



Российская Академия Наук

Отделение математических наук

**М.П. Галанин, П.В. Глизнуцина,
В.В. Лукин, А.С. Родин**

**Исследование сходимости
метода Шварца
при решении плоской
контактной задачи**

Москва 2017

УДК 51-7

ББК 22.11

Н 88

Галанин М.П., Глизуцина П.В., Лукин В.В., Родин А.С. (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН) **Исследование сходимости метода Шварца при решении плоской контактной задачи** / – М., РАН, 2017.

Анотация: В работе приведена достаточно общая постановка задачи механического контактного взаимодействия двух упругих тел. Дано описание метода Шварца, предназначенного для численного решения контактной задачи. Представлены результаты решения ряда тестовых задач в двумерной плоской геометрии для случаев, когда модули Юнга материалов контактирующих тел сильно различаются. Особое внимание уделено исследованию зависимости скорости сходимости метода Шварца от выбора итерационных параметров.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, метод Шварца, метод конечных элементов, сходимость итерационного процесса, контакт с абсолютно твердым телом

Mikhail Pavlovich Galanin, Polina Vladimirovna Gliznitsina, Vladimir Vladimirovich Lukin, Aleksandr Sergeevich Rodin

Investigation of convergence of Schwartz method for solution of contact plane problem– Moscow, Russian Academy of Sciences, 2017

Abstract: Sufficiently common problem definition of mechanical contact interaction of system of elastic bodies is given. The description of various options of realization of Schwarz method intended for the numerical solution of a contact task is given and results of the solution of a number of plane tasks are presented. Results of calculations for a number of test problems are given. In these problems we use materials with very different parameters for solids. Special attention is paid to investigation of Schwartz method convergence dependence on values of iteration parameters.

Key words: contact interaction, Schwartz method, finite element method, convergence of iteration method, contact with perfectly rigid body

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 15-01-03073 и 16-31-00302.

ISBN 978-5-906906-70-0

© Российская академия наук, 2017
© М.П. Галанин, П.В. Глизуцина,
В.В. Лукин, А.С. Родин, 2017

Содержание

1. Постановка задачи контактного взаимодействия упругих тел	4
2. Применение численных методов для решения контактной задачи	6
2.1. Альтернирующий метод Шварца	7
2.2. Метод множителей Лагранжа с независимой контактной поверхностью	14
3. Результаты численных расчетов	15
3.1. Расчеты для различных характерных размеров контактирующих тел (первая серия)	17
3.2. Расчеты контактного взаимодействия более мягкого тела, вдавливаемого в более жесткое тело (вторая серия)	24
3.3. Исследование влияния начального приближения на процесс сходимости	31
3.4. Сравнение результатов, полученных с помощью метода Шварца и метода множителей Лагранжа (четвертая серия расчетов)	34
Заключение	36
Список литературы	38

1. Постановка задачи контактного взаимодействия упругих тел

Рассмотрим в двумерном пространстве \square^2 с декартовой системой координат Ox_1x_2 два тела A и B , занимающих область $G = G_A \cup G_B$, ограниченную кусочно-гладкой границей $\partial G = \partial G_A \cup \partial G_B$ (рис. 1).

Математическая формулировка квазистатической задачи МДТГ в рассматриваемой постановке включает следующие соотношения (для каждого тела $G_\alpha, \alpha \in \{A, B\}, i, j = \overline{1, 2}$):

уравнения равновесия

$$\sigma_{ji, j}(\mathbf{u}) + Q_i^\alpha(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in G_\alpha, \quad (1)$$

граничные условия (кинематические и силовые)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \Big|_{S_1^\alpha} = \mathbf{u}_0^\alpha(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in S_1^\alpha \subset \partial G_\alpha, \quad (2)$$

$$\sigma_{ji}(\mathbf{u}) n_j \Big|_{S_2^\alpha} = p_i^\alpha(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in S_2^\alpha \subset \partial G_\alpha, \quad (3)$$

соотношения Коши для компонент тензора деформации ($i, j = \overline{1, 2}, \varepsilon_{33} = 0$)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

определяющие уравнения (в данном случае закон Гука) для компонент тензора напряжений ($i, j = \overline{1, 2}, \sigma_{33} = 0$)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (4)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – вектор перемещения точки, определяемой радиусом-вектором $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{u}_0^\alpha(\mathbf{x}, t)$ – вектор перемещения точки, расположенной на поверхности S_1^α , $\mathbf{Q}^\alpha(\mathbf{x}, t) = Q_i^\alpha(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i$ – вектор массовых сил ($\mathbf{x} \in G_\alpha$), $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = p_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i$ – вектор внешней нагрузки, действующей на поверхности S_2^α ($\mathbf{x} \in S_2^\alpha \subset \partial G_\alpha$), C_{ijkl} – компоненты тензора коэффициентов упругости.

При решении контактной задачи на поверхностях контакта тел $S_k = S_k^A = S_k^B$ (см. рис. 1) дополнительно должны быть выполнены условия контактного взаимодействия по перемещениям и напряжениям [1, 9].

Для случая, когда тела могут двигаться относительно друг друга в касательном направлении условия сопряжения по перемещениям (кинематическое условие) задаются формулой

$$u_n^A(\mathbf{x}, t) - u_n^B(\mathbf{x}, t) = \delta_n(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S_k, \quad (5)$$

а по напряжениям (силовое условие)

$$\sigma_n^A(\mathbf{x}, t) = \sigma_n^B(\mathbf{x}, t) \leq 0, \mathbf{x} \in S_k. \quad (6)$$

Здесь u_n^A, u_n^B – проекции векторов перемещений граничных точек на направление внешней нормали \mathbf{n}_A к границе тела A , δ_n – начальное расстояние (зазор) по нормали между граничными точками тел A и B , σ_n^A, σ_n^B – проекции векторов напряжений σ^A и σ^B на направления внешних нормалей \mathbf{n}_A и \mathbf{n}_B соответственно, $S_1^\alpha \cup S_2^\alpha \cup S_k^\alpha = \partial G_\alpha$, $\text{mes}(S_1^\alpha \cap S_2^\alpha) = 0$, $\text{mes}(S_1^\alpha \cap S_k^\alpha) = 0$, $\text{mes}(S_2^\alpha \cap S_k^\alpha) = 0$, $\alpha \in \{A, B\}$.

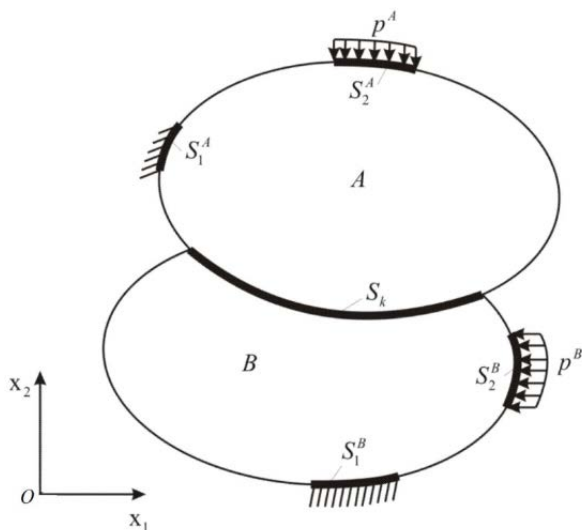


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия двух тел.

Часть прикладных задач требует учета сил трения на контактных поверхностях, для этого обычно используют закон Амонтона-Кулона, который связывает касательные контактные напряжения с нормальными.

В данной работе рассмотрено контактное взаимодействие, при котором в касательном направлении тела двигаются без трения, а начальный зазор всегда равен нулю.

Совокупность соотношений (1) – (6) составляет математическую формулировку контактной задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ). Предполагается, что все функции, входящие в данную формулировку, обладают достаточной гладкостью.

2. Применение численных методов для решения контактной задачи

Аналитические решения контактных задач получены для весьма ограниченного числа видов контактного взаимодействия и форм контактирующих поверхностей. В подавляющем большинстве практически важных ситуаций необходимо применять численные методы, среди которых для решения задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ) лидирующее положение занимает метод конечных элементов (МКЭ) [3–8, 10–12]. Процедура его применения описана во многих указанных руководствах. В частности, использованный для данной задачи вариант МКЭ описан в [9, 10, 13]. В результате применения МКЭ задача МДТТ (1) – (6) сводится к решению линейного матричного уравнения [2, 4]:

$$[K]\{U\} = \{R\}. \quad (7)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $[K]$ – глобальная матрица жесткости, $\{U\}$ – глобальный вектор перемещений, $\{R\}$ – глобальный вектор нагрузки.

При решении контактных задач используют различные итерационные методы, например, метод штрафных функций, метод множителей Лагранжа, комбинированный метод штрафов и Ла-

гранжа, метод псевдосреды, альтернирующий метод Шварца и другие [2, 9, 13]. В данной работе применен метод Шварца (один из вариантов метода декомпозиции – см. по этому поводу [14, стр. 412] и [15] для общего случая) и один из вариантов метода Лагранжа.

2.1. Альтернирующий метод Шварца

Альтернирующий метод Шварца является итерационным методом, более подробно данный метод описан в [9, 13, 16, 17]. Его суть в рамках конечно-элементной технологии состоит в следующем. На первом шаге (нулевой итерации) задаются компоненты векторов перемещений (нормальных к поверхности) контактных узлов $\{U_k\}_{(A)}$ и $\{U_k\}_{(B)}$ (приближение выбирают из диапазона ожидаемых значений для зоны контактного взаимодействия таким образом, чтобы контактные поверхности тел совпадали)

$$\{U_k\}_{(A),m}^0 = \{U_k\}_{,m}^0, \quad (8)$$

где m ($1 \leq m \leq M_A$) – номер текущего узла, лежащего на контактной поверхности S_k^A тела A , M_A – количество контактных узлов на поверхности S_k^A (для тела B справедлива аналогичная формула).

После нулевой итерации в узлах на контактных поверхностях перемещения совпадают (выполнено условие (5)), но не совпадают контактные давления (условие (6)).

В дальнейшем на нечетных итерациях выполняется коррекция компонент векторов, задающих контактные силы, $\{P_k\}_{(A)}$ и $\{P_k\}_{(B)}$ тел A и B (для выполнения условия (6)). Для тела A корректирующие выражения имеют вид

$$\{P_k\}_{(A),m}^{2n+1} = \{P_k\}_{(A),m}^{2n} - \alpha_{(A),m}^{2n} \left(\{P_k\}_{(B),s}^{2n} + \{P_k\}_{(A),m}^{2n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Здесь $\alpha_{(A),m}^{2n}$ – итерационный параметр, $\{P_k\}_{(B),s}^{2n}$ – вектор контактной силы в сходственной относительно узла m точке s ,

лежащей на контактной поверхности S_k^B тела B . Аналогичное соотношение используется для коррекции компонент векторов контактных сил, возникающих в контактных узлах тела B . Далее выполняется решение двух подобных задач теории упругости, в которых на контактных поверхностях ставятся силовые условия с новыми значениями контактного давления.

Отметим, что вместо (9) можно использовать аналогичные выражения, с заменой вектора контактных сил $\{P_k\}$ на вектор контактных давлений $\{p_k\}$ или на вектор узловых контактных сил $\{R_k\}$ (последняя формула корректно работает только для случая, когда сетки на контактных поверхностях тел практически совпадают). Более подробно различные варианты алгоритма коррекции контактной нагрузки изложены в [21]. В данной работе выбран вариант, в котором для аппроксимации контактных давлений использованы линейные базисные функции (заданные на поверхностных элементах), а контактная сила $\{P_k\}_{(A),m}$ в узле m вычислялась путем интегрирования по ячейке Дирихле, соответствующей данному узлу.

Для узла m , относящегося к телу A , и сходственной для данного узла точке s , лежащей на контактной поверхности S_k^B тела B , из условия равенства контактных сил

$(\{P_k\}_{(A),m}^{2n+1} = \{P_k\}_{(B),s}^{2n+1})$ получаем следующее соотношение для итерационных параметров:

$$\alpha_{(A),m}^{2n} + \alpha_{(B),s}^{2n} = 1. \quad (10)$$

На четных итерациях выполняется коррекция компонент векторов перемещений (по нормали к поверхности) контактных узлов $\{U_k\}_{(A)}$ и $\{U_k\}_{(B)}$ тел A и B (для выполнения условия (5)). Для тела A корректирующие выражения имеют вид

$$\{U_k\}_{(A),m}^{2n} = \{U_k\}_{(A),m}^{2n-1} + \alpha_{(A),m}^{2n-1} (\{U_k\}_{(B),s}^{2n-1} - \{U_k\}_{(A),m}^{2n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

Здесь $\alpha_{(A),m}^{2n-1}$ – итерационный параметр, $\{U\}_{(B),s}^{2n-1}$ – вектор перемещения сходственной точки s , лежащей на контактной поверхности S_k^B тела B .

Аналогичные соотношения используются для коррекции компонент векторов перемещений контактных узлов тела B . Далее выполняется решение двух подобных задач теории упругости, в которых векторы $\{U_k\}_{(A)}$ и $\{U_k\}_{(B)}$ выполняют роль дополнительных кинематических граничных условий.

Для узла m , относящегося к телу A , и сходственной для данного узла точке s , лежащей на контактной поверхности S_k^B тела B , из условия равенства перемещений ($\{U_k\}_{(A),m}^{2n} = \{U_k\}_{(B),l}^{2n}$) получаем следующее соотношение для итерационных параметров:

$$\alpha_{(A),m}^{2n-1} + \alpha_{(B),s}^{2n-1} = 1. \quad (12)$$

Поскольку нормали к контактным поверхностям в узле тела A и в сходственной точке тела B направлены в противоположные стороны, то компоненты соответствующих векторов контактных сил имеют разные знаки (в отличие от компонент вектора перемещений). Поэтому знаки в формуле (9) отличаются от знаков в формуле (11).

В работах [14, 16, 17] приведены доказательства сходимости метода Шварца (его аналитического варианта). Но постановка задачи в этих работах отличается от задачи (1) – (6) отсутствием у тел поверхностей, на которых заданы силовые условия (3). Т.е. предполагается, что на других участках поверхности, кроме контактной, заданы кинематические условия (2). Кроме того, в качестве контактных условий выступают не условия проскальзывания (в касательном направлении), а условия прилипания.

Для указанной постановки задачи из условия минимума соответствующего функционала получена следующая связь оптимальных значений итерационных параметров на кинематической и силовой итерациях [16, 17] (и для тела A и для тела B):

$$\alpha_*^{2n-2} + \alpha_*^{2n-1} = 1, \quad (13)$$

причем должны быть выполнены неравенства

$$0 < \alpha_*^{2n-2} < 1, \quad 0 < \alpha_*^{2n-1} < 1. \quad (14)$$

В аналитическом случае для стационарных процессов ($\alpha^{2n-2} = \alpha$, $\alpha^{2n-1} = 1 - \alpha$) из условия минимума функционала получена формула, в которой оптимальное значение α_* выражается через нормы операторов Фредгольма, которые устанавливают соответствие между векторами перемещений и напряжений на поверхности контакта тел ([16, 17]). Но вычисление указанных операторов в многомерном случае представляет весьма нетривиальную задачу (поскольку информации о ядрах операторов почти нет), поэтому на практике обычно используют более простые формулы для вычисления итерационных параметров (при этом полученные значения чаще всего не являются оптимальными).

В [18] предложена и обоснована следующая формула:

$$\alpha_A^{2n-1} = 1 - \frac{K_A}{K_A + K_B}, \quad (15)$$

где K_A и K_B – жесткости тел.

Если обозначить через $C_A = \frac{1}{K_A}$ податливость тела (величину, обратную жесткости), то (15) можно переписать в следующем виде:

$$\alpha_A^{2n-1} = \frac{C_A}{C_A + C_B}. \quad (16)$$

В [18] отмечено, что выбор величин податливости (или жесткости) в качестве локальных, а не интегральных, характеристик делает алгоритм более универсальным. В [19] предложено задавать зависимость перемещения от давления на контактной поверхности с помощью следующего оператора:

$$u(\tau)|_{S_k} = \int_{S_k} G(\rho, \tau) p(\rho) d\rho, \quad (17)$$

где p – контактное давление, а ядро оператора $G(\rho, \tau)$ представляется в виде

$$G(\rho, \tau) = \tilde{C}(\tau) f(|\rho - \tau|). \quad (18)$$

Здесь $\tilde{C}(\tau)$ – функция, которая зависит от геометрии зоны контакта, механических характеристик материала, состояния поверхности (она является локальной характеристикой), а $f(|\rho - \tau|)$ – функция влияния других точек, расположенных на контактной поверхности, на перемещение рассматриваемой точки ($f(0) = 1$).

С учетом (18) выражение (17) можно переписать следующим образом

$$u(\tau)|_{S_k} = \tilde{C}(\tau) \int_{S_k} f(|\rho - \tau|) p(\rho) d\rho. \quad (19)$$

Тогда функция $\tilde{C}(\tau)$ задается формулой:

$$\tilde{C}(\tau) = u(\tau) / \int_{S_k} f(|\rho - \tau|) p(\rho) d\rho. \quad (20)$$

Выражение (20) означает, что $\tilde{C}(\tau)$ имеет смысл перемещения точки поверхности тела, вызванного единичной силой, приложенной к рассматриваемой точке, т.е. ее можно использовать в качестве функции, задающей локальную податливость ([19]).

Если подставить выражения для податливости, соответствующие (20), в выражение (16), то получится следующая формула для итерационного параметра тела A в узле m :

$$\alpha_{A,m}^{2n-1} = \frac{\gamma_{A,m}^{2n-1} \{U_k\}_{(A),m}^{2n-1}}{\gamma_{A,m}^{2n-1} \{U_k\}_{(A),m}^{2n-1} + \{U_k\}_{(B),s}^{2n-1}}, \quad (21)$$

$$\gamma_{A,m}^{2n-1} = \int_{S_k^{B(2n-1)}} f_B(|\rho - \tau_s|) p_B^{2n-1}(\rho) d\rho / \int_{S_k^{A(2n-1)}} f_A(|\rho - \tau_m|) p_A^{2n-1}(\rho) d\rho. \quad (22)$$

Аналогичное выражение для итерационного параметра для тела B в сходственной (для узла m) точке s :

$$\alpha_{B,s}^{2n-1} = \frac{\gamma_{B,s}^{2n-1} \{U_k\}_{(B),s}^{2n-1}}{\gamma_{B,s}^{2n-1} \{U_k\}_{(B),s}^{2n-1} + \{U_k\}_{(A),m}^{2n-1}}, \quad (23)$$

$$\gamma_{B,s}^{2n-1} = \int_{S_k^{A(2n-1)}} f_A(|\rho - \tau_m|) p_A^{2n-1}(\rho) d\rho / \int_{S_k^{B(2n-1)}} f_B(|\rho - \tau_s|) p_B^{2n-1}(\rho) d\rho. \quad (24)$$

Отметим, что в соответствие с формулами (22) и (24) параметры $\gamma_{A,m}^{2n-1}$ и $\gamma_{B,m}^{2n-1}$ связаны между собой соотношением

$$\gamma_{B,s}^{2n-1} = \frac{1}{\gamma_{A,m}^{2n-1}}. \quad (25)$$

В [19] сделано предположение, что поскольку на силовых итерациях выполнено равенство $p_A^{2n-1}(\rho) = p_B^{2n-1}(\rho)$, то можно приближенно считать, что $\gamma_{A,m}^{2n-1} = \gamma_{B,s}^{2n-1} = 1$. Тогда выражения для итерационных параметров упрощаются и принимают вид

$$\alpha_{A,m}^{2n-1} = \frac{\{U_k\}_{(A),m}^{2n-1}}{\{U_k\}_{(A),m}^{2n-1} + \{U_k\}_{(B),s}^{2n-1}}, \quad (26)$$

$$\alpha_{B,s}^{2n-1} = \frac{\{U_k\}_{(B),s}^{2n-1}}{\{U_k\}_{(B),s}^{2n-1} + \{U_k\}_{(A),m}^{2n-1}}.$$

Формулы (21), (23) являются более общими и универсальными, чем (26), но, поскольку выражения для функций влияния f_A и f_B неизвестны, то нужно, используя имеющуюся информацию, оценить значения параметров $\gamma_{A,m}^{2n-1}$ и $\gamma_{B,s}^{2n-1}$.

Отметим, что поскольку на начальных итерациях перемещения на контактных поверхностях тел могут иметь разные знаки, то для выполнения неравенств (14) в выражениях для итерационных параметров (21), (23) или (26) целесообразно брать значения перемещений $\{U_k\}_{(A),m}^{2n-1}$ и $\{U_k\}_{(B),s}^{2n-1}$ по модулю.

Для определения итерационных параметров $\alpha_{A,m}^{2n}$ чаще всего берут аналог уравнения (13) и получают [19]

$$\alpha_{A,m}^{2n} = 1 - \alpha_{A,m}^{2n-1}. \quad (27)$$

В качестве альтернативного варианта можно применять формулы, аналогичные (26), в которых вместо перемещений используют значения контактных сил (или давлений) [13]:

$$\alpha_{A,m}^{2n} = \frac{\left| \{P\}_{(A),m}^{2n} \right|}{\left| \{P\}_{(A),m}^{2n} \right| + \left| \{P\}_{(B),s}^{2n} \right|},$$

$$\alpha_{B,s}^{2n} = \frac{\left| \{P\}_{(B),s}^{2n} \right|}{\left| \{P\}_{(B),s}^{2n} \right| + \left| \{P\}_{(A),m}^{2n} \right|}. \quad (28)$$

Для рассматриваемой постановки задачи (1)–(6) метод Шварца имеет некоторые дополнительные особенности.

На рис. 2 продемонстрированы силовые и кинематические условия, накладываемые на два тела, вступающие в контактное взаимодействие. В этом случае на нечетных итерациях на верхней поверхности S^A верхнего тела (тела A) требуется замена распределенной нагрузки на эквивалентные кинематические граничные условия. Необходимость такой замены объясняется тем, что каждое контактирующее тело должно быть закреплено, т.е. должны быть исключены свободные перемещения каждого контактирующего тела как целого тела.

В качестве подобных дополнительных кинематических условий могут быть приняты следующие (рис. 2в)

$$\{U\}_{(S),m}^{2n+1} = \{U\}_{(S),m}^{2n}, n = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

где m ($1 \leq m \leq M_S$) – номер текущего узла, лежащего на внешней поверхности S^A тела A , $\{U\}_{(S),m}^{2n}$ – вектор перемещения (по нормали к поверхности) узла m , вычисленный на предыдущей (четной) итерации.

В ряде задач выражение (29) оказывается неудачным и может существенно замедлить сходимость итерационного процесса. Более выгодной оказывается формула

$$\{U\}_{(S),m}^{2n+1} = \beta_m^{2n+1} \{U\}_{(S),m}^{2n}, n = 1, 2, \dots, \quad (30)$$

где коэффициенты β_m^{2n+1} равны отношению интегральных контактных сил на поверхности S_k^A на предыдущей ($2n$) и текущей ($2n + 1$) итерациях.

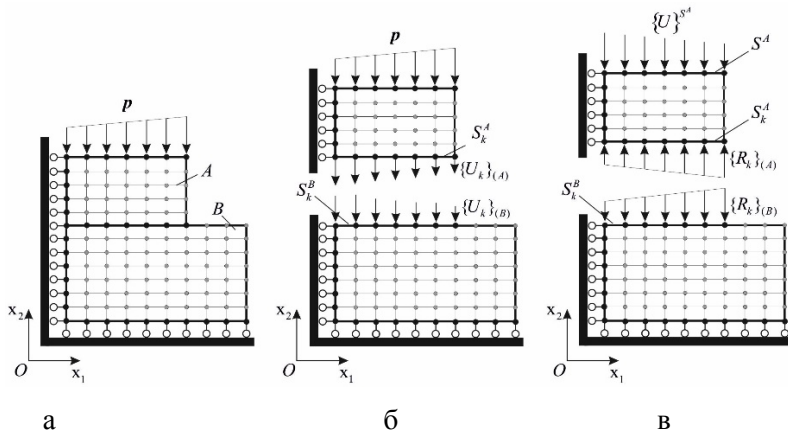


Рис. 2. Контактное взаимодействие двух тел: а – исходная схема взаимодействия, б – схема задания кинематических и силовых условий на кинематической итерации, в – схема задания кинематических и силовых условий на силовой итерации.

2.2. Метод множителей Лагранжа с независимой контактной поверхностью

Согласно методу множителей Лагранжа к потенциальной энергии системы двух тел, входящих в контакт, добавляется потенциал контактных сил вида [2, 11]

$$W_C = - \int_{S_k} \Lambda \cdot (\mathbf{x}^{(A)} - \mathbf{x}^{(B)}) dS, \quad (31)$$

где Λ – функция множителей Лагранжа, имеющая смысл вектора поверхностных контактных сил, $\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{X}^{(i)} + \mathbf{u}^{(i)}$ – актуальные положения соответствующих сходственных точек тел $i = A, B$ на поверхности контакта, $\mathbf{X}^{(i)}$ и $\mathbf{u}^{(i)}$ – исходные координаты и получаемые перемещения сходственных точек соответственно. В дальнейшем полученная энергия варьируется и ее первая вариация приравнивается 0. Переменные \mathbf{u} и Λ независимы.

Для вычисления интеграла (31) необходимо его дискретизовать. При этом дискретизируется и непрерывная

функция Λ . В таком случае в систему линейных алгебраических уравнений, полученную с помощью метода конечных элементов, добавляются новые неизвестные, соответствующие слагаемому [11]

$$\bar{W}_C = - \int_{S_k} \lambda^T \cdot (\mathbf{x}^{(A)} - \mathbf{x}^{(B)}) dS, \quad (32)$$

где λ^T – вектор дискретизированных множителей Лагранжа.

Предлагаемый подход заключается в построении независимой контактной границы – средней линии. В таком случае можно отойти от обязательного определения активного и пассивного тела, использующегося во многих методах для решения контактных задач, которое часто является искусственным и, как правило, случайным. Кроме того независимая контактная граница позволяет произвольно выбирать способ и точность аппроксимации множителей Лагранжа.

Для данного подхода используется следующий алгоритм. Для начала выбираются все точки, которые вступают в контакт – контактные точки. По ним строится некоторая средняя линия, являющаяся по сути независимой контактной границей. Вдоль этой средней линии вводятся множители Лагранжа, причем в любом количестве. Далее находятся сходственные точки для каждого тела по нормали к средней линии и по ним осуществляется взятие контактного интеграла (32).

3. Результаты численных расчетов

В данном разделе для координат будут использованы следующие обозначения $x_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow y$.

Рассмотрим следующую тестовую двумерную задачу (она схематично изображена на рис. 2.а): второе тело с шириной (размер по оси x) 3 и высотой (размер по оси y) y_2 стоит на первом теле с шириной 6 и высотой y_1 . С левой стороны тела закреплены по горизонтали, а нижнее тело снизу закреплено по

вертикали. На верхнее тело действует равномерно распределенная нагрузка, равная 10.

Приведем результаты решения серии контактных задач, в которых свойства материалов тел меняются в широком диапазоне. Базовый материал имеет следующие параметры: модуль Юнга $E_0=70000$, коэффициент Пуассона $\nu=0.3$. В дальнейшем материал второго тела всегда совпадал с базовым, а параметра материала первого тела варьировались.

При решении задач контактного взаимодействия двух тел часто рассматриваемую пару разделяют на активное и пассивное тело (критерии разделения могут быть разными). В рамках данной работы будем использовать указанные термины, ориентируясь на следующие рассуждения: второе тело, к которому непосредственно приложена силовая нагрузка, и которое под действием этой нагрузки вдавливается в первое тело, будем называть активным; а первое тело, на которое действует только контактное давление со стороны второго тела, будем называть пассивным. Заметим, что указанные рассуждения не применимы непосредственно для большого класса задач, в которых к обоим телам приложены некоторые силовые нагрузки (кроме контактных). В то же время, даже в подобных задачах чаще всего в рассматриваемой паре тел можно выделить в качестве активного то тело, для которого приложенная нагрузка является более интенсивной.

В рамках данной работы моделировалась ситуация, когда внешняя силовая нагрузка приложена только к активному телу; пассивное тело имеет участок, закрепленный в направлении нормали к контактной поверхности, и деформируется только под воздействием контактных сил. В силу постановки задачи точное значение интегральных контактных сил, приложенных к контактным поверхностям тел, заранее известно: оно должно по модулю совпасть со значением интегральной силы, приложенной к верхней поверхности второго тела. Во всех описанных ниже расчетах значения полученных интегральных контактных сил отличались от заданной величины не более чем на 0.5%.

Значительное влияние на скорость сходимости метода Шварца оказывает выбранное начальное приближение. Во всех расче-

тах (если это не оговорено особо) начальное приближение строилось по принципу, описанному в [20], который для рассматриваемой задачи заключается в следующем: на первом этапе нулевой итерации на контактную поверхность нижнего тела проецируется давление, приложенное к верхней поверхности второго тела. После этого для первого тела решаются уравнения равновесия и рассчитывается поле перемещений. На втором этапе нулевой итерации в узлах сетки, расположенных на контактной поверхности второго тела, ставятся кинематические условия, причем значения перемещений соответствуют величинам перемещений в сходственных (для данных узлов) точках на контактной поверхности первого тела. После этого применяется алгоритм метода Шварца с чередованием силовых и кинематических условий.

Во всех расчетах, если это не оговорено особо, использовалась равномерная прямоугольная сетка с шагом $h = 0.125$ и конечные элементы первого порядка.

Основная цель проводимых расчетов состоит в исследовании влияния параметров $\gamma_{1,m}^{2n-1}$ и $\gamma_{2,m}^{2n-1}$ на сходимость итерационного процесса. По итогам исследования будет предложена эмпирическая формула для значений данных параметров.

В рамках данной работы принималось, что данные параметры являются постоянными для каждого тела, т.е. $\gamma_{1,m}^{2n-1} = \gamma_1$, $\gamma_{2,m}^{2n-1} = \gamma_2$. Согласно (25) $\gamma_2 = 1/\gamma_1$, поэтому в дальнейшем приведены данные только для γ_1 (для пассивного тела). Итерационные параметры $\alpha_{1,m}^0$ задавались с помощью формулы

$$\alpha_{1,m}^0 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1}. \quad (33)$$

3.1. Расчеты для различных характерных размеров контактирующих тел (первая серия)

В первой серии расчетов исследовалось влияние итерационных параметров на сходимость итерационного решения кон-

тактной задачи двух тел, выполненных из одного материала (базового), для различных характерных размеров тел по высоте.

В первом расчете высота первого тела бралась значительно меньше высоты второго: $y_1=1$, $y_2=5$; во втором расчете тела имели одинаковую высоту: $y_1=3$, $y_2=3$; в третьем расчете высота первого тела бралась значительно больше высоты второго: $y_1=5$, $y_2=1$.

Во всех расчетах, проведенных в первой серии, начальное приближение, полученное с помощью описанного выше алгоритма, оказывалось достаточно близким к итоговому распределению перемещений u_y вдоль контактной границы. Но, несмотря на это, скорость сходимости итерационного процесса существенно изменялась для разных значений γ_1 .

В таблицах 1–3 приведены максимальные относительные ошибки для u_y между двумя соседними итерациями для различных значений параметра γ_1 после различного количества проведенных итераций (но каждый раз – после силовой итерации). Поскольку процесс начинается с нулевой итерации, то количество итераций на единицу больше текущего номера.

В дальнейшем при оценке оптимальности значения γ_1 будем руководствоваться следующими соображениями: для большинства практических задач в качестве приемлемого уровня относительной ошибки можно принять значение порядка 1%, поэтому будем следить, сколько итераций понадобилось до достижения подобного уровня ошибки и какова при этом средняя скорость сходимости итерационного процесса.

Табл. 1. Максимальные ошибки по перемещениям: $y_1=1$, $y_2=5$.

Значение γ_1	Максимальные относительные ошибки по перемещениям				
	1-я итер.	3-я итер.	5-я итер.	7-я итер.	11-я итер.
1.5	0.36	0.38	0.31	0.46	0.65
1.0	0.32	0.16	$9.5 \cdot 10^{-2}$	$6.7 \cdot 10^{-2}$	$3.3 \cdot 10^{-2}$
0.5	0.24	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$
0.25	0.18	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$3.1 \cdot 10^{-3}$	$9.2 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$
0.1	0.20	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$8.0 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$

В первом расчете при значениях $\gamma_1 > 1$ итерационный процесс расходился. При значении $\gamma_1 = 1$ уровень ошибки в 1% достигался на 19-й итерации. Для значения $\gamma_1 = 0.5$ после 5-й итерации ошибка равна $4.1 \cdot 10^{-3}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 58.5 раз. Для значения $\gamma_1 = 0.25$ после 5-й итерации ошибка равна $3.1 \cdot 10^{-3}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 57.5 раз. Для значения $\gamma_1 = 0.1$ после 5-й итерации ошибка равна $1.4 \cdot 10^{-2}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 13.6 раз. Из приведенных данных видно, что значения $\gamma_1 = 0.25$ и 0.5 являются оптимальными в смысле скорости сходимости итерационного процесса (для выбранного начального приближения).

Во втором расчете при значении $\gamma_1 = 1.5$ уровень ошибки в 1% достигался на 13-й итерации. Для значения $\gamma_1 = 1$ после 5-й итерации ошибка равна $1.3 \cdot 10^{-2}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 19 раз. Для значения $\gamma_1 = 0.5$ после 5-й итерации ошибка равна $2 \cdot 10^{-3}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 90 раз. Для значения $\gamma_1 = 0.25$ после 5-й итерации ошибка равна $2.1 \cdot 10^{-3}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 71.5 раз. Для значения $\gamma_1 = 0.05$ после 5-й итерации ошибка равна $2.2 \cdot 10^{-2}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 7.7 раз. Из приведенных данных видно, что значения $\gamma_1 = 0.25$ и 0.5 по-прежнему являются оптимальными в смысле скорости сходимости итерационного процесса (для выбранного начального приближения).

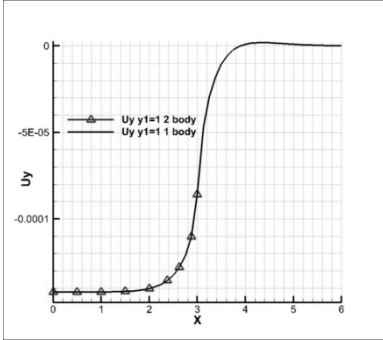
Табл. 2. Максимальные ошибки по перемещениям: $y_1=3, y_2=3$.

Значение γ_1	Максимальные относительные ошибки по перемещениям				
	1-я итер.	3-я итер.	5-я итер.	7-я итер.	11-я итер.
1.5	0.28	0.16	$7.9 \cdot 10^{-2}$	$5.3 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$
1.0	0.25	$6.0 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$5.7 \cdot 10^{-3}$	$6.5 \cdot 10^{-4}$
0.5	0.18	$9.3 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$9.5 \cdot 10^{-4}$	$3.8 \cdot 10^{-4}$
0.25	0.15	$9.9 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$6.5 \cdot 10^{-4}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$
0.05	0.17	$5.3 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$

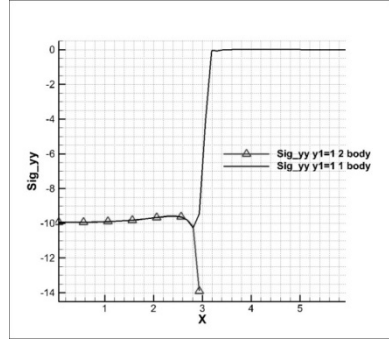
Табл. 3. Максимальные ошибки по перемещениям: $y_1=5, y_2= 1$.

Значение γ_1	Максимальные относительные ошибки по перемещениям				
	1-я итер.	3-я итер.	5-я итер.	7-я итер.	11-я итер.
1.5	$8.4 \cdot 10^{-2}$	$3.3 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$7.1 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$
1.0	$7.1 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-4}$
0.5	$4.9 \cdot 10^{-2}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$
0.25	$4.0 \cdot 10^{-2}$	$3.0 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$3.0 \cdot 10^{-4}$
0.05	$4.7 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$

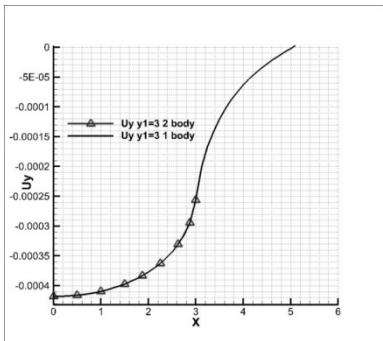
В третьем расчете начальное приближение оказывается еще ближе к итоговому, чем в предыдущих расчетах. Для значения $\gamma_1 = 1.5$ после 5-й итерации ошибка равна $1.4 \cdot 10^{-2}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 5.8 раз. Для значения $\gamma_1 = 1$ после 3-й итерации ошибка равна 10^{-2} , при этом за 2 итерации (с первой по третью) ошибка уменьшилась в 7 раз. Для значения $\gamma_1 = 0.5$ после 3-й итерации ошибка равна $3.4 \cdot 10^{-3}$, при этом за 2 итерации (с первой по третью) ошибка уменьшилась в 14 раз. Для значения $\gamma_1 = 0.25$ после 3-й итерации ошибка равна $2.1 \cdot 10^{-3}$, при этом за 2 итерации (с первой по третью) ошибка уменьшилась в 13 раз. Для значения $\gamma_1 = 0.05$ после 3-й итерации ошибка равна $1.1 \cdot 10^{-2}$, при этом за 2 итерации (с первой по третью) ошибка уменьшилась в 4.3 раз. Из приведенных данных видно, что значения $\gamma_1 = 0.25$ и 0.5 по-прежнему являются оптимальными в смысле скорости сходимости итерационного процесса (для выбранного начального приближения).



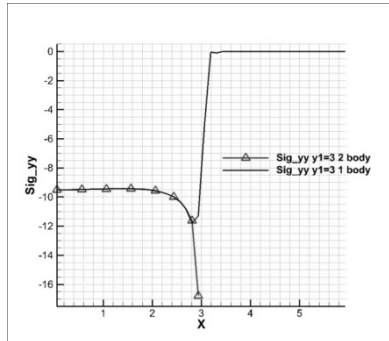
а: $u_y (y_1=1, y_2=5)$



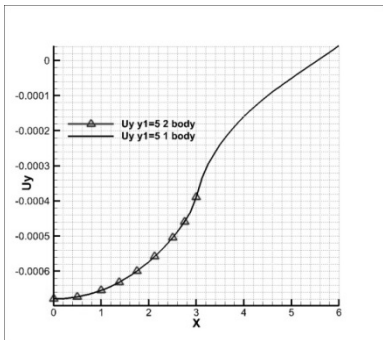
б: $\sigma_{yy} (y_1=1, y_2=5)$



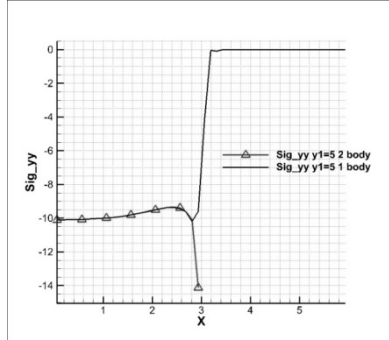
в: $u_y (y_1=3, y_2=3)$



г: $\sigma_{yy} (y_1=3, y_2=3)$



д: $u_y (y_1=5, y_2=1)$



е: $\sigma_{yy} (y_1=5, y_2=1)$

Рис. 3. Графики перемещения u_y и компоненты напряжения σ_{yy} вдоль контактной границы для первой серии расчетов.

На рис. 3 показаны графики распределения перемещения u_y и компоненты напряжения σ_{yy} вдоль контактной границы для различных расчетов (напряжение считалось в центрах ячеек, примыкающих к границе). Графики с маркерами соответствуют второму телу, а графики без маркеров – первому телу.

Из рисунков видно, что перемещения и напряжения на контактных границах совпадают с приемлемой точностью. Отличия в графиках напряжений вблизи угловой точки связаны с тем, что в данной точке находится концентратор напряжений (аналитическое значение давления здесь стремится к бесконечности), поэтому полученные значения напряжений в ее окрестности очень чувствительны к использованной сетке (при этом интегральная контактная сила остается неизменной).

В то же время графики контактных давлений, которые в проведенных расчетах отнесены к поверхностным узлам, после силовой итерации всегда совпадают с высокой точностью. Это совпадение заложено в выбранный вариант метода Шварца для совпадающих сеток (если сетки значительно отличаются, то в давлениях возможны локальные несовпадения, но интегральные силы будут равны).

На рис. 4 показаны вместе графики распределения перемещения u_y для второго тела вдоль контактной границы для всех расчетов в первой серии.

На рис. 5 показаны аналогичные графики для компоненты тензора напряжений σ_{yy} .

Рассмотрим влияние выбранного значения параметра γ_1 на итоговое распределение величин. На рис. 6 показаны графики u_y и σ_{yy} вдоль контактной границы второго тела ($y_1=3, y_2=3$) после 19-й итерации для расчетов, в которых параметр γ_1 принимал значения 1, 0.5, 0.25. Из рисунка видно, что рассмотренные величины сошлись к одним и тем же значениям для всех γ_1 .

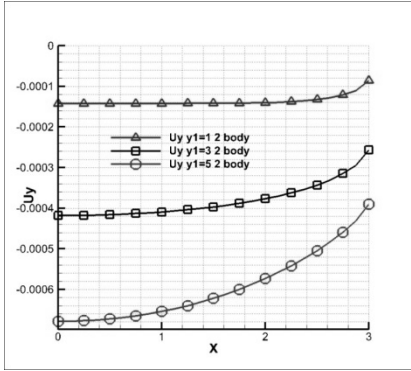


Рис. 4. Графики перемещения u_y для второго тела для первой серии расчетов.

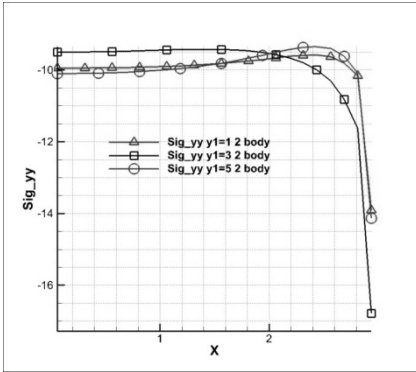
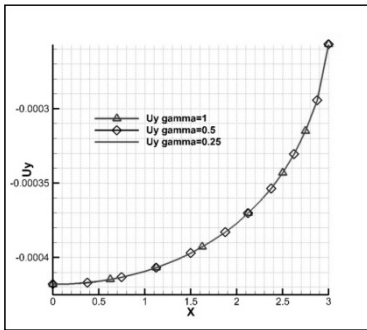
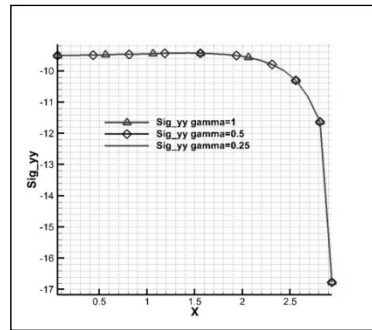


Рис. 5. Графики напряжений σ_{yy} для второго тела для первой серии расчетов.



а: u_y



б: σ_{yy}

Рис. 6. Графики перемещения u_y и компоненты напряжения σ_{yy} вдоль контактной границы для различных значений параметра γ_1 .

На рис. 7 показаны графики u_y и σ_{yy} вдоль контактной границы второго тела ($y_1=3, y_2=3, \gamma_1=1$) для различных итераций. Из рисунка видно, что нулевое приближение для u_y оказалось весьма удачным, поэтому уже после 3-й итерации графики перемещений и напряжений практически сошлись к итоговым величинам. Ниже будет дополнительно рассмотрен вопрос о влиянии начального приближения на сходимость итерационного процесса.

По итогам проведенной серии расчетов можно сделать вывод, что использование для пассивного тела значения параметра $\gamma_1=0.25$ (или $\gamma_1=0.5$) позволило существенно ускорить сходимость итерационного процесса по сравнению с расчетами, в которых $\gamma_1=1$ (для определения итерационных параметров $\alpha_{1,m}^{2n-1}$ по сути применяется формула (24)).

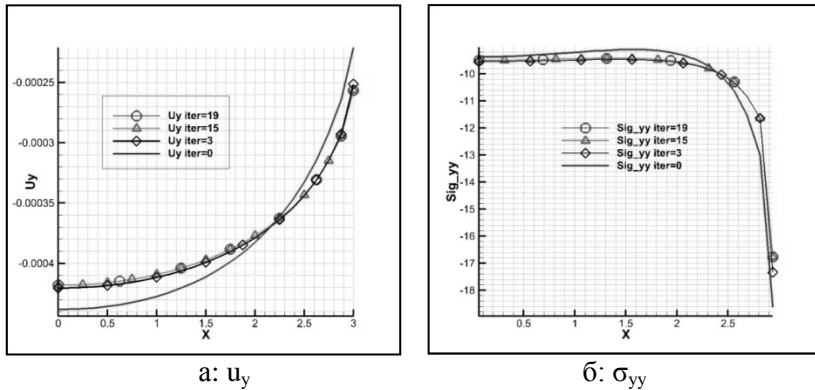


Рис. 7. Графики перемещения u_y и компоненты напряжения σ_{yy} вдоль контактно границы второго тела для различных итераций ($\gamma_1=1$).

3.2. Расчеты контактного взаимодействия более мягкого тела, вдавливаемого в более жесткое тело (вторая серия)

Во второй серии расчетов брались тела с одинаковой высотой ($y_1=3, y_2=3$). Модуль Юнга для второго тела совпадает с базовым $E_2= E_0$, а модуль Юнга для первого тела принимает следующие значения: $E_1= 3 E_0, E_1= 10 E_0, E_1= 100 E_0, E_1= 1000 E_0$.

Во всех расчетах, проведенных во второй серии, начальное приближение, полученное с помощью описанного выше алгоритма, оказывалось близким к итоговому распределению перемещений u_y вдоль контактной границы. Но, несмотря на эту близость, для определенного диапазона значений γ_1 все равно наблюдалась расходимость или сходимость только до определенного (весьма значительного) уровня ошибки итерационного процесса.

В таблицах 4–7 приведены максимальные относительные ошибки для u_y между двумя соседними итерациями для различных значений параметра γ_1 после различного количества проведенных итераций (но каждый раз – после силовой итерации).

В первом расчете при значениях $\gamma_1 \geq 1$ итерационный процесс расходился. Для значения $\gamma_1 = 0.5$ ошибка порядка 1% достигалась на 11-й итерации. Для значения $\gamma_1 = 0.33$ после 5-й итерации ошибка равна $6 \cdot 10^{-3}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 23 раза. Для значения $\gamma_1 = 0.15$ после 5-й итерации ошибка равна $3.6 \cdot 10^{-4}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 220 раз. Для значения $\gamma_1 = 0.025$ после 5-й итерации ошибка равна $8.3 \cdot 10^{-4}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 80 раз. Из приведенных данных видно, что значение $\gamma_1 = 0.15$ является оптимальным в смысле скорости сходимости итерационного процесса (среди рассмотренных вариантов, для выбранного начального приближения).

Табл. 4. Максимальные ошибки по перемещениям: $E_1 = 3 E_0$.

Значение γ_1	Максимальные относительные ошибки по перемещениям				
	1-я итер.	3-я итер.	5-я итер.	7-я итер.	11-я итер.
1.0	0.26	0.56	0.84	1.31	0.99
0.5	0.18	$9.7 \cdot 10^{-2}$	$5.3 \cdot 10^{-2}$	$3.0 \cdot 10^{-2}$	$9.6 \cdot 10^{-3}$
0.33	0.14	$2.8 \cdot 10^{-2}$	$6.0 \cdot 10^{-3}$	$8.8 \cdot 10^{-4}$	$4.8 \cdot 10^{-4}$
0.15	$7.9 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	$4.8 \cdot 10^{-4}$
0.025	$6.6 \cdot 10^{-2}$	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$8.3 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$

Во втором расчете при значениях $\gamma_1 \geq 0.5$ итерационный процесс расходился. При значении $\gamma_1 = 0.25$ наблюдалась очень медленная сходимость. Для значения $\gamma_1 = 0.1$ после 5-й итерации ошибка равна $1.3 \cdot 10^{-3}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 44.5 раз. Для значения $\gamma_1 = 0.01$ после 5-й итерации ошибка равна $1.1 \cdot 10^{-4}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 191 раз. Для значения $\gamma_1 = 0.001$ после 5-й итерации ошибка равна $4.3 \cdot 10^{-5}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 1535 раз. Из приведенных данных видно, что значение $\gamma_1 = 0.001$ является оптимальным в смысле скорости сходимости итерационного процесса (среди рассмотренных вариантов, для выбранного начального приближения).

Табл. 5. Максимальные ошибки по перемещениям: $E_1 = 10 E_0$.

Значение γ_1	Максимальные относительные ошибки по перемещениям				
	1-я итер.	3-я итер.	5-я итер.	7-я итер.	11-я итер.
0.5	0.18	0.81	0.77	3.26	1.04
0.25	0.12	0.10	$8.7 \cdot 10^{-2}$	$7.5 \cdot 10^{-2}$	$5.7 \cdot 10^{-2}$
0.1	$5.7 \cdot 10^{-2}$	$4.9 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-4}$	$7.4 \cdot 10^{-4}$
0.01	$2.1 \cdot 10^{-2}$	$5.3 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$
0.001	$6.6 \cdot 10^{-2}$	$8.1 \cdot 10^{-4}$	$4.3 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$

Табл. 6. Максимальные ошибки по перемещениям: $E_1 = 100 E_0$.

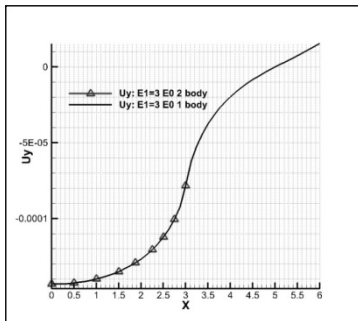
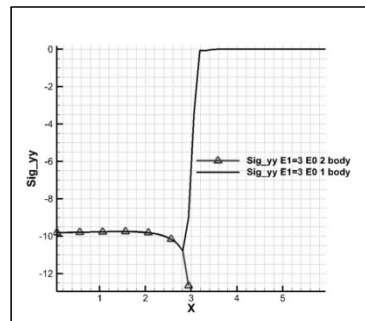
Значение γ_1	Максимальные относительные ошибки по перемещениям				
	1-я итер.	3-я итер.	5-я итер.	7-я итер.	11-я итер.
0.1	$6.3 \cdot 10^{-2}$	0.15	0.28	1.19	1.04
0.025	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$3.8 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$
0.01	$7.2 \cdot 10^{-3}$	$7.8 \cdot 10^{-4}$	$8.7 \cdot 10^{-4}$	$8.7 \cdot 10^{-4}$	$8.7 \cdot 10^{-4}$
0.001	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$9.0 \cdot 10^{-5}$	$9.1 \cdot 10^{-5}$	$9.1 \cdot 10^{-5}$	$9.1 \cdot 10^{-5}$
0.0001	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$9.4 \cdot 10^{-6}$	$9.6 \cdot 10^{-6}$	$9.6 \cdot 10^{-6}$	$9.6 \cdot 10^{-6}$

Табл. 7. Максимальные ошибки по перемещениям: $E_1 = 1000 E_0$.

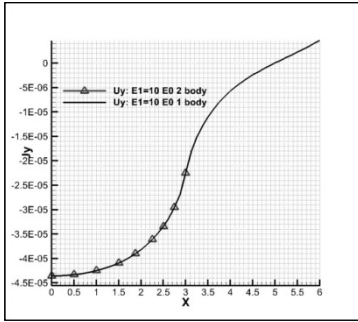
Значение γ_1	Максимальные относительные ошибки по перемещениям				
	1-я итер.	3-я итер.	5-я итер.	7-я итер.	11-я итер.
0.1	0.12	11.3	5.22	1.29	6.22
0.01	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$4.6 \cdot 10^{-3}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$6.6 \cdot 10^{-3}$	$6.7 \cdot 10^{-3}$
0.001	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$8.9 \cdot 10^{-4}$	$8.9 \cdot 10^{-4}$	$8.9 \cdot 10^{-4}$	$8.9 \cdot 10^{-4}$
0.0001	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$9.4 \cdot 10^{-5}$	$9.4 \cdot 10^{-5}$	$9.4 \cdot 10^{-5}$	$9.4 \cdot 10^{-5}$

В третьем и четвертом расчетах при значениях $\gamma_1 \geq 0.1$ итерационный процесс расходился. Для других значений γ_1 начальное приближение оказывалось настолько близким к итоговому, что уже после 1-й итерации максимальная ошибка не превышала 1%, а к 3-й итерации процесс сходимости практически завершился. Из приведенных данных видно, что значение $\gamma_1 = 0.0001$ является оптимальным (среди рассмотренных вариантов, для выбранного начального приближения).

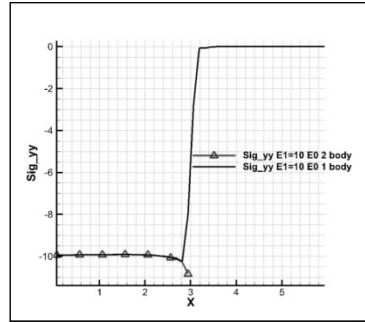
На рис. 8 показаны графики распределения перемещения u_y и компоненты напряжения σ_{yy} вдоль контактной границы для различных расчетов (напряжение считалось в центрах ячеек, примыкающих к границе). Графики с маркерами соответствуют второму телу, а графики без маркеров – первому телу. Из рисунков видно, что перемещения и напряжения на контактных границах совпадают с приемлемой точностью.

а: $u_y (E_1=3E_0)$ б: $\sigma_{yy} (E_1=3E_0)$

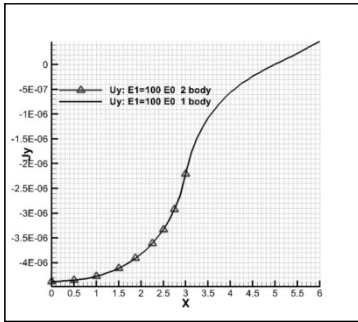
Исследование сходимости метода Шварца при решении плоской контактной задачи



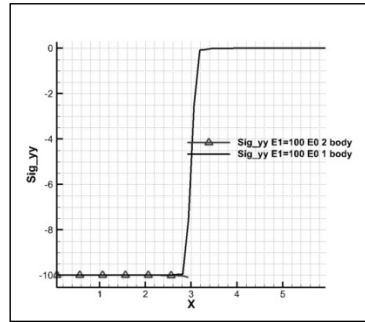
в: $u_y (E_1 = 10 E_0)$



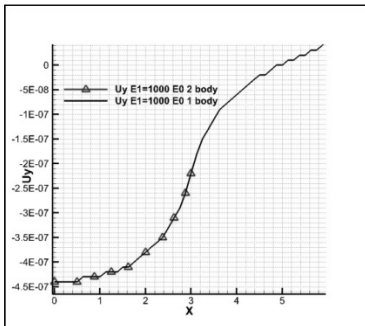
г: $\sigma_{yy} (E_1 = 10 E_0)$



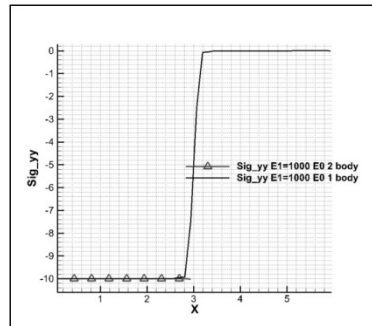
д: $u_y (E_1 = 100 E_0)$



е: $\sigma_{yy} (E_1 = 100 E_0)$



ж: $u_y (E_1 = 1000 E_0)$



з: $\sigma_{yy} (E_1 = 1000 E_0)$

Рис. 8. Графики перемещения u_y и компоненты напряжения σ_{yy} вдоль контактной границы (вторая серия расчетов).

На рис. 9 показаны вместе графики распределения перемещения u_y для второго тела вдоль контактной границы для всех расчетов. Кроме того, приведен график для расчета, в котором нижняя поверхность второго тела жестко закреплена по вертикали (соответственно $u_y=0$). Полученная задача уже не является контактной (она решена за одну итерацию и нижнее тело не участвует в расчете), точнее ее можно трактовать как контакт верхнего тела с абсолютно жестким нижним телом.

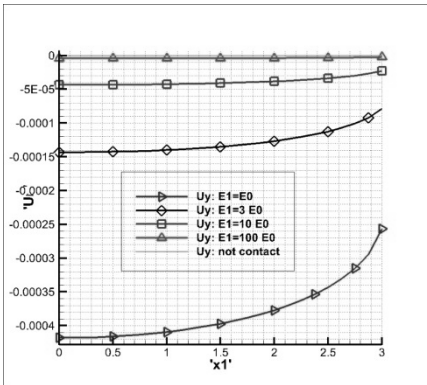


Рис. 9. Графики перемещения u_y для второго тела для второй серии расчетов.

На рис. 10–13 показаны аналогичные графики для перемещения u_x и компонент тензора напряжений σ_{yy} и σ_{xx} .

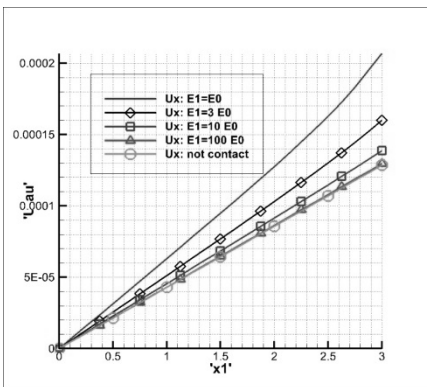


Рис. 10. Графики перемещения u_x для второго тела для второй серии расчетов.

Исследование сходимости метода Шварца при решении плоской контактной задачи

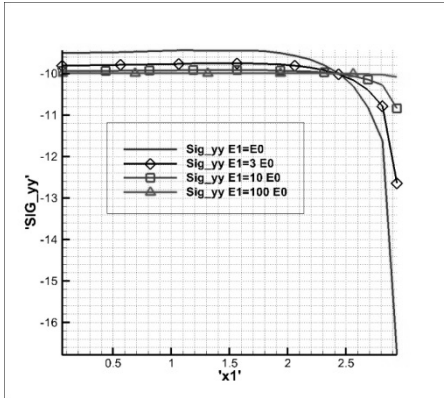


Рис. 11. Графики напряжения σ_{yy} для второго тела для второй серии расчетов ($E_1 = E_0$, $E_1 = 3 E_0$, $E_1 = 10 E_0$, $E_1 = 100 E_0$).

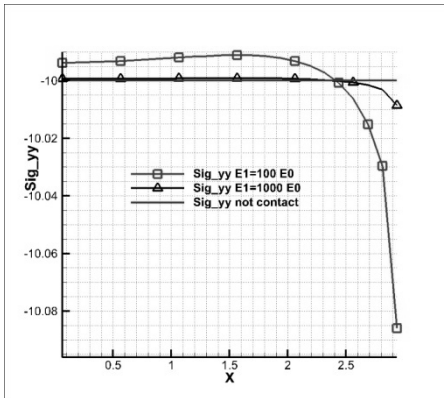


Рис. 12. Графики напряжения σ_{yy} для второго тела для второй серии расчетов (расчет с одним телом, $E_1 = 100 E_0$, $E_1 = 1000 E_0$).

Из приведенных графиков видно, что чем жестче становится первое тело по сравнению со вторым, тем ближе становятся графики, полученные при решении контактной задачи, к графикам, полученным в расчете с закреплением второго тела. Для случая, когда $E_1 = 1000 E_0$, соответствующие графики визуально неотличимы (поэтому на части рисунков графики для $E_1 = 1000 E_0$ отсутствуют).

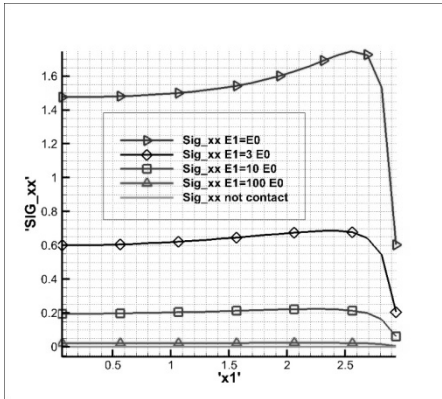


Рис. 13. Графики напряжения σ_{xx} для второго тела для второй серии расчетов.

По итогам проведенной серии расчетов для пассивного тела можно вывести следующую формулу для параметра γ_1 , обеспечивающую достаточно быструю сходимость для случая, когда активное тело является более мягким по сравнению с пассивным (для всего рассмотренного диапазона значений модуля Юнга):

$$\gamma_1 = 0.25 \left(\frac{E_2}{E_1} \right)^{1.5}. \quad (34)$$

В качестве показателя степени можно также взять значение 2 (для каких-то случаев использование соответствующего γ_1 может ускорить процесс сходимости).

Для всех проведенных расчетов на совпадающих сетках итоговые распределения перемещений и напряжений, полученные при использовании разных значений γ_1 , визуально неотличимы друг от друга.

3.3. Исследование влияния начального приближения на процесс сходимости

Рассмотрим влияние выбора начального приближения на процесс сходимости.

В данной серии расчетов брались тела с одинаковой высотой ($y_1=3$, $y_2=3$). Модуль Юнга для второго тела совпадает с базовым $E_2=E_0$.

Сначала рассмотрим задачу, в которой $E_1 = 10 E_0$. Среднее значение u_y на контактной поверхности, полученное в предыдущем расчете (рис. 8.в), составляет $-3.5 \cdot 10^{-5}$, максимальное (по модулю) перемещение $u_y = -4.5 \cdot 10^{-5}$.

В таблице 8 показаны максимальные ошибки для u_y , полученные для различных γ_1 при использовании начального приближения $u_y^0 = -10^{-5}$ (в 4.5 раза меньше, чем максимальное итоговое перемещение).

В данном расчете для значения $\gamma_1 = 0.1$ после 5-й итерации ошибка равна $5.8 \cdot 10^{-3}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 130 раз. Для значения $\gamma_1 = 0.01$ после 5-й итерации ошибка равна $1.1 \cdot 10^{-3}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 700 раз. Для значения $\gamma_1 = 0.001$ после 5-й итерации ошибка равна $6.6 \cdot 10^{-4}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 1167 раз.

Табл. 8. Максимальные ошибки по перемещениям: $E_1 = 10 E_0$, $u_y^0 = -10^{-5}$.

Значение γ_1	Максимальные относительные ошибки по перемещениям				
	1-я итер.	3-я итер.	5-я итер.	7-я итер.	11-я итер.
0.5	0.91	0.27	0.39	3.54	1.56
0.25	0.87	$5.5 \cdot 10^{-5}$	$3.7 \cdot 10^{-2}$	$2.8 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$
0.1	0.75	$6.3 \cdot 10^{-2}$	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-4}$
0.01	0.77	$3.3 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$
0.001	0.77	$2.3 \cdot 10^{-2}$	$6.6 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$

В таблице 9 показаны максимальные ошибки для u_y , полученные для различных γ_1 при использовании начального приближения $u_y^0 = -2 \cdot 10^{-4}$ (в 4.5 раза больше, чем максимальное итоговое перемещение).

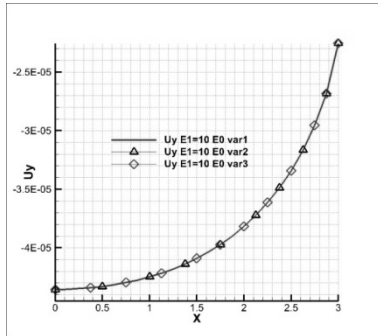
В данном расчете для значения $\gamma_1 = 0.1$ после 5-й итерации ошибка равна $2 \cdot 10^{-2}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 1720 раз. Для значения $\gamma_1 = 0.01$ после 5-й итерации ошибка равна $1.4 \cdot 10^{-3}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 5278 раз. Для значения $\gamma_1 = 0.001$ после 5-й итерации ошибка равна $8.3 \cdot 10^{-4}$, при этом за 4 итерации (с первой по пятую) ошибка уменьшилась в 9626 раз.

Табл. 9. Максимальные ошибки по перемещениям: $E_1 = 10 E_0$, $u_y^0 = -2 \cdot 10^{-4}$.

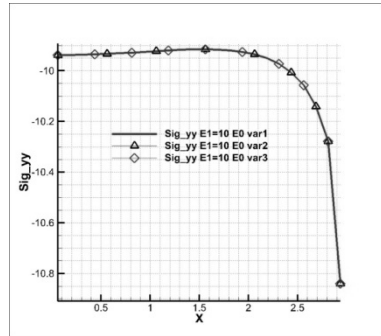
Значение γ_1	Максимальные относительные ошибки по перемещениям				
	1-я итер.	3-я итер.	5-я итер.	7-я итер.	11-я итер.
0.5	1.71	0.83	0.17	0.93	2.56
0.25	3.26	0.85	0.21	0.15	0.11
0.1	34.4	0.82	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$9.4 \cdot 10^{-3}$	$8.1 \cdot 10^{-4}$
0.01	7.39	$6.6 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$
0.001	7.99	$1.25 \cdot 10^{-2}$	$8.3 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$

Если сравнивать величины ошибок, приведенные в таблицах 8-9, с величинами ошибок в таблице 5 (для случая хорошего начального приближения), то видно, что общие тенденции сохраняются: для значения $\gamma_1=0.5$ процесс расходится, для $\gamma_1=0.25$ наблюдается медленная сходимость, значение $\gamma_1=0.001$ является оптимальным (среди рассмотренных). Естественно, использование менее удачного начального приближения приводит к большим ошибкам после нескольких первых итераций (например, после 3-й). Нужно отметить, что при выборе нулевого приближения лучше недооценить величину перемещения (по модулю), чем переоценить его (ошибки после 3-й итерации для $u_y^0 = -2 \cdot 10^{-4}$, гораздо больше, чем ошибки, полученные для $u_y^0 = -10^{-5}$).

На рис. 14 показаны графики распределения перемещения u_y и компоненты напряжения σ_{yy} вдоль контактной границы второго тела для расчетов с различными начальными приближениями (в первом варианте использовалось начальное приближение, полученное после проекции силовой нагрузки на нижнее тело, во втором варианте начальное приближение $u_y^0 = -10^{-5}$, в третьем варианте начальное приближение $u_y^0 = -2 \cdot 10^{-4}$). Из рисунка видно, что для всех начальных приближений решения сошлись к одним и тем же распределениям перемещений и напряжений.



а: u_y ($E_1 = 10 E_0$)



б: σ_{yy} ($E_1 = 10 E_0$)

Рис. 14. Графики перемещения u_y и компоненты напряжения σ_{yy} вдоль контактной границы для расчетов с различными начальными приближениями.

3.4. Сравнение результатов, полученных с помощью метода Шварца и метода множителей Лагранжа (четвертая серия расчетов)

Проведем сравнение результатов, полученных с помощью реализации метода Шварца, описанной в параграфе 2.1, и результатов, полученных с помощью реализации метода множителей Лагранжа, описанной в параграфе 2.2.

В данной серии расчетов брались тела с одинаковой высотой ($y_1=3$, $y_2=3$). Модуль Юнга для второго тела совпадает с базовым $E_2= E_0$. Модуль Юнга для первого тела принимает следующие значения: $E_1= 3 E_0$, $E_1= 10 E_0$, $E_1= 100 E_0$, $E_1= 1000 E_0$.

В отличие от расчетов во второй серии, рассмотрим плоско деформированную задачу, для которой $\epsilon_{zz} = 0$, а σ_{zz} определяется по закону Гука (4).

В расчетах с использованием метода Лагранжа применялись конечные элементы 2 порядка на треугольной сетке (шаг сетки 0.125). При отрисовке графиков напряжений, принималось, что напряжения являются кусочно-постоянными в пределах треугольника, поэтому на графиках видны характерные «полочки».

В расчетах с использованием метода Шварца параметр γ_1 определялся по формуле (34).

На рис. 15 показаны перемещения и напряжения для расчета с $E_1 = 10 E_0$. На рис. 16 показаны перемещения и напряжения для расчета с $E_1 = 100 E_0$.

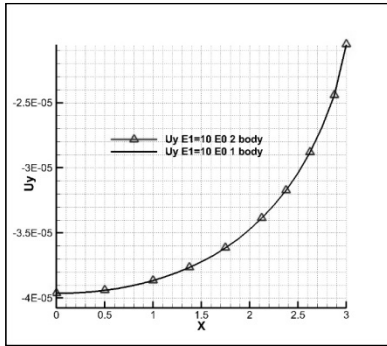
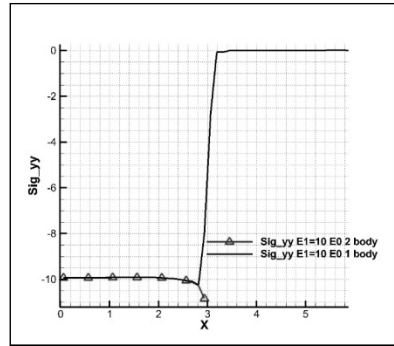
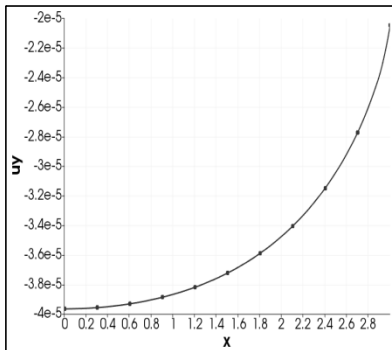
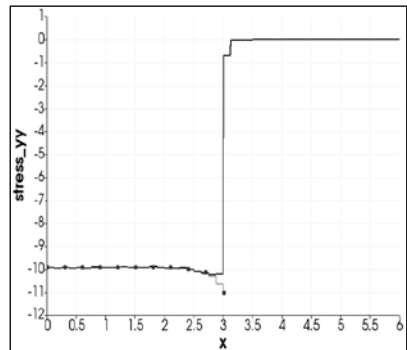
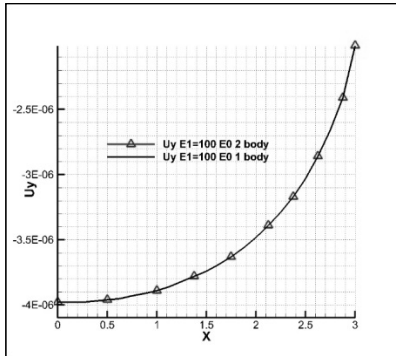
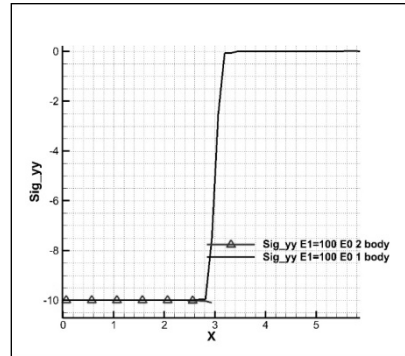
а: u_y (Шварц)б: σ_{yy} (Шварц)в: u_y (Лагранж)г: σ_{yy} (Лагранж)

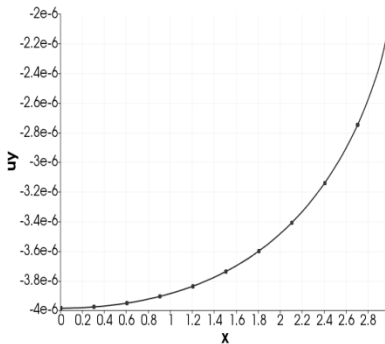
Рис. 15. Графики перемещения u_y и компоненты напряжения σ_{yy} вдоль контактной границы (четвертая серия расчетов, $E_1 = 10 E_0$).



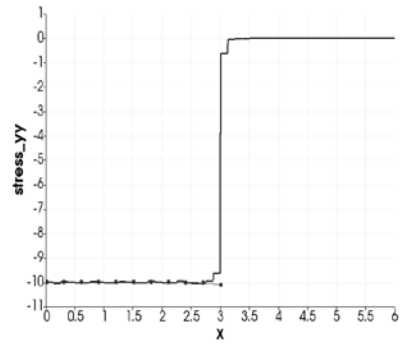
а: u_y (Шварц)



б: σ_{yy} (Шварц)



в: u_y (Лагранж)



г: σ_{yy} (Лагранж)

Рис. 16. Графики перемещения u_y и компоненты напряжения σ_{yy} вдоль контактной границы (четвертая серия расчетов, $E_1 = 100 E_0$).

Результаты расчетов, оказались достаточно близкими друг к другу, что может служить подтверждением правильности полученных величин.

Заключение

Приведена достаточно общая постановка задачи механического контактного взаимодействия двух упругих тел. Дано описание конечно-элементной реализации итерационного метода

Шварца. Приведены различные аналитические соотношения, которые можно использовать для вычисления итерационных параметров. Продемонстрированы результаты нескольких серий расчетов, в которых менялись характерные размеры контактирующих тел и параметры материалов, из которых они сделаны. Показано, что в каждой из рассмотренных ситуаций характер сходимости итерационного процесса в значительной степени определялся выбранными значениями итерационных параметров. При этом существует диапазон значений, для которых наблюдалась расходимость итерационного процесса. На основании выполненных расчетов предложена эмпирическая формула для определения значений итерационных параметров, которые обеспечивают достаточно быструю сходимость итераций для рассмотренного класса задач.

Проведено сравнение результатов, полученных с помощью метода Шварца, и результатов, полученных с помощью реализации метода множителей Лагранжа с использованием независимой контактной поверхности. Сравнение показало, что результаты достаточно близки друг к другу, что может служить подтверждением правильности полученных величин.

Список литературы

1. *Галин Л.А.* Развитие теории контактных задач. – М.: Наука, 1976. 494 с.
2. *Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н.* Обзор контактных алгоритмов // Механика твердого тела. 2005. № 1. С. 45–87.
3. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. 540 с.
4. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. 392 с.
5. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. 351 с.
6. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. 512 с.
7. *Зарубин В.С., Станкевич И.В.* Расчет теплонапряженных конструкций. – М.: Машиностроение, 2005. 352 с.
8. *Котович А.В., Станкевич И.В.* Решение задач теории упругости методом конечных элементов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 106 с.
9. *Галанин М.П., Крупкин А.В., Кузнецов В.И., Лукин В.В., Новиков В.В., Родин А.С., Станкевич И.В.* Математическое моделирование термоупругоупластического контактного взаимодействия системы тел // *Mathematica Montisnigri*. 2014. Т. 30. С. 99 – 114.
10. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. – М.: Изд – во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.
11. *Бате К.-Ю.* Методы конечных элементов. М.: Физматлит, 2009. 1024 с.
12. *Ильин В.П.* Методы и технологии конечных элементов. Новосибирск: Изд. ИВМ и МГ СО РАН, 2007. 371 с.
13. *Станкевич И.В., Яковлев М.Е., Си Ту Хтет.* Разработка алгоритма контактного взаимодействия на основе альтернирующего метода Шварца // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки». Спецвыпуск: Прикладная математика. 2011 г. С. 134–141.

14. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. 608 с.

15. Toselli A., Widlund O. Domain Decomposition methods – Algorithms and Theory. Springer Berlin Heidelberg New York, 2005. 450 p.

16. Цвик Л.Б. Принцип поочередной непрерывности при решении задач теории поля по частям // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, Вып. 1. С. 74–77.

17. Цвик Л.Б. Принцип поочередности в задачах о сопряжении и контакте твердых деформируемых тел // Прикладная механика. 1980. Т. 16, № 1. С. 13–18.

18. Цвик Л.Б., Пинчук Л.М., Погодин В.К. К выбору параметров итерационных методов сопряжения решений в контактирующих телах // Проблемы прочности. 1985. № 9. С. 112–115.

19. Можаровский Н.С., Овсенко А.Б., Рудаков К.Н. Решение контактных задач методом конечных элементов. Сообщение 1. Описание алгоритма // Известия вузов. Машиностроение. 1989. № 6. С. 3–8.

20. Галанин М.П., Лукин В.В., Родин А.С., Станкевич И.В. Применение метода Шварца для моделирования контактного взаимодействия системы тел // Журнал вычислительной математики и вычислительной физики. 2015. Т. 55, № 8. С. 1429–1443.

21. Galanin M.P., Lukin V.V., Rodin A.S.. Use of various options of Schwarz method for the solution of a problem of contact interaction of elastic bodies // Journal of Physics: Conference Series, Institute of Physics (IOP). In press.

Отделение математических наук

М.П. Галанин, П.В. Глизнуцина,
В.В. Лукин, А.С. Родин

**Исследование сходимости метода Шварца
при решении плоской контактной задачи**

Формат 60 x 84/16
Гарнитура Таймс
Усл. печ. л. 2,3. Усл. изд. л. 1,2
Тираж 20 экз.

Издатель – Российская академия наук

Подготовлено к печати
Управлением научно-издательской деятельности РАН

Отпечатано на оборудовании Управления делами РАН

Издано в авторской редакции

Издается в соответствии с распоряжением
президиума Российской академии наук
от 24 октября 2017 г. №10106-765,
распространяется бесплатно.