $\theta = -1$ имеет два корня $\tilde{x}_{\theta=-1}^{5,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4k_1 k_2}}{2k_1}$ при условии $k_1 k_2 < \frac{1}{4}$, и если $k_1 + k_2 > 1 \wedge k_1 > \frac{1}{2}$, то эти корни входят в интервал $(0, 1)$.

$t = 6$ ($k_1 > 0, k_2 < 0$): при условии $u(1) > 0 \Leftrightarrow k_1 + k_2 > 1$ точка равновесия $x^* \in (0, 1)$ и равновесие единственно, т.е. $n_E = 1$; так как $f(x) > 0$ и возрастающая, то решение вычисляется аналогично $t = 5$, т.е. $\tilde{x}_{\theta=0}^6 = \frac{1 - k_2}{k_1}$, $\tilde{x}_{\theta=-0,5}^6 = \left(\sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}} \right)^2$, но случай (iii) при $\theta = -1$ (так как $k_2 = \frac{b_1 - a_1}{a_0} = \frac{\theta + 1}{a_0} = 0$) приводит к уравнению $k_1 x = 1$, т.е. $\tilde{x}_{\theta=-1}^6 = \frac{1}{k_1}$. Поэтому вследствие отклонения $\tilde{x}_{\theta=0}^6 - \tilde{x}_{\theta=-1}^6 = -\frac{k_2}{k_1}$ при $\theta = 0$ погрешность равна $\varepsilon_{\max} = k_1 - k_2 - 1 < 1$.

$t = 7$ ($k_1 < 0, k_2 > 0$): при условии $u(1) > 0 \Leftrightarrow k_1 + k_2 < 1$ точка равновесия $x^* \in (0, x^+)$ и равновесие единственно, т.е. $n_E = 1$; при этих условиях $f(x) > 0$ и убывающая, решение вычисляется аналогично $t = 5$ (формула (10д)), но случай (iii) $k_1 x + k_2 x^{-1} = 1$ при $\theta = -1$ дает решение $\frac{1}{k_1} < 0$, однако при $x \rightarrow 0$ имеем неопределенность слагаемого $k_2 x^\theta = (0 \cdot \infty)$, рас-

крыв которую, получим: $\lim_{\theta \rightarrow -1} k_2 x^\theta = \lim_{\theta \rightarrow -1} \frac{(\theta+1)/a_0}{x^{-\theta}} = \lim_{\theta \rightarrow -1} \frac{1/a_0}{-\theta x^{-\theta-1}} = \frac{1}{a_0}$; по этому решение будет $\tilde{x}_{\theta=-1}^7 = \frac{a_0-1}{a_0 k_1} \in (0, 1)$, если $a_0 < 1 \wedge a_0 + |b_0| > 1$. Вследствие отклонения $\tilde{x}_{\theta=0}^7 - \tilde{x}_{\theta=-1}^7 = \frac{1-a_0 k_2}{a_0 k_1}$ при $\theta = 0$ погрешность равна $\varepsilon_{\max} = \frac{1-a_0}{a_0} < 1$.

$t = 8$ ($k_1 < 0$, $k_2 < 0$): поскольку $y(x)$ экстремумов не имеет, то равновесие отсутствует, т.е. $n_E = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nash J.* Non-cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
2. *Cournot A.A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838).
3. *Puu T.* On the stability of Cournot equilibrium when the number of competitors increases // J. Econom. Behavior Organizat. 2007. No. 66. P. 445–456.
4. *Agiza H.N., Elsadany A.A.* Chaotic dynamics in nonlinear duopoly game with heterogeneous players // Appl. Math. Comput. 2004. No. 149. P. 843–860.
5. *Sun Z., Ma J.* Complexity of triopoly price game in chinese cold rolled steel market // Nonlin. Dynamics. 2012. No. 67. P. 2001–2008.
6. *Bischi G.I., Chiarella C., Kopel M., Szidarovszky Z.* Nonlinear oligopolies: stability and Bifurcations. New York: Springer. 2009.
7. *Dubielski-Teleszynski T.* Nonlinear dynamics in a heterogeneous duopoly game with adjusting players and diseconomies of scale // Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2011. No. 16. P. 296–308.
8. *Al-Khedhairi A.* Dynamical Study of Competition Cournot-like Duopoly Games Incorporating Fractional Order Derivatives and Seasonal Influences // Int. J. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2020. No. 21(3-4). P. 339–359.
9. *Гераськин М.И.* Приближенное вычисление равновесий в нелинейной модели олигополии Штакельберга на основе линеаризации // АиТ. 2020. № 9. С. 120–143.
Geraskin M.I. Approximate Calculation of Equilibria in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model: A Linearization Based Approach // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 9. P. 1659–1678.
10. *Chkhartishvili A.G., Korepanov V.O.* Adding Informational Beliefs to the Players Strategic Thinking Model // IFAC-PapersOnLine. 2016. No. 49 (32). P. 19–23.
11. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Коллективное поведение в модели Штакельберга в условиях неполной информации // АиТ. 2017. № 9. С. 91–105.
Algazin G.I., Algazina D.G. Collective behavior in the Stackelberg model under incomplete information // Autom. Remote Control. 2017. No. 78 (9). P. 1619–1630.
12. *Filatov A.Yu., Makolskaya Ya.S.* The equilibrium and socially effective number of firms in oligopoly: theory and empirics // VIII Moscow Int. Conf. Oper. Res. (ORM2016). 2016. P. 207–208.
13. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // АиТ. 2020. № 2. С. 115–133.
Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // Autom. Remote Control. 2020. No. 81 (2). P. 287–301.

14. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // *АиТ.* 2020. № 7. С. 113–128.
Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexion Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // *Autom. Remote Control.* 2020. No. 81 (7). P. 1258–1270.
15. *Lyubimov V.V.* Direct and inverse secondary resonance effects in the spherical motion of an asymmetric rigid body with moving masses // *Acta Mechan.* 2020. No. 231(12). P. 4933–4946.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 28.01.2022

После доработки 15.04.2022

Принята к публикации 28.04.2022

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2022 г. В.А. БУХАЛЁВ, д-р техн. наук (Vadim.Bukhalev@yandex.ru)
(Московский научно-исследовательский телевизионный институт),
А.А. СКРЫННИКОВ, канд. техн. наук (a1260@mail.ru)
(Государственный научно-исследовательский институт
авиационных систем, Москва;
Московский авиационный институт),
В.А. БОЛДИНОВ, канд. техн. наук (ViktorBoldinov@mail.ru)
(Московский авиационный институт)

АДАПТИВНОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ МАРКОВСКОГО ДВОИЧНОГО СИГНАЛА ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПИРСОНА I ТИПА¹

Рассматривается задача нахождения закона распределения выходного сигнала апериодического звена, на вход которого действует случайный скачкообразный сигнал в виде марковской цепи с двумя состояниями. Теоретически доказано, что плотность вероятности выходного сигнала описывается распределением Пирсона I типа, что экспериментально подтверждается результатами математического моделирования. Полученные результаты используются для синтеза алгоритма адаптивного распознавания неизвестных вероятностей переходов марковской цепи.

Ключевые слова: распределение Пирсона I типа, случайная скачкообразная структура, марковский двоичный сигнал, адаптивный алгоритм, вероятности переходов марковской цепи.

DOI: 10.31857/S0005231022080098, EDN: ANWVVL

1. Введение

Семейство *распределений Пирсона* часто используется в прикладных задачах исследования стохастических динамических систем для аппроксимации законов распределения фазовых координат [1–5].

Это объясняется широтой охвата реальных вероятностных распределений, встречающихся на практике, разнообразием форм распределений Пирсона и возможностью построения алгоритмов анализа и синтеза, сочетающих точность решения с простотой реализации.

В связи с этим возникает интерес, насколько аппроксимирующие распределения близки к реальным, которые можно найти в результате аналитических

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00708).

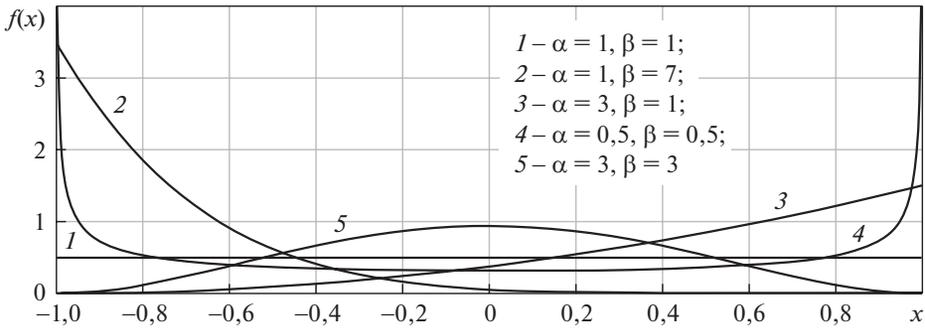


Рис. 1. Плотность вероятности распределения Пирсона I типа при $a = b = 1$ и при различных значениях α, β .

решений некоторых типовых задач. Одна из таких задач рассматривается в настоящей работе.

С ней связана вторая задача, решаемая в статье, — применение полученного распределения как аппроксимирующего для построения алгоритма адаптивного распознавания неизвестных вероятностей переходов марковского двоичного входного сигнала линейной системы.

Одним из наиболее эффективных с этой точки зрения является распределение Пирсона I типа, плотность вероятности которого описывается формулой

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(a+x)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}}{(a+b)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha, \beta)} & \text{при } x \in [-a, b]; \\ 0 & \text{при } x \notin [-a, b], \end{cases}$$

где $B(\alpha, \beta)$ — бета-функция, а математическое ожидание m и дисперсия D случайной величины X связаны с параметрами распределения α, β простыми алгебраическими формулами

$$m = \frac{b\alpha - a\beta}{\alpha + \beta}, \quad D = \frac{(a+b)^2\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

Распределение Пирсона I типа обладает двумя практическими достоинствами: 1) жесткие ограничения по амплитуде сигналов в технических устройствах определяют диапазон распределения $[-a, b]$; 2) форма кривой распределения существенно изменяется в зависимости от сочетания параметров α, β (см. рис. 1).

Эти обстоятельства позволяют надеяться на успешное применение распределения Пирсона I типа в качестве аппроксимирующего и при решении аналогичных задач для других инерционных систем.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 2 и описываемую уравнением

$$(2.1) \quad x_{k+1} = lx_k + (1-l)u(s_k),$$

где s_k — марковская цепь с двумя состояниями: $s = 1$ и $s = 2$, заданная вероятностями переходов h и g ; $h \in (0, 0,5)$, $g \in (0, 0,5)$; $u(s_k)$ — случайный двоичный сигнал: $u(1) = b$, $u(2) = -a$, $a > 0$, $b > 0$; l — коэффициент усиления, $l \in (0, 1)$.

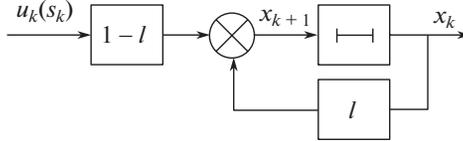


Рис. 2.

Требуется: 1) найти закон распределения выходного сигнала $x(t)$ в установившемся режиме при *известных* вероятностях переходов h, g ; 2) применить полученное распределение для адаптивного распознавания *неизвестных* h, g по измерениям x_k .

3. Распределение выходного сигнала

Если изменения структуры представляют собой условно-марковскую цепь с вероятностями переходов $q_k(s_{k+1}|x_k, s_k)$, то на основании теории систем со случайной скачкообразной структурой (ССС) [1–3, 5–9] закон распределения (x_k, s_k) описывается уравнениями

$$(3.1) \quad f_{k+1}(x_{k+1}, s_{k+1}) = \sum_{s_k} \int_{-\infty}^{\infty} f_{k+1}(x_{k+1}|x_k, s_k) q_k(s_{k+1}|x_k, s_k) f_k(x_k, s_k) dx_k,$$

$$s_k = \overline{1, n^{(s)}},$$

где $q_k(s_{k+1}|x_k, s_k)$ — условная вероятность перехода из s_k в s_{k+1} при фиксированном x_k .

В частном случае, при $s_k = 1, 2$ и условиях задачи п. 2, уравнения (3.1) принимают вид

$$(3.2) \quad f_{k+1}(x_{k+1}, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{k+1}(x_{k+1}|x_k, 1) [(1-h)f_k(x_k, 1) + gf_k(x_k, 2)] dx_k,$$

$$(3.3) \quad f_{k+1}(x_{k+1}, 2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{k+1}(x_{k+1}|x_k, 2) [hf_k(x_k, 1) + (1-g)f_k(x_k, 2)] dx_k,$$

где

$$(3.4) \quad f_{k+1}(x_{k+1}|x_k, 1) = \delta(x_{k+1} - lx_k - 1 + l),$$

$$(3.5) \quad f_{k+1}(x_{k+1}|x_k, 2) = \delta(x_{k+1} - lx_k + 1 - l),$$

$\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

При $k \rightarrow \infty$ (установившийся режим) уравнения (3.2)–(3.5) преобразуются к непрерывной форме:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} l(x-b) \frac{\partial f(x, 1)}{\partial x} + (l-h)f(x, 1) + gf(x, 2) &= 0; \\ l(x+b) \frac{\partial f(x, 2)}{\partial x} + (l-g)f(x, 2) + hf(x, 1) &= 0. \end{aligned}$$

Исключая из системы уравнений переменную $f(x, 2)$ и используя подстановку $y = (x+a)/(a-b)$, получаем *гипергеометрическое уравнение Гаусса* [10]

$$(3.7) \quad \begin{aligned} y(y-1) \frac{\partial^2 f(y, 1)}{\partial y^2} + [(3-\alpha-\beta)y + \alpha - 1] \frac{\partial f(y, 1)}{\partial y} + \\ + (1-\alpha-\beta)f(y, 1) = 0, \end{aligned}$$

где

$$(3.8) \quad \alpha \triangleq \frac{g}{1-l}, \quad \beta \triangleq \frac{h}{1-l}.$$

Уравнение (3.7) эквивалентно уравнению с *разделяющимися переменными* [10]

$$(3.9) \quad y(y-1) \frac{\partial f(y, 1)}{\partial y} + [(1-\alpha-\beta)y + \alpha] f(y, 1) = 0.$$

Аналогично получаем уравнение для $f(x, 2)$

$$(3.10) \quad y(y-1) \frac{\partial f(y, 2)}{\partial y} + [(1-\alpha-\beta)y + \alpha - 1] f(y, 2) = 0.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$(3.11) \quad f(y, 1) = C_1 y^\alpha (1-y)^{\beta-1}, \quad f(y, 2) = C_2 y^{\alpha-1} (1-y)^\beta.$$

Произвольные постоянные определяются из условия нормировки

$$(3.12) \quad \int_0^1 f(y, 1) dy = p(1), \quad \int_0^1 f(y, 2) dy = p(2).$$

Вероятности состояний структуры $p_{k+1}(1)$, $p_{k+1}(2)$ определяются формулами

$$(3.13) \quad p_{k+1}(1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{k+1}(x_{k+1}, 1) dx_{k+1},$$

$$p_{k+1}(2) = 1 - p_{k+1}(1),$$

откуда согласно (3.2), (3.3) следует

$$(3.14) \quad p_{k+1}(1) = (1 - h - g)p_k(1) + g.$$

В установившемся режиме (при $k \rightarrow \infty$) из (3.14) получаем

$$(3.15) \quad p(1) = \frac{g}{h+g}, \quad p(2) = \frac{h}{h+g}.$$

Подставив (3.11), (3.15) в (3.9), (3.10), производя обратную замену $x = (a+b)y - a$ и учитывая соотношения $f(x, 1) = p(1)f(x|1)$, $f(x, 2) = p(2)f(x|2)$, находим *установившиеся* условные плотности вероятностей $f(x|1)$, $f(x|2)$ и безусловную плотность вероятности $f(x)$:

при $x \in [-a, b]$

$$(3.16) \quad f(x|1) = \frac{(a+x)^\alpha (b-x)^{\beta-1}}{(a+b)^{\alpha+\beta} B(\alpha+1, \beta)},$$

$$(3.17) \quad f(x|2) = \frac{(a+x)^{\alpha-1} (b-x)^\beta}{(a+b)^{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta+1)},$$

$$(3.18) \quad f(x) = \frac{(a+x)^{\alpha-1} (b-x)^{\beta-1}}{(a+b)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta)},$$

при $x \notin [-a, b]$

$$(3.19) \quad f(x|1) = f(x|2) = f(x) = 0,$$

где $B(\alpha, \beta)$ — бета-функция; $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Таким образом, условные и безусловные распределения выходного сигнала в установившемся режиме являются распределениями Пирсона I типа [4, 5].

В частном случае при $a = b = 1$:

при $x \in [-1, 1]$

$$(3.20) \quad f(x|1) = \frac{(1+x)^\alpha (1-x)^{\beta-1}}{2^{\alpha+\beta} B(\alpha+1, \beta)},$$

$$(3.21) \quad f(x|2) = \frac{(1+x)^{\alpha-1} (1-x)^\beta}{2^{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta+1)},$$

$$(3.22) \quad f(x) = \frac{(1+x)^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{2^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta)},$$

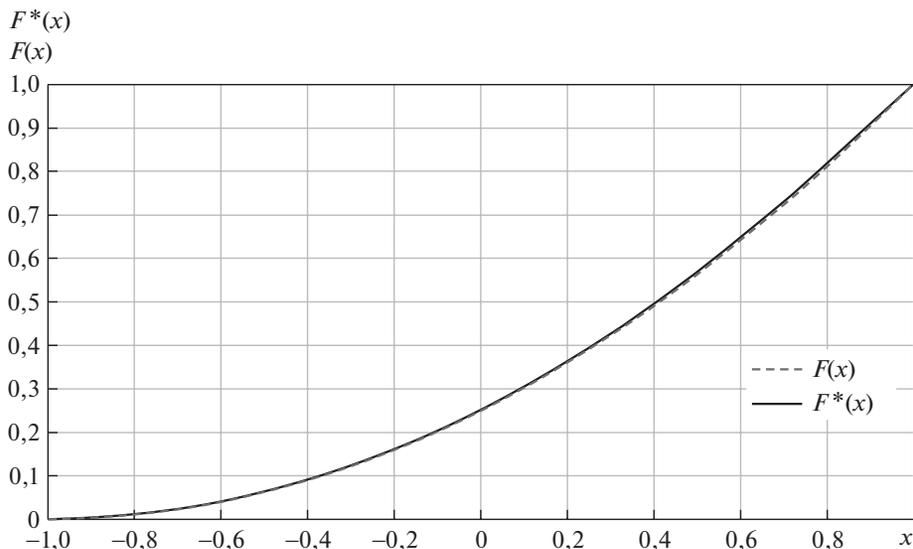


Рис. 3.

при $x \notin [-1, 1]$

$$(3.23) \quad f(x|1) = f(x|2) = f(x) = 0.$$

В частном случае при $b = 1$, $a = 0$ распределения (3.19) являются *бета-распределениями*: [4, 5]

при $x \in [0, 1]$

$$(3.24) \quad f(x|1) = \frac{x^\alpha(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha+1, \beta)},$$

$$(3.25) \quad f(x|2) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^\beta}{B(\alpha, \beta+1)},$$

$$(3.26) \quad f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)},$$

при $x \notin [0, 1]$

$$(3.27) \quad f(x|1) = f(x|2) = f(x) = 0.$$

Как следует из формул (3.8), (3.19), параметры α , β характеризуют *отношение частотного спектра случайного двоичного входного сигнала к полосе пропускания апериодического звена и сдвиг распределения выходного сигнала в сторону одной из границ: b или $(-a)$.*

Пример. Результаты моделирования выходного сигнала $x(t)$ по формуле (2.1) с заданными вероятностями переходов $h = 0,1\Delta t$ и $g = 0,2\Delta t$ и коэффициенте усиления $l = 0,1\Delta t$, где Δt — шаг счета, при $a = b = 1$ показывают,

что с увеличением длительности наблюдения экспериментальная функция распределения $F^*(x)$ случайной величины X сходится к теоретической $F(x)$ (см. рис. 3). Выражение функции распределения при таких значениях параметров модели может быть получено аналитически, для этого с использованием выражений (3.8) вычисляются значения параметров закона распределения $\alpha = 1,0$, $\beta = 2,0$, тогда плотность распределения (3.22) будет иметь вид

$$f(x) = \frac{x + 1}{2},$$

что дает выражение для функции распределения

$$F(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{4}.$$

Сходимость экспериментальной функции распределения фазовой координаты $x(t)$ к теоретической функции распределения подтверждается при любых значениях параметров модели.

4. Адаптивное распознавание неизвестных вероятностей скачков случайного двоичного входного сигнала

Дополним систему, изображенную на рис. 2, измерителем выходного сигнала, описываемым в дискретной форме

$$(4.1) \quad z_k = x_k + \zeta_k,$$

где ζ_k — последовательность случайных величин, независимых при разных k и распределенных в диапазоне $[-1, 1]$ с плотностью вероятности Пирсона I типа

$$(4.2) \quad f_{\zeta}(\zeta_k) = \frac{3(1 - \zeta_k^2)}{4}.$$

Входной сигнал $u_k(s_k) \in [-1, 1]$. В отличие от постановки задачи в разделе 2 вероятности перехода h и g марковской цепи $u_k(s_k)$ неизвестны, и их необходимо найти, используя измерения z_k .

1. Приближенную связь апостериорных оценок \hat{x}_k, \hat{R}_k с прогнозируемыми \tilde{x}_k, \tilde{R}_k и измерением z_k , применяя байесовскую обработку информации и линейную регрессию коррелированных случайных величин x_k и z_k , можно представить в виде следующих формул [2]:

$$(4.3) \quad \hat{x}_{k+1} \approx \left[\tilde{x} + \frac{\tilde{R}^{xz}}{\tilde{R}^z} (z - \tilde{z}) \right]_{k+1},$$

$$(4.4) \quad \hat{R}_{k+1} \approx \left[\tilde{R} + \frac{(\tilde{R}^{xz})^2}{\tilde{R}^z} \right]_{k+1},$$

где

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &\triangleq M \left[x_{k+1} | z_{\overline{0,k+1}} \right], & \tilde{x}_{k+1} &\triangleq M \left[x_{k+1} | z_{\overline{0,k}} \right], \\ \hat{R}_{k+1} &\triangleq M \left[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1})^2 | z_{\overline{0,k+1}} \right], & \tilde{R}_{k+1} &\triangleq M \left[(x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1})^2 | z_{\overline{0,k}} \right], \\ \tilde{R}_{k+1}^{xz} &\triangleq M \left[(x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1})(z_{k+1} - \tilde{z}_{k+1}) | z_{\overline{0,k}} \right], \\ \tilde{R}_{k+1}^z &\triangleq M \left[(z_{k+1} - \tilde{z}_{k+1})^2 | z_{\overline{0,k}} \right];\end{aligned}$$

$$(4.5) \quad \tilde{x}_{k+1} = \left[l\hat{x} + (1-l)\hat{u} \right]_k,$$

$$(4.6) \quad \tilde{R}_{k+1} = \left[l^2\hat{R} + (1-l)^2\hat{G} \right]_k,$$

где

$$\begin{aligned}\hat{u}_k &\triangleq M[u_k(s_k) | z_{\overline{0,k}}], \\ \hat{G}_k &\triangleq M[(u_k(s_k) - \hat{u}_k)^2 | z_{\overline{0,k-1}}].\end{aligned}$$

2. Согласно (4.1), (4.2) \tilde{R}_k^{xz} , \tilde{R}_k^z определяются формулами

$$(4.7) \quad \tilde{R}_k^{xz} = \tilde{R}_k, \quad \tilde{R}_k^z = \tilde{R}_k + Q, \quad \tilde{z}_k = \tilde{x}_k,$$

где Q_k — дисперсия помехи ζ_k .

Подставив (4.7) в (4.3)–(4.6), получаем

$$(4.8) \quad \hat{x}_{k+1} = \frac{\left[l\hat{x}_k + (1-l)\hat{u}_k \right] Q + \left[l^2\hat{R}_k + (1-l)^2\hat{G}_k \right] z_{k+1}}{l^2\hat{R}_k + (1-l)^2\hat{G}_k + Q},$$

$$(4.9) \quad \hat{R}_{k+1} = \frac{\left[l^2\hat{R}_k + (1-l)^2\hat{G}_k \right] Q}{l^2\hat{R}_k + (1-l)^2\hat{G}_k + Q},$$

$$\hat{x}_0 = \bar{x}_0, \quad \hat{R}_0 = R_0, \quad Q = 0,2,$$

где \bar{x}_0 , R_0 — известные величины.

3. Математическое ожидание и дисперсия входного сигнала $u_k(s_k)$, распределенного по закону Бернулли, определяются формулами

$$(4.10) \quad \hat{u}_k = \hat{p}_k(1) - \hat{p}_k(2), \quad \hat{G}_k = 4\hat{p}_k(1)\hat{p}_k(2).$$

Вероятности $p_k(1)$, $p_k(2)$ состояний структуры $s_k = 1, 2$ марковской цепи в установившемся режиме согласно (3.15) определяются формулами

$$(4.11) \quad p(1) = \frac{g}{h+g}, \quad p(2) = \frac{h}{h+g}.$$

При неизвестных h и g эти вероятности корректируются на основании измерений $z_{0,k}$ и приближенно могут быть определены формулами

$$(4.12) \quad \hat{p}_k(1) = \frac{\hat{g}_k}{\hat{h}_k + \hat{g}_k}, \quad \hat{p}_k(2) = \frac{\hat{h}_k}{\hat{h}_k + \hat{g}_k}.$$

Учитывая связь (3.8) вероятностей перехода h, g с параметрами распределения Пирсона I типа, получаем из (4.10)

$$(4.13) \quad \hat{p}_k(1) = \frac{\hat{\alpha}_k}{\hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_k}, \quad \hat{p}_k(2) = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_k},$$

где $\hat{h}_k, \hat{g}_k, \hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k$ — оценки соответствующих параметров h, g, α, β , полученные на основании измерений $z_{0,k}$.

4. Математическое ожидание \bar{x} и дисперсия R распределения Пирсона I типа в диапазоне $x \in [-1, 1]$ связаны с параметрами распределения α, β формулами [4, 5]

$$(4.14) \quad \bar{x} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}, \quad R = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)},$$

откуда следует

$$(4.15) \quad \alpha = \frac{(1 + \bar{x})\gamma}{2}, \quad \beta = \frac{(1 - \bar{x})\gamma}{2}, \quad \gamma = \frac{1 - \bar{x}^2}{R} - 1,$$

$$(4.16) \quad \hat{\alpha} = \frac{(1 + \hat{x})\hat{\gamma}}{2}, \quad \hat{\beta} = \frac{(1 - \hat{x})\hat{\gamma}}{2}, \quad \hat{\gamma} = \frac{1 - \hat{x}^2}{\hat{R}} - 1.$$

Подставив (4.13) в (4.10), получаем

$$(4.17) \quad \hat{u}_k = \frac{\hat{\alpha}_k - \hat{\beta}_k}{\hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_k} = \hat{x}_k, \quad \hat{G}_k = \frac{4\hat{\alpha}_k\hat{\beta}_k}{(\hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_k)^2} = 1 - \hat{x}_k^2.$$

Подставив (4.17) в (4.8), (4.9), получаем

$$(4.18) \quad \hat{x}_{k+1} = \frac{Q\hat{x}_k + [l^2\hat{R}_k + (1-l)^2(1-\hat{x}_k^2)]z_{k+1}}{l^2\hat{R}_k + (1-l)^2(1-\hat{x}_k^2) + Q},$$

$$(4.19) \quad \hat{R}_{k+1} = \frac{[l^2\hat{R}_k + (1-l)^2(1-\hat{x}_k^2)]Q}{l^2\hat{R}_k + (1-l)^2(1-\hat{x}_k^2) + Q}.$$

Согласно (2.1), (3.8)

$$(4.20) \quad \hat{g}_k = \hat{\alpha}_k(1-l), \quad \hat{h}_k = \hat{\beta}_k(1-l).$$

Таким образом, алгоритм адаптивного распознавания неизвестных вероятностей перехода h и g марковского двоичного входного сигнала $u_k(s_k)$, $s_k = 1, 2$ с параметрами $u_k(1) = 1, u_k(2) = -1$ описывается замкнутой системой уравнений (4.18)–(4.20), входом которой является измерение z_k , а выходом — оценки \hat{h}_k, \hat{g}_k .

5. Заключение

В результате решения задачи нахождения закона распределения сигнала на выходе апериодического звена, на вход которого действует случайный двоичный сигнал, вероятности переходов которого из одного состояния в другое описываются марковской цепью, получена плотность вероятности выходного сигнала.

Задача решена методами теории систем со случайной скачкообразной структурой [1–3]. Найденная плотность вероятности является распределением Пирсона I типа, которое широко используется в прикладных задачах анализа и синтеза стохастических динамических систем [4, 5]. Полученное аналитическое решение подтверждено результатами математического моделирования.

Полученные результаты используются для построения алгоритма адаптивного распознавания *неизвестных* вероятностей переходов на основании неточных измерений выходного сигнала системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бухалёв В.А.* Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой. М.: Наука, 1996.
2. *Бухалёв В.А.* Оптимальное сглаживание в системах со случайной скачкообразной структурой. М.: Физматлит, 2013.
3. *Бухалёв В.А., Скрынников А.А., Болдинов В.А.* Игровое управление системами со случайной скачкообразной структурой. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021.
4. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Под редакцией В.С. Королюка. М.: Наука, 1985.
5. *Джонсон Н.Л., Коц С., Балакришнан Н.* Одномерные непрерывные распределения. В двух частях. Ч.2. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2012.
6. *Piers B.D., Swarder D.D.* Bayes and Minimax Controllers for a Linear Systems for Stochastic Jump Parameters // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. V. 16. No. 4. P. 677–685.
7. *Moon J.* A Sufficient Condition for Linear-Quadratic Stochastic Zero-Sum Differential Games for Markov Jump Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2019. V. 64. No. 4. P. 1619–1626.
8. *Mariton M.* Jump Linear Systems in Automatic Control. Taylor & Francis, 1990.
9. *Swarder D.D.* Feedback Control of a Class of Linear Systems with Jump Parameters // IEEE Trans. Autom. Control. 1969. V. 14. No. 1. P. 9–14.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1976.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 14.11.2021

После доработки 16.02.2022

Принята к публикации 31.03.2022

СОДЕРЖАНИЕ

Нелинейные системы

- Рапопорт Л.Б., Генералов А.А.** Управление перевернутым маятником на колесе 3
- Солнечный Э.М., Черёмушкина Л.А.** Динамические свойства одномерной системы теплопередачи при движущемся источнике нагрева 29

Стохастические системы

- Архипов А.С., Семенихин К.В.** Многомерная чебышевская граница типа Селберга 38
- Горцев А.М., Нежелская Л.А.** Аналитическое исследование однолинейной СМО с входящим асинхронным потоком событий 65
- Моисеева С.П., Бушкова Т.В., Панкратова Е.В., Фархадов М.П., Имомов А.А.** Асимптотический анализ ресурсной гетерогенной СМО $(MMPP + 2M)^{(2,\nu)}/GI(2)/\infty$ при условии эквивалентно растущего времени обслуживания 81

Робастное, адаптивное и сетевое управление

- Каляев И.А., Каляев А.И.** Метод и алгоритмы адаптивного мультиагентного диспетчирования ресурсов в гетерогенных распределенных вычислительных средах 100
- Коган М.М.** Адаптивное H_∞ -оптимальное управление 123

Управление в социально-экономических системах

- Гераськин М.И.** Анализ равновесий в нелинейной модели олигополии 140

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

- Бухалёв В.А., Скрынников А.А., Болдинов В.А.** Адаптивное распознавание марковского двоичного сигнала линейной системы на основе распределения Пирсона I типа 159

C O N T E N T S

Nonlinear Systems

- Rapoport L.B., Generalov A.A.** Control of the Inverted Pendulum Fixed on the Wheel 3
- Solnechnyi E.M., Cheriomoushkina L.A.** Dynamic Features of a One-Dimensional Heat-Transfer System with the Moving Heat-Source 29

Stochastic Systems

- Arkhipov A.S., Semenikhin K.V.** A Multivariate Chebyshev Bound of the Selberg Form 38
- Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A.** Analytical Research of a Single-Line Queuing System with an Incoming Asynchronous Flow of Events 65
- Moiseeva S.P., Bushkova T.V., Pankratova E.V., Farkhadov M.P., Imomov A.A.** Asymptotic Analysis of the Resource Heterogeneous QS (MMPP + $2M^{(2,\nu)}/GI(2)/\infty$ under the Condition of an Equivalently Growing Service Time 81

Robust, Adaptive and Network Control

- Kalyaev I.A., Kalyaev A.I.** Method and Algorithms for Adaptive Multi-Agent Scheduling of Resources in Heterogeneous Distributed Computing Environments 100
- Kogan M.M.** Adaptive H_∞ -Optimal Control 123

Control in Social Economic Systems

- Geraskin M.I.** Analysis of Equilibria in Nonlinear Oligopoly Model 140

Intellectual Control Systems, Data Analysis

- Bukhalev V.A., Skrynnikov A.A., Boldinov V.A.** Adaptive Markovsky Recognition the Binary Signal of a Linear System on Based on the Pearson Distribution of Type I 159