

СОДЕРЖАНИЕ

Том 500, 2021

МАТЕМАТИКА

Численное исследование задачи Зарембы

С. Д. Алгазин 5

О гауссовских операторах перехода

Г. А. Алексеев, К. А. Афонин, В. И. Богачев 10

Аксиоматическое определение колец с малыми сокращениями

А. Аткарская, А. Канель-Белов, Е. Плоткин, Э. Рипс 16

Периодические ультрадискретные преобразования плоскости

В. А. Быковский 23

О некоторых модификациях отображения “кот Арнольда”

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов 26

О 4-спектре свойств первого порядка случайных графов

М. Е. Жуковский, А. Д. Матушкин, Ю. Н. Яровиков 31

Теоремы сравнения для эллиптических неравенств с младшими производными, учитывающие геометрию области

А. А. Коньков 35

Математическое моделирование 3D-динамических процессов вблизи трещины с использованием модели Шонберга

И. Б. Петров, П. В. Стогний, Н. И. Хохлов 40

О проблеме периодичности разложения в непрерывную дробь элементов гиперэллиптических полей со степенью фундаментальной S -единицы не выше 11

В. П. Платонов, М. М. Петрунин, Ю. Н. Штейников 45

Групповые структуры на алгебраических многообразиях

В. Л. Попов 52

Самоподобные замощения многогранников

В. Ю. Протасов, Т. И. Зайцева 55

Корректная разрешимость и экспоненциальная устойчивость решений вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений

Н. А. Раутиан 62

| | |
|--|----|
| Существование и устойчивость равновесных решений уравнения Власова с модифицированным гравитационным потенциалом | 67 |
| <i>Т. В. Сальникова</i> | |
| Вторая краевая задача для дифференциально-разностных уравнений | 74 |
| <i>А. Л. Скубачевский, Н. О. Иванов</i> | |
| Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия | 78 |
| <i>М. В. Шамолин</i> | |
| Адаптивный метод Гаусса–Ньютона в задачах решения систем нелинейных уравнений | 87 |
| <i>Н. Е. Юдин</i> | |

ИНФОРМАТИКА

| | |
|--|----|
| Применение многомасштабного подхода для моделирования сорбционной фильтрации воздуха | 92 |
| <i>С. В. Поляков, Т. А. Кудряшова, Н. И. Тарасов</i> | |

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

| | |
|---|-----|
| Субриманова сфера Энгеля | 97 |
| <i>Ю. Л. Сачков, А. Ю. Попов</i> | |
| Притяжение для механических систем с трением | 102 |
| <i>И. А. Финогенко</i> | |
| Анизотропный подход к организации обмена данными для нестационарной сетевой системы | 107 |
| <i>А. В. Юрченков, А. Ю. Кустов</i> | |

| | |
|---------------------|-----|
| Правила для авторов | 112 |
|---------------------|-----|

CONTENTS

Volume 500, 2021

MATHEMATICS

| | |
|--|----|
| Numerical Research of the Problem Zaremba <i>S. D. Algazin</i> | 5 |
| On Gaussian Transition Operators <i>G. A. Alekseev, K. A. Afonin, and V. I. Bogachev</i> | 10 |
| Axiomatic Definition of Small Cancellation Rings <i>A. Atkarskaya, A. Kanel-Belov, E. Plotkin, and E. Rips</i> | 16 |
| Periodic Ultradiscrete Plane Transformations <i>V. A. Bykovskii</i> | 23 |
| On Some Modifications of Arnold's Cat Map <i>S. D. Glyzin and A. Yu. Kolesov</i> | 26 |
| On the 4-Spectrum of First-Order Properties of Random Graphs <i>M. E. Zhukovskii, A. D. Matushkin, and Y. N. Yarovikov</i> | 31 |
| Comparison Theorems for Elliptic Inequalities with Lower-Order Derivatives That Take into Account the Geometry of the Domain <i>A. A. Kon'kov</i> | 35 |
| Mathematical Modeling of 3D Dynamic Processes Near a Fracture Using the Fracture Model of Schoenberg <i>I. B. Petrov, P. V. Stognii, and N. I. Khokhlov</i> | 40 |
| On the Periodicity Problem for the Continued Fraction Expansion of Elements of Hyperelliptic Fields with Fundamental S-Unit Degree Less or Equal to 11 <i>V. P. Platonov, M. M. Petrunin, and Yu. N. Shteinikov</i> | 45 |
| Group Structures on Algebraic Varieties <i>V. L. Popov</i> | 52 |
| Self-Affine Tilings of Polyhedra <i>V. Yu. Protasov and T. I. Zaitseva</i> | 55 |
| Correct Solvability and Exponential Stability for Solutions of Volterra Integro-Differential Equations <i>N. A. Rautian</i> | 62 |

| | |
|---|-----|
| Existence and Stability of Equilibrium Solutions of the Vlasov Equation with a Modified Gravitational Potential | 67 |
| <i>T. V. Salnikova</i> | |
| The Second Boundary Value Problem for Differential-Difference Equations | 74 |
| <i>A. L. Skubachevskii and N. O. Ivanov</i> | |
| New Cases of Integrability of Systems of Geodesics, Potential, and Dissipative Ones on the Tangent Bundles of Finite-Dimensional Manifolds | 78 |
| <i>M. V. Shamolin</i> | |
| Adaptive Gauss–Newton Method for Solving Systems of Nonlinear Equations | 87 |
| <i>N. E. Yudin</i> | |
| <hr/> | |
| COMPUTER SCIENCE | |
| Application of the Multi-Scale Approach for Air Sorbent Filtration Simulation | 92 |
| <i>S. V. Polyakov, T. A. Kudryashova, and N. I. Tarasov</i> | |
| <hr/> | |
| CONTROL THEORY | |
| Sub-Riemannian Engel Sphere | 97 |
| <i>Yu. L. Sachkov and A. Yu. Popov</i> | |
| Attraction for Mechanical Systems with Friction | 102 |
| <i>I. A. Finogenko</i> | |
| Anisotropy-Based Approach to Communication Tuning for Time-Varying Sensor Network System | 107 |
| <i>A. V. Yurchenkov and A. Yu. Kustov</i> | |
| <hr/> | |
| For Authors | 112 |
| <hr/> <hr/> | |

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ

© 2021 г. С. Д. Алгазин^{1,*}

Представлено академиком РАН В.П. Масловым 26.03.2021 г.

Поступило 29.03.2021 г.

После доработки 28.04.2021 г.

Принято к публикации 10.08.2021 г.

Рассматривается задача на собственные значения для двумерного оператора Лапласа со смешанными краевыми условиями (задача Зарембы), которая (предположительно) имеет внутри области гладкое решение. Вычисления показывают, что у оператора $-\Delta$ есть отрицательное собственное значение, т.е. он не положительно определен.

Ключевые слова: численные алгоритмы без насыщения, задача Зарембы, задачи на собственные значения со смешанными краевыми условиями

DOI: 10.31857/S2686954321050039

ВВЕДЕНИЕ

Для решения рассматриваемой задачи используется метод без насыщения К.И. Бабенко [1], который автоматически настраивается на гладкость решения (его точность тем выше, чем большим условиям гладкости удовлетворяет решение). А priori гладкость решения может быть неизвестна. Подробнее с многочисленными примерами расчета собственных значений для оператора Лапласа с однородными краевыми условиями см. [2].

Задача Зарембы опубликована в 1910 г. [3]. Современные исследования этой задачи проводили Н. Гарханов, А.А. Шлапунов и др., см. [4–9]. В этих работах задача Зарембы рассматривается аналитически в круге. В настоящей работе задача Зарембы исследуется численно. Задача рассматривается в произвольной гладкой области, для которой известно конформное отображение этой области на круг (аналитическое или численное). В последнем случае достаточно знать параметрические уравнения границы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В произвольной области $G \in R^2$ с достаточно гладкой границей ∂G рассмотрим задачу (1)–(3):

$$\Delta u(z) + F(z) = 0, \quad z \in G, \quad (1)$$

$$u|_{\partial G_1} = 0, \quad (2)$$

$$Au + \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial G_2} = 0. \quad (3)$$

Здесь функция $F(z)$ либо задана, либо $F(z) = [Q(z) + \lambda P(z)]u(z)$, где $Q(z)$ и $P(z)$ – заданные функции, $\partial G = \partial G_1 \cup \partial G_2$, и в этом случае имеем задачу на собственные значения для оператора Лапласа; A – заданная на границе ∂G_2 гладкая функция; \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к ∂G_2 . В дальнейшем будем считать, что F , Q и P – гладкие функции, $P(z) \geq \delta > 0$. Пусть $z = \varphi(\zeta)$, $|\zeta| \leq 1$ – конформное отображение единичного круга на область G , тогда в плоскости ζ формально получаем те же соотношения (1)–(3), где, однако, вместо $u(z)$ и $F(z)$ следует писать $u(\zeta) = u(z(\zeta))$ и $|\varphi'(\zeta)|^2 F(z(\zeta))$, а вместо $A - \alpha(\theta) = A(z(e^{i\theta}))|\varphi'(e^{i\theta})|$.

Обозначим через $K(\zeta, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln|1 - \zeta\bar{\xi}|/(\zeta - \xi)$ функцию Грина оператора Лапласа в круге с краевым условием Дирихле. Из (1)–(3) имеем

$$\Delta u(\zeta) + |\varphi'(\zeta)|^2 (q(\zeta) + \lambda p(\zeta))u(\zeta) = 0, \quad \zeta = r \cdot e^{i\theta}, \quad (4)$$
$$q(\zeta) = Q(z(\zeta)), \quad p(\zeta) = P(z(\zeta)),$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad \theta \in g_1. \quad (5)$$

$$\alpha u + \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad \theta \in g_2. \quad (6)$$

Из (4)–(6) следует

$$u(\zeta) = - \int_{|\xi| \leq 1} K(\zeta, \xi) |\varphi'(\xi)|^2 [q(\xi) + \lambda p(\xi)] u(\xi) d\xi + \int_{\theta_1}^{\theta_2} K_0(\zeta, \theta) \psi(\theta) d\theta, \quad (7)$$

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: algazinsd@mail.ru

где $g_2 = [\theta_1, \theta_2]$. Здесь $\psi(\theta)$ – значение u на границе. Для задачи Дирихле $\psi(\theta) = 0$, а для задачи Зарембы должна быть выбрана с учетом краевого условия (6):

$$\begin{aligned} K_0(\zeta, \theta) &= \frac{1 - \rho^2}{2\pi(1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\theta - \varphi))} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho^{|n|} e^{in(\theta - \varphi)}, \\ \zeta &= \rho e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \rho < 1. \end{aligned}$$

Для интерполяции функции $|\varphi'(x)|^2 [q(\xi) + \lambda p(\xi)] u(\xi)^1$ применяется глобальная интерполяционная формула К.И. Бабенко для функции двух переменных в круге, см. [10, формула 3.2.1]. Для погрешности этой формулы $\rho_M(\cdot; f)$ справедлива

Теорема (К. И. Бабенко). *Рассмотрим класс функций $H_\infty^M(K; D) \subset C(D)$, удовлетворяющих в круге D условиям $\left| \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l} \right| \leq K, k+l \leq \mu$, тогда, если $f \in H_\infty^M(K; D)$, то*

$$|\rho_M(\cdot; f)|_\infty \leq c_\mu K M^{-\mu/2} \log^2 M, \quad (8)$$

где c_μ – константа, зависящая от μ .

Таким образом, из рассмотрения формулы (8) видно, что при одинаковом числе узлов интерполяции M скорость убывания погрешности интерполяционной формулы (8) возрастает с ростом μ , т.е. с ростом гладкости интерполируемой функции f . Это означает, что полученная интерполяционная формула не имеет насыщения.

2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

В силу граничного условия (6) последний интеграл в (7) принимает вид

$$\tilde{H}_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} K_0(\zeta, \theta) \psi(\theta) d\theta. \quad (8)$$

Здесь $\psi(\theta)$ на части границы $g_2 = [\theta_1, \theta_2]$ неизвестно и должно быть определено из граничного условия (6). Сделаем в интеграле (8) замену:

$$\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} x + \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}. \quad (9)$$

Тогда получаем $\tilde{H}_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2) = \frac{2}{\theta_2 - \theta_1} \int_{-1}^{+1} K_0(\zeta, \theta) \psi(x) dx$, где θ определено в (9). Для функции $\psi(x)$ применим интерполяционную формулу Лагранжа с узлами в нулях полинома Чебышева степени l [1]:

¹ Полученные интегралы вычисляются аналитически.

$$\begin{aligned} \psi(x) &\sim \sum_{i=1}^l \frac{T_l(x) \psi_i}{T_l'(x_i)(x - x_i)}, \\ x_i &= \cos \frac{(2i-1)\pi}{2l}, \quad T_l(x) = \cos(l \arccos(x)), \\ \psi(x) &= \sum_{k=0}^{l-1} a_k^{(l)} T(x)_k, \quad a_k^{(l)} = \sum_{j=1}^l \psi_j T_k(x_j), \\ x_j &= \cos \frac{(2j-1)\pi}{2l}, \quad T_l'(x_i) = l \frac{(-1)^{i-1}}{\sin \frac{(2i-1)\pi}{2l}}. \end{aligned}$$

Дело сводится к вычислению интегралов

$$h_k(\zeta; \theta_1, \theta_2) = \frac{2}{\theta_2 - \theta_1} \int_{-1}^{+1} K_0(\zeta, \theta) T_k(x) dx, \quad (10)$$

где θ определено в (9), $T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} \tilde{H}_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2) &= \frac{2}{\theta_2 - \theta_1} \sum_{j=1}^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{k=0}^{l-1} T_k(x_j) h_k(\zeta; \theta_1, \theta_2) \right\} \psi_j, \\ \psi_j &= \psi(\theta_j) = \psi \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} x_j + \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \right), \\ x_j &= \cos \frac{(2j-1)\pi}{2l}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$H_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2) = \frac{2}{\theta_2 - \theta_1} \frac{2}{l} \sum_{k=0}^{l-1} T_k(x_j) h_k(\zeta; \theta_1, \theta_2) \Rightarrow \quad (11)$$

$\tilde{H}_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2) = \sum_{j=1}^l H_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2) \psi_j$. Далее, подставляя в (7), получаем:

$$u(\zeta) = \sum_i H_i(\zeta) f_i + \sum_{j=1}^l H_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2) \psi_j, \quad \zeta = \rho e^{i\varphi}. \quad (12)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \theta_i &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} x_i + \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}, \\ x_i &= \cos \frac{(2i-1)\pi}{2l}, \quad i = 1, 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда из (12) следует

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l B_{ij} \psi_j + \sum_p H_p'(\theta_i) f_p, \\ \text{где} \quad H_p'(\theta_i) = \left. \frac{\partial H_p(\rho e^{i\varphi})}{\partial \rho} \right|_{\substack{\rho=1 \\ \varphi=\theta_i}}, \end{aligned}$$

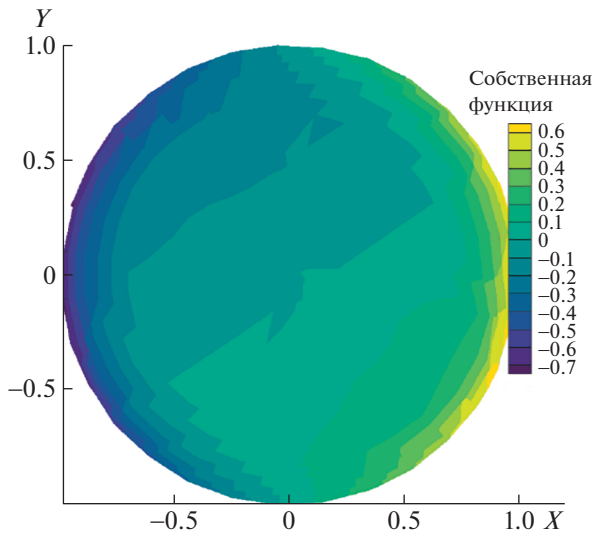


Рис. 1. $\lambda_1 = -1.828$.

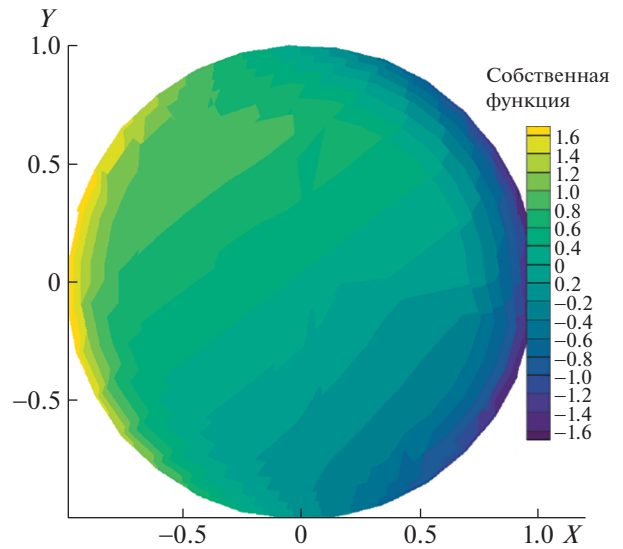


Рис. 2. $\lambda_2 = 5.194$.

$$B_{ij} = \alpha_i \delta_{ij} + H_j^{0'}(\theta_i; \theta_1, \theta_2), \quad \alpha_i = \alpha(\theta_i),$$

$$H_j^{0'}(\theta_i; \theta_1, \theta_2) = \left. \frac{\partial H_j^0(\rho e^{i\varphi}; \theta_1, \theta_2)}{\partial \rho} \right|_{\substack{\rho=1 \\ \varphi=\theta_i}}.$$

Пусть $C = B^{-1} \Rightarrow \psi_j = -\sum_{i=1}^l C_{ji} \left(\sum_p H_p'(\theta_i) f_p \right)$.

Подставляем в соотношение (12), тогда имеем

$$u(\zeta) = \sum_i H_i(\zeta) f_i + \sum_{j=1}^l H_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2) \sum_{i=1}^l C_{ji} \sum_p H_p'(\theta_i) f_p. \quad (14)$$

Пусть в (14) ζ пробегает узлы интерполяции внутри круга, тогда имеем

$$u = (H - E)Z(Q + \lambda P)u,$$

$$E_{pq} = \sum_{j=1}^l H_j^0(\zeta_q; \theta_1, \theta_2) \sum_{i=1}^l C_{ji} \sum_p H_p'(\theta_i),$$

где θ_i определено в (13).

3. РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА

Формулы для $H_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2)$ (см. (11)) \Rightarrow требуются формулы для $h_k(\zeta; \theta_1, \theta_2)$ (см. (10)), $K_0(\zeta, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-m}^{n+m} \rho^{|n|} e^{in(\theta-\varphi)}$, $\zeta = \rho e^{i\varphi}$. Следовательно, нужны

формулы для интегралов $g_{ln} = \int_{-1}^{+1} e^{in\theta} T_l(x) dx$, где θ определено в (9). Обозначим:

$$e_n^{(1)} = e^{in\theta_1}, \quad e_n^{(2)} = e^{in\theta_2}, \quad c_n^{(1,2)} = \frac{2}{in(\theta_2 - \theta_1)},$$

$$f_n(\theta_1, \theta_2) = c_n^{(1,2)}(e_n^{(2)} - e_n^{(1)}),$$

- 1) $g_{0n} = f_n(\theta_1, \theta_2), g_{00} = 2;$
- 2) $g_{1n} = c_n^{(1,2)}(e_n^{(2)} + e_n^{(1)} - f_n(\theta_1, \theta_2)), g_{10} = 0;$
- 3) $g_{2n} = c_n^{(1,2)}(e_n^{(2)} - e_n^{(1)} - 4g_{1n}), g_{20} = -2/3;$
- 4) $g_{l+1, n} = \frac{1}{l-1} g_{l-1, n} - 2c_n^{(1,2)} g_{l, n} - \frac{2}{l-1} (e_n^{(1)} (-1)^l + e_n^{(2)}), l \geq 2.$

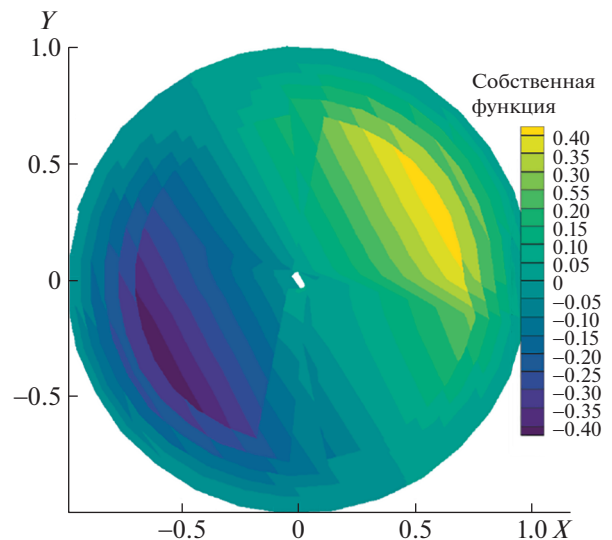


Рис. 3. $\lambda_3 = 14.681970642$.

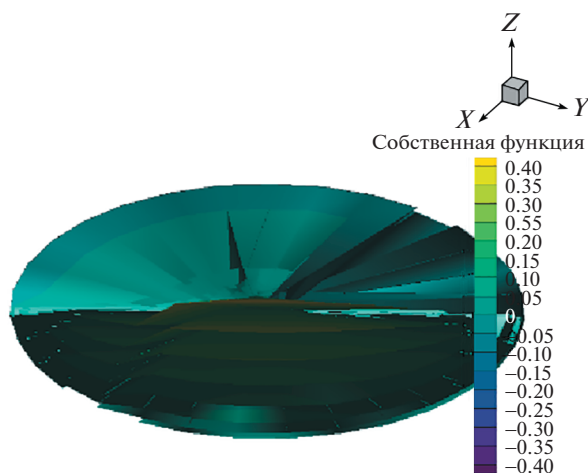
Таблица 1. Собственные значения задачи Зарембы для круга и эпитрохоиды, $\lambda_i, i = 1, 2, 3, 4$

| i | Круг | | Эпитрохоида, $\varepsilon = 0.0625, n = 12$ | |
|-----|--------------------------|--------------|---|--------------|
| | /27,25,23,21,17,9,7,3,3/ | 15 × 31 | /27,25,23,21,17,9,7,3,3/ | 15 × 31 |
| 1 | -2.308 | -1.828 | -2.389 | -1.423 |
| 2 | 5.072 | 5.194 | 5.313 | 5.463 |
| 3 | 14.681970642 | 14.681970642 | 14.650 | 14.648504095 |
| 4 | 25.820 | 22.465 | 20.705 | 17.674421255 |

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Расчеты проводились для круга единичного радиуса ($A = 1, \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi, Q \equiv 0, P \equiv 1$) и области, получающейся из круга конформным отображением: $z = \zeta(1 + 0.0625 \cdot \zeta^{12})$ при тех же параметрах граничных условий ($A = 1, \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$). Граница этой области имеет в 12 точках кривизну, равную -2710 , т.е. порядка 10^3 . В круге выбиралась сетка из 9 окружностей с расположением точек по окружностям (начиная с первой, ближайшей к границе): /27,25,23,21,17,9,7,3,3/. Второй расчет проводится на сетке из 15 окружностей по 31 точке на каждой окружности (это максимальная допустимая методикой сетка).

Из рассмотрения табл. 1 видим, что у оператора $-\Delta$ есть отрицательное собственное значение, т.е. он не положительно определен. Третье собственное значение в круге совпадает со всеми знаками на двух сетках. Видимо, это объясняется строением собственной формы (рис. 4). Собственные формы для трех первых собственных значений в круге приведены на рис. 1–3.

**Рис. 4.** $\lambda_3 = 14.681970642$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На доступных для описанной методики сетках с приемлемой точностью вычислены по четыре собственных значения задач Заремба в круге и в области, ограниченной эпитрохоидой (эпитрохоида кривая, которую описывает точка малого круга, катящегося по большому кругу, в данном случае по кругу радиуса 1; для этой области известно конформное отображение на эту область). Третье собственное значение для круга определено с 9-ю знаками после запятой, а для эпитрохоиды с 3-мя знаками после запятой. Погрешность определения остальных собственных значений легко найти из табл. 1. Из рассмотрения таблицы видим, что у оператора $-\Delta$ есть отрицательное собственное значение, т.е. он не положительно определен.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по теме государственного задания. Проект № АААА-А20-120011690132-4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.; 2-е изд., испр. и доп. / Под ред. А.Д. Брюно. М.; Ижевск: РХД, 2002. 847 с.
2. *Бабенко К.И., Алгазин С.Д.* Об одном численном алгоритме решения задачи на собственные значения для линейных дифференциальных операторов. М., 1978 (препринт ИПМ АН СССР, № 46).
3. *Zaremba S.* Sur un problème mixte relatif à l'équation de Laplace // Bull. Acad. Sci. Cracovie. 1910. P. 314–344.
4. *Пейчева А.С.* О спектральных свойствах операторов, ассоциированных с некоэрцитивными смешанными задачами для эллиптических систем // 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2018, 138 с.
5. *Laptev Ari, Peicheva A., Shlapunov A.* Finding Eigenvalues and Eigenfunctions of the Zaremba Problem for the Circle // Complex Anal. Oper. Theory. 2017. V. 11(4). P. 895–926.

6. *Shlapunov A., Tarkhanov N.* On completeness of root functions of Sturm–Liouville problems with discontinuous boundary operators // *J. Differential Equations*. 2013. V. 255. P. 3305–3337.
7. *Shlapunov A., Tarkhanov N.* Mixed Problems with Parameter // *Russian J. Math. Phys.* 2005. V. 12. No. 1. P. 97–119.
8. *Тарханов Н., Шлапунов А.А.* Задачи Штурма–Лиувилля в весовых пространствах в областях с негладкими ребрами. I // *Математические труды*. 2015. Т. 18. № 1. P. 118–189. DOI: 10.17377.
9. *Тарханов Н., Шлапунов А.А.* Задачи Штурма–Лиувилля в весовых пространствах в областях с негладкими ребрами. II // *Математические труды*. 2015. Т. 18. № 2. С. 133–204.
10. *Алгазин С.Д.* Численные алгоритмы классической математической физики. М.: Диалог-МИФИ, 2010. 240 с.

NUMERICAL RESEARCH OF THE PROBLEM ZAREMBA

S. D. Algazin^a

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.P. Maslov

In the present work we consider an eigenvalue problem for a two-dimensional Laplace operator with mixed boundary condition (the Zaremba problem) which (presumably) has a smooth solution inside the domain. Calculations show that the operator $-\Delta$ has a negative eigenvalue, i.e., it is not positively defined.

Keywords: problem of Zaremba, Laplace’s equation, problem of eigen values

УДК 519.21

О ГАУССОВСКИХ ОПЕРАТОРАХ ПЕРЕХОДА

© 2021 г. Г. А. Алексеев^{1,2,*}, К. А. Афонин^{1,2}, В. И. Богачев^{1,2,3,4,*}

Представлено академиком РАН А.С. Холево 05.04.2021 г.

Поступило 09.04.2021 г.

После доработки 09.04.2021 г.

Принято к публикации 13.08.2021 г.

В работе получен ряд обобщений известной характеристики гауссовских операторов перехода.

Ключевые слова: гауссовская мера, феллеровский оператор

DOI: 10.31857/S2686954321050027

В теореме 1 работы А.С. Холево [1] (см. также [2]) установлено, что всякий феллеровский линейный оператор T в пространстве $M(\mathbb{R}^n)$ ограниченных борелевских мер на \mathbb{R}^n , переводящий гауссовские меры в гауссовские, представляет собой свертку фиксированной гауссовской меры с образом меры при линейном операторе, т. е. имеет вид

$$T\mu = \gamma_0 * (\mu \circ S^{-1}), \quad (1)$$

где γ_0 – некоторая гауссовская мера, $\mu \circ S^{-1}$ – образ меры μ при некотором линейном операторе S , задаваемый на борелевских множествах формулой

$$(\mu \circ S^{-1})(B) = \mu(S^{-1}(B)).$$

В нашей работе теорема 1 работы [1] обобщена в нескольких направлениях: 1) показано, что достаточно иметь гауссовость образов при T лишь для гауссовских мер, сосредоточенных на аффинных прямых, 2) получен бесконечномерный аналог, 3) ослаблено условие феллеровости оператора T , в частности, достаточно его секвенциальной непрерывности в слабой топологии.

Сразу отметим, что оператор T указанного вида однозначно восстанавливается по образам ди-

раковских мер δ_x , ибо $\gamma_0 = T\delta_0$ и Sx есть разность средних гауссовских мер $T\delta_x$ и $T\delta_0$. Поэтому можно было бы предположить, что достаточно гауссовости образов мер Дирака. Однако это неверно уже на прямой: в качестве $T\mu$ можно взять образ меры μ при гомеоморфизме $x \mapsto x^3$. Тем не менее гауссовости образов одномерных гауссовских мер оказывается достаточно. Ниже приведены простые примеры, показывающие, что нельзя отказаться и от условия феллеровости T , хотя удастся его ослабить.

Для вполне регулярного топологического пространства X обозначим через $C_b(X)$ пространство ограниченных непрерывных функций на X и через $M(X)$ пространство всех ограниченных (возможно знакопеременных) радоновских мер на X , см. [3]. Пространство $M(X)$ можно наделить нормой $\|\mu\|$ полной вариации, а также слабой топологией, порожденной двойственностью с пространством $C_b(X)$, см. [3].

Отображение $T: M(X) \rightarrow M(X)$ называется феллеровским, если существует такое отображение $T^*: C_b(X) \rightarrow C_b(X)$, что

$$\int_X f(x)T\mu(dx) = \int_X T^*f(x)\mu(dx) \quad \forall f \in C_b(X), \\ \mu \in M(X)$$

Феллеровость равносильна линейности и непрерывности в слабой топологии. При этом оператор T автоматически оказывается ограниченным относительно нормы полной вариации (это следует из теоремы Банаха–Штейнгауза).

Гауссовской мерой на \mathbb{R} называется образ стандартной гауссовской меры с плотностью $(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ при аффинной функции. В том числе гауссовской

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

³Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

⁴Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия

*E-mail: nihilust.nlevi@yandex.ru

*E-mail: vibogach@mail.ru

считается дираковская мера δ_a в точке a . Гауссовской мерой (см. [4]) на локально выпуклом пространстве X с топологическим сопряженным X^* будем называть вероятностную радоновскую меру γ на X , для которой одномерные образы $\gamma \circ f^{-1}$ гауссовы. Такая мера обладает средним $a(\gamma)$, для которого $f(a(\gamma))$ есть интеграл от f по мере γ для всякого $f \in X^*$. Одномерной гауссовской мерой называется мера, сосредоточенная на одномерном аффинном подпространстве, т. е. образ стандартной гауссовской меры при аффинном отображении вида

$$L_{x,y} : \mathbb{R} \rightarrow X, \quad t \mapsto tx + y$$

с одномерным образом, где $x, y \in X$.

Теорема 1. *Представление (1) феллеровских операторов в $M(X)$ остается в силе и для локально выпуклого пространства X , причем гауссовость образов при T достаточно иметь лишь для одномерных гауссовских мер.*

Ввиду этого обобщения доказательство из работы [1] для \mathbb{R}^n становится заметно короче (ниже приведено это рассуждение). На самом деле нами доказано более общее утверждение, причем и для \mathbb{R} оно несколько отличается от результата работы [1] (хотя при этом применен метод из [1]).

Обозначим через $LG(X)$ линейную оболочку множества гауссовских радоновских мер на локально выпуклом пространстве X .

Теорема 2. *Пусть линейное отображение $T: LG(X) \rightarrow M(X)$ переводит все одномерные гауссовские меры в гауссовские, причем для всякого $f \in X^*$ есть такая функция $g_f: X \rightarrow \mathbb{C}$, ограниченная и непрерывная на каждой аффинной прямой, что для всех одномерных гауссовских мер ν имеем*

$$\int_X \exp(if) d(T\nu) = \int_X g_f d\nu.$$

Тогда найдутся гауссовская мера γ_0 и линейный оператор $S: X \rightarrow X$ такие, что (1) верно для всех дираковских мер.

Если же, кроме того, оператор T задан и линеен на всем пространстве $M(X)$ и непрерывен в слабой топологии, то оператор S непрерывен и T имеет вид (1) для всех мер из $M(X)$.

Доказательство. Для $x, y \in X$ и $f \in X^*$ положим $g_{x,y,f}(t) = g_f(tx + y)$,

$$G_{x,y,f}: LG(\mathbb{R}) \rightarrow LG(\mathbb{R}),$$

$$G_{x,y,f}\nu = T(\nu \circ L_{x,y}^{-1}) \circ f^{-1}, \quad \nu \in LG(\mathbb{R}).$$

Тогда $G_{x,y,f}$ по условию отображает гауссовские меры на прямой в гауссовские. Кроме того, для каждого $s \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(ist) G_{x,y,f}\nu(dt) = \int_{\mathbb{R}} g_{x,y,sf}(t)\nu(dt), \quad \nu \in LG(\mathbb{R}).$$

Это означает, что экспоненте $\exp(is\cdot)$ можно сопоставить функцию

$$G_{x,y,f}^* \exp(is\cdot) = g_{x,y,sf} \in C_b(\mathbb{R}),$$

интеграл от которой по мере ν равен интегралу от $\exp(is\cdot)$ по мере $G_{x,y,f}\nu$. Значит, согласно теореме 3 ниже, $G_{x,y,f}$ имеет представление (1), т.е.

$$G_{x,y,f}\nu = \sigma_{x,y,f} * \nu \circ S_{x,y,f}^{-1} \quad \forall \nu \in LG(\mathbb{R}), \quad (2)$$

где $\sigma_{x,y,f} = G_{x,y,f}\delta_0 = T(\delta_y) \circ f^{-1}$ и $S_{x,y,f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — линейная функция, $S_{x,y,f}(t) = s_{x,y,f}t, t \in \mathbb{R}$. Подставив в (2) меру Дирака $\nu = \delta_t, t \in \mathbb{R}$, получим

$$G_{x,y,f}\nu = T(\delta_{tx+y}) \circ f^{-1} = T(\delta_y) \circ f^{-1} * \delta_{S_{x,y,f}(t)}. \quad (3)$$

Из (3) следует равенство средних

$$f(a_{T(\delta_{tx+y})}) = f(a_{T(\delta_y)}) + s_{x,y,f}t. \quad (4)$$

Положим

$$Sx := a_{T\delta_x} - a_{\gamma_0}, \quad \gamma_0 = T\delta_0.$$

Докажем линейность S . В самом деле, равенство (4) принимает вид

$$f(S(tx + y)) = f(Sy) + s_{x,y,f}t. \quad (5)$$

Так как $S(0) = 0$, то при $y = 0$ получим в (5) для всех $t \in \mathbb{R}$ равенство

$$f(S(tx)) = s_{x,0,f}t = tf(Sx) = f(tSx).$$

В силу произвольности $f \in X^*$ заключаем, что

$$S(tx) = tS(x) \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Теперь запишем (5) в виде

$$f(S(tx + y)) - f(Sy) = ts_{x,y,f} = t(f(S(x + y)) - f(Sy)). \quad (6)$$

Воспользовавшись однородностью S , имеем

$$f(S(x + y/t)) - f(Sy)/t = f(S(x + y)) - f(Sy). \quad (7)$$

Поменяв x, y в (6) местами, получим, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(S(x + ty)) = f(Sx).$$

Тогда, переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$ в (7), заключаем, что для всех $x, y \in X$ и $f \in X^*$ выполнено равенство

$$f(Sx) = f(S(x + y)) - f(Sy) = f(S(x + y) - Sy).$$

Поэтому S аддитивно. Линейность S доказана.

Теперь установим, что T имеет вид (1) для дираковских мер. Действительно, взяв в равенстве (3) вектор $y = 0$ и число $t = 1$ и учитывая, что

$$f(Sx) = s_{x,0,f} = S_{x,0,f}(1),$$

получим

$$T(\delta_x) \circ f^{-1} = \gamma_0 \circ f^{-1} * \delta_{f(Sx)} \quad \forall f \in X^*.$$

Значит, $T\delta_x = \gamma_0 * \delta_{Sx}$ для всех $x \in X$. Первое утверждение доказано. Перейдем к доказательству второго утверждения. Из непрерывности T следует, что для всякой направленности элементов $x_\alpha \in X$, сходящейся к нулю, имеет место слабая сходимость мер

$$T(\delta_{x_\alpha}) = \gamma_0 * \delta_{Sx_\alpha} \Rightarrow \gamma_0.$$

Выведем из этого непрерывность S . Предположим, что S разрывно в нуле. Тогда найдутся направленность элементов $x_\alpha \in X$ и непрерывная полунорма q такие, что $x_\alpha \rightarrow 0$, но $q(Sx_\alpha) > 1$ для всех α . Кроме того, существует $R > 0$ такое, что $\gamma(q < R) > 1/2$. Положим $V = \{q < R\}$. Тогда $S(2Rx_\alpha) \notin 2V$ для всех α . Поэтому $V \cap (V - S(2Rx_\alpha)) = \emptyset$, откуда

$$\gamma(V - S(2Rx_\alpha)) = \gamma * \delta_{S(2Rx_\alpha)}(V) < \frac{1}{2},$$

что противоречит слабой сходимости $\gamma * \delta_{S(2Rx_\alpha)}$ к мере γ . Так как $LG(X)$ плотно в $M(X)$ в слабой топологии, то T имеет вид (1) на $M(X)$.

Итак, теперь гауссовость образов достаточно проверять лишь для гауссовских мер на аффинных прямых. Осталось доказать теорему 2 для \mathbb{R} . Применим метод работы [1] с заметными упрощениями для $n = 1$. Гауссовскую меру на \mathbb{R} со средним a и дисперсией σ обозначим через $\mu_{a,\sigma}$.

Теорема 3. Пусть отображение $T: LG(\mathbb{R}) \rightarrow LG(\mathbb{R})$ переводит гауссовские меры в гауссовские, причем для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ есть такая функция $g_\lambda \in C_b(\mathbb{R})$, что

$$\begin{aligned} & \int \exp(i\lambda x) T\mu(dx) = \\ & = \int g_\lambda(x) \mu(dx) \quad \forall \mu \in LG(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Тогда T линейно и найдутся такие гауссовская мера γ_0 и линейная функция $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что (1) верно для всех $\mu \in LG(\mathbb{R})$.

Доказательство. Отображение T линейно на $LG(\mathbb{R})$, ибо правая часть равенства выше линейна по μ и преобразование Фурье инъективно. Гауссовская мера $\mu_{x,t}$ с $t \geq 0$ отображается в гауссовскую меру $T\mu_{x,t} = \mu_{a(x,t),\sigma(x,t)}$. Функции $a(x,t)$ и $\sigma(x,t)$ непрерывны по совокупности переменных. Это следует из равносильности поточечной сходимости преобразований Фурье гауссовских мер и сходимости средних и дисперсий и того, что для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} & F(\mu_{a(x,t),\sigma(x,t)})(\lambda) = \\ & = \int \exp(i\lambda y) T\mu_{x,t}(dy) = \int g_\lambda(y) \mu_{x,t}(dy), \end{aligned}$$

где через $F(\mu)$ обозначено преобразование Фурье меры μ . В частности,

$$F(\mu_{a(x,0),\sigma(x,0)})(\lambda) = \int g_\lambda(y) \mu_{x,0}(dy) = g_\lambda(x),$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} & F(\mu_{a(x,t),\sigma(x,t)})(\lambda) = \\ & = \int F(\mu_{a(y,0),\sigma(y,0)})(\lambda) \mu_{x,t}(dy), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим задачу Коши для одномерного уравнения теплопроводности

$$\partial_t u = 2^{-1} \partial_x^2 u, \quad u(x, 0) = g_\lambda(x). \tag{9}$$

Так как плотность меры $\mu_{x,t}$ является фундаментальным решением уравнения теплопроводности, то (8) означает, что функция

$$u_\lambda(x, t) = F(\mu_{a(x,t),\sigma(x,t)})(\lambda)$$

есть решение (9). Оно бесконечно дифференцируемо по (x, t) при $t > 0$, что дает гладкость функций $a(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ в той же области. Подставляя

$$u_\lambda(x, t) = \exp(i\lambda a(x, t) - 2^{-1} \lambda^2 \sigma(x, t))$$

в уравнение теплопроводности и дифференцируя, получаем

$$\begin{aligned} & i8\lambda \partial_x a - 4\lambda^2 \partial_t \sigma = \\ & = i4\lambda \partial_x^2 a - 2\lambda^2 \partial_x^2 \sigma + (i2\lambda \partial_x a - \lambda^2 \partial_x \sigma)^2. \end{aligned}$$

Так как левая часть содержит члены не выше второго порядка по λ , то имеем $\partial_x \sigma = 0$. Учитывая это, приходим к двум уравнениям

$$2\partial_t a = \partial_x^2 a, \quad \partial_t \sigma = (\partial_x a)^2. \tag{10}$$

Поскольку σ не зависит от x , то второе уравнение в (10) дает равенство

$$a(x, t) = Ax + a(0, t),$$

т.е. функция $a(x, t)$ линейна по x . Тогда с учетом первого уравнения в (10) получим, что $a(x, t)$ не зависит от t . Таким образом,

$$a(x, t) = a(x) = Ax + a(0, 0),$$

$$a(0, 0) = a_{T\mu_{0,0}} = a_{T\delta_0}.$$

Тогда снова из второго равенства в (10) видно, что функция $\sigma(x, t)$ линейна по t . Окончательно получаем

$$\sigma(x, t) = A^2t + \sigma(0, 0), \quad \sigma(0, 0) = \sigma_{T\mu_{0,0}} = \sigma_{T\delta_0}.$$

Положим $S(x) = Ax$. Тогда для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено равенство преобразований Фурье

$$\begin{aligned} u_\lambda(x, t) &= F(T\mu_{x,t})(\lambda) = \\ &= \exp(i\lambda a(x, t)) \exp(-2^{-1}\lambda^2 \sigma(x, t)) = \\ &= \exp(i\lambda(S(x) + a(0, 0))) \times \\ &\times \exp(-2^{-1}\lambda^2(A^2t + \sigma(0, 0))) = \\ &= F(T\delta_0)(\lambda)F(\mu_{x,t})(A\lambda) = \\ &= F(T\delta_0)(\lambda)F(\mu_{x,t} \circ S^{-1})(\lambda) = \\ &= F(T\delta_0 * \mu_{x,t} \circ S^{-1})(\lambda), \end{aligned}$$

поэтому $T\mu_{x,t} = T\delta_0 * (\mu_{x,t} \circ S^{-1})$.

З а м е ч а н и е 1. Хотя предыдущая теорема ослабляет условие феллеровости, полностью от него отказаться нельзя. Это ясно из того, что оператор вида (1) феллеров, причем легко указать примеры непрерывных операторов в $M(\mathbb{R})$, не являющихся феллеровскими, но переводящих гауссовские меры в гауссовские. Запишем $M(\mathbb{R})$ как прямую сумму трех замкнутых по норме подпространств: пространства M_a абсолютно непрерывных мер, пространства M_d мер, сосредоточенных на счетных множествах, и пространства M_s сингулярных мер без атомов. Оператор $\mu = \mu_a + \mu_d + \mu_s \mapsto \mu_a + \mu_d$ тождественен на гауссовских мер, но разрывен в слабой топологии, ибо равен нулю на плотном в слабой топологии множестве M_s . Оператор $\mu = \delta_1 * \mu_a + \gamma_1 * \mu_d$, где γ_1 – стандартная гауссовская мера, также переводит гауссовские меры в гауссовские, но не имеет вида (1) даже на гауссовских мерах.

Перейдем к аналогу теоремы 2 для секвенциально непрерывных операторов. В частности, мы увидим, что для метризуемого пространства X слабая непрерывность оператора в $M(X)$ равносильна секвенциальной непрерывности, хотя пространство $M(X)$ неметризуемо в слабой топо-

логии. В общем локально выпуклом пространстве X секвенциально непрерывный оператор S задает отображение $LG(X)$ посредством (1), причем существуют секвенциально непрерывные разрывные операторы S .

Пусть X – вполне регулярное пространство, $M_S(X)$ – множество мер из $M(X)$, сосредоточенных на счетных объединениях метризуемых компактов (или, что равносильно, на суслинских множествах); $M_S(X)$ – линейное подпространство в $M(X)$. Если X – локально выпуклое пространство, то $LG(X) \subset M_S(X)$ (см. [4, теорема 3.4.1]) и $\mu * \nu \in M_S(X)$ при $\mu, \nu \in M_S(X)$. Пусть $SC_b(X)$ – линейное пространство ограниченных секвенциально непрерывных функций на X . Функции из $SC_b(X)$ измеримы относительно всех мер из $M_S(X)$, поэтому на $M_S(X)$ и $LG(X)$ можно ввести топологию τ_{SC} , порожденную двойственностью с $SC_b(X)$. Эта топология сильнее слабой, если на X есть разрывные секвенциально непрерывные функции (такое пространство не секвенциально, т.е. содержит незамкнутые секвенциально замкнутые множества).

Л е м м а 1. *Линейное отображение $T: M_S(X) \rightarrow M_S(X)$ непрерывно в топологии τ_{SC} в точности тогда, когда оно секвенциально непрерывно.*

Если X метризуемо (или секвенциально), то это же верно и для операторов из $M(X)$ в $M(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть T секвенциально непрерывно. Тогда оно ограничено как оператор на $M_S(X)$ с нормой полной вариации. Это следует из того, что T отображает сходящиеся по норме к нулю последовательности в ограниченные. Для $f \in SC_b(X)$ положим

$$T^*f(x) = \int_X f(y)T\delta_x(dy).$$

Тогда $T^*f \in SC_b(X)$, ибо при $x_n \rightarrow x$ в X имеем $\delta_{x_n} \rightarrow \delta_x$ в топологии τ_{SC} , поэтому $T\delta_{x_n} \rightarrow T\delta_x$ в топологии τ_{SC} . Кроме того, $\sup_{x \in X} |T^*f(x)| \leq \|f\| \|T\|$.

Для меры μ , являющейся линейной комбинацией мер Дирака, имеем

$$\int f(x)T\mu(dx) = \int T^*f(x)\mu(dx), \quad f \in SC_b(X).$$

Равенство верно и для всякой меры μ из $M_S(X)$ с компактным метризуемым носителем K , так как она есть предел в слабой топологии последовательности мер μ_n с конечными носителями в K . При этом имеет место и сходимости в топологии τ_{SC} , ибо для всякой функции $f \in SC_b(X)$ ее сужение на K непрерывно в силу метризуемости K , что дает функцию $g \in C_b(X)$, совпадающую с f на K , но интегралы от f и g по мерам, сосредоточенным

на K , равны. Теперь равенство распространяется на все меры $\mu \in M_S(X)$ с помощью приближения по вариации мерами с метризуемыми компактными носителями. Это влечет непрерывность T в топологии τ_{SC} .

Можно было использовать и то, что всякая мера μ из $M_S(X)$ есть предел последовательности линейных комбинаций мер Дирака в топологии τ_{SC} . В самом деле, μ сосредоточена на объединении Y возрастающих метризуемых компактов K_n . Вложим Y гомеоморфно в \mathbb{R}^∞ и найдем меры ν_n с конечными носителями в K_n , слабо сходящиеся к μ на \mathbb{R}^∞ . Это даст сходимость в топологии τ_{SC} на $M(Y)$ ввиду равномерной плотности мер ν_n на Y .

Теорема 4. Пусть линейный оператор $T: M_S(X) \rightarrow M_S(X)$ отображает одномерные гауссовские меры в гауссовские и непрерывен в топологии τ_{SC} . Тогда найдутся гауссовская мера γ_0 и линейный секвенциально непрерывный оператор $S: X \rightarrow X$ такие, что (1) верно для всех мер из $M_S(X)$.

Доказательство. Непрерывность оператора в топологии τ_{SC} равносильна тому, что для каждой функции $g \in SC_b(X)$ функция T^*g также принадлежит $SC_b(X)$, причем равенство

$$\int g(x)T\mu(dx) = \int T^*g(x)\mu(dx)$$

выполнено для всех $\mu \in M_S(X)$. Тогда, взяв точки $x, y \in X$ и функционал $f \in X^*$, для всех $\nu \in LG(\mathbb{R})$ получим тождество

$$\begin{aligned} \int_X \exp(if(z))T(\nu \circ L_{x,y}^{-1})(dz) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} T^* \exp(if)(L_{x,y}(t))\nu(dt), \end{aligned}$$

причем функция $T^* \exp(if) \circ L_{x,y}$ лежит в $C_b(\mathbb{R})$. Таким образом, в обозначениях теоремы 2 экспоненте $\exp(if)$ соответствует функция

$$g_{x,y,f} = T^* \exp(if) \circ L_{x,y}.$$

По первому утверждению теоремы 2 оператор T на мерах Дирака имеет вид (1) с некоторыми гауссовской мерой γ_0 и линейным оператором $S: X \rightarrow X$. Заметим, что S секвенциально непрерывен. Это видно из того же рассуждения, что и выше в случае непрерывности, а также следует из сходимости средних слабо сходящейся последовательности гауссовских мер (см. [3, предложение 2.7.19]). Так как S секвенциально непрерывно, то оно измеримо для каждой меры μ из $M_S(X)$. Поэтому корректно определен линейный оператор

$$R: M_S(X) \rightarrow M_S(X), \quad \mu \mapsto \gamma_0 * \mu \circ S^{-1}.$$

Отображение R непрерывно в топологии τ_{SC} . Действительно, для всякой функции $g \in SC_b(X)$ функция

$$R^*g(x) = \int g(Sx + y)\gamma_0(dy)$$

секвенциально непрерывна и ограничена и при $\mu \in M_S(X)$ имеем

$$\begin{aligned} \int R^*g(x)\mu(dx) &= \int \left(\int g(Sx + y)\mu(dx) \right) \gamma_0(dy) = \\ &= \int g(x)R\mu(dx). \end{aligned}$$

Операторы T и R равны на линейной оболочке дираковских мер и непрерывны в топологии τ_{SC} . Значит, они равны на $M_S(X)$, ибо эта линейная оболочка плотна в $M_S(X)$ в топологии τ_{SC} .

Отметим, что для слабой топологии вместо τ_{SC} лемма неверна. Например, если X — компактификация Стоуна–Чеха множества натуральных чисел \mathbb{N} , то из слабой сходимости в $M(X)$ следует сходимость на всех борелевских множествах (см. [3, предложение 5.6.15]), поэтому функционал $\mu \mapsto \mu(B)$ секвенциально непрерывен, но разрывен в слабой топологии, если B — борелевское множество с разрывным индикатором (например, точка из $X \setminus \mathbb{N}$).

Заметим, что преобразования вида (1) сохраняют некоторые другие интересные классы мер (с γ_0 из соответствующего класса), в том числе логарифмически вогнутые (см. [3]) и устойчивые (см. [5]). Интересно изучить для них аналоги характеристики (1). В работе [6] показано, что диффузионные полугруппы, сохраняющие логарифмическую вогнутость, являются гауссовскими, их переходные операторы имеют вид (1).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом РНФ 17-11-01058 (выполняемым при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Холєво А.С. // Теория вероятн. и ее примен. 2016. Т. 61. № 4. С. 830–837.
2. De Palma G., Mari A., Giovannetti V., Holevo A.S. // J. Math. Phys. 2015. V. 56. № 5. 052202. 19pp.
3. Bogachev V.I. Weak convergence of measures. Amer. Math. Soc., R.I., Providence, 2017.
4. Bogachev V.I. Gaussian measures. Amer. Math. Soc., R.I., Providence, 1998.
5. Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983. 304 с.
6. Kolesnikov A.V. // J. Funct. Anal. 2001. V. 186. № 1. P. 196–205.

ON GAUSSIAN TRANSITION OPERATORS

G. A. Alekseev^{a,b}, K. A. Afonin^{a,b}, and V. I. Bogachev^{a,b,c,d}

^aLomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

^bMoscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation

^cNational Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation

^dSt.-Tikhon's Orthodox University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS A.S. Holevo

In this paper, a number of generalizations of the known characterization of Gaussian transition operators is obtained.

Keywords: Gaussian measure, Feller operator

УДК 512.555, 512.543

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛЕЦ С МАЛЫМИ СОКРАЩЕНИЯМИ

© 2021 г. А. Аткарская^{1,2,*}, А. Канель-Белов^{1,3,4,**},
Е. Плоткин^{1,***}, Э. Рипс^{2,****}

Представлено академиком РАН А. Л. Семеновым 14.01.2021 г.

Поступило 18.01.2021 г.

После доработки 15.03.2021 г.

Принято к публикации 18.08.2021 г.

В данном сообщении развивается теория малых сокращений для ассоциативных алгебр с базисом из обратимых элементов, заданных образующими и определяющими соотношениями. Изучаются фактор-алгебры групповой алгебры свободной группы, вводятся три аксиомы для определяющих соотношений, которые выражают свойство малых сокращений для колец. Авторы показывают, что такое кольцо нетривиально и называют его кольцом с малыми сокращениями.

Ключевые слова: кольцо с малыми сокращениями, поворот, мультиповорот, задание кольца образующими и определяющими соотношениями, группа с малыми сокращениями, групповая алгебра

DOI: 10.31857/S2686954321050192

В данной работе приводится аксиоматическое определение кольца с малыми сокращениями, заданного образующими и определяющими соотношениями. Формулируется теорема о нетривиальности кольца с малыми сокращениями (см. теорема 1). Полное доказательство этого результата занимает около 300 с. и его предварительное изложение представлено в препринте [3].

1. ОПИСАНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Следующий вопрос представляет несомненный интерес: Если взаимодействия между определяющими соотношениями являются слабыми в определенном смысле, будет ли полученная алгебра обладать некоторыми свойствами свободной алгебры?

В случае групп, полугрупп и моноидов теория малых сокращений дает положительный ответ (см. детали в [10, 17]). Однако построение такой теории для систем с несколькими операциями сталкивается со значительными трудностями. Общая теория ассоциативных колец с базисом из обратимых элементов, представленная в этой работе, была построена после изучения частного случая, который рассмотрен в [2]. Теорема 3 показывает, что кольцо, введенное в работе [2], является частным примером кольца с малыми сокращениями. Его конструкция представляет собой первый шаг процесса построения конечно порожденного тела (соответствующую проблему поставил, в частности, А. Г. Курош), причем здесь ситуация по сравнению с групповым случаем глубоко нетривиальна.

Наша мотивация исходит из того факта, что теория групп с малыми сокращениями и, особенно, итерированная теория групп с малыми сокращениями (построенная Новиковым и Адяном при решении проблемы Бернсайда) играет главную роль в решении многих классических задач теории групп. Эта теория обеспечивает мощный метод построения групп с необычными и даже экзотическими свойствами, такими как, например, бесконечные бернсайдовские группы [12, 1, 15, 8, 11, 4], монстр Тарского [14], конечно порожденные бесконечные делимые группы [7] и многие др. [13]. Актуальной является разработка аналогичного метода в теории колец в целях контроля над соотношениями. Мы имеем в виду, что мно-

¹Department of Mathematics, Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel

²Institute of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, Israel

³Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

⁴College of Mathematics and Statistics, Shenzhen University, Shenzhen, China

*E-mail: atkarskaya.agatha@gmail.com

**E-mail: kanelster@gmail.com

***E-mail: plotkin.evgeny@gmail.com

****E-mail: eliyahu.rips@mail.huji.ac.il

гие объекты строятся с помощью естественных, в рамках здравого смысла, систем соотношений. Трудности заключаются в том, чтобы не было лишних следствий этих соотношений, в частности объект не стал тривиальным. Мы ожидаем, что предлагаемое понятие может быть использовано, например, для построения конечно порожденного тела, а также аналога монстра Тарского и обобщения теоремы Бергмана о централизаторе, в том числе и для групповой алгебры свободной группы.

Классический метод Новикова–Адяна решения проблемы Бернсайда [12, 1] (а также построения монстра Тарского — группы порожденной любыми двумя своими некоммутующими элементами) опирается на сложную индукцию по рангу с большим количеством индуктивных предположений. Движущей силой этого метода является то обстоятельство, что различные периодические слова одного ранга с периодами схожей длины имеют малую общую часть. Более того, соотношения одного ранга после специального приведения мало взаимодействуют друг с другом по модулю возможных преобразований младших рангов. Это соответствует обобщенному условию малых сокращений, что позволяет сделать шаг индукции. Отметим, что понятие поворота в данном ранге, используемое в работе Новикова и Адяна, послужило отправной точкой для нашего базового понятия мультиповорота (см. определение в параграфе 2.2 данной статьи, также в работах [2, 3]).

Аналогичные трудные проблемы хорошо известны и в теории колец, однако соответствующего универсального подхода для них пока не существует. Мы предполагаем, что итерирование нашей конструкции подобно тому, как это делается при решении проблемы Бернсайда, даст искомый метод для построения колец и ассоциативных алгебр с заданными свойствами. Данная работа соответствует случаю малых сокращений, т.е. случаю когда ранг только один. В частности наша конструкция может быть первым шагом в построении конечно-порожденного тела.

В настоящее время неизвестно, как с ассоциативным кольцом связать геометрический объект. Программу Громова “Группы как геометрические объекты” [5], см. также [6], предваряет комбинаторный подход. В групповом случае комбинаторным объектом, отвечающим гиперболической группе, является группа с малыми сокращениями (если каждое соотношение представляется произведением не менее 7 малых кусков). Мы надеемся построить определение “гиперболического кольца”, начиная с рассматриваемых в настоящей работе колец с малыми сокращениями. Если будет дано определение гиперболического кольца, то, по всей видимости, рассматриваемые нами в этой

статье кольца с малыми сокращениями будут такими кольцами. Мы предполагаем, что другим частным случаем должны стать групповые кольца гиперболических групп.

Естественно предположить, что при надлежащем определении кручения в кольцевом случае построенные кольца без кручения должны иметь малую когомологическую размерность и одномерные централизаторы элементов, обладать свойством неаменабельности и иметь положительное решение проблемы Капланского о делителях нуля. Развитие итеративной теории малых сокращений может быть полезно, в частности, для решения классической проблемы построения конечно порожденного тела.

Отметим, что подход А. Смоктунович к контролю за соотношениями в кольцах привел к построению простого ниль-кольца и других важных примеров ниль-алгебр, см., например, [18, 9]. Этот подход основан на идеях, отличных от наших, и не связан с теорией малых сокращений.

2. АКСИОМЫ МАЛЫХ СОКРАЩЕНИЙ ДЛЯ КОЛЕЦ

2.1. Группы с малыми сокращениями

Рассмотрим группу G , заданную образующими и определяющими соотношениями $G = \langle X \mid \mathcal{R} \rangle$. Мы предполагаем, что множество определяющих соотношений \mathcal{R} замкнуто относительно циклических перестановок и взятия обратных и все элементы из \mathcal{R} являются циклически редуцированными. Взаимодействие между определяющими соотношениями определяется в терминах малых кусков. Слово s называется малым куском по отношению к множеству \mathcal{R} (в обобщенном групповом смысле, см. [16, 10]), если существуют соотношения вида sr_1 и sr_2 в \mathcal{R} такие, что $r_1r_2^{-1} \neq 1$ и $r_1r_2^{-1}$ не сопряжен соотношению из \mathcal{R} в соответствующей свободной группе, даже после сокращений.

З а м е ч а н и е 1. Геометрически малые куски можно рассматривать как слова, которые могут появиться на общей границе между двумя клетками в диаграмме Ван Кампена [13, 10]. В частности, если $r_1r_2^{-1} \in \mathcal{R}$, то мы можем заменить эти клетки одной клеткой. Поэтому с самого начала мы предполагаем, что $r_1r_2^{-1} \notin \mathcal{R}$.

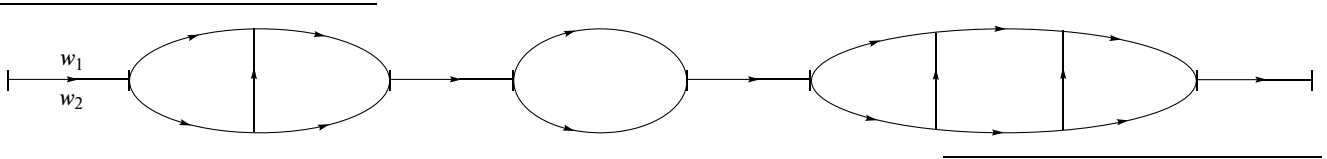
Условие малых сокращений $C(p)$ означает, что каждое соотношение в \mathcal{R} не может быть записано как произведение менее чем p малых кусков. Для большинства целей семи малых кусков достаточно, поскольку при условии $C(7)$ дискретная эйлерова характеристика становится отрицательной [10]. Чтобы гарантировать это, мы можем предположить, что длина любого малого куска меньше одной шестой длины соотношения, в котором он

появляется. Основная теорема теории малых сокращений может быть сформулирована так:

Пусть w_1, w_2 — два слова, которые не содержат вхождений более половины соотношений из \mathcal{R} . Они представляют один и тот же элемент из G тогда и только тогда, когда они могут быть соединены однослойной диаграммой [10, Лемма Гриндлинера]. (В частности, группа с малыми сокращениями нетривиальна.) Переход от w_1 к w_2 может быть пред-

ставлен в виде последовательности элементарных шагов, называемых поворотами [12]. Каждый поворот поворачивает ровно одну клетку.

Для удобства читателя ниже мы приводим пример однослойной диаграммы, где слово w_1 читается на ее верхней стороне, слово w_2 — на нижней стороне, а клетки — это групповые соотношения из списка \mathcal{R} .



2.2. Основные определения для колец

Пусть k — поле. Мы будем использовать малые греческие буквы для ненулевых элементов поля k . Пусть \mathcal{F} — свободная группа, свободно порожденная алфавитом S . Элементы \mathcal{F} называются мономами или словами. Обозначим через $k\mathcal{F}$ групповую алгебру. Элементы $k\mathcal{F}$ называются полиномами. Пусть $a, b \in \mathcal{F}$, Через $a \cdot b$ обозначаем их произведение. Мы пишем ab , если между a и b нет сокращений.

Пусть фиксирован конечный или бесконечный набор полиномов \mathcal{R} из $k\mathcal{F}$:

$$\mathcal{R} = \left\{ p_i = \sum_{j=1}^{n(i)} \alpha_{ij} m_{ij} \mid \alpha_{ij} \in k, m_{ij} \in \mathcal{F}, i \in I \right\}.$$

Мы предполагаем, что мономы m_{ij} являются редуцированными, полиномы p_i — аддитивно редуцированными, I — некоторое множество индексов, все коэффициенты α_{ij} ненулевые.

Обозначим через $\langle \mathcal{R} \rangle$ идеал, порожденный как идеал набором \mathcal{R} . Обозначим множество всех мономов m_{ij} из \mathcal{R} через \mathcal{M} .

Целью настоящей работы является определение класса колец с малыми сокращениями. Такое кольцо мы будем представлять в виде $\mathcal{A} = k\mathcal{F} / \langle \mathcal{R} \rangle$, и наше определение будем формулировать в виде трех условий (аксиом) на \mathcal{R} (набор соотношений) и будем считать \mathcal{R} фиксированными.

У с л о в и е 1 (Аксиома совместимости).

(i) Если $p = \sum_{j=1}^n \alpha_j m_j \in \mathcal{R}$, то $\beta p = \sum_{j=1}^n \beta \alpha_j m_j \in \mathcal{R}$ для любого $\beta \in k, \beta \neq 0$.

(ii) Пусть $x \in S \cup S^{-1}$, где S — алфавит, свободно порождающий \mathcal{F} , $p = \sum_{j=1}^n \alpha_j m_j \in \mathcal{R}$. Предположим, что x^{-1} — начальный символ какого-то m_j . Тогда

$$x \cdot p = \sum_{j=1}^n \alpha_j x \cdot m_j \in \mathcal{R}$$

(после сокращений в мономах xm_j). Мы требуем, чтобы аналогичное условие выполнялось также, если x^{-1} — последний символ монома и умножение на x в последнем равенстве — с правой стороны.

Из второго условия аксиомы совместимости немедленно следует, что множество \mathcal{M} замкнуто относительно взятия подслов. В частности, пустое слово всегда принадлежит \mathcal{M} .

Определим понятие малого куска относительно \mathcal{R} в алгебре $k\mathcal{F}$. Оно играет центральную роль в нашей теории.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $c \in \mathcal{M}$. Предположим, существуют два полинома

$$p = \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j a_j + \alpha a \in \mathcal{R}, \quad q = \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j b_j + \beta b \in \mathcal{R},$$

такие что c является подсловом в a и в b , т.е.

$$a = \hat{a}_1 c \hat{a}_2, \quad b = \hat{b}_1 c \hat{b}_2,$$

где $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_1, \hat{b}_2$ возможно являются пустыми. Предположим, что

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 \cdot \hat{a}_1^{-1} \cdot p &= \hat{b}_1 \cdot \hat{a}_1^{-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j a_j + \alpha \hat{a}_1 c \hat{a}_2 \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j \hat{b}_1 \cdot \hat{a}_1^{-1} t a_j + \alpha \hat{b}_1 c \hat{a}_2 \notin \mathcal{R} \end{aligned}$$

(даже после сокращений), или

$$p \cdot \hat{a}_2^{-1} \cdot \hat{b}_2 = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j a_j + \alpha \hat{a}_1 c \hat{a}_2 \right) \cdot \hat{a}_2^{-1} \cdot \hat{b}_2 = \\ = \sum_{j=1}^n \alpha_j a_j \cdot \hat{a}_2^{-1} \cdot \hat{b}_2 + \alpha \hat{a}_1 c \hat{b}_2 \notin \mathcal{R}$$

(даже после сокращений). Тогда моном c называется малым куском.

Обозначим множество всех малых кусков через \mathcal{S} . Ясно, что $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$. Из определения следует, что множество \mathcal{S} замкнуто относительно взятия подслов. В частности, если множество \mathcal{S} непусто, пустое слово всегда будет малым куском. Если набор \mathcal{S} оказался пустым, то мы все равно полагаем пустое слово малым куском.

Пусть $u \in \mathcal{M}$. Тогда или $u = l_1 \cdots l_m$, где l_1, \dots, l_m — малые куски, или u не может быть представлено как произведение малых кусков. Введем меру на мономах из \mathcal{M} (Λ -мера). Будем говорить, что $\Lambda(u) = m$, если u может быть представлен как произведение малых кусков и минимальное возможное число малых кусков, в таком представлении равняется m . Будем говорить, что $\Lambda(u) = \infty$, если u не может быть представлен как произведение малых кусков.

Зафиксируем константу $\tau \in \mathbb{N}$, $\tau \geq 10$.

Условие 2 (Аксиома малых сокращений с условием τ).

Предположим, что $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{R}$ и линейная комбинация $\sum_{s=1}^n \gamma_s p_s$ является ненулевой после приведения подобных членов.

Тогда существует моном a в $\sum_{s=1}^n \gamma_s p_s$ с ненулевым коэффициентом после приведения подобных членов такой, что:

или a не может быть представлен как произведение малых кусков,

или каждое представление a в качестве произведения малых кусков содержит, по крайней мере, $\tau + 1$ малых кусков.

То есть, $\Lambda(a) \geq \tau + 1$, включая $\Lambda(a) = \infty$.

Определение 2. Пусть $p = \sum_{j=1}^n \alpha_j a_j \in \mathcal{R}$.

Будем называть мономы a_{j_1}, a_{j_2} , $1 \leq j_1, j_2 \leq n$, и неидентными мономами (включая случай $a_{j_1} = a_{j_2}$). Напомним, что $\alpha_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$.

Теперь мы вводим последнее условие, называемое аксиомой изоляции. В отличие от двух предыдущих аксиом, это полностью теоретико-кольцевое условие. В нем мы используем понятие

максимального вхождения монома из \mathcal{M} и понятие перекрытия вхождений.

Мы рассматриваем вхождения $a \in \mathcal{M}$ в слово U , т.е. $U = LaR$, где L, R могут быть пустыми. Под максимальным вхождением мы понимаем вхождение монома из \mathcal{M} , которое не содержится в большем таком вхождении. Отметим, что общая часть двух максимальных вхождений всегда является малым куском.

Перекрытие вхождений определяется как общая часть двух вхождений.

Третья аксиома накладывает некоторые естественные ограничения на рассматриваемые кольца. Мы выбрали ее наиболее слабую форму, чтобы охватить наиболее широкий класс колец, что существенно усложнило определение.

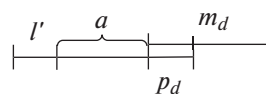
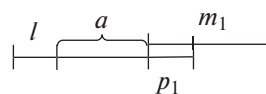
Условие 3 (Аксиома изоляции, левая, с условием τ). Пусть m_1, m_2, \dots, m_d — любая последовательность мономов из \mathcal{M} такая, что $m_i \neq m_d$, $\Lambda(m_i) \geq \tau - 2$ для всех $i = 1, \dots, d$,

мономы m_i и m_{i+1} инцидентны для всех $i = 1, \dots, d - 1$,

и $a \in \mathcal{M}$ — любой моном со следующими свойствами:

- 1) $\Lambda(a) \geq \tau - 2$;
- 2) $am_1, am_d \notin \mathcal{M}$, am_1, am_d не имеют сокращений;
- 3) m_1 — максимальное вхождение в am_1 , m_d — максимальное вхождение в am_d ;
- 4) если ap_1 — максимальное вхождение в am_1 , которое содержит a , ap_d — максимальное вхождение в am_d , которое содержит a , то существуют мономы $l, l' \in \mathcal{M}$ такие, что

- l, l' — малые куски;
- $la, l'a \in \mathcal{M}$, $la, l'a$ не имеют сокращений;
- существует последовательность мономов b_1, \dots, b_n из \mathcal{M} таких, что $b_1 = lap_1$, $b_n = l'ap_d$, для всех $i = 1, \dots, n - 1$ мономы b_i, b_{i+1} инцидентны, и $\Lambda(b_i) \geq \tau - 2$.



Тогда $p_1^{-1} \cdot m_1 \neq p_d^{-1} \cdot m_d$.

Правая аксиома изоляции с условием τ формулируется симметрично.

Определение 3. Будем говорить, что $\mathcal{A} = k\mathcal{F}/\langle \mathcal{R} \rangle$ есть $C(\tau)$ -кольцо с малыми сокращениями, если оно удовлетворяет аксиоме совместимости, аксиоме малых сокраще-

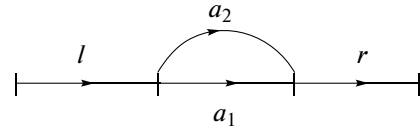
ний с условием τ и по крайней мере одной из аксиом изоляции с условием τ .

Если дана группа $G = \langle X \mid \mathcal{R} \rangle$ и $m = pq \in \mathcal{R}$, $w = lpr$, тогда преобразование $w = lpr \mapsto lq^{-1}r = w'$ называется поворотом.

Мы заменяем понятие группового поворота понятием кольцевого мультиповорота. Возьмем $\sum_{j=1}^n \alpha_j m_j \in \mathcal{R}$, где все $\alpha_j \neq 0$. Предположим, что v — это моном вида $v = lm_h r$ для некоторого h , $1 \leq h \leq n$. Переход от $v = lm_h r$ к $\sum_{j=1, j \neq h}^n (-\alpha_h^{-1} \alpha_j) lm_j r$ называется мультиповоротом. Это преобразование продолжается линейно на βv , а затем линейно на все полиномы, содержащие мономы вида βv . Соответствующий полином $\sum_{j=1}^n \alpha_j lm_j r$ называется раскладкой данного мультиповорота.

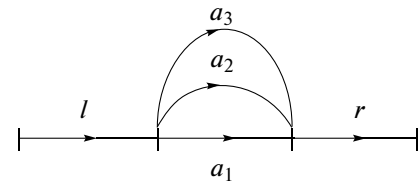
Примеры. В данных примерах для простоты рассматривается групповая алгебра над полем из двух элементов.

А. Предположим $v = la_1 r$ и берется полином $a_1 + a_2 \in \mathcal{R}$. В этом случае мы получаем переход от $la_1 r$ к $la_2 r$ в результате соответствующего мультиповорота:

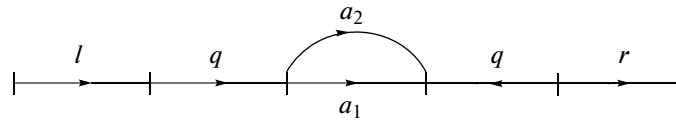


Переход от $la_1 r$ к $la_2 r$ показывает, что поворот можно рассматривать в качестве частного случая мультиповорота.

В. Предположим $v = la_1 r$ и берется полином $a_1 + a_2 + a_3 \in \mathcal{R}$. Тогда мы получаем переход от $la_1 r$ к $la_2 r + la_3 r$. Графически это выглядит следующим образом:

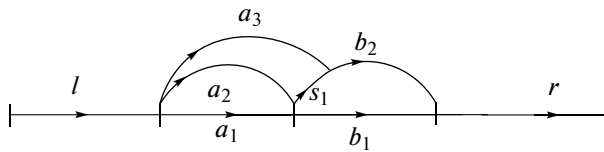


С. Предположим $v = lqa_1 q^{-1} r$ и берется полином $a_1 + a_2 + 1 \in \mathcal{R}$. Тогда соответствующий мультиповорот — это переход от $lqa_1 q^{-1} r$ к $lqa_2 q^{-1} r + l \cdot r$. Заметим, что поле замены a_1 на 1, подслово q сокращается подсловом q^{-1} . Результат имеет следующий вид (пустое слово 1 не отражено на рисунке):



Д. Предположим $v = la_1 b_1 r$ и берутся следующие полиномы $a_1 + a_2 + a_3 s_1^{-1}$ и $b_1 + b_2 + 1$ из \mathcal{R} . То-

гда имеются два соседних мультиповорота: a_1 заменяется на $a_2 + a_3 s_1^{-1}$ и b_1 заменяется на $s_1 b_2 + 1$.



Предположим, что сначала выполняется мультиповорот слева, а затем мультиповорот справа. Тогда $la_1 b_1 r$ заменяется на $la_2 b_1 r + la_3 s_1^{-1} b_1 r$, а затем результат заменяется на $la_2 s_1 b_2 r + la_2 \cdot r + la_3 b_2 r + la_3 s_1^{-1} \cdot r$. При этом в мономах $la_2 r$ и $la_3 s_1^{-1} r$ могут возникнуть сокращения. Теперь предположим, что сначала выполняется мультиповорот

справа, а затем мультиповорот слева. Тогда $la_1 b_1 r$ заменяется на $la_1 s_1 b_2 r + la_1 \cdot r$, а затем результат заменяется на $la_2 s_1 b_2 r + la_3 b_2 r + la_2 \cdot r + la_3 s_1^{-1} \cdot r$ и производятся сокращения в необходимых местах. Заметим, что требуется изменить второй мультиповорот, чтобы заметить его. Также заметим, что итоговый результат не зависит от порядка выполнения мультиповоротов.

Данные выше примеры позволяют увидеть, что, в отличие от групп, в кольцах в результате мультиповоротов возникают новые эффекты.

Определим следующее векторное пространство, ассоциированное с данным мономом и набором мультиповоротов. Сначала рассмотрим моном $v = lm_r r$ и один мультиповорот, порожденный полиномом $\sum_{j=1}^n \alpha_j m_j \in \mathcal{R}$. Тогда соответствующее пространство линейно порождается мономами $lm_j r$, $j = 1, \dots, n$ (после возможных сокращений) с линейной зависимостью $\sum_{j=1}^n \alpha_j lm_j r$. Теперь рассмотрим моном v и несколько мультиповоротов. Тогда соответствующее пространство линейно порождается v и всеми мономами, которые получаются из него при помощи данных мультиповоротов, с линейными зависимостями равными раскладкам данных мультиповоротов.

Рассмотрим определенное выше векторное пространство, которое возникает в последнем примере D. В примере D имеются следующие мономы:

$$la_1 b_1 r, \quad la_2 b_1 r, \quad la_3 s_1^{-1} b_1 r,$$

$$la_1 s_1 b_2 r, \quad la_2 s_1 b_2 r, \quad la_3 b_2 r,$$

$$la_1 \cdot r, \quad la_2 \cdot r, \quad la_3 s_1^{-1} \cdot r$$

и линейные зависимости между ними:

$$la_1 b_1 r + la_2 b_1 r + la_3 s_1^{-1} b_1 r = 0,$$

$$la_1 s_1 b_2 r + la_2 s_1 b_2 r + la_3 b_2 r = 0,$$

$$la_1 \cdot r + la_2 \cdot r + la_3 s_1^{-1} \cdot r = 0,$$

$$la_1 b_1 r + la_1 s_1 b_2 r + la_1 \cdot r = 0,$$

$$la_2 b_1 r + la_2 s_1 b_2 r + la_2 \cdot r = 0,$$

$$la_3 s_1^{-1} b_1 r + la_3 b_2 r + la_3 s_1^{-1} \cdot r = 0.$$

Заметим, что последний полином является суммой предыдущих. Таким образом, у нас имеется 5 линейных зависимостей (а не 6). Следовательно, итоговое векторное пространство имеет размерность не меньше четырех (так как у нас девять попарно различных порождающих мономов). Заметим, что в случае групп соответствующее векторное пространство всегда одномерно, т.е. данный эффект вырождается (см. диаграмму в конце пункта 2.1).

3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Теорема 1. *Кольцо с малыми сокращениями всегда нетривиально.*

Приведем примеры колец с малыми сокращениями.

Теорема 2. *Групповая алгебра группы с малыми сокращениями, удовлетворяющей условию $C(p)$ для $p \geq 22$, является кольцом с малыми сокращениями.*

Пусть $\mathbb{Z}_2 \mathcal{F}$ – есть групповая алгебра над полем \mathbb{Z}_2 свободной группы \mathcal{F} с не менее чем четырьмя образующими. Пусть, далее, $w \in \mathcal{F}$ – моном, $|w|$ – его длина, при этом $w \in \mathcal{F}$ не начинается и не заканчивается ни на одну из букв x, x^{-1}, y, y^{-1} . Возьмем натуральные числа m и n так, что $|w| \ll m \ll n$ и моном $v \in \mathcal{F}$:

$$v = x^m y x^{m+1} y \cdots x^{n-1} y$$

(где знак \ll означает “существенно меньше”).

Пусть \mathcal{R} состоит из тринома $1 + v + vw$, $\mathcal{A} = k\mathcal{F}/\langle \mathcal{R} \rangle$. Имеет место следующая

Теорема 3. *Кольцо \mathcal{A} является кольцом с малыми сокращениями.*

Замечание 2. В алгебре \mathcal{A} элемент $1 + w$ обратим, ибо $v \in \mathcal{F}$ обратим, и если $1 + v + vw = 0$, то $v(1 + w) = (1 + w)v = 1$. Построение конечно порожденного тела осуществляется с помощью итерирования следующей процедуры: берется моном w , по нему строится моном v и соотношение $1 + v + vw = 0$. В пределе оказывается, что сумма любых двух мономов либо нулевая (тогда они отвечают одному и тому же элементу алгебры), либо равна третьему моному (тогда она обратима). Тем самым строится конечно порожденное тело (не только как кольцо, но и как полугруппа). Трудность состоит в доказательстве нетривиальности получившегося кольца. Весьма нетривиальная теорема 3 означает возможность осуществить первый шаг этой процедуры.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны Б.Э. Кунявскому и А.Л. Семенову за важные и полезные обсуждения в ходе подготовки работы к печати. Мы также признательны рецензенту за внимательное чтение текста и ценные замечания, которые существенно повлияли на окончательную редакцию статьи.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования первого и третьего авторов были поддержаны грантом ISF 1994/20 и Исследовательским институтом математики им. Эмми Нетер. Исследования первого и четвертого авторов также поддержаны стипендией ISF. Работа второго автора поддержана Российским научным фондом, грант 17-11-01377.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adian S.I.* The Burnside problem and identities in groups. M.: Nauka, 1975. 335 p.
2. *Atkarskaya A., Kanel-Belov A., Plotkin E., Rips E.* Construction of a quotient ring of \mathbb{Z}_2F in which a binomial $1+w$ is invertible using small cancellation methods / In: Groups, Algebras, and Identities. AMS, Contemporary Mathematics. 2019. V. 726. Israel Mathematical Conferences Proceedings. P. 1–76.
3. *Atkarskaya A., Kanel-Belov A., Plotkin E., Rips E.* Group-like Small Cancellation Theory for Rings. Arxiv: 02836v1 [math.RA]. 2020. 273 p.
4. *Coulon R.* On the geometry of Burnside quotients of torsion free hyperbolic groups // Intern. J. Algebra and Computation. 2014. V. 24. № 3. P. 251–345.
5. *Gromov M.* Infinite groups as geometric objects / Proc. Int. Congress Math., Warsaw, 1983. Amer. Math. Soc. 1984. V. 1. P. 385–392.
6. *Gromov M.* Hyperbolic Groups / Essays in Group Theory. Ed. G.M. Gersten. V. 8. MSRI Publ. N.Y.: Springer, 1987. P. 75–263.
7. *Губа В.С.* Конечно-порожденная полная группа // Известия АН СССР. Сер. Матем. 1986. Т. 50. № 5. С. 883–924.
8. *Ivanov S.* The free Burnside groups of sufficiently large exponents // Internat. J. Algebra Comput. 1994. V. 4. № 1–2. ii+308 p.
9. *Lenagan T., Smoktunowicz A.* An infinite dimensional affine nil algebra with finite Gelfand-Kirillov dimension // J. Amer. Math. Soc. 2007. V. 20. № 4. P. 989–1001.
10. *Lyndon R., Schupp P.* Combinatorial group theory. Reprint of the 1977 edition. Classics in Mathematics. B.: Springer-Verlag, 2001.
11. *Лысенко И.Г.* Бесконечные бернсайдовы группы четного периода // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 3–224.
12. *Новиков П.С., Адян С.И.* О бесконечных периодических группах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. Вып. 1. С. 212–244; Вып. 2. С. 521–524; Вып. 3. С. 709–731.
13. *Ольшанский А.Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
14. *Ольшанский А.Ю.* Бесконечная группа с подгруппами простых порядков // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 309–321.
15. *Ольшанский А.Ю.* Группы ограниченного периода с подгруппами простого порядка // Алгебра и логика. 1982. Т. 21. № 5. С. 553–618.
16. *Rips E.* Generalized small cancellation theory and applications I. The word problem // Israel J. Math. 1982. V. 41. P. 1–146.
17. *Sapir M.* Combinatorial algebra: syntax. Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham. 2014. 355 p.
18. *Smoktunowicz A.* A simple nil ring exists // Communications Algebra. 2002. № 1. P. 27–59.

AXIOMATIC DEFINITION OF SMALL CANCELLATION RINGS

A. Atkarskaya^{a,b}, A. Kanel-Belov^{a,c,d}, E. Plotkin^a, and E. Rips^b

^a*Department of Mathematics, Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel*

^b*Institute of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, Israel*

^c*Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyi, Moscow Oblast, Russian Federation*

^d*College of Mathematics and Statistics, Shenzhen University, Shenzhen, China*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

In the present paper we develop a small cancellation theory for associative algebras with a basis of invertible elements. Namely, we study quotients of a group algebra of a free group and introduce three specific axioms for the corresponding defining relations which provide small cancellation properties of the obtained ring. We show that the obtained ring is non-trivial. This ring is called a small cancellation ring.

Keywords: small cancellation ring, turn, multi-turn, defining relations in rings, small cancellation group, group algebra, filtration, tensor products, Dehn's algorithm, greedy algorithm, Gröbner basis

УДК 517.583 + 512.742.72

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ УЛЬТРАДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

© 2021 г. Член-корреспондент РАН В. А. Быковский^{1,*}

Поступило 06.07.2021 г.
После доработки 06.07.2021 г.
Принято к публикации 08.08.2021 г.

В работе построены три новых периодических ультрадискретных преобразования плоскости. Ранее были известны два таких преобразования.

Ключевые слова: нелинейные рекуррентные последовательности, тропические последовательности, нелинейные периодические преобразования

DOI: 10.31857/S2686954321050040

В работе [1] были построены два периодических преобразования плоскости \mathbb{R}^2

$$T_1(x, y) = (y, z) \quad \text{с} \quad z = \min\{-x, -x - y\},$$

$$T_2(x, y) = (y, z) \quad \text{с} \quad z = \min\{-x - y, -x - 2y\},$$

периоды которых имеют длины 7 и 8 соответственно.

Процедура ультрадискретизации была введена в работах [2–4]. Ее смысл мы объясним на примере преобразования T_1 . Для этого построим последовательность $u_1(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) с помощью рекуррентного соотношения

$$u_1(n+2)u_1(n+1)u_1(n) = \alpha u_1(n+1) + \beta.$$

Она однозначно определяется коэффициентами α, β и любыми двумя соседними элементами за исключением случаев, когда среди элементов последовательности встречается нуль. Поэтому удобно считать начальные значения $u_1(0) = x$, $u_1(1) = y$ и коэффициенты α, β формальными переменными. В этом случае элементы последовательности $u_1(n)$ – рациональные функции от переменных x, y, α, β . Пусть

$$u_1(n) = x^{p_1(n)} \frac{Q(n)}{R(n)},$$

где $p_1(n)$ – целые числа, а $Q(n)$ и $R(n)$ – полиномы, которые не делятся на переменную x . Из рекуррентного соотношения для $u_1(n)$ следует, что

$$p_1(n+2) + p_1(n+1) + p_1(n) = \min\{p_1(n+1), 0\}$$

или

$$p_1(n+2) = \min\{-p_1(n), -p_1(n) - p_1(n+1)\}.$$

Последовательность $p_1(n)$ однозначно определяется начальными значениями $p_1(0) = 1$, $p_1(1) = 0$. Построим на плоскости последовательность точек

$$P_1(n) = (p_1(n), p_1(n+1)).$$

Она определяется начальной точкой $P_1(0) = (1, 0)$ и рекуррентным соотношением

$$P_1(n) = T_1(P_1(n)).$$

Именно так в рассматриваемом случае выглядит процедура ультрадискретизации последовательности рациональных функций $u_1(n)$ и строится соответствующее ей преобразование плоскости T_1 .

По аналогии с вышесказанным, рекуррентным соотношениям

$$u_2(n+2)u_2^2(n+1)u_2(n) = \alpha u_2(n+1) + \beta,$$

$$u_3(n+2)u_3(n) = \alpha u_3(n+1) + \beta,$$

$$u_4(n+2)u_4(n+1)u_4(n) = \alpha u_4^2(n+1) + \beta,$$

$$u_5(n+2)u_5^3(n+1)u_5(n) = \alpha u_5^2(n+1) + \beta,$$

после ультрадискретизации, сопоставляются следующие преобразования плоскости:

$$T_2(x, y) = (y, z) \quad \text{с} \quad z = \min\{-x - y, -x - 2y\},$$

¹Институт прикладной математики
Дальневосточного отделения Российской академии наук,
Хабаровское отделение, Хабаровск, Россия

*E-mail: vab@iam.khv.ru

$$T_3(x, y) = (y, z) \text{ с } z = \min\{-x, -x + y\},$$

$$T_4(x, y) = (y, z) \text{ с } z = \min\{-x - y, -x + y\},$$

$$T_5(x, y) = (y, z) \text{ с } z = \min\{-x - y, -x - 3y\}.$$

Теорема 1. *Преобразования плоскости T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 – периодические с длинами периодов 7, 8, 5, 9, 12 соответственно.*

Доказательство. Для $0 \leq t \leq 1$ определим последовательность $P_k(t)$ ($k \in \mathbb{Z}$) на плоскости с помощью рекуррентного соотношения

$$P_{k+1}(t) = T(P_k(t))$$

и начального значения

$$P_0(t) = (1 - t, t).$$

Легко проверить, что она периодическая с периодом

$$(1 - t, t), (t, -1), (-1, -t), (-t, 1), \\ (1, -1 + t), (-1 + t, -1), (-1, 1 - t)$$

длины 7. При этом

$$\{P_k(t) \mid 0 \leq t < 1\}$$

суть прямолинейные полуинтервалы. Для $k = 0, 1, 2, 3, 4$ они не пересекаются и их объединение – выпуклый семиугольник с вершинами

$$(1, 0), (0, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1).$$

Преобразование T_1 отображает этот семиугольник на себя и при этом каждая его сторона переходит в некоторую другую. Отсюда следует, для любой начальной точки P_0 на семиугольнике последовательность точек, определяемая рекуррентным соотношением $P_{k+1} = T_1(P_k)$ – периодическая с длиной периода 7. Так как для любого $r \geq 0$ последовательность $rp_1(n)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению для $p_1(n)$, и точка $(0, 0)$ лежит внутри пятиугольника, то утверждение теоремы для преобразования T_1 справедливо при любом выборе начальной точки.

Доказательство теоремы в остальных случаях проходит по той же схеме как для T_1 . Поэтому мы ограничимся выписыванием периодов.

Для преобразования T_2 :

$$(1 - t, t), (t, -1 - t), (-1 - t, 1), (1, -1 + t), \\ (-1 + t, -t), (-t, 1), (1, t - 2), (t - 2, 1 - t)$$

с длиной периода 8.

Для преобразования T_3 :

$$(1 - t, t), (t, -1 + t), (-1 + t, -1), (-1, -t), (-t, 1 - t)$$

с длиной периода 5.

Для преобразования T_4 :

$$(1, -t), (-t, t - 1), (t - 1, 1), (1, 2 - t), (2 - t, 1 - t), \\ (1 - t, -1), (-1, t), (t, 1 + t), (1 + t, 1)$$

с длиной периода 9.

Для преобразования T_5 :

$$(1 - t, t), (t, -1 - 2t), (-1 - 2t, 1 + t), \\ (1 + t, -2 - t), (-2 - t, 1), (1, -1 + t), \\ (-1 + t, -t), (-t, 1), (1, t - 3), (t - 3, 2 - t), \\ (2 - t, -3 + 2t), (-3 + 2t, 1 - t)$$

с длиной периода 12.

Более громоздкие по сравнению с предложенным в настоящей работе доказательства периодичности T_1 и T_2 приведены в работе [5].

Отметим также, что последовательности $u_1(n)$, $u_2(n)$ и $u_3(n)$ интегрируемы в том смысле, что величины

$$u_1(n) + u_1(n + 1) + \frac{\alpha}{u_1(n)} + \frac{\alpha}{u_1(n + 1)} + \frac{\beta}{u_1(n)u_1(n + 1)},$$

$$u_2(n)u_2(n + 1) + \frac{\alpha}{u_2(n)} + \frac{\alpha}{u_2(n + 1)} + \frac{\beta}{u_2(n)u_2(n + 1)},$$

$$u_3(n) + u_3(n + 1) + \frac{\alpha^2 + \beta}{u_3(n)} + \frac{\alpha^2 + \beta}{u_3(n + 1)} + \\ + \alpha \frac{u_3(n)}{u_3(n + 1)} + \alpha \frac{u_3(n + 1)}{u_3(n)} + \frac{\alpha\beta}{u_3(n)u_3(n + 1)}$$

являются инвариантами, не зависящими от n (см. [6–8] соответственно).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nobe A.* Ultradiscrete QRT maps and tropical elliptic curves // J. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2008. V. 41. № 12. 125205, 12 p.
2. *Takahashi D., Satsuma J.* A Soliton Cellular Automaton // Journal of the Physical Society of Japan. 1990. V. 59. № 10. P. 3514–3519.
3. *Tokihiro T., Takahashi D., Matsukidaira J., Satsuma J.* A From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure // Physical Review Letters. 1996. V. 76. 3247.
4. *Matsukidaira J., Satsuma J., Takahashi D., Tokihiro T., Torii M.* Toda-type cellular automaton and its N-soliton solution // Physics Letters A. 1997. V. 225. Iss. 4–6. P. 287–295.
5. *Nakata Y.* The solution to the initial value problem for the ultradiscrete Somos-4 and 5: arXiv:1701.04262. 2017.
6. *Fordy A.P., Hone A.* Symplectic Maps from Cluster Algebras // SIGMA. 2011. V. 7. 091. P. 1–12.
7. *Swart C., Hone A.* Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 sequences: arXiv:math/0508094. 2006.
8. *Swart C., Hone A.* Efficient ECM factorization in parallel with the Lyness map: arXiv:2002.03811. 2020.

PERIODIC ULTRADISCRETE PLANE TRANSFORMATIONS**Corresponding Member of the RAS V. A. Bykovskii^a***^aInstitute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russian Federation*

In this paper we construct three new periodic ultradiscrete plane transformations. Two such transformations were previously known.

Keywords: nonlinear recurrent sequences, tropical sequences, nonlinear periodic transformations

УДК 517.926

О НЕКОТОРЫХ МОДИФИКАЦИЯХ ОТОБРАЖЕНИЯ “КОТ АРНОЛЬДА”

© 2021 г. С. Д. Глызин^{1,*}, А. Ю. Колесов^{1,**}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 14.05.2021 г.

Поступило 24.07.2021 г.

После доработки 24.07.2021 г.

Принято к публикации 08.08.2021 г.

Предлагается эффективный способ построения конкретных примеров диффеоморфизмов Аносова на торе \mathbb{T}^2 , отличных от линейных гиперболических автоморфизмов. А именно, вводится в рассмотрение специальный класс диффеоморфизмов, представляющих собой суперпозиции известного линейного отображения “кот Арнольда” с некоторыми диффеоморфизмами, гомотопными тождественным. Для указанного класса отображений устанавливаются конструктивно проверяемые достаточные условия гиперболичности.

Ключевые слова: отображение “кот Арнольда”, гиперболичность, тор, диффеоморфизм Аносова

DOI: 10.31857/S2686954321050064

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

История развития гиперболической теории и основные ее достижения подробно описаны в обзоре [1] и монографиях [2, 3]. Одним из аспектов этой теории является вопрос об отыскании конкретных примеров гиперболических динамических систем и связанный с ним вопрос о способах проверки условий гиперболичности. Общепринятым инструментом указанной проверки считается известный критерий конусов [1–3]. Однако к настоящему времени разработан и альтернативный способ обнаружения гиперболического поведения, суть которого состоит в следующем [4, 5].

Пусть M – гладкое риманово многообразие, $A \subset M$ – непустое компактное подмножество, инвариантное относительно диффеоморфизма f , т.е. $f(A) = A$. Как и в случае критерия конусов, для проверки факта гиперболичности множества A мы предполагаем существование некоторого стартового разложения касательного пространства $T_x M$, $x \in A$ в прямую сумму подпространств $E_1(x)$, $E_2(x)$, $\dim E_j(x) > 0$, $j = 1, 2$. Однако вместо связанных с подпространствами $E_1(x)$, $E_2(x)$ полей конусов в нашем случае строятся непо-

средственно сами неустойчивое и устойчивое распределения E_x^u , E_x^s , фигурирующие в гиперболическом разложении

$$T_x M = E_x^u \oplus E_x^s, \quad x \in A.$$

Как оказывается, искомые подпространства E_x^u , E_x^s могут быть представлены в параметрической форме

$$E_x^u = \{\xi = u_1 + u_2 \in T_x M: u_2 = a(x)u_1, u_1 \in E_1(x)\}, \quad (1)$$

$$E_x^s = \{\xi = u_1 + u_2 \in T_x M: u_1 = b(x)u_2, u_2 \in E_2(x)\}, \quad (2)$$

где $u_1 \in E_1(x)$ и $u_2 \in E_2(x)$ – векторные параметры на E_x^u и E_x^s соответственно, а линейные операторы $a(x): E_1(x) \rightarrow E_2(x)$, $b(x): E_2(x) \rightarrow E_1(x)$, ограниченные по $x \in A$ в равномерной операторной топологии, подлежат определению. Далее, опираясь на факт Df -инвариантности подпространств (1), (2), для отыскания $a(x)$, $b(x)$ приходим к некоторым нелинейным функциональным уравнениям, к которым, в свою очередь, при определенных дополнительных ограничениях удается применить принцип сжимающих отображений. В результате устанавливаем существование подпространств E_x^u , E_x^s при $x \in A$ и получаем для них явные параметрические представления (1), (2). После этого, опираясь на указанные представления, отдельно проверяем факты экспоненциаль-

¹ Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

*E-mail: glyzin.s@gmail.com

**E-mail: andkolesov@mail.ru

ного стремления к нулю при $n \rightarrow +\infty$ векторов $D(f^n(x))\xi$ и $D(f^{-n}(x))\xi$, $n \in \mathbb{N}$, при $\xi \in E_x^s$ и $\xi \in E_x^u$ соответственно.

Опишем теперь интересующий нас класс диффеоморфизмов. Для этого обозначим через $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / 2\pi\mathbb{Z}^2$ тор

$$\mathbb{T}^2 = \{\varphi = \text{colon}(x, y) : 0 \leq x \leq 2\pi(\text{mod } 2\pi), 0 \leq y \leq 2\pi(\text{mod } 2\pi)\}. \quad (3)$$

Иными словами, $\mathbb{T}^2 = p(\mathbb{R}^2)$, где p – так называемая естественная проекция. Если отождествить точки тора (3) с точками фундаментальной области

$\mathcal{U} = \{\varphi = \text{colon}(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 2\pi, 0 \leq y < 2\pi\}$, то для p получаем явную формулу

$$p(\varphi) = \text{colon}\left(x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor, y - 2\pi \left\lfloor \frac{y}{2\pi} \right\rfloor\right). \quad (4)$$

Далее, рассмотрим отображение $G : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, имеющее вид

$$\varphi \mapsto G(\varphi) = \Lambda\varphi + g(\varphi)(\text{mod } 2\pi). \quad (5)$$

Здесь Λ – невырожденная квадратная матрица размера 2×2 с целочисленными элементами, спектр которой не пересекается с единичной окружностью, а вектор-функция $g(\varphi)$ принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. Предполагаем также, что она является 2π -периодической по $\varphi \in \mathbb{R}^2$, т.е. $g(\varphi + 2\pi l) \equiv g(\varphi)$ для любого $l \in \mathbb{Z}^2$. Что же касается элемента $\Lambda\varphi + g(\varphi)(\text{mod } 2\pi)$ из \mathbb{T}^2 , то он задается по правилу:

$$\forall \varphi \in \mathbb{T}^2$$

$$\Lambda\varphi + g(\varphi)(\text{mod } 2\pi) = p[\Lambda p^{-1}(\varphi) + g(p^{-1}(\varphi))],$$

где p – проекция (4), а через $p^{-1}(\varphi) \in \mathbb{R}^2$ обозначен произвольный прообраз точки $\varphi \in \mathbb{T}^2$ (поскольку разность любых двух таких прообразов есть величина вида $2\pi l$, где $l \in \mathbb{Z}^2$, то приведенная формула не зависит от конкретного выбора $p^{-1}(\varphi)$). И наконец, предполагаем, что (5) – диффеоморфизм тора (3), т.е.

$$|\det \Lambda| = 1, \quad \det(\Lambda + g'(\varphi)) \neq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}^2. \quad (6)$$

Определим затем понятие гиперболичности применительно к рассматриваемому отображению (5). Для этого нам потребуется линейный оператор $DG(\varphi) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (дифференциал), задающийся равенством $DG(\varphi) = \Lambda + g'(p^{-1}(\varphi)) \quad \forall \varphi \in \mathbb{T}^2$, а так-

же операторы $D(G^n(\varphi))$, $D(G^{-n}(\varphi))$, $n \geq 1$, определяющиеся соотношениями

$$D(G^n(\varphi)) = DG(\varphi_{n-1}) \circ DG(\varphi_{n-2}) \circ \dots \circ DG(\varphi_0), \\ D(G^{-n}(\varphi)) = [DG(\varphi_{-n})]^{-1} \circ [DG(\varphi_{-(n-1)})]^{-1} \circ \dots \circ [DG(\varphi_{-1})]^{-1},$$

где $\varphi_j = G^j(\varphi)$, $j \in \mathbb{Z}$.

О п р е д е л е н и е (У). Будем говорить, что диффеоморфизм (5) гиперболический или является диффеоморфизмом Аносова, если для каждого $\varphi \in \mathbb{T}^2$ пространство $T_\varphi \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2$ допускает представление в виде прямой суммы $\mathbb{R}^2 = E_\varphi^u \oplus E_\varphi^s$ одномерных линейных подпространств E_φ^u , E_φ^s и выполняются следующие требования:

- а) для $\forall \varphi \in \mathbb{T}^2$ имеем $DG(\varphi)E_\varphi^u = E_{G(\varphi)}^u$, $DG(\varphi)E_\varphi^s = E_{G(\varphi)}^s$ (это свойство называется инвариантностью);
- б) существуют такие постоянные $\mu_1, \mu_2 \in (0, 1)$, $c_1, c_2 > 0$, что

$$\|D(G^{-n}(\varphi))\xi\| \leq c_1 \mu_1^n \|\xi\| \quad \forall \varphi \in \mathbb{T}^\infty, \\ \forall \xi \in E_\varphi^u, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\|D(G^n(\varphi))\xi\| \leq c_2 \mu_2^n \|\xi\| \quad \forall \varphi \in \mathbb{T}^\infty, \\ \forall \xi \in E_\varphi^s, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(здесь $\|\cdot\|$ – произвольно фиксированная норма в \mathbb{R}^2).

Данное определение представляет собой классическое определение Д.В. Аносова из [6]. Следует также напомнить, что в работе [6] гиперболические диффеоморфизмы назывались У-диффеоморфизмами или У-системами. Именно по этой причине мы поместили определение гиперболичности буквой У.

Для описания достаточных условий гиперболичности, которые будут использоваться в данной статье, обозначим через $\lambda_1, |\lambda_1| > 1$ и $\lambda_2, |\lambda_2| < 1$ собственные значения матрицы Λ , а через e_1 и e_2 – отвечающие им собственные векторы. Кроме этого, рассмотрим векторы $g_s, s = 1, 2$, удовлетворяющие соотношениям

$$\Lambda^* g_s = \lambda_s g_s, \quad (e_j, g_s) = \delta_{js}, \quad j, s = 1, 2, \quad (7)$$

где Λ^* – сопряженная матрица, (\cdot, \cdot) – евклидово скалярное произведение в \mathbb{R}^2 , δ_{js} – символ Кронекера. Далее, положим

$$\beta_{j,s}(\varphi) = (g'(\varphi) e_j, g_s), \\ \beta_{j,s}^0 = \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} |\beta_{j,s}(\varphi)|, \quad j, s = 1, 2, \quad (8)$$

$$\alpha_1(\varphi) = \lambda_1 + \beta_{1,1}(\varphi), \quad \alpha_2(\varphi) = \lambda_2 + \beta_{2,2}(\varphi), \quad (9)$$

$$\alpha_1^0 = \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{|\alpha_1(\varphi)|}, \quad \alpha_2^0 = \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} |\alpha_2(\varphi)|. \quad (10)$$

Имеет место следующая

Т е о р е м а 1. *При выполнении неравенств*

$$\begin{aligned} \alpha_1(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}^2, \\ \alpha_1^0 < 1, \quad \alpha_2^0 < 1, \quad \beta_{1,2}\beta_{2,1}^0 < \frac{(1 - \alpha_1^0)(1 - \alpha_2^0)}{\alpha_1^0} \end{aligned} \quad (11)$$

диффеоморфизм (5) обладает свойством гиперболичности.

Доказательство теоремы 1, содержащееся в [4], базируется на описанном выше альтернативном подходе к проверке гиперболичности. А именно, в формулах (1), (2) (в которых теперь $x \in A$ заменено на $\varphi \in \mathbb{T}^2$), мы полагаем $E_j(\varphi) = E_j, j = 1, 2$, где $E_j = \{te_j; t \in \mathbb{R}\}, j = 1, 2$, а e_1, e_2 – векторы из (7). Один из вариантов достаточных условий гиперболичности, которые удается получить на этом пути, имеет вид (11). Именно он и взят за основу при анализе рассматриваемого ниже класса диффеоморфизмов тора \mathbb{T}^2 .

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Обратимся сначала к известному линейному отображению “кот Арнольда”, которое в координатах x, y из (3) имеет вид

$$x \mapsto 2x + y \pmod{2\pi}, \quad y \mapsto x + y \pmod{2\pi}. \quad (12)$$

Далее, введем в рассмотрение отображение

$$\begin{aligned} \varphi \mapsto \varphi + \Delta(\varphi) \pmod{2\pi}, \\ \Delta(\varphi) = \text{colon}(\Delta_1(x), \Delta_2(y)), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\Delta_j(z) \in C^1(\mathbb{R}), \Delta_j(z + 2\pi) \equiv \Delta_j(z), j = 1, 2$, и выполняются неравенства

$$\Delta_j'(z) + 1 > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

Заметим, что условия (14) влекут справедливость второго требования из (6), а значит, обеспечивают взаимную однозначность отображения (13) на торе \mathbb{T}^2 . И наконец, следуя идеям работ [7, 8], рассмотрим суперпозицию диффеоморфизмов (12), (13), т.е. отображение

$$\begin{aligned} x \mapsto 2x + y + \Delta_1(2x + y) \pmod{2\pi}, \\ y \mapsto x + y + \Delta_2(x + y) \pmod{2\pi}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для формулировки достаточных условий гиперболичности диффеоморфизма (15) нам потребуются некоторые обозначения. А именно, положим

$$L_{\max} = \max_{z \in \mathbb{R}} \Delta_1'(z), \quad L_{\min} = \min_{z \in \mathbb{R}} \Delta_1'(z), \quad (16)$$

$$R_{\max} = \max_{z \in \mathbb{R}} \Delta_2'(z), \quad R_{\min} = \min_{z \in \mathbb{R}} \Delta_2'(z),$$

$$\kappa_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} + (2 + \sqrt{5})L_{\min} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}R_{\min}, \quad (17)$$

$$\kappa_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} + (2 - \sqrt{5})L_{\max} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}R_{\max}, \quad (18)$$

$$\kappa_3 = \max[(R_{\max} - L_{\min})^2, (L_{\max} - R_{\min})^2]. \quad (19)$$

Как оказывается, интересующие нас условия гиперболичности выписываются в терминах постоянных (16)–(19). А именно, справедливо следующее утверждение, являющееся основным результатом данной статьи.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены неравенства*

$$\kappa_1 > 0, \quad \kappa_2 > 0, \quad \kappa_3 < \kappa_1\kappa_2. \quad (20)$$

Тогда отображение (15) представляет собой диффеоморфизм Аносова на торе \mathbb{T}^2 .

Для доказательства заметим, что в случае отображения (15) имеем

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1, \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \in (0, 1),$$

а векторы $e_s, g_s, s = 1, 2$ из [7] задаются равенствами

$$e_s = g_s = \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda_s - 1)^2}} \text{colon}(\lambda_s - 1, 1), \quad s = 1, 2. \quad (21)$$

В свою очередь, объединяя соотношения (21) с формулами

$$\begin{aligned} g(\varphi) &= \text{colon}(\Delta_1(z_1), \Delta_2(z_2)), \\ g'(\varphi) &= \begin{pmatrix} 2\Delta_1'(z_1) & \Delta_1'(z_1) \\ \Delta_2'(z_2) & \Delta_2'(z_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $z_1 = 2x + y, z_2 = x + y$, приходим к выводу, что в данной ситуации

$$\begin{aligned} \alpha_1(\varphi) &= \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5}}(\Delta_1'(z_1) + 1) + \\ &+ \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}(\Delta_2'(z_2) + 1) > 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(\varphi) &= \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5}}(\Delta_1'(z_1) + 1) + \\ &+ \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}(\Delta_2'(z_2) + 1) > 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\beta_{1,2}(\varphi) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + \lambda_1}\sqrt{1 + \lambda_2}}(\Delta_2'(z_2) - \Delta_1'(z_1)), \quad (24)$$

$$\beta_{2,1}(\varphi) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{1 + \lambda_1}\sqrt{1 + \lambda_2}}(\Delta_2'(z_2) - \Delta_1'(z_1)). \quad (25)$$

Опираясь на базовые соотношения (22)–(25), убеждаемся в том, что здесь

$$\frac{1}{\alpha_1^0} - 1 = \frac{\kappa_1}{\sqrt{5}}, \quad 1 - \alpha_2^0 = \frac{\kappa_2}{\sqrt{5}}, \quad \beta_{1,2}^0 \beta_{2,1}^0 = \frac{\kappa_3}{5},$$

а значит, условия (20) влекут выполнение требований (11). Остается воспользоваться теоремой 1 и заключить, что в предположениях (20) интересующий нас диффеоморфизм (15) действительно является гиперболическим.

В качестве конкретного примера рассмотрим отображение (15) с функциями

$$\Delta_j(z) = \delta_j \cos(z + v_j), \quad (26)$$

$$\delta_j \in [0, 1), \quad v_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2.$$

Фигурирующие в (26) ограничения на параметры δ_1, δ_2 гарантируют выполнение в данном случае условий (14). Что же касается требований (20), то они эквивалентны оценкам

$$(2\sqrt{5} + 4)\delta_1 + (\sqrt{5} + 1)\delta_2 < 5 + \sqrt{5},$$

$$(2\sqrt{5} - 4)\delta_1 + (\sqrt{5} - 1)\delta_2 < 5 - \sqrt{5},$$

$$3\sqrt{5}\delta_1 + 2\sqrt{5}\delta_2 - \delta_1\delta_2 < 5.$$

Заметим еще, что эти условия заведомо справедливы, например, в случае, когда $\delta_1 = 0, \delta_2 \in [0, 1)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсудим сначала вопрос о возможных обобщениях полученных нами результатов. Ясно, что при построении класса отображений (15) вместо диффеоморфизма (12) можно взять произвольный линейный гиперболический автоморфизм тора \mathbb{T}^2 . Каждому такому автоморфизму будет соответствовать своя версия теоремы 2. Кроме того, даже в первоначальном случае (12), (13) условия указанной теоремы можно несколько ослабить, если для проверки гиперболичности воспользоваться усиленным вариантом теоремы 1.

Для получения более слабых, чем (11) достаточных условий гиперболичности, сначала в формулах (8)–(10) переопределим величины $\beta_{1,2}^0, \beta_{2,1}^0$. А именно, положим

$$\beta_{1,2}^0 = \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} |\beta_{1,2}(\varphi)|, \quad \beta_{2,1}^0 = \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\beta_{2,1}(\varphi)}{\alpha_1(\varphi)} \right|. \quad (27)$$

Кроме того, введем еще две постоянные

$$\gamma_{1,2}^0 = \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\beta_{1,2}(\varphi)}{\alpha_1(\varphi)} \right|, \quad \gamma_{2,1}^0 = \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} |\beta_{2,1}(\varphi)|. \quad (28)$$

Из результатов статьи [5] вытекает следующая

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены условия

$$\alpha_1(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha_1^0 < 1, \quad \alpha_2^0 < 1, \quad (29)$$

$$\min(\beta_{1,2}^0 \beta_{2,1}^0, \gamma_{1,2}^0 \gamma_{2,1}^0) < (1 - \alpha_1^0)(1 - \alpha_2^0),$$

где постоянные α_1^0, α_2^0 задаются прежними равенствами (10), а $\beta_{1,2}^0, \beta_{2,1}^0, \gamma_{1,2}^0, \gamma_{2,1}^0$ – величины (27), (28). Тогда диффеоморфизм (5) является гиперболическим.

Обратим внимание, что в силу очевидной оценки

$$\min(\beta_{1,2}^0 \beta_{2,1}^0, \gamma_{1,2}^0 \gamma_{2,1}^0) \leq \alpha_1^0 \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} |\beta_{1,2}(\varphi)| \cdot \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} |\beta_{2,1}(\varphi)|$$

условия (29) действительно слабее ограничений (11). Однако с использованием теоремы 3 для отображения (15) в общем случае выходят более громоздкие, чем (20) достаточные условия гиперболичности. Именно по этой причине мы изначально остановили свой выбор на теореме 1.

В заключение проиллюстрируем применимость теоремы 3 на конкретном примере, заимствованном из работ [7, 8]. Как и в указанных статьях, рассмотрим диффеоморфизм (15) с функциями

$$\Delta_1(z) = M(z, \varepsilon), \quad \Delta_2(z) = 0, \quad (30)$$

где $M(z, \varepsilon)$ – так называемая функция Мебиуса. Данная функция является 2π -периодической по z и на отрезке $0 \leq z \leq 2\pi$ задается формулой

$$M(z, \varepsilon) = \begin{cases} \Omega(z, \varepsilon) - z & \text{при } 0 \leq z < z_1, \\ \Omega(z, \varepsilon) + \pi - z & \text{при } z_1 < z < z_2, \\ \Omega(z, \varepsilon) + 2\pi - z & \text{при } z_2 < z \leq 2\pi, \end{cases}$$

где $\varepsilon = \text{const} \in (0, 1)$,

$$\Omega(z, \varepsilon) = \text{arctg} \left(\frac{(1 - \varepsilon^2) \sin z}{2\varepsilon + (1 + \varepsilon^2) \cos z} \right),$$

$$z_1 = \arccos \left(-\frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \right),$$

$$z_2 = 2\pi - \arccos \left(-\frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \right).$$

Что же касается точек $z = z_j, j = 1, 2$, то в них она доопределяется по непрерывности.

Несложный подсчет показывает, что в нашем случае

$$M'_z(z, \varepsilon) + 1 = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos z} > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

$$M''_{zz}(z, \varepsilon) = \frac{2\varepsilon(1 - \varepsilon^2) \sin z}{(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos z)^2} > 0$$

при $0 < z < \pi$,

а значит,

$$\min_{z \in \mathbb{R}} M'_z(z, \varepsilon) = -\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad \max_{z \in \mathbb{R}} M'_z(z, \varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

$$\frac{1}{\alpha_1^0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} - (2+\sqrt{5}) \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \right),$$

$$1 - \alpha_2^0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} + (2-\sqrt{5}) \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \right),$$

$$\beta_{1,2}^0 \beta_{2,1}^0 = \gamma_{1,2}^0 \gamma_{2,1}^0 = \frac{4\varepsilon^2 \alpha_1^0}{5(1-\varepsilon^2)}.$$

Далее, принимая во внимание приведенные формулы, убеждаемся в том, что в рассматриваемой ситуации условия (29) эквивалентны требованию

$$\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4472.$$

Вопрос же о гиперболичности отображения (15), (30) при $\varepsilon \in [1/\sqrt{5}, 1)$ остается открытым.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 21-71-30011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Динамические системы – 9. Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 66. М.: ВИНТИ, 1991.
2. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005.
3. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.
4. Колесов А.Ю., Розов Н.Х., Садовничий В.А. // Матем. заметки. 2019. Т. 105. Вып. 2. С. 251–268.
5. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. // Тр. МИАН. 2020. Т. 308. С. 116–134.
6. Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. Тр. МИАН СССР. Т. 90. Ред. И. Г. Петровский, 1967.
7. Chigarev V., Kazakov A.O., Pikovskiy A.S. // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2020. V. 30. № 7. P. 073114-1–073114-10.
8. Гонченко С.В., Кайнов М.Н., Казаков А.О., Тураев Д.В. // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29. № 1. С. 160–185.

ON SOME MODIFICATIONS OF ARNOLD'S CAT MAP

S. D. Glyzin^a and A. Yu. Kolesov^a

^a P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

An effective method is proposed for constructing specific examples of Anosov diffeomorphisms on the torus \mathbb{T}^2 , which are different from linear hyperbolic automorphisms. A special class of diffeomorphisms is introduced, which are superpositions of the well-known linear Arnold's cat map with some diffeomorphisms homotopic to the identity. Sufficient hyperbolicity conditions that are constructively verified are established for this class of mappings.

Keywords: Arnold's cat map, hyperbolicity, torus, Anosov diffeomorphism

УДК 519.175.4

О 4-СПЕКТРЕ СВОЙСТВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ

© 2021 г. М. Е. Жуковский^{1,2,3,4,*}, А. Д. Матушкин^{1,**}, Ю. Н. Яровиков^{1,5,***}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 22.04.2021 г.

Поступило 27.04.2021 г.

После доработки 07.07.2021 г.

Принято к публикации 18.08.2021 г.

k -Спектром называется множество таких положительных чисел α , что биномиальный случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется закону нуля или единицы для формул первого порядка кванторной глубины не более k . Мы доказали, что минимальное k , при котором k -спектр бесконечен, равно 5.

Ключевые слова: логика первого порядка, биномиальный случайный граф, закон нуля или единицы, спектр формулы, игра Эренфойхта

DOI: 10.31857/S2686954321050180

1. ЛОГИКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА СЛУЧАЙНОГО ГРАФА

Простым графом (далее просто графом) G называется пара множеств $G = (V, E)$, где V – произвольное непустое множество, а E – некоторое множество неупорядоченных пар различных элементов из V . Под изоморфизмом графов $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ подразумевается биекция $f : V_1 \rightarrow V_2$, сохраняющая ребра, т.е. $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2$. Свойство графов – множество графов, замкнутое относительно изоморфизма. Для формализации некоторых свойств графов используется язык первого порядка. Так, например, свойство содержать треугольник (тройку вершин, по-

парно соединенных ребрами) записывается формулой первого порядка

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \sim x_2) \wedge (x_1 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3).$$

Свойство графа иметь изолированную вершину (вершину, из которой не исходит ни одно ребро) записывается формулой первого порядка

$$\exists x \forall y \neg (y \sim x).$$

Говоря простыми словами, формула первого порядка – это формальная запись свойства, использующая символы переменных (x, x_1, y, z, \dots), булевы связки ($\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$), предикатные символы (в случае графов $=, \sim$), кванторы (\forall, \exists) и скобки. Строгое определение формулы первого порядка можно найти, например, в [1]. Под сигнатурой формулы подразумевается множество предикатных символов \mathcal{P} с заданными арностями (т.е. натуральными числами, обозначающими количество аргументов соответствующего предиката). Под интерпретацией подразумевается множество \mathcal{D} и отображение σ , ставящее в соответствие каждому символу из \mathcal{P} предикат $\mathcal{D}^a \rightarrow \{0, 1\}$, где a – арность этого предикатного символа. В случае графов сигнатура состоит из двух предикатных символов $\sim, =$, а интерпретациями являются конечные простые графы (предикат $x \sim y$ является истинным для вершин x, y , соединенных ребром). Иными словами, для интерпретации G на n вершинах:

1) $\mathcal{D} = \{1, \dots, n\}$ – множество вершин графа G ,

2) предикат \sim истинен на вершинах x, y тогда и только тогда, когда x, y соединены ребром в G ,

¹ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

² Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Москва, Россия

³ Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Майкоп, Россия

⁴ Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

⁵ Институт искусственного интеллекта AIRI, Москва, Россия

*E-mail: zhukmax@gmail.com

**E-mail: alexmatushkin1@gmail.com

***E-mail: yu-rovikov@yandex.ru

3) предикат = истинен на совпадающих вершинах x, y .

Логика первого порядка обладает рядом важных свойств, одним из которых является теорема Гёделя о полноте [1]. Из этой теоремы, в частности, следует так называемый закон 0 или 1. Для графов это утверждение звучит следующим образом. Пусть φ — формула первого порядка, а G_n — множество графов на множестве вершин $\{1, \dots, n\}$, для которых формула φ является истинной. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{G}_n|/2^{C_n^2} \in \{0, 1\}.$$

Заметим, что $2^{C_n^2}$ — это количество всех графов на $\{1, \dots, n\}$. Закон 0 или 1 был впервые доказан Глебским, Коганом, Легоньким и Талановым в 1969 г. [2] и далее в 1976 г. он независимо (и по-другому) был доказан Фейгиным [3]. Чтобы заметить, что закон 0 или 1 вытекает из теоремы Гёделя, достаточно построить так называемую систему аксиом расширения и доказать, что ни для какого конечного графа не истинны все эти аксиомы одновременно, но существует единственный счетный граф R , для которого они истинны (этот граф называется графом Радо, и с вероятностью 1 он изоморфен случайному счетному графу в биномиальной модели) [4]. Действительно, упомянутая система аксиом является почти на верное теорией, т.е. любая аксиома истинна на почти всех графах, а значит, то же самое верно и для любой выводимой из нее формулы (т.е. формулы, истинной на всех графах, на которых истинен и некоторый конечный набор аксиом). По теореме Гёделя любая формула, истинная на R , истинна на почти всех графах. Наоборот, если формула φ не является истинной на R , то $\neg\varphi$ — истинна, а значит, истинна на почти всех графах. Единственным нетривиальным моментом в этом доказательстве является единственность графа Радо (существование счетного графа следует из непротиворечивости упомянутой системы аксиом, см. [1]).

Альтернативное доказательство [5] закона 0 или 1 опирается на теорему Эренфойхта [6], связывающую игру Эренфойхта с понятием элементарной эквивалентности. Напомним, что кванторной глубиной формулы $\mathbf{q}(\varphi)$ называется количество кванторов в самой длинной последовательности вложенных кванторов в этой формуле (см. формальное определение в [1]). Будем говорить, что графы G_1, G_2 являются k -элементарно эквивалентными, если для любой формулы первого порядка φ с $\mathbf{q}(\varphi) = k$ либо φ истинна на G_1, G_2 , либо ложна на G_1, G_2 . В игре Эренфойхта на графах G_1, G_2 с k раундами участвуют два игрока, Новатор и Консерватор. В v -м раунде ($1 \leq v \leq k$) Новатор выбирает вершину из любого графа, отличную от уже вы-

бранных. Затем Консерватор выбирает вершину из другого графа, отличную от уже выбранных. К концу игры выбраны вершины $x_1, \dots, x_k \in V(G_1)$ и $y_1, \dots, y_k \in V(G_2)$. Консерватор побеждает в том и только том случае, когда отображение $f: \{x_1, \dots, x_k\} \rightarrow \{y_1, \dots, y_k\}$, переводящее вершину x_v в вершину y_v для каждого $v \in \{1, \dots, k\}$, является изоморфизмом индуцированных подграфов $G_1|_{\{x_1, \dots, x_k\}}$ и $G_2|_{\{y_1, \dots, y_k\}}$. Теорема Эренфойхта утверждает, что графы G_1, G_2 являются k -элементарно эквивалентными тогда и только тогда, когда у Консерватора есть выигрышная стратегия на G_1, G_2 в k раундах.

Из теоремы Эренфойхта можно (см., например, [4, 7]) получить следствие о справедливости законов 0 или 1: закон 0 или 1 справедлив для любой формулы первого порядка φ с $\mathbf{q}(\varphi) \leq k$ тогда и только тогда, когда у Консерватора есть выигрышная стратегия в k раундах на почти всех графах (иными словами,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} |\mathcal{G}_{n, m}|/2^{C_n^2 + C_m^2} = 1,$$

где $\mathcal{G}_{n, m}$ — множество пар графов G_1 на $\{1, \dots, n\}$ и G_2 на $\{1, \dots, m\}$, на которых у Консерватора есть выигрышная стратегия в k раундах).

2. СПЕКТРЫ ФОРМУЛ

Мы изучаем вероятности истинности формул первого порядка на биномиальном случайном графе $G(n, p)$ [7, 8]. Множество вершин этого графа — $\{1, \dots, n\}$, а ребра проводятся независимо с вероятностью p каждое. Иными словами, для любого графа $G = (\{1, \dots, n\}, E)$

$$P(G(n, p) = G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}.$$

Говорят, что случайный граф $G(n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы, если для любой формулы первого порядка φ либо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(G(n, p) \models \varphi) = 1,$$

либо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(G(n, p) \models \varphi) = 0$$

(здесь и далее мы пишем $G \models \varphi$, если формула φ истинна на графе G). Заметим, что упомянутая теорема из предыдущего раздела утверждает справедливость закона 0 или 1 для случайного графа $G\left(n, \frac{1}{2}\right)$. Легко заметить [5], что закон 0 или 1 справедлив и для всех p таких, что для любого $\alpha > 0$ выполнено $\min\{p, 1-p\}n^\alpha \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$, в силу истинности (с асимптотической вероятностью 1) всех аксиом расширения.

Если же $p = n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, то закон 0 или 1 справедлив тогда и только тогда, когда α – иррационально или $\alpha > 1$ и $\alpha \notin \left\{1 + \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}\right\}$ [9]. При ограничении на кванторную глубину формул закон становится справедливым и для некоторых рациональных $\alpha \in (0, 1]$ и $\alpha = 1 + \frac{1}{m}$ (см., например, [10, 11]). Говорят, что случайный граф $G(n, p)$ подчиняется k -закону нуля или единицы, если для любой формулы первого порядка φ с $\mathbf{q}(\varphi) \leq k$ либо $\lim_{n \rightarrow \infty} P(G(n, p) \models \varphi) = 1$, либо $\lim_{n \rightarrow \infty} P(G(n, p) \models \varphi) = 0$. В [11] доказано, что множество таких $m \in \mathbb{N}$, что случайный граф $G(n, n^{-1-1/m})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы, конечно. Множество $S(k)$ всех таких $\alpha > 0$, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы, называется k -спектром. Таким образом, возникает вопрос: а бесконечно ли множество $S(k)$ хоть для каких-то k ? Ясно, что если $S(k)$ бесконечно для некоторого k , то $S(\ell)$ также бесконечно для всех $\ell > k$. В [12] Дж. Спенсер доказал, что k -спектр бесконечен при $k \geq 14$. В [10] доказано, что $S(3) \cap (0, 1) = \emptyset$ и $S(4) \cap (0, 1/2) = \emptyset$. В [13] приведен пример такой формулы первого порядка φ кванторной глубины 5, что $P(G(n, n^{-\alpha}) \models \varphi)$ не стремится ни к 0, ни к 1 для бесконечно многих α . Итак, минимальное k , при котором множество $S(k)$ бесконечно, равно 4 или 5.

Нам удалось доказать, что минимальное k , при котором k -спектр бесконечен, равно 5, что равносильно следующей теореме.

Теорема 1. *Множество $S(4)$ конечно.*

Идея доказательства. В прежней работе [14] нам удалось доказать, что множество $S(4)$ не содержит ни одной предельной точки кроме, быть может, $1/2$ и $3/5$. Теперь мы доказали, что и $1/2$, $3/5$ не являются предельными точками спектра. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется 4-закону 0 или 1 для всех $\alpha \in (1/2, 1/2 + \varepsilon)$ и $\alpha \in (3/5, 3/5 + \varepsilon)$ (пустота спектра для некоторой левой окрестности любой предельной точки доказана в [9]). Последнее утверждение мы доказали с помощью следствия из теоремы Эренфойхта и следующей леммы.

Лемма 1. *Существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого*

$$\alpha \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon\right) \sqcup \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5} + \varepsilon\right)$$

с вероятностью, стремящейся к 1, у Консерватора есть выигрышная стратегия в 4 раундах в игре

Эренфойхта на графах $G(n, n^{-\alpha})$, $G(m, m^{-\alpha})$ при $n, m \rightarrow \infty$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-31-70025.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Верещагин Н.К., Шень А.* Языки и исчисления. М.: МНЦМО, 2012. 240 с.
2. *Глебский Ю.В., Коган Д.И., Лиогонький М.И., Таланов В.А.* Объем и доля выполнимости формул узкого исчисления предикатов // Кибернетика. 1969. № 2. С. 17–26.
3. *Fagin R.* Probabilities in finite models // J. Symbolic Logic. 1976. № 41. P. 50–58.
4. *Spencer J.H.* The Strange Logic of Random Graphs. Berlin: Springer-Verlag, 2001. 168 p.
5. *Spencer J.H.* Threshold spectra via the Ehrenfeucht game // Discrete Applied Mathematics. 1991. № 30. P. 235–252.
6. *Ehrenfeucht A.* An application of games to the completeness problem for formalized theories // Warszawa Fund. Math. 1960. № 49. P. 121–149.
7. *Alon N., Spencer J.H.* Probabilistic method. New York: Wiley, 2008. 400 с.
8. *Janson S., Łuczak T., Ruciński A.* Random Graphs. New York: Wiley, 2000. 336 с.
9. *Shelah S., Spencer J.H.* Zero-one laws for sparse random graphs // J. Amer. Math. Soc. 1988. № 1. P. 97–115.
10. *Zhukovskii M.E.* Zero-one k -law // Discrete Mathematics. 2012. № 312. P. 1670–1688.
11. *Ostrovsky L.B., Zhukovskii M.E.* Monadic second-order properties of very sparse random graphs // Annals of pure and applied logic. 2017. № 168(11). P. 2087–2101.
12. *Spencer J.H.* Infinite spectra in the first order theory of graphs // Combinatorica. 1990. № 10:1. P. 95–102.
13. *Zhukovskii M.* On Infinite Spectra of First Order Properties of Random Graphs // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2016. № 6(4). P. 73–102.
14. *Matushkin A.D., Zhukovskii M.E.* First order sentences about random graphs: small number of alternations // Discrete Applied Mathematics. 2018. № 236. P. 329–346.

ON THE 4-SPECTRUM OF FIRST-ORDER PROPERTIES OF RANDOM GRAPHS

M. E. Zhukovskii^{a,b,c,d}, A. D. Matushkin^a, and Y. N. Yarovikov^{a,e}

^a *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

^b *The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russian Federation*

^c *Caucasus Mathematical Center, Adyghe State University, Maykop, Republic of Adyghea, Russian Federation*

^d *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

^e *Artificial Intelligence Research Institute (AIRI), Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

A k -spectrum is a set of all positive α such that the random binomial graph $G(n, n^{-\alpha})$ does not obey the zero-one law for first-order formulas with quantifier depth no more than k . We proved that the minimal k such that the k -spectrum is infinite, equals to 5.

Keywords: first-order logic, random binomial graph, zero-one law, spectrum of formula, Ehrenfeucht game

УДК 517.956.2

ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ С МЛАДШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ГЕОМЕТРИЮ ОБЛАСТИ

© 2021 г. А. А. Коньков^{1,*}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 06.07.2021 г.

Поступило 08.07.2021 г.

После доработки 08.07.2021 г.

Принято к публикации 08.08.2021 г.

Получены теоремы сравнения, позволяющие оценить сферический максимум решений квазилинейных эллиптических неравенств, содержащих младшие производные, через решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, правая часть которого зависит от геометрии области.

Ключевые слова: нелинейные эллиптические операторы, неограниченные области, емкость

DOI: 10.31857/S2686954321050209

Пусть $\Omega \neq \emptyset$ — открытое подмножество \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Положим $\Omega_{r_1, r_2} = \{x \in \Omega : r_1 < |x| < r_2\}$ и $B_{r_1, r_2} = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x| < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2$. Через B_r^x и S_r^x обозначим открытый шар и сферу радиуса $r > 0$ с центром в точке x . В случае $x = 0$ пишем B_r и S_r вместо B_r^0 и S_r^0 .

Будем рассматривать неравенства

$$\operatorname{div} A(x, Du) + b(x)|Du|^{p-1} \geq 0 \quad \text{в } \Omega_{R_0, R_1}, \quad (1)$$

где $0 \leq R_0 < R_1 \leq \infty$, $D = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$ — оператор градиента и $p > 1$ — вещественное число. Считаем, что главная часть дифференциального оператора удовлетворяет условию равномерной эллиптичности

$$\begin{aligned} C_1|\xi|^p &\leq \xi A(x, \xi), \\ |A(x, \xi)| &\leq C_2|\xi|^{p-1}, \quad C_1, C_2 > 0, \end{aligned}$$

для почти всех $x \in \Omega_{R_0, R_1}$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, а коэффициент при младших производных b — неотрицательная функция, принадлежащая пространству $L_\nu(\Omega_{R_0, r})$ для всех $r \in (R_0, R_1)$, где $n < \nu \leq \infty$ при $p \leq n$ и $\nu = p$ при $p > n$.

Теоремы сравнения для неравенств (1), не содержащих младшие производные, получены в работе [2].

Решением (1) будем называть функцию u такую, что $u \in W_p^1(\Omega_{R_0, r}) \cap L_\infty(\Omega_{R_0, r})$ и $A(x, Du) \in L_{p/(p-1)}(\Omega_{R_0, r})$ для любого $r \in (R_0, R_1)$ и при этом

$$-\int_{\Omega_{R_0, R_1}} A(x, Du) D\varphi dx + \int_{\Omega_{R_0, R_1}} b(x)|Du|^{p-1} \varphi dx \geq 0$$

для всех неотрицательных $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{R_0, R_1})$.

Говорим также, что

$$u|_{B_{R_1} \setminus \overline{B_{R_0}} \cap \partial\Omega_{R_0, R_1}} = 0, \quad (2)$$

если $\psi u \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_{R_0, R_1})$ для всех $\psi \in C_0^\infty(B_{R_0, R_1})$.

Пусть u — решение (1), (2). Обозначим

$$M(r; u) = \operatorname{ess\,sup}_{S_r \cap \Omega} u, \quad r \in (R_0, R_1),$$

где ограничение u на $S_r \cap \Omega$ понимается в смысле следа, а $\operatorname{ess\,sup}$ берется по $(n-1)$ -мерной мере Лебега на сфере S_r . Если $S_r \cap \Omega = \emptyset$, то будем считать, что $M(r; u) = 0$.

Емкость компакта $K \subset \omega$ по отношению к открытому множеству $\omega \subset \mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$\operatorname{cap}(K, \omega) = \inf_{\varphi} \int_{\omega} |D\varphi|^p dx,$$

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: konkov@mech.math.msu.su

где точная нижняя грань берется по всем функциям $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$, равным тождественно единице в окрестности K . Емкость пустого множества считается равной нулю. В случае $\omega = \mathbb{R}^n$ пишем $\text{cap}(K)$ вместо $\text{cap}(K, \omega)$.

Если $p = 2$ и $n \geq 3$, то $\text{cap}(K)$ совпадает с хорошо известной винеровской емкостью [4].

Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ величину

$$\text{diam}_\varepsilon \omega = \sup \left\{ r : \exists x \in \omega \frac{\text{cap}(\overline{B_r^x} \setminus \omega, B_{2r}^x)}{\text{cap}(B_r, B_{2r})} < \varepsilon \right\}$$

будем называть ε -существенным внутренним диаметром открытого множества $\omega \subset \mathbb{R}^n$ [5]. В случае $\omega = \emptyset$ полагаем $\text{diam}_\varepsilon \omega = 0$.

Несложно увидеть, что $\text{diam}_\varepsilon \omega$ является монотонной функцией множества ω и вещественного числа ε . Другими словами, если $\omega_1 \subset \omega_2$ и $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, то $\text{diam}_{\varepsilon_1} \omega_1 \leq \text{diam}_{\varepsilon_2} \omega_2$.

Под $\mathcal{L}_{v,\varepsilon}(\omega)$, где ω – открытое подмножество \mathbb{R}^n , будем подразумевать пространство измеримых функций f таких, что

$$\sup_{x \in \omega} \|f\|_{L_v(\omega \cap B_{\text{diam}_\varepsilon \omega}^x)} < \infty.$$

Норма в $\mathcal{L}_{v,\varepsilon}(\omega)$ определяется равенством

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{v,\varepsilon}(\omega)} = |B_1|^{\frac{1}{v}} \sup_{x \in \omega} \|f\|_{L_v(\omega \cap B_{\text{diam}_\varepsilon \omega}^x)},$$

где $|B_1|$ – объем единичного шара в \mathbb{R}^n . В случае $f \in L_\infty(\omega)$, очевидно, имеем

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{v,\varepsilon}(\omega)} \leq (\text{diam}_\varepsilon \omega)^{\frac{n}{v}} \|f\|_{L_\infty(\omega)}. \tag{3}$$

Предположим, что E – непустое открытое подмножество сферы S_r . Обозначим

$$\lambda_{\min}(E) = \inf_{\psi \in C_0^\infty(E)} \frac{\int_E |\nabla \psi|^p dS_r}{\int_E |\psi|^p dS_r},$$

где $|\nabla \psi| = (g^{ij} \nabla_i \psi \nabla_j \psi)^{\frac{1}{2}}$, g^{ij} – дуальный метрический тензор на сфере S_r , индуцированный евклидовой метрикой в \mathbb{R}^n , а dS_r – элемент $(n-1)$ -мерного объема сферы S_r .

Согласно вариационному принципу $\lambda_{\min}(E)$ является первым собственным значением спектральной задачи

$$\Delta_p w = -\lambda |w|^{p-2} w \quad \text{в } E, \quad w|_{\partial E} = 0,$$

для оператора p -Лапласа–Бельтрами

$$\Delta_p w = \nabla_i (|\nabla w|^{p-2} g^{ij} \nabla_j w).$$

Теорема 1. Пусть Λ и q – неотрицательные измеримые функции такие, что

$$\Lambda|_{[R_0, \zeta R_0] \cap [R_0, R_1]} = 0 \tag{4}$$

и при этом

$$\Lambda(r) \leq \inf_{t \in (r/\zeta, r\zeta), S_t \cap \Omega \neq \emptyset} \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega) \tag{5}$$

и

$$q(r) \geq (\text{diam}_\varepsilon \Omega_{r/\sigma, r\sigma})^{1-\frac{n}{v}} \|b\|_{\mathcal{L}_{v,\varepsilon}(\Omega_{r/\sigma, r\sigma})} \tag{6}$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$, где $0 < \varepsilon < 1$, $\zeta > 1$ и $\sigma > 1$ – некоторые вещественные числа.

Предположим также, что u – неотрицательное решение (1), (2), причем $M(\cdot; u)$ – неубывающая функция на интервале (R_0, R_1) и

$$M(R_0 + 0; u) > 0. \tag{7}$$

Тогда для любого вещественного числа $a > p-2$ найдутся постоянные $\gamma > 0$ и $k > 0$, зависящие только от $a, n, p, \varepsilon, \zeta, \sigma, v, C_1, C_2$, такие, что на промежутке $[R_0, R_1)$ существует решение задачи Коши

$$\frac{1}{r^{1+a}} \frac{d}{dr} \left(r^{1+a} \left| \frac{dm}{dr} \right|^{p-2} \frac{dm}{dr} \right) = \gamma e^{-kq(r)} \Lambda(r) |m|^{p-2} m, \tag{8}$$

$$m(R_0) = M(R_0 + 0; u), \quad m'(R_0) = 0, \tag{9}$$

удовлетворяющее оценке

$$M(r; u) \geq m(r) > 0 \tag{10}$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$.

З а м е ч а н и е 1. Если $n > p$, то в теореме 1 можно взять $a = n-2$. В этом случае, в левой части (8) будем, очевидно, иметь радиальный оператор p -Лапласа.

Теорема 2. Пусть справедливы условия теоремы 1. Тогда для любого вещественного числа $a > p-2$ найдутся постоянные $\gamma > 0$ и $k > 0$, зависящие только от $a, n, p, \varepsilon, \zeta, \sigma, v, C_1, C_2$, такие, что

$$M(r; u) - M(R_0 + 0; u) \geq$$

$$\geq \int_{R_0}^r dt \left(\frac{\gamma}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} e^{-kq(\xi)} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{\frac{1}{p-1}} \tag{11}$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$.

З а м е ч а н и е 2. Согласно (3) неравенство (6) будет выполнено, если $b \in L_\infty(\Omega_{R_0, r})$ и

$$q(r) \geq \text{diam}_\varepsilon \Omega_{r/\sigma, r\sigma} \text{ess sup}_{\Omega_{r/\sigma, r\sigma}} b$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$.

Теорема 3. Теорема 1 остается в силе, если функция Λ вместо (4) и (5) удовлетворяет условиям

$$\Lambda|_{([R_0, hR_0/(1-\delta)] \cup [R_0, \sigma R_0]) \cap [R_0, R_1]} = 0 \quad (12)$$

и

$$\Lambda(r) \leq \inf_{\Omega_{r/h, rh}} \mu_\delta^p + r^{-n} \text{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r\sigma_2} \setminus \Omega}, B_{r\sigma_4, r\sigma_1}) \quad (13)$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$, где

$$\mu_\delta(x) = \sup_{\xi \in (0, \delta|x|)} (\xi^{1-n} \text{cap}(\overline{B_\xi^x \setminus \Omega}, B_{2\xi}^x))^{1/p},$$

$a < h$, $0 < \delta < \min\left\{1 - \frac{1}{h}, 1 - \sigma^{\frac{1}{2}}\right\}$ и $\frac{1}{\sigma} \leq \sigma_4 < \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 \leq 1$ – некоторые вещественные числа. При этом постоянные $\gamma > 0$ и $k > 0$ теперь будут зависеть только от $a, h, n, p, \delta, \varepsilon, \sigma, \nu, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$.

З а м е ч а н и е 3. Если дополнительно потребовать, чтобы

$$r^{p-n} \text{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r\sigma_2} \setminus \Omega}, B_{r\sigma_4, r\sigma_1}) \geq \kappa \quad (14)$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$, где $\kappa > 0$ – вещественное число, то неравенство (13) будет справедливо для некоторой функции Λ , пропорциональной $(\text{diam}_\varepsilon \Omega_{r/h^2, rh^2})^{-p}$.

В самом деле, можно показать, что соотношение (14) влечет оценку

$$\inf_{\Omega_{r/h, rh}} \mu_\delta^p + r^{-n} \text{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r\sigma_2} \setminus \Omega}, B_{r\sigma_4, r\sigma_1}) \geq C(\text{diam}_\varepsilon \Omega_{r/h^2, rh^2})^{-p}$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$, где постоянная $C > 0$ зависит только от $h, n, p, \delta, \varepsilon, \kappa$.

При $R_0 \rightarrow +0$ из теоремы 3 можно также получить емкостные оценки решения в окрестности граничной точки $0 \in \partial\Omega$, аналогичные [1, 6, 7].

Теорема 4. Пусть в предположениях теоремы 1 вместо (4) и (5) справедливы условия (12) и (13). Тогда для любого вещественного числа $a > p - 2$ найдутся постоянные $\gamma > 0$ и $k > 0$, зависящие только от $a, h, n, p, \delta, \varepsilon, \sigma, \nu, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$, такие, что для всех $r \in (R_0, R_1)$ имеет место неравенство (11).

Далее будем рассматривать неравенства

$$\text{div}A(x, Du) + b(x)|Du|^{p-1} \geq F(x, u) \quad \text{в} \quad \Omega_{R_0, R_1} \quad (15)$$

Функция u называется решением (15), если $u \in W_p^1(\Omega_{R_0, r}) \cap L_\infty(\Omega_{R_0, r})$, $A(x, Du) \in L_{p/(p-1)}(\Omega_{R_0, r})$ и $F(x, u) \in L_{p/(p-1)}(\Omega_{R_0, r})$ для любого $r \in (R_0, R_1)$ и при этом

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_{R_0, R_1}} A(x, Du) D\varphi dx + \int_{\Omega_{R_0, R_1}} b(x)|Du|^{p-1} \varphi dx \geq \\ & \geq \int_{\Omega_{R_0, R_1}} F(x, u) \varphi dx \end{aligned}$$

для всех неотрицательных $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{R_0, R_1})$.

Объединяя теоремы 1–4 с результатами работы [3], приходим к следующим утверждениям.

Теорема 5. Пусть Λ и q – неотрицательные измеримые функции, удовлетворяющие условиям (4)–(6), $a f: [R_0, R_1] \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ и $l: [R_0, R_1] \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – локально ограниченные измеримые функции такие, что

$$f(r, t - 0) = f(r, t) \quad (16)$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$, $t > 0$,

$$f(r, t_1) \geq f(r, t_2) \quad (17)$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$, $t_1 \geq t_2 > 0$,

$$f(r, t) \leq \text{ess inf}_{x \in \Omega_{r/\theta, \theta r}} F(x, t) \quad (18)$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$, $t > 0$, и

$$l(r) \geq \text{ess sup}_{\Omega_{r/\theta, \theta r}} b \quad (19)$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$, где $\theta > 1$ – некоторое вещественное число.

Предположим также, что u – неотрицательное решение (15), (2), причем $M(\cdot; u)$ – неубывающая функция на интервале (R_0, R_1) и выполнено условие (7).

Тогда для любых вещественных чисел $a > p - 2$ и $\alpha > 0$ найдутся постоянные $\beta > 0$, $\gamma > 0$ и $k > 0$, зависящие только от $a, n, p, \alpha, \varepsilon, \zeta, \theta, \sigma, \nu, C_1, C_2$, такие, что на промежутке $[R_0, R_1)$ существует решение уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^{1+a}} \frac{d}{dr} \left(r^{1+a} \left| \frac{dm}{dr} \right|^{p-2} \frac{dm}{dr} \right) + \alpha l(r) \left| \frac{dm}{dr} \right|^{p-2} \frac{dm}{dr} = \\ & = \gamma(f(r, \beta m) + e^{-kq(r)} \Lambda(r) m_1^{p-2} m), \end{aligned}$$

удовлетворяющее условию (9) и оценке (10).

Пример 1. Пусть u – решение задачи

$$Lu \geq F(x, u) \quad \text{в} \quad B_{R_1} \cap \Omega, \quad u|_{B_{R_1} \cap \partial\Omega} = 0,$$

для которого справедливо соотношение (7), где

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

есть равномерно эллиптический оператор с измеримыми коэффициентами. Согласно принципу максимума, $M(\cdot; u)$ должна быть неубывающей функцией на интервале (R_0, R_1) . Полагая

$$b(x) = \left(\sum_{i=1}^n b_i^2(x) \right)^{\frac{1}{2}},$$

очевидно, получим, что u является решением неравенства

$$\operatorname{div} A(x, Du) + b(x)|Du| \geq F(x, u) \quad \text{в} \quad B_{R_1} \cap \Omega,$$

где $A(x, Du) = (A_1(x, Du), \dots, A_n(x, Du))$,

$$A_i(x, Du) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, для любых функций Λ , q , f и l , удовлетворяющих условиям (4)–(6), (16)–(19), и вещественных чисел $a > 0$ и $\alpha > 0$ найдутся постоянные $\beta > 0$, $\gamma > 0$ и $k > 0$, зависящие только от a , n , α , ε , ζ , θ , σ , ν и от постоянных эллиптичности оператора L , такие, что на промежутке $[R_0, R_1]$ существует решение уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 m}{dr^2} + \left(\frac{1+a}{r} + \alpha l(r) \right) \frac{dm}{dr} = \\ = \gamma \left(f(r, \beta m) + e^{-kq(r)} \Lambda(r) m \right), \end{aligned} \quad (20)$$

удовлетворяющее условию (9) и оценке (10).

В случае $n > 2$, полагая $a = n - 2$ и $\alpha = 1$, мы, очевидно, получим радиальную компоненту оператора $\Delta + l(|x|)D|x|D$ в левой части (20).

Теорема 6. В предположениях теоремы 5 для любых вещественных чисел $a > p - 2$ и $\alpha > 0$ найдутся постоянные $\beta > 0$, $\gamma > 0$ и $k > 0$, зависящие только от a , n , p , α , ε , ζ , θ , σ , ν , C_1 , C_2 , такие, что

$$\begin{aligned} M(r; u) - M(R_0 + 0; u) \geq \\ \geq \int_{R_0}^r \int dt \left(\frac{\gamma}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} e^{-\alpha \int_{\xi}^t l(s) ds} (f(\xi, \beta M(\xi; u)) + \right. \\ \left. + e^{-kq(r)} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u)) d\xi \right)^{\frac{1}{p-1}} \end{aligned} \quad (21)$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$.

Теорема 7. Теорема 5 остается в силе, если функция Λ вместо (4) и (5) удовлетворяет условиям (12) и (13). При этом постоянные $\beta > 0$, $\gamma > 0$ и $k > 0$ теперь будут зависеть только от a , h , n , p , α , δ , ε , θ , σ , ν , σ_1 , σ_2 , σ_3 , σ_4 , C_1 , C_2 .

Теорема 8. Пусть в предположениях теоремы 5 функция Λ вместо (4) и (5) удовлетворяет условиям (12) и (13). Тогда для любых вещественных чисел $a > p - 2$ и $\alpha > 0$ найдутся постоянные $\beta > 0$, $\gamma > 0$ и $k > 0$, зависящие только от a , h , n , p , α , δ , ε , θ , σ , ν , σ_1 , σ_2 , σ_3 , σ_4 , C_1 , C_2 , такие, что для всех $r \in (R_0, R_1)$ имеет место неравенство (21).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке РФФ, грант 20-11-20272.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gariery R., Ziemer W.* A regularity condition at the boundary for solutions of quasilinear elliptic equations // Arch. Rat. Mech. Anal. 1977. V. 67. P. 25–39.
2. *Коньков А.А.* О теоремах сравнения для квазилинейных эллиптических неравенств, учитывающих геометрию области // Изв. РАН. Сер. Матем. 2014. Т. 78. 4. С. 123–174.
3. *Kon'kov A.A.* On comparison theorems for elliptic inequalities // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 388. P. 102–124.
4. *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
5. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л.Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
6. *Мазья В.Г.* О непрерывности в граничной точке решений квазилинейных эллиптических уравнений // Вестник ЛГУ. 1970. 13. Вып. 3. С. 42–55.
7. *Мазья В.Г.* О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в дивергентной форме // Матем. заметки. 1967. Т. 2. Вып. 2. С. 209–220.

**COMPARISON THEOREMS FOR ELLIPTIC INEQUALITIES
WITH LOWER-ORDER DERIVATIVES
THAT TAKE INTO ACCOUNT THE GEOMETRY OF THE DOMAIN**

A. A. Kon'kov^a

^aLomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

We obtain comparison theorems that make it possible to estimate the spherical maximum of solutions of quasilinear elliptic inequalities containing lower-order derivatives in terms of solutions of the Cauchy problem for an ordinary differential equation the right-hand side of which depends on the geometry of the domain.

Keywords: non-linear elliptic operators, unbounded domains, capacity

УДК 519.63

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 3D-ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ВБЛИЗИ ТРЕЩИНЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ ШОНБЕРГА

© 2021 г. Член-корреспондент РАН И. Б. Петров^{1,2,*}, П. В. Стогний^{1,**}, Н. И. Хохлов^{1,2}

Поступило 18.06.2021 г.
После доработки 18.06.2021 г.
Принято к публикации 08.08.2021 г.

Трещиноватые среды являются важным объектом для исследования, так как в них скапливается нефть, практический интерес представляют трещины гидроразрыва пласта. Исследование таких неоднородностей с помощью методов математического моделирования позволяет рассмотреть различные постановки задач с трещинами различной формы, размеров и другими характеристиками. Модель трещины Шонберга позволяет учесть характеристики флюида внутри трещины, что является крайне важным при проведении геологоразведочных работ. В работе разработан алгоритм расчета параметров среды на границе трещины, заданной моделью Шонберга, с использованием сеточно-характеристического метода. Приводятся результаты применения разработанного алгоритма к решению задачи сейсмического мониторинга трещины гидроразрыва пласта, где наполняющий трещину флюид является необходимой частью для наблюдения.

Ключевые слова: модели трещин, сейсморазведка, сеточно-характеристический метод, гидроразрыв пласта

DOI: 10.31857/S2686954321050076

ВВЕДЕНИЕ

Трещиноватые среды – важная часть геологических структур для исследования. Трещины являются зонами скопления нефти и газа, что представляет особый интерес для геологического сообщества [1, 2]. Однако трещины различаются по форме, размеру, характеристикам содержащегося внутри флюида и другим параметрам, поэтому достаточно сложно разработать одну универсальную модель для описания всех типов трещин [3].

Одной из наиболее распространенных моделей трещин является модель бесконечно тонкой трещины (БТТ) [4]. Такая модель подходит для описания трещин, заполненных газом, что равнозначно использованию контактного условия свободной границы на границах трещины. С точ-

ки зрения построения расчетной области с такими трещинами, модель БТТ не требует дополнительных преобразований расчетной сетки, что является большим преимуществом данной модели. Однако модель БТТ не способна корректно описывать трещины, заполненные различным типом флюида (с различными параметрами плотности, скоростью распространения звука), что ограничивает область прикладных задач для решения. Для учета характеристик флюида внутри трещины существует модель трещины Шонберга [5], в которой трещина определяется через так называемые параметры раскрытости трещины.

В данной работе был разработан подход к моделированию трещиноватых геологических сред для двумерных и трехмерных постановок задач сеточно-характеристическим методом [6] с использованием модели трещины Шонберга. Проведено моделирование распространения сейсмических волн от точечного источника в геологической среде с трещиной с нулевыми параметрами раскрытости, в результате которого волна должна полностью отражаться от трещины, что и достигнуто с применением разработанного алгоритма. Было проведено моделирование для задачи сейсмического мониторинга трещины гидроразрыва пласта с использованием разработанного алго-

¹Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

²Федеральный научный центр “Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук”, Москва, Россия

*E-mail: petrov@mipt.ru

**E-mail: stognii@phystech.edu

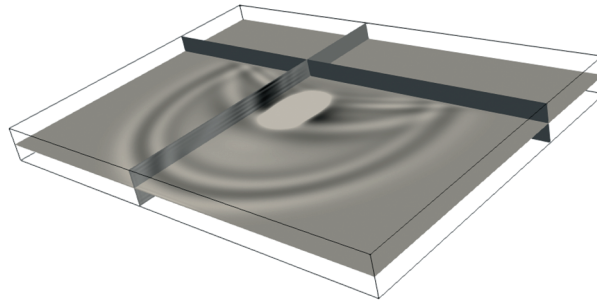


Рис. 1. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{xx} для модели трещины Шонберга с нулевыми параметрами раскрытости для $t = 1$ с.

ритма трещины Шонберга и трещины БГТ, которые продемонстрировали качественное совпадение результатов, но расхождение в количественном соотношении.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для моделирования геологической среды, в работе использовалась система уравнений для описания поведения сейсмических волн в линейно-упругих средах [7]:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} u = (\nabla \cdot \sigma)^T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma = \lambda(\nabla \cdot u)I + \mu((\nabla \times u) + (\nabla \times u)^T), \quad (2)$$

где u – скорость распространения сейсмических волн, ρ – плотность среды, σ – тензор напряжений Коши, t – время, λ и μ – параметры Ляме, определяющие свойства упругого материала, I – единичный тензор.

Систему (1)–(2) можно привести к виду

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

где вектор \mathbf{q} состоит из шести компонент тензора напряжений и трех компонент скорости; матрицы A_x, A_y, A_z составлены из коэффициентов системы (1), (2).

После применения метода расщепления по пространственным координатам получаем три одномерные системы уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A_i \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial i} = 0, \quad i = x, y, z. \quad (4)$$

Рассмотрим систему (4), например, для координаты x :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Система (5) – гиперболическая, поэтому ее можно представить в виде

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \Omega_x \Lambda_x \Omega_x^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

где Ω_x – матрица из собственных векторов матрицы A_x , Λ_x – диагональная матрица с собственными значениями на диагонали. Собственные значения матриц A_x, A_y, A_z равны $\{-c_p, c_p, -c_s, c_s, -c_s, c_s, 0, 0, 0\}$, где c_p и c_s – продольная и поперечная скорости звука, соответственно, которые можно вычислить по формулам:

$$c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad c_s = \sqrt{\mu/\rho}. \quad (7)$$

После замены переменных $\omega = \Omega_x^{-1} \mathbf{q}$, система (6) принимает вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Система уравнений (8) решалась с помощью сеточно-характеристического метода на основе схемы Лакса–Вендроффа [8, 9]:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c \cdot t}{2h} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{c^2 \cdot t^2}{2h^2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n). \quad (9)$$

На границе трещины дополнительно были введены условия, описывающие модель трещины Шонберга:

$$\sigma'_{xx} = \sigma^r_{xx}, \quad (10)$$

$$\sigma'_{xy} = \sigma^r_{xy}, \quad (11)$$

$$\sigma'_{xz} = \sigma^r_{xz}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = K_N \cdot (u^r_x - u^l_x), \quad (13)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = K_T \cdot (u^r_y - u^l_y), \quad (14)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = K_T \cdot (u^r_z - u^l_z). \quad (15)$$

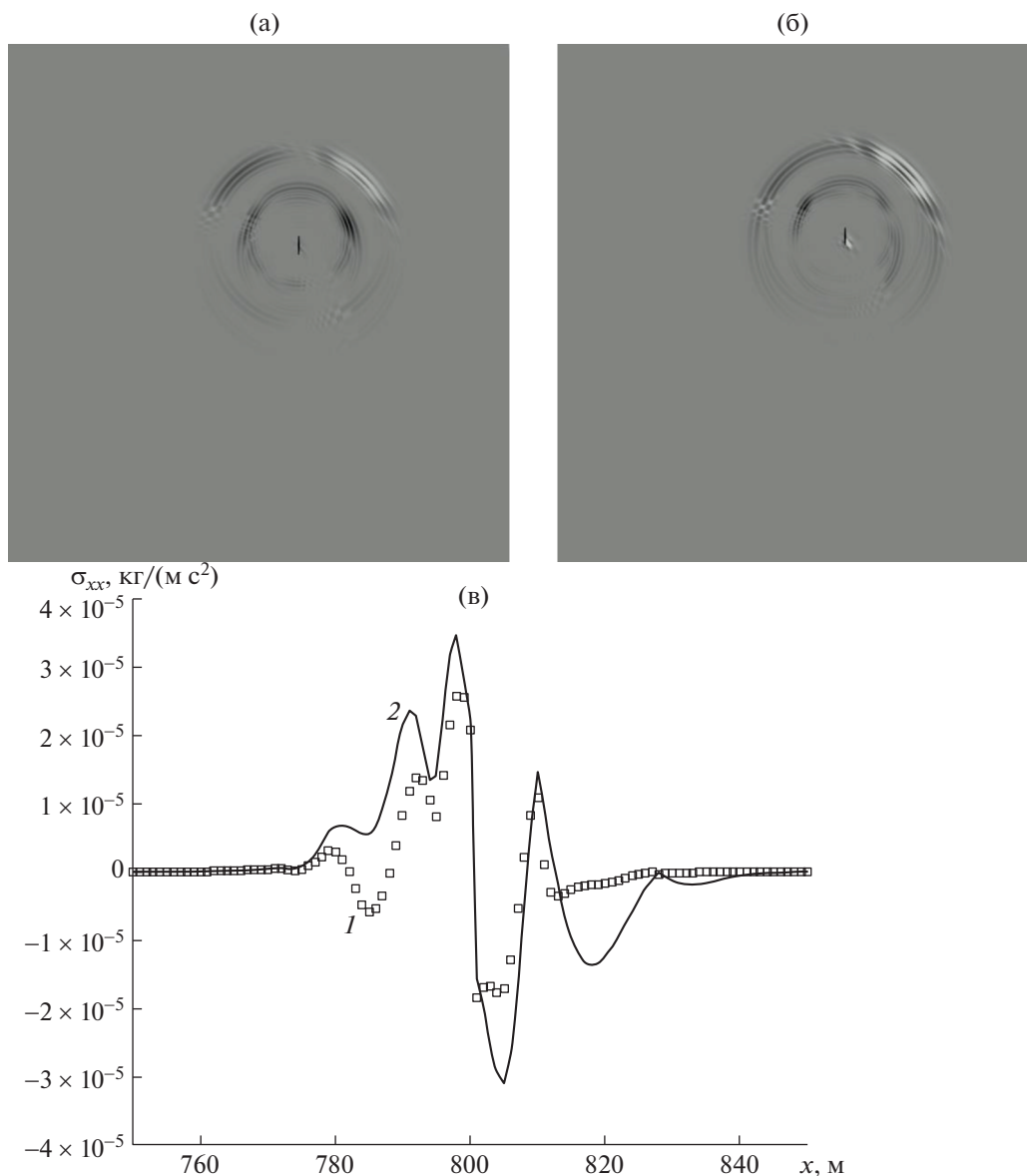


Рис. 2. Распределение тензора напряжений для модели трещины БТТ (1) и модели трещины Шонберга: (2) а – трещина БТТ, б – трещина Шонберга, в – значения компоненты тензора напряжений σ_{xx} , кг/(м с²) для $t = 0.065$ с.

Условия (10)–(12) обозначают равенство нормальных компонент тензора напряжений на границе трещины, условия (13)–(15) – способ вычисления данных компонент. Индексы l и r означают смежные ячейки слева и справа от трещины соответственно. Параметры K_T , K_N – так называемые параметры раскрытости трещины, характеризующие трещину. Их можно вычислить аналитически (с помощью параметров Ляме, плотности и ширины трещины) или с помощью лабораторных экспериментов [10].

Таким образом, после решения уравнений (13)–(15), неизвестными остаются значения трех компонент скорости (V_x , V_y , V_z) и трех компонент

тензора напряжений (σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{yz}). Для их нахождения на границе трещины совместно решалась система уравнений (8)–(12).

ОТРАЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ОТ ТРЕЩИНЫ С НУЛЕВЫМИ ПАРАМЕТРАМИ РАСКРЫТОСТИ

Для проверки разработанного алгоритма был проведен расчет отражения волны, исходящей от сферического источника, от трещины с нулевыми параметрами раскрытости, что соответствует случаю полного отражения волны от трещины. Трехмерная модель состояла из однородной среды с трещиной в плоскости YZ . Результирующий

отклик от трещины (волновое поле распределения компоненты тензора напряжений σ_{xx}) показан на рис. 1 после отражения от трещины, наблюдается полное отражение волны от трещины, что соответствует постановке задачи.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТКЛИКА ОТ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

Была решена прямая задача получения сейсмического отклика от трещины гидроразрыва пласта. Данная искусственно созданная трещина часто применяется в реальных сейсмических работах для увеличения притока флюида в скважину [11, 12]. Наблюдение за состоянием трещины осуществляется с помощью приемников сигнала, расположенных перед трещиной.

Параметры геологической среды с трещиной были следующими: плотность – 2500 кг/м³, продольная скорость звука – 5000 м/с, поперечная скорость звука – 3000 м/с. Трещина была расположена на расстоянии 300 м от источника, моделирующего подземные сейсмические колебания, возникающие в толще геологической среды). Высота трещины составляла 30 м, ширина – 30 см. Расчетная область составляла 1200 × 1200 м. Параметры флюида, наполняющего трещину, были следующими: плотность – 830 кг/м³, продольная скорость звука – 1290 м/с, поперечная скорость звука – 1290 м/с. В соответствии с данными характеристиками трещины [10], параметры K_N и K_T были равны 4.6×10^9 .

На рис. 2а и 2б представлены аномальные волновые отклики от трещины для модели трещины Шонберга и для модели трещины БТТ. Качественно результаты совпадают, однако количественно значения модуля скорости оказываются больше для откликов от трещины по модели LSM (рис. 2в), что существенно при наблюдении трещины и контроля наполняющего ее флюида.

ВЫВОДЫ

В работе представлен подход к моделированию трещиноватых геологических сред для двумерных и трехмерных постановок задач сеточно-характеристическим методом с использованием модели трещины Шонберга. Описан алгоритм расчета точек на границе трещины. Проведено моделирование распространения сейсмических волн от сферического источника в геологической среде с трещиной с нулевыми параметрами раскрытости. Результаты показали полное отражение волны от трещины, что соответствует постановке задачи. Также была решена задача сейсмического мониторинга для моделирования трещины гидроразрыва пласта с использованием разработанного алгоритма по модели трещины Шонбер-

га и модели трещины БТТ. Результаты продемонстрировали качественное совпадение, но расхождение в количественном соотношении.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00281.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhan Q., Sun Q., Ren Q. A discontinuous Galerkin method for simulating the effects of arbitrary discrete fractures on elastic wave propagation // *Geophys. J. Int.* 2017. V. 210. № 2. P. 1219–1230.
2. Petrov I. Problems of modeling natural and anthropogenic processes in the arctic zone of the Russian Federation // *Math. Models Comput. Simul.* 2019. V. 11. P. 226–246.
3. Petrov I.B., Muratov M.V. The application of grid-characteristic method in solution of fractured formations exploration seismology direct problems (review article) // *Matem. Mod.* 2019. V. 31. № 4. P. 33–56.
4. Stognii P., Khokhlov N., Zhdanov M. Novel approach to modelling the elastic waves in a cluster of subvertical fractures // 81st EAGE Conference and Exhibition 2019.
5. Schoenberg M. Elastic wave behavior across linear slip interfaces // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1980. V. 68. № 5. P. 1516–1521.
6. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988.
7. Новацкий В.К. Теория упругости. М., 1975.
8. Ivanov A.M., Khokhlov N.I. Parallel implementation of the grid-characteristic method in the case of explicit contact boundaries // *Comput. Res. Model.* 2018. V. 10. № 5. P. 667–678.
9. Голубев В.И., Петров И.Б., Хохлов Н.И. Компактные сеточно-характеристические схемы повышенного порядка точности для трехмерного линейного уравнения переноса // *Матем. Моделирование.* 2016. Т. 28. № 2. С. 123–132.
10. Santos J.E., Picotti S., Carcione J. Evaluation of the stiffness tensor of a fractured medium with harmonic experiments // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2012. V. 247–248. P. 130–145.
11. Esipov D.V., Kuranakov D.S., Lapin V.N., Cherny S.G. Mathematical models of hydraulic fracturing // *Comput. Technologies.* 2014. V. 19. № 2. P. 33–61.
12. Howarth R. Methane emissions and climatic warming risk from hydraulic fracturing and shale gas development: implications for policy // *Energy and Emission Control Technologies.* 2015. V. 3. P. 45–54.

MATHEMATICAL MODELING OF 3D DYNAMIC PROCESSES NEAR A FRACTURE USING THE FRACTURE MODEL OF SCHOENBERG

Corresponding Member of the RAS **I. B. Petrov^{a,b}, P. V. Stognii^a, and N. I. Khokhlov^{a,b}**

^a*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
Dolgoprudnyi, Moscow oblast, Russian Federation*

^b*Scientific Research Institute for System Analysis, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

The fractured media are very important objects for investigation because they accumulate oil, the hydraulic fracturing is of great practical interest. The exploration of such heterogeneities with the help of methods of mathematical modelling allows to examine different problem formulations with fractures of different forms, sizes and other characteristics. The fracture model of Schoenberg allows to take into account the characteristics of fluid inside the fracture, which is very important while conducting the seismic geological surveys. In this work, we developed the algorithm for computing the medium parameters on the border of a fracture, described by the model of Schoenberg, using the grid-characteristic method. We present the results of application of the developed algorithm to the solution of the problem of seismic monitoring of the hydraulic fracture, where the fracture filling fluid is a necessary part of investigation.

Keywords: fracture models, seismology, grid-characteristic method, hydraulic fracturing

УДК 511.6

О ПРОБЛЕМЕ ПЕРИОДИЧНОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ В НЕПРЕРЫВНУЮ ДРОБЬ ЭЛЕМЕНТОВ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ СО СТЕПЕНЬЮ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ S -ЕДИНИЦЫ НЕ ВЫШЕ 11

© 2021 г. Академик РАН В. П. Платонов^{1,2,*}, М. М. Петрушин^{1,**}, Ю. Н. Штейников^{1,***}

Поступило 26.08.2021 г.

После доработки 26.08.2021 г.

Принято к публикации 01.09.2021 г.

Решается проблема описания свободных от квадратов многочленов $f(x)$ с периодическим разложением $\sqrt{f(x)}$ в функциональную непрерывную дробь в $k((x))$, где k – числовое поле, при условии, что степень фундаментальной S -единицы соответствующего гиперэллиптического поля $k(x)(\sqrt{f(x)})$ не превосходит 11.

Ключевые слова: гиперэллиптическое поле, S -единицы, непрерывные дроби, периодичность, точки конечного порядка

DOI: 10.31857/S2686954321050088

ВВЕДЕНИЕ

Пусть поле k характеристики 0, и $f(x) \in k[x]$ – многочлен свободный от квадратов. В классическом случае функциональных непрерывных дробей в $k((1/x))$, первые результаты по которому были получены 200 лет назад Абелем и Чебышевым (см. [1–4]), важным элементом исследования свойств периодичности является элемент \sqrt{f} , где многочлен f определяет гиперэллиптическое поле $L = k(x)(\sqrt{f(x)})$. В отличие от классического случая, в случае непрерывных дробей в $k((x))$ наличие в поле L периодических элементов не гарантирует периодичности разложения элемента \sqrt{f} . В цикле работ по исследованию и нахождению элементов f с периодическим \sqrt{f} было показано, что периодичность \sqrt{f} – редкое явление, которое, впрочем, требует наличия нетривиальных S -единиц в соответствующем гиперэллиптическом поле L для множества нормирований S , индуцированного линейным многочленом x .

В работе [5] были найдены все такие многочлены f степени 3 с рациональными коэффициентами, рассматриваемые с точностью до естественной эквивалентности. В работах [6, 7] эти исследования были обобщены на числовые поля констант, и была полностью решена проблема периодичности \sqrt{f} для квадратичных и числовых полей степени 3 над \mathbb{Q} , а также была доказана теорема конечности для расширений \mathbb{Q} степени ≤ 6 . В работе [8] аналогичный результат был получен для случая многочленов f степени 4 над \mathbb{Q} , что завершило описание периодических \sqrt{f} в эллиптическом случае над полем рациональных чисел. Аргументы и подходы работ [5–8] существенно опирались на параметризацию пар: эллиптическая кривая и точка с заданным порядком кручения (см. [9, 10]).

В случае многочленов f степени 5 и выше подобные параметризации неизвестны, и описание периодических \sqrt{f} требует иных подходов. В работе [5] для гиперэллиптических полей, содержащих S -единицы малых степеней, с помощью метода, основанного на решении норменного уравнения, были получены рекуррентные соотношения на коэффициенты решения норменного уравнения. С помощью этих соотношений были найдены новые примеры $f \in \mathbb{Q}[x]$ с периодическим разложением \sqrt{f} для произвольной степени f , причем в случае $\deg f = 3$ построенные примеры исчерпывали множество таких f . Однако даже уже в случае, когда многочлен имеет степень 3, для полей,

¹ Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований
Российской академии наук, Москва, Россия

² Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: platonov@mi-ras.ru

**E-mail: petrushkin@yandex.ru

***E-mail: yuriisht@yandex.ru

содержащих фундаментальные S -единицы нечетной степени начиная с 9, указанный выше метод становится вычислительно сложным.

В работе [11] был предложен новый эффективный метод для решения норменного уравнения, основанный на применении базисов Грёбнера. В [11] над произвольным полем k была показана конечность многочленов нечетной степени, отличной от 11, таких, что элемент \sqrt{f} периодичен, а соответствующее гиперэллиптическое поле $k(x)(\sqrt{f})$ содержит S -единицу степени 11. Кроме того, было доказано, что в случае $k = \mathbb{Q}$ не существует многочленов нечетной степени отличной от 9 и 11 с указанными свойствами. В дальнейшем данный подход получил свое развитие в работе [14], где с помощью последовательных вычислений результатов и без использования параметризаций удалось получить альтернативное доказательство теоремы об описании кубических многочленов f над \mathbb{Q} с периодическим разложением \sqrt{f} в непрерывную дробь, а также были сделаны продвижения в обобщении полученных результатов на случай произвольных числовых полей.

В настоящей работе мы, развивая методы работы [11], решаем вышеописанную проблему для произвольной степени многочлена f , накладывая ограничение только лишь на степень фундаментальной S -единицы соответствующего гиперэллиптического поля. Отметим, что в [12] показано, что существование фундаментальной S -единицы является необходимым условием для наличия периодических элементов в поле L . В настоящей работе нами доказано, что если ограничить константой 11 степень соответствующей фундаментальной S -единицы, то для почти всех d не существует многочлена f степени d над произвольным числовым полем k с периодическим разложением \sqrt{f} в непрерывную дробь в $k((x))$. Более того, нами явно приведены все многочлены f с периодическим \sqrt{f} с указанным ограничением на степень соответствующей S -единицы. Оказывается, что с точностью до эквивалентности такой многочлен либо единственен для каждой пары d и фиксированной степени фундаментальной S -единицы соответствующего гиперэллиптического поля, либо это бесконечная серия $cx^d + 1$, $c \in k \setminus \{0\}$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для неприводимого над k многочлена h определим дискретное нормирование v_h (элемента поля $k(x)$) равенством $v_h\left(h^m \frac{p}{q}\right) = m$, где взаимно простые многочлены p, q не делятся на h ; бесконечное нормирование, в свою очередь, определим равенством

$$v_\infty\left(\frac{p}{q}\right) = \deg q - \deg p.$$

Далее считаем, что $\deg h = 1$, и без ограничения общности положим $h = x$. Пусть нормирование v_x поля $k(x)$ имеет два продолжения v_x^+ и v_x^- на поле $L = k(x)(\sqrt{f})$. Поскольку в случае $\deg f = 2g + 1$ для $g \in \mathbb{N}$ бесконечное нормирование имеет одно продолжение, положим $S = \{v_x^+, v_\infty\}$. Группа S -целых элементов поля L называется группой S -единиц. Если существует хотя бы одна нетривиальная S -единица (т.е. отличная от константы поля k), то в описанном нами случае группа S -единиц является прямым произведением k^\times и бесконечной циклической группы. Образующие этой циклической группы называются фундаментальными S -единицами. Для S -единицы $\alpha + \beta\sqrt{f}$, $\alpha, \beta \in k(x)$, выполнено $\alpha^2 - \beta^2 f = bx^m$, $b \in k \setminus \{0\}$, для некоторого целого m , называемого степенью S -единицы. Для фундаментальной S -единицы с положительной степенью m существует k -точка кручения порядка m в якобиане соответствующей гиперэллиптической кривой.

Будем говорить, что элементы поля L разлагаются в формальные степенные ряды $\sum_{j \geq s} \gamma_j x^j$, где $\gamma_j \in k$, если существует вложение L в поле формальных степенных рядов $k((x))$. Подробные сведения о разложении в ряд Лорана, функциональных непрерывных дробях и их связи с S -единицами содержатся в работе [3].

Под периодичностью разложения в непрерывную дробь мы понимаем периодичность последовательности полных частных. Периодичность разложения $\sqrt{f(x)}$ в непрерывную дробь равносильна периодичности $\sqrt{f^\sigma(x)}$, где $\sigma \in \text{Aut}(k/\mathbb{Q})$ — автоморфизм поля k постоянный на \mathbb{Q} , а также периодичности $\sqrt{a^2 f(bx)}$ для некоторых $a, b \in k \setminus \{0\}$. Поэтому мы будем рассматривать многочлены с точностью до эквивалентности, определяемой преобразованиями, указанными выше. Отношение эквивалентности зависит от поля k , и в зависимости от контекста мы будем рассматривать его или над $\overline{\mathbb{Q}}$, или над полем определения многочлена f . Мы будем называть полем определения многочлена f минимальное поле $k \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, содержащее все его коэффициенты.

Теорема 1. *Зафиксируем натуральное число $U \leq 11$. Для каждого нечетного d , $1 < d < U$, с точностью до эквивалентности существует не более одного бесквадратного многочлена $f \in \overline{\mathbb{Q}}[x]$, $\deg f = d$, для которого выполнены следующие условия:*

(i) разложение в непрерывную дробь в $\bar{\mathbb{Q}}((x))$ элемента \sqrt{f} периодично;

(ii) гиперэллиптическое поле $L = \bar{\mathbb{Q}}(x)(\sqrt{f})$ содержит фундаментальную S -единицу степени U для $S = \{v_\infty, v_x^+\}$.

Все такие многочлены приводятся ниже.

В случае $\deg f = U$ такой многочлен единственен и равен $x^U + 1$. Многочленов с $\deg f = 1$ или $\deg f > U$ нечетной степени, удовлетворяющих условиям (i) и (ii), не существует.

Отметим, что если условия (i) и (ii) выполнены над $\bar{\mathbb{Q}}$, то они выполнены и над полем определения многочлена f . А множество таких многочленов для $\deg f = U$ над любым полем k , $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, образует семейство $f = cx^U + 1$, $c \in k \setminus \{0\}$.

Перечислим все многочлены $f_{d,U}$, обладающие периодическим разложением $\sqrt{f_{d,U}}$ в непрерывную дробь, в условиях теоремы 2:

$$\begin{aligned} f_{3,5} &= 12x^3 - 8x^2 + 4x + 1, \\ f_{3,7} &= 6(9\sqrt{21} - 41)x^3 - 4(3\sqrt{21} - 13)x^2 + 4x + 1, \\ f_{3,8} &= 12x^3 - 5x^2 + 2x + 1, \\ f_{3,9} &= x^3 - (6z^2 + 6)x^2 + (249z^2 + 105z + 360)x + \\ &\quad + \frac{2397}{2}z^2 + \frac{2055}{4}z + \frac{3495}{2}, \\ f_{3,10} &= -120x^3 + 25x^2 + 2x + 1, \\ f_{3,11} &= x^3 + \frac{1}{11}(-24z^4 + 72z^3 - 70z^2 + 112z - 76)x^2 + \\ &\quad + \frac{1}{11}(2877z^4 - 9984z^3 + 13080z^2 - 23436z + 24318)x + \\ &\quad + \frac{1}{4}(10224z^4 - 35451z^3 + 46509z^2 - 83811z + 87129), \\ f_{5,7} &= \frac{125}{256}x^5 - \frac{25}{32}x^4 + \frac{15}{16}x^3 - x^2 + x + 1, \\ f_{5,9} &= \left(-\frac{15401}{400}z^2 + \frac{592891}{6400}z + \frac{5225741}{6400}\right)x^5 + \\ &\quad + \left(\frac{4221}{400}z^2 - \frac{20517}{800}z - \frac{88921}{400}\right)x^4 + \\ &\quad + \left(\frac{57}{16}z^2 - \frac{33}{4}z - \frac{1237}{16}\right)x^3 + \\ &\quad + \left(-\frac{19}{10}z^2 + \frac{22}{5}z + \frac{409}{10}\right)x^2 + x + 1, \\ f_{7,9} &= \frac{16807}{4096}x^7 - \frac{2401}{512}x^6 + \frac{1029}{256}x^5 - \\ &\quad - \frac{49}{16}x^4 + \frac{35}{16}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{9,11} &= \frac{4782969}{65536}x^9 - \frac{531441}{8192}x^8 + \frac{177147}{4096}x^7 - \\ &\quad - \frac{6561}{256}x^6 + \frac{3645}{256}x^5 - \frac{243}{32}x^4 + \frac{63}{16}x^3 - 2x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Выше z обозначает порождающий соответствующее числовое поле элемент из табл. 1. В силу громоздкости коэффициентов многочленов $f_{5,11}$, $f_{7,11}$, мы не приводим их в настоящей статье, и намерены их опубликовать в планируемой полной версии изложения.

ПЕРИОДИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ

Далее мы приводим результаты о существовании фундаментальных S -единиц и критерии периодичности \sqrt{f} из статей [13, 12].

Предложение 1. Пусть многочлен f свободен от квадратов, $\deg f = 2g + 1$, а степень фундаментальной S -единицы равна n . Тогда для подходящих $\mu_1, \mu_2, d_1, d_2 \in k[x] \setminus \{0\}$, $b \in k \setminus \{0\}$, $f = d_1 d_2$, выполнено соотношение $\mu_1^2 d_1 - \mu_2^2 d_2 = bx^m$, где если n — четно, то $n = 2m$, а в противном случае $n = m$, $d_1 \in k$. Более того, указанный n является минимально возможным, при котором выполняется это соотношение.

Уравнение из предложения 1 будем называть обобщенным норменным уравнением, а если $d_2 = f$, то просто норменным.

Теорема 2. Пусть многочлен f свободен от квадратов, а $\deg f = 2g + 1$. Элемент \sqrt{f} периодичен тогда и только тогда, когда некоторого $m \in \mathbb{N}$, существует решение $\mu_1, \mu_2, d_1, d_2 \in k[x]$, $b \in k \setminus \{0\}$, $f = d_1 d_2$, уравнения

$$\mu_1^2 d_1 - \mu_2^2 d_2 = bx^m, \tag{1}$$

и решение для наименьшего такого m удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \deg \mu_2 &= \frac{m - \deg d_2}{2}, \\ \deg \mu_1 &\leq \frac{m + \deg d_2}{2} - (2g + 1). \end{aligned}$$

Вообще говоря, теорема 2 дает критерий квазипериодичности \sqrt{f} , но в работе [12] было доказано, что квазипериодичность \sqrt{f} равносильна периодичности.

НЕТРИВИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Зафиксируем m , $\deg f$ и $\deg d_1$, тогда степени всех многочленов определяются из теоремы 2. Определим коэффициенты a_i, b_i, h_j, f_l из следующих равенств:

Таблица 1.

| $D = \deg f$ | Степень S -единицы U | Поле k | Многочлен $F_{d,U}(t)$ |
|--------------|--------------------------|----------------------------------|---|
| 3 | 5 | \mathbb{Q} | — |
| 3 | 7 | $\mathbb{Q}(\sqrt{21})$ | $t^2 - 21$ |
| 3 | 8 | \mathbb{Q} | — |
| 3 | 9 | $\mathbb{Q}(z), F_{3,9}(z) = 0$ | $t^3 - t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{12}$ |
| 3 | 10 | \mathbb{Q} | — |
| 3 | 11 | $\mathbb{Q}(z), F_{3,11}(z) = 0$ | $t^5 - t^4 - 4t^3 + 3t^2 - \frac{35}{3}t + 21$ |
| 5 | 7 | \mathbb{Q} | — |
| 5 | 9 | $\mathbb{Q}(z), F_{5,9}(z) = 0$ | $t^3 - 27t - 51$ |
| 5 | 11 | $\mathbb{Q}(z), F_{5,11}(z) = 0$ | $t^7 - t^6 - 53t^5 - 133t^4 + 195t^3 + 1000t^2 + 1165t + 955$ |
| 7 | 9 | \mathbb{Q} | — |
| 7 | 11 | $\mathbb{Q}(z), F_{7,11}(z) = 0$ | $t^4 - 2t^3 - 81t^2 - 303t - 321$ |
| 9 | 11 | \mathbb{Q} | — |

Примечание. Для указанных d и U приведены $F_{d,U}$, поле k и $f_{d,U}$, где $F_{d,U}(t) \in \mathbb{Q}[t]$ неприводимый над \mathbb{Q} многочлен, задающий поле алгебраических чисел $k = \mathbb{Q}[t]/(F_{d,U})$, которое является полем определения многочлена $f_{d,U}$ с периодическим разложением $\sqrt{f_{d,U}}$ в непрерывную дробь.

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \sum_i a_i x^i; & \mu_2 &= \sum_i b_i x^i; \\ d_1 &= \sum_j h_j x^j; & d_2 &= \sum_l f_l x^l. \end{aligned} \tag{2}$$

Определение 1. Пусть заданы $g, m \in \mathbb{N}$. Будем называть набор $(\mu_1, \mu_2, d_1, d_2, b)$, где $b \in k \setminus \{0\}$, $\mu_1, \mu_2, d_1, d_2 \in k[x]$, $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$, $a_0 \neq 0$, $\deg d_1 + \deg d_2 = 2g + 1$, а произведение $f = d_1 d_2$ свободно от квадратов, нетривиальным решением обобщенного норменного уравнения над k , если выполнено соотношение (1).

Мы будем писать нетривиальное решение норменного уравнения, если $d_1 = 1$. Мы будем писать просто нетривиальное решение, если из контекста ясно, что речь идет о нетривиальном решении норменного или обобщенного норменного уравнения.

Введем отношение эквивалентности на нетривиальных решениях, продолжающее и сохраняющее отношение эквивалентности на многочленах f из [11].

Определение 2. Будем называть преобразованием нетривиального решения обобщенного норменного уравнения над полем k допустимым преобразованием, если для

некоторого $\gamma \in k \setminus \{0\}$ оно переводит набор $\Omega = (\mu_1, \mu_2, d_1, d_2, b)$ в один из следующих наборов:

- $\Gamma_{1,\gamma}(\Omega) = (\mu_1(\gamma x), \mu_2(\gamma x), d_1(\gamma x), d_2(\gamma x), \gamma^m b)$,
- $\Gamma_{2,\gamma}(\Omega) = (\gamma \mu_1, \gamma \mu_2, d_1, d_2, \gamma^2 b)$,
- $\Gamma_{3,\gamma}(\Omega) = (\gamma \mu_1, \mu_2, d_1, \gamma^2 d_2, \gamma^2 b)$,
- $\Gamma_{4,\gamma}(\Omega) = (\mu_1, \mu_2, \gamma d_1, \gamma d_2, \gamma b)$,

или преобразование, полученные путем последовательного применения вышеперечисленных преобразований. Мы определили группу $\Gamma_k = \Gamma_{1,\gamma}(\Omega) \Gamma_{2,\gamma}(\Omega) \Gamma_{3,\gamma}(\Omega) \Gamma_{4,\gamma}(\Omega)$. Будем называть нетривиальные решения эквивалентными над k , если существует допустимое преобразование над k переводящее одно в другое.

Определение 3. Нетривиальное решение норменного уравнения (1) является также решением полиномиальной системы с переменными a_i, b_i, h_j, f_l . Назовем такую систему системой обобщенного норменного уравнения.

Предложение 2. Пусть заданы $m > 0$, $\deg f = 2g + 1$ и $\deg d_2$. Тогда решение системы обобщенного норменного уравнения соответствует периодическому \sqrt{f} тогда и только тогда, ко-

гда $m \bmod 2 = \deg d_2 \bmod 2$ и $h_0, f_0, b_0, a_0, b_{(m-\deg d_2)/2}, h_{\deg d_1}, f_{\deg f - \deg d_1} \in k \setminus \{0\}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что если обнуляется свободный коэффициент любого из многочленов d_1, d_2, μ_1, μ_2 , то нетривиальное решение (1) не является решением с минимальным m . Оставшиеся требования напрямую следуют из теоремы 2.

Для многочлена h через $\text{lc}(h)$ обозначим старший ненулевой коэффициент. Напомним лемму, доказанную ранее в статье [14].

Лемма 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$ — наименьшее такое число, что существует нетривиальное решение обобщенного норменного уравнения над k , тогда для данного m :

- 1) существует нетривиальное решение над k с $h_0 = f_0 = 1 = \text{lc}(\mu_1)$ и $f_1 = 0$ или $f_1 = 1$;
- 2) существует нетривиальное решение над k с $h_0 = f_0 = 1 = \text{lc}(\mu_2)$ и $f_1 = 0$ или $f_1 = 1$;
- 3) при условии $b_i, b_j, f_j, h_i \in k \setminus \{0\}$ существует нетривиальное решение над \bar{k} с $b_i = b_j = f_j = h_i = 1$.

Лемма 2. Пусть λ — один из коэффициентов μ_1, μ_2, d_1, d_2 , не совпадающий с $f_{\deg d_2}, b_{(m-\deg d_2)/2}, b_0$, и пусть не существует нетривиального решения над \bar{k} с условиями $f_{\deg d_2} = b_{(m-\deg d_2)/2} = b_0 = 1, \lambda = 0$, тогда над полем k не существует нетривиальных решений с условием $\lambda = 0$.

Доказательство. Пусть нетривиальное решение с $\lambda = 0$ существует. Тогда в силу того, что группа $\Gamma_{\bar{k}}$ сохраняет нулевые коэффициенты, и того, что по предложению 2 получаем $f_{\deg d_2} \neq 0, b_{(m-\deg d_2)/2} \neq 0, b_0 \neq 0$, по лемме 1 с помощью преобразования группы $\Gamma_{\bar{k}}$ можно получить нетривиальное решение над \bar{k} с условиями $f_{\deg d_2} = b_{(m-\deg d_2)/2} = b_0 = 1, \lambda = 0$. Противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Доказательство. Рассмотрим критерий периодичности \sqrt{f} из теоремы 2, в частности, рассмотрим неравенства на $m, \deg f$ и $\deg d_2, \deg d_1 = \deg f - \deg d_2$. Легко видеть, что для решения (1) с наименьшим m выполнено одно из двух: или $\deg d_1 = 0$ и m — нечетное число, или $\deg d_1 > 0$ и $\deg d_2 > 0$. Первый случай соответствует фундаментальной S -единице нечетной степени $U = m$, а второй — фундаментальной S -единице степени $U = 2m$. Из критерия также нетрудно вывести, что для $m = \deg f$ периодичность \sqrt{f} возможна лишь в случае S -единицы нечетной степени $U = m$ и

$f = cx^m + 1$. По теореме 2 случаи $m < 2\deg f - \deg d_2$ или $m < \deg d_2$ не дают периодического \sqrt{f} . Откуда видно, что нам заведомо не подходят случаи $\deg d_2 = \deg f > m$, а также случаи $m < \deg f$. Следовательно, нам достаточно рассмотреть случаи $\deg f = 3, 5, 7, 9$. Причем выполнено $\deg f < m \leq 5$ и $U = 2m$ или $\deg f < m \leq 11$ и $U = m, m = 2l + 1, l \in \mathbb{N}$. Откуда, в случае фундаментальной S -единицы четной степени нам достаточно рассмотреть только случай $\deg f = 3$, который для произвольной четности U был рассмотрен в работе [7]. Случай $m = \deg f + 2, U = m$ разобран для произвольной степени f в [5]. Таким образом, чтобы завершить доказательство теоремы 1, нам остается рассмотреть три случая: $U = m = 9, \deg f = 5$ и $U = m = 11, \deg f = 5, 7$.

Доказательство каждого из этих случаев состоит из несколько частей. Сначала мы доказываем, что при вырожденных условиях на коэффициенты многочленов уравнения (1) нет искомым многочленов. Далее мы рассматриваем только невырожденные случаи, что позволяет провести преобразования системы из введенной нами группы преобразований, которые облегчают вычислительную процедуру. Наконец, мы строим базис Грёбнера преобразованной системы, и проводим вычисление всех требуемых нам решений.

По теореме 2 и лемме 1 во всех интересующих нас случаях можно считать, что $d_2 = f, d_1 = h_0 = 1$. Чтобы провести вышеуказанные преобразования, нам необходимо убедиться, что не существует решений системы (1) с $f_1 = 0$, где f_1 и другие коэффициенты определяются из (2). По предложению 2 мы можем положить $f_{\deg d_2} = b_{(m-\deg d_2)/2} = b_0 = 1$. Подставим их в систему норменного уравнения, а также подставим $f_1 = 0$. Базис Грёбнера системы норменного уравнения с подставленными параметрам состоит из единицы, а значит решений с $f_{\deg d_2} = b_{(m-\deg d_2)/2} = b_0 = 1, f_1 = 0$ не существует, что по лемме 2 позволяет считать $f_1 \neq 0$.

Дальнейшую процедуру подробно опишем только для случая $\deg f = 5$ и степени соответствующей S -единицы равной 9. Остальные случаи рассматриваются по аналогичной схеме, и полное их изложение выходит за рамки объема настоящей статьи.

По теореме 2 в этом случае периодичность \sqrt{f} влечет $\deg(\mu_1) \leq \deg(\mu_2) = 2$. Воспользуемся тем, что $f_1 \neq 0$ и леммой 1, и подставим в систему норменного уравнения $b_2 = 1, f_0 = 1, f_1 = 1$. В результа-

те подстановки получим систему из 9 уравнений и 9 неизвестных:

$$\begin{aligned} -a_0^2 + b_0^2 &= 0, \\ -2a_0a_1 + b_0^2 + 2b_0b_1 &= 0, \\ b_0^2f_2 - a_1^2 - 2a_0a_2 + 2b_0b_1 + b_1^2 + 2b_0 &= 0, \\ 2b_0b_1f_2 + b_0^2f_3 - 2a_1a_2 + b_1^2 + 2b_0 + 2b_1 &= 0, \\ b_1^2f_2 + 2b_0b_1f_3 + b_0^2f_4 - a_2^2 + 2b_0f_2 + 2b_1 + 1 &= 0, \\ b_1^2f_3 + 2b_0b_1f_4 + b_0^2f_5 + 2b_1f_2 + 2b_0f_3 + 1 &= 0, \\ b_1^2f_4 + 2b_0b_1f_5 + 2b_1f_3 + 2b_0f_4 + f_2 &= 0, \\ b_1^2f_5 + 2b_1f_4 + 2b_0f_5 + f_3 &= 0, \\ 2b_1f_5 + f_4 &= 0. \end{aligned}$$

Мы можем упростить систему, выразив явно переменные и подставив в систему их выражения:

$$\begin{aligned} a_0 &= -b_0, \\ a_1 &= -\frac{1}{2}b_0 - b_1, \\ a_2 &= -\frac{1}{2}b_0f_2 + \frac{1}{8}b_0 - \frac{1}{2}b_1 - 1, \\ f_4 &= -2b_1f_5, \\ f_3 &= (3b_1^2 - 2b_0)f_5, \\ f_2 &= -2(2b_1^3 - 3b_0b_1)f_5. \end{aligned}$$

В силу того, что $b_0 \neq 0$, сократим множитель b_0 в уравнении $\frac{1}{8}(16b_0b_1^3f_5 - 32b_1^4f_5 - 24b_0^2b_1f_5 + 72b_0b_1^2f_5 - 16b_0^2f_5 + b_0 - 2b_1 + 8)b_0 = 0$. После преобразования получается система из трех уравнений от переменных f_5, b_1, b_0 :

$$\begin{aligned} 2b_0b_1^3f_5 - 4b_1^4f_5 - 3b_0^2b_1f_5 + 9b_0b_1^2f_5 - \\ - 2b_0^2f_5 + \frac{1}{8}b_0 - \frac{1}{4}b_1 + 1 &= 0, \\ -(2b_1^3 - 2b_0b_1)^2b_0^2f_5^2 - \frac{1}{4}(2b_1^3 - 3b_0b_1)b_0^2f_5 + \\ + (2b_1^3 - 3b_0b_1)b_0b_1f_5 + 2(3b_1^2 - 2b_0)b_0b_1f_5 - \\ - 2b_0^2b_1f_5 - 2(2b_1^3 - 3b_0b_1)b_1^2f_5 - 2(2b_1^3 - 3b_0b_1)b_0f_5 - \\ - \frac{1}{64}b_0^2 + \frac{1}{8}b_0b_1 - \frac{1}{4}b_1^2 + \frac{1}{4}b_0 + b_1 &= 0, \\ (2b_1^2 - 2b_0)b_1^2f_5 - 4b_0b_1^2f_5 + 2(3b_1^2 - 2b_0)b_0f_5 + \\ + b_0^2f_5 - 4(2b_1^3 - 3b_0b_1)b_1f_5 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Условия, приведенные выше, задают идеал, базис Грёбнера которого состоит из трех многочленов:

$$\begin{aligned} -1717986918400f_5 + 326637322633083916475b_0^7 - \\ - 678886113588907584640b_0^6 + \\ + 290630257938398815744b_0^5 + \\ + 320000000000b_0^4 - 1392640000000b_0^3 + \\ + 1073152000000b_0^2 - 419430400000b_0 + \\ + 838860800000, \\ 335544320b_1 + 137055178600025b_0^7 - \\ - 284859639128960b_0^6 + \\ + 121950976802816b_0^5 - 51200000b_0^4 + \\ + 196608000b_0^3 + 104857600b_0^2 - \\ - 587202560b_0 - 268435456, \\ b_0^5 \cdot (60025b_0^3 - 129360b_0^2 + 62976b_0 - 4096). \end{aligned}$$

Опишем последний этап для всех случаев в виде некоторого алгоритма.

1. Берем последний многочлен P в найденном базисе Грёбнера для соответствующего лексикографического порядка. Он является многочленом над \mathbb{Q} от одной переменной и в данном случае равен

$$b_0^5 \cdot (60025b_0^3 - 129360b_0^2 + 62976b_0 - 4096).$$

2. Берем последовательно каждый неприводимый множитель многочлена P , и возьмем его корень α в соответствующем расширении \mathbb{Q} .

3. Подставляем α в остальные многочлены из базиса Грёбнера и последовательно находим все значения неизвестных. В нашем случае оказывается, что все они лежат в поле, полученном присоединением к \mathbb{Q} исходного корня α .

Среди найденных решений системы обобщенного нормального уравнения отбрасываем те, которые не соответствуют предложению 2. Во всех случаях оказывалось, что мы с точностью до эквивалентности находим лишь один многочлен.

В табл. 1 и ниже приведены многочлены $f_{5,9}$ и $F_{5,9}$, корнем которого является α , преобразованные с целью приведения коэффициентов к более аккуратному виду.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания по проведению фундаментальных научных исследований по проекту № 0580-2021-0011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abel N.H.* Ueber die integration der differential-formel pdx/\sqrt{R} wenn r und p ganze functionen sind // Journal

- für die reine und angewandte Mathematik. 1826. V. 1. P. 185–221.
2. *Tchebicheff P.* Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynome du troisième ou du quatrième degré // *Journal des math. pures et appl.* 1857. V. 2. P. 168–192.
 3. *Платонов В.П.* Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // *УМН.* 2014. Т. 69. № 1(415). С. 3–38.
 4. *Wolfgang M. Schmidt.* On continued fractions and diophantine approximation in power series fields // *Acta arithmetica.* 2000. V. 95. № 2. P. 139–166.
 5. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // *Матем. сб.* 2018. Т. 209. № 4. С. 54–94.
 6. *Платонов В.П., Петрунин М.М., Жгун В.С.* О проблеме периодичности разложений в непрерывную дробь \sqrt{f} для кубических многочленов над числовыми полями // *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления.* 2020. Т. 493. № 1. С. 32–37.
 7. *Платонов В.П., Петрунин М.М.* О конечности числа периодических разложений в непрерывную дробь \sqrt{f} для кубических многочленов над полями алгебраических чисел // *Доклады РАН. Математи-*
 - ка, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. № 1. С. 48–54.
 8. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О проблеме классификации периодических непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // *Успехи математических наук.* 2020. Т. 75. № 4(454). С. 211–212.
 9. *Kubert D.S.* Universal bounds on the torsion of elliptic curves // *Proc. London Math. Soc.* 1976. V. 33. № 2. P. 193–237.
 10. *Sutherland A.* Constructing elliptic curves over finite fields with prescribed torsion // *Mathematics of Computation.* 2012. V. 81. № 278. P. 1131–1147.
 11. *Платонов В.П., Петрунин М.М., Жгун В.С. и др.* О конечности гиперэллиптических полей со специальными свойствами и периодическим разложением \sqrt{f} // *Доклады РАН.* 2018. Т. 483. № 6. С. 609–613.
 12. *Платонов В.П., Петрунин М.М.* Группы S -единиц и проблема периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // *Труды МИАН.* 2018. Т. 302. С. 354–376.
 13. *Петрунин М.М.* S -единицы и периодичность квадратного корня в гиперэллиптических полях // *Доклады РАН.* 2017. Т. 474. № 2. С. 155–158.
 14. *Платонов В.П., Петрунин М.М., Штейников Ю.Н.* О конечности числа эллиптических полей с заданными степенями S -единиц и периодическим разложением \sqrt{f} // *Доклады РАН.* 2019. Т. 488. № 3. С. 9–14.

ON THE PERIODICITY PROBLEM FOR THE CONTINUED FRACTION EXPANSION OF ELEMENTS OF HYPERELLIPTIC FIELDS WITH FUNDAMENTAL S -UNIT DEGREE LESS OR EQUAL TO 11

Academician of the RAS **V. P. Platonov^{a,b}**, **M. M. Petrunin^a**, and **Yu. N. Shteinikov^a**

^a *Scientific Research Institute for System Analysis, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b *Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

We solve the problem of describing square-free polynomials $f(x) \in k[x]$ with periodic expansion of $\sqrt{f(x)}$ into a functional continued fraction in $k((x))$, where k is a number field and the degree of the corresponding fundamental S -unit of hyperelliptic field $k(x)(\sqrt{f(x)})$ is less or equal to 11.

Keywords: hyperelliptic field, S -units, continued fractions, periodicity, torsion points

УДК 512.74

ГРУППОВЫЕ СТРУКТУРЫ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

© 2021 г. Член-корреспондент РАН В. Л. Попов^{1,2,*}

Поступило 05.08.2021 г.

После доработки 05.08.2021 г.

Принято к публикации 13.08.2021 г.

В работе исследуется, в какой мере групповое многообразие алгебраической группы определяет ее групповую структуру.

Ключевые слова: алгебраическая группа, групповое многообразие, изоморфизм

DOI: 10.31857/S2686954321050106

1. В этом сообщении исследуется, в какой мере групповое многообразие алгебраической группы определяет ее групповую структуру. Все рассматриваемые далее алгебраические многообразия считаются определенными над фиксированным алгебраически замкнутым полем k .

Хорошо известно, что в классе связных унипотентных алгебраических групп существует, вообще говоря, бесконечно много зависящих от параметров неизоморфных групповых структур на фиксированном групповом многообразии (которое автоматически изоморфно аффинному пространству).

Более интересным и доступным в отношении исследуемой задачи оказывается класс редутивных групп. Следующий результат показывает неединственность таких структур в классе связных не полупростых редутивных алгебраических групп.

Пусть G – связная редутивная алгебраическая группа, D – ее коммутант, а Z – связная компонента единицы ее центра. Группы D и Z являются соответственно связной полупростой алгебраической группой и тором. Алгебраические группы $D \times Z$ и G не всегда изоморфны; существование изоморфизма между ними равносильно равенству $D \cap Z = \{e\}$, которое, в свою очередь, равносильно тому, что изогения алгебраических групп $D \times Z \rightarrow G, (d, z) \mapsto dz$, является их изоморфизмом. Однако, как показывает следующая

теорема, $D \times Z$ и G всегда изоморфны как алгебраические многообразия.

Теорема 1. *Существует такой инъективный гомоморфизм алгебраических групп $\iota: Z \hookrightarrow G$, что отображение $\varphi: D \times Z \rightarrow G, (d, z) \mapsto d \cdot \iota(z)$, является изоморфизмом алгебраических многообразий (но, вообще говоря, не гомоморфизмом алгебраических групп).*

Следствие 1. *Алгебраические группы $D \times Z$ и G (в общем случае не являющиеся изоморфными) изоморфны как алгебраические многообразия.*

2. Групповые многообразия из теоремы 1 представляются в виде произведений двух многообразий. В теоремах 2–4 найдены ограничения на сомножители таких произведений.

Теорема 2. *Алгебраическая кривая не может быть прямым сомножителем многообразия связной полупростой алгебраической группы.*

Далее, если не оговорено отдельно, мы считаем, что $k = \mathbb{C}$; топологические термины относятся к классической топологии, а гомологии и когомологии являются сингулярными. По принципу Лефшеца сформулированные ниже теоремы 4, 9, 12, 13 справедливы для любого поля k характеристики нуль.

Теорема 3. *Если d -мерное алгебраическое многообразие X является прямым сомножителем многообразия связной редутивной алгебраической группы, то $H_d(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ и $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ при $i > d$.*

Следствие 2. *Стягиваемое алгебраическое многообразие (в частности, \mathbb{A}^d) положительной размерности не может быть прямым сомножителем многообразия связной редутивной алгебраической группы.*

¹ Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

² Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

*E-mail: popovvl@mi-ras.ru

Теорема 4. *Алгебраическая поверхность не может быть прямым сомножителем многообразия связной полупростой алгебраической группы.*

3. Теорема 1 естественно приводит к вопросу о том, какие геометрические свойства группового многообразия отражаются на алгебраических свойствах соответствующей группы. Явно или неявно этот вопрос давно рассматривался в литературе. Так, М. Лазар доказал в [3], что если многообразии алгебраической группы изоморфно аффинному пространству, то эта группа унипотентна. Ниже приведено несколько результатов по этой теме.

Первый касается так называемых тороидальных групп. По теореме Шевалле, всякая связная алгебраическая группа G содержит наибольшую связную аффинную нормальную подгруппу $G_{\text{афф}}$, а группа $G/G_{\text{афф}}$ является абелевым многообразием. М. Розенлихт в [4] рассматривал такие группы G , названные им тороидальными, что $G_{\text{афф}}$ — тор. Теорема 5 дает критерий тороидальности в терминах геометрических свойств алгебраического многообразия G (доказательство не использует ограничений на характеристику поля k ; ограничение на подмногообразия в теореме 5 является более слабым, чем ограничение, указанное в [2, Prop. 5.4.5]):

Теорема 5. *Связная алгебраическая группа G тороидальна тогда и только тогда, когда алгебраическое многообразие G не содержит подмногообразий, изоморфных \mathbb{A}^1 .*

Другими результатами по указанной теме являются теорема 6, ее следствие и теорема 7, в которых использованы следующие обозначения. Пусть X — неприводимое алгебраическое многообразие. Мультипликативная группа $k[X]^\times$ обратимых регулярных функций на X содержит подгруппу ненулевых констант k^\times и $k[X]^\times/k^\times$ является конечно порожденной свободной абелевой группой (см. [4, Thm. 1]). Далее мы полагаем:

$$\text{units}(X) := \text{rank}(k[X]^\times/k^\times),$$

$$\text{mh}(X) := \max \{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid H_d(G, \mathbb{Q}) \neq 0\}.$$

Теорема 6. *Если G — связная аффинная алгебраическая группа, то размерность ее унипотентного радикала равна $\dim(G) - \text{mh}(G)$.*

Следствие 3. *Связная аффинная алгебраическая группа G редуکتивна тогда и только тогда, когда $\text{mh}(G) = \dim(G)$.*

Предыдущее следствие показывает, что свойство связной аффинной алгебраической группы быть редуکتивной выражается через геометрическое свойство ее группового многообразия. Следующая теорема 7, обобщающая теорему М. Лаза-

ра [3], показывает, что это же верно и для свойства группы быть разрешимой.

Теорема 7. *Следующие свойства связной аффинной алгебраической группы S эквивалентны:*

- (а) S разрешима;
- (б) $\text{mh}(S) = \text{units}(S)$;
- (в) существуют такие неотрицательные целые числа t и r , что алгебраическое многообразие S изоморфно $\mathbb{A}_*^t \times \mathbb{A}^r$, где \mathbb{A}_*^t — произведение t экземпляров многообразия $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$; при этом автоматически $t = \text{units}(S)$.

Группа S унипотентна (соответственно, является тором) тогда и только тогда, когда S как алгебраическое многообразие изоморфно \mathbb{A}^r (соответственно, \mathbb{A}_^t).*

4. Теоремы 8–10 доставляют информацию о множестве всех групповых структур на алгебраическом многообразии, допускающем хотя бы одну такую структуру.

Теорема 8. *Две алгебраические группы, одна из которых тороидальна, изоморфны тогда и только тогда, когда они изоморфны как алгебраические многообразия.*

Теорема 9. *Пусть G_1 и G_2 — связные аффинные алгебраические группы, а R_i — максимальная редуکتивная алгебраическая подгруппа в G_i , $i = 1, 2$. Если G_1 и G_2 изоморфны как алгебраические многообразия, то R_1 и R_2 — связные алгебраические группы с изоморфными алгебрами Ли.*

Теорема 10. *Пусть R — связная редуکتивная алгебраическая группа.*

(i) *Если G — такая алгебраическая группа, что G и R изоморфны как алгебраические многообразия, то*

(а) G связна и редуکتивна, а алгебры Ли $\text{Lie}(R)$ и $\text{Lie}(G)$ изоморфны;

(б) в случае полупростой односвязной группы R алгебраические группы R и G изоморфны.

(ii) *Число всех, рассматриваемых с точностью до изоморфизма, алгебраических групп, групповые многообразия которых изоморфны групповому многообразию R , конечно.*

5. Доказательство утверждения (ii) теоремы 10 использует следующую общую теорему конечно-сти для редуکتивных групп, в которой характеристика поля k может быть любой.

Теорема 11. *Число всех, рассматриваемых с точностью до изоморфизма, связных редуکتивных алгебраических групп фиксированного ранга конечно.*

Следствие 4. *Число всех, рассматриваемых с точностью до изоморфизма, корневых данных (root data) фиксированного ранга конечно.*

Следствие 5. Число всех, рассматриваемых с точностью до изоморфизма, связных компактных групп Ли фиксированного ранга конечно.

6. Если в обозначениях теоремы 1 группа G полупроста (т.е. $Z = \{e\}$), то эта теорема не предоставляет примеров неизоморфных групповых структур на одном и том же групповом многообразии. Такие примеры могут быть получены иным, описанным ниже способом.

Пусть n – целое положительное число, H – односвязная полупростая алгебраическая группа. Группа $G := H \times \dots \times H$ (n сомножителей) является связной полупростой, так что ее центр $\mathcal{Z}(G)$ – конечная группа. Пусть F_n – свободная группа ранга n со свободной системой образующих x_1, \dots, x_n . Для любых элементов $g = (h_1, \dots, h_n) \in G$, где $h_j \in H$, и $w \in F_n$ обозначим через $w(g)$ элемент из H , являющийся образом элемента w при гомоморфизме $F_n \rightarrow H$, который отображает x_j в h_j для каждого j . Любой элемент $\sigma \in \text{Aut}(F_n)$ определяет отображение $\sigma_G: G \rightarrow G$, $g \mapsto (\sigma(x_1)(g), \dots, \sigma(x_n)(g))$, являющееся автоморфизмом группового многообразия G (но, вообще говоря, не группы G). Ограничение σ_G на $\mathcal{Z}(G)$ является автоморфизмом группы $\mathcal{Z}(G)$. Рассмотрим какую-либо подгруппу C группы $\mathcal{Z}(G)$.

Теорема 12. (а) Групповые многообразия связных полупростых алгебраических групп G/C и $G/\sigma_G(C)$ изоморфны.

(б) G/C и $G/\sigma_G(C)$ являются изоморфными алгебраическими группами тогда и только тогда, когда C и $\sigma_G(C)$ лежат в одной орбите естественного действия группы $\text{Out}(G)$ (изоморфной группе автоморфизмов диаграммы Дынкина группы G) на множестве всех подгрупп группы $\mathcal{Z}(G)$.

С помощью теоремы 12 легко построить примеры неизоморфных связных полупростых алгебраических групп, групповые многообразия которых изоморфны.

Пример. Пусть $n = 2$, $\sigma(x_1) = x_1$, $\sigma(x_2) = x_1x_2^{-1}$, $H = \text{SL}_d$, $d \geq 2$, $C = \{(s, s) \mid s = \text{diag}(\epsilon, \dots, \epsilon), \epsilon^d = 1\}$. В этом случае $\sigma_G(C) = \{(s, e) \mid s = \text{diag}(\epsilon, \dots, \epsilon), \epsilon^d = 1\}$ не переводится в C группой $\text{Out}(G)$. Поэтому $G/C = (\text{SL}_d \times \text{SL}_d)/C$ и $G/\sigma_G(C) = \text{PSL}_d \times \text{SL}_d$ – неизоморфные связные полупростые алгебраические группы, изоморфные как алгебраические многообразия. Отметим, что если $d = 2$, то $G = \text{Spin}_4$, $G/C = \text{SO}_4$.

Аналогично строятся диффеоморфные неизоморфные компактные вещественные группы Ли.

7. Построенные в предыдущем разделе группы полупросты, но не просты. Следующая теорема показывает, что это не случайно.

Теорема 13. Две алгебраические группы, одна из которых связна и проста, изоморфны тогда и только тогда, когда они изоморфны как алгебраические многообразия.

Соображения, использованные в доказательстве теоремы 13, дают и доказательство следующей теоремы, которая в [1] приведена без доказательства.

Теорема 14 [1, Thm. 9.3]. Две связные компактные простые вещественные группы Ли, рассматриваемые как топологические пространства, гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны как вещественные группы Ли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baum P.F., Browder W. The cohomology of quotients of classical groups // Topology 1965. V. 3. P. 305–336.
2. Brion M. Some structure theorems for algebraic groups // Proc. Sympos. Pure Math. 2017. V. 94. Amer. Math. Soc. Providence. RI. P. 53–126.
3. Lazard M. Sur le nilpotence de certains groupes algébriques // CRAS Paris. 1955. V. 241. P. 1687–1689.
4. Rosenlicht M. Toroidal algebraic groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. P. 984–988.

GROUP STRUCTURES ON ALGEBRAIC VARIETIES

Corresponding Member of the RAS V. L. Popov^{a,b}

^aSteklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

^bNational Research University High School of Economics, Moscow, Russian Federation

We explore to what extent the group variety of an algebraic group determines its group structure.

Keywords: algebraic group, group variety, isomorphism

УДК 514.174.5, 519.148, 517.518.36, 517.965

САМОПОДОБНЫЕ ЗАМОЩЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

© 2021 г. Член-корреспондент РАН В. Ю. Протасов^{1,2,*}, Т. И. Зайцева^{3,**}

Поступило 15.06.2021 г.

После доработки 15.06.2021 г.

Принято к публикации 18.08.2021 г.

Получена полная классификация многогранных множеств (объединений конечного числа выпуклых многогранников), допускающих самоподобные замощения, т.е. разбиения на сдвиги одного и того же множества, аффинно подобного исходному. В любой размерности существует бесконечно много неэквивалентных между собой многогранных множеств с данным свойством. При дополнительном предположении, что подобие задается целой матрицей, а сдвиги (“цифры”) составляют полную систему вычетов относительно нее, единственным таким множеством является параллелепипед. Указаны приложения полученных результатов к многомерным всплескам и системам Хаара.

Ключевые слова: замощение, самоподобие, тайл, многогранник, целый аттрактор, конус, система Хаара

DOI: 10.31857/S2686954321050118

ВВЕДЕНИЕ

Самоподобные замощения (тайлинги) компактных множеств широко изучались в литературе по геометрии, комбинаторике, теории чисел, гармоническому анализу и всплескам. В данной работе мы получим классификацию всех многогранных замощений и их особого вида – многогранных целых аттракторов. В разделе 1 будут даны формулировки основных результатов, в разделе 2 – краткие доказательства (подробные доказательства будут представлены в расширенном варианте данной статьи).

Определение 1. Компактное множество $G \subset \mathbb{R}^d$ положительной меры Лебега допускает

тайлинг, если существует разбиение $G = \bigcup_{i=1}^N T_i$,

в котором все множества T_i являются параллельными сдвигами одного и того же компакта (тайла) и их попарные пересечения имеют меру нуль.

Если тайл аффинно подобен G , то тайлинг называется самоподобным.

Как правило, множества, допускающие самоподобный тайлинг, имеют фрактальную структуру, что затрудняет их использование в приложениях. Естественная задача – найти и охарактеризовать простые (в том или ином смысле) множества, обладающие этим свойством. Например, многогранники или, более широко, многогранные множества. Многогранным множеством называется объединение конечного числа выпуклых многогранников. Каждый многогранник предполагается компактным и невырожденным (имеющим непустую внутренность). Кроме чисто геометрического интереса, этот вопрос важен в кристаллографии, при исследовании уточняющих алгоритмов (subdivision schemes), в теории приближений, при построении всплесков и других ортогональных систем в $L_2(\mathbb{R}^d)$, см. [1, 3, 4, 6, 9, 11] и ссылки в этих работах. В частности, тайлы являются основой для функций Хаара многих переменных. Поэтому, многогранные тайлы приводят к построению функций Хаара с носителями – многогранными множествами.

Первые результаты в этом направлении были получены Грехенигом и Мадих [2], которые охарактеризовали самоподобные тайлинги параллелепипедов и соответствующие базисы Хаара в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Полная классификация операторов аффинного подобия и векторов сдвигов, порождающих тайлинги параллелепипедов, была получена в [13]. Вопрос классификации тайлов-многогранников исследовался в [9, 12, 13]. Несложно пока-

¹ Университет Аквила, Аквила, Италия

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

³ Лаборатория “Многомерная аппроксимация и приложения”, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*E-mail: v-protassov@yandex.ru

**E-mail: zaitsevanja@gmail.com

зять, что среди всех выпуклых многогранников (и даже среди выпуклых тел) только параллелепипед допускает самоподобный тайлинг. Для невыпуклых многогранников вопрос гораздо более сложен. В [13] было показано, что на двумерной плоскости невыпуклый многоугольник не может иметь самоподобного тайлинга. Случай большей размерности был оставлен в качестве открытой проблемы. В недавней работе [12] было показано, что если у самоподобного тайла есть выпуклый угол (т.е. пересечение с некоторым шаром является окрестностью вершины выпуклого конуса, не содержащего прямой линии), то данный тайл аффинно эквивалентен объединению целых сдвигов единичного куба. Поэтому, в случае когда многогранник имеет хотя бы один выпуклый угол, мы знаем его общий вид. Это, однако, не решает проблему полностью, поскольку не все многогранники данного вида допускают самоподобный тайлинг. Но главная сложность состоит в том, что не все многогранники имеют хотя бы один выпуклый угол. В качестве примера рассмотрим правильный тетраэдр в \mathbb{R}^3 и каждую из его вершин “вдавим внутрь”, сделав на ее месте ямку в виде тетраэдра. Что касается многогранных множеств, то они уже на двумерной плоскости могут не иметь выпуклых углов. Выпуклость в [12] существенна, и доказательство не проходит в общем случае. Таким образом, вопрос о многогранниках, допускающих самоподобный тайлинг, оставался открытым. С другой стороны, известны примеры несвязных многогранных множеств с самоподобным тайлингом [13]. Поэтому, разумно ставить задачу следующим образом:

Задача 1. Найти все многогранные множества в \mathbb{R}^d , допускающие самоподобный тайлинг.

Вторая задача сужает вопрос на один класс самоподобных тайлов – целых аттракторов. Целый аттрактор в \mathbb{R}^d является аналогом единичного отрезка в системе счисления, определенной целой матрицей и системой целых векторов – “цифр”. Пусть дана $d \times d$ матрица M с целыми коэффициентами, а также множество векторов $D = \{s_i\}_{i=0}^{m-1} \subset \mathbb{Z}^d$, где $m = |\det M|$. Матрица M предполагается растягивающей, т.е. все ее собственные значения по модулю больше 1, а векторы s_i взяты из разных классов смежности $\mathbb{Z}^d / M\mathbb{Z}^d$, т.е., $s_i - s_j \notin M\mathbb{Z}^d$ при $i \neq j$. Таким образом, в \mathbb{Z}^d задана M -адическая система счисления с цифрами s_i . Целым аттрактором называется множество $G = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} M^{-k} s(k) \mid s(k) \in D \right\}$. Известно [2, 7], что G – компакт, имеющий целую положительную меру и допускающий самоподобный тайлинг множествами $M^{-1}(G + s_i), i = 0, \dots, m-1$. Ха-

рактеристическая функция аттрактора $\varphi(x) = \chi_G(x)$ удовлетворяет масштабирующему уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \varphi(Mx - s_i).$$

Этим объясняются многочисленные применения целых аттракторов в теории всплесков, теории приближений (subdivision schemes) и т.д. В частности, если мера G равна единице, то функция φ порождает кратномасштабный анализ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ [3, 10, 11].

Единичный куб в \mathbb{R}^d является целым аттрактором, порожденным матрицей $M = 2I$, где I – единичная матрица, и 2^d цифрами $D = \{(s_1, \dots, s_d), s_i \in \{0, 1\}\}$. Тот же куб порождается и другими параметрами (M, D) . Например, при надлежащем выборе матрицы M , куб является целым аттрактором, задаваемым всего двумя цифрами. Системы счисления в \mathbb{Z}^d , имеющие в качестве аттрактора единичный куб или параллелепипед, исследовались, в частности, в [2, 13], в [13] дана полная классификация таких систем в \mathbb{R}^d . Вопрос – есть ли другие многогранные целые аттракторы в \mathbb{R}^d ?

Задача 2. Найти все многогранные множества в \mathbb{R}^d , являющиеся целыми аттракторами.

Мы даем решения задач 1 и 2. В теореме 1 классифицированы все многогранные множества в \mathbb{R}^d , допускающие самоподобный тайлинг. В любой размерности таких множеств (не эквивалентных друг другу) бесконечно много. А с многогранными целыми аттракторами ситуация иная. Теорема 2 устанавливает, что все они – параллелепипеды.

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы рассматриваем самоподобный тайлинг $\mathcal{T} = \{T_i\}_{i=1}^N$ компактного множества G ; для каждого тайла $T \in \mathcal{T}$ его подобие множеству G задается аффинным преобразованием $A : T \rightarrow G$; все эти преобразования имеют одну и ту же линейную часть, заданную растягивающей матрицей M , и отличаются только сдвигами.

Многогранное множество в \mathbb{R}^d – объединение конечного числа выпуклых невырожденных многогранников. Одномерные многогранные множества состоят из конечного числа отрезков. Все одномерные многогранные множества, допускающие самоподобный тайлинг, охарактеризованы в [5, 13]. Мы используем этот результат, поэтому приведем его полностью. Для натуральных чисел a, n , обозначим $\mathcal{S}(a, n) = \{ka \mid k = 0, \dots, n-1\}$. Это – арифметическая прогрессия длины n , начинающаяся с нуля, имеющая разность a . Для натураль-

ного числа r и положительных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^r$, обозначим $\mathcal{S}(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = \mathcal{S}(a_1, n_1) + \dots + \mathcal{S}(a_r, n_r)$ — суммы по Минковскому арифметических прогрессий $\mathcal{S}(a_i, n_i)$. Пару векторов $\mathbf{a}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^r$ назовем допустимой, если $a_1 = n_1 = 1$, и для каждого $i \geq 2$ выполнено: $a_i \geq 2$, $n_i \geq 2$ и a_i делится на $a_{i-1}n_{i-1}$. Следующий результат дает классификацию одномерных многогранных тайлов [13, теорема 7]:

Множество $G \subset \mathbb{R}$, являющееся объединением конечного числа отрезков, допускает самоподобный тайлинг тогда и только тогда, когда найдутся $r \in \mathbb{N}$ и допустимая пара векторов $\mathbf{a}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^r$ такая, что G эквивалентно, с точностью до умножения на константу, множеству

$$\{k, k+1\}, k \in S(\mathbf{a}, \mathbf{n}). \quad (1)$$

Итак, множество G эквивалентно объединению целых сдвигов единичного отрезка, заданному формулой (1). Общее число отрезков равно $n_1 \cdots n_r$; случай одного отрезка соответствует $r = 1$. Теперь мы формулируем основной результат, классифицирующий многогранные самоподобные тайлы в \mathbb{R}^d .

Теорема 1. *Многогранное множество в \mathbb{R}^d допускает самоподобный тайлинг тогда и только тогда, когда оно аффинно эквивалентно прямому произведению d одномерных множеств вида (1). Каждое из этих d множеств порождено своей тройкой $(r, \mathbf{a}, \mathbf{n})$, где $r \in \mathbb{N}$ и \mathbf{a}, \mathbf{n} — допустимая пара из \mathbb{Z}^r .*

Замечание 1. Пример такого множества дан на рис. 1. Одно из множеств порождено тройкой $(3, (1, 2, 12), (1, 3, 2))$, а другое $(3, (1, 2, 8), (1, 2, 3))$. Соответствующие арифметические прогрессии получаются $(0), (0, 2, 4), (0, 12)$ (их сумма дает множество по оси x), $(0), (0, 2), (0, 8, 16)$ (их сумма дает множество по оси y).

Итак, все многогранные множества, допускающие самоподобный тайлинг, являются прямыми произведениями соответствующих одномерных множеств. Следовательно, каждое такое множество является дизъюнктивным объединением единичных кубиков целочисленной решетки.

В частности, такой же вид должны иметь все многогранные целые аттракторы. Следующий результат, однако, показывает, что их семейство гораздо беднее и ограничивается параллелепипедами.

Теорема 2. *Если целый аттрактор является многогранным множеством, то это — параллелепипед.*

Схемы и основные шаги доказательств теорем 1 и 2 приведены в следующем параграфе.

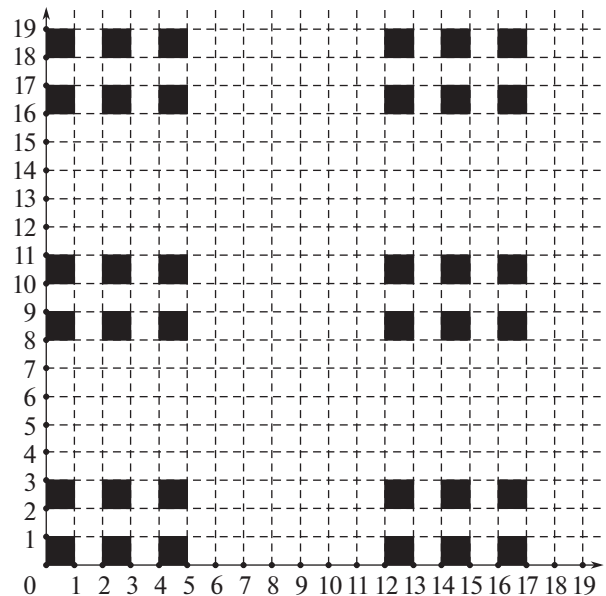


Рис. 1. Пример двумерного многогранного множества, допускающего самоподобный тайлинг.

2. НАБРОСКИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Короткий формат сообщения не позволяет изложить полные доказательства, это будет сделано в отдельной статье. Мы наметим план и подробнее остановимся на главных идеях.

Доказательство теоремы 1: краткое изложение. Доказательство мы разбили на несколько шагов, в каждом устанавливается одна лемма. Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ — многогранное множество, имеющее самоподобный тайлинг \mathcal{T} .

Шаг 1. Выпуклая оболочка $\text{co}(G)$ — выпуклый многогранник. Его вершины будем называть крайними вершинами множества G . В силу теоремы Крейна–Мильмана, у каждого многогранного множества есть крайние вершины, и их выпуклая оболочка содержит это множество. На рис. 2 проиллюстрированы крайние вершины у тетраэдра с “вдавленными” углами.

Для произвольной крайней вершины \mathbf{v} , рассмотрим соответствующий угол K — пересечение множества G с малым шаром с центром \mathbf{v} . Радиус шара будем предполагать настолько малым, насколько это необходимо. Тем же символом K будем обозначать коническую оболочку угла K , т.е. множество $\bigcup_{\lambda>0} \lambda K$. Это — невырожденный точечный (не содержащий прямой линии) конус, возможно, невыпуклый. Мы часто будем отождествлять угол с соответствующим конусом. Выпуклая оболочка $\text{co}(K)$ — угол многогранника $\text{co}(G)$. Конус $\text{co}(K)$ определяет частичный порядок в \mathbb{R}^d : $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, если $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in \text{co}(K)$. У каждого подмножества $S \subset \mathbb{R}^d$

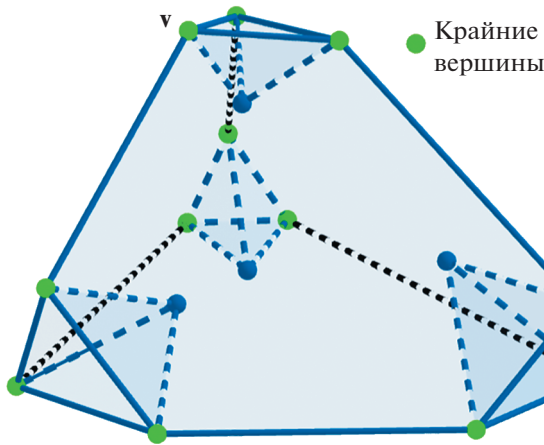


Рис. 2. Крайние вершины тетраэдра с “вдавленными” вершинами.

есть не более одного минимального элемента x , для которого $x \leq y$ для всех $y \in S$.

Лемма 1. Если многогранное множество G имеет самоподобный тайлинг \mathcal{T} , то каждая его крайняя вершина $v \in G$ содержится в единственном тайле $T \in \mathcal{T}$. Более того, v является также и крайней вершиной T , а углы множеств T и G в этой вершине совпадают.

Доказательство основано на том, что v — единственный минимальный элемент конуса $co(K)$, а значит, и единственный минимальный элемент G , поскольку G содержится в этом конусе. Если бы два сдвига тайла T содержали v , то T имело бы два минимальных элемента, что невозможно.

Шаг 2. Итак, каждая крайняя вершина G покрыта единственным тайлом T , для которого она также является крайней вершиной. Это определяет отображение множества крайних вершин G в множество крайних вершин T . Но поскольку G и T аффинно подобны, получаем отображение (возможно, не инъективное) множества крайних вершин G в себя. Какая-то итерация этого отображения имеет неподвижную точку v , причем (возможно, после дополнительных итераций) можно считать, что все грани угла $co(K)$ множества G совпадают с соответствующими гранями того же угла в T . Мы будем называть крайнюю вершину множества G неподвижной, если она совпадает с соответствующей вершиной покрывающего ее тайла T , и все соответствующие грани угла $co(K)$ в этой вершине у множеств T и G совпадают.

Лемма 2. У самоподобного тайлинга \mathcal{T} многогранного множества G всегда существует итерация \mathcal{T}^n такая, что G с тайлингом \mathcal{T}^n имеет хотя бы одну неподвижную вершину.

Заметим, что если понятие крайней вершины зависит только от геометрии множества G , то неподвижная вершина зависит от тайлинга. Везде далее мы будем считать, что достаточное число итераций уже проделано, и v — неподвижная вершина G с тайлингом \mathcal{T} , а размер тайла достаточно мал (насколько это необходимо). Угол множества G (он же — угол T) в неподвижной вершине также будем называть неподвижным.

Шаг 3. Итак, множество G с тайлингом \mathcal{T} имеет хотя бы один неподвижный угол. Наша следующая цель — доказать, что этот угол выпуклый и простой (т.е. имеет ровно d ребер). Это будет сделано в несколько этапов — шаги 3–6. В начале мы установим следующую лемму, которая позволит свести задачу к меньшей размерности.

Лемма 3. Пусть многогранное множество G имеет самоподобный тайлинг \mathcal{T} , и $T \in \mathcal{T}$ — тайл, содержащий неподвижный угол K . Тогда если K содержит некоторую грань L конуса $co(K)$, $1 \leq \dim L \leq d - 1$, то все элементы T , пересекающие эту грань, являются сдвигами T на векторы, параллельные L . Пересечения грани L с тайлами из \mathcal{T} образуют самоподобный тайлинг множества $G \cap L$.

Таким образом, если неподвижный угол K содержит какую-то грань своей выпуклой оболочки, то тайлинг \mathcal{T} также определяет самоподобный тайлинг для пересечения G с этой гранью.

Шаг 4. Теперь доказываем, что если неподвижный угол K содержит какую-то грань L , $\dim L = j$, своей выпуклой оболочки, и эта грань простая (имеет ровно j ребер), то тайл T , содержащий K , содержит также j -мерный параллелепипед, вписанный в L .

Лемма 4. В условиях леммы 3 предположим, что L является j -мерным простым конусом. На каждом его ребре отметим максимальный по включению отрезок, содержащий точку v и лежащий в T . Тогда T содержит j -мерный параллелепипед, порожденный этими отрезками (т.е. являющийся их суммой по Минковскому).

Доказательство осуществляется по индукции относительно размерности j . Для $j = 1$ утверждение верно, поскольку угол всегда содержит ребра своей выпуклой оболочки, и соответствующий отрезок на этом ребре является одномерным параллелепипедом, который (по определению!) лежит в T . Переход $j - 1 \rightarrow j$ осуществляется так: по предположению индукции, для каждой $(j - 1)$ -мерной грани L' конуса L соответствующий $(j - 1)$ -мерный параллелепипед $P' \subset L'$ содержится в T . Обозначим через \mathbf{a} отрезок, содержащийся в оставшемся ребре конуса L . Тогда (по предположению индукции для одномерной грани $L = \text{span}(\mathbf{a})$) сдвиг $P' + \mathbf{a}$ содержится в соответствующей

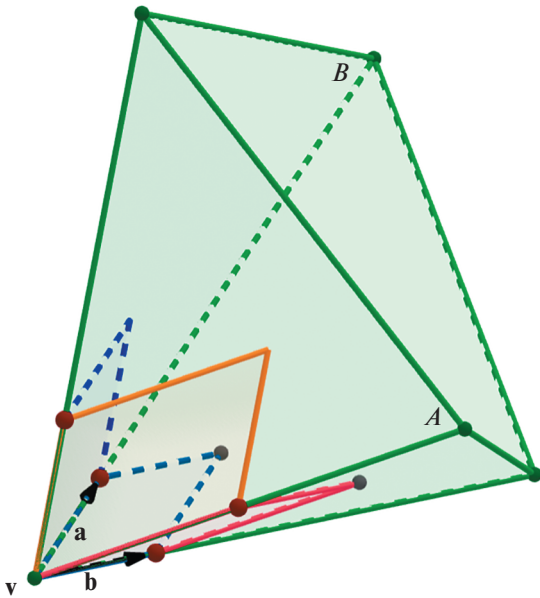


Рис. 3. “Лилия” – фигура из параллелепипедов, порожденных векторами на фасадах.

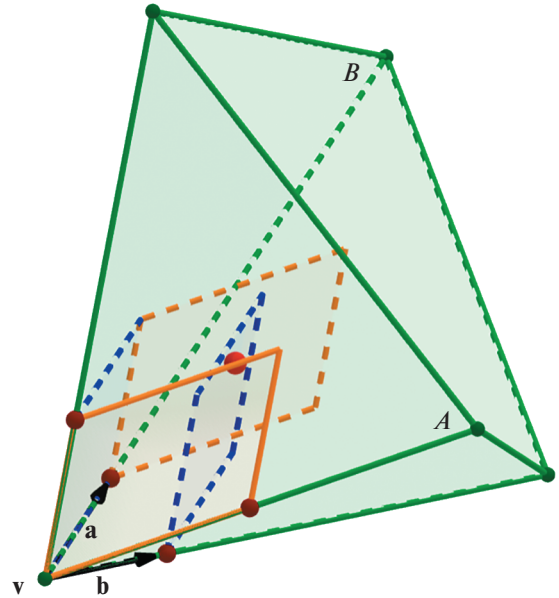


Рис. 4. Пересечение параллелепипедов $\mathbf{a} + P(A)$ и $\mathbf{b} + P(B)$.

ющем сдвиге $T + \mathbf{a}$, и, следовательно, содержится в G . Если какая-то точка $x \in P$ не покрывается тайлом T , то она должна содержаться в каком-то его сдвиге $T + \mathbf{b} \in \mathcal{T}$, причем $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}$. Из этого следует, что сдвиг ребра \mathbf{a} , лежащий в $T + \mathbf{b} \in \mathcal{T}$, содержится в P . Значит, он пересекает одну из противоположных граней P' и $P' + \mathbf{a}$ этого параллелепипеда. Последнее невозможно, поскольку тайл $T + \mathbf{b}$ не пересекает ни T , ни $T + \mathbf{a}$.

Шаг 5. Теперь мы устанавливаем главное вспомогательное утверждение. Несмотря на технический характер леммы, этот геометрический факт, возможно, не лишен и самостоятельного интереса.

Лемма 5. Если выпуклый многогранный конус C не является простым, но имеет простые фасады (т.е. гиперграны), то верно следующее: либо C простой, либо для любого семейства векторов \mathcal{V} , исходящих из вершины конуса C и идущих вдоль его ребер (один вектор на каждом ребре), найдется два фасада A, B и два различных вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$, для которых параллелепипеды $\mathbf{a} + P(A)$ и $\mathbf{b} + P(B)$ имеют общую внутреннюю точку. Через $P(X)$ обозначен параллелепипед, порожденный векторами, лежащими на фасаде X .

В первом случае, если C – простой конус, параллелепипеды всех фасадов и их сдвиги на векторы семейства \mathcal{V} образуют границу d -мерного параллелепипеда, лежащую в T .

Иллюстрация ко второму случаю леммы дана на рис. 3, 4.

Шаг 6. Мы подошли к ключевому месту в доказательстве.

Лемма 6. Если многогранное множество допускает самоподобный тайлинг \mathcal{T} , и K – его неподвижный угол, то для любого $j = 1, \dots, d$ этот угол содержит все j -мерные грани угла $\text{co}(K)$, и все эти грани простые.

При $j = d$ мы немедленно получаем, что $K = \text{co}(K)$ и что этот конус простой.

Следствие 1. Каждый неподвижный угол многогранного множества – выпуклый и простой.

Лемма 6 доказывается по индукции относительно j . Для $j = 1$ все выполнено, поскольку K содержит все ребра конуса $K = \text{co}(K)$. Если утверждение верно для размерности $j - 1$, то у произвольной j -мерной грани L конуса $\text{co}(K)$ все $(j - 1)$ -мерные грани простые и содержатся в K . Возьмем на каждом ребре конуса L по максимальному отрезку, лежащему в тайле T , и воспользуемся леммой 4. Получается, что на каждой $(j - 1)$ -мерной грани конуса L эти отрезки порождают параллелепипед, лежащий в T . Теперь применяем лемму 5 к конусу $C = L$ с простыми гранями. Если конус L не простой, то найдется две грани и два отрезка, для которых два соответствующих сдвинутых параллелепипеда имеют общую внутреннюю точку. Последнее невозможно, поскольку в силу леммы 5 векторы сдвигов \mathbf{a}, \mathbf{b} различны и, следовательно, эти параллелепипеды принадлежат разным тайлам. Таким образом, имеет место первый случай леммы 5: конус L про-

стой, и T содержит границу j -мерного параллелепипеда P с углом L . Если множество точек L , не лежащих в T , непусто, то оно содержит открытый угол S с вершиной v . Если мы выбрали размер тайла T достаточно малым, то мал будет и параллелепипед P , а значит S пересечет его границу. Последнее невозможно, поскольку граница P лежит в L .

Шаг 7. Каждый неподвижный угол множества G выпуклый и простой (Следствие 1). Поскольку множество G имеет хотя бы один неподвижный угол (лемма 2), оно имеет и выпуклый простой угол, а значит, согласно [12], G эквивалентно объединению целых сдвигов единичного куба. Остается классифицировать все множества такого типа, допускающие самоподобный тайлинг.

Лемма 7. Если множество G является объединением целых сдвигов единичного куба и допускает самоподобный тайлинг \mathcal{T} с неподвижным углом K , то найдется подмножество \mathcal{T} , составляющее тайлинг некоторого прямоугольного параллелепипеда с углом K .

Шаг 8. Итак, множество G является объединением целых сдвигов единичного куба и, поскольку оно подобно T , несколько сдвигов G образуют тайлинг параллелепипеда. Следовательно, центры составляющих G кубов образуют дискретный тайл для параллелепипеда, т.е. его целые сдвиги образуют дискретный параллелепипед. Тогда из [8] следует, что множество центров является прямым произведением одномерных множеств, каждое из которых составляет тайлинг отрезка. Поэтому G является произведением одномерных множеств, состоящих из конечного числа отрезков и допускающих самоподобный тайлинг. Осталось воспользоваться классификацией таких одномерных множеств, данной в параграфе 2 [13, теорема 7].

Схема доказательства теоремы 2. Из теоремы 1 следует, что G состоит из непересекающихся целых сдвигов единичного куба. Взяв достаточно большую итерацию самоподобного тайлинга \mathcal{T} , можно считать, что диаметр тайла меньше 1. Значит, один тайл не может пересекать несколько кубов, т.е. каждый тайл лежит в одном из кубов. Если G состоит из более чем одного куба, то рассмотрим сдвиги тайла $T = M^{-1}G$, лежащие в двух фиксированных кубах. Несложно показать, что векторы $s \in \mathbb{Z}^d$, для которых тайлы $M^{-1}(G + s)$ составляют первый куб, находятся в тех же классах смежности $\mathbb{Z}^d / M\mathbb{Z}^d$, что векторы $s \in \mathbb{Z}^d$ для второго куба. Последнее невозможно, поскольку все эти векторы являются цифрами из D и должны принадлежать разным классам.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование поддержано грантами РФФИ 19-04-01227 и 20-01-00469. Исследование второго автора выполнено при поддержке Гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых (проект № 14.W03.31.0031).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cabrelli C.A., Heil C., Molter U.M. Self-similarity and multiwavelets in higher dimensions // *Memoirs Amer. Math. Soc.* 2004. V. 170. № 807.
2. Gröchenig K., Madych W.R. Multiresolution analysis, Haar bases, and self-similar tilings of \mathbb{R}^n // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1992. V. 38. № 2. P. 556–568.
3. Gröchenig K., Haas A. Self-similar lattice tilings // *J. Fourier Anal. Appl.* 1994. V. 1. № 2. P. 131–170.
4. Krivoshein A., Protasov V.Yu., Skopina M.A. Multivariate wavelets frames. Springer, 2016.
5. Long C.T. Addition theorems for sets of integers // *Pacific J. Math.* 1967. V. 23. № 1. P. 107–112.
6. Lagarias J., Wang Y. Haar bases for $L_2(\mathbb{R}^n)$ and algebraic number theory // *J. Number Theory.* 1996. V. 57. № 1. P. 181–197.
7. Lagarias J., Wang Y. Integral self-affine tiles in \mathbb{R}^n . II. Lattice tilings // *J. Fourier Anal. Appl.* 1997. V. 3. № 1. P. 83–102.
8. Nathanson M.B. Complementing sets of n -tuples of integers // *Proceedings of the American Mathematical Society.* 1972. V. 34. № 1. P. 71–72.
9. Nishio K., Miyazaki T. Describing polyhedral tilings and higher dimensional polytopes by sequence of their two-dimensional components // *Sci Rep.* 2017. V. 7. P. 40269. <https://doi.org/10.1038/srep40269>
10. Novikov I., Protasov V.Yu., Skopina M.A. Wavelets theory // AMS, *Translations Mathematical Monographs.* 2011. 239.
11. Wojtaszczyk P. *A Mathematical Introduction to Wavelets* // London Math. Soc. Stud. Texts, V. 37. Cambridge Univ. Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, 1997.
12. Yang Y.-M., Zhang Y. Tilings of convex polyhedral cones and topological properties of self-affine tiles // *Discrete & Computational Geometry.* 2020. <https://doi.org/10.1007/s00454-020-00249-1>
13. Zaitseva T. Простые тайлы и аттракторы // *Матем. сб.* 2020. V. 211. № 9. P. 24–59.

SELF-AFFINE TILINGS OF POLYHEDRA**Corresponding Member of the RAS V. Yu. Protasov^{a,b} and T. I. Zaitseva^c**^a*DISIM, University of L'Aquila, L'Aquila, Italy*^b*Laboratory "High-dimensional approximation and applications", Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*^c*Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

We obtain a complete classification of polyhedral sets (unions of finitely many convex polyhedra) that admit self-affine tilings, i.e., partitions to parallel shifts of one set which is affinely similar to the initial one. In every dimension there exist infinitely many non-equivalent polyhedral sets possessing this property. Under an additional assumption that the affine similarity is defined by an integer matrix and by integer shifts ("digits") from different quotient classes with respect to this matrix, the only such a polyhedral set is a parallelepiped. Applications to multivariate wavelets and to the Haar systems are discussed.

Keywords: tiling, self-affinity, tile, polyhedron, integer attractor, cone, Haar system

УДК 517.968.72

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2021 г. Н. А. Раутиан^{1,*}

Представлено академиком РАН В. А. Садовничим 28.06.2021 г.

Поступило 08.07.2021 г.

После доработки 08.07.2021 г.

Принято к публикации 18.08.2021 г.

Работа посвящена исследованию абстрактных интегро-дифференциальных уравнений, являющихся операторными моделями задач теории вязкоупругости. В качестве ядер интегральных операторов могут быть рассмотрены, в частности, суммы убывающих экспонент или суммы функций Работнова с положительными коэффициентами, имеющие широкое применение в теории вязкоупругости. Приводится метод сведения исходной начальной задачи для модельного интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Установлено экспоненциальное убывание решений при известных предположениях для ядер интегральных операторов. На основе полученных результатов установлена корректная разрешимость исходной начальной задачи для вольтеррова интегро-дифференциального уравнения с соответствующими оценками решения.

Ключевые слова: вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах, экспоненциальная устойчивость

DOI: 10.31857/S268695432105012X

В статье будет рассмотрено абстрактное интегро-дифференциальное уравнение с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве и представлена общая схема исследования, которую можно применить ко многим другим линейным моделям, содержащим вольтерровы интегральные операторы.

Указанное абстрактное интегро-дифференциальное уравнение может быть реализовано как интегро-дифференциальное уравнение в частных производных, возникающее в теории линейной вязкоупругости (см. [1–6]). К рассматриваемому классу уравнений относятся также интегро-дифференциальные уравнения Гуртина–Пипкина, описывающие процесс распространения тепла в средах с памятью (см. [7, 8]). Кроме того, указанные уравнения возникают в задачах усреднения в многофазных средах (закон Дарси) (см. [9]). В качестве ядер интегральных операторов могут быть рассмотрены, в частности, суммы убывающих экспонент или суммы дробно-экспоненциаль-

ных функций (функций Работнова) с положительными коэффициентами, имеющие широкое применение в теории вязкоупругости (см. [10]).

Представленные в данной работе результаты базируются на подходе, связанном с исследованием линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах (см. [11, 12]), и являются продолжением и развитием исследований, опубликованных в работах [13, 14], посвященных спектральному анализу оператор-функций, являющихся символами вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений.

Следует отметить, что существуют и другие подходы для описания колебаний неоднородных многофазных сред. В качестве примера можно привести подход, связанный с применением эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, изложенный в работе [15].

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряженный положительный оператор $A^* = A \geq \kappa_0 I$ ($\kappa_0 > 0$), действующий в пространстве H . Пусть B – самосопряженный неотрицательный оператор, действующий в

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*E-mail: nrautian@mail.ru

пространстве H с областью определения $D(B)$, такой, что $D(A) \subseteq D(B)$, удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leq \kappa \|Ax\|$, $\kappa > 0$ для любого $x \in \text{Dom}(A)$, I – тождественный оператор в пространстве H .

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + (A + B)u(t) - \int_0^t K_1(t-s)Au(s)ds - \int_0^t K_2(t-s)Bu(s)ds = f(t), \quad (1)$$

$$t \in \mathbb{R}_+, \quad u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \quad (2)$$

Предположим, что ядра интегральных операторов $K_i(t)$, $i = 1, 2$, имеют следующее представление:

$$K_i(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu_i(\tau), \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

где $d\mu_i$ ($i = 1, 2$) – положительные меры, которым соответствуют возрастающие, непрерывные справа функции распределения μ_i , соответственно. Интеграл понимается в смысле Стильеса. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\tau} < 1, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Положим

$$A_0 := \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\right)A + \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\right)B. \quad (5)$$

З а м е ч а н и е 1. Из свойств операторов A и B и неравенства Гайнца (см. [11]) следует, что оператор A_0 , является обратимым, операторы $Q_1 := A^{1/2}A_0^{-1/2}$, $Q_2 := B^{1/2}A_0^{-1/2}$ – допускают ограниченное замыкание в H , A_0^{-1} – ограниченный оператор.

Превратим область определения $D(A_0^\beta)$ оператора A_0^β , $\beta > 0$ в гильбертово пространство H_β , введя на $D(A_0^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A_0^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A_0^β .

О п р е д е л е н и е 1. Будем называть вектор функцию $u(t)$ классическим решением задачи (1), (2), если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t), Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, $u(t)$ удовлетворяет уравне-

нию (1) для каждого значения $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию (2).

2. СВЕДЕНИЕ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Применим формулу интегрирования по частям к интегралам в левой части уравнения (1) и заметим, что $A = A_0^{1/2}Q_1^*Q_1A_0^{1/2}$, $B = A_0^{1/2}Q_2^*Q_2A_0^{1/2}$. Введем новые переменные

$$v(t) := u'(t), \quad \xi_0(t) := A_0^{1/2}u(t),$$

$$\xi_k(t, \tau) = \int_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{du(s)}{ds} ds, \quad (6)$$

$$t > 0, \quad k = 1, 2, \quad \tau \in \bigcup_{k=1}^2 \text{supp} d\mu_k.$$

Введем следующее обозначение:

$$M_k(t) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau} d\mu_k(\tau)}{\tau}, \quad t \geq 0, \quad k = 1, 2. \quad (7)$$

Тогда задача (1), (2) формально может быть приведена к следующей начальной задаче для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dv(t)}{dt} + A_0^{1/2} \left[\xi_0(t) + \sum_{k=1}^2 \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k^* \xi_k(t, \tau) d\mu_k(\tau) \right] = f_1(t),$$

$$\frac{d\xi_0(t)}{dt} = A_0^{1/2}v(t), \quad (8)$$

$$\frac{d\xi_1(t, \tau)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_1 A_0^{1/2}v(t) - \tau \xi_1(t, \tau),$$

$$\frac{d\xi_2(t, \tau)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_2 A_0^{1/2}v(t) - \tau \xi_2(t, \tau),$$

где $t > 0$, $\tau \in \bigcup_{k=1}^2 \text{supp} d\mu_k$, $f_1(t) := f(t) - (M_1(t)A + M_2(t)B)\varphi_0$,

$$v(t)|_{t=0} = \varphi_1, \quad \xi_0(t)|_{t=0} = A_0^{1/2}\varphi_0, \quad \xi_k(t, \tau)|_{t=0} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (9)$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы превратить систему уравнений (8), (9) в начальную задачу в некотором расширенном функциональном пространстве, в котором эта задача будет корректной, а также установить соответствие (не только формальное) между решением задачи (8), (9) и решением исходной задачи (1), (2).

3. ЗАДАЧА КОШИ В РАСШИРЕННОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Через Ω_k обозначим пространства $L^2_{\mu_k}(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H , снабженные нормами

$$\|u\|_{\Omega_k} = \left(\int_0^{+\infty} \|u(s)\|_H^2 d\mu_k(s) \right)^{1/2},$$

соответственно.

Рассмотрим сильно непрерывную мультипликативную полугруппу $L_k(t)$ в пространстве Ω_k (см. [12, с. 65]): $L_k(t)\xi(\tau) = e^{t\tau}\xi(\tau)$, $\xi(\tau) \in \Omega_k$, $t \geq 0$, $\tau \in \text{supp } \mu_k$. Известно, что линейный оператор $\mathbb{T}_k \xi(\tau) = \tau \xi(\tau)$ в пространстве Ω_k с областью определения $D(T_k) = \{\xi \in \Omega_k : \tau \xi(\tau) \in \Omega_k\}$ является генератором полугруппы $L_k(t)$ (см. [12, с. 65]).

Введем операторы $\mathbb{B}_k: H \rightarrow \Omega_k$ и сопряженные операторы $\mathbb{B}_k^*: \Omega_k \rightarrow H$ ($k = 1, 2$) следующим образом:

$$\mathbb{B}_k v = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \quad \mathbb{B}_k^* \xi(\tau) = Q_k^* \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau) d\mu_k(\tau),$$

$$k = 1, 2, \quad \tau \in \text{supp } d\mu_k.$$

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbb{H} = H \oplus H \oplus (\oplus_{k=1}^2 \Omega_k)$, снабженное нормой

$$\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\|_{\mathbb{H}}^2 = \|v\|_H^2 + \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \|\xi_k(\tau)\|_{\Omega_k}^2,$$

$$\tau \in \bigcup_{k=1}^2 \text{supp } d\mu_k,$$

которое будем называть расширенным гильбертовым пространством.

Введем линейный оператор \mathbb{A} в пространстве \mathbb{H} с областью определения

$$D(\mathbb{A}) = \{(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2}, \xi_0 + \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2}, \xi_k(\tau) \in D(T_k), k = 1, 2\},$$

действующий следующим образом:

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))^T = \left(-A_0^{1/2} \left[\xi_0 + \sum_{k=1}^2 \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \right], A_0^{1/2} v, B_k A_0^{1/2} v - \mathbb{T}_k \xi_k(\tau), k = 1, 2 \right)^T.$$

Введем четырехкомпонентные векторы вида

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau)) \in \mathbb{H},$$

$$z = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), \xi_{20}(\tau)) \in \mathbb{H}.$$

Теперь мы можем переписать систему (8), (9) в виде дифференциального уравнения первого порядка в расширенном функциональном пространстве. Рассмотрим следующую задачу Коши в пространстве \mathbb{H} :

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A}Z(t), \tag{10}$$

$$Z(0) = z. \tag{11}$$

Определение 2. Вектор $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau)) \in \mathbb{H}$ называется классическим решением задачи (10), (11), если $v(t), \xi_0(t) \in C^1((0, +\infty), H)$, $\xi_k(t, \tau) \in C^1((0, +\infty), H)$, $k = 1,$

2, по переменной t , для любого $\tau \in \bigcup_{k=1}^2 \text{supp } d\mu_k$, $Z(t) \in C([0, +\infty), D(\mathbb{A}))$, вектор $Z(t)$ удовлетворяет уравнению (10) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию (11).

Определение 3 (см. [11]). Линейный оператор \mathcal{A} с областью определения, плотной в гильбертовом пространстве, называется диссипативным, если $\text{Re}(\mathcal{A}x, x) \leq 0$ при $x \in D(\mathcal{A})$ и максимально диссипативным, если он диссипативен и не имеет нетривиальных диссипативных расширений.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (4). Тогда оператор \mathbb{A} в пространстве \mathbb{H} с плотной областью определения $D(\mathbb{A})$ является максимально диссипативным.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (4). Тогда линейный оператор \mathbb{A} является генератором сжимающей C_0 -полугруппы $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ в пространстве \mathbb{H} , при этом решение задачи (10), (11) представимо в виде $Z(t) = S(t)z$, $t > 0$, и для любого $z \in D(\mathbb{A})$ справедливо энергетическое равенство

$$\frac{d}{dt} \|S(t)z\|_{\mathbb{H}}^2 = -2 \left(\int_0^{+\infty} \|\xi_1(t, \tau)\|_H^2 d\mu_1(\tau) + \int_0^{+\infty} \|\xi_2(t, \tau)\|_H^2 d\mu_2(\tau) \right). \tag{12}$$

4. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Перед формулировкой теоремы об экспоненциальной устойчивости сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 1. Существует такое $\gamma > 0$, что для всех $p > 0$ справедливо неравенство

$$-\int_0^{+\infty} \tau e^{-\rho\tau} d\mu_k(\tau) + \gamma \int_0^{+\infty} e^{-\rho\tau} d\mu_k(\tau) \leq 0, \quad k = 1, 2. \quad (13)$$

Приведем результат об экспоненциальной устойчивости полугруппы $S(t), t \geq 0$, в предположении, что H – сепарабельное вещественное гильбертово пространство.

Теорема 3. Пусть $S(t)z$ – решение задачи (10), (11) при $t > 0$ и выполнены условия (4). Тогда справедливо неравенство

$$\|S(t)z\|_{\mathbb{H}} \leq \sqrt{3}\|z\|_{\mathbb{H}} e^{-\omega t} \quad (14)$$

для любого $z \in \mathbb{H}$. При этом $\omega = \max_{\beta > 0} \omega_\beta$, $\omega_\beta =$

$$= \frac{1}{6} \min \left\{ \frac{\gamma}{\gamma_1(\beta)}; \frac{1}{\gamma_2(\beta)} \right\},$$

$$\gamma_1(\beta) := \max_{k=1,2} \left\{ \frac{3}{M(\beta)} \left[(3 + M_k(\beta) + (2\lambda_0)^{-1}) \|Q_k^{-1}\|^2 + M_k(0) \left(1 + \frac{2}{3} M(\beta) \right) \|Q_k\|^2 \right] + \frac{1}{2} \right\},$$

$$\gamma_2(\beta) := \frac{3}{M(\beta)} \max \left\{ 1, \frac{2}{\lambda_0} \cdot \max_{k=1,2} \{ \|Q_k^{-1}\|^2 M_k(\beta) \} \right\} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}},$$

где $\gamma > 0$ определяется неравенством (13), $\lambda_0 =$

$$= \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in D(A_0)}} (A_0 x, x), \quad M(\beta) := \sum_{k=1}^2 M_k(\beta).$$

5. КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A}Z(t) + F(t), \quad (15)$$

$$Z(0) = z. \quad (16)$$

Будем предполагать, что вектор-функция $F(t)$ имеет вид $F(t) := (f_1(t), 0, 0, 0), f_1(t) = f(t) - (M_1(t)A + M_2(t)B)\varphi_0$, где $M_k(t), k = 1, 2$, определяются формулами (7), вектор имеет вид $z = (\varphi_1, A_0^{1/2}\varphi_0, 0, 0)$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (4) и следующие условия:

1) вектор-функция $A_0^{1/2}f(t) \in C([0, +\infty), H)$ и векторы $\varphi_0 \in H_{3/2}, \varphi_1 \in H_{1/2}$; или

2) вектор-функция $f(t) \in C^1([0, +\infty), H)$, функции $M_k(t) \in C^1([0, +\infty))$, $k = 1, 2$, векторы $\varphi_0 \in H, \varphi_1 \in H_{1/2}$.

Тогда задача (15), (16) имеет единственное классическое решение $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau))$,

где $v(t) := u'(t), \xi_0(t) := A_0^{1/2}u(t), u(t)$ – классическое решение задачи (1), (2) и справедлива следующая оценка:

$$E(t) := \frac{1}{2} (\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2) \leq \frac{1}{2} \|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq d \left[(\|\varphi_1(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2) + \left(\int_0^t \|f(s) - (M_1(s)A + M_2(s)B)\varphi_0\|_H ds \right)^2 \right] \quad (17)$$

с постоянной d , не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1 .

Если выполнены условия теоремы и H – сепарабельное вещественное гильбертово пространство, то для решения $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau))$, где $v(t) := u'(t), \xi_0(t) := A_0^{1/2}u(t), u(t)$ – классическое решение задачи (1), (2), справедлива следующая оценка:

$$E(t) := \frac{1}{2} (\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2) \leq \frac{1}{2} \|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq d \left[(\|\varphi_1(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2) e^{-2\omega t} + \left(\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \|f(s) - (M_1(s)A + M_2(s)B)\varphi_0\|_H ds \right)^2 \right] \quad (18)$$

с постоянной d , не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1 , и постоянной ω , определенной в формулировке теоремы 3.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Теоремы 1 и 3 доказаны при финансовой поддержке Минобрнауки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621. Теоремы 2 и 4 доказаны при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований РФФИ, проект № 20-01-00288.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильющин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
2. Christensen R.M. Theory of viscoelasticity. An introduction. N.Y., L.: Academic Press, 1971. 364 p.
3. Kopachevsky N.D., Krein S.G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. V. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids // Operator Theory: Advances and Applications. Basel/Switzerland: Birkhauser Verlag, 2003. V. 146. 444 p.

4. *Munoz Rivera J.E.* Asymptotic behaviour in linear viscoelasticity // *Quart. Appl. Math.* 1994. V. 52. P. 629–648.
5. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with memory. N.Y., Dordrecht; Heidelberg; L.: Springer. Theory and applications, 2012. 576 p.
6. *Локшин А.А., Суворова Ю.В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982. 152 с.
7. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* General theory of heat conduction with finite wave speed // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1968. V. 31. P. 113–126.
8. *Лыков А.В.* Тепломассообмен: Справочник. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергия, 1978. 480 с.
9. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
10. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
11. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1967. 464 с.
12. *Engel K.J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 2000. 586 p.
13. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* Correct solvability and representation of solutions of volterra integrodifferential equations with fractional exponential kernels // *Doklady Mathematics.* 2019. V. 100. № 2. P. 467–471.
14. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* A Study of Operator Models Arising in Problems of Hereditary Mechanics // *Journal of Mathematical Sciences (N.Y.).* 2020. V. 244. № 2. P. 170–182.
15. *Skubachevskii A.L.* Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications // *Russian Mathematical Surveys.* 2016. V. 71. № 5. P. 801–906.

CORRECT SOLVABILITY AND EXPONENTIAL STABILITY FOR SOLUTIONS OF VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

N. A. Rautian^a

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.A. Sadovnichii

The work is devoted to the study of abstract integro-differential equations, which are operator models of the viscoelasticity theory problems. The sums of decreasing exponents or sums of Rabotnov functions with positive coefficients can be considered in particular as the kernels of integral operators, which are widely used in the theory of viscoelasticity. The method of converging of the initial problem for a model integro-differential equation with operator coefficients in Hilbert space to the Cauchy problem for a first-order differential equation is given. Exponential stability of solutions is established under known assumptions for kernels of integral operators. The correct solvability of the initial problem for the Volterra integro-differential equation with the corresponding solution estimates are established on the basis of the obtained results.

Keywords: Volterra integro-differential equations, linear differential equations in Hilbert spaces, exponential stability

УДК 531.19

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА С МОДИФИЦИРОВАННЫМ ГРАВИТАЦИОННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2021 г. Т. В. Сальникова^{1,*}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 28.04.2021 г.

Поступило 28.04.2021 г.

После доработки 12.07.2021 г.

Принято к публикации 18.08.2021 г.

Рассмотрена система взаимно гравитирующих частиц с возможными столкновениями, которые мы моделируем путем добавления к гравитационному потенциалу потенциала отталкивающих сил типа межмолекулярных сил Леннарда-Джонса. При бесконечном числе частиц функция плотности распределения вероятности определяется кинетическим уравнением Власова с модифицированным гравитационным потенциалом. С помощью метода энергии–Казимира доказываются существование большого класса нелинейно устойчивых равновесных решений этого уравнения.

Ключевые слова: метод энергии–Казимира, нелинейная устойчивость, потенциал типа Леннарда-Джонса

DOI: 10.31857/S2686954321050131

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения типа Власова содержат в себе решения задачи N тел для любого N . Это свойство делает их сверхфундаментальными. Уравнение Власова имеет микроскопические решения, соответствующие точным решениям классической механики. Это свойство используется и при выводе из цепочки Боголюбова, и при аппроксимации непрерывного решения с помощью этих микроскопических решений в виде суммы дельта-функций. Тот факт, что уравнение Власова имеет микроскопические решения, полезен для обоснования метода частиц в численных расчетах. Под уравнением Власова понимается обычно следующее уравнение для произвольного потенциала $K(x, y)$ парного взаимодействия частиц:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left(v, \frac{\partial F}{\partial x} \right) - \left(\nabla_x \int K(x, y) F(t, v, y) dv dy, \frac{\partial F}{\partial v} \right) = 0.$$

Рассмотрим подстановку

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: tatiana.salnikova@gmail.com

$$F(t, v, x) = \sum_{i=1}^N \rho_i \delta(v - V_i(t)) \delta(x - X_i(t)).$$

Здесь $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $X_i(t)$ и $Y_i(t)$ – функции времени, координат и скоростей частиц, $\rho_i > 0$ – числа (веса частиц). Такая подстановка проходит, если X_i и Y_i удовлетворяют уравнениям движения N тел:

$$\dot{X}_i = V_i,$$

$$\dot{Y}_i = - \sum_{j=1}^N \nabla_1 K(X_i, X_j) \rho_j,$$

где ∇_1 – вектор градиента по первому аргументу. Такие решения называются микроскопическими – либо подстановкой в виде конечного числа частиц, либо подстановкой в виде суммы дельта-функций [1–4]. Уравнения гидродинамического типа получают из системы кинетических уравнений, последовательно интегрируя и вводя моменты:

плотность частиц

$$\rho = \int f(t, x, v) d^3 v,$$

математическое ожидание импульса или средний импульс

$$P_i(x, t) = \frac{1}{\rho} \int v_i f(t, x, v) d^3 v,$$

дисперсия по импульсам, которая пропорциональна энергии хаотического движения

$$D = \frac{1}{\rho} \int (v - P)^2 f(t, x, v) d^3 v.$$

Пусть $U = U(t, x)$ – гравитационный потенциал, $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^3$. Для произвольной точки $m(x, v)$:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{y} = -\partial_x U(t, x). \quad (1)$$

Для описания эволюции всего ансамбля точек введем функцию плотности $f = f(t, x, v) \geq 0$ на фазовом пространстве $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, $\int \int f(t, x, v) dv dx = M$. Если столкновениями частиц можно пренебречь, то функция f постоянна вдоль решений уравнений (1) и удовлетворяет закону сохранения первого порядка на фазовом пространстве, характеристической системой которого являются уравнения движения (1) одиночной пробной частицы:

$$\partial_t f + v \partial_x f - \partial_x U \partial_v f = 0. \quad (2)$$

Пространственная плотность массы $\rho = \rho(t, x)$, индуцированная f , определяет гравитационный потенциал U с обычным граничным условием на пространственной бесконечности:

$$\Delta U = 4\pi\rho, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} U(t, x) = 0, \quad (3)$$

$$\rho(t, x) = \int f(t, x, v) dv. \quad (4)$$

Тогда (2)–(4) – уравнения Власова–Пуассона, замкнутая нелинейная система уравнений в частных производных, определяющая временную эволюцию самогравитирующего бесстолкновительного ансамбля частиц. Помимо нелинейности, особая математическая сложность этой системы заключается в том, что уравнение в фазовом пространстве связано с уравнением в конфигурационном пространстве. Уравнение (2) легко дает априорные оценки L_p -норм функции $f(t)$ для любых $p \in [1, \infty)$, но после интегрирования по v сохраняется только L_1 -оценка на $\rho(t)$, что не дает хорошей оценки для $\partial_x U$. Важное предположение состоит в том, что ансамбль частиц достаточно велик, чтобы обосновать описание гладкой функцией плотности на фазовом пространстве, и что столкновения достаточно редки, чтобы ими можно было пренебречь. Если же нужно учитывать столкновения, то оператор столкновений Больц-

мана заменяет нуль в правой части уравнения Власова (2). Функция плотности распределения вероятности определяется системой уравнений Власова–Больцмана–Пуассона [5].

В математических моделях столкновения между частицами можно описывать различными способами. Можно использовать теорию неупругого удара твердых тел с коэффициентом восстановления Ньютона для относительной скорости отскакивающих частиц. При компьютерном моделировании основная трудность этого подхода состоит в отслеживании и уточнении громадного числа моментов времени соударений частиц. Другая математическая модель, предложенная в [6], состоит в добавлении к гравитационному потенциалу потенциала отталкивающих сил типа межмолекулярных сил типа Леннарда-Джонса. Численные эксперименты показали, что при выполнении условия устойчивости по Якоби обе модели приводят к качественно идентичному характеру эволюции системы, с образованием устойчивых конфигураций. В настоящем исследовании обсуждается кинетическое уравнение Власова с модифицированным гравитационным потенциалом – потенциалом типа Леннарда-Джонса, который обеспечит “сглаженное” контактное взаимодействие системы взаимно гравитирующих частиц. К гравитационному потенциалу добавляется потенциал силы отталкивания, позволяющий учитывать размеры частиц и избегать сингулярностей, характерных для гравитационного потенциала. Для частиц, например, однородных шаров с массами m_i, m_j , центры которых находятся на расстоянии r , потенциал типа Леннарда-Джонса имеет вид

$$V(r) = -\frac{\gamma m_i m_j}{r} + \frac{k}{r^\alpha}, \quad \alpha > 1,$$

где γ – гравитационная постоянная, коэффициент k можно выбрать из условия, чтобы на расстоянии, равном сумме радиусов шаров, силы притяжения и отталкивания равнялись по величине. Показатель степени $\alpha \in (1, 2)$. Несложно получить из теоремы об изменении момента инерции системы, с помощью формулы Эйлера для однородных функций, что для потенциала вида r^{-2} не выполняется необходимое условие устойчивости Якоби.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы собираемся доказывать существование и нелинейную устойчивость стационарных состояний предлагаемой динамической модели с модифицированным гравитационным потенциалом. При этом, в отличие от множества работ по этой теме для гравитационных и электромагнитных взаимодействий частиц, в нашей системе не присутствует уравнение Пуассона. Эволюция систе-

мы взаимно гравитирующих частиц со “сглаженными” столкновениями подчиняется уравнению Власова (2), где $t \in \mathbf{R}$ – время, $x \in \mathbf{R}^3$ – положения частиц, $v \in \mathbf{R}^3$ – скорости частиц,

$$\rho(t, x) = \int f(t, x, v) dv$$

есть пространственная плотность вероятности – некоторое обобщение принятого в случае гравитационного взаимодействия определения массы частиц. Модифицированный гравитационный потенциал запишем в следующем виде:

$$U(r) = -\frac{1}{r} + \frac{1}{r^\alpha}, \quad \alpha \in (1, 2).$$

Целью работы является доказательство динамической устойчивости системы вследствие получения устойчивых состояний как минимизирующих решений функционала энергии–Казимира.

1. Метод функционалов энергии–Казимира

В развитие метода А.М. Ляпунова исследования нелинейной устойчивости равновесных решений, В.И. Арнольд предложил в [7, 8] для гамильтоновых систем с гамильтонианом H и с дополнительными коммутирующими интегралами C исследовать $(H + C)$, выбирая функцию Казимира C так, чтобы функция $(H + C)$ имела критическую точку на стационарном решении. В.И. Арнольд использовал свойства выпуклости $(H + C)$, чтобы найти явную норму и априорные оценки, необходимые для ограничения конечных отклонений от состояния равновесия. Эти оценки позволяют доказать нелинейную устойчивость, тогда как обычно используемые вторая вариация или спектральные аргументы доказывают только линеаризованную устойчивость [9]. Заметим, кстати, что для системы $\dot{x} = v(x), x \in D \subset \mathbf{R}^n$ с первыми интегралами известна теорема Рауса о том, что точки строгого локального минимума или максимума одного интеграла на фиксированных уровнях остальных интегралов определяют устойчивые стационарные движения системы.

Итак, отправной точкой настоящего исследования является общий метод утверждения нелинейной устойчивости для бесконечномерных гамильтоновых систем, представленный в [8]. Строгое применение этого метода к системам Власова–Пуассона в различных ситуациях представлено в многочисленных работах Герхарда Рейна, в том числе с соавторами (Яном Го и др.) [5, 10–13]. Ключевое отличие рассматриваемой задачи состоит в том, что для модифицированного потенциала с параметром $\alpha \in (1, 2)$ отсутствует уравнение Пуассона. Так что наша стратегия доказательства суще-

ствования нелинейно устойчивых стационарных состояний будет следующей. Соответствующий уравнению Власова для задачи с модифицированным гравитационным потенциалом фазовый поток уравнений характеристик сохраняет фазовый объем. Тогда для любой разумно выбранной функции Φ так называемый функционал Казимира

$$C(f) = \iint \Phi(f(x, v)) dv dx$$

будет также сохраняться. Гамильтониан $\mathcal{H} = E_{kin}(f) + E_{pot}(f)$ не имеет критических точек, если брать в качестве пространства состояний пространство всех плотностей фазового пространства f , то линейная часть продолжения в окрестности некоторого устойчивого состояния f_0 с потенциалом U_0 не исчезает, однако для функционала энергии–Казимира

$$\mathcal{H}_C = \mathcal{H} + C$$

соответствующие устойчивые состояния есть критические точки. (Критические точки гамильтониана, ограниченного на многообразии, которое определяется связью $C(f) = C(f_0)$.) Вместо анализа устойчивости некоторого состояния мы будем исследовать функционал Φ – будет ли этот функционал достигать минимума на подходящем множестве состояний f . Такой минимизатор, если существует, является критической точкой функционала \mathcal{H}_C , следовательно, это должно быть устойчивым состоянием. Его минимизирующее свойство приводит к утверждению устойчивости.

В этом исследовании есть два подхода – две различные вариационные задачи, определяемые ролью функционала Казимира.

Первая – доказать, что функционал \mathcal{H}_C имеет минимизирующую плотность $f_0 \in \mathcal{F}_M$, такую, что

$$\mathcal{H}_C(f) \geq \mathcal{H}_C(f_0)$$

для всех $f \in \mathcal{F}_M$, где ограничивающее множество есть

$$\mathcal{F}_M = \left\{ f \in L^1_+(\mathbf{R}^6) / \iint f(t, x, v) dv dx = M, \right. \\ \left. E_{kin}(f) + C(f) < \infty \right\}.$$

Вторая вариационная задача – доказать, что функционал \mathcal{H} имеет минимизирующую функцию $f_0 \in \mathcal{F}_{MC}$, где ограничивающее множество определено как

$$\mathcal{F}_{MC} = \left\{ f \in L^1_+(\mathbf{R}^6) / \iint f(t, x, v) dv dx + C(f) = M, \right. \\ \left. E_{kin}(f) < \infty \right\}.$$

Во всех случаях параметр $M > 0$ — это заданное положительное число. В первой задаче функционал Казимира является частью функционала, который нужно минимизировать, а во второй вариационной задаче — это часть ограничения [5]. Мы обратимся ко второй вариационной задаче.

1.1. Вторая вариационная задача

В нашей модели уравнение Власова, описывающее эволюцию функции фазовой плотности $f(x, v, t)$ частиц, взаимодействующих с модифицированным трехмерным гравитационным потенциалом типа Леннарда-Джонса, имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \nabla_x f - \nabla_x U \nabla_v f = 0,$$

$$U(x) = -\int \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy + \int \frac{\rho(y)}{|x-y|^\alpha} dy,$$

$$\rho(x, t) = \int f(t, x, v) dv.$$

Сохраняющаяся полная энергия системы \mathcal{H} содержит слагаемые разных знаков. Очевидная трудность состоит в том, чтобы контролировать формы энергии по отдельности. С этой целью можно интерполировать потенциальную энергию из кинетической энергии и из пространства Лебега L_p , сохранение которого обеспечивается инвариантностью функционалов Казимира, т.е. потенциальная энергия может контролироваться интерполяцией между инвариантами системы и кинетической энергией, со степенью кинетической энергии строго меньше единицы. Для гравитационного потенциала степень равна $1/2$, трехмерная система Власова–Пуассона является докритической. (По аналогии с дисперсионными уравнениями в частных производных, в случае такого уравнения, в котором гамильтониан состоит из двух членов противоположного знака, которые могут расходиться при балансировке, говорят об уравнении фокусировки; и когда такой контроль над потенциальной энергией может быть установлен, это называется докритическим уравнением. Когда такой контроль возможен, но со степенью потенциальной энергии, равной единице, говорят о критическом уравнении. Когда такое управление возможно только при мощности, строго превышающей 1, говорят о сверхкритических уравнениях, для которых обычно ожидается явления взрыва с течением времени) [14].

Задача Коши для системы Власова–Пуассона хорошо изучена. После множества предварительных результатов в 1989 г. независимо и почти одновременно были даны два разных доказательства глобального существования классических решений для общих данных, одно К. Пфаффель-

мозером, а другое П.-Л. Лайонсом и Б. Пертхэмом. В отличие от задачи N тел глобальное существование получается как для случая отталкивания, так и для случая притяжения. В первом случае полная энергия положительно определена, а во втором — неопределенная, однако при этом одни и те же априорные оценки могут быть получены в обоих случаях.

В рассматриваемой нами системе с потенциалом типа Леннарда-Джонса к отрицательному члену гравитационного потенциала добавился положительный, со степенью α в знаменателе: $\alpha \in (1, 2)$, так что потенциальная энергия имеет вид

$$E_{pot} = -\iint \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|} dx dy + \iint \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|^\alpha} dx dy = E_g + E_\alpha.$$

В дополнение к известным оценкам для гравитационной части потенциальной энергии нам необходимо получить аналогичные оценки для различных значений параметра α . Воспользуемся неравенством Соболева оценки для свертков в L_p .

Пусть $0 < \lambda < n$, и пусть $f \in L_p(\mathbf{R}^n); h \in L^r(\mathbf{R}^n)$, где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{\lambda}{n} = 2, \quad p > 1, \quad r < \infty.$$

Тогда

$$\iint \frac{|f(x)||f(y)|}{|x-y|^\lambda} d^n x d^n y \leq C_{p,r,\lambda,n} \|f\|_p \|f\|_r.$$

Доказательство следует из неравенства Юнга и интерполяционной теоремы Марцинкевича [15].

Пусть $\lambda = 1: \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{3} = 2$ ($n = 3$), следовательно, $p = 6/5$, и мы получаем известную ранее оценку для гравитационного потенциала

$$|E_g| \leq C \| \rho \|_{6/5}^2.$$

Пусть $\lambda = 2: \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{2}{3} = 2$ ($n = 3$), следовательно, $p = 3/2$, и мы получаем оценку для потенциала

$$|E_2| \leq C \| \rho \|_{3/2}^2.$$

Пусть $\lambda = \alpha: \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{3} = 2$ ($n = 3$), следовательно, $p = 6/(6 - \alpha)$, и мы получаем оценку для потенциала

$$|E_\alpha| \leq C \| \rho \|_{6/(6-\alpha)}^2.$$

Например, для $\alpha = 6/5, p = 5/4$, для $\alpha = 3/2, p = 4/3$.

Чтобы знать о достаточной регулярности осредненного силового поля и иметь возможность определять характеристические кривые для соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений характеристик, надо знать зависимость от функции плотности распределения для больших скоростей. Пространственная плотность ограничена в соответствующей норме кинетической энергией

$$E_{kin}(f) := \int |v|^2 f(x, v) dv dx,$$

так как E_{kin} является моментом второго порядка по скорости от f , а ρ_f – моментом нулевого порядка. Для $p \in [1, \infty)$ известна оценка целостности пространственной плотности [5, 14]. Применяя эту формулу для различных значений параметра $\alpha \in (1, 2)$, мы получим для нашей модели для $\|\rho\|_p$ оценку кинетической энергией в соответствующей степени и далее оценку потенциальной энергии. В частности, для приведенных выше оценок для $\alpha = 1, 6/5, 3/2, 2$, имеем следующие неравенства:

$$\alpha = 1, \quad |E_g| \leq C \|\rho\|_{6/5}^2 \leq \tilde{C} E_{kin}(f)^{1/2}$$

есть известная ранее оценка для гравитационного потенциала;

$$\alpha = 6/5, \quad |E_\alpha| \leq C \|\rho\|_{5/4}^2 \leq \tilde{C} E_{kin}(f)^{3/5},$$

$$\alpha = 3/2, \quad |E_\alpha| \leq C \|\rho\|_{4/3}^2 \leq \tilde{C} E_{kin}(f)^{3/4},$$

$$\alpha = 2, \quad |E_2| \leq C \|\rho\|_{3/2}^2 \leq \tilde{C} E_{kin}(f).$$

Последняя оценка приведена для полноты картины, мы не рассматриваем $\alpha = 2$ в рамках нашей модели.

2. Динамическая устойчивость

Динамическая переменная – плотность $f(t, x, v)$ в фазовом пространстве – индуцирует пространственную плотность $\rho(t, x)$. Любой минимизатор f_0 функционала \mathcal{H} на множестве \mathcal{F}_{MC} будет устойчивым по Ляпунову стационарным состоянием:

$$f_{in} \geq 0, \quad f_{in} \in L_1 \cap L_\infty(\mathbf{R}^6);$$

$$\mathcal{D}(f_{in}, f_0) := \|(f_{in} - f_0)\|_{L_1(\mathbf{R}^6)} + |\mathcal{H}(f_{in}) - \mathcal{H}(f_0)| \leq \delta$$

$$\Rightarrow \forall t \geq 0, \quad \mathcal{D}(f_t, f_0) \leq \varepsilon$$

(Если $f_0(\cdot - z(t), \cdot)$, то говорят об орбитальной устойчивости.)

Для стационарных решений $f_0(x, v) = \varphi(E) = \varphi(E(x, v))$ – изотропное установившееся состояние. Простейший пример функции, удовлетворяющей свойствам компактности, это политропные модели: $f_0(x, v) = (E_0 - E)_+^k$, где $(\cdot)_+$ обозначает положительную часть, $E = v^2/2 + U_0(x)$ – энергия частицы, сохраняющаяся вдоль характеристик уравнения Власова, $E_0 \in \mathbf{R}$ – некоторая отрицательная константа (далее – множитель Лагранжа), $-1/2 < k < 7/2$ [10]. Для политропных моделей ассоциированное пространственное распределение такое же, как для самогравитирующего газа, что подтверждает закон давления политропных газов. Решение имеет компактный носитель и конечную массу – необходимое ограничение для стационарных состояний. Случай $k > 7/2$ приводит к решениям с бесконечно малой массой и с некомпактным носителем. В предельном случае $k = 7/2$ (сфера Пламмера) масса конечна, но некомпактный носитель [14].

Для функционала Казимира конкретизируем условия, накладываемые на функцию Φ . Строго выпуклая функция $\Phi \in C^1([0, \infty), \Phi(0) = 0 = \Phi'(0); \Phi(f) \geq C f^{1+1/k}$ для больших $f \geq 0$, при $0 < k < 7/2$.

Ключевой момент настоящего исследования – это доказательство существования минимизатора функционала энергии на ограничивающем множестве, определенном заданными константами.

3. Теорема о существовании минимизатора

Теорема. Пусть функция $\Phi(f)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям. Тогда функционал энергии \mathcal{H} ограничен снизу на множестве \mathcal{F}_{MC} с $h_M := \inf_{\mathcal{F}_{MC}}(\mathcal{H}) < 0$. Пусть $(f_j) \subset \mathcal{F}_{MC}$ – минимизирующая последовательность функционала \mathcal{H} , такая что $\mathcal{H}(f_j) \rightarrow h_{MC}$. Тогда существует функция $f_0 \in \mathcal{F}_{MC}$, подпоследовательность (\tilde{f}_j) и последовательность сдвигов векторов $(a_j) \subset \mathbf{R}^3$, так что

$$\mathcal{T}^{a_j} \tilde{f}_j := \tilde{f}_j(\cdot - a_j, \cdot) \text{ слабо сходится к } f_0 \text{ в } L^{1+1/k}(\mathbf{R}^6), \text{ при } j \rightarrow \infty,$$

$$\mathcal{T}^{a_j} \Delta U_{\tilde{f}_j} = \Delta U_{\tilde{f}_j}(\cdot - a_j, \cdot) \text{ сильно сходится к } \Delta U_{f_0} \text{ в } L^2(\mathbf{R}^3), \text{ при } j \rightarrow \infty, \text{ а } f_0 \text{ является минимизатором функционала энергии: } \mathcal{H}(f_0) = h_{MC}.$$

Доказательство теоремы для нашего случая модифицированного гравитационного потенциала существенно опирается на работы для гравитационного потенциала [5, 10, 12]. Для добавленного потенциала сил отталкивания с параметром α при проверке условий соответствующих лемм

используются полученные нами выше оценочные неравенства.

Перечислим основные моменты доказательства. Существует отрицательная нижняя граница функционала энергии. Тогда существующая минимизирующая последовательность ограничена в $L^{1+1/k}$. Значит, существует слабо сходящаяся подпоследовательность, и ее слабый предел — это кандидат в минимизатор f_0 . Тогда нам нужно перейти к пределу во всех трех частях функционала энергии. Для кинетической энергии это сделать легко, используя выпуклость Φ и лемму Мазура. Основная трудность в потенциальной энергии, для которой нужно доказать, что индуцированные силовые поля сильно сходятся в L^2 . А так как они не зависят напрямую от f , а только от индуцированной пространственной плотности ρ_f , то есть необходимость перейти к редуцированному потенциалу, который определяется на подходящем наборе пространственных плотностей. Поэтому вопрос о существовании минимизатора переносится в приведенную вариационную задачу в терминах пространственных плотностей. Такой подход описан в работах [5, 12, 13]. Потенциальная энергия ограничена для состояний на ограниченном множестве, где убирается зависимость от скоростей. Чтобы доказать, что силовые поля, индуцированные минимизирующими последовательностями, сильно сходятся, т.е. выполняется свойство компактности, нужно, чтобы последовательности ρ_f были сконцентрированы. Это проверяется при оценках поведения системы при изменении масштаба. Далее доказывается, что минимизирующие последовательности не исчезают и что не исчезающие слабо сходящиеся минимизирующие последовательности остаются сконцентрированными. Следовательно, силовые поля сильно сходятся, и существование минимизатора доказано. Теоремы о том, что минимизаторы являются равновесными решениями, и об их динамической устойчивости приведены в [5].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказано существование устойчивых по Ляпунову равновесных решений уравнения Власова, описывающего эволюцию функции фазовой плотности системы взаимно гравитирующих частиц с возможными столкновениями. Вместо анализа устойчивости какого-то конкретного равновесного состояния исследуется функционал функции фазовой плотности — достигнет ли этот функционал минимума на подходящем наборе состояний f . Такой минимизатор, если он существует, является критической точкой функционала энергии, а его свойство минимизации приводит к утверждению устойчивости.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит Герхарда Рейна за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов А.А.* Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. 356 с.
2. *Веденяпин В.В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
3. *Козлов В.В.* Обобщенное кинетическое уравнение Власова // УМН. 2008. Т. 63. № 4 С. 93–130.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика Т. 10. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
5. *Rein G.* Collisionless Kinetic Equations from Astrophysics : The Vlasov-Poisson System Dafermos, Constantine M.; Feireisl, E. (Hrsg.): Handbook of Differential Equations : Evolutionary Equations. V. 3 Amsterdam: Elsevier, 2007. P. 383–476.
6. *Сальникова Т.В., Кузусев Е.И., Степанов С.Я.* Устойчивость по Якоби системы многих тел с модифицированным потенциалом // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. С. 90–91.
7. *Arnold V.I.* Conditions for nonlinear stability of the stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid // Doklady Mat. Nauk. 1969a. V. 162. № 5. P. 773–777.
8. *Arnold V.I.* Variational principle for three dimensional steady-state flows of an ideal fluid // J. Appl. Math. Mech. 1965b. V. 29. P. 1002–1008.
9. *Holm D. D., Marsden J. E., RatiuT., A. Weinstein A.* Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria // Physics Reports. 1985. V. 123. Nos. 1 and 2. P. 1–116.
10. *Guo Y., Rein G.* Isotropic steady states in galactic dynamics // Comm. Math. Phys. 2001. V. 219. P. 607–629.
11. *Guo Y., Rein G.* Stable models of elliptical galaxies // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2003. V. 344. P. 1396–1406.
12. *Rein G.* Reduction and a concentration-compactness principle for energy- Casimir functionals // SIAM J. Math. Anal. 2002. V. 33. P. 896–912.
13. *Firt R., Rein G.* Stability of disk-like galaxies: Part I: Stability via reduction in Analysis. 2007. V. 26. Iss. 4. P. 507–525
14. *Mouhot C.* Stabilité orbitale pour le système de Vlasov–Poisson gravitationnel. arXiv:1201.2275v2 math.AP.
15. *Marcinkiewicz J.* Sur l'interpolation d'opérations // C. R. Acad. Sc. Paris. Т. 208. 1939. P. 1272–1273. |JFM 65.0506.03 | Zbl 0021.01601

EXISTENCE AND STABILITY OF EQUILIBRIUM SOLUTIONS OF THE VLASOV EQUATION WITH A MODIFIED GRAVITATIONAL POTENTIAL

T. V. Salnikova^a

^a Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

We consider a system of mutually gravitating particles with possible collisions, which we simulate by adding to the gravitational potential the potential of repulsive forces similarly such as Lennard-Jones intermolecular forces. For an infinite number of particles, the probability density function is determined by the Vlasov kinetic equation with a modified gravitational potential. Using the energy-Casimir method, the existence of a large class of nonlinearly stable equilibrium solutions of this equation is proved.

Keywords: energy-Casimir method, nonlinear stability, Lennard-Jones type potential

УДК 517.929

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2021 г. А. Л. Скубачевский^{1,2,*}, Н. О. Иванов^{1,**}

Представлено академиком РАН Ю.С. Осиповым 17.08.2021 г.

Поступило 20.08.2021 г.

После доработки 20.08.2021 г.

Принято к публикации 02.09.2021 г.

Рассматривается вторая краевая задача для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на интервале $(0, d)$. Получено необходимое и достаточное условие существования обобщенного решения. Доказано, что если правая часть уравнения ортогональна в $L_2(0, d)$ некоторым функциям, то обобщенное решение из пространства Соболева $W_2^1(0, d)$ будет принадлежать пространству $W_2^2(0, d)$.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, обобщенные решения, краевая задача

DOI: 10.31857/S2686954321050155

ВВЕДЕНИЕ

Обобщенные решения первой краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа на конечном интервале $(0, d)$ впервые рассматривались в работах [1, 2]. Было показано, что гладкость обобщенных решений может нарушаться во внутренних точках интервала даже при бесконечно дифференцируемой правой части и сохраняется лишь на подынтервалах, получаемых выбрасыванием из интервала $(0, d)$ орбит его концов. В работах [3, 4] получены условия на правые части уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений на всем интервале $(0, d)$. Вопрос о нахождении таких условий в случае второй краевой задачи является открытым. В работах [5, 6] в случаях как первой, так и второй краевых задач были получены условия на коэффициенты дифференциально-разностного уравнения, при выполнении которых гладкость обобщенных решений дифференциально-разностного уравнения сохраняется на всем интервале для любой правой

части. Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений возникают во многих важных приложениях, в частности в задачах теории управления системами с последействием [4, 7–10].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем операторы $R_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, $I_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ и $P_Q: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(Q)$ следующим образом:

$$(Ru)(x) = \sum_{j=-n}^n a_j(x)u(x+j), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где $Q := (0, d)$, $d = n + \theta$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leq 1$; $a_j(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ – комплекснозначные функции; $(I_Q v)(x) = v(x)$, $x \in Q$; $(I_Q v)(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus Q$; $(P_Q v)(x) = v(x)$, $x \in Q$; $R_Q = P_Q R I_Q$.

Рассмотрим задачу

$$-(R_Q u')'(x) = f(x), \quad x \in Q, \quad (2)$$

$$(R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0, \quad (3)$$

где $f \in L_2(Q)$.

Заметим, что сдвиги аргументов $x \mapsto x + j$ в операторе R могут отображать точки интервала Q в $\mathbb{R} \setminus Q$. Поэтому краевые условия для уравнения (2) мы задаем не только в точках 0 и d , но и на множестве $\mathbb{R} \setminus Q$. Для этого используется оператор I_Q , который является оператором продолжения

¹ Математический институт
Российского университета дружбы народов,
Москва, Россия

² Центр фундаментальной и прикладной математики
Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: skub@lector.ru

**E-mail: noivanov1@gmail.com

нулем функции из $L_2(Q)$ на $\mathbb{R} \setminus Q$. Для рассмотрения дифференциально-разностного уравнения (2) на интервале Q вводится оператор P_Q , являющийся оператором сужения функции из $L_2(\mathbb{R})$ на Q .

Если $\theta = 1$, рассмотрим один класс непересекающихся подынтервалов: $Q_{1k} = (k - 1, k)$, $k = 1, \dots, n + 1$. Если $0 < \theta < 1$, рассмотрим два класса непересекающихся подынтервалов: $Q_{1k} = (k - 1, k - 1 + \theta)$, $k = 1, \dots, n + 1$, и $Q_{2k} = (k - 1 + \theta, k)$, $k = 1, \dots, n$.

Обозначим через $R_s = R_s(x)$, $x \in \bar{Q}_{s1}$, теплицеву матрицу порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{ij}^s(x) := a_{j-i}(x + i - 1), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i, j = 1, \dots, N(s), \quad (4)$$

где $N(1) = n + 1$, $N(2) = n$; $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$; $s = 1$, если $\theta = 1$.

Очевидно, матрица $R_2(x)$ может быть получена из матрицы $R_1(x)$ вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Свойства оператора R_Q тесно связаны со свойствами матриц $R_s(x)$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что для всех $x \in \bar{Q}_{s1}$ и $Y \in \mathbb{C}^{N(s)}$ ($s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$, и $s = 1$, если $\theta = 1$) выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}(R_s(x)Y, Y) \geq c\|Y\|^2, \quad (5)$$

где $c > 0$ не зависит от x и Y , (\cdot, \cdot) и $\|\cdot, \cdot\|$ – скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^{N(s)}$ соответственно.

2. РАЗРЕШИМОСТЬ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Пусть $W_2^k(Q)$ – пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k -го порядка

$$R_1 := \begin{pmatrix} a_0(0) & a_1(0) & \dots & a_n(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_{n-1}(1) & a_0(1) & a_1(1) & \dots & a_n(1) \\ a_{-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{n-2}(2) & a_{-1}(2) & a_0(2) & \dots & a_{n-1}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-n}(n) & a_{-n+1}(n) & \dots & a_0(n) & a_{-n+1}(n) & a_{-n+2}(n) & \dots & a_1(n) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{-n}(n+1) & a_{-n+1}(n+1) & \dots & a_0(n+1) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $R_1^1(R_1^2)$ матрицу порядка $(n + 2) \times (2n + 1)$, полученную из матрицы R_1 вычеркиванием первого (последнего) столбца соответственно, а через R_1^0 матрицу порядка $(n + 2) \times 2n$,

из $L_2(Q)$. Скалярное произведение в $W_2^k(Q)$ вводится по формуле

$$(u, v)_{W_2^k(Q)} = \sum_{i=0}^k \int_0^d u^{(i)} \overline{v^{(i)}} dx.$$

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_R : L_2(Q) \supset D(\mathcal{A}_R) \rightarrow L_2(Q)$ с областью определения $D(\mathcal{A}_R) = \{u \in W_2^1(Q) : Ru' \in W_2^1(Q), (Ru')(0) = (Ru')(d) = 0\}$, действующий по формуле

$$\mathcal{A}_R u = -(Ru)', \quad u \in D(\mathcal{A}_R). \quad (6)$$

Определение 1. Функция $u \in D(\mathcal{A}_R)$ называется обобщенным решением задачи (2), (3), если

$$\mathcal{A}_R u = f. \quad (7)$$

Теорема 1. Пусть выполняется неравенство (5). Тогда вторая краевая задача (2), (3) имеет обобщенное решение $u \in D(\mathcal{A}_R)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^d f(x) dx = 0. \quad (8)$$

3. ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ НА ПОДЫНТЕРВАЛАХ

Теорема 2. Пусть выполняется неравенство (5), и пусть $u \in D(\mathcal{A}_R)$ – обобщенное решение задачи (2), (3). Тогда $u \in W_2^2(k - 1, k - 1 + \theta)$, $k = 1, \dots, n + 1$, $u \in W_2^2(k - 1 + \theta, k)$, $k = 1, \dots, n$, если $0 < \theta < 1$; $u \in W_2^2(k - 1, k)$, $k = 1, \dots, n + 1$, если $\theta = 1$.

4. ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ НА ВСЕМ ИНТЕРВАЛЕ (0, d)

Предположим, что $\theta = 1$, т.е. $d = n + 1$. Введем матрицу R_1 порядка $(n + 2) \times (2n + 2)$ по формуле

полученную из R_1 вычеркиванием первого и последнего столбцов.

Будем предполагать, что выполняется условие

$$\sum_{k=1}^n (|a_k(0)| + |a_{-k}(n + 1)|) \neq 0. \quad (9)$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия (5) и (9). Тогда $\text{rank} \mathbf{R}_1 = n + 2$ и $\text{rank} \mathbf{R}_1^0 \geq n + 1$.

Обозначим через $G_j^1 = G_j^1(x)$ ($G_j^2 = G_j^2(x)$) j -й столбец матрицы порядка $n \times (n + 1)$, полученной из матрицы $R_1 = R_1(x)$ вычеркиванием первой (последней) строки ($j = 1, \dots, n + 1$).

Введем линейный ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(Q) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(Q)$ с областью определения $D(A_R^0) = D(\mathcal{A}_R) \cap W_2^2(Q)$, действующий по формуле

$$A_R^0 u = \mathcal{A}_R u, \quad u \in D(A_R^0).$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (5) и (9), и пусть $\theta = 1$. Предположим, что столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{n+1}^2(1)$ линейно независимы. Тогда оператор $A_R^0 : W_2^2(Q) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(Q)$ фредгольмов, $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$ и $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 1$. Если к тому же

$$\text{rank} \mathbf{R}_1^0 = \text{rank} \mathbf{R}_1^1 = \text{rank} \mathbf{R}_1^2, \quad (10)$$

то $\text{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 3$; если же

$$\text{rank} \mathbf{R}_1^0 < \max\{\text{rank} \mathbf{R}_1^1, \text{rank} \mathbf{R}_1^2\}, \quad (11)$$

то $\text{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Из теорем 1 и 3 вытекает

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 3. Если к тому же справедливы равенства (10), то найдутся три линейно независимые функции $h_0, h_1, h_2 \in L_2(Q)$ такие, что $h_0(x) \equiv 1$, и при выполнении условий $(f, h_j)_{L_2(Q)} = 0, j = 0, 1, 2$, обобщенное решение задачи (2), (3) и $f \in W_2^1(Q)$ существует и принадлежит пространству $W_2^2(Q)$. Если же справедливо неравенство (11), то найдутся две линейно независимые функции $h_0, h_1 \in L_2(Q)$ такие, что $h_0(x) \equiv 1$, и при выполнении условий $(f, h_j)_{L_2(Q)} = 0, j = 0, 1$, обобщенное решение задачи (2), (3) и $f \in W_2^1(Q)$ существует и принадлежит пространству $W_2^2(Q)$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (5) и (9), и пусть $\theta = 1$. Предположим, что столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{n+1}^2(1)$ линейно зависимы и $G_1^1(0), G_{n+1}^2(1) \neq 0$. Тогда оператор $A_R^0 : W_2^2(Q) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(Q)$ фредгольмов, $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$ и $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 1$. Если при этом $\text{rank} \mathbf{R}_1^0 = \text{rank} \mathbf{R}_1^1$ или $\text{rank} \mathbf{R}_1^0 = \text{rank} \mathbf{R}_1^2$, то $\text{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Из теорем 1 и 4 вытекает

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда найдутся две линейно независимые

функции $h_0, h_1 \in L_2(Q)$ такие, что $h_0(x) \equiv 1$, и при выполнении условий $(f, h_j)_{L_2(Q)} = 0, j = 0, 1$, обобщенное решение задачи (2), (3) и $f \in W_2^1(Q)$ существует и принадлежит пространству $W_2^2(Q)$.

Пример 1. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0, 3) \rightarrow L_2(0, 3)$, где $Q = (0, 3)$, $(Ru)(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x + 1) + a_{-1} u(x - 1) + a_2 u(x + 2) + a_{-2} u(x - 2)$, $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \pm 1, \pm 2$. Тогда $n = 2, \theta = 1$, а матрица R_1 имеет вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$G_1^1 = \begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_{-2} \end{pmatrix}, \quad G_3^2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_{-1} & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что выполняется условие (5), а столбцы G_1^1 и G_3^2 линейно независимы. Можно показать, что тогда $\det \mathbf{R}_1^0 \neq 0$. Следовательно, выполняется условие (10). Таким образом, в силу теоремы 3 оператор $A_R^0 : W_2^2(0, 3) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(0, 3)$ фредгольмов, $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$ и $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 1$, при этом $\text{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 3$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Публикация подготовлена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каменский Г.А., Мышкис А.Д. Постановка краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами в старших членах // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 3. С. 409–418.
2. Каменский А.Г. Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 10. № 5. С. 815–824.
3. Каменский Г.А., Мышкис А.Д., Скубачевский А.Л. О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа // Укр. матем. журнал. 1985. Т. 37. № 5. С. 581–585.

4. *Skubachevskii A.L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin, Birkhäuser, 1997. 298 p.
5. *Неверова Д.А., Скубачевский А.Л.* О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами // Матем. заметки. 2013. Т. 94. № 5. С. 702–719.
6. *Neverova D.A.* Generalized and classical solutions to the second and third boundary-value problem for differential-difference equations // Functional Differential Equations. 2014. Т. 21. С. 47–65.
7. *Осипов Ю.С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 605–618.
8. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 475 с.
9. *Кряжимский А.В., Максимов В.И., Осипов Ю.С.* О позиционном моделировании в динамических системах // Прикл. мат. мех. 1983. Т. 47. № 6. С. 883–890.
10. *Скубачевский А.Л.* К задаче об успокоении системы управления с последействием // ДАН. 1994. Т. 335. № 2. С. 157–160.

THE SECOND BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS

A. L. Skubachevskii^{a,b} and N. O. Ivanov^a

^a *Mathematical Institute of the RUDN University, Moscow, Russian Federation*

^b *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS Yu.S. Osipov

We consider the second boundary value problem for a second order differential–difference equation with variable coefficients on the interval $(0, d)$. It was obtained the necessary and sufficient condition for existence of a generalized solution. It was proved that, if the right-hand side of the equation is orthogonal in $L_2(0, d)$ to some functions, then a generalized solution from the Sobolev space $W_2^1(0, d)$ belongs to the space $W_2^2(0, d)$.

Keywords: differential–difference equations, generalized solutions, boundary value problem

УДК 517+531.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ КОНЕЧНОМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2021 г. М. В. Шамолин^{1,*}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 26.04.2021 г.

Поступило 27.04.2021 г.

После доработки 05.07.2021 г.

Принято к публикации 08.07.2021 г.

Показана интегрируемость некоторых классов однородных геодезических, потенциальных и диссипативных динамических систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям. При этом силовые поля приводят к появлению диссипации переменного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, геодезические, потенциал, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл

DOI: 10.31857/S2686954321050143

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, изучение интегрируемости автономных систем на конечномерном конфигурационном многообразии M^n приводит к изучению систем порядка $2n$ на касательном расслоении TM^n . При этом ключевым, наряду с геометрией многообразия M^n , является структура присутствующего в системе силового поля. Так, задача о движении n -мерного закрепленного маятника в обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n - 1)$ -мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [1, 2]. Системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3].

Также хорошо известны и сложны задачи о движении точки по многомерным поверхностям вращения, в пространствах Лобачевского и др. Тем не менее, иногда в системах с диссипацией удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных (в смысле ком-

плексного анализа) функций, поскольку полный список даже непрерывных в целом автономных первых интегралов найти невозможно. Здесь результаты важны в смысле присутствия именно неконсервативного поля сил.

Вообще, современное состояние рассматриваемых проблем предполагает обширный список литературы. Приведем лишь некоторые из них [4–6].

В данной работе показана интегрируемость классов однородных динамических систем геодезических, потенциальных и диссипативных на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям. При этом силовые поля приводят к появлению диссипации переменного знака и обобщают ранее рассмотренные.

1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Как известно, в случае n -мерного гладкого риманова многообразия M^n с координатами (α, β) , $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ и аффинной связностью $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $TM^n\{\alpha^\bullet, \beta_1^\bullet, \dots, \beta_{n-1}^\bullet; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$, $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2, \dots, \beta_{n-1} = x^n$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: shamolin@imec.msu.ru

$$x^{i\bullet\bullet} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(x) x^{j\bullet} x^{k\bullet} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении TM^n . Для этого рассмотрим замену координат касательного пространства:

$$x^{i\bullet} = \sum_{j=1}^n R^{ij} z_j, \quad (2)$$

которую можно обратить: $z_j = \sum_{i=1}^n T_{ji} x^{i\bullet}$, при этом $R^{ij}, T_{ji}, i, j = 1, \dots, n$, — функции от x , а также $RT = E$, где $R = (R^{ij}), T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (2) новыми кинематическими соотношениями, т.е. линейными соотношениями на касательном расслоении TM^n . Справедливы равенства

$$z_i^\bullet = \sum_{j,k=1}^n T_{ij,k} x^{j\bullet} x^{k\bullet} - \sum_{j,p,q=1}^n T_{ij} \Gamma_{pq}^j x^{p\bullet} x^{q\bullet}, \quad (3)$$

где $T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, j, i, k = 1, \dots, n$, при этом в системе

(3) вместо $x^{i\bullet}, i = 1, \dots, n$, надо подставить формулы (2), и правые части составной системы (2), (3) являются однородными формами по квазискоростям z_1, \dots, z_n .

Предложение 1. Система (1) в той области, где $\det R(x) \neq 0$, эквивалентна составной системе (2), (3).

Результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе (2), (3) зависит как от замены (2) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= z_n f_n(\alpha), & \beta_1^\bullet &= z_{n-1} f_1(\alpha), & \beta_2^\bullet &= z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\ \beta_3^\bullet &= z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \dots, & & & & \\ \beta_{n-1}^\bullet &= z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $f_k(\alpha), k = 1, \dots, n-1, g_l(\beta_1), l = 1, \dots, n-2, h_m(\beta_2), m = 1, \dots, n-3, \dots, i_1(\beta_{n-2})$ — гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты z_1, \dots, z_n в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических [7, 8] (в частности, на многомерных поверхностях вращения, в пространствах Лобачевского и т.д.) с $n(n-1)+1$ ненулевыми коэффициентами связности (здесь и далее двойной индекс, разделенный запятой, это не дифференцирование, в отличие от формул (3)):

$$\begin{aligned} &\alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \alpha^{\bullet 2} + \\ &+ \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \beta_1^{\bullet 2} + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) \beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0, \\ &\beta_1^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \alpha^\bullet \beta_1^\bullet + \\ &+ \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \beta_2^{\bullet 2} + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) \beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0, \\ &\beta_2^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \alpha^\bullet \beta_2^\bullet + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \beta_1^\bullet \beta_2^\bullet + \\ &+ \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \beta_3^{\bullet 2} + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^2(\alpha, \beta) \beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &\dots, \\ &\beta_{n-2}^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) \alpha^\bullet \beta_{n-2}^\bullet + 2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) \beta_1^\bullet \beta_{n-2}^\bullet + \dots \\ &\dots + 2\Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) \beta_{n-3}^\bullet \beta_{n-2}^\bullet + \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) \beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0, \\ &\beta_{n-1}^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \alpha^\bullet \beta_{n-1}^\bullet + \\ &+ 2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \beta_1^\bullet \beta_{n-1}^\bullet + \dots + 2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \beta_{n-2}^\bullet \beta_{n-1}^\bullet = 0, \end{aligned}$$

и в случае (4) уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned} z_1^\bullet &= -f_n(\alpha) [2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha)] z_1 z_n - \\ &- f_1(\alpha) [2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)] z_1 z_{n-1} - \\ &- f_2(\alpha) g_1(\beta_1) [2\Gamma_{2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)] z_1 z_{n-2} - \dots \\ &\dots - f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3}) [2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + \\ &+ Di_1(\beta_{n-2})] z_1 z_2, \\ z_2^\bullet &= -f_n(\alpha) [2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Df_{n-2}(\alpha)] z_2 z_n - \\ &- f_1(\alpha) [2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)] z_2 z_{n-1} - \dots \\ &\dots - f_{n-3}(\alpha) g_{n-4}(\beta_1) h_{n-5}(\beta_2) \dots s_1(\beta_{n-4}) [2\Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + \\ &+ Dr_1(\beta_{n-3})] z_2 z_3 - \\ &- \frac{f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots r_2^2(\beta_{n-3}) i_1^2(\beta_{n-2})}{f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3})} \times \\ &\times \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) z_1^2, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} z_{n-1}^\bullet &= -f_n(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] z_{n-1} z_n - \\ &- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_{n-2}^2 - \dots \\ \dots - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \\ z_n^\bullet &= -f_n(\alpha) [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_n(\alpha)] z_n^2 - \\ &- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) z_{n-1}^2 - \\ &- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) z_{n-2}^2 - \dots \\ \dots - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2, \end{aligned}$$

$Dj(\gamma) = d \ln |j(\gamma)| / d\gamma$, и уравнения (5) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (4), (6) на многообразии $TM^n\{z_n, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$.

Для полного интегрирования системы (4), (6) необходимо знать, вообще говоря, $2n - 1$ независимых первых интегралов. При этом первые интегралы (в частности, и для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

Предложение 2. *Если всюду справедлива система $1 + n(n - 1)/2$ дифференциальных равенств*

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_n(\alpha) \equiv 0, \\ & f_n^2(\alpha)[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] + f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \dots, \\ & f_n^2(\alpha)[2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha)] + \\ & + f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ & f_1^2(\alpha)[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)] + \\ & + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \dots, \\ & f_1^2(\alpha)[2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)] + \\ & + f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1) \dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \dots, \\ & f_{n-2}^2(\alpha) \dots r_1^2(\beta_{n-3})[2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2})] + \\ & + f_{n-1}^2(\alpha) \dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) \equiv 0, \end{aligned} \tag{7}$$

то система (4), (6) имеет аналитический первый интеграл вида

$$\Phi_1(z_n, \dots, z_1) = z_1^2 + \dots + z_n^2 = C_1^2 = \text{const}. \tag{8}$$

Примеры. Уравнения (5) геодезических в многомерном пространстве Лобачевского в модели Клейна примут вид

$$\begin{aligned} & \alpha^{\bullet\bullet} - \frac{1}{\alpha}(\alpha^{\bullet 2} - \beta_1^{\bullet 2} - \dots - \beta_{n-1}^{\bullet 2}) = 0, \\ & \beta_k^{\bullet\bullet} - \frac{2}{\alpha}\alpha^{\bullet}\beta_k^{\bullet} = 0, \quad k = 1, \dots, n - 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Можно выписать многопараметрическую систему, эквивалентную уравнениям (9) геодезических и имеющую первый интеграл вида (8). Аналогичными свойствами обладают уравнения геодезических и на многомерных поверхностях вращения.

Система равенств (7) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (8) (или см. ниже (21)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [8, 9]). Поиск же как первого интеграла (8), так и других (см. далее) опира-

ется на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, n - 1$, $g_l(\beta_l)$, $l = 1, \dots, n - 2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \dots, n - 3, \dots, i_1(\beta_{n-2})$ системы (7) для наличия аналитического интеграла (8) для исследуемой системы (4), (6) уравнений геодезических. Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией не всегда все условия (7) нам потребуются. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (4) выполнение условий

$$f_1(\alpha) \equiv \dots \equiv f_{n-1}(\alpha) = f(\alpha), \tag{10}$$

при этом функции $g_l(\beta_l)$, $l = 1, \dots, n - 2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \dots, n - 3, \dots, i_1(\beta_{n-2})$, вообще говоря, должны удовлетворять $(n - 1)(n - 2)/2$ преобразованным уравнениям из (7):

$$\begin{aligned} & 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1) + g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \dots, \\ & 2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) + \\ & + g_{n-2}^2(\beta_1) \dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \dots, \\ & g_{n-3}^2(\beta_1) \dots r_1^2(\beta_{n-3})[2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2})] + \\ & + g_{n-2}^2(\beta_1) \dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) \equiv 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_l)$, $l = 1, \dots, n - 2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \dots, n - 3, \dots, i_1(\beta_{n-2})$ зависят от коэффициентов связности, а ограничения на функции $f(\alpha)$, $f_n(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 3. *Если выполнены свойства (10), (11), при этом справедливы равенства*

$$\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \equiv \dots \equiv \Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{12}$$

то система (4), (6) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned} & \Phi_2(z_{n-1}, \dots, z_1; \alpha) = \\ & = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}\Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \\ & \Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Предложение 4. *Если выполнены условия предложения 3, а также*

$$g_1(\beta_1) \equiv \dots \equiv g_{n-2}(\beta_1) = g(\beta_1), \tag{14}$$

при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \equiv \dots \equiv \Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{15}$$

то система (4), (6) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_3(z_{n-2}, \dots, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2} \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \quad (16)$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_0}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\}.$$

Далее доказываем по индукции необходимое количество предложений (их всего n) и приходим к следующему утверждению (здесь и далее многоточие в утверждениях и означает n утверждений об n интегралах).

Предложение 5. Если выполнены условия предложений 3, 4, ..., при этом справедливо равенство

$$\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) = \Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}), \quad (17)$$

то система (4), (6) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_n(z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = z_1 \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \dots \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = C_n = \text{const}, \quad (18)$$

$$\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = i_1(\beta_{n-2}) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \Gamma_{n-1}(b) db \right\}.$$

Предложение 6. Если выполнены условия предложений 3, ..., 5, то система (4), (6) имеет первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}) = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n h(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}} db = C_{n+1} = \text{const}, \quad (19)$$

где, после взятия интеграла (19), вместо постоянных C_{n-1} , C_n можно формально подставить левые части соответствующих равенств.

Теорема 1. Если выполнены условия предложений 2, ..., 5, то система (4), (6) обладает $n + 1$ независимыми первыми интегралами вида (8), (13), (16), ..., (18), (19).

То, что полный набор при некоторых условиях состоит из $n + 1$, а не из $2n - 1$ первых интегралов, будет показано ниже.

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Модифицируем (4), (6), получив систему консервативную: введем гладкое (внешнее) силовое поле в

проекциях на оси z_k^* , $k = 1, \dots, n$, соответственно: $F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1) \dots i_1(\beta_{n-2})$, $F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1) \dots r_1(\beta_{n-3})$, ..., $F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha)$, $F_n(\alpha)f_n(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^n\{z_n, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ примет вид

$$\begin{aligned} \alpha^* &= z_n f_n(\alpha), \\ z_n^* &= F_n(\alpha) f_n(\alpha) - f_n(\alpha) [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_n(\alpha)] z_n^2 - \\ &\quad - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) z_{n-1}^2 - \\ &\quad - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) z_{n-2}^2 - \dots - \\ &\quad - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2, \\ z_{n-1}^* &= F_{n-1}(\beta_1) f_1(\alpha) - f_n(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] z_{n-1} z_n - \\ &\quad - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_{n-2}^2 - \dots - \\ &\quad - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \\ &\dots\dots\dots, \\ z_2^* &= F_2(\beta_{n-2}) f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) \dots r_1(\beta_{n-3}) - \\ &\quad - f_n(\alpha) [2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Df_{n-2}(\alpha)] z_2 z_n - \\ &\quad - f_1(\alpha) [2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)] z_2 z_{n-1} - \dots - \\ &\quad - f_{n-3}(\alpha) g_{n-4}(\beta_1) h_{n-5}(\beta_2) \dots s_1(\beta_{n-4}) [2\Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + \\ &\quad + Dr_1(\beta_{n-3})] z_2 z_3 - \\ &\quad - \frac{f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots r_2^2(\beta_{n-3})}{f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3})} \times \\ &\quad \times i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) z_1^2, \\ z_1^* &= F_1(\beta_{n-1}) f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) \dots i_1(\beta_{n-2}) - \\ &\quad - f_n(\alpha) [2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha)] z_1 z_n - \\ &\quad - f_1(\alpha) [2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)] z_1 z_{n-1} - \\ &\quad - f_2(\alpha) g_1(\beta_1) [2\Gamma_{2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)] z_1 z_{n-2} - \\ &\quad - \dots - f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3}) \times \\ &\quad \times [2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2})] z_1 z_2, \\ \beta_1^* &= z_{n-1} f_1(\alpha), \quad \beta_2^* = z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \dots, \\ \beta_{n-1}^* &= z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}), \end{aligned}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} & \alpha^{\bullet\bullet} - F_n(\alpha)f_n^2(\alpha) + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta)\alpha^{\bullet 2} + \\ & + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\beta_1^{\bullet 2} + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0, \\ & \beta_1^{\bullet\bullet} - F_{n-1}(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\alpha^{\bullet}\beta_1^{\bullet} + \\ & + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\beta_2^{\bullet 2} + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots, \\ & \beta_{n-2}^{\bullet\bullet} - F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)\dots r_1^2(\beta_{n-3}) + \\ & + 2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta)\alpha^{\bullet}\beta_{n-2}^{\bullet} + 2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta)\beta_1^{\bullet}\beta_{n-2}^{\bullet} + \dots \\ & \dots + 2\Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta)\beta_{n-3}^{\bullet}\beta_{n-2}^{\bullet} + \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0, \\ & \beta_{n-1}^{\bullet\bullet} - F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)\dots i_1^2(\beta_{n-2}) + \\ & + 2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta)\alpha^{\bullet}\beta_{n-1}^{\bullet} + \\ & + 2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta)\beta_1^{\bullet}\beta_{n-1}^{\bullet} + \dots + 2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta)\beta_{n-2}^{\bullet}\beta_{n-1}^{\bullet} = 0. \end{aligned}$$

Предложение 7. Если выполнены условия предложения 2, то система (20) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned} & \Phi_1(z_n, \dots, z_1; \alpha, \beta) = \\ & = z_1^2 + \dots + z_n^2 + V(\alpha, \beta) = C_1 = \text{const}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} & V(\alpha, \beta) = V_n(\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} V_{n-k}(\beta_k) = \\ & = -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_n(a) da - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\beta_{k0}}^{\beta_k} F_{n-k}(b) db. \end{aligned}$$

Следующие утверждения справедливы в более общем виде, но мы ограничимся следующим.

Предложение 8. Пусть $F_{n-k}(\beta_k) \equiv 0, k = 1, \dots, n - 1$. Если выполнены условия предложений 3, ..., 5, то система (20) имеет n гладких первых интеграла вида (13), (16), ..., (18), (19).

Теорема 2. Пусть $F_{n-k}(\beta_k) \equiv 0, k = 1, \dots, n - 1$. Если выполнены условия предложений 2, ..., 5, то система (20) обладает $n + 1$ независимыми первыми интегралами вида (21), (13), (16), ..., (18), (19).

То, что полный набор при некоторых условиях состоит из $n + 1$, а не из $2n - 1$ первых интегралов, будет показано ниже.

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ДИССИПАЦИЕЙ

Теперь несколько модифицируем (20) при условиях (10)–(12), (14), (15), ..., (17), а также при $F_{n-k}(\beta_k) \equiv 0, k = 1, \dots, n - 1$. При этом получим систему со знакопеременной диссипацией, наличие которой характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha), b > 0$, в первом уравнении (22), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси $z_k^{\bullet}, k = 1, \dots, n$, соответственно:

$z_1 F_1^1(\alpha), \dots, z_{n-1} F_{n-1}^1(\alpha), F_n(\alpha)f_n(\alpha) + z_n F_n^1(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^n\{z_n, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ примет вид

$$\begin{aligned} & \alpha^{\bullet} = z_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ & z_n^{\bullet} = F_n(\alpha)f_n(\alpha) - f_n(\alpha)[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_n(\alpha)]z_n^2 - \\ & \quad - \frac{f_n^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)z_{n-1}^2 - \\ & \quad - \frac{f_n^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}[g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)z_{n-2}^2 + \dots + \\ & \quad + g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\dots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta)z_1^2] + z_n F_n^1(\alpha), \\ & z_{n-1}^{\bullet} = -f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_{n-1}z_n - \\ & \quad - f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)z_{n-2}^2 - \dots \\ & \quad \dots - f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\dots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta)z_1^2 + \\ & \quad + z_{n-1} F_{n-1}^1(\alpha), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} & \dots, \\ & z_2^{\bullet} = -f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_2z_n - \\ & \quad - f(\alpha)[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]z_2z_{n-1} - \dots \\ & \quad \dots - f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\dots s(\beta_{n-4})[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + \\ & \quad + Dr(\beta_{n-3})]z_2z_3 - \\ & \quad - f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\dots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2}) \times \\ & \quad \times \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta)z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ & z_1^{\bullet} = -f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_1z_n - \\ & \quad - f(\alpha)[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]z_1z_{n-1} - \\ & \quad - f(\alpha)g(\beta_1)[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)]z_1z_{n-2} - \dots \\ & \quad \dots - f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\dots r(\beta_{n-3}) \times \\ & \quad \times [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})]z_1z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ & \beta_1^{\bullet} = z_{n-1} f(\alpha), \beta_2^{\bullet} = z_{n-2} f(\alpha)g(\beta_1), \dots, \\ & \beta_{n-1}^{\bullet} = z_1 f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\dots i(\beta_{n-2}), \end{aligned}$$

и она почти всюду эквивалентна системе на вторые производные от α, β , в которой явно выделяется знакопеременная диссипация [2, 3].

Перейдем теперь к интегрированию системы (22) порядка $2n$ при выполнении группы условий (11) и при выполнении равенств

$$\begin{aligned} & \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1) \equiv \dots \\ & \dots \equiv \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\dots = \Gamma_n(\alpha). \end{aligned}$$

Пусть при этом функция $f_n(\alpha)$ удовлетворяет первому из группы равенств (7). Введем также (по аналогии с (11)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять следующему преобразованному равенству из (7):

$$f_n^2(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0,$$

и происходит отделение независимой подсистемы порядка $2n - 1$:

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= z_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ z_n^\bullet &= F_n(\alpha)f_n(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} \times \\ &\times \Gamma_n(\alpha)(z_{n-1}^2 + \dots + z_1^2) + z_n F_n^1(\alpha), \\ z_{n-1}^\bullet &= -f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_{n-1}z_n - \\ &- f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}(\beta_1)z_{n-2}^2 - \dots \\ &\dots - f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\dots i^2(\beta_{n-2}) \times \\ &\times \Gamma_{n-1,n-1}^1(\beta_1, \dots, \beta_{n-2})z_1^2 + z_{n-1}F^1(\alpha), \\ &\dots\dots\dots, \\ z_2^\bullet &= -f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_2z_n - \\ &- f(\alpha)[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]z_2z_{n-1} - \dots \\ &\dots - f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\dots s(\beta_{n-4}) \times \\ &\times [2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})]z_2z_3 - \\ &- f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\dots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2}) \times \\ &\times \Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\beta_1, \dots, \beta_{n-2})z_1^2 + z_2F^1(\alpha), \\ z_1^\bullet &= -f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_1z_n - \\ &- f(\alpha)[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]z_1z_{n-1} - \\ &- f(\alpha)g(\beta_1)[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)]z_1z_{n-2} - \dots \\ &\dots - f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\dots r(\beta_{n-3}) \times \\ &\times [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})]z_1z_2 + z_1F^1(\alpha), \\ \beta_1^\bullet &= z_{n-1}f(\alpha), \quad \beta_2^\bullet = z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1), \dots, \\ \beta_{n-1}^\bullet &= z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\dots i(\beta_{n-2}). \end{aligned}$$

Для полного интегрирования данной системы необходимо знать, вообще говоря, $2n - 1$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных $w_1 = z_{n-1}/\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2}, \dots, w_{n-3} = z_3/\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, w_{n-2} = z_2/z_1, w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}, w_n = z_n$, последняя система распадается следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= w_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ w_n^\bullet &= F_n(\alpha)f_n(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}^2 + w_n F_n^1(\alpha), \quad (23) \\ w_{n-1}^\bullet &= \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}w_n + w_{n-1}F^1(\alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_s^\bullet &= (\pm)w_{n-1}\sqrt{1+w_s^2}f(\alpha)g(\beta_1)\dots[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)], \\ \beta_s^\bullet &= (\pm)\frac{w_s w_{n-1}}{\sqrt{1+w_s^2}}f(\alpha)g(\beta_1)\dots, \quad s = 1, \dots, n-2, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\beta_{n-1}^\bullet = (\pm)\frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w_{n-2}^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\dots i(\beta_{n-2}), \quad (25)$$

где в системе (24) символом «...» показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций g, h, \dots , зависящая от соответствующего угла β_s .

Видно, что для полной интегрируемости системы (23)–(25) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (23), по одному — для систем (24) (меняя в них независимые переменные; таких систем — $n - 2$ штуки), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (25) (т.е. всего $n + 1$).

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)}\Gamma_n(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)|, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_n(\alpha)}, \quad (26)$$

а для некоторых $\lambda_n^0, \lambda_k^1 \in \mathbf{R}$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} F_n(\alpha) &= \lambda_n^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2}, \\ F_k^1(\alpha) &= \lambda_k^1 f_n(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь $F_1^1(\alpha) = \dots = F_{n-1}^1(\alpha) = F^1(\alpha)$, т.е. $\lambda_1^1 = \dots = \lambda_{n-1}^1 = \lambda^1$. Условие (26) назовем “геометрическим”, а условия из группы (27) — “энергетическими”.

Условие (26) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на коэффициент связности $\Gamma_n(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (27) названы энергетическими в том числе потому, что силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к функциям $\Delta^2(\alpha)/2$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ и вводит в систему диссипацию разных знаков.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (26) и (27). Тогда система (23)–(25) обладает полным набором $(n + 1)$ независимых, вообще говоря, трансцендентных [10, 11] первых интегралов.

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (интегрирование уравнения Абе-

ля [12]). В частности, если $\kappa = -1$, $\lambda_n^1 = \lambda^1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_1 \left(\frac{w_n}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)} \right) = \frac{f_n^2(\alpha)(w_n^2 + w_{n-1}^2) + (b - \lambda^1)w_n \delta(\alpha) f_n(\alpha) - \lambda_n^0 \delta^2(\alpha)}{w_{n-1} \delta(\alpha) f_n(\alpha)} = C_1. \quad (28)$$

При этом дополнительный первый интеграл системы (23) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_2 \left(\Delta(\alpha), \frac{w_n}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (29)$$

Первые интегралы для систем (24) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n - 2, \quad (30)$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, \dots, n - 2$, см. (16), ..., (18). Дополнительный интеграл, “привязывающий” уравнение (25), находится по аналогии с (19):

$$\Theta_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}) = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{i(b)}{\sqrt{C_n^2 \Psi_{n-2}^2(b) - 1}} db = C_{n+1} = \text{const}, \quad (31)$$

при этом после взятия интеграла (31) вместо постоянной C_n можно формально подставить левую часть равенств (30) при $s = n - 2$.

Выражение первых интегралов (28)–(31) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Действительно, при $\kappa = -1$, $\lambda_n^1 = \lambda^1$ дополнительный первый интеграл системы (23) найдется из квадратуры

$$d \ln |\Delta(\alpha)| = \frac{(b + u_n) du_n}{2W(u_n) - C_1(C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4W(u_n)})/2},$$

$$W(u_n) = u_n^2 + (b - \lambda^1)u_n - \lambda_n^0, \quad u_n = \frac{w_n}{\Delta(\alpha)}.$$

При этом после интегрирования вместо C_1 можно подставить левую часть (28). Правая часть данной квадратуры выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая – в зависимости о функции $\Delta(\alpha)$.

Справедлива и теорема, в некотором смысле обратная к теореме 3.

Теорема 4. Условия (26), (27) (например, при $\kappa = -1$, $\lambda_n^1 = \lambda^1$) являются необходимыми условиями существования ключевого первого интеграла (28) для системы (23)–(25).

4. СТРУКТУРА ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Если α – периодическая координата периода 2π , то система (23)–(25) в условиях теоремы 3 становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [2, 13]. При этом при $b = -\lambda^1$ она превращается в систему консервативную, которая обладает следующими гладкими первыми интегралами:

$$\Phi_1(-b; w_n, w_{n-1}; \alpha) = w_{n-1}^2 + w_n^2 + 2bw_n \Delta(\alpha) - \lambda_n^0 \Delta^2(\alpha) = \text{const}, \quad (32)$$

$$\Phi_2(w_{n-1}; \alpha) = w_{n-1} \Delta(\alpha) = \text{const}. \quad (33)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (32), (33) также является первым интегралом системы (23)–(25) при $b = -\lambda^1$. Но при $b \neq -\lambda^1$ каждая из функций

$$\Phi_1(\lambda^1; w_n, w_{n-1}; \alpha) = w_{n-1}^2 + w_n^2 + (b - \lambda^1)w_n \Delta(\alpha) - \lambda_n^0 \Delta^2(\alpha) \quad (34)$$

и (33) по отдельности не является первым интегралом системы (23)–(25). Однако отношение функций (34), (33) является первым интегралом системы (23)–(25) (при $\kappa = -1$, $\lambda_n^1 = \lambda^1$) при любом b .

Как отмечалось, для систем любого порядка с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [14, 15].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ: СИСТЕМЫ НА РАССЛОЕНИИ К КОНЕЧНОМЕРНОЙ СФЕРЕ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Выше уже были выделены в качестве примеров два класса многообразий (многомерные поверх-

ности вращения и пространства Лобачевского), для которых применима предлагаемая методика интегрирования систем с диссипацией. Теперь отметим однопараметрическое семейство функций $f(\alpha)$ и $f_n(\alpha)$, определяющей метрику на конечномерной сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1 + \mu_1\sin^2\alpha}},$$

$$\mu_1 \in \mathbf{R}, \quad f_n(\alpha) \equiv -1,$$

при этом выделим два существенных подслучая:

$$\mu_1 = 0, \tag{35}$$

$$\mu_1 = -1. \tag{36}$$

Случай (35) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного $(n + 1)$ -мерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил, при дополнительной зависимости силового поля от (тензора второго ранга) угловой скорости [2, 13]. Случай (36) формирует класс систем, соответствующих движению точки на n -мерной сфере с естественной метрикой, индуцированной метрикой всеобъемлющего $(n + 1)$ -мерного евклидова пространства. В частности, при $\delta(\alpha) = F_n(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на n -мерной сфере. В случае (35) если $\delta(\alpha) = F_n(\alpha)f_n(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает движение $(n + 1)$ -мерного твердого тела в силовом поле $F_n(\alpha)f_n(\alpha)$ под действием следящей силы [2, 3]. В частности, если $F_n(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает обобщенный сферический маятник, помещенный в поток набегающей среды в $(n + 1)$ -ном пространстве, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3, 13, 14].

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае (благодаря теоремам 3 и 4) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также определяет новые нетривиальные случаи интегрируемости динамических систем с диссипацией на ка-

сательном расслоении гладкого конечномерного многообразия в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
2. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // ДАН. 2017. Т. 474. № 2. С. 177–181.
3. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // ДАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.
4. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. Вып. 1. С. 117–148.
5. Борисов А.В., Мамаев И.С. Современные методы теории интегрируемых систем. М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. 294 с.
6. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005. 584 с.
7. Козлов В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
8. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. Пер. с нем. 4-е изд., испр., обновл. М.: URSS, 2017. 352 с.
9. Вейль Г. Симметрия. М.: URSS, 2007.
10. Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
11. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.–Л.: ОГИЗ, 1947.
12. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
13. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. В. 4. С. 3–229.
14. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. № 1. С. 84–90.
15. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.

**NEW CASES OF INTEGRABILITY OF SYSTEMS OF GEODESICS,
POTENTIAL, AND DISSIPATIVE ONES ON THE TANGENT BUNDLES
OF FINITE-DIMENSIONAL MANIFOLDS**

M. V. Shamolin^a

^aLomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The integrability of certain classes of homogeneous geodesic, potential, and dissipative dynamical systems is shown on the tangent bundles to finite-dimensional manifolds. In this case, the force fields have the so-called variable dissipation and generalize the previously considered fields.

Keywords: dynamical system, geodesics, potential, integrability, dissipation, transcendental first integral

УДК 519.853.62

АДАПТИВНЫЙ МЕТОД ГАУССА–НЬЮТОНА В ЗАДАЧАХ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2021 г. Н. Е. Юдин^{1,2,*}

Представлено академиком РАН Ю.Г. Евтушенко 19.05.2021 г.

Поступило 27.05.2021 г.

После доработки 03.07.2021 г.

Принято к публикации 05.07.2021 г.

Предлагается новая версия метода Гаусса–Ньютона для решения системы нелинейных уравнений, основанная на идеях использования верхней оценки нормы невязки системы уравнений и квадратичной регуляризации. В рамках данного метода получена глобальная сходимость. При естественных предположениях установлена глобальная линейная сходимость. Предложенный метод использует адаптивную стратегию выбора гиперпараметров локальной модели, формируя гибкий и удобный в использовании метод, реализуемый на практике с помощью стандартных методов выпуклой оптимизации.

Ключевые слова: системы нелинейных уравнений, унимодальная оптимизация, метод Гаусса–Ньютона, условие Поляка–Лоясиевича, неточное проксимальное отображение, неточный оракул, недоопределенная модель, оценка сложности

DOI: 10.31857/S2686954321050167

ВВЕДЕНИЕ

Системы нелинейных уравнений часто фигурируют в различных приложениях, а сама проблема решения системы уравнений является фундаментальной в численных методах [1–3]. В работе рассматривается следующая гладкая система нелинейных уравнений:

$$F(x) = \mathbf{0}_m, \quad \mathbf{0}_m^T = (0, \dots, 0). \quad (1)$$

Решение данной задачи рассматривается в ключе релаксации через задачу безусловной минимизации евклидовой нормы невязки:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \|F(x)\|\}. \quad (2)$$

Решение (2) ищется в рамках метода Гаусса–Ньютона. Данное решение полезно тем, что, используя только информацию о первых производных, при естественных предположениях возможна суперлинейная сходимость к решению задачи [4]. Такая быстрая скорость решения характерна

для задач машинного обучения при решении недоопределенных систем уравнений. Также метод Гаусса–Ньютона возникает в анализе метода нагурального градиента в задачах оптимизации регуляризованных вероятностных моделей. Условия, позволяющие доказать быструю сходимость метода Гаусса–Ньютона для недоопределенных моделей, часто называются условиями интерполяции, в добавок ко всему, они позволяют утверждать о наличии решения исходной системы нелинейных уравнений (1) [5]. Представленная в данной работе общая схема регуляризованного метода, в частности, имеет и явное правило вычисления приближения решения (3), фактически являющееся примером использования важного на практике механизма преобусловливания [1].

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим итеративную процедуру решения задачи (2), основанную на минимизации линеаризованной модели функционала:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &\stackrel{\text{def}}{=} \|F(x) + F'(x)(y - x)\|, \\ (x, y) &\in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Дополнительно вводятся изначальные предположения. Рассмотрим замкнутое выпуклое множество $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$, обладающее непустой внутренностью.

¹ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

² Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: iudin.ne@phystech.edu

Предположение 1. Пусть $F(x)$ – многозначное отображение, удовлетворяющее условию Липшица на \mathcal{F} :

$$\exists L_F > 0: \|F'(y) - F'(x)\| \leq L_F \|y - x\|, \\ \forall (x, y) \in \mathcal{F}^2.$$

Введем понятие множества Лебега уровня $f_1(x_k)$ функции f_1 относительно приближенного решения x_k :

$$\mathcal{L}(f_1(x_k)) \stackrel{\text{def}}{=} \{x: f_1(x) \leq f_1(x_k)\}.$$

Предположим $\mathcal{L}(f_1(x_0)) \subseteq \mathcal{F}$.

Предположение 2. Пусть для многозначного отображения выполнено условие Поляка–Лоясиевича [6]:

$$\exists \mu > 0, \quad \sigma_{\min}(F'(x)^T) \geq \sqrt{\mu}, \quad \forall x \in \mathcal{F},$$

где $\sigma_{\min}(\cdot)$ – минимальное сингулярное число матрицы.

Определим локальную мажоранту (локальную модель) $\Psi_{x,L,\tau}$ функции f_1 в точке y :

$$f_1(y) \leq \Psi_{x,L,\tau}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tau}{2} + \frac{(\Phi(x,y))^2}{2\tau} + \frac{L}{2} \|y - x\|^2, \\ L \geq L_F, \quad \tau > 0, \quad (x,y) \in \mathcal{F}^2.$$

Приведенная мажоранта позволяет определить правило обновления решения x_k на итерации $k \in \mathbb{Z}_+$ с $\tau_k > 0$, $L_k \in [L_0, 2L_F]$ и $L_0 \in (0, L_F]$:

$$T_{L_k, \tau_k}(x_k) \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{y \in \mathbb{R}^n} \{\Psi_{x_k, L_k, \tau_k}(y)\} = \\ = x_k - (F'(x_k)^T F'(x_k) + \tau_k L_k)^{-1} F'(x_k)^T F(x_k). \quad (3)$$

В [7] показано удобство выбора $\tau_k = f_1(x_k)$, в процессе оптимизации можно на каждой итерации варьировать τ_k и L_k , используя процедуру поиска оценки локальной постоянной Липшица на отрезке $[L_0, 2L_F]$. Значение $\tau_k = \Phi(x_k, y)$ соответствует ближайшей верхней оценке на $f_1(y)$ относительно τ_k с $L_k \geq L_F$, $\tau_k > 0$:

$$f_1(y) \leq \frac{L_k}{2} \|y - x_k\|^2 + \Phi(x_k, y) \leq \\ \leq \frac{L_k}{2} \|y - x_k\|^2 + \frac{\tau_k}{2} + \frac{(\Phi(x_k, y))^2}{2\tau_k},$$

где $\Phi(x_k, y) = \|F(x_k) + F'(x_k)(y - x_k)\|$, $(x_k, y) \in \mathcal{F}^2$. В силу этого неравенства в [7] установлена глобальная линейная сходимость в условии предположения 2 при использовании мажоранты $\Psi_{x_k, L_k, \Phi(x_k, y)}(y)$. Введем обозначение:

$$T_{L_k}(x_k) \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{\tau > 0} \{\Psi_{x_k, L_k, \tau}(T_{L_k, \tau}(x_k))\},$$

которое позволяет упростить вычисление приближения точки минимума по y в случае $\tau = \Phi(x_k, y)$, $\mathcal{L}(f_1(x_k)) \subseteq \mathcal{F}$, $L_k \geq L_F$:

$$f_1(T_{L_k, \mathcal{F}_{L_k}(x_k)}(x_k)) \leq \min_{y \in \mathcal{F}} \left\{ \frac{L_k}{2} \|y - x_k\|^2 + \Phi(x_k, y) \right\} = \\ = \min_{\tau > 0} \left\{ \frac{\tau}{2} + \min_{y \in \mathcal{F}} \left\{ \frac{L_k}{2} \|y - x_k\|^2 + \frac{(\Phi(x_k, y))^2}{2\tau} \right\} \right\} = \\ = \min_{\tau > 0} \{\Psi_{x_k, L_k, \tau}(T_{L_k, \tau}(x_k))\} \Rightarrow \\ \Rightarrow T_{L_k, \mathcal{F}_{L_k}(x_k)}(x_k) \in \text{Argmin}_{y \in \mathcal{F}} \left\{ \frac{L_k}{2} \|y - x_k\|^2 + \Phi(x_k, y) \right\}.$$

Обозначим процедуру получения x_{k+1} на итерации k через отображение $\mathcal{X}: \mathcal{F} \times \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathcal{F}$. Дополнительно введем обозначение $\tau_k^{\varepsilon_k}$ – приближение значения $\mathcal{F}_{L_k}(x_k)$, удовлетворяющее неравенству:

$$\Psi_{x_k, L_k, \tau_k^{\varepsilon_k}}(\mathcal{X}(x_k, L_k, \tau_k^{\varepsilon_k})) - \\ - \Psi_{x_k, L_k, T_{L_k, \mathcal{F}_{L_k}(x_k)}(x_k)}(T_{L_k, \mathcal{F}_{L_k}(x_k)}(x_k)) \leq \varepsilon_k.$$

Таким образом, схема оптимизации с подбором τ_k на шаге k заключается в следующем:

1. Получить $\tau_k^{\varepsilon_k}$ как приближение оптимального значения $\mathcal{F}_{L_k}(x_k)$;
2. Получить значение $x_{k+1} = \mathcal{X}(x_k, L_k, \tau_k^{\varepsilon_k})$ как приближение $T_{L_k, \tau_k^{\varepsilon_k}}(x_k)$.

В этой схеме вместе с поиском x_{k+1} происходит оптимизация отображения \mathcal{X} , и в таком виде метод ведет себя в режиме, близком к режиму при использовании мажоранты $\Psi_{x_k, L_k, \Phi(x_k, y)}(y)$, что формально отражено в теоремах 1 и 2.

Теорема 1. Пусть выполнено предположение 1, $\varepsilon_k = \varepsilon \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $r > 0$. Определим функции

$$\chi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & \text{если } t \in [0, 1]; \\ t - \frac{1}{2}, & \text{если } t > 1; \\ 0 & \text{если } t < 1. \end{cases}$$

$$\tilde{\Delta}_r(x) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(x) - \min_{y \in \mathbb{R}^n} \{\Phi(x, y) : \|y - x\| \leq r\}.$$

Тогда для метода с правилом обновления \mathcal{X} верны следующие оценки:

$$\frac{8L_F^2}{L_0} \left(\varepsilon + \frac{(f_1(x_0) - f_1(x_k))}{k} \right) \geq \\ \geq \min_{i \in \{0, k-1\}} \{ \|2L_F(T_{2L_F, \mathcal{F}_{2L_F}(x_i)}(x_i) - x_i)\|^2 \};$$

$$L_F \left(\varepsilon + \frac{(f_1(x_0) - f_1(x_k))}{k} \right) \geq \geq \min_{i \in \{0, k-1\}} \left\{ 2(rL_F)^2 \kappa \left(\frac{\tilde{\Delta}_r(x_i)}{2r^2 L_F} \right) \right\}.$$

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1 и 2. Определим функцию $f_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f_1(x))^2$. Тогда для метода с правилом обновления \mathcal{X} выполняются следующие соотношения:

$$f_1(x_{k+1}) \leq \varepsilon_k + \begin{cases} \frac{L_F}{\mu} f_2(x_k) \leq \frac{1}{2} f_1(x_k), & \text{если } f_1(x_k) \leq \frac{\mu}{2L_F}; \\ f_1(x_k) - \frac{\mu}{4L_F}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если в правиле обновления \mathcal{X} зафиксирована $L_k = L_F$, то данные соотношения выражаются по-другому:

$$f_1(x_{k+1}) \leq \varepsilon_k + \begin{cases} \frac{L_F}{2\mu} f_2(x_k) \leq \frac{1}{2} f_1(x_k), & \text{если } f_1(x_k) \leq \frac{\mu}{L_F}; \\ f_1(x_k) - \frac{\mu}{2L_F}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Согласно теореме 2, предложенная схема демонстрирует более быструю линейную сходимость относительно итераций по сравнению с выбором $\tau_k = f_1(x_k)$ [7], однако на практике часто это означает усложнение вычисления каждой итерации, что приходится соизмерять для определения наиболее оптимальной стратегии решения задачи.

Минимизация величины $\Psi_{x_k, L_k, \tau}(\mathcal{X}(x_k, L_k, \tau))$ по $\tau > 0$ может быть достаточно трудоемкой процедурой. Более того, отображение $\mathcal{X}(\cdot)$ может быть негладким по τ , а в случае дифференцируемости по τ практическая реализация может представлять собой разновидность алгоритма распространения ошибки через итерации метода оптимизации, аппроксимирующего отображение $T_{L_k, \tau}(x_k)$. При использовании правила вычисления x_{k+1} (3) в качестве отображения $\mathcal{X}(\cdot)$ величина $\Psi_{x_k, L_k, \tau}(\mathcal{X}(x_k, L_k, \tau))$ принимает следующий вид:

$$\Psi_{x_k, L_k, \tau}(\mathcal{X}(x_k, L_k, \tau)) = \frac{\tau}{2} + \frac{f_2(x_k)}{2\tau} - \frac{1}{2\tau} \langle (F'(x_k)^T F'(x_k) + \tau L_k)^{-1} F'(x_k)^T F(x_k), F'(x_k)^T F(x_k) \rangle.$$

Данная функция является строго выпуклой по τ , так как локальная мажоранта $\Psi_{x, L, \tau}(y)$ строго выпукла по τ и сильно выпукла по y , $\Psi_{x_k, L_k, \tau}(\mathcal{X}(x_k, L_k, \tau))$ представляет собой проекцию по y локальной ма-

жоранты $\Psi_{x, L, \tau}(y)$ [2, Theorem 3.1.7], поэтому в рассматриваемом случае приближение оптимального τ можно эффективно найти с помощью стандартных средств выпуклой оптимизации, в частности, процедур одномерного поиска.

2. ЭКСПЕРИМЕНТЫ

На основе предложенного метода проведена серия экспериментов на модельных задачах. Метод протестирован на задаче решения гладкой нелинейной системы уравнений в трех вариантах, различающихся выбором τ_k . Вариант с $\tau_k = f_1(x_k)$ называется “методом трех квадратов” [7]. Вариант, в котором на итерации k значение τ_k оптимизируется через минимизацию $\Psi_{x_k, L_k, \tau}(\mathcal{X}(x_k, L_k, \tau))$ с помощью быстрого градиентного метода, называется адаптивным методом. Вариант, в котором $\tau_k = \phi(x_k, y)$, называется методом Гаусса–Ньютона. Приняв за $x^T \stackrel{\text{def}}{=} (x^1, \dots, x^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n = 100$, рассмотрим два вида F :

1. Система уравнений на основе функции Розенброка–Скокова:

$$F_R(x) = \mathbf{0}_m, \text{ где } m = 2n - 2 \text{ и } F_{R_{2i-1}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} i(x^i - (x^{i+1})^2), \\ F_{R_{2i}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - x^{i+1}, i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

2. Нат-система: $F_H(x) \stackrel{\text{def}}{=} \nabla(\|x\|^2 - 1)^2 = \mathbf{0}_m$.

Для обозначенных отображений F_R и F_H исследуемый метод был применен в трех вариантах для решения нелинейной системы уравнений, результаты экспериментов представлены на рис. 1. На данном рисунке изображены графики, усредненные по пяти запускам, отличающимися начальным приближением, полученным сэмплением из стандартного многомерного нормального распределения, смещенного на вектор, элементы которого равны -7 , в каждом случае расстояние между начальным приближением и ближайшей точкой экстремума функции f_1 не меньше $2\sqrt{n}$ в пространстве \mathbb{R}^n . В результате для каждого $f_1(x_k) \leq 10^{-6}$ расстояние между x_k и ближайшей точкой экстремума f_1 не превосходит 10^{-6} по метрике Чебышева.

Согласно представленным результатам, все три варианта выбора τ_k демонстрируют сопоставимые результаты в случае F_H , на системе F_R “метод трех квадратов” и адаптивный метод существенно лучше справились, чем метод Гаусса–Ньютона. Хотя теоремы 1 и 2 утверждают схожесть поведения адаптивного метода и метода Гаусса–Ньютона в худшем случае, однако при решении системы F_R адаптивный метод справился лучше метода Гаусса–Ньютона. Также стоит заметить, что при решении системы F_R происходит

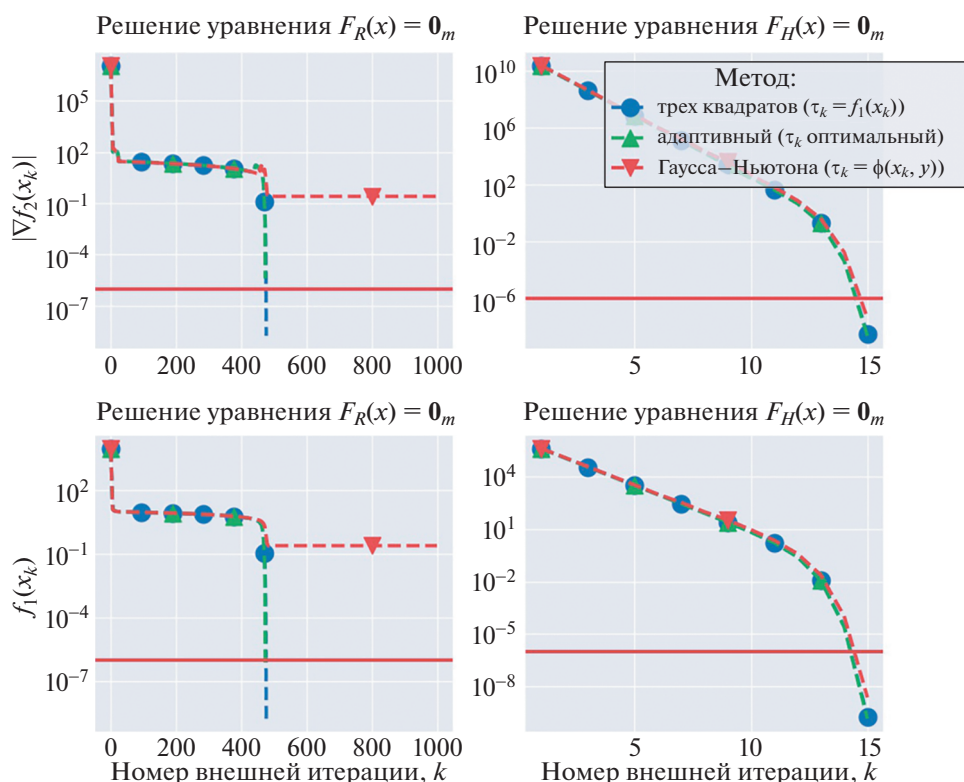


Рис. 1. Сравнение работы методов. Горизонтальная линия — допустимое значение нормы невязки 10^{-6} вблизи искомого решения уравнения.

оптимизация разновидности функции Розенброка—Скокова:

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (i^2(x^i - (x^{i+1})^2)^2 + (1 - x^{i+1})^2).$$

При этом выбор $\tau_k = f_1(x_k)$ позволяет аналитически вычислять x_{k+1} , в свою очередь оптимизация $\psi_{x_k, L_k, \tau}(\mathcal{X}(x_k, L_k, \tau))$ в добавок к аналитическому вычислению x_{k+1} позволяет динамически контролировать близость мажоранты к оптимизируемой функции, выполняя процедуру одномерной минимизации, в то время как выбор $\tau_k = \phi(x_k, y)$ на практике часто требует выполнение итеративной процедуры многомерной минимизации для вычисления x_{k+1} . Эксперименты продемонстрировали, что предлагаемый метод применим не только для минимизации унимодальных функционалов f_1 с гладким отображением F , обладающим свойством Липшица, но также и для оптимизации некоторых f_1 с несколькими точками глобального минимума и с F , не обладающим свойством Липшица, например, F_H .

Более подробный отчет о результатах экспериментов с методом Гаусса—Ньютона в предложенных вариантах изложен в [8].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа была поддержана грантом РНФ 21-71-30005.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Капорин И.Е. Метод ньютоновского типа для решения систем линейных уравнений и неравенств // ЖВМиМФ. 2019. Т. 59. № 12. С. 2086–2101. <https://doi.org/10.1134/S0044466919120093>
2. Nesterov Yu. Lectures on convex optimization. V. 137. Berlin, Germany: Springer, 2018.
3. Гасников А. В. Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска. М.: МЦНМО, 2020.
4. Nesterov Yu. Modified Gauss-Newton scheme with worst case guarantees for global performance // Optimisation methods and software. 2007. V. 22. № 3. P. 469–483.
5. Gorbunov E., Hanzely F, Richtárik P. A unified theory of sgd: Variance reduction, sampling, quantization and coordinate descent // International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. PMLR. 2020. P. 680–690.
6. Поляк Б.Т. Градиентные методы минимизации функционалов // ЖВМиМФ. 1963. Т. 3. № 4. С. 643–653.
7. Nesterov Yu. Flexible Modification of Gauss-Newton Method // CORE Discussion Papers. 2021.

8. *Yudin N., Gasnikov A.* Flexible Modification of Gauss–Newton Method and Its Stochastic Extension // WIAS

Preprint No. 2813. 2021.

<https://doi.org/10.20347/WIAS.PREPRINT.2813>

ADAPTIVE GAUSS–NEWTON METHOD FOR SOLVING SYSTEMS OF NONLINEAR EQUATIONS

N. E. Yudin^{a,b}

^a *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

^b *Federal Research Center “Informatics and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS Yu. G. Evtushenko

In this article, we propose a new version of Gauss–Newton method for solving systems of nonlinear equations based on ideas of the residual upper bound for a system of nonlinear equations and a quadratic regularization term. We prove a global convergence for the presented method. Under natural assumptions we establish a global linear convergence. The proposed method uses an adaptive strategy to choose hyperparameters of a local model forming a flexible and convenient method, implementable using standard convex optimization techniques.

Keywords: systems of nonlinear equations, unimodal optimization, Gauss–Newton method, Polyak–Łojasiewicz condition, inexact proximal mapping, inexact oracle, underdetermined model, complexity estimate

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОМАСШТАБНОГО ПОДХОДА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СОРБЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ВОЗДУХА

© 2021 г. С. В. Поляков^{1,*}, Т. А. Кудряшова^{1,**}, Н. И. Тарасов^{1,***}

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным 27.07.2021 г.

Поступило 27.07.2021 г.

После доработки 27.07.2021 г.

Принято к публикации 08.08.2021 г.

Рассматривается моделирование процессов фильтрации воздуха посредством гранулированных сорбентов. Задача актуальна для промышленной очистки воздуха от вредных продуктов производства, а также для бытовой очистки. Математическое моделирование полезно для разработки и модернизации фильтров, а также для оптимизации технического обслуживания. Предложен многомасштабный подход для решения комплексной задачи фильтрации в условиях реальной геометрии. Его основу составляет метод расщепления по физическим процессам и пространственно-временным масштабам. Базовыми моделями на макромасштабах являются уравнения квазигидро- и квазигазодинамики и конвекции-диффузии, на микромасштабах – модели частиц, в том числе молекулярной динамики. Численная реализация первых производится сеточным методом конечных объемов на неструктурированных сетках, вторых – с помощью схемы Верле и ее обобщений. Анализ результатов численных экспериментов подтвердил их достоверность и теоретическую обоснованность.

Ключевые слова: очистка воздуха, многомасштабные математические модели, численные методы, экология, фильтрация, сорбенты

DOI: 10.31857/S268695432105009X

Очистка воздуха является одной из наиболее приоритетных задач современной экологии. Причиной высокого загрязнения воздушной среды является деятельность человека, в частности, развитие промышленности, сельского хозяйства, увеличение количества транспортных средств. Среди природных источников загрязнения ведущее место занимают вулканы [1]. Одним из направлений решения данной экологической проблемы является совершенствование систем промышленной и бытовой очистки воздушной среды, для чего проводятся широкие научные исследования и натурные эксперименты. Последние все больше заменяются методами математического и компьютерного моделирования.

Главной проблемой очистки воздушной среды в настоящее время является удаление из потока наноразмерных частиц загрязнителя. Удаление таких частиц на ранних стадиях очистки физиче-

ски невозможно ввиду их особо малого размера. При этом опасность присутствия таких частиц в воздушном потоке связана с тем, что при попадании в легкие человека и животных, они остаются там на продолжительное время и приводят в итоге к развитию необратимых патологий органов дыхания. Для очистки воздушного потока от твердых наночастиц могут применяться системы фильтрации газов с использованием гранулированных сорбентов [2–5] – элементов различной формы, имеющих поверхностный или объемный заряд, позволяющий захватывать загрязняющие частицы малого размера. Данный подход позволяет управлять допустимой концентрацией загрязнителя и режимом работы фильтра с помощью увеличения количества сорбента. Кроме того, подобные очистные системы допускают эффективную регенерацию без опасности нарушения последующей работы.

При попадании загрязненной газовой смеси в активную область фильтра, наполненную гранулами сорбента, в результате взаимодействия с ними загрязнитель удерживается в системе. Для построения адекватной математической модели такого процесса необходимо учитывать:

– течение среды, в том числе в области скопления гранул;

¹ Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: serge@imamod.ru

**E-mail: kudryashova@imamod.ru

***E-mail: nikita_tarasow01@mail.ru

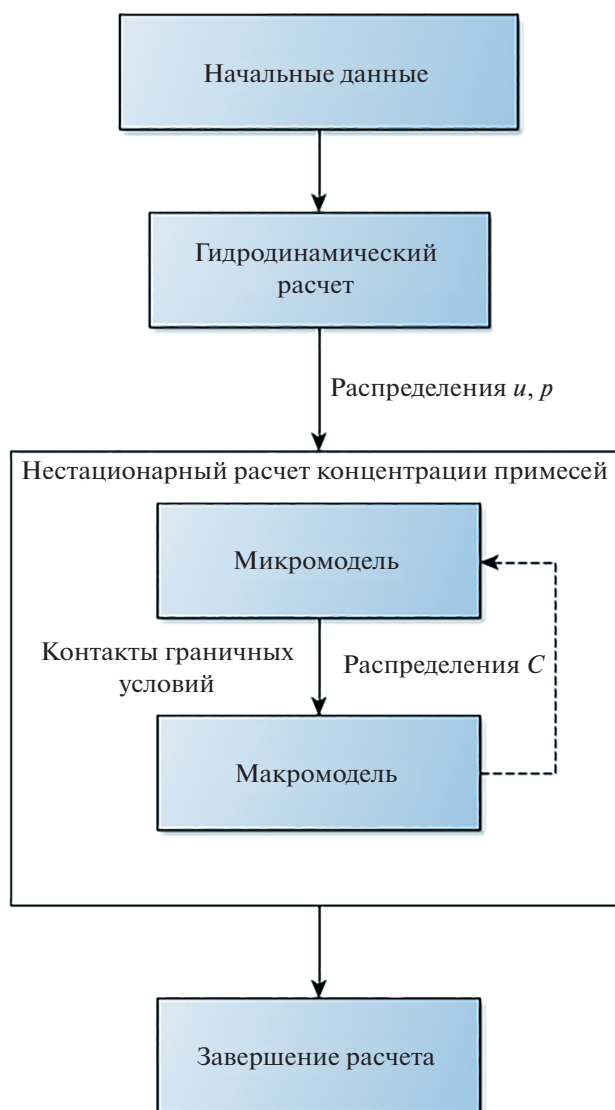


Рис. 1. Алгоритм многомасштабного подхода.

– конвекционно-диффузионный перенос загрязнителя;

– захват примеси сорбционными элементами.

Для моделирования течения воздуха воспользуемся тем фактом, что при небольших перепадах давления и малых скоростях (что справедливо при рассмотрении фильтрационных устройств) допускается описание поведения потока воздуха как несжимаемой среды. Это позволяет использовать либо уравнения Навье–Стокса в гидродинамическом приближении, либо обобщающую их квазигидродинамическую систему [6, 7]. В случае изотермического течения последняя в безразмерной форме имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla[\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T] + \nabla[\mathbf{w} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}] - \nabla(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nabla p, \quad (1)$$

$$\Delta p = \frac{1}{\tau} \nabla(\mathbf{u}) - \nabla[(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u}], \quad (2)$$

$$\mathbf{w} = \tau[(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} + \nabla p], \quad (3)$$

где $(\bullet \otimes \bullet)$ – прямое произведение векторов, p – давление, \mathbf{w} – регуляризирующая поправка, τ –

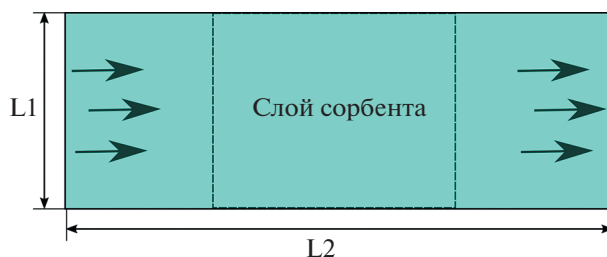


Рис. 2. Схема геометрии расчетной области.

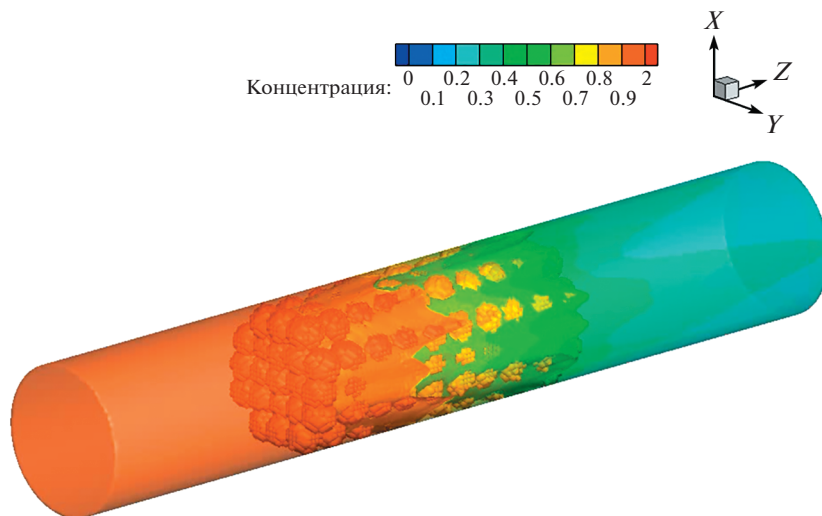


Рис. 3. Распределение полной концентрации примеси, изоповерхности.

параметр регуляризации. Дополним систему уравнений (1)–(3) граничными условиями:

течение Пуазейля на входе:

$$\mathbf{u} = \{U(y, z), 0, 0\}^T, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = -C \quad (C = \text{const} > 0), \quad (4)$$

свободный выход на выходе:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0, \quad p = p_0, \quad (5)$$

условия прилипания на стенке:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0. \quad (6)$$

В качестве начальных условий принимаются условия покоя среды:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad p = p_0. \quad (7)$$

Здесь p_0 – атмосферное давление. Константа C выбирается из условия постоянства расхода жидкости, проходящей через фильтр. Отметим, что мелкодисперсность примеси позволяет вычислять для последующего моделирования нестационарного процесса очитки [8].

Распределение и эволюцию компонентов примеси в фильтре будем описывать с помощью уравнений конвекции-диффузии, учитывающих сорбционные процессы посредством введения специальных граничных условий [9]. В безразмерной форме система имеет следующий вид:

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} = \nabla (D_k \nabla C_k + \mathbf{u} C_k), \quad (8)$$

здесь C_k – концентрация частиц сорта k , $D_k = \frac{D_{0,k}}{u_0 H}$ – константа нормировки, $D_{0,k}$ – безразмерный коэффициент диффузии частиц. Система уравнений (8) дополняется граничными условиями:

на входе в среду:

$$C_k = \frac{1}{n_k}, \quad (9)$$

где n_k – количество компонент загрязнителя;

на выходе из среды:

$$\frac{\partial C_k}{\partial n} = 0; \quad (10)$$

на стенках (поверхность резервуара или сорбционного элемента):

$$\frac{\partial C_k}{\partial n} = A_k (C_k - C_k^*) \left(1 - \frac{C_k}{C_k^{**}} \right), \quad (11)$$

где C_k^* – равновесное значение концентрации частиц k -го компонента примеси, C_k^{**} – максимальная концентрация k -го компонента, удерживаемая элементом поверхности гранулы сорбента, A_k – интенсивность захвата частиц k -го компонента загрязнителя поверхностью гранулы сорбента (может зависеть от общего числа вакансий на поверхности гранулы, свободных от всех наночастиц всех сортов загрязнителя).

Системы уравнений (1)–(3) и (8) будем называть макромоделами. Микромоделами первого приближения будем считать методики расчета параметров $D_{0,k}$, A_k , C_k^{**} , на основе методов частиц и молекулярной динамики [10]. Тогда итого-

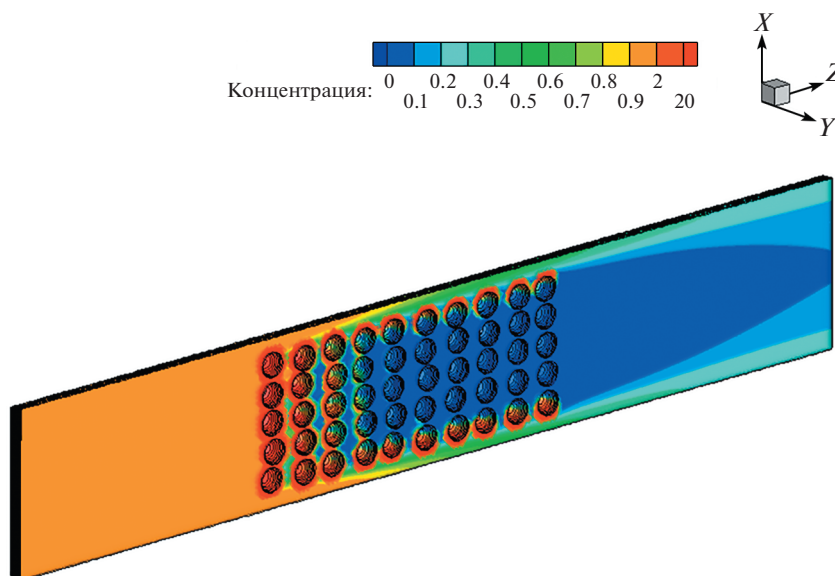


Рис. 4. Распределение полной концентрации примеси, набор сечений.

вый многомасштабный подход можно представить схемой, изображенной на рис. 1.

Дискретизация уравнений (1)–(3) выполнена в соответствии с работой [11]. Естественные переменные определялись в центрах ячеек, регулирующая поправка – на гранях сеточных элементов. Сеточные аналоги уравнений (8) были получены на основе метода конечных объемов [12–14], где в качестве контрольных объемов использовались ячейки пространственной сетки. Для аппроксимации по времени использовалась явная схема.

В модельном численном эксперименте рассматривалась область с размерами $L_1 = 2$, $L_2 = 12$, содержащая 210 сферических гранул радиуса 0.15, схема которой изображена на рис. 2. На входе фильтра задавалось постоянное распределение скорости $u_x = 1.0$. Течение рассчиталось для $Re = 150$. Коэффициент D_k принимался равным 1.0. Начальное состояние $\mathbf{u} = 0$, $p = p_0$ и $C = 0.0$ с равновесной концентрацией примеси равной 0.0. Скорость захвата загрязнителя принималась равной $A = 1.0$. Критерий насыщения – $C^{**} = 1000$. В численном расчете использовалась тетраэдральная сетка, содержащая 1780727 элементов. Результаты проведенных расчетов представлены на рис. 3, 4. Они подтверждают наличие эффекта очистки – прилипания частиц к поверхности гранул сорбента.

В заключение отметим, что использование многомасштабного подхода позволяет получать эволюцию концентрации примеси в областях различной сложности, в том числе реальной геометрии. С практической точки зрения проведение подобных численных расчетов может стать

полезным инструментом для разработки и оптимизации фильтрационных устройств, а также их эффективной эксплуатации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джувеликян Х.А., Черепухина И.В. Современные проблемы природного и техногенного загрязнения окружающей среды // “Живые и биокосные системы”. 2017. № 22. URL: <http://www.jbks.ru/archive/issue-22/article-8>
2. Штокман Е.А. Очистка воздуха. Москва: АСВ, 2007. 313 с.
3. Xu Zh. Fundamentals of Air Cleaning Technology and Its Application in Cleanrooms. В., Heidelberg: Springer, 2014. 871 p.
4. Sparks T., Chase G. Filters and Filtration Handbook (Sixth Edition). Butterworth-Heinemann, 2015. 431 p.
5. Гладышев Н.Ф., Гладышева Т.Г., Дворецкий С.И. Системы и средства регенерации и очистки воздуха обитаемых герметичных объектов. Москва: Издательский дом «Спектр», 2016. 204 с.
6. Elizarova T.G. Quasi-Gas Dynamic Equations. В., Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 286 p.
7. Elizarova T.G., Zlotnik A.A., Chetverushkin B.N. On quasi-gasdynamic and quasi-hydrodynamic equations for binary gas mixtures // Doklady Mathematics. 2014. V. 90. № 3. P. 719–723.
8. Поляков С.В., Кудряшова Т.А., Тарасов Н.И. Метод двойного потенциала для моделирования внутреннего течения вязкой несжимаемой жидкости // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 494. № 1. С. 73–76.
9. Karamzjn Yu.N., Kudryashova T.A., Polyakov S.V. On a class of flux schemes for convection-diffusion equa-

- tions // Computational Mathematics and Information Technologies. 2017. V. 1. № 2. P. 169–179.
10. Подрыга В.О., Вихров Е.В., Поляков С.В. Молекулярно-динамический расчет коэффициента диффузии газов на примере аргона, азота, водорода, кислорода, метана и углекислого газа // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 96. 24 с.
 11. Тарасов Н.И., Поляков С.В., Карамзин Ю.Н., Кудряшова Т.А., Подрыга В.О., Пузырьков Д.В. Моделирование потока вязкой несжимаемой жидкости с помощью квазигидродинамической системы уравнений // Матем. моделирование. 2019. Т. 31. № 12. С. 33–43.
 12. Ильин В.П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2000. 345 с.
 13. Eymard R., Gallouet T.R., Herbin R. The finite volume method // Handbook of Numerical Analysis, Elsevier. 2000. V. 7. P. 713–1020.
 14. LeVeque R.J. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press. 2002. 558 p.

APPLICATION OF THE MULTI-SCALE APPROACH FOR AIR SORBENT FILTRATION SIMULATION

S. V. Polyakov^a, T. A. Kudryashova^a, and N. I. Tarasov^a

^a Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

The problem of numerical modeling air filtration by granular sorbents is considered. The task of cleaning air is relevant for industrial purification from harmful products of manufacturing, as well as for household cleaning air. Mathematical modeling can be useful both for the development and modernization of filters, and for optimizing maintenance. A multiscale approach is proposed for solving a complex filtration problem in real geometry conditions. It is based on the method of splitting into physical processes and space-time scales. The basic models on the macroscale are the equations of quasihydro- and quasi-gasdynamics and convection-diffusion, on the microscale are models of particles, including the molecular dynamics. The numerical implementation of the former is carried out by mesh method of the finite-volumes on unstructured meshes, and the latter, using the Verlet scheme and its generalizations. Analysis of the results of numerical experiments confirmed their reliability and theoretical validity.

Keywords: air purification, multi-scale mathematical models, numerical methods, ecology, filtration, sorbents

УДК 517.977

СУБРИМАНОВА СФЕРА ЭНГЕЛЯ

© 2021 г. Ю. Л. Сачков^{1,*}, А. Ю. Попов^{1,2,*}

Представлено академиком РАН Р.В. Гамкрелидзе 18.07.2021 г.

Поступило 19.07.2021 г.

После доработки 26.07.2021 г.

Принято к публикации 02.09.2021 г.

Описана структура пересечения субримановой сферы на группе Энгеля с двумерным инвариантным множеством дискретных симметрий: регулярность, аналитические свойства, принадлежность $\exp\text{-log}$ -категории, стратификация Уитни, кратность точек, характеристизация в смысле аномальных траекторий, сопряженных точек и точек Максвелла, явные выражения субриманова расстояния до особых точек.

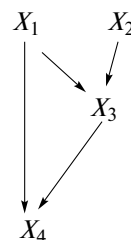
Ключевые слова: группа Энгеля, субриманова геометрия, субриманова сфера

DOI: 10.31857/S2686954321050210

Описание метрики Карно–Каратеодори и субримановых сфер является одним из центральных вопросов субримановой геометрии [1, 2]. Известно лишь несколько субримановых геометрий, в которых явно описаны сферы: группа Гейзенберга [3], плоский случай Мартине [4], осесимметричные субримановы структуры на группах $SO(3)$ и $SL(2)$ [6, 5], субримановы структуры на группах $SE(2)$ [7] и $SH(2)$ [8]. Все эти структуры заданы на 3-мерных многообразиях и все, кроме случая Мартине, являются контактными левоинвариантными структурами с вектором роста $(2, 3)$, потому двухступенными. Первое описание трехступенной субримановой структуры – на группе Энгеля – получено в работе [9]. На основе этих результатов, в данной работе мы получаем подробное описание субримановой сферы на группе Энгеля (ее сечения двумерным инвариантным многообразием группы симметрий).

1. ГРУППА ЭНГЕЛЯ

Алгебра Энгеля – это нильпотентная 4-мерная алгебра Ли, в которой существует базис $\mathfrak{g} = \text{span}(X_1, \dots, X_4)$, в котором таблица умножения имеет вид



$$[X_1, X_2] = X_3,$$

$$[X_1, X_3] = X_4,$$

$$[X_2, X_3] = [X_1, X_4] = [X_2, X_4] = 0.$$

Группа Энгеля G есть связная односвязная группа Ли с алгеброй Ли \mathfrak{g} . Ее линейное представление есть

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & 1 & a & a^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Мы будем использовать модель $G \cong \mathbb{R}_{x,y,z,v}^4$, в которой левоинвариантный репер имеет вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z},$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial v},$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial v},$$

$$X_4 = [X_1, X_3] = \frac{\partial}{\partial v},$$

¹Институт программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук, Переславль-Залесский, Ярославская обл., Россия

²Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*E-mail: yusachkov@gmail.com

как в работе [9]. Наряду с переменной v , будем использовать переменную $w = v - \frac{y^3}{6}$.

2. ПОСТАНОВКА И ОСОБЕННОСТИ СУБРИМАНОВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРУППЕ ЭНГЕЛЯ

Рассмотрим левоинвариантную субриманову структуру на группе Энгеля G с ортонормированным репером X_1, X_2 :

$$\Delta = \text{span}(X_1, X_2), \quad g(X_i, X_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Выходящие из единицы группы субримановы кратчайшие для этой структуры суть решения задачи оптимального управления

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q \in G, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

$$q(0) = \text{Id}, \quad q(t_1) = q_1, \quad (2)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \quad (3)$$

Эта задача имеет ряд важных особенностей:

- это простейшая субриманова задача глубины 3 (вектор роста (2, 3, 4)),
- это простейшая левоинвариантная субриманова задача с нетривиальными аномальными геодезическими (кратчайшими),
- эта задача проецируется в субриманову задачу в плоском случае Мартине (вектор роста (2, 2, 3)),
- эта задача вкладывается в любую левоинвариантную субриманову задачу с вектором роста больше (2, 3, 4), например, в задачу на группе Картана (вектор роста (2, 3, 5)), задачи с вектором роста (2, 3, 5, 6), (2, 3, 5, 8), (2, 3, 4, 5),

3. РАНЕЕ ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе [9], а также в более ранних статьях, цитированных в этой работе, получены следующие результаты для задачи (1)–(3):

- система вполне управляема;
- оптимальное управление существует;
- описаны аномальные траектории;
- это однопараметрические подгруппы $e^{\pm t X_2}$,

- они проецируются на плоскость (x, y) в прямые,
- поэтому они оптимальны,
- они нестрогие аномальны;
- нормальные экстремали удовлетворяют гамильтоновой системе принципа максимума Понтрягина с гамильтонианом $H(\lambda) = (\langle \lambda, X_1 \rangle^2 + \langle \lambda, X_2 \rangle^2)/2$:

$$\dot{\theta} = c, \quad (4)$$

$$\dot{c} = -\alpha \sin \theta, \quad (5)$$

$$\dot{\alpha} = 0,$$

$$\dot{q} = -\sin \theta X_1 + \cos \theta X_2;$$

- в фазовом цилиндре уравнения маятника (4), (5) введены координаты (φ, k) , в которых это уравнение выпрямляется:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{|\alpha|}, \quad \dot{k} = 0;$$

- получена параметризация экспоненциального отображения эллиптическими функциями Якоби:

$$\text{Exp}: C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow G, \quad \text{Exp}(\lambda, t) = \pi \circ e^{t\tilde{H}}(\lambda) = q(t),$$

$$C = g^* \cap H^{-1}(1/2);$$

- описана дискретная группа симметрий экспоненциального отображения

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{\varepsilon^i | i = 1, \dots, 8\},$$

она порождена отражениями $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ маятника в осях θ, c и отражением $\varepsilon^4: (\theta, \alpha) \mapsto (\theta + \pi, -\alpha)$;

- найдены соответствующие времена Максвелла вдоль геодезических;
- доказано, что время разреза есть первое время Максвелла, соответствующее отражениям, получено его явное выражение

$$t_{\text{cut}} : C \rightarrow (0, +\infty];$$

- построен оптимальный синтез;
- описано множество разреза.

4. СУБРИМАНОВЫ РАССТОЯНИЕ И СФЕРЫ

Напомним основные определения и свойства субримановой метрики и сфер.

Субриманово расстояние (метрика Карно–Каратеодори) определяется следующим образом:

$$d(q_0, q_1) = \inf \left\{ \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \mid \text{управление } (u_1, u_2)(t) \text{ переводит } q_0 \text{ в } q_1 \right\}.$$

Субриманова сфера радиуса R с центром q_0 есть

$$S_R(q_0) = \{q \in G \mid d(q_0, q) = R\}.$$

В силу инвариантности метрики относительно левых сдвигов на группе Энгеля $L_q: q' \mapsto qq'$,

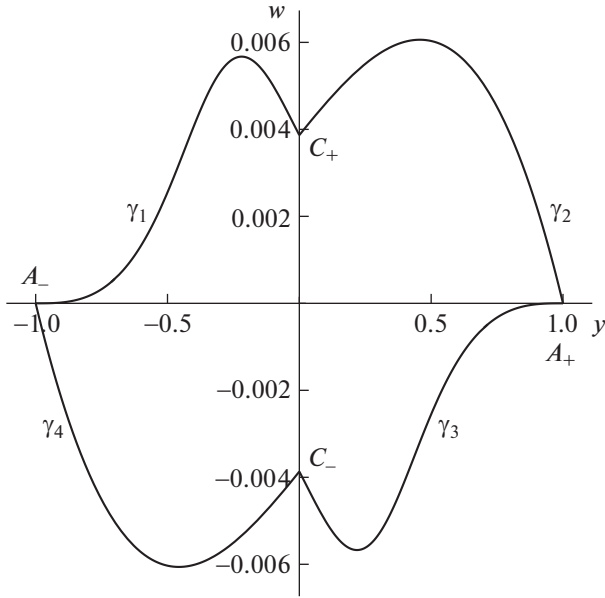


Рис. 1. Сечение сферы \tilde{S} .

$$d(qq_0, qq_1) = d(q_0, q_1),$$

$$L_q(S_R(q_0)) = S_R(qq_0).$$

В силу того, что группа Энгеля есть группа Карно, левоинвариантная субриманова структура согласована с дилатациями:

$$\delta_\beta : (x, y, z, w) \mapsto (\beta x, \beta y, \beta^2 z, \beta^3 w), \quad \beta > 0,$$

$$d(\text{Id}, \delta_\beta(q)) = \beta d(\text{Id}, q),$$

$$\delta_\beta(S_R(\text{Id})) = S_{\beta R}(\text{Id}).$$

Поэтому достаточно исследовать единичную сферу

$$S = S_1(\text{Id}) = \{q \in G \mid d(q, \text{Id}) = 1\}.$$

Ранее получена параметризация единичной сферы S экспоненциальным отображением:

$$S = \{\text{Exp}(\lambda, 1) \mid \lambda \in C, t_{\text{cut}}(\lambda) \geq 1\}.$$

Субриманова структура и сфера имеют дискретные симметрии:

$$\varepsilon^i(S) = S, \quad i = 1, \dots, 8.$$

Основной объект этой работы – сечение сферы двумерным инвариантным многообразием основных симметрий $\varepsilon^1, \varepsilon^2$:

$$\tilde{S} = \{q \in S \mid \varepsilon^1(q) = \varepsilon^2(q) = q\} = S \cap \{x = z = 0\}.$$

Обозначим подмножества, на которые распадается сечение \tilde{S} , см. рис. 1:

$$A_\pm = \tilde{S} \cap \{w = 0, \text{sgn } y = \pm 1\},$$

$$C_\pm = \tilde{S} \cap \{y = 0, \text{sgn } w = \pm 1\},$$

$$\gamma_1 = \tilde{S} \cap \{y < 0, w > 0\},$$

$$\gamma_2 = \tilde{S} \cap \{y > 0, w > 0\},$$

$$\gamma_3 = \tilde{S} \cap \{y > 0, w < 0\},$$

$$\gamma_4 = \tilde{S} \cap \{y < 0, w < 0\},$$

$$\tilde{S} = A_+ \sqcup A_- \sqcup C_+ \sqcup C_- \sqcup (\bigsqcup_{i=1}^4 \gamma_i). \quad (6)$$

Имеются следующие симметрии между этими подмножествами:

$$\varepsilon^4(\gamma_i) = \gamma_{i+2}, \quad i = 1, 2,$$

$$\varepsilon^4(A_\pm) = A_\mp, \quad \varepsilon^4(C_\pm) = C_\mp.$$

5. КРАТНОСТЬ ТОЧЕК СЕЧЕНИЯ \tilde{S}

Кратностью точки $q \in G$ называется величина $\mu(q) = \text{card}\{\text{кратчайшие, соединяющие Id и } q\}$.

Теорема 1. (1) $\mu(A_\pm) = 1$.

(2) $\mu(C_\pm) = c$ (континуум $\cong S^1$).

(3) $q \in \gamma_i \Rightarrow \mu(q) = 2$.

6. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ТОЧЕК СЕЧЕНИЯ \tilde{S}

Теорема 2. (1) A_\pm суть точки на аномальных кратчайших.

(2) C_\pm суть сопряженные точки, точки Максвелла, точки разреза, центральные элементы группы Энгеля.

(3) $q \in \gamma_i$ суть точки Максвелла, точки разреза.

7. ЯВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ СУБРИМАНОВА РАССТОЯНИЯ ДО НЕКОТОРЫХ ТОЧЕК ГРУППЫ ЭНГЕЛЯ

Теорема 3. (1) Если $q(t) = e^{\pm tX_2}$, $x = z = w = 0$, $y = \pm t$ есть точка аномальной кратчайшей, то

$$d(\text{Id}, q(t)) = t.$$

(2) Если $q(t) = e^{\pm tX_4}$, $x = y = z = 0$, $w = \pm t$ есть центральный элемент группы, то

$$d(\text{Id}, q(t)) = C\sqrt[3]{t},$$

$$C = \sqrt[3]{48K^2(k_0)} \approx 6.37,$$

$$K(k_0) - 2E(k_0) = 0, \quad k_0 \approx 0.91.$$

8. РЕГУЛЯРНОСТЬ СЕЧЕНИЯ \tilde{S}

Теорема 4. (1) Кривые γ_i аналитичны и регулярны.

(2) A_\pm, C_\pm суть особые точки, в них \tilde{S} негладкая, но липшицева.

(3) $\bar{\gamma}_2 = \gamma_2 \cup \{C_+, A_+\}$ гладкая класса C^∞ .

(4) $\gamma_1 \cup \{C_+\}$ гладкая класса C^∞ .

(5) $\gamma_1 \cup \{A_-\}$ гладкая класса C^1 .

9. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА \tilde{S}

Множество называется аналитическим, если в некоторой окрестности каждой своей точки оно задается конечной системой вещественно-аналитических уравнений. Множество называется полуаналитическим, если в некоторой окрестности каждой своей точки оно задается конечной системой вещественно-аналитических уравнений и неравенств. Множество называется субаналитическим, если его можно получить из полуаналитических множеств путем конечнократного применения операций объединения, пересечения и взятия образа собственного аналитического отображения. На двумерной плоскости понятия полуаналитических и субаналитических множеств совпадают.

Несубаналитичность субримановых сфер тесно связана с наличием аномальных кратчайших. А.А. Аграчев [11] доказал субаналитичность сфер для субримановых структур без аномальных кратчайших и для многих структур без строго аномальных кратчайших. Позже А.А. Аграчев и А.В. Сарычев [12] показали, что для 2-порождающих субримановых структур (для которых нет аномальных кратчайших) сферы субаналитичны. Известно также, что для плоской субримановой структуры в случае Мартине [4] и для некоторых ее возмущений [13] имеются аномальные кратчайшие, а сферы несубаналитичны.

Теорема 5. (1) Множество $\tilde{S} \setminus \{A_+, A_-\}$ полуаналитично, потому субаналитично.

(2) В окрестности точки A_- кривая γ_1 есть график неаналитической функции

$$w = \frac{1}{6}Y^3 - 4Y^3 \exp\left(-\frac{2}{Y}\right)(1 + o(1)),$$

$$Y = \frac{y+1}{2} \rightarrow 0.$$

(3) Поэтому множество \tilde{S} неполуаналитично, что эквивалентно несубаналитичности так как $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^2$.

(4) Следовательно, сфера S несубаналитична.

10. Exp-log-КАТЕГОРИЯ

Функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит exp-log-категории, если она представляется в виде конечной композиции субаналитических функций, экспонент и логарифмов. Множество принадле-

жит exp-log-категории, если в некоторой окрестности любой своей точки оно является графиком отображения, компоненты которого — функции из exp-log-категории.

Теорема 6. В окрестности точки A_- кривая γ_1 есть график функции из exp-log-категории:

$$w = F\left(Y, \frac{e^{-1/Y}}{Y}\right), \quad Y = \frac{y+1}{2} \rightarrow 0,$$

где $F(\xi, \eta)$ есть аналитическая функция в окрестности точки $(\xi, \eta) = (0, 0)$.

Поэтому множество \tilde{S} принадлежит exp-log-категории.

11. СТРАТИФИКАЦИЯ УИТНИ

Напомним следующие фундаментальные факты, относящиеся к стратификации Уитни [10]:

если множество субаналитично, то оно является стратифицированным пространством Уитни (С. Лоясевич, Х. Хиронака),

если множество принадлежит exp-log-категории, то оно является стратифицированным пространством Уитни (Ta Lê Loi).

Теорема 7. Разбиение (6) есть стратификация Уитни.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Разделы 1–9, 11 написаны Ю.Л. Сачковым, раздел 10 – А.Ю. Поповым. Исследование Ю.Л. Сачкова выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387-П) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Montgomery R. A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. Amer. Math. Soc., 2002.
2. Agrachev A., Barilari D., Boscain U. A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.
3. Вершик А.М., Гершкович В.Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техники: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1987. С. 5–85.
4. Agrachev A., Bonnard B., Chyba M., Kupka I. Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case // J. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 1997. V. 2. P. 377–448.
5. Берестовский В.Н., Зубарева И.А. Формы сфер специальных неголономных левоинвариантных внут-

- ренных метрик на некоторых группах Ли // Сиб. матем. журнал. 2001. Т. 42. № 4. С. 731–748.
6. *Boscain U., Rossi F.* Invariant Carnot–Caratheodory metrics on S^3 , $SO(3)$, $SL(2)$ and Lens Spaces // SIAM Journal on Control and Optimization. 2008. V. 47. P. 1851–1878.
 7. *Sachkov Yu.L.* Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. 2011. V. 17. P. 293–321.
 8. *Butt Y.A., Sachkov Yu.L., Bhatti A.I.* Cut Locus and Optimal Synthesis in Sub-Riemannian Problem on the Lie Group $SH(2)$ // Journal of Dynamical and Control Systems. 2017. V. 23. P. 155–195.
 9. *Ardentov A.A., Sachkov Yu. L.* Maxwell Strata and Cut Locus in the Sub-Riemannian Problem on the Engel Group // Regular and Chaotic Dynamics. 2017. December. V. 22. Issue 8. P. 909–936.
 10. *Горески М., Макферсон Р.* Стратифицированная теория Морса. М.: Мир, 1991.
 11. *Agrachev A.* Compactness for sub-Riemannian length-minimizers and subanalyticity // Rend. Semin. Mat. Torino. 1998. V. 56. P. 1–12.
 12. *Agrachev A., Sarychev A.* Sub-Riemannian metrics: minimality of abnormal geodesics versus subanalyticity // ESAIM: COCV. 1999. V. 4. P. 377–403.
 13. *Bonnard B., Trélat E.* On the role of abnormal minimizers in sub-Riemannian geometry // Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e serie. 2001. V. 10. № 3. P. 405–491.

SUB-RIEMANNIAN ENGEL SPHERE

Yu. L. Sachkov^a and A. Yu. Popov^{a,b}

^a*Ailamazyan Program Systems Institute, Russian Academy of Sciences,
Pereslavl-Zalessky, Yaroslavl Region, Russian Federation*

^b*Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS R.V. Gamkrelidze

The structure of intersection of the sub-Riemannian sphere on the Engel group with a two-dimensional set of discrete symmetries is described: regularity, analytic properties, exp-log category, Whitney stratification, multiplicity of points, characterization in terms of abnormal trajectories, conjugate points and Maxwell points, explicit expressions of sub-Riemannian distance to singular points.

Keywords: sub-Riemannian geometry, sub-Riemannian sphere, Engel group

УДК 531.911.5, 531.37

ПРИТЯЖЕНИЕ ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ

© 2021 г. И. А. Финогенко^{1,*}

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым 23.06.2021 г.

Поступило 02.07.2021 г.

После доработки 02.07.2021 г.

Принято к публикации 22.07.2021 г.

Исследуются вопросы притяжения для систем с кулоновым трением, представленных уравнениями Лагранжа 2-го рода. Методы исследований опираются на прямой метод Ляпунова и метод предельных уравнений, восходящих к работам G.R. Sell (1967) и Z. Artstein (1977, 1978) по топологической динамике неавтономных систем. Полученные результаты обобщают принцип инвариантности Ла-Салля.

Ключевые слова: функция Ляпунова, метод предельных уравнений, предельные дифференциальные включения, принцип инвариантности, притяжение, сухое трение, уравнения Лагранжа 2-го рода

DOI: 10.31857/S2686954321050052

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуется асимптотическое поведение механических систем с сухим трением, представленных уравнениями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_a}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T_a}{\partial q^i} = Q_i^A + Q_i^T, \quad i = 1, \dots, k, \quad (1)$$

описание которых опирается на [1]. Здесь T_a – кинетическая энергия системы, Q_i^T – разрывные относительно обобщенных скоростей кулоновы силы трения, Q_i^A – активные силы системы. Детально изучается случай, когда активные силы представляют собой сумму потенциальных и диссипативных (отличных от сил трения) сил. Мы делаем предположение о том, что коэффициенты трения зависят от переменной t (времени). Такая зависимость может возникать по разным причинам, таким, как изменение температуры или иных характеристик трущихся тел.

Если использовать известные подходы теории разрывных систем [2], то уравнения (1) следует рассматривать, как дифференциальные включения. В своих исследованиях мы используем принцип инвариантности для неавтономных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, развитый в [3], с использованием функций Ляпунова со знакопостоянными производными.

Отметим, что функции Ляпунова со знакопостоянными производными характерны для механических систем, если в качестве функции Ляпунова выступает полная энергия системы.

Теоремы прямого метода Ляпунова для систем автономных обыкновенных дифференциальных уравнений со знакопостоянными производными функций Ляпунова получены в известных работах Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского (см. [4]). В них асимптотическая устойчивость была установлена при дополнительном предположении об отсутствии целых траекторий системы в окрестности начала координат (положения равновесия). Если избавиться от этого предположения, можно утверждать лишь то, что ω -предельные множества решений лежат во множестве нулей производной функции Ляпунова. Эти выводы в дальнейшем получили развитие в работах Ла-Салля и в настоящее время известны как принцип инвариантности (см. [5, гл. 7]).

Проблемы, которые на этом пути возникают при рассмотрении неавтономных систем, состоят в следующем.

1. ω -Предельные множества решений неавтономных дифференциальных уравнений не обладают свойствами типа инвариантности, на которые существенно опирается принцип инвариантности Ла-Салля.

2. Становится неясным, как интерпретировать множество нулей производной функции Ляпунова, так как эта производная зависит также и от переменной t .

Попытки, направленные на преодоление этих трудностей, восходят к статьям [6–8] и в настоя-

¹Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск, Россия

*E-mail: fin@icc.ru

шее время привели к методу исследования вопросов притяжения и асимптотической устойчивости, который известен как метод предельных уравнений (см. [9, 10]).

Для дифференциальных включений и дифференциальных уравнений с разрывной правой частью наряду с указанными выше проблемами возникает еще принципиальный вопрос о построении предельных дифференциальных соотношений, поскольку для этого нет подходящих теорем математического анализа о сходимости последовательностей многозначных функций. Впервые эта проблема была решена в работах [11, 3] с использованием методов многозначного анализа.

Для детального описания и преобразования механической системы (1) примем следующие обозначения: $q = (q_1, \dots, q_k)'$, $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^k)'$, $q = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^k)'$, $Q^A = (Q_1^A, \dots, Q_k^A)'$ – векторы-столбцы обобщенных координат, скоростей, ускорений и активных сил.

Кинетическая энергия T_a системы представляет собой сумму $T_a = T + T_1 + T_0$ положительно определенной квадратичной формы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j$$

обобщенных скоростей с симметричной матрицей $A(q) = [a_{ij}(q)]_i^k$, линейной формы обобщенных скоростей $T_1 = \sum_{i=1}^k a_i(q) \dot{q}^i$ и функции $T_0(q)$.

Обобщенные силы трения скольжения при условии $\dot{q}^i \neq 0$ имеют вид

$$Q_i^T(q, \dot{q}) = -f_i(t, q, \dot{q}) |N_i(q, \dot{q})| \operatorname{sgn} \dot{q}^i. \quad (2)$$

Здесь $|N_i(q, \dot{q})|$ – модули нормальных реакций в точках соприкосновения трущихся тел, $f_i(t, q, \dot{q}) > 0$ – коэффициенты трения, $1 \leq i \leq k_*$, $k_* \leq k$. Для $i = k_* + 1, \dots, k$ считаем $f_i = 0$. Отметим, что если активные силы, действующие на систему, известны, то реакции связей с трением неизвестны и подлежат определению (см. [1]). Эти вопросы в данной статье не затрагиваются. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что функции N_i определены и непрерывны, функции a_{ij} , a_i , T_0 непрерывно дифференцируемы, функции f_i и Q_i^A непрерывны по своим аргументам.

Уравнения (1) с силами трения (2) могут в достаточной общем виде описывать системы с одностепенными кинематическими парами с трением (например, механизмы, состоящие из шатунов и ползунов, маятниковые системы с трением в шарнирах и опорах).

Обозначим через $\frac{\partial T_a}{\partial q}$ и $\frac{\partial T_a}{\partial \dot{q}}$ векторы-столбцы частных производных функции $T_a(q, \dot{q})$ по переменным q_i и \dot{q}_i , соответственно, и запишем уравнения (1) в векторной форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_a}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T_a}{\partial q} = Q^A + Q^T. \quad (3)$$

Функция T_1 в выражении кинетической энергии T_a после дифференцирования задает гироскопические силы $\Gamma_i(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^k \gamma_{ji} \dot{q}^j$ с коэффициентами

$$\gamma_{ij} = \left(\frac{\partial a_i(q)}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial a_j(q)}{\partial \dot{q}^i} \right) = -\gamma_{ji}.$$

Функции $Q_i^e = \frac{\partial T_0(q)}{\partial q^i}$ представляют переносные силы инерции.

Применяя к силам трения в точках разрыва простейшее выпуклое доопределение [2, с. 40], получим общее выражение сил трения в виде

$$Q_i^T(t, q, \dot{q}) = \begin{cases} -f_i |N_i| \operatorname{sgn} \dot{q}^i, & \text{если } \dot{q}^i \neq 0, \\ [-f_i |N_i|, f_i |N_i|], & \text{если } \dot{q}^i = 0 \end{cases}$$

для каждого $i = 1, \dots, k^*$.

Введем в рассмотрение векторную функцию $g = (g_1, \dots, g_k)'$, определенную равенствами

$$g_i(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^k \gamma_{ji} \dot{q}^j + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial a_{vj}}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^v \dot{q}^j - \sum_{j=1}^k \sum_{v=1}^k \frac{\partial a_{ij}}{\partial \dot{q}^v} \dot{q}^v \dot{q}^j + \frac{\partial T_0}{\partial q^i}.$$

Тогда уравнение (3) запишется в виде дифференциального включения

$$A(q) \ddot{q} \in g(q, \dot{q}) + Q^A(q, \dot{q}) + Q^T(t, q, \dot{q}). \quad (4)$$

Обозначим

$$x = (x_1, \dots, x_{2k})', \quad \dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{2k})',$$

$$x_i = q^i, \quad x_{k+i} = \dot{q}^i, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$X(t, x) = \cup \{(x_{1+k}, \dots, x_{2k}, z_1, \dots, z_k)':$$

$$(z_1, \dots, z_k)' \in A^{-1}(x)(g(x) + Q^A + Q^T(t, x))$$

и запишем включение (4) в виде дифференциального включения первого порядка

$$\dot{x} \in X(t, x). \quad (5)$$

Такое преобразование позволяет использовать в исследовании уравнений (1) определения и факты теории дифференциальных включений и дифференциальных уравнений с разрывной правой

частью, в частности, сослаться на теоремы из статей [11, 3].

2. ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ И ПРИТЯЖЕНИЕ

Под решением, определенным на промежутке $[t_0, t_1)$, уравнения (3) понимается решение $x(t) = (q(t), \dot{q}(t))$ дифференциального включения (4) или, эквивалентно, дифференциального включения (5).

Опишем ряд общих свойств для решений уравнения (3), вытекающие из [1, гл. 1, 3], которые в дальнейшем учитываются без оговорок.

Утверждение 1. Для любых начальных данных включение (4) имеет решение и любое решение этого включения может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования $[t_0, \omega)$.

2. Любое ограниченное непродолжимое решение включения (4) определено на промежутке $[t_0, +\infty)$.

3. При условии непрерывной дифференцируемости всех функций (кроме сигнатур), фигурирующих в описании системы (1), любое решение включения (4) является правосторонним с правой производной $D^+ \dot{q}(t)$, непрерывной справа и удовлетворяющей включению (4) в каждой точке t из промежутка существования этого решения. Кроме этого, имеет место правосторонняя единственность решений, т.е. с увеличением t решения могут сливаться, но не могут разветвляться.

Правосторонние решения несут в себе определенный физический смысл, а именно: ускорения в классической механике понимаются как правые производные скорости. С математической точки зрения это более узкий класс решений, который позволяет уточнять поведение движений системы в окрестности множества положения равновесия.

Для каждого $x = (q, \dot{q})$ и $i = 1, \dots, k^*$ положим

$$a_i(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f_i(t, x), b_i(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} f_i(t, x)$$

и определим многозначную функцию со значениями $Q^*(x) = Q_1^*(x) \times \dots \times Q_{k^*}^*(x)$, где

$$Q_i^*(x) = \begin{cases} [a_i | N_i, b_i | N_i], & \text{если } \dot{q}^i < 0, \\ [-b_i | N_i, -a_i | N_i], & \text{если } \dot{q}^i > 0, \\ [-b_i | N_i, b_i | N_i], & \text{если } \dot{q}^i = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Дифференциальное включение

$$A(q)\ddot{q} \in g(q, \dot{q}) + Q^A(q, \dot{q}) + Q^*(q, \dot{q}) \quad (7)$$

будем называть предельным для дифференциального включения (4).

Будем говорить, что множество $D \subset R^{2k}$ полуинвариантно, если для любой точки $y_0 = (q_0, \dot{q}_0) \in D$

существует решение $y(t) = (q(t), \dot{q}(t))$ включения (7), такое, что $y(0) = y_0$ и $y(t) \in D$ для всех $t \geq 0$.

Для траекторий решений $x(t) = (q(t), \dot{q}(t))$ через $\Lambda^+(x)$ будем обозначать ω -предельные множества, которые понимаются в обычном смысле. Они (как и траектории любой ограниченной кривой) обладают свойствами компактности, связности и $d(x(t), \Lambda^+(x)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, где d – расстояние от точки до множества. Последнее свойство служит основой для изучения вопросов притяжения. Особо отметим, что множества $\Lambda^+(x)$ полуинвариантны [11].

Для каждой точки $x = (q, \dot{q})$ верхняя производная непрерывно дифференцируемой функции Ляпунова $V(x)$ в силу включения (5) в точке (t, x) определяется равенством

$$\dot{V}^+(t, x) = \sup_{y \in X(t, x)} \langle \nabla_x V, y \rangle, \quad (8)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – знак скалярного произведения, $\nabla_x V$ – градиент функции V по переменной x .

Отметим, что в точках непрерывности сил трения (т.е. при условии $\dot{q}^i \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, k^*$) формула (8) приобретает вид

$$\dot{V}^+(t, q, \dot{q}) = \langle \nabla V_q, \dot{q} \rangle + \langle \nabla V_{\dot{q}}, A^{-1}(g + Q^A + Q^T) \rangle. \quad (9)$$

Верхняя производная $\dot{V}^*(q, \dot{q})$ функции $V(q, \dot{q})$ в силу предельного включения (7) записывается в виде

$$\dot{V}^*(q, \dot{q}) = \langle \nabla_q V, \dot{q} \rangle + \sup \{ \langle \nabla_{\dot{q}} V, y \rangle : A(q)y \in g(q, \dot{q}) + Q^A(q, \dot{q}) + Q^*(q, \dot{q}) \}. \quad (10)$$

Теорема 1. Пусть для каждого компактного множества $K \subset R^{2k}$ существует константа M , такая, что для всех $(t, x) \in R^1 \times K$, $x = (q, \dot{q})$, выполняется

$$\|f(t, x)\| \leq M, \quad (11)$$

где $f(t, x)$ – вектор коэффициентов трения $f_i(t, x)$, $i = 1, \dots, k^*$. Предположим, что все функции $f_i(t, x)$ в каждой точке (t, x) непрерывны по x равномерно относительно t и в точках непрерывности сил трения Q^T выполняется неравенство $\dot{V}^+(t, x) \leq 0$. Тогда:

1. Для любого ограниченного решения уравнения (1) и для любой точки $z = (q, \dot{q}) \in \Lambda^+(x)$ существует решение $z(t) = (q(t), \dot{q}(t))$ включения (7) с начальным условием $z(0) = z$, такое, что $\dot{V}^*(z(t)) = 0$ для всех $t \geq 0$.

2. Множество $\Lambda^+(x)$ принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству множества $E^* = \{(q, \dot{q}) : \dot{V}^*(q, \dot{q}) = 0\}$.

Теорема 1 решает упомянутые выше проблемы исследования неавтономных систем методом предельных уравнений и является аналогом принципа инвариантности для системы (1).

Пусть $Q_i^A = D_i(q, \dot{q}) + K_i(q)$, где $K_i(q) = -\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}^i}$,

$\Pi(q)$ – потенциальная энергия системы, $D_i(q, \dot{q})$ – диссипативные силы с условиями $D_i(q, 0) = 0$, $\sum_{i=1}^k D_i(q, \dot{q}) \dot{q}^i \leq 0$, которые представляют вязкое трение или силы сопротивления среды. Тогда уравнение (3) приобретет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_a}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T_a}{\partial q} = D(q, \dot{q}) + K(q) + Q_i^T(t, q, \dot{q}). \quad (12)$$

Для функции Ляпунова $V = T + \Pi - T_0$ формулы (9) и (10) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \dot{V}^+ &= -\sum_{i=1}^{k_*} f_i |N_i| |\dot{q}^i| + \sum_{i=1}^k D_i \dot{q}^i, \\ \dot{V}^* &= \sum_{i=1}^k D_i(q, \dot{q}) \dot{q}^i - \sum_{i=1}^{k^*} a_i(x) |N_i(x)| |\dot{q}^i|. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее рассматриваем систему (12) с предельным дифференциальным включением

$$A(x) \dot{q} \in g(q, \dot{q}) + D(q, \dot{q}) + K(q, \dot{q}) + Q^*(q, \dot{q}). \quad (14)$$

Теорема 2. Пусть для любого компактного множества $K \subset R^{2k}$ выполняется неравенство (11) и коэффициенты трения $f_i(t, x)$, $i = 1, \dots, k^*$, в каждой точке (t, x) непрерывны по x равномерно относительно t . Тогда:

1. Для любого ограниченного решения уравнения (12) и для любой точки $z = (q, \dot{q}) \in \Lambda^+(x)$ существует решение $z(t) = (q(t), \dot{q}(t))$ включения (14) с начальным условием $z(0) = z$, такое, что $\dot{V}^*(z(t)) = 0$ для всех $t \geq 0$, где функция \dot{V}^* определена во втором равенстве (13).

2. Множество $\Lambda^+(x)$ принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству множества

$$E^* = \left\{ (q, \dot{q}) : \sum_{i=1}^k D_i(q, \dot{q}) \dot{q}^i - \sum_{i=1}^{k^*} a_i(q) |N_i(q, \dot{q})| |\dot{q}^i| = 0 \right\}. \quad (15)$$

Для каждой точки (q, \dot{q}) обозначим:

$I(q, \dot{q})$ – множество индексов $i \in \{1, \dots, k\}$, таких, что выполняется хотя бы одно из условий $a_i(q) |N_i(q, \dot{q}^i)| \neq 0$ или $D_i(q, \dot{q}) \neq 0$.

$J(q, \dot{q})$ – множество индексов $i \in \{1, \dots, k^*\}$, таких, что $a_i(q) \neq 0$, функция $N_i(q, \dot{q})$ непрерывно дифференцируема и выполняется условие $\dot{N}_i^*(q, \dot{q}) \neq 0$, где

$\dot{N}_i^*(q, \dot{q})$ – верхняя производная функции $N_i(q, \dot{q})$ в силу предельного включения (14).

В приводимых ниже следствиях предполагаем, что выполняются все условия теоремы 2 и $x(t)$ – ограниченное решение уравнения (12).

Следствие 1. Для любой точки $(q, \dot{q}) \in \Lambda^+(x)$ и индекса $i \in I(q, \dot{q}) \cup J(q, \dot{q})$ выполняется $\dot{q}^i = 0$.

Следствие 2. Если $I(q, \dot{q}) \cup J(q, \dot{q}) = \{1, \dots, k\}$, то $\Lambda^+(x)$ принадлежит множеству $M = \{(q, 0) : |K_i(q)| \leq b_i(q, 0), i = 1, \dots, k^*\}$ положений равновесия предельного дифференциального включения (14).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В [1] вопросы притяжения и асимптотической устойчивости различных систем (в том числе и механических) изучались на основе модификаций теорем Ляпунова с использованием нескольких функций Ляпунова, выбор которых неоднозначен.

Для этих же целей может быть использован универсальный метод импликации свойств связанных математических моделей [12], если исходную и предельную системы рассматривать как структурно близкие. Но при этом вопрос выбора вспомогательной системы тоже остается открытым.

В рамках предложенного в данной статье метода притяжение и асимптотическое поведение движений механических систем с трением так или иначе сводится к анализу множества E^* нулей функции Ляпунова в силу предельного дифференциального включения. В теореме 2 его описание достаточно конструктивно для класса механических систем с трением (12), но в общем случае оно может иметь сложную структуру даже для автономных систем.

В следствии 2 получены условия, при которых любое ограниченное решение уравнения (12) стремится к множеству M положений равновесия предельного дифференциального включения (14). Для неограниченных решений можно утверждать лишь то, что они слабо стремятся к этому множеству, т.е. существует последовательность точек $t_n \rightarrow +\infty$, такая, что $d(x(t_n), M) \rightarrow 0$. Это свойство в сочетании со свойством устойчивости дает асимптотическую устойчивость множества M и близко к свойству “инвариантности с посещением” для решений уравнения из статьи [12, Пример 2].

Вопрос о том, стремится ли ограниченное решение исходной системы к какому-либо конкретному положению равновесия, требует дополнительного исследования. Для этого могут использоваться любые подходящие средства и факты, такие, как свойства ω -предельных мно-

жеств и структура исходных и предельных дифференциальных включений. В общем виде такие исследования вряд ли целесообразны.

Проиллюстрируем сказанное выше на примере движения маятника с массой и длиной, равными единице:

$$\ddot{\phi} = -k^2 \sin \phi + M^T, \quad M^T = -f|N|\operatorname{sgn} \dot{\phi}, \quad (16)$$

где ϕ – угол поворота маятника, отсчитанный от нижнего положения, $N = \dot{\phi}^2 + k^2 \cos \phi$ – нормальная реакция, $f = \overline{f(t)}$ – коэффициент трения, $a = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} f(t)$, $b = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} f(t)$. Функция Ляпунова

$$V = T + \Pi = \dot{\phi}^2/2 + k^2(1 - \cos \phi).$$

Вывод, который позволяют сделать теорема 2 и ее следствия, следующий: если $a > 0$, то любое ограниченное решение уравнения (16) стремится к множеству $M = \{(\phi, \dot{\phi}): \dot{\phi} = 0, |\operatorname{tg}(\phi)| \leq b\}$ положений равновесия предельного дифференциального включения. Но учитывая, что множества уровня функции Ляпунова V при условии $\dot{\phi} = 0$ состоят из множества изолированных точек, удовлетворяющих уравнению $\cos \phi = \text{const}$, а ω -предельное множество связно, заключаем, что любое ограниченное решение уравнения (16) стремится к какой-либо конкретной точке из множества M . В [1, с. 227–229] для коэффициента трения $f \equiv \text{const}$ этот вывод сделан с применением вспомогательных функций Ляпунова.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту “Теория и методы исследований эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями” (№ гос. регистрации: 1210401300060-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.
2. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями. М.: Наука, 1985.
3. *Финогенко И.А.* Принцип инвариантности для неавтономных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57. № 4. С. 913–927.
4. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
5. *Руш Н., Абетс М., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
6. *Sell G.R.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics. 1, 2 // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 22. P. 241–283.
7. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equation // J. Differ. Equations. 1977. V. 23. P. 216–243.
8. *Artstein Z.* Uniform asymptotic stability via limiting equations // J. Differ. Equations. 1978. V. 27. P. 172–189.
9. *Мартынчук А.А., Като Д., Шестаков А.А.* Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990.
10. *Андреев А.С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: УлГУ, 2005.
11. *Финогенко И.А.* Предельные дифференциальные включения и принцип инвариантности неавтономных систем // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55. № 2. С. 454–471.
12. *Vassilyev S.N.* On the Implication of Properties of Related Systems: a Method for Obtaining Implication Conditions and Application Examples // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2020. V. 59(4). P. 479–493.

ATTRACTION FOR MECHANICAL SYSTEMS WITH FRICTION

I. A. Finogenko^a

^a *Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.N. Vassilyev

In article the asymptotic behavior of systems with Coulomb's friction represented as Lagrange's equations of second kind is investigated. Lyapunov's direct method in a combination to the method of the limiting equations which is going back to works G.R. Sell (1967) and Z. Artstein (1977, 1978) on topological dynamics of nonautonomous systems is used. Results generalize LaSalle's principle of invariance.

Keywords: Lyapunov's functions, method of the limiting equations, invariance principle, limiting differential inclusion, attraction, dry friction, equation of Lagrange of 2nd kind

УДК 519.711.74.517.977.58

АНИЗОТРОПИЙНЫЙ ПОДХОД К ОРГАНИЗАЦИИ ОБМЕНА ДАННЫМИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СЕТЕВОЙ СИСТЕМЫ

© 2021 г. А. В. Юрченков^{1,2,*}, А. Ю. Кустов^{1,**}

Представлено академиком С.Н. Васильевым 04.08.2021 г.

Поступило 05.08.2021 г.

После доработки 05.08.2021 г.

Принято к публикации 13.08.2021 г.

Рассмотрена задача настройки сети обмена данными между узлами сети датчиков с целью получения анизотропийной γ -оптимальной оценки выхода линейной дискретной нестационарной системы. Измерители (датчики) представляют собой неидеальные с точки зрения получения информации объекты с заранее известной вероятностью отказов. Внешнее возмущение выбрано из класса случайных последовательностей с ограниченным уровнем анизотропии ее фрагмента на фиксированном горизонте событий. Для указанного объекта требуется подобрать такой вид матрицы смежности, которая бы обеспечила наименьшее значение верхней границы анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания при фиксированном виде оценителя.

Ключевые слова: анизотропийная теория, мультипликативные шумы, сети датчиков с отказами, фильтрация, нестационарные системы

DOI: 10.31857/S2686954321050179

ВВЕДЕНИЕ

Область применения различных чувствительных элементов и датчиков в последнее время становится все более всеобъемлющей, затрагивая даже бытовые нужды каждого человека. С помощью сети датчиков организуется слежение за источниками загрязнения окружающей среды, синхронизируются часы на разных устройствах, строится схема предупреждения стихийных бедствий, медицинская поддержка тяжелых больных и даже система “умный дом”. С другой стороны, для сетевых систем остаются актуальными проблемы высокой эффективности при относительно невысоких затратах на внедрение, настройку и обслуживание. Именно поэтому организацию наиболее эффективной схемы обмена информацией между датчиками можно выделить как самостоятельную, имеющую практическую значимость, задачу. В работе [1] отмечается важность решения проблемы настройки сетевой системы при решении задачи оценки параметров.

За последние годы разработано множество способов настройки сетевых систем, например, оптимизация вычислительных мощностей рассмотрена в [2], в работе [3] была предложена модель так называемого виртуального сенсора, когда все вычисления проводятся на внешнем процессоре, а не средствами самого датчика, что позволяет более эффективно организовать работу всей сети. Идея обмена информацией между соседними сенсорами рассмотрена в [4], где с помощью метода наименьших квадратов предложен алгоритм отладки сети. Стохастический подход для настройки сети датчиков можно найти в [5], где предполагается, что измерения сильно зашумлены, вследствие чего применяется вероятностный подход.

В данном сообщении рассматривается задача выбора матрицы смежности для обмена информацией между отдельными датчиками в сетевой системе для фиксированной модели оценивания в рамках анизотропийной теории. Первоначально концепция анизотропийной теории, предложенной И.Г. Владимировым в работе [7], использовала стохастический подход для задач, традиционно рассматриваемых в \mathcal{H}_∞ теории. Базовое понятие для анизотропийной теории – анизотропия случайного вектора. В последних работах, связанных с анизотропийной теорией, под анизотропией случайного вектора понимают мини-

¹Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия

²Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*E-mail: alexander.yurchenkov@yandex.ru

**E-mail: arkadiykustov@yandex.ru

мальное значение информационного уклонения Кульбака–Лейблера между двумя плотностями распределения вероятностей – той, которая соответствует выбранному случайному вектору и нормальной плотностью распределения с нулевым матожиданием и скалярной ковариационной матрицей [8]. Анизотропию случайного вектора можно трактовать как меру отличия этого вектора от гауссовского. Критерием в задачах анизотропной теории выступает анизотропная норма динамической системы – индуцированная норма, являющаяся супремумом отношения нормы выхода системы к норме входа при условии, что все возможные входы выбираются из класса векторов с ограниченной фиксированным числом анизотропией.

За более чем двадцатипятилетнюю историю в рамках анизотропной теории решены задачи анализа для нестационарных и стационарных [8] систем, а также задачи синтеза управления и фильтрации. Существенным ограничением являлось предположение о детерминированности рассматриваемых линейных систем, впервые это условие было исключено в работе [9], где была решена задача анизотропного анализа для стохастической системы. До этого момента существовали только оценочные методы вычисления границы анизотропной нормы [10].

Модели динамических систем с мультипликативными шумами описывают финансовые, механические, гибридные, популяционные и многие другие системы, но также они описывают сетевые системы, в которых присутствует множество отдельных датчиков. Поскольку анизотропный анализ для систем с мультипликативными шумами был рассмотрен в [11], а после была решена задача оценивания для сети датчиков с отказами [12] и предложен алгоритм коррекции для выпадающих измерений [13], остро обозначилась проблема настройки сети датчиков, а именно: настройка схемы обмена информацией (матрицы смежности) между узлами в сети измерителей. В данной работе будут даны условия, позволяющие свести задачу настройки матрицы смежности к задаче выпуклой оптимизации.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейную дискретную нестационарную модель в пространстве состояний с нулевыми начальными условиями следующего вида:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k w_k, & x_0 &= 0, \\ z_k &= M_k x_k + N_k w_k, \\ y_{j,k} &= \lambda_{j,k} C_{j,k} x_k + D_{j,k} w_k, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние, $w_k \in \mathbb{R}^{m_w}$ – возмущение из класса последовательностей с ограниченным

уровнем анизотропии, $z_k \in \mathbb{R}^{p_z}$ – выход, для которого строится оценка, $y_{j,k} \in \mathbb{R}^{p_y}$, $j = 1, 2, \dots, n$ – доступные измерения, время ограничено значением N . Все матрицы в системе (1) известны и имеют соответствующие размерности. Случайные величины $\lambda_{j,k}$ имеют распределение Бернулли с известной вероятностью успеха $P(\lambda_{j,k} = 1) = p_j$ и неудачи $P(\lambda_{j,k} = 0) = 1 - p_j = q_j$ соответственно. В этом случае под успехом понимается получение зашумленных измерений от конкретного датчика, под неудачей – только шума. Также считаются известными модели оценщиков для системы (1), соответствующие конкретным датчикам:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{j,k+1} &= \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} (A_k \hat{x}_{i,k} + H_{ji,k} (y_{i,k} - \hat{y}_{i,k})), \\ \hat{z}_{j,k} &= \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} M_k \hat{x}_{i,k}, \\ \hat{y}_{j,k} &= C_{j,k} \hat{x}_{j,k}, \end{aligned} \quad (2)$$

где матрицы $H_{ji,k} \in \mathbb{R}^{n_x \times p_y}$ считаются известными. Выходы $\hat{z}_{j,k}$ соответствуют взвешенным оценкам выхода исходной системы, полученным на основании доступных соответствующему датчику данных. Матрица смежности $\alpha = (\alpha_{ji})$ подлежит определению с целью обеспечить минимальную верхнюю границу анизотропной нормы системы в ошибках оценивания. Иными словами, задача состоит в (ре-)организации оптимального (с точки зрения оценивания известными моделями) способа коммуникации между отдельными узлами сетевой системы.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В анизотропной теории управления и фильтрации для численного решения конкретных задач широко применяется метод выпуклой оптимизации с ограничениями в виде линейных матричных неравенств [14]. Более полный обзор теории относительно линейных нестационарных систем в рамках анизотропной теории можно найти в работе [15].

Поскольку в задачах оценивания критерием оптимальности является значение анизотропной нормы системы в ошибках оценивания, перейдем к такому способу описания динамики рассматриваемой пары система–оценщик. Для того чтобы перейти к системе в ошибках оценивания, необходимо ввести n виртуальных объектов, которые дублируют динамику системы (1):

$$x_{j,k+1} = A_k x_{j,k} + B_k w_k, \quad x_0 = 0. \quad (3)$$

Для каждого из виртуальных объектов (3) соответствующий оценщик имеет вид (2). Обозна-

чив через $\tilde{x}_{j,k} = x_{j,k} - \hat{x}_{j,k}$ и $\tilde{z}_{j,k} = z_{j,k} - \hat{z}_{j,k}, j = 1, 2, \dots, n$, ошибки индивидуального и совокупного оценивания состояния, соответственно, получим следующую систему в ошибках:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{j,k+1} &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}_{ji,k} x_{j,k} + \tilde{\mathbf{A}}_{ji,k} \tilde{x}_{i,k} + \tilde{\mathbf{B}}_{i,k} w_k), \\ \tilde{z}_{j,k} &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{M}_{ji,k} x_{i,k} + \tilde{\mathbf{M}}_{ji,k} \tilde{x}_{j,k}) + \tilde{\mathbf{N}}_{j,k} w_k, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{A}_{ji,k} = A_k \delta_{ji} - \alpha_{ji} (A_k - (\lambda_{i,k} - p_i) H_{ji,k} C_{i,k})$, $\tilde{\mathbf{A}}_{ji,k} = \alpha_{ji} (A_k - p_i H_{ji,k} C_{i,k})$, $\tilde{\mathbf{B}}_{i,k} = B_k \delta_{ji} - \alpha_{ji} H_{ji,k} D_{i,k}$, $\mathbf{M}_{ji,k} = M_k \delta_{ji} - \alpha_{ji} M_k$, $\tilde{\mathbf{M}}_{ji,k} = \alpha_{ji} M_k$, $\tilde{\mathbf{N}}_{j,k} = N_k$, δ_{ji} – символ Кронекера. Вводя расширенные векторы состояния $\bar{x}_k = (x_{1,k}^T, \dots, x_{n,k}^T)^T$, ошибки оценивания состояния $\tilde{x}_k = (\tilde{x}_{1,k}^T, \dots, \tilde{x}_{n,k}^T)^T$ и оцениваемого выхода $\tilde{z}_k = (\tilde{z}_{1,k}^T, \dots, \tilde{z}_{n,k}^T)^T$, объединим векторы \bar{x}_k и \tilde{x}_k в один новый вектор $\zeta_k = (\bar{x}_k^T, \tilde{x}_k^T)^T$, с помощью которого от (4) перейдем уже к окончательному виду системы в ошибках оценивания:

$$\begin{aligned} \zeta_{k+1} &= \left(\mathbb{A}_k + \sum_{i=1}^n \xi_{i,k} \mathbb{A}_{i,k} \right) \zeta_k + \mathbb{B}_k w_k, \\ \tilde{z}_k &= \mathbb{M}_k \zeta_k + \mathbb{N}_k w_k, \end{aligned} \quad (5)$$

где случайные величины $\xi_{i,k} = \lambda_{i,k} - p_i$ имеют нулевое среднее и известную дисперсию, а матрицы определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_k &= \begin{bmatrix} \bar{A}_k & 0 \\ \bar{A}_k - \bar{A}_k^a & \bar{A}_k^a - \bar{H}_k^a \bar{C}_k^p \end{bmatrix}, \\ \mathbb{A}_{i,k} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{H}_k^a \bar{C}_{i,k}^p & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}_k = \begin{bmatrix} \bar{B}_k \\ \bar{B}_k - \bar{H}_k^a \bar{D}_k \end{bmatrix}, \\ \mathbb{M}_k &= [\bar{M}_k - \bar{M}_k^a \quad \bar{M}_k^a], \quad \mathbb{N}_k = \bar{N}_k, \end{aligned}$$

при этом использованы обозначения $\bar{A}_k = I_n \otimes A_k$, $\bar{A}_k^a = \alpha \otimes A_k$, $\bar{B}_k = \text{col}(n) \otimes B_k$, $\bar{H}_k^a = \text{block}_{j,i=1,n}(\alpha_{ji} H_{ji,k})$, $\bar{C}_k^p = \text{diag}_{i=1,n}(p_i C_{i,k})$, $\bar{C}_{i,k}^p = \text{diag}_{i=1,n}(\delta_{ji} C_{i,k})$, $\bar{D}_k = \text{col}_{j=1,n}(D_{j,k})$, $\bar{M}_k = I_n \otimes M_k$, $\bar{M}_k^a = \alpha \otimes M_k$, $\bar{N}_k = \text{col}(n) \otimes N_k$, где $\text{col}(n)$ – вектор из единиц длиной n , $\text{block}_{j,i=1,n}(X_{ji})$ – блочная матрица из соответствующих блоков X_{ji} , $\text{diag}_{i=1,n}(X_i)$ – диагональная матрица, $\text{col}_{j=1,n}(X_j)$ – матрица-столбец, состоящая из блоков X_j , \otimes – кронекерово произведение матриц.

Для системы вида (5) условие ограниченности анизотропийной нормы числом был сформулирован в работе [11] в виде следующего утверждения.

Т е о р е м а 1 [11]. Если уровень анизотропии внешнего возмущения для системы (5) ограничен параметром a , случайные величины $\xi_{i,k}$ статистически независимы для всех значений i, k , имеют нулевое среднее и заданные ковариации $\sigma_i^2, i = 1, 2, \dots, n$, а также существует положительно определенное решение R_k для следующих матричных неравенств:

$$\begin{bmatrix} R_k & * & * & * & * \\ \mathbb{N}_k^T \mathbb{M}_k & \eta^2 I_{m_w} - \mathbb{N}_k^T \mathbb{N}_k & * & * & * \\ R_{k+1} \mathbb{A}_k & -R_{k+1} \mathbb{B}_k & R_{k+1} & * & * \\ \sigma_1 R_{k+1} \mathbb{A}_{1,k} & 0 & \dots & 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_n R_{k+1} \mathbb{A}_{n,k} & 0 & 0 & R_{k+1} & * \\ \mathbb{M}_k & 0 & 0 & 0 & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (6)$$

и для всех $k = \{0, \dots, N-1\}$ выполнены граничные условия

$$\begin{bmatrix} R_N & * & * \\ \mathbb{N}_N^T \mathbb{M}_N & \eta^2 I - \mathbb{N}_N^T \mathbb{N}_N & * \\ \mathbb{M}_N & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (7)$$

$$\eta^2 I_{m_w} - \Psi_N - \mathbb{N}_N^T \mathbb{N}_N \succ 0,$$

и неравенство специального вида

$$\sum_{i=0}^N \ln \det \Psi_k \geq 2a + m_w (N+1) \ln(\eta^2 - \gamma^2), \quad (8)$$

причем все матрицы Ψ_k положительно определены, тогда анизотропийная норма системы (5) ограничена числом γ .

Неравенства в выражениях (6), (7) понимаются в смысле положительной определенности матрицы, стоящей в левой части.

Приведенная выше теорема не позволяет напрямую вычислить параметры матрицы смежности, поскольку содержит произведение этой матрицы с неизвестными матрицами R_k в выражениях (6). С помощью замены переменных и начального приближения решения неравенств (6) можно сформулировать решение поставленной задачи в следующем виде.

Т е о р е м а 2. Матрица смежности a для сети датчиков с отказами в модели оценщика (2) под действием возмущения с ограниченным уровнем анизотропии может быть определена через решение задачи выпуклой оптимизации

$$\gamma^2 \rightarrow \min_{R_k, \Psi_k, \eta^2, \gamma^2},$$

при условии выполнения ограничений

$$\begin{bmatrix} \eta^2 I_{m_w} - \Psi_N - \mathbb{N}_N^T \mathbb{N}_N & * \\ R_{k+1} \mathbb{B}_{00,k} + X_k \mathbb{B}_{01,k} & R_{k+1} \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} R_k & * & * & * & * \\ \mathbb{N}_k^T M_k & \eta^2 I_{m_w} - \mathbb{N}_k^T \mathbb{N}_k & * & * & * \\ R_{k+1} \mathbb{A}_{00,k} + X_k \mathbb{A}_{01,k} & -R_{k+1} \mathbb{B}_{00,k} - X_k \mathbb{B}_{01,k} & R_{k+1} & * & * \\ \sigma_1 X_k \mathbb{A}_{11,k} & 0 & \dots & 0 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma_n X_k \mathbb{A}_{1n,k} & 0 & & 0 & & R_{k+1} & * \\ M_k & 0 & & 0 & & 0 & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

в совокупности с неравенствами (7), (8).

В условиях теоремы использована замена переменных следующего вида:

$$X_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ P_k & Q_k \end{bmatrix},$$

где $P_k = R_{2,k+1} \bar{A}_k^a$, $Q_k = R_{2,k+1} \bar{H}_k^a$, а матрицы R_k имеют диагональный вид с блоками

$$R_k = \begin{bmatrix} R_{1,k} & 0 \\ 0 & R_{2,k} \end{bmatrix}.$$

Также стоит отметить, что в качестве начального приближения матриц $R_{2,k}$, $k = \{0, \dots, N\}$ могут быть выбраны матрицы, полученные согласно решению задачи (6)–(8) для единичной матрицы смежности, что соответствует наличию отдельных датчиков, не обменивающихся информацией.

ПРИМЕР

Рассмотрим модель колесного перевернутого маятника, замкнутого стабилизирующим управлением на основе Model Predictive Control (MPC). Матрицы в пространстве состояний имеют следующий вид:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1.15 & 0.20 & 0.24 & 0.04 & 0.01 & 0.00 \\ 1.62 & 2.04 & 2.54 & 0.42 & 0.13 & 0.00 \\ -0.82 & -0.52 & -0.06 & -0.10 & -0.07 & 0.00 \\ -9.95 & -0.61 & -11.03 & -1.26 & -0.78 & -0.30 \\ 1.15 & 0.20 & 0.24 & 0.04 & 1.01 & 0.00 \\ -0.82 & -0.52 & -0.06 & -0.10 & -0.07 & 1.00 \end{bmatrix},$$

$$B_k = [0 \ 0 \ 0 \ 0.10 \ 0.10 \ 0.10],$$

$$C_{j,k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{j,k} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j = \{1, 2\},$$

$$M_k = C_{j,k}, \quad N_k = 0.$$

Рассмотрена простейшая сеть, состоящая из двух идентичных датчиков с вероятностью безотказной работы 95%, при этом уровень анизотропии внешнего возмущения не превосходит единицу.

На рис. 1 приведен первый компонент оцениваемого выхода. Сплошной линией обозначена реальная траектория объекта, соответствующая перемещению по прямой на плоскости, прерывистая линия – оценка, полученная на основе измерений одного датчика, без составления сети, пунктирная линия – оценка, полученная с помощью сетевого обмена информацией между датчиками на основе матрицы смежности, полученной на основе предложенного алгоритма. Как видно на рис. 1, даже после серии отказов оценка быстро возвращается в малую окрестность реальной траектории. При этом значение среднеквадратичного коэффициента усиления уменьшилось приблизительно на 38%. Внедиагональные элементы матрицы смежности оказались равными 0.0329, а диагональные – 0.9671, что обусловлено тем, что датчики были выбраны идентичными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В сообщении рассмотрена задача настройки схемы обмена информацией между датчиками для линейной дискретной нестационарной модели в случае неидеальных измерителей и внешним возмущением из класса окрашенных шумов. Показано, что поставленную задачу можно свести к задаче выпуклой оптимизации, позволяющей вы-

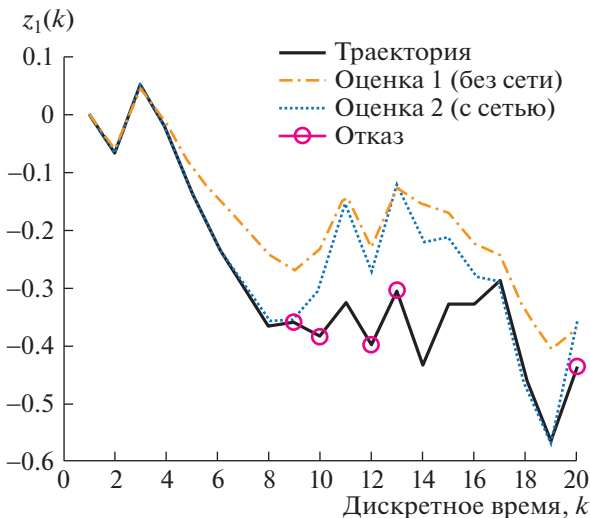


Рис. 1. Результаты моделирования.

числить верхнюю границу анизотропией нормы системы в ошибках оценивания. На численном примере продемонстрировано, что наличие обмена информации между датчиками может значительно улучшить качество оценки в случае точечных отказов измерителей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Whitehouse K., Culler D.* Calibration as Parameter Estimation in Sensor Networks // Proc. of the 1st ACM Int. workshop on Wireless sensor networks and applications. 2002. P. 59–67.
2. *Wahba S.K., Dandamudi S., Dalton A.R. and Hallstrom J.O.* NePTune: Optimizing Sensor Networks // Proc. of 17th Int. Conf. on Comp. Comm. and Networks. 2008. P. 1–7.
3. *Corsini P., Masci P. and Vecchio A.* Configuration and Tuning of Sensor Network Applications through Virtual Sensors // Fourth Ann. IEEE Int. Conf. on Pervasive Computing and Communications Workshops (PERCOMW'06). 2006. P. 5–32.
4. *Becnel T., Sayahi T., Kelly K. and Gaillardon P.-E.* A Recursive Approach to Partially Blind Calibration of a Pollution Sensor Network // IEEE Int. Conf. on Embedded Software and Systems (ICSS). 2019. P. 1–8.
5. *Stankovic M.S., Stankovic S.S. and Johansson K.H.* Asynchronous Distributed Blind Calibration of Sensor Networks Under Noisy Measurements // IEEE Transactions on Control of Network Systems. 2018. V. 5. №. 1. P. 571–582.
6. *Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P.* Stochastic Approach to H_∞ -optimization // Proc. of the 33th CDC. 1994. P. 2249–2250.
7. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // ДАН. 1995. Т. 342. № 4. С. 583–585.
8. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-time-invariant Systems // Proc. 13th IFAC World Congr. 1994. P. 179–184.
9. *Kustov A.Yu.* State-Space Formulas for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time Varying Stochastic System // Proc. 15th Int. Conf. on Electr. Eng., Comp. Science and Autom. Control. 2018. P. 1–6.
10. *Юрченков А.В., Кустов А.Ю., Курдюков А.П.* Условия ограниченности анизотропией нормы системы с мультипликативными шумами // ДАН. 2016. Т. 467. № 4. С. 396–399.
11. *Belov I.R., Yurchenkov A.V., Kustov A.Yu.* Anisotropy-Based Bounded Real Lemma for Multiplicative Noise Systems: the Finite Horizon Case // Proc. of the 27th Med. Conf. on Contr. and Aut. 2019. P. 148–152.
12. *Kustov A.Yu., Yurchenkov A.V.* Finite-horizon Anisotropic Estimator Design in Sensor Networks // 59th IEEE Conference on Decision and Control. 2020. P. 4330–4335.
13. *Kustov A.Yu., Yurchenkov A.V.* Finite-horizon Anisotropy-based Estimation with Packet Dropouts // IFAC-PapersOnLine. 2020. V. 53. №. 2. P. 4516–4520.
14. *Тимин В.Н., Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Решение задачи анизотропией субоптимальной фильтрации методом выпуклой оптимизации // ДАН. 2012. Т. 444. № 6. С. 612–615.
15. *Тимин В.Н., Курдюков А.П.* Анизотропийная многокритериальная нестационарная фильтрация на конечном горизонте // ДАН. 2015. Т. 464. № 3. С. 279–283.

ANISOTROPY-BASED APPROACH TO COMMUNICATION TUNING FOR TIME-VARYING SENSOR NETWORK SYSTEM

A. V. Yurchenkov^{a,b} and A. Yu. Kustov^a

^a*V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.N. Vassilyev

In this paper, the communication graph design problem for linear discrete time-varying sensor network system is considered. The design goal is to minimize upper bound of the anisotropic norm of input-to-error system. The sensors are supposed to be objects with dropouts of the given probabilities values. Exogenous disturbances are considered to be sequences of random vectors with bounded anisotropy of sequence fragment. The tuning of adjacency matrix with fixed estimation model is reduced to convex optimization problem.

Keywords: anisotropy-based theory, multiplicative noise, sensor networks, dropouts, estimation, time-varying systems

Журнал “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” публикует статьи и краткие сообщения, содержащие результаты приоритетных, оригинальных, ранее неопубликованных исследований в области математики, информатики, процессов управления. Цель журнала – ознакомление широкого круга специалистов с последними достижениями в различных разделах этих наук. Высокое качество публикаций должно обеспечиваться соблюдением требований к рукописям и всесторонним экспертным рецензированием.

Журнал публикует сообщения, авторами которых являются действительные члены (академики) и члены-корреспонденты Российской академии наук. Журнал публикует также сообщения других авторов, представленные академиками РАН по соответствующей специальности. Представление должно быть получено автором до направления статьи в редакцию.

Журнал издается на русском языке один раз в 2 месяца (6 выпусков в год). Периодичность англоязычной версии “Doklady Mathematics” – 6 выпусков в год.

Подразделы журнала: Математика, Информатика, Процессы управления.

В журнале не публикуются работы полемические и узкоспециальные; содержащие решения стандартных задач; статьи обзорные и методические; статьи, излагающие обобщения и предположения; статьи серийные, разделенные на несколько последовательных публикаций; статьи о рядовых исследованиях, не представляющие общего интереса.

Решением редакционной коллегии работа может быть отклонена, если она не удовлетворяет перечисленным выше требованиям. Статьи, отклоненные редколлекцией, повторно не рассматриваются.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

DOI: 10.31857/S2686954321020090

Редакция журнала “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” просит авторов руководствоваться приводимыми ниже правилами и надеется, что авторы ознакомятся с ними, прежде чем отошлют сообщение в редакцию.

Работы, оформленные без соблюдения этих правил, возвращаются без рассмотрения.

1. Публикуемые статьи должны иметь представление действительного члена Российской Академии наук, если оно требуется.

2. Авторы должны определить раздел, в который они рекомендуют поместить сообщение, и индекс по Универсальной десятичной классификации (УДК).

3. Рукописи статей и сопроводительные материалы загружаются в Редакционно-издательскую систему издательства Pleiades Publishing Ltd по ссылке <https://sciencejournals.ru/journal/danmiup/> или направляются в редакцию по электронной почте doklady_mathematics@mail.ru.

Бумажный вариант представлять в редакцию не требуется.

4. На отдельной странице нужно указать полное название (на русском и английском языках) учреждения, в котором выполнено исследование; фамилии, имена и отчества всех авторов; почтовый индекс, адрес, номера телефонов и E-mail каждого соавтора. Необходимо также указать автора, с которым редакция будет вести переговоры и переписку.

5. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к печати. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией. Доработанный текст автор должен срочно вернуть вместе с исходным вариантом, а также с ответом на все замечания.

6. Журнал публикует статьи и краткие сообщения, занимающие не более 25000 знаков. В этот объем входят текст, таблицы, библиография (не более 25 источников). Рекомендуется включать в список литературы актуальные журнальные статьи, опубликованные за последние 2 года, в том числе в журнале “Доклады Академии наук”. Число рисунков не должно превышать восьми. Части, обозначенные как а, б и т.д., считаются различными рисунками. Повторение данных в тексте, таблицах и графиках недопустимо. Рисунки должны быть выполнены четко, в формате, обеспечивающем ясность передачи всех деталей.

7. Электронная версия должна включать (текст в формате .doc):

– название статьи; ФИО каждого автора статьи; аффилиация; аннотация; ключевые слова; текст сообщения; список литературы; рисунки (отдельными файлами в формате jpeg или tif);

– на английском языке: название статьи; ФИО каждого автора статьи; аффилиация; аннотация; ключевые слова.

8. Текст статьи должен быть тщательно отредактирован и подписан всеми авторами. При ис-

пользовании сокращений необходимо дать их расшифровку; следует ограничиваться общепринятыми сокращениями и не вводить новых без достаточных на то оснований.

9. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

10. Финансирование работы. Укажите информацию о грантах и любой другой финансовой поддержке исследований.

11. Обязательное указание конфликта интересов – любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (например, член редколлегии обязан указывать, что он публикуется в журнале, где он член редколлегии).

12. Авторы могут приложить свою версию перевода статьи на английский язык или дать необходимые пояснения переводчику.

13. В формулах следует избегать громоздких обозначений. Занумерованные формулы обязательно выключаются в красную строку, номер формулы ставится у правого края.

14. Ссылки в тексте на цитируемую литературу даются в квадратных скобках, например [1]. В списке все работы перечисляются в порядке цитирования. Самоцитирование допускается в объеме не более 30%.

Для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, место издания, издательство, год издания, том или выпуск и общее количество страниц.

Ссылки на книги, переведенные на русский язык, должны сопровождаться ссылками на оригинальные издания с указанием выходных данных.

Для периодических изданий: фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, первая и последняя страницы статьи.

Желательно указывать индекс DOI цитируемой статьи.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

15. Редакция обращает внимание авторов на то, что журнал “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” является органом общей научной информации и в связи с этим просит авторов излагать материал в ясной и доступной форме.

16. Если материал не может быть изложен в объемах, указанных выше, или требует большого числа иллюстраций, редакция советует авторам направлять его в какой-либо специализированный журнал. Работы, нарушающие эти условия, редакция возвращает авторам для сокращения.

17. Появление краткого сообщения в “Докладах Академии наук” не препятствует впоследствии

публикации расширенного варианта в другом периодическом издании, с соблюдением всех этических норм. Одновременная отсылка рукописи в “Доклады” и в другой журнал не допускается.

18. В соответствии с новыми международными правилами будет проводиться проверка на предмет соблюдения авторами прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Проверка с использованием компьютерных программ проводится и зарубежными партнерами Издательства в отношении переводной версии статьи. Если автором нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отозвано.

19. Рукописи проходят процедуру анонимного внешнего рецензирования ведущими отечественными и зарубежными экспертами и рекомендуются к печати Редколлегией журнала на конкурсной основе.

20. Важно соблюдать правила публикационной этики и избегать следующих нарушений: 1) фабрикация и фальсификация данных, т.е. их подделки или изменения; 2) плагиата и самоплагиата – копирования без надлежащего цитирования хотя бы одного предложения из чужой или даже собственной ранее опубликованной рукописи, а также рисунков и таблиц; 3) многократной подачи рукописи в несколько журналов одновременно; 4) избыточных публикаций, основанных на одном и том же эксперименте; 5) неподобающего указания авторства, когда в авторский коллектив включены люди, не внесшие вклада в работу, или, наоборот, не включены люди, внесшие значительный вклад.

21. На любой материал, который автор заимствует из других работ, необходимо получить разрешение от правообладателя и приложить к рукописи. Правообладателем статей в журналах, как правило, является не автор, а издатель журнала, в котором опубликован материал. Подробнее о получении разрешения см. по ссылке <https://www.pleiades.online/ru/authors/permission/>

22. Все используемые в статье цитаты обязательно приводятся на оригинальном языке и сопровождаются соответствующей ссылкой.

23. Для более полного описания исследования к статье могут прилагаться дополнительные материалы (аудио- и видеофайлы, презентации, дополнительные таблицы и рисунки и пр.). Они публикуются только в электронной версии на сайте <https://link.springer.com/> (для англоязычных журналов) и <https://elibrary.ru> (для русскоязычных журналов).

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ СООБЩЕНИЯ

Раздел (Математика, Информатика, Процессы управления)

УДК

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

© 2021 г. Академик РАН В. П. Иванов^{1,*}, Г. В. Сидоров^{2,**}¹Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия²Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: ivanov@niisi.ras.ru

**E-mail: sidorov@msu.su

Поступило 23.01.2021 г.

Аннотация (объем не должен превышать 1000 знаков с учетом пробелов) может быть размещена в свободном доступе в электронных базах поиска и индексирования. Она должна быть информативной, описывать методы и главные результаты исследования и не должна содержать ссылок на другие работы и аббревиатур. Из аннотации должно быть ясно, какие вопросы поставлены для исследования и какие ответы на них получены. Должен быть сформулирован приоритетный научный результат, требующий срочной публикации.

Ключевые слова: необходимо указать от 3 до 10 ключевых слов, способствующих индексированию статьи в поисковых системах. Рекомендуется использовать общепринятые термины

Текст статьи....

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят...

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счет средств Российского научного фонда, проект № 00101.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов С.М., Петров В.С. Экспериментальное доказательство // ДАН. 2016. Т. 469. № 6. С. 711–716.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

В таком же порядке метаданные должны быть представлены на английском языке:

THE TITLE OF ARTICLE

© 2021 г. Academician of the RAS V. P. Ivanov^a, G. V. Sidorov^b^aMoscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation^bLomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Summary

Keywords:

СОПРОВОДИТЕЛЬНЫЕ ДОКУМЕНТЫ

Вместе с рукописью в редакцию высылаются отсканированные копии следующих сопроводительных документов:

- Лицензионный договор для русской версии, подписанный всеми авторами

https://sciencejournals.ru/journals/danmiup/license_agreement.doc

- Авторский договор для английской версии

<https://www.pleiades.online/ru/authors/agreement/>

При использовании заимствованных материалов обязательно наличие разрешения от правообладателя.