

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Номер 5, 2021

---

---

## ПОЗДРАВЛЕНИЕ С ЮБИЛЕЕМ

Станислав Николаевич Васильев (к 75-летию со дня рождения) 3

---

## ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Стабилизация линейных динамических объектов по измеряемому  
с ошибкой состоянию при ограничениях на фазовые и управляющие переменные  
*Д. В. Баландин, А. А. Федюков* 5

---

## УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

Управляемое перемещение линейной цепочки осцилляторов  
*И. М. Ананьевский, А. И. Овсеевич* 18

---

## ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

Идентификация объектов при структурно-системном мониторинге обстановки  
*А. А. Кочкаров, С. Н. Разиньков, А. В. Тимошенко, В. А. Шевцов* 27

---

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Оптимизация траекторий переключаемых систем  
*А. С. Бортаковский, И. В. Урюпин* 33

Задача управления линейным выходом нелинейной неуправляемой  
стохастической дифференциальной системы по квадратичному критерию  
*А. В. Босов* 52

---

## УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Оптимальное управление продольным движением упругого стержня  
с помощью граничных сил  
*А. А. Гавриков, Г. В. Костин* 74

---

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Ветрогенератор типа Дарье–Магнуса: динамика и управление  
*Л. А. Климина* 91

Расчетный способ определения маршрутных корреспонденций пассажиропотоков  
при обработке данных входа и выхода  
*В. Н. Ембулаев* 105

---

## СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Анализ равнодолевого и уравнивающего распределения потоков  
при максимальной загрузке многопользовательской сети  
*Ю. Е. Малашенко, И. А. Назарова* 111

Распределение неоднородного набора ресурсов при составлении  
многопроцессорного расписания  
*М. Г. Фуругян* 120

Анализ надежности: от дерева отказов к дереву катастроф  
*Д. И. Кательников, Л. В. Пустыльник, А. П. Ротштейн* 128

---

## ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Интеллектуальная система для пошагового управления  
при оперативном перестроении расписания

*Р. А. Горбачев, Е. М. Захарова, И. С. Макаров, В. И. Цурков*

137

---

## РОБОТОТЕХНИКА

Доплеровская селекция наземных объектов, движущихся  
со случайными изменениями ориентации вектора скорости

*А. В. Бобин, В. М. Лисицын, К. В. Обросов, М. И. Сикачева*

143

Об управлении формой дождевальнoй машины кругового действия  
и устойчивости ее программного движения

*Е. С. Брискин, Я. В. Калинин, К. Ю. Лепетухин, А. В. Малолетов, Н. Г. Шаронов*

152

О математическом моделировании динамики многозвенных систем и экзоскелетов

*А. В. Борисов, И. Е. Каспирович, Р. Г. Мухарлямов*

162

---

---

---

---

**ПОЗДРАВЛЕНИЕ  
С ЮБИЛЕЕМ**

---

---

**СТАНИСЛАВ НИКОЛАЕВИЧ ВАСИЛЬЕВ  
(к 75-летию со дня рождения)**

DOI: 10.31857/S0002338821050152



5 июля 2021 г. исполнилось 75 лет со дня рождения доктору физико-математических наук, профессору, главному научному сотруднику ИПУ РАН, члену редколлегии журнала “Известия РАН. Теория и системы управления”, академику РАН Станиславу Николаевичу Васильеву.

Станислав Николаевич – автор и соавтор более 400 научных работ. Он внес мировой вклад во многие разрабатываемые им направления: математическая теория систем, динамика и управление в нелинейных и логико-динамических системах, автоматизация исследований, проектирования и управления, интеллектуальное управление, многокритериальное принятие решений, управление развитием эколого-экономических и других систем. Ученым разработаны методы редукции в анализе моделей разной природы, в том числе при наличии неопределенностей и возмущений, с приложениями к управлению механическими системами и группировкам движущихся объектов, к анализу динамики автоматных сетей и асинхронных переключаемых схем. Созданные С.Н.Васильевым логические методы представления и обработки знаний имеют широкое применение в приложениях к проблемам интеллектуализации систем управления, принятия решений и диагностики. Разработанные им методы векторной оптимизации с минимальными требованиями к априорной информации, методы гармонизации интересов сторон, в том числе в задачах регионального развития, легли в основу оригинальных программных продуктов. Научные достижения Станислава Николаевича Васильева отмечены его избранием в 1997 г. членом-корреспондентом РАН, а в 2006 г. – академиком РАН.

С.Н. Васильев неоднократно приглашался в ведущие зарубежные исследовательские центры и университеты для чтения лекций и работы в совместных научных проектах. На протяжении многих лет он руководил рядом научных тем, в том числе международными грантами, ведущей научной школой по устойчивости и управлению в гетерогенных моделях динамических и интеллектуальных систем. Ученый многократно приглашался с пленарными докладами на авторитетные российские и международные конференции и являлся председателем программных комитетов и организатором ряда таких конференций.

В 1976–2006 гг. Станислав Николаевич работал по совместительству профессором и заведующим кафедрами Иркутского и Бурятского госуниверситетов, заведующим (2007–2009 гг.) и профессором (2009–2016 гг.) кафедры МФТИ. В 2009 г. С.Н. Васильев основал кафедру “Физико-математических методов управления” на Физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, которой руководил до 2017 г. Им подготовлено более 20 кандидатов и докторов наук.

Научная, педагогическая и научно-организационная деятельность С.Н. Васильева отмечена званиями лауреата Государственной премии СССР в области науки и техники, Премии Правительства РФ в области образования, Премии Правительства РФ в области науки и техники и премий РАН в области фундаментальных исследований, орденами Почета, Дружбы и другими государственными и научными наградами, грамотами и благодарностями.

Дорогой Станислав Николаевич! Редколлегия и коллектив редакции нашего журнала поздравляют Вас с Юбилеем с пожеланиями здоровья, счастья, исполнения задуманных творческих планов!

ТЕОРИЯ СИСТЕМ  
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 681.51+519.711

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ  
ПО ИЗМЕРЯЕМОМУ С ОШИБКОЙ СОСТОЯНИЮ  
ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ФАЗОВЫЕ  
И УПРАВЛЯЮЩИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ<sup>1</sup>

© 2021 г. Д. В. Баландин<sup>а,\*</sup>, А. А. Федюков<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Нижегородский государственный ун-т им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

\*e-mail: dbalandin@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.03.2021 г.

После доработки 23.03.2021 г.

Принята к публикации 31.05.2021 г.

Рассматривается задача по оценке области допустимых начальных состояний линейной динамической системы, при которых линейный регулятор, полученный в задаче синтеза управления при ограничениях на фазовые и управляющие переменные без учета ошибки в измерении состояния, будет обеспечивать стабилизацию и в случае управления в форме линейной обратной связи по состоянию, измеряемому с ограниченной относительной ошибкой. Подход к решению основан на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Сформулированы достаточные условия для нахождения границ этой области. В качестве примеров рассмотрены задачи стабилизации перевернутого маятника и движения тела в электромагнитном подвесе. Приведены результаты численного моделирования.

DOI: 10.31857/S0002338821050036

**Введение.** Существуют разные способы построения регуляторов [1–4], в том числе способ, основанный на применении аппарата линейных матричных неравенств [1]. В задаче стабилизации по состоянию предполагают, что состояние системы доступно измерению и управление строят в виде линейной обратной связи по состоянию. С помощью современных программ (например, программ для инженерных расчетов Matlab) можно получить параметры такого регулятора. Вместе с тем возможна ситуация, когда полученное решение физически не может быть реализовано. Это связано с тем, что синтез линейных законов управления на основе линейной модели управляемого объекта может быть эффективно применен только там, где линейная модель более или менее адекватно описывает реальный объект, т.е. в ограниченной области фазового пространства. Заметим также, что в реальных условиях работы система должна находиться в области ее допустимых состояний. В связи с этим возникает необходимость учитывать в модели ограничение на фазовые переменные объекта и управление. Проблема синтеза управления при заданных ограничениях является сложной и актуальной в настоящее время [2, 3, 5].

В работах [2, 3] рассмотрена и решена задача синтеза управления по состоянию, которое обеспечивает стабилизацию динамического объекта при ограничениях на фазовые и управляющие переменные. В фазовом пространстве получена область допустимых начальных состояний системы, при которых регулятор стабилизирует систему. Однако в реальных ситуациях состояние системы измеряется, как правило, с ошибкой. Поэтому открытым остается вопрос о возможности применения полученного в [2, 3] регулятора в указанной ситуации.

В статье обсуждаются вопросы по оценке области допустимых начальных состояний линейной динамической системы, при которых регулятор, полученный в задаче синтеза управления по состоянию при ограничениях на фазовые и управляющие переменные, будет обеспечивать стабилизацию также и в случае наличия ошибки в измеряемом состоянии. Сформулированы достаточные условия, позволяющие оценить множество допустимых начальных состояний динамической системы. Подход к решению основан на применении метода квадратичных функций Ля-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-31-90086).

пунова и аппарата линейных матричных неравенств. Ключевым моментом в доказательстве теоремы является использование неушербности S-процедуры при двух ограничениях [6]. В качестве примеров приведены две задачи: стабилизация перевернутого маятника и задача о движении ферромагнитного тела в электромагнитном подвесе.

**1. Предварительные сведения.** Рассмотрим управляемый объект

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (1.1)$$

$$z_i = C_i x + D_i u, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.2)$$

где  $x \in R^n$  – состояние системы,  $u \in R^l$  – управление,  $z_i \in R^{m_i}$  – управляемые выходы системы;  $A, B, C_i$  и  $D_i$  – заданные матрицы соответствующих размеров.

Задача о стабилизации объекта (1.1) с помощью управления в виде линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \quad (1.3)$$

обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1.1)–(1.3) и выполнение при заданных значениях  $\gamma_i$  ограничений

$$\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.4)$$

обсуждалась в работах [2, 3]. С помощью техники линейных матричных неравенств и неушербности S-процедуры для квадратичных неравенств были сформулированы условия на множество начальных состояний, стартуя из которых фазовые траектории системы (1.1), замкнутой управлением (1.3), асимптотически приближались к нулевому состоянию и не выходили за границы множества, задаваемого ограничениями (1.4). Для решения задачи синтеза управления в [3] проводится анализ линейной системы с фазовым ограничением. Рассматривается асимптотически устойчивая линейная система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \\ z &= Cx, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где матрица  $A$  – гурвицева, т.е. все собственные значения этой матрицы имеют строго отрицательные действительные части. Ставится задача поиска множества начальных состояний  $x(0) = x_0$ , из которых стартует фазовая траектория, не выходя за пределы множества, задаваемого ограничением

$$\max_{t \geq 0} |z(t)| \leq \gamma \quad (1.6)$$

при  $\gamma > 0$ .

Заметим, что если функция  $V = x^T Y^{-1} x$  с матрицей  $Y = Y^T > 0$  является квадратичной функцией Ляпунова системы (1.5), тогда все траектории этой системы, выходящие из множества  $E(Y) = \{x : x^T Y^{-1} x \leq 1\}$ , ограниченного эллипсоидом  $x^T Y^{-1} x \leq 1$ , вписанным в область фазового пространства, которая задана неравенством  $|z| \leq \gamma$ , удовлетворяют ограничению (1.6). В работе показано, что область фазового пространства, определяемая объединением всех таких множеств  $E(Y)$  при всевозможных функциях Ляпунова указанного вида, можно характеризовать в терминах линейных матричных неравенств. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Если матрица  $Y = Y^T > 0$  удовлетворяет системе линейных матричных неравенств

$$\begin{aligned} YA^T + AY &< 0, \\ \begin{pmatrix} Y & YC^T \\ CY & \gamma^2 I \end{pmatrix} &\geq 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

тогда все траектории системы (1.5) с начальными условиями  $x(0) \in E(Y)$  удовлетворяют ограничениям (1.6).

Заметим, что матриц  $Y$ , удовлетворяющих системе матричных неравенств (1.7), очень много. Это в свою очередь означает, что “много” множеств начальных состояний, определяемых соот-

ветствующими эллипсоидами. Поэтому возникает желание найти множество, которое является “максимальным” в соответствии с некоторым критерием. В частности, в качестве критериев для поиска множества, обладающего в некотором смысле “максимальными” размерами, могут выступать максимизация следа матрицы  $Y$  при ограничениях, задаваемых линейными матричными неравенствами (1.7), или максимизация объема соответствующего эллипсоида.

В случае анализа асимптотически устойчивой линейной системы с несколькими ограничениями определим множество начальных состояний “наибольшего” размера как множество, полученное пересечением эллипсоидов с “максимальными” размерами, отвечающих каждому из этих ограничений.

Ключевым моментом при решении задачи стабилизации объекта (1.1) в классе линейных обратных связей по состоянию (1.3) при ограничениях (1.4) является выбор единой квадратичной функции Ляпунова замкнутой системы с учетом ограничений и применение неушербности S-процедуры при одном ограничении [7]. Это позволяет представить достаточные условия для поиска матрицы параметров регулятора (1.3) в терминах линейных матричных неравенств. Использование S-процедуры при одном ограничении – это прием, который позволяет заменить два неравенства для квадратичных форм эквивалентным им единственным неравенством. Он состоит в следующем. Рассмотрим неравенство

$$F(x) < 0, \quad x \neq 0 \quad (1.8)$$

для всех  $x \in R^n$ , удовлетворяющих неравенству

$$G(x) \leq 0, \quad (1.9)$$

где  $F(x)$  и  $G(x)$  – квадратичные формы. Тогда можно составить квадратичную форму

$$S(x) = F(x) - \lambda G(x)$$

и рассмотреть неравенство

$$S(x) < 0, \quad x \neq 0 \quad (1.10)$$

при некотором  $\lambda \geq 0$ . Эквивалентная замена неравенств (1.8) и (1.9) неравенством (1.10) называется S-процедурой.

Очевидно, что из выполнения (1.10) следует выполнение (1.8) при условии (1.9). Но верно и обратное утверждение. При условии, что существует  $x_0$ , для которого  $G(x_0) < 0$ , выполнение неравенства (1.8) при условии (1.9) влечет существование  $\lambda > 0$ , при котором верно неравенство

$$F(x) - \lambda G(x) < 0, \quad x \neq 0.$$

В этом случае говорят, что S-процедура неушербна для одного ограничения. Данный прием в работах [2, 3] авторы применяют для каждого индекса  $i$ , что позволяет свести процесс нахождения единой функции Ляпунова замкнутой системы к решению системы линейных матричных неравенств.

Если функция  $V = x^T Y^{-1} x$  с матрицей  $Y = Y^T > 0$  является единой квадратичной функцией Ляпунова системы (1.1), замкнутой управлением (1.3), тогда все траектории этой системы, выходящие из множества  $E(Y) = \{x : x^T Y^{-1} x \leq 1\}$ , ограниченного эллипсоидом  $x^T Y^{-1} x \leq 1$ , вписанным в область фазового пространства, которая задана неравенствами  $|z_i| \leq \gamma_i, i = \overline{1, N}$ , удовлетворяют ограничениям (1.4). Можно показать [2, 3], что в этом случае справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Если матрицы  $Y = Y^T > 0, Z$  и величины  $\gamma_i > 0, i = \overline{1, N}$ , удовлетворяют системе линейных матричных неравенств

$$\begin{aligned} YA^T + AY + Z^T B^T + BZ < 0, \\ \begin{pmatrix} Y & YC_i^T + Z^T D_i^T \\ C_i Y + D_i Z & \gamma_i^2 I \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

тогда все траектории системы (1.1), замкнутой управлением (1.3) с начальными условиями  $x(0) \in E(Y)$ , удовлетворяют ограничениям (1.4). Матрица параметров закона управления (1.3) для динамической системы с ограничениями вычисляется как

$$K = ZY^{-1}. \quad (1.12)$$

Заметим, что если матрица параметров закона управления (1.12) найдена, то для всех начальных состояний  $x(0) \in \bigcap_{i=1}^N E(Y_i)$  фазовые траектории системы (1.1), замкнутой управлением (1.3), будут асимптотически приближаться к нулевому состоянию и не выйдут за границы множества, задаваемого ограничениями (1.4). Здесь множества  $E(Y_i) = \{x : x^T Y_i^{-1} x \leq 1\}$  получены как множества начальных состояний  $x(0) = x_0$  для асимптотически устойчивой линейной системы, при которых фазовая траектория не выйдет за пределы множества, задаваемого ограничением  $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$ . При этом желательно выбирать множества  $E(Y_i)$ , обладающие в некотором смысле “максимальными” размерами (например, в смысле максимизации следа матрицы  $Y$  или максимизации объема соответствующего эллипсоида).

Как отмечалось выше, ключевым моментом при решении задачи стабилизации объекта (1.1) в классе линейных обратных связей по состоянию (1.3) при ограничениях (1.4) является выбор единой квадратичной функции Ляпунова замкнутой системы с учетом ограничений. Это связано с тем, что в противном случае, выбирая свою функцию Ляпунова для каждого ограничения  $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$ , приходим к системе билинейных матричных неравенств

$$A^T X_i + K^T B^T X_i + X_i A + X_i B K < 0,$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_i^2 X_i & C_i^T + K^T D_i^T \\ C_i + D_i K & I \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = \overline{1, N},$$

где  $I$  – единичная матрица соответствующего размера, относительно неизвестных матриц  $X_i = X_i^T > 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ , и  $K$ , для которых задача поиска решений существенно усложняется.

Заметим, что полученный в работах [2, 3] результат не позволяет указать “полное” множество начальных состояний, фазовые траектории из которых не нарушают ограничений. В качестве примера рассмотрим управляемый перевернутый маятник

$$\ddot{\varphi} - \varphi = u \quad (1.13)$$

при ограничениях на  $\varphi$  – угол отклонения звена маятника от вертикали и управление  $u$

$$\max_{t \geq 0} |\varphi(t)| \leq 0.1, \quad \max_{t \geq 0} |u(t)| \leq 1. \quad (1.14)$$

Представим уравнение и ограничения в виде (1.1), (1.2), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = (1 \ 0), \quad D_1 = 0, \quad C_2 = (0 \ 0), \quad D_2 = 1.$$

Для объекта (1.13) найдено управление

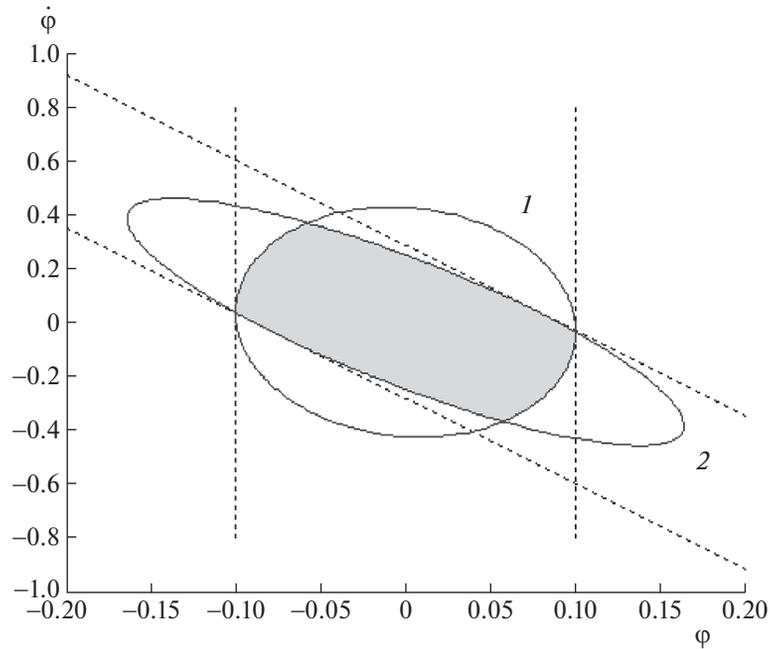
$$u = -11.1888\varphi - 3.5402\dot{\varphi}, \quad (1.15)$$

которое обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1.13), (1.15) и выполнение ограничений (1.14). Управление (1.15) получено в результате поиска матрицы  $Y$ , имеющей максимальный след и удовлетворяющей системе линейных матричных неравенств (1.11).

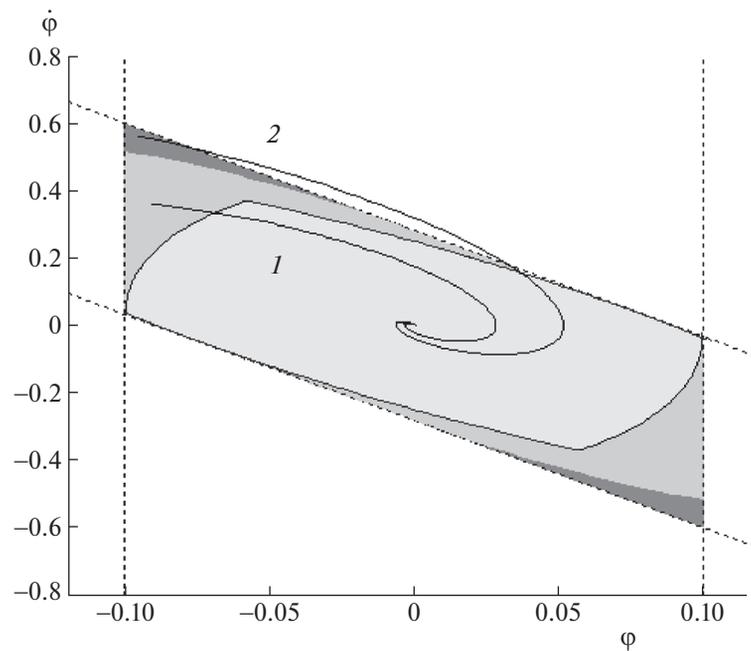
На рис. 1 и 2 в фазовой плоскости пунктиром отмечены ограничения

$$|\varphi(t)| \leq 0.1, \quad |u(t)| \leq 1. \quad (1.16)$$

На рис. 1 эллипс 1 ограничивает оценку множества начальных состояний, при выборе которых управление (1.15) обеспечивает стабилизацию перевернутого маятника при первом ограничении, т.е. на угол отклонения маятника  $\varphi$ . Эллипс 2 ограничивает оценку множества начальных состояний, при выборе которых управление обеспечивает стабилизацию при втором ограничении, т.е. при ограничении на управление. В пересечении эллипсов получим оценку области допустимых начальных состояний, для которых управление стабилизирует объект при двух ограничениях. На рис. 1 и 2 данная область отмечена светло-серым цветом. Можно построить и проанализировать фазовый портрет замкнутой системы. На рис. 2 серым цветом отмечено множество допустимых начальных состояний, стартуя из которых фазовые траектории системы (1.13), замкнутой управлением (1.15), асимптотически приближаются к нулевому



**Рис. 1.** Оценка множества допустимых начальных состояний, полученная пересечением эллипсоидов в задаче стабилизации перевернутого маятника при ограничении по углу и управлению



**Рис. 2.** Множество допустимых начальных состояний и ее оценка, полученная пересечением эллипсоидов в задаче стабилизации перевернутого маятника при ограничении по углу и управлению

состоянию и не выходят за границы множества, задаваемого ограничениями (1.14). В качестве примера приведена траектория *1* для начального состояния  $\varphi = -0.09$ ,  $\dot{\varphi} = 0.36$ . Темным цветом на рис. 2 отмечено множество начальных состояний, при выборе которых фазовые траектории системы выйдут за границы области (1.16). В качестве примера приведена траектория *2* для начального состояния  $\varphi = -0.095$ ,  $\dot{\varphi} = 0.56$ .

**2. Постановка задачи.** Предположим, что для объекта (1.1), (1.2) решена задача стабилизации с ограничениями на фазовые и управляющие переменные и найден закон управления  $u = Kx$ . В реальной ситуации состояние динамической системы всегда измеряется с некоторой ошибкой. В этой связи введем переменную

$$y = (I + \Delta(t))x, \quad (2.1)$$

измеряемый выход системы, где  $I$  – единичная матрица размера  $n \times n$ , а матрица  $\Delta(t)$  определяет относительные ошибки измерения фазовых переменных и в любой момент времени удовлетворяет матричному неравенству

$$\Delta^T \Delta - \delta^2 I \leq 0$$

( $\delta \neq 0$  – заданный параметр), представляющему ограничения на допустимые значения ошибок измерения. Рассмотрим задачу стабилизации системы (1.1), (1.2) регулятором

$$u = Ky \quad (2.2)$$

при ограничениях на фазовые и управляющие переменные (1.4). Возникает следующий вопрос: как скажутся ошибки измерения фазовых переменных на выполнении ограничений (1.4)? Другими словами, как изменится множество начальных состояний системы, для которых регулятор (2.2) обеспечивает стабилизацию при ограничениях (1.4) и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе (2.1)?

**3. Оценка области допустимых начальных состояний в случае наличия ошибки в измеряемом состоянии.** Рассмотрим ситуацию, когда состояние системы (1.1) измеряется с ошибкой. Представим измеряемый выход системы (2.1) в виде

$$y = x + w, \quad (3.1)$$

где  $w = \Delta(t)x$ . Так как матрица неопределенности  $\Delta(t)$  удовлетворяет условию  $\Delta^T \Delta \leq \delta^2 I$ , то

$$w^T w \leq \delta^2 x^T x. \quad (3.2)$$

Обозначив  $\bar{A} = A + BK$ ,  $\bar{B} = BK$ ,  $\bar{C}_i = C_i + D_i K$ ,  $\bar{D}_i = D_i K$ , запишем замкнутую систему (1.1), (1.2), (2.2), (3.1) в виде

$$\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}w, \quad (3.3)$$

$$z_i = \bar{C}_i x + \bar{D}_i w, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.4)$$

Сформулируем достаточные условия для поиска области допустимых начальных состояний динамической системы, при которых управление (2.2) с матрицей параметров регулятора  $K$ , полученной в задаче синтеза управления при ограничениях на фазовые и управляющие переменные без учета ошибки в измеряемом выходе, будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе.

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть требуется найти множество допустимых начальных состояний, при которых полученный регулятор (2.2) обеспечивает для каждого индекса  $i$  стабилизацию системы (3.3) при одном ограничении  $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть матрица  $X_i = X_i^T > 0$  и величины  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\gamma_i > 0$  удовлетворяют системе матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^T X_i + X_i \bar{A} + \mu_1 \delta^2 I & X_i \bar{B} \\ \bar{B}^T X_i & -\mu_1 I \end{pmatrix} < 0, \quad (3.5)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_i^T \bar{C}_i + \mu_2 \delta^2 I - \gamma_i^2 X_i & \bar{C}_i^T \bar{D}_i \\ \bar{D}_i^T \bar{C}_i & \bar{D}_i^T \bar{D}_i - \mu_2 I \end{pmatrix} \leq 0.$$

Тогда все траектории замкнутой системы (3.3) с начальными условиями  $x(0) \in E(X_i)$ ,  $E(X_i) = \{x : x^T X_i x \leq 1\}$  удовлетворяют ограничению  $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$ .

**Доказательство.** В область фазового пространства, заданную неравенством  $|z_i| \leq \gamma_i$ , впишем эллипсоид  $x^T X_i x = 1$ . Покажем, что выполнение первого неравенства системы (3.5) обеспечивает выполнение условия, что квадратичная функция  $V = x^T X_i x$  с матрицей  $X_i = X_i^T > 0$  является функцией Ляпунова для замкнутой системы. На любой траектории замкнутой системы (3.3) верно условие

$$\dot{V}(x) = (\bar{A}x + \bar{B}w)^T X_i x + x^T X_i (\bar{A}x + \bar{B}w) < 0. \quad (3.6)$$

Согласно неущербности S-процедуры при одном ограничении, неравенство (3.6) выполнено для всех  $x, w$ , таких, что  $|x|^2 + |w|^2 \neq 0$ , удовлетворяющих неравенству (3.2), тогда и только тогда, когда для некоторого числа  $\mu_1 > 0$  и для всех  $x, w$  выполнено неравенство

$$(\bar{A}x + \bar{B}w)^T X_i x + x^T X_i (\bar{A}x + \bar{B}w) - \mu_1 (w^T w - \delta^2 x^T x) < 0.$$

Запишем его в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{A}^T X_i + X_i \bar{A} + \mu_1 \delta^2 I & X_i \bar{B} \\ \bar{B}^T X_i & -\mu_1 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} < 0.$$

Это неравенство эквивалентно первому неравенству системы (3.5).

Покажем, что любое решение второго неравенства системы (3.5) обеспечивает выполнение условия  $|z_i(t)| \leq \gamma_i$ . Для квадратичных форм справедлива S-процедура при двух ограничениях [6]. Теорема утверждает следующее. Пусть даны квадратичные формы  $F(x) = x^T A_0 x$ ,  $G_1(x) = x^T A_1 x$ ,  $G_2(x) = x^T A_2 x$ , где  $x \in R^n$ ,  $A_i = A_i^T \in R^{n \times n}$ ,  $i = 0, 1, 2$ , и числа  $a_0, a_1, a_2$ . Составим квадратичную форму  $S(x) = F(x) - \tau_1 G_1(x) - \tau_2 G_2(x)$  и рассмотрим систему неравенств

$$S(x) \leq 0, \quad a_0 \geq \tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 \quad (3.7)$$

при некоторых  $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$ . Рассмотрим неравенство

$$F(x) \leq a_0, \quad (3.8)$$

которое для всех  $x \in R^n$  удовлетворяет системе неравенств

$$G_1(x) \leq a_1, \quad G_2(x) \leq a_2. \quad (3.9)$$

Тогда из неравенств (3.7) следует неравенство (3.8) при условии (3.9).

Обратно, в случае если  $n \geq 3$ , существуют числа  $\tau_3, \tau_4$  и вектор  $x_* \in R^n$ , такие, что

$$\tau_3 A_1 + \tau_4 A_2 > 0, \quad G_1(x_*) < a_1, \quad G_2(x_*) < a_2,$$

то выполнение неравенства (3.8) при условии (3.9) влечет существование чисел  $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$ , при которых верно условие (3.7).

Применим этот результат для решения задачи. Согласно неущербности S-процедуры, при двух ограничениях выполнение неравенства  $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$  при условии (3.2) и условии  $x^T X_i x \leq 1$  для всех  $x, w$ , таких, что  $|x|^2 + |w|^2 \neq 0$ , эквивалентно существованию чисел  $\mu_2 \geq 0, \mu_3 \geq 0$ , при которых верно неравенство

$$|z_i|^2 - \gamma_i^2 - \mu_2 (w^T w - \delta^2 x^T x) - \mu_3 (x^T X_i x - 1) \leq 0. \quad (3.10)$$

При этом должны существовать числа  $\mu_4, \mu_5$  и вектор  $(x_*^T \ w_*^T)^T$ , такие, что

$$\mu_4 \begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_5 \begin{pmatrix} -\delta^2 I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} > 0 \quad (3.11)$$

и

$$\begin{pmatrix} x_* \\ w_* \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ w_* \end{pmatrix} < 1, \quad \begin{pmatrix} x_* \\ w_* \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\delta^2 I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ w_* \end{pmatrix} < 0. \quad (3.12)$$

Запишем неравенство (3.10) в виде

$$(\bar{C}_i x + \bar{D}_i w)^T (\bar{C}_i x + \bar{D}_i w) - \gamma_i^2 - \mu_2 (w^T w - \delta^2 x^T x) - \mu_3 (x^T X_i x - 1) \leq 0. \quad (3.13)$$

Неравенство (3.13) верно для всех  $x, w$ . Значит,

$$\begin{aligned} \mu_3^2 &\leq \gamma_i^2, \\ (\bar{C}_i x + \bar{D}_i w)^T (\bar{C}_i x + \bar{D}_i w) - \mu_2 (w^T w - \delta^2 x^T x) &\leq \mu_3 (x^T X_i x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\bar{C}_i x + \bar{D}_i w)^T (\bar{C}_i x + \bar{D}_i w) - \mu_2 (w^T w - \delta^2 x^T x) &\leq \gamma_i^2 (x^T X_i x), \\ x^T \bar{C}_i^T \bar{C}_i x + x^T \bar{C}_i^T \bar{D}_i w + w^T \bar{D}_i^T \bar{C}_i x + w^T \bar{D}_i^T \bar{D}_i w - \mu_2 (w^T w - \delta^2 x^T x) &\leq \gamma_i^2 (x^T X_i x). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Запишем неравенство (3.14) в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{C}_i^T \bar{C}_i + \mu_2 \delta^2 I - \gamma_i^2 X_i & \bar{C}_i^T \bar{D}_i \\ \bar{D}_i^T \bar{C}_i & \bar{D}_i^T \bar{D}_i - \mu_2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \leq 0. \quad (3.15)$$

Матричное неравенство (3.15) эквивалентно второму матричному неравенству в системе (3.5).

Найдем числа  $\mu_4, \mu_5$ , удовлетворяющие неравенству (3.11). Перепишем условие (3.11) в виде  $\mu_5 > 0$ ,  $\mu_4 X_i - \mu_5 \delta^2 I > 0$ . Следовательно, с учетом  $X_i = X_i^T > 0$  для выполнения этих неравенств достаточно выбрать  $\mu_4 = 2\delta^2 / \lambda_{\min}(X_i)$ , где в знаменателе фигурирует минимальное собственное число матрицы;  $\mu_5 = 1$ .

Найдем вектор  $(x_*^T \ w_*^T)^T$ , удовлетворяющий неравенствам (3.12). Так как  $V = x^T(t) X_i x(t) -$  квадратичная функция Ляпунова, то для всех  $x \in E(X_i)$  выполнено неравенство  $x^T(t) X_i x(t) \leq 1$ . Следовательно, первое неравенство (3.12) верно, если точка  $x_*$  лежит внутри эллипсоида  $E(X_i)$ . В силу неравенства (3.2) для выполнения второго неравенства (3.12) выберем  $w_* = \delta x_* / 2$ . Теорема 3 доказана.

Обозначим через  $X_i$  множество всех матриц  $X_i$ , удовлетворяющих неравенствам (3.5). Максимальную по всем  $X_i \in X_i$  область  $E(X_i^*)$  найдем путем минимизации следа матрицы  $X_i$ . Эта операция является стандартной в пакете программ для инженерных расчетов Matlab [8] с использованием приложения CVX. Заметим, что не удастся получить в терминах линейных матричных неравенств условия для построения множеств  $E(Y_i) = \{x : x^T Y_i^{-1} x \leq 1\}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , что позволило бы максимизировать объемы соответствующих эллипсоидов.

Пусть каждая из матриц  $X_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , имеет минимальный след и является решением системы (3.5) для значения  $\gamma_i$ . Тогда все траектории замкнутой системы (3.3) с начальными условиями  $x(0) \in E(X_i)$ ,  $E(X_i) = \{x : x^T X_i x \leq 1\}$  будут удовлетворять ограничению  $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$ . Следова-

тельно, для всех начальных состояний  $x(0) \in \bigcap_{i=1}^N E(X_i)$ , управление с заданной матрицей параметров регулятора  $K$  стабилизирует замкнутую систему при ограничениях (1.4).

**4. Стабилизация перевернутого маятника.** В качестве примера рассмотрим управляемый перевернутый маятник

$$\ddot{\varphi} - \varphi = u \quad (4.1)$$

при ограничениях на  $\varphi$  — угол отклонения звена маятника от вертикали и управление  $u$

$$\max_{t \geq 0} |\varphi(t)| \leq 0.1, \quad \max_{t \geq 0} |u(t)| \leq 1. \quad (4.2)$$

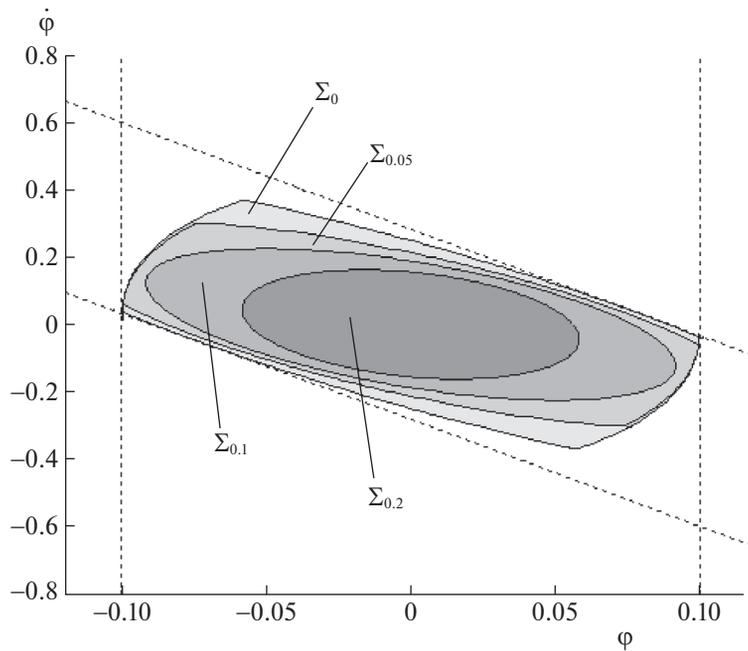


Рис. 3. Пересечение областей  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_{0.05}$ ,  $\Sigma_{0.1}$  и  $\Sigma_{0.2}$

Численное решение получено в пакете Matlab. Для объекта (4.1) решен ряд задач. Как было указано выше, в случае решения задачи стабилизации при отсутствии ошибки в измеряемом выходе найдено управление

$$u = -11.1888\varphi - 3.5402\dot{\varphi}, \quad (4.3)$$

которое обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (4.1), (4.3) и выполнение ограничений на фазовую переменную и управление (4.2). Управление (4.3) получено в результате поиска матрицы  $Y$ , имеющей максимальный след и удовлетворяющей системе линейных матричных неравенств (1.11).

На рис. 3 в фазовой плоскости пунктиром отмечены ограничения

$$|\varphi(t)| \leq 0.1, \quad |u(t)| \leq 1. \quad (4.4)$$

Оценим изменение оценки области допустимых начальных состояний динамической системы, при которых управление (4.3) будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе. Обозначим через  $\Sigma_\delta$  оценку множества допустимых начальных состояний, для которых управление стабилизирует систему при значении  $\delta$ . На рис. 3 приведены области  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_{0.05}$ ,  $\Sigma_{0.1}$ ,  $\Sigma_{0.2}$ , соответствующие значениям  $\delta = 0$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\delta = 0.2$ , и показано пересечение этих областей. Из рисунка следует, что область  $\Sigma_{0.2}$  лежит внутри области  $\Sigma_{0.1}$ , которая в свою очередь лежит внутри области  $\Sigma_{0.05}$ , а область  $\Sigma_{0.05}$  лежит внутри  $\Sigma_0$ .

Проведенные вычисления показывают, что эллипсы, отвечающие за ограничения на угол отклонения звена маятника при значениях  $\delta = 0$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\delta = 0.1$  и  $\delta = 0.2$ , близки друг к другу. Таким образом, на размер области  $\Sigma_\delta$  допустимых начальных состояний оказывает влияние как значение величины параметра  $\delta$ , так и наличие в задаче ограничения на управление.

Вычислим зависимость площади  $S$  области  $\Sigma_\delta$  от величины  $\delta$ , которая определяет величину ошибки в изменяемом выходе. На рис. 4 представлен график этой зависимости. В частности, получены значения  $S(0) = 0.0819$ ,  $S(0.05) = 0.0696$ ,  $S(0.1) = 0.0541$ ,  $S(0.2) = 0.0285$ . Таким образом, при относительно небольших значениях  $\delta$  размеры области допустимых начальных состояний могут существенно уменьшиться.

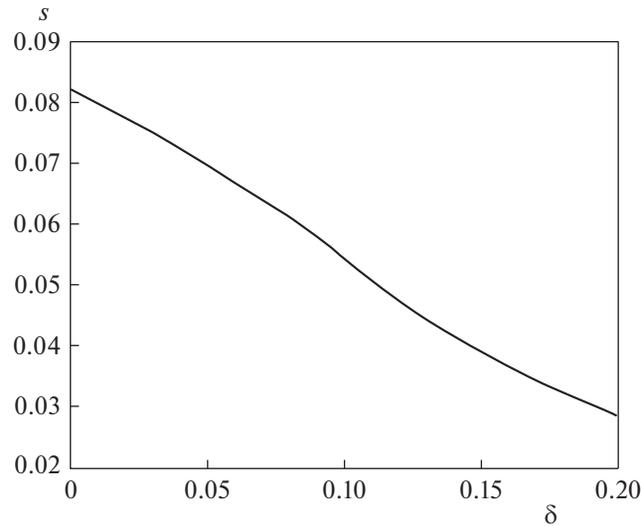


Рис. 4. График зависимости площади области  $\Sigma_\delta$

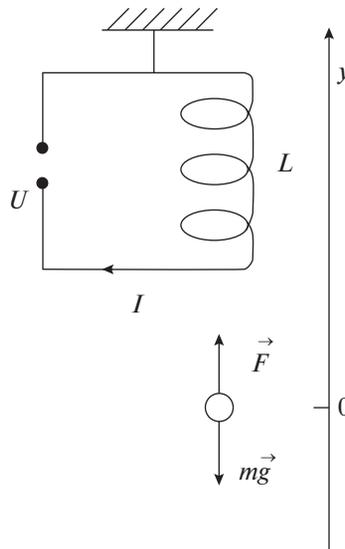


Рис. 5. Электромагнитный подвес

**5. Стабилизация тела в электромагнитном подвесе.** Уравнения движения тела в электромагнитном подвесе одностороннего действия, изображенном на рис. 5, имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= F(y, I) - mg, \\ \dot{\psi} + RI &= U, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $m$  – масса вывешенного тела,  $y$  – координата вывешенного тела,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\psi$  – потокосцепление обмотки электромагнита,  $I$  – сила тока в электромагните,  $R$  – сопротивление в цепи электромагнита,  $U$  – напряжение, подаваемое на электромагнит.

Первое уравнение системы (5.1) описывает второй закон Ньютона для вывешенного тела. Второе уравнение следует из закона Кирхгофа для электрической цепи электромагнита. Известно [9], что величина потокосцепления  $\psi$  связана с током  $I$  и величиной индуктивности электромагнита  $L(y)$  выражением  $\psi = L(y)I$ , где  $L(y) = C_L/(\delta - y)$ . Здесь  $C_L$  – конструктивный параметр,  $\delta$  – величина номинального зазора между электромагнитом и вывешенным телом. Также извест-

но, что выражение для силы  $F(y, I)$ , действующей на тело, можно представить в виде  $F(y, I) = \partial W / \partial y$ , где коэнергия системы

$$W = \frac{C_L I^2}{2(\delta - y)}.$$

Перепишем уравнения (5.1) в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= \frac{C_L I^2}{2(\delta - y)^2} - mg, \\ \frac{C_L}{(\delta - y)} \dot{I} + \frac{C_L I}{(\delta - y)^2} \dot{y} + RI &= U(t). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Состояние равновесия системы (5.2) определяется равенствами  $y = 0$ ,  $\dot{y} = 0$ ,  $I = I_C$ , где  $I_C = \sqrt{2\delta^2 mg / C_L}$ . Перейдем к безразмерным величинам. Введем новое безразмерное время  $t = \sqrt{2g/\delta} t'$  и, обозначив

$$x_1 = \frac{y}{\delta}, \quad x_2 = \frac{\dot{y}}{\sqrt{2g\delta}}, \quad x_3 = \frac{I}{I_C} - 1, \quad u = \sqrt{\frac{\delta}{4g^2 m C_L}} (U - RI_C),$$

запишем систему (5.2) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 + x_3}{1 - x_1} \right)^2 - \frac{1}{2}, \\ \dot{x}_3 &= - \left( \frac{1 + x_3}{1 - x_1} \right) x_2 - \alpha (1 - x_1) x_3 + (1 - x_1) u, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где

$$\alpha = \frac{R\delta}{C_L} \sqrt{\frac{\delta}{2g}}.$$

Линеаризуем систему в окрестности состояния равновесия. Получим

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (5.4)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Численное решение получено в пакете Matlab. Пусть значение параметра системы  $\alpha = 7.5$ . Для объекта (5.4) решен ряд задач. В случае отсутствия ошибки в измеряемом выходе системы найдено управление

$$u = -37.0112x_1 - 25.7894x_2 - 2.8794x_3, \quad (5.5)$$

которое обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (5.4), (5.5) и выполнение ограничений

$$\max_{t \geq 0} |x_1(t)| \leq 0.1, \quad \max_{t \geq 0} |u(t)| \leq 1, \quad (5.6)$$

где  $x_1$  – величина, пропорциональная смещению тела. Управление (5.5) получено в результате поиска матрицы  $Y$ , имеющей максимальный след и удовлетворяющей системе линейных матричных неравенств (1.11).

Оценим область допустимых начальных состояний динамической системы, при которых управление (5.5) будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе. Решение системы линейных матричных неравенств (3.5) при заданном параметре  $\delta$  будут определять два множества допустимых начальных состояний  $E(X_1) = \{x: x^T X_1 x \leq 1\}$ ,  $E(X_2) = \{x: x^T X_2 x \leq 1\}$  для

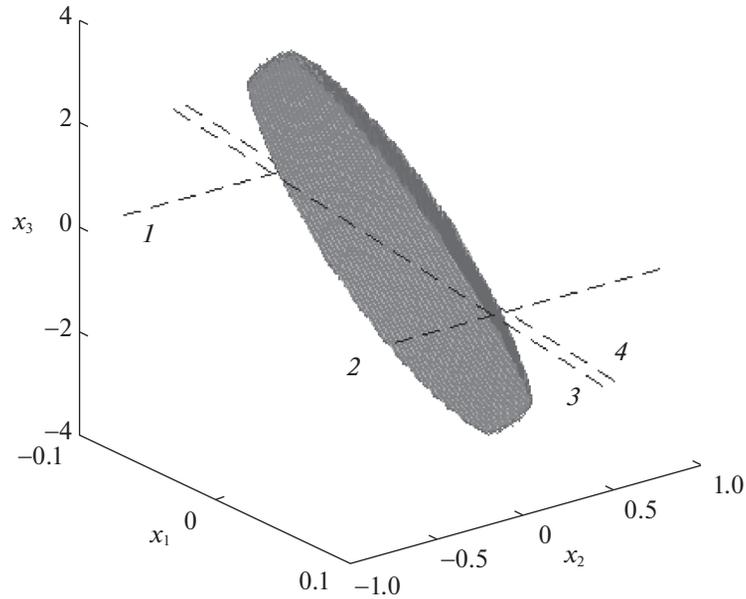


Рис. 6. Оценка множества допустимых начальных состояний при значении параметра  $\delta = 0$

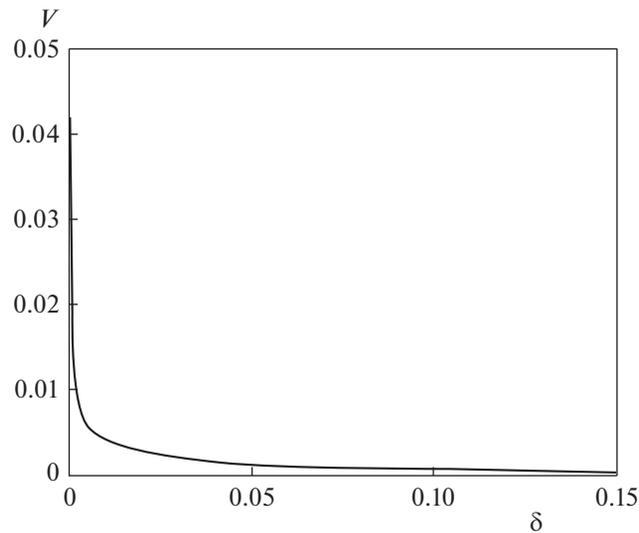


Рис. 7. График зависимости объема вписанного эллипсоида от  $\delta$

первого и второго ограничений (5.6) соответственно. На рис. 6 представлено множество, полученное пересечением эллипсоидов  $E(X_1)$  и  $E(X_2)$  при значении параметра  $\delta = 0$ . Пунктирными линиями 1 и 2 изображены при  $x_3 = 0$  прямые  $x_1 = -0.1$  и  $x_1 = 0.1$  соответственно. Пунктирные линии 3 и 4 соответствуют при  $x_3 = 0$  прямым  $u = -1$  и  $u = 1$ .

Впишем в множество  $E(X_1) \cap E(X_2)$  эллипсоид, имеющий наибольший объем. На рис. 7 представлен график зависимости объема  $V$  данного эллипсоида от величины  $\delta$ . В частности, получены значения  $V(0) = 0.0481$ ,  $V(0.05) = 0.0014$ ,  $V(0.1) = 0.0008$ ,  $V(0.15) = 0.0003$ . Проведенные исследования показывают, что на размеры области  $E(X_1) \cap E(X_2)$  наибольшее влияние оказывает наличие в задаче ограничения на управления. Так, при изменении значения параметра  $\delta$  от 0 до 0.1 объем эллипсоида  $E(X_1)$  меняется от 0.4678 до 0.1303. В то же время объем эллипсоида  $E(X_2)$

меняется от 0.1161 до 0.0008. Таким образом, при относительно небольших значениях  $\delta$  размеры области допустимых начальных состояний существенно уменьшаются.

**Заключение.** Поставлена и решена задача по оценке области допустимых начальных состояний линейной динамической системы, при которых регулятор, полученный в задаче синтеза управления по состоянию при ограничениях на фазовые и управляющие переменные, будет обеспечивать стабилизацию и в случае, когда измерение состояния системы производится с ошибкой. В терминах линейных матричных неравенств сформулированы условия, позволяющие оценить множество допустимых начальных состояний динамической системы. В качестве примеров рассмотрены задачи стабилизации перевернутого маятника и движения тела в электромагнитном подвесе. Численные эксперименты подтверждают теоретические результаты.

Заметим, что при решении практических задач управления реальными физическими объектами полная информация о состоянии системы обычно недоступна измерению. В связи с этим возникает нетривиальная задача стабилизации динамических объектов по измеряемому выходу системы. В дальнейшем планируется рассмотреть ситуацию, когда измеряется часть фазовых переменных или их линейная комбинация. Предполагается решить задачу стабилизации с помощью статического регулятора при ограничениях на фазовые и управляющие переменные, а также оценить область допустимых начальных состояний для полученного регулятора при наличии ошибки в измерениях выходных переменных.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
2. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез линейных законов управления при фазовых ограничениях // *АиТ.* 2009. № 6. С. 48–57.
3. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Метод функций Ляпунова в синтезе законов управления при интегральном и фазовых ограничениях // *Дифференц. уравнения.* 2009. Т. 45. № 5. С. 655–664.
4. *Поляк Б.Т., Шербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
5. *Федюков А.А.* Синтез стабилизирующих регуляторов по выходу для динамических систем с ограничениями на фазовые переменные // *Вестн. ННГУ.* 2013. № 2 (1). С. 152–159.
6. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления: учеб. пособие. М.: ЛЕНАНД, 2019.
7. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
8. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M.* The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.
9. *Журавлев Ю.Н.* Активные электромагнитные подшипники: теория, расчет, применение. СПб.: Политехника, 2003.

---

---

**УПРАВЛЕНИЕ  
В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ**

---

---

УДК 531.36; 62-50

**УПРАВЛЯЕМОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПОЧКИ  
ОСЦИЛЛЯТОРОВ<sup>1</sup>**

© 2021 г. И. М. Ананьевский<sup>a,\*</sup>, А. И. Овсеевич<sup>a,\*\*</sup>

<sup>a</sup> ИИПМех РАН, Москва, Россия

\*e-mail: anan@ipmnet.ru

\*\*e-mail: ovseev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 05.02.2021 г.

После доработки 03.03.2021 г.

Принята к публикации 31.05.2021 г.

Рассматривается задача об управляемом перемещении твердого тела, несущего цепочку из нескольких последовательно соединенных линейных осцилляторов. Несущее тело движется вдоль горизонтальной прямой под действием управляющей силы, испытывая также действие ограниченного неконтролируемого возмущения, например силы сухого трения. Предполагается, что вектор фазового состояния цепочки осцилляторов не полностью доступен для измерений. Указан закон управления, который останавливает всю систему, т.е. несущее тело и осцилляторы, в заданном состоянии покоя за конечное время. Для некоторого типа начальных состояний вычислено время движения до полной остановки системы, найдена асимптотика этого времени в зависимости от числа осцилляторов в цепочке.

DOI: 10.31857/S0002338821050024

**Введение.** Изучается задача управления механической системой, представляющей собой твердое тело с прикрепленным к нему упругим звеном. В математическом описании системы упругое звено моделируется горизонтальной цепочкой из  $n$  линейных осцилляторов, т.е. последовательно присоединенными с помощью пружин  $n$  точечными массами (рис. 1). Несущее тело перемещается вдоль горизонтальной прямой под действием ограниченной управляющей силы и неконтролируемого возмущения, например силы сухого трения. Предполагается, что координата и скорость несущего тела, а также координата первой массы в цепочке в каждый момент времени известны, а фазовые переменные, описывающие динамику остальных масс, не доступны для измерений. Требуется перенести несущее тело в заданное терминальное положение за конечное (нефиксированное) время и полностью погасить колебания осцилляторов. Искомое управление должно удовлетворять наложенным на его модуль ограничениям.

Рассматриваемая модель (с малым числом осцилляторов) применима, например, для описания прецизионной поворотной платформы, устанавливаемой на орбитальном космическом аппарате и предназначенной для изменения ориентации закрепленного на ней объекта. В [1] построен алгоритм управления такой платформой с учетом неполноты информации о динамических параметрах данной механической системы, действующего в ней трения и законах движения основания. В [2] решена задача, аналогичная рассматриваемой ниже, для случая  $n = 2$ , т.е. для цепочки из двух осцилляторов.

Изучение линейной цепочки осцилляторов восходит к классической работе [3]. Отметим, что исследуемую систему отличает дефицит управлений, так как она состоит из  $n + 1$  твердых тел, совершающих поступательные горизонтальные перемещения, и имеет  $n + 1$  степень свободы, тогда как управляющее воздействие скалярно. Некоторые методы решения задач управления механическими системами с дефицитом управляющих параметров представлены в [4]. Наличие неконтролируемых внешних возмущений приводит к необходимости искать управление в форме обратной связи, при этом невозможность измерить текущие координаты и скорости точечных масс из цепочки существенно затрудняет решение задачи. Время движения системы к равновесию

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-51-12004) и в рамках Госзадания АААА-А20-120011690138-6.

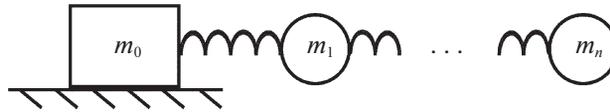


Рис. 1. Несущее тело и цепочка осцилляторов

должно быть конечно, поэтому изучаемую ниже задачу управления можно отнести к классу задач о стабилизации за конечное время, которые являются предметом активного исследования [5, 6].

**1. Постановка задачи и уравнения движения.** Динамика системы, представленной на рис. 1, описывается уравнениями

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{x}_0 &= -k_1 x_0 + k_1 x_1 + u + v, \\ m_i \ddot{x}_i &= k_i x_{i-1} - (k_i + k_{i+1}) x_i + k_{i+1} x_{i+1}, \\ m_n \ddot{x}_n &= k_n x_{n-1} - k_n x_n, \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $x_0$  – координата несущего тела на прямой,  $m_0$  – его масса,  $x_i$  – координата точечной массы  $m_i$ ,  $k_i > 0$  – жесткость пружины, соединяющей массы  $m_{i-1}$  и  $m_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

На управляющую силу  $u$  и возмущение  $v$  накладываются ограничения

$$|u| \leq U, \quad |v| \leq \rho U, \quad U > 0, \quad 0 < \rho < 1. \tag{1.2}$$

Предполагается, что в каждый момент времени известны текущие значения фазовых переменных  $x_0, \dot{x}_0, x_1$ , т.е. координата и скорость несущего тела и координата первой массы, а остальные переменные  $x_i, \dot{x}_i$ ,  $i = \overline{2, n}$  не доступны для измерений.

В [7] предложен закон управления, удовлетворяющий ограничению (1.2) и приводящий систему (1.1) в заданное терминальное состояние покоя за конечное (нефиксированное) время из некоторой окрестности этого терминального состояния в предположении, что все фазовые переменные  $x_i, \dot{x}_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , в каждый момент времени известны. Там же вычислено время перемещения всей системы из одного состояния покоя в другое с помощью указанного закона управления и найдена асимптотика этого времени при  $n \rightarrow \infty$ . Используемый подход основан на методике, развитой в [8].

Ниже показано, что данное управление оказывается эффективным в случае неполного измерения вектора текущего фазового состояния цепочки осцилляторов. Вычислено время, за которое система остановится в начале координат, для некоторых начальных состояний и найдена асимптотика этого времени в зависимости от числа осцилляторов  $n$ .

В дальнейшем через  $e_k^s$  будем обозначать единичный вектор размерности  $k$ , у которого координата с номером  $s$  равна 1, а остальные координаты равны 0.

Представим систему (1.1) в векторной форме

$$\ddot{x} = A_0 x + \frac{1}{m_0} e_{n+1}^1 (u + v), \tag{1.3}$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{m_0} & \frac{k_1}{m_0} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{k_1}{m_1} & -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{k_{n-1}}{m_{n-1}} & -\frac{k_{n-1} + k_n}{m_{n-1}} & \frac{k_n}{m_{n-1}} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{k_n}{m_n} & -\frac{k_n}{m_n} \end{pmatrix}.$$

Положим  $N = 2n + 2$  и перепишем систему (1.3) в форме Коши

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}(u + v), \\ \tilde{x} &= \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \in R^N, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \frac{1}{m_0} e_N^{n+2} = \frac{1}{m_0} \begin{bmatrix} 0 \\ e_{n+1}^1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь и в дальнейшем квадратные скобки обозначают блочную матрицу или вектор,  $I$  – единичная матрица.

**2. Управляемость и наблюдаемость.** Покажем сначала, что пара  $(\tilde{A}, \tilde{b})$  управляема. Установим для этого справедливость следующих утверждений.

**У т в е р ж д е н и е 1.** Для любой квадратной  $(k \times k)$ -матрицы  $A$  и  $k$ -вектора  $b$  системы

$$\ddot{x} = Ax + bu \quad (2.1)$$

и

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (2.2)$$

управляемы или нет одновременно.

Действительно, система второго порядка (2.1) эквивалентна системе первого порядка:

$$\tilde{x} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}u, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}.$$

Для последней матрица управляемости Калмана имеет вид

$$\tilde{K} = [\tilde{b} \tilde{A}\tilde{b} \dots \tilde{A}^{k-1}\tilde{b}] = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & Ab & \dots & 0 & A^{k-1}b \\ b & 0 & Ab & 0 & \dots & A^{k-1}b & 0 \end{bmatrix}.$$

После перестановки столбцов получаем

$$\tilde{K}' = \begin{bmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{bmatrix},$$

где  $K = [b \ Ab \dots A^{k-1}b]$  – матрица управляемости Калмана для системы (2.2). Отсюда следует равенство  $\text{rk} \tilde{K} = \text{rk} \tilde{K}' = 2\text{rk} K$  и справедливость утверждения 1.

**У т в е р ж д е н и е 2.** Если  $A$  – трехдиагональная  $(k \times k)$ -матрица

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & b_2 & c_2 & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{k-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_{k-1} & b_k \end{pmatrix},$$

где  $a_i \neq 0, i = \overline{1, k-1}$ , то пара  $(A, e_k^1)$  управляема.

Так как матрица управляемости Калмана  $K = [e_k^1 \ Ae_k^1 \dots A^{k-1}e_k^1]$  – верхнетреугольная с ненулевыми диагональными элементами  $K_{11} = 1, K_{jj} = a_1 a_2 \dots a_{j-1}, j \geq 1$ , то  $\text{rk} K = k$ .

Из приведенных утверждений вытекает, что пара  $(A_0, m_0^{-1} e_{n+1}^1)$  и, следовательно, система (1.4) управляемы.

Для проверки наблюдаемости системы (1.4) рассмотрим систему уравнений, описывающую лишь динамику цепочки осцилляторов (исключая несущее тело):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \frac{k_1}{m_1} e_{2n}^{n+1} x_0(t), \\ \bar{A} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = (x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)^\top \in R^{2n}. \end{aligned}$$

Здесь трехдиагональная матрица  $A_1$  получена из матрицы  $A_0$  удалением первых строки и столбца.

По предположению координата и скорость  $x_0, \dot{x}_0$  несущего тела и координата  $x_1 = \langle e_{2n}^1, \bar{x} \rangle$  первой массы в цепочке доступны измерению (здесь и далее угловые скобки означают скалярное произведение). Рассуждая как и выше и используя трехдиагональную структуру матрицы  $A_1$ , можно показать, что пара  $(\bar{A}, e_{2n}^1)$  наблюдаема.

Таким образом, по результатам наблюдений переменных  $x_0, \dot{x}_0, x_1$  все остальные, не доступные для измерений, фазовые переменные системы могут быть вычислены с помощью стандартной процедуры [9–11]. В дальнейшем считаем, что фазовый вектор системы (1.4) в каждый момент времени известен.

**3. Алгоритм построения управления.** Для приведения системы (1.4) в начало координат используем подход, развитый в [8] и примененный в [7] для управления движением цепочки осцилляторов. Этот подход позволяет построить закон управления в форме обратной связи, т.е. как функцию вектора текущего фазового состояния  $\tilde{x}$ , удовлетворяющий ограничению (1.2) и при некоторых предположениях относительно  $\rho$  останавливающий систему (1.4) в начале координат за конечное время. Изложим кратко алгоритм построения такого управления.

Приведем сначала систему (1.4) к нормальной форме Фробениуса. Матрица управляемости Калмана для системы (1.4) имеет вид

$$\tilde{K} = \frac{1}{m_0} \begin{bmatrix} 0 & e_{n+1}^1 & 0 & A_0 e_{n+1}^1 & \dots & 0 & A_0^n e_{n+1}^1 \\ e_{n+1}^1 & 0 & A_0 e_{n+1}^1 & 0 & \dots & A_0^n e_{n+1}^1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Положим

$$f = \Omega e_N^{n+1\top}, \quad \Omega = \frac{m_0 m_1 \dots m_n}{k_1 \dots k_n}. \quad (3.1)$$

У вектора  $A_0^j e_{n+1}^1$  на  $(j+1)$ -м месте стоит число

$$\prod_{i=1}^j \frac{k_i}{m_i} \neq 0$$

и нули на последующих местах,  $j = \overline{0, n}$ . Следовательно, вектор  $f$  ортогонален всем столбцам матрицы  $\tilde{K}$ , за исключением последнего.

Составим построчно матрицу

$$S = \begin{bmatrix} f \tilde{A}^{N-1} \\ \vdots \\ f \tilde{A} \\ f \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Преобразование  $Z = S\tilde{X}$  приводит систему (1.4) к нормальной форме Фробениуса

$$\dot{Z} = A_F Z + e_N^1 (u + v), \quad A_F = S \tilde{A} S^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_N \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где  $\alpha_i$  – коэффициенты характеристического полинома матрицы  $\tilde{A}$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Сделаем еще одно преобразование координат

$$z = S_1 Z, \quad S_1 = \text{diag}\{(-1)^{i-1} (i-1)!\}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.4)$$

и обозначим через  $u_c$  новую управляющую функцию

$$u_c(z) = u + \sum_{i=1}^N (-1)^i (i-1)! \alpha_i z_i. \quad (3.5)$$

Система (3.3) примет вид

$$\dot{z} = A_c z + e_N^1 (u_c + v), \quad A_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -N+1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Определим теперь управляющую функцию  $u_c$  следующим образом:

$$u_c(z) = \langle C, \delta(T(z))z \rangle, \quad C = -\frac{1}{2} Q e_N^1 = (C_1, \dots, C_N)^T. \quad (3.7)$$

Здесь функция  $T(z)$  задается неявно уравнением

$$\langle Q \delta(T)z, \delta(T)z \rangle = d, \quad d > 0, \quad z \neq 0, \quad (3.8)$$

с положительно определенной матрицей  $Q$  и диагональной матрицей  $\delta(T)$ :

$$Q = q^{-1}, \quad q_{ij} = \frac{1}{(i+j)(i+j-1)}, \quad i, j = \overline{1, N},$$

$$\delta(T) = \text{diag}\{T^{-1}, T^{-2}, \dots, T^{-N}\}.$$

В [8] установлено:

- 1) для любого  $d > 0$  уравнение (3.8) имеет единственное положительное решение  $T(z)$ ;
- 2) производная функции  $T(z)$  в силу системы (3.6), управляемой по закону (3.5), в отсутствие возмущений, т.е. при  $v = 0$ , удовлетворяет равенству

$$\dot{T} = -1,$$

которое означает, что время движения системы из точки  $z$  до начала координат равно  $T(z)$ ;

- 3) управляющая функция  $u_c(z)$  ограничена:

$$|u_c| \leq \frac{1}{2} \sqrt{d Q_{11}} = \frac{1}{2} \sqrt{d N(N+1)}. \quad (3.9)$$

Из соотношения (3.9) вытекает, что выбором постоянной  $d$  в уравнении (3.8) можно обеспечить выполнение любого наперед заданного ограничения на модуль управляющей функции  $u_c(z)$ , а в некоторой окрестности нуля, в силу соотношения (3.5), – и ограничения (1.2) на управляющую функцию  $u(x)$  для исходной системы.

В [7] показано, что если величина  $\rho$  в (1.2) удовлетворяет соотношению

$$\rho < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{d}{N(N+1)}},$$

то выполнено неравенство  $\dot{T} \leq -\sigma$  для некоторого  $\sigma > 0$ . Следовательно, время движения системы  $\tau(z)$  от точки  $z$  до 0 конечно и  $\tau(z) = O(T(z))$ .

**4. Оценка времени движения.** Пусть  $v = 0$ . Вычислим время движения системы (2.6) из начального состояния

$$\tilde{X}^0 = (x^0, \dot{x}^0)^T, \quad x^0 = (0, \dots, 0), \quad \dot{x}^0 = (\eta, \dots, \eta),$$

до нуля. Таким образом, в начальный момент времени все массы находятся в точке  $x = 0$ , имеют одинаковую скорость  $\eta$  и их необходимо остановить в начале координат.

В переменных  $z$  начальное состояние системы  $\tilde{X}^0$  соответствует вектору

$$z^0 = S_1 S \tilde{X}^0 = (N-2)! \eta \Omega e_N^{N-1} \in R^N.$$

Здесь матрицы  $S$  и  $S_1$  заданы выражениями (3.2) и (3.4). Время, за которое управление (3.5) переводит  $z^0$  в нуль, равно  $T(z^0)$ . Оно определяется из уравнения (3.8), которое в данном случае принимает вид

$$\langle Q\delta(T(z^0))z^0, \delta(T(z^0))z^0 \rangle = Q_{N-1N-1}\eta^2\Omega^2(N-2)!^2T^{-2N+2}(z^0) = d \quad (4.1)$$

и сводится к вычислению элемента  $Q_{N-1N-1}$  матрицы  $Q$ . Такое вычисление может быть проведено с помощью соотношения

$$Q = H^* \text{diag}\{2k\}H \quad (4.2)$$

между матрицей  $Q$  и ортогональными полиномами [12]. Здесь

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & \dots & h_{NN-1} & h_{NN} \end{pmatrix}$$

– матрица коэффициентов полиномов Якоби:

$$P_m(x) = \frac{1}{m!(1-x)} \frac{d^m}{dx^m} [(1-x)(x-x^2)^m] = \sum_{j=1}^{m+1} h_{m+1j} x^{j-1}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Из (4.1) и (4.2) вытекает

$$Q_{N-1N-1} = 2(N-1)h_{N-1N-1}^2 + 2Nh_{NN-1}^2.$$

Старший коэффициент полинома  $P_{N-2}(x)$  и коэффициент при степени  $N-2$  полинома  $P_{N-1}(x)$  равны

$$h_{N-1N-1} = \frac{(2N-3)!}{(N-2)!(N-1)!}, \quad h_{NN-1} = \frac{(2N-2)!}{N(N-2)!^2}.$$

В итоге получаем следующее выражение для  $T(z^0)$ :

$$T(z^0) = \left( \frac{Q_{N-1N-1}\eta^2\Omega^2(N-2)!^2}{d} \right)^{1/(2N-2)}, \quad (4.3)$$

где

$$Q_{N-1N-1} = \frac{2(2N-3)!^2}{(N-2)!^3(N-1)!} + \frac{2(2N-2)!^2}{N(N-2)!^4}.$$

Приведем уравнение, из которого вычисляется время перехода в нуль из начального состояния более общего вида, а именно

$$\tilde{X}^0 = (x^0, \dot{x}^0)^T, \quad x^0 = (\xi, \dots, \xi), \quad \dot{x}^0 = (\eta, \dots, \eta). \quad (4.4)$$

В канонических переменных  $z$  данное начальное состояние соответствует вектору

$$z^0 = S_1 S \tilde{X}^0 = (N-2)! \eta \Omega e_N^{N-1} + (N-1)! \xi \Omega e_N^N \in R^N.$$

Время движения  $T = T(z^0)$  до нуля под действием управления (3.5) определяется из следующего аналога уравнения (4.1):

$$Q_{N-1N-1}\eta^2(N-2)!^2T^{-2N+2} + 2Q_{N-1N}\xi\eta(N-1)!(N-2)!T^{-2N+1} + Q_{NN}\xi^2(N-1)!^2T^{-2N} = d\Omega^{-2}. \quad (4.5)$$

**5. Асимптотическая оценка времени движения при  $N \rightarrow \infty$ .** Для перехода к пределу  $N \rightarrow \infty$  в выражении для времени движения  $T(z^0)$  примем следующие допущения о том, как ведут себя параметры системы (1.1) при больших  $N$  (или  $n$ ). Будем считать, что массы  $m_i$  и жесткости  $k_i$  имеют вид  $m_i = \rho_i/n$ ,  $k_i = \kappa_i n$ , где  $\rho_i = O(1)$ ,  $\kappa_i^{-1} = O(1)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Это означает, что в пределе конеч-

номерная динамическая система (1.1) описывает продольные колебания упругого стержня, а принятые допущения соответствуют конечной плотности массы и конечности модуля Юнга у предельной сплошной среды.

В формуле (4.3) для вычисления времени движения единственная величина, зависящая от параметров динамической системы (1.1), – это  $\Omega$  из (3.1). Для определения асимптотической оценки  $T(z^0)$  важна лишь асимптотика величины  $\Omega^{1/N}$ , которая при сделанных предположениях имеет вид

$$\Omega^{1/N} = O\left(\left(\frac{1}{n^n(n+1)^{(n+1)}}\right)^{1/N}\right) = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Для оценки  $Q_{N-1N-1}^{1/2N}$  достаточно использовать грубую форму формулы Стирлинга

$$n!^{1/n} \sim \frac{n}{e},$$

применение которой дает соотношения

$$Q_{N-1N-1}^{1/(2N-2)} = O(1), \quad ((N-2)!)^{1/(2N-2)} = O(N).$$

Остальные величины, входящие в формулу (4.3) для  $T(z^0)$ , постоянны при  $N \rightarrow \infty$ . Поэтому

$$T(z^0) = O(\Omega^{2/2N-2} Q_{N-1N-1}^{1/2N-2} ((N-2)!)^{1/(2N-2)}) = O\left(\frac{1}{N}\right) = O(1),$$

т.е. время движения остается равномерно ограниченным.

Можно получить асимптотическую оценку при  $N \rightarrow \infty$  времени движения  $T = T(z^0)$  до нуля под действием управления (3.5) из начального состояния (4.4). Для этого нужно изучить асимптотику при  $N \rightarrow \infty$  решения  $T$  уравнения (4.5). Вычисления, аналогичные проделанным выше, показывают, что уравнения (4.5) можно записать в виде

$$a_{N-1N-1} T^{-2N+2} + a_{N-1N} T^{-2N+1} + a_{NN} T^{-2N} = d,$$

где коэффициенты  $a_{ij}$  имеют асимптотическую оценку  $a_{ij}^{1/N} = O(1)$ . Отсюда следует, что для времени движения  $T$  верна асимптотическая оценка

$$T(z^0) = O(1), \quad N \rightarrow \infty.$$

**6. Численное моделирование.** Приведем результаты компьютерного моделирования динамики системы, состоящей из несущего тела и двух осцилляторов, при следующих значениях параметров:

$$m_0 = 2 \text{ кг}, \quad m_1 = m_2 = 1 \text{ кг}, \quad k_1 = k_2 = 1 \text{ Н/м}.$$

Изучался случай, когда в начальный момент времени все массы находятся в точке  $x = 0$  и имеют одинаковую скорость:  $x_i = 0$ ,  $\dot{x}_i = 0.2$  м/с,  $i = 0, 1, 2$ . Предполагалось, что возмущения отсутствуют, т.е.  $v = 0$ . Величина  $d$  в уравнении (3.8) была выбрана равной  $d = 10$ . Система переводилась в начало координат.

Рисунок 2 описывает поведение фазовых траекторий всех трех масс системы, движущейся под действием предложенного управления. Сплошная линия отвечает несущей массе  $m_0$ , штриховая – массе  $m_1$ , а пунктирная – массе  $m_2$ . По оси абсцисс отложены координаты масс, по оси ординат – скорости. Полное время движения составило  $\approx 6.44$  с.

На рис. 3 представлены графики зависимости от времени управляющих функций, реализовавшихся вдоль полученной траектории системы. Сплошная линия здесь отвечает управлению  $u(t)$ , применяемому к исходной системе (1.1), а штриховая – управлению  $u_c(t)$ , заданному выражением (3.7). Разность между значениями этих функций определяется слагаемым

$$\sum_{i=1}^6 (-1)^i (i-1)! \alpha_i z_i$$

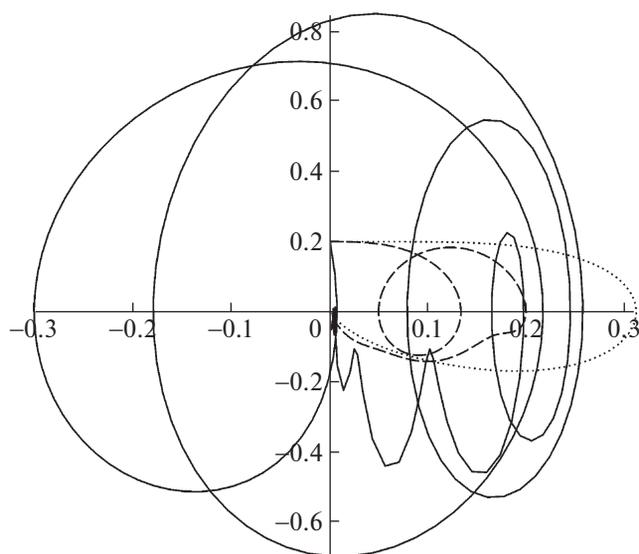


Рис. 2. Фазовые траектории несущего тела и осцилляторов

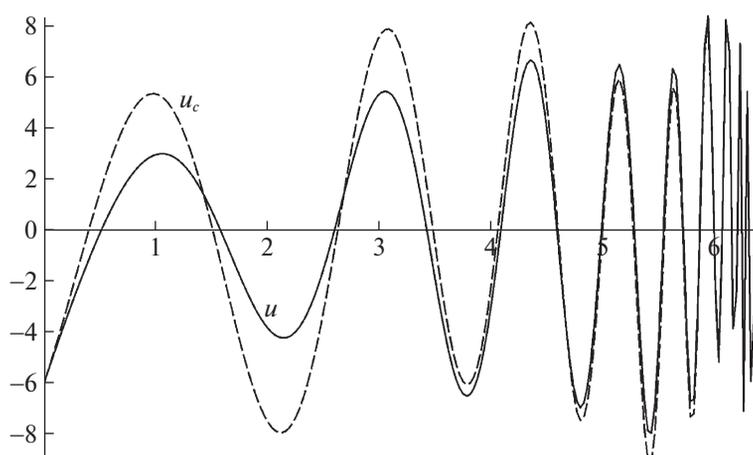


Рис. 3. Управляющие функции

в выражении (3.5) и стремится к нулю по мере приближения системы к терминальному состоянию равновесия. При выбранном в уравнении (3.8) параметре  $d$ , как видно из рисунка, максимальная абсолютная величина управления приблизительно равна 8 Н.

**Заключение.** В работе применен развитый ранее подход к синтезу управления в линейных системах для перемещения тела, несущего цепочку осцилляторов произвольной длины. Показано, что для приведения такой системы в заданное состояние покоя за конечное время достаточно измерять лишь текущее фазовое состояние несущего тела и координату массы первого осциллятора, остальные фазовые переменные системы могут быть определены на основе этих измерений. Для некоторых начальных состояний вычислено время движения и найдена асимптотика этого времени при увеличении числа осцилляторов. Полученные асимптотические оценки говорят о перспективах предельного перехода от управления конечномерной системой к управлению движением сплошной среды.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Борисов А.Е., Гавриков А.А., Емельянов Г.А. Управление ориентацией объекта на вращающемся основании с помощью двухступенчатого электропривода // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 3–17.

2. *Ананьевский И.М.* Управляемое перемещение платформы, несущей упругое звено с неизвестным фазовым состоянием // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 18–25.
3. *Dyson F.J.* The Dynamics of a Disordered Linear Chain // *Physical Review*. 1953. V. 92. № 6. P. 1331–1338.
4. *Фантони И., Лозано Р.* Нелинейное управление механическими системами с дефицитом управляющих воздействий. М.–Ижевск: ООО “Компьютерная динамика”, 2012. 312 с.
5. *Amato F., De Tommasi G., Pironti A.* Finite-Time Stability: An Input-Output Approach. John Wiley & Sons, 2018. 184 p.
6. *Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W.* Finite-time and Fixed-time Stabilization: Implicit Lyapunov Function Approach // *Automatica*. 2015. V. 51. P. 332–340.
7. *Ovseevich A., Ananievski I.* Robust Feedback Control for a Linear Chain of Oscillators // *JOTA*. 2021. V. 188. P. 307–316.
8. *Ovseevich A.* A Local Feedback Control Bringing a Linear System to Equilibrium // *JOTA*. 2015. V. 165. № 2. P. 532–544.
9. *Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A.* Topics in Mathematical System Theory. N.Y.: McGraw-Hill, 1969. 358 p.
10. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
11. *Sontag E.D.* Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-dimensional Systems. N.Y.: Springer, 1998. 544 p.
12. *Fedorov A., Ovseevich A.* Asymptotic Control Theory for a System of Linear Oscillators // *Moscow Math. J.* 2016. V. 16. P. 561–598.

## ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

УДК 621.396.67:629.7.064

### ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ ПРИ СТРУКТУРНО-СИСТЕМНОМ МОНИТОРИНГЕ ОБСТАНОВКИ<sup>1</sup>

© 2021 г. А. А. Кочкаров<sup>a,\*</sup>, С. Н. Разиньков<sup>b</sup>, А. В. Тимошенко<sup>c</sup>, В. А. Шевцов<sup>d</sup>

<sup>a</sup> Финансовый ун-т при Правительстве РФ, Москва, Россия

<sup>b</sup> Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил “Военно-воздушная академия  
им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина”, Воронеж, Россия

<sup>c</sup> Радиотехнический ин-т им. академика А.Л. Минца, Москва, Россия

<sup>d</sup> МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

\*e-mail: akochkar@gmail.com

Поступила в редакцию 28.05.2020 г.

После доработки 10.03.2021 г.

Принята к публикации 31.05.2021 г.

С использованием критерия минимума среднего риска синтезирован статистически оптимальный алгоритм идентификации объектов по однопипным параметрам при структурно-системном мониторинге обстановки. В целях сокращения вычислительных затрат выполнена его квазиоптимальная модификация, базирующаяся на исключении из сопоставляемых массивов существенно различающихся по значениям параметров. В программной среде Qt Creator на объектно-ориентированном языке программирования C++ разработана имитационная модель идентификации.

На основе статистических испытаний модели исследованы вероятности правильной идентификации объектов и ложной тревоги по оценкам максимального правдоподобия угловых координат. Проведен анализ зависимостей показателей эффективности идентификации от среднеквадратических ошибок оценок параметров, числа объектов и плотности их размещения в области мониторинга.

DOI: 10.31857/S0002338821050139

**Введение.** Беспилотные летательные аппараты находят применение для выполнения широкого перечня задач в смешанных группах совместно с пилотируемыми авиационными средствами и при автономном полете в составе беспилотных комплексов с едиными контурами управления [1, 2]. Для повышения достоверности оценки обстановки при действии таких групп используются методы структурно-системного мониторинга, которые базируются на совместной обработке данных о контролируемых объектах, добываемых разнородными средствами [3, 4]. Указанный подход реализуется при контроле воздушного пространства комплексами активно-пассивной радиолокации, в состав которых входят радиолокационные станции, выполняющие обнаружение и распознавание летательных аппаратов, и средства радиотехнического мониторинга, предназначенные для обнаружения и распознавания бортовых источников радиоизлучения по результатам приема, пеленгования и оценки параметров сигналов. За счет комплексного анализа демаскирующих признаков целей парируются их пропуски в отдельных каналах поиска (наблюдения), в том числе обусловленные мерами маскировки и снижения заметности [3]. В отличие от методов структурно-информационного мониторинга [3], заключающегося в использовании группы однопипных средств (например, радиолокационных станций обзора воздушного пространства) для добывания данных о характеристиках объектов, при структурно-системном подходе расширяется перечень их демаскирующих признаков. При этом повышаются надежность и достоверность мониторинга в условиях непреднамеренных помех, а также организованных мер защиты объектов и противодействия контролю обстановки [3, 4].

При структурно-системном мониторинге обстановки требуется выполнять идентификацию данных, поступающих от независимых источников [3]. Суть этой процедуры заключается в уста-

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-19-00481.

новлении тождественности объектов, обнаруженных и распознанных различными средствами мониторинга (в частности, станциями радиолокационной и радиотехнической разведки) на основании совпадения однопипных параметров. Для выполнения идентификации требуется построить процедуру принятия решения о соответствии между объектами, наблюдаемыми различными средствами, по результатам группирования параметров, принадлежащих одному и тому же объекту [5].

В предлагаемой работе на основе критерия минимума среднего риска [5, 6], обеспечивающего высокую надежность принимаемых решений при малом числе сопоставляемых параметров [4], синтезированы оптимальный и квазиоптимальный алгоритмы и в программной среде Qt Creator на объектно-ориентированном языке программирования C++ разработана имитационная модель идентификации объектов с минимизацией вычислительных затрат на группирование параметров.

Выбор критерия минимума среднего риска обусловлен тем, что при его использовании требуется наименьший по сравнению с методами, базирующимися на нахождении максимума функций (функционалов) правдоподобия [5, 6], объем априорной информации для установления соответствия между однопипными параметрами; идентификация может быть выполнена при различных значениях априорной вероятности условий идентификации каждого объекта. В отличие от методов рекуррентной линейной фильтрации [4] идентификация с минимизацией среднего риска группирования однопипных параметров выполняется по результатам их однократного сопоставления, без сопровождения объектов в области наблюдений. Данное обстоятельство определяет надежность идентификации объектов в условиях возможных срывов их сопровождения, например, вследствие воздействия помех на средства мониторинга.

По результатам статистических испытаний разработанной модели идентификации исследованы вероятности правильной идентификации объектов и ложной тревоги по оценкам максимального правдоподобия угловых координат [7], определяемых средствами активной и пассивной радиолокации при контроле воздушного пространства.

Цель работы – анализ зависимостей показателей эффективности идентификации от среднеквадратических ошибок (СКО) определения однопипных параметров, размеров области размещения и числа объектов.

**1. Постановка задачи идентификации объектов по оценкам однопипных параметров.** Идентификация выполняется между  $I$  и  $J$  объектами, наблюдаемыми первым и вторым средствами мониторинга, путем нахождения наиболее близких по значениям однопипных параметров  $\tilde{\theta}_i$  и  $\hat{\theta}_j$ , измеренных с СКО  $\tilde{\sigma}_i$  и  $\hat{\sigma}_j$  соответственно. В общем случае ввиду возможных пропусков объектов  $I \neq J$ .

Суть идентификации заключается в установлении соответствия между  $I$  объектами, наблюдаемыми первым средством мониторинга, и  $K = I + J$  объектами из числа  $J$  наблюдаемых и  $I$  пропущенных вторым средством мониторинга.

Математическая постановка задачи идентификации объектов по критерию минимума среднего риска имеет вид

$$(i', k') = \arg \min_{\substack{i=1, I, \\ k=1, K}} \bar{R}_{ik}, \quad (1.1)$$

где

$$\bar{R}_{ik} = \sum_{p=1}^I \sum_{m=1}^K R_{ip} P_{mk}, \quad i = \overline{1, I}, \quad k = \overline{1, K} \quad (1.2)$$

– средний риск принятия решения об идентификации объектов [5, 6],  $R_{ik}$  и  $P_{ik}$  – риск и апостериорная вероятность гипотезы идентификации объектов с порядковыми номерами  $i$  и  $k$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $k = \overline{1, K}$ .

Согласно (1.1), при идентификации из множества  $K = I + J$  объектов, наблюдаемых первым и вторым средствами мониторинга соответственно, устанавливается область пересечения подмножеств  $I$  и  $J$ , которые, в общем случае, не совпадают ввиду возможностей пропуска целей вторым средством мониторинга.

В соответствии с байесовским подходом [6]

$$P_{ik} = P_i P_{k|i}, \quad (1.3)$$

где  $P_i$  – априорная вероятность условия идентификации  $i$ -го объекта,  $i = \overline{1, I}$ ,  $P_{k|i}$  – условная вероятность ситуации идентификации  $k$ -го,  $k = \overline{1, K}$ , и  $i$ -го,  $i = \overline{1, I}$ , объектов [5, 6].

Значение  $P_{k|i}$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $i = \overline{1, I}$ , находится как произведение вероятностей того, что при гипотезе идентификации пары объектов  $(i, k)$  значение параметра  $\tilde{\theta}_i$ ,  $i = \overline{1, I}$ , принадлежит некоторой области значений, определяемой порогом принятия решения [5], в окрестности значения параметра  $\hat{\theta}_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , а значения параметров  $\tilde{\theta}_p$ ,  $p \neq i$ ,  $p = \overline{1, I}$ , располагаются за ее пределами. Число возможных гипотез о соответствии  $i$ -го объекта,  $i = \overline{1, I}$ , одному из  $K$  объектов определяется выражением [8]

$$S = K^I. \quad (1.4)$$

Полагаем, что правильно принятые решения не приводят к информационным потерям, все ошибочные решения характеризуются одинаковыми рисками, а априорные вероятности условия идентификации объектов равны. Правило (1.1) с учетом (1.2), (1.3) представим в виде

$$(i', k') = \arg \max_{\substack{i=\overline{1, I}, \\ k=\overline{1, K}}} P_{k|i}. \quad (1.5)$$

На основе (1.5) осуществляется оптимальный по критерию минимума среднего риска (1.1) выбор гипотезы о соответствии однотипных параметров идентификации с максимальной условной вероятностью ситуации идентификации. Однако при этом требуется провести сравнение значений  $P_{k|i}$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $i = \overline{1, I}$ , для  $K!(I!(K-I)!) / (I!(K-I)!)!$  возможных сочетаний параметров идентификации  $\tilde{\theta}_i$ ,  $i = \overline{1, I}$ , и  $\hat{\theta}_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ . При большом числе контролируемых объектов указанная процедура затрудняет их идентификацию в реальном масштабе времени.

Для повышения быстродействия алгоритма предлагается его квазиоптимальная модификация

$$(i', k') = \arg \max_{\substack{i=\overline{1, I}, \\ k=\overline{1, K}}} (P_{k|i} |_{P_{k \cdot} = 0, P_{\cdot i} = 0}). \quad (1.6)$$

Согласно (1.6), при идентификации объектов в матрице условных вероятностей  $P_{k|i}$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $i = \overline{1, I}$ , находится наибольший элемент, соответствующий ситуации идентификации по  $k'$ -му,  $k' = \overline{1, K}$ , и  $i'$ -му,  $i' = \overline{1, I}$ , параметрам. При установлении принадлежности  $k'$ -го,  $k' = \overline{1, K}$ , и  $i'$ -го,  $i' = \overline{1, I}$ , параметров одному объекту из матрицы условных вероятностей ситуаций идентификации исключаются элементы  $k'$ -й строки и  $i'$ -го столбца. В модифицированной матрице  $P_{k|i}$  размером  $(K-1) \times (I-1)$  снова осуществляется поиск наибольшего элемента; указанные процедуры повторяются  $I$  раз. Исключение соответствующих строк и столбцов из исходной матрицы на каждом этапе может выполняться путем обращения в нуль элементов  $P_{k \cdot}$  и  $P_{\cdot i}$ ,  $k, k' = \overline{1, K}$ ,  $i, i' = \overline{1, I}$ . При этом общее число операций по идентификации объектов по сравнению с (1.5) сокращается в  $L = \min(I, J)$  раз.

Правило (1.6) является квазиоптимальным ввиду возможных пропусков подлежащих идентификации объектов, поскольку в  $k'$ -й строке и  $i'$ -м столбце, исключаящихся из матрицы условных вероятностей ситуаций идентификации, могут содержаться элементы, имеющие большие значения, чем оставшиеся в модифицированной матрице. В результате единичной ошибочной идентификации пары объектов  $(k'', i'')$  при их истинной идентификации  $(k', i')$  и  $(k'', i'')$  принятие правильного решения в отношении пары  $(k', i'')$ ,  $k', k'' = \overline{1, K}$ ,  $i', i'' = \overline{1, I}$ , также становится невозможным.

С использованием взаимосвязей условных вероятностей ситуаций идентификации объектов с СКО  $\hat{\sigma}_i$  и  $\hat{\sigma}_j$  для массивов значений  $\tilde{\theta}_i$  и  $\hat{\theta}_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $i = \overline{1, I}$ , в области  $\Delta\theta$  [6] установлено, что при малом числе пропусков и высокой априорной точности оценки параметров идентификации [7] правило (1.6) может быть представлено в виде

$$(i', j') = \arg \min_{\substack{i=1, I, \\ k=1, K}} \left[ \frac{(\tilde{\theta}_i - \hat{\theta}_k^*)^2}{\tilde{\sigma}_i^2 + \hat{\sigma}_k^2} + \frac{1}{2} \ln(\tilde{\sigma}_i^2 + \hat{\sigma}_k^2) \right], \quad (1.7)$$

где вследствие априорной неопределенности параметров  $\hat{\theta}_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , их значения заменяются оценками максимального правдоподобия [7]:

$$\hat{\theta}_k^* = \begin{cases} \left[ \hat{\theta}_k \hat{\sigma}_k^{-2} + \sum_{i=1}^I \tilde{\theta}_i \tilde{\sigma}_i^{-2} \right] \left[ \hat{\sigma}_k^{-2} + \sum_{i=1}^I \tilde{\theta}_i \tilde{\sigma}_i^{-2} \right]^{-1} & \text{при } k = \overline{1, J}; \\ \left[ \sum_{i=1}^I \tilde{\theta}_i \tilde{\sigma}_i^{-2} \right] \left[ \sum_{i=1}^I \tilde{\theta}_i \tilde{\sigma}_i^{-2} \right]^{-1} & \text{при } k = \overline{(J+1), K}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Второе слагаемое в квадратных скобках в правой части (1.7) ограничивает возможности группирования параметров идентификации, измеренных с низкой точностью.

**2. Анализ эффективности идентификации объектов при структурно-системном мониторинге обстановки.** С целью оценки эффективности правила (1.7) разработана имитационная модель идентификации воздушных объектов, совершающих налет на наземную цель, в системе активно-пассивной радиолокации. Имитационная модель разработана в программной среде Qt Creator на объектно-ориентированном языке программирования C++.

Моделирующий алгоритм, построенный по принципу функциональной декомпозиции, воспроизводит следующие процессы:

- генерация потоков угловых координат объектов в приближении их распределения по нормальному закону с математическими ожиданиями  $\tilde{\theta}_i$ ,  $\hat{\theta}_j$  и СКО  $\tilde{\sigma}_i = \sigma_{1\theta}$ ,  $\hat{\sigma}_j = \sigma_{2\theta}$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J}$ , в секторе углов  $\Delta\theta$  в дискретные моменты времени с применением датчика случайных чисел;

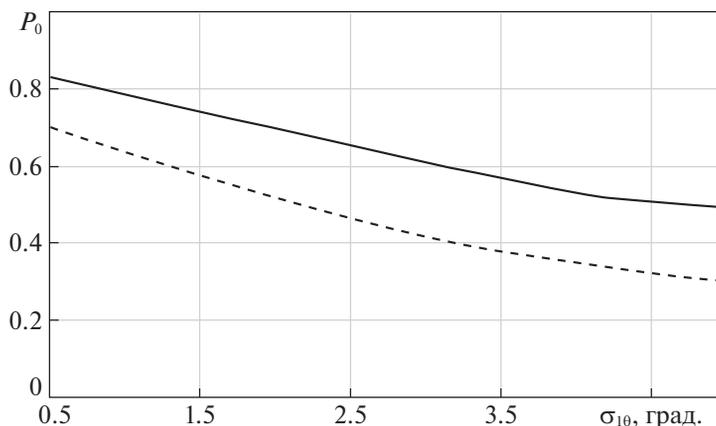
- группирование в соответствии с правилом (1.7) значений параметров идентификации  $\tilde{\theta}_i$ ,  $i = \overline{1, I}$ , измеренных комплексом радиотехнического мониторинга, и оценок максимального правдоподобия этих параметров  $\hat{\theta}_k^*$ ,  $k = \overline{1, K}$ , найденных с использованием (1.8) для радиолокационной станции.

Перечень данных для формирования потоков угловых координат воздушных объектов при налете на наземную цель включает в себя их число, координаты, направление и скорости движения на интервалах времени, установленных шагом моделирования, и частотно-временные диаграммы функционирования бортовых источников радиоизлучения. Пропуски оценок угловых координат объектов  $\tilde{\theta}_i$ ,  $i = \overline{1, I}$ , и  $\hat{\theta}_j$ ,  $j = \overline{1, J}$ , устанавливаются при нарушении условия энергетической доступности [3, 4] или выходе за пределы секторов рабочих углов средств мониторинга на отдельных участках маршрута [8, 9].

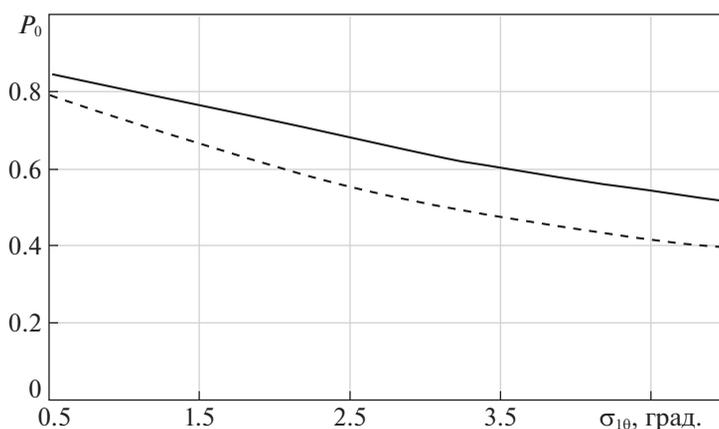
Типовые траектории движения объектов в вертикальной плоскости представлялись ломаными линиями, состоящими из участков полета на фиксированной высоте с установленной крейсерской скоростью и маневра по смене высоты. Маневрирование в горизонтальной плоскости заключается в выполнении поворотов при сохранении приоритета прямолинейного равномерного движения.

Смена режимов работы бортовых источников радиоизлучения, выполняемая совместно с вертикальными маневрами для сохранения скрытности налета, воспроизводится путем изменения значений параметров сигналов, границ и угловых положений секторов обзора антенн [8, 9].

Значения СКО  $\tilde{\sigma}_i = \sigma_{1\theta}$ ,  $\hat{\sigma}_j = \sigma_{2\theta}$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J}$ , определяются отношениями сигнал–шум на входах приемников при использовании в средствах мониторинга оптимальных алгоритмов обнаружения и оценки параметров сигналов [8–10]. Для управления базами данных об объектах и условиях моделирования применялась система PostgreSQL. По результатам статистических испытаний представленной модели найдены показатели эффективности идентификации объектов при контроле воздушного пространства.



**Рис. 1.** Зависимости вероятности правильной идентификации  $I = 20$  и  $J = 19$  объектов от СКО пеленгования  $\sigma_{10}$



**Рис. 2.** Зависимости вероятности правильной идентификации объектов от СКО пеленгования  $\sigma_{10}$  в секторе углов  $\Delta\theta = 90^\circ$

Вероятность правильной идентификации объектов  $P_0$  определялась как усредненное отношение числа правильно идентифицированных объектов к общему количеству выполненных идентификаций, вероятность ложной тревоги  $P_1$  — как отношение математического ожидания ложно выполненных к общему количеству возможных ошибочных идентификаций [9, 10]. Параметры идентификации и их оценки формировались независимо в каждой серии статистических испытаний модели.

На рис. 1 приведены зависимости вероятности правильной идентификации между  $I = 20$  и  $J = 19$  воздушными объектами, совершающими налет на наземную цель и обнаруженными первым и вторым средствами мониторинга соответственно, от СКО оценки их угловых координат комплексом радиотехнического мониторинга  $\sigma_{10}$  при фиксированной точности измерения данного параметра  $\sigma_{20} = 1^\circ$  радиолокационной станцией. Сплошной линией представлена закономерность изменения  $P_0$ , найденная при движении объектов с различных направлений в секторе углов  $\Delta\theta = 180^\circ$ , а штриховой линией — в секторе углов  $\Delta\theta = 90^\circ$ .

На рис. 2 приведены зависимости вероятности правильной идентификации объектов от СКО пеленгования  $\sigma_{10}$  в секторе углов  $\Delta\theta = 90^\circ$  при  $\sigma_{20} = 1^\circ$  для вариантов:  $I = 15$  и  $J = 14$  (штриховая линия),  $I = 10$  и  $J = 9$  (сплошная линия).

Из представленных результатов следует, что при СКО  $\sigma_{10} = 0.5^\circ$  и  $\sigma_{20} = 1^\circ$  вероятность правильной идентификации 20 объектов в секторе углов  $\Delta\theta = 180^\circ$  составляет 0.85, а вероятность

ложной тревоги  $P_1$  не превышает 0.01. По мере увеличения  $\sigma_{10}$  до  $2^\circ$  величина  $P_0$  снижается до 0.7, а при  $\sigma_{10} = 5^\circ$  достигает 0.5. С уменьшением сектора углов до  $\Delta\theta = 90^\circ$ , приводящим к повышению плотности размещения объектов, вероятность их правильной идентификации при СКО  $\sigma_{10} = 0.5^\circ$  и  $\sigma_{10} = 5^\circ$  убывает до 0.7 и 0.3 соответственно. Данный эффект обусловлен пропусками подлежащих идентификации параметров в массивах значений  $\tilde{\theta}_i$  и  $\hat{\theta}_j$ ,  $i = \overline{1, I}$ ,  $j = \overline{1, J}$ .

За счет сокращения числа воздушных объектов, совершающих налет, до 15 значение  $P_0$  при  $\sigma_{10} = 5^\circ$  возрастает до 0.4. Вероятность правильной идентификации  $I = 10$  объектов в секторе углов до  $\Delta\theta = 90^\circ$  при  $\sigma_{10} = 0.5^\circ$  составляет 0.85, а при  $\sigma_{10} = 5^\circ$  снижается до 0.5 при  $P_1 = 0.01$ .

**Заключение.** С использованием критерия минимума среднего риска и оценок максимального правдоподобия угловых координат построен оптимальный алгоритм идентификации объектов при структурно-системном мониторинге обстановки. Показано, что наименьший средний риск принятия решений об идентификации обеспечивается за счет выбора гипотезы о соответствии параметров с максимальной условной вероятностью ситуации идентификации. Для сокращения вычислительных затрат на идентификацию получена квазиоптимальная модификация разработанного алгоритма с минимизацией вариантов группирования параметров идентификации, базирующаяся на исключении из сопоставляемых массивов существенно различающихся по значениям одностипных параметров. При малом числе пропусков и высокой априорной точности оценки одностипных параметров идентификация может быть выполнена путем группирования объектов с минимальными значениями квадратов разностей параметров, нормированных на суммарную дисперсию их измерений.

В интересах оценки эффективности идентификации объектов в программной среде Qt Creator на объектно-ориентированном языке программирования C++ с использованием системы управления базами данных PostgreSQL разработана имитационная модель и по результатам ее статистических испытаний найдены вероятности правильной идентификации воздушных целей и ложной тревоги при контроле воздушного пространства комплексами активно-пассивной радиолокации. Выявлены закономерности изменения показателей эффективности идентификации по мере увеличения числа, плотности размещения и СКО оценок одностипных параметров объектов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евдокименков В.Н., Красильщиков М.Н., Оркин С.Д. Управление смешанными группами пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов в условиях единого информационно-управляющего поля. М.: МАИ, 2015. 272 с.
2. Желтов С.Ю., Федунев Б.Е. Оперативное целеполагание в антропоцентрических объектах с позиции концептуальной модели “ЭТАП”. I. Структуры алгоритмов поддержки процесса решения задачи экипажем // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 57–71.
3. Меньшаков Ю.К. Теоретические основы технических разведок. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 536 с.
4. Управление и наведение беспилотных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий / Под ред. М.Н. Красильщикова и Г.Г. Себрякова. М.: Физматлит, 2003. 280 с.
5. Машков Г.М. Статистические критерии и показатели качества отождествления локационных объектов // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2001. Т. 44. № 9. С. 40–48.
6. Барабаш Ю.Л., Варский Б.В., Зиновьев В.Т. Вопросы статистической теории распознавания // Под ред. Б.В. Варского. М.: Сов. радио, 1967. 400 с.
7. Школьный Л.А., Ясько С.И. Отождествление РЭС на основе данных от разнородных датчиков информации // Радиотехника. 1999. № 9. С. 3–7.
8. Попова О.Э., Разиньков С.Н. Отождествление объектов в системах активно-пассивной радиолокации // Измерительная техника. 2008. № 6. С. 43–48.
9. Литикова А.С., Разиньков С.Н. Имитационная модель отождествления объектов при структурно-системном мониторинге обстановки // Вестн. Воронежск. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2018. № 1. С. 14–18.
10. Разиньков С.Н., Решетняк Е.А. Оптимальное и квазиоптимальное отождествление объектов при структурно-системном мониторинге обстановки // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2015. Т. 18. № 3. С. 42–47.

---

---

**ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ**

---

---

УДК 519.977

## ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ СИСТЕМ

© 2021 г. А. С. Бортакoвский<sup>a,\*</sup>, И. В. Урюпин<sup>a</sup>

<sup>a</sup> МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

\*e-mail: [asbortakov@mail.ru](mailto:asbortakov@mail.ru)

Поступила в редакцию 09.02.2021 г.

После доработки 09.03.2021 г.

Принята к публикации 31.05.2021 г.

Рассматривается задача оптимизации траекторий переключаемой системой, непрерывное движение которой описывается дифференциальными уравнениями, а дискретные изменения состояния (переключения) – рекуррентными включениями. Управление непрерывным движением осуществляется выбором состояния дискретной части системы. Моменты переключений, а также их количество заранее не заданы. Качество траектории характеризуется функционалом, в котором учитываются затраты на каждое переключение. Вместе с задачей оптимизации траекторий движения решается задача нахождения минимального количества переключений, при котором значение функционала качества не превышает заданной величины.

DOI: 10.31857/S000233882105005X

**Введение.** Переключаемые системы (ПС) служат математическими моделями многорежимных систем автоматического управления технологическими процессами и движущимися объектами [1–4]. Функционирование таких систем представляется непрерывно-дискретными процессами, которые имеют разнородное описание [4–6] и относятся к гибридным системам (ГС).

В статье рассматривается модель непрерывно-дискретной системы (НДС), в которой движение непрерывной части описывается дифференциальными уравнениями, а изменение состояния дискретной части (переключения) – рекуррентными включениями. Управление непрерывным движением осуществляется выбором состояния дискретной части, переключения которой в свою очередь зависят от состояния непрерывной части. В отличие от [7] количество переключений и моменты переключений заранее не заданы и подлежат оптимизации. При этом не исключаются многократные переключения в фиксированный момент времени [2–4]. Аналогичные модели ранее рассматривались в классе логико-динамических систем [8].

Из-за отсутствия управлений, явно входящих в уравнения движения, исследуемые ПС проще общих моделей ГС [9–18]. Получаемые для них условия оптимальности оказываются конструктивнее, чем в общем случае [11, 17]. Для построения достаточных условий оптимальности применяется разработанный в [3] подход с применением вспомогательных функций цены – так называемых образующих и условных функций цены. Вывод необходимых условий оптимальности вполне традиционный. Он связан с нахождением вариаций функционала, порождаемых вариациями моментов переключений и состояний дискретной части, в отличие от известных условий оптимальности ГС [12, 19, 20], которые доказываются при помощи принципа максимума.

Необходимые и достаточные условия оптимальности ПС доказываются для процессов с мгновенными многократными переключениями. Такие процессы, как правило, исключаются в задачах оптимизации ГС, несмотря на то, что именно они оказываются оптимальными не только в академических примерах, но и в приложениях, например в задачах группового управления.

Вместе с задачей оптимизации траектории ПС рассматривается задача минимизации количества переключений. Эта задача состоит в нахождении наименьшего количества переключений, при котором значение функционала качества не превышает заданного значения. Например, в классической задаче оптимального управления [21] допустимые управления – ограниченные измеримые (в прикладных задачах – кусочно-непрерывные). Можно сузить множество допустимых управлений, например, до кусочно-постоянных управлений с фиксированным числом переключений и искать решение в этом узком классе. Разумеется, при этом будем получать субоп-

тимальное управление, которое, однако, при неограниченном росте количества переключений будет стремиться к оптимальному. Здесь возникает вопрос: при каком количестве переключений субоптимальное управление будет достаточно близким (по функционалу качества) к оптимальному управлению с прикладной точки зрения? Другим очевидным приложением задач минимизации переключений служит классическая задача аппроксимации, в которой требуется определить наименьшее количество частичных отрезков аппроксимации, чтобы погрешность не превышала допустимую. Заметим также, что проблема минимизации количества переключений нередко встречается в прикладных задачах, в которых число переключений, как правило, ограничено. Например, для вывода спутника на геостационарную орбиту используется разгонный блок “Бриз-М” [22], количество включений маршевого двигателя которого ограничено (не более 10 запусков). Это ограничение, разумеется, учитывается при разработке схемы полета. Потребность минимизации количества переключений возникает естественным образом, если затраты на каждое переключение существенные. В этом случае желательно достичь цели управления с наименьшим количеством переключений.

В статье получены достаточные и необходимые условия оптимальности траекторий ПС, а также следствия этих условий для задачи оптимального управления непрерывными системами в классе кусочно-постоянных управлений. Приведен пример минимизации переключений кусочно-постоянного управления, демонстрирующий применение необходимых условий оптимальности.

**1. Постановки задач.** Пусть на заданном промежутке времени  $T = [t_0, t_F]$  динамическая система совершает  $N$  переключений (скачков) в моменты времени  $t_i, i = 1, \dots, N$ , образующие неубывающую конечную последовательность  $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N\}$ :

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} \triangleq t_F. \quad (1.1)$$

Движение ПС описывается соотношениями

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), y_i), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \quad (1.2)$$

$$y_i \in G(t_i, x(t_i), y_{i-1}) \setminus \{y_{i-1}\}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.3)$$

где  $x(t)$  – состояние непрерывной части системы в момент времени  $t \in T$ ,  $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n$ ;  $y_i$  – состояние дискретной части системы в момент времени  $t_i \in \mathcal{T}$ ,  $y_i \in Y \subset \mathbb{R}^m$ ;  $\mathcal{N} \triangleq \{i = 0, 1, \dots, N \mid t_i < t_{i+1}\}$  – множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков  $T_i \triangleq [t_i, t_{i+1})$  непрерывного движения системы. При  $t_i = t_{i+1}$  дифференциальное уравнение (1.2) не учитывается ( $i \notin \mathcal{N}$ ). Функция  $f : T \times X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывна на всей области определения вместе с производной  $\partial f / \partial x$ ; многозначное отображение  $(t, x, y) \rightarrow G(t, x, y) : T \times X \times Y \rightarrow 2^Y$  замкнуто [23]. При выборе состояния дискретной части, согласно включению (1.3), исключаются так называемые *фиктивные* переключения, при которых состояние системы не изменяется ( $y_i = y_{i-1}$ ) и фактического переключения нет. Возможное равенство последовательных моментов в (1.1) означает, что система совершает мгновенные многократные переключения [2, 3].

В соотношения (1.2), (1.3) управление не входит явным образом в отличие от НДС [7, 24]. Управление непрерывным движением (1.2) осуществляется выбором состояния дискретной части, а управление переключениями заменяется выбором состояния дискретной части, согласно рекуррентному включению (1.3). При фиксированном количестве переключений управляющих параметров в рассматриваемой модели ПС будет конечное число.

Начальное состояние системы задано условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (1.4)$$

Условия (1.4) не исключают одного или нескольких переключений в начальный момент времени  $t_0$ , поскольку первые несколько моментов переключений (1.1) могут совпадать. Конечное состояние определяется первым достижением терминальной поверхности

$$(t_F, x(t_F), y_N) \in \Gamma, \quad (1.5)$$

задаваемой системой уравнений  $\Gamma(t_F, x_F) = 0$ , где  $\Gamma : [t_0, +\infty) \times X \rightarrow \mathbb{R}^l$  – вектор-функция, непрерывная на всей области определения вместе с частными производными первого порядка. Аналогичные терминальные условия могут быть на левом конце траектории либо связывать оба конца [21, 23, 25–27].

Множество допустимых процессов (траекторий)  $\mathcal{D}(t_0, x_0, y_0)$  образовано парами  $d = (x(\cdot), y(\cdot))$ , включающими траекторию  $x(\cdot)$  непрерывной части системы – абсолютно непрерывную функцию  $x : T \rightarrow X$ , и траекторию  $y(\cdot)$  дискретной части системы – конечную последовательность  $y(\cdot) \triangleq \{(t_i, y_i) | t_i \in \mathcal{T}, y_i \in Y, i = 1, \dots, N\}$ , которые удовлетворяют уравнению движения (1.2), включению (1.3), начальным условиям (1.4) и терминальному ограничению (1.5). Подчеркнем, что множество моментов переключений  $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N\}$  служит областью определения траектории  $y(\cdot)$ , причем у разных допустимых траекторий количество переключений  $N = |\mathcal{T}|$  и сами моменты переключений могут не совпадать. При этом не исключается случай отсутствия переключений, когда  $N = 0$  и  $\mathcal{T} = \emptyset$  – пустое множество по определению. При необходимости функцию  $y(\cdot)$  будем доопределять на промежутках между переключениями, полагая  $y(t) = y_i, t \in (t_i, t_{i+1}), i \in \mathcal{N}$ .

Допустимый процесс ПС представляет собой совокупность траекторий движения непрерывной и дискретной частей системы, причем траектория  $y(\cdot)$  дискретной части системы, согласно уравнению (1.2), служит управлением для непрерывной части. В свою очередь траектория  $x(\cdot)$  непрерывной части через включение (1.3) влияет на выбор состояний дискретной части. Отметим, что процесс управления определяется конечным числом параметров: количеством переключений  $N$ , моментами переключений  $t_1, \dots, t_N$  и состояниями  $y_1, \dots, y_N$  и моментом окончания  $t_F$ .

На множестве допустимых процессов  $\mathcal{D}(t_0, x_0, y_0)$  задан функционал качества

$$I(d) = \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^0(t, x(t), y_i) dt + \sum_{i=1}^N g^+(t_i, x(t_i), y_{i-1}, y_i) + F(t_F, x(t_F), y_N), \quad (1.6)$$

где функция  $f^0 : T \times X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывна почти при всех  $t$  и ограничена снизу, функция  $F : [t_0, +\infty) \times X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  – ограничена снизу, а функция  $g^+ : T \times X \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$  – неотрицательная. Последнее условие позволяет рассматривать каждое слагаемое  $g^+$  в (1.6) как затраты (или “штраф”) при переключении  $y_{i-1} \rightarrow y_i$ . В силу непрерывности функции  $f^0(t, x, y)$  по всем аргументам функция  $f^0[t] = f^0(t, x(t), y)$  будет измеримой и ограниченной, т.е. суммируемой, для любой допустимой траектории  $d = (x(\cdot), y(\cdot))$ . Поэтому функционал (1.6) определен на  $\mathcal{D}(t_0, x_0, y_0)$ . Отметим, что количество переключений  $N$  и моменты переключений  $t_1, \dots, t_N$  в функционале (1.6) не фиксированы и являются ресурсом управления.

1.1. Задача оптимизации. Требуется найти минимальное значение функционала (1.6) и оптимальный процесс  $d^* = (x^*(\cdot), y^*(\cdot)) \in \mathcal{D}(t_0, x_0, y_0)$ , на котором это значение достигается:

$$I(d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}(t_0, x_0, y_0)} I(d). \quad (1.7)$$

Если наименьшее значение (1.7) не существует, то может быть поставлена задача нахождения минимизирующей последовательности допустимых процессов [25]. Количество переключений у процессов минимизирующей последовательности может оставаться конечным или неограниченно возрастать. Бесконечное количество переключений у оптимального процесса становится невозможным, если усилить условие неотрицательности функции  $g^+$  в (1.6):

$$g^+(t, x_i, y_{i-1}, y_i) \geq \text{const} > 0. \quad (1.8)$$

Применение таких “штрафов” в функционале качества исключает последовательности процессов с неограниченным ростом числа переключений как неминимизирующие.

Отметим, что управляющие параметры в задаче (1.7) образуют “управляющий комплекс”, который включает: количество переключений, моменты переключений и состояния дискретной части системы, а также момент окончания процесса управления. При заданном количестве переключений  $N$  имеется  $N(q + 1) + 1$  управляющих параметров. Как правило, решение поставленной задачи  $I \rightarrow \min$  сводится к решению ряда задач  $I_N \rightarrow \min$  с фиксированным числом переключений  $N$ , которое последовательно увеличивается  $N = 0, 1, \dots$

1.2. Задачи оптимизации с фиксированным или ограниченным количеством переключений. В прикладных задачах нередко возникают ограничения на количество переключений. Задача минимизации функционала (1.6) на множестве допустимых процессов с заданным числом переключений формулируется следующим образом. Пусть  $\mathcal{D}_N(t_0, x_0, y_0)$  – множество допустимых процессов из  $\mathcal{D}(t_0, x_0, y_0)$  с  $N$ -переключениями, быть может фиктивными. Подчеркнем, что количество переключений  $N$  у всех процессов из  $\mathcal{D}_N(t_0, x_0, y_0)$  одинаковое (равное  $N$ ), но моменты переключений (1.1) у разных процессов могут не совпадать. Обозначим через  $I_N(d)$  функционал (1.6) при фиксированном количестве переключений  $N$ . Он определен на подмножестве  $\mathcal{D}_N(t_0, x_0, y_0)$  множества  $\mathcal{D}(t_0, x_0, y_0)$ . Требуется найти минимальное значение функционала (1.6) на множестве  $\mathcal{D}_N(t_0, x_0, y_0)$  и процесс  $d^N \in \mathcal{D}_N(t_0, x_0, y_0)$ , на котором это значение достигается:

$$I_N(d^N) = \min_{d \in \mathcal{D}_N(t_0, x_0, y_0)} I_N(d). \quad (1.9)$$

Такой процесс  $d^N$  будем называть *условно оптимальным*, имея в виду его оптимальность при дополнительном условии – заданном количестве переключений  $N$ .

Количество переключений технических устройств, как правило, ограничено. Поэтому актуальной является задача оптимизации ПС при ограниченном числе переключений. В этом случае задачу оптимизации (1.7) нужно решать при дополнительном условии  $N \leq N_{\max}$ , где  $N_{\max}$  – максимально допустимое число переключений. Такое ограничение можно учесть в определении множества допустимых процессов либо дополнить задачу (1.9) целочисленной оптимизацией

$$I = \min_{0 \leq N \leq N_{\max}} \min_{d \in \mathcal{D}_N(t_0, x_0, y_0)} I_N(d).$$

1.3. Задачи минимизации количества переключений при ограниченном функционале качества. Для систем, управляемых с переключениями, можно сформулировать задачи оптимизации количества переключений при ограничениях на показатель качества управления. Математическая формулировка такой задачи может быть следующей. Для ПС (1.1)–(1.5) требуется найти наименьшее количество переключений  $N^\varepsilon$ , при котором наименьшее значение  $I_{N^\varepsilon}(d^{N^\varepsilon})$  функционала (1.6) не превосходит заданной величины  $\varepsilon$ :

$$I_{N^\varepsilon}(d^{N^\varepsilon}) = \min_{d \in \mathcal{D}_{N^\varepsilon}(t_0, x_0, y_0)} I_{N^\varepsilon}(d) \leq \varepsilon. \quad (1.10)$$

Сравнивая поставленные задачи, отмечаем, что в задаче (1.7) нужно найти оптимальное количество переключений, в задаче (1.9) количество переключений  $N$  фиксировано, поэтому нужно получить только условный (с  $N$  переключениями) оптимальный процесс. В задаче (1.10) нужно искать минимальное количество переключений  $N^\varepsilon$ , при котором условный (с  $N^\varepsilon$  переключениями) оптимальный процесс обеспечивает достижение заданного уровня  $\varepsilon$  функционала качества. Заметим, что вопрос минимизации переключений возникает при численном (приближенном) решении разных задач, например при аппроксимации функций. В этом случае величина  $\varepsilon > 0$  задает точность приближенного решения.

Важный частный случай задачи (1.10) возникает, когда функционал  $I_N(d)$  играет роль характеристической функции множества допустимых процессов. Например, определим функционал качества следующим образом:  $I_N(d) = 0$ , если множество  $\mathcal{D}_N(t_0, x_0, y_0)$  не пусто, и  $I_N(d) = +\infty$ , если  $\mathcal{D}_N(t_0, x_0, y_0) = \emptyset$ . В этом случае задача минимизации переключений формулируется так. Найти минимальное количество переключений  $N^0$ , при котором наименьшее значение  $I_{N^0}(d^{N^0})$  функционала  $I_N(d)$  равно нулю:

$$I_{N^0}(d^{N^0}) = \min_{d \in \mathcal{D}_{N^0}(t_0, x_0, y_0)} I_{N^0}(d) = 0. \quad (1.11)$$

Иначе говоря, требуется найти минимальное количество переключений  $N^0$ , при котором существует допустимый процесс с  $N^0$  переключениями.

Такая задача прямо связана с построением множеств достижимости (или разрешимости) для управляемой системы. Пусть, например, конечное состояние системы  $x(t_F) = x_F$  задано, а задача (1.11) имеет решение  $N^0$ . Значит, конечное состояние  $x_F$  достижимо из начального состоя-

ния  $x_0$  за  $N^0$  переключений, или, что то же самое, начальное состояние  $x_0$  принадлежит множеству разрешимости для процессов с  $N^0$  переключениями.

**2. Достаточные условия оптимальности.** Применение метода динамического программирования [28] опирается на понятие функции цены (функции Гамильтона–Якоби–Беллмана), которая определяется минимальным значением функционала оставшихся потерь. Для рассматриваемой ПС применяется метод построения достаточных условий, разработанный для более общей модели гибридных систем [3]. Согласно этому методу, функция цены строится при помощи вспомогательных функций, так называемых образующих функции цены [2–4]. Определим вспомогательные функции для задачи (1.7).

Обозначим через  $\mathcal{D}(t, x, y)$  множество допустимых процессов, удовлетворяющих начальным условиям  $x(t) = x$ ,  $y(t) = y$ , каждый из которых имеет конечное число переключений на  $[t, t_F]$ . Оставшиеся переключения происходят в моменты  $t_1, \dots, t_k$ , образующие неубывающую последовательность на промежутке  $[t, t_F]$ :

$$t \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_{k+1} \triangleq t_F. \tag{2.1}$$

Заметим, что количество  $k$  оставшихся переключений и сами моменты  $t_1, \dots, t_k$  переключений не фиксированы и у разных допустимых процессов могут не совпадать. Последовательность (2.1) отличается от (1.1) только стартовым моментом времени.

На множестве  $\mathcal{D}(t, x, y)$  допустимых процессов определим функционал оставшихся потерь, аналогичный (1.6):

$$I(d) = \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^0(t, x(t), y_i) dt + \sum_{i=1}^k g^+(t_i, x(t_i), y_{i-1}) + F(t_F, x(t_F), y_N). \tag{2.2}$$

Функция цены  $\varphi(t, x, y)$  по определению равна значению функционала оставшихся потерь (2.2), вычисленному на оптимальном процессе с начальными условиями  $x(t) = x$ ,  $y(t) = y$ . Иначе говоря, функция цены равна минимальному значению функционала оставшихся потерь (2.2) на множестве допустимых процессов  $\mathcal{D}(t, x, y)$ :

$$\varphi(t, x, y) = \min_{d \in \mathcal{D}(t, x, y)} I(d). \tag{2.3}$$

Для задачи (1.7) определим *образующую* функции цены, значение  $\varphi^k(t, x, y)$  которой равно значению функционала оставшихся потерь (2.2), вычисленному на процессе, который оптимален среди всех допустимых процессов, исходящих из начальной позиции  $(t, x, y)$  и имеющих ровно  $k$  переключений, быть может, фиктивных. Если обозначить через  $\mathcal{D}_k(t, x, y)$  множество допустимых процессов из  $\mathcal{D}(t, x, y)$ , имеющих ровно  $k$  переключений, быть может, фиктивных, а через  $I_k(d)$  – функционал (2.2) при фиксированном количестве  $k$  оставшихся переключений, то

$$\varphi^k(t, x, y) = \min_{d \in \mathcal{D}_k(t, x, y)} I_k(d).$$

Если для позиции  $(t, x, y)$  нет допустимых процессов с  $k$  переключениями, т.е. множество  $\mathcal{D}_k(t, x, y)$  пусто, то полагаем  $\varphi^k(t, x, y) = +\infty$ . Функция цены находится по своим образующим

$$\varphi(t, x, y) = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi^k(t, x, y). \tag{2.4}$$

Здесь и далее  $\mathbb{Z}_+$  – множество целых неотрицательных чисел.

Вывод уравнений, которым удовлетворяют образующие функции цены, опирается на принцип оптимальности Беллмана, модифицированный для задач с переключениями. Согласно этому принципу, оптимальный процесс с  $k$  оставшимися переключениями, после первого переключения, является оптимальным процессом с  $k - 1$  оставшимися переключениями.

Нулевую образующую  $\varphi^0(t, x, y)$  находим как значение функционала (2.2) на оптимальном процессе  $(x(\cdot), y(\cdot))$  без переключений, т.е. при постоянном состоянии  $y(t) = y$  дискретной части. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\varphi_t^0(t, x, y) + \varphi_x^0(t, x, y)f(t, x, y) + f^0(t, x, y) = 0$$

с терминальным условием на поверхности (1.5):

$$\varphi^0(t_F, x, y) = F(t_F, x, y), \quad \Gamma(t_F, x) = 0.$$

Решение этой задачи можно представить в виде

$$\varphi^0(t, x, y) = F(t_F, x(t_F), y) + \int_t^{t_F} f^0(\theta, x(\theta), y) d\theta, \quad \Gamma(t_F, x(t_F)) = 0, \quad (2.5)$$

где  $x(\theta) = \mathbf{x}(\theta | t, x, y)$ ,  $t \leq \theta \leq t_F$ , — решение задачи Коши

$$\dot{x}(\theta) = f(\theta, x(\theta), y), \quad x(t) = x, \quad (2.6)$$

при постоянном значении  $y$ . Нулевая образующая  $\varphi^0(t, x, y)$  находится по формуле (2.5) только для допустимых конечных позиций  $(t_F, x(t_F)) \in \Gamma$ . Если ограничение  $\Gamma(t_F, x(t_F)) = 0$  в (2.5) не выполняется, то полагаем  $\varphi^0(t, x, y) = +\infty$ .

Выведем уравнение для остальных образующих. Пусть известна образующая  $\varphi^{k-1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Получим следующую образующую  $\varphi^k$ . Траекторию, исходящую из позиции  $(t, x, y)$ , разбиваем на две части — до первого переключения в момент времени  $\tau$  и после него. Значение  $\varphi^k(t, x, y)$  складывается из “расходов” на непрерывное движение до переключения, затрат на переключение и оставшихся потерь после переключения. Минимальное значение оставшихся потерь, согласно принципу оптимальности, вычисляется по образующей  $\varphi^{k-1}$ . Затраты на непрерывное движение и скачок зависят от момента переключения  $\tau \geq t$  и состояния  $z$  системы после переключения  $y \rightarrow z$ . Минимизируя по этим параметрам, получаем значение образующей

$$\varphi^k(t, x, y) = \min_{t \leq \tau \leq t_F} \left\{ \int_t^{\tau} f^0(\theta, x(\theta), y) d\theta + \min_{z \in G(\tau, x(\tau), y)} [\varphi^{k-1}(\tau, x(\tau), z) + g^+(\tau, x(\tau), y, z)] \right\}. \quad (2.7)$$

Здесь  $x(\theta) = \mathbf{x}(\theta | t, x, y)$ ,  $t \leq \theta \leq \tau$ , — решение задачи Коши (2.6) при постоянном значении  $y$ . Уравнение (2.7) позволяет найти образующие  $\varphi^k(t, x, y)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Минимальное значение функционала (2.2) находится по функции цены (2.3), согласно равенству (2.4):

$$\min_{d \in \mathcal{D}(t, x, y)} I(d) = \varphi(t, x, y) = \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi_k(t, x, y). \quad (2.8)$$

При решении уравнений (2.7) выполняются две операции минимизации. В результате минимизации правой части (2.7) определяем оптимальную позиционную конструкцию дискретной части системы

$$\mathbf{y}_k(\tau, x, y) = \arg \min_{z \in G(\tau, x, y)} [\varphi^{k-1}(\tau, x, z) + g^+(\tau, x, y, z)] \quad (2.9)$$

и оптимальный момент первого из оставшихся  $k$  переключений

$$\tau_k(t, x, y) = \arg \min_{t \leq \tau \leq t_F} \left\{ \int_t^{\tau} f^0(\theta, x(\theta), y) d\theta + \min_{z \in G(\tau, x(\tau), y)} [\varphi^{k-1}(\tau, x(\tau), z) + g^+(\tau, x(\tau), y, z)] \right\}. \quad (2.10)$$

Точки минимума (2.9), (2.10) находятся при дополнительном условии — заданном количестве  $k$  оставшихся переключений. Оптимальное количество переключений определяется в результате минимизации (2.4):

$$\mathbf{k}(t, x, y) = \arg \min_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi^k(t, x, y). \quad (2.11)$$

Позиционные конструкции (2.9)–(2.11) позволяют найти оптимальный процесс. Действительно, пусть система находится в позиции  $(t_0, x_0, y_0)$ , т.е. удовлетворяет начальным условиям (1.4). Тогда для этой позиции определяем оптимальное количество переключений  $N = \mathbf{k}(t_0, x_0, y_0)$ , а также момент первого переключения  $t_1 = \tau_N(t_0, x_0, y_0)$ . Если  $t_1 > t_0$ , то на промежутке  $[t_0, t_1)$  траектория  $x(t)$  непрерывной части удовлетворяет уравнению (1.2) с параметром  $y_0$ . В конце промежутка  $t = t_1$  происходит переключение  $y_0 \rightarrow y_1 = \mathbf{y}_N(t_1, x(t_1), y_0)$ . Если  $t_1 = t_0$ , то дискретная часть

изменяет состояние сразу, согласно (2.9):  $y_0 \rightarrow y_1 = \mathbf{y}_N(t_1, x_0, y_0)$ . Состояние непрерывной части системы при этом сохраняется. Таким образом, в любом случае система приходит в позицию  $(t_1, x_1, y_1)$ , в которой выполняются те же действия, за исключением поиска оптимального количества переключений, так как оно равно  $N - 1$ . Если в начальной позиции  $(t_0, x_0, y_0)$  оптимальное количество переключений равно нулю:  $\mathbf{k}(t_0, x_0, y_0) = 0$ , то переключений дискретной части нет, а движение непрерывной части происходит, согласно уравнению (1.2), с параметром  $y_0$ .

**Теорема 1.** Если для задачи (1.1)–(1.7) существует последовательность функций  $\varphi^k : T \times X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , удовлетворяющих на области определения уравнениям (2.5), (2.7), то для оптимальности допустимого процесса  $d = (x(\cdot), y(\cdot)) \in \mathcal{D}(t_0, x_0, y_0)$  с моментами переключений  $t_1, \dots, t_N$ , образующими неубывающую последовательность (1.1), достаточно, чтобы выполнялись условия

$$N = \mathbf{k}(t_0, x_0, y_0), \tag{2.12}$$

$$y_i = \mathbf{y}_{N-i+1}(t_i, x(t_i), y_{i-1}), \tag{2.13}$$

$$t_i = \mathbf{t}_{N-i+1}(t_{i-1}, x(t_{i-1}), y_{i-1}), \tag{2.14}$$

где  $t_{i-1} \leq t < t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . При  $N = 0$  формулы (2.13), (2.14) не используются.

**Доказательство.** Уравнение (2.7), учитывая позиционные конструкции (2.9), (2.10), можно представить в виде

$$\varphi^k(t, x, y) = \int_t^{\tau_k} f^0(\theta, x(\theta), y) d\theta + \varphi^{k-1}(\tau_k, x(\tau_k), y_k) + g^+(\tau_k, x(\tau_k), y, y_k), \tag{2.15}$$

где  $y_k = \mathbf{y}_k(\tau_k, x(\tau_k), y)$ ,  $\tau_k = \mathbf{\tau}_k(t, x, y)$ , а  $x(\tau_k) = \mathbf{x}(\tau_k | t, x, y)$  – решение задачи Коши (2.6). Заменим в (2.15)  $t = t_{i-1}$ ,  $x = x(t_{i-1})$ ,  $y = y_{i-1}$ :

$$\varphi^k(t_{i-1}, x(t_{i-1}), y_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{\tau_k} f^0(\theta, x(\theta), y) d\theta + \varphi^{k-1}(\tau_k, x(\tau_k), y_k) + g^+(\tau_k, x(\tau_k), y_{i-1}, y_k). \tag{2.16}$$

Здесь  $y_k = \mathbf{y}_k(\tau_k, x(\tau_k), y_{i-1})$ ,  $\tau_k = \mathbf{\tau}_k(t_{i-1}, x(t_{i-1}), y_{i-1})$ , а  $x(\tau_k) = \mathbf{x}(\tau_k | t_{i-1}, x(t_{i-1}), y_{i-1})$  – решение задачи Коши (2.6). Для  $k = N - i + 1$ , согласно (2.14), (2.13), имеем

$$\tau_k = \mathbf{\tau}_k(t_{i-1}, x(t_{i-1}), y_{i-1}) = t_i, \quad x(\tau_k) = \mathbf{x}(t_i | t_{i-1}, x(t_{i-1}), y_{i-1}) = x(t_i), \quad y_k = \mathbf{y}_k(t_i, x(t_i), y_{i-1}) = y_i.$$

Подставляя эти выражения в (2.16), запишем разность образующих

$$\varphi^k(t_{i-1}, x(t_{i-1}), y_{i-1}) - \varphi^{k-1}(t_i, x(t_i), y_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f^0(\theta, x(\theta), y_{i-1}) d\theta + g^+(t_i, x(t_i), y_{i-1}, y_i). \tag{2.17}$$

Суммируя равенства (2.17) при  $i = 1, \dots, N$  (соответственно при  $k = N, \dots, 1$ ), находим

$$\varphi^N(t_0, x(t_0), y_0) - \varphi^0(t_N, x(t_N), y_N) = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} f^0(\theta, x(\theta), y_{i-1}) d\theta + \sum_{i=1}^N g^+(t_i, x(t_i), y_{i-1}, y_i). \tag{2.18}$$

Учитывая в (2.18) значение нулевой образующей из (2.5), приходим к соотношению

$$\varphi^N(t_0, x(t_0), y_0) = \sum_{i=1}^{N+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f^0(\theta, x(\theta), y_{i-1}) d\theta + \sum_{i=1}^N g^+(t_i, x(t_i), y_{i-1}, y_i).$$

Значит, для допустимого процесса  $d = (x(\cdot), y(\cdot))$  выполняется равенство  $\varphi^N(t_0, x_0, y_0) = I(d)$ . Учитывая условие (2.12), заключаем, что  $\varphi(t_0, x_0, y_0) = I(d)$ , т.е. этот процесс  $d$  оптимальный, так как значение функционала равно значению функции цены, согласно (2.8). Доказательство теоремы при отсутствии переключений (т.е. при  $N = 0$ ) сводится к получению равенства  $\varphi^0(t_0, x_0, y_0) = I(d)$  из (2.5) и условия (2.12).

**3. Необходимые условия оптимальности.** Вывод условий оптимальности по методике [26] состоит в следующем: используя вариации управления, составляем уравнение для вариации траектории; выражаем вариацию функционала через вариации управления и траектории, исключаем

из полученного выражения вариацию траектории, вводя вспомогательные переменные, удовлетворяющие сопряженной системе и условиям трансверсальности (в форме А.М. Летова [29]). Будем сравнивать значения функционала (1.6) на опорном (невозмущенном) допустимом процессе  $d = (x(\cdot), y(\cdot))$  и возмущенном допустимом процессе  $\tilde{d} = (\tilde{x}(\cdot), \tilde{y}(\cdot))$ . Возмущенный процесс получается в результате вариации  $\delta y(\cdot)$  опорной траектории  $y(\cdot)$  дискретной части системы, что приводит к малым вариациям  $\delta x(\cdot)$  опорной траектории  $x(\cdot)$  непрерывной части системы, а также малым вариациям  $\delta I$  функционала. Перечисленные требования ограничивают применяемые вариации  $\delta y(\cdot)$ . Действительно, количество переключений  $\tilde{N}$  у возмущенного процесса должно совпадать с числом переключений  $N$  невозмущенного. В противном случае, из-за условия (1.8), приращение функционала  $\Delta I = I(\tilde{d}) - I(d)$  будет конечным. Поэтому используем два типа вариаций управляющих параметров: либо малые изменения  $\delta y_i$  управления  $y_i$  и малую вариацию  $\delta t_F$  момента окончания, либо малые вариации  $\delta t_i$  моментов переключений  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Первый случай. Малые вариации  $\delta y_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , траектории  $y(\cdot)$  и момента окончания  $\delta t_F$ , при фиксированных моментах переключений. Вариация  $\delta x(\cdot)$  траектории динамической части удовлетворяет уравнению [26]

$$\delta \dot{x}(t) = f_x[t]\delta x(t) + f_y[t]\delta y_i, \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}. \quad (3.1)$$

Здесь и далее принято, что аргумент  $t$ , заключенный в квадратные скобки, означает, что функция вычислена на опорном режиме в указанный момент времени [26], например  $f_x[t] = f_x(t, x(t), y(t))$ . Вариация  $\delta x(\cdot)$  имеет такой же порядок малости, что и  $\delta y(\cdot)$ . Уравнение в вариациях (3.1) выполняются с точностью  $o(\|\delta y(\cdot)\|)$ , где  $\|\delta y(\cdot)\| = \max\{|\delta y_1|, \dots, |\delta y_N|\}$  считается величиной первого порядка малости. В начальный момент времени вариация нулевая:  $\delta x(t_0) = 0$ , а в конечный – удовлетворяет условию

$$\delta \Gamma[t_F] = 0 \Leftrightarrow \Gamma_t[t_F]\delta t_F + \Gamma_x[t_F]\delta x_F = 0. \quad (3.2)$$

Запишем вариацию функционала (1.6):

$$\begin{aligned} \delta I = & \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{f_x^0[t]\delta x(t) + f_y^0[t]\delta y_i\} dt + \sum_{i=1}^N \{g_x^+[t_i]\delta x(t_i) + g_y^+[t_i]\delta y_{i-1} + g_z^+[t_i]\delta y_i\} + \\ & + \{F_t[t_F] + f^0[t_F]\}\delta t_F + F_x[t_F]\delta x_F + F_y[t_F]\delta y_N, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $\delta x_F = \delta x(t_F) + f[t_F]\delta t_F$ . Значения всех производных в (3.3) вычисляются на невозмущенном процессе, причем частные производные функции  $g^+(t, x, y_{i-1}, y_i)$  по  $y_{i-1}$  и  $y_i$  обозначаются соответственно через  $g_y^+$  и  $g_z^+$ , как у функции  $g^+(t, x, y, z)$ .

Теперь следует исключить в (3.3) вариации  $\delta x$  при помощи вспомогательных функций. Для этого будем использовать тождество

$$\varphi_N(t_F) - \varphi_0(t_0) = \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\varphi}_i(t) dt + \sum_{i=1}^N [\varphi_i(t_i) - \varphi_{i-1}(t_{i-})], \quad (3.4)$$

справедливое для скалярных функций  $\varphi_i(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , определенных соответственно в точках  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , и абсолютно непрерывных на  $T_i$ ,  $i \in \mathcal{N}$ . В тождестве (3.4) через  $t_{i-}$  обозначен момент времени непосредственно перед  $i$ -м скачком, т.е.  $t_{i-} = t_i - 0$  при  $t_{i-1} < t_i$  и  $t_{i-} = t_{i-1}$  при  $t_{i-1} = t_i$ . Функция  $\varphi_N$  определена на промежутке  $T_N = [t_N, t_F]$ , в частности, в точке  $T_N = \{t_N\}$ , если  $t_F = t_N$ . Тождество доказывается по формуле Ньютона–Лейбница.

Введем функцию Гамильтона–Понтрягина (ГП)

$$H(\psi, t, x, y) = \psi f(t, x, y) - f^0(t, x, y), \quad (3.5)$$

где  $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$  – вспомогательные переменные. Для промежутка  $T$  с разбиением (1.1) рассмотрим вспомогательные функции  $\psi_i : T_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , определенные на  $T_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,

и абсолютно непрерывные на ненулевых (по длине) промежутках  $T_i$ ,  $i \in \mathcal{N}$ . Напомним, что  $T_i = \{t_i\}$  при  $t_i = t_{i+1}$ ,  $i \notin \mathcal{N}$ . Предполагаем, что вспомогательные функции удовлетворяют:

1) сопряженному уравнению

$$\dot{\psi}_i(t) = -H_x(\psi_i(t), t, x(t), y_i), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}; \quad (3.6)$$

2) промежуточным условиям

$$\psi_i(t_i) - \psi_{i-1}(t_{i-}) = g_x^+(t_i, x(t_i), y_{i-1}, y_i), \quad i = 1, \dots, N; \quad (3.7)$$

3) условию трансверсальности

$$\{F_i[t_F] - H[t_F]\}\delta t_F + \{F_x[t_F] + \psi_N(t_F)\}\delta x_F = 0 \quad (3.8)$$

для любых вариаций, связанных равенством  $\Gamma_i[t_F]\delta t_F + \Gamma_x[t_F]\delta x_F = 0$ . В (3.8), как и ранее,  $H[t_F] \triangleq H(\psi_N(t_F), t_F, x(t_F), y_N)$  – значение функции ГП на опорном режиме в момент  $t_F$ .

Записываем тождество (3.4) для функций  $\varphi_i(t) = \psi_i(t)\delta x(t)$ . Учитывая непрерывность  $\delta x(t)$ , а также равенство  $\delta x(t_0) = 0$ , получаем

$$\psi_N(t_F)\delta x(t_F) - \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{\dot{\psi}_i(t)\delta x(t) + \psi_i(t)\delta \dot{x}(t)\}dt - \sum_{i=1}^N [\psi(t_i) - \psi_{i-1}(t_{i-})]\delta x(t_i) = 0. \quad (3.9)$$

Добавляем левую часть этого выражения в правую часть (3.3). В терминальных членах исчезнут вариации  $\delta t_F$  и  $\delta x(t_F)$ . Действительно, учитывая равенство  $\delta x(t_F) = \delta x_F - f[t_F]\delta t_F$ , имеем

$$\psi_N(t_F)\delta x(t_F) + f^0[t_F]\delta t_F = \psi_N(t_F)\{\delta x_F - f[t_F]\delta t_F\} + f^0[t_F]\delta t_F = \psi_N(t_F)\delta x_F - H[t_F]\delta t_F.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \{F_i[t_F] + f^0[t_F]\}\delta t_F + F_x[t_F]\delta x_F + F_y[t_F]\delta y_N + \psi_N(t_F)\delta x(t_F) = \\ & = \{F_i[t_F] - H[t_F]\}\delta t_F + \{F_x[t_F] + \psi_N(t_F)\}\delta x_F + F_y[t_F]\delta y_N = F_y[t_F]\delta y_N, \end{aligned}$$

согласно условию трансверсальности (3.8).

Преобразуем интегральные члены после добавления к правой части (3.3) левой части (3.9). С учетом уравнения в вариациях (3.1) и сопряженного уравнения (3.6) подынтегральная функция не будет содержать вариацию  $\delta x(t)$ :

$$\begin{aligned} & f_x^0[t]\delta x(t) + f_y^0[t]\delta y_i - \dot{\psi}_i(t)\delta x(t) - \psi_i(t)\delta \dot{x}(t) = f_x^0[t]\delta x(t) + \{\psi_i(t)f_x[t] - f_x^0[t]\}\delta x(t) + \\ & + f_y^0[t]\delta y_i - \psi_i(t)\{f_x[t]\delta x(t) + f_y[t]\delta y_i\} = \{\psi_i(t)f_y[t] - f_y^0[t]\}\delta y_i = -H_y[t]\delta y_i. \end{aligned}$$

Осталось преобразовать суммы. Записываем слагаемые с вариациями  $\delta x(t_i)$ :

$$g_x^+[t_i]\delta x(t_i) - [\psi(t_i) - \psi_{i-1}(t_{i-})]\delta x(t_i) = \{g_x^+[t_i] - \psi(t_i) + \psi_{i-1}(t_{i-})\}\delta x(t_i) = 0,$$

согласно промежуточным условиям (3.7). Таким образом, вариации траектории  $\delta x(\cdot)$  и момента окончания  $\delta t_F$  исключены из выражения (3.3). Теперь вариация функционала (1.6) зависит только от вариаций  $\delta y_i$ , причем  $\delta y_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} \delta I &= -\sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_y[t]\delta y_i dt + \sum_{i=1}^N \{g_y^+[t_i]\delta y_{i-1} + g_z^+[t_i]\delta y_i\} + F_y[t_F]\delta y_N = \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \{g_y^+[t_{i+1}] + g_z^+[t_i] - \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_y[t]dt\}\delta y_i + \{g_z^+[t_N] + F_y[t_F] - \int_{t_N}^{t_F} H_y[t]dt\}\delta y_N. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Второй случай. Вариации  $\delta t_i$  моментов  $t_i$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Предполагаем, что они настолько малы, что выполняются неравенства

$$t_0 \leq t_1 + \delta t_1 \leq \dots \leq t_N + \delta t_N \leq t_F.$$

Величину  $|\delta t| = |\delta t_1| + \dots + |\delta t_N|$  будем считать малой первого порядка. Вариация  $\delta x(\cdot)$  имеет тот же порядок. Вариации  $\delta y(t) = \tilde{y}(t) - y(t)$  отличны от нуля соответственно на промежутках  $\Delta T_i$  между

точками  $t_i$  и  $t_i + \delta t_i$ , причем  $\delta y(t) = y_{i-1} - y_i$  при  $\delta t_i > 0$  и  $\delta y(t) = y_i - y_{i-1}$  при  $\delta t_i < 0$ . Вариация  $\delta x(\cdot)$  траектории динамической части удовлетворяет уравнению [26]

$$\delta \dot{x}(t) = f_x[t] \delta x(t) + \Delta f[t], \quad (3.11)$$

где разность  $\Delta f[t] = f(t, x(t), \tilde{y}(t)) - f(t, x(t), y(t))$  отлична от нуля только на множестве малой меры  $|\delta t|$ , где  $\delta y(t) \neq 0$ . Уравнение в вариациях (3.11) справедливо с точностью до  $o(|\delta t|)$ . Учитывая члены только первого порядка малости, запишем приращение затрат на одно переключение:

$$\begin{aligned} \Delta g^+[t_i] &= g^+(t_i + \delta t_i, x(t_i + \delta t_i) + \delta x(t_i + \delta t_i), y_{i-1}, y_i) - g^+(t_i, x(t_i), y_{i-1}, y_i) = \\ &= g_x^+(t_i, x(t_i), y_{i-1}, y_i) \delta t_i + g_x^+(t_i, x(t_i), y_{i-1}, y_i) \delta x(t_i) + g_x^+(t_i, x(t_i), y_{i-1}, y_i) \dot{x}(t_i) \delta t_i = \\ &= g_x^+[t_i] \delta x(t_i) + \{g_t^+[t_i] + g_x^+[t_i] f[t_i]\} \delta t_i. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В последнем преобразовании использовалось равенство  $\delta \dot{x}(t) = \Delta f[t]$ , которое получается из (3.11) при отбрасывании бесконечно малой  $f_x[t] \delta x(t)$ . Точка  $t$  лежит между точками  $t_i$  и  $t_i + \delta t_i$ , поэтому

$$\Delta f[t] = \begin{cases} f(t_i, x(t_i), y_{i-1}) - f(t_i, x(t_i), y_i), & \delta t_i > 0, \\ f(t_i, x(t_i), y_i) - f(t_i, x(t_i), y_{i-1}), & \delta t_i < 0. \end{cases}$$

Если обозначить  $\Delta f[t_i] = f(t_i, x(t_i), y_{i-1}) - f(t_i, x(t_i), y_i)$ , то приращение (3.12) можно представить в виде

$$\Delta g^+[t_i] = g_x^+[t_i] \delta x(t_i) + \{g_t^+[t_i] + g_x^+[t_i] f[t_i]\} \delta t_i$$

для вариации  $\delta t_i$  любого знака.

Преобразуем интегральные члены приращения функционала (1.6). Для  $\delta t_i > 0$  и  $\delta t_{i+1} > 0$  имеем

$$\int_{t_i + \delta t_i}^{t_{i+1} + \delta t_{i+1}} \tilde{f}^0[t] dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^0[t] dt = \int_{t_i + \delta t_i}^{t_{i+1}} \{\tilde{f}^0[t] - f^0[t]\} dt + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+1} + \delta t_{i+1}} \tilde{f}^0[t] dt - \int_{t_i}^{t_i + \delta t_i} f^0[t] dt.$$

Суммируем эти выражения, учитывая, что  $\delta t_0 = 0$ ,  $\delta t_{N+1} = 0$ :

$$\sum_{i=0}^N \int_{t_i + \delta t_i}^{t_{i+1}} \{\tilde{f}^0[t] - f^0[t]\} dt + \sum_{i=1}^N \int_{t_i}^{t_i + \delta t_i} \{\tilde{f}^0[t] - f^0[t]\} dt = \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{\tilde{f}^0[t] - f^0[t]\} dt.$$

Для отрицательных вариаций  $\delta t_i$  получаем такое же выражение.

Теперь находим вариацию функционала (1.6)

$$\delta I = \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{f_x^0[t] \delta x(t) + \Delta f^0[t]\} dt + \sum_{i=1}^N \{g_t^+[t_i] + g_x^+[t_i] \Delta f[t_i]\} \delta t_i + g_x^+[t_i] \delta x(t_i) + F_x[t_F] \delta x(t_F). \quad (3.13)$$

Здесь  $\Delta f^0[t] = f^0(t, x(t), \tilde{y}(t)) - f^0(t, x(t), y(t))$ . Исключаем вариацию  $\delta x(\cdot)$  в выражении (3.13). Пусть, как и ранее, вспомогательная функция  $\psi(\cdot)$  удовлетворяет условиям (3.6)–(3.8). Прибавляем к правой части (3.13) левую часть (3.9). Сумма терминальных членов равна нулю, согласно условию трансверсальности, которое при  $\delta t_F = 0$  и  $\delta y_N = 0$  имеет вид  $F_x[t_F] \delta x(t_F) + \psi(t_F) \delta x(t_F) = 0$ . Вариации  $\delta x(t_i)$  удаляются из (3.13) из-за промежуточных условий (3.7).

Преобразуем подынтегральную функцию, учитывая уравнения (3.6) и (3.11):

$$\begin{aligned} f_x^0[t] \delta x(t) + \Delta f^0[t] - \psi(t) \delta x(t) - \psi(t) \delta \dot{x}(t) &= \\ = \Delta f^0[t] - \psi(t) \Delta f[t] &= H(\psi_i(t), t, x(t), y(t)) - H(\psi_i(t), t, x(t), \tilde{y}(t)) = -\Delta H[t]. \end{aligned}$$

Учитывая, что разность  $\Delta H[t] = H(\psi(t), t, x(t), \tilde{y}(t)) - H(\psi(t), t, x(t), y(t))$  отлична от нуля только на малых промежутках времени  $\Delta T_i$  между  $t_i$  и  $t_i + \delta t_i$ , приходим к выражению

$$\sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta H[t] dt = \int_{t_0}^{t_F} \Delta H[t] dt = \sum_{i=1}^N \Delta H[t_i] \delta t_i,$$

где  $\Delta H[t_i] = H(\psi_{i-1}(t_i), t_i, x(t_i), y_{i-1}) - H(\psi_i(t_i), t_i, x(t_i), y_i)$ .

Таким образом, при вариации моментов переключений получаем

$$\delta I = \sum_{i=1}^N \{g_i^+[t_i] - \Delta H[t_i]\} \delta t_i. \quad (3.14)$$

Вариации (3.10) и (3.14) функционала (1.6), определенного на траекториях ПС, позволяют сформулировать необходимые условия оптимальности. Поскольку решаемая задача конечномерная, применяем известные результаты условной минимизации [27].

**Теорема 2.** Пусть оптимальный процесс  $(x(\cdot), y(\cdot))$  имеет  $N$  переключений в моменты  $t_1, \dots, t_N: t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_F$ . Тогда существуют функции  $\psi_i(\cdot)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , и такие числа  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$ , неравные нулю одновременно, что выполняются:

1) сопряженные уравнения

$$\dot{\psi}_i(t) = -H_x(\psi_i(t), t, x(t), y_i), \quad t \in T_i, \quad i \in N;$$

2) промежуточные условия

$$\psi_i(t_i) - \psi_{i-1}(t_{i-}) = g_x^+(t_i, x(t_i), y_{i-1}, y_i), \quad i = 1, \dots, N;$$

3) условия трансверсальности

$$\{F_x[t_F] - H[t_F]\} \delta t_F + \{F_x[t_F] + \psi_N(t_F)\} \delta x_F = 0$$

для любых вариаций, связанных равенством  $\Gamma_x[t_F] \delta t_F + \Gamma_x[t_F] \delta x_F = 0$ ;

4) условия неубывания

$$\{g_y^+[t_{i+1}] + g_z^+[t_i] - \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_y[t] dt\} \delta y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N - 1,$$

$$\{g_z^+[t_N] + F_y[t_F] - \int_{t_N}^{t_F} H_y[t] dt\} \delta y_N \geq 0$$

для любых допустимых вариаций  $\delta y_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;

5) условия стационарности

$$g_t^+[t_i] - \Delta H[t_i] + \lambda_{i+1} - \lambda_i = 0, \quad i = 1, \dots, N;$$

6) условия дополняющей нежесткости  $\lambda_i(t_{i-1} - t_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, N + 1$ ;

7) условия неотрицательности  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, N + 1$ .

Доказательство теоремы 2 следует из необходимых условий первого порядка экстремума функции при ограничениях типа неравенств  $t_{i-1} \leq t_i$ ,  $i = 1, \dots, N + 1$ . Функция Лагранжа для рассматриваемой задачи имеет вид [27]

$$L = \lambda_0 I + \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i (t_{i-1} - t_i),$$

а ее частные производные выражаются через вариации (3.10) и (3.14). Неравенства 4) обеспечивают неотрицательность приращения функционала при малых вариациях состояний  $y_i$ . Равенства 5) соответствуют условиям стационарности функции Лагранжа по переменным  $t_i$ . Условия 6) и 7) отвечают методу Лагранжа снятия ограничений типа неравенств [23].

Заметим, что условия 1)–3) теоремы вместе с уравнениями движения позволяют получить вспомогательные функции, зависящие от  $3N + 2$  параметров  $t_1, \dots, t_N, y_1, \dots, y_N, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$ . Для нахождения этих параметров имеется система из  $3N + 1$  условий 4)–6). Этих уравнений хватает, так как коэффициенты  $\lambda_i$  определяются с точностью до положительного множителя. Как правило, систему дополняют либо равенством  $\lambda_0 = 0$  (вырожденный случай), либо равенством  $\lambda_0 = 1$  (невырожденный случай). Таким образом, теорема, как и принцип максимума [21], дает “полную” систему условий для нахождения процесса, который может быть оптимальным.

**4. Решение задачи оптимального управления непрерывными системами в классе кусочно-постоянных управлений.** Рассмотрим классическую задачу оптимального управления непрерывной системой [21, 23, 25–27]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in T, \\ x(t_0) &= x_0, \quad \Gamma(t_F, x(t_F)) = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$I = \int_{t_0}^{t_F} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(t_F, x(t_F)) \rightarrow \min.$$

Обозначения в задаче (4.1) стандартные:  $x(t)$ ,  $u(t)$  – состояние системы и управление в момент времени  $t \in T$ ,  $T = [t_0, t_F]$ ;  $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n$ ;  $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ . Терминальные ограничения определяются функцией  $\Gamma: T \times X \rightarrow \mathbb{R}^l$ . Требуется найти наименьшее значение  $\min I$  функционала (4.1) и оптимальное кусочно-непрерывное управление  $u(\cdot)$ , на котором это значение достигается.

Будем решать задачу (4.1) в классе кусочно-постоянных управлений. Пусть на заданном промежутке времени  $T = [t_0, t_F]$  кусочно-постоянное управление  $y(\cdot)$  динамической системой совершает  $N$  переключений в моменты времени  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , образующие возрастающую конечную последовательность  $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_N\}$ :

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} \triangleq t_F. \quad (4.2)$$

Движение системы и функционал задаются соотношениями

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), y_i), \quad t \in T_i \triangleq [t_i, t_{i+1}), \quad (4.3)$$

$$y_i \in U, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (4.4)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad \Gamma(t_F, x(t_F)) = 0,$$

$$I_N(d) = \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^0(t, x(t), y_i) dt + F(t_F, x(t_F)) \rightarrow \min. \quad (4.5)$$

В задаче (4.3)–(4.5) требуется найти наименьшее значение  $\min I_N$  функционала (4.5) и кусочно-постоянное управление  $y^*(\cdot)$ , на котором это значение достигается. Отметим, что в этой задаче количество переключений  $N$  задано.

Сформулируем теперь задачу минимизации количества переключений. Требуется найти наименьшее количество переключений  $N^\varepsilon$ , при котором наименьшее значение  $I_{N^\varepsilon}$  функционала (4.5) не превосходит заданной величины  $\varepsilon$ :

$$\min I_{N^\varepsilon} = \min_{d \in \mathcal{D}_{N^\varepsilon}(t_0, x_0, y_0)} I_{N^\varepsilon}(d) \leq \varepsilon. \quad (4.6)$$

Формулировку задачи (4.6) можно уточнить, если известно минимальное значение  $\min I$  функционала (4.1). В этом случае требуется найти наименьшее количество переключений  $N^\varepsilon$ , при котором решение задачи в классе кусочно-постоянных управлений отличается по функционалу от решения задачи в классе кусочно-непрерывных управлений не более чем на заданную величину  $\varepsilon$ :

$$\min I_{N^\varepsilon} - \min I \leq \varepsilon. \quad (4.7)$$

Решение задач (4.6) и (4.7) естественным образом сводится к многократному решению задачи (4.5) для разных фиксированных значений  $N$ . При этом, разумеется, применяются необходимые или достаточные условия оптимальности ПС. Сравнивая задачу (4.5) с общей постановкой задачи (1.7), заключаем, что мгновенные многократные переключения исключаются, множество допустимых состояний дискретной части постоянно ( $G(t, x, y) = U$ ), в функционале качества управления не учитываются затраты на переключения ( $g^+ = 0$ ). Начальное состояние  $y_0$  дискретной части системы не задано. Оно является ресурсом управления и определяется при решении задачи минимизации. Учитывая эти отличия, запишем уравнения для образующих функции цены.

Нулевая образующая  $\varphi^0(t, x, y)$  находится по формуле (2.5). Остальные образующие удовлетворяют уравнению (2.7):

$$\varphi^k(t, x, y) = \min_{t < \tau \leq t_f} \left\{ \int_t^\tau f^0(\theta, x(\theta), y) d\theta + \min_{z \in U} \varphi^{k-1}(\tau, x(\tau), z) \right\}. \quad (4.8)$$

Здесь  $x(\theta) = \mathbf{x}(\theta \mid t, x, y)$ ,  $t \leq \theta \leq \tau$ , – решение задачи Коши (2.6) при постоянном значении  $y$ . Уравнение (2.7) позволяет найти образующие  $\varphi^k(t, x, y)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . При решении уравнения (4.8) выполняются две операции минимизации. Как и ранее, обозначим через

$$\tau_k(t, x, y) = \arg \min_{t < \tau \leq t_f} \left\{ \int_t^\tau f^0(\theta, x(\theta), y) d\theta + \min_{z \in U} \varphi^{k-1}(\tau, x(\tau), z) \right\}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{y}_k(\tau, x, y) = \arg \min_{z \in U} \varphi^{k-1}(\tau, x, z) \quad (4.10)$$

момент  $k$ -го переключения и состояние дискретной части системы после  $k$ -го переключения соответственно. Позиционные конструкции (4.9), (4.10) проще аналогичных функций (2.10), (2.9), полученных ранее для общей постановки задачи. Достаточные условия оптимальности для задачи (4.5) являются частным случаем теоремы 1 и формулируются следующим образом.

**Теорема 3.** Если для задачи (4.3)–(4.5) существует последовательность функций  $\varphi^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , удовлетворяющих на области определения уравнениям (2.5), (4.8), то для оптимальности допустимого процесса  $d = (x(\cdot), y(\cdot)) \in \mathcal{D}(t_0, x_0, y_0)$  с моментами переключений  $t_1, \dots, t_N$ , образующими возрастающую последовательность (4.2), достаточно, чтобы выполнялись условия

$$y_0 = \arg \min_{y \in U} \varphi^N(t_0, x_0, y), \quad (4.11)$$

$$y_i = \mathbf{y}_{N-i+1}(t_i, x(t_i), y_{i-1}), \quad (4.12)$$

$$t_i = \tau_{N-i+1}(t_{i-1}, x(t_{i-1}), y_{i-1}), \quad (4.13)$$

где  $t_{i-1} < t < t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . При  $N = 0$  формулы (4.12), (4.13) не используются, так как переключений нет.

В теореме 3 добавлено (по сравнению с теоремой 1) условие (4.11), которое обеспечивает оптимальный выбор начального состояния  $y_0$ . Это условие в теореме 1 отсутствует, поскольку в задаче (1.7) начальное состояние  $y_0$  задано.

Сформулируем необходимые условия оптимальности в задаче (4.5). Они следуют из теоремы 2. Нужно только исключить мгновенные многократные переключения и не учитывать затраты на каждое переключение. Так как многократных переключений нет, то все неравенства в (4.1) строгие. В конечный момент времени переключение исключается, поскольку оно не изменяет значение функционала. Значит, все неотрицательные множители Лагранжа равны нулю ( $\lambda_1 = \dots = \lambda_{N+1} = 0$ ), что следует из условия дополняющей нежесткости. Кроме того, из-за отсутствия мгновенных многократных переключений набор вспомогательных функций  $\psi_i(\cdot)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , можно заменить одной непрерывной справа функцией  $\psi(t)$ , полагая  $\psi_i(t) = \psi(t)$ ,  $t \in T_i$ , поскольку промежутки  $T_i$  не пересекаются.

Чтобы не учитывать затраты на переключения, полагаем  $g^+ = 0$ . Тогда в моменты переключений  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , непрерывная справа вспомогательная функция  $\psi(\cdot)$  будет непрерывной, так как промежуточные условия (3.7) будут иметь вид  $\psi(t_i) - \psi(t_i - 0) = 0$ . Приращение функции ГП в каждый момент переключения будет равно нулю:

$$\Delta H[t_i] = H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_{i-1}) - H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_i) = 0,$$

что следует из условия 5) теоремы 2.

Необходимые условия оптимальности для задачи (4.5) являются частным случаем теоремы 2 и формулируются следующим образом.

**Т е о р е м а 4.** Пусть оптимальный процесс  $(x(\cdot), y(\cdot))$  имеет  $N$  переключений в моменты  $t_1, \dots, t_N: t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_F$ . Тогда существует такая абсолютно непрерывная функция  $\psi(\cdot)$ , что выполняются:

1) сопряженное уравнение

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), t, x(t), y_i), \quad t \in T;$$

2) условие трансверсальности

$$\{F_t[t_F] - H[t_F]\} \delta t_F + \{F_x[t_F] + \psi(t_F)\} \delta x_F = 0$$

для любых вариаций, связанных равенством  $\Gamma_t[t_F] \delta t_F + \Gamma_x[t_F] \delta x_F = 0$ ;

3) неравенства

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_y[t] dt \cdot \delta y_i \leq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad \left\{ F_y[t_F] - \int_{t_N}^{t_F} H_y[t] dt \right\} \delta y_N \geq 0$$

для любых допустимых вариаций  $\delta y_i, i = 1, \dots, N$ ;

4) равенства

$$H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_{i-1}) - H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Доказательство теоремы 4 следует из теоремы 2. По сравнению с теоремой 2 упрощения получены вследствие равенств  $g^+ = 0, \lambda_1 = \dots = \lambda_{N+1} = 0$ . Кроме того, в п. 3) добавлено неравенство с вариацией  $\delta y_0$ , поскольку начальное состояние  $y_0$  не задано.

Отметим, что решение задачи оптимального управления в классе кусочно-постоянных функций можно рассматривать как приближенное (с погрешностью  $\varepsilon$ ) решение задачи с кусочно-непрерывным управлением. При увеличении количества переключений погрешность  $\varepsilon$ , вообще говоря, уменьшается, а в пределе — равна нулю, так как любую ограниченную измеримую функцию можно представить как предел ступенчатой.

**5. Пример.** Рассмотрим задачу гашения малых колебаний с минимальными энергетическими затратами под действием неограниченного ускорения. Классическая постановка задачи оптимального управления имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2, \\ x_1(0) &= 1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_1(\pi/2) = 0, \quad x_2(\pi/2) = 0; \\ I &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} u^2(t) dt \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Требуется найти наименьшее значение  $\min I$  функционала и оптимальное кусочно-непрерывное управление  $u(\cdot)$ , на котором этот минимум достигается.

Решение поставленной задачи получено, например в [30], при помощи принципа максимума. Наименьшее значение функционала (5.1) и оптимальное управление имеют вид

$$\min I = \frac{4}{\pi - 2} \approx 3.5039; \quad u(t) = \frac{4}{\pi - 2} (\sin t - \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi/2. \quad (5.2)$$

Рассмотрим задачу оптимизации в классе кусочно-постоянных управлений. Пусть на промежутке функционирования  $[0; \pi/2]$  система совершает  $N$  переключений в моменты времени  $t_1, \dots, t_N$ , образующие возрастающую последовательность:

$$0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} \triangleq \pi/2. \quad (5.3)$$

Уравнения движения системы и функционал качества имеют вид

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + y_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (5.4)$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_1(\pi/2) = 0, \quad x_2(\pi/2) = 0; \quad (5.5)$$

$$I_N = \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1}{2} y_i^2(t) dt \rightarrow \min. \tag{5.6}$$

Требуется найти наименьшее значение  $\min I_N$  функционала (5.6) и оптимальное кусочно-постоянное управление  $y(\cdot)$ , на котором этот минимум достигается.

Сформулируем теперь задачу минимизации количества переключений. Требуется найти наименьшее количество переключений  $N^\varepsilon$ , при котором наименьшее значение  $\min I_{N^\varepsilon}$  функционала (5.6) отличается от наименьшего значения  $\min I$  функционала (5.1) не более чем на заданную величину  $\varepsilon = 0.1$ :

$$\min I_{N^\varepsilon} - \min I \leq \varepsilon. \tag{5.7}$$

Поставленную задачу можно рассматривать как приближенное с точностью  $\varepsilon$  решение задачи (5.1) в классе кусочно-постоянных управлений.

По сравнению с общей постановкой задачи (4.5) имеем:  $t_0 = 0$ ,  $t_F = \pi/2$ ,  $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $y \in U = \mathbb{R}$ ,  $x(0) = (1, 1)^T$ ,  $f(t, x, y) = (x_2, -x_1 + y)^T$ ,  $f^0(t, x, y) = y^2/2$ ,  $F = 0$ ,  $\Gamma(t_F) = x(\pi/2) = 0$ . Запишем функцию ГП

$$H(\psi, t, x, y) = \psi_1 x_2 + \psi_2 (-x_1 + y) - \frac{1}{2} y^2$$

и условия теоремы 4 для задачи (5.4):

1) сопряженное уравнение

$$\dot{\psi}_1(t) = \psi_2(t), \quad \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t), \quad t \in T; \tag{5.8}$$

2) условия трансверсальности выполняются, так как вариации  $\delta t_F = 0$ ,  $\delta x(t_F) = 0$  при фиксированном правом конце траектории;

3) для всех допустимых вариаций  $\delta y_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , выполняются неравенства

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} [\psi_2(t) - y_i] dt \cdot \delta y_i \leq 0 \Leftrightarrow y_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \psi_2(t) dt, \tag{5.9}$$

поскольку ограничений на вариации  $\delta y_i$  нет;

4) в моменты переключений  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , справедливы равенства

$$\begin{aligned} \psi_1(t_i) x_2(t_i) + \psi_2(t_i) [-x_1(t_i) + y_{i-1}] - \frac{1}{2} y_{i-1}^2 - \psi_1(t_i) x_2(t_i) - \psi_2(t_i) [-x_1(t_i) + y_i] + \frac{1}{2} y_i^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \psi_2(t_i) (y_{i-1} - y_i) - \frac{1}{2} (y_{i-1}^2 - y_i^2) = 0 \Rightarrow 2\psi_2(t_i) = y_{i-1} + y_i. \end{aligned} \tag{5.10}$$

В последнем преобразовании уравнения учитывалось, что  $y_{i-1} \neq y_i$ , иначе нет переключения.

Таким образом, задача оптимального управления сведена к краевой задаче для уравнений движения (5.4) и сопряженной системы (5.8) с краевыми условиями (5.5). Для нахождения  $2N + 1$  управляющих параметров  $t_1, \dots, t_N, y_0, y_1, \dots, y_N$  имеются  $2N + 1$  уравнений (5.9) и (5.10).

Будем искать решение краевой задачи. Согласно уравнениям движения, траектория имеет вид

$$x_1(t) = A_i \cos t + B_i \sin t + y_i, \quad x_2(t) = -A_i \sin t + B_i \cos t, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \tag{5.11}$$

Условия непрерывности траектории (5.11) в моменты переключений приводят к рекуррентным уравнениям

$$A_i = A_{i-1} + (y_{i-1} - y_i) \cos t_i, \quad B_i = B_{i-1} + (y_{i-1} - y_i) \sin t_i, \quad i = 1, \dots, N. \tag{5.12}$$

Следовательно,

$$A_N = A_0 + \sum_{i=1}^N (y_{i-1} - y_i) \cos t_i, \quad B_N = B_0 + \sum_{i=1}^N (y_{i-1} - y_i) \sin t_i, \tag{5.13}$$

причем из начальных и конечных условий следует, что

$$A_0 = 1 - y_0, \quad B_0 = 1, \quad A_N = 0, \quad B_N = -y_N. \quad (5.14)$$

Поэтому

$$1 - y_0 + \sum_{i=1}^N (y_{i-1} - y_i) \cos t_i = 0, \quad 1 + y_N + \sum_{i=1}^N (y_{i-1} - y_i) \sin t_i = 0. \quad (5.15)$$

Траектория движения имеет вид (5.11) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (5.12)–(5.14). Отметим сразу, что управление без переключения не является допустимым. В самом деле, при  $N = 0$  имеем  $y_N = y_0$ . Тогда уравнения (5.15) противоречат друг другу:  $1 - y_0 = 0$  и  $1 + y_0 = 0$ , что невозможно. Следовательно, допустимые управления обязательно имеют переключения, т.е.  $N \geq 1$ .

Траектория  $x(\cdot)$  определяется управляющими параметрами – значениями управления  $y_i$  и моментами переключений  $t_i$ , которые удовлетворяют системе уравнений (5.9), (5.10). Эти уравнения тригонометрические, так как вспомогательные функции  $\psi_1(\cdot)$ ,  $\psi_2(\cdot)$  – периодические, поскольку описываются уравнениями колебаний (5.8). Найти решение системы тригонометрических уравнений сложно. Для упрощения воспользуемся следующим соображением. График оптимального непрерывного управления (5.2)  $u = u(t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ , в задаче (5.1) симметричен относительно точки  $(\pi/4, 0)$ . Предположим, что график оптимального кусочно-постоянного управления  $y = y(t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ , имеет тот же центр симметрии. При этом будут выполняться равенства

$$y_i + y_{N-i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad t_i + t_{N+1-i} = \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.16)$$

Неравенства для  $y_i$  и для  $t_i$  в (5.16) повторяются. Поэтому фактически в (5.16) имеется  $[N/2] + 1 + [(N+1)/2] = N+1$  равенств. Здесь  $[x]$  – целая часть числа  $x$ .

Значения  $y_i$  выражаются через  $\psi_2$  по формуле (5.9). Чтобы обеспечить равенства (5.16), график функции  $\psi_2(t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ , также должен иметь центр симметрии  $(\pi/4, 0)$ . Поэтому из решений уравнений (5.8) нужно взять следующее:

$$\psi_1(t) = C \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right), \quad \psi_2(t) = -C \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right),$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Так как функция  $\psi_1$  является первообразной для  $\psi_2$ , условие (5.9) можно записать в виде

$$y_i = \frac{\psi_1(t_{i+1}) - \psi_1(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \frac{C}{t_{i+1} - t_i} \left[ \cos\left(t_{i+1} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(t_i - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

или, выделяя общий множитель,

$$y_i = C \Delta_i, \quad \Delta_i \triangleq [\cos(t_{i+1} - \pi/4) - \cos(t_i - \pi/4)] / (t_{i+1} - t_i), \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (5.17)$$

Подставляя управление (5.17) в (5.10) и сокращая на множитель  $C$ , получаем

$$\Delta_i + \Delta_{i-1} - 2 \sin\left(t_i - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.18)$$

Количество уравнений в (5.18) из-за симметрии (5.16) можно уменьшить, полагая  $i = 1, \dots, [(N+1)/2]$ .

Итак, для нахождения  $N$  моментов переключений составлена система (5.18)  $N$  трансцендентных уравнений. Пусть найдено решение  $t_1, \dots, t_N$  этой системы. Тогда значения управления можно вычислить по формуле (5.17). Нужно только определить значение произвольной постоянной  $C$ . Для этого воспользуемся первым уравнением в (5.15). Второе уравнение из-за условий симметрии (5.16) равносильно первому. Перепишем уравнение в виде

$$1 - y_0 + \sum_{i=1}^N (y_{i-1} - y_i) \cos t_i = 0 \Leftrightarrow 1 + \sum_{i=0}^N y_i (\cos t_{i+1} - \cos t_i) = 0.$$

Таблица 1. Результаты вычислений

Число переключений $N$	Минимальное значение функционала $\min I_N$	Невязка $ \delta $	Погрешность $\varepsilon_N = \min I_N - \min I$
1	4.57764	0	1.07376
2	3.90544	0.00046	0.40156
3	3.71780	0.00042	0.21393
4	3.63751	0.82095	0.13363
5	3.59548	0.68004	0.09160

Учитывая симметрию (5.16) и (5.17), получаем равенство

$$C = - \left\{ \sqrt{2} \sum_{i=0}^k \Delta_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right\}^{-1}, \quad (5.19)$$

где  $k = [N/2]$  – целая часть числа  $N/2$ .

Таким образом, при помощи необходимых условий задача поиска оптимального кусочно-постоянного управления сведена к решению системы  $N$  трансцендентных уравнений (5.18) относительно  $N$  неизвестных  $t_1, \dots, t_N$ , которые должны удовлетворять неравенствам (5.3). Если моменты переключений найдены, то по формуле (5.19) определяем постоянную  $C$ , а затем по формулам (5.17) – значения управлений  $y_0, y_1, \dots, y_N$ . После этого вычисляем минимальное значение функционала (5.6).

К сожалению, указанный план трудно реализовать, так как система уравнений (5.18) весьма сложная. Ее численное решение является серьезной проблемой, не говоря об аналитическом решении, которое невозможно даже при  $N = 1$ . Поэтому был использован другой подход, который заключается в минимизации функционала  $I_N$  по моментам переключений. Действительно, при заданных моментах  $t_1, \dots, t_N$  функционал  $I_N$ , учитывая (5.17), можно представить в виде

$$I_N(t_1, \dots, t_k) = \sum_{i=0}^k (t_{i+1} - t_i) y_i^2. \quad (5.20)$$

Функция (5.20) зависит от  $k = [N/2]$  моментов переключений, так как  $y_k = 0$  при четном  $N = 2k$  и  $t_{k+1} = \pi/4$  при нечетном  $N = 2k + 1$ . Ее нужно минимизировать при ограничениях  $0 < t_1 < \dots < t_k < \pi/4$ . После нахождения моментов переключений  $t_1, \dots, t_k$ , доставляющих условный минимум функции (5.20), нужно проверить выполнение необходимых условий оптимальности, подставляя эти моменты в систему (5.18).

Таким образом, процедура приближенного решения задачи (5.6) при  $N \geq 1$  сводится к условной минимизации функции (5.20) с последующей проверкой выполнения равенств (5.18). Описанная процедура решения – численно-аналитическая, поскольку часть необходимых условий оптимальности использованы для получения уравнений (5.17)–(5.19) и составления функции (5.20), минимизация которой производится численным методом.

Результаты приближенных вычислений представлены в таблице 1. Кроме минимальных значений функционала (5.6) и погрешности (5.7) в таблице приводится величина невязки  $|\delta|$ , которая вычисляется по значениям левых частей уравнений (5.18):

$$|\delta| = \sqrt{\delta_1^2 + \dots + \delta_k^2}, \quad \delta_i = \Delta_i + \Delta_{i-1} + 2 \sin \left( t_i - \frac{\pi}{4} \right), \quad i = 1, \dots, k = \left[ \frac{N}{2} \right].$$

Невязка характеризует точность приближенного решения системы (5.18), т.е. “степень выполнения” необходимых условий оптимальности.

Минимизация выполнялась перебором на сгущающихся сетках. Наименьший шаг сетки  $\Delta t = 0.001$ . При пяти переключениях погрешность  $\varepsilon_5 = 0.091$  оказалась меньше допустимой погрешности  $\varepsilon = 0.1$ , поэтому процесс решения закончился. Оптимальные моменты переключений и значений управления следующие:

$$t_1 = 0.284, \quad t_2 = 0.540, \quad t_3 = 0.785, \quad t_4 = 1.031, \quad t_5 = 1.287;$$

$$y_0 = -3.0402, \quad y_1 = -1.8498, \quad y_2 = -0.6208, \quad y_3 = 0.6208, \quad y_4 = 1.8498, \quad y_5 = 3.0402.$$

С ростом количества переключений величина минимального значения функционала (5.6), разумеется, монотонно убывает, а невязка – меняется нерегулярно. Видимо, чем больше уравнений в системе (5.18), тем больше невязка.

**Заключение.** Предлагаемые условия оптимальности применяются для решения задач оптимизации траекторий переключаемых систем. Эти задачи отличаются от оптимизации непрерывно-дискретных систем свободными моментами переключений, которые могут выбираться при оптимизации процесса управления. Именно поиск оптимальных моментов переключений является наиболее сложной частью решения. Как показывают примеры (академические и прикладные), минимизируемый функционал как функция моментов переключений имеет овражный характер и множество локальных минимумов. Необходимые условия оптимальности в этом случае служат для проверки результатов оптимизации.

Исследованная задача минимизации количества переключений использована для приближенного решения задач оптимального управления путем сужения класса допустимых управлений и аппроксимации оптимальных траекторий. Дальнейшая разработка этого направления представляется актуальной.

Условия оптимальности получены для переключаемых систем, в которых отсутствует непрерывное управление динамической частью, а состояния дискретной части ограничиваются рекуррентным включением. Несомненный интерес представляют необходимые условия оптимальности в более широком классе гибридных систем – с непрерывным управлением и со скачками, описываемыми рекуррентными уравнениями.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев С.Н., Маликов А.И.* О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем. Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. Т. 1. Казань: Фолиант, 2011. С. 23–81.
2. *Бортаковский А.С.* Оптимизация переключающих систем. М.: Изд-во МАИ, 2016.
3. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности управления переключаемыми системами // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 4. С. 86–103.
4. *Бортаковский А.С.* Синтез оптимальных систем управления со сменой моделей движения // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 4. С. 57–74.
5. *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005.
6. *Котов К.Ю., Шпилевая О.Я.* Переключаемые системы: устойчивость и проектирование (обзор) // Автометрия. 2008. Т. 44. № 5. С. 71–87.
7. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Достаточные условия оптимальности управления непрерывно-дискретными системами // // АиТ. 1987. № 7. С. 57–66.
8. *Бортаковский А.С.* Необходимые условия оптимальности автоматной части логико-динамической системы // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 50–63.
9. *Branicky M.S., Borkar V.S., Mitter S.K.* A Unified Framework for Hybrid Control: Model and Optimal Control Theory // IEEE Trans. Automatic Control. 1998. V. 43. № 1. P. 31–45.
10. *Brockett R.W.* Hybrid Models for Motion Control Systems // Perspectives in the Theory and its Applications. Boston: Birkhäuser, 1993. P. 29–53.
11. *Hedlund S., Rantzer A.* Optimal Control of Hybrid Systems // Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control. Phoenix, AZ, 1999. P. 3972–3977.
12. *Sussmann H.J.* A Maximum Principle for Hybrid Optimal Control Problems // Proc. of 38th IEEE Conf. on Decision and Control. Phoenix, AZ, USA, 1999. P. 425–430.
13. *Engell S., Frehse G., Schnieder E.* Modeling, Analysis and Design of Hybrid Systems. Springer, 2002.
14. Modelling and Analysis of Logic Controlled Dynamic Systems: IFAC Workshop. Irkutsk: Inst. Syst. Dyn. and Control Theory. Sib. Branch RAS, 2003.
15. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Berlin: Springer, 2003.
16. *Li Z., Soh Y., Wen C.* Switched and Impulsive Systems: Analysis, Design and Applications. Berlin: Springer, 2005.
17. *Xu X.P., Antsaklis P.J.* A Dynamic Programming Approach for Optimal Control of Switched System // Proc. IEEE Conf. Decision Control. Sydney, Australia, 2000. P. 1822–1827.
18. *Axelsson H., Boccadoro M., Egerstedt M. et al.* Optimal Mode-Switching for Hybrid Systems with Varying Initial States // J. of Nonlinear Analysis: Hybrid Systems and Applications. 2008. V. 2. № 3. P. 765–772.

19. *Boltyanski V.G.* The Maximum Principle for Variable Structure Systems // *Int. J. on Control.* 2004. V. 77. № 17. P. 1445–1451.
20. *Дмитрук А.В., Каганович А.М.* Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями // *Нелинейная динамика и управление.* Вып. 6. М.: Физматлит, 2008. С. 101–136.
21. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
22. *Журавин Ю.* Разгонный блок “Бриз-М” // *Новости космонавтики.* 2000. Т. 10. № 8 (211). С. 52–55.
23. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
24. *Бортаковский А.С., Урюпин И.В.* Минимизация количества переключений оптимальных непрерывно-дискретных управляемых процессов // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2019. № 4. С. 29–46.
25. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
26. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
27. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
28. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
29. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1973.
30. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.

ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.857, 519.21

**ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМ ВЫХОДОМ НЕЛИНЕЙНОЙ  
НЕУПРАВЛЯЕМОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ  
СИСТЕМЫ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ<sup>1</sup>**

© 2021 г. А. В. Босов

МАИ (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

e-mail: AVBosov@mail.ru

Поступила в редакцию 17.11.2020 г.

После доработки 14.02.2021 г.

Принята к публикации 29.03.2021 г.

Решена задача оптимального управления по квадратичному критерию качества общего вида для неуправляемого диффузионного процесса Ито и линейного управляемого выхода. Управление с обратной связью в предположении наличия полной информации ищется методом динамического программирования. Функция Беллмана представлена в виде квадратичной формы относительно переменной выхода с коэффициентами, нелинейными относительно переменной состояния. Оптимальное управление формируется двумя слагаемыми: линейной функцией выхода и нелинейной функцией состояния. Коэффициенты, не зависящие от состояния, определены матричным уравнением Риккати, коэффициенты-функции состояния — системой уравнений параболического типа. Изучение свойств параболических уравнений приводит к стохастическому представлению описываемых ими коэффициентов в форме условного математического ожидания терминального состояния некоторой вспомогательной стохастической системы. Это представление обеспечивается формулой Фейнмана–Каца. Показано, что в частном случае линейного сноса оптимальное управление является линейным и по состоянию, а коэффициенты определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот случай иллюстрируется моделью Кокса–Ингерсона–Росса и численным примером для показателя времени отклика сетевого протокола TCP. В рамках численного эксперимента выполнен сравнительный анализ приближенных решений, полученных традиционным методом конечных разностей и альтернативным методом на основе стохастического представления Фейнмана–Каца.

DOI: 10.31857/S000233882104003X

**Введение.** Рассматриваемая в работе задача может быть отнесена к традиционной задаче оптимального управления дифференциальными стохастическими системами. Задача решается классическими методами, равно как и основанными на них приближенными методами поиска оптимальных управлений [1–3]. Ключевые результаты, составляющие классическую теорию управления, получены более 40 лет назад. Наибольшую полноту и результативность имеет задача управления линейно-гауссовскими стохастическими системами по квадратичному критерию (LQG) [4]. Эта задача дает исходный базис, на котором основано множество успешно исследованных и решенных задач стохастического управления и оптимизации. Множество результатов в этой области как в части моделей, так и в части математического аппарата, имевших место в последующие годы, существенно обогатили теорию управления. Но и до настоящего времени линейные модели и квадратичный критерий, несмотря на всю справедливую критику в отношении их адекватности и гибкости, сохраняют исследовательский интерес и находят современные области приложения.

Не претендуя на сколько-нибудь полное обоснование последнего тезиса, приведем несколько примеров, показавшихся наиболее интересными. Так, в [5] решается линейно-квадратичная задача в игровой постановке с запаздыванием. В близкой по модели работе [6] задача управления ставится в терминах  $H_\infty$ -робастности. Точнее называть эту тематику  $H_2/H_\infty$ -управлением, и работ по этой теме очень много. Аккуратности ради следует уточнить, что под линейными в этой

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-07-00187-А).

теории понимаются модели с мультипликативными по состоянию возмущениями. Совсем другой класс моделей, особо популярных в последние годы, составляют скачкообразные процессы. Например, линейные уравнения в сочетании с пуассоновскими скачками в [7] используются в моделях, описывающих различные показатели функционирования сетевых протоколов передачи данных транспортного уровня. Надо заметить, что телекоммуникации представляют в последние годы популярный прикладной материал для исследований, работ по этой проблематике множество, математические техники привлекаются самые разные и самые современные, но и линейным моделям место находится. В этой сравнительно новой прикладной области имеются приложения и для методов стохастического оптимального управления [8].

Близкой к области телекоммуникаций являются задачи управления ресурсами программных систем, в качестве которых могут выступать сайты, базы данных и банки знаний, а также традиционные вычислительные ресурсы, такие, как узлы распределенных систем, компоненты центров обработки данных и т.д. Такие ресурсы управляются программами – менеджерами задач, оптимизаторами запросов в системах управления базами данных, системами балансировки нагрузки. Моделями для постановки задач оптимизации функционирования программных систем являются системы массового обслуживания или, при значительном росте числа состояний, их диффузионные аппроксимации [9]. Соответствующая практическая интерпретация в качестве состояния оптимизируемой системы может использовать число пользователей, запросов, буферов памяти, процессорного времени и т.п., описывая его диффузионным процессом. Объем ресурсов при этом – это линейный выход, учитывающий и состояние, и активное действие программной системы, такое, как объем выделенных или освобожденных ресурсов. Отметим, что такая прикладная интерпретация изучаемой задачи ранее была представлена для случая дискретного времени [10, 11].

Исследуемая в статье модель следует традиционному представлению управляемой системы в форме вход-выход. Входная переменная предполагается неуправляемой, оптимизируется выход. Такого рода задачи известны в числе многих исследуемых постановок задач оптимального управления под терминами управление (регулирование) выходом или управление по выходу. Одно из первых применений этой терминологии обнаруживается в [12], где специальным образом записанная классическая LQG-задача используется для математической формализации инженерной задачи “доведения выхода до нуля”.

В качестве примера более современных постановок в терминологии управления выходом можно привести работу [13] (также указан ряд релевантных ссылок аналогичной тематики). Неопределенность там не имеет стохастической природы, а описывается простыми геометрическими ограничениями, что указывает на робастный характер применяемого метода инвариантных эллипсоидов. Изучаемая система при этом является линейной и автономной. Аналогичную модель исследуют авторы [14] с помощью аппарата линейных матричных неравенств. В указанной и других работах оптимизируется квадратичный критерий и используются свойства линейных регуляторов. Исследований, посвященных нелинейным моделям систем с управляемым выходом, обнаруживается немного. Так, довольно популярны постановки в терминах нелинейного адаптивного управления, предлагающие различные варианты задачи стабилизации [15].

В данной работе, как и во многих других, эксплуатируются привлекательные свойства линейных моделей и квадратичного критерия. Обобщение затронуло модель динамики системы. Оптимизируемая динамическая система описывается двумя системами уравнений. Состояние задается системой нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито, не содержащих управляемой переменной. Возмущения здесь описываются стандартным векторным винеровским процессом, накладываются простые условия существования и единственности решения. Поскольку состояние не управляется, то возможно его интерпретировать еще и как сложное внешнее возмущение. Вторая переменная – управляемый выход – задается системой линейных стохастических дифференциальных уравнений. Цель оптимизации выхода формируется квадратичным критерием общего вида. Формальная постановка задачи дана в разд. 2. Для решения задачи применяется метод динамического программирования, решается уравнение Беллмана [3], используемые общие положения приведены в разд. 1. Соответственно в результате получаются аналитические выражения и для оптимального управления, и для значения функционала качества. Технически традиционный, стандартный подход к задаче обременен, пожалуй, единственной проблемой – поиском верного представления структуры функции Беллмана. Справиться с этой проблемой в большей степени удастся за счет результата, полученного при решении дискретного по времени аналога рассматриваемой постановки [11]. Конечные соотношения для оптимального решения, как и во всех подобных задачах, включая классическую LQG,

содержат решения определенных дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных). Вывод этих уравнений представлен в разд. 3. Решение дает функция Беллмана вида  $V(t, y, z) = z^T \alpha(t)z + z^T \beta(t, y) + \gamma(t, y)$ , в котором переменная  $y$  соответствует вектору состояния, переменная  $z$  – выходу, а коэффициенты  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t, y)$ ,  $\gamma(t, y)$  представлены решениями полученных дифференциальных уравнений (обыкновенного Риккати и системы линейных уравнений в частных производных параболического типа). При определении функции Беллмана получено и выражение для оптимального управления в виде линейной функции  $z$  и коэффициента  $\beta(t, y)$ . Соответственно естественная численная реализация оптимального решения – это приближенное решение методом конечных разностей соответствующих дифференциальных уравнений. При этом применение сеточных методов для параболических уравнений осложняется тем обстоятельством, что имеются только начальные условия для уравнений, определяющих  $\beta(t, y)$ ,  $\gamma(t, y)$ , оснований для указания граничных условий, нужных для метода конечных разностей, нет. Из-за этого граничные условия в модельном эксперименте, которому посвящен раздел 6, выбираются довольно волюнтаристски, обсуждается экспериментальный анализ их влияния на решение. И хотя удастся получить удовлетворительный результат, поиск альтернативного метода для приближенного вычисления коэффициентов функции Беллмана сохраняет актуальность.

Поскольку обсуждаемые коэффициенты описываются линейными уравнениями в частных производных второго порядка параболического типа, то перспективным представлялось опираться в исследовании этой задачи на известные факты, ассоциирующие такие уравнения с уравнениями стохастическими. Видимо самая известная ассоциация такого рода – это уравнение А.Н. Колмогорова [16], которое и было использовано в качестве инструмента для реализации альтернативного метода приближенного вычисления коэффициентов  $\beta(t, y)$ ,  $\gamma(t, y)$ . Точнее применялось утверждение, которое определяет связь между решением задачи Коши для уравнения А.Н. Колмогорова, с одной стороны, и теоретико-вероятностным представлением ее терминального условия. Использованное в работе интегральное представление этого результата известно как формула Фейнмана–Каца [17]. Такой метод для численного решения параболических уравнений и уравнений даже более общей структуры успешно реализован и исследован [18], так что примененный в статье подход можно считать апробированным. Обсуждению этого результата посвящен раздел 4. Соответственно стохастическая интерпретация  $\beta(t, y)$  дает возможность определения этого коэффициента как статистической оценки математического ожидания терминальной переменной вспомогательной динамической системы, формируемой из интегрального представления Фейнмана–Каца. Таким образом, альтернативный метод аппроксимации оптимального решения рассматриваемой задачи сводится к использованию компьютерного моделирования и метода Монте-Карло. Результаты применения этого метода и сравнение с методом конечных разностей приведены в разд. 6, представляющем численный эксперимент.

Практически важный частный случай рассматриваемой задачи, случай линейного сноса, но нелинейной диффузии, обычно характеризуемый как модель с мультипликативными возмущениями, рассмотрен в разд. 5. Оптимальное решение в этом случае не требует интегрирования параболического уравнения, управление линейно по состоянию и выходу, а численная реализация сводится к решению только обыкновенных дифференциальных уравнений. Это дает возможность, во-первых, получить подходящий эталонный пример для сравнительного анализа двух других методов аппроксимации оптимального решения – сеточного и имитационного. Во-вторых, позволяет в полном объеме рассмотреть модельный пример, связанный с выбранной целевой прикладной областью телекоммуникаций. Именно в разд. 6 обсуждаются результаты численного эксперимента, выполненного предложенными методами для модели Кокса–Ингерсона–Росса, описывающей показатель времени сетевого отклика RTT (round-trip time) основного сетевого протокола Интернета TCP (transmission control protocol).

**1. Общий подход к решению.** Предваряя основной результат, кратко опишем положения, привлекаемые далее к решению задачи, следуя обозначениям и терминологии [3]. Будем рассматривать задачу оптимального управления состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  стохастической динамической системы по полной информации, применяя метод динамического программирования. Допустимыми будем считать управления с обратной связью, т.е. функции вида  $u = u(t, x) \in \mathbb{R}^k$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , множество допустимых управлений обозначается  $U_0^T = \{u(t, x), 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n\}$ , такие, что реализациями управления  $u(t) = u(t, x(t))$  обеспечиваются выполненными условия существования  $x(t)$  для  $u \in U_0^T$ . Заметим, что использование обозначений  $u = u(t, x)$  для управления с обратной

связью и  $u(t) = u(t, x(t))$  для его реализации, соответствующей траектории  $x(t)$ , далее будет везде понятно из контекста и не приведет к неоднозначности.

Минимизируемый целевой функционал имеет вид

$$J(U_0^T) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt + l(x(T)) \right\}, \quad (1.1)$$

где  $\mathbb{E}\{\cdot\}$  – оператор математического ожидания,  $x(t)$  – случайный процесс, описываемый системой стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$dx(t) = m(t, x(t), u(t))dt + \lambda(t, x(t))dW(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0) = X, \quad (1.2)$$

где  $W(t) \in \mathbb{R}^m$  – стандартный векторный винеровский процесс,  $X \in \mathbb{R}^n$  – случайный вектор с конечным вторым моментом,  $m(t, x, u), \lambda(t, x)$  – векторная и матричная функции соответствующих размерностей.

Относительно функций сноса  $m(t, x, u)$  и диффузии  $\lambda(t, x)$  в (1.2) будем предполагать выполненными какие-либо условия существования и единственности решения для заданного допустимого управления. Так, учитывая, что допустимыми являются управления с обратной связью, будем считать, что  $m(t, x, u(t, x))$  и  $\lambda(t, x)$  удовлетворяют условию линейного роста по  $x$  и локальному условию Липшица по  $x$  равномерно по  $t$  (т.е. условиям Ито). Также относительно функций из целевого функционала  $L(t, x, u)$  и  $l(x)$  предполагаются выполненными типовые условия существования, например ограничения полиномиального роста по  $x$  и  $u$ .

Для поиска оптимального управления, минимизирующего  $J(U_0^T)$ , рассматривается функция Беллмана

$$V(t, x) = \inf_{u_t^T} \mathbb{E} \left\{ \int_t^T L(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + l(x(T)) \middle| \mathcal{F}_t^x \right\}, \quad (1.3)$$

где  $\mathcal{F}_t^x$  –  $\sigma$ -алгебра, порожденная  $x(\tau), 0 \leq \tau \leq t$ ;  $\mathbb{E}\{\cdot | \mathcal{F}_t^x\}$  – оператор условного математического ожидания относительно  $\mathcal{F}_t^x$ ;  $V(t, x)$  предполагается непрерывно дифференцируемой по  $t$  и дважды непрерывно дифференцируемой по  $x$ . В качестве достаточного условия оптимальности рассматривается уравнение динамического программирования (используется представление из [3], записанное в векторной форме):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + 1/2 \text{tr} \left\{ \lambda^\top \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \lambda \right\} + \min_u \left\{ m^\top \frac{\partial V}{\partial x} + L \right\} = 0, \quad V(T, x) = l(x), \quad (1.4)$$

где  $\top$  – операция транспонирования,  $\text{tr}$  – след матрицы,  $\partial^2 V / \partial x^2$  – матрица Гессе  $V$ ,  $\partial V / \partial x$  – градиент  $V$ ,  $m = m(t, x, u), \lambda = \lambda(t, x), V = V(t, x)$ . Далее также будут опускаться аргументы функций, если это возможно сделать однозначно.

Традиционно в рамках применения метода динамического программирования будем предполагать, что функции  $L, l, m, \lambda$  обеспечивают существование хотя бы одного решения уравнения (1.4), а следовательно, и оптимального управления

$$(U^*)_0^T = \{u^*(t, x), 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n\}, \quad u^* = \underset{u}{\operatorname{argmin}} \left\{ m^\top \frac{\partial V}{\partial x} + L \right\},$$

и доставляющего минимум целевому функционалу (1.1). Задача оптимизации далее решается путем указания конкретных выражений для  $L, l, m, \lambda$ .

**2. Постановка задачи управления выходом.** Рассмотрим стохастическую дифференциальную систему, состояние которой представляет диффузионный процесс  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ , описываемый системой нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$dy(t) = A(t, y(t))dt + \Sigma(t, y(t))dv(t), \quad y(0) = Y, \quad (2.1)$$

где  $v(t) \in \mathbb{R}^{n_v}$  – стандартный векторный винеровский процесс,  $Y \in \mathbb{R}^{n_y}$  – случайная величина с конечным вторым моментом, векторная функция  $A(t, y) : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$  и матричная функция  $\Sigma(t, y) : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$  удовлетворяют условиям Ито:

$$|A(t, y)| + |\Sigma(t, y)| \leq C(1 + |y|), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$|A(t, y_1) - A(t, y_2)| + |\Sigma(t, y_1) - \Sigma(t, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|, \quad 0 \leq t \leq T, \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{n_y},$$

обеспечивающим существование единственного потраекторного решения уравнения [3] (здесь и далее  $|\cdot|$  обозначает евклидову норму вектора или матрицы).

Будем считать, что  $y(t)$  описывает состояние некоторой динамической системы. Под выходом этой системы понимается процесс  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ , линейно связанный с состоянием:

$$dz(t) = a(t)y(t)dt + b(t)z(t)dt + c(t)u(t)dt + \sigma(t)dw(t), \quad z(0) = Z, \quad (2.2)$$

где  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  – не зависящий от  $v(t), Y, Z$  стандартный векторный винеровский процесс;  $Z \in \mathbb{R}^{n_z}$  – случайная величина с конечным вторым моментом, не зависящая от  $v(t), Y$ ;  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  – управление. Задача формулируется в предположении наличия полной информации о состоянии  $y(t)$  и выходе  $z(t)$  (соответствующую  $\sigma$ -алгебру обозначим  $\mathcal{F}_t^{y,z}$ ) и управление  $u(t) \mathcal{F}_t^{y,z}$  – измеримо. Класс  $U_0^T$  допустимых управлений составляют управления с полной обратной связью, т.е. функции вида  $u = u(t, y, z) \in \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ , в предположении, что соответствующая реализация  $u(t) = u(t, y(t), z(t))$  обеспечивает выполнение условий существования  $y(t), z(t)$  для  $u \in U_0^T$ .

Качество управления  $U_0^T$  определяется целевым функционалом следующего вида:

$$J(U_0^T) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T \|P(t)y(t) + Q(t)z(t) + R(t)u(t)\|_{S(t)}^2 dt + \|P(T)y(T) + Q(T)z(T)\|_{S(T)}^2 \right\}, \quad (2.3)$$

где  $P(t) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ ,  $Q(t) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ ,  $R(t) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ ,  $S(t) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ ,  $S(t) \geq 0$ ,  $S(t) = S^T(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , – заданные ограниченные матричные функции, весовая функция  $\|x\|_S^2 = x^T S x$  для симметричной неотрицательно определенной матрицы  $S$ , единичной матрице  $S = E$  соответствует евклидова норма  $\|x\|_E^2 = |x|^2$ . Для исключения возможности отсутствия штрафа для отдельных компонентов вектора управления  $u(t)$ , которая делает целевой функционал (2.3) физически некорректным, предполагается выполненным обычное условие невырожденности, в данных обозначениях принимающее вид  $R(t)^T S(t) R(t) > 0$ .

Матричные функции  $a(t) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$ ,  $b(t) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ ,  $c(t) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_u}$ ,  $\sigma(t) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$  ограничены:  $|a(t)| + |b(t)| + |c(t)| + |\sigma(t)| \leq C$  для всех  $0 \leq t \leq T$ . Таким образом, обеспечивается существование решения уравнения (2.2) для любого допустимого управления  $u$ . Более того, будем предполагать, что все используемые функции времени  $a(t), b(t), c(t), \sigma(t), P(t), Q(t), R(t), S(t)$  кусочно-непрерывны, чтобы обеспечить выполнение типовых условий существования решений дифференциальных уравнений, получаемых далее.

Задачу составляет поиск  $(U^*)_0^T = \{u^*(t, y, z), 0 \leq t \leq T, y \in \mathbb{R}^{n_y}, z \in \mathbb{R}^{n_z}\}$  – допустимого управления с обратной связью, доставляющего минимум квадратичному функционалу  $J(U_0^T)$ .

Функционал (2.3) формализует типичную задачу управления выходом. В [12], как уже упоминалось, в качестве примера практического приложения такого типа целевой функции рассматривается задача “доведения выхода до нуля”. Предлагаемый более общий вид целевого функционала отражает практическое содержание упомянутой выше задачи распределения ресурсов. Так, частный вид функционала (2.3)

$$J(U_0^T) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T (|y(t) - z(t)|^2 + Q(t)|z(t)|^2 + R(t)|u(t)|^2) dt + Q(T)|z(T)|^2 \right\}$$

позволяет ставить задачи слежения выходной переменной за состоянием, учитывая расходы на управляющее воздействие и/или значение выходной переменной, функционал

$$J(U_0^T) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T (|z(t) - u(t)|^2 + R(t)|u(t)|^2) dt \right\}$$

позволяет ставить задачи слежения управлением за выходной переменной, учитывая расходы на управляющее воздействие.

Поставленная задача очевидным образом формулируется в терминах выражений (1.1)–(1.3), для этого нужно обозначить

$$x(t) = (y^T(t), z^T(t))^T, \quad m(t, x(t), u(t)) = (A^T(t, y(t)), (a(t)y(t) + b(t)z(t) + c(t)u(t))^T)^T,$$

$$\lambda(t, x(t)) = \begin{pmatrix} \Sigma(t, y(t)) & 0_{n_y \times n_w} \\ 0_{n_z \times n_v} & \sigma(t) \end{pmatrix}, \quad W(t) = (v^T(t), w^T(t))^T$$

для записи уравнения состояния в виде (1.2) и

$$L(t, x(t), u(t)) = L(t, y(t), z(t), u(t)) = \|P(t)y(t) + Q(t)z(t) + R(t)u(t)\|_{S(t)}^2,$$

$$l(x(T)) = l(y(T), z(T)) = \|P(T)y(T) + Q(T)z(T)\|_{S(T)}^2$$

для записи целевого функционала в виде (1.1). В записи блочной матрицы выше через  $0_{n \times m}$  обозначена нулевая матрица размерности  $n \times m$ .

Функция Беллмана (1.3) принимает вид  $V = V(t, y, z)$ , а уравнение (1.4) с обозначениями  $\Sigma = \Sigma(t, y)$ ,  $A = A(t, y)$ ,  $a = a(t)$ ,  $b = b(t)$ ,  $c = c(t)$ ,  $u = u(t)$ ,  $\sigma = \sigma(t)$ ,  $P = P(t)$ ,  $Q = Q(t)$ ,  $R = R(t)$ ,  $S = S(t)$ , записывается как

$$\frac{\partial V}{\partial t} + 1/2 \text{tr} \left\{ \Sigma^T \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Sigma + \sigma^T \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \sigma \right\} +$$

$$+ \min_u \left\{ A^T \frac{\partial V}{\partial y} + (ay + bz + cu)^T \frac{\partial V}{\partial z} + \|Py + Qz + Ru\|_S^2 \right\} = 0, \quad (2.4)$$

$$V(T, y, z) = \|P(T)y + Q(T)z\|_{S(T)}^2.$$

Существование решения уравнения (2.4) является достаточным условием оптимальности, оптимальное управление при этом получается при минимизации соответствующего слагаемого в фигурных скобках.

**3. Динамическое программирование и оптимальное управление.** В рассматриваемой постановке линейность выхода и квадратичность критерия дают те же преимущества, что и в классической LQG-задаче [4], а именно позволяют сразу определить вид оптимального управления и фактические условия его существования. Действительно, сохраняя в (2.4) под знаком  $\min_u$  только члены, зависящие от  $u$ , получаем

$$\frac{\partial V}{\partial t} + 1/2 \text{tr} \left\{ \Sigma^T \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Sigma + \sigma^T \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \sigma \right\} +$$

$$+ A^T \frac{\partial V}{\partial y} + (ay + bz)^T \frac{\partial V}{\partial z} + \|Py + Qz\|_S^2 +$$

$$+ \min_u \left\{ u^T \left( c^T \frac{\partial V}{\partial z} + 2R^T S (Py + Qz) \right) + \|Ru\|_S^2 \right\} = 0. \quad (3.1)$$

Далее из (3.1) с учетом сделанного предположения  $R^T S R > 0$ , обозначения “ $A^{-1}$ ” для обратной матрицы  $A$  и выражения для минимума квадратичной формы получаем равенство для оптимального управления в предположении существования решения (3.1):

$$u^* = u^*(t, y, z) = -1/2(R^T S R)^{-1} \left( c^T \frac{\partial V}{\partial z} + 2R^T S (Py + Qz) \right). \quad (3.2)$$

Это управление доставляет минимум последнему слагаемому в (3.1):

$$\begin{aligned} & u^T \left( c^T \frac{\partial V}{\partial z} + 2R^T S (Py + Qz) \right) + \|Ru\|_S^2 \Big|_{u=u^*} = \\ & = -1/4 \left( c^T \frac{\partial V}{\partial z} + 2R^T S (Py + Qz) \right)^T (R^T S R)^{-1} \left( c^T \frac{\partial V}{\partial z} + 2R^T S (Py + Qz) \right). \end{aligned}$$

Отметим, что оптимальное управление получается из двух слагаемых: одно слагаемое линейное по состоянию и выходу (как в классической линейно-квадратичной задаче), второе слагаемое нелинейное, определяется производной  $\partial V / \partial z$ .

Таким образом, функция Беллмана описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + 1/2 \text{tr} \left\{ \Sigma^T \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Sigma + \sigma^T \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \sigma \right\} + \\ & + A^T \frac{\partial V}{\partial y} + (ay + bz)^T \frac{\partial V}{\partial z} + \|Py + Qz\|_S^2 - \\ & - 1/4 \left( c^T \frac{\partial V}{\partial z} + 2R^T S (Py + Qz) \right)^T (R^T S R)^{-1} \left( c^T \frac{\partial V}{\partial z} + 2R^T S (Py + Qz) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Преобразуя последнее слагаемое в (3.3), перепишем его в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + 1/2 \text{tr} \left\{ \Sigma^T \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Sigma + \sigma^T \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \sigma \right\} + A^T \frac{\partial V}{\partial y} + \\ & + ((ay + bz)^T - (R^T S (Py + Qz))^T (R^T S R)^{-1} c^T) \frac{\partial V}{\partial z} + \\ & + (Py + Qz)^T (S - S R (R^T S R)^{-1} R^T S) (Py + Qz) - \\ & - 1/4 \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^T c (R^T S R)^{-1} c^T \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Рассматривая полученное уравнение, предположим, что его решение может быть представлено в как

$$V = V(t, y, z) = z^T \alpha(t) z + z^T \beta(t, y) + \gamma(t, y), \quad (3.5)$$

т.е. решением является функция, квадратичная по переменной  $z$ , и, таким образом, поиск оптимального решения сводится к поиску уравнений относительно симметричной матричной функции  $\alpha = \alpha(t) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ ,  $\alpha = \alpha^T$ , векторной функции  $\beta = \beta(t, y) \in \mathbb{R}^{n_z}$  и скалярной функции  $\gamma = \gamma(t, y) \in \mathbb{R}^1$ . Отметим сразу, что явный вид функции  $\gamma$  для реализации оптимального управления не требуется, однако далее будет предложен вариант вычисления и этой функции. Источником для предложения (3.5) является уже упоминавшаяся аналогичная задача для случая дискретного времени [10, 11]. В той задаче выражение для функции Беллмана получается формально без дополнительных усилий. При этом форма (3.5) обнаруживается как свойство оптимального решения. В рассматриваемом случае непрерывного времени (3.5) является предположением, правильность которого подтверждается далее результирующими уравнениями для  $\alpha, \beta, \gamma$ . Кроме того, данное предположение представляется вытекающим из линейной структуры задачи в отношении переменной  $z$ , в частности тем фактом, что такой вид функции Беллмана обеспечивает линейность оптимального управления (3.2) по  $z$ .

Граничное условие при сделанном предположении (3.5) принимает вид

$$\begin{aligned} & V(T, y, z) = \|P(T)y + Q(T)z\|_{S(T)}^2 = \\ & = z^T Q^T(T) S(T) Q(T) z + 2z^T Q^T(T) S(T) P(T) y + y^T P^T(T) S(T) P(T) y, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} & \alpha(T) = Q^T(T) S(T) Q(T), \quad \beta(T, y) = 2Q^T(T) S(T) P(T) y, \\ & \gamma(T, y) = y^T P^T(T) S(T) P(T) y. \end{aligned} \quad (3.6)$$

При этом поскольку (3.5) дает  $\partial V/\partial z = 2\alpha z + \beta$ , то само оптимальное управление, определенное выражением (3.2),

$$u^* = u^*(t, y, z) = -1/2 (R^T S R)^{-1} (c^T (2\alpha z + \beta) + 2R^T S (P y + Q z)). \quad (3.7)$$

Дальнейшие преобразования удобнее выполнить, представив  $V$  в виде

$$V = z^T \alpha z + \sum_{i=1}^{n_z} z^{(i)} \beta^{(i)} + \gamma,$$

обозначая  $z = (z^{(1)}, \dots, z^{(n_z)})^T$ ,  $\beta = (\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(n_z)})^T$ ,  $\beta^{(i)} = \beta^{(i)}(t, y)$ , чтобы не сталкиваться при дифференцировании с необходимостью использования тензорных обозначений для производных векторной функции. Теперь следует подставить  $V$ , представленную в виде (3.5), в уравнение (3.4):

$$\begin{aligned} & z^T \frac{d\alpha}{dt} z + \sum_{i=1}^{n_z} z^{(i)} \frac{\partial \beta^{(i)}}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} + 1/2 \text{tr} \left\{ \Sigma^T \left( \sum_{i=1}^{n_z} z^{(i)} \frac{\partial^2 \beta^{(i)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} \right) \Sigma + 2\sigma^T \alpha \sigma \right\} + \\ & + A^T \left( \sum_{i=1}^{n_z} z^{(i)} \frac{\partial \beta^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) + ((ay + bz)^T - (R^T S (P y + Q z))^T (R^T S R)^{-1} c^T) (2\alpha z + \beta) + \\ & + (P y + Q z)^T (S - S R (R^T S R)^{-1} R^T S) (P y + Q z) - 1/4 (2\alpha z + \beta)^T c (R^T S R)^{-1} c^T (2\alpha z + \beta) = 0. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и формируя слагаемые при  $z^T z, z$  (каждой компоненте  $z^{(i)}$ ) и  $z^0 = 1$ , имеем

$$\begin{aligned} & z^T \frac{d\alpha}{dt} z + \sum_{i=1}^{n_z} z^{(i)} \frac{\partial \beta^{(i)}}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} + 1/2 \left( \sum_{i=1}^{n_z} z^{(i)} \text{tr} \left\{ \Sigma^T \frac{\partial^2 \beta^{(i)}}{\partial y^2} \Sigma \right\} \right) + \\ & + 1/2 \text{tr} \left\{ \Sigma^T \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} \Sigma \right\} + \text{tr} \{ \sigma^T \alpha \sigma \} + \sum_{i=1}^{n_z} z^{(i)} A^T \frac{\partial \beta^{(i)}}{\partial y} + A^T \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \\ & + 2z^T (b^T - Q^T S R (R^T S R)^{-1} c^T) \alpha z + \\ & + (\beta^T (b - c (R^T S R)^{-1} R^T S Q) + 2y^T (a^T - P^T S R (R^T S R)^{-1} c^T) \alpha) z + \\ & + \beta^T (a - c (R^T S R)^{-1} R^T S P) y + z^T Q^T (S - S R (R^T S R)^{-1} R^T S) Q z + \\ & + 2y^T P^T (S - S R (R^T S R)^{-1} R^T S) Q z + y^T P^T (S - S R (R^T S R)^{-1} R^T S) P y - \\ & - z^T \alpha^T c (R^T S R)^{-1} c^T \alpha z - \beta^T c (R^T S R)^{-1} c^T \alpha z - 1/4 \beta^T c (R^T S R)^{-1} c^T \beta = 0. \end{aligned}$$

Окончательно требуемая группировка слагаемых записывается с использованием обозначения  $[A]^{(ji)}$  для элемента  $j$ -й строки  $i$ -го столбца матрицы  $A$ :

$$\begin{aligned} & z^T \left( \begin{aligned} & \frac{d\alpha}{dt} + 2(b^T - Q^T S R (R^T S R)^{-1} c^T) \alpha + \\ & + Q^T (S - S R (R^T S R)^{-1} R^T S) Q - \alpha^T c (R^T S R)^{-1} c^T \alpha \end{aligned} \right) z + \\ & + \sum_{i=1}^{n_z} z^{(i)} \left( \begin{aligned} & \frac{\partial \beta^{(i)}}{\partial t} + 1/2 \text{tr} \left\{ \Sigma^T \frac{\partial^2 \beta^{(i)}}{\partial y^2} \Sigma \right\} + A^T \frac{\partial \beta^{(i)}}{\partial y} + \\ & + \sum_{j=1}^{n_z} \beta^{(j)} [b - c (R^T S R)^{-1} R^T S Q - c (R^T S R)^{-1} c^T \alpha]^{(ji)} + \\ & + 2 \sum_{j=1}^{n_y} y^{(j)} [(a^T - P^T S R (R^T S R)^{-1} c^T) \alpha + P^T (S - S R (R^T S R)^{-1} R^T S) Q]^{(ji)} \end{aligned} \right) + \\ & + \left( \begin{aligned} & \frac{\partial \gamma}{\partial t} + 1/2 \text{tr} \left\{ \Sigma^T \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} \Sigma \right\} + \text{tr} \{ \sigma^T \alpha \sigma \} + A^T \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \beta^T (a - c (R^T S R)^{-1} R^T S P) y + \\ & + y^T P^T (S - S R (R^T S R)^{-1} R^T S) P y - 1/4 \beta^T c (R^T S R)^{-1} c^T \beta \end{aligned} \right) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку полученное равенство выполняется для всех  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ , то каждое из трех слагаемых должно быть равно 0, что дает следующие уравнения:

– матричное дифференциальное уравнение для функции  $\alpha = \alpha(t)$  (с учетом предположения  $\alpha = \alpha^T$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} + (b^T - Q^T SR(R^T SR)^{-1} c^T)\alpha + \alpha(b - c(R^T SR)^{-1} R^T SQ) + \\ + Q^T (S - SR(R^T SR)^{-1} R^T S)Q - \alpha c(R^T SR)^{-1} c^T \alpha = 0, \quad \alpha(T) = Q^T (T) S(T) Q(T), \end{aligned} \quad (3.8)$$

– систему дифференциальных уравнений в частных производных для функций  $\beta^{(i)} = \beta^{(i)}(t, y), i = \overline{1, n_z}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta^{(i)}}{\partial t} + 1/2 \text{tr} \left\{ \Sigma^T \frac{\partial^2 \beta^{(i)}}{\partial y^2} \Sigma \right\} + A^T \frac{\partial \beta^{(i)}}{\partial y} + \\ + \sum_{j=1}^{n_z} \beta^{(j)} [b - c(R^T SR)^{-1} R^T SQ - c(R^T SR)^{-1} c^T \alpha]^{(ji)} + \\ + 2 \sum_{j=1}^{n_y} y^{(j)} [(a^T - P^T SR(R^T SR)^{-1} c^T)\alpha + P^T (S - SR(R^T SR)^{-1} R^T S)Q]^{(ji)} = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\beta^{(i)}(T, y) = 2 \sum_{j=1}^{n_y} y^{(j)} [Q^T (T) S(T) P(T)]^{(ji)},$$

– дифференциальное уравнение в частных производных для функции  $\gamma = \gamma(t, y)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + 1/2 \text{tr} \left\{ \Sigma^T \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} \Sigma \right\} + \text{tr} \{ \sigma^T \alpha \sigma \} + A^T \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \beta^T (a - c(R^T SR)^{-1} R^T SP)y + \\ + y^T P^T (S - SR(R^T SR)^{-1} R^T S)Py - 1/4 \beta^T c(R^T SR)^{-1} c^T \beta = 0, \\ \gamma(T, y) = y^T P^T (T) S(T) P(T) y. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вводя дополнительно обозначения

$$M = M(t) = 2((a^T - P^T SR(R^T SR)^{-1} c^T)\alpha + P^T (S - SR(R^T SR)^{-1} R^T S)Q),$$

$$N = N(t) = b - c(R^T SR)^{-1} R^T SQ - c(R^T SR)^{-1} c^T \alpha,$$

$$K = K(t, y) = \beta^T (a - c(R^T SR)^{-1} R^T SP)y + y^T P^T (S - SR(R^T SR)^{-1} R^T S)Py - 1/4 \beta^T c(R^T SR)^{-1} c^T \beta,$$

для  $\beta(t, y)$  и  $\gamma(t, y)$  вместо (3.9) и (3.10) окончательно получаем

$$\frac{\partial \beta^{(i)}}{\partial t} + 1/2 \text{tr} \left\{ \Sigma^T \frac{\partial^2 \beta^{(i)}}{\partial y^2} \Sigma \right\} + A^T \frac{\partial \beta^{(i)}}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n_y} y^{(j)} [M]^{(ji)} + \sum_{j=1}^{n_z} \beta^{(j)} [N]^{(ji)} = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + 1/2 \text{tr} \left\{ \Sigma^T \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} \Sigma \right\} + \text{tr} \{ \sigma^T \alpha \sigma \} + A^T \frac{\partial \gamma}{\partial y} + K = 0. \quad (3.12)$$

Уравнение (3.8) – это матричное уравнение Риккати, точнее его частный случай для квадратной симметричной матрицы  $\alpha$ . Сделанных выше предположений достаточно для существования единственного неотрицательного решения для всех  $0 \leq t \leq T$ . Этот факт требует дополнительно комментария. Рассмотрим исходную задачу при дополнительных условиях:  $a(t) = 0_{n_z \times n_z}$ ,  $P(t) = 0_{n_y \times n_y}$ ,  $S(t) = E$  для всех  $0 \leq t \leq T$ . Это дает

$$J(U_0^T) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T (\|z\|_Q^2 + \|u\|_R^2) dt + \|z(T)\|_{Q(T)}^2 \right\}$$

и сводит рассматриваемую постановку к классической LQG-задаче. Для такого упрощения целевого функционала требуется наличие блочной структуры матриц  $Q, R$  из (2.3), чтобы исклю-

чить в упрощенном  $J(U_0^T)$  слагаемое с множителями  $z$  и  $u$ . В этой упрощенной форме матрицы  $Q(t) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  и  $R(t) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$  представляют соответствующие блоки одноименных матриц из (2.3).

Теперь уравнение (3.8) для  $\alpha(t)$  принимает хорошо известный вид

$$\frac{d\alpha}{dt} + b^T \alpha + \alpha b + Q^T Q - \alpha c (R^T R)^{-1} c^T \alpha = 0, \quad \alpha(T) = Q^T(T) Q(T). \quad (3.13)$$

В таком случае, как известно [19], существует единственное оптимальное управление – линейное с обратной связью по выходу  $z(t)$ , с коэффициентом усиления, описываемым уравнением Риккати (3.13). Именно этот результат дают уравнения (3.8)–(3.10) и описываемая ими функция Беллмана (3.5), так как из  $a(t) = 0, P(t) = 0$  немедленно следует, что  $\beta^{(i)}(t, y) = 0, i = \overline{1, n_z}$ , откуда, в свою очередь, с учетом независимости решения от  $y$  следует, что  $\gamma$  не зависит от  $y$  и задается уравнением  $d\gamma/dt + \text{tr}\{\sigma^T \alpha \sigma\} = 0, \gamma(T) = 0$ . Оптимальное управление при этом  $u^* = -(R^T R)^{-1} c^T \alpha z$ , т.е. все полностью совпадает с известным классическим решением.

С уравнениями (3.11) и (3.12) ситуация, естественно, обстоит сложнее. Это линейные уравнения в частных производных второго порядка параболического типа, поскольку  $\Sigma^T \Sigma \geq 0$ . Уравнения неоднородные, причем в уравнении (3.12) для  $\gamma(t, y)$  участвуют все  $\beta^{(i)}(t, y)$ , т.е. сначала должны быть решены уравнения (3.11) и результат подставлен в (3.12). Также в уравнения (3.11) нужно подставить  $\alpha(t)$  – решение уравнения (3.8). Далее, в каждом из уравнений (3.11) неоднородность для  $\beta^{(i)}(t, y)$  формируется неизвестными функциями  $\beta^{(j)}(t, y), j \neq i$ , т.е. параболические уравнения объединены в систему и по отдельности решаться не могут, так что актуален еще и вопрос их приближенного решения. Кроме того, отсутствуют конструктивные условия, гарантирующие существование решений (требовать, чтобы все фигурирующие в уравнениях коэффициенты были представлены аналитическими функциями на всем пространстве значений, вряд ли целесообразно, а в имеющейся системе уравнений, может быть, и не достаточно). Поэтому далее будем предполагать, что уравнения (3.11) и (3.12) имеют на интервале  $0 \leq t \leq T$  хотя бы одно гладкое (непрерывно дифференцируемое по  $t$  и дважды непрерывно дифференцируемое по  $y$ ) решение и именно эти условия можно считать достаточными условиями существования оптимального решения рассматриваемой задачи.

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема.** Пусть для диффузионного процесса (2.1) выполнены условия Ито, для выхода (2.2) ограничены коэффициенты, уравнения (3.8)–(3.10) имеют гладкие решения для  $0 \leq t \leq T$ . Тогда минимум функционалу (2.3) доставляет  $(U^*)_0^T$  – оптимальное управление с полной обратной связью, определенное (3.7).

**4. Стохастическое представление коэффициентов функции Беллмана.** Для реализации оптимального управления и оценки его качества потребуются решать полученные уравнения (3.8), (3.11), (3.12) приближенно. Решение уравнения (3.8) не представляет трудностей и может быть выполнено любым из множества эффективных численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Несколько сложнее обстоит ситуация с уравнениями (3.11), (3.12). Для уравнений параболического типа также имеются эффективные численные схемы, основанные на методе конечных разностей. Но в рассматриваемом случае трудности в реализации возникают при определении граничных условий, необходимых для этого метода. В рассматриваемой задаче физические основания для определения границы и, тем более граничных условий как для  $\beta(t, y)$ , так и для  $\gamma(t, y)$  отсутствуют. Вариант возможного преодоления этих сложностей обсуждается далее в рамках представления численного эксперимента. Более подходящим и лишены таких трудностей представляется решение параболического уравнения на основе его ассоциации с уравнением А.Н. Колмогорова, точнее связи между решением задачи Коши с терминальным условием для уравнения А.Н. Колмогорова и теоретико-вероятностным представлением этого терминального условия [16]. Выражением этого результата является формула Фейнмана–Каца [17], непосредственно применимая к уравнению (3.12). С учетом введенных выше

обозначений интегральное представление Фейнмана–Каца решения дифференциального уравнения (3.12) имеет вид

$$\gamma(t, y) = \mathbb{E} \left\{ y^T(T) P^T(T) S(T) P(T) y(T) + \int_t^T K(\tau, y(\tau)) d\tau \middle| \mathcal{F}_t^y \right\}. \quad (4.1)$$

В предположении, что  $\alpha(t)$  и  $\beta(t, y)$  известны (вычислены), (4.1) дает основание для применения компьютерного моделирования для аппроксимации  $\gamma(t, y)$ . Многократно моделируя решение уравнения (2.1), проходящее через точку  $(t, y)$  (именно это обозначает  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}_t^y$  в условном математическом ожидании), значение  $\gamma(t, y)$  можно получить как статистическую оценку функции терминального условия, согласно (4.1). Подробнее этот метод описан далее. Следует отметить, что как в формулировке для уравнения А.Н. Колмогорова, так и в формуле Фейнмана–Каца утверждается существование процесса  $y$ , обеспечивающего равенство (4.1), т.е. формально это другой процесс и задан он на другом пространстве, чем процесс, участвующий в поставленной выше задаче управления. При этом описывается этот процесс таким же уравнением (2.1) и имеет те же вероятностные характеристики, что дает основание использовать уже имеющуюся дифференциальную систему, не вводя новые обозначения.

Такой же подход хотелось бы применить для приближенного вычисления  $\beta(t, y)$ . Более того, в скалярном случае  $n_z = 1$  интегральное представление Фейнмана–Каца решения дифференциального уравнения (3.11) записывается без дополнительных усилий и имеет вид

$$\beta(t, y) = \mathbb{E} \left\{ \begin{array}{l} 2 \exp \left\{ \int_t^T N(\tau) d\tau \right\} y^T(T) P^T(T) S(T) Q(T) + \\ + \int_t^T \exp \left\{ \int_t^\tau N(s) ds \right\} y^T(\tau) M(\tau) d\tau \end{array} \middle| \mathcal{F}_t^y \right\}. \quad (4.2)$$

Далее выводится аналог (4.2) для  $n_z > 1$ . Для этого введем новую переменную  $\bar{\beta} = \bar{\beta}(t, y) \in \mathbb{R}^{n_z}$  и выполним замену  $\beta(t, y) = I(t) \bar{\beta}(t, y)$ , где матрица  $I = I(t) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  является решением уравнения  $dI(t)/dt + N^T(t)I(t) = 0$ . Такая замена позволяет исключить из уравнений (3.11) слагаемые с  $\beta^{(j)}$ . Действительно, для слагаемых

$$\frac{\partial \beta^{(i)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n_z} \beta^{(j)} [N]^{(ji)}, \quad i = \overline{1, n_z},$$

записанных в векторной форме  $\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t} + N^T \bar{\beta}$ , замена переменной на  $\bar{\beta}$  дает  $I \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t} + dI/dt \bar{\beta} + N^T I \bar{\beta} = I \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t}$ . Необходимая для такой замены матрица  $I(t)$  существует и равна матричной экспоненте

$$I(t) = \exp \left\{ - \int_0^t N^T(\tau) d\tau \right\},$$

причем  $I(t)$  невырожденная [20], что позволяет далее использовать обратную матрицу  $I^{-1}(t)$ . Остальные слагаемые в (3.11) с дифференцированием по  $t$  не связаны и линейны по  $\bar{\beta}$ , что дает

$$\sum_{k=1}^{n_z} \frac{\partial \bar{\beta}^{(k)}}{\partial t} [I]^{(ik)} + \sum_{k=1}^{n_z} 1/2 \text{tr} \left\{ \Sigma^T \frac{\partial^2 \bar{\beta}^{(k)}}{\partial y^2} \Sigma \right\} [I_t]^{(ik)} + \sum_{k=1}^{n_z} A^T \frac{\partial \bar{\beta}^{(k)}}{\partial y} [I]^{(ik)} + \sum_{j=1}^{n_y} y^{(j)} [M]^{(ji)} = 0.$$

Следующим действием левая часть полученного равенства разрешается относительно эллиптической части и  $\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t}$  умножением на  $I^{-1}(t)$

$$\frac{\partial \bar{\beta}^{(i)}}{\partial t} + 1/2 \text{tr} \left\{ \Sigma^T \frac{\partial^2 \bar{\beta}^{(i)}}{\partial y^2} \Sigma \right\} + A^T \frac{\partial \bar{\beta}^{(i)}}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n_y} y^{(j)} [I^{-1} M^T]^{(ij)} = 0, \quad i = \overline{1, n_z}. \quad (4.3)$$

Теперь для каждого из уравнений (4.3) может быть записана формула Фейнмана–Каца:

$$\bar{\beta}^{(i)}(t, y) = \mathbb{E} \left\{ \begin{array}{l} 2 \sum_{j=1}^{n_y} y^{(j)}(T) [I^{-1}(T) Q^T(T) S(T) P(T)]^{(ij)} + \\ + \int_t^T \sum_{j=1}^{n_y} y^{(j)}(\tau) [I^{-1}(\tau) M^T(\tau)]^{(ij)} d\tau \end{array} \middle| \mathcal{F}_t^y \right\}$$

или в векторном виде

$$\bar{\beta}(t, y) = \mathbb{E} \left\{ 2I^{-1}(T) Q^T(T) S(T) P(T) y(T) + \int_t^T I^{-1}(\tau) M^T(\tau) y(\tau) d\tau \middle| \mathcal{F}_t^y \right\}.$$

Наконец, обратная замена  $\bar{\beta}(t, y) = I^{-1}(t) \beta(t, y)$  дает

$$\beta(t, y) = \mathbb{E} \left\{ \begin{array}{l} 2I^{-1}(t) I^{-1}(T) Q^T(T) S(T) P(T) y(T) + \\ + I^{-1}(t) \int_t^T I^{-1}(\tau) M^T(\tau) y(\tau) d\tau \end{array} \middle| \mathcal{F}_t^y \right\}. \quad (4.4)$$

Приводя выражения, нужные для расчета по формулам (4.1) и (4.4), в дифференциальный вид, окончательно получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} dy(\tau) &= A(\tau, y(\tau)) d\tau + \Sigma(\tau, y(\tau)) dv(\tau), \quad y_t = y, \quad t \leq \tau \leq T, \\ \frac{dI^{-1}(\tau)}{d\tau} - N^T(\tau) I^{-1}(\tau) &= 0, \quad I^{-1}(t) = \exp \left\{ \int_0^t N^T(s) ds \right\}, \\ \frac{dy^\beta(\tau)}{d\tau} &= I^{-1}(\tau) M^T(\tau) y(\tau), \quad y^\beta(\tau) = 0, \\ \beta(t, y) &= \mathbb{E} \{ I^{-1}(t) I^{-1}(T) Q^T(T) S(T) P(T) y(T) + I^{-1}(t) y^\beta(T) \}, \\ \frac{dy^\gamma(\tau)}{d\tau} &= K(\tau, y(\tau)), y^\gamma(t) = 0, \\ \gamma(t, y) &= \mathbb{E} \{ y^T(T) P^T(T) S(T) P(T) y(T) + y^\gamma(T) \}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь для удобства интегрирования введены дополнительные переменные  $y^\beta(\tau) \in \mathbb{R}^{n_z}$ ,  $y^\gamma(\tau) \in \mathbb{R}^1$  и учтено, что

$$I^{-1}(\tau) = \exp \left\{ \int_0^\tau N^T(s) ds \right\}.$$

Полученная дифференциальная система (4.5) дает альтернативный вариант приближенного расчета оптимального управления (3.7) в отношении расчета коэффициентов  $\beta(t, y)$  и определения его качества  $J((U^*)_0^T) = V(0, Y, Z) = \mathbb{E} \{ Z^T \alpha(0) Z + Z^T \beta(0, Y) + \gamma(0, Y) \}$  в отношении расчета коэффициента  $\gamma(0, y)$ . Именно многократно моделируя решение системы (4.5) для различных начальных условий  $(t, y)$ , указанные коэффициенты можно оценивать по методу Монте-Карло, заменяя операторы  $\mathbb{E}\{\cdot\}$  в (4.5) статистическим средним. Детально соответствующий алгоритм приведен в [21]. Заметим, что альтернативным предлагаемый метод квалифицируется по отношению к традиционному способу решения параболических уравнений (3.11), (3.12) методом конечных разностей.

**5. Частный случай линейного сноса.** Прежде чем перейти к вопросам практической реализации и обсуждению модельного примера, рассмотрим один частный случай, когда оптимальное управление (3.7) может быть найдено аналитически, т.е. без численного решения параболического уравнения (3.11). Очевидно, что частным случаем рассматриваемой задачи является классическая линейно-гауссовская постановка, о чем уже упоминалось выше. В таком случае функция Беллмана (3.5) является квадратичной, что означает линейность коэффициентов  $\beta(t, y)$  и

квадратичность коэффициента  $\gamma(t, y)$  по  $y$ , т.е. решения (3.11), (3.12) могут быть найдены в виде  $\beta(t, y) = \beta^a(t)y + \beta^b(t)$  и  $\gamma(t, y) = y^T \gamma^a(t)y + y^T \gamma^b(t) + \gamma^c(t)$  соответственно, где матрица  $\beta^a(t) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$ , вектор  $\beta^b(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ , матрица  $\gamma^a(t) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ , вектор  $\gamma^b(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  и функция  $\gamma^c(t) \in \mathbb{R}^1$  не зависят от  $y$ . Такой случай с точки зрения новизны интереса не представляет.

Однако рассматриваемая постановка включает другой более интересный частный вариант. Из-за независимости состояния  $y(t)$ , заданного уравнением (2.1), от управления  $u(t)$ , которое входит линейно только в уравнение (2.2) выхода  $z(t)$ , для линейности коэффициентов  $\beta(t, y)$  достаточно линейного сноса  $A(t, y)$  в (2.1), а линейность диффузии  $\Sigma(t, y)$  не требуется. В отличие от случая LQG функция Беллмана при этом не будет квадратичной, решение уравнения (3.12) в виде  $\gamma(t, y) = y^T \gamma^a(t)y + y^T \gamma^b(t) + \gamma^c(t)$  не представляется именно из-за нелинейности  $\Sigma(t, y)$ , но простое линейное представление оптимального управления (3.7) в этом практически важном частном случае получается.

Итак, в предположении, что  $A(t, y) = A^a(t)y + A^b(t)$ , где матрица  $A^a(t) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$  и вектор  $A^b(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  не зависят от  $y$ , найдем решение (3.11) в виде  $\beta(t, y) = \beta^a(t)y + \beta^b(t)$ . При этом предположении

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = (\beta^a)^T.$$

Кроме того, учтем, что для слагаемых с  $\partial \beta^{(i)} / \partial y$  в (3.11) имеет место

$$A^T \frac{\partial \beta^{(i)}}{\partial y} = \left( \frac{\partial \beta^{(i)}}{\partial y} \right)^T A = \left( \frac{\partial \beta^{(i)}}{\partial y} \right)^T (A^a(t)y + A^b(t)),$$

так что

$$A^T \frac{\partial \beta}{\partial y} = \beta^a(t)(A^a(t)y + A^b(t)),$$

а уравнения (3.11), записанные в векторном виде, дают

$$\frac{d\beta^a}{dt}y + \frac{d\beta^b}{dt} + \beta^a A^a y + \beta^a A^b + M^T y + N^T \beta^a y + N^T \beta^b = 0,$$

откуда получаются уравнения для  $\beta^a(t)$  и  $\beta^b(t)$ :

$$\frac{d\beta^a}{dt} + \beta^a A^a + M^T + N^T \beta^a = 0, \quad \frac{d\beta^b}{dt} + \beta^a A^b + N^T \beta^b = 0, \quad (5.1)$$

т.е. система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Оптимальное управление (3.7) принимает вид

$$u^* = u^*(t, y, z) = -1/2 (R^T S R)^{-1} (2c^T \alpha + R^T S Q)z + (c^T \beta^a + 2R^T S P)y + c^T \beta^b. \quad (5.2)$$

**6. Вопросы численной реализации и модельный пример.** В этом разделе обсуждаются некоторые аспекты практической реализации полученного оптимального управления. С этой целью рассматривается прикладной пример из области телекоммуникаций – популярного современного источника приложений для различных теоретических задач. Далее использована простая модель для показателя RTT сетевого протокола TCP [22]. Рассматривается модельный пример, поэтому параметры подобраны для лучшей выразительности иллюстративного материала. Переменная состояния RTT описывается следующей диффузией:

$$dy(t) = (1 - y(t))dt + 2.5\sqrt{y(t)}dv(t), \quad y(0) = Y \sim \mathbb{N}(15, 9). \quad (6.1)$$

Здесь  $\mathbb{N}(M, D)$  – нормальное распределение со средним  $M$  и дисперсией  $D$ .

Надо отметить, что такое уравнение (с точностью до варьируемых параметров) изначально известно как модель Кокса–Ингерсона–Росса (Cox–Ingersoll–Ross model) [23] и описывает эволюцию процентных ставок. Конечно, для описания реальных данных RTT модель типа (6.1)

представляет не более чем начальное приближение, но оно полезно уже потому, что дает основу для дальнейших обобщений, уточнений модели (см., например, [7]). Свойства процесса  $y(t)$  из (6.1) хорошо изучены, в частности имеется свойство неотрицательности выборочных значений  $y(t) > 0$ , наличие эргодичности, известно предельное распределение и переходная вероятность. Отметим, что начальные условия в (6.1) выбраны так, что  $M, D$  значительно отличаются от моментных характеристик предельного распределения, т.е. управление ведется в рамках переходного процесса, а не в стационарном режиме.

Выход для состояния (6.1) задается уравнением

$$dz(t) = y(t)dt - z(t)dt + u(t)dt + 2.5dw(t), \quad z_0 = Z \sim \mathbb{N}(9,9), \quad (6.2)$$

целевой функционал

$$J(U_0^T) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T ((y(t) - z(t))^2 + z^2(t) + u^2(t))dt + (y(T) - z(T))^2 + z^2(T) \right\}. \quad (6.3)$$

Такой выход имитирует выделение некоторого временного ресурса, складывающегося из текущего показателя РГТ, управляющего воздействия и возмущения. Соответственно функционал (6.3) ставит целью отслеживание выходной переменной состояния с минимизацией затрат на управляющие воздействия и абсолютное значение выхода. Таким образом, понятная для практики задача отслеживания состояния дополняется учетом значения выхода, которое не позволит ему неограниченно расти в случае роста РГТ, и платой за применение управляющих воздействий, которые в реальности связаны с некоторыми изменениями конфигурации оборудования или программного обеспечения.

Моделировалось  $N = 1000$  траекторий  $y(t), z^*(t), u^*(t)$  для  $T = 5$ . Здесь через  $z^*(t)$  обозначен выход (6.2), рассчитанный для оптимального управления с обратной связью  $u^* = u^*(t, y, z)$ . Кроме того, моделировались траектории  $z^{(prog)}(t), u^{(prog)}(t)$  для программного управления  $u^{(prog)}(t) = \mathbb{E}\{u^*(t)\}$  и  $z^{(0)}(t), u^{(0)}(t)$  для неуправляемого выхода (6.2), т.е. для  $u(t) = 0$ . В каждом случае путем осреднения по пучку траекторий оценивались величины  $J(U_0^T)$ . Соответственно в результате можно увидеть не только конечные значения целевой функции для разных вариантов управления  $J((U^*)_0^T), J((U^{(prog)})_0^T), J((U^{(0)})_0^T)$ , но и их формирование в динамике.

Описание численных процедур начнем с моделирования. Траектории  $y(t), z(t)$  моделировались приближенно, для чего уравнения (6.1), (6.2) дискретизировались по методу Эйлера с шагом  $\delta_t = 0.001$  (тем же, что далее использовался при численной аппроксимации  $\beta(t, y)$ ). Соответствующие смоделированные значения  $y(t - \delta_t), z^*(t - \delta_t)$  применялись в (3.7) для вычисления реализаций управления  $u^*(t) = u^*(t, y(t), z^*(t))$ .

Далее заметим, что уравнение Риккати (3.8) для  $\alpha(t)$  с учетом постоянных коэффициентов в выбранной модели выхода (6.2) и целевом функционале (6.3) решается точно. Именно

$$\alpha(t) = \frac{C_\alpha e^{2\sqrt{3}t}(1 + \sqrt{3}) - 1 + \sqrt{3}}{1 - C_\alpha e^{2\sqrt{3}t}}, \quad C_\alpha = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} e^{-10\sqrt{3}}.$$

Наконец, оптимальное управление  $u^*$  рассчитывалось тремя способами. Во-первых, поскольку снос в модели (6.1) линейный, то в рассматриваемом примере можно вычислить решение, не интегрируя общее уравнение (3.11) для  $\beta(t, y)$ , а решая уравнения (5.1) и вычисляя далее управление, согласно (5.2). Система (5.1) линейных уравнений для  $\beta^a(t)$  и  $\beta^b(t)$  решалась неявным методом Эйлера с тем же шагом  $\delta_t = 0.001$ . Соответствующее приближенное оптимальное управление обозначается далее  $u^{(ref)}$ , решение уравнение (3.11) —  $\beta^{(ref)}(t, y)$ . Эти аппроксимации в данном примере носят референсный (эталонный) характер.

Второй способ аппроксимации  $\beta(t, y)$  — использование традиционного метода конечных разностей для решения параболического уравнения (3.11). Реализованные варианты и особенности применения этого метода ниже обсуждаются подробнее, а соответствующее приближенное решение обозначается  $u^{(net)}$ , решение уравнения (3.11) —  $\beta^{(net)}(t, y)$ .

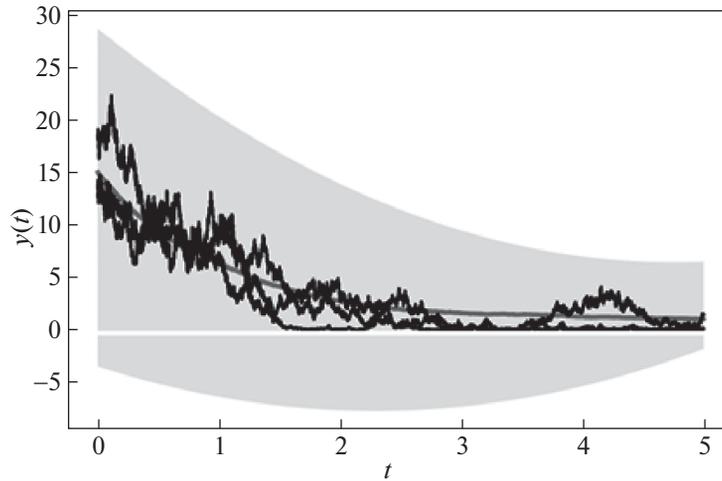


Рис. 1. Выборочные траектории и характеристика границы

Третий способ – моделирование решений системы (4.5) и замена математического ожидания статистической оценкой (метод Монте-Карло). Соответствующие приближенные решения –  $u^{(МК)}$  и  $\beta^{(МК)}(t)$ .

Оказалось, что на графических иллюстрациях далее визуализировать разницу между реализациями управлений  $u^{(ref)}(t), u^{(net)}(t), u^{(МК)}(t)$  не удастся, поэтому в этих иллюстрациях использовано общее обозначение  $u^*(t)$ .

Вопросы применения метода конечных разностей для уравнения параболического типа давно и хорошо изучены [24]. Первое, что надо сделать для расчета  $\beta^{(net)}(t, y)$ , – это ограничить область значения аргумента  $y$  для формирования численной схемы расчета. С этой целью использовались  $N$  смоделированных траекторий (6.1): выборочные значения использовались для оценивания функций математического ожидания и дисперсионной, с помощью которой определялась  $3\sigma$ -трубка. Рисунок 1 иллюстрирует характерные траектории (6.1), среднее значение процесса и вычисленные границы (закрашенная серым область). В расчетах граница значений  $y$  задавалась добавлением еще 10% к границе  $3\sigma$ -трубки, чтобы уменьшить влияние выбора граничных условий, а также учитывалась положительность  $y(t)$ , поэтому далее область интегрирования  $y \in [\underline{y}, \bar{y}] = [0, 40]$ .

Определение границы, нужное для инициирования любой схемы метода конечных разностей, выявляет проблему отсутствия граничных условий для решаемого уравнения (3.11). Этих условий нет, и нет физических оснований для их обоснованного выбора. Из-за этого граница  $\bar{y}$  была сдвинута дополнительно, а сами граничные условия приходилось выбирать волюнтаристски в надежде на нечувствительность решения в отношении этих граничных условий.

Выбор граничного условия и анализ его влияния на решение выполнялся следующим образом. Были взяты два традиционных варианта граничных условий – в задаче Дирихле:  $\beta(t, y)|_{y=\bar{y}} = 0$ , т.е. условие поглощения, и в задаче Неймана:  $\partial\beta(t, y)/\partial y|_{y=\bar{y}} = 0$ , т.е. условие отражения. Причем наличие в данном примере эталонного решения  $\beta^{(ref)}(t, y)$  позволяет видеть, что оба варианта далеки от точного. Далее уравнение (3.11) решалось методом конечных разностей с использованием явной и неявной численных схем сначала для одного граничного условия, затем для второго и полученные решения сравнивались. Устойчивость в таком случае означает совпадение (близость) решений в области, выделенной по результатам моделирования, т.е. для  $y \in [0, 30]$ .

Для численного интегрирования в выбранной области  $[0, T] \cup [\underline{y}, \bar{y}]$  формировалась сетка  $\{t_k, y_i\}$  с шагами  $\delta_t$  (для интегрирования по переменной  $t$ ) и  $\delta_y$  (для интегрирования по

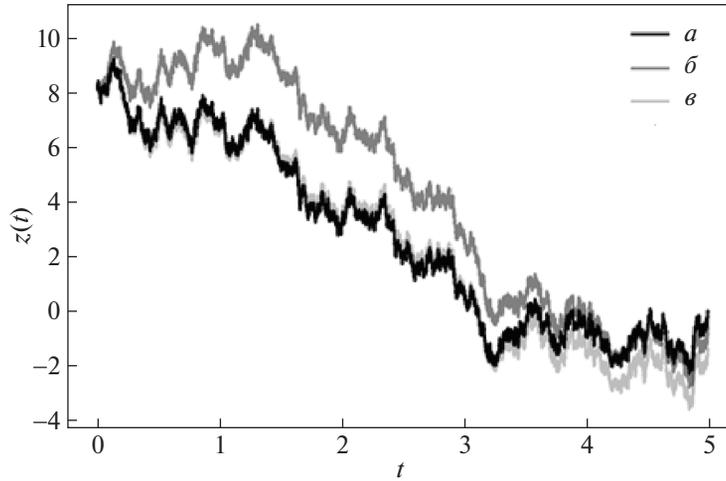


Рис. 2. Выборочные траектории:  $a - z^*(t)$ ,  $b - z^{(prog)}(t)$ ,  $e - z^{(0)}(t)$

переменной  $y$ ). С использованием обозначения  $\beta_i^k$  для значения  $\beta(t, y)$  в узле  $(t_k, y_i)$  производные аппроксимировались следующим образом:

$$\frac{\partial \beta(t, y)}{\partial t} \approx \frac{\beta_i^{k+1} - \beta_i^k}{\delta_t}, \quad \frac{\partial \beta(t, y)}{\partial y} \approx \frac{\beta_{i+1}^k - \beta_{i-1}^k}{2\delta_y}, \quad \frac{\partial^2 \beta(t, y)}{\partial y^2} \approx \frac{\beta_{i+1}^k - 2\beta_i^k + \beta_{i-1}^k}{\delta_y^2},$$

где  $K = k$  для явной схемы и  $K = k + 1$  — для неявной.

Шаги интегрирования  $\delta_t, \delta_y$  при анализе влияния граничных условий и устойчивости схем аппроксимации выбирались разными, например явная схема обшчитывалась для  $\delta_t = 0.0002$  и  $\delta_y = 0.1$ , в том числе с учетом того, что для нее самой вопрос устойчивости ограничивает вариации шагов. Главное, что в итоге подтвердилось отсутствие влияния выбора граничных условий на результаты численного интегрирования уравнения (3.11) для  $\beta(t, y)$ , по крайней мере, для выбранной модели, а также для комбинации шагов  $\delta_t, \delta_y$ , обеспечивающей устойчивость схем аппроксимации. Итоговый расчет выполнен для неявной схемы с шагами  $\delta_t = 0.001$  и  $\delta_y = 0.01$ , и именно это решение обозначено  $\beta^{(net)}(t, y)$ , т.е. сетка содержала  $N_T = 5000$  точек разбиения отрезка  $[0, T]$  и  $N_y = 4000$  точек разбиения отрезка  $[y, \bar{y}]$ .

Наконец, последний третий метод расчета на основании стохастического представления коэффициентов функции Беллмана дал приближенное решение  $\beta^{(MK)}(t, y)$ . Использовалась та же сетка  $\{t_k, y_i\}$  с  $\delta_t = 0.001$  и  $\delta_y = 0.01$ , что и в итоговом расчете методом конечных разностей, и выборка из  $N \cdot N_T \cdot N_y = 2 \times 10^{10}$  фрагментов траекторий  $y(t)$ , аппроксимирующих (4.5) согласно явному методу Эйлера.

Результаты расчетов иллюстрируют рис. 2–4, на которых приведены примеры траекторий для выхода и управлений  $z^*(t), u^*(t), z^{(prog)}(t), u^{(prog)}(t)$  и  $z^{(0)}(t), u^{(0)}(t)$ .

Рисунок 4 демонстрирует ожидаемый проигрыш неуправляемой системы  $z^{(0)}(t), u^{(0)}(t)$  и хорошее качество программного управления  $u^{(prog)}(t)$ . Последнее обстоятельство, конечно, объясняется исключительно выбранными параметрами рассматриваемого модельного примера.

Остается сравнить результаты трех методов аппроксимации оптимального управления  $u^*$ . Лучшей иллюстрацией является сравнение аппроксимаций  $\beta(t, y)$ , т.е. поверхностей  $\beta^{(ref)}(t, y), \beta^{(net)}(t, y), \beta^{(MK)}(t, y)$ . Выполненные расчеты иллюстрируются на рис. 5–7, представляющих эти поверхности в точках  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.95, 5.0$  (точки выбраны

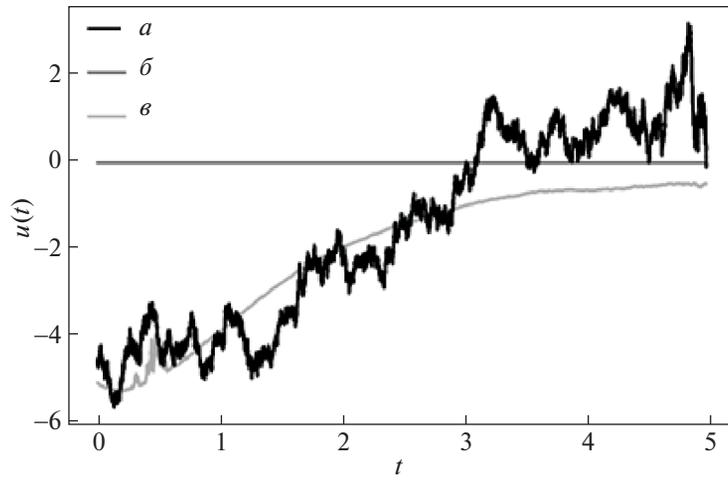


Рис. 3. Выборочные траектории:  $a - u^*(t)$ ,  $b - u^{(prog)}(t)$ ,  $v - u^{(0)}(t)$

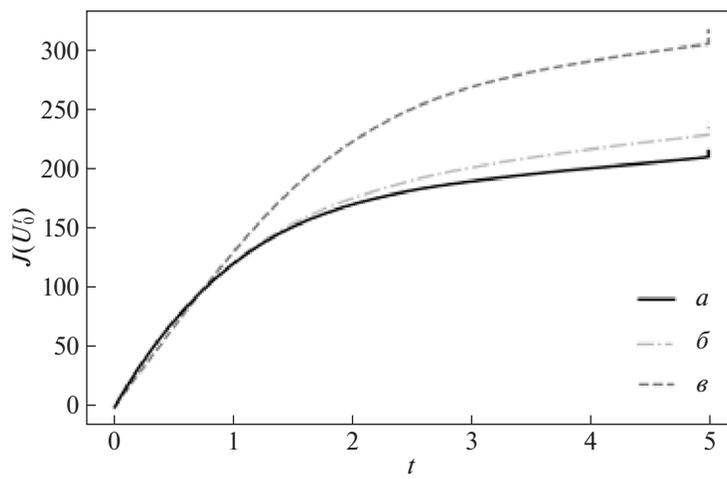


Рис. 4. Динамика целевого функционала  $a - J((U^*)_0^t)$ ,  $b - J((U^{(prog)})_0^t)$ ,  $v - J((U^{(0)})_0^t)$

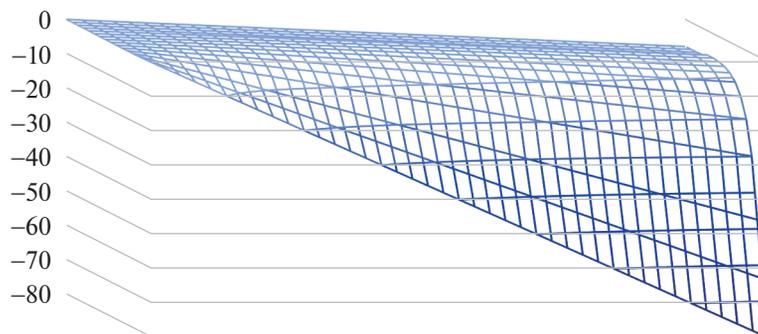
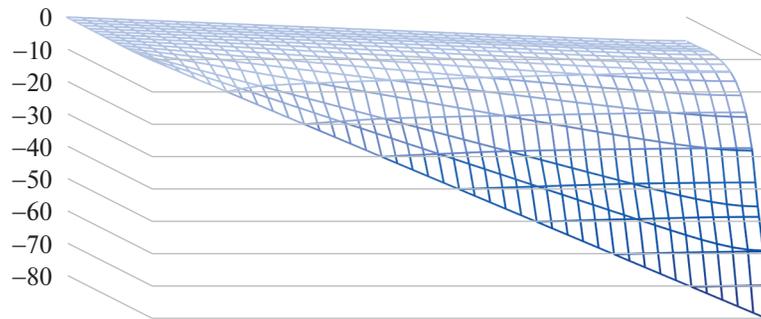
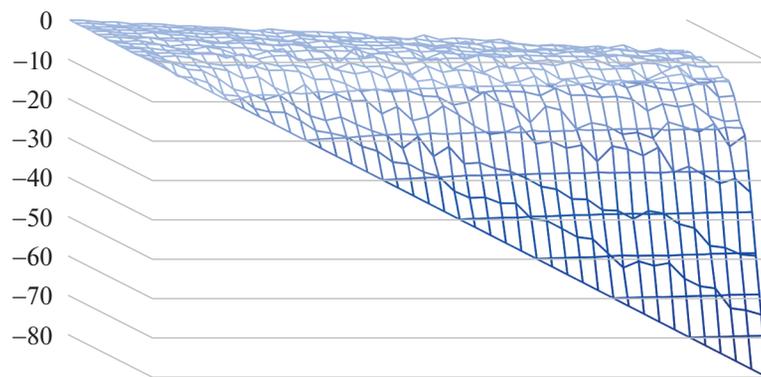


Рис. 5. Поверхность  $\beta^{(ref)}(t, y)$

Рис. 6. Поверхность  $\beta^{(net)}(t, y)$ Рис. 7. Поверхность  $\beta^{(MK)}(t, y)$ 

там, где изменения поверхности более выражены и иллюстрации более выразительны) и целочисленных точках отрезка  $y \in [0, 30]$ .

Как уже отмечалось, визуально оценить данные на этих рисунках затруднительно, но качественно можно отметить, что, с одной стороны, поверхности похожи, с другой – поверхность  $\beta^{(MK)}(t, y)$  отличается некоторым “дрожанием” в сравнении с гладкими  $\beta^{(ref)}(t, y)$  и  $\beta^{(net)}(t, y)$ , что является очевидным следствием аппроксимации значений  $\beta(t, y)$  статистическими оценками по моделируемым данным.

Несколько более информативны графические материалы, приведенные на рис. 8–10. Это сечения поверхностей  $\beta^{(ref)}(t, y)$ ,  $\beta^{(net)}(t, y)$  и  $\beta^{(MK)}(t, y)$  в тех же точках  $t$ . Причем в точном решении, представленном  $\beta^{(ref)}(t, y)$ , это прямые линии. Также прямой  $\beta(T, y) = -2y$  отвечает терминальное условие.

Числовые значения, иллюстрирующие отклонения  $|\beta^{(net)}(t, y) - \beta^{(ref)}(t, y)|$  и  $|\beta^{(MK)}(t, y) - \beta^{(ref)}(t, y)|$  в некоторых точках  $t, y$ , представлены в табл. 1 и 2. В табл. 3 приведены значения  $\beta^{(ref)}(t, y)$ , чтобы можно было оценить относительные отклонения. По всей совокупности полученных данных можно сказать, что отклонения  $\beta^{(MK)}(t, y)$  от эталонной поверхности  $\beta^{(ref)}(t, y)$  несколько (2–3%) меньше в большинстве точек, чем отклонения  $\beta^{(net)}(t, y)$ . Но поверхность, рассчитанная методом конечных разностей, и ее отклонения от эталона носят более регулярный характер. Точнее, в некоторых узлах относительные отклонения  $|\beta^{(MK)}(t, y) - \beta^{(ref)}(t, y)|$  составляют до 10% и в целом, как и самой поверхности  $\beta^{(MK)}(t, y)$ , им свойственно некоторое “дрожание”, характерное для оценок Монте-Карло. Объективную оценку проводимого сравнения, конечно, дает значение

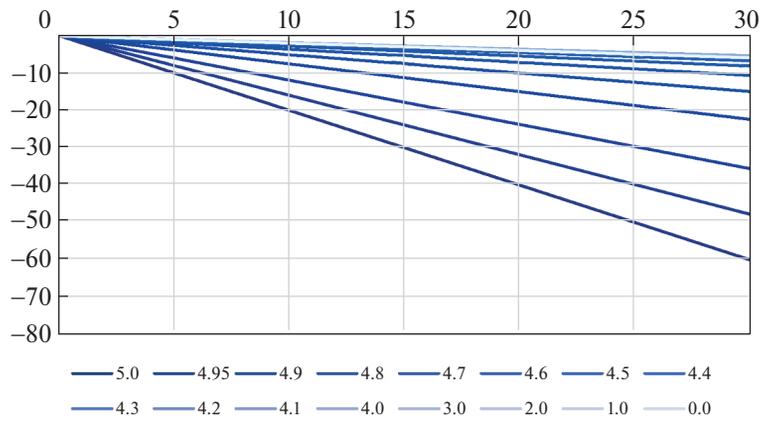


Рис. 8. Сечения поверхности  $\beta^{(ref)}(t, y)$

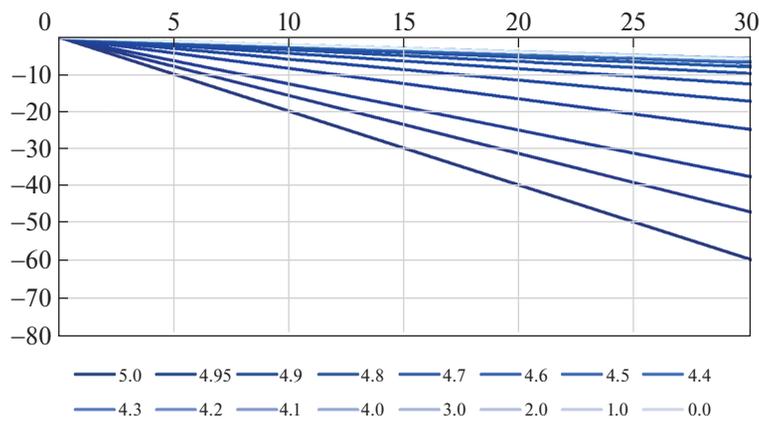


Рис. 9. Сечения поверхности  $\beta^{(net)}(t, y)$

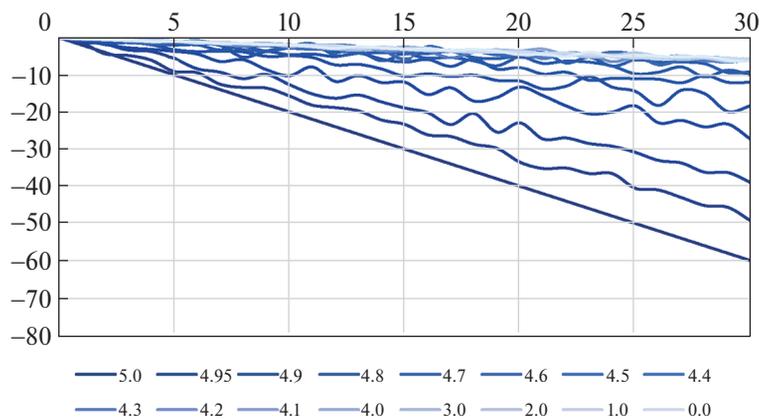


Рис. 10. Сечения поверхности  $\beta^{(MK)}(t, y)$

целевого функционала (6.3), доставляемое управлениями  $u^{(ref)}$ ,  $u^{(net)}$  и  $u^{(MK)}$ . Эти данные приведены в табл. 4 и подтвердили не только высокую точность расчетов, но и превосходство метода аппроксимации, основанного на стохастическом представлении коэффициентов функции Беллмана. И хотя последний вывод сделан в отношении цели решаемой задачи управления, т.е.

**Таблица 1.** Отклонения  $|\beta^{(net)}(t, y) - \beta^{(ref)}(t, y)|$

$t, y$	0.0	3.0	5.0	10.0	15.0	25.0
4.95	0.0233	0.0404	0.0829	0.1892	0.2955	0.5080
4.9	0.0196	0.2237	0.3599	0.7001	1.0404	1.7208
4.8	0.0329	0.2804	0.4454	0.8580	1.2706	2.0936
4.7	0.0409	0.2735	0.4285	0.8162	1.2038	1.9742
4.6	0.0448	0.2429	0.3749	0.7051	1.0353	1.6890
4.5	0.0457	0.2056	0.3122	0.5788	0.8453	1.3713
4.4	0.0445	0.1691	0.2521	0.4598	0.6673	1.0759
4.3	0.0420	0.1364	0.1993	0.3566	0.5138	0.8225
4.2	0.0386	0.1084	0.1550	0.2713	0.3875	0.6151
4.1	0.0349	0.0853	0.1190	0.2030	0.2870	0.4508
4.0	0.0310	0.0666	0.0903	0.1496	0.2089	0.3237
3.0	0.0061	0.0049	0.0042	0.0022	0.0002	0.0060
2.0	0.0009	0.0005	0.0003	0.0003	0.0010	0.0046
1.0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0001	0.0027
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0025

**Таблица 2.** Отклонения  $|\beta^{(MK)}(t, y) - \beta^{(ref)}(t, y)|$

$t, y$	0.0	3.0	5.0	10.0	15.0	25.0
4.95	0.0285	0.0105	1.0764	0.2761	0.5671	0.6918
4.9	0.0089	0.2988	0.4090	0.7194	1.0914	1.1994
4.8	0.1142	0.3755	0.1529	2.6940	0.7033	0.3248
4.7	0.1229	0.2741	0.6190	0.1041	2.8318	1.9781
4.6	0.0350	0.1291	0.3174	0.9699	1.2111	2.1372
4.5	0.0879	0.4242	0.5385	0.0298	0.4110	2.8989
4.4	0.0574	0.1915	0.7325	0.0092	0.7438	0.4403
4.3	0.1234	0.3271	0.2571	0.7245	2.7593	0.3966
4.2	0.0195	0.4084	0.1320	0.0601	0.7345	0.2707
4.1	0.1129	0.2158	0.1640	0.0178	0.6478	0.6370
4.0	0.0300	0.0933	0.0546	0.5945	0.2144	0.9019
3.0	0.0243	0.0657	0.0551	0.3454	0.0940	0.1782
2.0	0.0468	0.0200	0.1190	0.0636	0.1032	0.8721
1.0	0.0626	0.1975	0.1085	0.1386	0.0987	0.4386
0.0	0.0036	0.0828	0.0301	0.0288	0.0860	0.3083

Таблица 3. Поверхность  $\beta^{(ref)}(t, y)$ 

$t, y$	0.0	3.0	5.0	10.0	15.0	25.0
4.95	-0.0592	-4.8340	-8.0172	-15.9752	-23.9332	-39.8493
4.9	-0.1183	-3.6679	-6.0344	-11.9504	-17.8665	-29.6985
4.8	-0.1658	-2.3944	-3.8802	-7.5947	-11.3091	-18.7380
4.7	-0.1805	-1.6625	-2.6506	-5.1208	-7.5909	-12.5312
4.6	-0.1798	-1.2315	-1.9326	-3.6855	-5.4384	-8.9442
4.5	-0.1723	-0.9759	-1.5116	-2.8510	-4.1903	-6.8689
4.4	-0.1625	-0.8256	-1.2676	-2.3727	-3.4778	-5.6880
4.3	-0.1525	-0.7392	-1.1302	-2.1079	-3.0856	-5.0411
4.2	-0.1435	-0.6917	-1.0572	-1.9709	-2.8845	-4.7119
4.1	-0.1358	-0.6678	-1.0224	-1.9090	-2.7957	-4.5690
4.0	-0.1295	-0.6577	-1.0099	-1.8904	-2.7708	-4.5317
3.0	-0.1118	-0.6910	-1.0772	-2.0425	-3.0079	-4.9386
2.0	-0.1127	-0.7006	-1.0925	-2.0723	-3.0520	-5.0116
1.0	-0.1132	-0.7016	-1.0939	-2.0746	-3.0553	-5.0167
0.0	-0.1132	-0.7017	-1.0940	-2.0748	-3.0555	-5.0170

Таблица 4. Динамика функционалов  $J((U^{(ref)})_0^T)$ ,  $J((U^{(net)})_0^T)$ ,  $J((U^{(MK)})_0^T)$ 

$t$	$J((U^{(ref)})_0^t)$	$J((U^{(net)})_0^t)$	$J((U^{(MK)})_0^t)$	$\frac{ J((U^{(ref)})_0^t) - J((U^{(net)})_0^t) }{J((U^{(ref)})_0^t)} 100\%$	$\frac{ J((U^{(ref)})_0^t) - J((U^{(MK)})_0^t) }{J((U^{(ref)})_0^t)} 100\%$
1	112.7	120.6	116.0	7.0	2.9
2	157.4	170.3	161.0	8.2	2.3
3	174.6	190.0	179.9	8.8	3.1
4	186.4	200.9	192.1	7.8	3.1
5	202.1	215.7	208.6	6.7	3.2

качества аппроксимации управления  $u^*$ , данные в табл. 4 можно интерпретировать и как косвенное свидетельство о более высокой точности аппроксимации  $\beta(t, y)$ .

**Заключение.** Представленные в работе результаты в полном объеме описывают решение задачи управления линейным выходом векторного диффузионного процесса Ито по квадратичному критерию качества. Оптимальное решение – управление с полной обратной связью – задано замкнутой системой уравнений, приближенное решение которых может быть получено известными численными методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных параболического типа. Свойства оптимального управления описаны стохастическим представлением коэффициентов найденной функции Беллмана на основе формулы Фейнмана–Каца. Это стохастическое представление позволило реализовать альтернативный метод приближенного решения задачи, базирующийся на имитационном компьютерном моделировании оптимизируемой системы. Численный пример показал работоспособность обоих методов аппроксимации и небольшое преимущество метода, основанного на стохастическом представлении коэффициентов функции Беллмана.

Для дальнейшего изучения важны следующие два направления. Во-первых, интересна задача с неполной информацией, т.е. постановка, в которой диффузионный процесс (2.1) предполагается ненаблюдаемым непосредственно, а доступным только косвенным наблюдениям (2.2). В этом направлении решение в общем виде получить не удастся. Причиной являются трудности в решении возникающей в такой постановке вспомогательной задачи оценивания – оптимальной фильтрации состояния  $y(t)$  по наблюдениям  $z(t)$ . Субоптимальная фильтрация позволяет

предлагать приближенные решения, практически пригодные, но не очень содержательные для теоретического изучения [25].

Второе перспективное направление развития исследованной задачи – это обобщение модели диффузии на случай смешанных непрерывно-дискретных возмущений. Это важное обобщение сделает постановку более практически содержательной. Так в использованном здесь модельном примере обобщается и становится более соответствующей потребностям практики модель РТТ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kushner H.J., Dupuis P.G.* Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. N.Y.: Springer-Verlag, 2001.
2. *Bertsekas D.P.* Dynamic Programming and Optimal Control. Cambridge: Athena Scientific, 2013.
3. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами / Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
4. *Athans M.* The Role and Use of the Stochastic Linear-Quadratic-Gaussian Problem in Control System Design // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. V. 16. № 6. P. 529–552.
5. *Wu Z.* Forward-backward Stochastic Differential Equations, Linear Quadratic Stochastic Optimal Control and Nonzero Sum Differential Games // J. Syst. Sci. Complexity. 2005. V. 18. № 2. P. 179–192.
6. *Chen B.S., Zhang W.* Stochastic H2/H1 Control with State-dependent Noise // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. V. 49. № 1. P. 45–56.
7. *Bohacek S.* A Stochastic Model of TCP and Fair Video Transmission // Proc. IEEE INFOCOM. 2003. P. 1134–1144.
8. *Миллер Б.М., Авраченко К.Е., Степанян К.В., Миллер Г.Б.* Задача оптимального стохастического управления потоком данных по неполной информации // Пробл. передачи информ. 2005. Т. 41. № 2. С. 89–110.
9. *Боровков А.А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1980.
10. *Босов А.В.* Обобщенная задача распределения ресурсов программной системы // Информатика и ее применения. 2014. Т. 8. Вып. 2. С. 39–47.
11. *Босов А.В.* Управление линейным выходом дискретной стохастической системы по квадратичному критерию // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 3. С. 19–35.
12. *Athans M., Falb P.L.* Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications. N.Y., Sydney: McGraw-Hill, 1966.
13. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // АиТ. 2008. № 5. С. 72–90.
14. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Минимаксный подход к синтезу оптимального управления при неопределенных начальных условиях // АиТ. 2009. № 11. С. 3–12.
15. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
16. *Gihman I.I., Skorohod A.V.* The Theory of Stochastic Processes III. N.Y.: Springer-Verlag, 2012.
17. *Øksendal B.* Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. N.Y.: Springer-Verlag, 2003.
18. *Fahim A., Touzi N., Warin, X.* A Probabilistic Numerical Method for Fully Nonlinear Parabolic Pdes // Annals of Applied Probability. 2011. V. 21. № 4. P. 1322–1364.
19. *Девис М.Х.А.* Линейное оценивание и стохастическое управление / Пер. с англ. М.: Наука, 1984.
20. *Bhatia R.* Matrix Analysis. Т. 169. N.Y.: Springer, 1997.
21. *Босов А.В., Стефанович А.И.* Управление выходом стохастической дифференциальной системы по квадратичному критерию. IV. Альтернативное численное решение // Информатика и ее применения. 2020. Т. 14. Вып. 1. С. 24–30.
22. *Bohacek S., Rozovskii B.* A Diffusion Model of Roundtrip Time // Computational Statistics & Data Analysis. 2004. V. 45. Iss. 1. P. 25–50.
23. *Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A.* A Theory of the Term Structure of Interest Rates // Econometrica. 1985. V. 53. Iss. 2. P. 385–407.
24. *Саульев В.К.* Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М.: Физматлит, 1960.
25. *Босов А.В.* Применение условно-оптимального фильтра для синтеза субоптимального управления в задаче оптимизации выхода нелинейной дифференциальной стохастической системы // АиТ. 2020. № 11. С. 34–47.

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ  
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

УДК 517.977.58:539.3

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОДОЛЬНОМ ДВИЖЕНИЕМ  
УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ПОМОЩЬЮ ГРАНИЧНЫХ СИЛ<sup>1</sup>

© 2021 г. А. А. Гавриков<sup>а</sup>, Г. В. Костин<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup> ИПМех РАН, Москва, Россия

\*e-mail: kostin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 17.02.2021 г.

После доработки 02.03.2021 г.

Принята к публикации 31.05.2021 г.

Работа посвящена вопросам управляемости и оптимизации колебательных движений динамических систем с распределенными параметрами. Исследуются продольные перемещения тонкого прямолинейного упругого стержня. На основе предложенного авторами метода интегриродифференциальных соотношений дана обобщенная формулировка начально-краевой задачи, решение которой ищется относительно кинематической и динамической переменных в энергетическом пространстве Соболева. Для случая однородного стержня, управляемого с помощью приложенных с обоих концов внешних сил, определено критическое время, за которое система может быть приведена в состояние покоя и показана невозможность для произвольных начальных условий приведения точек стержня в нулевое состояние. Для фиксированных интервалов времени, больших критического, ставится задача оптимального приведения системы в нулевое состояние. При этом минимизируемым функционалом является средняя механическая энергия, запасаемая стержнем во время движения. Показано, что с помощью представления Даламбера (в виде бегущих волн) с учетом свойств обобщенного решения поставленная двумерная по пространству и времени задача управления сводится к классической одномерной квадратичной вариационной задаче с фиксированными концами, которая задается относительно двух неизвестных функций Даламбера. С помощью методов вариационного исчисления оптимальное управление и соответствующие движения стержня найдены в явном виде. Исследована зависимость средней энергии, запасаемой в системе, от времени управления.

DOI: 10.31857/S0002338821050097

**Введение.** Важным направлением в теории управления является развитие методов оптимизации движения систем с распределенными параметрами. В случае выпуклых функционалов математическое обоснование для задач оптимального управления динамическими системами, определяемыми линейными дифференциальными уравнениями в частных производных (УЧП), заложено во многом научной школой Лионса [1]. Вопросы управляемости систем с УЧП гиперболического типа рассматривались и другими авторами [2, 3]. Вводный обзор теории управления распределенными колебаниями дан в [4]. Управляемые колебания в сетевых моделях исследуются, в частности, в [5–7]. Актуальность достоверного математического моделирования динамических систем с распределенными параметрами ускорило развитие новых подходов к решению прямых и обратных задач механики.

Можно указать на два важных направления изучения задач оптимального управления для распределенных процессов. Для первого из них в иностранной литературе распространен термин “поздняя дискретизация” (late lumping). Согласно этому подходу, законы оптимального управления строятся непосредственно для исходной динамической системы, описываемой УЧП. Только на последнем этапе управляющие функции и само решение могут аппроксимироваться с применением подходящего конечномерного пространства. В этом случае оптимизация может опираться, например, на спектральную теорию линейных операторов [8, 9]. Иногда для относительно простых систем используют [10] метод разделения переменных и декомпозиции на основе метода Фурье, что позволяет находить квазиоптимальные ограниченные воздействия, за

<sup>1</sup> Работа выполнена по теме государственного задания (номер государственной регистрации АААА-А20-120011690138-6) и частично финансово поддержана РФФИ (гранты № 19-01-00173 и 21-51-12004).

конечное время приводящие систему в заданное состояние. Альтернативный метод в решении задач оптимального управления с УЧП связан с методом выбора [11]. В общем случае даже для несложных систем, описывающих, скажем, движения замкнутой струны, получение управления в явном виде и последующее доказательство его оптимальности невозможно без привлечения развитых математических подходов [12]. Важный вопрос в обратных задачах динамики для систем с распределенными параметрами — это управляемость и, как следствие, возможность или невозможность точного приведения изучаемой системы в заданное состояние за конечное время и дальнейшего удержания в этом состоянии с помощью ограниченных воздействий [13, 14].

Второе развитое направление в изучении динамики и управления распределенными системами называется “ранней дискретизацией” (early lumping) и широко используется для построения численных решений. В этом случае начально-краевая задача уже на начальном этапе дискретизируется и сводится к системе либо алгебраических, либо обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для этой цели развиваются метод конечных элементов (МКЭ), методы конечного объема и конечных разностей [16, 15]. В случае МКЭ алгоритмы решения могут основываться на методе коллокации, методе Бубнова–Галеркина [18], подходе Петрова–Галеркина [19], методе наименьших квадратов [20] и т.д. В этом ряду численных подходов при рассмотрении задач управления динамикой системы спектральный анализ обеспечивает важные преимущества [9] в случае, когда собственные функции системы находятся в явном виде. Для неоднородных систем могут применяться численные методы нахождения собственных функций [21].

На основе метода интегродифференциальных соотношений (МИДС) для описания и оптимизации колебаний в упругих и вязкоупругих системах предложены и проанализированы различные вариационные и проекционные формулировки задач оптимального управления [22]. Одна из этих формулировок используется в работе для определения необходимых свойств гладкости (непрерывности) решения. Эффективный алгоритм численного построения решения в задачах оптимального управления линейной упругости на основе метода Ритца и МКЭ был предложен в [23] и развит в [24] для случая продольных движений однородных и неоднородных упругих стержней с различными типами краевых условий.

В циклах статей авторов [25, 26] и др. исследуются задачи управления, близкие по постановке к рассмотренной далее задаче. В отличие от упомянутых публикаций, в этой статье предложена оригинальная обобщенная формулировка начально-краевой задачи, основанная на минимизации функционала невязки уравнений состояния. В этой постановке решение ищется в более широком классе и не требуются явные предположения о гладкости следов решения на границах пространственно-временной области (начальных, терминальных и краевых условий). Другой особенностью данного исследования является сама задача оптимального управления при условии минимизации энергетического функционала, который естественным образом соответствует требованиям к гладкости решения обобщенной задачи. Еще одна отличительная черта этой работы — нахождение оптимального решения как вариации бегущих волн в представлении Даламбера, что позволяет представить управление и состояние системы в единой компактной форме на всей области определения искомых функций. Проблема гладкости следов решения часто встречается при постановке обобщенной задачи в энергетических пространствах [27, 28]. В настоящей работе она решена за счет введения так называемой динамической функции (потенциала), дополнительной к функции перемещений точек упругой системы, и определения решения как пары неизвестных: упругих перемещений и динамического потенциала.

В этой работе, по сравнению с [24], хотя и рассматривается случай однородного упругого стержня с достаточно простыми краевыми условиями второго рода, получено точное оптимальное решение для важного случая минимизации средней механической энергии системы. На основе предложенного метода декомпозиции решения и представления Даламбера задачу управления удалось свести к классической вариационной задаче с фиксированными концами и построить в явном виде как оптимальный закон программного управления, так и соответствующие движения точек стержня. Более того, как показывают наши исследования, данная методика распространяется и на более широкий класс целевых функционалов, а также может быть обобщена на случай ограниченных управляющих воздействий. В статье обсуждается важный с теоретической точки зрения факт существования критического значения времени управления, за которое система может быть приведена в состояние покоя, но в общем случае не может прийти в нулевое состояние. Как будет показано ниже, это обуславливает как строго монотонное убывание средней энергии стержня при увеличении времени управления, так и стремление значения механической энергии к бесконечности при приближении времени управления к критической величине.

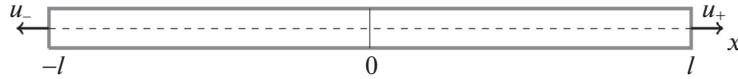


Рис. 1. Стержень под воздействием управляющих сил  $u_{\pm}(t)$

**1. Постановка начально-краевой задачи.** Рассмотрим продольные движения тонкого прямолинейного упругого стержня, схематически изображенного на рис. 1. Уравнение движения выражается через функцию  $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемую на пространственно-временной области  $\Omega = (0, T) \times (-\ell, \ell)$ , согласно [30], уравнением

$$\rho(x)v_{tt}(t, x) - (\kappa(x)v_x(t, x))_x = 0, \quad (t, x) \in \Omega. \quad (1.1)$$

Здесь  $T$  – время окончания рассматриваемого процесса,  $\ell$  – полудлина стержня, нижние индексы  $t$  и  $x$  обозначают соответственно частные производные по времени и пространству,  $\rho : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  – линейная плотность, а  $\kappa : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  – продольная жесткость стержня.

В классической постановке, рассмотренной в работе, начальные условия накладываются на положения и скорости точек стержня в момент времени  $t = 0$ :

$$v(0, x) = v_0(x), \quad v_t(0, x) = \dot{v}_0(x), \quad x \in [-\ell, \ell], \quad (1.2)$$

где  $v_0$  и  $\dot{v}_0$  – известные достаточно гладкие функции [30, 31]. На концах  $x = \pm\ell$  заданы нормальные силы в поперечном сечении как неизвестные входные управляющие воздействия  $u_{\pm}(t)$  в форме

$$\kappa(-\ell)v_x(t, -\ell) = u_-(t), \quad \kappa(\ell)v_x(t, \ell) = u_+(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.3)$$

Для того чтобы перейти, согласно МИДС [22], к обобщенной формулировке начально-краевой задачи (1.1)–(1.3), введем на пространственно-временной области  $\Omega$  неизвестные функции линейной плотности импульса  $p : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  и нормальной силы в поперечном сечении  $s : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ . Закон изменения импульса (второй закон Ньютона) выразится через эти переменные как

$$p_t(t, x) = s_x(t, x), \quad (t, x) \in \Omega. \quad (1.4)$$

Потребуется также два закона состояния, которые связывают плотность импульса  $p$  и скорости точек стержня  $v_t$ , а также нормальную силу  $s$  с продольной деформацией  $v_x$ :

$$p(t, x) = \rho(x)v_t(t, x), \quad s(t, x) = \kappa(x)v_x(t, x), \quad (t, x) \in \bar{\Omega}. \quad (1.5)$$

Замыкают систему начально-краевые условия, заданные на  $t \in [0, T]$ ,  $x \in [-\ell, \ell]$  и выраженные через переменные  $v$ ,  $p$ ,  $s$  как

$$\begin{aligned} v(0, x) &= v_0(x), & p(0, x) &= p_0(x), & p_0(x) &= \rho(x)\dot{v}_0(x); \\ s(t, -\ell) &= u_-(t), & s(t, \ell) &= u_+(t). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для необходимого нам в дальнейшем упрощения представления системы с распределенными параметрами введем специальную функцию  $r : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , назовем ее динамическим “потенциалом” или динамической переменной в отличие от кинематической переменной  $v$ . Эта новая переменная заменяет функции импульса и силы:

$$p = r_x, \quad s = r_t. \quad (1.7)$$

Непосредственной подстановкой (1.7) в (1.4) можно показать, что при такой замене второй закон Ньютона выполняется тождественно:

$$p_t(t, x) \equiv s_x(t, x), \quad (t, x) \in \Omega. \quad (1.8)$$

Также необходимо переписать в новых терминах уравнения состояния (1.5), заданные на  $(t, x) \in \bar{\Omega}$  как

$$r_t(t, x) - \kappa(x)v_x(t, x) = 0, \quad r_x(t, x) - \rho(x)v_t(t, x) = 0. \quad (1.9)$$

Через кинематическую и динамическую переменные выражаются и начально-краевые соотношения (1.6), а именно

$$v(0, x) = v_0(x), \quad r(0, x) = r_0(x), \quad r_0(x) = \int_{-\ell}^x p_0(\chi) d\chi + c_0; \tag{1.10}$$

$$r(t, \pm\ell) = U_{\pm}(t), \quad U_{\pm}(t) = \int_0^t u_{\pm}(\tau) d\tau + r_0(\pm\ell).$$

Отметим важную деталь такого представления состояния системы: динамическая переменная  $r$  определена с точностью до произвольной константы  $c_0$ , значение которой не влияет на форму движения упругого тела. В (1.10) вводятся две новые функции времени  $U_{\pm}$  как интегралы от функций управления  $u_{\pm}$ . Две константы управления  $r_0(\pm\ell)$  выбираются так, чтобы обеспечить необходимую, как будет показано далее, непрерывность решения обобщенной задачи. Другими словами, эти константы обеспечивают совместность начальных и краевых условий при  $t = 0$  и  $x = \pm\ell$ .

**2. Вариационная формулировка задачи.** Согласно МИДС, локальные законы состояния (1.9), выраженные в УЧП и требующие  $C^2$ -гладкости решения [31], заменяются одним интегральным соотношением, который, как показано в [22], может быть сведен к минимизации энергетического функционала:

$$\Phi[v_*, r_*] = \min_{v, r} \Phi[v, r] = 0, \tag{2.1}$$

$$\Phi = \frac{1}{T} \int_{\Omega} \frac{g^2 + h^2}{4} d\Omega, \quad g = \sqrt{\kappa} v_x - \frac{r_t}{\sqrt{\kappa}}, \quad h = \sqrt{\rho} v_t - \frac{r_x}{\sqrt{\rho}},$$

при выполнении существенных ограничений

$$v(0, x) = v_0(x), \quad r(0, x) = r_0(x), \quad r(t, \pm\ell) = U_{\pm}(t) \tag{2.2}$$

и фиксированных управляющих функциях  $U_{\pm}$ . В (2.1)  $d\Omega = dt dx$  для выбранной системы координат  $t$  и  $x$ . Там же введены вспомогательные функции состояния  $g, h$ , квадраты которых имеют размерность линейной плотности энергии. При этом сам функционал  $\Phi$  имеет размерность энергии и его значение определяет близость аппроксимации к точному решению  $v_*, r_*$ , на котором достигается абсолютный минимум  $\Phi$  по переменным  $v$  и  $r$ .

Если обратить внимание на структуру подынтегрального выражения, то можно отметить, что в него входят квадраты частных производных по  $t$  и  $x$  неизвестных  $v$  и  $r$ . Это означает, что с учетом достаточной гладкости и отделимости от нуля параметров  $\rho, \kappa$  эти производные должны существовать в обобщенном смысле как функции, интегрируемые в квадратах. Из этого факта следует [29], что решение  $v_*, r_*$  вариационной задачи (2.1), (2.2) в случае его существования принадлежит гильбертову пространству  $H^1$ :

$$(v, r) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (v, r) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2). \tag{2.3}$$

Таким образом, введение функционала (2.1) позволяет существенно ослабить требования к гладкости решения, оставаясь при этом, как будет показано далее, в рамках непрерывных функций при выбранных достаточно гладких начальных и терминальных условиях, что имеет важное значение для конструктивного решения задачи управления.

**3. Задача оптимального управления.** В дальнейшем рассматривается частный случай однородного упругого стержня, механические параметры которого  $\rho(x) = \text{const}$  и  $\kappa(x) = \text{const}$  не зависят от пространственной координаты. В этом случае для упрощения описания системы лучше перейти к безразмерным переменным:

$$v = \ell v^*, \quad r = \kappa \tau_* r^*, \quad x = \ell x^*, \quad t = \tau_0 t^*, \quad \tau_*^2 = \frac{\ell^2 \rho}{\kappa}. \tag{3.1}$$

Далее индекс  $*$  опускается.

В безразмерных переменных

$$g = v_x - r_t, \quad h = v_t - r_x, \tag{3.2}$$

следовательно, обобщенная начально-краевая задача (2.1), (2.2) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{T} \int_{\Omega} \varphi d\Omega = 0, \quad \varphi = \frac{1}{4}(v_x - r_t)^2 + \frac{1}{4}(v_t - r_x)^2, \\ v(0, x) &= v_0(x), \quad r(0, x) = r_0(x), \quad r(t, \pm 1) = U_{\pm}(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ставится следующая задача оптимального управления. Найти такие функции  $U_{\pm}^*$ , которые задаются на фиксированном интервале времени  $t \in [0, T]$ , минимизируют с учетом ограничений (3.3) среднюю запасенную механическую энергию стержня, определяемую как

$$\begin{aligned} E[U_+^*, U_-^*] &= \min_{U_+, U_- \in C[0, T]} E[U_+, U_-], \\ E &= \frac{1}{T} \int_{\Omega} e d\Omega, \quad e = \frac{1}{4}(v_t^2 + r_x^2 + v_x^2 + r_t^2), \end{aligned} \quad (3.4)$$

и приводят систему в терминальное состояние

$$v(T, x) = v_1, \quad r(T, x) = r_1 + p_1 x. \quad (3.5)$$

Решение (3.3)–(3.5) – это вектор-функция  $(v, r)$ , поэтому в выражение для энергии  $E$ , которая является частью квадрата нормы упорядоченной пары  $(v, r)$  в  $H^1(\Omega)$ , входят все частные производные  $v$  и  $r$ .

В (3.4) введена функция линейной плотности энергии  $e : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Условия существования допустимого управления  $(U_-(t), U_+(t))$ , приводящего систему в терминальное состояние (3.5), изучаются ниже. Обсудим сами терминальные условия.

Первое, оптимальное движение зависит от константы  $r_1$  лишь неявно, влияя на значение целевого функционала  $E$ . При этом механический смысл терминальных условий не меняется при изменении величины  $r_1$ . Поэтому этот параметр необходимо рассматривать как свободный параметр оптимизации.

Второе, если константа  $p_1$  не равна нулю ( $p_1 \neq 0$ ), а  $v_1$  – произвольна, это означает, что стержень приводится в состояние движения как жесткого целого без упругих колебаний. Если при этом терминальные значения плотности импульса  $p_1$  и положения  $v_1$  не важны для задачи управления, возникают еще два свободных параметра оптимизации.

Третье, если зафиксировать нулевой импульс ( $p_1 = 0$ ), а положение  $v_1$  задать или оставить свободным параметром, то целью управления является приведение системы в состояние покоя с нулевой внутренней энергией.

Наконец последний случай, когда  $p_1 = 0$  и  $v_1 = 0$ , означает, что целью процесса управления является приведение механической системы в нулевое состояние. Этот случай и будет рассматриваться в дальнейшем.

Следует еще раз подчеркнуть, что в зависимости от того, какие из трех терминальных констант зафиксированы или свободны, будут изменяться значение функционала, оптимальное управление  $(U_-^*(t), U_+^*(t))$  и соответствующее решение  $(v^*(t, x), r^*(t, x))$ .

Отметим сходство структуры двух функционалов цены  $E$  и состояния  $\Phi$ , последний из которых представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{T} \int_{\Omega} \varphi d\Omega, \\ \varphi &= \frac{1}{4}(v_x^2 - 2v_x r_t + r_t^2 + v_t^2 - 2v_t r_x + r_x^2) = e - \frac{v_t r_x + v_x r_t}{2}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где функция  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  представляет собой квадрат плотности невязки уравнений состояния

$$g(t, x) = 0, \quad h(t, x) = 0, \quad (3.7)$$

в которых переменные  $g$  и  $h$  определены в (2.1).

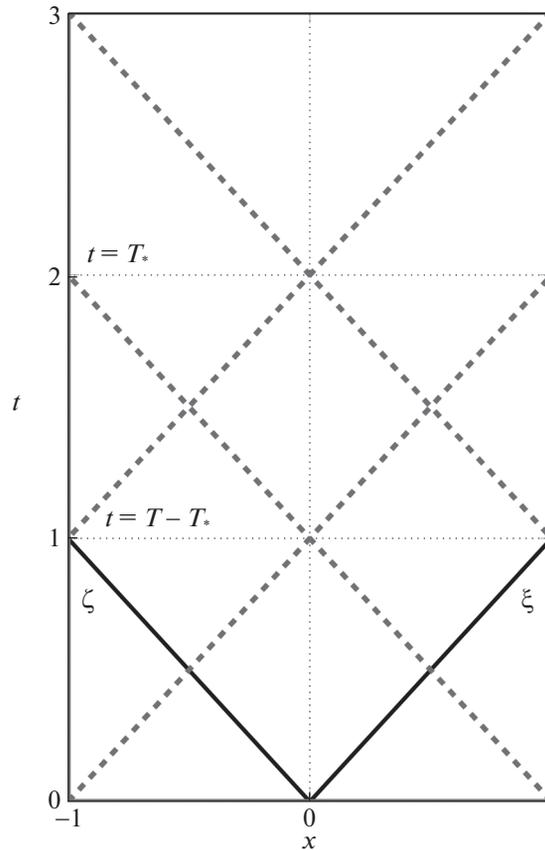


Рис. 2. Пространственно-временная область определения решения  $\Omega = (0, T) \times (-1, 1)$  при  $T > T_*$

**4. Решение прямой задачи динамики.** Будем искать решение  $(v, r)$  задачи (3.3) в представлении Даламбера (в виде бегущих волн). Для этого вводятся две одномерные функции

$$w_{\pm} : (-1, T + 1) \rightarrow \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

такие, что

$$\begin{aligned} v(t, x) &= w_+(t + x) + w_-(t - x), \\ r(t, x) &= w_+(t + x) - w_-(t - x). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Чтобы представить геометрически, как две одномерные функции определяют решение на области  $\Omega$ , обратимся к рис. 2. Непосредственной подстановкой показывается, что функционал состояния  $\Phi$  равен нулю при выполнении соотношений (4.2), так как  $r_x = v_t, r_t = v_x$ .

Для большей компактности окончательных результатов вводятся новые координаты, связанные с характеристическими линиями решения, т.е. отрезками в области  $\Omega$ , на которых не меняются значения функций  $w_{\pm}(t \pm x)$ . Новые и старые координаты связаны друг с другом следующими линейными преобразованиями:

$$\xi = t + x, \quad \zeta = t - x; \quad t = \frac{\xi + \zeta}{2}, \quad x = \frac{\xi - \zeta}{2}. \tag{4.3}$$

В новых координатах решение примет вид

$$v(\xi, \zeta) = w_+(\xi) + w_-(\zeta), \quad r(\xi, \zeta) = w_+(\xi) - w_-(\zeta). \tag{4.4}$$

Можно непосредственно убедиться, что переменные  $\xi(t, x)$  и  $\zeta(t, x)$  пробегает в области  $\Omega = (0, T) \times (-1, 1)$  все допустимые значения интервала  $(-1, T + 1)$ .

Краевые условия  $r(t, \pm 1) = U_{\pm}(t)$  из (3.3) выполняются, если выбрать интегралы управления в виде

$$U_{-}(t) = w_{+}(t-1) - w_{-}(t+1), \quad U_{+}(t) = w_{+}(t+1) - w_{-}(t-1). \quad (4.5)$$

Начальные и терминальные условия частично определяют функции  $w_{\pm}$ . Из начальных условий в (3.3) и из (4.3), (4.4) следует, что

$$\begin{aligned} w_{-}(\zeta) &= \frac{1}{2}v_0(-\zeta) - \frac{1}{2}r_0(-\zeta), \quad \zeta \in (-1, 1); \\ w_{+}(\xi) &= \frac{1}{2}v_0(\xi) + \frac{1}{2}r_0(\xi), \quad \xi \in (-1, 1). \end{aligned} \quad (4.6)$$

В свою очередь терминальные условия из (3.3) задают функции Даламбера  $w_{\pm}$  на другом подынтервале области определения:

$$\begin{aligned} w_{-}(\zeta) &= \frac{1}{2}(p_1(\zeta - T) + v_1 - r_1), \quad \zeta \in (T-1, T+1); \\ w_{+}(\xi) &= \frac{1}{2}(p_1(\xi - T) + v_1 + r_1), \quad \xi \in (T-1, T+1). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Важно отметить, что, как видно из (4.3), (4.4), функции  $w_{\pm}$  свободны на открытых интервалах области определения  $\zeta \in (1, T-1)$  и  $\xi \in (1, T-1)$ .

Из (4.6), (4.7) следует, что для полной совместности краевых условий при  $t = 0$  и  $t = T$  достаточно, чтобы суммарное время управления было больше критического:  $T > T_* = 2$ . Этот временной интервал необходим, чтобы сигнал управления от одного конца стержня достиг другого конца, отразился и вернулся обратно. При  $T \leq T_*$  начальные и терминальные условия пересекаются и в общем случае произвольных  $v_0, r_0$  и  $p_1, v_1, r_1$  несовместны.

При выборе некоторых допустимых значений функций  $w_{+}(\xi), w_{-}(\zeta)$  на участке  $(1, T-1)$  полностью доопределяются, согласно (4.5), допустимые внешние воздействия  $U_{\pm}$  при  $t \in [0, T]$ , а также решение  $(v, r)$  в области  $\Omega$  в соответствии с (4.2) или (4.4) в зависимости от выбора координат.

Таким образом, получено решение прямой задачи динамики (3.3), (3.5) при некотором допустимом законе управления. Произвол в выборе этого закона используется далее для минимизации целевого функционала средней энергии  $E$ .

**5. Декомпозиция средней энергии.** Обращая внимание на структуру функции плотности энергии  $e$ , определенной в (3.4), и замечая, что  $r_t = v_x$  и  $r_x = v_t$  на решении (4.4), получим

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2}v_t^2 + \frac{1}{2}v_x^2 \Rightarrow \\ e &= \frac{1}{2}(w'_+(\xi) + w'_-(\zeta))^2 + \frac{1}{2}(w'_+(\xi) - w'_-(\zeta))^2 \Rightarrow \\ e &= (w'_+(\xi))^2 + (w'_-(\zeta))^2 = e_+(\xi) + e_-(\zeta), \\ e_+(\xi) &= (w'_+(\xi))^2, \quad e_-(\zeta) = (w'_-(\zeta))^2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь штрихом обозначены производные функций  $w_{\pm}$  по своим аргументам. В итоге, слагаемые  $e_{\pm}$  в функции плотности энергии  $e$  зависят от одного из двух аргументов. Так как функционал средней энергии  $E$  строится из функции  $e$  через линейное преобразование (интегрированием), то и он в свою очередь распадается на две независимые части:

$$E = \frac{1}{T} \int_{\Omega} e_+(\xi) d\Omega + \frac{1}{T} \int_{\Omega} e_-(\zeta) d\Omega = E_+ + E_-. \quad (5.2)$$

Здесь величина  $E_+$  определена, если задана функция  $w_+(\xi)$ , а значение  $E_-$  известно, если заданы значения  $w_-(\zeta)$ .

Подставляя выражение для  $e_+$  из (5.1) в  $E_+$ , получаем

$$E_+ = \frac{1}{T} \int_{\Omega} e_+(\xi) d\Omega = \frac{1}{T} \int_{-1}^{T+1} w_+^{\prime 2}(\xi) \Delta \zeta(\xi) d\xi, \tag{5.3}$$

$$\Delta \zeta = \zeta_{\max} - \zeta_{\min} = \begin{cases} 2\xi + 2, & \xi \in [-1, 1), \\ 4, & \xi \in [1, T - 1], \\ 2(1 + T - \xi), & \xi \in (T - 1, T + 1], \end{cases}$$

где кусочно-линейная функция  $\Delta \zeta$  возникает в результате первичного интегрирования по координате  $\zeta$ :

$$\int_{\Omega} e_+(\xi) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-\xi}^{2+\xi} e_+(\xi) d\zeta d\xi + \int_1^{T-1} \int_{-2+\xi}^{2+\xi} e_+(\xi) d\zeta d\xi + \int_{T-1}^{T+1} \int_{T-1-2+\xi}^{T+1-2T-\xi} e_+(\xi) d\zeta d\xi. \tag{5.4}$$

Ее значения проверяются геометрически (см. рис. 2), если учесть разбиение области  $\Omega$  угловыми характеристиками  $\xi = 1, \xi = T - 1, \zeta = 1, \zeta = T - 1$  (штриховые линии) и определить длины отрезков интегрирования по переменной  $\zeta$ .

Принимая во внимание заданные участки функций  $w_{\pm}$ , согласно (4.6) и (4.7), приходим к формуле для одной из частей декомпозированной средней энергии:

$$E_+ = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 (w_0'(\xi) + r_0'(\xi))^2 (\xi + 1) d\xi + \frac{2p_1^2}{T} + \frac{4}{T} \int_1^{T-1} w_+^{\prime 2}(\xi) d\xi. \tag{5.5}$$

Для второго слагаемого  $E_-$  аналогично выводим

$$E_- = \frac{1}{T} \int_{\Omega} e_-(\zeta) d\Omega = \frac{1}{T} \int_{-1}^{T+1} w_-^{\prime 2}(\zeta) \Delta \xi(\zeta) d\zeta, \tag{5.6}$$

$$\Delta \xi = \xi_{\max} - \xi_{\min} = \begin{cases} 2\zeta + 2, & \zeta \in [-1, 1), \\ 4, & \zeta \in [1, T - 1], \\ 2(1 + T - \zeta), & \zeta \in (T - 1, T + 1]. \end{cases}$$

Подобным же образом получаем симметрично относительно замены аргумента  $\xi$  на  $\zeta$  и функции  $w_+$  на  $w_-$  окончательное выражение для второго слагаемого целевого функционала:

$$E_- = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 (v_0'(-\zeta) - r_0'(-\zeta))^2 (\zeta + 1) d\zeta + \frac{2p_1^2}{T} + \frac{4}{T} \int_1^{T-1} w_-^{\prime 2}(\zeta) d\zeta. \tag{5.7}$$

Как видно, оба слагаемых  $E_{\pm}$  зависят соответственно от начальных, терминальных и свободных значений функций Даламбера  $w_{\pm}$ .

Согласно последней строке (5.1), после декомпозиции в выражение для средней энергии (5.2) входят квадраты первых производных по  $\xi$  и  $\zeta$  функций бегущих волн  $w_+(\xi)$  и  $w_-(\zeta)$ . Существование интегралов  $E_{\pm}$  означает, что должны существовать обобщенные производные этих функций, т.е.

$$w_{\pm} \in H^1(-1, T + 1). \tag{5.8}$$

Как следует из вида зависимости  $w_{\pm}$  от начальных функций  $v_0, r_0$ , требование принадлежности  $w_{\pm}$  пространству Соболева  $H^1$  влечет за собой ограничение на начальные условия, а именно  $v_0, r_0 \in H^1(-1, 1)$ . Вложенность одномерных функций из гильбертова пространства  $H^1$  в пространство непрерывных функций

$$H^1(-1, T + 1) \subset C(-1, T + 1), \tag{5.9}$$

согласно лемме Соболева [32], означает, что функции  $w_+$  или  $w_-$  могут быть продолжены на замыкание  $[-1, T + 1]$  и их значения, заданные на различных участках, должны непрерывно стыковаться в точках  $\xi = 1, \xi = T - 1$  и  $\zeta = 1, \zeta = T - 1$  соответственно.

**6. Вывод оптимального решения.** Из вида функционалов  $E_{\pm}$  следует, что для их независимой минимизации необходимо проварьировать свободные значения функции  $w_+(\xi)$  или  $w_-(\zeta)$  на интервалах аргумента  $\zeta \in (1, T-1)$  или  $\xi \in (1, T-1)$ . Таким образом возникает классическая задача вариационного исчисления [33]. При этом надо учесть краевые условия, вытекающие из свойства непрерывности  $w_{\pm}$  в точках  $\xi, \zeta = 1, T-1$ :

$$\begin{aligned} w_+(1) &= v_0(1) + r_0(1), & w_+(T-1) &= v_1 + r_1 - p_1, \\ w_-(1) &= v_0(-1) - r_0(-1), & w_-(T-1) &= v_1 - r_1 - p_1. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Необходимые условия существования минимума независимых функционалов  $E_{\pm}$  — это соответствующие линейные уравнения Эйлера второго порядка:

$$\begin{aligned} w_+''(\xi) &= 0, & \xi &\in (1, T-1); \\ w_-''(\zeta) &= 0, & \zeta &\in (1, T-1). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Эта система интегрируема, и общее решение выражается как линейный многочлен соответствующих аргументов. Из граничных условий (6.1) получаем выражения для экстремалей

$$\begin{aligned} w_+(\xi) &= (v_0(1) + r_0(1)) \frac{T-1-\xi}{T-2} + (v_1 + r_1 - p_1) \frac{\xi-1}{T-2}, \\ w_-(\zeta) &= (v_0(-1) - r_0(-1)) \frac{T-1-\zeta}{T-2} + (v_1 - r_1 - p_1) \frac{\zeta-1}{T-2} \end{aligned} \quad (6.3)$$

на участках  $\xi \in (1, T-1)$  и  $\zeta \in (1, T-1)$  соответственно. Из линейности системы уравнений следуют достаточные условия оптимальности и единственность решения.

Итак, все требуемые оптимальные выражения получаются следующим образом. Сперва восстанавливаются значения функций  $w_+(\xi)$  и  $w_-(\zeta)$  на областях определения  $\xi \in [-1, T+1]$ ,  $\zeta \in [-1, T+1]$  с использованием выражений (4.6) и (4.7) и (6.3). Затем с помощью формул (4.5) находятся интегралы управления  $U_-^*(t)$  и  $U_+^*(t)$  на временном интервале  $t \in [0, T]$ . Производные этих функций дают значения оптимальных внешних сил  $u_-^*(t) = (U_-^*)'(t)$  и  $u_+^*(t) = (U_+^*)'(t)$ . По формулам (4.2) получаем оптимальные кинематическую ( $v^*$ ) и динамическую ( $r^*$ ) функции состояния системы и по (1.7) восстанавливаем плотность импульса  $p^* = r_x^*$  и нормальные силы  $s^* = r_t^*$ .

**7. Допустимое решение на критическом интервале времени.** Рассмотрим особый случай, когда время управления равно критическому значению  $T = T_* = 2$ . Область определения задается как  $\Omega_* = (0, 2) \times (-1, 1)$ . Как видно из рис. 3, варьированные области исчезают и решение (4.2) терминальной задачи (3.3) определяется однозначно, с точностью до терминальных констант  $v_1, r_1, p_1$  из (3.5).

Функции Даламбера выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} w_+(\xi) &= \frac{v_0(\xi) + r_0(\xi)}{2}, & \xi &\leq 1; \\ w_-(\zeta) &= \frac{v_0(-\zeta) - r_0(-\zeta)}{2}, & \zeta &\leq 1; \\ w_+(\xi) &= \frac{p_1(\xi-2) + v_1 + r_1}{2}, & \xi &\geq 1; \\ w_-(\zeta) &= \frac{p_1(\zeta-2) + v_1 - r_1}{2}, & \zeta &\geq 1. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Точкой пересечения областей определения этих функций являются значения координат характеристик  $\xi = 1, \zeta = 1$  с заданными в них условиями непрерывности:

$$w_+(1+0) = w_+(1-0), \quad w_-(1+0) = w_-(1-0). \quad (7.2)$$

Из (7.2) получаем, что

$$\begin{aligned} v_0(1) + r_0(1) &= v_1 + r_1 - p_1, \\ v_0(-1) - r_0(-1) &= v_1 - r_1 - p_1. \end{aligned} \quad (7.3)$$

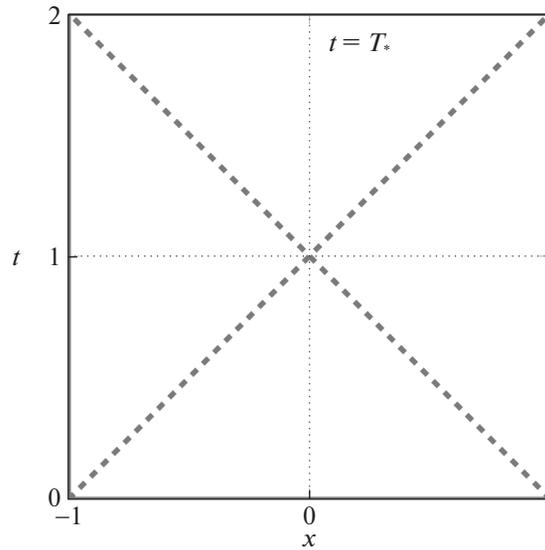


Рис. 3. Пространственно-временная область определения решения  $\Omega = (0, T) \times (-1, 1)$  при  $T = T_*$

Из этих условий следует два вывода. Во-первых, терминальный параметр  $r_1$  динамической функции определен однозначно из системы (7.3) и равен  $r_1 = \frac{1}{2}r_0(1) + \frac{1}{2}r_0(-1)$ . Во-вторых, так как  $v_1 - p_1 = \frac{1}{2}v_0(1) + \frac{1}{2}v_0(-1)$ , нельзя привести систему в нулевое состояние за критическое время  $T_*$ , если  $v_0(1) \neq -v_0(-1)$ . Отметим также, что оптимальный по энергии параметр  $p_1 = 0$ . Поэтому всегда более выгодное с энергетической точки зрения движение – это приведение системы в терминальное состояние покоя.

Теперь рассмотрим конкретный пример допустимого движения для начальных условий и терминальных параметров:

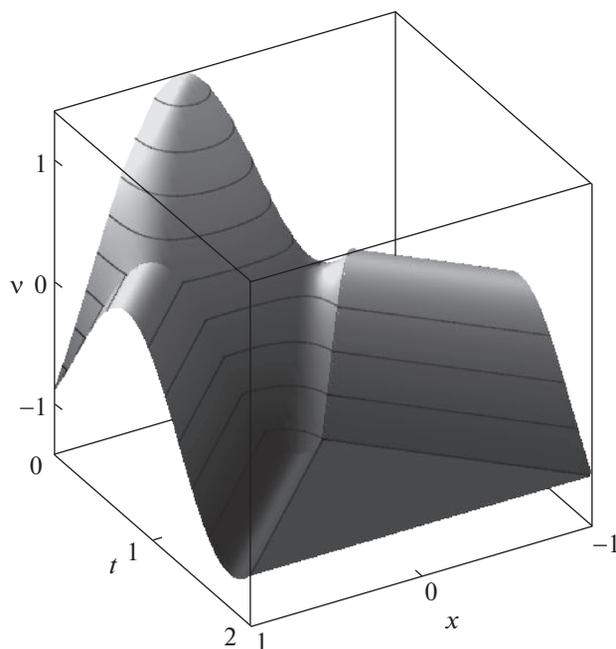
$$v_0(x) = \cos(3x) + \sin(3x), \quad r_0(x) = p_1 = 0. \tag{7.4}$$

Из (7.3) и (7.4) следует, что  $r_1 = 0$ , а  $v_1 = \frac{1}{2}v_0(1) + \frac{1}{2}v_0(-1) = \cos(3) \approx -0.99$ . На рис. 4 показан график функции перемещений  $v(t, x)$ . Как видно, в конечный момент времени система прибывает в состояние покоя (ненулевое положение). Вследствие постановки вариационной задачи найденная функция  $v$  непрерывна, что следует из явных линейных выражений (4.2) для  $v$  в терминах  $w_{\pm}$  и соответствует гипотезе непрерывности упругой среды.

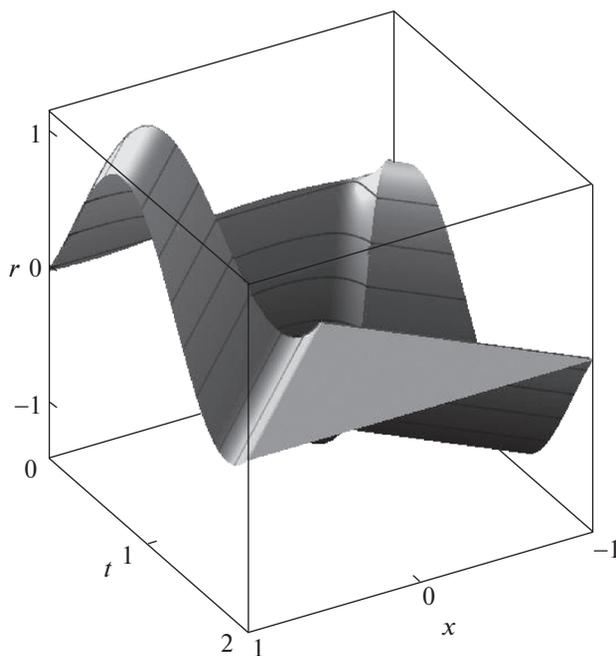
Значения динамической функции (потенциала)  $r(t, x)$  представлены на рис. 5. Эти функции равны нулю при  $t = 0, t = T$  для выбранных начальных и терминальных  $r_0$  и  $r_1$ . Функция  $r$ , согласно (4.2), является линейной комбинацией непрерывных функций  $w_{\pm}$ , т.е. сама непрерывна, что наглядно иллюстрируется ее графиком. При этом порожденные ею механические поля импульса и силы могут иметь разрывы значений. Это подтверждается наличием угловых точек на линиях характеристик  $\xi = 1, \zeta = 1$ , обозначенных на рис. 3 пунктирными линиями. Угловые точки распространяются по этим характеристикам и на графике функции  $v$  (см. рис. 4).

Допустимые интегралы управления  $U_-(t)$  и  $U_+(t)$  показаны на рис. 6 штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно. Их тригонометрический характер определен выбранными для примера начальными условиями.

Последние графики на рис. 7 показывают вид исходных управляющих воздействий – внешних сил  $u_-(t)$  и  $u_+(t)$ , которые представляют собой производные от функций  $U_-(t)$  и  $U_+(t)$ . По построению  $U_-(0) = U_+(0) = 0$ , в то же время на управления  $u_-(t)$  и  $u_+(t)$  не накладываются какие-либо начальные или терминальные условия.

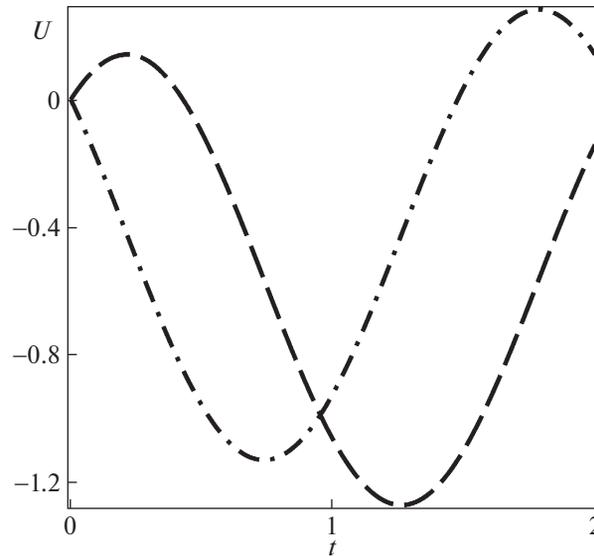


**Рис. 4.** Распределение в пространстве и времени перемещений точек стержня  $v(t, x)$  (кинематическая функция) при  $T = T_*$

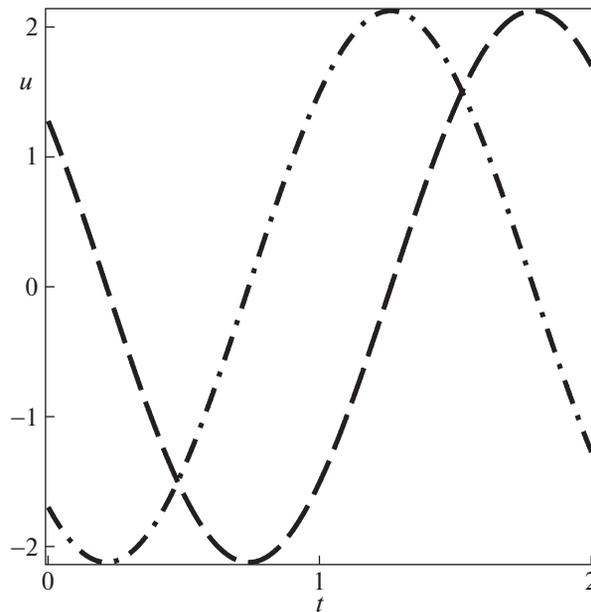


**Рис. 5.** Распределение в пространстве и времени потенциала  $r(t, x)$  (динамическая функция) при  $T = T_*$

**8. Пример оптимального движения.** Для наглядности рассмотрим пример оптимального управления продольными перемещениями упругого стержня при времени управления  $T = 3 > T_*$ . В качестве начальных значений опять выберем функции из (7.4). Оптимальное распределение перемещений показано на рис. 8. Как видно из графика, к конечному моменту времени стержень приходит в нулевое состояние как по энергии, так и по положению. Видны угловые точки, расположенные по характеристикам, которые изображены на рис. 2 штриховыми линиями.

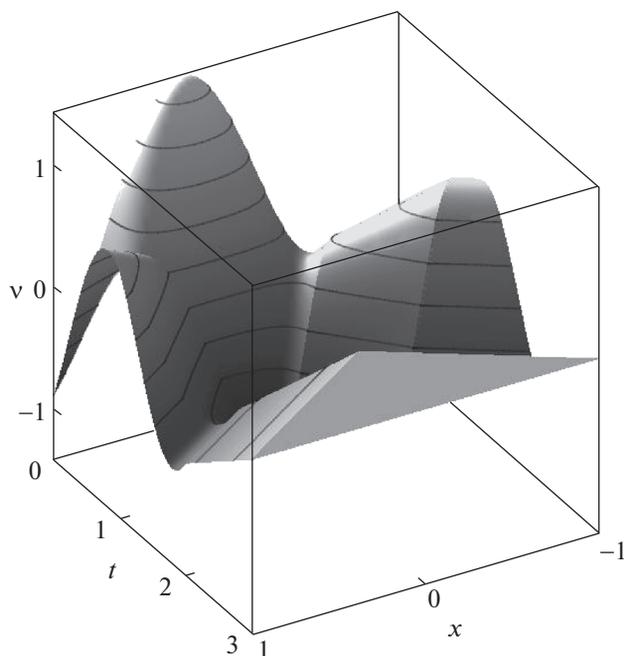


**Рис. 6.** Допустимые интегралы управления  $U_-(t)$  (штриховая кривая) и  $U_+(t)$  (штрихпунктирная кривая) при  $T = T_*$

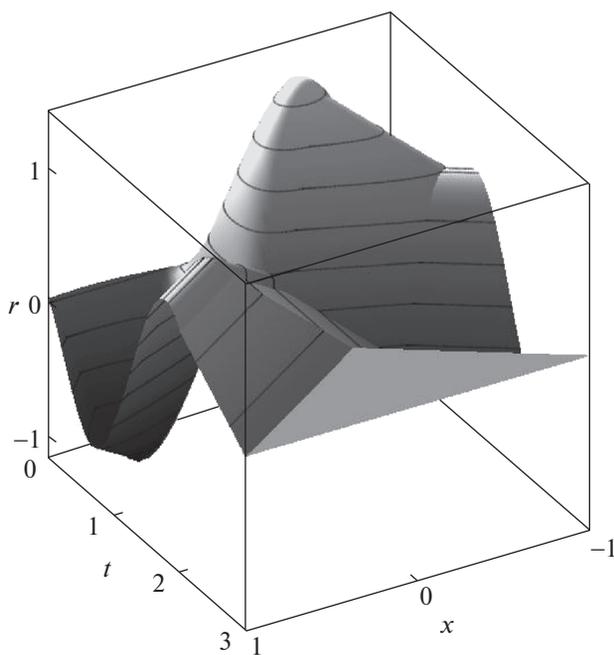


**Рис. 7.** Допустимые функции управления  $u_-(t)$  (штриховая кривая) и  $u_+(t)$  (штрихпунктирная кривая) при  $T = T_*$

На рис. 9 показаны оптимальные значения динамического потенциала  $r(t, x)$ . Снова оптимальным терминальным значением для  $r$  является нулевое распределение. Напомним, что значение этой функции дается с точностью до начальной константы  $c_0$ , введенной в (1.10). В данном примере ее значение равно нулю. Следует подчеркнуть, что хотя в классической постановке движение полностью определяется функцией перемещения, в обобщенной вариационной постановке, используемой в этой работе, динамическая функция  $r$  — неотъемлемая часть решения, которая обязательно представляет вторую позицию в упорядоченной паре  $(v, r)$ .

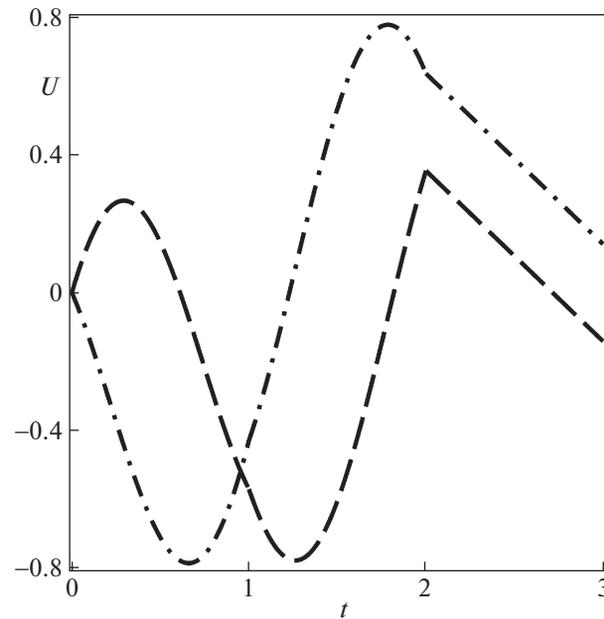


**Рис. 8.** Оптимальное распределение в пространстве и времени перемещений точек стержня  $v(t, x)$  (кинематическая функция) при  $T > T_*$

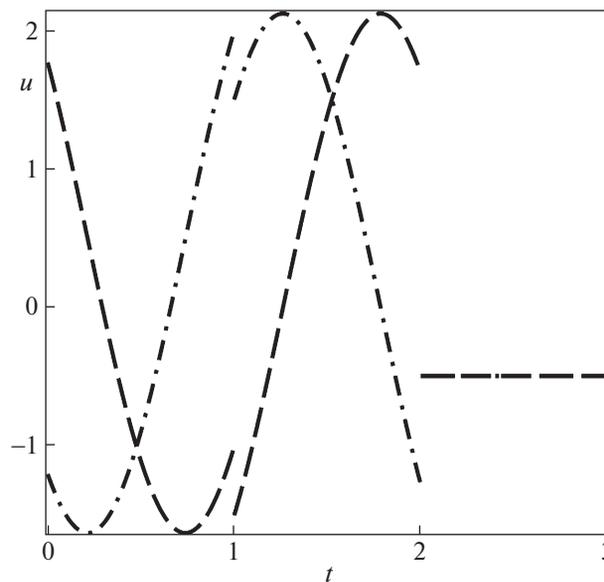


**Рис. 9.** Оптимальное распределение в пространстве и времени потенциала  $r(t, x)$  (динамическая функция) при  $T > T_*$

Оптимальные интегралы управления  $U_-(t)$  и  $U_+(t)$  изображены на рис. 10 штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно. Это непрерывные функции с нулевыми начальными значениями, что следует из линейности соотношений (4.5). На последнем участке при  $t \in [2, 3]$  закон оптимального управления имеет линейный характер, что обусловлено видом оптимальных



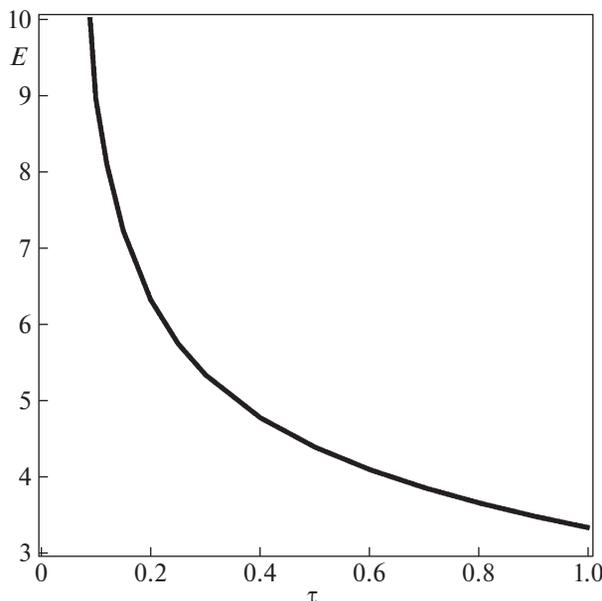
**Рис. 10.** Оптимальные интегралы управления  $U_-(t)$  (штриховая кривая) и  $U_+(t)$  (штрихпунктирная кривая) при  $T > T_*$



**Рис. 11.** Оптимальные функции управления  $u_-(t)$  (штриховая кривая) и  $u_+(t)$  (штрихпунктирная кривая) при  $T > T_*$

функций Даламбера (бегущих волн) как линейных многочленов. На остальных участках  $t \in [0, 1]$  и  $t \in [1, 2]$  интегралы управления представляют собой линейные комбинации тригонометрических и полиномиальных функций, согласно выбранным начальным условиям (7.4).

Завершает этот пункт рисунок 11, на котором показаны оптимальные функции управления  $u_-(t)$  и  $u_+(t)$  штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно. На трех равных по длине интервалах времени  $t \in (0, 1)$ ,  $t \in (1, 2)$ ,  $t \in (2, 3)$  управления задаются аналитическими функциями,



**Рис. 12.** Оптимальные значения средней механической энергии  $E$  в зависимости от превышения критического времени управления  $\tau = T - T_*$

причем на третьем этапе оба управления равны одной константе  $u_-(t) = u_+(t) = \frac{1}{2} \cos(3)$ . В точках  $t = 1$  и  $t = 2$  видны разрывы функций управления.

**9. Анализ поведения средней энергии.** Изучим поведение оптимального значения средней механической энергии системы при изменении времени управления  $T$ . Для удобства представления вводится вспомогательный параметр  $\tau = T - T_*$ , который определяет расстояние между временем управления и его критическим значением.

На рис. 12 представлены результаты расчетов оптимальных значений функционала  $E$  для различных значений параметра  $\tau \in (0, 1]$  при фиксированных начальных условиях (7.4). Как видно из графика, значение целевого функционала убывает строго монотонно и, как показывают проведенные расчеты, стремится к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$ . С другой стороны, значение средней энергии стремится к бесконечности при  $\tau \rightarrow 0$ , т.е. при  $T \rightarrow T_*$ . Это косвенно подтверждает невозможность с энергетической точки зрения приведения при выбранных начальных условиях упругого стержня в нулевое состояние для заданного класса гладкости обобщенного решения при  $T = T_*$ , как это и было показано в разд. 7.

**Заключение.** В работе исследованы продольные перемещения тонкого прямолинейного упругого стержня. Дана обобщенная формулировка начально-краевой задачи, решение которой ищется относительно кинематической и динамической переменных в энергетическом пространстве. Для случая однородного стержня, управляемого с помощью приложенных с обоих концов внешних сил, определено критическое время, за которое система может быть приведена в состояние покоя и в общем случае показана невозможность для произвольных начальных условий приведения точек стержня в нулевое состояние. Для фиксированных интервалов времени, больших критического, решена задача оптимального управления о приведении системы в нулевое состояние. Целевой функционал – средняя механическая энергия, запасаемая стержнем во время движения. Поставленная двумерная по пространству и времени задача управления сведена к классической одномерной квадратичной вариационной задаче с фиксированными концами. Оптимальное управление и соответствующие движения стержня найдены в явном виде как комбинации бегущих волн. Исследована зависимость средней энергии, запасаемой в системе, от времени управления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lions J.L.* Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1971.
2. *Butkovsky A.G.* Distributed Control Systems. N.Y.: Elsevier, 1969.
3. *Ahmed N.U., Teo K.L.* Optimal Control of Distributed Parameter Systems. N.Y.: North Holland, 1981.
4. *Krabs W.* Optimal Control of Undamped Linear Vibrations. Lemgo: Heldermann, 1995.
5. *Lagnese J.E., Leugering G., Schmidt E.J.P.G.* Modeling, Analysis and Control of Dynamic Elastic Multi-Link Structures. Boston: Birkhäuser, 1984.
6. *Leugering G.* A Domain Decomposition of Optimal Control Problems for Dynamic Networks of Elastic Strings // Computational Optimization and Applications. 2000. V. 16. P. 5–29.
7. *Gugat M.* Optimal Control of Networked Hyperbolic Systems: Evaluation of Derivatives // Advanced Modelling and Optimization. 2005. V. 7. P. 9–37.
8. *Banks S.P.* State-Space and Frequency-Domain Methods in the Control of Distributed Parameter Systems. London: Peregrinus, 1983.
9. *Curtain R.F., Zwart H.J.* An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. N.Y.: Springer-Verlag, 1995.
10. *Chernousko F.L.* Control of Elastic Systems by Bounded Distributed Forces // Applied Mathematics and Computation. 1996. V. 78. P. 103–110.
11. *Gerdtz M., Greif G., Pesch H.J.* Numerical Optimal Control of the Wave Equation: Optimal Boundary Control of a String to Rest in Finite Time // Mathematics and Computers in Simulation. 2008. V. 79. № 4. P. 1020–1032.
12. *Овсеевич А.И., Федоров А.К.* Асимптотически оптимальное управление простейшей распределенной системой // ДАН. 2017. Т. 473. № 5. С. 525–528.
13. *Романов И.В., Шамаев А.С.* О задаче точного управления системой, описываемой уравнением струны с запаздыванием // АИТ. 2013. Вып. 11. С. 38–50.
14. *Романов И.В., Шамаев А.С.* О задаче граничного управления для системы, описываемой двумерным волновым уравнением // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 109–116.
15. *Lewis R.W., Nithiarasu P., Seetharamu K.N.* Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow. Chichester: Wiley, 2004.
16. *Balas M.J.* Finite-Dimensional Control of Distributed Parameter Systems by Galerkin Approximation of Infinite Dimensional Controllers // J. Mathematical Analysis and Applications. 1986. V. 114. P. 17–36.
17. *Christofides P.D.* Nonlinear and Robust Control of PDE Systems: Methods and Applications to Transport-Reaction Processes. Boston: Birkhäuser, 2001.
18. *Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L.* Element-Free Galerkin Method // Intern. J. for Numerical Methods in Engineering. 1994. V. 37. P. 229–256.
19. *Atluri S.N., Zhu T.* A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics // Computational Mechanics. 1998. V. 22. P. 117–127.
20. *Bochev P.B., Gunzburger M.D.* Least-Squares Finite Element Methods. N.Y.: Springer, 2009.
21. *Акуленко Л.Д., Гавриков А.А.* Управление одномерными движениями гибридных колебательных систем стержневого типа // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 3. С. 5–14.
22. *Kostin G.V., Saurin V.V.* Dynamics of Solid Structures. Methods Using Integrodifferential Relations. Berlin: De Gruyter, 2018.
23. *Kostin G.V.* Modelling and Optimization of Controlled Longitudinal Motions for an Elastic Rod Based on the Ritz Method // 14th Intern. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (STAB). Moscow: IEEE, 2018. P. 1–4.  
<https://doi.org/10.1109/STAB.2018.8408369>.
24. *Kostin G.* Verified Solution to Optimal Control Problems of Elastic Rod Motion Based on the Ritz Method // Acta Cybernetica. 2020. V. 24. P. 393–408.  
<https://doi.org/10.14232/actacyb.24.3.2020.7>
25. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60. № 6. С. 89–114.
26. *Моисеев Е.И., Фролов А.А.* Граничное управление процессом колебаний струны при условии сопротивления среды на правом конце за время, меньшее критического // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 555–566.
27. *Gugat M.* Optimal Boundary Control and Boundary Stabilization of Hyperbolic Systems. Berlin: Springer, 2015, 148 p.

28. *Gugat M., Trélat E., Zuazua E.* Optimal Neumann Control for the 1D Wave Equation: Finite Horizon, Infinite Horizon, Boundary Tracking Terms and the Turnpike Property // *Systems & Control Letters*. 2016. V. 90. P. 61–70.
29. *Schwab C.* P- and hp- Finite Element Methods: Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics. *Numerical Mathematics and Scientific Computation*. N.Y.: Oxford University Press, 1998.
30. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
31. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 576 с.
32. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1968. 624 с.
33. *Giaquinta M., Hildebrandt S.* *Calculus of Variations*. I. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

ВЕТРОТУРБИНА ТИПА ДАРЬЕ–МАГНУСА:  
ДИНАМИКА И УПРАВЛЕНИЕ<sup>1</sup>

© 2021 г. Л. А. Климина

НИИ механики МГУ, Москва, Россия

e-mail: klimina@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 01.03.2021 г.

После доработки 27.03.2021 г.

Принята к публикации 31.05.2021 г.

При вращении ротора Дарье формируется сила, родственная силе Магнуса: перпендикулярная скорости набегающего потока. В работе она вычисляется на основе квазистатической модели аэродинамического воздействия и сравнивается с аналогичной силой, действующей на ротор Савониуса. Эта сила позволяет использовать ротор Дарье как элемент ветроэнергетической установки, работающей на основе эффекта Магнуса. Математическая модель такой ветротурбины с горизонтальным валом и двумя вращающимися лопастями в форме роторов Дарье представлена в форме динамической системы пятого порядка. В качестве коэффициента усиления управляющего воздействия в модели выступает параметр, который характеризует полезную внешнюю электрическую нагрузку в локальной цепи электрогенератора установки. В результате проведенного анализа установлено, что ветротурбина может обладать, как минимум, тремя типами рабочих режимов. Из них два характеризуются синхронизацией средних угловых скоростей роторов Дарье, в общем случае средняя скорость вращения центрального вала с ними несоизмерима. На третьем типе режимов скорости собственного вращения роторов Дарье несоизмеримы. Решена задача выбора управления, которое обеспечивает максимальную величину механической мощности на рабочем режиме ветротурбины.

DOI: 10.31857/S0002338821050127

**Введение.** Классический пример силы Магнуса: перпендикулярная скорости потока сила, действующая на сферическую или цилиндрическую поверхность, вращающуюся в потоке [1, 2]. Боковая сила, родственная силе Магнуса, формируется при авторотации некоторых ветротурбин, например ротора Савониуса, что было отмечено на заре конструирования подобных роторов и послужило поводом для расширения вариантов их применения в ветроэнергетических системах. Так, турбины, при авторотации которых формируется сила Магнуса, могут использоваться вместо цилиндров или наряду с ними в качестве роторных парусов, подобных парусу Флеттнера, для создания подъемной силы парящих объектов и летательных аппаратов [3–8], а также в качестве лопастей ветротурбин, работающих на основе эффекта Магнуса [9–14].

Подобного рода боковая сила присутствует и при авторотации в потоке так называемой ветротурбины Дарье. Однако этот эффект слабо отражен в литературе, например [8]. В отличие от случая ротора Савониуса, силы, действующие на ротор Дарье, могут быть оценены на основе применения гипотезы квазистатического обтекания для каждой из лопастей ротора. В работе получены соответствующие функции от угла поворота и угловой скорости ротора, построены числовые оценки для случая трехлопастной турбины с лопастями профиля RAF34.

Представляется актуальным проанализировать возможность использования турбин Дарье в качестве авторотирующих лопастей горизонтально-осевой ветроустановки, подобно тому, как в этом качестве применяются роторы Савониуса [9–13]. Необходимо отметить радикальное отличие использования ротора Дарье для формирования силы Магнуса от случая, когда в качестве лопастей турбины Дарье выступают цилиндры, формирующие силу Магнуса [14].

В работе построена математическая модель двухлопастной горизонтально-осевой ветроэнергетической установки, каждая лопасть которой представляет собой авторотирующую турбину

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Математические методы анализа сложных систем”.

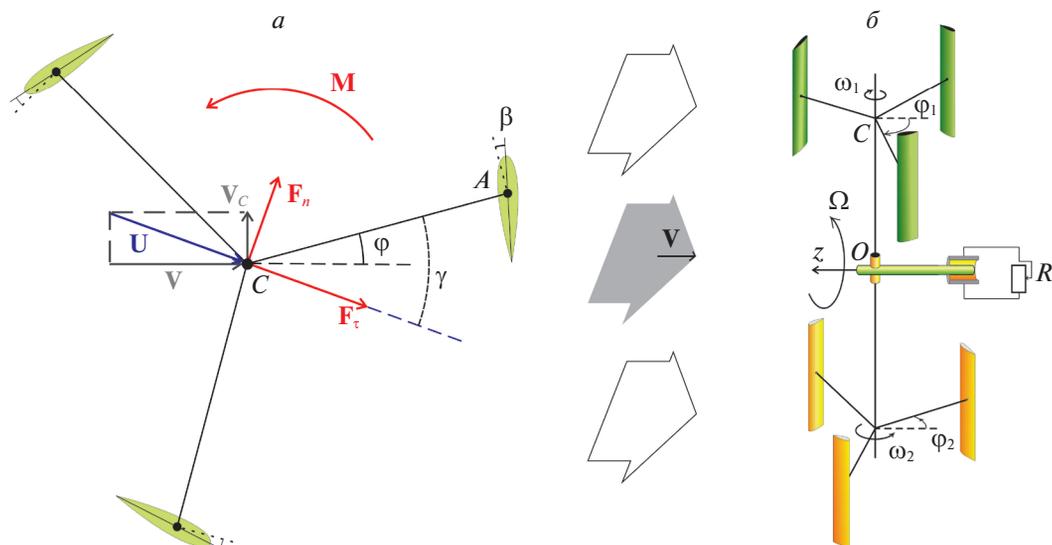


Рис. 1. Сечение ротора Дарье и общий вид ветротурбины с лопастями в форме роторов Дарье

Дарье, формирующую силу Магнуса. Назовем такое устройство ветротурбиной типа Дарье–Магнуса. Уравнения движения турбины представлены в форме автономной динамической системы пятого порядка. Варьируемый параметр модели, который характеризует полезную внешнюю электрическую нагрузку, рассматривается как коэффициент усиления управляющего воздействия (подобно работам [12, 15]). Определяется значение этого параметра, оптимальное с позиций максимизации средней механической мощности на рабочем режиме. При этом рабочему режиму может соответствовать достаточно нетривиальная траектория динамической системы пятого порядка, на которой угловые переменные монотонно растут, а угловые скорости остаются близки к постоянным значениям и не синхронизируются друг с другом или синхронизируются частично. Анализ таких режимов, не предполагающих полной синхронизации угловых скоростей элементов, проводится на основе методов [16, 17]. Подробный обзор альтернативных методов, которые могут быть применены для решения родственных задач, приведен в [18]. Краткий обзор дан, например, в [19], где при помощи модификации метода [17] описаны рабочие режимы ветротурбины с двумя противовращающимися роторами Савониуса.

Для ветроустановки типа Дарье–Магнуса являются естественными режимы, на которых происходит частичная синхронизация угловых скоростей: средние угловые скорости роторов Дарье – лопастей основной турбины – совпадают друг с другом, а средняя угловая скорость центрального вала не синхронизирована с ними. Таким образом, в соответствующей динамической системе возможен эффект частичной синхронизации, характерный для так называемых химерных состояний [20].

**1. Описание системы и постановка задачи.** Рассмотрим ротор Дарье с  $n$ -лопастями: сначала как самостоятельный объект, затем как составной элемент более сложной ветротурбины (рис. 1). Через геометрический центр  $C$  ротора проходит ось собственного вращения. Каждая лопасть ротора представляет собой крыло постоянного профиля, хорда которого составляет угол  $(\pi/2 + \beta)$  с державкой  $AC$ , соединяющей лопасть с осью собственного вращения (рис. 1,а). Длина каждой державки равна  $r$ , характерная площадь каждой лопасти –  $S$ . Все лопасти профилированы одинаково. При численных расчетах будем использовать аэродинамические характеристики профиля RAF34 [21] и положим  $n = 3$ . Центр масс ротора расположен в геометрическом центре  $C$  конструкции. Масса ротора равна  $m$ , момент инерции относительно оси собственного вращения равен  $J_C$ . Другие два главных центральных момента инерции ротора считаем одинаковыми и обозначим  $J_r$ .

Рассмотрим ветротурбину с горизонтальным центральным валом  $Oz$ , с двумя радиальными лопастями, каждая из которых представляет собой ротор Дарье, закрепленный к центральному валу цилиндрическим шарниром (рис. 1,б). Ось собственного вращения ротора Дарье ортогональна неподвижной оси  $Oz$ ;  $l$  – расстояние от оси  $Oz$  до центра  $C$  ротора. На горизонтальном ва-

лу турбины закреплен ротор электрогенератора. Момент инерции вала вместе с ротором генератора обозначим  $J_0$ . Генератор подключен к локальной электрической цепи с внешним сопротивлением  $R$ . Величину  $R$  можно рассматривать в качестве управления: варьировать ее с целью максимизации мощности, отбираемой турбиной у потока (аналогично работам [12, 15]). Ветро-турбина расположена в стационарном потоке воздуха скорости  $\mathbf{V}$ , плотности  $\rho$ , вектор  $\mathbf{V}$  параллелен оси  $Oz$ .

Момент инерции  $J$  всей конструкции относительно оси  $Oz$  равен

$$J = 2ml^2 + 2J_r + J_0.$$

Система имеет три степени свободы. Углы собственного вращения роторов Дарье обозначим  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , угол поворота центрального вала всей конструкции является циклической координатой.

Подобная ветротурбина, но с тремя лопастями в форме роторов Савониуса рассмотрена в [11]. Вращение центрального вала должно поддерживаться боковыми силами, действующими на лопасти-роторы при их авторотации в потоке.

Задача данной работы состоит в том, чтобы оценить боковую силу и силу лобового сопротивления, действующие на ротор Дарье; с учетом этих сил построить математическую модель движения комбинированной ветротурбины; описать рабочие режимы устройства; построить управление внешним сопротивлением, обеспечивающее наличие установившегося рабочего режима, который характеризуется высоким значением механической мощности.

**2. Силы, действующие на ротор Дарье при авторотации.** Для определения боковой силы и силы сопротивления, действующих на ротор Дарье, воспользуемся квазистатической моделью (аналогично [22–27]). Рассмотрим отдельный ротор Дарье, совершающий вращение вокруг своей центральной оси  $S$ . Пусть ротор расположен в однородном потоке воздуха, скорость  $\mathbf{U}$  которого ортогональна оси вращения ротора. Отличие между векторами  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  будет объяснено далее; оно вызвано тем, что ротор Дарье как элемент горизонтально-осевой турбины совершает более сложное движение в потоке.

Опишем воздействие потока на лопасть ротора Дарье. Пренебрегаем возможным перемещением центра давления (точки приложения аэродинамических сил) относительно лопасти. Считаем, что он всегда совпадает с точкой  $A$ , в которой конец державки закреплен к хорде лопасти. Воздушная скорость центра давления  $A$  представляет собой скорость точки  $A$  относительно системы отсчета, движущейся поступательно со скоростью  $\mathbf{U}$ . Мгновенный угол атаки – угол между воздушной скоростью центра давления и хордой профиля – обозначим  $\alpha_s$  для  $s$ -й из трех лопастей ротора ( $s = 1, 2, 3$ ). Обозначим через  $\gamma$  угол между одной из державок ротора и вектором  $\mathbf{U}$ , тогда углы  $\alpha_s$  вычисляются по формулам

$$\alpha_s = \beta + \begin{cases} \arctg\left(\frac{u_s(\gamma)}{w_s(\gamma, \lambda)}\right), & \text{если } w_s(\gamma, \lambda) \geq 0, \\ \arctg\left(\frac{u_s(\gamma)}{w_s(\gamma, \lambda)}\right) + \pi, & \text{если } w_s(\gamma, \lambda) < 0, \end{cases}$$

$$u_s(\gamma) = \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}s\right), \quad w_s(\gamma, \lambda) = \lambda + \sin\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}s\right), \quad s = 1, 2, 3.$$

Здесь  $\lambda = U^{-1}r\dot{\gamma}$  – быстроходность ротора.

Аэродинамический профиль лопасти ротора Дарье характеризуется коэффициентами  $C_d(\alpha_s)$  и  $C_l(\alpha_s)$  силы сопротивления и подъемной (боковой) силы соответственно. При численных расчетах воспользуемся аппроксимациями (рис. 2) этих функций, которые соответствуют профилю RAF34 (экспериментальные данные взяты из [21]), и положим  $\beta = 0.12$  (установочный угол лопастей). Сила  $\mathbf{F}_d$  сопротивления и боковая (подъемная) сила  $\mathbf{F}_l$ , действующие на одну лопасть, направлены соответственно противоположно вектору воздушной скорости точки  $A$  и ортогонально ему. Их величины вычисляются по формулам

$$F_d = 0.5\rho S U^2 (u_s^2 + w_s^2) C_d(\alpha_s), \quad F_l = 0.5\rho S U^2 (u_s^2 + w_s^2) C_l(\alpha_s).$$

Силы, действующие на каждую из лопастей ротора, создают суммарный момент  $\mathbf{M}$  относительно оси вращения  $S$ , а также формируют суммарную силу, приложенную в центре масс  $S$  ротора. Компоненты этой аэродинамической силы, направленные ортогонально скорости  $\mathbf{U}$

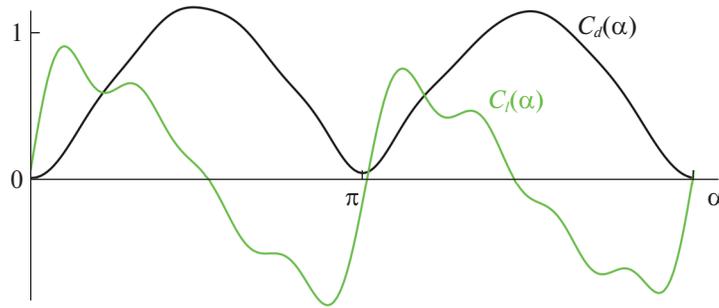


Рис. 2. Аэродинамические характеристики профиля RAF34

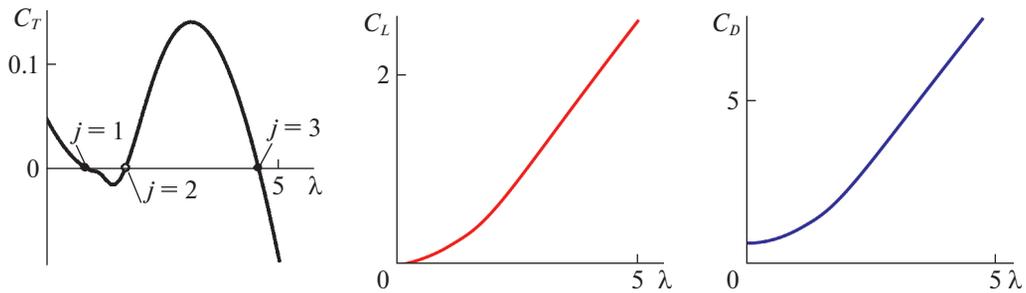


Рис. 3. Момент и компоненты аэродинамической силы для ротора Дарье (как функции быстроходности)

потока и вдоль нее, обозначим  $\mathbf{F}_n$  и  $\mathbf{F}_\tau$  (рис. 1, а). Таким образом,  $\mathbf{F}_n$  – аналог силы Магнуса, а  $\mathbf{F}_\tau$  – сила лобового сопротивления ротора Дарье. Для суммарного момента и сил получаем

$$M = 0.5\rho S U^2 \sum_{s=1}^3 \sqrt{u_s^2 + w_s^2} (C_l(\alpha_s) u_s - C_d(\alpha_s) w_s) = 1.5\rho S U^2 C_T,$$

$$F_n = 0.5\rho S U^2 \sum_{s=1}^3 (u_s^2 + w_s^2) (C_l(\alpha_s) \sin \psi_s - C_d(\alpha_s) \cos \psi_s) = 1.5\rho S U^2 C_L,$$

$$F_\tau = 0.5\rho S U^2 \sum_{s=1}^3 (u_s^2 + w_s^2) (C_l(\alpha_s) \cos \psi_s + C_d(\alpha_s) \sin \psi_s) = 1.5\rho S U^2 C_D,$$

$$\psi_s = \alpha_s - \beta + \gamma + \frac{2\pi}{3} s.$$

Здесь и далее  $C_T$ ,  $C_L$  и  $C_D$  – коэффициенты момента, боковой силы (аналог силы Магнуса) и силы лобового сопротивления, действующих на ротор Дарье (множитель 1.5 связан с тем, что ротор трехлопастной). Значения коэффициента  $C_T$  обсуждаются в литературе весьма детально, поскольку именно информация о моменте требуется для оценки мощности, отбираемой у потока классическим ротором Дарье. Есть множество соответствующих работ, основанных на разнообразных моделях и на экспериментах по идентификации  $C_T$ , например [4, 28–30]. Однако затруднительно найти в литературе какие-либо данные о силах  $\mathbf{F}_n$  и  $\mathbf{F}_\tau$ , поскольку для классического ротора Дарье эти силы по существу не влияют на эффективность эксплуатации. В то же время эти силы можно использовать для обеспечения работы более сложных устройств, в конструкции которых задействован ротор Дарье. Вычислим средние за оборот значения коэффициентов  $C_T$ ,  $C_L$  и  $C_D$  в зависимости от быстроходности  $\lambda$  ротора (рис. 3).

По сравнению с ротором Савониуса, например [31], более высокие значения боковой силы можно ожидать за счет большей скорости авторотации, но при этом и значения силы лобового сопротивления оказываются существенно выше. Интересно, что так же, как и в случае Савониуса, при нулевой угловой скорости ротора боковая сила принимает отрицательное значение (положительным выбрано направление, характерное для силы Магнуса). Вид функции осредненного  $C_D$  качественно отличается: у ротора Савониуса аналогичная функция в широком диапазоне значений быстроходности близка к константе. С ростом  $\lambda$  отношение средних значений  $C_L$  к  $C_D$

монотонно растет. Отметим, что выбор ненулевого установочного угла  $\beta$  лопастей позволяет увеличить значения боковой силы.

**3. Уравнения движения турбины с лопастями в форме роторов Дарье.** Итак, получены выражения для аэродинамических сил, действующих на ротор Дарье в однородном потоке. При вращении комбинированной горизонтально-осевой турбины вокруг оси  $Oz$  поток, который приходит на лопасти роторов Дарье, строго говоря, не является однородным вдоль лопастей: воздушные скорости точек лопасти, расположенных ближе к  $Oz$ , меньше, чем у точек, более удаленных от  $Oz$ . Пренебрежем отличием между воздушными скоростями точек лопасти, считая, что расстояние  $OC$  значительно превосходит длину лопасти ротора Дарье и длину  $r$  державок, а также в свою очередь  $r$  существенно больше хорды профиля. Подобные предположения достаточно стандартны при применении квазистатической модели, например [22–25].

Для упрощения будем считать, что каждый ротор Дарье, выступающий в роли лопасти горизонтально-осевой турбины, воспринимает воздушный поток, скорость которого равна разности вектора  $\mathbf{V}$  и абсолютной скорости  $\mathbf{V}_C$  точки  $C$  (рис. 1,а). Вектор  $\mathbf{V}_C$  ортогонален  $\mathbf{V}$  и по величине равен  $l\dot{\vartheta}$ , где  $\dot{\vartheta}$  – скорость вращения центрального вала ветротурбины вокруг оси  $Oz$ . Таким образом, при вычислении аэродинамических сил и моментов в выражения предыдущего параграфа подставляем следующую формулу для  $U$ :

$$U = \sqrt{V^2 + l^2\dot{\vartheta}^2}.$$

Пусть угол  $\varphi_i$  собственного вращения ротора Дарье отсчитывается от направления скорости  $\mathbf{V}$  потока до одной из державок  $CA$  ротора. Угол между державкой  $CA$  ротора Дарье и вектором  $\mathbf{U}$  (т.е. угол  $\gamma$  в обозначениях предыдущего параграфа) составляет  $(\varphi_i + \arctg(l\dot{\vartheta}/V))$ . При вычислении быстроходностей роторов Дарье пренебрегаем величиной  $V^{-1}l\dot{\vartheta}$  по сравнению с  $V^{-1}r\dot{\varphi}_i$ , иными словами, считаем, что угловая скорость центрального вала меняется достаточно медленно.

Помимо аэродинамических сил на систему действует электромеханический момент  $M_e$ , приложенный к центральному валу. Он описывает воздействие статора генератора на ротор, т.е. характеризует полезную электрическую нагрузку. Выражение для него аналогично работам [12, 13, 15]:

$$M_e = -\frac{\kappa^2}{R + \sigma} \dot{\vartheta}.$$

Здесь  $\kappa$  – коэффициент электромеханического взаимодействия (константа, определяемая свойствами генератора),  $\sigma$  – внутреннее сопротивление генератора (константа). Выражение для электромеханического момента основано на публикациях [23, 25], в которых предложена и проанализирована математическая модель, включающая уравнение изменения тока в локальной цепи генератора.

Перейдем к безразмерному времени  $\tau = r^{-1}Vt$  и безразмерным переменным:  $\omega_i = V^{-1}r\dot{\varphi}_i$ ,  $i = 1, 2$ , – безразмерные угловые скорости собственного вращения первого и второго роторов Дарье,  $\Omega = V^{-1}l\dot{\vartheta}$  – безразмерная угловая скорость центрального вала. До сих пор точкой обозначалась производная по времени  $t$ , далее точкой будем обозначать производную по безразмерному времени  $\tau$ .

Уравнения движения ветротурбины могут быть получены на основе формализма Лагранжа и представляются в форме динамической системы пятого порядка (можно сравнить с уравнениями [11, 12] для турбин с лопастями в виде роторов Савониуса):

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega_1, \\ \dot{\omega}_1 = a(1 + \Omega^2)C_T \left( \varphi_1 + \arctg \Omega, \frac{\omega_1}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \right), \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2, \\ \dot{\omega}_2 = a(1 + \Omega^2)C_T \left( \varphi_2 + \arctg \Omega, \frac{\omega_2}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \right), \\ \dot{\Omega} = b\sqrt{1 + \Omega^2} \sum_{i=1}^2 \left( C_L \left( \varphi_i + \arctg \Omega, \frac{\omega_i}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \right) - \Omega C_D \left( \varphi_i + \arctg \Omega, \frac{\omega_i}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \right) \right) - bk\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$a = \frac{3\rho S r^3}{2J_C} > 0, \quad b = \frac{3\rho S l^2 r}{2J} > 0, \quad k = \frac{2\kappa^2}{3(R + \sigma)V\rho S l^2} > 0.$$

$$\alpha_{is} = \beta + \arctg\left(\frac{u_{is}}{w_{is}}\right) + 0.5\pi(1 - \operatorname{sgn}(w_{is})), \quad u_{is} = \cos\left(\gamma_i + \frac{2\pi}{3}s\right), \quad w_{is} = \frac{\omega_i}{\sqrt{1 + \Omega^2}} + \sin\left(\gamma_i + \frac{2\pi}{3}s\right),$$

$$\gamma_i = \varphi_i + \arctg(\Omega), \quad \psi_{is} = \alpha_{is} - \beta + \gamma_i + \frac{2\pi}{3}s,$$

$$C_T\left(\gamma_i, \frac{\omega_i}{\sqrt{1 + \Omega^2}}\right) = \frac{1}{3} \sum_{s=1}^3 \sqrt{u_{is}^2 + w_{is}^2} (C_l(\alpha_{is})u_{is} - C_d(\alpha_{is})w_{is}),$$

$$C_L\left(\gamma_i, \frac{\omega_i}{\sqrt{1 + \Omega^2}}\right) = \frac{1}{3} \sum_{s=1}^3 (u_{is}^2 + w_{is}^2) (C_l(\alpha_{is}) \sin \psi_{is} - C_d(\alpha_{is}) \cos \psi_{is}),$$

$$C_D\left(\gamma_i, \frac{\omega_i}{\sqrt{1 + \Omega^2}}\right) = \frac{1}{3} \sum_{s=1}^3 (u_{is}^2 + w_{is}^2) (C_l(\alpha_{is}) \cos \psi_{is} + C_d(\alpha_{is}) \sin \psi_{is}).$$

Подсистемы, описывающие собственное вращение каждого из двух роторов Дарье, связаны друг с другом только через угловую скорость  $\Omega$  центрального вала. Роторы Дарье непосредственно друг с другом не взаимодействуют.

Следует отметить, что идентичность двух роторов Дарье (как и уравнений для  $\varphi_i, \omega_i$ ), входящих в состав системы, наводит на мысль, что вполне достаточно рассматривать динамику одного из роторов, а не обоих. Однако для ротора Дарье характерно наличие пары притягивающихся установившихся режимов (в отличие от ротора Савониуса, у которого такой режим единственен). Поэтому вполне возможна ситуация, когда в зависимости, например, от начальных условий один из роторов Дарье будет вращаться с высокой угловой скоростью, а другой — с низкой. Так что рассмотрение системы пятого порядка (а не третьего) существенно для выявления всех принципиально различных рабочих режимов устройства.

**4. Установившиеся рабочие режимы.** Рабочий режим ветроустановки представляет собой авторотацию по всем трем угловым координатам. Три обобщенные скорости на соответствующем решении системы могут совершать некоторые колебания около постоянных значений. Чем быстрее вращаются роторы Дарье, тем меньшее влияние успевают оказать изменение угла поворота каждого из роторов за оборот. Можно ожидать, что при высоких угловых скоростях роторов для практических приложений достаточно пользоваться уравнениями, усредненными по  $\varphi_i$ , что существенно упростит анализ. Однако при небольших угловых скоростях влияние углов существенно и колебания угловых скоростей на низкоскоростных рабочих режимах могут быть значительными.

Для поиска режимов авторотации воспользуемся методом, предложенным в работе [17], где он описан для системы четвертого порядка. Обобщение этого подхода на систему (3.1) вполне очевидно (поскольку одна из обобщенных координат циклическая). Вычисление средних значений функций, отвечающих за перевязки между подсистемами, выполняется аналогично модификации [16]. Детали процедуры изложены далее в приложении к системе (3.1). Суть приема состоит в том, чтобы заменить функции, отвечающие за перевязки, их средними значениями, найти аттракторы (предельные циклы или неподвижные точки) отделившихся друг от друга подсистем, определить и учесть условия, при которых найденные аттракторы и принятые средние значения перевязок согласованы между собой.

Отметим, что при малых значениях параметров  $a$  и  $b$  приближения для угловых скоростей на установившихся режимах будут близки к константам, которые соответствуют притягивающим неподвижным точкам системы, формально усредненной по двум углам. В этом предельном случае применяемый подход совпадает с поиском притягивающих неподвижных точек усредненных уравнений (в качестве приближения для аттракторов полной системы). Такая методика поиска начального приближения для аттракторов системы с медленными переменными (частотами) восходит к классическим подходам [32, 33] и применяется во многих задачах механики [34]. Можно отметить востребованность методов, использующих численное продолжение таких приближений по параметрам: существуют различные варианты, например [35, 36].

4.1. Вспомогательные системы для роторов Дарье. В соответствии с выбранным алгоритмом [17] на первом этапе поиска аттракторов системы (3.1) формально заменим пе-

ременную  $\Omega$  константой  $\bar{\Omega}$  и рассмотрим любую из подсистем для  $\varphi_i, \omega_i$ . Индекс  $i$  в этой вспомогательной системе опускаем:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\omega} = a(1 + \bar{\Omega}^2)C_T \left( \varphi + \arctg(\bar{\Omega}), \frac{\omega}{\sqrt{1 + \bar{\Omega}^2}} \right). \end{cases}$$

Заметим, что эту систему можно упростить: поскольку  $\bar{\Omega}$  в ней является константой, естественно сделать замену переменных и времени:  $\gamma = \varphi + \arctg(\bar{\Omega})$ ,  $z = \omega/\sqrt{1 + \bar{\Omega}^2}$ ,  $s = \tau\sqrt{1 + \bar{\Omega}^2}$ . В новых переменных получаем уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{ds} = z, \\ \frac{dz}{ds} = aC_T(\gamma, z). \end{cases} \quad (4.1)$$

Эта система представляет собой не что иное, как уравнения вращения ротора Дарье в однородном стационарном потоке (аналогично [22]).

Для системы (4.1), которая определена на цилиндре, находим предельные циклы, охватывающие фазовый цилиндр, т.е.  $2\pi$ -периодические по  $\gamma$ . Используем для этого итерационный численно-аналитический метод, предложенный в [37], основанный на построении последовательных приближений локальных порождающих гамильтоновых систем. Отметим, что в [37] содержится обзор различных классов методов, которые можно использовать для поиска таких предельных циклов. Для предварительной локализации циклов эффективны, например, методы [38, 39]. Отметим, что можно проследить эволюцию циклов от бифуркаций особых точек системы, применяя такие подходы, как [40] в сочетании с [41].

Система (4.1) в зависимости от параметра  $a$  обладает одним или тремя циклами (в вырожденном случае – двумя, один из которых полуустойчивый). При относительно небольших значениях  $a$  ( $a < a_{cr} \approx 16$ ) цикла три, те два из них, которые характеризуются наибольшими и наименьшими значениями фазовых скоростей, притягивающие. При  $a = a_{cr}$  два цикла, расположенные ниже на фазовом цилиндре, сливаются. Далее рассмотрим для определенности  $a = 1$ . Такое значение  $a$  с позиций физического смысла довольно велико и может соответствовать, например, работе гидротурбины в потоке воды; в воздухе характерные значения этого параметра на три порядка меньше, что делает очевидной успешность процедуры усреднения.

Функции, описывающие предельные циклы на фазовом цилиндре, обозначим  $\tilde{z}^j(\gamma)$ , где индекс  $j = 1, 2, 3$  соответствует нижнему (притягивающему), среднему (отталкивающему), верхнему (притягивающему) циклам. Значения  $z$  на том или ином цикле близки к значениям  $\lambda$ , отвечающим тому или иному корню функции  $C_T(\lambda)$  (рис. 3). Для каждой из трех траекторий  $\tilde{z}^j(\gamma)$  вычислим средние по времени за период значения  $\bar{C}_L^j$  и  $\bar{C}_D^j$  функций  $C_L(\gamma, z)$  и  $C_D(\gamma, z)$  вдоль этих траекторий. Приведем соответствующую формулу на примере  $\bar{C}_L^j$  (в общем случае отличается от среднего по углу  $\gamma$ ):

$$\bar{C}_L^j = \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{\tilde{z}^j(\gamma)} d\gamma \right)^{-1} \int_0^{2\pi} \frac{C_L(\varphi, \tilde{z}^j(\gamma))}{\tilde{z}^j(\gamma)} d\gamma.$$

Для авторотации ротора Дарье с низкой угловой скоростью получаем:  $\bar{C}_L^1 \approx 0.12$ ,  $\bar{C}_D^1 \approx 0.92$ ; для случая высокоскоростной авторотации:  $\bar{C}_L^3 \approx 2.29$ ,  $\bar{C}_D^3 \approx 7.16$ . Эти значения потребуются на следующем этапе алгоритма.

4.2. Вспомогательная система для скорости  $\Omega$  центрального вала. В уравнение системы (3.1), описывающее изменение переменной  $\Omega$ , подставим вместо функций  $C_L$  и  $C_D$  найденные величины  $\bar{C}_L^j$  и  $\bar{C}_D^j$ . Для двух различных  $i$  значения индекса  $j$  могут быть выбраны независимо. Рассмотрим сочетания, отвечающие притягивающим траекториям вспомогательных систем (4.1), т.е.  $j \neq 2$  (описание отталкивающих траекторий выходит за рамки данной работы, хотя оно тоже представляет интерес, например, для поиска элементов границ обла-

стей притяжения аттракторов, подобно работам [17, 19, 35, 36]). Подстановка констант  $\bar{C}_L^1, \bar{C}_D^1, \bar{C}_L^3, \bar{C}_D^3$  вместо функций  $C_L(\gamma_1, z_1), C_D(\gamma_1, z_1), C_L(\gamma_2, z_2), C_D(\gamma_2, z_2)$  соответствует тому, что первый ротор Дарье авторотирует с низкой скоростью, а второй – с высокой. Подстановка констант  $\bar{C}_L^1, \bar{C}_D^1$  для  $i = 1, 2$  отвечает низкоскоростному вращению обоих роторов Дарье. И, наконец, подстановка  $\bar{C}_L^3, \bar{C}_D^3$  для  $i = 1, 2$  – высокой скорости авторотации обоих роторов.

В результате подстановки получаем уравнение вида

$$\dot{\Omega} = b\sqrt{1 + \Omega^2}(\bar{C}_L^{j_1} - \Omega\bar{C}_D^{j_1} + \bar{C}_L^{j_2} - \Omega\bar{C}_D^{j_2}) - bk\Omega.$$

Здесь индексы  $j_1, j_2$  принимают значения 1 или 3.

Величина  $\Omega^*$  соответствует неподвижной точке этого уравнения, если

$$k = \sqrt{1 + \Omega^{*2}}(\bar{C}_L^{j_1} - \Omega^*\bar{C}_D^{j_1} + \bar{C}_L^{j_2} - \Omega^*\bar{C}_D^{j_2})/\Omega^*. \quad (4.2)$$

Для каждого  $k$  значение  $\Omega^*$  при заданных  $\bar{C}_L$  и  $\bar{C}_D$  единственно, неподвижная точка притягивающая. Физический смысл имеют значения  $k > 0$ , так что на практике диапазон значений  $\Omega^*$  ограничен.

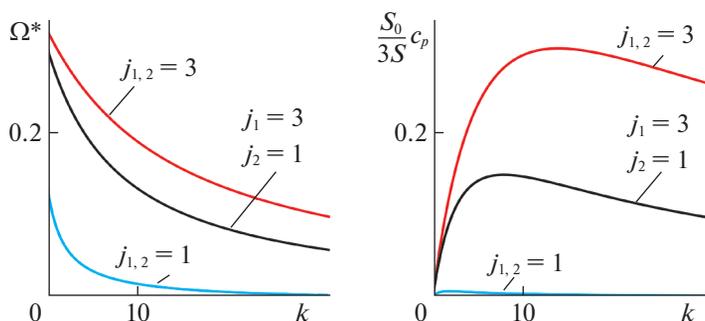
**4.3. Аттракторы полной динамической системы: приближения и численное исследование.** Приближенные значения безразмерной скорости вращения центрального вала на рабочих режимах описываются диаграммой, построенной по формулам вида (4.2) (рис. 4, а). При каждом значении  $k$  можно ожидать, что у горизонтально-осевой ветротурбины с лопастями в форме роторов Дарье есть три принципиально различных притягивающих рабочих режима: на одном из них оба ротора Дарье авторотируют с высокой скоростью (красная кривая на рис. 4), на другом – с низкой (синяя кривая), на третьем один из роторов вращается быстро, другой – медленно (черная кривая).

При достаточно большом моменте инерции  $J$  изменение переменной  $\Omega$  за один оборот вала не существенно. При этом можно предполагать, что построенные диаграммы хорошо описывают рабочие режимы. Однако, строго говоря, требуется, как минимум прямая численная проверка того, что в полной системе пятого порядка существует аттрактор, проекции которого на фазовые плоскости расположены вблизи построенных приближений (кривых  $\omega = \tilde{z}^j(\gamma)/\sqrt{1 + \Omega^{*2}}$  и прямой  $\Omega = \Omega^*$ ).

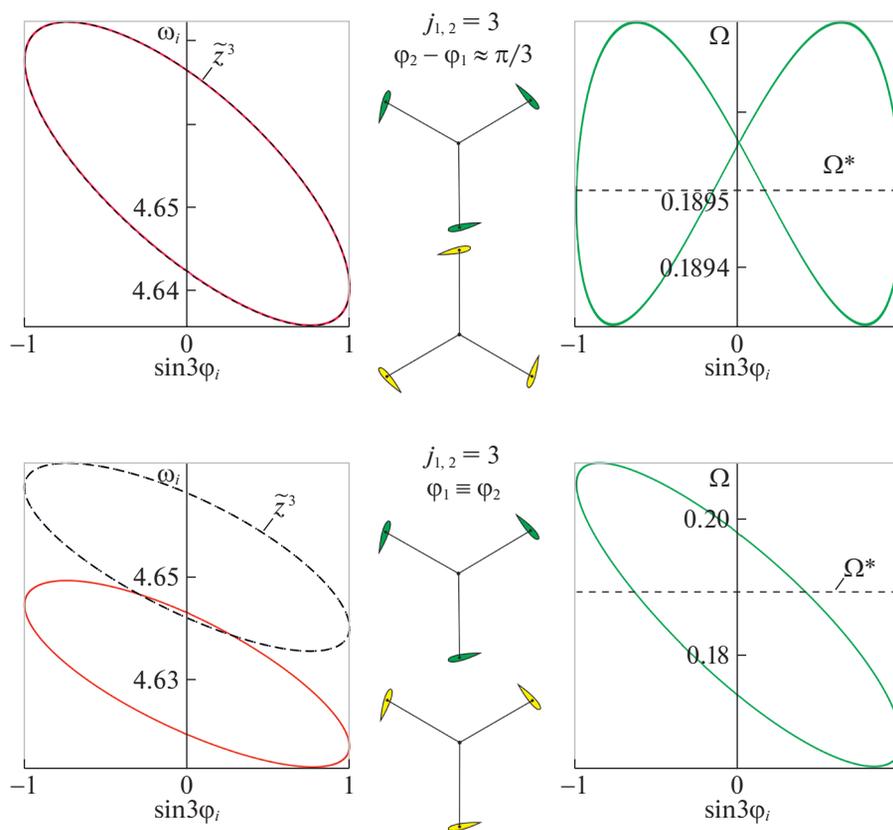
Для иллюстрации рассмотрим случай  $b = 0.1, k = 10$ . На рис. 5–7 черным пунктиром приведены построенные приближения для аттракторов полной системы, красным и зеленым цветом показаны проекции на фазовые плоскости траекторий, построенных путем прямого численного интегрирования уравнений (3.1) методом Рунге–Кутты. При этом начальные условия взяты из окрестностей трех приближений, построенных при данном  $k$ .

Для аттракторов, отвечающих авторотации обоих роторов Дарье с одинаковыми скоростями (рис. 5, б), средние угловые скорости  $d\varphi_1/dt = r^{-1}V\omega_1$  и  $d\varphi_2/dt = r^{-1}V\omega_2$  совпадают друг с другом, а угловая скорость  $d\vartheta/dt = l^{-1}V\Omega^*$ , вообще говоря, не соизмерима с ними, т.е. можно говорить о частичной синхронизации элементов системы. Однако при определенном выборе отношения  $l^{-1}r$  может быть реализована синхронизация по всем трем угловым скоростям.

При численном исследовании в окрестности приближения, отвечающего высокоскоростной авторотации обоих роторов Дарье, обнаружено два существенно различных инвариантных многообразия полной системы (рис. 5). Одно из них – это близкий к периодическому аттрактор, на котором  $\varphi_2 - \varphi_1 \approx \pi/3$  (соответственно существует и симметричный ему с  $\varphi_1 - \varphi_2 \approx \pi/3$ ). Проекция этого аттрактора на плоскость  $(\varphi_i, \omega_i)$  с большой точностью совпадает с приближением  $\tilde{z}^3(\gamma)$  (на рисунке визуально неотличимы). Второе – это периодическое решение, которое существует при  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ . В полной системе (3.1) оно неустойчиво, при искусственном ограничении вида  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ , т.е. в системе третьего порядка, оно притягивающее. Утверждать о наличии соответствующей траектории в полной системе можно в силу идентичности уравнений для двух роторов Дарье. При численном интегрировании полной системы (3.1) решение выходит в окрестность указанной траектории, только если  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0), \omega_1(0) = \omega_2(0)$ . При малейшем рассогласовании между начальными значениями углов собственного вращения или угловых скоростей двух



**Рис. 4.** Приближенные кривые, описывающие зависимость угловой скорости центрального вала и коэффициента мощности от коэффициента электрической нагрузки на рабочих режимах



**Рис. 5.** Сравнение траекторий, построенных прямым численным интегрированием полной системы, и приближений, полученных при анализе вспомогательных систем. Случай высокоскоростного режима

роторов Дарье траектория уходит на аттрактор, на котором разница между двумя углами  $\varphi_i$  близка к  $\pi/3$  (отклонение от  $\pi/3$  – в пределах 0.003). Заметим, что разница  $\pi/3$  между углами  $\varphi_i$  – это максимально возможное отличие в ориентации двух роторов Дарье, поскольку каждый из них трехлопастной.

На рис. 5 схематично изображено взаимное расположение лопастей роторов на двух различных режимах, если на каждый из роторов смотреть с конца его оси собственного вращения. В случае режима, на котором  $\varphi_2 - \varphi_1 \approx \pi/3$ , роторы движутся так, что фактически происходит дополнительное усреднение крутящего момента и сил по углу вращения. При этом сглаживаются колебания угловой скорости  $\Omega$  на обороте. Напротив, для режима, на котором  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ , колебания сил и моментов за оборот не уменьшаются по сравнению со случаем единственного ротора

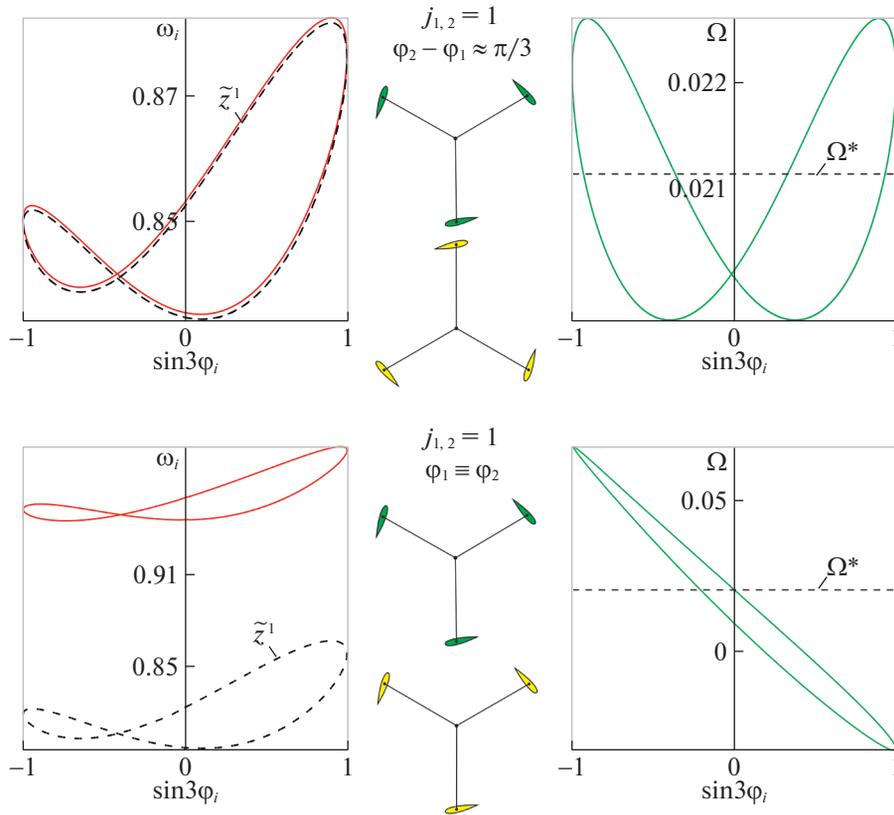


Рис. 6. Случай низкоскоростного режима (вариант с  $\varphi_2 - \varphi_1 \approx \pi/3$  получен при наличии дополнительного управления)

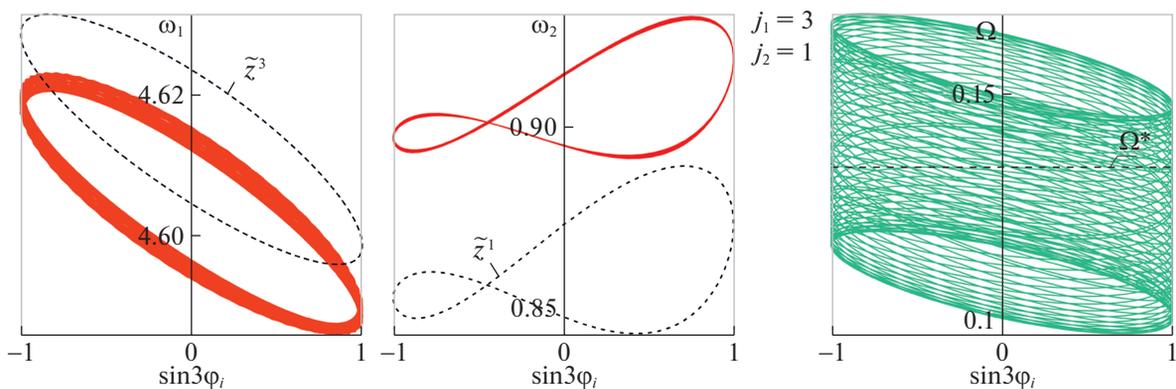


Рис. 7. Случай режима, не характеризующегося синхронизацией

Дарье, а возрастают. Колебания  $\Omega$  на каждом периоде при этом значительно заметнее. То, что высокоскоростной режим с  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$  неустойчив в полной системе и разница между углами  $\varphi_i$  устанавливается близкой к  $\pi/3$ , можно интерпретировать с физической точки зрения как самостоятельную подстройку системы, обеспечивающую “сглаживание” внешних воздействий и позволяющую “избегать” дополнительных колебаний.

Отметим, что если, исходя из идентичности лопастей, рассмотреть модель комбинированной турбины в форме системы третьего порядка, считая, что движения всех роторов Дарье идентичны, то в качестве основного рабочего режима будет получен режим, который в полной модели (в системе пятого порядка) неустойчив (высокоскоростной режим с  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ ), и не будет выявлен

рабочий режим, характеризующийся разницей  $\pi/3$  между углами собственного вращения двух роторов Дарье. Это еще один аргумент в пользу того, что существенно учитывать в модели динамику каждого ротора Дарье, а не одного из них, несмотря на их идентичность.

Иначе обстоит дело в окрестности приближения, отвечающего низкоскоростному вращению обоих роторов Дарье: “низкоскоростная” периодическая траектория с  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$  является притягивающей. Ее проекции показаны на рис. 6. Близкая к периодической траектория с  $\varphi_2 - \varphi_1 \approx \pi/3$  и  $\omega_i < 1$  если и существует, то она неустойчива. Обнаружить ее прямым интегрированием системы (3.1) не удастся. Силы и моменты, действующие на ротор Дарье, чувствительны к изменению угла  $\varphi_i$  на  $\pi/3$ . Так что идентичность роторов Дарье не приводит к наличию в системе решения с  $\varphi_2 - \varphi_1 \equiv \pi/3$ . Можно предположить (по аналогии с траекторией, где  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ , для высокоскоростного случая), что для стабилизации такого решения достаточно только регулировать разность между углами  $\varphi_i$ .

Для численной проверки существования такого решения можно применить метод [35, 36], но это весьма ресурсоемкий подход, выходящий за рамки данного исследования. Ограничимся попыткой стабилизировать решение, существование которого мы предполагаем. Добавим в правую часть уравнения для  $\dot{\omega}_1$  слагаемое вида  $-0.004(\varphi_1 + \pi/3 - \varphi_2)$  и аналогичное слагаемое в уравнение для  $\dot{\omega}_2$ . Тогда в окрестности приближения для низкоскоростного режима существует аттрактор, на котором разность  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  колеблется около  $\pi/3$  (отклонение от  $\pi/3$  – в пределах 0.015). Проекция аттрактора изображены на рис. 6. Их отличия от построенного приближения значительно меньше, чем у аттрактора с  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ . По-видимому, это связано с тем, что при таком взаимном расположении двух роторов Дарье силомоментные характеристики сглаживаются – становятся ближе к своим средним за оборот значениям.

Отметим, что на режиме, характеризующемся низкими скоростями вращения роторов Дарье и равенством углов  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ , переменная  $\Omega$  не остается все время положительной: на каждом периоде есть этап возвратного движения центрального вала турбины.

Наконец, рассмотрим третий тип рабочих режимов, на котором один ротор Дарье авторотирует с высокой скоростью, а другой – с низкой. В системе (3.1) этому режиму отвечает аттрактор, на котором средние значения фазовых скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  несоизмеримы друг с другом, т.е. синхронизации роторов Дарье не происходит. Соответствующая траектория не является периодической (рис. 7). Проекция аттрактора на фазовые плоскости представляют собой некоторые области (траектория постепенно заполняет эти области). В проекции на плоскость  $(\sin 3\varphi_1, \Omega)$  показан некоторый участок траектории, чтобы ее структура была более наглядна. В общем случае и величина  $l^{-1}r\Omega^*$  не соизмерима ни с одним из средних значений  $\omega_i$ . Однако за счет специального выбора отношения  $l^{-1}r$  можно синхронизировать скорость  $d\vartheta/dt$  вращения центрального вала с угловой скоростью того или иного ротора Дарье.

Рассмотренная система проявляет свойства частичной синхронизации элементов, что характерно для так называемых химерных состояний [20].

**5. Управление рабочими режимами.** Рассмотрим задачу выбора значения коэффициента  $k$  внешней электрической нагрузки, обеспечивающего близкую к максимальной механическую мощность на рабочем режиме ветротурбины. В системе имеет место дефицит управляющих воздействий [42]. Используем подход, примененный ранее в работах [12, 15]. Будем строить управление на основании проведенного выше анализа усредненных систем. Отметим, что разнообразные приемы, связанные с усреднением, в том числе достаточно нетривиальные подходы, востребованы в задачах теории управления, например [43].

Приближенные значения коэффициента  $c_p$  механической мощности на рабочих режимах описываются формулами следующего вида (рис. 4):

$$c_p = \frac{P}{P_0} = \frac{3S}{S_0} \Omega^* \sqrt{1 + \Omega^{*2}} (\bar{C}_L^{j_1} - \Omega^* \bar{C}_D^{j_1} + \bar{C}_L^{j_2} - \Omega^* \bar{C}_D^{j_2}). \quad (4.3)$$

Здесь  $P$  – механическая мощность турбины,  $P_0 = 0.5\rho S_0 V^3$  – мощность потока, проходящего через осевое сечение ветротурбины,  $S_0$  – площадь осевого сечения.

Максимальные значения коэффициента мощности достигаются на рабочем режиме, на котором оба ротора Дарье авторотируют с одинаковыми высокими скоростями. Абсолютный макси-

мум достигается на таком режиме при  $k \approx 15$ . Итак, стратегия управления состоит в том, чтобы при изменении условий функционирования ветроустановки поддерживать значение коэффициента  $k$  близким к найденному. Управление внешним сопротивлением  $R$ , которое обеспечивает, если возможно, желаемые значения  $k$ , обсуждается подробно в [12].

**Заключение.** В статье исследован вопрос о формировании силы, родственной силе Магнуса, при вращении ротора Дарье. Рассмотрена возможность применения роторов Дарье в качестве лопастей ветротурбины, работающей на основе эффекта Магнуса. Математическая модель такой энергетической установки представлена в форме автономной динамической системы пятого порядка. Эта система состоит из двух подсистем второго порядка, каждая из которых описывает собственное вращение одного из роторов Дарье, а также третьей подсистемы – уравнения первого порядка, описывающего вращение центрального вала основной турбины. Первые две подсистемы перевязаны друг с другом только посредством третьей. Для того чтобы приближенно описать аттракторы системы пятого порядка (отвечающие рабочим режимам ветротурбины), подсистемы формально отделяются друг от друга: вместо перевязок подставляются их усредненные значения (метод [17]). Проводится поиск аттракторов полученных таким образом вспомогательных подсистем второго и первого порядков. Затем найденные приближения используются для определения начальных условий, расположенных около аттракторов исходной системы пятого порядка. Выполняется численная проверка. Показано, что при значениях параметров модели, рассмотренные актуально для практических приложений, полученные приближения хорошо описывают аттракторы полной системы и могут быть использованы для оценки механической мощности на рабочих режимах устройства.

Отметим, что примененный алгоритм поиска аттракторов не чувствителен к тому, содержит ли область притяжения аттрактора окрестность хотя бы одной неподвижной точки или же аттрактор является скрытым (в смысле определения [44, 45]). Так, в рассмотренной задаче при достаточно малых значениях параметра  $a$  ни один из роторов Дарье не может без принудительного разгона перейти на высокоскоростной режим авторотации. Соответственно аттракторы, на которых хотя бы один из роторов Дарье авторотирует с высокой скоростью ( $\omega_i > \sqrt{1 + \Omega^2}$ ), являются скрытыми. Это касается, в частности, аттракторов, проекции которых на фазовые плоскости изображены на верхней части рис. 5 и на рис. 7.

Применение алгоритма [17] в данной задаче значительно упрощается тем, что вспомогательная подсистема второго порядка, описывающая собственное вращение ротора Дарье, после замены переменных не зависит от усредненного значения угловой скорости центрального вала составной турбины. Тем самым на промежуточном этапе анализа требуется найти предельные циклы только для системы второго порядка с фиксированными параметрами, нет необходимости в построении диаграммы циклов в зависимости от скорости центрального вала.

Для поиска аттракторов, соответствующих колебательным, а не ротационным движениям механической системы, при построении предельных циклов вспомогательных систем второго порядка можно использовать различные численно-аналитические алгоритмы, например итерационные методы [46, 47].

В результате применения алгоритма построены приближения для трех типов режимов: высокоскоростного (оба ротора Дарье вращаются с высокой скоростью), низкоскоростного, смешенного типа (только у одного из роторов Дарье скорость авторотации высокая).

В окрестности приближения, отвечающего высокоскоростной/низкоскоростной авторотации обоих роторов, обнаружен режим, который характеризуется идентичным движением двух роторов Дарье ( $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ ). В случае высоких скоростей такой режим неустойчив и из его окрестности система переходит на аттрактор, для которого разность между углами вращения роторов близка к  $\pi/3$  (напомним, что каждый ротор трехлопастной, т.е. его лопасти расположены с шагом  $2\pi/3$ ). В случае низких скоростей режим идентичного вращения притягивающий, предположительно низкоскоростной режим с близкой к  $\pi/3$  разницей между углами  $\varphi_i$  собственного вращения роторов Дарье тоже существует, но неустойчив (седлового типа).

Помимо этого обнаружен один режим в окрестности приближения, отвечающего высокоскоростной авторотации одного ротора и низкоскоростной другого. На нем скорости вращения двух роторов несоизмеримы.

Построено управление коэффициентом внешней электрической нагрузки, позволяющее реализовать режим, который характеризуется максимумом механической мощности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Swanson W.M.* The Magnus Effect: a Summary of Investigations to Date // *J. Basic Eng.* 1961. V. 83. № 3. P. 461–470.
2. *Tsuji Y., Morikawa Y., Mizuno O.* Experimental Measurement of the Magnus Force on a Rotating Sphere at Low Reynolds Numbers // *J. Fluids Eng.* 1985. V. 107. № 4. 484–488.
3. *Прандтль Л.* Эффект Магнуса и ветряной корабль // *Успехи физ. наук.* 1925. Т. 5. № 1. С. 1–27.
4. *Paraschivoiu I.* Wind Turbine Design: with Emphasis on Darrieus Concept. Monreal: Polytechnique International Pres., 2002.
5. *Seifert J.* A Review of the Magnus Effect in Aeronautics // *Progress in Aerospace Sciences.* 2012. V. 55. P. 17–45.
6. *Ragheb M.* Wind Energy Converters Concepts. Champaign, IL: University of Illinois at Urbana-Champaign, 2014.
7. <https://omnidea.net/aerial-platforms.html>.
8. *Moreira R.A.L.* Turbina Darrieus Numa Plataforma Aérea Por Efeito Magnus (Doctoral dissertation). Lisboa, 2017.
9. *Savonius S.J.* Rotor Adapted to be Driven by Wind or Flowing Water. U.S. Patent No. 1697574 A, 1929.
10. *Akira I., Kawashima S., Nishizawa Y., Ushiyama I., Komatinovic N.* A Study on Savonius Type Magnus Wind Turbine // *European Wind Energy Conf. and Exhibition.* 2007. [https://www.researchgate.net/publication/240627785\\_A\\_Study\\_on\\_Savonius\\_Type\\_Magnus\\_Wind\\_Turbine](https://www.researchgate.net/publication/240627785_A_Study_on_Savonius_Type_Magnus_Wind_Turbine).
11. *Ишханян М.В., Климина Л.А., Привалова О.Г.* Математическое моделирование ветротурбины, работающей на основе эффекта Магнуса // *Мехатроника, автоматизация, управление.* 2018. Т. 19. № 8. С. 523–528.
12. *Ишханян М.В., Климина Л.А.* Ветроустановка класса “Савониус–Магнус” с коническими лопастями: динамика и управление // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2020. № 4. С. 160–168.
13. *Климина Л.А., Шалимова Е.С., Досаев М.З., Селюцкий Ю.Д.* Двойная ветротурбина, работающая на основе эффекта Магнуса // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.* 2020. № 4. С. 65–69.
14. *Викторов М.С., Маринин О.О., Смык А.Ф.* Применение эффекта Магнуса в инфраструктуре дороги // *Автомобиль. Дорога. Инфраструктура.* 2019. Т. 19. № 1. С. 23.
15. *Досаев М.З., Климина Л.А., Шалимова Е.С.* Управление рабочими режимами шарнирной ветроустановки // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2021. № 1. С. 169–176.
16. *Климина Л.А.* Метод формирования асинхронных автоколебаний в управляемой механической системе с двумя степенями свободы // *ПММ.* 2021. № 2. С. 152–171.
17. *Климина Л.А.* Метод формирования авторотаций в управляемой механической системе с двумя степенями свободы // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2020. № 6. С. 3–14.
18. *Schilder F., Osinga H.M., Vogt W.* Continuation of Quasi-Periodic Invariant Tori // *SIAM J. Applied Dynamical Systems.* 2005. V. 4. № 3. P. 459–488.
19. *Климина Л.А., Мастерова А.А., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* Численно-аналитический метод поиска авторотаций механической системы с двумя вращательными степенями свободы // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 3. С. 128–142.
20. *Ashwin P., Burylko O.* Weak Chimeras in Minimal Networks of Coupled Phase Oscillators // *Chaos: An Interdisciplinary J. of Nonlinear Science.* 2015. V. 25. № 1. P. 013106.
21. *Кравец А.С.* Характеристики авиационных профилей. М.: Гос. изд. оборонной промышленности, 1939.
22. *Klimina L., Lokshin B., Samsonov V.* Parametrical Analysis of the Behavior of an Aerodynamic Pendulum with Vertical Axis of Rotation // *Modelling, Simulation and Control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems.* Dordrecht: Springer, 2009. P. 211–220.
23. *Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* О динамике малой ветроэлектростанции // *ДАН.* 2007. Т. 416. № 1. С. 50–53.
24. *Досаев М.З., Линь Ч.Х., Лю В.Л., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* Качественный анализ стационарных режимов малых ветровых электростанций // *ПММ.* 2009. Т. 73. № 3. С. 368–374.
25. *Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д., Вен-Лон Лю, Чин-Хуэй Линь.* Бифуркации режимов функционирования малых ветроэлектростанций и оптимизация их характеристик // *Изв. РАН. МТТ.* 2009. № 2. С. 59–66.
26. *Andronov P.R., Dosaev M.Z., Dynnikova G.Y., Selyutskii Y.D., Strelakov S.D.* Modeling of Oscillating Wind Turbine // *J. Machinery Manufacture and Reliability.* 2009. V. 38. № 4. P. 383–387.
27. *Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Dosaev M.Z.* Elastically Mounted Double Aerodynamic Pendulum // *Intern. J. Structural Stability and Dynamics.* 2019. V. 19. № 5. P. 1941007.
28. *Sheldahl R.E.* Comparison of Field and Wind-Tunnel Darrieus Wind-Turbine Data // *J. of Energy.* 1981. V. 5. № 4. P. 254–256.
29. *Paraschivoiu I.* Double-Multiple Streamtube Model for Darrieus Wind Turbines. NASA, Lewis Research Center Wind Turbine Dynamics, 1981. <https://ntrs.nasa.gov/citations/19820015811>.

30. *Castelli M.R., Englaro A., Benini E.* The Darrieus Wind Turbine: Proposal for a New Performance Prediction Model Based on CFD // *Energy*. 2011. V. 36. № 8. P. 4919–4934.
31. *Bach G.* Untersuchungen über Savonius-Rotoren und Verwandte Strömungsmaschinen // *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A*. 1931. B. 2. № 6. S. 218–231.
32. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 2-е изд. М.: Наука, 1974.
33. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971.
34. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // *Изв. РАН. МТТ*. 1982. № 3. С. 5–13.
35. *Kamiyama K., Komuro M., Endo T.* Bifurcation of Quasi-Periodic Oscillations in Mutually Coupled Hard-Type Oscillators: Demonstration of Unstable Quasi-Periodic Orbits // *Intern. J. Bifurcation and Chaos*. 2012. V. 22. № 6. P. 1230022.
36. *Kamiyama K., Komuro M., Endo T.* Algorithms for Obtaining a Saddle Torus Between two Attractors // *Intern. J. Bifurcation and Chaos*. 2013. V. 23. № 9. P. 1330032.
37. *Климина Л.А.* Метод построения периодических решений в управляемой динамической системе с цилиндрическим фазовым пространством // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2020. № 2. С. 5–16.
38. *Гринь А.А., Рудевич С.В.* Признак Дюлака–Черкаса для установления точного числа предельных циклов автономных систем на цилиндре // *Дифференц. уравнения*. 2019. Т. 55. № 3. С. 328–336.
39. *Гринь А.А.* Трансверсальные кривые для установления точного числа предельных циклов // *Дифференц. уравнения*. 2020. Т. 56. № 4. С. 427–437.
40. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 252 с.
41. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.
42. *Formalskii A.M.* Stabilization and Motion Control of Unstable Objects. Berlin/Boston: Walter de Gruyter, 2015.
43. *Aleksandrov A.Y., Tikhonov A.A.* Averaging Technique in the Problem of Lorentz Attitude Stabilization of an Earth-pointing Satellite // *Aerospace Science and Technology*. 2020. V. 104. P. 105963.
44. *Брагин В.О., Вагайцев В.И., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А.* Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана, Калмана и цепи Чуа // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2011. № 4. С. 3–36.
45. *Кузнецов Н.В.* Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2020. № 5. С. 5–27.
46. *Климина Л.А.* Метод поиска периодических траекторий центрально-симметричных динамических систем на плоскости // *Дифференц. уравнения*. 2019. Т. 55. № 2. С. 159–168.
47. *Климина Л.А., Селюцкий Ю.Д.* Метод построения периодических решений в управляемой динамической системе второго порядка // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2019. № 4. С. 3–15.

## РАСЧЕТНЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАРШРУТНЫХ КОРРЕСПОНДЕНЦИЙ ПАССАЖИРОПОТОКОВ ПРИ ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ ВХОДА И ВЫХОДА

© 2021 г. В. Н. Ембулаев

*Владивостокский государственный ун-т экономики и сервиса, Владивосток, Россия*

*e-mail: Vladimir.Embulaev@vvsu.ru*

Поступила в редакцию 26.10.2020 г.

После доработки 24.03.2021 г.

Принята к публикации 31.05.2021 г.

При разработке расчетного способа определения маршрутных корреспонденций пассажиропотоков по данным входа и выхода показано, что число пассажиров, совершающих поездку между двумя конкретными остановками, представляет собой дискретную случайную величину. Для каждого значения этой случайной величины ставится в соответствие ее вероятность. При этом в качестве определения числа проехавших пассажиров принимается то значение случайной величины, вероятность которого наибольшая.

DOI: 10.31857/S0002338821050073

**Введение.** Транспортная система крупного города относится к большим системам, поэтому с организацией пассажирских перевозок по маршрутам города всегда были проблемы [1, 2]. По мнению специалистов, данную проблему в крупных городах можно решить за счет наиболее рационального использования имеющихся в наличии и готовых к эксплуатации транспортных средств (ТС) на основе координированного управления работой всеми видами городского пассажирского транспорта [3, 4].

Анализ постановки и решения задачи координации в управлении транспортной системой крупного города показал, что при решении задач перспективного, текущего и оперативного управления вся информационная база делится на три основных массива: условно-постоянный (данные о маршрутной сети и о составе ТС), нормативный (экономические показатели) и переменный (данные о пассажиропотоках и на их основе определяемые количественные и качественные показатели работы транспортной системы) [5]. При этом отмечено, что основной проблемой при координированном управлении всей транспортной системой крупного города выступает знание информации о маршрутных корреспонденциях пассажиропотоков (МКП), которые различны по мощности на всех маршрутах города и меняются в течение суток на каждом из них, и потому требуется автоматизация и механизация ее получения.

Известно, что в целях автоматизации и механизации получения информации о МКП наиболее эффективным способом считается обработка данных входа  $a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и выхода  $b_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , пассажиров на каждом остановочном пункте (ОП) маршрута (где  $n$  – число ОП на маршруте) [6]. При этом к числу малоисследованных задач относится задача расчета информации о распределении пассажиропотоков по маршруту  $x_{ij}$ ,  $i \leq j$ , т.е. необходимо определить, сколько пассажиров проехало между двумя любыми остановками  $i$  и  $j$  по маршруту в течение одного рейса.

**1. Постановка задачи.** Для эффективного управления и организации пассажирских перевозок по маршрутам крупного города большое значение имеет наличие информации о МКП. Отсутствие такой информации практически заставило разработчиков найти способ ее определения в результате обработки данных входа и выхода пассажиров, фиксируемых во время пассажирообмена на каждом ОП маршрута.

Заметим, что когда происходит фиксация общих данных входа и выхода на каждом ОП маршрута, то для любого пассажира в отдельности информация о его пути следования никак не фиксируется. При этом остаются неизвестными и его мотивы выбора именно пути передвижения от  $i$  до  $j$  по маршруту, а значит, остаются неизвестными его ОП входа и выхода. Более того, его пе-

редвижение по маршруту никак не зависит от выбора пути следования другими пассажирами. Это позволяет считать, что поездка любого пассажира по маршруту есть процесс случайный и не зависит от выбора другими пассажирами своего пути следования. И так как для каждого пассажира в салоне ТС его ОП входа  $i$  и выхода  $j$  считаются неизвестными, то допустимо следующее предположение: для любого из них событие выйти на этом ОП или поехать дальше равновероятно.

Таким образом, решение задачи определения элементов маршрутных корреспонденций пассажиропотоков по данным входа-выхода требует вероятностной интерпретации.

Во время стоянки ТС на  $j$ -м ОП происходит пассажирообмен: из всех подъехавших с предыдущего ОП, которых обозначим через  $Q_{j-1}$ , вначале из салона выходит группа в количестве  $b_j$  пассажиров, а затем входит в салон группа из  $a_j$  пассажиров. При отправлении ТС от  $j$ -го ОП в салоне будет находиться  $Q_j$  пассажиров, число которых определяется по формуле

$$Q_j = (Q_{j-1} - b_j) + a_j = \sum_{r=1}^j (a_r - b_r).$$

Так как во время стоянки ТС на  $i$ -м ОП в салон вошло  $a_i$  пассажиров, то не исключено, что некоторые из них могут выйти на  $(i+1)$ -м ОП, что соответствует числу пассажиров, совершивших поездку от  $i$ -го до  $(i+1)$ -го ОП —  $x_{i,i+1}$ . И если это число вычесть из всех вошедших на  $i$ -м ОП, то получим оставшихся из  $a_i$  пассажиров, которые и продолжают свои поездки дальше по маршруту. Обозначим это число через  $a_{i,i+1}$ , которое вычисляется следующим образом:  $a_{i,i+1} = a_i - x_{i,i+1}$ .

По прибытии ТС на ОП  $(i+2)$  вместе с вышедшими ( $b_{i+2}$ ) могут выйти и те, которые вошли на  $i$ -м ОП, что соответствует числу пассажиров, совершивших поездки от  $i$ -го до  $(i+2)$ -го ОП на маршруте  $x_{i,i+2}$ . И если теперь это значение вычесть из  $a_{i,i+1}$ , то получим число пассажиров, которые вошли на  $i$ -м ОП и продолжили свой путь и после  $(i+2)$  ОП:

$$a_{i,i+2} = a_{i,i+1} - x_{i,i+2} = a_i - x_{i,i+1} - x_{i,i+2} = a_i - \sum_{r=i+1}^{i+2} x_{ir}$$

и т.д.

И в целом, для любых  $i$  и  $j$  данная величина вычисляется по формуле

$$a_{ij} = a_i - \sum_{r=i+1}^j x_{ir}.$$

Другими словами,  $a_{ij}$  — это число оставшихся пассажиров из всех вошедших на  $i$ -м ОП, которые продолжают свой путь по маршруту и после  $j$ -го ОП, и определяется вычитанием из  $a_i$  всех тех, которые уже проехали отрезки на маршруте от  $i$  до  $(i+1)$  ОП —  $x_{i,i+1}$ , от  $i$  до  $(i+2)$  ОП —  $x_{i,i+2}$ , ..., от  $i$  до  $(j-1)$  ОП —  $x_{i,j-1}$ .

В перевозочном процессе по маршруту, когда на  $j$ -м ОП стояло ТС, то внутри салона находилось  $Q_{j-1}$  пассажиров, среди которых имелись и вошедшие на  $i$ -м ОП —  $a_{ij}$ . В результате пассажирообмена на ОП вместе с  $b_j$  могли выйти и те пассажиры, которые вошли в салон ТС на  $i$ -м ОП, т.е. из группы  $a_{ij}$ . В этом случае число  $x_{ij}$ , которое одновременно будет принадлежать  $a_{ij}$  и  $b_j$ , и является искомой величиной.

Если таким образом определить все поездки пассажиров между двумя любыми ОП на маршруте, то их можно отобразить в виде таблицы элементов маршрутных корреспонденций пассажиропотоков (табл. 1). При этом считается, что  $x_{ii} = 0$ , так как нет таких пассажиров, которые начинают и заканчивают свою поездку на  $i$ -м ОП, где  $n$  — число ОП на маршруте;  $a_i$  — число пассажиров, вошедших в ТС на  $i$ -м ОП;  $b_j$  — число пассажиров, вышедших из ТС на  $j$ -м ОП;  $x_{ij}$  — число корреспондирующих пассажиров от  $i$ -го до  $j$ -го ОП,  $i \leq j$ .

**Таблица 1.** Матрица элементов маршрутных корреспонденций пассажиропотоков

Номера ОП входа	Номера ОП выхода							Вошло в ТС
	1	2	3	4	5	...	<i>n</i>	
1	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{15}$	...	$x_{1n}$	$a_1$
2		$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{25}$	...	$x_{2n}$	$a_2$
3			$x_{33}$	$x_{34}$	$x_{35}$	...	$x_{3n}$	$a_3$
4				$x_{44}$	$x_{45}$	...	$x_{4n}$	$a_4$
5					$x_{55}$	...	$x_{5n}$	$a_5$
.						...	.	.
.						...	.	.
.						...	.	.
<i>n</i>							$x_{nn}$	$a_n$
Вышло	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	...	$b_n$	

Из табл. 1 видно, что математическая формализация постановки задачи определения  $x_{ij}$  по данным  $a_i$  и  $b_j$  заключается в следующем. Задана система линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=i}^n x_{ij} = a_i; \quad \sum_{i=1}^j x_{ij} = b_j; \quad x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.1)$$

причем

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n b_j \left( \text{или} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j x_{ij} \right). \quad (1.2)$$

Так как система (1.1) состоит из  $2n$  уравнений с  $n(n+1)/2$  неизвестными, то единственное решение существует, когда  $2n = n(n+1)/2$ . Следовательно, единственное решение возможно при  $n \leq 3$ , в то время как для  $n > 3$  существует, в принципе, бесчисленное множество решений. Потому без дополнительного предположения относительно распределения пассажирских потоков между ОП маршрута нельзя получить однозначного решения данной задачи.

**2. Вероятностный метод решения задачи.** Когда ТС стояло на  $j$ -м ОП, то в салоне находилось  $Q_{j-1}$  пассажиров, из которых вышло  $b_j$  человек. С учетом принятого предположения о том, что для каждого пассажира в салоне ТС событие выйти на этом ОП или поехать дальше считается равновероятным, то выход любой группы пассажиров из ТС в количестве  $b_j$  человек из всех подъехавших – равновозможное и несовместное событие. Общее число таких групп в различных комбинациях равно числу сочетаний из  $Q_{j-1}$  по  $b_j$ , т.е.  $C_{Q_{j-1}}^{b_j}$ .

Всех подъехавших пассажиров к  $j$ -му ОП ( $Q_{j-1}$ ) условно можно разбить на две группы: одна группа состоит из тех пассажиров, которые вошли в салон ТС на  $i$ -м ОП и не вышли ранее  $j$ -го ОП ( $a_{ij}$ ), а вторая группа – все остальные ( $Q_{j-1} - a_{ij}$ ). Так как на  $j$ -м ОП вышло  $b_j$  человек, то среди них могут оказаться и те, которые принадлежат группе  $a_{ij}$ . Обозначим их через  $\lambda_{ij}$ . Очевидно, что  $\lambda_{ij}$  – случайная величина, которая принимает целочисленные значения. И группу  $\lambda_{ij}$  человек из  $a_{ij}$  можно выбрать  $C_{a_{ij}}^{\lambda_{ij}}$  способами в различных комбинациях. Но для каждой определенной группы  $\lambda_{ij}$  остальных пассажиров ( $b_j - \lambda_{ij}$ ) при этом также можно выбрать  $C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}}$  различными способами. И тогда общее число благоприятствующих случаев будет равно  $C_{a_{ij}}^{\lambda_{ij}} C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}}$ .

**Таблица 2.** Соответствие между значениями случайной величины и их вероятностями

Значения $\lambda_{ij}$	0	1	2	...	$k$
Вероятности	$p_0$	$p_1$	$p_2$	...	$p_k$

Согласно классической формуле определения вероятности события, что между остановками  $i$  и  $j$  совершат поездки  $\lambda_{ij}$  человек, на основании выше изложенного нетрудно вычислить вероятность того, что среди вышедших  $b_j$  пассажиров группе  $a_{ij}$  будет принадлежать ровно  $\lambda_{ij}$  человек [7]:

$$P_{b_j}(\lambda_{ij}) = \frac{C_{a_{ij}}^{\lambda_{ij}} C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}}}{C_{Q_{j-1}}^{b_j}}. \quad (2.1)$$

При данном описании задачи возможны два случая:  $a_{ij} \geq b_j$  и  $a_{ij} \leq b_j$ .

При  $a_{ij} \geq b_j$  случайная величина  $\lambda_{ij}$  может принимать целочисленные значения от 0 до  $b_j$ , а при  $a_{ij} \leq b_j$  – от 0 до  $a_{ij}$ . В общем случае она может принимать значения на отрезке

$$0 \leq \lambda_{ij} \leq \min[a_{ij}, b_j]. \quad (2.2)$$

Итак, при решении задачи (1.1)–(1.2) случайная величина поездок пассажиров ( $\lambda_{ij}$ ) между конкретными ОП  $i$  и  $j$  на маршруте может принимать целые неотрицательные значения только на отрезке (2.2). Любое число вне этого отрезка не может быть принято в качестве решения задачи (1.1)–(1.2).

По сути своей случайная величина  $\lambda_{ij}$  является дискретной величиной, которая может принимать любое целочисленное значение на отрезке (2.2). Для каждого значения ставится в соответствие вероятность, которая определяется по формуле (2.1). Полученное соответствие отобразим в виде табл. 2, где  $k = \min[a_{ij}, b_j]$ , а вероятности  $p_l$ ,  $l = 0, k$ , определяются по формуле (2.1) для конкретного значения  $\lambda_{ij}$ .

В этом случае из всех целых чисел  $\lambda_{ij}$  на отрезке (2.2) в качестве единственной искомой величины можно принять то значение, для которой вероятность достигает своего максимального значения по аргументу  $\lambda_{ij}$ :

$$x_{ij} = \operatorname{argmax} P_{b_j}(\lambda_{ij}).$$

Раз  $x_{ij}$  является наивероятнейшим значением для случайной величины  $\lambda_{ij}$ , то для двух рядом стоящих чисел  $(x_{ij} - 1)$  и  $(x_{ij} + 1)$  должны выполняться неравенства [7]:

$$P_{b_j}(x_{ij} - 1)/P_{b_j}(x_{ij}) \leq 1 \quad \text{и} \quad P_{b_j}(x_{ij})/P_{b_j}(x_{ij} + 1) \geq 1.$$

Раскрывая эти неравенства, приходим к выражениям:

$$\frac{P_{b_j}(x_{ij} - 1)}{P_{b_j}(x_{ij})} = \frac{x_{ij}(Q_{j-1} - a_{ij} - b_j + x_{ij})}{(a_{ij} - x_{ij} + 1)(b_j - x_{ij} + 1)} \leq 1,$$

$$\frac{P_{b_j}(x_{ij})}{P_{b_j}(x_{ij} + 1)} = \frac{(x_{ij} + 1)(Q_{j-1} - a_{ij} - b_j + x_{ij} + 1)}{(a_{ij} - x_{ij})(b_j - x_{ij})} \geq 1.$$

Решение же этих неравенств относительно  $x_{ij}$  приводит к результату:

$$\frac{(a_{ij} + 1)(b_j + 1)}{Q_{j-1} + 2} - 1 \leq x_{ij} \leq \frac{(a_{ij} + 1)(b_j + 1)}{Q_{j-1} + 2}.$$

Так как числа, получаемые при вычислениях по формулам  $(a_{ij} + 1)(b_j + 1)/(Q_{j-1} + 2)$  и  $a_{ij}b_j/Q_{j-1}$ , являются дробными, расположены на числовой оси между одними и теми же целыми

числами и разница между ними очень мала, при этом значения  $x_{ij}$  в качестве решения округляются до целого числа, то полученное выражение можно записать в виде

$$\frac{a_{ij}b_j}{Q_{j-1}} - 1 \leq x_{ij} \leq \frac{a_{ij}b_j}{Q_{j-1}}.$$

Из этого двойного неравенства следует, что формула определения  $x_{ij}$  имеет вид

$$x_{ij} = \frac{a_{ij}b_j}{Q_{j-1}}.$$

В данной формуле величины  $a_{ij}$  и  $Q_{j-1}$  имеют единственные значения,  $b_j$  является исходной величиной, поэтому для любых  $i$  и  $j$  значения  $x_{ij}$  также будут единственными. Следовательно, данная формула определения  $x_{ij}$  позволяет получать единственное решение поставленной задачи, которое можно отобразить в виде табл. 1.

Однако следует заметить, что при вычислении элементов  $x_{ij}$  в качестве единственного решения принимаются их округленные значения до целого, а это значит, что в некоторых строчках (или столбцах) таблицы их суммы могут не совпадать с исходными данными входа (или выхода). В целях сохранения баланса в каждой строчке и столбце таблицы предлагается следующий способ расчета. Если  $j = i$ , то  $x_{ij} = 0$ , и они в таблице расположены на главной диагонали. Если  $j = n$ , то элементы расположены в последнем столбце таблицы —  $x_{1,n}$ ,  $x_{2,n}$ ,  $x_{3,n}$ , ...,  $x_{n-1,n}$ . Тогда их вычисление осуществляется следующим образом: находят сумму всех элементов, например в  $i$ -й строке до искомого, а затем искомым находят как разницу между  $a_i$  и полученной суммой:

$$x_{in} = a_i - \sum_{r=i}^{n-1} x_{ir}.$$

Если  $j = i + 1$ , то элементы расположены первыми над диагональными в каждом столбце таблицы —  $x_{12}$ ,  $x_{23}$ ,  $x_{34}$ , ...,  $x_{n-1,n}$ . Тогда их вычисление осуществляется следующим образом: вначале находят сумму элементов, например в  $j$ -м столбце до искомого, а затем искомым находят как разницу между  $b_j$  и полученной суммой:

$$x_{ij} = b_j - \sum_{r=1}^{j-2} x_{rj}.$$

На основе изложенных уточнений предложена общая формула расчета поездок пассажиров по маршруту при решении задачи (1.1)–(1.2), которая имеет следующий вид:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j; \\ b_j - \sum_{r=1}^{j-2} x_{rj}, & \text{если } j = i + 1; \\ a_i - \sum_{r=i}^{j-1} x_{ir}, & \text{если } j = n; \\ \frac{a_{ij}b_j}{Q_{j-1}} & \text{при всех других } i \text{ и } j. \end{cases}$$

**Заключение.** Для проверки вычисления элементов  $x_{ij}$  по предложенной формуле использовали существующие таблицы маршрутных корреспонденций пассажиропотоков по рейсам и часам. Брали данные входа-выхода из имеющихся таблиц, на их основе получали расчетным способом значения элементов маршрутных корреспонденций пассажиропотоков, а затем сравнивали их с табличными.

Анализ результатов сравнения расчетных  $x_{ij}$  с имеющимися в таблицах элементами маршрутных корреспонденций пассажиропотоков показал, что отклонение колеблется в среднем: а) для рейсовых элементов  $x_{ij}$  в пределах 1.1–5.3 со средним значением 3.2%; б) для часовых элементов  $x_{ij}$  в пределах 5.8–11.6 со средним значением 8.7%. Это позволяет сделать следующий вывод:

точность вычисления элементов  $x_{ij}$  выше при небольших значениях данных входа и выхода, характеризующих слабые пассажиропотоки.

Важность этого вывода необходимо учитывать при разработке автоматизированной системы моделей и алгоритмов обработки материалов транспортных обследований. Например, технология фиксации данных входа-выхода позволяет вначале находить информацию о поездках пассажиров по каждому рейсу. Однако для решения задач текущего и перспективного планирования в основном необходима информация, детализированная по часам суток и за сутки в целом. В этом случае почасовые элементы  $x_{ij}$  можно определять двумя способами:

1) вначале суммировать данные входа-выхода каждого рейса по часовым интервалам, а затем с помощью расчета определять элементы  $x_{ij}$ ;

2) по данным входа-выхода каждого рейса вычислять элементы  $x_{ij}$ , а затем суммировать их по часовым интервалам.

Аналогично двумя способами можно получать суточные элементы  $x_{ij}$ .

Расчеты первым и вторым способами дают различные результаты, причем более точен второй способ. Это вытекает, во-первых, из вывода, что данные входа-выхода каждого рейса в отдельности характеризуют менее слабые пассажиропотоки в сравнении с почасовыми исходными данными, на основании которых определяются элементы  $x_{ij}$ . Во-вторых, второй способ дает наибольшую стабильность результатов в сравнении с первым, когда вычисление осуществляется при допущении о равной вероятности выхода на ОП любого из пассажиров независимо от рейса, которым он следует.

Кроме того, отсутствие баланса между данными входа-выхода в каждом часе (довольно часто случается так, что начало и конец поездки для пассажира попадают в разные часовые интервалы) также указывает на преимущество второго способа.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Якимов М.Р., Евсеев О.В. Математические модели в формировании эффективных транспортных систем // Транспорт Российской Федерации. 2019. № 1 (79). С. 56–60.
2. Андреев К.П., Терентьев В.В. Пассажирские перевозки и оптимизация городской маршрутной сети // Мир транспорта. 2017. № 2. С. 159–161.
3. Носов А.Л. Управление качеством работы городского пассажирского транспорта с использованием транспортной модели // Логистика сегодня. 2015. № 1. С. 38–47.
4. Фасхиев Х.А. Эффективный автобус для городских перевозок: как осуществлять выбор? // Логистика сегодня. 2017. № 4. С. 274–288.
5. Ембулаев В.Н., Дегтярёва О.Г., Белозерцева Н.П. Системный подход в теории и практике организации городских пассажирских перевозок. Владивосток: ВГУЭС, 2013.
6. Андреев К.П., Терентьев В.В., Кулик С.Н. Обследование пассажиропотоков на городских автобусных маршрутах // Новая наука: проблемы и перспективы. 2016. № 2. С. 159–161.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Юрайт, 2016.

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ  
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

УДК 519.85

**АНАЛИЗ РАВНОДОЛЕВОГО И УРАВНИТЕЛЬНОГО  
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ ПРИ МАКСИМАЛЬНОЙ ЗАГРУЗКЕ  
МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ СЕТИ**

© 2021 г. Ю. Е. Малашенко<sup>а</sup>, И. А. Назарова<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup> ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

\*e-mail: irina-nazar@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.01.2021 г.

После доработки 04.03.2021 г.

Принята к публикации 31.05.2021 г.

На примере модели многопользовательской сети связи рассматривается конечно-шаговый метод распределения межузловых потоков, которые могут одновременно передаваться между всеми парами узлов. Анализируются и сравниваются две стратегии получения допустимых распределений, позволяющие полностью использовать пропускную способность всех ребер сети. Вычислительные эксперименты проводились на моделях сетей с различными структурными особенностями. По результатам экспериментов делается вывод о том, что предложенный метод может применяться для оценки эффективности использования ресурсов сети, а также при разработке нормативных ограничений и диспетчерских правил.

DOI: 10.31857/S0002338821050140

**Введение.** Данная работа продолжает исследования, начатые в [1]. На математической модели многопользовательской сети связи анализируются две различные стратегии распределения равноправных невзаимозаменяемых потоков разных видов, передаваемых между всеми узлами. Целью управления является эффективное использование ресурсов сети и взаимно-допустимое распределение межузловых потоков разных видов, которые могут одновременно передаваться между всеми парами. При уравнительной стратегии для всех корреспондентов определяются равные квоты на предельно допустимые межузловые потоки, которые передаются в сети одновременно [2]. Равнодолевая стратегия распределения предполагает, что значение квоты для каждой пары источник–приемник должно быть прямо пропорционально максимально возможному однопродуктовому потоку между соответствующими узлами [3]. В основу вычислительных экспериментов была положена процедура, при выполнении которой за конечное число шагов определяется финальное распределение совместно допустимых межузловых потоков и достигается полная загрузка всех ребер сети. Предложенную процедуру можно применять как для априорной оценки предельных функциональных возможностей сети, так и для анализа их изменения при целенаправленных разрушающих воздействиях.

**1. Математическая модель.** Для описания многопользовательской сетевой системы используется математическая запись модели передачи многопродуктового (МП-) потока. Структура сети  $G(\mathbf{d})$  задается множествами  $\langle V, R, U \rangle$ : узлов (вершин) сети  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_N\}$ ; неориентированных ребер  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_E\} \subset V \times V$ . Ребро  $r_k = (v_{n_k}, v_{j_k})$  соединяет вершины  $v_{n_k}, v_{j_k}$  (инцидентно вершинам  $v_{n_k}, v_{j_k}$ ), которые для него служат концевыми. Предполагается, что в сети отсутствуют петли и сдвоенные ребра. Ребру  $r_k$  ставятся в соответствие две ориентированные дуги  $u_k, u_{k+E}$  прямого и обратного направления из множества ориентированных дуг  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_{2E}\}$ . Дуги  $\{u_k, u_{k+E}\}$  определяют направление передачи потока по ребру  $r_k$  между концевыми вершинами  $v_{n_k}, v_{j_k}$ .

Обозначим через  $S(v_n)$  множество номеров исходящих дуг, по которым поток покидает узел  $v_n$ ;  $T(v_n)$  – множество номеров входящих дуг, по которым поток поступает в узел  $v_n$ . Состав множеств  $S(v_n), T(v_n)$  однозначно определяется в ходе выполнения следующей процедуры. Пусть не-

которое ребро  $r_k \in R$  соединяет вершины с номерами  $n$  и  $j$ , такими, что  $n < j$ . Тогда ориентированная дуга  $u_k = (v_n, v_j)$  считается *исходящей* из вершины  $v_n$  и ее номер  $k$  заносится в множество  $S(v_n)$ , ориентированная дуга  $u_{k+E} = (v_j, v_n)$  – *входящей* для  $v_n$  и ее номер  $k + E$  помещается в список  $T(v_n)$ . Дуга  $u_k$  является *входящей* для  $v_j$  и ее номер  $k$  попадает в  $T(v_j)$ , а дуга  $u_{k+E}$  – *исходящей* и номер  $k + E$  вносится в список исходящих дуг  $S(v_j)$ .

Предполагается, что в сети между любой парой узлов могут передаваться потоки разных видов. Пара узлов-корреспондентов  $p_m$  определяется упорядоченной парой вершин  $p_m = (v_{s_m}, v_{t_m})$ , где вершина с номером  $s_m$  является источником, а с номером  $t_m$  – стоком или приемником потока  $m$ -го вида. В настоящей работе в сети из  $N$  узлов рассматривается  $M = N(N - 1)$  независимых, невзаимозаменяемых и равноправных потоков различных видов, которые могут передаваться одновременно между парами узлов из множества  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$ .

Пусть  $x_{mk}$  – величина потока  $m$ -го вида, который передается по дуге  $u_k$  в прямом, а  $x_{m(k+E)}$  – величина потока  $m$ -го вида, который передается по дуге  $u_{k+E}$  в обратном направлении,  $x_{mk} \geq 0$ ,  $x_{m(k+E)} \geq 0$ ,  $m = \overline{1, M}$ ,  $k = \overline{1, E}$ . Каждому ребру  $r_k \in R$  приписывается число  $d_k$ , ограничивающее суммарный предельно допустимый поток, который можно передать по ребру  $r_k$  в обоих направлениях. В исходной сети компоненты вектора пропускных способностей  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_E)$  – наперед заданные положительные числа,  $d_k > 0$ ,  $k = \overline{1, E}$ . Вектором  $\mathbf{d}$  определяются следующие ограничения на все потоки, передаваемые по ребру  $r_k$ :

$$\sum_{m=1}^M (x_{mk} + x_{m(k+E)}) \leq d_k, \quad x_{mk} \geq 0, \quad x_{m(k+E)} \geq 0, \quad k = \overline{1, E}. \quad (1.1)$$

Ограничения (1.1) задают множество векторов

$$\mathcal{X}(\mathbf{d}) = \{\mathbf{x} \geq 0 \mid \mathbf{x} \text{ удовлетворяют (1.1)}\}$$

с допустимыми значениями компонент дуговых потоков  $\mathbf{x} = (x_{mk}, x_{m(k+E)})$ ,  $m = \overline{1, M}$ ,  $k = \overline{1, E}$ , соответствующих (1.1).

Обозначим через  $z_m$  величину межузлового потока  $m$ -го вида, который поступает в сеть в узле с номером  $s_m$  и покидает из узла с номером  $t_m$ . Во всех узлах сети  $v_n \in V$ ,  $n = \overline{1, N}$ , для всех видов потоков должны выполняться условия сохранения потоков:

$$\sum_{i \in S(v_n)} x_{mi} - \sum_{i \in T(v_n)} x_{mi} = \begin{cases} z_m, & \text{если } v_n = v_{s_m}, \\ -z_m, & \text{если } v_n = v_{t_m}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$x_{mi} \geq 0, \quad z_m \geq 0, \quad m = \overline{1, M}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Величина  $z_m$  равна входному межузловому потоку  $m$ -го вида, который может быть пропущен от источника к приемнику пары  $p_m$  при распределении потоков  $x_{mi}$  по дугам сети.

Условия сохранения потоков в узлах сети (1.2) устанавливает взаимосвязь векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m, \dots, z_M)$ . Ограничения (1.1), (1.2) задают множество допустимых значений компонент для векторов межузловых потоков  $\mathbf{z}$ , принадлежащих множеству

$$\mathcal{Z}(\mathbf{d}) = \{(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{z} \geq 0, \mathbf{x} \geq 0, (\mathbf{z}, \mathbf{x}) \text{ удовлетворяют (1.1), (1.2)}\}. \quad (1.3)$$

**2. Равнодолевое распределение при предельной загрузке сети.** Рассмотрим итерационную процедуру распределения межузловых потоков, при одновременной передаче которых полностью используется пропускная способность всех ребер сети. Выполнение каждого шага разбивается на несколько этапов. На предварительном этапе каждого шага для некоторой пары узлов-корреспондентов  $p_a$ ,  $a = \overline{1, M}$ , определяется максимальный межузловой однопродуктовый поток [3], который можно передать независимо из вершины с номером  $s_a$  в вершину с номером  $t_a$  без учета всех остальных. В рамках рассматриваемой модели указанный способ называется *монопольным режимом* передачи потока для пары  $p_a$ .

На основе найденных максимальных значений для всех пар вычисляется предельно допустимое совместное распределение междуузловых потоков и находятся ребра, пропускная способность которых используется полностью. Для остальных ребер рассчитывается остаточная (неиспользованная) пропускная способность. На последующих шагах вновь решается задача поиска максимального междузлого однопродуктового потока, но для сети с остаточными пропускными способностями. Снова находится предельно допустимое совместное распределение потоков, а также ребра, пропускная способность которых исчерпана полностью. Таким образом за конечное число итераций, не превосходящее общего числа ребер сети, определяется финальное распределение, при котором сумма реберных потоков всех видов оказывается равна сумме пропускных способностей. Описанный метод называется PLD-процедурой (от английского peak load distribution – *распределение (потоков) при предельной загрузке (сети)*).

На первом этапе первого шага ( $t = 1$ ) для каждой пары  $p_a \in P$  решается следующая задача.

**Задача 1.** Для некоторой фиксированной пары  $p_a \in P$  найти

$$z_a^0(1) = \max_{(z, x) \in \mathcal{F}(d)} z_a$$

при дополнительных условиях:  $z_m = 0, m \neq a, m = \overline{1, M}$ .

Обозначим через  $(x_{ak}^0(1), x_{a(k+E)}^0(1)), k = \overline{1, E}$ , потоки по ребрам сети, соответствующие оптимальному решению  $z_a^0(1)$  задачи 1 – максимальному однопродуктовому междузловому потоку, который проходит по сети в монопольном режиме. Далее для краткости  $z_a^0(1)$  называется передаваемым в монопольном режиме максимальным (МРМ-) потоком для пары  $p_a$ . Последовательное решение задачи 1 для каждой пары  $p_m, p_m \in P$ , позволяет сформировать вектор междузловых МРМ-потоков  $\mathbf{z}^0(1) = (z_1^0(1), z_2^0(1), \dots, z_m^0(1), \dots, z_M^0(1))$  и вектор дуговых потоков  $\mathbf{x}^0(1) = (x_{mk}^0(1), x_{m(k+E)}^0(1)), m = \overline{1, M}, k = \overline{1, E}$ .

На следующем этапе первого шага  $\mathbf{z}^0(1), \mathbf{x}^0(1)$  рассматриваются как некоторые векторы *возможных* направлений [4] для поиска совместно допустимого распределения МП-потока, при котором достигается предельно возможная загрузка одного или нескольких ребер.

**Задача 2.** Найти  $\theta^{**}(1) = \max_{\theta}$

$$\text{при условиях: } \theta \sum_{m=1}^M [x_{mk}^0(1) + x_{m(k+E)}^0(1)] \leq d_k,$$

$$\theta \geq 0, \quad k = \overline{1, E},$$

$$\theta \sum_{i \in S(v_n)} x_{mi}^0(1) - \theta \sum_{i \in T(v_n)} x_{m(i+E)}^0(1) = \begin{cases} \theta z_m^0(1), & \text{если } v_n = v_{s_m}; \\ -\theta z_m^0(1), & \text{если } v_n = v_{t_m}, \end{cases}$$

$$n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}, \quad z_m^0(1) \geq 0.$$

Решение  $\theta^{**}(1)$  задачи 2 – максимальная доля МРМ-потока, равная для всех  $p_m \in P$ . На основе  $\theta^{**}(1)$  вычисляются допустимые значения  $z_m^{**}(1) = \theta^{**}(1) z_m^0(1), m = \overline{1, M}$ , равнодолевых квот на одновременную передачу потоков для всех пар источник–приемник  $p_m \in P$  и дуговые потоки  $x_{mk}^{**}(1) = \theta^{**}(1) x_{mk}^0(1), x_{m(k+E)}^{**}(1) = \theta^{**}(1) x_{m(k+E)}^0(1), m = \overline{1, M}, k = \overline{1, E}$ . С формальной точки зрения  $\theta^{**}(1)$  – длина шага по *возможному* направлению  $\mathbf{z}^0(1), \mathbf{x}^0(1)$ .

В рамках рассматриваемой модели отношение  $z_m^{**}(1)/z_m^0(1) = \theta^{**}(1)$  показывает, какую долю от МРМ-потока составляет выделенная квота  $z_m^{**}(1)$ . Поскольку по построению единственное оптимальное значение  $\theta^{**}(1)$  одинаково для всех пар  $p_m \in P$ , то указанное распределение называется *равнодолевым* распределением квот при одновременной передаче междузловых потоков для всех пар  $p_m \in P$ .

Для всех ребер сети определяется остаточная пропускная способность

$$d_k(2) = d_k - \sum_{m=1}^M [x_{mk}^{**}(1) + x_{m(k+E)}^{**}(1)], \quad k = \overline{1, E}.$$

На первом этапе второго шага ( $t = 2$ ) для вектора  $\mathbf{d}(2)$  и каждой пары  $p_a \in P$  последовательно решается цепочка задач, аналогичных задаче 1.

**Задача 3.** Для некоторой фиксированной пары узлов  $p_a$  найти

$$z_a^0(2) = \max_{(z, x) \in \mathcal{Z}(\mathbf{d}(2))} z_a$$

при условиях:  $z_m = 0, m \neq a, m = \overline{1, M}$ .

Оптимальному решению задачи 3 (текущему МРМ-поток  $z_a^0(2)$ ) соответствует распределение потоков по ребрам сети  $(x_{ak}^0(2), x_{a(k+E)}^0(2)), p_a \in P, k = \overline{1, E}$ . Исходя из решения задачи 3 для всех  $p_m \in P$  вычисляются коэффициенты

$$\beta_m^0(2) = \begin{cases} z_m^0(1)/z_m^0(2), & \text{если } z_m^0(2) > 0; \\ 0, & \text{если } z_m^0(2) = 0. \end{cases}$$

На втором этапе второго шага формулируется задача поиска “узкого места” в сети с заданными остаточными пропускными способностями  $d_k(2), k = \overline{1, E}$ , для определения максимально допустимого равнодолевого распределения квот.

**Задача 4.** Найти  $\theta^{**}(2) = \max_{\theta} \theta$

$$\text{при условиях: } \theta \sum_{m=1}^M \beta_m^0(2) [x_{mk}^0(2) + x_{m(k+E)}^0(2)] \leq d_k(2), \\ \theta \geq 0, \quad k = \overline{1, E}.$$

На основании найденного решения  $\theta^{**}(2)$  задачи 4 определяются результирующие межузловые потоки:

$$z_m^{**}(2) = \begin{cases} z_m^{**}(1) + \theta^{**}(2) \beta_m^0(2) z_m^0(2), & \text{если } z_m^0(2) > 0; \\ z_m^{**}(1), & \text{если } z_m^0(2) = 0, \end{cases}$$

$$x_{mk}^{**}(2) = x_{mk}^{**}(1) + \theta^{**}(2) \beta_m^0(2) x_{mk}^0(2),$$

$$x_{m(k+E)}^{**}(2) = x_{m(k+E)}^{**}(1) + \theta^{**}(2) \beta_m^0(2) x_{m(k+E)}^0(2), \quad k = \overline{1, E}, \quad m = \overline{1, M},$$

и для всех ребер сети вычисляется остаточная пропускная способность

$$d_k(3) = d_k(2) - \theta^{**}(2) \sum_{m=1}^M \beta_m^0(2) [x_{mk}^0(2) + x_{m(k+E)}^0(2)], \quad k = \overline{1, E}.$$

На заключительном этапе текущего шага  $t, t = \overline{2, T}, T \leq E$ , осуществляется проверка условий:

– если после завершения очередного шага  $t$  окажется, что хотя бы для одного  $r_k \in R$  величина остаточной пропускной способности  $d_k(t+1) > 0$ , то переходим к шагу  $t := t + 1$ ;

– если же  $d_k(t+1) = 0$  для всех  $k = \overline{1, E}$ , то происходит останов, поскольку все пропускные способности сети полностью исчерпаны.

В ходе выполнения PLD-процедуры при равнодолевом распределении квот межузловых потоков на каждом шаге и предельной загрузке сети формируется финальный вектор распределения межузловых потоков  $\mathbf{z}^{**}(T)$ . Далее вектор  $\mathbf{z}^{**}(T)$  будем называть PLES-поток (от английского peak load equal share – *предельная загрузка (сети) при равнодолевом распределении*).

**3. Уравнительное распределение потоков.** При проведении PLD-процедуры допускается использование различных правил распределения межузловых потоков. Ниже рассматривается *уравнительная* стратегия распределения, при которой на каждом текущем шаге всем парам уз-

лов-корреспондентов выделяются равные квоты на предельно допустимые потоки, которые могут передаваться по сети одновременно.

На первом этапе первого шага ( $t = 1$ ) для всех  $p_m \in P$  решается цепочка задач 1 и определяется МРМ-вектор

$$z^0(1) = (z_1^0(1), z_2^0(1), \dots, z_m^0(1), \dots, z_M^0(1)),$$

вектор дуговых потоков  $x^0(1) = (x_{mk}^0(1), x_{m(k+E)}^0(1)), m = \overline{1, M}, k = \overline{1, E}$ , и вычисляются коэффициенты

$$\omega_m^0(1) = \frac{1}{z_m^0(1)}, \quad z_m^0(1) \neq 0, \quad m = \overline{1, M}.$$

На втором этапе первого шага формулируется задача поиска равных предельных квот на передачу потоков между всеми парами  $p_m \in P$  и “узкого места” – ребер, пропускная способность которых при соответствующем распределении окажется полностью исчерпана.

Задача 5. Найти  $\alpha^*(1) = \max_{\alpha}$

$$\text{при условиях: } \alpha \sum_{m=1}^M \omega_m^0(1) [x_{mk}^0(1) + x_{m(k+E)}^0(1)] \leq d_k,$$

$$\alpha \geq 0, \quad k = \overline{1, E},$$

$$\alpha \sum_{i \in S(v_n)} \omega_m^0(1) x_{mi}^0(1) - \alpha \sum_{i \in T(v_n)} \omega_m^0(1) x_{m(i+E)}^0(1) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } v_n = v_{s_m}; \\ -\alpha, & \text{если } v_n = v_{t_m}, \end{cases}$$

$$n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Решение задачи 5 – предельно допустимое значение (равное для всех) межузловых потоков  $z_m^*(1) = \alpha^*(1)$ , которые могут передаваться одновременно между всеми парами узлов-корреспондентов  $p_m, m = \overline{1, M}$ . Соответствующие компоненты вектора дуговых потоков  $x^*(1) = \alpha^*(1)x^0(1)$  равны  $x_{mk}^*(1) = \alpha^*(1)\omega_m^0(1)x_{mk}^0(1)$ ,  $x_{m(k+E)}^*(1) = \alpha^*(1)\omega_m^0(1)x_{m(k+E)}^0(1)$ ,  $m = \overline{1, M}, k = \overline{1, E}$ , и определяют допустимое *уравнительное* распределение дуговых потоков по ребрам сети. Для всех ребер сети вычисляется остаточная пропускная способность

$$d_k(2) = d_k - \sum_{m=1}^M [x_{mk}^*(1) + x_{m(k+E)}^*(1)], \quad k = \overline{1, E}.$$

На первом этапе второго шага ( $t = 2$ ) для полученного вектора *остаточных* пропускных способностей  $d_k(2)$  и для каждой пары  $p_a \in P$  последовательно решается цепочка следующих задач, аналогичных задаче 1.

Задача 6. Для некоторой фиксированной пары узлов  $p_a$  найти

$$z_a^0(2) = \max_{(z, x) \in \mathcal{D}(d(2))} z_a$$

$$\text{при условиях: } z_m = 0, \quad m \neq a, \quad m = \overline{1, M}.$$

Оптимальному решению задачи 6 (МРМ-потоку  $z_a^0(2)$ ) соответствует распределение потоков по дугам сети  $(x_{ak}^0(2), x_{a(k+E)}^0(2)), k = \overline{1, E}$ .

После решения цепочки задач 6 для всех  $p_m, m = \overline{1, M}$ , вычисляются коэффициенты

$$\omega_m^0(2) = \begin{cases} \frac{1}{z_m^0(2)}, & \text{если } z_m^0(2) > 0; \\ 0, & \text{если } z_m^0(2) = 0. \end{cases}$$

На втором этапе второго шага формулируется задача определения “узкого места” в сети с заданными остаточными пропускными способностями  $d_k(2)$  при поиске максимальных равных квот на совместную передачу предельно допустимых потоков между всеми парами узлов-корреспондентов.

Задача 7. Найти  $\alpha^*(2) = \max_{\alpha}$

$$\text{при условиях: } \alpha \sum_{m=1}^M \omega_m^0(2) [x_{mk}^0(2) + x_{m(k+E)}^0(2)] \leq d_k(2),$$

$$\alpha \geq 0, \quad k = \overline{1, E}.$$

Решение задачи 7 (квота  $\alpha^*(2)$ ) определяет значение предельно допустимых межузловых потоков в сети  $G(d(2))$  при фиксированных значениях компонент вектора  $\mathbf{z}^*(1)$ . На основании  $\alpha^*(2)$  на шаге  $t = 2$  вычисляются результирующие межузловые потоки для всех пар  $p_m \in P$ :

$$z_m^*(2) = \begin{cases} z_m^*(1) + \alpha^*(2), & \text{если } z_m^0(2) > 0; \\ z_m^*(1), & \text{если } z_m^0(2) = 0, \end{cases}$$

и соответствующие дуговые потоки для  $k = \overline{1, E}, m = \overline{1, M}$ :

$$x_{mk}^*(2) = x_{mk}^*(1) + \alpha^*(2) \omega_m^0(2) x_{mk}^0(2),$$

$$x_{m(k+E)}^*(2) = x_{m(k+E)}^*(1) + \alpha^*(2) \omega_m^0(2) x_{m(k+E)}^0(2).$$

Подсчитывается остаточная пропускная способность для  $k = \overline{1, E}$ :

$$d_k(3) = d_k - \sum_{m=1}^M [x_{mk}^*(2) + x_{m(k+E)}^*(2)] = d_k(2) - \alpha^*(2) \sum_{m=1}^M \omega_m^0(2) [x_{mk}^0(2) + x_{m(k+E)}^0(2)].$$

На заключительном этапе текущего шага  $t, t = \overline{2, T}, T \leq E$ , осуществляется проверка условий:

– если после завершения очередного шага  $t$  окажется, что хотя бы для одного  $r_k \in R$  величина остаточной пропускной способности  $d_k(t+1) > 0$ , то переходим к шагу  $t := t + 1$ ;

– если же  $d_k(t+1) = 0$  для всех  $k = \overline{1, E}$ , то происходит останов, поскольку все пропускные способности сети полностью исчерпаны.

Далее финальный вектор  $\mathbf{z}^*(T)$  допустимых межузловых потоков, которые можно одновременно передать между всеми парами узлов-корреспондентов, называется PLED-поток (от английского peak load equalitarian distribution – предельная загрузка (сети) при уравнительном распределении). Результирующие значения компонент PLED-потока  $z_m^*(T), m = \overline{1, M}$ , определяются в ходе PLD-процедуры при пошаговом уравнительном распределении равных для всех пар  $p_m \in P$  максимально допустимых квот на передачу потоков.

**4. Вычислительный эксперимент.** Вычислительные эксперименты с использованием PLD-процедуры проводились на моделях сетевых систем, представленных на рис. 1 (слева – базовая сеть, справа – кольцевая). В каждой сети имеется 69 узлов. Пропускные способности ребер – значения  $d_k$ , выбирались случайным образом из отрезка [900, 999] и совпадали для ребер, присутствующих в обеих сетях. В кольцевой сети пропускная способность каждого из добавленных ребер равна 900.

На рис. 2–5 тонкой линией указаны значения межузловых потоков  $z_m^{**}(1), z_m^{**}(T)$ , полученные с использованием равнодолевого правила распределения, а жирной отмечены значения  $z_m^*(1), z_m^*(T)$ , вычисленные для уравнительной стратегии. На диаграммах рис. 2–5 по вертикальной оси откладываются значения потоков (компонент векторов  $\mathbf{z}^*(1), \mathbf{z}^*(T), \mathbf{z}^{**}(1)$  и  $\mathbf{z}^{**}(T)$ ), упорядоченные по убыванию (не возрастанию). В соответствии с указанным порядком следования произведена перенумерация:

$$z_{i-1}^*(T) \geq z_i^*(T) \geq z_{i+1}^*(T), \quad i = \overline{2, M-1},$$

$$z_{j-1}^{**}(T) \geq z_j^{**}(T) \geq z_{j+1}^{**}(T), \quad j = \overline{2, M-1}.$$

Для новых номеров пар узлов в упорядоченной последовательности вычисляются значения

$$\pi(i) = \frac{i}{M}, \quad i = \overline{1, M},$$

которые откладываются по горизонтальной оси.

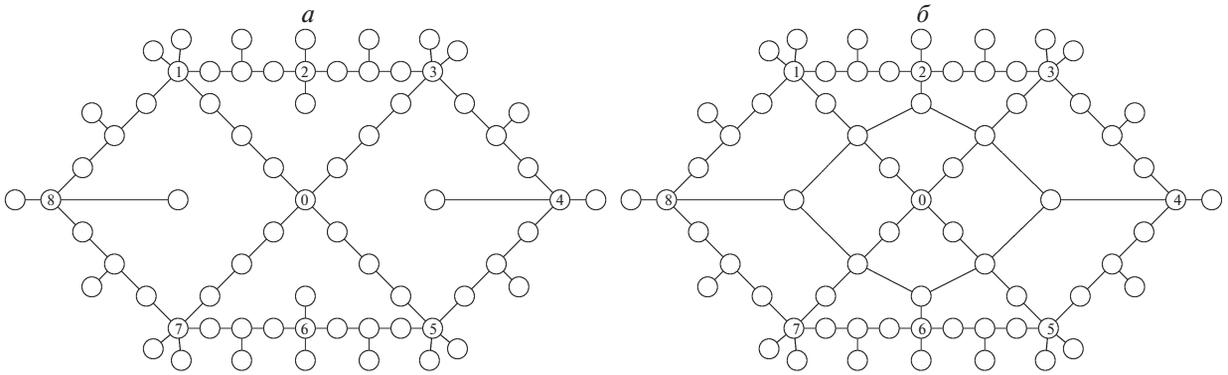


Рис. 1. Базовая и кольцевая сети

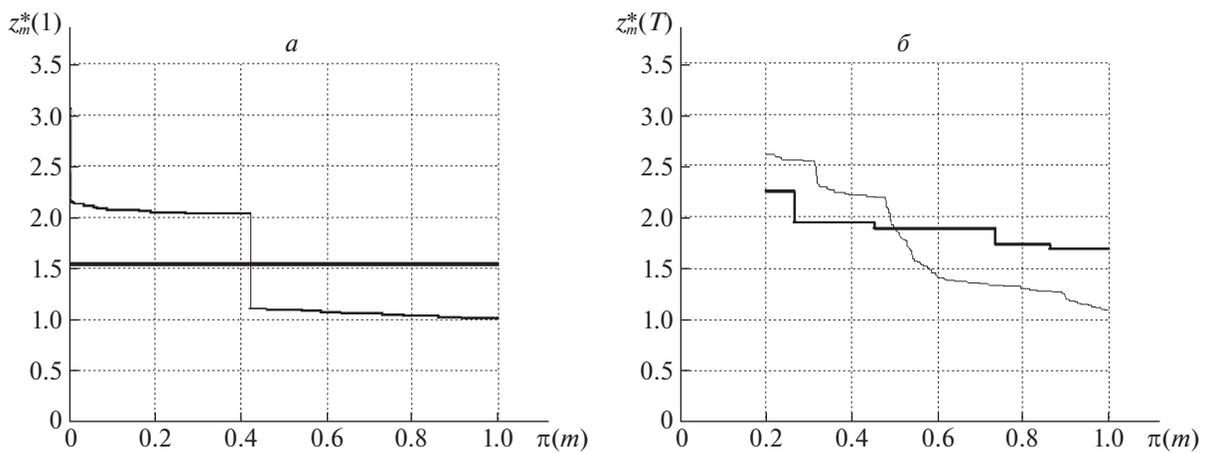


Рис. 2. Исходное и финальное распределения для 80% пар в базовой сети

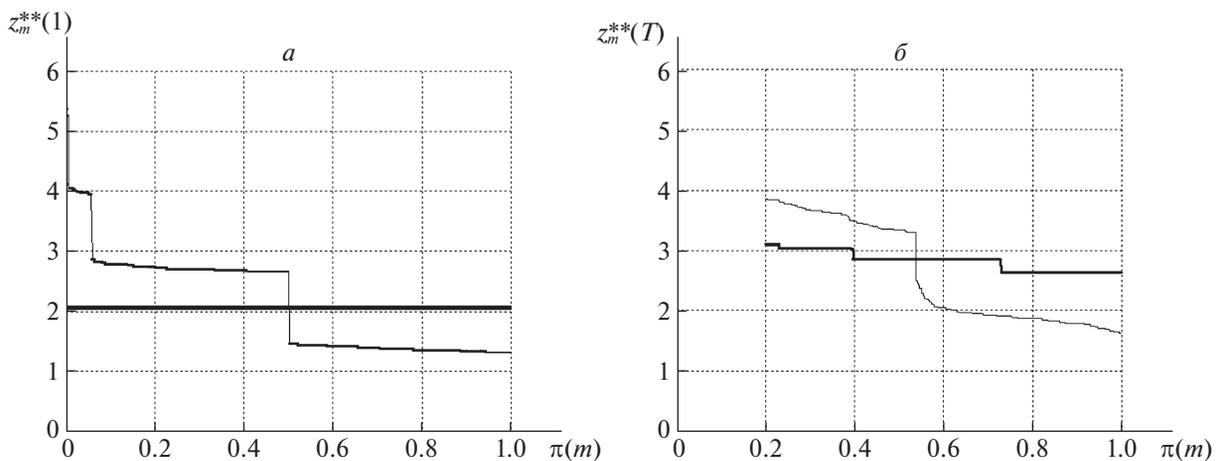


Рис. 3. Исходное и финальное распределения для 80% пар в кольцевой сети

На диаграммах рис. 2, 3 слева представлены значения  $z_m^*(1)$ , полученные на первом шаге при выполнении PLD-процедуры. Прямая жирная линия, параллельная оси абсцисс, свидетельствует, что квоты, выделенные парам-корреспондентам на первом шаге при уравнивательной стратегии, оказываются одинаковыми для всех  $p_m \in P$ . При равнодолевом распределении на первом

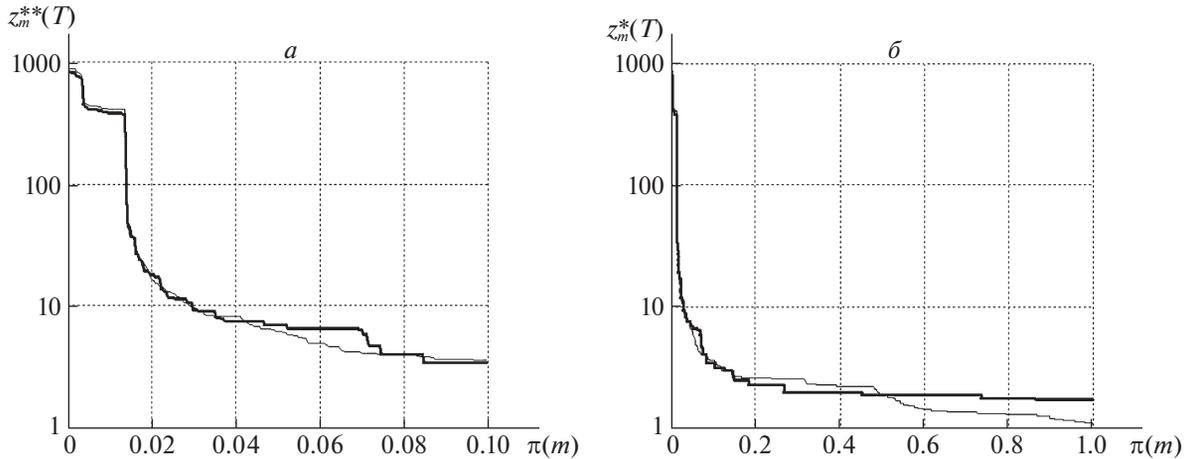


Рис. 4. Финальное распределение потоков в базовой сети

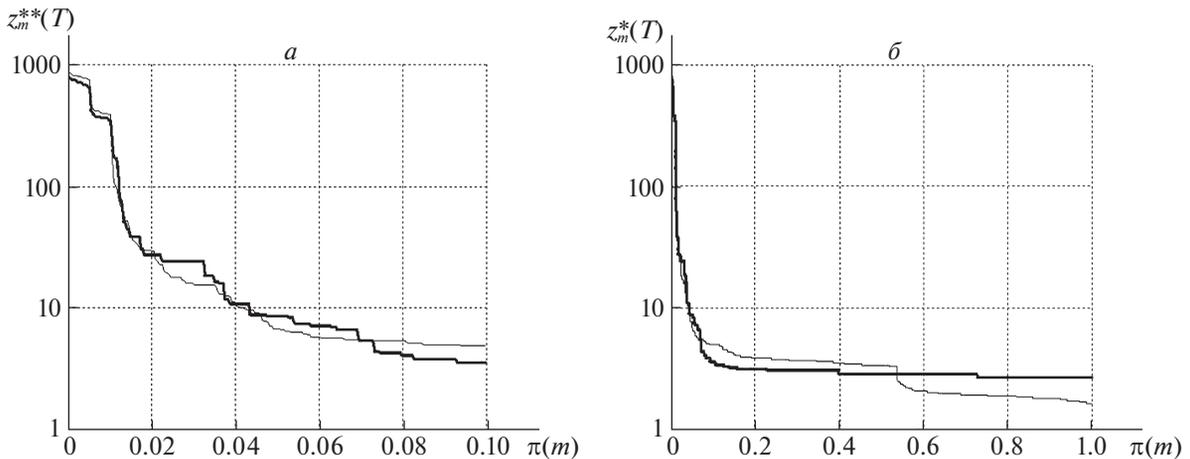


Рис. 5. Финальное распределение потоков в кольцевой сети

шаге около половины пар получают меньше, а остальные – больше, чем при уравнивающей стратегии. Из сравнения диаграмм на рис. 2, 3 следует, что указанная закономерность сохраняется и для финальных значений  $z_m^*(T)$ ,  $z_m^{**}(T)$  при полной загрузке сети. Значения  $z_m^*(T)$ ,  $z_m^{**}(T)$  указаны только для тех пар, у которых  $\pi(i) \geq 0.2$  (80% от общего числа пар).

Диаграмма на рис. 3 справа свидетельствует, что при использовании уравнивающей стратегии в кольцевой сети удастся до *останова* распределять “почти равные” квоты на предельно допустимые межузловые потоки при полной загрузке сети. Финальные значения  $z^{**}(T)$  при равнодолевой стратегии распределения заметно отличаются от “почти равных” значений  $z^*(T)$ . Однако указанные различия становятся неразличимы для 2% пар-корреспондентов с большими значениями  $z_i^*(T)$ ,  $z_i^{**}(T)$  и  $\pi(i) \leq 0.02$ . На диаграммах по вертикальной оси для значений  $z^*(T)$ ,  $z^{**}(T)$  используется логарифмический масштаб (рис. 4, 5). Для большей наглядности на диаграммах слева приведены значения для 10% всех пар, для которых  $\pi(i) \leq 0.1$ .

На диаграммах рис. 2, 3 видно, что для 80% пар-корреспондентов разброс значений  $z_i^*(T)$ ,  $z_i^{**}(T)$  составляет 2–3 единицы, а сами значения не превосходят 5 единиц. Из анализа диаграмм рис. 4, 5 слева следует, что значения  $z_i^*(T) \geq 10$  у 2% пар, а  $z_i^{**}(T) \geq 10$  у 4% пар узлов-корреспондентов. При этом для 1% пар финальные значения  $z_i^*(T)$ ,  $z_i^{**}(T)$  превышают 100 при рекордных значениях чуть меньше 1000 единиц.

При использовании любого способа заполнения сети, начиная с некоторого шага, на многих ребрах остаточная пропускная способность  $d_k(t)$  оказывается равна нулю. Сеть распадается на отдельные фрагменты, и локально для некоторых пар можно резко увеличить квоты на предельно допустимые потоки. В частности, остаточная пропускная способность ребер, соединяющих висячие вершины с сетью, может оказаться весьма значительной и на последних итерациях соответствующие квоты резко возрастут.

Результаты вычислительных экспериментов показывают, что PLD-процедура может быть использована для априорной оценки межзловых потоков при предельной загрузке сети.

**Заключение.** В ходе выполнения PLD-процедуры накапливается большое количество содержательно важных данных о структуре сети и маршрутах передачи потоков различных видов. В частности, на каждом этапе при решении задачи 1 определяются предельно допустимые дуговые потоки по ребрам соответствующего минимального разреза. Вектор-решение цепочки задач 1 –  $x_0(1)$ , для всех пар-корреспондентов содержит детализированную информацию о распределении всех видов потоков по дугам найденных минимальных разрезов при предельной загрузке ребер сети. Поскольку после решения задачи 2 для всех пар-корреспондентов фиксируются потоки  $x^*(1) = \theta^*(1)x_0(1)$ , то фактически маршруты передачи МРМ-потоков запоминаются и хранятся. На последующих этапах вектор остаточных пропускных способностей содержит хотя бы одну нулевую компоненту, а значения остальных становятся меньше исходных. В результате на каждом шаге найденные минимальные разрезы и маршруты передачи для многих видов потоков могут отличаться от зафиксированных ранее. Таким образом, в рамках PLD-процедуры фактически осуществляется поиск обходных путей соединения при достигнутой предельной загрузке одного из ребер.

В рамках формализма стандартной математической модели передачи многопродуктового потока PLD-процедура позволяет проследить взаимосвязь между максимальными значениями межзловых потоков и точкой на границе множества дуговых потоков  $\mathcal{X}(\mathbf{d})$  (см. (1.1)), в которой достигается полная загрузка всех ребер сети.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малащенко Ю.Е., Назарова И.А. Оценки распределения потоков при предельной загрузке многопользовательской сети // Системы и средства информатики. 2020. Т. 30. № 3. С. 4–14.
2. Бертсекас Д., Галлагер Р. Сети передачи данных. М.: Мир, 1989.
3. Йенсен П., Барнес Д. Потокное программирование. М.: Радио и связь, 1984.
4. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

---

---

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ  
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

---

---

УДК 519.86

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО НАБОРА РЕСУРСОВ  
ПРИ СОСТАВЛЕНИИ МНОГОПРОЦЕССОРНОГО РАСПИСАНИЯ**

© 2021 г. М. Г. Фуругян

*Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия  
e-mail: rtsccas@yandex.ru*

Поступила в редакцию 20.12.2020 г.

После доработки 08.02.2021 г.

Принята к публикации 29.03.2021 г.

Рассматривается задача составления многопроцессорного расписания для комплекса работ при наличии ресурсов двух видов – возобновляемых (процессоров) и невозобновляемых. Доступные объемы ресурсов могут изменяться во времени. Работы характеризуются объемами и директивными интервалами. Допускается параллельное выполнение работы несколькими процессорами. Решаются следующие задачи: существования и построения допустимого расписания при заданных объемах ресурсов; минимизации стоимости ресурсов, при наличии которых существует допустимое расписание.

**DOI:** 10.31857/S0002338821050085

**Введение.** Задачи планирования выполнения работ и составления расписаний возникают во многих областях деятельности человека: при создании, возведении и сопровождении сложных технических объектов (летательные аппараты, атомные реакторы), проведении различных испытаний в реальном масштабе времени, проектировании систем противоздушной и противоракетной обороны, при обработке больших массивов информации технического, экономического и экологического характера, в других областях. В середине прошлого века американскими исследователями были разработаны системы ПЕРТ (program evaluation and review technique – метод оценки и пересмотра планов) и МКП (critical path method – метод критического пути) [1, 2], которые успешно применялись при создании вооружений для военно-морских сил США и строительстве военных и гражданских объектов. При этом решались задачи распределения невозобновляемых ресурсов (финансы, топливо, электроэнергия, различные материалы, оперативная память электронно-вычислительной машины, закрепленная за определенными программными модулями). Предполагалось, что длительности работ линейно зависят от величины выделенного им ресурса.

Возобновляемые ресурсы (процессоры, машины, исполнительные механизмы, приборы, рабочие), в отличие от невозобновляемых, могут использоваться многократно. Проблемам распределения возобновляемых ресурсов посвящено большое количество публикаций. Отметим такие фундаментальные работы, как [3–5], в которых исследованы различные задачи теории расписаний (планирование прерываемых и непрерываемых заданий, решение задач с директивными сроками и задач на быстроедействие, составление однопроцессорных и многопроцессорных расписаний). В [6] рассмотрены задачи распределения возобновляемых ресурсов с нефиксированными параметрами. В некоторых случаях задачи планирования работ могут быть сведены к сетевому планированию [2, 7] и минимаксным задачам [8–11].

В настоящей статье рассматривается задача планирования комплекса работ (заданий), использующих как возобновляемые, так и невозобновляемые ресурсы. Доступные объемы ресурсов могут изменяться во времени. Каждая работа характеризуется объемом и директивным интервалом. Исследуются следующие случаи:

- все работы допускают прерывания и переключения с одного процессора на другой;
- комплекс содержит как прерываемые, так и непрерываемые задания;
- в фиксированный момент времени работа может выполняться не более чем одним процессором;
- допускается параллельное выполнение работы несколькими процессорами.

Для указанных случаев решаются задачи поиска допустимого расписания и минимизации стоимости используемых ресурсов. Методика решения указанных задач основана на сведении их к потоковым задачам в сетях специального вида.

**1. Постановка задачи.** Имеется комплекс работ (заданий)  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ , подлежащих выполнению во временном интервале планирования  $[0; T]$  с применением двух видов ресурсов – возобновляемых (процессоров) и невозобновляемых. Интервал  $[0; T]$  разбивается на  $p$  непересекающихся интервалов  $I_1, I_2, \dots, I_p$  ( $I_j = [\tau_j, \tau_{j+1}]$ ,  $j = \overline{1, p}$ ,  $0 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_p < \tau_{p+1} = T$ ), пусть  $\delta_j = \tau_{j+1} - \tau_j$  – длина интервала  $I_j$ . Доступные объемы ресурсов в каждый момент времени определяются следующим образом. В интервале  $I_j$  для выполнения работ имеется  $m_j$  процессоров, производительности которых  $s_{j1} \leq s_{j2} \leq \dots \leq s_{jm_j}$  ( $S_j = s_{j1} + s_{j2} + \dots + s_{jm_j}$  – их суммарная производительность), и  $K$  типов невозобновляемых ресурсов. Доступный объем невозобновляемого ресурса  $k$ -го типа в интервале  $I_j$  составляет  $R_{jk}$ ,  $j = \overline{1, p}$ ,  $k = \overline{1, K}$ .

Каждая работа  $w_i \in W$  может выполняться с использованием обоих видов ресурсов (возобновляемых и невозобновляемых), допускает прерывания и переключения (не требующие временных затрат) с одного процессора на другой и параллельную реализацию несколькими процессорами (при определенных ограничениях). Задание  $w_i \in W$  имеет следующие характеристики:  $Q_i$  – объем;  $[b_i; f_i]$  – директивный интервал,  $b_i, f_i \in \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{p+1}\}$  (т.е. задание  $w_i$  может исполняться только в этом интервале);  $q_{ij}^0$  – максимально допустимый объем работы процессоров, выполняющих задание  $w_i$  в интервале  $I_j$ ;  $r_{ijk}^0$  – максимальный объем невозобновляемого ресурса  $k$ -го типа, который может быть выделен заданию  $w_i$  в интервале  $I_j$ .

Если процессоры с суммарной производительностью  $s$  в интервале  $I_j$  выполняют некоторое задание в течение временного отрезка длиной  $\delta$ , то объем производимый ими работы при этом составляет  $a_j \delta s$ , а стоимость эксплуатации этих процессоров равна  $c_j a_j \delta s$ . В фиксированный момент времени каждый процессор может исполнять не более одного задания. Использование в интервале  $I_j$  невозобновляемого ресурса  $k$ -типа в количестве  $r_{jk}$  обеспечивает объем работы, равный  $b_{jk} r_{jk}$ , а его стоимость равна  $d_{jk} b_{jk} r_{jk}$  (здесь  $a_j, c_j, b_{jk}, d_{jk}$  – заданные положительные величины).

Ресурсы каждого вида могут быть выделены работе  $w_i$  в интервале  $I_j$  только в том случае, когда  $I_j \subseteq [b_i; f_i]$ . Если в интервале  $I_j$  суммарный объем работы процессоров по выполнению задания  $w_i$  составляет  $q_{ij}$ , то должны быть верны следующие соотношения:

$$q_{ij} \leq q_{ij}^0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, p}, \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^n q_{ij} \leq a_j S_j \delta_j, \quad j = \overline{1, p}. \tag{1.2}$$

Если в интервале  $I_j$  заданию  $w_i$  выделен невозобновляемый ресурс  $k$ -го типа в объеме  $r_{ijk}$ , то должны удовлетворяться следующие соотношения:

$$r_{ijk} \leq r_{ijk}^0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, p}, \quad k = \overline{1, K}, \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^n r_{ijk} \leq R_{jk}, \quad j = \overline{1, p}, \quad k = \overline{1, K}. \tag{1.4}$$

Распределение ресурсов указывает для каждой работы  $w_i \in W$  и каждого момента времени  $t \in [0; T]$ , какие процессоры ее исполняют. А для каждого интервала  $I_j$ ,  $j = \overline{1, p}$ , определяет, какие невозобновляемые ресурсы и в каком количестве выделены этой работе. При этом должны быть верны соотношения (1.1)–(1.4). То же определяет и расписание работ  $W$ . Поэтому в дальнейшем, говоря о распределении ресурсов, будем иметь в виду также и расписание. Допустимым распределением ресурсов называется такое распределение, при котором каждая работа полностью выполняется в своем директивном интервале. Задача заключается в том, чтобы определить, существует ли допустимое распределение ресурсов, и в случае положительного ответа найти это

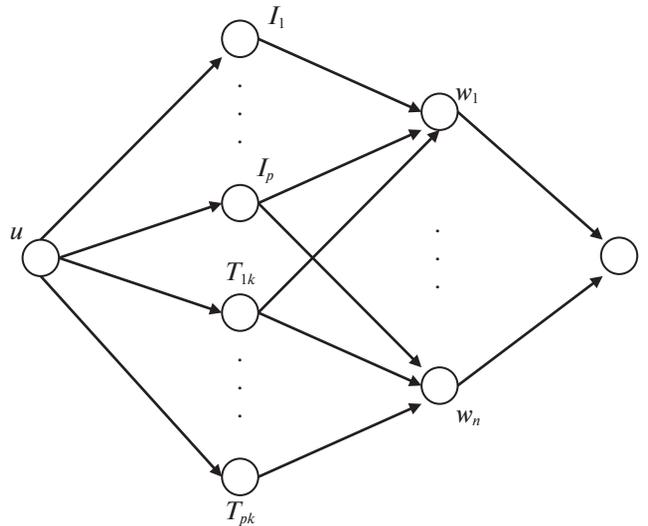


Рис. 1. Потокосеть  $G_1$  ( $k = \overline{1, K}$ )

распределение и определить допустимое распределение ресурсов с минимальной стоимостью их эксплуатации.

**2. Построение сетевой модели.** Для решения поставленной задачи построим потокосеть  $G_1 = (V_1, A_1)$  (рис. 1), где  $V_1 = \{u, t, I_j, T_{jk}, w_i, j = \overline{1, p}, k = \overline{1, K}, i = \overline{1, n}\}$  – множество узлов,  $u$  – источник,  $t$  – сток,  $A_1 = \{(u, I_j), (u, T_{jk}), (I_j, w_i), (T_{jk}, w_i), (w_i, t), j = \overline{1, p}, k = \overline{1, K}, i = \overline{1, n}\}$  – множество ориентированных дуг. Дуги  $(I_j, w_i)$  и  $(T_{jk}, w_i)$  вводятся в сеть  $G_1$  только в том случае, когда  $I_j \subseteq [b_i; f_i]$ , т.е. если работа  $w_i$  может выполняться в интервале  $I_j$ . Пропускные способности  $U(x, y)$  дуг  $(x, y) \in A_1$  сети  $G_1$  указаны в табл. 1. Их физический смысл следующий. Величина  $a_j S_j \delta_j$  равна максимальному объему работы процессоров, доступному в интервале  $I_j$ ;  $b_{jk} R_{jk}$  – максимальный объем работы, который может быть выполнен в интервале  $I_j$  с помощью невозобновляемого ресурса  $k$ -го типа;  $b_{jk} r_{ijk}^0$  – максимальный объем работы, который может быть предоставлен заданию  $w_i$  в интервале  $I_j$  с помощью невозобновляемого ресурса  $k$ -го типа. Величины  $q_{ij}^0$  и  $Q_i$  были определены выше.

**Л е м м а 1.** Для существования допустимого распределения ресурсов необходимо и достаточно существование потока  $g$  в сети  $G_1$ , для которого

$$g(w_i, t) = Q_i \tag{2.1}$$

при всех  $i = \overline{1, n}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о . 1. Необходимость.** Предположим, что существует допустимое распределение ресурсов (как было отмечено выше, оно определяет допустимое расписание), которое

Таблица 1. Пропускные способности дуг сети  $G_1$

Дуга	Пропускная способность
$(u, I_j)$	$a_j S_j \delta_j$
$(u, T_{jk})$	$b_{jk} R_{jk}$
$(I_j, w_i)$	$q_{ij}^0$
$(T_{jk}, w_i)$	$b_{jk} r_{ijk}^0$
$(w_i, t)$	$Q_i$

для каждого задания  $w_i$  и каждого интервала  $I_j$  указывает, какие процессоры и в какие моменты времени его выполняют и объем невозобновляемого ресурса каждого типа, выделенный ему. Пусть  $q_{ij}$  – это суммарный объем работы процессоров при выполнении задания  $w_i$  в интервале  $I_j$ , а  $r_{ijk}$  – величина невозобновляемого ресурса  $k$ -го типа, выделенная заданию  $w_i$  в интервале  $I_j$ . Определим поток  $g$  в сети  $G_1$  следующим образом:

$$g(I_j, w_i) = q_{ij}, \quad g(T_{jk}, w_i) = b_{jk}r_{ijk}, \tag{2.2}$$

$$g(u, I_j) = \sum_{i=1}^n q_{ij}, \quad g(u, T_{jk}) = \sum_{i=1}^n b_{jk}r_{ijk}, \tag{2.3}$$

$$g(w_i, t) = \sum_{j=1}^p (q_{ij} + \sum_{k=1}^K b_{jk}r_{ijk}). \tag{2.4}$$

Тогда в силу (2.2)–(2.4) в каждом внутреннем узле сети  $G_1$  (т.е. в узлах  $I_j$ ,  $T_{jk}$  и  $w_i$ ,  $j = \overline{1, p}$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ) не нарушается условие сохранения потока. Кроме того, в силу неравенств (1.1)–(1.4) потоки по дугам  $(u, I_j)$ ,  $(u, T_{jk})$ ,  $(I_j, w_i)$  и  $(T_{jk}, w_i)$  не превосходят их пропускных способностей. И наконец, поскольку при допустимом распределении ресурсов каждая работа выполняется полностью, то в силу (2.4)  $g(w_i, t) = Q_i$  при всех  $i = \overline{1, n}$ , т.е. верно условие (2.1) леммы 1.

2. Д о с т а т о ч н о с т ь. Предположим теперь, что в сети  $G_1$  существует поток  $g$ , для которого справедливы равенства (2.1) при всех  $i = \overline{1, n}$ . Определим  $q_{ij} = g(I_j, w_i)$ . Тогда верно неравенство (1.1), а в силу сохранения потока в узле  $I_j$  выполнены соотношения

$$\sum_{i=1}^n q_{ij} = g(u, I_j) \leq a_j S_j \delta_j,$$

т.е. имеет место (1.2). А поскольку величина  $a_j S_j \delta_j$  равна максимальному объему работы процессоров в интервале  $I_j$ , то с помощью алгоритма, аналогичного алгоритму упаковки [3], работы  $w_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , могут быть распределены по процессорам в интервале  $I_j$ . При работе этого алгоритма задания назначаются на процессоры поочередно, начиная с первого. К выбранному заданию  $w_i$  процессоры приписываются последовательно, начиная с первого не полностью загруженного, до тех пор, пока не будет обеспечен объем работы, равный  $q_{ij}$ .

Далее, определим  $r_{ijk} = g(T_{jk}, w_i)/b_{jk}$ . Тогда справедливо неравенство (1.3), а в силу сохранения потока в узле  $T_{jk}$  выполнены соотношения

$$\sum_{i=1}^n r_{ijk} = \left( \sum_{i=1}^n g(T_{jk}, w_i) \right) / b_{jk} = g(u, T_{jk}) / b_{jk} \leq b_{jk} R_{jk} / b_{jk} = R_{jk}, \quad j = \overline{1, p}, \quad k = \overline{1, K}, \quad i = \overline{1, n},$$

т.е. верно (1.4).

Кроме того, в силу (2.1) и сохранения потока в узле  $w_i$  суммарный объем работы по реализации задания  $w_i$  равен

$$\sum_{j=1}^p \left( q_{ij} + \sum_{k=1}^K b_{jk} r_{ijk} \right) = \sum_{j=1}^p \left( g(I_j, w_i) + \sum_{k=1}^K g(T_{jk}, w_i) \right) = g(w_i, t) = Q_i,$$

т.е. работа  $w_i$  выполняется полностью. И наконец, структура сети  $G_1$  такова, что каждое задание выполняется в своем директивном интервале, т.е. допустимое распределение ресурсов существует. Лемма доказана.

Из леммы 1 вытекает следующий алгоритм решения задачи существования и нахождения допустимого распределения ресурсов.

1. Построить сеть  $G_1$ .
2. Найти в сети  $G_1$  максимальный поток  $g$  (например, с помощью полиномиального алгоритма А. Карзанова [12]).

Таблица 2. Значения параметров дуг сети  $G_2$ 

Дуга	$L$	$U$	$C$
$(u, I_j)$	0	$a_j S_j \delta_j$	0
$(u, T_{jk})$	0	$b_{jk} R_{jk}$	0
$(I_j, w_i)$	0	$q_{ij}^0$	$c_j$
$(T_{jk}, w_i)$	0	$b_{jk} r_{ijk}^0$	$d_{jk}$
$(w_i, t)$	$Q_i$	$Q_i$	0

3. Если для найденного потока  $g$  верны равенства (2.1) при всех  $i = \overline{1, n}$ , то допустимое распределение ресурсов (и допустимое расписание для  $W$ ) существует и может быть построено в каждом интервале  $I_j$ ,  $j = \overline{1, p}$ , с помощью леммы 1. Если же условие (2.1) не выполнено хотя бы при одном  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , то допустимого распределения ресурсов (и допустимого расписания) не существует.

Оценим вычислительную сложность каждого шага алгоритма. Шаг 1 –  $O((Kp + n)^2)$ , шаг 2 –  $O((Kp + n)^3)$ , шаг 3 –  $O(p(n + K))$ . Таким образом, вычислительная сложность предложенного алгоритма составляет  $O((Kp + n)^3)$ , т.е. алгоритм является полиномиальным.

**3. Нахождение допустимого распределения ресурсов минимальной стоимости.** Для нахождения допустимого распределения ресурсов минимальной стоимости построим сеть  $G_2$  с такой же структурой, как у сети  $G_1$ , и припишем каждой дуге  $(x, y) \in A_1$  три параметра: нижнюю границу  $L(x, y)$  потока по дуге  $(x, y)$ , верхнюю границу  $U(x, y)$  потока по дуге  $(x, y)$  и стоимость  $C(x, y)$  единицы потока по дуге  $(x, y)$ . Значения этих параметров приведены в табл. 2. В этом случае стоимость потока в сети  $G_2$  определяется стоимостью потока по дугам  $(I_j, w_i)$  и  $(T_{jk}, w_i)$ ,  $j = \overline{1, p}$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Поэтому поток минимальной стоимости в сети  $G_2$  определяет распределение ресурсов минимальной стоимости, а структура сети и параметры дуг  $(w_i, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , таковы, что это распределение является допустимым. Таким образом, с учетом леммы 1 справедливо следующее утверждение.

**Л е м м а 2.** 1. Для существования допустимого распределения ресурсов необходимо и достаточно существование потока в сети  $G_2$ .

2. Поток минимальной стоимости в сети  $G_2$  определяет распределение ресурсов минимальной стоимости.

Из леммы 2 вытекает следующий алгоритм решения поставленной задачи.

1. Построить сеть  $G_2$ .

2. Найти в сети  $G_2$  поток  $g$  минимальной стоимости (например, с помощью псевдополиномиального алгоритма дефекта [12]).

3. Если поток  $g$  в сети  $G_2$  существует, то допустимое распределение ресурсов (и допустимое расписание для  $W$ ) существует, может быть построено в каждом интервале  $I_j$ ,  $j = \overline{1, p}$ , с помощью леммы 1 и оно будет допустимым распределением ресурсов минимальной стоимости. Если же потока в сети  $G_2$  не существует, то допустимого распределения ресурсов (и допустимого расписания) не существует.

Оценим вычислительную сложность каждого шага алгоритма. Шаг 1 –  $O((Kp + n)^2)$ , шаг 2 –  $O((Kpn)^2 U)$ , где  $U$  – это максимальная верхняя граница потока по дугам сети  $G_2$ , шаг 3 –  $O(p(n + K))$ . Таким образом, вычислительная сложность предложенного алгоритма составляет  $O((Kpn)^2 U)$ , т.е. алгоритм является псевдополиномиальным.

Рассмотрим теперь задачу построения допустимого распределения ресурсов, при котором минимален суммарный объем работы, выполняемой возобновляемыми и невозобновляемыми

ресурсами в заданной совокупности интервалов  $I_j$ . Для этого определенным образом корректируются некоторые параметры дуг сети  $G_2$  и определяется поток минимальной стоимости, с помощью которого можно построить искомое распределение ресурсов, как это указано в лемме 1.

Пусть  $J \subseteq \{1, 2, \dots, p\}$  и требуется минимизировать суммарный объем работы, выполняемый процессорами в интервалах  $I_j, j \in J$ . Для этого стоимости единицы потока по дугам сети  $G_2$  определим следующим образом: положим  $C(u, I_j) = 1$  при всех  $j \in J, C(x, y) = 0$  для всех остальных дуг сети  $G_2$ . Значения нижних и верхних границ потока по дугам сети  $G_2$  оставим без изменения. Тогда поток минимальной стоимости в сети  $G_2$  будет обладать таким свойством, что суммарный поток по дугам  $(u, I_j), j \in J$ , будет минимальным. Следовательно, минимальным будет и суммарный объем работы, выполняемый процессорами в интервалах  $I_j, j \in J$ .

Рассмотрим частный случай, когда  $J = \{j_0\}$  (т.е. множество  $J$  состоит из одного элемента  $j_0$ ), все процессоры в интервале  $I_{j_0}$  идентичные. Тогда поток минимальной стоимости в сети  $G_2$  будет обладать таким свойством, что поток по дуге  $(u, I_{j_0})$  будет минимальным. Следовательно, после применения алгоритма упаковки число процессоров, выполняющих задания в интервале  $I_{j_0}$ , также будет минимальным.

Пусть теперь требуется минимизировать суммарный объем работы, выполняемый невозобновляемыми ресурсами  $k_0$ -го типа,  $1 \leq k_0 \leq K$ , в интервалах  $I_j, j \in J$ . Для этого стоимости единицы потока по дугам сети  $G_2$  определим следующим образом: положим  $C(u, T_{jk_0}) = 1$  при всех  $j \in J, C(x, y) = 0$  для всех остальных дуг сети  $G_2$ . Значения нижних и верхних границ потока по дугам сети  $G_2$  оставим без изменения. Тогда поток минимальной стоимости в сети  $G_2$  будет обладать таким свойством, что суммарный поток по дугам  $(u, T_{jk_0}), j \in J$ , будет минимальным. Следовательно, минимальным будет и суммарный объем работы, выполняемый невозобновляемыми ресурсами  $k_0$ -го типа в интервалах  $I_j, j \in J$ .

Аналогично решается задача построения допустимого распределения ресурсов, при котором суммарный объем работы, выполняемой возобновляемыми и невозобновляемыми ресурсами определенных типов в заданной совокупности интервалов  $I_j$ , минимален.

**4. Составление допустимого расписания для смешанного набора работ.** Предполагается, что помимо основных работ  $W$  в каждом интервале  $I_j$  требуется выполнить совокупность дополнительных заданий  $V_j = \{v_{j1}, v_{j2}, \dots, v_{jh_j}\}, j = \overline{1, p}$ . Каждая работа  $v_{jh_j}$  реализуется с помощью какого-либо одного процессора без прерываний и переключений, не может использовать невозобновляемые ресурсы, а ее объем составляет  $P_{jh_j}, h_j = \overline{1, H_j}, j = \overline{1, p}$ . Как и в разд. 2, будем искать допустимое распределение ресурсов. Задачи подобного рода возникают при испытаниях сложных технических объектов (самолеты, ядерные реакторы), когда помимо основных работ  $W$  имеются более срочные дополнительные задания  $V_j, j = \overline{1, p}$ , не допускающие прерываний и переключений. Отметим, что эта задача является  $NP$ -трудной даже в том случае, когда множество заданий  $W$  пусто [13]. Сначала построим допустимое расписание для работ  $W$ . Затем в каждом интервале  $I_j$  задания  $V_j$  распределяются по свободным и не полностью занятым процессорам с использованием, например, точного метода “ветвей и границ” [6], точного псевдополиномиального алгоритма или приближенного “жадного” алгоритма [13].

Расписание для  $W$  будем строить таким образом, чтобы для выполнения заданий  $V_j$  оставался максимальный объем процессорного времени. Построим сеть  $G_3$ , имеющую такую же структуру, как и сеть  $G_1$ , а значения параметров дуг приведены в табл. 3.

Поскольку стоимость единицы потока по дугам  $(u, T_{jk})$  равна минус единице, а для всех остальных дуг – нулю, то стоимость потока в сети  $G_3$  определяется только величиной потока по дугам  $(u, T_{jk}), j = \overline{1, p}, k = \overline{1, K}$ . Следовательно, для потока минимальной стоимости в сети  $G_3$  суммарный поток по дугам  $(u, T_{jk}), j = \overline{1, p}, k = \overline{1, K}$ , будет максимальным. Это обеспечит максимальное использование невозобновляемого ресурса при выполнении работ  $W$ , и, следовательно, максимальный объем процессорного времени для реализации заданий  $V_j$ . Расписание работ  $W$

**Таблица 3.** Значения параметров дуг сети  $G_3$

Дуга	$L$	$U$	$C$
$(u, I_j)$	0	$a_j S_j \delta_j$	0
$(u, T_{jk})$	0	$b_{jk} R_{jk}$	-1
$(I_j, w_i)$	0	$q_{ij}^0$	0
$(T_{jk}, w_i)$	0	$b_{jk} r_{ijk}^0$	0
$(w_i, t)$	$Q_i$	$Q_i$	0

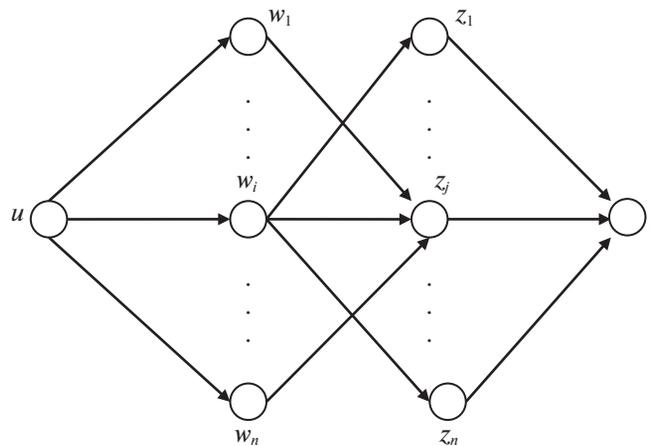
строится с помощью найденного потока минимальной стоимости в сети  $G_3$  так, как это было описано в разд. 2.

**5. Минимизация числа процессоров при жестких временных ограничениях.** Допустим, что помимо процессоров (т.е. возобновляемых ресурсов) других ресурсов в системе нет, причем все процессоры идентичные. Каждая работа  $w_i, i = \overline{1, n}$ , полностью выполняется каким-либо одним процессором в течение всего директивного интервала  $[b_i, f_i]$ . После этого процессор может переключиться на другую работу  $w_j$ . Время, требуемое процессору для такого переключения, равно  $\sigma_{ij}$ . Каждый процессор одновременно может исполнять не более одной работы. Требуется определить минимальное число процессоров для реализации всей совокупности работ  $W$ .

Для решения этой задачи построим потоковую сеть  $G_4$  (рис. 2), где  $V_4 = \{u, w_1, \dots, w_n, z_1, \dots, z_n, t\}$  – множество узлов,  $u$  – источник,  $t$  – сток, узлы  $w_i$  и  $z_i$  соответствуют заданию  $w_i$ ;  $A_4 = \{(u, w_i), (z_i, t), (w_i, z_j), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}\}$  – множество ориентированных дуг. Дуга  $(w_i, z_j)$  вводится в сеть  $G_4$  в том случае, когда  $f_i + \sigma_{ij} \leq b_j$ , т.е. если процессор после выполнения задания  $w_i$  успевает переключиться на работу  $w_j$ . Пропускные способности всех дуг полагаются равными единице.

**Л е м м а 3.** Минимальное число процессоров в сформулированной задаче равно  $n - F$ , где  $F$  – величина максимального потока в сети  $G_4$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Отметим, что поскольку пропускные способности всех дуг сети  $G_4$  целочисленные, то, используя алгоритм А. Карзанова [12] для нахождения максимального потока, последний также будет целочисленным. Следовательно, величина потока по каждой дуге  $(w_i, z_j)$  равна 0 или 1. Все задания заведомо могут быть выполнены с помощью  $n$  процессоров. А каждой единице потока в сети  $G_4$  соответствует некоторая дуга  $(w_i, z_j)$ , поток по которой также равен 1. Это означает возможность выполнить задания  $w_i$  и  $w_j$  одним и тем же процессором, что



**Рис. 2.** Потоковая сеть  $G_4$

уменьшает требуемое число процессоров на единицу. Поэтому если величина максимального потока равна  $F$ , то минимальное число процессоров, с помощью которых можно выполнить задания  $W$ , равно  $n - F$ .

**Заключение.** Исследована задача распределения неоднородной и изменяющейся во времени совокупности возобновляемых и невозобновляемых ресурсов при построении допустимого многопроцессорного расписания. Рассмотрены случаи: (1) все процессоры идентичные; (2) процессоры могут различаться своей производительностью; (3) все работы допускают прерывания и переключения с одного процессора на другой; (4) часть работ допускает прерывания и переключения, а часть не допускает. Разработаны алгоритмы минимизации стоимости допустимого распределения ресурсов и числа процессоров при различных ограничениях на параметры задачи. Используемая методика основана на применении теории потоков в сетях.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филлипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.
2. Давыдов Э.Г. Исследование операций. М.: Высш. шк., 1990.
3. Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М. Теория расписаний. Одностадийные системы. М.: Наука, 1984.
4. Brucker P. Scheduling Algorithms. Heidelberg: Springer, 2007.
5. Лазарев А.А. Теория расписаний. Оценка абсолютной погрешности и схема приближенного решения задач теории расписаний. М.: МФТИ, 2008.
6. Мищенко А.В., Сушков Б.Г. Минимизация времени выполнения работ, представленных сетевой моделью, при нефиксированных параметрах сети. М.: ВЦ АН СССР, 1980. С. 3–16.
7. Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности // Изв. РАН. ТиСУ. 1998. № 2. С. 134–146.
8. Mironov A.A., Tsurkov V.I. Network Models with Fixed Parameters at the Communication Nodes. 1 // J. Computer and Systems Sciences International. 1994. V. 32. № 6. P. 1–11.
9. Mironov A.A., Tsurkov V.I. Network Models with Fixed Parameters at the Communication Nodes. 2 // J. Computer and Systems Sciences International. 1995. V. 33. № 3. P. 107–116.
10. Mironov A.A., Levkina T.A., Tsurkov V.I. Minimax Estimations of Arc Weights in Integer Networks with Fixed Node Degrees // Applied and Computational Mathematics. 2009. V. 8. № 2. P. 216–226.
11. Mironov A.A., Tsurkov V.I. Class of Distribution Problems with Minimax Criterion // Doklady Akademii Nauk. 1994. V. 336. № 1. P. 35–38.
12. Корте Б., Фиген Й. Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: МЦНМО, 2015.
13. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

## СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 681.5.015:007

### АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ: ОТ ДЕРЕВА ОТКАЗОВ К ДЕРЕВУ КАТАСТРОФ

© 2021 г. Д. И. Кательников<sup>a</sup>, Л. В. Пустыльник<sup>b</sup>, А. П. Ротштейн<sup>c,d,\*</sup>

<sup>a</sup> Винницкий национальный технический ун-т, Винница, Украина

<sup>b</sup> Тель-Авивский академический инженерный колледж – Афека, Тель-Авив, Израиль

<sup>c</sup> Иерусалимский политехнический ин-т – Махон Лев, Иерусалим, Израиль

<sup>d</sup> Донецкий национальный ун-т им. Василя Стуса, Винница, Украина

\*e-mail: rothstei@g.jct.ac.il

Поступила в редакцию 06.02.2021 г.

После доработки 25.03.2021 г.

Принята к публикации 31.05.2021 г.

Предлагается метод анализа дерева катастроф, который является аналогом классического метода анализа дерева отказов, не требующим знания вероятностей событий. Вместо понятия “вероятность отказа” используется понятие “возможность бифуркации”, которая оценивается числом в интервале  $[0, 1]$  с помощью теории катастроф и соответствует функции принадлежности нечеткого множества. Расчет возможности бифуркации (или катастрофы) системы выполняется с помощью специально введенных правил агрегации возможностей бифуркаций для различных логических операций дерева отказов. Иллюстрация метода анализа катастроф выполнена на примере дерева отказов для дорожной аварии на Т-образном перекрестке.

DOI: 10.31857/S0002338821050115

**Введение.** Метод дерева отказов (fault tree analysis – ФТА), предложенный в 1962 г. и подробно изложенный в [1], до сих пор является одним из основных методов анализа надежности, безопасности и риска не только в технических, но и в социально-экономических, военных и других системах [2, 3].

Вероятностные модели ФТА предусматривают бинарную концепцию отказов системы и ее элементов: 1 – нет отказа, 0 – есть отказ. Поэтому событие “отказ” можно трактовать как бифуркацию, т.е. перескок из одного устойчивого состояния (нет отказа) в другое устойчивое состояние (есть отказ). Подход к моделированию и оптимизации надежности на основе вилок бифуркаций из теории хаоса рассмотрен в [4, 5].

Специальным математическим аппаратом моделирования бифуркаций служит теория катастроф [6–8], которая является развитием теории нелинейных колебаний [9]. Несмотря на широкое распространение теории катастроф в различных областях, работы по ее применению в моделях надежности отсутствуют.

В статье предлагается метод анализа дерева катастроф (catastrophe tree analysis – СТА), который есть аналог классического метода ФТА, не требующий знания вероятностей событий. Вместо понятия “вероятность отказа” используется понятие “возможность бифуркации”, которая оценивается числом в интервале  $[0, 1]$  с помощью теории катастроф и соответствует функции принадлежности нечеткого множества [10–12]. Расчет возможности бифуркации (или катастрофы) системы выполняется с помощью специально введенных правил агрегации возможностей бифуркаций для различных логических операций дерева отказов.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 приводятся понятия характеристической функции и функции принадлежности, необходимые для понимания различий между вероятностью и возможностью отказа, которые вычисляются на основе структурной функции надежности. В разд. 2 рассматривается пример описания бифуркации с помощью функции принадлежности нечеткого множества. Раздел 3 содержит основные соотношения теории катастроф, которые используются в методе анализа дерева катастроф. В разд. 4 предлагаются правила агрегации уровней бифуркаций для логических операций дерева катастроф. Раздел 5 иллюстрирует метод дерева катастроф на примере дорожной аварии.

**1. Структурная функция: вероятность и возможность отказа.** Формальной основой дерева отказов является булева функция, которую в теории надежности принято называть структурной функцией [1]. Она связывает бинарные характеристические функции системы и ее элементов:

$$\chi_S = f_L(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n), \tag{1.1}$$

где  $\chi_i = 1(0)$ , если  $i$ -й элемент работает (отказал),  $\chi_S = 1(0)$ , если система работает (отказала).

Зная вероятности этих состояний

$$P_i = \text{Prob}(\chi_i = 1), \quad P_S = \text{Prob}(\chi_S = 1),$$

из структурной функции (1.1) получается вероятностная функция надежности системы:

$$P_S = f_P(P_1, P_2, \dots, P_n), \tag{1.2}$$

где  $\text{Prob}$  – символ вероятности,  $P_i$  и  $P_S$  – вероятности безотказной работы  $i$ -го элемента ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и системы соответственно.

При этом используются следующие правила перехода к вероятности:

$$\chi_i \wedge \chi_j \Rightarrow P_i \cdot P_j,$$

$$\chi_i \vee \chi_j \Rightarrow P_i + P_j - P_i \cdot P_j.$$

Если в (1.1) характеристические функции  $\chi_i$  и  $\chi_S$  заменить функциями принадлежности нечетких множеств, то получаем нечетко-логическую функцию

$$\pi_S = f_L(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n), \tag{1.3}$$

которая позволяет оценивать возможность безотказной работы системы  $\pi_S \in [0, 1]$  на основе возможностей  $\pi_i \in [0, 1]$  безотказной работы ее элементов. При этом используются следующие правила вычислений:

$$\pi_i \wedge \pi_j \Rightarrow \min(\pi_i, \pi_j),$$

$$\pi_i \vee \pi_j \Rightarrow \max(\pi_i, \pi_j).$$

Взаимосвязь возможности и вероятности в моделях надежности показана на рис. 1, где  $z$  – параметр, от которого зависит надежность элемента,  $z \in [z, \bar{z}]$ ,  $z$  ( $\bar{z}$ ) – нижнее (верхнее) значение интервала допустимых значений;  $A$  – нечеткое множество “возможность надежной работы элемента в зависимости от параметра  $z$ ”;  $\pi_A(z)$  – функция принадлежности параметра  $z$  к нечеткому множеству  $A$ . Согласно [10], функция  $\pi_A(z)$  трактуется как распределение возможности надежной работы элемента;  $\alpha$  – число в интервале  $[0, 1]$ , которое задает минимально необходимый уровень возможности надежной работы;  $A_\alpha$  – множество  $\alpha$ -уровня, определяющее значения параметра  $z$ , для которых возможность надежной работы не ниже  $\alpha$ , т.е.

$$A_\alpha = \{z \in [z, \bar{z}], \pi_A(z) \geq \alpha\};$$

$\chi_A(z)$  – характеристическая функция, такая, что

$$\chi_A(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \in A_\alpha, \\ 0, & \text{если } z \notin A_\alpha, \end{cases}$$

$q$  – вероятность отказа элемента, которая оценивается статически:

$$q = \frac{N - N_\alpha}{N},$$

где  $N$  – общее число испытаний,  $N_\alpha$  – число испытаний, в которых  $z \in A_\alpha$ .

**2. Функция принадлежности к бифуркации.** Событие “отказ” нами трактуется как бифуркация, т.е. потеря устойчивости. В теории колебаний [9] принято использовать определение устойчивости по Ляпунову, которое требует внутреннего описания системы с помощью дифференциальных уравнений.

Покажем, что при отсутствии внутреннего описания устойчивость можно определить с помощью нечетких множеств, которые лежат в основе теории возможностей [10].

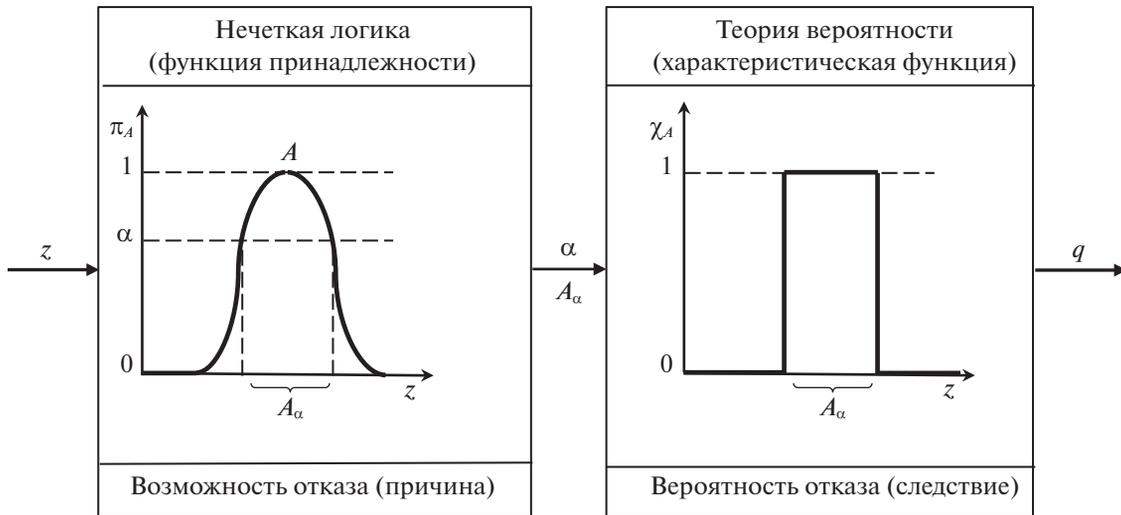


Рис. 1. Взаимосвязь возможности и вероятности отказа

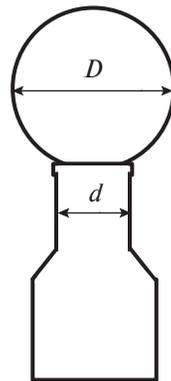


Рис. 2. Шарик на бутылке

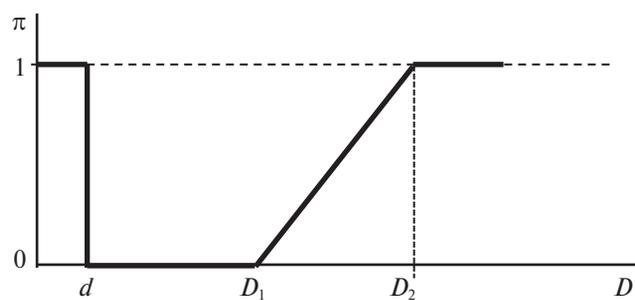


Рис. 3. Функция принадлежности к бифуркации

На рис. 2 показан шарик диаметром  $D$ , который сохраняет устойчивость на горлышке бутылки диаметром  $d$ . Предполагается, что величина диаметра  $D$  может изменяться.

Бифуркация, т.е. падение шарика с бутылки, описывается функцией принадлежности (рис. 3), где имеются следующие области:

(а) как только  $D < d$ , то шарик проваливается в бутылку и степень принадлежности к бифуркации  $\pi = 1$ .

**Таблица 1.** Возможности бифуркаций для различных потенциальных функций

Модель катастрофы	Потенциальная функция	Число входов	Нормализованные формулы
C (Cusp)	$V(x) = x^4 + ax^2 + bx$	2	$x_a = \sqrt{a}, x_b = \sqrt[3]{b}$
S (Swallowtail)	$V(x) = x^5 + ax^3 + bx^2 + cx$	3	$x_a = \sqrt{a}, x_b = \sqrt[3]{b}, x_c = \sqrt[4]{c}$
B (Butterfly)	$V(x) = x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$	4	$x_a = \sqrt{a}, x_b = \sqrt[3]{b}, x_c = \sqrt[4]{c}, x_d = \sqrt[5]{d}$

(б) если  $D \in [d, D_1]$ , то шарик сохраняет устойчивость,  $\pi = 0$ .

(в) при  $D \in [D_1, D_2]$  шарик находится на нечетком переходе “устойчиво – не устойчиво”, что соответствует возрастанию  $\pi$  от 0 к 1.

(г) при  $D > D_2$  шарик падает с бутылки и  $\pi = 1$ .

**3. Необходимые соотношения теории катастроф.** Теория катастроф – это математическая дисциплина для моделирования нелинейных объектов “вход–выход”, в которых незначительные изменения входов (причин) приводят к большим изменениям выходов (следствий) [6–8]. Эта теория позволяет напрямую изучать прерывистое поведение системы без знания ее внутренней структуры. Для этого используется понятие *потенциальной функции*, которая в механике называется *энергетической функцией* или *функцией Ляпунова* в теории устойчивости (второй метод Ляпунова).

В каждый момент времени система стремится минимизировать свой потенциал, который меняется в зависимости от внешних (управляющих) параметров (минимизация локальная). При изменении этих параметров некоторые локальные минимумы могут “исчезать”, что приводит к скачкам, которые соответствуют бифуркациям или катастрофам. Наглядной моделью этой ситуации служит шарик на неровной поверхности, который под воздействием силы тяжести стремится в самое нижнее положение среди других, находящихся поблизости.

В табл. 1 приведены потенциальные функции, которые будут использованы при построении дерева катастроф, соответствующего дереву отказов.

В каждой потенциальной функции  $V(x)$  имеется переменная состояния системы ( $x$ ) и управляемые (входные) переменные ( $a, b, c, d$ ), которые изменяются в интервалах их допустимых значений. При стремлении потенциальной функции к минимуму могут возникать бифуркации, множество которых определяется из системы уравнений:  $V'(x) = 0, V''(x) = 0$ . Множеству бифуркаций соответствуют нормализованные формулы, позволяющие вычислить уровни бифуркации ( $x_a, x_b, \dots, x_d$ ) по входным переменным ( $a, b, \dots, d$ ). Вывод нормализованных формул описан в работе [13]. Они получены исходя из требования, что входные переменные и уровни бифуркаций изменяются в интервале  $[0, 1]$ . Это допускает интерпретацию в терминах теории возможности [10]:

$a, b, \dots, d$  – возможности событий, соответствующих входным переменным;

$x_a, x_b, \dots, x_d$  – возможности бифуркаций по входным переменным.

Следует отметить, что операциям извлечения корней в нормализованных формулах соответствуют лингвистические модификаторы (*достаточно, более-менее* и др.), которые используются для растяжения функций принадлежности в теории нечетких множеств. Этим достигается увеличение функции при небольших значениях аргумента.

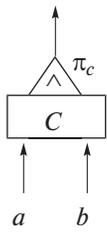
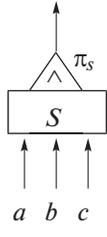
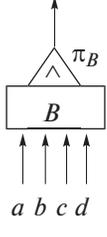
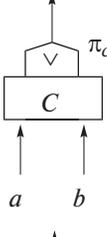
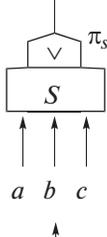
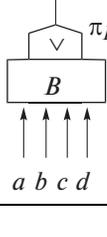
Например, пусть  $\pi_p(y) = y$  – функция принадлежности переменной  $y \in [0, 1]$  к нечеткому множеству “перфектность ( $p$ )”. Тогда модифицированные нечеткие множества “достаточно перфектно ( $fp$ )” и “более-менее перфектно ( $mfp$ )” описываются функциями принадлежности:

$$\pi_{fp}(y) = y^{1/2}, \quad \pi_{mfp}(y) = y^{1/4}.$$

Поскольку входные переменные  $a, b, c, d$  в потенциальных функциях (табл. 1) изменяются в интервале  $[0, 1]$  и имеют смысл степеней принадлежности, то операции извлечения корней (правый столбец табл. 1) можно трактовать как растяжение степеней принадлежности с помощью лингвистических модификаторов.

**4. Дерево катастроф.** Будем предполагать, что известно дерево отказов, в котором используются только два логических узла: AND ( $\wedge$ ) и OR ( $\vee$ ). Кроме того, ограничимся случаем, когда в

**Таблица 2.** Правила агрегации на дереве катастроф

Логический узел	Катастрофа	Обозначение на дереве катастроф	Формула агрегации
AND ( $\wedge$ )	C		$\pi_C = \begin{cases} \min(\sqrt{a}, \sqrt[3]{b}), \\ \sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}} \end{cases}$
	S		$\pi_S = \begin{cases} \min(\sqrt{a}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[4]{c}), \\ \sqrt[3]{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[4]{c}} \end{cases}$
	B		$\pi_B = \begin{cases} \min(\sqrt{a}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[4]{c}, \sqrt[5]{d}), \\ \sqrt[4]{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[4]{c} \cdot \sqrt[5]{d}} \end{cases}$
OR ( $\vee$ )	C		$\pi_C = \begin{cases} \max(\sqrt{a}, \sqrt[3]{b}), \\ \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}) \end{cases}$
	S		$\pi_S = \begin{cases} \max(\sqrt{a}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[4]{c}), \\ \frac{1}{3}(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[4]{c}) \end{cases}$
	B		$\pi_B = \begin{cases} \max(\sqrt{a}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[4]{c}, \sqrt[5]{d}), \\ \frac{1}{4}(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[4]{c} + \sqrt[5]{d}) \end{cases}$

каждый из логических узлов входит не более четырех аргументов (стрелок). Методика построения дерева катастроф будет показана на примере в разд. 5.

При переходе от дерева отказов к дереву катастроф будем использовать следующие модели, представленные в табл. 2:

*Сборка (C)* – для логических узлов с двумя входными стрелками;

*Ласточкин хвост (S)* – для логических узлов с тремя входными стрелками;

*Бабочка (B)* – для логических узлов с четырьмя входными стрелками.

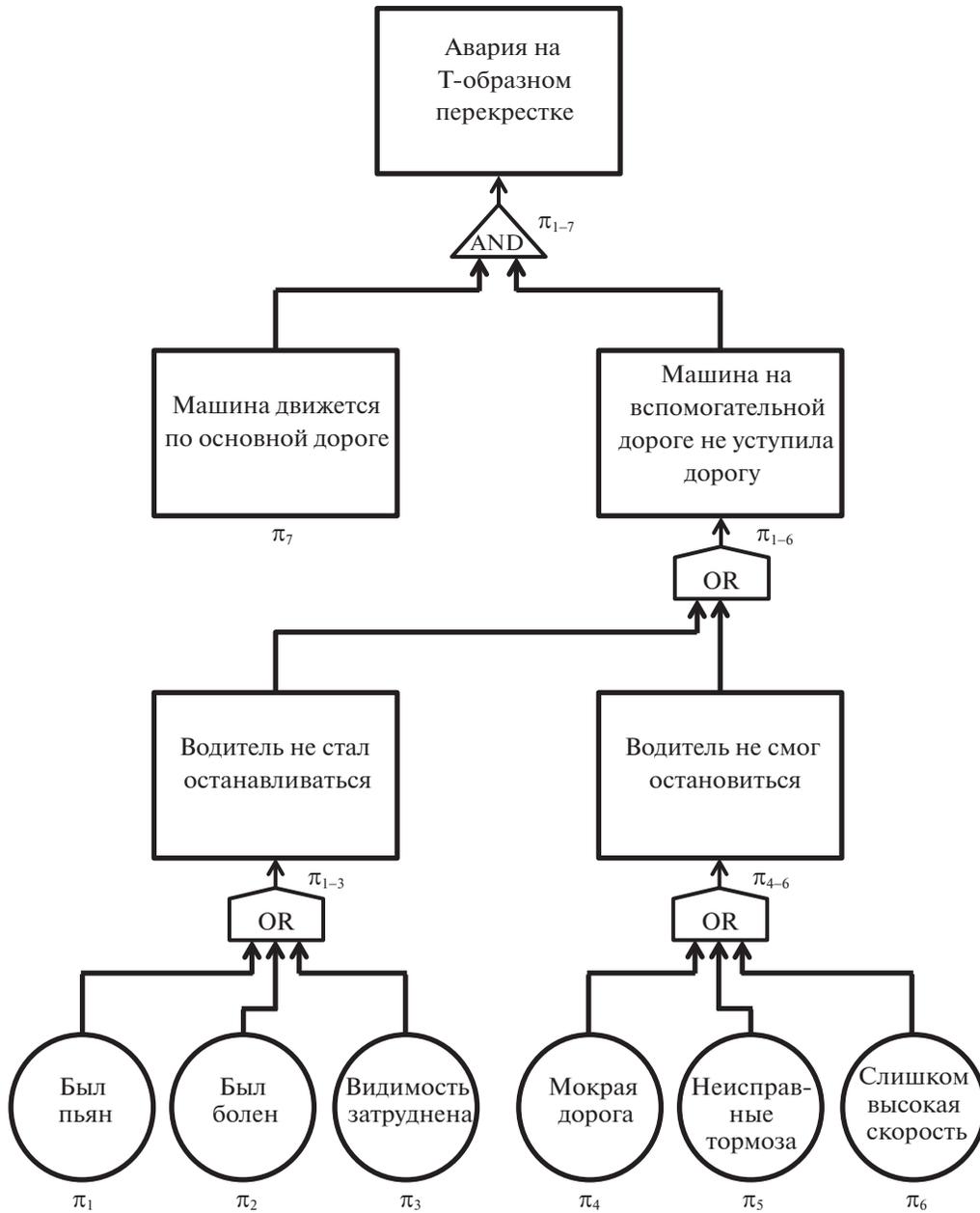


Рис. 4. Дерево отказов

Каждый из узлов дерева катастроф представляет собой преобразователь “входы–выход” по правилам агрегации “вектор–скаляр”, которые приведены в табл. 2. В теории нечетких множеств используются различные методы агрегации функций принадлежности, над которыми выполняются операции AND и OR. Применение каждого из этих методов может давать различные результаты. В частности, в [14] рассмотрен пример необходимости замены операции **min** операцией умножения. Окончательное решение о результатах анализа дерева катастроф для конкретного объекта целесообразно принимать путем сравнения нескольких методов агрегации “вектор–скаляр”. Поэтому в табл. 2, наряду с традиционными для теории нечетких множеств операциями **min** и **max**, приводятся среднее геометрическое и среднее арифметическое. Однако это не исключает возможности применения других известных методов агрегации.

Предполагается, что при нумерации входных стрелок дерева катастроф, соответствующих терминальным вершинам дерева отказов, соблюдается условие  $a \leq b \leq c \leq d$ . Это необходимо для получения **min** и **max** при выполнении операций AND и OR.

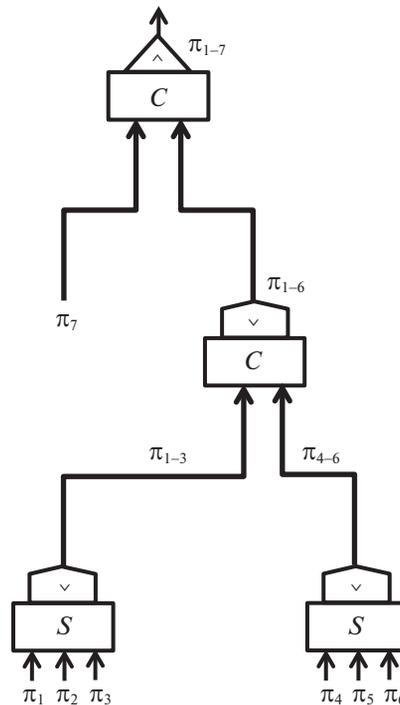


Рис. 5. Дерево катастроф

**5. Пример применения.** На рис. 4 представлено дерево отказов, для аварии на Т-образном перекрестке, где обозначены:  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_6, \pi_7$  – возможности первичных событий, которые соответствуют терминальным вершинам дерева;  $\pi_{1-3}, \pi_{4-5}, \pi_{1-6}$  – возможности промежуточных (не терминальных) событий;  $\pi_{1-7}$  – возможность аварии.

Пользуясь табл. 2, от дерева отказов (рис. 4) переходим к дереву катастроф (рис. 5), которому соответствуют расчетные формулы:

$$\pi_{1-3} = \begin{cases} \max(\sqrt{\pi_1}, \sqrt[3]{\pi_2}, \sqrt[4]{\pi_3}), \\ \frac{1}{3}(\sqrt{\pi_1} + \sqrt[3]{\pi_2} + \sqrt[4]{\pi_3}), \end{cases}$$

$$\pi_{4-6} = \begin{cases} \max(\sqrt{\pi_4}, \sqrt[3]{\pi_5}, \sqrt[4]{\pi_6}), \\ \frac{1}{3}(\sqrt{\pi_4} + \sqrt[3]{\pi_5} + \sqrt[4]{\pi_6}), \end{cases}$$

$$\pi_{1-6} = \begin{cases} \max(\sqrt{\pi_{1-3}}, \sqrt[3]{\pi_{4-6}}), \\ \frac{1}{2}(\sqrt{\pi_{1-3}} + \sqrt[3]{\pi_{4-6}}), \end{cases}$$

$$\pi_{1-7} = \begin{cases} \min(\sqrt{\pi_7}, \sqrt[3]{\pi_{1-6}}), \\ \sqrt{\sqrt{\pi_7} \cdot \sqrt[3]{\pi_{1-6}}}. \end{cases}$$

Исходные данные для расчета по этим формулам задаются экспертно либо с помощью функций принадлежности по известным количественным значениям параметра, влияющего на возможность события. При выборе функций принадлежности можно воспользоваться методом нечеткой перфектности [14].

В табл. 3 приведены результаты расчета возможности аварии  $\pi_{1-7}$  для семи сценариев, каждый из которых представляет собой вектор возможностей ( $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_7$ ) терминальных событий дерева отказов (рис. 4).

Таблица 3. Возможность аварии для различных сценариев

Сценарии	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_{1-7}$	
								(1)	(2)
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.00	0.00
2	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.32	0.42
3	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.45	0.51
4	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.3	0.55	0.57
5	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.4	0.63	0.63
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.5	0.71	0.68
7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.6	0.77	0.71

По табл. 3 необходимо сделать пояснение: столбец (1) соответствует агрегации с использованием  $\min$  и  $\max$ , а столбец (2) – применению среднего геометрического и среднего арифметического. Из табл. 3 видно, что если машина движется по основной дороге ( $\pi_7 \neq 0$ ), то отсутствие аварии ( $\pi_{1-7} = 0$ ) возможно только при  $\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_6 \approx 0$ , т.е. когда нет нарушений, связанных с водителем, видимостью, дорогой, тормозами и скоростью. Наличие хотя бы одного из таких нарушений приводит к резкому возрастанию возможности аварии.

**Заключение.** Статья является первой работой, в которой теория катастроф применяется для моделирования возможности нежелательных событий на основе известного в задачах надежности и безопасности метода деревьев отказов.

Понятие “отказ” рассматривается как бифуркация, т.е. перескок между устойчивыми состояниями, и оценивается нормализованными формулами из теории катастроф. Понятие “возможность отказа” оценивается числом в интервале  $[0, 1]$  и моделируется по правилам нечеткой логики.

Результатом работы является метод анализа дерева катастроф, которое соответствует дереву отказов. Суть предложенного метода состоит в сформулированных правилах агрегации возможностей бифуркаций для различных логических узлов дерева.

Иллюстрация метода анализа катастроф выполнена на примере дерева отказов, моделирующего дорожную аварию на Т-образном перекрестке.

Метод дерева катастроф не отменяет метод дерева отказов, а дополняет его следующими новыми качествами:

1. Отсутствует необходимость проведения трудоемких экспериментов, связанных с получением вероятностей первичных событий, которые влияют на вероятность отказа системы. Вместо вероятностей используются возможности первичных событий, уровни которых оцениваются экспертно или на основе измеряемых параметров и соответствующих функций принадлежности.

2. Наблюдение за динамикой изменения входных параметров позволяет переходить к on-line мониторингу уровня возможности отказа системы.

3. Применение моделей теории катастроф позволяет наблюдать нелинейные эффекты, связанные с резким увеличением возможности отказа при незначительных изменениях входных параметров.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barlow R., Proschan F. Statistical Theory of Reliability and Life Testing. Rinehart and Winston: Holt, 1975.
2. Ryabinin I.A. Reliability and Safety of Structurally Complex Systems. St. Petersburg: SPb Polytechnics, 2000.
3. Solozhentsev E.D. Scenario Logic and Probabilistic Management of Risk in Business and Engineering. St. Petersburg: Business-press, 2004.
4. Ротштейн А.П. Интеграция подходов нечеткой логики и теории хаоса в моделировании и оптимизации надежности // Изв. РАН ТИСУ. 2012. № 4 (51). С. 77–87.
5. Rotshhein A.P., Katielnikov D.I., Pustynnik L.V. Reliability Modeling and Optimization Using Fuzzy Logic and Chaos Theory // International J. of Quality, Statistics, and Reliability. 2012. V. 2012. Article ID 847416. 9 p. <https://doi.org/10.1155/2012/847416>

6. *Thom R.* Structural Stability and Morphogenesis. W. A. Benjamin, Reading, Mass, 1975.
7. *Zeeman E.C.* Catastrophe Theory // Scientific American. 1976. V. 234: P. 65–83.
8. *Arnold V.I.* Catastrophe Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
9. *Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E.* Theory of Oscillators. Pergamon Press, 1966.
10. *Zadeh L.A.* Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility // Fuzzy Sets and Systems. 1978. V. 1. P. 3–28.
11. *Ротштейн А.П.* Алгебра алгоритмов и нечеткая логика в анализе надежности систем // Изв. РАН ТИСУ. 2010. № 2 (49). С. 87–99.
12. *Кательников Д.И., Ротштейн А.П.* Нечетко-алгоритмическое моделирование надежности: оптимизация ресурсов контроля и коррекции // Изв. РАН ТИСУ. 2010. № 6 (49). С. 138–142.
13. *Ching-Hsue Cheng, Ying-Hua Liu, Yin Lin.* Evaluating a Weapon System Using Catastrophe Series Based on Fuzzy Scales // Soft Computing in Intelligent Systems and Information Processing// Asian Fuzzy Systems Symposium. Kenting, Taiwan, 1996. P. 212–217.  
<https://doi.org/10.1109/AFSS.1996.58359>.
14. *Ротштейн А.П.* Выбор условий деятельности человека на основе нечеткой перфектности // Изв. РАН ТИСУ. 2018. № 6 (57). С. 108–119.

---

---

**ИСКУССТВЕННЫЙ  
ИНТЕЛЛЕКТ**

---

---

УДК 004.8

**ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ПОШАГОВОГО  
УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ОПЕРАТИВНОМ  
ПЕРЕСТРОЕНИИ РАСПИСАНИЯ**

© 2021 г. Р. А. Горбачев<sup>a,\*</sup>, Е. М. Захарова<sup>a,\*\*</sup>,  
И. С. Макаров<sup>b,\*\*\*</sup>, В. И. Цурков<sup>b,\*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский физико-технический институт (национальный исследовательский ун-т)” МФТИ,  
Долгопрудный, МО, Россия

<sup>b</sup> Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН (ФИЦ ИУ РАН),  
Москва, Россия

\*e-mail: gorbachev.ra@mipt.ru

\*\*e-mail: zakharova.em@mipt.ru

\*\*\*e-mail: i.s.m.mipt@yandex.ru

\*\*\*\*e-mail: tsur@ccas.ru

Поступила в редакцию 04.02.2021 г.

После доработки 05.02.2021 г.

Принята к публикации 29.03.2021 г.

Приведено описание применения искусственного интеллекта при разработке систем поддержки принятия решения, которые применяются для различных типов транспорта. Эти системы направлены для перестройки расписания движения объектов по причине непредвиденных отклонений заранее запланированных графиков. Используется машинное обучение нейросети с помощью генетического алгоритма. При этом минимизируется функционал, который характеризует отклонение от заданного расписания.

DOI: 10.31857/S0002338821050103

**Введение.** С каждым годом транспортное движение становится все более интенсивным. Увеличивается плотность перевозок как в грузовом, так и в пассажирском движениях. Вследствие этого повышаются требования к исполнению запланированного плана движения, и любое отклонение от него может привести к значительным неустойкам, например, увеличению задержки поездов, их отмене и т.д. [1]. Поэтому разработка систем управления в области движения является актуальным и перспективным направлением. В данной сфере существуют высокие требования к безопасности движения, которые приводят к дополнительным трудностям.

В работе приведено применение искусственного интеллекта, в частности нейронных сетей с использованием генетического алгоритма для обучения.

Основная концепция сводится к задаче управления взаимодействием агентов в динамической среде. Решение является пошаговым. В нем участвует главный агент (диспетчер), взаимодействующий с группой других агентов (движущихся объектов) в динамической среде [2]. Главная решаемая задача — достижение всеми агентами конечных точек их маршрутов с учетом заданных ограничений. При этом отклонение по времени от заданного плана движения для всех агентов должно быть минимальным.

**1. Анализ текущих разработок.** В настоящее время для решения подобных задач разрабатываются алгоритмы, в том числе и с использованием машинного обучения. Такой подход позволяет искать оптимальное решение на несколько шагов вперед.

Теперь несколько слов о библиографии в связи с автоматизацией транспортного диспетчера.

Построение расписаний, схем движения и поиск вариантов решения в случае возникновения конфликтных ситуаций происходит во многом опытно-экспертным путем. В настоящее время разработка и внедрение систем для автоматизации данных процессов с помощью искусственного интеллекта только получает свое развитие. Одной из последних публикаций по внедрению

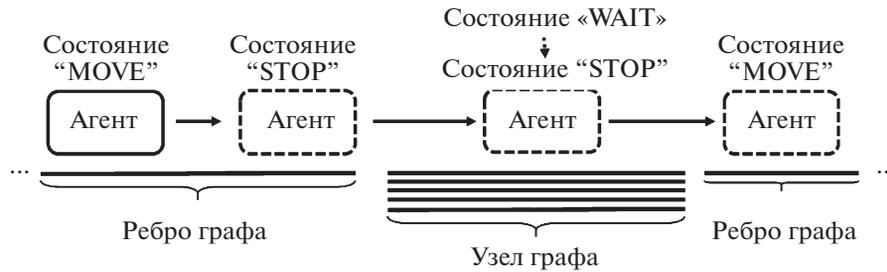


Рис. 1. Математическая модель движения

подхода глубокого обучения для изменения расписаний при сбоях в высокоскоростном движении является работа [3]. Подход, представленный в данной статье, позволяет работать только со скоростным движением. В то же время существует несколько типов движения, отличающихся приоритетом при оперативном пропуске объектов, а также технологическими особенностями движения.

Подход, описанный в [4], позволяет увеличить пропускную способность за счет использования при построении графика генетического алгоритма. Данное решение применяется как плановый график движения. Однако такой подход не предназначен для оперативного разрешения конфликтов. К тому же при их разрешении наиболее приоритетным направлением поиска решения является в первую очередь именно приближение графика исполненного движения к плановому с минимальными отклонениями от него, а не создание нового графика.

В [3] представлен подход, наиболее полно приближенный к поставленной задаче диспетчерского управления. Однако, она так же, как и [5], решена только для одного типа движения. Подобное ограничение упрощает поиск решения, так как в такой модели не существует правил и ограничений по различным видам движения, например приоритет пропуска поездов или ограничения на максимально разрешенную скорость в зависимости от типа движения.

Подход, описываемый ниже, позволяет работать с несколькими видами движения и соответствующими ограничениями для них.

**2. Постановка задачи и основные конструкции.** Для поиска решений при возникновении конфликтных ситуаций необходимо реализовать модель этого движения.

Граф, по которому должны двигаться агенты, представляется как совокупность сегментов-ребер и узлов, которые являются совокупностью параллельных сегментов-ребер. На одном сегменте в один момент времени может находиться только один агент. У сегмента есть следующие параметры: уникальный идентификатор, имя, длина и массив идентификаторов смежных сегментов. Агент задается как объект, имеющий следующие параметры: уникальный идентификатор, тип движения, длина, скорость, приоритет, координаты и маршрут. Маршрут в свою очередь содержит информацию о временах прибытия и стоянки на ребрах узлов и список всех узлов, на которых должен останавливаться текущий агент. Объекты могут иметь следующие статусы: "Move" (агент движется), "Wait" (агент стоит), "Stop Move" (агент закончил движение) или "Stop Wait" (агент закончил стоянку). Агент может получать следующие команды: "Move", "Continue", "Wait". Команды "Move" и "Wait" могут быть выполнены только в том случае, если агент находится в состоянии "Stop". Состояние "Stop" подразумевает либо окончание плановой стоянки агента, либо окончание движения агента по перегону.

На рис. 1 представлено графическое описание предложенной модели.

В данном подходе принятие решений по управлению движением агентов, движущихся в дискретном пространстве в виде планарного графа на участке, будет реализовано на основе интеллектуального управления, для чего была построена полносвязная искусственная нейронная сеть, обученная с использованием генетического алгоритма. Нейронная сеть состоит из трех слоев — входного, выходного и скрытого. Размерность входного слоя составляет порядка 392 нейронов, размерность выходного слоя — 102 нейронов. Количество нейронов в скрытом слое — 392.

На рис. 2 представлена архитектура предполагаемой нейронной сети.

На ее вход передается информация о сегментах графа участка, а также агенты и их маршруты. Результатом работы нейронной сети является вектор команд ожидающим агентам.

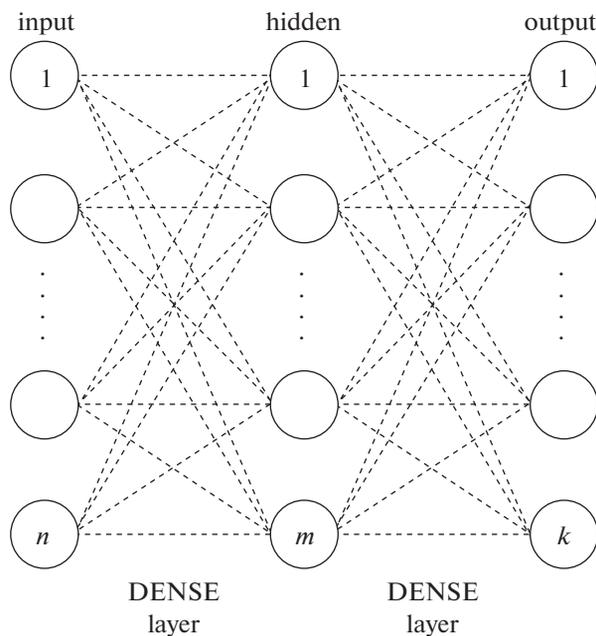


Рис. 2. Архитектура предполагаемой нейронной сети

В работе была построена тестовая модель движения, включающая в себя граф, который в свою очередь состоит из ребер и узлов, а также агентов различных типов, следующих по построенным маршрутам. Весь граф участка, на котором происходит движение, разбит на структурные элементы.

Вводится понятие “инфраструктурный сегмент”. Это такой фрагмент сети, на котором в конкретный момент времени может находиться только один агент. Узел может включать в себя несколько ребер. Каждое такое ребро из совокупности ребер узла является инфраструктурным сегментом. Каждый перегон состоит из некоторого количества блок-участков. Каждый блок-участок является инфраструктурным сегментом. Такие разбиения обеспечивают комфортное формирование входного вектора признаков для нейронной сети. Для каждого инфраструктурного сегмента известна его длина, направленность и смежные с ним инфраструктурные сегменты. Для каждого агента известны все необходимые параметры, такие, как масса, длина и мощность, а также маршрут, по которому он следует. В маршруте содержится информация заданного плана движения: пункт назначения, список остановок, времена прибытия и длительность стоянок. Помимо этого, для каждого инфраструктурного сегмента и каждого агента задается “состояние”. Данная характеристика отображает как текущее состояние инфраструктурного сегмента или агента, так и произошедшие с ними непредвиденные ситуации. Действия главного агента заключаются в том, что он на каждом шаге отдает команды другим агентам таким образом, чтобы они следовали по соответствующим им маршрутам и не нарушали заданные технологические ограничения, связанные с движением по этому маршруту. Непредвиденные ситуации генерируются случайным образом с частотой, задаваемой пользователем в качестве входного параметра. Существует фиксированный набор классов непредвиденных ситуаций, например повреждение путей инфраструктурного сегмента или недееспособность одного из агентов. Для каждого типа непредвиденной ситуации задается его продолжительность. Поиск решения дискретизирован по времени и состоит из “шагов”. Шаг описывает отрезок времени, не содержащий “событий”. Событием называется изменение состояния инфраструктурного сегмента или агента.

В свою очередь событие может быть нештатным или сопутствующим движению агента. Примером такой ситуации является изменение характера движения, основная суть которого заключается в следующем. Пока агент движется по инфраструктурному сегменту или стоит на нем по расписанию, если этот инфраструктурный сегмент служит ребром узла, он находится в одном из следующих состояний – “движется” или “стоит” соответственно.

Однако когда агент доезжает до конца инфраструктурного сегмента или провел нужное количество времени на запланированной остановке, его состояние меняется на “закончил движение”

и “закончил стоянку” соответственно, что и является “запланированным” событием для агента. Это означает, что данный агент готов получить следующую команду и начать движение на указанном инфраструктурном сегменте или продолжать стоять до следующего события. Равномерная дискретизация временной шкалы по минутам была отвергнута по причине слишком мелкой гранулярности шагов, приводящей к их однообразию.

В случае задачи поиска разрешения конфликтных ситуаций с учетом ограничений на соблюдение маршрутов движения агентов главный агент должен решать следующую оптимизационную задачу для всех участников движения:

$$R = \sum_{i=1}^N \sum_{j \in W_i} \omega_i (v_1 \Delta T_{ij} + v_2 \Delta A_{ij} + \dots) \rightarrow \min, \quad (2.1)$$

где  $i$  – индекс агента;  $j$  – индекс участка из множества  $W_i$  перегонов агента  $i$ ;  $\omega_i$  – весовой коэффициент агента  $i$  на основе его типа, задается вручную для каждого агента;  $\Delta T_{ij}$  – изменение времени движения агента  $i$  на участке  $j$  по сравнению с заданным планом движения;  $\Delta A_{ij}$  – изменение затрат энергии агента  $i$  на участке  $j$  по сравнению с заданным планом движения;  $v_k$  – преобразующие коэффициенты линейной комбинации – в текущей версии  $v_k = 1, \forall k > 1$ . Таким образом учитывается только временное отклонение от заданного плана движения, однако допускается также учет энергоэффективности и других параметров.

Система поддержки принятия решений главного агента по управлению движением других агентов основывается на подходе интеллектуального управления с помощью полносвязной искусственной нейронной сети с несколькими скрытыми слоями [1, 6]. Вектор входных параметров  $V_{in}$  формируется на основе информации по каждому инфраструктурному сегменту сети и выглядит следующим образом:

$$V_{in} = [S_{T_1}, S_{W_1}, R_x, 0, S_{W_2}, 0, \dots, S_{T_k}, S_{W_n}, R_x, \dots]. \quad (2.2)$$

Таким образом вектор  $V_{in}$  состоит из  $N$  троек чисел  $S_{T_k}, S_{W_n}, R_x$ , где  $N$  – количество инфраструктурных сегментов в сети; второе число  $S_{W_n}$  в каждой тройке – состояние соответствующего инфраструктурного сегмента; первое  $S_{T_k}$  и третье  $R_x$  числа относятся к агенту, если таковой присутствует на данном инфраструктурном сегменте, они имеют ненулевые значения и задают состояние агента и индекс его маршрута соответственно. Дополнительную информацию об агенте можно получить, зная его маршрут. Размерность вектора  $V_{in}$  равна  $3N$ . Данный подход к формированию вектора  $V_{in}$  обеспечивает ему фиксированную размерность при любом количестве агентов в системе. Вектор выходных параметров  $V_{out}$  содержит информацию о командах, отдаваемых каждому агенту. В системе используются три типа команд:

- “continue”, указывающая агенту, что тот должен сохранять свое состояние до следующего события, т.е. продолжать двигаться или стоять, если он движется или стоит соответственно;
- “move I”, указывающая агенту, который завершил движение или стоянку на текущем инфраструктурном сегменте, следующий инфраструктурный сегмент, на который он должен начать движение;
- “dummy” – служебная команда-заглушка, использующаяся, если на инфраструктурном сегменте отсутствует агент.

В векторе  $V_{out}$  применяется One-Hot-Encoding, за счет чего его размерность без дополнительных преобразований пропорциональна  $N^2$ , однако может быть амортизирована до  $mN$  за счет учета ограничений команды “move”, где  $m$  – максимальное по сети количество смежных инфраструктурных сегментов. В данном подходе процесс обучения нейронной сети – это обучение оптимальности, т.е. обучение давать агентам команды, обеспечивающие наилучшее решение оптимизационной задачи. Для этого был реализован генетический алгоритм [7, 8]. Структура процесса обучения выглядит следующим образом.

**Шаг 1.** Создается начальная популяция из  $S = 100$  особей. Каждая особь представляет из себя отдельный экземпляр нейронной сети со случайными равномерно распределенными весами связей.

**Шаг 2.** Выполняется подготовка для естественного отбора особей в следующее поколение. Для этого осуществляется ранжирование всех особей по результатам оценки (формула (2.1)) за

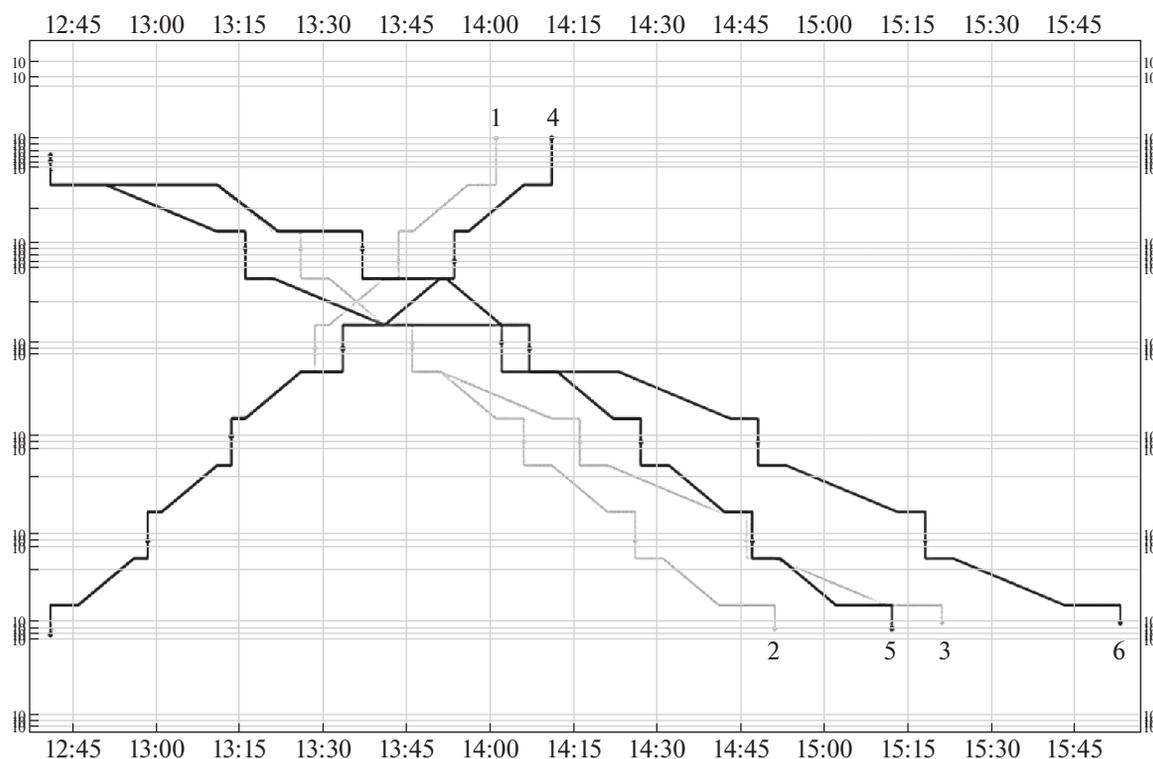


Рис. 3. Пример работы системы

$k = N \text{ avg}_i \text{Dim}(W_i)$  шагов, где  $N$  – текущее количество агентов в сети,  $\text{avg}_i \text{Dim}(W_i)$  – среднее количество инфраструктурных сегментов на маршруте.

Шаг 3. Генерируется следующее поколение: top 40% – прямое копирование, top 10% – кроссовер, random 30% – кроссовер, random 20% – прямое копирование, а также выполняются случайные мутации не более 1% весовых коэффициентов особей.

Шаг 4. Процесс повторяется с шага 2 до достижения заданного условия останова.

**3. Применение к реальному движению.** Модель поведения диспетчера реализована с помощью полносвязной нейронной сети, обученной с использованием генетического алгоритма. В процессе обучения создается несколько экземпляров нейронной сети, из которых выбирается тот, который обеспечивает наилучшее управление движением поездов с соответствию с приведенным функционалом. В процессе работы генетического алгоритма при обучении нейронной сети выполняются параллельные вычисления в многопроцессном режиме.

Для тестирования интеллектуальной системы был выбран линейный участок на графе железнодорожной сети Монголии. Он включает в себя шесть станций и пять перегонов между ними. Каждая станция состоит из трех или более станционных путей. Инфраструктурным сегментом считается станционный путь или перегон между станциями. Для обучения системы используются данные нормативного графика с конфликтами движения, которые возникают в случае, когда два агента претендуют на один и тот же путь. Результатом обучения являются весовые коэффициенты нейронной сети. При обучении минимизируется функционал отклонения от нормативного графика движения и окончательно выбираются упомянутые веса.

На рис. 3 представлен результат работы системы. По вертикальной оси отмечены станции выбранного участка железнодорожной сети Монголии и их станционные пути. На горизонтальной оси задана абсолютная временная шкала. Наклонные отрезки графиков соответствуют движению поездов по перегонам. Горизонтальные и вертикальные отрезки обозначают пребывание поездов на станционных путях.

Номерами 1–3 обозначены траектории планового графика движения с конфликтами. Под номерами 4–6 обозначены полученные системой траектории, где траектория 4 – график движения поезда с максимальным приоритетом, траектория 6 – с наименьшим. Из графика видно, что

отклонение поезда с максимальным приоритетом является минимальным по сравнению с другими поездами.

**Заключение.** В работе описано применение методов искусственного интеллекта для решения конфликтов движения. Дальнейшее развитие предложенного подхода заключается в следующем. Необходимо использовать альтернативные архитектуры нейронных сетей, такие, как, например, CNN и LSTM, с целью повышения быстродействия решения и более близкому приближению к оптимуму. Помимо генетического алгоритма возможно применение других методов оптимизации. Интересно также расширить количество агентов и добавить им дополнительные характеристики.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bettinelli A., Santini A., Vigo D.* A Real-time Conflict Solution Algorithm for the Train Rescheduling Problem // *Transportation Research. Pt B: Methodological.* 2017. V. 106. P. 237–265.
2. *Zakharova E.M., Paschenko F.F., Takmazyan A.K., Minashina I.K., Kuznetsov N.A.* Intelligent Control Systems for Maintenance of Railway Rolling Stock // *Proc. 11th IEEE Intern. Conf. on the Application of Information and Communication Technologies (AICT2017).* Moscow. 2017. V. 1. P. 423–425.
3. *Ning L., Li Y., Zhou M., Song H., Dong H.* A Deep Reinforcement Learning Approach to High-speed Train Timetable Rescheduling under Disturbances // *IEEE Intelligent Transportation Systems Conf. (ITSC).* Auckland, New Zealand, 2019.
4. *Jih-Wen Sheu, Wei-Song Lin.* Designing Automatic Train Regulation for MRT System by Adaptive Critic Method // *IEEE Intern. Joint Conf. on Neural Networks (IEEE World Congress on Computational Intelligence).* Hong Kong, 2008.
5. *Barman R., Baishya Ch.J., Kharmalki B., Syiemlieh A., Pegu K.B., Das T., Saha G.* Automated Train Scheduling System Using Genetic Algorithm // *Intern. Symp. on Advanced Computing and Communication (ISACC).* Silchar, 2015.
6. *Kattan A.R.M., Abdullah R., Salam R.A.* Training Feed-Forward Neural Networks Using a Parallel Genetic Algorithm with the Best Must Survive Strategy // *Intern. Conf. on Intelligent Systems, Modelling and Simulation.* Liverpool, 2010.
7. *Haupt R.L., Haupt S.E.* *Practical Genetic Algorithms.* 2nd ed., New Jersey: John Wiley and Sons, 2004. P. 253.
8. *Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы: учеб. пособие 2-е изд. М.: Горячая линия-Телеком, 2013.

УДК 531.38

## ДОПЛЕРОВСКАЯ СЕЛЕКЦИЯ НАЗЕМНЫХ ОБЪЕКТОВ, ДВИЖУЩИХСЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ ОРИЕНТАЦИИ ВЕКТОРА СКОРОСТИ<sup>1</sup>

© 2021 г. А. В. Бобин<sup>а</sup>, В. М. Лисицын<sup>а,\*</sup>, К. В. Обросов<sup>а</sup>, М. И. Сикачева<sup>а</sup>

<sup>а</sup> ФНЦ ФГУП “ГосНИИАС”, Москва, Россия

\*e-mail lvm@gosniias.ru

Поступила в редакцию 06.04.2021 г.

После доработки 26.04.2021 г.

Принята к публикации 31.05.2021 г.

Рассматривается задача радиолокационного поиска—обнаружения—классификации наземных объектов, движущихся со случайными изменениями направления вектора скорости. Предложен способ управления ориентацией радиолокационного луча, который максимизирует ширину полосы мониторинга на поверхности земли, обеспечивая при этом на ней максимально возможное разрешение и отсутствие “мертвых зон” слева и справа от направления движения объектов, обычно возникающих при доплеровской селекции движущихся объектов. Создана компьютерная модель, которая позволяет исследовать зависимости вероятностей обнаружения и классификации объектов от скорости их движения при различных сценариях проведения мониторинга путем массового численного эксперимента. Методами моделирования доказаны преимущества предложенного способа по сравнению с традиционными.

DOI: 10.31857/S0002338821050048

**Введение.** Мониторинг земной поверхности часто предполагает необходимость обнаружения и классификации движущихся объектов, например автомобильной техники и кораблей. Для решения такой задачи могут эффективно использоваться барражирующие беспилотные летательные аппараты (БЛА), оборудованные радиолокаторами бокового обзора с синтезом апертуры (РСА) за счет движения БЛА и доплеровской селекции движущихся объектов, которую принято называть селекцией движущихся целей (СДЦ). Однако известные методы использования режима СДЦ предполагают наличие достаточно большой радиальной составляющей вектора скорости движущегося объекта. Это приводит к появлению так называемых “мертвых зон” слева и справа от направления движения объекта, т.е. угловых секторов (часто размером 10–20°), находясь в которых БЛА не может обнаружить объект по доплеровскому сдвигу частоты отраженного излучения.

**1. Постановка задачи.** В статье ставится задача разработки метода решения этой проблемы. Необходимо подтвердить его работоспособность путем математического моделирования процессов поиска—обнаружения—классификации движущихся объектов на барражирующем БЛА с РСА.

При этом должны использоваться следующие свойства современных РСА [1–4]:

антенная система, представляющая собой фазированную антенную решетку (ФАР), обеспечивает возможность безынерционного изменения направления приемопередающего луча в угловом конусе более  $\pm 20^\circ$ ;

РСА способна работать в телескопическом (прожекторном) режиме, при котором диаграмма направленности (ДН) непрерывно следит за заданной на поверхности земли зоной обзора в течение назначенного времени синтезирования  $T_c$  и некогерентных накоплений  $N_n$ -кадров, формируя радиолокационное изображение (РЛИ) с самым высоким по сравнению с другими режимами разрешением;

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 20-08-00949-а в части обнаружений и № 19-29-06077-мк в части классификации).

протяженность и ширина зоны обзора определяются ДН, ее угловым положением и дальностью до середины зоны обзора;

РСА для БЛА обычно функционируют в диапазоне высот от 1 до 10 км при скоростях полета до 300 км/ч;

при габаритах реальной антенны  $0.55 \times 0.35 \times 0.3$  м ее масса не превышает 50 кг.

**2. Моделируемые процессы и основные соотношения.** Решается задача поиска движущихся объектов в максимально широкой полосе мониторинга на подстилающей поверхности (ПП) при неизвестных изменяющихся ориентациях векторов скоростей объектов. При этом в РСА используется прожекторный режим (*StaringSpotLight* [5]), позволяющий получать РЛИ с максимальным разрешением путем последовательного формирования зон обзора на полосе мониторинга, которая параллельна направлению полета БЛА с боковым смещением  $L$ , т.е. расположена на горизонтальной дальности  $L$  от маршрута полета. Конфигурация каждой зоны обзора определяется формой ДН и представляет собой прямоугольник, вытянутый вдоль радиолокационного луча (РЛ) на горизонтальной дальности от носителя  $L^+$  при отклонении луча на небольшой угол вперед от перпендикуляра к вектору скорости БЛА и  $L^-$  при отклонении назад на тот же угол. Отклонения вперед и назад в предлагаемой системе обеспечивает облучение объектов в двух ракурсах и применяются для того, чтобы гарантировать возможность формирования ненулевой радиальной составляющей вектора скорости объекта, движущегося с неизвестной ориентацией вектора скорости. Такая составляющая позволяет эффективно использовать СДЦ с синтезированием апертуры (СА) в пределах зон обзора для обнаружения объекта при отклонении РЛ вперед или назад и допускает классификацию объекта соответствующую разрешающей способности на ПП  $\delta l$  при СА. При этом азимутальный угол отклонения луча  $\theta^+$  соответствует дальности до середины зоны обзора  $L^+$  при отклонении луча вперед, а угол  $\theta^-$  соответствует дальности  $L^-$  при отклонении назад, причем  $L^+ \approx L^-$ . Углы  $\theta^+$  и  $\theta^-$  отсчитываются от направления вектора скорости ЛА.

Ширина полосы мониторинга определяется по очевидной формуле при укладывании на ПП под углом  $\theta^+$  зон обзора в один ряд (геометрически похоже на одну паркетную полосу с паркетинами, уложенными под углом  $\theta^+$  к полосе, а каждая паркетина имитирует одну зону обзора):

$$\Delta L = \frac{\Delta\theta_{\text{верт}}^{\text{ДН}} R^+ \sin \theta^+}{\sin \varphi_n}, \quad (2.1)$$

где  $\Delta\theta_{\text{верт}}^{\text{ДН}} = 2\lambda/d_{\text{верт}}$  – угловой размер главного лепестка ДН в вертикальной плоскости ( $\lambda$  – длина волны,  $d_{\text{верт}}$  – вертикальный размер реальной антенны);  $R^+$  – наклонная дальность, соответствующая величине  $L^+$ ;  $\varphi_n$  – угол наклона ДН.

Например, при высоте полета  $H = 10000$  м ширина полосы мониторинга при боковом смещении БЛА от ее середины  $L = 50000$  м составляет в соответствии с (2.1)  $\Delta L = 25000$  м, если вертикальный размер антенны  $d_{\text{верт}} = 0.35$  м. При этом  $R^+ = 60000$  м,  $\theta^+ = 56^\circ$ . Плотное укладывание на земле зон обзора соответствует скорости БЛА  $V = 650$  м/с, если горизонтальный размер антенны  $d_{\text{гор}} = 0.55$  м, время синтезирования  $T_c = 3$  с, число некогерентных накоплений кадров  $N_n = 3$ .

Очевидно, что с уменьшением дальности  $L$  при неизменных  $R^+ \approx R^- \approx R$  ширина полосы мониторинга  $\Delta L$  и разрешения  $\delta l$  при укладывании зон обзора в один ряд будут уменьшаться.

**2.1. Разрешающая способность.** Разрешающая способность, определяющая возможность классификации объектов, рассчитывается по формулам:

$$\delta l = \frac{\lambda R^+}{2VT_c \sin \theta^+ \cos \varphi_n} \quad \text{или} \quad \delta l = \frac{\lambda R^-}{2VT_c \sin \theta^- \cos \varphi_n} \quad (2.2)$$

и, следовательно, улучшается при увеличении скорости полета БЛА за счет увеличения базы синтезирования  $VT_c$ . Время синтезирования  $T_c$  при размещении РЛС на БЛА не рекомендуется увеличивать более 3 с из-за нестабильностей движения БЛА в воздухе.

2.2. Вероятность обнаружения объекта. Вероятность обнаружения объекта при отраженном излучении со случайными амплитудой и начальной фазой вычисляется как [3]

$$P_{\text{обн}} = \frac{1}{P_{\text{л.т}}^{1+q\sqrt{N_n}}},$$

где  $q$  – отношение сигнал/шум,  $N_n$  – число некогерентно накапливаемых кадров РЛИ,  $P_{\text{л.т}}$  – вероятность ложных тревог.

Выражение для  $1/q$  в соответствии с [1, 2, 6] можно представить в виде трех слагаемых:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_{\text{внутр}}} + v \frac{\sigma_{\phi}}{\sigma_{\text{об}}} + vU, \tag{2.3}$$

где  $vU$  – слагаемое, учитывающее влияние организованной шумовой помехи;  $q_{\text{внутр}}$  – отношение сигнал/шум из-за внутренних (тепловых) шумов РСА [1, 2]:

$$q_{\text{внутр}} = \frac{P_{\text{ср}} T_{\text{с}} G^2 \lambda^2 \sigma_{\text{об}}}{(4\pi)^3 k T F_{\text{ш}} \alpha_n R^4};$$

$\sigma_{\text{об}}$  – эффективная поверхность рассеяния (ЭПР) объекта;  $\sigma_{\phi} = \sigma_{\text{о.п}} \delta l^2 / \cos \varphi_n$  – ЭПР фона в элементе разрешения;  $\sigma_{\text{о.п}}$  – удельная ЭПР поверхности, на которой наблюдается объект;  $v$  – коэффициент, учитывающий смещение спектра объекта при СДЦ в область, соответствующую боковой лепестку ДН (при неподвижных объектах в главном лепестке  $v = 1$ );  $P_{\text{ср}}$  – средняя мощность излучения;  $T_{\text{с}}$  – время синтезирования;  $G$  – коэффициент усиления антенны локатора;  $\lambda = 3$  см – длина волны излучения;  $k T F_{\text{ш}} = 10^{-20}$  Вт/Гц – спектральная плотность мощности внутреннего шума;  $\alpha_n$  – коэффициент потерь;  $R$  – наклонная дальность до объекта.

Величину  $U$  можно рассчитывать по формуле

$$U = \frac{4\pi \psi_{\text{п.п}} \alpha_{\text{п.п}} R^2}{T_{\text{с}} P_{\text{ср}} \sigma_{\text{об}}},$$

где  $\psi_{\text{п.п}}$  – спектральная плотность шумовой помехи на выходе антенны постановщика помех ( $\psi_{\text{п.п}} = G_{\text{п.п}} P_{\text{п.п}} / \Delta f_{\text{п.п}}$ , где  $G_{\text{п.п}}$ ,  $P_{\text{п.п}}$  и  $\Delta f_{\text{п.п}}$  – коэффициент усиления антенны, мощность и полоса частот излучения постановщика помех).

Уровень боковых лепестков в соответствии с [6] составляет  $-46 \dots -60$  дБ, т.е. максимальное значение коэффициента  $v$  в боковых лепестках равно 0.000025. Тогда, даже при больших значениях  $\sigma_{\text{о.п}}$  и  $\delta l$  ( $\sigma_{\text{о.п}} = -14$  дБ,  $\delta l = 4$  м) и малых ЭПР объекта ( $\sigma_{\text{об}} = 0.3 \text{ м}^2$ ), второе слагаемое в выражении (2.3) в 100 раз меньше первого. Поэтому при СДЦ не надо учитывать фоновые шумы, т.е. второе слагаемое в (2.3) [2].

Поскольку выражение (2.3) оценивает отношение сигнал/шум, приведенное к одному элементу разрешения (одному пикселю РЛИ), то для оценки вероятности обнаружения объекта необходимо сформировать воспринимаемое отношение сигнал/шум  $q_{\text{об}}$  с учетом пространственного накопления информации об образе объекта, состоящего из нескольких пикселей. В соответствии с [7] величину  $q$  надо увеличить в  $K$  раз. Коэффициент  $K$  рассчитывается следующим образом:

$$K = \frac{11}{1 + \frac{10}{(xlzr)^{1.2}}}, \quad xl = \begin{cases} l_{\text{об}}/\delta l, & \text{если } \delta l < l_{\text{об}}; \\ 1, & \text{если } \delta l \geq l_{\text{об}}; \end{cases} \quad zr = \begin{cases} w_{\text{об}}/r, & \text{если } r < w_{\text{об}}; \\ 1, & \text{если } r \geq w_{\text{об}}; \end{cases}$$

где  $\delta l$  – разрешение по азимуту, которое определяется по формулам (2.2);  $l_{\text{об}}$  и  $w_{\text{об}}$  – длина и ширина объекта;  $r$  – разрешение по горизонтальной дальности (в метрах).

2.3. Условие возможности применения СДЦ. Используемое в модели условие возможности применения СДЦ для переднего луча имеет вид

$$\left| \frac{\sin \theta^+}{\cos(\varphi - \theta^+)} \right| < \left| \frac{V_{\text{об}} d_{\text{гор}}}{\lambda V} \right|, \tag{2.4}$$

где  $\varphi$  – угол ориентации вектора скорости цели (отсчитывается от направления полета);  $V_{\text{об}}$  – скорость объекта;  $d_{\text{гор}}$  – горизонтальный размер реальной антенны.

Для заднего луча необходимо в (2.4) заменить  $\theta^+$  на  $\theta^-$ .

Формула (2.4) является следствием того, что радиальная составляющая скорости цели не должна попасть в диапазон скоростей сближения с точками на земле, которые находятся в пределах главного лепестка ДН и используются при синтезировании для их пространственного разрешения. Поэтому модуль радиальной составляющей  $|V_{об} \cos(\varphi - \theta^+)|$  должен быть больше, чем  $\Delta\theta_0 |V \sin \theta^+|$ , где  $\Delta\theta_0 = \lambda/d_{гор}$  – угловое отклонение первого нуля в ДН от ее середины (т.е. полная ширина главного лепестка  $\Delta\theta_{ДН} = 2\Delta\theta_0$ ).

2.4. Условие попадания в зону обзора. Условием попадания в зону обзора (при отклонении луча вперед) для  $i$ -го объекта в связанной с БЛА системе координат является выполнение четырех неравенств:

$$\left(L^+ - \frac{\Delta L^+}{2}\right) \sin \theta^+ < z_{об i} < \left(L^+ + \frac{\Delta L^+}{2}\right) \sin \theta^+, \quad (2.5)$$

$$\frac{z_{об i}}{\operatorname{tg} \theta^+} - \frac{\Delta g}{2 \sin \theta^+} < x_{об i} < \frac{z_{об i}}{\operatorname{tg} \theta^+} + \frac{\Delta g}{2 \sin \theta^+}, \quad (2.6)$$

если цель справа и ось  $z$  ориентирована направо, т.е. работает ФАР правого борта. Если же работает ФАР левого борта (цель слева), а ось  $z$  ориентирована направо, то в (2.5) и (2.6) надо все “<” заменить на “>”. Здесь  $\Delta L^+$  и  $\Delta g$  – протяженность зоны обзора на ПП вдоль и поперек луча;  $x_{об i}$ ,  $z_{об i}$  – продольная и поперечная текущие координаты  $i$ -го объекта;  $L^+ = L/\sin \theta^+$  – горизонтальная дальность (в плоскости  $(x, z)$ ) до середины зоны обзора.

Выражения (2.5) и (2.6) получены с помощью простых геометрических построений. Величины  $\Delta L^+$  и  $\Delta g$  соответствуют наиболее информативной области главного лепестка ДН реальной антенны. При отклонении луча назад ( $\theta^- > 90^\circ$ ) в (2.5) и (2.6) необходимо заменить  $\theta^+$  на  $\theta^-$ .

2.5. Организация поиска. Организация поиска имеет два отличия от известных.

1. При каждом азимутальном угле отклонения ( $\theta^+$  или  $\theta^-$ ) на ПП укладываются три, а не одна, полоса, путем последовательного формирования трех зон обзора на разных, но согласованных, дальностях  $L^+$  со значительным перекрытием (рис. 1). Параметр  $\Delta g$  соответствует ширине ДН на уровне 0.8 главного лепестка, которая равна  $\Delta\theta_{азим} \approx \Delta\theta_0$ .

2. Доплеровская селекция осуществляется как при отклонении луча вперед (угол  $\theta^+$ ), так и при его отклонении назад (угол  $\theta^-$ ), причем  $\theta^- = 180^\circ - \theta^+$ . Это позволяет формировать на круговой диаграмме направлений движения объектов непересекающиеся сектора углов  $\varphi$ , в которых СДЦ перестает работать, т.е. приводит к исчезновению “мертвых зон”. Причем выбор угла  $\theta^+ \approx 72^\circ$  не приводит к существенному увеличению дальностей  $L^+$  и  $L^-$  по сравнению с минимальной дальностью  $L$ , т.е. не наблюдается значительного уменьшения вероятностей обнаружения объектов при синтезировании апертуры из-за замены бокового обзора двумя полубоковыми. Зато движущиеся объекты, не обнаруженные в трех передних зонах обзора, обнаруживаются в трех задних, которые последовательно формируются при отклонении луча назад в направлении  $\theta^-$ .

В результате на каждом периоде сканирования формируются шесть зон обзора с когерентным и некогерентным накоплением сигнала. Величина такого периода

$$T_{скан} = 2(3N_n T_c + \Delta T), \quad (2.7)$$

где  $\Delta T$  – время переброса луча из направления  $\theta^+$  в  $\theta^-$  или из  $\theta^-$  в  $\theta^+$ ;  $N_n$  – число некогерентных накоплений при формировании одной зоны обзора;  $T_c$  – время синтезирования антенны. Выбор  $N_n$  и  $T_c$  являлся одной из задач моделирования.

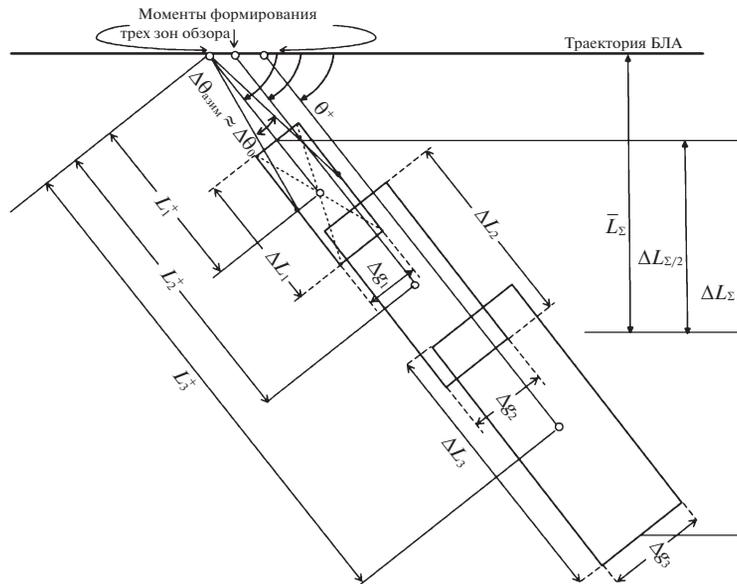


Рис. 1. Зоны обзора, формируемые передним лучом

Таким образом, в статье предложен способ поиска объектов, который будем называть двухкурсной СДЦ, на основе зондирования поверхности земли в двух направлениях, симметричных относительно перпендикуляра к вектору скорости ЛА. Способ позволяет использовать преимущества синтезированной апертуры при выделении целей, движущихся в любом направлении (без “мертвых зон” в боковых секторах относительно вектора скорости цели).

2.6. К л а с с и ф и к а ц и я н а з е м н ы х о б ъ е к т о в. Классификация наземных объектов на три типа автотранспорта (легкового, грузового и длинномерного) производится путем оценки максимального размера их РЛИ, который соответствует длине объекта. Здесь  $l$  – истинная, но не известная в реальности длина объекта,  $\tilde{l}$  – измеренная. Автоматическая классификация проводится и возможна, если разрешение по азимуту меньше 3.2 м [5]. Результат измерения длины по изображению при пиксельном дискрете  $\delta l$  возможен в диапазоне  $l - \delta l < \tilde{l} < l + \delta l$  и является модулем разности измерений пиксельных координат переднего и заднего краев объекта, определяемых с ошибками  $\zeta_{\text{пер}}$  и  $\zeta_{\text{зад}}$ , которые являются независимыми случайными величинами, распределенными по равномерному закону в диапазоне от  $-\delta l/2 < \zeta < +\delta l/2$ . Тогда функция плотности вероятности случайной величины  $\tilde{l}$  имеет вид равнобедренного треугольника с основанием  $2\delta l$  и высотой  $1/\delta l$ , который расположен симметрично относительно точки  $\tilde{l} = l$  на оси  $\tilde{l}$ . При классификации в реальности сравнивается результат измерения  $\tilde{l}$  с рубежом  $r$ , т.е. определяется  $\tilde{l} < r$  или  $\tilde{l} > r$ . При моделировании такой классификации рассчитываем, с какой вероятностью результат измерения  $\tilde{l}$  будет меньше  $r$ , т.е. интересуемся только событием  $\tilde{l} < r$ , так как предполагаем, что  $\tilde{l} < r$  и  $\tilde{l} > r$  являются гипотезами (образуют полную группу несовместных событий).

П р и м е ч а н и е. Такой подход позволяет провести однозначную классификацию и в случае нескольких рубежей, если между ними расстояние больше, чем  $2\delta l$ . Если же меньше, чем  $2\delta l$ , то необходимо при моделировании интересоваться больше, чем одним событием (например, определять вероятности событий  $\tilde{l} < r_1$  и  $\tilde{l} < r_2$  в результате одного измерения).

Если при моделировании задана длина объекта  $l$  и рассчитано разрешение  $\delta l$ , то при известном рубеже  $r$  по длине объекта, который разделяет классы объектов (1 и 2), можно определить, с какой вероятностью обнаруженный объект будет отнесен к первому и второму типам по результату измерения  $\tilde{l}$ . Для этого достаточно рассчитать площади под функцией плотности вероятности

сти случайной величины  $\tilde{l}$  до и после рубежа  $r$ . Вероятность того, что обнаруженный объект относится к типу, имеющему меньшую длину, может быть рассчитана следующим образом:

$$P_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } r < l - \delta l, \\ \frac{(r - (l - \delta l))^2}{2(\delta l)^2}, & \text{если } l - \delta l < r < l, \\ 1 - \frac{(r - (l + \delta l))^2}{2(\delta l)^2}, & \text{если } l < r < l + \delta l, \\ 1, & \text{если } r > l + \delta l. \end{cases}$$

Используя эти выражения, моделировалась классификация автотранспорта с целью определения типов автомобилей (легковой, грузовой, длинномерный), имея в виду рубежи для отличия по длине легкового от грузового равным  $r = 6$  м, а грузового от длинномерного равным  $r = 12$  м.

Для оценки статистических характеристик результатов применения двухкурсовой СДЦ при мониторинге полосы на поверхности земли был разработан метод моделирования. Этот метод позволяет формировать зависимости статистических оценок вероятностей обнаружения объектов и их классификации от модуля скорости при движении объектов со случайно изменяющейся ориентацией вектора скорости для случаев доплеровской селекции одиночных объектов и колонн автотранспорта при различных параметрах РСА, наземных объектов, кинематики БЛА и организованных помех.

**3. Результаты моделирования.** При выборе времени синтезирования  $T_c$  и числа некогерентных накоплений  $N_n$  сравнивались дальности обнаружения для различных комбинаций величин  $T_c$  и  $N_n$ . Учитывая сочетание малого  $T_{\text{скан}}$  (2.7) и получаемых при этом достаточно больших дальностей обнаружения автотранспорта, были выбраны параметры накопления сигнала  $T_c = 1.7$  с,  $N_n = 1$ ,  $\Delta T = 1$  с, т.е. в каждой зоне обзора изображение формируется в результате одного акта когерентного накопления при времени синтезирования апертуры 1.7 с. Тогда период сканирования (период формирования всех шести зон обзора в процессе мониторинга полосы на ПП) составляет  $T_{\text{скан}} = 12.2$  с. При этом формируются достаточно большие перекрытия зон обзора, которые позволяют использовать для обнаружения колонны (длиной до 0.5 км) результат однократного синтезирования апертуры за время  $T_c = 1.7$  с без слияния изображений на смежных зонах обзора. Вероятности обнаружения и удовлетворения требований по разрешению на колонне оценивались методами моделирования при различных скоростях движения объектов.

Получение адекватных реальности статистических оценок вероятностей обнаружений и классификаций при моделировании возможно, если будут правильно выбраны независимые случайные воздействия при повторении опыта (т.е. последовательного формирования зон обзора в процессе полета, одновременного с движением объектов и розыгрышем расчетных вероятностей обнаружений). В нашем случае такими воздействиями являются начальные условия для имитации движения колонны объектов, отклонения от математических ожиданий случайных величин, сравниваемых при розыгрыше с расчетными вероятностями, и направления движений колонны. В связи с этим в модели генерируются независимые случайные величины, формирующие начальную координату колонны и числа  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$  ( $N$  – число объектов в колонне) для розыгрыша расчетных вероятностей обнаружения и классификации каждого объекта. Статистики формируются в результате множества полетов БЛА и одновременного движения колонны со скоростью  $V_{об}$  под разными углами  $\varphi$  из-за извилистости дорог.

При моделировании ширина полосы мониторинга составляла  $\Delta L_z = 12346.8$  м, а ее середина смещена на горизонтальную дальность  $\bar{L}_z = 19578$  м от проекции на ПП траектории полета. Скорость  $V_{об}$  варьировалась в диапазоне 4–20 м/с (14.4–72 км/ч). БЛА барражирует, формируя последовательно на поверхности земли две полосы мониторинга на выбранном участке местности. В пределах каждой полосы движется колонна автотранспорта. В результате периода барражирования производится обнаружение и классификация объектов для случаев полета БЛА приблизительно в том же и противоположном направлениях по сравнению с направлением движения колонн. Траектории движения колонн соответствуют сильно извилистым грунтовым дорогам на выбранном реальном участке местности, что приводит на многих периодах полета к разбросу углов ориентации векторов скоростей объектов  $\varphi$  в диапазонах  $\pm 80^\circ$  и  $\pm 170^\circ$  при полете вперед и назад соответственно. В результате моделирования формируются статистические оценки

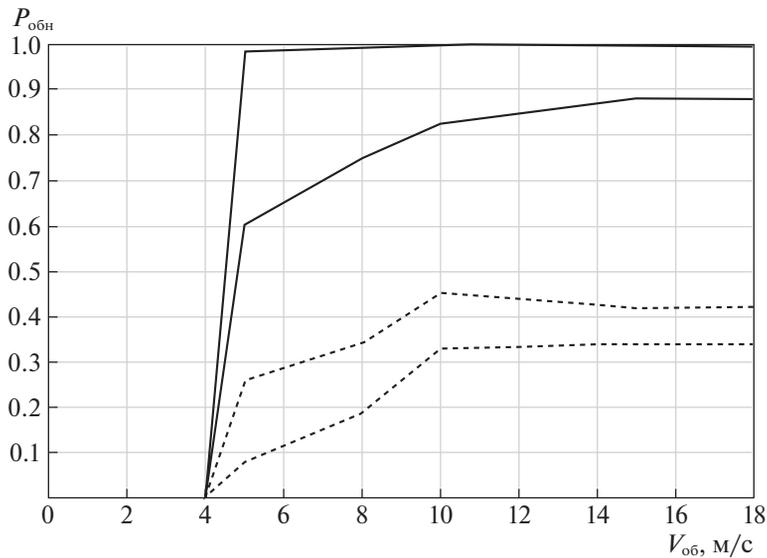


Рис. 2. Области вероятностей обнаружения объекта

вероятностей  $P_{\text{обн}}$  обнаружений колонны для различных модулей скоростей объектов  $V_{\text{об}}$  при случайных направлениях движения (т.е. углах  $\varphi$ ). Построение графиков зависимостей оценок вероятностей от модуля скорости объектов позволяет определить основную характеристику двухкурсной СДЦ, а именно ее чувствительность по величине выделяемой скорости объектов и зависимость этой чувствительности от различных факторов.

Поиск объектов проводится по РЛИ зон обзора, каждая из которых формируется за время  $T_c = 1.7$  с. Поэтому человек-оператор не в состоянии успевать анализировать последовательность РЛИ. Необходимо использовать для обнаружения автоматическое выделение объектов в результате СДЦ и оценку их максимального размера на изображении (и, следовательно, их длины) для проведения классификации. Задачей оператора при этом является контроль работы автоматической СДЦ по предъявляемым оператору фрагментам РЛИ и нажатием кнопки “отмена” исключение из РЛИ неправильных меток, возникающих из-за ложных срабатываний автоматической СДЦ.

Для проведения моделирования был выбран равнинный участок местности (на левом берегу реки Хабур) протяженностью 70 км, содержащий извилистые грунтовые дороги, пригодные для движения автотранспорта. При этом предполагалась возможность установки на одном из объектов в составе колонны помеховой станции, которая способна создавать шумовую помеху в сантиметровом диапазоне длин волн мощностью  $P_{\text{п.п}} = 250$  Вт при энергопотреблении менее 1 кВт. Методами моделирования решалась задача определения коэффициента усиления антенны помеховой станции  $G_{\text{п.п}}$ , при котором вероятность обнаружения объекта, движущегося со скоростью более 6 м/с, станет приблизительно в 2 раза меньше, чем при отсутствии помех. Знание коэффициента  $G_{\text{п.п}}$  позволяет найти ширину диаграммы направленности антенны и, следовательно, решить вопрос о необходимости применения системы наведения помехового луча на БЛА. Последнее связано со значительным усложнением постановщика помех и его появление на автотранспорте маловероятно. На каждом периоде сканирования моделировались процессы автоматического обнаружения объектов и их классификации, т.е. принятие решений о принадлежности обнаруженного объекта к легковому, грузовому или длинномерному типу автотранспорта. Кроме того, моделировалось обнаружение колонны, под которым понималось обнаружение хотя бы четырех едущих друг за другом автомобилей в составе колонны, состоящей из 10 объектов. Для снижения более чем в 2 раза вероятностей обнаружений потребовался коэффициент усиления антенны станции помех  $G_{\text{п.п}} = 30$ , которому соответствует ширина диаграммы направленности, равная  $40^\circ$  при параболической антенне.

На рис. 2–4 представлены некоторые результаты моделирования в виде зависимостей оценок вероятностей обнаружения  $P_{\text{обн}}$  и классификации  $P_{\text{класс}}$  от модуля скорости движения объектов  $V_{\text{об}}$  с изменяющейся ориентацией вектора скорости при движении объектов для случаев наличия

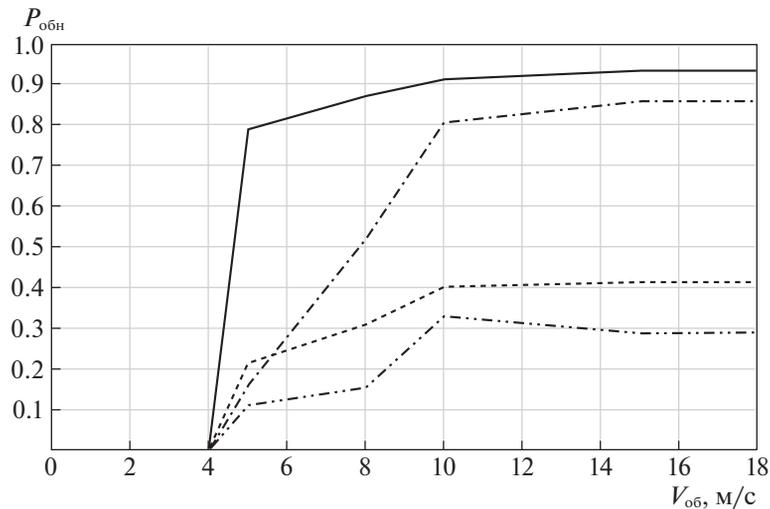


Рис. 3. Результаты обнаружений объектов

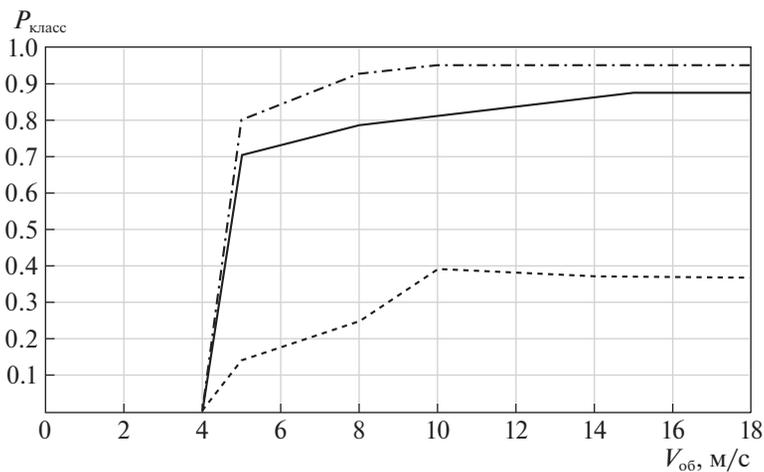


Рис. 4. Результаты классификаций объектов

и отсутствия организованной помехи. Графики на рисунках построены для варианта, когда  $V = 80$  м/с,  $H = 8$  км,  $P = 50$  Вт,  $P_{л.т} = 10^{-7}$ ,  $G = 2000$ ,  $\alpha_{п} = 30$  дБ,  $P_{п.п} = 250$  Вт,  $G_{п.п} = 30$ .

На рис. 2 изображены области, в которые попадали вероятности обнаружения объектов двухракурсной СДЦ при различных траекториях их движения (сплошные линии ограничивают область при отсутствии помех, а пунктирные — при помехах).

На рис. 3 представлены вероятности обнаружения объекта, движущегося в составе колонны по извилистой траектории для случаев применения двухракурсной и одноракурсной (традиционной) СДЦ (сплошная соответствует двухракурсной СДЦ без помех, пунктирная построена при помехах; штрихпунктир соответствует одноракурсной СДЦ без помех, двойной штрихпунктир построен при помехах для одноракурсной СДЦ).

На рис. 4 приведены вероятности классификации, т.е. правильного принятия решения о типе объекта и об обнаружении колонны (сплошная соответствует двухракурсной СДЦ при классификации объектов без помех, пунктирная — при помехах; штрихпунктирная соответствует обнаружению колонны двухракурсной СДЦ без помех).

Эти графики демонстрируют преимущества применения двухракурсной СДЦ по сравнению с одноракурсной при траектории движения объектов, которая соответствует извилистости одной из реальных грунтовых дорог на левобережье реки Хабур. Из графиков на этих рисунках следует,

что в отсутствие организованных помех при объектах с ЭПР  $5 \text{ м}^2$ , движущихся со скоростью  $5 \text{ м/с}$ , вероятность обнаружения объекта равна  $0.8$  при двухракурсной СДЦ и  $0.15$  при однокурсной. При этом двухракурсная СДЦ позволяет правильно проводить классификацию объектов с вероятностью  $0.7$  и обнаруживать колонны автотранспорта с вероятностью более  $0.8$ . При обнаружении объекта и колонны, движущихся со скоростью более  $10\text{--}11 \text{ м/с}$  ( $36\text{--}40 \text{ км/ч}$ ) двухракурсная СДЦ при отсутствии помех обеспечивает вероятность обнаружения более  $0.9$  и классификации более  $0.8$ . Традиционная однокурсная СДЦ в моделируемых условиях не позволяет иметь вероятность обнаружения объекта, движущегося со скоростью  $10 \text{ м/с}$ , более  $0.8$ . Таким образом, двухракурсная СДЦ позволяет обнаруживать с вероятностью  $0.8$  объекты, движущиеся со скоростью  $5 \text{ м/с}$ , а однокурсная – при скорости  $10 \text{ м/с}$ .

При постановке организованных помех в сантиметровом диапазоне длин волн все вероятности не превышают значение  $0.5$ . Однако организация такой помехи на автомобильном транспорте маловероятна из-за необходимости применения системы наведения помехового луча на БЛА при ограничении на энергопотребление, т.е. невозможности использования слабонаправленных антенн для создания эффективных помех.

**Заключение.** Разработанная компьютерная модель поиска движущихся наземных объектов с помощью РСА позволяет определять вероятности обнаружения и классификации наземных объектов при различных сценариях проведения мониторинга путем массового численного эксперимента. Реализация в модели предложенных алгоритмов организации поиска и оценок вероятностей показали эффективность использования двухракурсной СДЦ и прожекторного режима работы РСА при поиске объектов, движущихся с неизвестной изменяющейся ориентацией вектора скорости по реальным извилистым дорогам. При этом двухракурсная СДЦ позволяет обнаруживать объекты, модуль скорости которых в 2 раза меньше, чем при их обнаружении традиционным однокурсным способом СДЦ.

Применение предлагаемого способа на борту беспилотных и пилотируемых летательных аппаратов не требует изменений аппаратной части РСА и может быть реализовано путем несложной доработки программ управления лучом и вторичной обработки сигналов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антипов В.Н., Колтышев Е.Е., Кондратенков Г.С. и др. Многофункциональные радиолокационные комплексы истребителей / Под ред. В.Н. Лепина. М.: Радиотехника, 2014. 296 с.
2. Антипов В.Н., Викентьев А.Ю., Колтышев Е.Е. и др. Авиационные системы радиовидения / Под ред. Г.С. Кондратенкова. М.: Радиотехника, 2015. 648 с.
3. Дулевич В.Е., Коростелев А.А., Мельник Ю.А. и др. Теоретические основы радиолокации / Под ред. В.Е. Дулевича. М.: Сов. радио, 1978. 608 с.
4. Koo V.C., Chan Y.K., Gobi V. Anew Unmanned Aerial Vehicle Synthetic Aperture Radar for Environmental Monitoring // Progress in Electromagnetics Research. 2012. V. 122. P. 245–268.
5. Денисов П.В., Зайцев С.Э., Костюк Е.А. и др. Вопросы дешифрирования радиолокационных снимков при радиовидении // Радиотехника. 2014. № 7. С. 7–14.
6. Бородин А.М., Усков Н.В. Аппаратно-алгоритмическая модель получения и обработки данных от информативной подсистемы бортового интегрального радиоэлектронного комплекса // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2006. Т. 4. № 10. С. 53–60.
7. Овсянников В.А. Системная оценка и оптимизация несканирующих тепловизионных приборов. Дис. ... докт. техн. наук. Казань, 2008. 387 с.

УДК 51-72+517.977+531.011

## ОБ УПРАВЛЕНИИ ФОРМОЙ ДОЖДЕВАЛЬНОЙ МАШИНЫ КРУГОВОГО ДЕЙСТВИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ЕЕ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ<sup>1</sup>

© 2021 г. Е. С. Брискин<sup>a,b,\*</sup>, Я. В. Калинин<sup>a,b</sup>, К. Ю. Лепетухин<sup>a</sup>,  
А. В. Малолетов<sup>a,b</sup>, Н. Г. Шаронов<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Волгоградский государственный технический ун-т, Волгоград, Россия

<sup>b</sup> Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университет Иннополис, Иннополис, Россия

\*e-mail: dtm@vstu.ru

Поступила в редакцию 29.10.2020 г.

После доработки 12.11.2020 г.

Принята к публикации 25.01.2021 г.

Рассматривается задача управления формой секционной дождевальной машины кругового действия и определяются условия достижимости ее оптимальной конфигурации и устойчивости программного движения опорных тяговых тележек, обеспечивающих требуемое движение. Подтверждается и объясняется эффект самоориентации опорных тележек. Предложены методы управления движением группы секций дождевальной машины для обеспечения ее оптимальной конфигурации, состоящие в последовательности регулирования скоростей опорных тележек в соответствии с установленными закономерностями. Показано, что при рациональном построении конфигурации дождевальной машины и оптимальном управлении движением опорных тележек необходимость в наличии приводов поворота опорных тележек относительно секций дождевальной машины отсутствует, что упрощает ее конструкцию и систему управления.

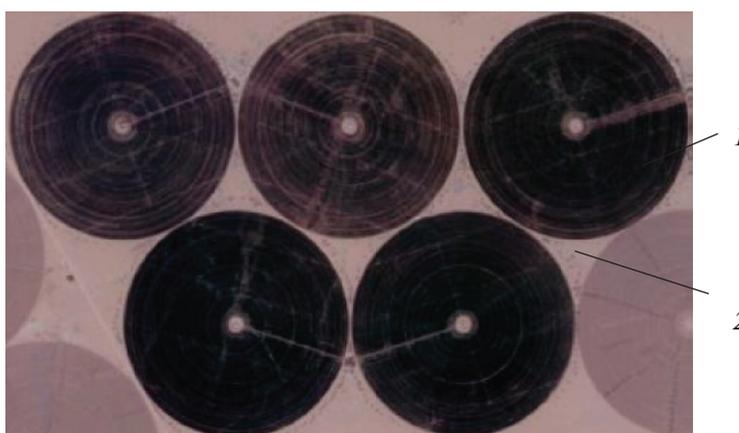
DOI: 10.31857/S0002338821050061

**Введение.** В сельском хозяйстве широко применяются дождевальные машины кругового действия. Известны как отечественные машины “Кубань”, “Фрегат” и др., так и зарубежные [1–4], в том числе и шагающие на базе машины “Кубань” [5] (рис. 1). Конструктивной особенностью таких машин является то, что они состоят из шарнирно сочлененных секций, каждая из которых опирается на тяговую опорную тележку, установленную перпендикулярно секции. Одним из недостатков дождевальных машин кругового действия является вполне определенная форма орошаемых полей с границей в виде дуги окружности [6] (рис. 2). В связи с этим теряется достаточно большая площадь потенциально плодородных земель. Предлагаемые новые решения [7, 8], направленные на увеличение орошаемых площадей, основаны на рациональном размещении центров таких машин, изменении их габаритов как за счет количества секций, так и за счет их поворота и обработки вполне определенных секторов [9] (рис. 3), или на изменении формы дождевальной машины, вызываемой поворотом ее секций друг относительно друга [10] (рис. 4). Однако в последнем случае опорная тележка должна иметь возможность поворота относительно секции и последующего совместного движения всех секций дождевальной машины как единого твердого тела. Тогда увеличивается число приводов и усложняется конструкция опорной тяговой тележки и системы управления. Поэтому актуальна может быть задача изменения формы дождевальной машины без увеличения числа приводов и усложнения системы управления. Такая задача, в силу необходимости согласованного управления группой опорных тяговых тележек, является разновидностью задач группового управления мобильных роботов, которой в последнее время уделяется повышенное внимание [11, 12], а ее особенность состоит в практической значимости для задач мелиорации.

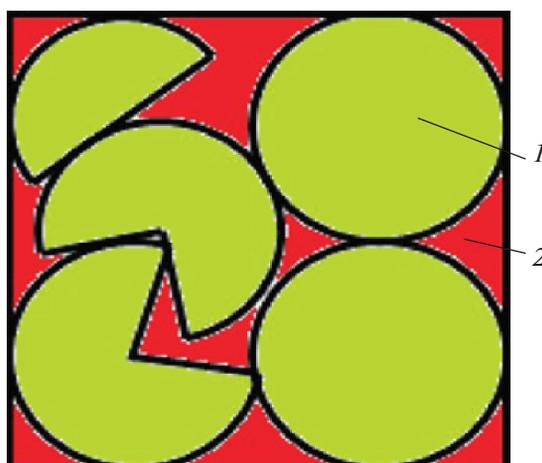
<sup>1</sup> Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-10069).



**Рис. 1.** Дождевальная машина “Кубань” с шагающими двигателями



**Рис. 2.** Формы круговых полей (космическая фотосъемка): 1 – орошаемые площади, 2 – неорошаемые (потерянные) площади



**Рис. 3.** Примеры измененных форм орошаемых полей: 1 – орошаемые площади, 2 – неорошаемые площади

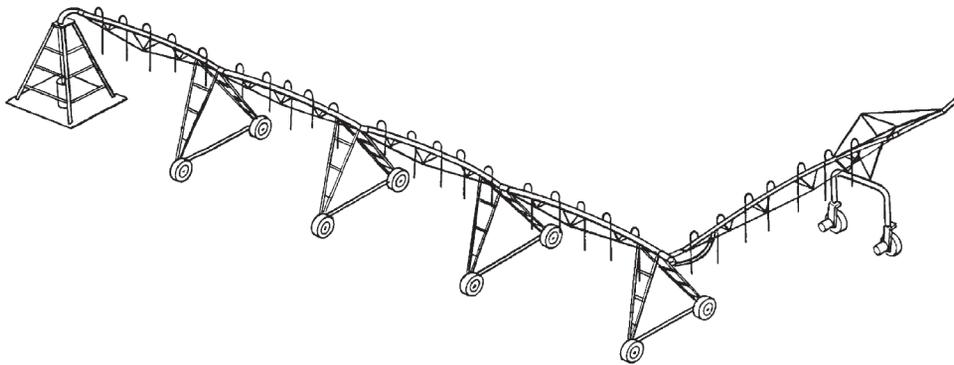


Рис. 4. Дождевальная машина с изменяемой конфигурацией и концевой консолью

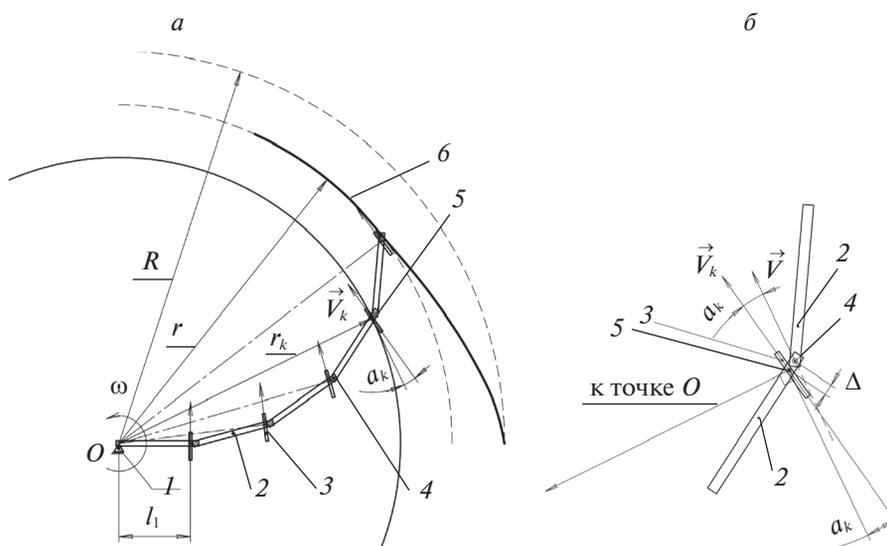


Рис. 5. Расчетная схема дождевальной машины кругового действия: *a* – машины в целом, *б* – узлов соединения секций и подвеса опорной тележки

**1. Постановка задачи.** В качестве расчетной кинематической схемы (рис. 5) дождевальной машины кругового действия (центральная опора 1 неподвижна, обрабатываемое некруглое поле задано кромкой *б*) выбирается система  $2N$  твердых тел (секций 2 и опорных тележек 3), соединенных между собой шарнирами 4. Секции 2 машины соединены с соседними секциями шарнирами 4, опорная тяговая тележка 3 – с секцией 2 шарниром 5 (рис. 5, *б*).

На рассматриваемую механическую систему, состоящую из  $N$  секций и  $N$  тяговых опорных тележек и совершающую плоскопараллельное движение, накладываются  $4N$  геометрических связей в виде цилиндрических шарниров и  $N$  линейных кинематических связей, обусловленных заданием направления скорости  $V_k$  оси движителя каждой из тележек вдоль ее продольной оси. Поэтому для обеспечения программного движения достаточно  $N$  приводов, причем это приводы курсового движения. Действительно, при отсутствии хотя бы одного из таких приводов движители соответствующей опорной тележки, взаимодействующей с грунтом, не реализуют тягового усилия и могут являться тормозами. Однако в общем случае, в целях обеспечения гарантированного устойчивого программного движения, в шарнирах, соединяющих секции дождевальной машины между собой, могут быть установлены дополнительные управляемые приводы поворота секций или торможения, препятствующие такому повороту. Тогда количество приводов избыточно и равно  $2N$ , что требует своего характерного расчета [13].

Ставится задача определения законов согласованной работы  $N$  приводов курсового движения опорных тележек, обеспечивающих заданную форму дождевальной машины в соответствии с

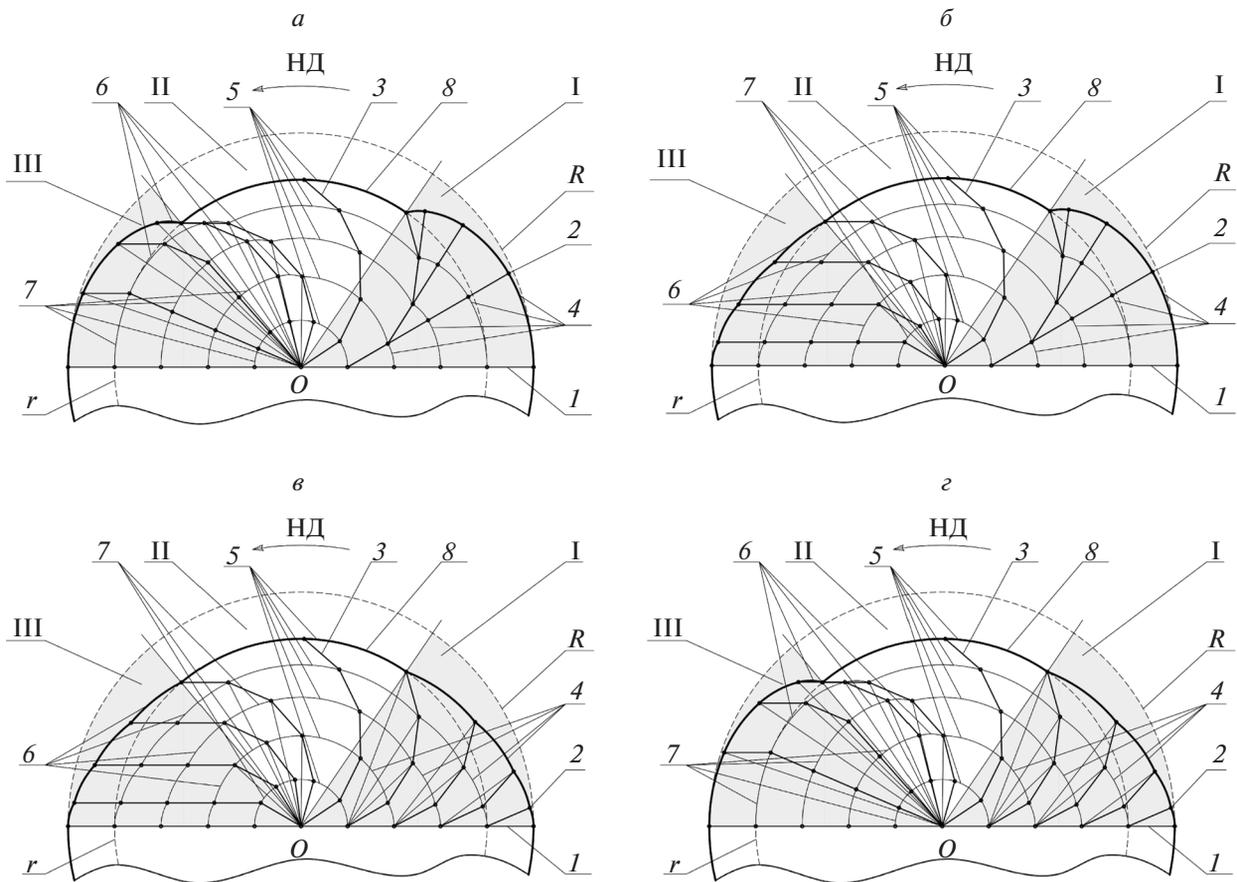


Рис. 6. Пример управления конфигурацией дождевальной машины

известным методом оптимизации формы машины по различным критериям [14]. Определяются условия реализации накладываемых кинематических связей и законы самоориентации опорных тележек на стационарном этапе движения в положение, обеспечивающие движение по окружности точки ее подвеса к секции дождевальной машины при установившейся конфигурации, что характерно для этого этапа движения.

**2. Управление формой дождевальной машины.** Форма орошаемого поля с минимальным  $r$  и максимальным  $R$  радиусами обработки рассматривается в виде секторов (рис. 6), соответствующих следующим зонам: I – уменьшение обрабатываемого радиуса, II – движение с оптимальной конфигурацией для требуемого радиуса обработки; III – увеличение обрабатываемого радиуса.

В качестве примера показана дождевальная машина, состоящая из пяти сочлененных секций. Определяются законы движения на трех этапах. Например, может быть рассмотрен следующий алгоритм.

Первый этап соответствует искривлению формы дождевальной машины за счет последовательного поворота секций относительно различных осей и состоит из четырех подэтапов (если машина состоит из  $N$  секций, из  $(N - 1)$  подэтапов). Так, на первом подэтапе первая секция неподвижна, а все остальные как одно твердое тело поворачиваются вокруг оси, соединяющей ее со следующей. На каждом  $j$ -м подэтапе неподвижными остаются все секции с номерами  $k \leq j$ , а секции с номерами  $k > j$  поворачиваются как твердое тело вокруг  $j$ -й оси. Углы поворота секций определяются в соответствии с установленной оптимальной конфигурацией [14].

На втором стационарном этапе движение наиболее удаленной опорной тележки происходит по границе кромки поля в форме дуги окружности. Машина имеет постоянную конфигурацию и совершает вращательное движение вокруг точки  $O$  как твердое тело. В частности, этого можно добиться установкой управляемых тормозов, предотвращающих поворот одной секции относительно другой.

Третий этап соответствует восстановлению прямолинейной формы дождевальной машины. Это можно обеспечить за счет вращательного движения на каждом  $j$ -м подэтапе ближайших к центру секций и поступательного движения остальных до тех пор, пока не восстановится прямолинейная конфигурация дождевальной машины. Поступательное движение соответствующих секций можно обеспечить, если скорость  $V_k$  каждой  $k$ -й тележки будет определяться выражением

$$V_k = \omega r_k \cos \alpha_k. \quad (2.1)$$

Здесь  $\omega$  – угловая скорость первых  $j$  секций как твердого тела,  $r_k$  – расстояние от неподвижного центра  $O$  до оси сочленения секций  $k$  и  $k + 1$  дождевальной машины (приближенно можно считать до оси установки  $k$ -й опорной тележки),  $\alpha_k$  – угол между продольной осью  $k$ -й тележки и перпендикуляром к кратчайшему расстоянию до центра  $O$ . На рис. 5 соответствующие величины показаны для  $k = 4$ .

Простейшие примеры движения машины на каждом из этапов представлены на рис. 6:  $a$  – последовательный поворот секций от центральной опоры к крайней до оптимальной конфигурации, последовательный поворот секций от центральной опоры к периферийной до прямой конфигурации;  $b$  – последовательный поворот секций от центральной опоры к крайней до оптимальной конфигурации, последовательный поворот секций от крайней опоры к центральной до прямой конфигурации;  $v$  – последовательный поворот секций от крайней опоры к центральной до оптимальной конфигурации, последовательный поворот секций от крайней опоры к центральной до прямой конфигурации;  $z$  – последовательный поворот секций от крайней опоры к центральной до оптимальной конфигурации, последовательный поворот секций от центральной опоры к периферийной до прямой конфигурации. На рис. 6 приняты следующие обозначения: 1 – полностью выпрямленная конфигурация дождевальной машины; 2 – тележка периферийной секции дождевальной машины; 3 – оптимальная конфигурация дождевальной машины для обработки требуемого радиуса; 4 – траектории движения подвижных опорных тележек на этапе уменьшения радиуса обрабатываемого поля; 5 – траектории движения подвижных опорных тележек на этапе движения с оптимальной конфигурацией для требуемого радиуса обработки; 6 – траектории поступательного движения подвижных опорных тележек в зоне увеличения радиуса обрабатываемого поля; 7 – траектории кругового движения подвижных опорных тележек в зоне увеличения радиуса обрабатываемого поля; 8 – граница обрабатываемого поля; НД – направление движения.

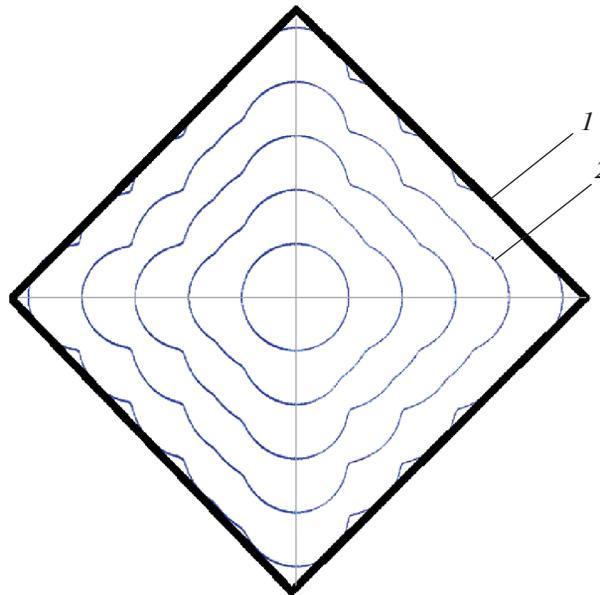
Вариант орошения квадратного поля в соответствии с алгоритмом, представленным на рис. 6, б, показан на рис. 7.

Алгоритмы управления на каждом из этапов и внутри этапов могут отличаться от приведенного в примере. Это объясняется тем, что на форму машины, имеющую  $N$  степеней свободы, накладываются только две связи: задается положение неподвижной геометрической точки  $O$  центра машины и траектория периферийной опорной тележки. Поэтому возможно существование нескольких зависящих от числа секций алгоритмов, удовлетворяющих этому условию.

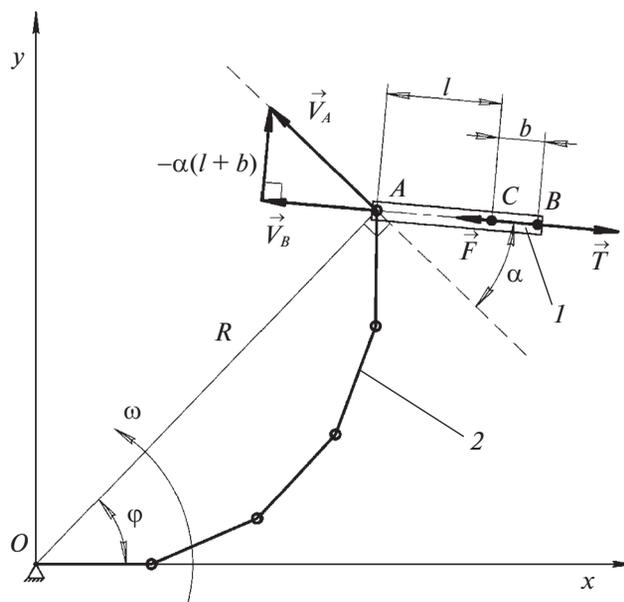
**3. Динамика движения тяговой опорной тележки.** Метод исследования динамики движения тяговой опорной тележки основан на составлении дифференциальных уравнений опорных тележек в форме уравнений Лагранжа с избыточными координатами и введением кинематических связей, соответствующих представлению о направлении скорости характерной точки движителей (для колеса – его оси) вдоль продольной оси тележки. Расположение этой характерной точки для различных других типов движителей и их количества должно определяться решением задачи о взаимодействии опорной поверхности движителей с деформируемым грунтом.

В качестве расчетной схемы опорной тележки рассматривается стержень массы  $m$  с моментом инерции относительно центра масс  $J_c$  (рис. 8). Центр масс  $C$  находится на расстоянии  $l$  от точки  $A$ , в которой тележка шарнирно соединена с секцией дождевальной машины. Центр контакта движителя с опорной поверхностью  $B$  находится на расстоянии  $b$  от центра масс, при чем это расстояние может быть как положительным, так и отрицательным: отрицательному  $b$  соответствует положение точки  $B$  между точками  $A$  и  $C$ . Положение точки  $A$  относительно неподвижного центра дождевальной машины задается расстоянием  $R$  и углом  $\varphi$ , а положение тележки – углом  $\alpha$ .

Гипотеза об отсутствии перемещения точки контакта движителя с опорной поверхностью перпендикулярно продольной оси тележки обусловлена значительным размером колеи при движении по переувлажненному грунту.



**Рис. 7.** Вариант орошения квадратного поля: 1 – граница орошаемого квадратного поля; 2 – траектории движения опорных тяговых тележек дождевальной машины



**Рис. 8.** Расчетная схема для описания движения опорной тяговой тележки: 1 – опорная тяговая тележка; 2 – секции дождевальной машины

Подобная расчетная схема применяется при исследовании задачи о движении саней С.А. Чаплыгина [15], при этом в качестве обоснования отсутствия скорости характерной точки в перпендикулярном к продольной оси тележки направлении выступает наличие острой кромки колеса, что соответствует образованию колеи в переувлажненном грунте.

Принятая в качестве расчетной схема подобна используемой в задаче С.А. Чаплыгина о плоском неголомном движении [15], а отличается от нее тем, что:

- учитывается движение одной из точек (точки А);
- на твердое тело в точке контакта движителя с опорной поверхностью (для колеса в пятне контакта, у С.А. Чаплыгина края режущей кромки) действуют силы: движущая  $F$ , реализуемая

приводом курсового движения (обеспечивается взаимодействием с опорной поверхностью) и направленная вдоль продольной оси тележки, сила сопротивления движению  $T$ , направленная в сторону, противоположную силе  $F$ , и поперечная сила, учитываемая ниже введением неопределенного множителя Лагранжа в соответствии с принятой гипотезой о связях;

– для повышения устойчивости от опрокидывания ферм дождевальная машина тяговая тележка может быть снабжена дополнительной пассивной опорой, например, в форме “рояльного колеса”, которая в расчетной схеме (рис. 8) не указана, а ее взаимодействие с опорной поверхностью учитывается только вертикальной реакцией. Эта опора расположена также на оси  $AB$  или ее продолжении. В математической модели С.А. Чаплыгина также имеются две пассивные опоры, не оказывающие влияние на плоское движение саней [15].

Для составления уравнений динамики движения тяговой опорной тележки ее кинетическая энергия  $E$  определяется выражением

$$E = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} J_c (\dot{\alpha} + \dot{\varphi})^2, \quad (3.1)$$

где  $V_c$  – скорость центра масс стержня.

Если учесть, что

$$V_c^2 = [-R\dot{\varphi} \sin \varphi + l(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \cos(\varphi + \alpha) + \dot{R} \cos \varphi]^2 + [R\dot{\varphi} \cos \varphi + l(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \sin(\varphi + \alpha) + \dot{R} \sin \varphi]^2, \quad (3.2)$$

то

$$E = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (m l^2 + J_c) (\dot{\varphi} + \dot{\alpha})^2 + m R l (\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \dot{\varphi} \sin \alpha + \frac{1}{2} m \dot{R}^2 + m \dot{R} l (\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \cos \alpha. \quad (3.3)$$

Для определения обобщенных сил находится виртуальная работа равнодействующей  $\Phi$  тяговой силы сцепления движителя с грунтом  $F$  и силы сопротивления курсовому движению  $T$ :

$$\delta A = (F_x - T_x) \delta x + (F_y - T_y) \delta y = \Phi_x \delta x + \Phi_y \delta y, \quad (3.4)$$

где  $F_x, F_y, T_x, T_y$  – проекции сил  $F$  и  $T$  на оси координат. Тогда обобщенные силы  $Q_\varphi, Q_R, Q_\alpha$ , соответствующие координатам  $\varphi, R, \alpha$ , имеют вид

$$Q_\varphi = \Phi R \cos \alpha, \quad Q_R = \Phi \sin \alpha, \quad Q_\alpha = 0. \quad (3.5)$$

Согласно принятой гипотезе о накладываемых связях, а также учитывая тот факт, что центр масс тележки не совпадает с характерной точкой  $B$  движителя, а расстояние между ними равно  $b$ , записываются уравнения кинематических неголономных связей:

$$\begin{aligned} -(l + b)(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \cos \alpha - V_B \sin \alpha &= \dot{R}, \\ -(l + b)(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \sin \alpha + V_B \cos \alpha &= R \dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $V_B$  – скорость, развиваемая движителем и направленная вдоль продольной оси тележки.

Имея в виду, что скорость  $V_B$  является управляющим воздействием, (4.6) удобно представить в форме

$$\begin{cases} \dot{R} \cos \alpha + (R \sin \alpha + l + b) \dot{\varphi} + \dot{\alpha} (l + b) = 0, \\ -\dot{R} \sin \alpha + R \dot{\varphi} \cos \alpha = V_B. \end{cases} \quad (3.7)$$

Тогда уравнения Лагранжа с избыточными координатами и линейными неголономными связями имеют вид

$$\begin{cases} (m R^2 + m l^2 + J_c + 2 m R l \sin \alpha) \ddot{\varphi} + 2 m R \dot{R} \dot{\varphi} + 2 m \dot{R} l \dot{\varphi} \sin \alpha + 2 m R l \dot{\alpha} \dot{\varphi} \cos \alpha + m \ddot{R} \cos \alpha + \\ + (m l^2 + J_c + m R l \sin \alpha) \ddot{\alpha} + m l R \dot{\alpha}^2 \cos \alpha = \lambda_1 (R \sin \alpha + l + b) + \lambda_2 R \cos \alpha + \Phi R \cos \alpha, \\ m \ddot{R} + m l \ddot{\alpha} \cos \alpha + m l \dot{\varphi} \cos \alpha - m R \dot{\varphi}^2 - m l \sin \alpha (\dot{\varphi}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) = \lambda_1 \cos \alpha - \lambda_2 \sin \alpha - \Phi \sin \alpha, \\ (m l^2 + J_c + m R l \sin \alpha) \ddot{\varphi} + (m l^2 + J_c) \ddot{\alpha} + m \ddot{R} l \cos \alpha + 2 m \dot{R} l \dot{\alpha} \sin \alpha - m R l \dot{\varphi}^2 \cos \alpha = \lambda_1 (l + b), \end{cases} \quad (3.8)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – неопределенные множители Лагранжа, механический смысл которых состоит соответственно в реакции опорной поверхности, перпендикулярной продольной оси опорной тележки, и силе взаимодействия секции дождевальная машина с опорной тележкой, направленной вдоль ее продольной оси.

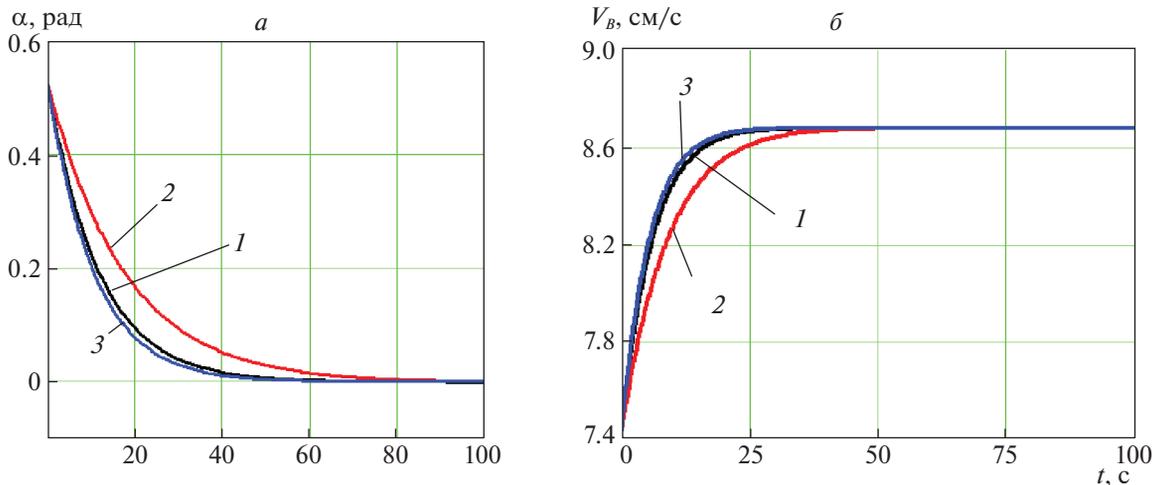


Рис. 9. Зависимости от времени угла ориентации тележки  $\alpha$  (а) и программной скорости  $V_B$  (б) опорной тележки для различных развиваемых усилий  $\lambda_2 + \Phi(b)$  при  $l + b > 0$ ; 1 –  $b = 0.5$  м, 2 –  $b = 0$  м, 3 –  $b = -0.5$  м

Таким образом три дифференциальных уравнения (3.8) совместно с двумя уравнениями неголономных связей (3.7) содержат семь функций времени:  $\varphi(t)$ ,  $R(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$ ,  $\Phi(t) = F(t) - T(t)$ ,  $V_B(t)$ . Поэтому две из этих функций могут быть заданы.

**4. Эффект самоориентации тяговой опорной тележки с постоянной конфигурацией дождевальной машины.** Рассматривается движение дождевальной машины на втором этапе (рис. 6), где требуется сохранять ее конфигурацию (форму) и обеспечивать вращательное движение вокруг центра  $O$  как твердого тела. Сохранение конфигурации можно обеспечить, в частности, включением тормозов в осях сочленения секций, предотвращающих их относительные перемещения, а вращение с постоянной угловой скоростью – системой управления, реализующей требуемую силу  $F$  тяги, а следовательно, и равнодействующую силу  $\Phi$ . Однако это отдельная задача, которая дополняет задачу о самоориентации опорной тележки, состоящей в определении изменения угла  $\alpha$  как функции времени.

Таким образом, изучаемое движение характеризуется дополнительными уравнениями голономных связей:

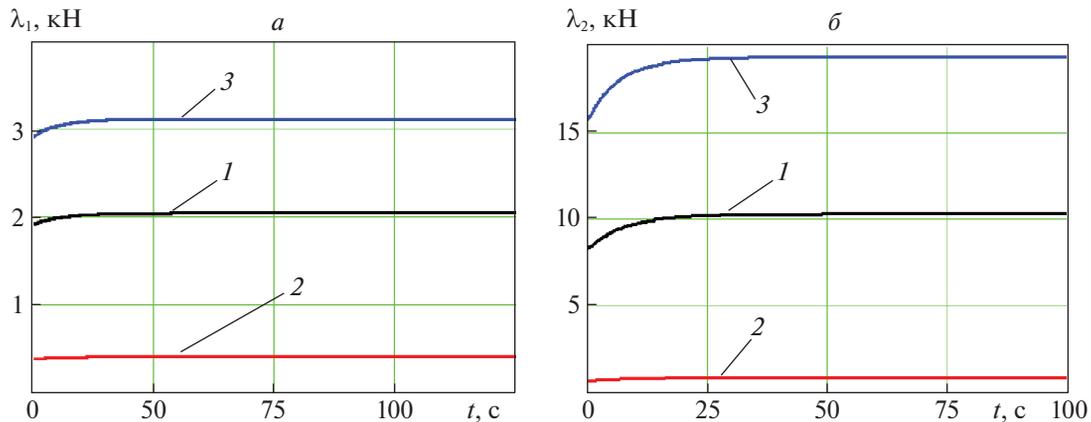
$$R_k = \text{const.} \tag{4.1}$$

В этом случае уравнения (3.7) и (3.8) упрощаются и имеют вид

$$\begin{cases} 2mR_k l \omega \dot{\alpha}_k \cos \alpha_k + (ml^2 + J_c + mR_k l \sin \alpha_k) \ddot{\alpha}_k + mR_k l \dot{\alpha}_k^2 \cos \alpha_k = \\ = \lambda_1 (R \sin \alpha_k + l + b) + \lambda_2 R \cos \alpha_k + \Phi R \cos \alpha_k, \\ ml \ddot{\alpha}_k \cos \alpha_k - mR_k \omega^2 - ml \sin \alpha_k (\omega + \dot{\alpha}_k)^2 = \lambda_1 \cos \alpha_k - \lambda_2 \sin \alpha_k - \Phi \sin \alpha_k + \lambda_3, \\ (ml^2 + J_c) \ddot{\alpha}_k - mR_k l \omega^2 \cos \alpha_k = \lambda_1 (l + b), \\ R_k \omega \cos \alpha_k = V_{Bk}, \\ (R_k \sin \alpha_k + l + b) \omega + \dot{\alpha}_k (l + b) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Физический смысл нового неопределенного множителя  $\lambda_3$  обусловленного голономной связью (4.1), состоит в реакции секции, направленной вдоль отрезка  $OA$ . Особенность уравнений (4.2) заключается в возможности независимого решения последнего уравнения относительно  $\alpha(t)$ , а затем определения и остальных неизвестных.

Действительно, из последних двух уравнений можно найти законы изменения угла  $\alpha$  и необходимую скорость  $V_B$  движителя опорной тележки. На графиках рис. 9 представлены соответствующие зависимости для модельной задачи:  $m = 450$  кг,  $l = 1$  м,  $J = 900$  кг · м<sup>2</sup>,  $R = 500$  м,  $\omega = 0.000174$  с<sup>-1</sup> (один оборот за 10 ч),  $\alpha_0 = 30^\circ$ , что соответствует достаточно удаленной от центра опорной тяговой тележке. Остальные уравнения могут быть использованы для определения развиваемых усилий  $\Phi$  и реакций  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ , которые необходимы для подбора энергоустановки, обеспечивающей движение, и расчета конструкции на прочность и жесткость.



**Рис. 10.** Зависимости от времени *a* – поперечных реакций опорной поверхности на движитель опорной тяговой тележки  $\lambda_1$  и *б* – продольных реакций поверхности на движитель, направленные вдоль оси опорной тяговой тележки  $\lambda_2$ : 1 –  $b = 0$ ; 2 –  $b = 0.5$  м; 3 –  $b = -0.1$  м

Анализ графиков показывает, что происходит самоориентация опорных тележек, состоящая в том, что продольная ось тележки, первоначально ориентированная в соответствии с движением на предыдущем этапе и составляющая угол  $\alpha_0$  с перпендикуляром к оси  $OA$  (рис. 8), с течением времени занимает положение, характеризуемое углом  $\alpha_*$ :

$$\sin \alpha_* = -\frac{l+b}{R}. \quad (4.3)$$

С увеличением расстояния  $l+b$  от оси крепления опорной тележки до точки приложения равнодействующей силы взаимодействия движителя с опорной поверхностью самоориентация происходит медленнее. Медленнее увеличивается и программная скорость движителя опорной тележки. Тем не менее, в худшем случае ( $b = -0.5$  м) в модельной задаче это происходит примерно за 80 с, что соответствует повороту дождевальная машины на угол  $\varphi \approx 0.8^\circ$  и перемещению тележки на расстояние  $\Delta S \approx 7$  м.

Если расстояние  $l+b < 0$ , т.е. точка приложения равнодействующей силы взаимодействия движителя с опорной поверхностью находится по движению впереди от оси крепления опорной тележки с секцией  $l+b < 0$ , то движитель работает в “тянущем” режиме. Такое положение оказывается неустойчивым, и опорная тележка должна разворачиваться на  $180^\circ$ . Однако этого не происходит в силу неограниченного возрастания равнодействующих продольных усилий  $\lambda_2 + \Phi$  при  $\alpha \rightarrow \pi/2$ . Должно измениться и направление скорости движителя. Этот результат объясним, если при  $\omega = \text{const}$  составить уравнения в вариациях для последнего уравнения из (4.2).

Условие устойчивости движения в этом случае имеет вид

$$\frac{R}{l+b} \cos \alpha_* > 0, \quad (4.4)$$

которое сводится к неравенству

$$l+b > 0, \quad (4.5)$$

что и подтверждает установленное явление. Такой режим работы движения будет “толкающим”. Также интересно проанализировать реакции  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  опорной поверхности в зависимости от взаимного расположения точек  $C$  и  $B$  при параметрах модельной задачи (рис. 9), представленные на рис. 10.

Таким образом, при достаточном удалении тележки от центра поля возникают значительные поперечные реакции величиной 0.4–3 кН. Столь значительные поперечные реакции в опоре на переувлажненном грунте могут быть реализованы колесами низкого давления большого диаметра, обеспечивающими значительную площадь пятна контакта, либо шагающими движителями с соответствующей опорной поверхностью, например лыжеобразные [16] (рис. 1), что предпочтительнее.

**Заключение.** Предложены методы управления движением группы секций дождевальной машины, обеспечивающие ее оптимальную конфигурацию и состоящие в последовательности регулирования скоростей опорных тележек согласно установленным закономерностям.

Установлен механический эффект самоориентации тяговых опорных тележек дождевальной машины и определены условия его реализации. Если классифицировать режимы работы тележек как “толкающий” и “тянущий”, то устойчивым режимом является “толкающий”. На основании указанного механического эффекта обосновано отсутствие необходимости наличия приводов поворота опорных тележек относительно секций дождевальной машины, что упрощает ее конструкцию и систему управления.

Для обеспечения устойчивого программного движения многосекционных дождевальных машин с изменяемой конфигурацией целесообразно применять тяговые тележки с шагающими движителями, имеющими значительную опорную поверхность.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фокин Б.П., Носов А.К.* Современные проблемы применения многоопорных дождевальных машин. Научное издание. Ставрополь, 2011. 80 с.
2. *Рязанцев А.И., Киселев А.В.* К оптимизации параметров ходовой системы дождевальной машины “Фрегат” // Конструирование, использование и надежность машин сельскохозяйственного назначения. 2005. № 1 (4). С. 15–19.
3. *Valin M.I., Cameira M.R., Teodoro P.R. et al.* DEPIVOT: A Model for Center-pivot Design and Evaluation // Computers and Electronics in Agriculture. 2012. V. 87. P. 159–170.
4. *Palacin J., Salse J.A., Clua X. et al.* Center-pivot Automatization for Agrochemical Use // Computers and Electronics in Agriculture. 2005. V. 49. P. 419–430.
5. *Брискин Е.С., Жога В.В., Чернышев В.В. и др.* Динамика и управление движением шагающих машин с цикловыми движителями / Под ред. Е.С. Брискина. М.: Машиностроение, 2009. 191 с.
6. *Штепа Б.Г., Носенко В.Ф., Винникова Н.В. и др.* Механизация полива: Справочник. М.: Агропромиздат, 1990. 336 с.
7. *Абезин В.Г., Семененко С.Я., Скрипкин Д.В., Беспалов А.Г.* Совершенствование конструкции дождевальных машин кругового действия // Изв. нижеволжского агроуниверситетского комплекса: Наука и высшее профессиональное образование. 2015. № 2 (38). С. 208–212.
8. *Кузнецов П.И.* К вопросу модернизации многоопорных дождевальных машин кругового действия // Природоустройство. 2011. № 4. С. 72–75.
9. *Кремнев Ю.А., Лямперт Г.П.* Современные задачи развития оросительной техники // Тракторы и сельскохозяйственные машины. 1986. № 12. С. 11–14.
10. *Балакай Г.Т., Васильев С.В., Бабичев А.Н.* Концепция дождевальной машины нового поколения для прецизионного орошения // Научный журнал Российского НИИ проблем мелиорации. 2017. № 2 (26). С. 1–18.
11. *Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г.* Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. М.: Физматлит, 2009. 280 с.
12. *Белоглазов Д.А., Гайдук А.Р., Косенко Е.Ю. и др.* Групповое управление подвижными объектами в неопределенных средах / Под ред. В.Х. Пшихопова. М.: Физматлит, 2015. 305 с.
13. *Брискин Е.С., Шаронов Н.Г.* Об управлении движением механических систем с избыточным числом управляющих воздействий // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 3. С. 48–54.
14. *Лепетухин К.Ю., Малолетов А.В., Брискин Е.С.* Об оптимальном управлении взаимным расположением секций дождевальной машины кругового действия при обработке некруглых полей // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18. № 2. С. 103–107.
15. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
16. *Брискин Е.С., Чернышев В.В.* Экспериментальные исследования динамики многоопорной шагающей машины с движителями лямбдаобразного вида // Изв. вузов. Машиностроение. 1999. № 4. С. 32–37.

УДК 531.3

## О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ МНОГОЗВЕННЫХ СИСТЕМ И ЭКЗОСКЕЛЕТОВ<sup>1</sup>

© 2021 г. А. В. Борисов<sup>a,b,\*</sup>, И. Е. Каспирович<sup>a,b,\*\*</sup>, Р. Г. Мухарлямов<sup>a,b,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> Филиал ФГБОУ ВО НИУ “МЭИ”, Смоленск, Россия

<sup>b</sup> Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

\*e-mail: BorisowAndrej@yandex.ru

\*\*e-mail: kaspirovich.ivan@mail.ru

\*\*\*e-mail: robgar@mail.ru

Поступила в редакцию 20.06.2020 г.

После доработки 24.12.2020 г.

Принята к публикации 29.03.2021 г.

Приводится обзор известных публикаций и излагаются некоторые результаты исследований авторов по моделированию динамики систем твердых тел и экзоскелетов. Описываются различные подходы к проблеме моделирования динамики многозвенных систем, включая задачи построения уравнений движений и решения задач управления. Рассматриваются матричные и рекуррентные методы составления уравнений динамики антропоморфных механизмов и экзоскелетов, а также задачи моделирования плоских и пространственных систем, содержащих звенья переменной длины. Результаты исследований по аналитическому конструированию экзоскелетов, антропоморфных механизмов и их аналогов представляются актуальными для проектирования систем, предназначенных для усиления двигательных функций человека и разработки робототехнических систем различного назначения.

DOI: 10.31857/S0002338821040028

**Введение.** В работе будут использованы следующие понятия и определения.

**Эндоскелет** – механизм, обеспечивающий опору, поддержание формы тела, движение за счет внутреннего каркаса. В качестве примера эндоскелета можно указать костные системы животных и человека.

**Экзоскелет** – механизм, предназначенный для передвижения в нем человека и увеличения возможностей пользователя за счет внешнего каркаса. Экзоскелет соответствует биомеханике человека или различным видам животных.

**Звено переменной длины** – часть механизма, способная изменять свою длину вдоль направления между шарнирами-суставами без деформации изгиба и кручения. Оно может иметь достаточно сложную механическую конструкцию и реализовывать растяжение-сжатие.

**Шарнир-сустав** – модель биологического сустава в виде шарнира, в котором может создаваться необходимый управляющий момент.

Обеспечение комфортной окружающей среды для лиц с ограниченными двигательными возможностями невозможно без создания высокотехнологичной продукции робототехники, обеспечивающей повышение их социальной, физической адаптации и эффективности работы организма в целом. Разработка пространственных моделей человеко-машинных систем в виде экзоскелета, обеспечивающего устойчивое, целенаправленное, комфортабельное передвижение в нем человека и доступного для непосредственной технической реализации, являются актуальными вызовами, стоящими перед исследователями и конструкторами.

Актуальность разработки экзоскелетов в Российской Федерации прослеживается по количеству публикаций, в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ), возрастающих в последние 10 лет практически экспоненциально (рис. 1). На рис. 1 представлены графики результатов поисков по ключевому слову “экзоскелет” с учетом морфологии публикаций (с маркерами

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-08-00261 А) и Министерства образования и науки РФ по Программе повышения конкурентоспособности РУДН “5-100”.

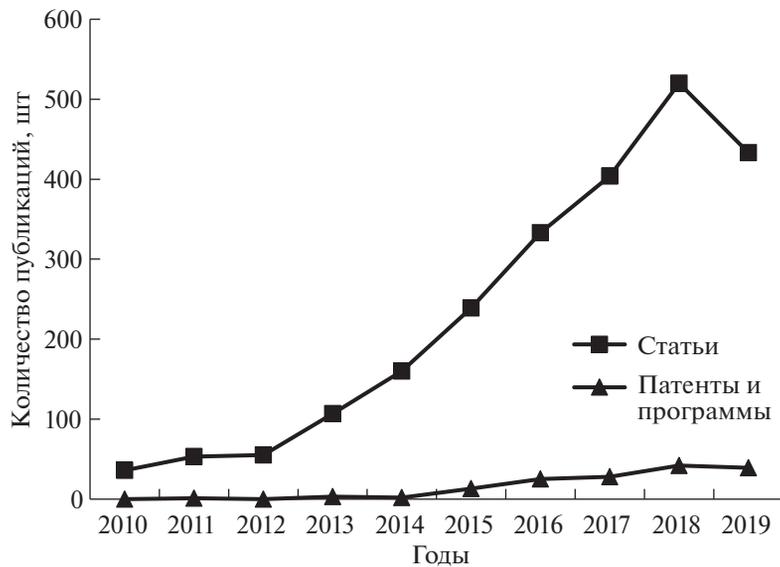


Рис. 1. Количество публикаций в системе РИНЦ за последние 10 лет

в виде квадратов) и патентов вместе с зарегистрированными программами (с маркерами в виде треугольников), в которых учтены модели, соответствующие экзоскелетам для человека или их частям.

Из рис. 1 видно начало интенсивного роста публикаций по теме экзоскелетов после 2012 г. Рост количества патентов начинается с 2015 г., до этого число патентов было не более двух в год. Некоторый спад в 2019 г. объясняется тем, что анализ публикаций проводился в начале января 2020 г. и, скорее всего, еще не все публикации за 2019 г. поступили в систему РИНЦ. Таким образом, с каждым годом все больше исследователей включается в процесс создания экзоскелетов. Увеличивающееся количество научных статей, патентов, программ и т.п. свидетельствует о том, что эта тема является актуальной, востребованной и популярной. Значительный рост исследований по данной тематике объясняется технологическими возможностями, появившимися в последнее время для создания новых моделей: создание доступных мощных вычислительных систем, датчиков, новых материалов, методов управления. Это подтверждается запаздывающим ростом количества патентов после роста теоретических разработок. Существенное значение имеют широта областей применения экзоскелетов в медицине, промышленности, сельском хозяйстве, военном и спасательном деле, в космосе, в быту и значительные перспективы коммерциализации проектов по их разработке. Так, значимость экзоскелетов в медицине можно оценить по областям применения, представленным на рис. 2.

При создании моделей человекоподобных механизмов используются биологические прототипы из живой природы. Наиболее активно изучаются направления создания экзоскелетов, их частей и робототехнических систем. Исследования антропоморфных роботов и экзоскелетов ведутся в направлении анализа известных пространственных моделей и конструкций экзоскелетов, антропоморфных механических систем. Ниже приводится обзор отечественных и зарубежных публикаций по этим направлениям в той мере, которой удалось достичь авторам. Рассматриваются подходы к изучению эффективных рекуррентных алгоритмов и матричных методов составления уравнений динамики, вопросы ветвления звеньев и моделирования древовидных структур, методы решения задач управления целенаправленным движением. Значимость статьи заключается в описании нового класса транспортных роботизированных устройств антропоморфной структуры, предназначенных для синтеза алгоритмов управления целенаправленным движением и исследования совместного функционирования человеко-машинной системы.

**1. Обзор работ отечественных авторов.** Разработкам методов математического моделирования антропоморфных механизмов и экзоскелетов существенно способствовало стремительное развитие современных средств вычислительной техники. Появилось значительное число публикаций, посвященных созданию экзоскелетов и антропоморфных роботов. Комбинирование моделей биомеханики опорно-двигательного аппарата и антропоморфных роботов может быть



Рис. 2. Основные направления применения экзоскелетов в медицине

эффективно использовано при создании моделей экзоскелета – робототехнического устройства, функционирующего совместно с человеком.

В историческом плане необходимо отметить модель выдающего русского математика и механика П.Л. Чебышева (1821–1894), основоположника русской школы теории механизмов и машин, предложившего впервые в мире конструкцию “стопоходящей” машины [1], которая получила всеобщее одобрение на Всемирной выставке в Париже 1878 г. Заслуживают внимания работы о целенаправленном движении и моделировании опорно-двигательного аппарата человека [2, 3] с уравнениями Лагранжа в тензорном виде с учетом мышц, вызывающих движение. Предложенные модели построены аналитически без численных расчетов и оценок, равно как и параметров рассматриваемых моделей.

Вопросы моделирования антропоморфных механизмов и управления движением неустойчивых объектов приведены в [4, 5]. Задача управления движением антропоморфных механизмов с пятью и семью звеньями описывается уравнениями Лагранжа в матричной форме и решается в аналитическом виде. Излагаются результаты численных экспериментов с модельными числовыми значениями параметров антропоморфных механизмов, представленных абсолютно твердыми телами. Проблемы динамики и управления двуногих механизмов с невесомыми ногами были исследованы в [6]. Предложены различные способы организации двуногого способа перемещения.

В [7] рассматривается модель шагающего антропоморфного робота, состоящего из 11 весоных звеньев, которые считаются абсолютно твердыми или телескопическими. Механизм состоит из корпуса-балансира и двух одинаковых ног, включающих бедро, голень и стопу. Стопа состоит из пятки, плюсны и фаланги. Однако теория звеньев переменной длины не развита, намечены только основные подходы.

Проблемы построения уравнений динамики механических систем и синтеза управления были сформулированы в [8, 9] как задачи динамического программирования и представлены в качестве обратных задач динамики в [10–12]. Решение задач управления заключается в определении выражений управляющих воздействий, обеспечивающих требуемые свойства движений, и в конечном итоге сводятся к построению уравнений динамики замкнутой системы в той или иной форме [13].

В Брянском государственном техническом университете под руководством Д.Ю. Погорелова создан программный комплекс “Универсальный механизм” [14], позволяющий проводить составление уравнений динамики, численное решение и анимационную визуализацию модели по результатам расчетов. Однако “уравнения формируются программой для компьютерной обработки и недоступны в виде, например, уравнений Лагранжа II рода” [15]. Данный комплекс ориентирован на инженеров и на разработку конкретных моделей в машиностроении и не удобен для аналитических исследований. На его основе проводилось моделирование антропоморфных механизмов, отработка алгоритмов управления с обратной связью для обеспечения устойчивой ходьбы [16, 17].

Вопросам оптимального управления роботами и упругими манипуляторами посвящены работы о моделировании многозвенных стержневых систем с шарнирами на основе уравнений Аппеля [16, 18]. В [19] исследуются походки робота по цилиндрическим поверхностям. Результаты применимы также для манипулирования цилиндром посредством схвата руки робота. В [20–22] проводится моделирование движений шестиногого робота, рассматриваются вопросы управления. Компьютерное моделирование управляемых движений многозвенных роботов проводится с помощью программного комплекса “Универсальный механизм”. Решаются задачи преодоления водных препятствий шестиногим роботом с использованием плота и одновременным переносом груза. Робот типа черепахи за счет манипулирования ногами совершает раскачку и переворот. Детали законов управления авторы не раскрывают. Приводятся только общая идеология и результаты моделирования. Так как насекомые и черепахи имеют экзоскелет, то указанные работы непосредственно относятся к теме данного обзора.

Задачи управления сложными нелинейными механическими системами исследованы в публикациях [23, 24]. В них строятся обобщенные модели управления, которые представляют интерес для применения в антропоморфных механизмах.

Существенное значение для проектирования антропоидов имеет разработка устойчивых систем программного движения и численных методов решения дифференциально-алгебраических уравнений. Методы построения уравнений динамики и решения задач управления динамическими системами предложены в [25–41]. Описаны способы построения уравнений динамики, обеспечивающие стабилизацию связей при численном решении, и методы решения задач управления программным движением систем различного назначения.

Моделированию динамики систем различного назначения и построению алгоритмов управления посвящено значительное число публикаций, из которых упомянем, например, работы [42–55]. В [56–72] предложены различные алгоритмы составления дифференциальных уравнений движения экзоскелетов, антропоморфных механизмов и стержневых систем, включая системы с переменной длиной звеньев. Исследуются вопросы управления такими системами.

В ИПМ им. М.В. Келдыша РАН разработан экспериментальный комплекс роботизированных мехатронных реабилитационных устройств, который может быть использован при лечении пациентов с различной тяжестью заболеваний опорно-двигательного аппарата для тренировки различных групп мышц и суставов. Комплекс состоит из тренажера для разработки голеностопного сустава, модуля для стимуляции стопы, тренажера-вертикализатора и легопулятора (экзоскелета нижних конечностей) человека, специализированного тренажера для ног пациента [73–75]. В Лаборатории бионической робототехники ИПМ им. М.В. Келдыша РАН созданы экзоскелетные устройства EgoArm и EgoChair [76].

Учеными института механики МГУ ведутся исследования по управлению движением экзоскелета, оценке энергетических затрат при ходьбе [77–79], разрабатывается программно-аппаратный комплекс дублирования опорно-двигательного аппарата человека “ПАК Экзоскелетон”. Управление динамикой антропоморфных механизмов осуществляется на основе информации, получаемой видеокамерами [80].

В рамках проекта “ЭкзоАтлет” [81] разработаны перспективные модели пассивных и активных экзоскелетов, в первую очередь ориентированных на социально значимые направления: медицину, спасательные работы и т.п. Проводятся клинические исследования разработанных моделей и внедрение в медицинскую практику [82], начаты продажи экзоскелетов. Общие вложения в “ЭкзоАтлет” составили 130 млн рублей.

К области решения некоторых прикладных задач и использованию экзоскелетов в промышленности относятся работы [83–87]. В медицинских учреждениях России находят практическое применение как отечественные, так и зарубежные разработки экзоскелетов. Так, в региональном сосудистом центре “Республиканская клиническая больница” Министерства здравоохране-

ния Чувашской Республики (г. Чебоксары) [88] для восстановления постинсультных больных применяется экзоскелетный комплекс Lokomat Pro Швейцарской фирмы “Hocoma”.

**2. Обзор работ зарубежных авторов.** В [89] рассматриваются вопросы динамики систем твердых тел, связанных друг с другом идеальными голономными и неголономными, стационарными и нестационарными связями. Автором предложен общий формализм математического описания систем твердых тел, который может использоваться как для аналитических, так и для численных исследований. Приводятся различные типы систем, в частности со структурой дерева, которые применимы для разработки роботов и экзоскелетов.

В публикациях [90, 91] решаются задачи управления манипуляционными и антропоморфными роботами, создаются математические модели шагающих роботов, изучаются модели походок, локомоции человека, записываются дифференциальные уравнения движения. Разрабатываются алгоритмы управления ходьбой и решается проблема устойчивости и стабилизации ходьбы. Производится энергетический анализ и предлагается реализация искусственной ходьбы на примере экзоскелетона с электромеханическим приводом. Приводятся данные по результатам разработки и испытания первого действующего макета шагающего антропоморфного робота типа экзоскелетона.

Первый экзоскелет стали изучать в 60-х годах прошлого века [92] в американской фирме “General Electric”. Это была массивная гидравлическая конструкция под названием “Hardiman”, весившая почти 700 кг. При этом экзоскелет обладал небольшой скоростью и низкой грузоподъемностью. Дальнейшее возрастание интереса к использованию экзоскелетов стимулировал новые разработки. Курс на роботизацию и кибернетизацию в военном деле потребовал в дополнение к существующим роботам новое оснащение для живых бойцов. В США перспективные разработки решили не отдавать одной фирме, а распределили между несколькими конструкторскими коллективами, с выделением по 20 млн долл. в год каждому. Результатом конкуренции стал быстрый и реальный прорыв в области исследований экзоскелетов. Примерно за 10 лет работы ученые представили различные конструкции экзоскелетов. Разработку экзоскелетов финансировал DARPA (defense advanced research projects agency – агентство передовых оборонных исследовательских проектов) – агентство Министерства обороны США, отвечающее за новые технологии для использования в вооруженных силах) [93].

Первой и самой масштабной стала совместная разработка фирм “Raytheon” и “Sarcos”. Экзоскелет XOS представлял собой массивное устройство на основе гидравлики. У представленного в 2008 г. образца имелся целый ряд недостатков: он потреблял много электроэнергии, имел весьма ограниченный набор движений. В 2010 г. “Raytheon” и “Sarcos” представили армейским заказчикам XOS-2, затем еще две версии. Конструкторам удалось вдвое снизить энергопотребление и увеличить двигательные возможности, но даже последняя модель устройства пока не соответствует всем требованиям Дагра [94]. Добиться настоящей автономности так и не удалось – к устройству присоединен силовой кабель. Поэтому возможной сферой применения XOS станет не поле боя, а хозяйственные армейские работы.

Конструкторы из Калифорнийского университета пошли по другому направлению [95]. Они выделили три базовые функции солдата: стрелять, носить и бегать. Для двух последних функций разрабатывается экзоскелет, предназначенный для усиления ног и спины солдата. В 2004 г. началась разработка проекта HULC. К 2010 г. были показаны действующие образцы.

Активно работают над экзоскелетом японские инженеры и ученые. В производстве находится модель HAL-5 (hybrid assistive limb – гибридная вспомогательная конечность) японской корпорации “Cyberdyne” [96], имеющая и ножные, и ручные усилители. Она может работать в автономном режиме, а цена устройства не превышает 60 тыс. долл. Данная модель, созданная в помощь спасательным службам и инвалидам [97], используется для реабилитации и социальной адаптации людей с проблемами опорно-двигательного аппарата. Экзоскелет HAL стал базовой моделью для проведения различных исследований. Так, в роботе-экзоскелете HAL изучили синхронизацию и управление, основанное на изменении положения центра масс и силы реакции. Позже они добавили датчики скорости в систему управления экзоскелетом [98]. Описанный в работе [99] экзоскелет HAL управляется на основе объединения сигналов, создаваемых верхними и нижними конечностями.

Экзоскелеты появились на рынке. Швейцарская компания “Hocoma” [100] разработала Локмат (Lokomat), который является роботизированным экзоскелетом и широко используется для реабилитации больных с различными заболеваниями нижних конечностей. Компания “Honda” создала вспомогательное устройство Honda–Walk Assist And Mobility Devices [101], представляющее собой портативный экзоскелет, который состоит из талии (рамы). К ней



Рис. 3. Сравнительный анализ активных и пассивных экзоскелетов

крепятся с двух сторон искусственные бедра, каждое из которых имеет одну степень свободы. Ekso фирмы “Ekso Bionics” [102] разработан в лаборатории робототехники и человеческой инженерии в Беркли (Berkeley, Exoskeletons: Robotics & Human Engineering Laboratory) [103]. Ekso представлен в виде бионического костюма, позволяющего людям с ограниченной подвижностью нижних конечностей стоять и ходить. В качестве эволюции экзоскелета можно рассматривать роботов, представленных в [104]. “ReWalk Robotics” выпустил экзоскелет, имеющий четыре звена: бедра и коленные суставы, программируемый с заданной структурой походки, которая обеспечивает необходимую мышечную тренировку для пользователя [105]. “Rex Bionics Group” создала экзоскелет Rex [106]. Устройство обеспечивает полную поддержку веса тела в состоянии равновесия без использования трости.

Роботизированный экзоскелет для больных после инсульта описан в [107]. Индийские ученые разрабатывают экзоскелет для реабилитации и обучения заново ходьбе больных после инсульта [108–110].

**3. Анализ известных конструкций экзоскелетов.** Как следует из краткого обзора известных моделей, экзоскелеты можно разделить на две группы: активные и пассивные. Их преимущества и недостатки представлены на рис. 3. Разработчики в зависимости от поставленной задачи выбирают ту или иную модель экзоскелета.

Пассивные модели чаще используются в промышленном производстве при выполнении сборочных операций, требующих от работника находиться продолжительное время в одной позе, а также для перераспределения и снижения нагрузок на опорно-двигательный аппарат человека и предотвращения травм на производстве, в сельском хозяйстве, при уходе за лежачими больными, при переноске или подъеме тяжестей. Активные экзоскелеты и их фрагменты находят применение в промышленности и в медицине в процессе реабилитации больных и восстановления двигательных функций.

Большинство роботизированных экзоскелетов сосредоточены на конструкции нижней конечности, предполагают совместное функционирование тазобедренного сустава с голеностопным суставом и состоят из звеньев постоянной длины. Например, в коленном суставе ось вращения не постоянна, а изменяет свое положение. Обычно представленные в публикациях экзоскелеты состоят из механических суставов с простыми поворотными осями, соединенными между собой абсолютно твердыми стержнями. Число степеней свободы в местах подвижных соединений бывает недостаточно, что создает скованность и неестественность движений. Жесткая конструкция на практике может привести к травме пользователя [111], так как в суставах человека при движении оси вращения не остаются в одном месте, а перемещаются в пространстве. Моделей, учитывающих изменения длин звеньев, на данный момент не выявлено. Учет изменений длин звеньев приводит к увеличению числа степеней свободы и возникают трудности при управлении движением.

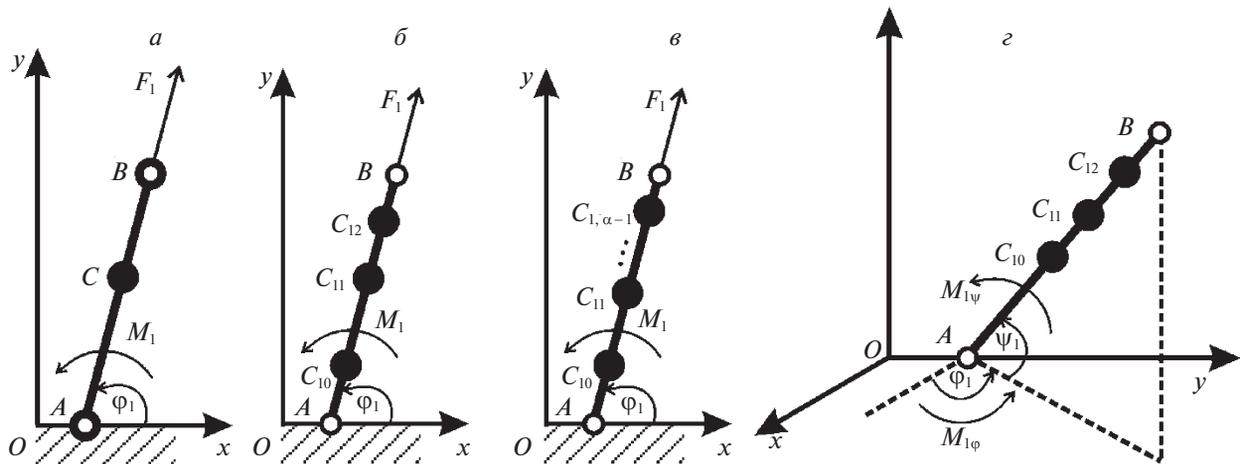


Рис. 4. Модели подвижного звена опорно-двигательного аппарата человека с сосредоточенными массами

Среди публикаций, имеющих в открытом доступе, не удалось обнаружить описание пространственных механизмов со звеньями переменной длины. Поэтому исследования в этом направлении могут способствовать дальнейшим разработкам новых конструкций экзоскелетов.

**4. Моделирование опорно-двигательного аппарата человека и экзоскелета.** Для описания опорно-двигательного аппарата человека могут быть успешно использованы конструкции, содержащие звенья переменной длины с сосредоточенными массами в шарнирах-суставах и между ними (рис. 4, а–z).

Рассмотрим движение звена  $AB$  длиной  $l(t)$  с неподвижной точкой  $A$ , расположенной на оси  $Ox$  системы  $Oxy$ . Представим звено системой трех точек  $A, C, B$  с массами  $m_0, m_1, m_2$  соответственно, две из которых совпадают с концами стержня, третья точка  $C$  находится между ними. Положение этой точки будем определять величиной  $kl(t)$ ,  $k = \text{const}$ ,  $0 < k < 1$ , положение звена – углом  $\varphi_1$  относительно оси  $Ox$  и длиной  $l$ . На звено действует сила тяжести, момент  $M_1$  относительно точки  $O$  и направленная вдоль  $AB$  сила  $F_1$ , приложенная в точке  $B$ . Лагранжиан определяется выражением

$$L = T - P, \quad 2T = a(\dot{l})^2 + l^2(\dot{\varphi}_1)^2, \quad P = bglS, \tag{4.1}$$

где  $a = m_1k^2 + m_2$ ,  $S = \sin\varphi_1$ ,  $b = m_1k + m_2$ .

Для модели, представленной на рис. 4, в, при нумерации точек от 1 до  $n$  значения  $a$  и  $b$  изменятся соответственно:

$$a = m_1k_1^2 + m_2k_2^2 + \dots + m_nk_n^2, \quad b = m_1k_1 + m_2k_2 + \dots + m_nk_n.$$

Движение звена описывается уравнениями Лагранжа

$$l^2 a \ddot{\varphi}_1 + glbC + 2lal\dot{\varphi}_1 = M_1, \quad a\ddot{l} - al\dot{\varphi}_1^2 + gbS = F_1 \tag{4.2}$$

с начальными условиями при  $t_0 = 0$ :

$$\varphi_1(t_0) = \varphi_1^0, \quad \dot{\varphi}_1(t_0) = \dot{\varphi}_1^0, \quad l(t_0) = l^0, \quad \dot{l}(t_0) = \dot{l}^0, \quad C = \cos\varphi, \quad S = \sin\varphi. \tag{4.3}$$

Положение звена  $AB$  длиной  $l_1(t)$  в пространстве, определяемом системой координат  $Oxyz$ , (рис. 4, z), задается расстоянием от точки  $A$  до центра масс, углом  $\varphi_1$  между осью  $Ox$  и проекцией звена  $AB$  на плоскость  $Oxy$  и углом  $\psi_1$  между звеном  $AB$  и этой плоскостью. Координаты сосредоточенных на звене масс, кинетическая энергия и потенциальная энергия звена находятся так:

$$x_{C\beta} = l_1 n_{\beta} C_1^\psi C_1^\varphi, \quad y_{C\beta} = l_1 n_{\beta} C_1^\psi S_1^\varphi, \quad z_{C\beta} = l_1 n_{\beta} S_1^\psi, \quad \beta = 0, 1, 2, \tag{4.5}$$

$$C_1^\varphi = \cos\varphi_1, \quad C_1^\psi = \cos\psi_1, \quad S_1^\varphi = \sin\varphi_1, \quad S_1^\psi = \sin\psi_1.$$

$$L = T - \Pi, \quad T = \frac{1}{2} \zeta_1 [l_1^2 + l_1^2 ((\dot{\phi}_1^2 (C_1^\Psi)^2 + \dot{\psi}_1^2)], \quad \Pi = g \eta_1 l_1 S_1^\Psi, \\ \zeta_1 = m_{11} n_{11}^2 + m_{12}, \quad \eta_1 = m_{11} n_{11} + m_{12}. \quad (4.6)$$

Дифференциальные уравнения движения звена переменной длины в трехмерном пространстве описываются уравнениями Лагранжа:

$$\zeta_1 l_1^2 (C_1^\Psi)^2 \ddot{\phi}_1 + 2 \zeta_1 l_1 (C_1^\Psi)^2 \dot{l}_1 \dot{\phi}_1 - 2 \zeta_1 l_1^2 C_1^\Psi S_1^\Psi \dot{\phi}_1 \dot{\psi}_1 = M_{1\phi}, \quad (4.7)$$

$$\zeta_1 l_1^2 \ddot{\psi}_1 + \zeta_1 l_1^2 C_1^\Psi S_1^\Psi \dot{\phi}_1^2 + 2 \zeta_1 l_1 \dot{l}_1 \dot{\phi}_1 + g \eta_1 l_1 C_1^\Psi = M_{1\psi}, \quad (4.8)$$

$$\zeta_1 \ddot{l}_1 - \zeta_1 l_1 (C_1^\Psi)^2 \dot{\phi}_1^2 - \zeta_1 l_1 \dot{\psi}_1^2 + g \eta_1 S_1^\Psi = F_1. \quad (4.9)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений движения содержит шесть произвольных постоянных, которые определяются по начальным условиям (4.3) и в дополнение к ним (4.10):

$$\psi_1(t_0) = \psi_1^0, \quad \dot{\psi}_1(t_0) = \dot{\psi}_1^0. \quad (4.10)$$

Модель опорно-двигательного аппарата человека при общем рассмотрении содержит точки с ветвлением, например, точки соединения с корпусом опорной ноги, переносимой ноги, руки. В [67] приводятся уравнения динамики моделей с точками ветвления.

Динамика системы  $n$  звеньев переменной длины, представленной на рис. 5, описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений, представленной в векторно-матричной форме [71, 72]:

$$A_\kappa(\varphi, \psi, l) \ddot{\phi} + B_\kappa(\varphi, \psi, l) \ddot{\psi} + \Lambda_\kappa(\varphi, \psi, l) \ddot{l} + D_\kappa(\varphi, \psi, l) \dot{\phi} \dot{\phi} + E_\kappa(\varphi, \psi, l) \dot{\psi} \dot{\psi} + \\ + 2G_\kappa(\varphi, \psi, l) \dot{\phi} \dot{\psi} + 2H_\kappa(\varphi, \psi, l) \dot{\phi} \dot{l} + 2K_\kappa(\varphi, \psi, l) \dot{\psi} \dot{l} + gP_\kappa(\psi) = M_\kappa(\varphi, \psi, l). \quad (4.11)$$

Здесь  $\kappa = \varphi, \psi, l$ ;  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  и  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  – векторы угловых координат сосредоточенных масс,  $l = (l_1, \dots, l_n)$  – вектор длин звеньев,  $\dot{\Phi} = \text{diag}(\dot{\phi}_1, \dots, \dot{\phi}_n)$ ,  $\dot{\Psi} = \text{diag}(\dot{\psi}_1, \dots, \dot{\psi}_n)$  – диагональные матрицы;  $M_\kappa$  – обобщенные силы,  $A_\kappa(\varphi, \psi, l)$ ,  $B_\kappa(\varphi, \psi, l)$ ,  $D_\kappa(\varphi, \psi, l)$ ,  $E_\kappa(\varphi, \psi, l)$ ,  $G_\kappa(\varphi, \psi, l)$  – матрицы, учитывающие инерционные свойства,  $\Lambda_\kappa(\varphi, \psi, l)$ ,  $H_\kappa(\varphi, \psi, l)$ ,  $K_\kappa(\varphi, \psi, l)$  – матрицы, учитывающие переменность длины звеньев;  $P_\kappa(\psi)$  – матрицы, определяемые силами тяжести.

Рассмотрим пример составления дифференциальных уравнений динамики плоской модели, состоящей из четырех звеньев переменной длины (рис. 6).

Элементы матрицы  $A$  определяются равенствами

$$a_{11} = l_1^2 \left( m_{11} n_{11}^2 + m_{12} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=2}^4 m_{k\beta} \right), \\ a_{12} = a_{21} = l_1 l_2 \left( m_{21} n_{21} + m_{22} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=3}^4 m_{k\beta} \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\ a_{j3} = a_{3j} = l_j l_3 \left( m_{31} n_{31} + m_{32} + \sum_{\beta=0}^2 m_{4\beta} \right) \cos(\varphi_j - \varphi_3), \quad j = 1, 2, \\ a_{j4} = a_{4j} = l_j l_4 (m_{41} n_{41} + m_{42}) \cos(\varphi_j - \varphi_4), \quad j = 1, 2, \\ a_{22} = l_2^2 \left( m_{21} n_{21}^2 + m_{22} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=3}^4 m_{k\beta} \right), \quad a_{33} = l_3^2 \left( m_{31} n_{31}^2 + m_{32} + \sum_{\beta=0}^2 m_{4\beta} \right), \\ a_{34} = a_{43} = l_3 l_4 (m_{41} n_{41} + m_{42}) \cos(\varphi_3 - \varphi_4), \quad a_{44} = l_4^2 (m_{41} n_{41}^2 + m_{42}). \quad (4.12)$$

Аналогично находятся элементы для всех остальных матриц. В итоге первое уравнение принимает вид

$$a_{11} \ddot{\phi}_1 + a_{12} \ddot{\phi}_2 - a_{13} \ddot{\phi}_3 - a_{14} \ddot{\phi}_4 + \dots, \quad (4.13)$$

где многоточием обозначены члены, не содержащие ускорений.

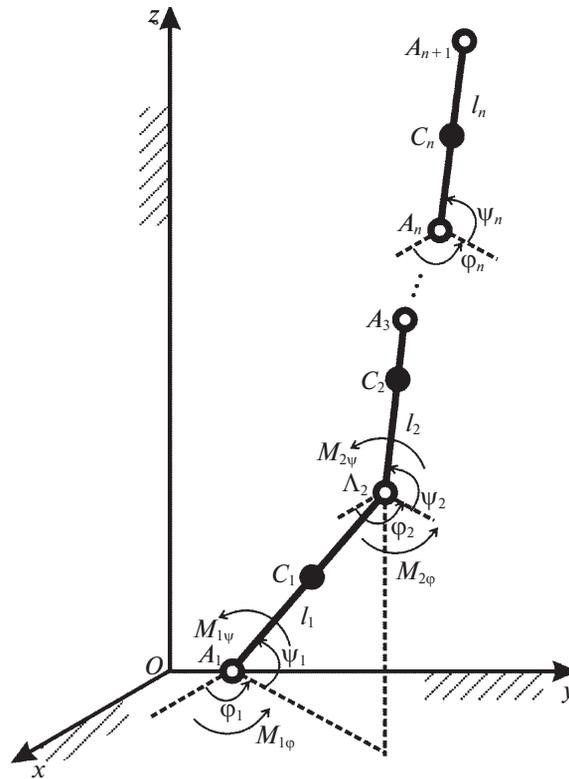


Рис. 5. Фрагмент модели опорно-двигательного аппарата человека с  $n$  звеньями переменной длины в пространстве

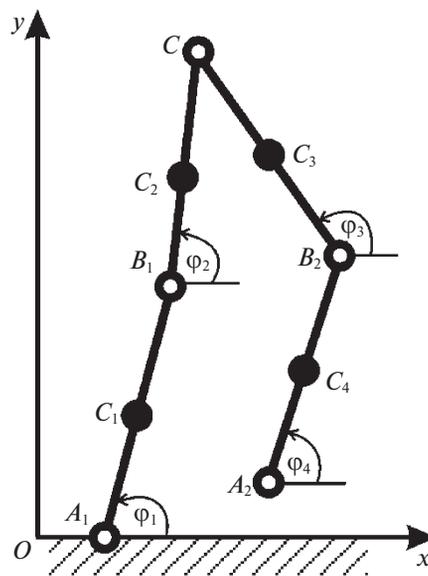


Рис. 6. Система с четырьмя подвижными звеньями переменной длины на плоскости

Сравнивая уравнения движения на плоскости и в пространстве, можно получить закономерность записи уравнений трехмерного движения по соответствующему дифференциальному уравнению для двумерной модели. Приведем данные закономерности на примере матрицы  $A$  (4.14). Для того, чтобы отличать элементы матриц пространственной и плоской моделей, снабдим их верхними индексами “3D” и “2D” соответственно. Плоская и пространственная модели

должны быть одинаковой структуры, т.е. иметь одинаковое количество звеньев, расположение точек ветвления, распределение масс на звене. Формулы для перехода имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 {}^3D a_{11}^\varphi &= l_1^2 \left( m_{11} n_{11}^2 + m_{12} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=2}^4 m_{k\beta} \right) \cos^2 \psi_1, \\
 {}^3D a_{12}^\varphi &= {}^3D a_{21}^\varphi = l_1 l_2 \left( m_{21} n_{21} + m_{22} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=3}^4 m_{k\beta} \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cos \psi_1 \cos \psi_2, \\
 {}^3D a_{j3}^\varphi &= {}^3D a_{3j}^\varphi = l_j l_3 \left( m_{31} n_{31} + m_{32} + \sum_{\beta=0}^2 m_{4\beta} \right) \cos(\varphi_j - \varphi_3) \cos \psi_j \cos \psi_3, \quad j = 1, 2, \\
 {}^3D a_{j4}^\varphi &= {}^3D a_{4j}^\varphi = l_j l_4 (m_{41} n_{41} + m_{42}) \cos(\varphi_j - \varphi_4) \cos \psi_j \cos \psi_4, \quad j = 1, 2, \\
 {}^3D a_{22}^\varphi &= l_2^2 \left( m_{21} n_{21}^2 + m_{22} + \sum_{\beta=0}^2 \sum_{k=3}^4 m_{4\beta} \right) \cos^2 \psi_2, \\
 {}^3D a_{33}^\varphi &= l_3^2 \left( m_{31} n_{31}^2 + m_{32} + \sum_{\beta=0}^2 m_{4\beta} \right) \cos^2 \psi_3, \\
 {}^3D a_{34}^\varphi &= {}^3D a_{43}^\varphi = l_3 l_4 (m_{41} n_{41} + m_{42}) \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \cos \psi_3 \cos \psi_4, \\
 {}^3D a_{44}^\varphi &= l_4^2 (m_{41} n_{41}^2 + m_{42}) \cos^2 \psi_4.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Далее построение аналогично выражению (4.13). Описанный метод позволяет довольно просто составить алгоритм записи уравнений динамики.

Разработан рекуррентный алгоритм составления дифференциальных уравнений движения. Ранее были получены обобщающие формулы для матриц, входящих в систему дифференциальных уравнений движения, позволяющие ее записать для экзоскелета с  $n$  подвижными звеньями переменной длины [72].

На основе полученных уравнений составлен рекуррентный алгоритм, который по матрицам коэффициентов уравнений системы, содержащей  $n$  звеньев, определяет матрицы коэффициентов уравнений системы с  $n + 1$  звеном. По известной матрице

$$A_n = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \left( \eta_j + \sum_{k=j+1}^n \theta_k \right) l_i l_j C_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad a_{ij} = \theta_{n+1} l_i l_j C_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \tag{4.15}$$

элементы матрицы  $A_{n+1}$  задаются выражениями

$$\begin{aligned}
 a_{n+1,j} &= \eta_{n+1} l_{n+1} l_j C_{n+1,j}, \quad a_{i,n+1} = \eta_{n+1} l_{n+1} l_i C_{i,n+1}, \\
 i, j &= 1, \dots, n + 1.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$C_{ij} = \cos(\varphi_i - \varphi_j), \quad \theta_{n+1} = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} m_{n+1,\beta}, \quad \eta_{n+1} = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} m_{n+1,\beta} n_{n+1,\beta}, \quad \zeta_{n+1} = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} m_{n+1,\beta} n_{n+1,\beta}^2.$$

Алгоритм построения матрицы трехмерной модели с  $n + 1$  звеном по матрице двумерной модели с  $n$  звеньями имеет следующую последовательность действий:

$${}^{2D} A_n \rightarrow {}^{2D} A_{n+1} \rightarrow {}^{3D} A_{n+1}. \tag{4.17}$$

Аналогично находятся остальные матрицы.

Таким образом, получен рекуррентный алгоритм составления уравнений движения двумерной стержневой механической системы с  $n + 1$  звеном по известным уравнениям системы со звеньями переменной длины для дальнейшего перехода к трехмерной модели соответствующей структуры. Это позволяет автоматизировать составление системы дифференциальных уравнений движения стержневой механической системы со звеньями переменной длины.

Матричный метод и рекуррентный алгоритм составления дифференциальных уравнений реализован в среде системы компьютерной математики “Mathematica” и пример применения приведен в приложении к статье [69]. При составлении уравнений Лагранжа было затрачено время

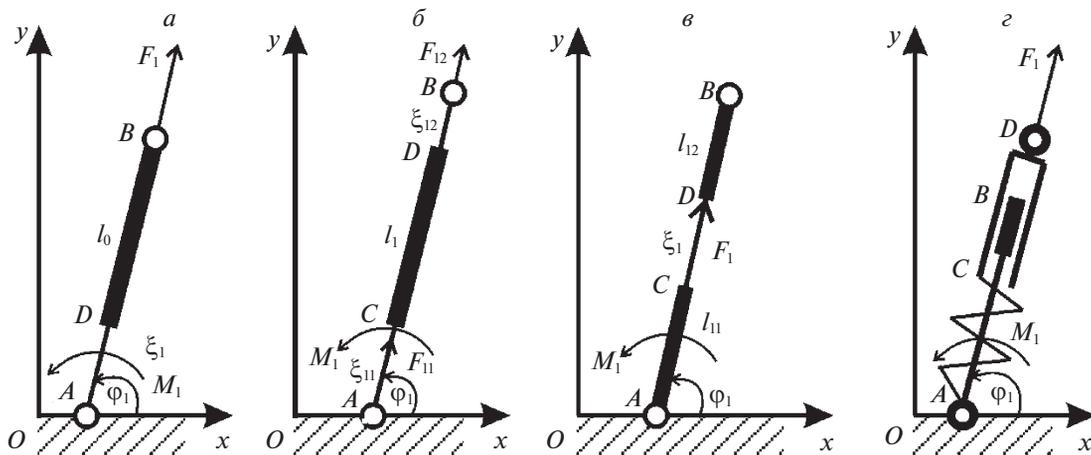


Рис. 7. Модели одного звена экзоскелета переменной длины

в секундах для модели с одним подвижным звеном – 0.59, с двумя подвижными звеньями – 5.3, с тремя подвижными звеньями – 37 при использовании матричного метода соответственно 0.46, 0.55 и 0.79 с [67]. Рекуррентный алгоритм для модели с двумя и тремя подвижными звеньями занял 0.59 и 0.86 с. Проводя сравнение с трехмерными моделями, для модели экзоскелета с двумя подвижными звеньями (рис. 5 при  $n = 2$ ) время, затраченное на составление уравнений Лагранжа, оказалось равным 113.69 с. Использование матричного метода потребовало 1.30 с. Таким образом, видно, что различия в скорости составления системы дифференциальных уравнений движения нарастают с увеличением количества звеньев и перехода к трехмерной модели.

Способы решения различных модельных задач, включая вопросы, связанные с трением в суставах, движения человека в экзоскелете, точности моделирования изложены в [56–58].

Были разработаны: модель звена экзоскелета с одним участком переменной длины и абсолютно твердым весомым стержнем (рис. 7, а), с двумя невесомыми участками переменной длины и одним абсолютно твердым весомым стержнем (рис. 7, б), с двумя весомыми абсолютно твердыми участками и одним невесомым участком переменной длины (рис. 7, в), телескопическая модель звена (рис. 7, з), состоящая из двух весомых абсолютно жестких частей – штока и корпуса, которые совершают движение относительно друг друга вдоль прямой, проходящей через его начало и конец (рис. 7, з). Один из шарниров жестко соединен со штоком, второй – с корпусом. Под действием реакций со стороны опоры и соседних стержней происходит движение штока внутри корпуса, тем самым обеспечивается изменение длины звена.

Все предложенные модели звеньев на плоскости были перенесены в пространство. Для этих моделей звеньев были составлены системы дифференциальных уравнений движения. Далее проводилось исследование многозвенных моделей, составленных из таких звеньев, получены системы дифференциальных уравнений движения в обобщенном векторно-матричном виде, реализован для них рекуррентный метод составления систем дифференциальных уравнений движения. Проводилось математическое моделирование движения экзоскелетов и антропоморфных роботов с использованием разработанных моделей звеньев переменной длины [57, 59–71].

**Заключение.** Проведен анализ российских и зарубежных публикаций, посвященных исследованиям экзоскелетов. На основании изучения работ библиографической базы РИНЦ установлен факт интенсивного роста публикаций по данной тематике. Выявлены проблемы в области создания экзоскелетов, связанные на данный момент с их низкой функциональностью, недостаточной комфортабельностью. Активным экзоскелетам свойственно высокое энергопотребление и короткое время автономной работы при эксплуатации.

Одним из возможных вариантов повышения качества работы экзоскелетов может оказаться включение в структуры моделей звеньев переменной длины. Предложенные модели могут быть востребованы при изучении экзоскелетов и применены в исследованиях по моделированию опорно-двигательного аппарата человека. Матричные методы и рекуррентные алгоритмы позволяют использовать методы компьютерной алгебры для построения уравнений динамики стержневых систем и решения задач управления целенаправленным движением.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Научное наследие П.Л. Чебышева. Вып. 2. Теория механизмов. М.—Л.: Изд-во. АН СССР, 1945. 192 с.
2. *Корнев Г.В.* Очерки механики целенаправленного движения. М.: Наука, 1980. 192 с.
3. *Корнев Г.В.* Введение в механику человека. М.: Наука, 1977. 264 с.
4. *Формальский А.М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012. 232 с.
5. *Формальский А.М.* Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1982. 368 с.
6. *Белецкий В.В.* Двухногая ходьба: модельные задачи динамики и управления. М.: Наука, 1984. 288 с.
7. *Бербюк В.Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем. Киев: Наук. думка, 1989. 192 с.
8. *Галиуллин А.С.* О задачах динамического программирования // Тр. УДН им. П. Лумумбы. 1964. Т. 5. Вып. 2. С. 3–9.
9. *Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д.* Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971. 352 с.
10. *Галиуллин А.С.* Обратные задачи динамики и задачи управления движениями материальных систем // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 9. С. 1535–1541.
11. *Галиуллин А.С.* Методы решения обратных задач динамики. М.: Наука, 1986. 224 с.
12. *Галиуллин А.С.* Обратные задачи динамики. М.: Наука, 1981. 143 с.
13. *Галиуллин А.С., Гафаров Г.Г., Малайшка Р.П., Хван А.М.* Аналитическая динамика систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу // Успехи физ. наук. 1997. 324 с.
14. <http://www.umlabor.ru/>
15. <http://www.umlabor.ru/faq/>
16. *Голубев Ю.Ф., Погорелов Д.Ю.* Компьютерное моделирование шагающих роботов // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. № 2. С. 525–534.
17. *Погорелов Д.Ю.* Современные алгоритмы компьютерного синтеза уравнений движения систем тел // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 4. С. 5–15.
18. *Голубев Ю.Ф.* Функция Аппеля в динамике систем твердых тел : Препринты № 58. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2014. 16 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-58>.
19. *Golubev Yu., Melkumova E.* Two-legged Walking Robot Prescribed Motion on a Rough Cylinder // AIP Conf. Proceedings. V. 1959. Published by the American Institute of Physics, 2018. <https://doi.org/10.1063/1.5034589>.
20. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Транспортировка груза на плоту инсектоморфным роботом // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 136–146.
21. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Мелкумова Е.В.* Приведение инсектоморфного робота в рабочее состояние из аварийного положения “вверх ногами” // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 163–176.
22. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Экстремальные локомоционные возможности инсектоморфных роботов. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018. 212 с.
23. *Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
24. *Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н.* Локомоция многозвенных систем на плоскости: динамика, управление, оптимизация: Препринт № 1128. М.: Изд-во ИПМех РАН, 2016. 154 с.
25. *Мухарлямов Р.Г.* Об уравнениях движения механических систем // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 12. С. 2048–2056.
26. *Mukharlyatov R.G., Ibragimov R.G., Kolesnikov A.P.* Control in Adaptive Optical Systems // IFAC Workshop on Evaluation of Adaptive Control Strategies in Industrial Application. Tbilisi, USSR, 17–21 Oct. 1989. Oxford: Pergamonpress, 1990. P. 301–306.
27. *Мухарлямов Р.Г.* Управление программным движением адаптивной оптической системы // Вестн. РУДН, Сер. Прикл. матем. и информатика. 1994. № 1. С. 22–40.
28. *Мухарлямов Р.Г.* Управление программным движением многозвенного манипулятора // Вестн. РУДН. Сер. Прикл. матем. и информатика. 1998. № 1. С. 22–39.
29. *Мухарлямов Р.Г.* О численном решении дифференциально-алгебраических уравнений // Вестн. РУДН. Сер. Прикл. матем. и информатика. 1999. № 1. С. 20–24.
30. *Мухарлямов Р.Г.* О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифференц. уравнения. 2003. Вып. 39. № 3. С. 343–353.
31. *Мухарлямов Р.Г.* Стабилизация движений механических систем на заданных многообразиях фазового пространства // ПММ. 2006. Т. 70. № 2. С. 236–249.
32. *Mukharlyatov R.G.* Reduction of Dynamical Equations for the Systems with Constraints to Given Structure // J. Applied Mathematics and Mechanics. 2007. V. 71. № 3. P. 401–410.
33. *Мухарлямов Р.Г.* Дифференциально-алгебраические уравнения программных движений лагранжевых динамических систем // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 50–61.

34. *Mukharlyatov R.G., Beshaw A.W.* Solving Differential Equations of Motion for Constrained Mechanical Systems // Вестн. РУДН. Сер. Математика, информатика, физика. 2013. № 3. С. 81–91.
35. *Мухарлямов Р.Г.* Управление программным движением системы с переменными массами // Вестн. Казанск. технологического ун-та. 2013. № 12. С. 278–284.
36. *Мухарлямов Р.Г.* Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 1. С. 15–28.
37. *Мухарлямов Р.Г.* Управление динамикой систем с позиционными связями // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Тр. XI Междунар. Четаевской конф. Т. 3. Секция 3. Управление. Ч. II. Казань : КНИТУ-КАИ, 2017. С. 140–146.
38. *Mukharlyatov R.G., Tleubergenov M.I.* Control of System Dynamics and Constraints Stabilization // Distributed Computer and Communication Networks (DCCN 2017) / Eds V. Vishnevskiy, K. Samouylov, Kozyrev D. Communications in Computer and Information Science. V. 700. Cham : Springer, 2017. P. 431–442.
39. *Мухарлямов Р.Г.* Управление динамикой системы с дифференциальными связями // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 4. С. 16–28.
40. *Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г.* О методах построения уравнений динамики с учетом стабилизации связей // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 3. С. 124–135.
41. *Kaspirovich I.E.* Application of Constraint Stabilization to Nonholonomic mechanics // 2nd Intern. Conf. on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). Chelyabinsk, 2016. <https://doi.org/10.1109/ICIEAM.2016.7910921>.
42. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
43. *Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А.* Введение в аналитическую динамику: 2-е изд., пер. и доп. М.: Наука, 1991. 250 с.
44. *Калёнова В.И., Карапетян А.В., Морозов В.М., Салмина М.А.* Неголономные механические системы и стабилизация движения // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 7. С. 117–158.
45. *Борисов А.В., Мамаев И.С., Килин А.А.* Избранные задачи неголономной механики. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 289 с.
46. *Baumgarte J.* Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1972. V. 1. Iss. 1. P. 1–16.
47. *Пол Р.* Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора / Пер. с англ. М.: Наука, Физматлит, 1976. 104 с.
48. *Layton R.A.* Principles of Analytical System Dynamics. N.Y.: Springer, 1998. 158 p.
49. *Meiser P., Enge O., Freudenberg H., Kielau G.* Electromechanical Interactions in Multibody Systems Containing Electromechanical Drives // Multibody System Dynamics. 1997. № 1. P. 281–302.
50. *Llibre J., Ramirez R.* Inverse Problems of Ordinary Differential Equations and Applications. Switzerland: Springer International Publishing, 2016. 266 p.
51. *Amirouche F.* Fundamentals of Multibody Dynamics: Theory and Applications. Boston: Birkh user, 2006.
52. *Грдина Я.И.* Динамика живых организмов. Екатеринбург: Типография И. Когана, 1911. 108 с.
53. *Раус Э. Дж.* Динамика систем твердых тел. М.: Наука, 1983. Т. 1. 463 с.
54. *Юревич Е.И.* Управление роботами и робототехническими системами. СПб., 2000. [elibrary.spbstu.ru/dl/326.pdf/download](http://elibrary.spbstu.ru/dl/326.pdf/download).
55. *Козлов В.В., Макарычев В.П., Тимофеев А.В., Юревич Е.И.* Динамика управления роботами. М.: Наука, Физматлит, 1984. 336 с.
56. *Борисов А.В.* Проверка возможности использования экспериментально определенных на людях управляющих моментов для управления движением антропоморфного робота // Тр. XXI Междунар. науч.-техн. конф. “Экстремальная робототехника”. СПб.: Политехника-сервис, 2010. С. 327–337.
57. *Борисов А.В.* Управление движением одиннадцатизвенного антропоморфного робота на основе информации, экспериментально полученной на биологических объектах // Вестн. Воронежск. гос. технологической академии. Сер. Информационные технологии, моделирование и управление. 2011. № 2. С. 68–71.
58. *Борисов А.В.* Динамика эндо- и экзоскелета: монография. Смоленск: Смоленская городская типография, 2012. 296 с.
59. *Борисов А.В.* Автоматизация проектирования стержневых экзоскелетов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 10. С. 29–33.
60. *Борисов А.В.* Автоматизация разработки трехмерных моделей экзоскелетов со звеньями переменной длины // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16. № 12. С. 828–835.
61. *Борисов А.В.* Модель телескопического звена экзоскелета // Энергетика, информатика, инновации. 2016. Т. 1. С. 235–238.

62. *Борисов А.В., Розенблат Г.М.* Новые алгоритмы составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета с переменной длиной звеньев и управлением в шарнирах-суставах // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Т. 9. № 2. С. 201–210.
63. *Борисов А.В.* Синтез экзоскелета со звеньями переменной длины для опорно-двигательного аппарата человека // Вопросы оборонной техники. Технические средства противодействия терроризму. 2017. Сер. 16. Вып. 5–6. С. 59–67.
64. *Борисов А.В.* Модель экзоскелета и антропоморфного робота с многозвенными стопами // Технология машиностроения и материаловедение: материалы междунар. науч.-практ. конф. 2017. № 1. С. 21–23.
65. *Борисов А.В.* Эмпирический и теоретический подходы к управлению движением экзоскелета // Вестн. Балтийского федерального ун-та им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2017. № 3. С. 33–47.
66. *Борисов А.В., Розенблат Г.М.* Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета и управление им // ПММ. 2017. Т. 81. № 5. С. 511–522.
67. *Борисов А.В., Кончина Л.В.* Сравнительный анализ алгоритмов управления экзоскелетом со звеньями переменной длины // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18. № 4. С. 238–245.
68. *Борисов А.В., Розенблат Г.М.* Моделирование динамики экзоскелета с управляемыми моментами в суставах и переменной длиной звеньев с использованием рекуррентного метода составления дифференциальных уравнений движения // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 2. С. 148–174.
69. *Борисов А.В., Розенблат Г.М.* Автоматизация разработки экзоскелетов и антропоморфных роботов с использованием рекуррентного метода составления дифференциальных уравнений движения // Справочник. Инженерный журнал. 2018. № 1. С. 25–31.
70. *Борисов А.В.* Механика пространственной модели экзоскелета и антропоморфного робота // Вопросы оборонной техники. Технические средства противодействия терроризму. 2018. Сер. 16. Вып. 3–4. С. 46–55.
71. *Борисов А.В., Розенблат Г.М.* Динамика механических стержневых систем со звеньями переменной длины применительно к эндо-, экзоскелетам и антропоморфным роботам на плоскости и в пространстве // Справочник. Инженерный журнал. 2019. № 10 (начало). С. 1–20.
72. *Борисов А.В., Розенблат Г.М.* Динамика механических стержневых систем со звеньями переменной длины применительно к эндо-, экзоскелетам и антропоморфным роботам на плоскости и в пространстве // Справочник. Инженерный журнал. 2019. № 11 (окончание). С. 1–20.
73. *Павловский В.Е., Платонов А.К., Алисейчик А.П. и др.* Биомехатронный комплекс нейрореабилитации – концепция, конструкция, модели и управление: Препринт № 111. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2014. 19 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-111>.
74. *Алисейчик А.П., Орлов И.А., Павловский В.Е., Павловский В.В., Платонов А.К.* Механика и управление экзоскелетами нижних конечностей для нейрореабилитации спинальных больных // XI Всероссийск. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: аннотации докладов. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2015. С. 319.
75. *Павловский В.Е.* О разработках шагающих машин: Препринт № 101. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2013. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-101>.
76. <https://karfidovlab.com/projects/exochair/>
77. *Иванов А.В.* Исследование математической модели экзоскелетона нижних конечностей // Ломоносовские чтения: тез. докл. науч. конф. М.: Изд-во МГУ, 2012. С. 84.
78. *Лавровский Э.К., Письменная Е.В.* Алгоритмы управления экзоскелетом нижних конечностей в режиме одноопорной ходьбы по ровной и ступенчатой поверхностям // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 44–51.
79. *Лавровский Э.К., Письменная Е.В.* Алгоритм управления, обеспечивающий задание произвольных траекторий экзоскелета нижних конечностей // XII Всероссийск. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сб. трудов. В 4 т. Т. 1. Уфа: Изд-во Башкирск. гос. ун-та, 2019. С. 218–219.
80. *Комаров П.А.* Алгоритмы управления движением шагающего аппарата на плоской поверхности по данным видеокамеры // Ломоносовские чтения: тез. докл. науч. конф. М.: Изд-во МГУ, 2012. С. 96.
81. <https://www.exoatlet.com/>
82. *Котов С.В., Исакова Е.В., Лиждвой В.Ю., Секирин А.Б., Письменная Е.В., Петрушанская К.А., Геворкян А.А.* Методические рекомендации по нейрореабилитации больных рассеянным склерозом, имеющих нарушения ходьбы, с использованием экзоскелета ExoAtlet. М.: ГБУЗ МО МОНИКИ им. М.Ф. Владимирского, 2018. 26 с.
83. *Яцун С.Ф., Антипов В.М., Карлов А.Е., Аль Манджи Хамиль Хамед Мохаммед.* Подъем груза в экзоскелете с гравитационной компенсацией // Изв. Юго-Западного гос. ун-та. 2019. Т. 23. № 2. С. 8–17.
84. *Яцун С.Ф., Антипов В.М., Карлов А.Е.* Моделирование подъема груза с помощью промышленного экзоскелета // Изв. Юго-Западного гос. ун-та. 2018. Т. 22. № 6 (81). С. 14–20.

85. Яцун С.Ф., Савин С.И., Герасимов М.С. Система принятия решений для экзоскелета нижних конечностей на основе сверточных нейронных сетей // Матер. междунар. научно-практической конф. “Прогресс транспортных средств и систем” / Под ред. И.А. Каляева, Ф.Л. Черноусько, В.М. Приходько. Волгоград: Изд-во Волгоградск. гос. техн. ун-та, 2018. С. 198–199.
86. Яцун С.Ф., Мищенко В.Я., Яцун А.С. Пассивный грузовой экзоскелетон: Патент на полезную модель. RU 190786. 2019.
87. Яцун С.Ф., Яцун А.С., Постольный А.А., Карлов А.Е., Мищенко В.Я. Стопа экзоскелета: Патент на полезную модель. RU 189145. 2019.
88. Тихоплав О.А., Иванова В.В., Гурьянова Е.А., Иванов И.Н. Эффективность роботизированной механотерапии комплекса “ЛОКОМАТ PRO” у пациентов, перенесших инсульт // Вестн. восстановительной медицины. 2019. № 5(93). С. 57–64.
89. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 296 с.
90. Вукобратович М., Христич Д. Управление антропоморфическими системами // Управление в пространстве. 1976. Т. 2. С. 180–187.
91. Вукобратович М., Стокич Д. Управление манипуляционными роботами: теория и приложения. М.: Наука, 1985. 383 с.
92. <http://cyberneticzoo.com/wp-content/uploads/2010/04/GE-Hardiman-paper.pdf>.
93. <https://darpa.com/>
94. <https://www.army-technology.com/projects/raytheon-xos-2-exoskeleton-us/>
95. <https://www.army-technology.com/projects/human-universal-load-carrier-hulc/>
96. Tsukahara A., Hasegawa Y., Sankai Y. Gait Support for Complete Spinal Cord Injury Patient by Synchronized Leg-swing with HAL // Proc. IEEE/RSJ Intern. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS'11). San Francisco, 2011. P. 1737–1742.
97. <http://www.popmech.ru/blogs/post/2356-nachalis-probnyie-postavki-kiberkostyuma-ekzoskeleta-hal-5/>
98. Tsukahara A., Hasegawa Y., Eguchi K., Sankai Y. Restoration of Gait for Spinal Cord Injury Patients Using HAL with Intention Estimator for Preferable Swing Speed // IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering. 2015. V. 23. №. 2. P. 308–318.
99. Hassan M., Kadone H., Suzuki K., Sankai Y. Exoskeleton Robot Control Based on Cane and Body Joint Synergies // Proc. 25th IEEE/RSJ Intern. Conf. on Robotics and Intelligent Systems (IROS'12). Vilamoura, 2012. P. 1609–1614.
100. <https://www.hocomma.com/solutions/lokomat/>
101. <http://corporate.honda.com/innovation/walk-assist/>
102. <http://www.eksobionics.com>
103. <http://bleex.me.berkeley.edu/research/exoskeleton/>
104. Kazerooni H. Exoskeletons for Human Power Augmentation // Proc. IEEE IRS/RSJ Intern. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS '05). Edmonton, 2005. P. 3120–3125.
105. <http://www.rewalk.com/>
106. <http://www.rexbionics.com/>
107. Bortole M., del Ama A., Rocon E., Moreno J.C., Brunetti F., Pons J.L. A Robotic Exoskeleton for Overground gait Rehabilitation // Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation (ICRA '13). Karlsruhe, 2013. P. 3356–3361.
108. Chaudhary K., Chaudhary H. Optimum Balancing of Slider-Crank Mechanism Using Equipomental System of Point-Masses // 2nd Intern. Conf. on Innovations in Automation and Mechatronics Engineering (ICIAME 2014). Springer, 2014. P. 35–42.
109. Gupta V., Chaudhary H., Saha S.K. Dynamics and Actuating Torque Optimization of Planar Robots // J. Mechanical Science and Technology. 2015. V. 29. P. 2699–2704.
110. Kumani D.S. Chaudhary H. Hexahedron Point Mass Model and Teaching Learning Based Optimization for Balancing of Industrial Manipulators // 2nd Intern. and 17th National Conf. on Machines and Mechanisms (iNaCoMM 2015). Kanpur, 2015. P. 28–36.
111. Piña-Martínez E., Rodríguez-Leal E. Inverse Modeling of Human Knee Joint Based on Geometry and Vision Systems for Exoskeleton Applications // Mathematical Problems in Engineering. Vol. 2015. Art. ID 145734. <https://doi.org/10.1155/2015/145734>