СОДЕРЖАНИЕ

Том 58, номер 12, 2022

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1587–1595

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

О НЕКЛАССИЧЕСКОЙ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2022 г. Б. А. Алиев

В сепарабельном гильбертовом пространстве H исследуется асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для дифференциально-операторного уравнения второго порядка. Спектральный параметр задачи линейно входит в уравнение и в одно из краевых условии как квадратный трёхчлен. Найдены асимптотические формулы для собственных значений рассматриваемой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064122120019, EDN: NBSMHW

Введение. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Через $L_2((0,1);H)$ обозначим множество всех вектор-функций $x \to u(x) : (0,1) \to H,$ сильно измеримых и таких, что $\int_0^1 \|u(x)\|_H^2\,dx < +\infty.$ Как известно, $L_2((0,1);H)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u,v)_{L_2((0,1);H)} = \int\limits_0^1 (u(x),v(x))_H\,dx.$$

Пусть A – самосопряжённый положительно-определённый оператор в H $(A = A^* \geqslant \gamma^2 I,$ I – единичный оператор в $H)$ с областью определения $D(A).$ Поскольку A^{-1} ограничен в $H,$ то $H(A) := \{u : u \in D(A),\ \|u\|_{H(A)} = \|Au\|_H\}$ является гильбертовым пространством, норма которого эквивалентна норме оператора $A.$ Положим

$$W_2^2((0,1);H(A),H) :=$$

$$:= \{u : Au, u'' \in L_2((0,1);H),\quad \|u\|^2_{W_2^2((0,1);H(A),H)} = \|Au\|^2_{L_2((0,1);H)} + \|u''\|^2_{L_2((0,1);H)}\}.$$

Множество $W_2^2((0,1);H(A),H)$ является гильбертовым пространством [1, с. 23].

В настоящей работе в сепарабельном гильбертовом пространстве H исследуется асимптотическое поведение собственных значений следующей краевой задачи для дифференциально-операторного уравнения второго порядка:

$$-u''(x) + Au(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$u'(0) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{2}$$

где λ – спектральный параметр; A – линейный неограниченный самосопряжённый положительно-определённый оператор в $H,$ и обратный оператор A^{-1} вполне непрерывен в $H;$ $\alpha_i,$ $i = 0,1,2,$ – некоторые вещественные числа, причём $\alpha_0 < 0,$ $\alpha_2 > 0,$ $\alpha_1 \neq 0.$ При этих предположениях доказывается, что собственные значения краевой задачи (1), (2) являются вещественными. Далее доказано, что краевая задача (1), (2) имеет три серии собственных значений, две из которых ведут себя асимптотически как вещественные числа, являющиеся нулями квадратного трёхчлена $\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2,$ другая серия асимптотически ведет себя как $\mu_k + n^2\pi^2,$ где $\mu_k \to +\infty$ – собственные значения оператора $A.$

Определение. *Собственными значениями* краевой задачи (1), (2) назовём те значения λ, при которых задача (1), (2) имеет нетривиальное решение, принадлежащее пространству $W_2^2((0;1);H(A),H)$.

Ранее спектральная задача с неклассической асимптотикой для уравнения Лапласа в квадрате была изучена в статье [2]. Точнее, рассмотрена задача, содержащая в одном из краевых условий дифференциальный оператор и имеющая последовательность собственных значений, сходящихся к нулю.

В работе [3] рассмотрена спектральная задача для уравнения Лапласа в квадрате, в которой спектр не является дискретным. Далее, в статье [4] в ограниченной области $\Omega \in R^n$ с достаточно гладкой границей Γ для уравнения Лапласа исследована следующая спектральная задача:

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3}$$

$$-u = \lambda \frac{\partial u}{\partial v} \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{4}$$

где λ – спектральный параметр, v – внутренняя нормаль к границе Γ. Доказано, что спектр краевой задачи (3), (4) дискретен и состоит из двух серий собственных значений, сходящихся соответственно к нулю и к $+\infty$.

Известно, что многие спектральные краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных, заданные в негладких областях (в прямоугольнике), сводятся к спектральным краевым задачам для эллиптических дифференциально-операторных уравнений в некотором гильбертовом пространстве.

Отметим, что некоторые спектральные вопросы краевых задач для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка в случае, когда один и тот же спектральный параметр входит в уравнение и в граничные условия, изучались в работах [5–9] и др.

После спектрального разложения по собственным элементам оператора, фигурирующим в уравнении, которые образуют полный ортонормированный базис, поставленная для эллиптических дифференциально-операторных уравнений спектральная задача сводится к спектральной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Спектральные вопросы краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с одним и тем же спектральным параметром в уравнении и в краевых условиях исследованы в различных аспектах. Так, например, в [10–12] изучены спектральные вопросы для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, в котором один и тот же спектральный параметр присутствует в уравнении линейно, а в одном из краевых условий – квадратично. В работе [13] исследуется асимптотическое поведение собственных значений краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в случае, когда один и тот же спектральный параметр λ входит в уравнение линейно, а в одном из краевых условий представляет собой квадратный трёхчлен относительно λ.

1. Свойства собственных значений.

Лемма 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) A – линейный неограниченный самосопряжённый положительно-определённый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, обратный к которому вполне непрерывен;

2) α_i, $i=0,1,2$, – некоторые вещественные числа, причём $\alpha_0<0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_1\neq 0$.

Тогда собственные значения краевой задачи (1), (2) вещественны.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1 из [14].

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда корни*

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha_1 \mp \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2}$$

квадратного трёхчлена $\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2$ не являются собственными значениями краевой задачи (1), (2).

Доказательство. Собственные элементы оператора A, соответствующие собственным значениям μ_k, обозначим через φ_k, $k \in \mathbb{N}:$ $A\varphi_k = \mu_k\varphi_k$. Известно, что система $\{\varphi_k\}_1^\infty$ образует полный ортонормированный базис в пространстве H. Тогда любой элемент $u \in H$ разлагается в ряд Фурье

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}(u,\varphi_k)_H\varphi_k.$$

Известно (см., например, [15, с. 578]), что для любого элемента $u \in D(A)$ имеет место разложение

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(u,\varphi_k)_H\varphi_k,$$

где ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2|(u,\varphi_k)|^2$ сходится. Пусть теперь $\{\varphi_k\}_1^\infty$ – ортонормированный базис в пространстве H и $u(x) \in L_2((0,1);H)$. Тогда почти всюду на интервале $(0,1)$ имеет место разложение

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(u(x),\varphi_k)_H\varphi_k,$$

где ряд сходится в H.

Если $Au(x), u''(x) \in L_2((0,1);H)$, то почти всюду на $(0,1)$ имеют место разложение в сходящиеся в H ряды

$$Au(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(u(x),\varphi_k)_H\varphi_k, \quad u''(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(u''(x),\varphi_k)_H\varphi_k.$$

Учитывая эти спектральные разложения в задаче (1), (2), для коэффициентов Фурье $u_k(x) = (u_k(x),\varphi_k)_H$ получим следующую спектральную задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$-u_k''(x) + \mu_k u_k(x) = \lambda u_k(x), \quad x \in (0,1), \tag{5}$$

$$u_k'(0) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)u_k(0) = 0, \quad u_k(1) = 0. \tag{6}$$

Таким образом, изучение собственных значений краевой задачи (1), (2) сводится к изучению собственных значений краевой задачи (5), (6) для различных натуральных k. Спектр краевой задачи (1), (2) состоит из тех λ, при которых задача (5), (6) имеет нетривиальное решение $u_k(x,\lambda)$ хотя бы при одном $k \in \mathbb{N}$. Число $\lambda = \mu_k$ не может быть собственным значением задачи (5), (6), поскольку в таком случае эта задача имеет только тривиальное решение.

Сначала покажем, что число λ_1 не является собственным значением краевой задачи (5), (6), т.е. что задача

$$-u_k''(x) + \mu_k u_k(x) = \lambda_1 u_k(x), \quad x \in (0,1), \tag{7}$$

$$u_k'(0) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2)u_k(0) = 0, \quad u_k(1) = 0 \tag{8}$$

при каждом k имеет только тривиальное решение.

Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$u_k(x,\lambda_1) = c_1 e^{-x\sqrt{\mu_k-\lambda_1}} + c_2 e^{-(1-x)\sqrt{\mu_k-\lambda_1}}, \tag{9}$$

где c_i, $i = 1,2$, – произвольные постоянные. Подставив (9) в условия (8), получим систему относительно c_i, $i = 1,2$, определитель которой имеет вид

$$D_k(\lambda_1) = -\sqrt{\mu_k-\lambda_1}(1 + e^{-2\sqrt{\mu_k-\lambda_1}}).$$

Очевидно, что $D_k(\lambda_1) \neq 0$ для любого k. Отсюда следует, что при каждом k функции $u_k(x,\lambda_1)$ тождественно равны нулю, т.е. $\lambda=\lambda_1$ не является собственным значением задачи (5), (6) и тем самым краевой задачи (1), (2).

Не нарушая общности, будем предполагать, что, начиная с некоторого k, выполняется неравенство

$$\mu_k > \frac{-\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2-4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2}, \tag{10}$$

так как $\mu_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$.

Аналогичным образом доказывается, что при выполнении условия (10) число $\lambda=\lambda_2$ также не является собственным значением краевой задачи (1), (2). Лемма 2 доказана.

2. Асимптотические формулы для собственных значений.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) A – линейный неограниченный самосопряжённый положительно-определённый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, обратный к которому вполне непрерывен;

2) α_i, $i=0,1,2$, – некоторые вещественные числа, причём $\alpha_0<0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_1 \neq 0$.

Тогда краевая задача (1), (2) имеет три серии собственных значений:

$$\lambda_k^{(1)} \sim \lambda_1 = \frac{-\alpha_1-\sqrt{\alpha_1^2-4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2}, \quad \lambda_k^{(2)} \sim \lambda_2 = \frac{-\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2-4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2}$$

при $k\to\infty$ и $\lambda_{k,n}^{(3)}=\mu_k+\gamma_n$ $(k,n\in\mathbb{N})$, где $\mu_k\to+\infty$ – собственные значения оператора A, а $\gamma_n \sim n^2\pi^2$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (5) имеет вид

$$u_k(x,\lambda)=c_1e^{-x\sqrt{\mu_k-\lambda}}+c_2e^{-(1-x)\sqrt{\mu_k-\lambda}}, \tag{11}$$

где c_i, $i=1,2$, – произвольные постоянные. Подставив (11) в (6), получим систему относительно c_i, $i=1,2$, определитель $D_k(\lambda)$ которой имеет вид

$$D_k(\lambda)=(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2-\sqrt{\mu_k-\lambda})-(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2+\sqrt{\mu_k-\lambda})e^{-2\sqrt{\mu_k-\lambda}}. \tag{12}$$

Таким образом, собственные значения краевой задачи (5), (6) и тем самым краевой задачи (1), (2) – корни уравнения $D_k(\lambda)=0$ (относительно λ, $\lambda\neq\mu_k$) хотя бы при одном k. Учитывая равенства (12), запишем $D_k(\lambda)=0$ в виде

$$(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2)\operatorname{sh}\sqrt{\mu_k-\lambda}-\sqrt{\mu_k-\lambda}\operatorname{ch}\sqrt{\mu_k-\lambda}=0. \tag{13}$$

Найдём те собственные значения λ, для которых $\lambda<\mu_k$. Тогда из уравнения (13) имеем

$$\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2-\sqrt{\mu_k-\lambda}\operatorname{cth}\sqrt{\mu_k-\lambda}=0. \tag{14}$$

Рассмотрим отдельно случаи $\lambda\in(-\infty,\lambda_1)$, $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_2)$, $\lambda\in(\lambda_2,+\infty)$. Очевидно, что если $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_2)$, то уравнение (14) не имеет решения относительно λ ни при каких k. Действительно, так как при $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_2)$ квадратный трёхчлен $\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2$ принимает отрицательное значение, а функция $\sqrt{\mu_k-\lambda}\operatorname{cth}\sqrt{\mu_k-\lambda}$ при всех k, удовлетворяющих условию (10), положительна, то получаем, что

$$(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2)-\sqrt{\mu_k-\lambda}\operatorname{cth}\sqrt{\mu_k-\lambda}<0,$$

начиная, быть может, с некоторого k. Отсюда следует, что при выполнении условия (10) задача (5), (6) в интервале (λ_1,λ_2) не имеет собственных значений.

Пусть $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$. Положим в уравнении (14) $\sqrt{\mu_k - \lambda} = y$ $(\sqrt{\mu_k - \lambda_1} < y < +\infty)$. Отсюда $\lambda = \mu_k - y^2$. Тогда получим следующее уравнение относительно y:

$$\alpha_2(\mu_k - y^2)^2 + \alpha_1(\mu_k - y^2) + \alpha_0 - y \operatorname{cth} y = 0, \quad y \in (\sqrt{\mu_k - \lambda_1}, +\infty). \tag{15}$$

Собственные значения краевой задачи (5), (6) для $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$ являются корнями уравнения (15). Пусть $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Покажем, что существует k, при котором уравнение (15) имеет решение $y_k \in (\sqrt{\mu_k - \lambda_1}, \sqrt{\mu_k - \lambda_1} + \varepsilon]$.

Рассмотрим функции

$$\psi_k(y) = \alpha_2(\mu_k - y^2)^2 + \alpha_1(\mu_k - y^2) + \alpha_0 - y \operatorname{cth} y$$

на отрезке $[\sqrt{\mu_k - \lambda_1}, \sqrt{\mu_k - \lambda_1} + \varepsilon]$:

$$\psi_k(\sqrt{\mu_k - \lambda_1}) = \lim_{y \to \sqrt{\mu_k - \lambda_1} + 0} \psi_k(y) = -\sqrt{\mu_k - \lambda_1} \operatorname{cth} \sqrt{\mu_k - \lambda_1} < 0,$$

$$\lim_{k \to +\infty} \psi_k(\sqrt{\mu_k - \lambda_1} + \varepsilon) = +\infty.$$

Следовательно, начиная с некоторого k, выполняются неравенства $\psi_k(\sqrt{\mu_k - \lambda_1} + \varepsilon) > 0$. Далее следует применить теорему Коши (о нулях непрерывной функции) к функции $\psi_k(y)$ на отрезке $[\sqrt{\mu_k - \lambda_1}, \sqrt{\mu_k - \lambda_1} + \varepsilon]$, начиная с некоторого k. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеет место эквивалентность $y_k \sim \sqrt{\mu_k - \lambda_1}$ при $k \to +\infty$. Отсюда и из равенства $\sqrt{\mu_k - \lambda} = y$ для собственных значений краевой задачи (5), (6) при $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$ получаем следующее асимптотическое соотношение:

$$\lambda_k^{(1)} \sim \lambda_1 = \frac{-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Аналогичным образом исследуется уравнение (14) в случае, когда $\lambda_2 < \lambda < +\infty$, а точнее, при $\lambda_2 < \lambda < \mu_k$. Положим в уравнении (14) $\sqrt{\mu_k - \lambda} = t$, $0 < t < \sqrt{\mu_k - \lambda_2}$. Отсюда $\lambda = \mu_k - t^2$. Тогда уравнение (14) примет вид

$$\alpha_2(\mu_k - t^2)^2 + \alpha_1(\mu_k - t^2) + \alpha_0 - t \operatorname{cth} t = 0, \quad t \in (0, \sqrt{\mu_k - \lambda_2}). \tag{16}$$

Собственные значения краевой задачи (5), (6) для $\lambda \in (\lambda_2, +\infty)$ являются корнями уравнения (16). Рассмотрим функцию

$$f_k(t) = \alpha_2(\mu_k - t^2)^2 + \alpha_1(\mu_k - t^2) + \alpha_0 - t \operatorname{cth} t, \quad t \in (0, \sqrt{\mu_k - \lambda_2}),$$

и покажем, что производная

$$f_k'(t) = -4\alpha_2 t(\mu_k - t^2) - 2\alpha_1 t - \frac{\operatorname{sh}(2t) - 2t}{2\operatorname{sh}^2 t} < 0,$$

начиная с некоторого k. На самом деле, если $\alpha_1 > 0$, то очевидно неравенство

$$4\alpha_2 t(\mu_k - t^2) + 2\alpha_1 t + \frac{\operatorname{sh}(2t) - 2t}{2\operatorname{sh}^2 t} > 0, \tag{17}$$

так как $\mu_k - t^2 > 0$ и $\operatorname{sh}(2t) > 2t$ при $t > 0$, а если $\alpha_1 < 0$, то из $0 < t < \sqrt{\mu_k - \lambda_2}$ следует, что

$$\mu_k - t^2 > \lambda_2 > \frac{-\alpha_1}{2\alpha_2}. \tag{18}$$

Из соотношений (18) получим неравенство (17). Значит, независимо от знака α_1, начиная с некоторого k, $f_k'(t) < 0$. Следовательно, функция $f_k(t)$, начиная с некоторого k, удовлетворяющего условию (10), монотонно убывает на промежутке $(0, \sqrt{\mu_k - \lambda_2})$, т.е.

$$f_k(\sqrt{\mu_k - \lambda_2}) = \lim_{y \to \sqrt{\mu_k - \lambda_2} - 0} f_k(t) = -\sqrt{\mu_k - \lambda_2} \operatorname{cth} \sqrt{\mu_k - \lambda_2} < 0,$$

но для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \to +\infty} f_k(\sqrt{\mu_k - \lambda_2} - \varepsilon) = +\infty,$$

а значит, начиная с некоторого k, $f_k(\sqrt{\mu_k - \lambda_2} - \varepsilon) > 0$. Таким образом, начиная с некоторого k, функция $f_k(t)$ на отрезке $[\sqrt{\mu_k - \lambda_2} - \varepsilon, \sqrt{\mu_k - \lambda_2}]$ имеет точно один нуль, который обозначим через t_k. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеет место эквивалентность $t_k \sim \sqrt{\mu_k - \lambda_2}$ при $k \to +\infty$. Отсюда и из равенства $\sqrt{\mu_k - \lambda} = t$ для собственных значений краевой задачи (5), (6), удовлетворяющих условию $\lambda_2 < \lambda < +\infty$, получаем следующее асимптотическое соотношение:

$$\lambda_k^{(2)} \sim \lambda_2 = \frac{-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Найдём теперь те собственные значения λ, для которых $\lambda > \mu_k$.

Положим в уравнении (13) $\sqrt{\lambda - \mu_k} = z$, $0 < z < \infty$. Отсюда $\lambda = z^2 + \mu_k$. Тогда получим следующее уравнение относительно z:

$$z \cos z - (\alpha_0 + \alpha_1(\mu_k + z^2) + \alpha_2(\mu_k + z^2)^2) \sin z = 0, \quad z \in (0, +\infty). \tag{19}$$

Пусть $z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. В этом случае уравнение (19) равносильно уравнению

$$z \operatorname{ctg} z - (\alpha_0 + \alpha_1(\mu_k + z^2) + \alpha_2(\mu_k + z^2)^2) = 0, \quad z \in (0, +\infty), \quad z \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим функцию

$$\eta_k(z) = z \operatorname{ctg} z - (\alpha_0 + \alpha_1(\mu_k + z^2) + \alpha_2(\mu_k + z^2)^2), \quad z \in (0, +\infty), \quad z \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В каждом интервале $(n\pi, (n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{N}$, функция $\eta_k(z)$ принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$, а её производная

$$\eta_k'(z) = \frac{\sin(2z) - 2z}{2\sin^2 z} - (2\alpha_1 z + 4\alpha_2 z(\mu_k + z^2)) < 0$$

при каждом k, удовлетворяющем условию (10), для $z \in (0, +\infty)$, $z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что функция $\eta_k(z)$ убывает на каждом интервале $(n\pi, (n+1)\pi)$. Таким образом, функция $\eta_k(z)$, начиная с некоторого k, в каждом интервале $(n\pi, (n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{N}$, имеет только один нуль $z_{n,k}$: $n\pi < z_{n,k} < (n+1)\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда и из равенства $\sqrt{\lambda - \mu_k} = z$, где $\lambda = z^2 + \mu_k$, получим следующую асимптотическую формулу для собственных значений краевой задачи (5), (6) и тем самым краевой задачи (1), (2):

$$\lambda_{k,n}^{(3)} = \mu_k + \gamma_n,$$

где $\gamma_n \sim n^2\pi^2$, $n \to \infty$. Теорема доказана.

Замечание 1. При $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ задача (1), (2) изучена в работе [16], где показано, что в этом случае задача имеет две серии собственных значений, одна из которых сходится к нулю, а другая серия асимптотически ведет себя как $\mu_k + n^2\pi^2$, где $\mu_k \to +\infty$ – собственные значения оператора A. Очевидно, что результат данной работы совпадает с результатом в [16] при $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$.

Замечание 2. В статье [14] в сепарабельном гильбертовом пространстве H исследовано асимптотическое поведение собственных значений следующей краевой задачи для дифференциально-операторного уравнения второго порядка:

$$-u''(x) + Au(x) = \lambda^2 u(x), \quad x \in (0,1), \tag{20}$$

$$u'(0) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{21}$$

При выполнении условий сформулированной выше теоремы доказано, что краевая задача (20), (21) имеет четыре серии собственных значений:

$$\lambda_k^{(1)} \sim \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}\sqrt[4]{\mu_k}, \quad \lambda_k^{(2)} \sim -\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}\sqrt[4]{\mu_k}, \quad \lambda_{k,n}^{(3)} = \sqrt{\mu_k + \gamma_n}, \quad \lambda_{k,n}^{(4)} = -\sqrt{\mu_k + \delta_n}$$

при $n, k \to +\infty$, где $\mu_k \to +\infty$ – собственные значения оператора A, а $\gamma_n \sim n^2\pi^2$ и $\delta_n \sim n^2\pi^2$ при $n \to +\infty$.

Замечание 3. Если в краевой задаче (1), (2) за гильбертово пространство H взять числовую прямую $R = (-\infty, +\infty)$, за оператор A взять $q(x)$ – интегрируемую функцию на отрезке $[0,1]$, то получим следующую спектральную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0,1), \tag{22}$$

$$u'(0) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{23}$$

которая исследована в работе [13]. Из этой работы следует, что собственные значения краевой задачи (22), (23) ведут себя асимптотически как

$$\lambda_n = n^2\pi^2 + \int\limits_0^1 q(x)\,dx + o(1/n).$$

Естественно, первая и вторая серии собственных значений, полученные для краевой задачи (1), (2), отсутствуют.

Пример. Рассмотрим в квадрате $[0,1] \times [0,1]$ задачу на собственные значения

$$-\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 v(x,y)}{\partial y^4} + \omega v(x,y) = \lambda v(x,y), \tag{24}$$

$$\frac{\partial v(0,y)}{\partial x} + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)v(0,y) = 0, \quad v(1,y) = 0, \quad y \in [0,1],$$

$$\frac{\partial^j v(x,0)}{\partial y^j} = \frac{\partial^j v(x,1)}{\partial y^j}, \quad j = \overline{0,3}, \quad x \in [0,1], \tag{25}$$

где ω – некоторое положительное число; α_i, $i = 0,1,2$, – некоторые вещественные числа, причём $\alpha_0 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 \neq 0$.

В гильбертовом пространстве $H := L_2(0,1)$ рассмотрим оператор A, определённый равенствами

$$D(A) := W_2^4((0,1), u^{(j)}(0) = u^{(j)}(1), j = \overline{0,3}), \quad Au = \frac{d^4u}{dy^4} + \omega u. \tag{26}$$

Запишем задачу (24), (25) в операторной форме:

$$-u''(x) + Au(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0,1),$$

$$u'(0) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

где $u(x) := v(x,\cdot)$ – вектор-функция со значениями в $L_2(0,1)$. Очевидно, что оператор A, определённый равенствами (26), является самосопряжённым и при достаточно больших $\omega > 0$ положительно-определённым оператором в $L_2(0,1)$, а A^{-1} вполне непрерывен в $L_2(0,1)$, так как вложение $D(A) \subset L_2(0,1)$ является компактным. Простые вычисления показывают, что собственные значения оператора A имеют вид

$$\mu_k(A) = 16\pi^4 k^4 + \omega, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Тогда в силу доказанной теоремы краевая задача (24), (25) имеет три серии собственных значений:

$$\lambda_k^{(1)} \sim \lambda_1 = \frac{-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2}, \quad \lambda_k^{(2)} \sim \lambda_2 = \frac{-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2} \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

$$\lambda_{k,n}^{(3)} \sim 16\pi^4 k^4 + n^2\pi^2 \quad \text{при} \quad k \to +\infty, \quad n \to +\infty.$$

Далее будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 3 [17]. *Пусть даны две числовые последовательности $\mu_k \sim ak^\alpha$ и $v_n \sim bn^\beta$, $0 < a, b, \alpha, \beta < \infty$, $k, n \in \mathbb{N}$. Составим суммы $\mu_k + v_n$ со всевозможными k и n. Полученные числа перенумеруем по возрастанию и обозначим через λ_m.*

Тогда последовательность λ_m имеет асимптотику $\lambda_m \sim dm^\delta$, где

$$\delta = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \quad d = \left(\frac{\alpha}{2\gamma}\right)^{\alpha\beta/(\alpha+\beta)} a^{\beta/(\alpha+\beta)} b^{\alpha/(\alpha+\beta)}, \quad \gamma = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{-1+2/\alpha} t \cos^{1+2/\alpha} t\, dt.$$

С помощью леммы 3 запишем асимптотическую формулу для собственных значений $\lambda_{k,n}^{(3)}$ относительно одного индекса вместо двух:

$$\lambda_m \sim (4\pi^2/\gamma)^{4/3} m^{4/3}, \quad m \to +\infty,$$

где $\gamma = \int_0^{\pi/2} \sin^{-1/2} t \cos^{3/2} t\, dt$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
2. *Якубов С.Я.* Краевая задача для уравнения Лапласа с неклассической спектральной асимптотикой // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 6. С. 1330–1333.
3. *Ильин В.А., Филиппов А.Ф.* О характере спектра самосопряжённого расширения оператора Лапласа в ограниченной области // Докл. АН СССР. 1970. Т. 191. № 2. С. 167–169.
4. *Кожевников А.Н.* Раздельная асимптотика двух серий собственных значений одной эллиптической краевой задачи // Мат. заметки. 1977. Т. 22. № 5. С. 699–711.
5. *Рыбак М.А.* Об асимптотическом распределении собственных значений некоторых граничных задач для операторного уравнения Штурма–Лиувилля // Укр. мат. журн. 1980. Т. 32. № 2. С. 248–252.
6. *Denche M.* Abstract differential equation with a spectral parameter in the boundary conditions // Result. Math. 1999. V. 35. P. 216–227.
7. *Алиев Б.А.* Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Укр. мат. журн. 2006. Т. 58. № 8. С. 1146–1152.
8. *Aliev B.A., Kurbanova N.K.* Asymptotic behavior of eigenvalues of a boundary value problem for a second order elliptic differential-operator equation // Proc. of the Institute of Mathematics and Mechanics National Academy of Sciences of Azerbaijan. 2014. V. 40. Spec. Iss. P. 23–29.
9. *Aliev B.A., Kurbanova N.K., Yakubov Ya.* Solvability of the abstract Regge boundary-value problem and asymptotic behavior of eigenvalues of one abstract spectral problem // Rivista Di Mathematica Della Universita Di Parma. 2015. V. 6. P. 241–265.

10. *Капустин Н.Ю.* Об одной спектральной задаче в теории оператора теплопроводности // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 10. С. 1509–1511.
11. *Капустин Н.Ю.* О равномерной сходимости в классе ряда Фурье для спектральной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1394–1399.
12. *Капустин Н.Ю.* О базисности системы собственных функций задачи с квадратом спектрального параметра в краевом условии // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1284–1289.
13. *Warren J.Code, Patrick J. Browne.* Sturm–Liouville problems with boundary conditions depending quadraticcaly on eigenparameter // J. of Math. Anal. and Appl. 2005. V. 309. P. 729–742.
14. *Алиев Б.А., Керимов В.З.* Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром в уравнении и в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 2. С. 195–203.
15. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 5. М., 1959.
16. *Алиев Б.А.* Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром, квадратично входящим в граничное условие // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 9. С. 1282–1286.
17. *Мамедов К.С.* Асимптотика функции распределения собственных чисел абстрактного дифференциального оператора // Мат. заметки. 1982. Т. 31. № 1. С. 41–51.

Институт математики и механики
НАН Азербайджана, г. Баку,
Азербайджанский государственный
педагогический университет, г. Баку

Поступила в редакцию 06.05.2022 г.
После доработки 05.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1596–1605

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.21

ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ ТИПА ШТУРМА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ РАСПРЕДЕЛЁННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

© 2022 г. Б. И. Эфендиев

Методом функции Грина решена задача с условиями типа Штурма для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределённого дифференцирования. Построена функция Грина и исследованы её свойства. Доказана теорема существования и единственности решения исследуемой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064122120020, EDN: NCBQSQ

Введение. В интервале $0 < x < l$ рассмотрим уравнение

$$u''(x) - q(x)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha[p(x)u(x)]\,d\alpha = f(x), \quad 0 < \beta < 1, \tag{1}$$

где

$$D_{0x}^\alpha u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int\limits_0^x \dfrac{u(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ u(x), & \alpha = 0, \\ \dfrac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{\alpha-n} u(x), & n-1 < \alpha \leqslant n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

– оператор дробного интегро-дифференцирования (в смысле Римана–Лиувилля) порядка α [1, 2], $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, $\mu(\alpha)$, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – заданные функции, $u(x)$ – искомая функция.

Уравнение (1) относится к классу непрерывных дифференциальных уравнений (см. [1, 2]). Интегро-дифференциальный оператор

$$M_{ax}^{\alpha,\beta} u(x) = \int\limits_\alpha^\beta b_\xi(x) D_{ax}^\xi u(x)\,d\xi, \quad 0 < \alpha < \beta, \tag{2}$$

был введён в работе [1] и назван непрерывным (континуумальным) дифференциальным оператором, который в последнее время называют *оператором непрерывно распределённого дифференцирования.*

При $b_\xi(x) = 1$ в формуле (2) оператор $M_{ax}^{\alpha,\beta}$ называется *оператором дифференцирования континуального (сегментного) порядка* и обозначается через

$$D_{ax}^{[\alpha,\beta]} u(x) = \int\limits_\alpha^\beta D_{ax}^\xi u(x)\,d\xi. \tag{3}$$

В работе [2] были изучены свойства оператора (3), в частности, доказана положительность оператора, получена формула непрерывного интегрирования по частям.

В статье [3] (см. также [4, гл. 5]) построен оператор, обращающий оператор (3), получены аналоги формулы Ньютона–Лейбница для интегрального и интегро-дифференциального операторов. Определены корректные формы начальных данных и решена задача Коши для интегро-дифференциального уравнения континуального порядка.

В работе [5] для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x)+\lambda u(x)=f(x),\quad 0<\beta\leqslant 1,$$

построено фундаментальное решение, найдено представление решения задачи Коши, показаны положительность фундаментального решения и характер зависимости от спектрального параметра.

В работе [6] (см. также [7]) для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\int\limits_a^b \omega(\alpha)D_t^{\alpha}x(t)\,d\alpha=Ax(t)$$

изучена задача Коши в банаховом пространстве с линейным ограниченным оператором в правой части. Методами теории преобразования Лапласа найдены условия существования и единственности решения задачи в пространстве экспоненциально растущих функций.

В последнее время, наряду с операторами (2) и (3), изучаются так называемые операторы дискретно распределённого дифференцирования

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i D_{tx}^{s_i}u(x),\quad s_i>0,\quad i=\overline{1,n},\quad n\in\mathbb{N}, \tag{4}$$

и интенсивно исследуются дифференциальные уравнения как обыкновенные, так и в частных производных с операторами вида (2)–(4).

В статье [8] сформулирована и решена начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с оператором дискретно распределённого дифференцирования. Начальные условия задачи обеспечивают её однозначную разрешимость при произвольном распределении параметров, отвечающих порядку производных, входящих в уравнение (в отличие от задачи Коши), и являются необходимыми для исследуемого уравнения. Задача редуцирована к интегральному уравнению, построено явное представление решения в терминах функции Райта. В качестве следствия из этих результатов получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши.

В работе [9] решена задача Коши для многомерного уравнения дробной диффузии с оператором дискретно распределённого порядка. В терминах функции Райта построено фундаментальное решение и исследованы его свойства. Найдено представление решения исследуемой задачи и доказана теорема единственности решения в классе функций быстрого роста, удовлетворяющих аналогу условия А.Н. Тихонова. Показано, что разрешимость исследуемой задачи зависит от распределения параметров, входящих в уравнение.

В статье [10] рассматриваются линейные уравнения в банаховых пространствах с распределённой дробной производной, задаваемой интегралом Стилтьеса, и с замкнутым оператором A в правой части. В отличие от ранее изученных классов уравнений с распределёнными производными, такие уравнения могут содержать непрерывную и дискретную части интеграла, т.е. стандартный интеграл от дробной производной по её порядку и линейную комбинацию дробных производных с разными порядками. Вводятся в рассмотрение разрешающие семейства операторов для таких уравнений и изучаются их свойства. Доказывается теорема о возмущении для этого класса операторов и изучается задача Коши для неоднородного уравнения с распределённой дробной производной.

В работе [11] исследуется однозначная разрешимость линейных уравнений в банаховых пространствах с дискретно распределённой дробной производной Герасимова–Капуто в терминах аналитических разрешающих семейств операторов. На основе полученных абстрактных результатов исследована однозначная разрешимость начально-краевых задач для одного класса уравнений с дискретно распределённой дробной производной по времени и с многочленами от эллиптического самосопряжённого дифференциального по пространственным переменным оператора.

В статьях [12–15] исследовалось линейное обыкновенное дифференциальное уравнение с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j\partial_{0x}^{\alpha_j}u(x)+\lambda u(x)=f(x).$$

В частности, в [12] построено фундаментальное решение и найдено решение задачи Коши. В [13] методом функции Грина решена задача с условиями Штурма–Лиувилля и показано, что при определённых значениях начальных данных выполняется условие разрешимости исследуемой задачи. В [14] и [15] изучались нелокальные краевые задачи и были доказаны соответствующие теоремы существования и единственности решения исследуемых задач.

В работе [16] исследованы начальная задача и задача Штурма–Лиувилля для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом, содержащего производную Герасимова–Капуто. Доказаны соответствующие теоремы существования и единственности решений исследуемых задач. Решение задачи Штурма–Лиувилля записано в терминах функции Грина. Также в работе [17] методом функции Грина изучена краевая задача с условиями типа Штурма–Лиувилля для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом, содержащего производную Римана–Лиувилля. Доказана теорема существования и единственности решения, построена соответствующая функция Грина. Используя асимптотические формулы для обобщённой функции Райта, доказана теорема о конечности числа собственных значений краевой задачи с условиями типа Штурма–Лиувилля.

Ранее автором были исследованы задача Коши [18] и задача Дирихле [19] для уравнения (1), в частности, построено фундаментальное решение с помощью ряда Неймана и найдены представления решений этих задач в явном виде, в случае задачи Дирихле записана соответствующая функция Грина.

В данной работе исследована задача с условиями типа Штурма [20, с. 52] для уравнения (1). Построена функция Грина рассматриваемой задачи и записано решение в явном виде в терминах функции Грина. Показано, что если условие разрешимости не выполняется, то нарушается единственность решения исследуемой задачи.

1. Постановка задачи. Далее будем считать, что $\mu(\alpha)\in L[0,\beta]$, $p(x)\in\mathrm{Lip}\,[0,l]$, $q(x)\in$ $\in AC[0,l]$.

Регулярным решением уравнения (1) в интервале $(0,l)$ назовём функцию $u(x)$, принадлежащую классу $C[0,l]\bigcap C^2(0,l)$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $x\in(0,l)$.

Задача. Найти регулярное решение $u(x)$ уравнения (1) в интервале $(0,l)$, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x\to0}[au(x)+bu'(x)]=u_0,\quad \lim_{x\to l}[cu(x)+du'(x)]=u_l, \tag{5}$$

где a, b, c, d, u_0, u_l – заданные константы, причём $a^2+b^2\neq0$, $c^2+d^2\neq0$.

2. Вспомогательные утверждения. Рассмотрим функцию [18]

$$W(x,t)=x-t+\int\limits_t^x(x-s)R(s,t)\,ds,\quad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant l, \tag{6}$$

где

$$R(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n(x,t),\quad K_1(x,t)=q(x)\int\limits_0^{\beta}\mu(\alpha)D_{tx}^{\alpha}[(x-t)p(x)]\,d\alpha,$$

$$K_{n+1}(x,t)=\int\limits_t^x K_n(x,s)K_1(s,t)\,ds,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Сходимость бесконечного ряда для $R(x,t)$ следует из оценок

$$|K_n(x,t)|\leqslant C^n\frac{(x-t)^{n-1}}{\Gamma(n)},\quad n\in\mathbb{N},\quad |R(x,t)|\leqslant C\exp[C(x-t)],\quad C>0,$$

доказательства которых приведены при доказательстве леммы 1 работы [18].

Функция $W(x,t)$, определённая формулой (6), является фундаментальным решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям (см. [18]):

$$W_{xx}(x,t)-q(x)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D^\alpha_{tx}[p(x)W(x,t)]\,d\alpha=0, \tag{7}$$

$$W(t,t)=0,\quad W_x(t,t)=1,\quad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant l, \tag{8}$$

$$W_{tt}(x,t)-p(t)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D^\alpha_{xt}[q(t)W(x,t)]\,d\alpha=0, \tag{9}$$

$$W(x,x)=0,\quad W_t(x,x)=-1,\quad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant l, \tag{10}$$

$$W_{xxt}(x,t)-q(x)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D^\alpha_{tx}[p(x)W_t(x,t)]\,d\alpha=0, \tag{11}$$

$$W_{xt}(t,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant l. \tag{12}$$

3. Функция Грина.

Определение. *Функцией Грина* задачи с условиями типа Штурма (5) для уравнения (1) назовём функцию $v(x,t)$, обладающую следующими свойствами:

1) $v(x,t)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$;

2) в каждом из полуинтервалов $[0,t)$ и $(t,l]$ функция $v(x,t)$ как функция переменной x является решением задачи

$$v_{xx}(x,t)-q(x)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D^\alpha_{0x}[p(x)v(x,t)]\,d\alpha=0, \tag{13}$$

$$av(0,t)+bv_x(0,t)=0,\quad cv(l,t)+dv_x(l,t)=0; \tag{14}$$

по переменной t в каждом из полуинтервалов $[0,x)$ и $(x,l]$ функция $v(x,t)$ является решением задачи

$$v_{tt}(x,t)-p(t)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D^\alpha_{lt}[q(t)v(x,t)]\,d\alpha=0, \tag{15}$$

$$av(x,0)+bv_t(x,0)=0,\quad cv(x,l)+dv_t(x,0)=0; \tag{16}$$

3) при $t=x$ производные $v_x(x,t)$ и $v_t(x,t)$ имеют скачок, равный единице, т.е.

$$v_x(x,x+0)-v_x(x,x-0)=-1, \tag{17}$$

$$v_t(x,x+0)-v_t(x,x-0)=1, \tag{18}$$

а при любом фиксированном t из отрезка $[0,l]$ функция $v(x,t)$ имеет непрерывные производные первого и второго порядка по x в каждом из полуинтервалов $[0,t)$ и $(t,l]$. При любом фиксированном x из отрезка $[0,l]$ функция $v(x,t)$ имеет непрерывные производные первого и второго порядка по t в каждом из полуинтервалов $[0,x)$ и $(x,l]$.

Введём в рассмотрение функцию, определённую на компакте $\overline{\Omega}=[0,l]\times[0,l]$:

$$G(x,t)=H(x-t)W(x,t)-\frac{1}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)][cW(l,t)+dW_x(l,t)], \tag{19}$$

где $H(s)$ – функция Хевисайда, $W(x,t)$ – фундаментальное решение уравнения (1),

$$\Delta=acW(l,0)+adW_x(l,0)+bcW_t(l,0)+bdW_{xt}(l,0)\neq 0. \tag{20}$$

Лемма. *Пусть выполнено условие (20). Тогда функция $G(x,t)$, определяемая формулой (19), является функцией Грина задачи с условиями типа Штурма (5) для уравнения (1).*

Доказательство. Непрерывность функции Грина $G(x,t)$ на компакте $\overline{\Omega}$ следует из непрерывности функции $W(x,t)$ на этом компакте $\overline{\Omega}$.

Второе свойство доказывается непосредственной подстановкой равенства (19) в формулы (13)–(16) с учётом соотношений (7)–(12):

$$G_{xx}(x,t)-q(x)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D^\alpha_{0x}[p(x)G(x,t)]\,d\alpha=$$

$$=H(x-t)\biggl[W_{xx}(x,t)-q(x)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D^\alpha_{tx}[p(x)W(x,t)]\,d\alpha\biggr]-$$

$$-\frac{a}{\Delta}[cW(l,t)+dW_x(l,t)]\biggl[W_{xx}(x,0)-q(x)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D^\alpha_{0x}[p(x)W(x,0)]\,d\alpha\biggr]-$$

$$-\frac{b}{\Delta}[cW(l,t)+dW_x(l,t)]\biggl[W_{xxt}(x,0)-q(x)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D^\alpha_{0x}[p(x)W_t(x,0)]\,d\alpha\biggr]=0, \tag{21}$$

$$G_{tt}(x,t)-p(t)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D^\alpha_{lt}[q(t)G(x,t)]\,d\alpha=H(x-t)\biggl[W_{tt}(x,t)-p(t)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D^\alpha_{xt}[q(t)W(x,t)]\,d\alpha\biggr]-$$

$$-\frac{c}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)]\biggl[W_{tt}(l,t)-p(t)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D^\alpha_{lt}[q(t)W(l,t)]\,d\alpha\biggr]-$$

$$-\frac{d}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)]\biggl[W_{xtt}(l,t)-p(t)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D^\alpha_{lt}[q(t)W_x(l,t)]\,d\alpha\biggr]=0. \tag{22}$$

Из представления (19) в силу соотношений (8) и (10) имеем равенства

$$G(0,t)=\frac{b}{\Delta}[cW(l,t)+dW_x(l,t)], \tag{23}$$

$$G(l,t)=W(l,t)-\frac{1}{\Delta}[aW(l,0)+bW_t(l,0)][cW(l,t)+dW_x(l,t)], \tag{24}$$

$$G(x,0)=W(x,0)-\frac{1}{\Delta}[cW(l,0)+dW_x(l,0)][aW(x,0)+bW_t(x,0)], \tag{25}$$

$$G(x,l)=-\frac{d}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)]. \tag{26}$$

Продифференцировав формулу (19) по x и по t, получим

$$G_x(x,t)=H(x-t)W_x(x,t)-\frac{1}{\Delta}[aW_x(x,0)+bW_{xt}(x,0)][cW(l,t)+dW_x(l,t)], \tag{27}$$

$$G_t(x,t)=H(x-t)W_t(x,t)-\frac{1}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)][cW_t(l,t)+dW_{xt}(l,t)]. \tag{28}$$

Из соотношений (27), (28) в силу формул (8), (10), (12) следуют равенства

$$G_x(0,t)=-\frac{a}{\Delta}[cW(l,t)+dW_x(l,t)], \tag{29}$$

$$G_x(l,t)=W_x(l,t)-\frac{1}{\Delta}[aW_x(l,0)+bW_{xt}(l,0)][cW(l,t)+dW_x(l,t)], \tag{30}$$

$$G_t(x,0)=W_t(x,0)-\frac{1}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)][cW_t(l,0)+dW_{xt}(l,0)], \tag{31}$$

$$G_t(x,l)=\frac{c}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)]. \tag{32}$$

Из соотношений (23)–(26) и (29)–(32) следует, что функция $G(x,t)$, определённая формулой (19), удовлетворяет граничным условиям (14), (16), т.е. справедливы равенства

$$aG(0,t)+bG_x(0,t)=0,\quad cG(l,t)+dG_x(l,t)=0, \tag{33}$$

$$aG(x,0)+bG_t(x,0)=0,\quad cG(x,l)+dG_t(x,0)=0. \tag{34}$$

Подставляя формулы (27), (28) в соотношения (17), (18), с учётом того, что $W(x)$ – непрерывная функция, а $H(x)$ – разрывная в нуле функция, ввиду равенств $W_x(x,x)=1$, $W_t(x,x)=-1$ получим

$$G_x(x,x+0)-G_x(x,x-0)=\lim_{\varepsilon\to-0}H(\varepsilon)W_x(x,x)-\frac{1}{\Delta}[aW_x(x,0)+bW_{xt}(x,0)][cW(l,x)+dW_x(l,x)]-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to+0}H(\varepsilon)W_x(x,x)+\frac{1}{\Delta}[aW_x(x,0)+bW_{xt}(x,0)][cW(l,x)+dW_x(l,x)]=-1, \tag{35}$$

$$G_t(x,x+0)-G_t(x,x-0)=\lim_{\varepsilon\to-0}H(\varepsilon)W_t(x,x)-\frac{1}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)][cW_t(l,x)+dW_{xt}(l,x)]-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to+0}H(\varepsilon)W_t(x,x)+\frac{1}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)][cW_t(l,x)+dW_{xt}(l,x)]=1, \tag{36}$$

что доказывает справедливость формул (17) и (18). Лемма доказана.

4. Представление решения.

Теорема. *Пусть* $\mu(\alpha)\in L[0,\beta]$, $p(x)\in \mathrm{Lip}\,[0,l]$, $q(x)\in AC[0,l]$, $f(x)\in L[0,l]\bigcap C(0,l)$. *Тогда при выполнении условия разрешимости (20) существует единственное регулярное решение задачи (1), (5), которое имеет вид*

$$u(x)=\int\limits_0^l G(x,t)f(t)\,dt-\frac{u_0}{a^2+b^2}[aG_t(x,0)-bG(x,0)]+\frac{u_l}{c^2+d^2}[cG_t(x,l)-dG(x,l)], \tag{37}$$

если $a^2+b^2\neq 0$, $c^2+d^2\neq 0$.

Доказательство. Пусть $u(x)$ – регулярное решение уравнения (1). Умножим обе части уравнения (1) на функцию $G(x,t)$, предварительно поменяв в нем переменную x на t, и проинтегрируем полученное равенство по t в пределах от ε до $l-\varepsilon$, где ε – достаточно малое положительное число. Тогда имеем

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x,t)u''(t)\,dt - \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x,t)q(t)\int_{0}^{\beta}\mu(\alpha)D_{0t}^{\alpha}[p(t)u(t)]\,d\alpha\,dt = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x,t)f(t)\,dt. \qquad (38)$$

Интегрируя по частям первое слагаемое левой части равенства (38) и учитывая, что функция $G_t(x,t)$ имеет разрыв, предварительно разбив промежуток интегрирования на два промежутка (от ε до x и от x до $l-\varepsilon$), в пределе при $\varepsilon\to 0$ будем иметь

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x,t)u''(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg[u'(l-\varepsilon)G(x,l-\varepsilon) - u'(\varepsilon)G(x,\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{x} G_t(x,t)u'(t)\,dt -$$

$$- \int_{x}^{l-\varepsilon} G_t(x,t)u'(t)\,dt\Bigg] = G(x,l)\lim_{x\to l}u'(x) - G(x,0)\lim_{x\to 0}u'(x) - u(l)G_t(x,l) + u(0)G_t(x,0) +$$

$$+ u(x)[G_t(x,x+0) - G_t(x,x-0)] + \int_{0}^{l} G_{tt}(x,t)u(t)\,dt. \qquad (39)$$

В силу формулы дробного интегрирования по частям

$$\int_{0}^{l} g(x)D_{0x}^{\gamma}h(x)dx = \int_{0}^{l} h(x)D_{lx}^{\gamma}g(x)dx \quad \text{для любого} \quad \gamma<0$$

и равенства

$$\lim_{x\to 0}D_{0x}^{\gamma-1}v(x)=0 \quad \text{для любых} \quad v(x)\in C[0,l] \quad \text{и} \quad \gamma\in(0,1)$$

второе слагаемое в левой части формулы (38) запишется в виде

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x,t)q(t)\int_{0}^{\beta}\mu(\alpha)D_{0t}^{\alpha}[p(t)u(t)]\,d\alpha\,dt = q(l)G(x,l)\int_{0}^{\beta}\mu(\alpha)D_{0l}^{\alpha-1}[p(t)u(t)]\,d\alpha -$$

$$- q(0)G(x,0)\int_{0}^{\beta}\mu(\alpha)D_{00}^{\alpha-1}[p(t)u(t)]\,d\alpha - \int_{0}^{l}\frac{\partial}{\partial t}[q(t)G(x,t)]\int_{0}^{\beta}\mu(\alpha)D_{0t}^{\alpha-1}[p(t)u(t)]\,d\alpha\,dt =$$

$$= q(l)G(x,l)\int_{0}^{\beta}\mu(\alpha)D_{0l}^{\alpha-1}[p(t)u(t)]\,d\alpha - \int_{0}^{l}u(t)p(t)\int_{0}^{\beta}\mu(\alpha)D_{lt}^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial t}[q(t)G(x,t)]\,d\alpha\,dt =$$

$$= \int_{0}^{l}u(t)p(t)\int_{0}^{\beta}\mu(\alpha)D_{lt}^{\alpha}[q(t)G(x,t)]\,d\alpha\,dt. \qquad (40)$$

С учётом формул (36), (39) и (40) из равенства (38) при $\varepsilon \to 0$ получим

$$u(x)+\int\limits_0^l u(t)\Big[G_{tt}(x,t)-p(t)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D_{lt}^{\alpha}[q(t)G(x,t)]\,d\alpha\Big]\,dt=$$

$$=-G(x,l)\lim_{x\to l}u'(x)+G(x,0)\lim_{x\to 0}u'(x)+u(l)G_t(x,l)-u(0)G_t(x,0)+\int\limits_0^l G(x,t)f(t)\,dt. \quad (41)$$

Обозначим

$$A(x):=-u(0)G_t(x,0)+G(x,0)\lim_{x\to 0}u'(x), \quad (42)$$

$$B(x):=u(l)G_t(x,0)-G(x,l)\lim_{x\to l}u'(x). \quad (43)$$

Из формул (42) и (43), учитывая равенства (5), (34), будем иметь

$$A(x)=-\frac{u_0}{a^2+b^2}[aG_t(x,0)-bG(x,0)], \quad (44)$$

$$B(x)=\frac{u_l}{c^2+d^2}[cG_t(x,l)-dG(x,l)]. \quad (45)$$

Подставив формулы (44), (45) в равенство (41), получим соотношение, из которого в силу равенства (22) следует формула (37).

Покажем теперь, что функция $u(x)$, определяемая формулой (37), действительно является решением задачи (1), (5). Продифференцировав дважды равенство (37), с учётом формулы (35) будем иметь

$$u'(x)=\int\limits_0^l G_x(x,t)f(t)\,dt-\frac{u_0}{a^2+b^2}[a[G_t(x,0)]'-b[G(x,0)]']+\frac{u_l}{c^2+d^2}[c[G_t(x,l)]'-d[G(x,l)]'], \quad (46)$$

$$u''(x)=\frac{d}{dx}\Big[\int\limits_0^x G_x(x,t)f(t)\,dt+\int\limits_x^l G_x(x,t)f(t)\,dt\Big]-\frac{u_0}{a^2+b^2}[a[G_t(x,0)]''-b[G(x,0)]'']+$$

$$+\frac{u_l}{c^2+d^2}[c[G_t(x,l)]''-d[G(x,l)]'']=\int\limits_0^l G_{xx}(x,t)f(t)\,dt+f(x)-$$

$$-\frac{u_0}{a^2+b^2}[a[G_t(x,0)]''-b[G(x,0)]'']+\frac{u_l}{c^2+d^2}[c[G_t(x,l)]''-d[G(x,l)]'']. \quad (47)$$

Подставив представление решения (37) и формулу (47) в уравнение (1), в силу равенства (21) получим, что функция, определяемая соотношением (37), действительно является решением уравнения (1).

С учётом формул (8), (10), (12) из равенств (19), (27) и (28) будем иметь

$$G(0,0)=-\frac{b}{\Delta}[cW(l,0)+dW_x(l,0)], \quad G(0,l)=\frac{bd}{\Delta}, \quad (48)$$

$$G(l,0)=W(l,0)-\frac{1}{\Delta}[aW(l,0)+bW_t(l,0)][cW(l,0)+dW_x(l,0)], \quad (49)$$

$$G(l,l)=-\frac{d}{\Delta}[aW(l,0)+bW_t(l,0)], \quad (50)$$

$$\lim_{x\to 0}[G(x,0)]'=1-\frac{a}{\Delta}[cW(l,0)+dW_x(l,0)], \quad \lim_{x\to 0}[G(x,l)]'=-\frac{ad}{\Delta}, \quad (51)$$

$$\lim_{x\to l}[G(x,0)]' = W_x(l,0) - \frac{1}{\Delta}[aW_x(l,0) + bW_{xt}(l,0)][cW(l,0) + dW_x(l,0)], \tag{52}$$

$$\lim_{x\to l}[G(x,l)]' = -\frac{d}{\Delta}[aW_x(l,0) + bW_{xt}(l,0)], \tag{53}$$

$$\lim_{x\to 0} G_t(x,0) = -1 + \frac{b}{\Delta}[cW_t(l,0) + dW_{xt}(l,0)], \quad \lim_{x\to 0} G_t(x,l) = -\frac{bc}{\Delta}, \tag{54}$$

$$\lim_{x\to l} G_t(x,0) = W_t(l,0) - \frac{1}{\Delta}[aW(l,0) + bW_t(l,0)][cW_t(l,0) + dW_{xt}(l,0)], \tag{55}$$

$$\lim_{x\to l} G_t(x,l) = \frac{c}{\Delta}[aW(l,0) + bW_t(l,0)], \tag{56}$$

$$\lim_{x\to 0}[G_t(x,0)]' = -\frac{a}{\Delta}[cW_t(l,0) + dW_{xt}(l,0)], \quad \lim_{x\to 0}[G_t(x,l)]' = \frac{ac}{\Delta}, \tag{57}$$

$$\lim_{x\to l}[G_t(x,0)]' = W_{xt}(l,0) - \frac{1}{\Delta}[aW_x(l,0) + bW_{xt}(l,0)][cW_t(l,0) + dW_{xt}(l,0)], \tag{58}$$

$$\lim_{x\to l}[G_t(x,l)]' = \frac{c}{\Delta}[aW_x(l,0) + bW_{xt}(l,0)]. \tag{59}$$

Из равенств (37) и (46) имеем соотношения

$$u(0) = \int\limits_0^l G(0,t)f(t)\,dt - \frac{u_0}{a^2+b^2}[a\lim_{x\to 0} G_t(x,0) - bG(0,0)] + \frac{u_l}{c^2+d^2}[c\lim_{x\to 0} G_t(x,l) - dG(0,l)], \tag{60}$$

$$\lim_{x\to 0} u'(x) = \int\limits_0^l G_x(0,t)f(t)\,dt - \frac{u_0}{a^2+b^2}[a\lim_{x\to 0}[G_t(x,0)]' - b\lim_{x\to 0}[G(x,0)]'] + \\ + \frac{u_l}{c^2+d^2}[c\lim_{x\to 0}[G_t(x,l)]' - d\lim_{x\to 0}[G(x,l)]'], \tag{61}$$

$$u(l) = \int\limits_0^l G(l,t)f(t)\,dt - \frac{u_0}{a^2+b^2}[a\lim_{x\to l} G_t(x,0) - bG(l,0)] + \frac{u_l}{c^2+d^2}[c\lim_{x\to l} G_t(x,l) - dG(l,l)], \tag{62}$$

$$\lim_{x\to l} u'(x) = \int\limits_0^l G_x(l,t)f(t)\,dt - \frac{u_0}{a^2+b^2}[a\lim_{x\to l}[G_t(x,0)]' - b\lim_{x\to l}[G(x,0)]'] + \\ + \frac{u_l}{c^2+d^2}[c\lim_{x\to l}[G_t(x,l)]' - d\lim_{x\to l}[G(x,l)]']. \tag{63}$$

Подставив равенства (60)–(63) в условия (5), с учётом формул (33), (48)–(59) получим верные тождества. Теорема доказана.

Замечание. В случае $\Delta = acW(l,0) + adW_x(l,0) + bcW_t(l,0) + bdW_{xt}(l,0) = 0$ нарушается единственность решения задачи (1), (5).

Действительно, если $\Delta = 0$, то однородная задача

$$u''(x) - q(x)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D_{0x}^\alpha[p(x)u(x)]\,d\alpha = 0, \tag{64}$$

$$au(0) + bu'(0) = 0, \quad cu(l) + du'(l) = 0 \tag{65}$$

имеет ненулевое решение. В частности, любая функция $u(x) = k[aW(x,0) + bW_t(x,0)]$, $k = \mathrm{const}$, является решением задачи (64), (65).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 4. С. 796–799.
2. *Нахушев А.М.* О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 1. С. 101–109.
3. *Псху А.В.* К теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 120–127.
4. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М., 2005.
5. *Псху А.В.* Фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения континуального порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. акад. наук. 2007. Т. 9. № 1. С. 73–78.
6. *Стрелецкая Е.М., Федоров В.Е., Дебуш А.* Задача Коши для уравнения распределённого порядка в банаховом пространстве // Мат. заметки Северо-Восточного федерал. ун-та. 2018. Т. 25. № 1. С. 63–72.
7. *Fedorov V.E., Streletskaya E.M.* Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces // Electron. J. of Differ. Equat. 2018. V. 2018. № 176. P. 1–17.
8. *Псху А.В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сб. 2011. Т. 202. № 4. С. 111–122.
9. *Псху А.В.* Уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределённого дифференцирования // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 1078–1098.
10. *Sitnik S.M., Fedorov V.E., Filin N.V., Polunin V.A.* On the solvability of equations with a distrebuted fractional derivative given by the Stieltjes integral // Mathematics. 2022. V. 10. P. 2979.
11. *Федоров В.Е., Филин Н.В.* Линейные уравнения с дискретно распределённой дробной производной в банаховом пространстве // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 2. С. 264–280.
12. *Гадзова Л.Х.* Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования // Вестн. Камчатской региональной ассоциации "Учебно-научный центр". Физ.-мат. науки. 2018. Вып. 3 (23). С. 48–56.
13. *Гадзова Л.Х.* Краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 180–186.
14. *Гадзова Л.Х.* Нелокальная краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования // Мат. заметки. 2019. Т. 106. Вып. 6. С. 860–865.
15. *Gadzova L.Kh.* Boundary-value problem with shift for a linear ordinary differential equation with the operator of discretely distributed differentiation // J. of Math. Sci. 2020. V. 250. № 5. P. 740–745.
16. *Мажгихова М.Г.* Начальная и краевая задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Челябинский физ.-мат. журн. 2018. Т. 3. Вып. 1. С. 27–37.
17. *Mazhgikhova M.G.* Green function method for a fractional-order delay differential equation // Bull. of the Karaganda Univ. Ser. Math. 2020. № 1 (97). P. 87–96.
18. *Эфендиев Б.И.* Начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределённого дифференцирования // Мат. заметки Северо-Восточного федерал. ун-та. 2022. Т. 29. № 2. С. 58–71.
19. *Эфендиев Б.И.* Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределённого дифференцирования // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. акад. наук. 2021. Т. 21. № 4. С. 37–44.
20. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1954.

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН,
г. Нальчик

Поступила в редакцию 21.06.2021 г.
После доработки 20.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1606–1623

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4+519.2

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. Я. И. Белопольская

Показано, что вероятностная интерпретация решения задачи Коши для систем семилинейных и квазилинейных параболических уравнений позволяет свести эту задачу к решению соответствующей стохастической задачи. Сформулированы условия, при которых решение стохастической задачи существует и единственно. Как следствие получены вероятностные (интегральные) представления искомых решений задачи Коши.

DOI: 10.31857/S0374064122120032, EDN: NCBSDL

Введение. Существование связи между теорией линейных параболических уравнений второго порядка и теорией случайных процессов было установлено уже в классической работе А.Н. Колмогорова [1], где показано, что решение задачи Коши для параболического уравнения второго порядка может быть представлено в виде среднего по траекториям соответствующего случайного процесса. В частности, классические решения прямой задачи Коши

$$u_t = \frac{1}{2}u_{yy}, \quad u(0,y) = u_0(y), \quad y \in \mathbb{R},$$

и обратной задачи Коши

$$v_t + \frac{1}{2}v_{xx} = 0, \quad v(T,x) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

для уравнения теплопроводности можно представить в виде средних по траекториям случайных процессов $\tilde{w}(t) = \xi_0 + w(t)$ и $w_x(t) = x + w(t)$. Здесь $w(t)$ – стандартный винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, а ξ_0 – не зависящая от $w(t)$ случайная величина с плотностью распределения u_0. Соответствующие представления имеют вид

$$u(t,y) = E[u_0(y - \tilde{w}(t))] = \int\limits_R u_0(x)p(0,x,t,y)\,dx$$

и

$$v(s,x) = E[v_0(x + w(T)) - w(s)] = \int\limits_R v_0(y)p(s,x,T,y)\,dy,$$

где

$$p(s,x,t,y) = \frac{1}{\sqrt{2(t-s)}}\exp\biggl(-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}\biggr)$$

– плотность переходной вероятности процесса $\xi_{s,x}(t) = x + w(t) - w(s)$.

Конструируя более сложные случайные процессы, например, рассматривая решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), можно получать представления решения задачи Коши для широкого класса линейных и нелинейных параболических уравнений и систем второго порядка относительно функций, заданных на пространствах $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, $d \leqslant \infty$. Если $\xi(t)$ – удовлетворяющий некоторому СДУ случайный процесс, позволяющий построить решение соответствующей параболической задачи в виде среднего по траекториям этого процесса, то будем называть это СДУ *стохастической моделью* рассматриваемой задачи.

При построении стохастических моделей систем нелинейных параболических уравнений коэффициенты соответствующего СДУ зависят от решения этой системы, так что стохастическая модель требует, наряду с СДУ, наличия некоторого замыкающего соотношения, как правило, представляющего собой вероятностное представление решения исходной задачи.

Заметим, что вероятностный подход к построению решения задачи Коши для параболических уравнений и систем является естественным обобщением метода характеристик, позволяющего устанавливать связь между теорией обыкновенных дифференциальных уравнений и теорией гиперболических уравнений и систем первого порядка, как линейных, так и нелинейных.

Начало развитию вероятностного подхода к исследованию решения задачи Коши для нелинейных параболических уравнений с помощью СДУ было положено в работах Г. Маккина [2] и М.И. Фрейдлина [3], где показано, что решение задачи Коши для семилиинейных параболических уравнений, т.е. уравнений, коэффициенты которых зависят от искомого решения, допускает вероятностное представление в терминах решения соответствующего СДУ.

Вероятностный подход к исследованию решений систем семилинейных параболических уравнений был предложен в работах Ю.Л. Далецкого и автора [4, 5]. Развитие этого подхода позволило получить новые интегральные представления для различных классов решений задачи Коши как для семилинейных, так и для квазилинейных и полностью нелинейных параболических уравнений, а для систем, помимо этого, – дополнительную информацию о структуре системы и поведении её решений [6]. Ещё одно специфическое свойство вероятностного подхода – это слабая зависимость получаемых результатов от размерности фазового пространства, что позволяет рассматривать уравнения и системы в бесконечномерных пространствах [4]. Наряду с этим вероятностный подход даёт возможность рассматривать уравнения и системы с вырождающимися коэффициентами при членах старшего порядка и, в частности, исследовать поведение решения задачи Коши для параболических систем в пределе по исчезающей вязкости [7].

В этой работе будет показано, что вероятностная интерпретация классических и вязкостных решений обратной задачи Коши позволяет выделить несколько типов систем нелинейных параболических уравнений, указать естественные функциональные классы, в которых можно искать решения задачи Коши и исследовать их свойства.

Построим вероятностные представления классических и вязкостных решений обратной задачи Коши

$$\partial_s u^m + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} G_{ij}(x,u)\nabla^2_{x_i x_j} u^m + \sum_{i=1}^{d} a_i(x,u)\nabla_{x_i} u^m + \sum_{i=1}^{d}\sum_{q=1}^{d} B_i^{mq}(x,u)\nabla_{x_i} u_q + \sum_{q=1}^{d_1} c^{mq}(x,u)u^q = 0,$$

$$u_m(T,x) = u_{0m}(x), \quad m=\overline{1,d}, \quad 0 \leqslant s \leqslant T, \tag{1}$$

в предположении, что

$$G_{ij}(x,u) = \sum_{k=1}^{d} A_{ik}(x,u)A_{kj}(x,u).$$

Построение дифференциального продолжения квазилинейной системы вида (1) (т.е. системы, коэффициенты которой зависят как от u, так и от ∇u) позволит включить исходную систему в расширенную семилинейную систему относительно функций $V_m = (u_m, \nabla u_m)$

$$\partial_s V_m + F_m(x,V) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} G(x,u)\nabla^2 V_m = 0, \tag{2}$$

где

$$\operatorname{Tr} G\nabla^2 V_m = \sum_{i,j=1}^{d} G_{ij}\frac{\partial^2 V_m}{\partial x_i \partial x_j}$$

и $\nabla^2 V_m$ – матрица Гессе функции V_m, и, как следствие, построить вероятностные представления классических и вязкостных решений обратной задачи Коши для квазилинейной системы.

В теории уравнений в частных производных был получен ряд результатов о существовании и единственности вязкостных решений задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений второго порядка

$$\partial_t u^m + F_m(t,x,u,\nabla u^m,\nabla^2 u^m) = 0, \quad u_m(0,x) = u_{0m}(x), \tag{3}$$

называемых слабо связанными системами, т.е. систем с недиагональным вхождением только членов нулевого порядка (см. [8, 9]). Насколько нам известно, нет работ, в которых методами теории уравнений в частных производных изучалась бы задача Коши вида

$$\partial_t u^m + F_m(t,x,u,\nabla u,\nabla^2 u^m) = 0, \quad u_m(T,x) = u_{0m}(x).$$

Вероятностные модели вязкостных решений задачи Коши для систем (3) были построены Е. Парду и его соавторами [10–12]. В этих работах было показано, что если функция $F_m(t,x,u,p,q)$ имеет вид

$$F^m(t,x,u,\nabla u^m,\nabla^2 u^m) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A^m(x,u)\nabla^2 u^m [A^m]^{\mathrm{т}}(x,u) +$$
$$+ \langle a^m(x,u),\nabla u^m\rangle + (c(x,u)u)^m + f^m(t,x,u),$$

где G^m – положительно определённые $\mathbb{R}^d\bigotimes\mathbb{R}^d$-матрицы, а $\mathbb{R}^{d_1}\bigotimes\mathbb{R}^{d_1}$-матрицы $c(x,u)$ обладают свойствами Q-матрицы (т.е. $c^{mq}(x)\geqslant 0$ при $m\neq q$ и $\sum_{j=1}^{d_1} c_{ij}(x,u)=0$), то систему (3) можно рассматривать как обратное уравнение Колмогорова для диффузионного процесса с переключениями, задаваемыми марковской цепью. Здесь и ниже $\langle a,b\rangle = \sum_{k=1}^d a_k b_k$, $a,b\in\mathbb{R}^d$, и $\langle Aa,b\rangle = \langle a,A^{\mathrm{т}}b\rangle$.

Вероятностный подход к построению классических решений линейных систем такого вида был развит в работах [13, 14], а соответствующие результаты для нелинейных систем получены в статьях [15, 16].

Отметим, что вероятностная интерпретация решений $u^m(s,x)$ обратной задачи Коши (3) (как классических, так и вязкостных) позволяет рассматривать их как скалярные функции $u(s,x,m)$, заданные на пространстве $[0,T]\times\mathbb{R}^d\times M$, где $M=\{1,2,\ldots,d_1\}$, и формулировать вероятностную модель как диффузионный процесс $\xi(t)$ с переключениями, определяемыми марковской цепью $\nu(t)$ с генератором c, а систему (3) можно интерпретировать как (скалярное) обратное уравнение Колмогорова для двухкомпонентного марковского процесса $(\xi(t),\nu(t))$.

Как будет показано ниже, системы типа (1) и (2) также допускают вероятностную интерпретацию как системы обратных уравнений Колмогорова для двухкомпонентного случайного процесса $(\xi(t),\eta(t))$, где $\xi(t)\in\mathbb{R}^d$ – диффузионный процесс, а $\eta(t)\in\mathbb{R}^{d_1}$ – диффузионный процесс, порождающий мультипликативный операторный функционал от $\xi(t)$. Более того, вероятностное представление решения задачи Коши для систем такого типа, рассматриваемое в данной работе, позволяет свести решение исходной системы относительно функций $u_m(t,x)$, $x\in\mathbb{R}^d$, $t\in[0,T]$, к решению скалярного уравнения относительно функции $\Phi(t,x,h) = \langle h,u(t,x)\rangle$ в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d_1}$.

Отметим, что вероятностный подход, рассматриваемый в этой работе, применим также к построению решения прямой задачи Коши для систем вида

$$\partial_t u^m = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A(y,u)\nabla^2 u^m A^{\mathrm{т}}(y,u) + \langle a(y,u),\nabla u^m\rangle - \sum_{i=1}^d\sum_{q=1}^{d_1} B_i^{mq}(y,u)\nabla_{y_i}u^q + \sum_{k=1}^{d_1} c^{mq}(y,u)u^q,$$
$$u^m(0,y) = u_{0m}(y), \tag{4}$$

поскольку (4) можно свести к (1) с помощью простой замены

$$u^m(t,y) = v^m(T-t,y).$$

Однако задача Коши для системы нелинейных параболических уравнений вида

$$\partial_t u^m = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \nabla^2_{y_i y_j}\left[\left(\sum_{q=1}^{d_1} G^{mq}_{ij}(y,u)u^q\right)u^m\right] + \sum_{i=1}^{d} a^m_i(y,u)\nabla_{y_i}u^m -$$
$$-\sum_{i=1}^{d}\sum_{q=1}^{d_1} B^{mq}_i(y,u)\nabla_{y_i}u^q + \sum_{q=1}^{d_1} c^{mq}(y,u)u^q, \quad u^m(0,y) = u_{0m}(y), \tag{5}$$

такую интерпретацию не допускает. Это связано с тем, что с вероятностной точки зрения системы (5) естественно интерпретировать как системы прямых уравнений Колмогорова, что приводит к необходимости разрабатывать альтернативные подходы к выводу соответствующих моделей и их исследованию. Первые результаты о структуре вероятностных моделей для таких систем параболических уравнений можно найти в работах [17, 18] и в ряде других.

В общем случае вероятностный подход к изучению краевых задач для систем нелинейных параболических уравнений состоит из трёх этапов: на первом этапе нужно построить стохастическую модель рассматриваемой задачи; на втором – исследовать эту модель и доказать разрешимость соответствующей стохастической задачи; на третьем – проверить, что в результате решения стохастической задачи построено искомое решение исходной задачи.

В настоящей работе будут сформулированы стохастические модели классического и вязкостного решения задачи Коши для систем вида (1), (2) и исследованы эти модели. Как следствие, будут найдены вероятностные представления классических и вязкостных решений обратной задачи Коши для систем (1), (2). Полученные таким образом интегральные представления могут быть использованы для создания эффективных численных схем построения соответствующих решений. При этом стохастические уравнения, входящие в эту модель, можно использовать для оценки сходимости соответствующего численного метода. Ввиду ограниченности объёма остановимся на основных идеях доказательств, опуская детали и ссылаясь на работы, где приведены полные доказательства соответствующих фактов.

Далее статья организована следующим образом. В п. 1 рассмотрим стохастические модели, связанные с классическим решением обратной задачи Коши для семилинейных систем вида (1). Системы такого вида встречаются в задачах финансовой математики и теории игр, а также к ним можно свести решение систем вида (2) и (4). Наряду с этим такие системы возникают при изучении дифференциальных продолжений квазилинейных уравнений (т.е. уравнений с нелинейным вхождением градиента решения) и полностью нелинейных скалярных уравнений (т.е. уравнений с нелинейным вхождением старших производных). При этом рассмотрение дифференциального продолжения квазилинейного или полностью нелинейного параболического уравнения позволяет включить его в качестве компоненты в систему семилинейных параболических уравнений и свести решение задачи Коши для исходных уравнений и систем к решению задачи Коши для систем семилинейных уравнений с большим количеством уравнений. Стохастические модели для квазилинейных систем параболических уравнений, позволяющие получить вероятностные представления классических решений задачи Коши для таких систем, изучаются в п. 2. В п. 3 приведём стохастические модели для квазилинейных уравнений, которые позволяют получить вероятностные представления вязкостных решений задачи Коши.

1. Стохастические модели классического решения обратной задачи Коши для системы семилинейных параболических уравнений. С вероятностной точки зрения системы вида (1) можно интерпретировать как системы обратных уравнений Колмогорова для соответствующих случайных процессов. Для того чтобы описать эти процессы, введём в рассмотрение вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, т.е. измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ с мерой P, $P(\Omega) = 1$, и заданный на нем стандартный винеровский процесс $w(t) \in \mathbb{R}^d$. Для случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ и ограниченной борелевской функции $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ обозначим

$$Ef(\xi) = \int_{\Omega} f(\xi(\omega))P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\mu(dy),$$

где $\mu(dy) = P\{\xi \in dy\}$.

Пусть $C_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d_1})$ – пространство измеримых ограниченных функций на $\mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{R}^{d_1}$; $C^{1,k}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ – пространство функций, дифференцируемых по $t\in[0,T]$ и k раз дифференцируемых по $x\in\mathbb{R}^d$.

Пусть $\phi\in C_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d_1})$, Θ – множество функций вида $\Phi(z)=\langle h,\phi(x)\rangle$, заданных на пространстве $Z=\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d_1}$, $\gamma=(x,h)\in Z$, с нормой

$$\|\Phi\|_\Theta=\sup_{\|h\|=1}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\langle h,\phi(x)\rangle|,$$

и $\mathcal{L}$ – его подмножество, состоящее из функций, удовлетворяющих условию Липшица по x. Нетрудно проверить, что имеет место равенство

$$\|\Phi\|_\Theta=\|\phi\|_{\Theta_1}.$$

Фундаментальную роль в стохастическом анализе играет формула Ито, позволяющая вычислить стохастический дифференциал $d\eta(t)$ процесса $\eta(t)=f(\xi(t))$ по заданному стохастическому дифференциалу $d\xi(t)$.

Формула Ито. Пусть $a(x)\in\mathbb{R}^d$, $A(x)\in\mathbb{R}^d\bigotimes\mathbb{R}^d$, $x\in\mathbb{R}^d$, $f\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ и

$$d\xi(t)=a(\xi(t))\,dt+A(\xi(t))\,dw(t).$$

Тогда

$$d\eta(t)=[\partial_t f(\xi(t))+Lf(\xi(t))]\,dt+\langle\nabla f(\xi(t)),A(\xi(t))\,dw(t)\rangle.$$

Здесь

$$Lf(x)=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}A(x)\nabla^2 f(x)A^{\text{т}}(x)+\langle a(x),\nabla f(x)\rangle,\quad \langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^d x_ky_k,\quad x,y\in\mathbb{R}^d.$$

Символом “т” будем обозначать операцию транспонирования.

Пусть $a(x,u)\in\mathbb{R}^d$, $A(x,u)\in\mathbb{R}^d\bigotimes\mathbb{R}^d$, а $c(x,u)$ и $C(x,u)y$ – линейные отображения в пространстве $\mathbb{R}^{d_1}$, $x,y\in\mathbb{R}^d$, $u\in\mathbb{R}^{d_1}$.

Стохастической моделью классического решения задачи Коши (1) назовём систему стохастических соотношений

$$d\xi(t)=a(\xi(t),u(t,\xi(t)))\,dt+A(\xi(t),u(t,\xi(t)))\,dw(t),\quad \xi(s)=x\in\mathbb{R}^d, \tag{6}$$

$$d\eta(t)=c(\xi(t),u(t,\xi(t)))\eta(t)\,dt+C(\xi(t),u(t,\xi(t)))(\eta(t),dw(t)),\quad \eta(s)=h\in\mathbb{R}^{d_1}, \tag{7}$$

$$\langle h,u(s,x)\rangle=E\langle\eta_{s,h}(T),u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle,\quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T. \tag{8}$$

Здесь $\xi_{s,x}(t)$, $\eta_{s,h}(t)$ – случайные процессы, удовлетворяющие (6) и (7) соответственно,

$$a:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d_1}\to\mathbb{R}^d,\quad A:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d_1}\to\mathbb{R}^d\bigotimes\mathbb{R}^d,$$

$$c:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d_1}\to\mathbb{R}^{d_1}\bigotimes\mathbb{R}^{d_1},\quad C:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d_1}\to\mathbb{R}^d\bigotimes\mathbb{R}^{d_1}\bigotimes\mathbb{R}^{d_1}$$

и $\langle h,u\rangle=\sum_{m=1}^{d_1}h_mu_m$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^{d_1}$.

Далее нам понадобится ряд условий.

Условие С1. Существует константа ρ_0 и положительные константы L, $K_{u,v}$, K, для которых выполнены оценки

$$\|a(x,u)-a(y,v)\|^2+\|A(x,u)-A(y,v)\|^2\leqslant L[\|x-y\|^2+K_{u,v}\|u-v\|^2],$$

$$\|a(x,u)\|^2+\|A(x,u)\|^2\leqslant K[1+\|x\|^2+\|u\|^{2p}],$$

$$\|c(x,u)-c(y,v)\|^2+\|C(x,u)-C(y,v)\|^2\leqslant L[\|x-y\|^3+K_{u,v}\|u-v\|^2],$$

$$\langle c(x,u)h,v\rangle \leqslant [\rho_0+\rho\|u\|]\|h\|, \quad \|C(x,u)z\|^2 \leqslant \rho[1+\|u\|^2]\|z\|^2, \quad z\in\mathbb{R}^d,$$
$$\sup_x \|u_0(x)\|^2 \leqslant K_0, \quad \sup_x \|\nabla u_0(x)\| \leqslant L_0.$$

Условие С2. Пусть выполнено условие С1 и коэффициенты системы (6)–(8) имеют ограниченные непрерывные производные по обоим аргументам до порядка k.

Введём обозначения

$$L^v f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A(x,v)\nabla^2 f A^{\mathrm{T}}(x,v) + a(x,v)\cdot\nabla f(x), \quad M^v f(x) = B(x,v)\nabla f(x) + c(x,v)f(x). \tag{9}$$

Покажем, что задание стохастической модели (6)–(8) позволяет свести классическое решение задачи Коши для системы (1) к решению интегрального уравнения

$$u(s,x) = E[S^{\mathrm{T}}(s,T)u_0(\xi_{s,x}(T))],$$

вытекающего из (8). Здесь $\langle S(t,s)h,u\rangle = \langle h, S^{\mathrm{T}}(t,s)u(t)\rangle$ и $S(t,s)h=\eta(t)$. Установим разрешимость этой модели.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие С2 при* $k=1$. *Тогда существует отрезок* $[T_2,T]$, *длина* $\delta=|T-T_2|$ *которого зависит от констант в оценках условия С2, такой, что для всех* $s,t\in[T_2,T]$ *существует единственное решение* $(\xi(t),\eta(t),u(s,x))$ *системы (6)–(8). При этом процесс* $\xi(t)\in\mathbb{R}^d$ *обладает марковским свойством, а функция* $u(s,x)\in\mathbb{R}^{d_1}$ *ограничена при* $s\in[T_2,T]$ *и удовлетворяет условию Липшица.*

Доказательство теоремы 1 разобьем на несколько утверждений.

Рассмотрим линеаризованную задачу, которая позволит получить необходимые априорные оценки. Пусть $v(s,x)$ – заданная ограниченная функция на множестве $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, удовлетворяющая оценкам

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\|v(s,x)\| \leqslant K_v(s) \quad \text{и} \quad \|v(s,x)-v(s,y)\| \leqslant L_v(s)\|x-y\|.$$

Рассмотрим стохастическую систему

$$d\xi(t) = a(\xi(t),v(t,\xi(t)))\,dt + A(\xi(t),v(t,\xi(t)))\,dw(t), \quad \xi(s)=x\in\mathbb{R}^d,$$

$$d\eta(t) = c(\xi(t),v(t,\xi(t)))\eta(t)\,dt + C(\xi(t),v(t,\xi(t)))(\eta(t),dw(t)), \quad \eta(s)=h\in\mathbb{R}^{d_1},$$

и пусть функция $g(s,x)$ задана соотношением

$$\langle h, g(s,x)\rangle = E\langle \eta_{s,h}(T), u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle, \quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T. \tag{10}$$

Используя стандартные оценки и формулу Ито, покажем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие С1,* $u_0\in\Theta_1$, $v\in\mathcal{L}$. *Тогда существует такой отрезок* Δ_1, *что функция* $g(s,x)$, *заданная соотношением (10), удовлетворяет оценке*

$$\sup_x \|g(s,x)\| \leqslant \gamma(s),$$

если $v(s,x)$ *удовлетворяет оценке*

$$\sup_x \|v(s,x)\| \leqslant \gamma(s),$$

где $\gamma(s)<\infty$ *для всех* $s\in\Delta_1$.

Доказательство. Пусть $\gamma(s)$ – положительная функция и

$$K_v(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\|v(s,x)\| \leqslant \gamma(s)$$

для всех $s \in [0,T]$. Покажем, что существует такой отрезок $\Delta_1 = [T_1, T]$, где $T_1 < T$, что $K_g(s) \leqslant \gamma(s)$ для всех $s \in \Delta_1$.

Используя оценки стохастических интегралов и оценки из условия C1, нетрудно проверить, что выполняется неравенство

$$\|g(s)\|^2_{\Theta_1} \leqslant K_{u_0} \exp\left[\int\limits_s^T [2\rho_0 + 3\rho K_v(\tau)]\,d\tau\right],$$

где $K_{u_0} = \sup\limits_x \|u_0(x)\|^2$, и функция $\gamma(s)$, заданная соотношением

$$\gamma(s) = \frac{2\rho_0 K_{u_0} e^{2\rho_0(T-s)}}{2\rho_0 + 3\rho K_{u_0} - 3\rho K_{u_0} e^{2\rho_0(T-s)}}, \tag{11}$$

обладает требуемыми свойствами, а именно, если $K_v(\tau) \leqslant \gamma(\tau)$, то $K_g(\tau) \leqslant \gamma(\tau)$ для любого $\tau \in \Delta_1$.

Из соотношения (11) следует, что функция $\gamma(\tau)$ ограничена на всём отрезке $[0,T]$, если $2\rho_0 + 3\rho K_{u_0} < 0$. В противном случае функция $\gamma(\tau)$ ограничена на отрезке $\Delta_1 = [T_1, T]$, длина которого подчиняется оценке

$$|T_1 - T| < \frac{1}{2\rho_0} \ln\left[1 + \frac{2\rho_0}{3\rho K_{u_0}}\right]. \tag{12}$$

Если условие C2 выполнено при $k = 1$, то аналогичную оценку можно получить и для функции Липшица $L_g(s)$ в неравенстве

$$\|g(s,x) - g(s,y)\| \leqslant L_g(s)\|x - y\|$$

для $s \in [T_2, T]$, где $T_2 \geqslant T_1$. Точнее, можно показать, что если функция $v(s,x)$ подчиняется условию Липшица

$$\|v(s,x) - v(s,y)\| \leqslant \beta(s)\|x - y\|,$$

то справедлива оценка $L_g(s) \leqslant \beta(s)$. Для этого достаточно доказать, что существует отрезок $[T_2, T]$ и ограниченная на нем функция $\phi(s) > 0$ такие, что для всех $s \in [T_2, T]$ выполняется неравенство $\|\nabla g(s,x)\|^2 \leqslant \phi(x)$, если $\|\nabla v(s,x)\|^2 \leqslant \phi(s)$. Необходимый результат можно получить, применив описанные выше рассуждения к стохастической системе, содержащей (6)–(8) и соотношения

$$d\alpha(t) = m(\xi(t), V(t,\xi(t)))\alpha(t)\,dt + M(\xi(t), V(t,\xi(t)))(\alpha(t), dw(t)), \quad \alpha(s) = I,$$

$$d\zeta(t) = c(\xi(t), v(\xi(t)))\zeta(t)\,dt + C(\xi(t), v(\xi(t)))(\zeta(t), dw(t)) + n(\zeta(t), \alpha(t), V(t,\xi(t)))\,dt +$$
$$+ N(\xi(t), v(t,\xi(t)))(\eta(t), dw(t)), \quad \eta(s) = h \in \mathbb{R}^{d_1},$$
$$\langle h, \nabla g(s,x)\rangle = E\langle \eta_{s,h}(T), \nabla u_0(\xi_{s,x}(T))\alpha(T)\rangle + \langle \zeta_{s,h}(T), u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,$$

где I-единичная матрица, $V(t,x) = (v(t,x), \nabla v(t,x))$. Здесь

$$m(\xi(t), V(t,\xi(t))) = \nabla_x a(\xi(t), v(t,\xi(t))) + \nabla_v a(\xi(t), v(t,\xi(t)))\nabla_x v(t,\xi(t)),$$

$$n(\xi(t), V(t,\xi(t))) = \nabla_x c(\xi(t), v(t,\xi(t))) + \nabla_v c(\xi(t), v(t,\xi(t)))\nabla_x v(t,\xi(t)),$$

и аналогичные соотношения связывают M с A и N с C.

Применяя лемму 2 к системе последовательных приближений

$$\langle h, u^n(s,x)\rangle = E\langle \eta^{n-1}_{s,h}(T), u_0(\xi^{n-1}_{s,x}(T))\rangle, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,$$

где $\xi^n_{s,x}(t)$ и $\eta^n_{s,h}(t)$ – последовательные приближения к решениям СДУ (6) и (7), можно доказать для некоторых положительных T_1 сходимость последовательности u_n в пространстве $C([T_1,T];C_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d_1}))$. Если выполнено условие C2 при $k=2+\epsilon$, $\epsilon\in(0,1)$, то можно проверить, что последовательность ∇u_n сходится к пределу ∇u на некотором отрезке $[T_2,T]$ и последовательность $\nabla^2 u_n$ сходится к пределу $\nabla^2 u$ на отрезке $[T_3,T]$, $[T_3,T]\subset[T_2,T]\subset$ $\subset[T_1,T]$. Отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие C2 при* $k=3$. *Тогда существует отрезок* $[T_3,T]$, *длина* $\delta_3=|T-T_3|$ *которого зависит от констант в оценках условия C2, такой, что для всех* $s\in[T_2,T]$ *существует единственное решение* $(\xi(t),\eta(t),u(s,x))$ *системы (6)–(8). При этом функция* $u(s,x)$ *вида (8) ограничена и дважды дифференцируема.*

В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *В условиях теоремы 3 для всех* $s\in[T_3,T]$ *существует единственное классическое решение системы (1). Существуют константы в условии C2, при которых существует единственное классическое глобальное решение систем (1) на всём отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Пусть $u\in C^{1,2}([T_3,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d_1})$. Применяя формулу Ито, можно проверить, что функция $u(s,x)$ вида (8) удовлетворяет задаче Коши (1). Действительно, вычислив стохастический дифференциал случайного процесса $\gamma(t)=S^{\mathrm{т}}(t,s)u(t,\xi_{s,x}(t))$, получим

$$d\gamma(t)=dS^{\mathrm{т}}(t,s)u(t,\xi_{s,x}(t))+S^{\mathrm{т}}(t,s)\,du(t,\xi_{s,x}(t))+dS^{\mathrm{т}}(t,s)\,du(t,\xi_{s,x}(t)).$$

Опуская для упрощения аргументы у коэффициентов и функции u и применяя ещё раз формулу Ито, получаем равенство

$$d\gamma(t)=S^{\mathrm{т}}(t,s)\biggl[\partial_t u+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}A\nabla^2 uA^{\mathrm{т}}+\langle a,\nabla u\rangle+\langle C^{\mathrm{т}},A^{\mathrm{т}}\nabla u\rangle+c^{\mathrm{т}}u\biggr]\,dt+$$
$$+\,S^{\mathrm{т}}(t,s)\langle[C^{\mathrm{т}}u+A^{\mathrm{т}}\nabla u],dw(t)\rangle.$$

Проинтегрировав по t от $s\in[T_3,T]$ до T и вычислив математическое ожидание, имеем

$$E[S^{\mathrm{т}}(T,s)u_0(\xi_{s,x}(T))]-u(s,x)=$$
$$=E\biggl[\int\limits_s^T S^{\mathrm{т}}(\tau,s)[\partial_\tau u(s,\xi_{s,x}(\tau))+L^u u(s,\xi_{s,x}(\tau))+M^u u(s,\xi_{s,x}(\tau))]\,d\tau\biggr].$$

Как следует из (8), левая часть последнего равенства равна нулю. Таким образом, поскольку при любых s и x

$$E\biggl[\int\limits_s^T S^{\mathrm{т}}(\tau,s)[\partial_\tau u(s,\xi_{s,x}(\tau))+L^u u(s,\xi_{s,x}(\tau))+M^u u(s,\xi_{s,x}(\tau))]\,d\tau\biggr]=0,$$

то отсюда вытекает, что функция $u(s,x)=E[S^{\mathrm{т}}(t,s)u_0(\xi_{s,x}(T))]$ является классическим решением задачи (1). Заметим, что при применении формулы Ито мы предположили, что $u(s,x)$ дифференцируема по $s\in[T_3,T]$. Доказательство этого факта аналогично проведённому доказательству и основано на непосредственной проверке существования предела

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{u(s+\Delta s,x)-u(s,x)}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}E[S^{\mathrm{т}}(s+\Delta s,T)u_0(\xi_{s+\Delta s,x}(T))-S^{\mathrm{т}}(s,T)u_0(\xi_{s,x}(T))]=$$
$$=E[(S^{\mathrm{т}}(s+\Delta s,T)-S^{\mathrm{т}}(s,T))u(T,\xi_{s+\Delta s,x}(T))+S^{\mathrm{т}}(s,T)(u_0(\xi_{s+\Delta s,x}(T))-u_0(\xi_{s,x}(T)))].\quad(13)$$

При этом для вычисления правой части (13) используются соотношения

$$S^{\mathrm{т}}(s+\Delta s,T)-S^{\mathrm{т}}(s,T)=S^{\mathrm{т}}(s+\Delta s,T)[I-S^{\mathrm{т}}(s,s+\Delta s)]=$$

$$= \int\limits_s^{s+\Delta s} S^{\text{т}}(T,\tau)c^{\text{т}}(\xi(\tau),u(\tau,\xi(\tau)))\,d\tau + \int\limits_s^{s+\Delta s} S^{\text{т}}(T,\tau)C^{\text{т}}(\xi(\tau),u(\tau,\xi(\tau)))\,dw(\tau)$$

и

$$u(T,\xi_{s,x}(T)) = u(T,\xi_{s+\Delta s,x}(T)) + \int\limits_s^{s+\Delta s} L^u u(\tau,\xi(\tau))\,d\tau + \int\limits_s^{s+\Delta s} \nabla u(\tau,\xi(\tau))A(\xi(\tau),u(\tau,\xi(\tau)))\,dw(\tau).$$

Далее, вычисляя математическое ожидание и переходя к пределу, получим равенство $\partial_s u = -L^u u - M^u u,$ и поскольку $u(s) \in C^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d_1})$ в силу теоремы 2, то существование $\partial_s u$ также гарантировано.

Анализ задачи Коши для системы (4) показывает, что с помощью простого преобразования $v(T-t,x) = u(t,x)$ её можно свести к задаче Коши вида

$$\partial_t v_m + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d G_{ij}(v)\nabla^2_{y_iy_j}v_m + \sum_{i=1}^d a_i^m(y,v)\nabla_{y_i}v_m + \sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^{d_1} C_i^{mk}(y,v)\nabla_{y_i}v_k + \sum_{k=1}^{d_1} c_{mk}(y,v)v_k = 0,$$

$$v(T,x) = u_0(x)$$

и затем рассмотреть стохастическую модель

$$d\xi(s) = a(\xi(s),v(T-s,\xi(s)))ds + A(\xi(s),v(T-s,\xi(s)))\,dw(s), \quad \xi(t) = x\in\mathbb{R}^d, \tag{14}$$

$$d\eta(s) = c(\xi(s),v(T-s,\xi(s)))\eta(s)ds + C(\xi(s),v(T-s,\xi(s)))(\eta(s),dw(s)), \quad \eta(t) = h\in\mathbb{R}^{d_1}, \tag{15}$$

$$\langle h, v(T-t,x)\rangle = E\langle\eta_{t,h}(T), u_0(\xi_{t,x}(T))\rangle, \quad 0\leqslant t\leqslant s\leqslant T.$$

Как следствие, можно применить теоремы 1–3 и проверить, что при выполнении условий C2 при $k=3$ функция $u(t,x) = v(T-t,x)$ является классическим решением задачи Коши для (1).

Теорема 4. *Вероятностное представление классического решения задачи Коши для неоднородной параболической системы*

$$\partial_s g^m + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d G_{ij}(y,g)\nabla^2_{y_iy_j}g^m + \sum_{i=1}^d a_i(y,g)\nabla_{y_i}g^m + \sum_{i=1}^d\sum_{q=1}^{d_1} B_i^{mq}(y,g)\nabla_{y_i}g^q +$$

$$+\sum_{q=1}^{d_1} c^{mq}(y,g)g^q = f^m(x,g), \quad g(0,x) = g_0(x) \tag{16}$$

имеет вид

$$\langle h, g(s,x)\rangle = E\biggl[\langle\eta_{s,h}(T), g_0(\xi_{s,x}(T))\rangle + \int\limits_0^T \langle\eta_{s,h}(\tau), f(\xi(\tau),g(\tau,\xi(\tau)))\rangle\,d\tau\biggr], \tag{17}$$

где функции $\xi(t)$ *и* $\eta(t)$ *подчиняются СДУ*

$$d\xi(t) = a(\xi(t),g(t,\xi(t)))\,dt + A(\xi(t),g(t,\xi(t)))\,dw(t), \quad \xi(s) = x\in\mathbb{R}^d,$$

$$d\eta(t) = c(\xi(t),g(t,\xi(t)))\eta(t)\,dt + C(\xi(t),g(t,\xi(t)))(\eta(t),dw(t)), \quad \eta(s) = h\in\mathbb{R}^{d_1}.$$

Доказательство. Пусть $g(t,x)$ – решение задачи Коши (16). Рассмотрим случайный процесс $\gamma(t) = \langle\eta(t), g(t,\xi(t))\rangle,$ применив к которому формулу Ито, получим равенство

$$d\gamma(t) = \langle d\eta(t), g(t,\xi(t))\rangle + \langle\eta(t), dg(t,\xi(t))\rangle + \langle d\eta(t), dg(t,\xi(t))\rangle.$$

Повторно применив формулу Ито и воспользовавшись соотношениями (14) и (15), получим

$$d\gamma(t) = \Big\langle \eta(t), \Big[\partial_t g + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A(\xi(t), g(t,\xi(t)))\nabla^2 g(t,\xi(t))A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\xi(t), g(t,\xi(t))) + a(\xi(t), g(t,\xi(t))) +$$

$$+ C^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\xi(t), g(t,\xi(t)))\nabla g(t,\xi(t))A(\xi(t), g(t,\xi(t))) + c^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\xi(t), g(t,\xi(t)))g(t,\xi(t))\Big]\Big\rangle\, dt +$$

$$+ \langle \eta(t), \langle [C^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\xi(t), g(t,\xi(t)))g(t,\xi(t)) + c^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\xi(t), g(t,\xi(t)))\nabla g(t,\xi(t))A(\xi(t), g(t,\xi(t)))], dw(t)\rangle\rangle. \quad (18)$$

Проинтегрируем (18) по t от s до T, вычислим математическое ожидание и, принимая во внимание, что $u(T,\xi(T)) = g_0(\xi(T))$, $g(s,\xi(s)) = g(s,x)$, получим

$$E\langle \eta(T), g_0(\xi(T))\rangle - \langle h, g(s,x)\rangle = \int\limits_s^T E\langle \eta(t), \partial_t g + \langle a(\xi(t), g(t,\xi(t))), \nabla g\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A(\xi(t), g(t,\xi(t)))\nabla^2 g(t,\xi(t))A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\xi(t), g(t,\xi(t))) + c^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\xi(t), g(t,\xi(t)))g(t,\xi(t)) +$$

$$+ C^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\xi(t), g(t,\xi(t)))\nabla g(t,\xi(t))A(\xi(t), g(t,\xi(t)))\rangle\, dt.$$

Замечание 1. Пусть $u(s,x)$ – классическое решение задачи Коши (1). Соотношение (8) позволяет заметить, что задача Коши (1) эквивалентна задаче Коши для скалярного уравнения

$$\partial_s \Phi + \langle q(\gamma,u), \nabla\Phi\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} Q(\gamma,u)\nabla^2\Phi Q^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\gamma,u) = 0, \quad \Phi(T,\gamma) = \Phi_0(\gamma) = \langle h, u_0(x)\rangle \qquad (19)$$

относительно функции $\Phi(s,\gamma)$, $\gamma = (x,h) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d_1}$. Здесь

$$q(\gamma) = \begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & c(x)h \end{pmatrix}, \quad Q(\gamma) = \begin{pmatrix} A(x) & 0 \\ 0 & C(x)h \end{pmatrix}. \qquad (20)$$

Обозначив $W(t) = \begin{pmatrix} w(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, запишем систему (6)–(8) в виде

$$d\gamma(t) = q(\gamma(t))\, dt + Q(\gamma(t))\, dW(t), \quad \gamma(s) = \gamma,$$

$$\Phi(s,\gamma) = E[\Phi_0(\gamma_{s,\gamma}(T))] = E[\langle \eta_{s,h}(T), u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle]. \qquad (21)$$

Используя формулу Ито, можно проверить, что функция $\Phi(s,\gamma)$ вида (21) является единственным классическим решением задачи (19).

Эта эквивалентность, в частности, играет важную роль при построении вязкостных решений задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений.

2. Стохастические модели классического решения обратной задачи Коши для систем квазилинейных и полностью нелинейных параболических уравнений. Будем считать, что система параболических уравнений *квазилинейна* или *полностью нелинейна*, если коэффициенты этой системы нелинейно зависят от градиента или от гессиана (матрицы Гессе) её решения соответственно.

Рассмотрим задачу Коши для системы квазилинейных уравнений

$$\partial_s u^m + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A(x,u)\nabla^2 u^m A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(x,u) + \langle a(x,u,\nabla u), \nabla u^m\rangle + \sum_{q=1}^{d_1}\langle B^{mq}(x,u,\nabla u), \nabla u^q\rangle +$$

$$+ \sum_{q=1}^{d_1} c^{mq}(x,u,\nabla u)u^q = 0, \quad u^m(T,x) = u_{0m}(x). \qquad (22)$$

После дифференцирования (22) и введения новой переменной $v = \nabla u$ получим систему семилинейных параболических уравнений относительно вектор-функции

$$V(s,x) = (u(s,x), \nabla u(s,x) = v(s,x)) = (V_1(s,x)\ldots, V_M(s,x)),$$

где $M = d_1(1+d)$, обладающую той же структурой, что и системы, рассмотренные в п. 1.

Лемма 2. *Дифференциальное продолжение системы (22), т.е. система уравнений для функции $V(s,x){=}(u(s,x),\nabla u(s,x))$, является семилинейной системой с диагональным вхождением старших производных.*

Доказательство. Вычислениями проверяется, что вектор функция $V(s,x) = (u(s,x), \nabla u(s,x))$ удовлетворяет системе семилинейных уравнений, состоящей из (22) и уравнений для $v_m(s,x) = \nabla u_m(s,x)$:

$$\partial_s v^m + L^u v^m + M^u v^m + \sum_{q=1}^{d_1}\langle\theta^{mq}(x,V),\nabla v^q\rangle + \sum_{q=1}^{d_1}\langle\beta^{mq}(x,V), v^q\rangle + \sum_{q=1}^{d_1}\nabla_x c^{mq}(x,V)u^q = 0, \quad (23)$$

где

$$\theta = \nabla_x G + \nabla_u G v + \nabla_v a v + \nabla_v c u + \nabla_v B v + B, \quad \beta = \nabla_x a + \nabla_u a v + \nabla_u c u + c + \nabla_x B + \nabla_u B v,$$

а L^u и M^u имеют вид (9).

Рассмотрим стохастическую модель, соответствующую новой системе (22), (23), и покажем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Стохастическая модель, соответствующая системе (22), (23), имеет структуру, аналогичную структуре стохастической модели исходной системы (22).*

Доказательство. Рассмотрим систему СДУ

$$d\xi(t) = a(\xi(t), V(t,\xi(t)))ds + A(\xi(t), u(t,\xi(t)))\,dw(t), \quad \xi(s) = x\in\mathbb{R}^d, \quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T, \quad (24)$$

$$d\eta(t) = c(\xi(t), V(t,\xi(t)))\eta(t)\,dt + C(\xi(t), V(t,\xi(t)))(\eta(t), dw(t)), \quad \eta(s) = h\in\mathbb{R}^{d_1}, \quad (25)$$

$$\langle h, u(s,x)\rangle = E\langle\eta_{s,h}(T), u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle \quad (26)$$

и систему СДУ для процессов $\alpha_{ij}(t) = \nabla_i\xi_j(t)$ и $\beta_{im}(t) = \nabla_i\eta_m(t)$

$$d\alpha_{ij}(\theta) = [\nabla_{u_q}a_i(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))v_{jq}(\theta,\xi(\theta))\alpha_{km}(\theta) + \nabla_{v_{ql}}a_i(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))\nabla_m v_{ql}(\theta,\xi(\theta))\times$$
$$\times\alpha_{mj}(\theta)]\,d\theta + \nabla_{u_q}A_{ik}(\xi(\theta), u(\theta,\xi(\theta)))v_{kq}(\theta,\xi(\theta))\alpha_{km}(\theta)\,dw_n(\theta), \quad (27)$$

$$d\beta_{im}(\theta) = [\nabla_{u_q}c_{mk}(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))v_{qr}(\theta,\xi(\theta))\alpha_{ri}(\theta)\eta_k(\theta) + c_{mk}(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))\beta_{ik}(\theta)]\,d\theta +$$
$$+ [\nabla_{u_q}C^j_{mk}(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))v_{jq}(\theta,\xi(\theta))\alpha_{ji}(\theta)\eta_k(\theta) + C^j_{mk}(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))\beta_{ki}(\theta)]\,dw_j(\theta). \quad (28)$$

В соотношениях (27), (28) используем соглашение о суммировании по повторяющимся аргументам, чтобы упростить громоздкие обозначения. Дополним систему (24)–(27) соотношением

$$\langle h, \nabla u(s,x)\rangle = E\langle\nabla\eta_{s,h}(T), u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle + \langle\eta_{s,h}(T), \nabla u_0(\xi_{s,x}(T))\alpha(T)\rangle.$$

Пусть $Y = \mathbb{R}^d\bigoplus(\mathbb{R}^d\bigotimes\mathbb{R}^d)\bigotimes\mathbb{R}^{d_1}$ и $G\bigoplus\Gamma = G\bigotimes I + I\bigotimes\Gamma$ – тензорная сумма операторов, действующих в пространстве Y по правилу

$$G\bigoplus\Gamma(x,y) = Gx\bigotimes y + x\bigotimes\Gamma y.$$

Используя эти обозначения, будем рассматривать уравнения (25), (27), (28) как уравнения для процессов $\beta_1(\theta) = \nabla\eta^k(\theta)$, $\beta_2(\theta) = \alpha(\theta)\bigotimes\eta(\theta)$, имеющие вид

$$d\beta_1(\theta) = c(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))\beta_1(\theta)\,d\theta + C(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))\beta_1(\theta)\,dw(\theta) +$$

$$+\nabla c(\xi(\theta),V(\theta,\xi(\theta)))\diamond\beta_2(\theta)\,d\theta+\nabla C(\xi(\theta),V(\theta,\xi(\theta)))\diamond\beta_2(\theta)\,dw(\theta),$$
$$d\beta_2(\theta)=[\nabla a(\xi(\theta),V(\theta,\xi(\theta)))\bigoplus c(\xi(\theta),V(\theta,\xi(\theta)))]\beta_2(\theta)\,d\theta+$$
$$+[\nabla A(\xi(\theta),u(\theta,\xi(\theta)))\bigoplus C(\xi(\theta),V(\theta,\xi(\theta)))]\beta_2(\theta)\,dw(\theta),$$
$$\beta_1(s)=0,\quad \beta_2(s)=y\bigotimes h.$$

Здесь $\nabla c\diamond(\alpha\bigotimes h)=c(\alpha,h)$, $\nabla C\diamond(\alpha\bigotimes h)=\nabla C(\alpha,h)$. Запишем уравнение для процесса $\beta(\theta)=(\beta_1(\theta),\beta_2(\theta))$ в виде

$$d\beta(\theta)=b(\xi(\theta),V(\theta,\xi(\theta)))\beta(\theta)\,d\theta+B(\xi(\theta,V(\theta,\xi(\theta)))\beta(\theta)dW(\theta),$$

где

$$W(t)=\begin{pmatrix}w(t)\\ w(t)\end{pmatrix},\quad \beta(\theta)=\begin{pmatrix}\zeta(\theta)\\ \alpha(\theta)\bigotimes\eta(\theta)\end{pmatrix},$$

а линейные отображения $b(u)$, $B(u)$ действуют по правилу

$$b(u)\begin{pmatrix}\beta_1\\ y\bigotimes\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\beta_1+\nabla c(y,\eta)\\ 0\cdot y\bigotimes\eta+y\bigotimes c\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & \nabla c\\ 0 & \nabla a\bigoplus c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ y\bigotimes\eta\end{pmatrix},$$

$$B(u)\begin{pmatrix}\beta_1\\ y\bigotimes\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C\beta_1+\nabla C(y,h)\\ \nabla Ay\bigotimes\eta+y\bigotimes Ch\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C & \nabla C\\ 0 & \nabla Ay\bigoplus C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ y\bigotimes\eta\end{pmatrix}.$$

В результате систему (25), (26), (28) можно представить в виде линейного СДУ

$$d\beta(\theta)=b(\xi(\theta),V(\theta,\xi(\theta)))\beta(\theta)\,d\theta+B(\xi(\theta),V(\theta,\xi(\theta)))\beta(\theta)dW(\theta)\qquad(29)$$

с соответствующими начальными условиями. Пусть

$$G_0(x)=G(0,x)=\begin{pmatrix}u_0(x)\\ v_0(x)\end{pmatrix},$$

где $v_0=\nabla u_0$ – дифференцируемая ограниченная функция. Рассмотрим функцию

$$G(s,x)=\begin{pmatrix}u(s,x)\\ v(s,x)\end{pmatrix}=E\left[\begin{pmatrix}\eta(T) & 0\\ \beta_1(T) & \beta_2(T)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0(\xi_{s,x}(T))\\ v_0(\xi_{s,x}(T))\end{pmatrix}\right]=$$
$$=\begin{pmatrix}E[\eta(T)u_0(\xi_{s,x}(T))]\\ E[\beta_1(T)u_0(\xi_{s,x}(T))+\beta_2(T)v_0(\xi_{s,x}(T))]\end{pmatrix}\qquad(30)$$

и заметим, что система (24), (29) и (30) имеет ту же структуру, что и система (24)–(26).

Система стохастических соотношений (24), (29), (30) является стохастической моделью для системы (22), (23) параболических уравнений, полученной из исходной системы с помощью процедуры дифференциального продолжения. Таким образом, если коэффициенты b и B удовлетворяют условиям С1 и С2, то утверждения теорем 3 и 4 справедливы и в новом контексте.

Отметим, что описанный выше подход работает и при построении вероятностного представления решения задачи Коши для полностью нелинейного уравнения, однако при этом возникает необходимость рассматривать дифференциальное продолжение исходной системы до третьего порядка.

3. Вероятностные модели вязкостных решений обратной задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений. Далее опишем альтернативный вероятностный подход, который позволяет естественным образом построить вероятностные представления для вязкостных решений задачи Коши (1). Предлагаемый подход базируется на результатах теории обратных стохастических дифференциальных уравнений, основы которой были заложены в работах [10–12]. Среди многих результатов этой теории существенную роль играет возможность построения вероятностных представлений вязкостных решений задачи Коши для скалярных квазилинейных параболических уравнений. В этой работе будут обобщены соответствующие результаты на системы вида (1).

Для упрощения рассмотрим систему

$$u_s^m + \langle a(x), \nabla u^m\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A(x)\nabla^2 u^m A^{\mathrm{т}}(x) + \sum_{q=1}^{d_1}\langle B^{mq}(x), \nabla u^q\rangle + \sum_{q=1}^{d_1} c^{mq}(x)u^q =$$

$$= \tilde{f}^m(x, u, A^{\mathrm{т}}(x)\nabla u + B(x)u), \quad u^m(T,x) = u_{0m}(x), \quad m = \overline{1,d}. \tag{31}$$

Пусть, как и выше, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – заданное вероятностное пространство и $\mathcal{F}_t$ – семейство σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$, порождённых винеровским процессом $w(t) \in \mathbb{R}^d$.

Рассмотрим процесс $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, удовлетворяющий (прямой) системе СДУ:

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + A(\xi(t))\,dw(t), \quad \xi(s) = x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \tag{32}$$

$$d\eta(t) = c(\xi(t))\eta(t)\,dt + C(\xi(t))(\eta(t), dw(t)), \quad \eta(s) = h \in \mathbb{R}^d. \tag{33}$$

Как уже было показано, процесс $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t))$ удовлетворяет СДУ

$$d\gamma(t) = q(\gamma(t))\,dt + Q(\gamma(t))dW(t), \tag{34}$$

где q и Q заданы соотношениями (20) и $W(t) = (w(t), w(t))^{\mathrm{т}}$.

Существование и единственность процесса $\gamma(t)$, удовлетворяющего (34), гарантируется условием С2. Обозначим как $S(t,s)$ и $S^{\mathrm{т}}(s,t)$ стохастические эволюционные семейства, заданные соотношениями $\eta(t) = S(t,s)h$ и $\langle S(t,s)h, u\rangle = \langle h, S^{\mathrm{т}}(s,t)u\rangle$.

Для того чтобы вывести вероятностное представление решения задачи Коши для системы (31), предположим, что функция $u \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ является классическим решением этой задачи. Из формулы Ито следует, что стохастический дифференциал процесса

$$\tilde{y}(t) = \langle \eta(t), u(t, \xi(t))\rangle = \langle h, S^{\mathrm{т}}(s,t)u(t,\xi(t))\rangle \in \mathbb{R}$$

имеет вид

$$d\tilde{y}(t) = \left\langle h, S^{\mathrm{т}}(s,t)\left[u_t + \langle \nabla u, a(\xi(t))\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A(\xi(t))\nabla^2 u A^{\mathrm{т}}(\xi(t)) + \langle B(\xi(t)), \nabla u\rangle + c(\xi(t))u\right]\right\rangle dt +$$

$$+ \langle h, S^{\mathrm{т}}(s,t)[\langle \nabla u, A(\xi(t))\,dw(t)\rangle + \langle C^{\mathrm{т}}(\xi(t))u, dw(t)\rangle]\rangle, \tag{35}$$

где

$$\langle B, \nabla u(x)\rangle^m = \sum_{q=1}^{d_1}\sum_{j,k=1}^{d} C_j^{mq}(x)A_{jk}\nabla_{x_k}u^q.$$

Введём обозначения

$$y(t) = v(t, \gamma(t)) = S^{\mathrm{т}}(s,t)u(t,\xi(t)), \quad f(\gamma(t), y(t), z(t)) = S^{\mathrm{т}}(s,t)\tilde{f}(\xi(t), y(t), z(t)).$$

Поскольку по предположению u удовлетворяет (31), то из (35) вытекает, что процесс $y(t) = u(t, \gamma(t))\rangle$ удовлетворяет стохастической задаче Коши

$$dy(t) = -f(\gamma(t), y(t), z(t))\,dt + z(t)\,dw(t), \quad y(T) = u_0(\gamma(T)), \tag{36}$$

если

$$z(t) = S^{\mathrm{т}}(s,t)[\nabla u A(t, \xi(t)) + C^{\mathrm{т}}(\xi(t))u(t,\xi(t))] \in \mathbb{R}^d \bigotimes \mathbb{R}^d.$$

Будем рассматривать (36) как обратное стохастическое дифференциальное уравнение.

Обозначив $W(t) = (w(t), w(t))^{\mathrm{т}}$ и записав систему (32), (33) как уравнение (17) относительно $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t))$, придём к системе ПОСДУ, состоящей из прямого СДУ

$$d\gamma(t) = g(\gamma(t))\,dt + G(\gamma(t))\,dW(t), \quad \gamma(s) = \gamma = (x, h), \tag{37}$$

и обратного СДУ (ОСДУ)

$$dy(t) = -f(\gamma(t), y(t), z(t))\,dt + z(t)\,dw(t), \quad y(T) = \zeta \in \mathbb{R}^d. \tag{38}$$

Замечание 2. Если правая часть системы (31) имеет произвольный вид $m(x, u, \nabla u)$, то нужно будет формулировать условия, гарантирующие, что

$$f(\gamma(t), y(t), z(t)) = m(\gamma(t), [S^{\mathrm{т}}(t,T)]^{-1}y(t), (A^{\mathrm{т}})^{-1}[S^{\mathrm{т}}(T,t)]^{-1}z(t) - C^{\mathrm{т}}(\xi(t))[S^{\mathrm{т}}(T,t)]^{-1}y(t))$$

обладает нужными свойствами.

Ниже нам понадобится ряд результатов из общей теории ОСДУ и ПОСДУ (см. [12]).

Рассмотрим ОСДУ (38) и отметим, что это уравнение содержит два неизвестных процесса $y(t) \in \mathbb{R}^d$ и $z(t) \in \mathbb{R}^d \bigotimes \mathbb{R}^d$, следовательно, как и в п. 2, нам потребуется замыкающее соотношение. Однако на этот раз для получения замыкающего соотношения мы воспользуемся теоремой Ито о представлении квадратично интегрируемого мартингала [19], которая утверждает, что любая $\mathcal{F}_T$-измеримая случайная величина $\zeta \in \mathbb{R}^d$ с конечным вторым моментом $(E\|\zeta\|^2 < \infty)$, допускает представление вида

$$\zeta = E\zeta + \int\limits_0^T z(t)\,dw(t),$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^d \bigotimes \mathbb{R}^d$ – $\mathcal{F}_t$-измеримый однозначно определённый квадратично-интегрируемый случайный процесс.

Из (38) следует, что случайный процесс $y(t)$ удовлетворяет соотношению

$$y(t) = v(t, \gamma(t)) = E\biggl[v_0(\gamma(T)) + \int\limits_t^T f(\gamma(\tau), y(\tau), z(\tau))\,d\tau|\mathcal{F}_t\biggr], \tag{39}$$

и ОСДУ (38) имеет по крайней мере одно решение $y(t) = S^{\mathrm{т}}(s,t)u(t, \xi(t))$.

Для того чтобы проверить, что

$$z(t) = S^{\mathrm{т}}(s,t)[A^{\mathrm{т}}(t, \xi(t))\nabla u + C^{\mathrm{т}}(\xi(t))u(t, \xi(t))],$$

рассмотрим случайную величину

$$\chi = v_0(\gamma(T)) + \int\limits_0^T f(\gamma(t), y(t), z(t))\,dt \in \mathbb{R}^d$$

и предположим, что она квадратично интегрируема, $\mathcal{F}_T$-измерима и $E[\chi|\mathcal{F}_t]$ – это $\mathcal{F}_t$-мартингал. Тогда, в силу теоремы Ито о представлении мартингалов [16], существует единственный случайный процесс $z(t) \in \mathbb{R}^d \bigotimes \mathbb{R}^d$ такой, что $E\int_0^T \|z(t)\|^2\,dt < \infty$ и

$$\chi = E[\chi] + \int\limits_0^T z(t)\,dw(t). \tag{40}$$

Из соотношения (39) следует, что $y(0) = E[\chi|\mathcal{F}_0] = E[\chi]$, и в силу (40) справедливо равенство

$$y(0) = v_0(\gamma(T)) + \int\limits_0^T f(\gamma(r), y(r), z(r))\,dr - \int\limits_0^T z(\tau)\,dw(\tau). \tag{41}$$

При этом величина $y(0) - \int_0^t f(\gamma(r), y(r), z(r))\,dr + \int_0^t z(r)\,dw(r)$ будет $\mathcal{F}_t$-измерима и равна величине

$$v_0(\gamma(T)) + \int\limits_t^T f(\gamma(r), y(r), z(r))\,dr - \int\limits_t^T z(r)\,dw(r).$$

Вычислив условное математическое ожидание полученных величин относительно $\mathcal{F}_t$ и приняв во внимание соотношение (39), получим

$$y(t) = y(s) - \int\limits_s^t f(\gamma(r), y(r), z(r))\,dr + \int\limits_s^t z(r)\,dw(r),$$

откуда (с учётом (41)) следует, что

$$y(t) = v_0(\gamma(T)) + \int\limits_t^T f(\gamma(r), y(r), z(r))\,dr - \int\limits_s^t z(r)\,dw(r).$$

Решение $y(t)$ допускает также представление

$$y(s) = y(t) - \int\limits_s^t f(\gamma(r), y(r), z(r))\,dr + \int\limits_s^t z(r)\,dw(r).$$

Далее будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие С3. Существует константа μ и положительные константы K, L такие, что:

а) $\|f(x, y, z)\| \leqslant K[\|x\| + \|y\| + |z|]$ для любого $t \in [0, T]$;

б) $\|f(x, y, z) - f(x, y, z_1)\| \leqslant L|z - z_1|$;

в) $\langle y - y_1, f(t, y, z) - f(t, y_1, z)\rangle \leqslant \mu\|y - y_1\|^2$, $y, y_1 \in \mathbb{R}^d$, $z, z_1 \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Пусть $B_1(0)$ – единичный шар с центром в нуле в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия С2 и С3. Тогда существуют процессы* $\gamma(t)$, $y(t)$, $z(t)$, *удовлетворяющие системе (37), (38), и функция* $\tilde{y}(s) = \Phi(s, \gamma)$ *является ограниченной функцией, удовлетворяющей условию Липшица на множестве* $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times B_1(0)$.

Доказательство этого утверждения вытекает из того факта, что условия С2 и С3 гарантируют выполнение условий существования и единственности решения ПОСДУ [12].

Наша задача – показать, что функция $u(s, x) = y(s)$ является вязкостным решением системы (31). При доказательстве этого факта важную роль играет теорема сравнения для решений ОСДУ.

Пусть заданы два скалярных процесса $Y_i(t)$ и два векторных процесса $Z_i(t) \in \mathbb{R}^d$ таких, что пары $(Y_i(t), Z_i(t))$, $i = 1, 2$, удовлетворяют ОСДУ

$$dY_i(t) = -f_i(\xi(t), Y_i(t), Z_i(t))\,dt + \langle Z_i(t), dw(t)\rangle, \quad Y_i(T) = \zeta_i,$$

где $w(t) \in \mathbb{R}^d$ и ζ_i – $\mathcal{F}_T$-измеримая случайная величина. Тогда справедливо следующее утверждение (см. [12]).

Теорема 7. *Пусть* $\zeta_1 \leqslant \zeta_2$ *и* $f_1(y, z) \leqslant f_2(y, z)$ *п.н. Тогда* $Y_1(t) \leqslant Y_2(t)$ *п.н.*

Следствие. *Пусть заданы два скалярных процесса* $Y_i(t)$ *и два векторных процесса* $Z_i(t)\in\in\mathbb{R}^d$ *таких, что пары* $(Y_i(t),Z_i(t))$, $i=1,2$, *удовлетворяют ОСДУ*

$$dY_1(t)=\zeta_1+\int\limits_t^T f(\xi(r),Y_1(r),Z_1(r))\,dr-\int\limits_t^T\langle Z_1(r),dw(r)\rangle,$$

$$dY_2(t)=\zeta_2+\int\limits_t^T N(r)\,dr-\int\limits_t^T\langle Z_2(r),dw(r)\rangle,$$

и $\zeta_1\leqslant\zeta_2$, $f_1(\xi(r),Y_2(t),Z_2(t))\leqslant N(r)$. *Тогда можно применить теорему 7, положив*

$$f_2(\xi(t),y,z)=f_1(\xi(t),y,z)+N(t)-f_1(\xi(t),Y_2(t),Z_2(t)).$$

Если при этом $f_1(\xi(r),Y_2(t),Z_2(t))<N(r)$ *на множестве положительной меры* $dt\times dP$, *то* $Y_1(0)<Y_2(0)$.

Как следует из сказанного выше, система (31) эквивалентна скалярному уравнению

$$\partial_s\Phi+\langle g(\gamma),\nabla\Phi\rangle+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}G(s,\gamma)\nabla^2\Phi G(s,\gamma)=\Lambda(\Phi,\nabla\Phi),\quad \Phi(T,\gamma)=\Phi_0(\gamma)=\langle h,u_0(x)\rangle,\qquad(42)$$

относительно функции $\Phi(t,\gamma)=\langle h,u(s,x)\rangle$, $\gamma=(x,h)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$.

Для того чтобы определить понятие вязкостного решения нелинейного параболического уравнения (42) относительно скалярной функции $\Phi(t,\gamma)$, $\gamma=(x,h)$, введём понятие суб- и суперрешения.

Пусть $\mathbb{R}^m=\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$, $m=2d$, $M^m=\mathbb{R}^m\bigotimes\mathbb{R}^m$, $\kappa(u,\nabla u)=B\nabla u+cu$,

$$L_\gamma\Psi=\langle g,\nabla_\gamma\Psi\rangle+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}G\nabla^2_\gamma\Psi G^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}},\quad \Lambda(\Psi,G^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}\nabla_\gamma\Psi)=\langle h,f(\kappa(u,\nabla\phi))\rangle.$$

Определение 1. Функцию $\Phi\in C([0,T]\times\mathbb{R}^m)$ назовём *вязкостным субрешением задачи (1)*, если $\Phi(T,\gamma)\leqslant\Phi_0(\gamma)$ и для любых $\Psi\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^m)$ и точки $(t,\gamma)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$, в которой достигается локальный максимум разности $\Phi-\Psi$, где $\Psi=\langle h,\psi\rangle$ и $\psi\in C^{1,2}([0,T]\times\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$, справедливо неравенство

$$\partial_s\Psi+L_\gamma\Psi-\langle h,f(\kappa(u,\nabla\psi))\rangle\geqslant 0;$$

и *суперрешением*, если $\Phi(T,\gamma)\geqslant\Phi_0(\gamma)$ и для любых $\Psi\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^m)$ и точки $(t,\gamma)\in\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$, в которой достигается локальный минимум разности $\Phi-\Psi$, справедливо неравенство

$$\partial_s\Psi+L_\gamma\Psi-\langle h,f(\kappa(u,\nabla\psi))\rangle\leqslant 0.$$

Определение 2. Функцию $\Phi\in C([0,T]\times\mathbb{R}^m)$ назовём *вязкостным решением задачи (42)*, если она является как суб-, так и суперрешением задачи (42).

Определение 3. Функцию $u(s,x)\in C([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ назовём *вязкостным решением задачи (1)*, если функция $\Phi(s,\gamma)=\langle h,u(s,x)\rangle$ является вязкостным решением задачи (42).

Теорема 8. *Пусть выполнены условия C1, C3 и случайные процессы* $(\gamma(t),y(t),z(t))$ *удовлетворяют уравнениям (37), (38). Тогда функция* $y(s)=u(s,x)$ *непрерывна и является вязкостным решением задачи (1).*

Доказательство. Непрерывность функции $u(s,x)$ вытекает из среднеквадратичной непрерывности процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $y(t)$ относительно параметра x, которая, в свою очередь, вытекает из липшицевости коэффициентов уравнений (37), (38) и начальной функции $u_0(X)$.

Чтобы доказать, что $\Phi(t,\gamma)=\langle h,u(t,x)\rangle$ – вязкостное решение задачи (42), достаточно показать, что эта функция является как суб-, так и суперрешением этой задачи.

Для проверки того, что Φ является субрешением, выберем функцию $\Psi(t,\gamma)=\langle h,\psi(t,x)\rangle$ такую, чтобы точка (t,γ) являлась точкой максимума для разности $\Phi-\Psi$, и предположим, без потери общности, что $\Phi(t,\gamma)=\Psi(t,\gamma)$. Покажем, что, предположив справедливость неравенства

$$\partial_s\Psi+L_\gamma\Psi-\langle h,f(\kappa(u,\nabla\psi))\rangle<0, \tag{43}$$

придём к противоречию.

Выберем положительный момент $\theta\leqslant T-t$ так, чтобы для всех $t\leqslant s\leqslant t+\theta$ и y таких, что $\|y-x\|\leqslant\theta$, была справедлива оценка $\Phi(s,\gamma)\leqslant\Psi(s,\gamma)$ и выполнялось неравенство (43). Обозначим

$$\tau=\inf_{s\geqslant t}\{\|\xi_{s,x}(t)-x\|\geqslant\theta\}\wedge(t+\theta),$$

рассмотрим пару процессов $(\bar y(s),\bar z(s))$, заданных соотношением

$$(\bar y(s),\bar z(s))=(y(s\wedge\tau),I_{[0,\tau]}(r)z(s)),\quad t\leqslant s\leqslant t+\theta,$$

и заметим, что $(\bar y(s),\bar z(s))$ удовлетворяет ОСДУ

$$\bar y(s)=\Phi(\tau,\gamma_{s,\gamma}(\tau))+\int\limits_s^{t+\theta}I_{[0,\tau]}(r)\langle h,f(\Phi(r,\gamma(r)),\bar z(r))\rangle\,dr-\int\limits_s^{t+\theta}\bar z(r)\,dw(r),\quad t\leqslant s\leqslant t+\theta.$$

Рассмотрим также пару процессов $(\hat y(s),\hat z(s))$, заданных соотношением

$$(\hat y(s),\hat z(s))=(\Psi(s,\gamma(s\wedge\tau)),I_{[0,\tau]}(s)\nabla\Psi(s,\gamma(s))G^{\mathrm{T}}(\gamma(s))),\quad t\leqslant s\leqslant t+\theta.$$

Воспользовавшись формулой Ито, покажем, что пара $(\hat y(s),\hat z(s))$ удовлетворяет ОСДУ

$$\hat y(t)=\Psi(\tau,\gamma_{s,\gamma}(\tau))-\int\limits_t^{t+\theta}I_{[0,\tau]}(r)(\partial_r\Psi+L_\gamma\Psi)(r,\gamma(r))\,dr-\int\limits_t^{t+\theta}\langle\hat z(r),dW(r)\rangle.$$

Поскольку по определению $\Phi(s,\gamma)\leqslant\Psi(s,\gamma)$, то в силу выбора θ и τ из теоремы 6 следует, что $\bar y(s)<\hat y(s)$, откуда ввиду следствия к теореме 7 вытекает, что $\Phi(s,\gamma)<\Psi(s,\gamma)$. Пришли к противоречию.

Таким образом, показано, что $\Phi(s,\gamma)$ является вязкостным субрешением задачи (42). Аналогично проверяется, что $\Phi(s,\gamma)$ является вязкостным суперрешением задачи (42), откуда вытекает, что функция $\Phi(s,\gamma)$, заданная соотношением $\Phi(s,\gamma)=\langle h,u(s,x)\rangle=\langle h,y(s)\rangle$, является вязкостным решением этой задачи. При этом, по определению, $u(s,x)$ является вязкостным решением системы (1).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Научно-технологического университета “Сириус” и Российского научного фонда (проект 22-21-00016).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи мат. наук. 1938. Т. 5. С. 5–41.
2. *McKean H.P.* A class of Markov processes associated with non-linear parabolic equations // Proc. of the National Academy of Sciences. 1966. V. 56. № 6. P. 1907–1911.
3. *Фрейдлин М.И.* Квазилинейные параболические уравнения и меры в функциональных пространствах // Функц. анализ и его приложения. 1967. Т. 3. С. 74–82.
4. *Belopolskaya Ya., Dalecky Yu.* Stochastic Equations and Differential Geometry. Dordrecht; Boston; London, 1990.
5. *Белопольская Я.И., Далецкий Ю.Л.* Исследование задачи Коши для квазилинейных параболических систем при помощи марковских случайных процессов // Изв. вузов. Математика. 1978. Т. 12. С. 6–17.

6. *Белопольская Я.И.* Стохастические дифференциальные уравнения. Приложения к математической физике и финансовой математике. СПб., 2019.
7. *Белопольская Я.И.* Вероятностная интерпретация метода исчезающей вязкости для систем законов сохранения и баланса // Мат. заметки. 2021. Т. 109. № 3. С. 338–351.
8. *Liu W., Yang Y., Lu G.* Viscosity solutions of fully nonlinear parabolic system // J. of Math. Anal. and Appl. 2003. V. 281. № 1. P. 362–381.
9. *Huang H.* The Cauchy problem for fully nonlinear parabolic systems on manifolds // arXiv:1506.05030. 2015.
10. *Pardoux E., Peng S.* Adapted solution of a backward stochastic differential equation // Systems & Control Lett. 1990. V. 14. P. 55–61.
11. *Pardoux E., Peng S.* Backward SDE's and quasilinear parabolic PDE's // Stochastic PDE and Their Applications. LNCIS, 1992. V. 176. P. 200–217.
12. *Pardoux E.* Backward stochastic differential equations and viscosity solutions of systems of semilinear parabolic and elliptic PDEs of second order // Stochastic Analysis and Related Topics. V. 4. Geilo, 1996. Progr. Probab. V. 42. Boston, 1998. P. 79–127.
13. *Khasminskii R.Z., Zhu C., Yin G.* Stability of regime-switching diffusions // Stochastic Proc. and their Appl. 2007. V. 117. P. 1037–1051.
14. *Zhu C., Yin G.* Hybrid Switching Diffusions: Properties and Applications. New York, 2010.
15. *Belopolskaya Ya.* Probabilistic counterparts of nonlinear parabolic PDE systems // Modern Stochastics and Applications. Springer Optimization and its Applications. 2014. V. 90. P. 71–94.
16. *Belopolskaya Ya., Woyczynski W.* Probabilistic approach to viscosity solutions of the Cauchy problem for systems of fully nonlinear parabolic equations // J. Math. Sci. 2013. V. 188. № 6. P. 655–672.
17. *Talay D., Tomašević M.* A new stochastic interpretation of Keller–Segel equations: the 1-D case // Bernoulli. 2020. V. 26. № 2. P. 1323–1353.
18. *Белопольская Я.И.* Марковские процессы и уравнения магнитогидродинамики // Зап. науч. семинаров ПОМИ. Сер. Вероятность и статистика. 2019. Т. 28. С. 7–34.
19. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. М., 2003.

Университет “Сириус”, г. Сочи,
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
имени В.А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию 22.11.2021 г.
После доработки 20.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955.2

КОРРЕКТНОСТЬ КОМПЛЕКСНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ МЕТРИКАМИ

© 2022 г. А. М. Бирюков

Изучается задача Коши для общих линейных систем комплексных дифференциальных уравнений с частными производными в банаховых пространствах целых вектор-функций с интегральными метриками. Тип экспоненциального роста решения задачи и правой части системы дифференциальных уравнений по переменной z может зависеть определённым образом от другой переменной t. Получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых данная задача является корректно разрешимой в заданной шкале функциональных пространств. Следовательно, дано описание структуры систем дифференциальных уравнений, задача Коши для которых является корректной.

DOI: 10.31857/S0374064122120044, EDN: NCBSFO

В предлагаемой работе рассматривается задача Коши для систем комплексных линейных дифференциальных уравнений с частными производными

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A(t,z,D)u = h(t,z), \quad t,z\in\mathbb{C}, \tag{1}$$

$$u(t_0,z)=\varphi(z), \tag{2}$$

где $A(t,z,D)$ – матричный дифференциальный или функциональный оператор.

Решения задачи (1), (2) ищутся в пространствах Харди–Лебега с весом целых по переменной z и аналитических по переменной t при $|t-t_0|<\delta$ вектор-функций $u(t,z)$. Функции из указанных пространств могут допускать рост экспоненциального типа на бесконечности по переменной z, при этом тип экспоненциального роста зависит определённым образом от временно́й переменной t. Ограничения на порядок $q\geqslant 1$, $q\in\mathbb{N}$, и тип роста задаются с помощью веса.

Ранее в работе [1, с. 48–70] были получены необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши (1), (2) в шкале пространств функций вектор-экспоненциального типа с супремум-нормами. Оказывается, что условия для корректности задачи Коши в случаях пространств с интегральными метриками и с супремум-нормами совпадают.

В статье [2] была рассмотрена задача Коши (1), (2) в шкале пространств функций вектор-экспоненциального типа в случае, когда тип роста решения по переменной z не зависел от временно́й переменной t и были получены необходимые и достаточные условия корректности в данной шкале функциональных пространств. В настоящей работе при рассмотрении задачи Коши (1), (2) в шкале пространств функций вектор-экспоненциального типа в случае, когда тип экспоненциального роста решения зависит определённым образом от временно́й переменной t, существенно расширяется класс систем дифференциальных уравнений, для которых имеет место корректность поставленной задачи Коши за счёт того, что условия на коэффициенты дифференциального оператора, необходимые и достаточные для разрешимости в данной шкале функциональных пространств, получаются более мягкими. В частности, если рассматривать задачу Коши для комплексного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(t,z)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = h(t,z), \quad u(t_0,z)=\varphi(z),$$

то в случае гауссовой шкалы (порядок q роста решения по переменной z равен двум) задача Коши будет корректной тогда и только тогда, когда $a(t,z)\equiv 0,$ если тип роста решения не зависит от переменной $t,$ и задача Коши будет корректной тогда и только тогда, когда $a(t,z)$-произвольная аналитическая функция, не зависящая от $z,$ если тип роста решения зависит определённым образом от $t.$

Отметим, что в работе [3] задача Коши была изучена в шкалах более быстрого роста по $z,$ чем конечного экспоненциального порядка. А в случае порядка экспоненциального роста $0<q<1$ вопрос о корректности задачи Коши был исследован в статье [4].

Главное отличие настоящей работы от известных автору исследований по аналитической разрешимости задачи Коши состоит в том, что, во-первых, в качестве пространств решений используются банаховы пространства с интегральными метриками, и, во-вторых, область определения решения совпадает с областью определения правой части системы дифференциальных уравнений.

В этой работе будут получены условия на коэффициенты дифференциального оператора, выполнение которых равносильно корректной разрешимости задачи Коши (1), (2) в шкале пространств функций экспоненциального типа по переменной $z.$

Для установления основного результата отметим несколько лемм об интегральных свойствах аналитических функций, которые, возможно, имеют самостоятельный интерес.

Перейдём к точным формулировкам. Будем пользоваться следующими обозначениями: $t,z\in\mathbb{C}$ – комплексные переменные; $N\geqslant 1,$ $q\geqslant 1$ – натуральные числа; $p\geqslant 1,$ $R>0,$ $\sigma>0$ – вещественные числа, $m=(m_1,\ldots,m_N)$ – вектор с натуральными координатами $m_j\geqslant 1,$ $j=\overline{1,N}.$

В области $V=G_t\times C,$ где G_t – произвольная область на комплексной плоскости $t,$ рассмотрим задачу Коши (1), (2), в которой $A(t,z,D)$ – матрица дифференциальных операторов конечного порядка, каждый элемент которой действует на скалярную функцию $u(t,z)$ по правилу

$$A_{ij}(t,z,D)u=\sum_{\alpha=0}^{m_{ij}}a_{ij}^{\alpha}(t,z)D^{\alpha}u(t,z),$$

где $a_{ij}^{\alpha}(t,z)$ – аналитические в области V коэффициенты. Здесь и далее через $D^{\alpha}u(t,z)$ обозначаем частную производную функции $u(t,z)$ по переменной z порядка $\alpha.$ Таким образом, i-е уравнение в системе (1) имеет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(t,z)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{\alpha=0}^{m_{ij}}a_{ij}^{\alpha}(t,z)D^{\alpha}u_j(t,z)+h_i(t,z),\quad i=\overline{1,N}.$$

Введём следующие функциональные пространства: $\mathrm{Exp}_{m,R,q;p}(C)$ – пространство целых вектор-функций $\varphi(z)=(\varphi_1(z),\ldots,\varphi_N(z)),$ для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{m,R,q;p}=\sum_{j=1}^{N}\|\varphi_j\|_{m_j,R,q;p}=\sum_{j=1}^{N}\sup_{0<r<+\infty}\biggl[\biggl(\int\limits_0^{2\pi}|\varphi_j(re^{i\theta})|^p\,d\theta\biggr)^{1/p}(1+r)^{-m_j}\exp\{-Rr^q\}\biggr].$$

Решение задачи Коши (1), (2) будем искать в пространстве $\vartheta(\delta;\mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})(t_0)$ целых по z и аналитических по t при $|t-t_0|<\delta$ вектор-функций $u(t,z)=(u_1(t,z),\ldots,u_N(t,z)),$ для которых конечна норма

$$\|u\|_{\delta;m,R,\sigma,q;p}=\sum_{j=1}^{N}\|u_j\|_{\delta;m_j,R,\sigma,q;p}=$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\sup_{|t-t_0|<\delta}\biggl[\sup_{0<r<+\infty}\biggl(\biggl(\int\limits_0^{2\pi}|u_j(t,re^{i\theta})|^p\,d\theta\biggr)^{1/p}(1+r)^{-m_j}\exp\{-(R+\sigma|t-t_0|)r^q\}\biggr)\biggr].$$

Заметим, что функции из введённых пространств допускают рост экспоненциального типа на бесконечности по переменной z, при этом тип роста зависит от переменной t. Также можно показать, используя утверждение из [5, с. 46] о свойстве голоморфных функций комплексного переменного, что введённые функциональные пространства являются банаховыми пространствами.

Определение. Будем говорить, что задача (1), (2) *локально корректна* в шкале $\mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p}$, если для любой точки $t_0 \in G_t$ и любого $R > 0$ найдутся такие числа $\delta > 0$, $\sigma > 0$, что для любой начальной вектор-функции $\varphi \in \mathrm{Exp}_{m,R,q;p}(\mathrm{C})$ и любой правой части $h \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m+q,R,\sigma,q;p})(t_0)$ системы (1) существует единственное решение задачи (1), (2) $u \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})(t_0)$ и справедливо неравенство

$$\|u\|_{\delta;m,R,\sigma,q;p} \leqslant M(\|\varphi\|_{m,R,q;p} + \|h\|_{\delta;m+q,R,\sigma,q;p}),$$

где $M > 0$ – постоянная, ограниченная при ограниченных значениях R.

Сформулируем теперь основной результат настоящей работы в виде следующей теоремы.

Теорема. *Задача (1), (2) локально корректна в шкале* $\mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p}$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) $a_{ij}^{\alpha}(t,z)$ *– суть полиномы по* z;

2) степени этих полиномов удовлетворяют неравенствам

$$\deg a_{ij}^{\alpha}(t,z) \leqslant m_i - m_j - \alpha(q-1) + q, \tag{3}$$

причём если правая часть неравенства (3) получается отрицательной, то по определению считаем $a_{ij}^{\alpha}(t,z) \equiv 0$, *а его степень* $\deg a_{ij}^{\alpha}(t,z) = -\infty$.

В доказательстве достаточности условий (3) используется следующая лемма об оценке нормы производной целой функции через норму самой функции. Эту и все леммы в дальнейшем для упрощения записи будем формулировать для случая $N = 1$.

Лемма 1 [6]. *Пусть функция* $v(z) \in \mathrm{Exp}_{m,R,q;p}(C)$. *Тогда* $Dv(z) \in \mathrm{Exp}_{m+(q-1),R,q;p}(C)$, *причём*

$$\|Dv\|_{m+(q-1),R,q;p} \leqslant C \exp\{R2^q\} \|v\|_{m,R,q;p},$$

где $C > 0$ *– постоянная, зависящая только от* m *и* q.

Лемма 2 [6]. *Пусть функция* $h \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m+q,R,\sigma,q;p})$. *Тогда функция* $\int_0^t h(\tau,z)\,d\tau \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$ *и справедливо неравенство*

$$\left\| \int_0^t h(\tau,z)\,d\tau \right\|_{\delta;m,R,\sigma,q;p} \leqslant 2^q \max\{\delta, 1/\sigma\} \|h\|_{\delta;m+q,R,\sigma,q;p}.$$

Докажем сначала достаточность условий (3) основной теоремы 1. Запишем интегро-дифференциальное уравнение, эквивалентное исходной задаче (1), (2) (без ограничения общности рассматриваем случай $t_0 = 0$, доказательство для $t_0 \neq 0$ сводится к случаю $t_0 = 0$ формальным сдвигом $t \to t - t_0$)

$$u(t,z) = \int_0^t A(\tau,z,D)u(\tau,z)\,d\tau + \varphi(z) + \int_0^t h(\tau,z)\,d\tau, \tag{4}$$

где интегрирование проводится по отрезку, соединяющему точки 0 и t.

Покажем, что оператор

$$(Bu)(t,z) = \int_0^t A(\tau,z,D)u(\tau,z)\,d\tau$$

определён в пространстве $\vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$ и является сжимающим, если $\delta > 0$ достаточно мало, а $\sigma > 0$, напротив, достаточно велико. Для этого рассмотрим i-ю компоненту, $i = \overline{1,N}$:

$$(Bu)_i(t,z) = \int\limits_0^t \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=0}^{m_{ij}} a_{ij}^\alpha(\tau,z) D^\alpha u_j(\tau,z)\,d\tau.$$

Отсюда видно, что справедливо неравенство

$$|(Bu)_i(t,z)| \leqslant \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=0}^{m_{ij}} \int\limits_0^{|t|} C(1+|z|)^{n_{ij}^\alpha} |D^\alpha u_j(\tau,z)|\,d|\tau|,$$

где n_{ij}^α – степень многочлена $a_{ij}^\alpha(t,z)$. Поэтому имеет место оценка

$$|(Bu)_i(t,re^{i\theta})|^p \leqslant C^p(a_{ij}^\alpha, N, m_{ij}) \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=0}^{m_{ij}} (1+r)^{n_{ij}^\alpha p} \Bigg(\int\limits_0^{|t|} |D^\alpha u_j(\tau,re^{i\theta})|\,d|\tau|\Bigg)^p.$$

Для краткости записи обозначим

$$I \equiv \Bigg(\int\limits_0^{2\pi} |(Bu)_i(t,re^{i\theta})|^p\,d\theta\Bigg)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant C(a_{ij}^\alpha, N, m_{ij}) \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=0}^{m_{ij}} (1+r)^{n_{ij}^\alpha} \Bigg(\int\limits_0^{2\pi} \Bigg(\int\limits_0^{|t|} |D^\alpha u_j(\tau,re^{i\theta})|\,d|\tau|\Bigg)^p d\theta\Bigg)^{1/p}.$$

Применив теперь обобщённое неравенство Минковского, получим

$$I \leqslant C(a_{ij}^\alpha, N, m_{ij}) \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=0}^{m_{ij}} (1+r)^{n_{ij}^\alpha} \int\limits_0^{|t|} \Bigg(\int\limits_0^{2\pi} |D^\alpha u_j(\tau,re^{i\theta})|^p\,d\theta\Bigg)^{1/p} d|\tau|.$$

Так как вектор-функция $u \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$, то $u_j(\tau,\cdot\,) \in \mathrm{Exp}_{m_j,R+\sigma|\tau|,q;p}(\mathrm{C})$, а значит, в силу леммы 1 $D^\alpha u_j(\tau,\cdot\,) \in \mathrm{Exp}_{m_j+|\alpha|(q-1),R+\sigma|\tau|,q;p}(\mathrm{C})$ и справедливо неравенство

$$\Bigg(\int\limits_0^{2\pi} |D^\alpha u_j(\tau,re^{i\theta})|^p\,d\theta\Bigg)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \|D^\alpha u_j(\tau,\cdot\,)\|_{m_j+|\alpha|(q-1),R+\sigma|\tau|,q;p} (1+r)^{m_j+|\alpha|(q-1)} \exp\{(R+\sigma|\tau|)r^q\} \leqslant$$

$$\leqslant C(q,m_{ij},m) \exp\{Rm_{ij}2^q\} \|u_j\|_{\delta;m_j,R,\sigma,q;p} (1+r)^{m_j+|\alpha|(q-1)} \exp\{(R+\sigma|\tau|)r^q\}.$$

Возвращаемся к оценке выражения для интеграла I:

$$I \leqslant C(a_{ij}^\alpha, N, m_{ij}) \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=0}^{m_{ij}} (1+r)^{n_{ij}^\alpha} \times$$

$$\times \int\limits_0^{|t|} C(q,m_{ij},m) \exp\{Rm_{ij}2^q\} \|u_j\|_{\delta;m_j,R,\sigma,q;p} (1+r)^{m_j+|\alpha|(q-1)} \exp\{(R+\sigma|\tau|)r^q\}\,d|\tau|.$$

Обозначив $\tilde{m} = \max m_{ij}$ и использовав условие (3) теоремы, имеем

$$I \leqslant C(a_{ij}^{\alpha}, N, m_{ij}, q, m) \exp\{R\tilde{m}2^q\} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\alpha=0}^{m_{ij}} (1+r)^{m_i+q} \|u_j\|_{\delta; m_j, R, \sigma, q; p} \int\limits_0^{|t|} \exp\{(R+\sigma|\tau|)r^q\}\, d|\tau| \leqslant$$

$$\leqslant C \exp\{R\tilde{m}2^q\}(1+r)^{m_i+q} \|u\|_{\delta; m, R, \sigma, q; p} \int\limits_0^{|t|} \exp\{(R+\sigma|\tau|)r^q\}\, d|\tau|.$$

Вычислим интеграл, рассмотрев отдельно два случая:

1) $0 < r \leqslant 1$:

$$I \leqslant C \exp\{R\tilde{m}2^q\}(1+r)^{m_i} 2^q \|u\|_{\delta; m, R, \sigma, q; p} \exp\{(R+\sigma|t|)r^q\}\delta;$$

2) $r > 1$:

$$I \leqslant C \exp\{R\tilde{m}2^q\}(1+r)^{m_i+q} \|u\|_{\delta; m, R, \sigma, q; p} \exp\{Rr^q\} \frac{1}{\sigma r^q} \exp\{\sigma|t|r^q\} \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{1}{\sigma} \exp\{R\tilde{m}2^q\}(1+r)^{m_i} \|u\|_{\delta; m, R, \sigma, q; p} \exp\{(R+\sigma|t|)r^q\}.$$

Таким образом, для любого $r : 0 < r < +\infty$ и для любого $t : |t| < \delta$ справедливо неравенство

$$\left(\int\limits_0^{2\pi} |(Bu)_i(t, re^{i\theta})|^p\, d\theta\right)^{1/p} (1+r)^{-m_i} \exp\{-(R+\sigma|t|)r^q\} \leqslant C \max\left(\delta, \frac{1}{\sigma}\right) \exp\{R\tilde{m}2^q\} \|u\|_{\delta; m, R, \sigma, q; p},$$

где $C > 0$ – постоянная, зависящая от коэффициентов a_{ij}^{α}, N, m_{ij}, m, q. Важно отметить, что C не зависит от R, σ и δ. Из последнего неравенства и следует, что $(Bu)_i(t,z) \in \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m_i, R, \sigma, q; p})$, а значит, $(Bu)(t,z) \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m, R, \sigma, q; p})$, причём справедлива оценка

$$\|Bu\|_{\delta; m, R, \sigma, q; p} \leqslant C \max(1/\sigma, \delta) \exp\{R\tilde{m}2^q\} \|u\|_{\delta; m, R, \sigma, q; p}.$$

Выберем σ достаточно большим и δ достаточно малым так, чтобы

$$C \max(1/\sigma, \delta) \exp\{R\tilde{m}2^q\} \leqslant 1/2.$$

Тогда оператор B будет сжимающим в пространстве $\vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m, R, \sigma, q; p})$. Если $\varphi \in \mathrm{Exp}_{m, R, q; p}(C)$, то включение $\varphi \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m, R, \sigma, q; p})$ очевидно. Далее, если $h \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m+q, R, \sigma, q; p})$, то включение $\int_0^t h(\tau, z)\, d\tau \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m, R, \sigma, q; p})$ следует из леммы 2. Поэтому существует единственное решение уравнения (4), а значит, и задачи (1), (2) $u \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m, R, \sigma, q; p})$, и для него справедлива оценка из приведённого выше определения локальной корректности задачи Коши (1), (2). Тем самым достаточность условий (3) теоремы доказана.

Замечание. Из проведённого доказательства следует, что “время жизни” $\delta > 0$ комплексного решения $u(t,z)$ зависит от R непрерывно. В частности, при ограниченных значениях $R \leqslant R_0$ постоянные $\delta > 0$, $\sigma > 0$ можно выбрать не зависящими от R.

Докажем теперь необходимость условий (3), т.е. будем считать, что задача Коши (1), (2) является локально корректной в шкале $\mathrm{Exp}_{m, R, \sigma, q; p}$. Покажем, что в этом случае $a_{ij}^{\alpha}(t,z)$ – суть полиномы по z, степени которых удовлетворяют неравенствам (3). В доказательстве необходимости условий (3) также будем использовать леммы о свойствах аналитических функций. Вначале сформулируем лемму, являющуюся обобщением известной теоремы Лиувилля.

Лемма 3 [6]. *Пусть* $v(z)$ *– целая функция и существует число* $M>0$ *такое, что для любого* $r>0$ *справедливо неравенство*

$$\left(\int\limits_0^{2\pi}|v(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p}\leqslant M(1+r)^m.$$

Тогда $v(z)$ *– полином, степень которого не превосходит* m.

Лемма 4 [6]. *Пусть функция* $u(t,z)\in\vartheta(\delta;\mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$. *Тогда функция*

$$u_t'(0,z)\in\mathrm{Exp}_{m+q,R,q;p}(C)$$

и справедливо неравенство

$$\|u_t'(0,\cdot\,)\|_{m+q,R,q;p}\leqslant\frac{\max\{1,\sigma\}e^\delta}{\delta}\|u\|_{\delta;m,R,\sigma,q;p}.$$

Лемма 5 [2]. *Функция* $v(z)=z^{m+s}\exp\{Rz^q\}$, s *– целое, принадлежит пространству* $\mathrm{Exp}_{m,R,q;p}(C)$, *если* $s\leqslant q/(2p)$, *и не принадлежит* $\mathrm{Exp}_{m,R,q;p}(C)$, *если* $s>q/(2p)$.

Вернёмся теперь к доказательству необходимости условий (3) теоремы. Считаем, что задача (1), (2) локально корректна в шкале $\mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p}(C)$. Сначала установим, что коэффициенты $a_{ij}^\alpha(t,z)$ – полиномы по z, используя метод математической индукции, а затем уточним степени этих полиномов.

Положим $t_0=0$, $R\in(0,1]$ – произвольное. Из условия локальной корректности найдём $\delta>0$, $\sigma>0$, которые от выбора R не зависят. Зафиксируем $j=\overline{1,N}$ – любое. В качестве начальной вектор-функции возьмём $\varphi(z)=(\varphi_1(z),\dots,\varphi_N(z))$, где $\varphi_i(z)\equiv0$ при $i\ne j$, $\varphi_j(z)=1$. Заметим, что $\varphi\in\mathrm{Exp}_{m,R,q;p}(C)$, причём $\|\varphi\|_{m,R,q;p}\leqslant(2\pi)^{1/p}$. В качестве правой части системы (1) положим $h(t,z)\equiv0$. Для решения $u\in\vartheta(\delta;\mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$ задачи Коши (1), (2) с выбранной начальной вектор-функцией φ и правой частью системы h справедливы равенства

$$a_{ij}^0(0,z)=\frac{\partial u_i}{\partial t}(0,z),\quad i,j=\overline{1,N}.$$

Полагая $z=re^{i\theta}$, где $r=R^{-1/q}$, в силу леммы 4 будем иметь следующие неравенства:

$$\left(\int\limits_0^{2\pi}|a_{ij}^0(0,re^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p}\leqslant\left\|\frac{\partial u_i}{\partial t}(0,\cdot\,)\right\|_{m_i+q,R,q;p}(1+r)^{m_i+q}\exp\{Rr^q\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\max\{1,\sigma\}}{\delta}e^\delta\|u\|_{\delta;m,R,\sigma,q;p}(1+r)^{m_i+q}\exp\{Rr^q\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\max\{1,\sigma\}}{\delta}e^\delta M(2\pi)^{1/p}(1+r)^{m_i+q}\exp\{Rr^q\}\leqslant M_1(1+r)^{m_i+q},$$

где $M_1>0$ – постоянная, которая от выбора R не зависит, $i,j=\overline{1,N}$. Поэтому из леммы 3 следует, что все функции $a_{ij}^0(0,z)$ – полиномы, степени которых не превосходят m_i+q.

Предположим теперь, что для всех $\alpha=\overline{0,k-1}$ $a_{ij}^\alpha(0,z)$ – полиномы и имеют место неравенства $\deg a_{ij}^\alpha(0,z)\leqslant m_i+q+\alpha$. Докажем, что $a_{ij}^k(0,z)$ также полиномы степени не выше m_i+q+k, $k\in\mathbb{N}$.

Сначала рассмотрим случай $k\leqslant m_j$. Полагаем $t_0=0$, $R\in(0,1]$ – произвольное. Из условия локальной корректности задачи Коши (1), (2) найдём $\delta>0$, $\sigma>0$, которые от выбора $R\in(0,1]$ не зависят. Теперь начальную вектор-функцию определим по правилу

$$\varphi(z)=(0,\dots,0,\varphi_j(z),0,\dots,0),\quad\varphi_j(z)=z^k.$$

Заметим, что $\|\varphi\|_{m,R,q;p} \leqslant (2\pi)^{1/p}$. В качестве правой части системы (1) снова возьмём вектор-функцию $h(t,z) \equiv 0$. Для соответствующего решения задачи Коши (1), (2) вектор-функции $u \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$ справедливы равенства

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(0,z) = \sum_{\alpha=0}^{k-1} a_{ij}^{\alpha}(0,z)k(k-1)\cdots(k-\alpha+1)z^{k-\alpha} + a_{ij}^{k}(0,z)k!, \quad i=\overline{1,N}. \tag{5}$$

В силу предположения математической индукции для всех α таких, что $0 \leqslant \alpha \leqslant k-1$, имеют место оценки

$$|a_{ij}^{\alpha}(0,z)| \leqslant C(a_{ij}^{\alpha})(1+|z|)^{m_i+q+\alpha}.$$

Тогда, используя утверждение леммы 4 и обобщённое неравенство Минковского, получаем

$$\left(\int\limits_0^{2\pi} |a_{ij}^k(0,re^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p} \leqslant \left\|\frac{\partial u_i}{\partial t}(0,\cdot)\right\|_{m_i+q,R,q;p}(1+r)^{m_i+q}\exp\{Rr^q\} + C(1+r)^{m_i+q+k},$$

где $C>0$ – постоянная, зависящая только от a_{ij}^{α}, m_{ij} и p. Положим в последнем неравенстве $r = R^{-1/q}$. Из оценки в утверждении леммы 4 следует, что

$$\left(\int\limits_0^{2\pi} |a_{ij}^k(0,re^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p} \leqslant M_1(1+r)^{m_i+q+k},$$

где $M_1>0$ – постоянная, которая от выбора R не зависит. Следовательно, для любого $r \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\left(\int\limits_0^{2\pi} |a_{ij}^k(0,re^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p} \leqslant M_1(1+r)^{m_i+q+k},$$

которое в силу леммы 3 и означает, что все функции $a_{ij}^k(0,z)$ – полиномы степени не выше m_i+q+k при $k \leqslant m_j$.

Пусть теперь $k \geqslant m_j+1$. Задаём произвольное значение $R \in (0,1]$. Так как задача Коши (1), (2) локально корректна, то найдутся константы $\delta>0$, $\sigma>0$, которые от выбора R не зависят. Начальную вектор-функцию определим по правилу

$$\varphi(z) = (0,\ldots,0,\varphi_j(z),0,\ldots,0), \quad \varphi_j(z) = z^k,$$

а в правой части системы (1) положим $h(t,z) \equiv 0$. Как показывают вычисления и оценки интегралов, и в этом случае $\varphi \in \mathrm{Exp}_{m,R,q;p}(C)$ и справедливо неравенство

$$\|\varphi\|_{m,R,q;p} \leqslant (2\pi)^{1/p}\frac{C}{R^{(k-m_j)/q}}$$

для любого $r>0$, где $C>0$ зависит только от k, m_j и q.

Решение задачи Коши (1), (2) с данной начальной вектор-функцией и нулевой правой частью удовлетворяет равенствам (5). Применяя к равенствам (5) обобщённое неравенство Минковского и утверждение леммы 4, получаем следующие оценки для всех $i,j=\overline{1,N}$:

$$\left(\int\limits_0^{2\pi} |a_{ij}^k(0,re^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max\{1,\sigma\}e^{\delta}}{\delta} M \frac{C(p,k,m_j,q)}{R^{(k-m_j)/q}}(1+r)^{m_i+q}\exp\{Rr^q\} + C(p,a_{ij}^{\alpha},m_{ij})(1+r)^{m_i+q+k}.$$

В последнем неравенстве положим $r = R^{-1/q}$. Теперь имеем

$$\left(\int_0^{2\pi} |a_{ij}^k(0,re^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p} \leqslant M_1(1+r)^{m_i+q+k},$$

где $M_1 > 0$ – постоянная, которая от выбора R не зависит. Поэтому в силу леммы 3 все функции $a_{ij}^k(0,z)$, $i,j = \overline{1,N}$, являются полиномами степени не выше m_i+q+k и для случая $k \geqslant m_j+1$.

Таким образом, установлено, что все коэффициенты дифференциального оператора системы (1) являются полиномами по переменной z. Более точно, все функции $a_{ij}^{\alpha}(0,z)$ имеют следующий вид:

$$a_{ij}^{\alpha}(0,z) = a_0^{i,j,\alpha} + a_1^{i,j,\alpha}z + a_2^{i,j,\alpha}z^2 + \ldots + a_{m_i+q+\alpha}^{i,j,\alpha}z^{m_i+q+\alpha}, \quad i,j=\overline{1,N}, \quad \alpha = \overline{0,m_{ij}}.$$

Уточним теперь степени этих полиномов. Вновь полагаем $t_0 = 0$, значения R будем последовательно перебирать: $R = \overline{1, m_{ij}+1}$. В качестве начальной вектор-функции возьмём

$$\varphi_R(z) = (0,\ldots,0,\varphi_{Rj}(z),0,\ldots,0), \varphi_{Rj}(z) = z^{m_j+[q/(2p)]}\exp\{Rz^q\}.$$

Заметим, что в силу леммы 5 вектор-функция $\varphi_R(z) \in \mathrm{Exp}_{m,R,q;p}(C)$. В качестве правой части системы (1) возьмём $h(t,z) \equiv 0$.

Так как задача Коши (1), (2) является локально корректной в шкале $\mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p}(C)$, то существует единственное решение этой задачи $u_R(t,z) \in \vartheta(\delta;\mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$, для которого справедливо равенство

$$\frac{\partial u_{Ri}}{\partial t}(0,z) = \sum_{\alpha=0}^{m_{ij}} a_{ij}^{\alpha}(0,z)D^{\alpha}\varphi_{Rj}(z).$$

Вычислив производные функций $\varphi_{Rj}(z)$, получим следующие равенства для любого $\alpha = \overline{0,m_{ij}}$:

$$D^{\alpha}\varphi_{Rj}(z) = (Rq)^{\alpha}z^{m_j+[q/(2p)]+\alpha(q-1)}\exp\{Rz^q\} + \ldots$$

(записано только слагаемое, которое содержит в качестве множителя переменную z в максимальной степени, т.е. $z^{m_j+[q/(2p)]+\alpha(q-1)}$). Следовательно, решение задачи Коши (1), (2) удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial u_{Ri}}{\partial t}(0,z) = z^{m_j+[q/(2p)]-m_{ij}}\exp\{Rz^q\} \times$$

$$\times \sum_{\alpha=0}^{m_{ij}}[(a_0^{i,j,\alpha} + a_1^{i,j,\alpha}z + \ldots + a_{m_i+q+\alpha}^{i,j,\alpha}z^{m_i+q+\alpha})((Rq)^{\alpha}z^{m_{ij}+\alpha(q-1)} + \ldots)]. \tag{6}$$

В силу леммы 4 функция, стоящая в левой части равенства (6), принадлежит пространству $\mathrm{Exp}_{m_i+q,R,q;p}(C)$, поэтому функция, стоящая в правой части (6), тоже должна принадлежать данному классу. Исходя из этого, получим условия на коэффициенты многочленов $a_{ij}^{\alpha}(0,z)$.

Отметим, что в правой части равенства (6) под знаком суммы стоит многочлен, степень которого не превосходит $m_i + m_{ij} + m_{ij}q + q$. Будем задавать значения параметра s от $m_i + m_{ij}(q+1)+q$ до $m_i+q-m_j+m_{ij}+1$ (включительно), последовательно уменьшая значение параметра на единицу. При каждом значении s в силу леммы 5 получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов многочленов $a_{ij}^{\alpha}(0,z)$ следующего вида:

$$\sum_{\alpha=0}^{m_{ij}}(Rq)^{\alpha}a_{s-m_{ij}-\alpha(q-1)}^{i,j,\alpha} = 0, \quad R = \overline{1,m_{ij}+1}.$$

Определитель матрицы этой системы линейных алгебраических уравнений не равен нулю, так как является определителем Вандермонда, а значит, сама система имеет только тривиальное решение. Поэтому справедливы равенства $a^{i,j,\alpha}_{s-m_{ij}-\alpha(q-1)} = 0$ при любых $\alpha = \overline{0, m_{ij}}$, $s \geqslant m_i + q - m_j + m_{ij} + 1$ или, что то же самое, $a^{i,j,\alpha}_k = 0$ для $k \geqslant m_i - m_j - \alpha(q-1) + q + 1$. Последние равенства и означают, что $\deg a^{\alpha}_{ij}(0, z) \leqslant m_i - m_j - \alpha(q-1) + q$, $i, j = \overline{1, N}$, $\alpha = \overline{0, m_{ij}}$. Необходимость условий (3) доказана.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00033).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубинский Ю.А.* Задача Коши в комплексной области. М., 1996.
2. *Бирюков А.М.* Необходимые и достаточные условия разрешимости комплексной задачи Коши в классах функций вектор-экспоненциального типа // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1055–1064.
3. *Chin Ngok Min.* Linear differential infinite degree operator and its applications // Acta Math. Vietnamica. 1987. V. 12. № 1. P. 101–124.
4. *Одиноков О.В.* О корректности задачи Коши для операторов с гладкими символами// Изв. АН Армянской ССР. 1988. Т. 23. № 1. С. 65–75.
5. *Владимиров В.С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М., 1964.
6. *Бирюков А.М.* О корректности аналитической задачи Коши в классах целых функций конечного порядка // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1336–1350.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 19.06.2022 г.
После доработки 07.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1633–1644

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЛИНИЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ

© 2022 г. Д. К. Дурдиев

Изучены прямая и обратная задачи для модельного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. Прямая задача представляет собой аналог задачи Трикоми для этого уравнения с нехарактеристической линией изменения типа. В обратной задаче неизвестным является переменный коэффициент при младшем члене в гиперболическом уравнении. Для его определения исследована обратная задача, когда относительно решения, определяемого в гиперболической части области прямой задачи, задаётся условие переопределения на характеристиках: на одной – значение нормальной производной, а на другой – значение самой функции. Доказаны теоремы однозначной разрешимости поставленных задач в смысле классического решения.

DOI: 10.31857/S0374064122120056, EDN: NCCOHF

1. Постановка задачи. Пусть задана конечная открытая область $\Omega_T\subset\mathbb{R}^2$, ограниченная при $y>0$ отрезками $AB,$ $BC,$ $CD,$ где $A(0,0),$ $B(0,1),$ $C(T,1),$ $D(T,0),$ T – фиксированное положительное число, а при $y<0$ – характеристиками AE $(x+y=0)$ и DE $(x-y=T)$ уравнения

$$Lu=\begin{cases}u_x-u_{yy}=0, & y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}-q(x)u=0, & y<0.\end{cases}\tag{1}$$

Уравнение (1) – смешанного параболо-гиперболического типа. Для него линия изменения типа $y=0$ не является характеристикой (параболическое вырождение первого рода [1, с. 258]).

Прямая задача. Найти в области Ω_T решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим начальным и краевым условиям:

$$u|_{AB}=\varphi(y),\quad u|_{BC}=0,\tag{2}$$

$$u|_{AE}=\psi(x),\quad x\in[0,T/2],\tag{3}$$

где $\varphi(y),$ $\psi(x)$ – заданные функции.

Обозначим
$$\Omega_{1T}:=\Omega_T\bigcap\{0<y\leqslant 1\},\quad \Omega_{2T}:=\Omega_T\bigcap\{-T/2\leqslant y<0\}.$$

Определение. *Решением задачи* (1)–(3) назовём функцию $u(x,y)$ из класса

$$C^1(\overline{\Omega}_T)\bigcap C^{1,2}_{x,y}(\Omega_{1T})\bigcap C^2(\Omega_{2T}),$$

удовлетворяющую условиям (2), (3) и обращающую уравнение (1) в тождество.

В **обратной задаче** предполагается неизвестным коэффициент $q(x)$ уравнения (1) и требуется определить его по следующим дополнительным условиям относительно решения прямой задачи, заданным на характеристиках AE и DE:

$$\frac{\partial u}{\partial\vec n}\bigg|_{AE}=\psi_1(x),\quad x\in[0,T/2],\quad u|_{DE}=\psi_2(x),\quad x\in[T/2,T],\tag{4}$$

где $\vec n=(1,1)$ – вектор нормали к $AE,$ внутренней по отношению к области $\Omega_{2T},$ а $\psi_i(x),$ $i=1,2,$ – заданные функции.

Относительно заданных функций будем предполагать выполненными следующие условия:

$(B1)$: $(B1)_1$ $\varphi(y) \in C^3[0,1]$, $(B1)_2$ $\psi(x) \in C^2[0,T/2]$;

$(B2)$: $(B2)_1$ $\varphi(0) = \psi(0)$, $(B2)_2$ $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$, $(B2)_3$ $\varphi(1) = \varphi'(1) = \varphi''(1) = 0$, $(B2)_4$ $\psi'(0) = 0$, $(B2)_5$ $|\psi(x)| \geqslant \psi_0 > 0$, $\psi_0 = \mathrm{const}$, $x \in [0,T/2]$;

$(B3)$: $(B3)_1$ $\psi_1(x) \in C^1[0,T/2]$, $(B3)_2$ $\psi_2(x) \in C^2[T/2,T]$;

$(B4)$: $(B4)_1$ $\psi(T/2) = \psi_2(T/2)$, $(B4)_2$ $\psi_1(T/2) = \psi_2'(T/2)$, $(B4)_3$ $|\psi_2(x)| \geqslant \psi_{00} > 0$, $\psi_{00} = \mathrm{const}$, $x \in [T/2,T]$.

Важность рассмотрения уравнений смешанного типа, когда уравнение в одной части области имеет параболический тип, а в другой – гиперболический, впервые была указана И.М. Гельфандом в 1959 г. [2]. Изучение электрических колебаний в проводах приводит к задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. В однородной среде, в случае её малой проводимости, напряжённость электромагнитного поля удовлетворяет волновому уравнению, в случае же сравнительно большой проводимости, когда можно перенебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости, упомянутая величина удовлетворяет уравнению теплопроводности (см. [3, с. 443–447]). Другим примером может служить явление движения жидкости в канале, окруженном пористой средой; так, в канале гидродинамическое давление жидкости удовлетворяет волновому уравнению, а в пористой среде – уравнению фильтрации, которое в данном случае совпадает с уравнением диффузии [4, с. 74–86]. В этом случае на границе канала выполняются некоторые условия согласования. Уравнения такого типа также возникают и во многих других областях естествознания.

Начально-краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа изучались многими авторами в областях, где гиперболическая часть представляет собой треугольник, ограниченный характеристиками $y + x = 0$, $y - x = 1$ и характеристической линией изменения типа $x = 0$ [5–11] (см. также библиографию в [8, 9]). Методы решения прямых и обратных задач, связанные с поиском решения начально-краевой задачи для уравнений параболо-гиперболического типа и неизвестной правой части (линейная задача) этого уравнения в прямоугольной области, были предложены в монографии [12] (см. также библиографию в ней). Среди работ по исследованию начально-краевых задач для уравнений параболо-гиперболического типа с нехарактеристической линией изменения типа $t = 0$ отметим работы [13–16], в которых исследовались задачи с локальными и нелокальными краевыми условиями.

Насколько нам известно, обратная коэффициентная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа исследуется в данной работе впервые. Отметим, что различные обратные задачи для классических типов дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка изучены достаточно полно (см., например, монографии [17–22] и приведённую там обширную библиографию).

Изучение обратных задач требует исследования дифференциальных свойств решений прямых задач. Особенно ярко это проявляется в коэффициентных обратных задачах (нелинейных задачах), где для получения теорем о разрешимости необходимо внимательно следить за точной зависимостью дифференциальных свойств решений прямой задачи от гладкости коэффициентов и других данных задачи.

2. Исследование прямой задачи. В этом пункте будет исследована прямая задача (1)–(3). Для этого докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (B1), (B2) и* $q(x) \in C[0,T]$. *Тогда существует в области* Ω_T *единственное решение прямой задачи (1)–(3).*

Доказательство. Предположим, что функция $q(x)$ известна и $q(x) \in C[0,T]$. Введём обозначения $\tau(x) := u(x,0)$, $\nu(x) := \dfrac{\partial}{\partial y}u(x,0)$. Тогда решение уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} = F(x,y)$$

в области Ω_{2T}, согласно формуле Даламбера, записывается в виде

$$u(x,y) = \frac{1}{2}[\tau(x+y) + \tau(x-y)] - \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} \nu(s)ds - \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\int\limits_{y+|\xi-x|}^{0} F(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi. \tag{5}$$

Рассмотрим уравнение (1) в области Ω_{2T}. Перенесём член, содержащий произведение $q(y)u$, в правую часть равенства и, использовав формулу (5), получим интегральное уравнение для функции $u(x,y)$:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[\tau(x+y)+\tau(x-y)]-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\nu(s)ds-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}q(\xi)\int\limits_{y+|\xi-x|}^{0}u(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi. \qquad (6)$$

С учётом (3) и $\tau(0)=\psi(0)$ из равенства (6) получим

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[\psi(0)+\tau(2x)]-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2x}\nu(s)ds-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2x}q(\xi)\int\limits_{-x+|\xi-x|}^{0}u(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi, \quad x\in[0,T/2]. \qquad (7)$$

Продифференцировав это равенство, имеем

$$\tau'(x)=\psi'\left(\frac{x}{2}\right)+\nu(x)+\int\limits_{x/2}^{x}q(\xi)u(\xi,-x+\xi)\,d\xi, \quad x\in[0,T]. \qquad (8)$$

Равенства (7) и (8) можно условно назвать основными соотношениями для функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$, полученными из гиперболической части области.

Введём обозначения

$$G_k(x-\xi,y,\eta)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi(x-\xi)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(x-\xi)}\right)+(-1)^k\exp\left(-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(x-\xi)}\right)\right], \quad k=1,2.$$

Используя функцию Грина $G_1(x-\xi,y,\eta)$ первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в области Ω_{1T}, решение уравнения (1) с условиями (2) и $u|_{AD}=\tau(x)$ представим в виде

$$u(x,y)=\int\limits_{0}^{1}G_1(x,y,\eta)\varphi(\eta)\,d\eta+\int\limits_{0}^{x}G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)\,d\xi. \qquad (9)$$

Отметим, что функции $G_k(x-\xi,y,\eta)$, $k=1,2$, имеют эквивалентные представления

$$G_1(x-\xi,y,\eta)=2\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-(n\pi)^2(x-\xi)]\sin(n\pi y)\sin(n\pi\eta),$$
$$G_2(x-\xi,y,\eta)=2\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-(n\pi)^2(x-\xi)]\cos(n\pi y)\cos(n\pi\eta)$$

и являются бесконечно дифференцируемыми в области Ω_{1T} [3, с. 200–204].

Найдём производные правой части (9), используя легко проверяемые соотношения

$$G_{1y}(x-\xi,y,\eta)=-G_{2\eta}(x-\xi,y,\eta),$$
$$G_{1\eta}(x-\xi,y,\eta)=-G_{2y}(x-\xi,y,\eta), \quad G_{2\xi}(x-\xi,y,\eta)=-G_{2yy}(x-\xi,y,\eta). \qquad (10)$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$\int\limits_{0}^{1}G_{1y}(x,y,\eta)\varphi(\eta)\,d\eta=-\int\limits_{0}^{1}G_{2\eta}(x,y,\eta)\varphi(\eta)\,d\eta=$$
$$=G_2(x,y,0)\varphi(0)-G_2(x,y,1)\varphi(1)+\int\limits_{0}^{1}G_2(x,y,\eta)\varphi'(\eta)\,d\eta.$$

Используя (10) и интегрируя по частям, вычислим производную по y второго слагаемого в правой части формулы (9):

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)\,d\xi = -\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x G_{2y}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int\limits_0^x G_{2\xi}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)\,d\xi = -G_2(x,y,0)\tau(0) - \int\limits_0^x G_2(x-\xi,y,0)\tau'(\xi)\,d\xi.$$

С учётом этих соотношений дифференцируем теперь (9) по y и полагаем $y=0$. Так как $(\partial/\partial y)u(x,0)=\nu(x)$, то ввиду условий согласования $(B2)_1$ находим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесённое из параболической части:

$$\nu(x) = \int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'(\eta)\,d\eta - \int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\tau'(\xi)\,d\xi, \quad x\in[0,T]. \tag{11}$$

Заметим, что для функции $G_2(x-\xi,0,0)$ имеет место представление

$$G_2(x-\xi,0,0) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(x-\xi)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{x-\xi}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi(x-\xi)}} + \frac{2}{\sqrt{\pi(x-\xi)}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{x-\xi}\right). \tag{12}$$

Отсюда следует, что функция $G_2(x-\xi,0,0)$ имеет слабо полярную особенность.

Исключив функцию $\tau(x)$ в (6) с помощью равенства (7), а $\tau'(x)$ в (11) с помощью (8), получим систему интегральных уравнений для функций $u(x,y)$, $\nu(x)$:

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \int\limits_0^{x+y}\nu(s)ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x+y} q(\xi)\int\limits_{-(x+y)/2+|\xi-(x+y)/2|}^{0} u(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x-y} q(\xi)\int\limits_{-(x-y)/2+|\xi-(x-y)/2|}^{0} u(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi - \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} q(\xi)\int\limits_{y+|\xi-x|}^{0} u(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi, \tag{13}$$

$$\nu(x) = \nu_0(x) - \int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\nu(\xi)\,d\xi - \int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\int\limits_{\xi/2}^{\xi} q(\eta)u(\eta,-\xi+\eta)\,d\eta\,d\xi, \tag{14}$$

где

$$u_0(x,y) = \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) - \psi(0), \tag{15}$$

$$\nu_0(x) = -\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi'(\xi/2)\,d\xi + \int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'(\eta)\,d\eta. \tag{16}$$

Уравнения (13) и (14) представляют собой систему линейных интегральных уравнений вольтеровского типа второго рода для определения неизвестных функций $u(x,y)$, $\nu(x)$ с непрерывными свободными членами и ядрами, согласно (12) имеющими слабо полярную особенность. Из теории интегральных уравнений известно, что система уравнений (13) и (14) разрешима в классе непрерывных в $\overline{\Omega}_{2T}$ функций. Это решение может быть найдено, например, методом последовательных приближений с учётом $\nu(0)=0$ в силу $\lim\limits_{x\to 0} G_2(x,0,\eta)=0$ для $\eta\in(0,1)$. Гладкость решения зависит от гладкости функций $\varphi(y)$, $\psi(x)$, входящих в свободные члены уравнений (13) и (14).

В силу сказанного выше и выполнения условий $(B1)$ выражение, стоящее в формуле (6) справа, имеет по x, y частные производные первого порядка. Поэтому и левая часть этого равенства, т.е. функция $u(x,y)$, также имеет производные первого порядка в области Ω_{2T}:

$$u_x(x,y)=\frac{1}{2}[\tau'(x+y)+\tau'(x-y)]+\frac{1}{2}[\nu(x+y)-\nu(x-y)]-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} q(\xi)u(\xi,y+|\xi-x|)\,\mathrm{sign}\,(\xi-x)\,d\xi, \tag{17}$$

$$u_y(x,y)=\frac{1}{2}[\tau'(x+y)-\tau'(x-y)]+\frac{1}{2}[\nu(x+y)+\nu(x-y)]+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} q(\xi)u(\xi,y+|\xi-x|)\,d\xi, \tag{18}$$

где $\tau'(\cdot)$ определяется по формуле (8).

Предполагая далее существование производной у функции $\nu(x)$, на основании условий (2), (3) и $(B1)$ из (14) получим для $\nu'(x)$ уравнение

$$\nu'(x)=\frac{\partial}{\partial x}\nu_0(x)-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\Bigg[q(\xi)u(\xi,0)-\frac{1}{2}q(\xi/2)\psi(\xi/2)+\int\limits_{\xi/2}^{\xi} q(\eta)u_y(\eta,-\xi+\eta)\,d\eta\Bigg]\,d\xi-$$

$$-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\nu'(\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

Согласно формуле (16) вычислим

$$\frac{\partial}{\partial x}\nu_0(x)=-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi''(\xi/2)\,d\xi+\int\limits_0^1 G_{2x}(x,0,\eta)\varphi'(\eta)\,d\eta. \tag{20}$$

Учитывая равенство

$$\int\limits_0^1 G_{2x}(x,0,\eta)\varphi'(\eta)\,d\eta=\int\limits_0^1 G_{2\eta\eta}(x,0,\eta)\varphi'(\eta)\,d\eta,$$

с помощью интегрирования по частям на основе условий $(B1)$, $(B2)_2$ и $(B2)_3$ находим

$$\int\limits_0^1 G_{2\eta\eta}(x,0,\eta)\varphi'(\eta)\,d\eta=\int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'''(\eta)\,d\eta.$$

С учётом этого запишем (20) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\nu_0(x)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi''(\xi/2)\,d\xi+\int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'''(\eta)\,d\eta. \tag{21}$$

Отсюда и из непрерывности функций $u(x,y)$ и $u_y(x,y)$ в области Ω_{2T} заключаем, что свободный член интегрального уравнения (19) является непрерывной функцией на отрезке $[0,T]$. Таким образом, уравнение (19) разрешимо в классе непрерывных функций. Обозначая решение уравнения (20) через $N(x)$, положим $\nu(x)=\int_0^x N(\xi)\,d\xi$. Нетрудно убедиться в том, что функция $\nu(x)$ удовлетворяет уравнению (15) и принадлежит классу $C^1[0,T]$.

Ранее полученные равенства (17), (18) показывают, что $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ являются непрерывными функциями в области Ω_{2T}. В силу $\nu(x)\in C^1[0,T]$ имеем $\tau(x)\in C^2[0,T]$. Отсюда вытекает, что правые части равенств (17), (18) также имеют по x, y частные производные первого порядка и, следовательно, функция $u(x,y)$ имеет непрерывные в Ω_{2T} производные второго порядка. В дальнейшем нам понадобятся выражения для этих производных:

$$u_{xx}(x,y)=\frac{1}{2}[\tau''(x+y)+\tau''(x-y)]+\frac{1}{2}[\nu'(x+y)-\nu'(x-y)]+q(x)u(x,y)-$$

$$-\frac{1}{2}[q(x+y)u(x+y,0)+q(x-y)u(x-y,0)]+\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}q(\xi)u_x(\xi,y+|\xi-x|)\,d\xi, \tag{22}$$

$$u_{xy}(x,y)=\frac{1}{2}[\tau''(x+y)-\tau''(x-y)]+\frac{1}{2}[\nu'(x+y)+\nu'(x-y)]-$$

$$-\frac{1}{2}[q(x+y)u(x+y,0)-q(x-y)u(x-y,0)]-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}q(\xi)u_x(\xi,y+|\xi-x|)\,\mathrm{sign}\,(\xi-x)\,d\xi, \tag{23}$$

$$u_{yy}(x,y)=\frac{1}{2}[\tau''(x+y)+\tau''(x-y)]+\frac{1}{2}[\nu'(x+y)-\nu'(x-y)]-$$

$$-\frac{1}{2}[q(x+y)u(x+y,0)+q(x-y)u(x-y,0)]+\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}q(\xi)u_x(\xi,y+|\xi-x|)\,d\xi. \tag{24}$$

Формулы (22)–(24) показывают, что $\{u_{xx},u_{yx},u_{yy}\}\in C(\Omega_{2T})$.

Итак, по найденным функциям $\nu(x)\in C^1[0,T]$, $u(x,y)\in C^2(\Omega_{2T})$ функция $\tau(x)$ находится из формулы (7). Тогда функция $u(x,y)$, построенная по формуле (9) как решение уравнения (1) с условиями (2) и $u|_{AD}=\tau(x)$, принадлежит классу $C^{1,2}_{x,y}(\Omega_{1T})$. Таким образом, найденные в Ω_{2T} решение $u(x,y)$ и функция (9) в области Ω_{1T} в совокупности определяют решение прямой задачи (1)–(3) в области Ω_T. Теорема доказана.

3. Исследование обратной задачи. Пусть выполнены условия $(B2)$. Предположим, что неизвестная функция $q(x)$, $x\in[0,T]$, имеет вид $q(x)=q_1(x)$, $x\in[0,T/2]$, $q(x)=q_2(x)$, $x\in[T/2,T]$, причём $q_1(T/2)=q_2(T/2)$. Записав первое условие в (4) в виде

$$u_x(x,-x)+u_y(x,-x)=\psi_1(x),\quad x\in[0,T/2],$$

и продифференцировав его, имеем

$$u_{xx}(x,-x)-u_{yy}(x,-x)=\psi_1'(x),\quad x\in[0,T/2]. \tag{25}$$

Используя формулы (22) и (24) при $y=-x$, из (25) находим функцию $q_1(x)$:

$$q_1(x)=\frac{\psi_1'(x)}{\psi(x)},\quad x\in[0,T/2]. \tag{26}$$

Дифференцируя теперь два раза второе равенство в (4), получаем

$$u_{xx}(x,x-T)+2u_{xy}(x,x-T)+u_{yy}(x,x-T)=\psi_2''(x),\quad x\in[T/2,T]. \tag{27}$$

С учётом формул (22)–(24) при $y = x - T$ из (27) следует равенство

$$\psi_2''(x) = 2\tau''(2x-T) + 2\tau'(2x-T) - 2q(2x-T)u(2x-T,0) + q(x)u(x,x-T) + \\ + 2\int\limits_{2x-T}^{x} q(\xi)u_y(\xi, 2x-T-\xi), \quad x \in [T/2, T]. \tag{28}$$

Вычислив производную от обеих частей (8) и заменив переменную x на $2x - T$, исключим $\tau''(2x-T)$ в правой части (28). Разрешая при этом получающееся уравнение относительно $q_2(x)$ и используя (3), (26), а также второе условие в (4), находим

$$q_2(x) = \frac{1}{\psi_2(x)}[\psi_2''(x) - \psi''(x-T/2) + \psi_1'(x-T/2)] - \frac{4\nu'(2x-T)}{\psi_2(x)} + \\ + \frac{2}{\psi_2(x)}\Bigg[\int\limits_{x-T/2}^{2x-T} q(\xi)u_y(\xi, -2x+T+\xi)\,d\xi + \int\limits_{2x-T}^{x} q(\xi)u_y(\xi, 2x-T-\xi)\,d\xi\Bigg], \quad x \in [T/2, T]. \tag{29}$$

Из условия (3) и первого соотношения в (4) также следует равенство

$$u_y(x, -x) = (1/2)[\psi_1(x) - \psi_1'(x)].$$

В силу $\lim\limits_{x\to 0} G_2(x, 0, \eta) = 0$ для $\eta \in (0,1)$ из (19) и (21) находим $\nu'(0) = 0$. Используя эти соображения и (B3), получим условие для заданных функций (при выполнении которого имеет место равенство $q_1(T/2) = q_2(T/2)$):

$$\psi_1'(T/2) = \psi_2''(T/2) - \psi''(0) + \psi_1'(0) - \int\limits_0^{T/2} \frac{\psi_1'(\xi)}{\psi(\xi)}[\psi_1(\xi) - \psi_1'(\xi)]\,d\xi. \tag{30}$$

Исключив в правой части (29) функцию $\nu'(2x-T)$ с помощью (19) и отделив свободный от неизвестных член, имеем

$$q_2(x) = q_{02}(x) - \frac{4}{\psi_2(x)}\int\limits_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi, 0, 0)\nu'(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{4}{\psi_2(x)}\int\limits_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi, 0, 0)\Bigg[q(\xi)\varphi(\xi) + \int\limits_{\xi/2}^{\xi} q(\eta)u_y(\eta, -\xi+\eta)\,d\eta\Bigg]\,d\xi + \\ + \frac{4}{\psi_2(x)}\Bigg[\int\limits_{x-T/2}^{2x-T} q(\xi)u_y(\xi, -2x+T+\xi)\,d\xi + \int\limits_{2x-T}^{x} q(\xi)u_y(\xi, 2x-T-\xi)\,d\xi\Bigg], \quad x \in [T/2, T], \tag{31}$$

где

$$q_{02}(x) = \frac{1}{\psi_2(x)}[\psi_2''(x) - \psi''(x-T/2) + \psi_1'(x-T/2)] - \frac{2}{\psi_2(x)}\int\limits_0^1 G_2(2x-T, 0, \eta)\varphi'''(\eta)\,d\eta + \\ + \frac{2}{\psi_2(x)}\int\limits_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi, 0, 0)[\psi''(\xi/2) - \psi_1'(\xi/2)]\,d\xi, \quad x \in [T/2, T]. \tag{32}$$

Соотношения (26) и (31) объединим в одно уравнение

$$q(x) = q_0(x) - \frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)} \int\limits_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi,0,0)\nu'(\xi)\,d\xi +$$

$$+\frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)} \int\limits_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi,0,0)\biggl[q(\xi)\varphi(\xi) + \int\limits_{\xi/2}^{\xi} q(\eta)u_y(\eta,-\xi+\eta)\,d\eta\biggr]\,d\xi +$$

$$+\frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\biggl[\int\limits_{x-T/2}^{2x-T} q(\xi)u_y(\xi,-2x+T+\xi)\,d\xi + \int\limits_{2x-T}^{x} q(\xi)u_y(\xi,2x-T-\xi)\,d\xi\biggr], \quad x\in[0,T], \quad (33)$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда: $\theta(t)=1,\ t\geqslant 0,\ \theta(t)=0,\ t<0;$

$$q_0(x) = \theta(T/2-x)\frac{\psi_1'(x)}{\psi(x)} + \theta(x-T/2)q_{02}(x), \quad x\in[0,T]. \quad (34)$$

Нетрудно заметить, что если выполнено условие

$$\psi_1'(T/2) = \psi_2''(T/2) - \psi''(0) + \psi_1'(0), \quad (35)$$

то функция $q_0(x)$ является непрерывной на отрезке $[0,T]$. Тогда, как следует из (30), для того чтобы $q(x)\in C[0,T]$ достаточно выполнения условия

$$\int\limits_0^{T/2} \frac{\psi_1'(\xi)}{\psi(\xi)}[\psi_1(\xi)-\psi_1'(\xi)]\,d\xi = 0. \quad (36)$$

В дальнейшем будем считать выполненными условия (35) и (36).

Замечание 1. Условиям $(B2)_4$, $(B2)_5$, $(B3)$, $(B4)$, (36) и (37), в частности, удовлетворяют функции

$$\psi(x)=\exp(x^2), \quad \psi_1(x)=\exp(x),$$

$$\psi_2(x) = \exp(x) + \frac{x^2}{2} - \frac{Tx}{2} + \exp\biggl(\frac{T^2}{4}\biggr) - \exp\biggl(\frac{T}{2}\biggr) + \frac{T^2}{8}.$$

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (B1)–(B4), (35), (36). Тогда для достаточно малых T существует единственное решение $q(x)\in C[0,T]$ обратной задачи (1)–(4).*

Доказательство. Введём в рассмотрение вектор функцию, определив её компоненты с помощью неизвестных функций:

$$p(x,y) = [p_1(x,y),p_2(x),p_3(x)]^{\text{т}} := [u_y(x,y),\nu'(x),q(x)]^{\text{т}},$$

$^{\text{т}}$ – знак транспонирования. Тогда, используя очевидные соотношения

$$\nu(x) = \int\limits_0^x p_2(\xi)\,d\xi, \quad u(x,y) = \psi(x) + \int\limits_{-x}^{y} p_1(x,\eta)\,d\eta \quad (37)$$

и исключая сначала функцию $\tau'(x)$ в (18) с помощью (8), а затем $\nu(x)$ и $u(x,y)$ в получающемся уравнении и в (20) с помощью (37), запишем уравнения (18), (19), (33) в векторно-операторном виде

$$p(x,y) = Ap(x,y), \quad (x,y)\in\overline{\Omega}_{2T}, \quad (38)$$

где $A = [A_1, A_2, A_3]^{\text{т}}$ и A_i, $i = 1, 2, 3$, определяются равенствами

$$A_1 p(x,y) = p_{01}(x,y) + \in t_0^{x+y} p_2(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\Bigg\{ \int\limits_{(x+y)/2}^{x+y} p_3(\xi)\Bigg[\psi(\xi) + \int\limits_{-\xi}^{-(x+y)+\xi} p_1(\xi,\eta)\,d\eta\Bigg]\,d\xi -$$

$$- \int\limits_{(x-y)/2}^{x-y} p_3(\xi)\Bigg[\psi(\xi) + \int\limits_{-\xi}^{-(x-y)+\xi} p_1(\xi,\eta)\,d\eta\Bigg]\,d\xi\Bigg\} + \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} p_3(\xi)\Bigg[\psi(\xi) + \int\limits_{-\xi}^{y+|\xi-x|} p_1(\xi,\eta)\,d\eta\Bigg]\,d\xi,$$

$$A_2 p(x) = p_{02}(x) - \int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0) p_2(\xi)\,d\xi - \int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\ \times$$

$$\times \Bigg[p_3(\xi)\bigg(\psi(\xi) + \int\limits_{-\xi}^{0} p_1(\xi,\eta)\,d\eta\bigg) - \frac{1}{2}p_3(\xi/2)\psi(\xi/2) + \int\limits_{\xi/2}^{\xi} p_3(\eta)p_1(\eta,-\xi+\eta)\,d\eta\Bigg]\,d\xi,$$

$$A_3 p(x) = p_{03}(x) - \frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)} \int\limits_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi,0,0) p_2(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)} \int\limits_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi,0,0)\Bigg[p_3(\xi)\varphi(\xi) + \int\limits_{\xi/2}^{\xi} p_3(\eta)p_1(\eta,-\xi+\eta)\,d\eta\Bigg]\,d\xi +$$

$$+ \frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\Bigg[\int\limits_{x-T/2}^{2x-T} p_3(\xi)p_1(\xi,-2x+T+\xi)\,d\xi + \int\limits_{2x-T}^{x} p_3(\xi)p_1(\xi,2x-T-\xi)\,d\xi\Bigg].$$

Здесь через функции p_{01}, p_{02} и p_{03} обозначены выражения

$$p_{01}(x,y) := \frac{1}{2}\bigg[\psi'\bigg(\frac{x+y}{2}\bigg) - \psi'\bigg(\frac{x-y}{2}\bigg)\bigg], \quad p_{02}(x) := \frac{\partial}{\partial x}\nu_0(x), \quad p_{03}(x) := q_0(x). \tag{39}$$

Далее нам необходимы оценки интегралов с участием функции G_2, входящей в уравнение (38). Ниже проведём оценки по одному из однотипных интегралов. Для этого, использовав легко проверяемые соотношения

$$\int\limits_0^1 G_2(x,y,\eta)\,d\eta = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 z^2} \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2z}, \quad z > 0,$$

получим неравенства

$$\bigg|\int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'''(\eta)\,d\eta\bigg| \leqslant \max_{y\in[0,1]} |\varphi'''(y)|, \tag{40}$$

$$\bigg|\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi''(\xi/2)\,d\xi\bigg| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x \frac{\psi''(\xi/2)}{\sqrt{x-\xi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\bigg(-\frac{n^2}{x-\xi}\bigg)\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \max_{x\in[0,T/2]} |\psi''(x)| \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{x-\xi}}\biggl(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\Bigl(-\frac{n^2}{x-\xi}\Bigr)\biggr)\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in[0,T/2]} |\psi''(x)| \left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} + x\right| \leqslant \sqrt{T}\biggl(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{T}\biggr)\max_{x\in[0,T/2]}|\psi''(x)|. \qquad (41)$$

Обратимся к уравнению (38). Очевидно, что оператор A переводит функции $p(x,y) \in C(\overline{\Omega}_{2T})$ в функции, также принадлежащие пространству $C(\overline{\Omega}_{2T})$. Покажем теперь, что при достаточно малом T оператор A осуществляет сжатое отображение шара $S(p_0,r) \subset C(\overline{\Omega}_{2T})$ радиуса r с центром в точке $p_0(x,y) = (p_{01}(x,y), p_{02}(x), p_{03}(x))$ в себя. Тем самым мы покажем, что уравнение (38) имеет в области $\overline{\Omega}_{2T}$ при достаточно малом T единственное непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству $\|p-p_0\|_T \leqslant r$. Норму p естественно здесь определить равенством

$$\|p\|_T = \max\Bigl\{\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{2T}}|p_1(x,y)|,\ \max_{x\in[0,T]}|p_2(x)|,\ \max_{x\in[0,T]}|p_3(x)|\Bigr\}.$$

Очевидно, что для элементов $p\in S(p_0,r)$ имеет место оценка

$$\|p\|_T \leqslant \|p_0\|_T + r =: R,$$

где

$$\|p_0\|_T = \max\Bigl\{\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}|p_{01}(x,y)|,\ \max_{x\in[0,T]}|p_{02}(x)|,\ \max_{x\in[0,T]}|p_{03}(x)|\Bigr\}.$$

Из соотношений (39), (21), (34) и (32) с учётом (40), (41) для $\|p_0\|_T$ следует оценка

$$\|p_0\|_T \leqslant \max\biggl\{\max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)|,\ \max_{y\in[0,1]}|\varphi'''(y)| + \sqrt{T}\biggl(\frac{1}{\sqrt{\pi}}+\frac{\sqrt{T}}{2}\biggr)\max_{x\in[0,T/2]}|\psi''(x)|,$$

$$\frac{1}{\psi_0}\max_{x\in[0,T/2]}|\psi_1'(x)| + \frac{1}{\psi_{00}}\biggl[\max_{x\in[T/2,T]}|\psi_2''(x)| + 2\max_{y\in[0,1]}|\varphi'''(y)| +$$

$$+\biggl(1+2\sqrt{T}\biggl(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{T}\biggr)\biggr)\max_{x\in[0,T/2]}(|\psi''(x)|+|\psi_1'(x)|)\biggr]\biggr\}.$$

Теперь покажем, что для некоторых малых T оператор A является на шаре $S(p_0,r)$ оператором сжатия.

Действительно, пусть $p\in S(p_0,r)$. Тогда для всех точек $(x,y)\in\overline{\Omega}_{2T}$, учитывая соотношения (40), (41), получаем неравенства

$$|A_1p - p_{01}| \leqslant \biggl[1+3\Bigl(\max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)| + RT\Bigr)\biggr]RT,$$

$$|A_2p - p_{02}| \leqslant \biggl(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{T}\biggr)\biggl(1+\frac{3}{2}\max_{x\in[0,T/2]}|\psi(x)| + \frac{3RT}{4}\biggr)R\sqrt{T},$$

$$|A_3p - p_{03}| \leqslant \frac{4}{\psi_{00}}\biggl(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{T}\biggr)\biggl(1+\max_{x\in[0,T/2]}|\psi(x)| + \frac{TR}{2} + \frac{3R\sqrt{T}}{2}\biggr)R\sqrt{T}.$$

Обозначим через T^* наибольшее значение T, для которого правые части этих неравенств будут меньше чем R. Тогда для $T\leqslant T^*$ имеет место включение $Ap\in S(p_0,r)$. Остаётся показать, что оператор A сжимает расстояние между элементами шара $S(p_0, r)$. Для доказательства этого возьмём любые два элемента $p^1, p^2 \in S(p_0, r)$ и оценим норму разности между их образами Ap^1, Ap^2. Обозначим компоненты элементов p^1, p^2 через p_i^1, p_i^2, $i = 1, 2, 3$. При оценке $\|Ap^1 - Ap^2\|_T$ воспользуемся неравенствами

$$|p_k^1 p_s^1 - p_k^2 p_s^2| \leqslant |p_k^1 - p_k^2||p_s^1| + |p_k^2||p_s^1 - p_s^2| \leqslant 2R\|p^1 - p^2\|_T, \quad k, s = 1, 2, 3,$$

которые имеют место для произвольных $p^1, p^2 \in S(p_0, r)$. В результате имеем оценки

$$|A_1 p^1 - A_1 p^2| \leqslant \left[1 + 3\left(\max_{x \in [0, T/2]} |\psi'(x)| + 2RT\right)\right] T\|p^1 - p^2\|_T,$$

$$|A_2 p^1 - A_2 p^2| \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{T}\right)\left(1 + \frac{3}{2}\max_{x \in [0, T/2]} |\psi(x)| + \frac{3RT}{2}\right)\sqrt{T}\|p^1 - p^2\|_T,$$

$$|A_3 p^1 - A_3 p^2| \leqslant \frac{4}{\psi_{00}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{T}\right)\left(1 + \max_{x \in [0, T/2]} |\psi(x)| + TR + 3R\sqrt{T}\right)\sqrt{T}\|p^1 - p^2\|_T,$$

откуда следует, что

$$\|Ap^1 - Ap^2\| \leqslant \frac{T}{T^*}\|p^1 - p^2\|_T,$$

и оператор A при $T \in (0, T^*)$ осуществляет сжатое отображение шара $S(p_0, r)$ на себя. Тогда, согласно принципу сжимающих отображений, уравнение (38) определяет единственное решение, принадлежащее этому шару. Теорема доказана.

Замечание 2. По найденным $p_1(x, y)$, $p_2(x)$ функции $\nu(x)$, $u(x, y)$ находятся по формулам (37). Тогда из формулы (8) определим $\tau'(x)$ $(q(x) = p_3(x)$ – известна). Далее $\tau(x)$ вычисляется по формуле

$$\tau(x) = \psi(0) + \int_0^x \tau'(\xi)\, d\xi,$$

а функция $u(x, y)$ в области $\overline{\Omega}_{1T}$ определяется из соотношения (9). Построенная таким образом функция $u(x, y)$ в областях $\overline{\Omega}_{1T}$ и $\overline{\Omega}_{2T}$ будет классическим решением прямой задачи в смысле указанного выше определения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др.* Линейные уравнения математической физики. Справочная математическая библиотека. М., 1964.
2. *Гельфанд И.М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. № 3 (87). С. 3–19.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1953.
4. *Лейбензон Л.Л.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.; Л., 1947.
5. *Золина Л.А.* О краевой задаче для модельного уравнения гиперболического типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1966. Т. 6. № 6. С. 991–1001.
6. *Бжихатлов Х.Г., Нахушев А.М.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183. № 2. С. 261–264.
7. *Елеев В.А.* О некоторых краевых задачах со смещением для одного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 1. С. 22–29.
8. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент, 1979.
9. *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов А.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, 1986.
10. *Капустин Н.Ю.* Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 1. С. 72–78.

11. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 1. С. 117–126.
12. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. Уфа, 2015.
13. *Капустин Н.Ю.* Об обобщённой разрешимости задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 6. С. 1294–1298.
14. *Елеев В.А.* Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 1. С. 56–63.
15. *Елеев В.А.* Обобщённая задача Трикоми для смешанных гиперболо-параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 1. С. 41–53.
16. *Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А.* О задаче типа Франкеля для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 2. С. 298–304.
17. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980.
18. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М., 1984.
19. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М., 1994.
20. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Monogr. Textbooks Pure Appl. Math. V. 231. New York, 1999.
21. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2009.
22. *Hasanoğlu A. Hasanov, Romanov V.G.* Introduction to Inverse Problems for Differential Equations. Cham, 2017.

Бухарское отделение Института математики
имени В.И. Романовского АН Республики Узбекистан,
Бухарский государственный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию 15.05.2022 г.
После доработки 15.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1645–1653

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.222

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2022 г. В. С. Климов

Пусть A – линейный равномерно эллиптический оператор второго порядка, определённый на функциях n переменных. Изучается множество $\mathscr{K}(A;B)$ решений неравенства $A(u)\geqslant 0$, удовлетворяющих краевому условию типа Неймана $Bu=0$. Устанавливается оценка вида $\|u;H_1^2(\Omega)\|\leqslant C(w)(u,w)$, в которой $H_1^2(\Omega)$ – пространство Никольского, $(\cdot\,,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, w – неотрицательная ненулевая функция из пространства Шварца $\mathscr{D}(\Omega)$. Если $u_j\in\mathscr{K}(A,B)$ $(j=1,2,\ldots)$ и последовательность $\{u_j\}$ сходится в $\mathscr{D}'(\Omega)$ к функции u, то $u\in H_1^2(\Omega)$ и $\{u_j\}$ сходится к u в пространстве Соболева $W_p^1(\Omega)$, где $p(n-1)<n$.

DOI: 10.31857/S0374064122120068, EDN: NCEKSJ

Введение. В работе изучается множество $\mathscr{K}(A;B)$ решений дифференциального неравенства $Au\geqslant 0$, удовлетворяющих краевому условию типа Неймана $Bu=0$. Здесь A – равномерно эллиптический оператор второго порядка. Неравенство $Au\geqslant 0$ означает, что u есть решение уравнения $Au=f$, где f – мера. Неприятной особенностью эллиптических краевых задач является то, что их теория не применима в пространстве $C(\overline{\Omega})$ и в сопряжённом к нему пространстве $M(\overline{\Omega})$. В частности, для подобных пространств не выполняется неравенство коэрцитивности, играющее первостепенную роль при исследовании граничных задач в пространствах $L_p(\Omega)$ $(1<p<\infty)$. Решающее значение в преодолении возникающих здесь трудностей имеют точные по порядку особенностей оценки функции Грина [1] и теоремы о полном наборе гомеоморфизмов [2, с. 9].

В п. 1 приводятся сведения о различных классах функций, основное внимание уделяется пространствам Соболева $W_p^k(\Omega)$ [3] и Никольского $H_1^k(\Omega)$ [4, 5], напоминаются определения пространства Шварца $\mathscr{D}(\Omega)$ и сопряжённого к нему пространства распределений $\mathscr{D}'(\Omega)$ [6].

В п. 2 содержится доказательство оценки

$$\|u;H_1^2(\Omega)\|\leqslant C\|Au;M(\overline{\Omega})\|$$

при ряде предположений относительно краевой задачи типа Неймана $Au=f$, $Bu=0$. Главные предположения – единственность решения и достаточная гладкость данных задачи.

Основные результаты работы приведены в п. 3: для функций класса $\mathscr{K}(A;B)$ устанавливаются обратные неравенства вида $\|u;H_1^2(\Omega)\|\leqslant C\Lambda(u)$, где C – не зависящая от функции u из множества $\mathscr{K}(A;B)$ постоянная, Λ – линейный функционал. Если функция Грина для рассматриваемой краевой задачи положительна, то функционал Λ можно определить равенством

$$\Lambda(u)=\int\limits_{\Omega}u(x)w(x)\,dx,$$

в котором w – неотрицательная и ненулевая функция класса $\mathscr{D}(\Omega)$.

1. Функциональные пространства. Всюду далее $\mathbb{R}^n$ – действительное n-мерное евклидово пространство с нормой $|x|$; Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n>1)$; $L_p(\Omega)$ – пространство Лебега, как обычно, эквивалентные относительно n-мерной меры Лебега mes_n функции отождествляются; $1\leqslant p\leqslant\infty$; норма в пространстве $L_p(\Omega)$ вводится стандартным образом.

Для натурального числа k и $q \in [1,\infty)$ через $W_q^k(\Omega)$ обозначается совокупность функций из $L_q(\Omega)$, производные в смысле Соболева [3, 4] которых до порядка k включительно принадлежат пространству $L_q(\Omega)$. Норма в $W_q^k(\Omega)$ определяется равенством

$$\|u; W_q^k(\Omega)\| = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u; L_q(\Omega)\|.$$

Здесь и всюду ниже $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ – порядок мультииндекса $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $D^\alpha u = D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n} u$, $D_i = \partial/\partial x_i$.

Напомним определение пространства Никольского $H_1^k(\Omega)$. Обозначим через Ω_η совокупность точек из Ω, отстоящих от границы области Ω на расстояние большее, чем η. Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежит $H_1^1(\Omega)$, если она суммируема по Ω и выполняется условие Зигмунда

$$\|f(\cdot+h) - 2f(\cdot) + f(\cdot-h); L_1(\Omega_\eta)\| \leqslant M|h|, \quad |h| < \eta. \tag{1}$$

Класс $H_1^1(\Omega)$ образует пространство Банаха, если ввести норму

$$\|f; H_1^1(\Omega)\| = \|f; L_1(\Omega)\| + M_f,$$

где M_f – наименьшая константа, с которой выполняется неравенство (1) для всех η, для которых Ω_η имеет смысл. Для натурального $k>1$ пространство $H_1^k(\Omega)$ состоит из функций класса $W_1^{k-1}(\Omega)$, все производные которых порядка $k-1$ принадлежат пространству $H_1^1(\Omega)$. В $H_1^k(\Omega)$ вводится норма

$$\|f; H_1^k(\Omega)\| = \|f; W_1^{k-1}(\Omega)\| + \sum_{|\alpha|=k-1} \|D^\alpha f; H_1^1(\Omega)\|.$$

Хорошо известны определения пространств Никольского $H_1^k(\Omega)$ и для нецелых значений параметра k [4, с. 180].

Приведём два вспомогательных утверждения о пространствах Никольского.

Предложение 1 [5]. *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей $\partial\Omega$. Тогда из всякой последовательности $\{u_s\}$ функций с ограниченными нормами*

$$\|u_s; H_1^r(\Omega)\| \leqslant M \tag{2}$$

можно выделить подпоследовательность $\{u_{s_k}\}$ со следующими свойствами:

1) $\{u_{s_k}\}$ сходится в любой метрике, более слабой чем метрика $H_1^r(\Omega)$, к некоторой функции u из пространства $H_1^r(\Omega)$;

2) для этой функции u выполняется неравенство $\|u; H_1^r(\Omega)\| \leqslant M$, где константа M та же, что и в (2).

Предложение 1 называют *теоремой об ослабленной компактности пространств Никольского.* Под метрикой, более слабой чем метрика в $H_1^r(\Omega)$, можно понимать метрику пространства $H_1^{r_1}(\Omega)$ при $0<r_1<r$ или метрику пространства $L_1(\Omega)$.

Предложение 2 [7]. *Пусть $\mathscr{X}$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $F\colon \mathscr{X}\times\mathscr{X} \to \mathbb{R}$ – функция, непрерывная по совокупности переменных вне диагонали $x=y$ вместе со всеми частными производными $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ второго порядка. Пусть для любых $x\neq y$ имеют место неравенства*

$$|F(x,y)| \leqslant \frac{c}{|x-y|^{n-1}}, \quad \left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant \frac{c}{|x-y|^{n+1}}, \quad i,j=\overline{1,n}.$$

Тогда совокупность функций $F_y(\cdot) = F(\,\cdot\,,y)$ $(y\in\mathscr{X})$ есть ограниченное множество в пространстве Никольского $H_1^1(\mathscr{X})$.

Для компактного множества $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ обычным образом [8, с. 261; 9, с. 63] вводится банахово пространство $C(\mathbb{K})$ непрерывных на $\mathbb{K}$ действительных функций. Норма в $C(\mathbb{K})$ определяется равенством

$$\|u; C(\mathbb{K})\| = \max_{x\in\mathbb{K}} |u(x)|.$$

Через $\mathrm{rca}\,(\mathbb{K})$ обозначается множество всех регулярных счётно-аддитивных функций μ, заданных на σ-алгебре $\mathscr{B}$ всех борелевских множеств из $\mathbb{K}$ и имеющих конечную полную вариацию $|\mu|(\mathbb{K}) < \infty$. Сопряжённое к $C(\mathbb{K})$ пространство $(C(\mathbb{K}))^*$ состоит из линейных функционалов Λ, допускающих представление

$$\Lambda(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{K}} \varphi(x)\, d\mu(x), \quad \varphi \in C(\mathbb{K}),$$

и обозначаемых через μ_Λ [8, 9]. Если функционал Λ положителен, то его норма равна

$$\|\Lambda; (C(\mathbb{K}))^*\| = \Lambda(1) = \mu(\mathbb{K}),$$

соответствующий ассоциированный функционал μ_Λ называют *мерой*. Далее пространство $(C(\mathbb{K}))^*$ обозначается символом $M(\mathbb{K})$, его элементы называются *зарядами*. Совокупность положительных функционалов обозначим через $M_+(\mathbb{K})$. Любой функционал Λ из пространства $M(\mathbb{K})$ представим в виде разности двух положительных функционалов: $\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2$; при этом

$$\|\Lambda; M(\mathbb{K})\| = \|\Lambda_1; M(\mathbb{K})\| + \|\Lambda_2; M(\mathbb{K})\|.$$

Функционал Λ назовём *дискретным*, если он допускает представление

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{N} c_i \delta_{y_i},$$

где коэффициенты c_i – действительные числа, y_i – различные элементы компакта $\mathbb{K}$; здесь и далее δ_y – единичная мера Дирака, сосредоточенная в точке y. Норма дискретного функционала

$$\|\Lambda; M(\mathbb{K})\| = |c_1| + \ldots + |c_N|;$$

положительность Λ равносильна неотрицательности коэффициентов c_i. Для любого положительного функционала Λ существует последовательность дискретных положительных функционалов Λ_i, слабо сходящаяся к Λ, т.е.

$$\lim_{i\to\infty} \Lambda_i(z) = \Lambda(z) \quad \text{для любой} \quad z \in C(\mathbb{K}).$$

Поскольку $\|\Lambda_i; M(\mathbb{K})\| = \Lambda_i(1)$, $\|\Lambda; M(\mathbb{K})\| = \Lambda(1)$, то

$$\lim_{i\to\infty} \|\Lambda_i; M(\mathbb{K})\| = \|\Lambda; M(\mathbb{K})\|.$$

Пусть $C_+(\mathbb{K})$ – конус неотрицательных функций класса $C(\mathbb{K}), u_0$ – ненулевая функция из $C_+(\mathbb{K})$. Линейный оператор Q, действующий в пространстве $C(\mathbb{K})$, назовём u_0-положительным, если для каждой ненулевой функции w из $C_+(\mathbb{K})$ существуют такие положительные числа τ_1 и τ_2, что справедливы неравенства $\tau_1 u_0 \leqslant Qw \leqslant \tau_2 u_0$. Это понятие в более широком смысле вводилось в монографии [4, с. 60].

Ниже в основном будет рассматриваться случай, когда компакт $\mathbb{K}$ есть замыкание $\overline{\Omega}$ ограниченной области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$. В этом случае пространство Соболева $W_q^1(\Omega)$ при $q > n$ компактно вложено в пространство $C(\overline{\Omega})$. Отсюда следует компактность оператора вложения пространства $M(\overline{\Omega})$ в сопряжённое к $W_q^1(\Omega)$ пространство $W_p^{-1}(\Omega)$ $(1 < p < n/(n-1))$. Негативное пространство Соболева $W_p^{-1}(\Omega)$ состоит из распределений z, допускающих представление

$$z = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} D^\alpha z_\alpha,$$

где $z_\alpha \in L_p(\Omega)$ при всех $|\alpha| \leqslant 1$. Вложение $M(\overline{\Omega})$ в $W_p^{-1}(\Omega)$ при $p(n-1) < n$ является усиленно непрерывным в следующем смысле: если последовательность функционалов $\{\Lambda_j\}$ класса $M(\overline{\Omega})$ слабо сходится к функционалу Λ, то она сильно сходится к Λ в метрике пространства $W_p^{-1}(\Omega)$ (это также следует из теорем вложения).

Через $\mathscr{D}(\Omega)$ далее обозначается линейное пространство всех финитных в области Ω бесконечно дифференцируемых функций, наделённое обычной топологией. Непрерывный линейный функционал $\Lambda\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ называют *обобщённой функцией* или *распределением.* Линейное топологическое пространство всех распределений обозначают символом $\mathscr{D}'(\Omega)$ [6].

2. Оценки обобщённых решений задачи типа Неймана. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$, $\overline{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$ – её замыкание. Будет изучаться краевая задача типа Неймана

$$Au := -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = f, \tag{3}$$

$$Bu := \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \beta(x)u(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega). \tag{4}$$

Предполагаем, что определяемый равенством (3) оператор A равномерно эллиптичен:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)t_1t_j \geqslant \gamma\sum_{i=1}^n t_i^2 \quad (\gamma > 0),$$

причём $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$; $\partial u/\partial\nu$ – производная по внешней конормали; $\beta(x) \geqslant 0$. Для упрощения будем считать границу $\partial\Omega$ и коэффициенты операторов A и B бесконечно дифференцируемыми:

$$\partial\Omega \in C^\infty, \quad a_{ij} \in C^\infty, \quad a_i \in C^\infty, \quad a \in C^\infty, \quad \beta \in C^\infty. \tag{5}$$

Задачу (3), (4) называют невырожденной, если при $f = 0$ она имеет только нулевое решение. Невырожденность задачи (3), (4) влечёт за собой её однозначную разрешимость для широкого класса правых частей. Если, например, $f \in L_p(\Omega)$ и $1 < p < \infty$, то единственное решение u задачи (3), (4) принадлежит пространству Соболева $W_p^2(\Omega)$ и допускает интегральное представление

$$u(x) = \int\limits_\Omega G(x,y)f(y)\,dy,$$

где $G(x,y)$ – функция Грина задачи (3), (4).

Обозначим через $\psi(t;k)$ $(t > 0,\ k \in \mathbb{R})$ функцию, определяемую соотношениями: $\psi(t;k) = t^k$, если $k < 0$; $\psi(t;0) = 1 + (-\ln t)_+$; $\psi(t;k) = 1$, если $k > 0$.

Предложение 3 [1]. *Функция Грина $G(x,y)$ задачи (3), (4) удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$|G_\beta^\gamma(x,y)| \leqslant c\psi(|x-y|; 2-n-|\beta|-|\gamma|),$$

где под $G_\beta^\gamma(x,y)$ понимается $D_x^\beta D_y^\gamma G(x,y)$;

$$|G_\beta^\gamma(x,y_1)| - |G_\beta^\gamma(x,y_2)| \leqslant c|y_1-y_2|^\nu\sum_{i=1}^2 \psi(|x-y_i|; 2-n-\beta-\gamma-\nu),$$

здесь $0 < \nu < 1$, c – некоторая постоянная.

Предложение 3 характеризует свойства гладкости функции Грина. Оно оказывается полезным при изучении решений краевой задачи (3), (4) в случае, когда $f \in M(\overline{\Omega})$. Из теорем о полном наборе гомеоморфизмов следует, что если f есть элемент негативного пространства Соболева $W_p^{-1}(\Omega)$, сопряжённого к пространству Соболева $W_p^1(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$, то обобщённое решение $u = Tf$ задачи (3), (4) принадлежит пространству $W_p^1(\Omega)$. Определённый таким образом оператор $T\colon W_p^{-1}(\Omega) \to W_p^1(\Omega)$ непрерывен. Если $1 < p < n/(n-1)$, то $q = p/(p-1) > n$. Пространство Соболева $W_q^1(\Omega)$ при $q > n$ компактно вложено в пространство $C(\overline{\Omega})$. Отсюда следует, что пространство $M(\overline{\Omega})$ компактно вложено в пространство $W_p^{-1}(\Omega)$. Оператор $T\colon M(\overline{\Omega}) \to W_p^1(\Omega)$ $(1 < p < n/(n-1))$ вполне непрерывен.

Усилим это утверждение, используя предложение 3. Справедливо равенство

$$T\delta_y = G_y = G(\cdot\,, y), \tag{6}$$

которое можно принять в качестве определения функции Грина задачи (3), (4).

Лемма. *Множество функций $\{G_y\}$ ограничено в пространстве $H_1^2(\Omega)$:*

$$\|G_y; H_1^2(\Omega)\| \leqslant R_1,$$

постоянная R_1 не зависит от y из $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Функция $F(x,y) = D_\alpha G(x,y)$ $(|\alpha| \leqslant 1)$ в силу предложения 3 удовлетворяет оценкам, фигурирующим в предложении 2; в рассматриваемом случае $\mathscr{X} = \Omega$. Лемма доказана.

Следствие. *Справедлива оценка $\|T\delta_y; H_1^2(\Omega)\| \leqslant R_1$ для любого $y \in \overline{\Omega}$.*

Теорема 1. *Для любого заряда f из пространства $M(\overline{\Omega})$ имеет место оценка*

$$\|Tf; H_1^2(\Omega)\| \leqslant R_1 \|f; M(\overline{\Omega})\|. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть вначале f – дискретный положительный функционал и

$$f = \sum_{i=1}^{N} c_i \delta_{y_i}, \tag{8}$$

где $c_1, \ldots, c_N$ – положительные числа, $y_1, \ldots, y_N$ – различные элементы из $\overline{\Omega}$. Имеет место равенство

$$\|f; M(\overline{\Omega})\| = f(1) = \sum_{i=1}^{N} c_i. \tag{9}$$

В силу (8) верно равенство

$$Tf = \sum_{i-=1}^{N} c_i T\delta_{y_i}.$$

Из (8) и (9) вытекают соотношения

$$\|Tf; H_1^2(\Omega)\| \leqslant \sum_{i=1}^{N} R_1 c_i = R_1 \|f; M(\overline{\Omega})\|,$$

влекущие за собой оценку (7) в рассматриваемом случае.

Если $f \in M_+(\overline{\Omega})$, то существует последовательность дискретных положительных функционалов f_k, слабо сходящаяся к функционалу f. Верно равенство

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} f_k(z) \quad \text{при любом} \quad z \in C(\overline{\Omega}). \tag{10}$$

Равенство (10) влечёт за собой сходимость $f_k \to f$ в метрике пространства $W_p^{-1}(\Omega)$, поэтому последовательность $u_k = Tf_k$ сходится в пространстве $W_p^1(\Omega)$ к функции $u = Tf$. В силу уже доказанного справедливы оценки

$$\|u_k; H_1^2(\Omega)\| \leqslant R_1 \|f_k; M(\overline{\Omega})\|.$$

Так как $\|f_k; M(\overline{\Omega})\| = f_k(1)$, $\|f; M(\overline{\Omega})\| = f(1)$, то из (10) следует равенство

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k; M(\overline{\Omega})\| = \|f; M(\overline{\Omega})\|.$$

Из теоремы Никольского (предложение 1) вытекают неравенства

$$\|Tf; H_1^2(\Omega)\| = \|u; H_1^2(\Omega)\| \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \|u_k; H_1^2(\Omega)\| \leqslant R_1 \varlimsup_{k\to\infty} \|f_k; M(\overline{\Omega})\| = R_1 \|f; M(\overline{\Omega})\|.$$

Таким образом, оценка (7) установлена для положительного функционала f.

В общем случае функционал f из $M(\overline{\Omega})$ допускает представление $f = f^1 - f^2$, в котором f^1, f^2 – положительные функционалы и

$$\|f; M(\overline{\Omega})\| = \|f^1; M(\overline{\Omega})\| + \|f^2; M(\overline{\Omega})\|.$$

Справедливы соотношения

$$\|Tf; H_1^2(\Omega)\| \leqslant \|Tf^1; H_1^2(\Omega)\| + \|Tf^2; H_1^2(\Omega)\| \leqslant$$

$$\leqslant R_1 \|f^1; M(\overline{\Omega})\| + R_1 \|f^2; M(\overline{\Omega})\| = R_1 \|f; M(\overline{\Omega})\|.$$

Теорема доказана.

Неравенство (7) эквивалентно оценке

$$\|u; H_1^2(\Omega)\| \leqslant R_1 \|Au; M(\overline{\Omega})\| \tag{11}$$

для решений краевой задачи (3), (4). Действительно, если $Au = f$, то $u = Tf$, верно и обратное утверждение. Оценки (7), (11) можно рассматривать как варианты неравенства коэрцитивности.

3. Обратные неравенства. Вместе с краевой задачей (3), (4) будем рассматривать и сопряжённую к ней, которая заключается в отыскании решения уравнения

$$A^*v := -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(x)v\right) + a(x)v = w(x), \tag{12}$$

удовлетворяющего краевому условию

$$B^*v := \frac{\partial v}{\partial \nu} + b(x)v = 0 \quad (x \in \partial\Omega). \tag{13}$$

Известно, что при выполнении условий гладкости (5) функция $b(x)$ принадлежит классу $C^\infty(\partial\Omega)$; предположение $b(x) \geqslant 0$ может не выполняться.

Невырожденность задачи (3), (4) эквивалентна невырожденности задачи (12), (13); справедливо равенство

$$v = T^*w = \int\limits_\Omega G_*(x,y)w(y)\,dy,$$

в котором $G_*(x,y) = G(y,x)$ и $G(x,y)$ – функция Грина задачи (3), (4).

Предложение 4. *При некотором действительном* λ *краевая задача*

$$A^*v = \lambda v, \quad B^*v = 0$$

имеет единственное положительное решение v_1, *нормированное условием*

$$\min\{v_1(x), x \in \overline{\Omega}\} = 1. \tag{14}$$

Предложение 4 следует из результатов работ [10, 11].

Обозначим через $\mathscr{K}(A;B)$ множество $TM_+(\overline{\Omega})$. Таким образом, если $u \in \mathscr{K}(A;B)$, то Au – положительный функционал, $\mu = \mu_{Au}$ – ассоциированная мера. Из условия (14) и теоремы 1 вытекают неравенства

$$\int\limits_{\Omega} v_1(x)\,d\mu(x) = (Au)(v_1) \geqslant \|Au; M(\overline{\Omega})\| \geqslant \frac{1}{R_1}\|u; H_1^2(\Omega)\|. \tag{15}$$

С другой стороны,

$$Au(v_1) = (u, A^*v_1)_{L_2(\Omega)} = \lambda(u, v_1)_{L_2(\Omega)}. \tag{16}$$

Объединение (15), (16) влечёт за собой следующее утверждение.

Теорема 2. *Для функций* u *из множества* $\mathscr{K}(A;B)$ *имеет место оценка*

$$\|u; H_1^2(\Omega)\| \leqslant \lambda R_1 \int\limits_{\Omega} u(x)v_1(x)\,dx. \tag{17}$$

Более сильные обратные неравенства можно получить в случае, когда функция Грина $G(x,y)$ задачи (3), (4) положительна. Простое достаточное условие положительности $G(x,y)$ – неравенство $a(x) > 0$.

Предложение 5 [11]. *Для положительности функции Грина* $G(x,y)$ *задачи (3), (4) необходимо и достаточно, чтобы существовала неотрицательная функция* v *из* $C^2(\overline{\Omega})$, *для которой справедливы неравенства*

$$Av \geqslant 0, \quad Bv \geqslant 0, \quad \|Av; C(\overline{\Omega})\| + \|Bv; C(\partial\Omega)\| > 0;$$

при этом сужение оператора T^* *на* $C(\overline{\Omega})$ u_0*-положительно с* $u_0(x) = 1$.

Теорема 3. *Пусть функция Грина задачи (3), (4) положительна. Тогда для любой ненулевой и неотрицательной функции* w *из пространства* $\mathscr{D}(\Omega)$ *найдётся такая постоянная* $C(w)$, *что выполняется неравенство*

$$\|u; H_1^2(\Omega)\| \leqslant C(w) \int\limits_{\Omega} u(x)w(x)\,dx \quad \text{для любой} \quad u \in \mathscr{K}(A;B). \tag{18}$$

Доказательство. Пусть функция w удовлетворяет условиям теоремы и $v = T^*w$. Тогда v есть классическое решение краевой задачи (12), (13). В предположениях теоремы сужение T^* на $C(\overline{\Omega})$ есть u_0-положительный оператор, поэтому $v(x) \geqslant \tau_1$ для любых $x \in \overline{\Omega}$, τ_1 – положительная постоянная.

Если $u \in \mathscr{K}(A,B)$, то $\mu = Au$ есть мера. Тогда имеют место равенства

$$\int\limits_{\Omega} v(x)\,d\mu(x) = (Au)(v) = (u, A^*v)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u(x)w(x)\,dx \tag{19}$$

и справедливы соотношения

$$\|u; H_1^2(\Omega)\| \leqslant R_1\|Au; M(\overline{\Omega})\| \leqslant \frac{R_1}{\tau_1}\int\limits_{\Omega} v(x)\,d\mu(x) = \frac{R_1}{\tau_1}\int\limits_{\Omega} u(x)v(x)\,dx. \tag{20}$$

Здесь последовательно использовались оценка (11), неравенство $v(x) \geqslant \tau_1$ и равенства (19). Из соотношений (20) вытекает неравенство (18) с постоянной $C(w) = R_1/\tau_1$. Теорема доказана.

Оценка (18) показывает, что функциональный класс $\mathscr{K}(A;B)$ является достаточно узким подмножеством пространства Никольского $H_1^2(\Omega)$. Основываясь на (18), можно установить нелинейные теоремы вложения [12; 13, с. 155], означающие, грубо говоря, что топологии, неэквивалентные в объемлющих линейных пространствах, оказываются эквивалентными при их сужениях на класс $\mathscr{K}(A;B)$. Приведём лишь один результат в данном направлении.

Теорема 4. *Пусть функция Грина задачи (3), (4) положительна. Пусть $\{u_j\}$ – последовательность функций из $\mathscr{K}(A;B)$, сходящаяся к функции u в топологии $\mathscr{D}'(\Omega)$. Тогда:*

1) последовательность $\{u_j\}$ ограничена в пространстве $H_1^2(\Omega)$ и сходится к функции u в метрике пространства $W_p^1(\Omega)$ $(1 \leqslant p < n/(n-1))$;

2) функция u принадлежит пространству Никольского $H_1^2(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\|u; H_1^2(\Omega)\| \leqslant \varlimsup_{j\to\infty} \|u_j; H_1^2(\Omega)\|. \tag{21}$$

Доказательство. Пусть w – ненулевая и неотрицательная функция из $\mathscr{D}(\Omega)$. Сходимость последовательность $\{u_j\}$ к функции u в топологии $\mathscr{D}'(\Omega)$ влечёт за собой ограниченность числовой последовательности

$$\int\limits_\Omega u_j(x)w(x)\,dx.$$

Отсюда в силу (18) вытекает ограниченность последовательности $\{u_j\}$ в пространстве $H_1^2(\Omega)$. Оператор вложения пространства $H_1^2(\Omega)$ в пространство Соболева $W_p^1(\Omega)$ при $p(n-1)<n$ вполне непрерывен. Сходимость $u_j \to u$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$ и ограниченность последовательности $\{u_j\}$ в пространстве $H_1^2(\Omega)$ влекут за собой сходимость $u_j \to u$ в метрике пространства $W_p^1(\Omega)$. Включение $u \in H_1^2(\Omega)$ и неравенство (21) следуют из предложения 1. Теорема доказана.

Кратко остановимся на возможных модификациях результатов работы. Предположение (5) можно заменить условиями достаточной гладкости коэффициентов операторов A, B и границы области Ω. Точные по порядку особенностей оценки функции Грина для эллиптических краевых задач установлены при весьма необременительных предположениях о гладкости данных [1]. Определённые трудности возникают в случае, когда правые части рассматриваемых уравнений являются элементами негативного пространства Соболева. Однако и здесь имеются возможности некоторого ослабления условия (5) (см. [2, с. 222]). Подобный резерв потенциальных обобщений в данной работе не используется.

В случае задачи Дирихле для эллиптического оператора A второго порядка известны условия положительной обратимости. Вместе с тем в теоремах 2–4 условие типа Неймана нельзя заменить условием Дирихле. Приведём простой пример, относящийся к функциям одного переменного.

Пусть $\Omega=(0,1)$, $Au=-u''$, класс $\mathscr{K}(A;B)$ совпадает с классом вогнутых на Ω функций, удовлетворяющих однородному условию Дирихле $u(0)=u(1)=0$. Рассмотрим семейство принадлежащих множеству $\mathscr{K}(A;B)$ функций

$$u_t(x)=\min\left\{\frac{x}{t},\frac{1-x}{1-t}\right\} \quad (0<t<1).$$

Как нетрудно видеть, справедливы соотношения

$$0 \leqslant u_t(x) \leqslant 1, \quad \gamma(t) := \int\limits_0^1 \left(\frac{d}{dx}u_t\right)^2(x)\,dx = \frac{1}{t(1-t)}.$$

Функция $\gamma(t)$ неограничена на интервале $(0,1)$, поэтому оценка (17) в данном случае неверна.

В работах [11, 14] доказаны ослабленные варианты теорем 2–4 для задачи Дирихле. Статья [7] содержит внутренние оценки решений эллиптических неравенств. В теореме 4 пространство $W_p^1(\Omega)$ можно заменить любым функциональным пространством $E(\Omega)$, если только $H_1^2(\Omega)$ компактно вложено в $E(\Omega)$. Условие $p(n-1)<n$ существенно для справедливости заключения теоремы 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Солонников В.А.* О матрицах Грина для эллиптических краевых задач. I // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1970. Т. 110. С. 107–145.
2. *Roitberg Y.* Elliptic Boundary Value Problems in the Spaces of Distrubutions. Dordrecht; Boston; London, 1996.
3. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
4. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1969.
5. *Никольский С.М.* Компактность и неравенства для частных производных // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2005. Т. 248. С. 194–203.
6. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М., 1986.
7. *Климов В.С.* Внутренние оценки решений линейных эллиптических неравенств // Изв. РАН. 2021. Т. 85. № 8. С. 3–22.
8. *Данфорд Н., Шварц Т.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М., 1962.
9. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М., 1967.
10. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. М., 1962.
11. *Климов В.С.* О неотрицательных решениях краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12. № 4. С. 718–726.
12. *Малышев В.А.* Нелинейные теоремы вложения // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. № 6. С. 1–38.
13. *Hormander L.* Notions of Convexity. Boston; Basel; Berlin, 1994.
14. *Климов В.С., Павленко А.Н.* Обратные функциональные неравенства и их приложения к нелинейным краевым задачам // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42. № 4. С. 781–795.

Ярославский государственный университет
имени П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 13.12.2021 г.
После доработки 13.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1654–1665

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

ПСЕВДОСДВИГ И ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ Δ_B-ОПЕРАТОРА КИПРИЯНОВА

© 2022 г. Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов,
С. А. Рощупкин, Е. Л. Санина

Изучены решения сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя $B_{-\gamma}$ отрицательного порядка $-1 < -\gamma \leqslant 0$. В связи с этим большой интерес представляют решения сингулярного дифференциального уравнения Бесселя $B_{-\gamma}\mathbb{J} + \lambda^2\mathbb{J} = 0$, которые в работе представлены линейно независимыми функциями $\mathbb{J}_\mu$ и $\mathbb{J}_{-\mu}$, $\mu = (\gamma+1)/2$. Рассмотрены некоторые свойства функций $\mathbb{J}_\mu$, выраженные через свойства j-функции Бесселя–Левитана. Введены прямое и обратное $\mathbb{J}_\mu$-преобразования Бесселя и определён оператор $\mathbb{T}$-псевдосдвига, коммутирующий с оператором Бесселя $B_{-\gamma}$. Найдено фундаментальное решение обыкновенного сингулярного дифференциального оператора $B_{-\gamma}$. Приведено представление фундаментального решения Δ_B-оператора Киприянова с особенностью в точке $x = 0$ и на конусе $|x| = |y|$ в евклидовом n-мерном полупространстве $\mathbb{R}_n^+$.

DOI: 10.31857/S037406412212007X, EDN: NCGOAR

1. Оператор Бесселя с отрицательным параметром и $\boldsymbol{\Delta_B}$-оператор Киприянова. Основные результаты. Пусть $-\gamma = -(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ – мультииндекс с отрицательными дробными координатами $-1 < -\gamma_i < 0$. Δ_B-*оператором Киприянова* называется сингулярный дифференциальный оператор

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}, \quad B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{-\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad x \in \mathbb{R}_n^+ = \{x : x_i > 0\}.$$

При $-1 < -\gamma_i \leqslant 0$ этот оператор естественно назвать оператором Лапласа–Киприянова. В сферических координатах $x = r\Theta$ $(\Theta \in \mathbb{R}_n,\ |\Theta| = 1)$ он имеет следующее представление Бельтрами (см. работу [1]):

$$\Delta_B = B_{n-|\gamma|-1} + \frac{1}{r^2}\Delta_{B,\Theta}, \quad n - |\gamma| > 0. \tag{1}$$

Далее изучается возможность работы с оператором Киприянова с помощью классических методов математической физики. Отметим, что этот оператор весьма специфичен. Например, с помощью операторов $B_{-\gamma}$ формула (1) позволяет произвольно менять размерность евклидова пространства путём введения скрытых переменных со сферической симметрией. Например, в области $x_i > 0$ для произвольного m и $y \in \mathbb{R}_m$ из (1) получим равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x_i, x') = \sum_{i=1}^m B_{\gamma_i} f(|y|, x'),$$

если $|\gamma| = 0$. Тем самым оператор Лапласа в $\mathbb{R}_n$ окажется оператором Лапласа–Киприянова в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{n+m}$ со скрытой сферической симметрией от m переменных. Более того, оператор Бесселя B_γ с дробным параметром $\gamma = n - 1 + \{\gamma\}$ окажется промежуточным между операторами Лапласа в $\mathbb{R}_n$ и в $\mathbb{R}_{n+1}$ в том смысле, что

$$\lim_{\{\gamma\}\to 0} B_\gamma = \Delta_n \quad \text{и} \quad \lim_{\{\gamma\}\to 1} B_\gamma = \Delta_{n+1}.$$

Это позволяет считать сингулярный дифференциальный оператор Бесселя B_γ (с дробным параметром) оператором Лапласа во фрактальной среде со скрытой сферической симметрией*). Также принципиально новой по сравнению с фундаментальными решениями, полученными в работе [3] (см. также монографию [4]), является конструкция фундаментального решения Δ_B-оператора Киприянова: при $0 < n - |\gamma| < 1$ это решение имеет вырождение $O(|x|^{2-n-|\gamma|})$ при $x \to 0$ вместо особенности для Δ_B-операторов Лапласа–Бесселя (при $n \geqslant 2$ и положительных параметрах операторов Бесселя).

Оператор $B_{-\gamma}$ в "чужой" билинейной форме. В качестве основного пространства функций рассматриваем подпространство Шварца $S_{\rm ev} = S_{\rm ev}[0,\infty)$, состоящее из быстро убывающих вместе со всеми производными функций, чётных**) по каждой координате аргумента. Введём весовую билинейную форму

$$(u,v)_\alpha = \int\limits_0^\infty u(x)v(x)x^\alpha\,dx.$$

Соответствующее пространство обобщённых функций будем обозначать $S'_{{\rm ev},\alpha}$. Функционал Дирака–Киприянова определим равенством $(\delta_{-\gamma},\varphi)_\alpha = \varphi(0)$ для любой функции $\varphi \in S_{\rm ev}$.

Вначале отметим следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\gamma \in [0,1)$, α *– произвольное действительное число,* U *и* V *принадлежат основному пространству функций* $S_{\rm ev}[0,\infty)$, *тогда справедлива формула*

$$(B_{-\gamma}U,V)_\alpha = \left(U, \left[B_{\gamma+2\alpha} + \frac{(\gamma+\alpha)(\alpha-1)}{x^2}\right]V\right)_\alpha.$$

Доказательство легко достигается интегрированием по частям.

Как видим, оператор $B_{\gamma+2\alpha} + (\gamma+\alpha)(\alpha-1)/x^2$ оказывается сопряжённым к оператору $B_{-\gamma}$ в гильбертовом пространстве $L_2^\alpha(\mathbb{R}_1^+)$. Конечно, наиболее востребованы случаи $\alpha = -\gamma$ и $\alpha = 1$. Первый представляется наиболее естественным, так как тогда $B_{-\gamma}$ является самосопряжённым оператором в соответствующем скалярном произведении.

В этой работе приводим результаты исследований только для случая $\alpha = -\gamma$, $0 < \gamma < 1$. Это связано не только с традициями, заложенными в научной школе И.А. Киприянова (см. [4] и имеющуюся в ней библиографию), но и с определением фундаментального решения, которое жёстко связано с весовой билинейной формой, где определяется это решение.

Перечислим основные результаты.

1. Получены линейно независимые решения сингулярного уравнения Бесселя $B_{-\gamma}u(\lambda t) + \lambda^2 u(\lambda t) = 0$ и приведены свойства этих функций: ортогональность, теорема сложения. На основе одной из этих функций введены взаимно обратные преобразования Бесселя.

2. Введён коммутирующий с оператором $B_{-\gamma}$ $\mathbb{T}$-псевдосдвиг

$$\mathbb{T}_x^y f(x) = \frac{\Gamma((\gamma+3)/2)(xy)^{\gamma+1}}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma+2)/2)} \int\limits_0^\pi \frac{f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1}\alpha\,d\alpha. \tag{2}$$

3. Для $\gamma \in [0,1)$ фундаментальным решением оператора $B_{-\gamma}$ в пространстве $S'_{{\rm ev},-\gamma}$ является регулярный $S'_{{\rm ev},\gamma}$-функционал $\mathcal{E}(x) = x^{\gamma+1}/(\gamma+1)$.

4. Фундаментальное решение Δ_B-оператора Киприянова при $n - |\gamma| > 0$ определено в теореме 6, а при $n - |\gamma| > 1$ – в следствии 2 на основе обобщённого сдвига Пуассона, принадлежащего классу обобщённых сдвигов Б.М. Левитана [5, 6].

---

*) Ранее этот факт уже отмечен в некоторых прикладных исследованиях (см., например, [2]).

**) Следуя работе [4], функции, определённые на промежутке $[0,\infty)$, называются чётными по x_i, если все её производные нечётного порядка в точке x_i равны нулю.

Отметим, что конструкция (2) не принадлежит к классу обобщённых сдвигов Левитана, так как $\mathbb{T}_x^0 f(x) \neq f(x)$ и для $\mathbb{T}^y C \neq C$. Поэтому мы его назвали “псевдосдвигом”. Отметим также, что конструкции сверток, порождённые двупараметрическим преобразованием Ганкеля, изучались В.А. Какичевым и его учениками (см., например, [7–10]). В указанных работах изучались именно свёртки, полученные на основе одномерной конструкции (2). Будем следовать методу этих работ.

2. Решения сингулярного уравнения Бесселя с отрицательным параметром $-\gamma \in (-1, 0]$. Хорошо известное в теории дифференциальных уравнений и в прикладных задачах математической физики *уравнение Бесселя* имеет вид вырождающегося уравнения второго порядка

$$t^2\frac{d^2V}{dt^2} + t\frac{dV}{dt} + (t^2 - \nu^2)V = 0, \quad V = V(t), \tag{3}$$

где ν – произвольное число. Линейно независимые решения уравнения (3)

$$J_\nu(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2+\nu}, \tag{4}$$

$$J_{-\nu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-\nu} \tag{5}$$

называются функциями Бесселя первого рода.

Сингулярное уравнение Бесселя имеет вид

$$B_\gamma U + U = 0, \quad B_\gamma = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\,\frac{d}{dx}. \tag{6}$$

При $\gamma > 0$ решение V классического уравнения Бесселя (3) и решение U сингулярного уравнения Бесселя (6) в области $t > 0$ связаны равенством

$$U(t) = \frac{V(t)}{t^\nu}, \quad \gamma = 2\nu + 1 \quad (\nu > -1/2),$$

которое приводит к следующим линейно независимым решениям уравнения (6):

$$j_{\pm\nu}(t) = \frac{\Gamma(1 \pm \nu)}{(t/2)^{\pm\nu}}\,J_{\pm\nu}(t), \quad \nu = \frac{\gamma - 1}{2},$$

называемым *j-функциями Бесселя**. Для положительного параметра γ оператора B_γ свойства этих функций и их приложения к задачам для сингулярных дифференциальных уравнений изучены в работах [5, 4]; на их основе построены взаимно обратные преобразования Фурье–Бесселя, доказана теорема сложения j-бесселевых функций и другие свойства.

Для решений уравнения (6) с отрицательным параметром $-\gamma \in (-1, 0]$ справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Пусть отрицательный параметр оператора Бесселя задан в виде $-\gamma = -2\mu + 1$ $(1/2 < \mu < 1)$. Тогда решение V классического уравнения Бесселя (3) и решение U сингулярного уравнения Бесселя (6) в области $t > 0$ связаны равенством $U(t) = t^\mu V(t)$.*

Доказательство леммы проводится путём подстановки функции $U(t)$ в уравнение (6) с оператором $B_{-\gamma}$.

Из леммы с очевидностью вытекает

Теорема 2. *Пусть $-1 < -\gamma < 0$ и $\mu = (\gamma+1)/2$. Линейно независимые решения уравнения*

$$B_{-\gamma}u(\lambda t) + \lambda^2 u(\lambda t) = 0, \quad t > 0, \quad B_{-\gamma} = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{\gamma}{t}\frac{d}{dt}, \tag{7}$$

*Это название использовал в своих докладах на конференциях в Алма-Ате и в Москве (1975–1980 гг.) Б.М. Левитан.

имеют вид

$$\mathbb{J}_{-\mu}(t) = t^{\mu} J_{-\mu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot 2^{\mu}}{m!\,\Gamma(m+1-\mu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m},$$

$$\mathbb{J}_{\mu}(t) = t^{2\mu} j_{\mu}(t) = 2^{\mu}\Gamma(1+\mu) x^{\mu} J_{\mu}(t), \quad \mathbb{J}^*_{\mu}(t) = x^{\mu} J_{\mu}(t), \tag{8}$$

где J_μ *и* $J_{-\mu}$ *– функции Бесселя первого рода (4) и (5) соответственно, а* $j_{-\mu}$ *и* j_μ *–* j*-функции Бесселя.*

Отметим, что теорема сложения Левитана на основе обобщённого сдвига Пуассона может применяться к функциям Бесселя, порядок которых строго больше $-1/2$ (см. [5, § 7, с. 124; § 11, с. 137]). Ниже рассмотрим возможности, которые открываются при использовании функций (8), имеющих особый статус, поскольку, с одной стороны, удовлетворяют сингулярному уравнению Бесселя с отрицательным параметром $-\gamma$ $(\gamma > 0)$, а с другой – определены непосредственно через функции Бесселя первого рода с положительным параметром $\mu = (\gamma+1)/2$.

2.1. Ортогональность $\mathbb{J}_{\boldsymbol{\mu}}$-функций Бесселя. Введём весовую билинейную форму

$$(u,v)_{-\gamma} = \int\limits_0^{\infty} u(x)v(x)x^{-\gamma}\,dx, \tag{9}$$

в рамках которой сингулярный дифференциальный оператор Бесселя $B_{-\gamma}$ самосопряжён (см. теорему 1).

Отметим также, что если функция $u(x)$ – решение уравнения (7), то функция $u(\lambda x)$ – решение уравнения $B_{\pm\gamma}u(\lambda x) + \lambda^2 u(\lambda x) = 0$.

Теорема 3. *Пусть* $\gamma = 2\mu - 1$ *и* $0 < \mu \leqslant 1/2$. *Имеет место равенство*

$$\int\limits_0^1 \mathbb{J}^*_{\mu}(\lambda_k t)\mathbb{J}^*_{\mu}(\lambda_m t)t^{-\gamma}\,dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ (\lambda_k\lambda_m)^{(\gamma+1)/2} M \neq 0, & k = m, \end{cases} \tag{10}$$

где числа λ_k *являются корнями функций* J_μ *или корнями функции* J'_μ.

Действительно, с учётом того, что $\mathbb{J}^*_{\mu}(\lambda_k t) = (\lambda_k t)^{(\gamma+1)/2} J_{(\gamma+1)/2}(\lambda_k t)$, получим следующее представление левой части равенства (10):

$$\int\limits_0^1 \mathbb{J}_{\mu}(\lambda_k t)\mathbb{J}_{\mu}(\lambda_m t)t^{-\gamma}\,dt = (\lambda_k\lambda_m)^{(\gamma+1)/2} \int\limits_0^1 J_{\mu}(\lambda_k t)J_{\mu}(\lambda_m t)t\,dt.$$

Теперь равенство (10) следует из ортогональности функций Бесселя первого рода J_μ положительных порядков μ (на самом деле для $\mu > -1$, см. [11, с. 265, формулы (12.6) и (13.3)]).

Отметим также, что ряды Фурье по $\mathbb{J}$-функциям Бесселя исследовались, например, в работе [12].

3. $\mathbb{J}$-преобразование Бесселя. Будем следовать методике В.А. Какичева, опираясь на теорему сложения Б.М. Левитана для соответствующих j-функций Бесселя [5].

Теорема 4. *Пусть* $\gamma = 2\mu - 1$ *и* $0 < \mu \leqslant 1/2$. *Если* $x^{-\mu} f(x) \in L_2(0,\infty)$, *то*

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} \mathbb{J}_{\mu}(x\xi)\xi^{-2\mu+1}\,d\xi \int\limits_0^{\infty} \mathbb{J}_{\mu}(y\xi)y^{-2\mu+1} f(y)\,dy, \tag{11}$$

т.е. следующие $\mathbb{J}$*-преобразования Бесселя взаимно обратимы:*

$$F_{B_{-\gamma}}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_0^{\infty} \mathbb{J}_{(\gamma+1)/2}(y\xi) f(y) y^{-\gamma}\,dy, \quad F^{-1}_{B_{-\gamma}}[\widehat{f}](x) = f(x) = \int\limits_0^{\infty} \mathbb{J}_{(\gamma+1)/2}(x\xi)\widehat{f}(\xi)\xi^{-\gamma}\,d\xi.$$

Доказательство. Известен следующий интеграл Ханкеля для функций $f \in L_2(0,\infty)$:

$$f(x) = \int\limits_0^\infty J_\mu(x\xi)\xi\,d\xi \int\limits_0^\infty J_\mu(y\xi)f(y)y\,dy.$$

Пусть $x^{-\mu}f(x) \in L_2(0,\infty)$, $\mu = (\gamma+1)/2 > 0$. Тогда выполняются равенства

$$f(x)x^{-\mu} = \int\limits_0^\infty J_\mu(x\xi)\xi\,d\xi \int\limits_0^\infty J_\mu(y\xi f(y)y^{-\mu}y\,dy = \int\limits_0^\infty \frac{\mathbb{J}_\mu(x\xi)}{(x\xi)^\mu}\xi\,d\xi \int\limits_0^\infty \frac{\mathbb{J}_\mu(y\xi)}{(y\xi)^\mu}f(y)y^{-\mu}y\,dy =$$

$$= x^{-\mu}\int\limits_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi)\xi^{-2\mu+1}\,d\xi \int\limits_0^\infty \mathbb{J}_\mu(y\xi)y^{-2\mu+1}f(y)\,dy,$$

откуда следует формула (11). Теорема доказана.

4. Обобщённый $\mathbb{T}$-псевдосдвиг и теорема сложения для $\mathbb{J}$-функций Бесселя. Для j-функций Бесселя известен следующий вариант теоремы сложения [5]: для $\nu > -1/2$

$$j_\nu(t\xi)j_\nu(t\tau) = T_\xi^\tau j_\nu(\xi\tau),$$

где сдвиг Пуассона T_ξ^τ определён равенством

$$T^\tau\varphi(t) = \frac{\Gamma((\gamma+1)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\gamma/2)}\int\limits_0^\pi \varphi\left(\sqrt{t^2+\tau^2-2t\tau\cos\alpha}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha, \quad \gamma > 0. \tag{12}$$

Поскольку $\mu = (\gamma+1)/2 > 0$, то из (8) имеем

$$\mathbb{J}_\mu(t\xi)\mathbb{J}_\mu(t\tau) = (t\xi)^{2\mu}j_\mu(t\xi)(t\tau)^{2\mu}j_\mu(t\tau) = (t\xi)^{2\mu}(t\tau)^{2\mu}T_\xi^\tau j_\mu(t\xi) =$$

$$= \frac{(t\xi)^{2\mu}(t\tau)^{2\mu}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\mu+1/2)}\int\limits_0^\pi \frac{\mathbb{J}_\mu\left(t\sqrt{\xi^2+\tau^2-2\xi\tau\cos\alpha}\right)}{\left(t\sqrt{\xi^2+\tau^2-2\xi\tau\cos\alpha}\right)^{2\mu}}\sin^{2\mu}\alpha\,d\alpha =$$

$$= \frac{(\xi\tau)^{2\mu}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\mu+1/2)}\int\limits_0^\pi \frac{\mathbb{J}_\mu\left(t\sqrt{\xi^2+\tau^2-2\xi\tau\cos\alpha}\right)}{\left(\sqrt{\xi^2+\tau^2-2\xi\tau\cos\alpha}\right)^{2\mu}}\sin^{2\mu}\alpha\,d\alpha = \mathbb{T}_x^y\mathbb{J}_\mu(x\xi), \quad 2\mu = \gamma+1.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 5 (сложения $\mathbb{J}_\mu$-функций Бесселя). *Справедлива формула*

$$\mathbb{J}_{(\gamma+1)/2}(x\xi)\mathbb{J}_{(\gamma+1)/2}(y\xi) = \mathbb{T}_x^y\mathbb{J}_{(\gamma+1)/2}(x\xi), \quad x,y,\xi \in \mathbb{R}_1^+, \tag{13}$$

где $0 < \gamma < 1$, $\mu = (\gamma+1)/2 > 0$, *а* $\mathbb{T}$*-псевдосдвиг в евклидовом пространстве* $\mathbb{R}_1^+$ *имеет вид (2), где* $1/2 \leqslant \mu < 1$.

Отметим, что $\mathbb{T}$-псевдосдвиг не меняет гладкости функции, так как особенность знаменателя (возникающая при $x = y$, $\alpha = 0$) регулярная.

5. Свойства $\mathbb{T}$-псевдосдвига. Весовую билинейную форму в пространстве $\mathbb{R}_1^+$ определим равенством (10).

Свойство 1. *Если f и g – функции, суммируемые с весом $x^{-\gamma}$, $0<\gamma<1$, то*

$$(\mathbb{T}^y f, g)_{-\gamma} = (f, \mathbb{T}^y g)_{-\gamma}. \tag{14}$$

Доказательство. Учитывая, что $-\gamma = 1-2\mu$, имеем

$$\frac{(f,\mathbb{T}^y g)_\gamma}{C(\mu)} = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi (xy)^{2\mu} f(y) \frac{g\Big(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\Big)}{\Big(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\Big)^{2\mu}} \sin^{2\mu}\alpha\, d\alpha y^{1-2\mu}\, dy.$$

Введём антиполярные координаты

$$y\cos\alpha = z_1, \quad y\sin\alpha = z_2, \quad y\,dy\,d\alpha = dz_1\,dz_2 = dz.$$

Тогда

$$\frac{(f,\mathbb{T}^y g)_\gamma}{C(\mu)} = \int\limits_{\mathbb{R}_2^+=\{z:z_2>0\}} x^{2\mu} f\Big(\sqrt{z_1^2+z_2^2}\Big) \frac{g\Big(\sqrt{(x-z_1)^2+z_2^2}\Big)}{\Big(\sqrt{(z_1-x)^2+z_2^2}\Big)^{2\mu}} z_2^{2\mu} \Big(\sqrt{z_1^2+z_2^2}\Big)^{-2\mu} dz.$$

Теперь сдвиг $x - z_1 = \xi$ приведёт к равенству

$$\frac{(f,\mathbb{T}^y g)_\gamma}{C(\mu)} = x^{2\mu} \int\limits_{\mathbb{R}_2^+} \frac{f\Big(\sqrt{(x-\xi)^2+z_2^2}\Big)}{\Big(\sqrt{(x-\xi)^2+z_2^2}\Big)^{2\mu}} \frac{g\Big(\sqrt{\xi^2+z_2^2}\Big)}{\Big(\sqrt{\xi^2+z_2^2}\Big)^{2\mu}} z_2^{2\mu}\, d\xi\, dz_2.$$

С помощью формул перехода к полярным координатам

$$\xi = y\cos\alpha, \quad z_2 = y\sin\alpha, \quad d\xi\,dz_2 = d\xi\,dz_2 = d\alpha\, y\, dy$$

вернёмся к прежним обозначениям:

$$\frac{(f,\mathbb{T}^y g)_\gamma}{C(\mu)} = \int\limits_0^\infty x^{2\mu} \int\limits_0^\pi y^{2\mu} \frac{f\Big(\sqrt{x_2^2+y_2^2-2xy\cos\alpha}\Big) g(y)}{(x_2^2+y_2^2-2xy\cos\alpha)^\mu} \sin^{2\mu}\alpha\, d\alpha\, y^{-2\mu+1}\, dy =$$

$$= \int\limits_0^\infty (xy)^{2\mu} \int\limits_0^\pi \frac{f\Big(\sqrt{x_2^2+y_2^2-2xy\cos\alpha}\Big) g(y)}{(x_2^2+y_2^2-2xy\cos\alpha)^\mu} \sin^{2\mu}\alpha y^{-\gamma} dy = \frac{(\mathbb{T}^y f, g)_{-\gamma}}{C(\mu)}.$$

Отсюда вытекает равенство (15). Свойство доказано.

Свойство 2. *Пусть f – чётная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, $x^{-\gamma} f(x) \in L_2(0,\infty)$, $0<\gamma<1$. Тогда*

$$B_{-\gamma,x} \mathbb{T}_x^y f(x) = \mathbb{T}_x^y B_{-\gamma,x} f(x). \tag{15}$$

Доказательство. Из (11), (13) и (7) имеем

$$B_{-\gamma,x} \mathbb{T}_x^y f(x) = B_{-\gamma,x} \int\limits_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \mathbb{J}_\mu(y\xi) \widehat{f}(\xi) \xi^{-\gamma}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_0^\infty (-\xi^2)\mathbb{J}_\mu(x\xi)\mathbb{J}_\mu(y\xi)\widehat{f}(\xi)\xi^{-\gamma}\,d\xi = \int\limits_0^\infty (-\xi^2)\mathbb{T}_x^y\mathbb{J}_\mu(x\xi)\widehat{f}(\xi)\xi^{-\gamma}\,d\xi.$$

Здесь множитель $(-\xi^2)$ можно внести под знак $\mathbb{T}$-псевдосдвига. В результате получим

$$B_{-\gamma}\mathbb{T}_x^y f(x) = \int\limits_0^\infty \mathbb{T}_x^y((-\xi^2)\mathbb{J}_\mu(x\xi))\widehat{f}(\xi)\xi^{-\gamma}\,d\xi =$$

$$= \int\limits_0^\infty \mathbb{T}_x^y(B_{-\gamma}\mathbb{J}_\mu(x\xi))\widehat{f}(\xi)\xi^{-\gamma}\,d\xi = \mathbb{T}_x^y B_{-\gamma}\int\limits_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi)\widehat{f}(\xi)\xi^{-\gamma}\,d\xi = \mathbb{T}_x^y B_{-\gamma}f(x).$$

Свойство доказано.

Свойство 3 (переместительность $\mathbb{T}$-псевдосдвига). *Если функция f представлена равномерно сходящимся рядом Фурье по $\mathbb{J}$-функциям Бесселя, то*

$$\mathbb{T}_x^y\mathbb{T}_x^z f(x) = \mathbb{T}_x^z\mathbb{T}_x^y f(x).$$

Доказательство непосредственно следует из определения $\mathbb{T}$-сдвига и теоремы 5:

$$\mathbb{T}_x^y\mathbb{T}_x^z\mathbb{J}(\lambda x) = \mathbb{J}(\lambda y)\mathbb{J}(\lambda z)\mathbb{J}(\lambda x) = \mathbb{T}_x^z\mathbb{T}_x^y\mathbb{J}(\lambda x).$$

Свойство 4 (ассоциативность $\mathbb{T}$-сдвига). *Если функция f представлена равномерно сходящимся рядом Фурье по $\mathbb{J}$-функциям Бесселя, то $\mathbb{T}_y^z\mathbb{T}_x^y f(x) = \mathbb{T}_x^z\mathbb{T}_x^y f(x)$.*

Доказательство аналогично доказательству свойства 3.

Свойство 5 (представление многомерного $\mathbb{T}$-псевдосдвига в сферических координатах). *Если f и g – радиальные в $\mathbb{R}_n^+$ функции, суммируемые с весом $x^{-\gamma} = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i}$, $\mu_i = (\gamma_i + 1)/2$, то*

$$C(n,\mu)\int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(|y|),\overset{\mu}{\mathbb{T}^x} g(|y|)y^{-\gamma}\,dy = \int\limits_0^\infty f(r)\,\overset{s}{\mathbb{T}^\rho}\,g(r)r^s\,dr, \quad s = n - |\gamma| - 1,$$

где $C(n,\mu)$ – константа, не зависящая от подынтегральных функций, через $\overset{\mu}{\mathbb{T}^x}$ обозначен многомерный псевдосдвиг, отвечающий мультииндексу $\mu = (\mu_1, \ldots\ldots, \mu_n)$, $1/2 < \mu_i < 1$.

Доказательство. В выражении

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n^+}\int\limits_0^\pi f(|y|)\frac{g\Big(\sqrt{\ldots + x_i^2 + y_i^2 - 2x_iy_i\cos\alpha_i + \ldots}\Big)}{(\ldots + x_i^2 + y_i^2 - 2x_iy_i\cos\alpha_i + \ldots)^{\mu_i}}\prod_{i=1}^n y_i^{1-2\mu_i}\sin^{2\mu_i}\alpha_i(|x|y_i)^{2\mu_i}\,d\alpha_i\,dy$$

по каждой паре переменных (y_i, α_i) введём антиполярные координаты

$$y_i\cos\alpha_i = z_{i,1}, \quad y_i\sin\alpha_i = z_{i,2}, \quad y_i\,dy_i\,d\alpha_i = dz_{i,1}\,dz_{i,2}.$$

Пусть $\mathbb{R}_{2n}^+ = \{z : z_{i,2} > 0\}$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{(f,\overset{\mu}{\mathbb{T}^y}\,g)_{-\gamma}}{C(\mu)} = \int\limits_{\mathbb{R}_{2n}^+} f(|z|)\frac{g\Big(\sqrt{\ldots + (x_i - z_{i,1})^2 + z_{i,2}^2 + \ldots}\Big)}{(\ldots + (x_i - z_{i,1})^2 + z_{i,2}^2 + \ldots)^{\mu_i}}\prod_{i=1}^n |x|^{2\mu_i}z_{i,2}^{2\mu_i}\Big(\sqrt{z_{i,1}^2 + z_{i,2}^2}\Big)^{-2\mu_i}\,dz.$$

Здесь существование интеграла обеспечено выбором функции g и тем, что

$$z_{i,2}^{2\mu_i}(z_{i,1}^2+z_{i,2}^2)^{-\mu_i}=\left(\frac{z_{i,1}^2}{z_{i,2}^2}+1\right)^{-\mu_i}.$$

Теперь повернём оси координат вокруг гиперплоскости, образованной чётными осями координат $Oz_{i,2}$, так, чтобы орты векторов $Oz_{1,1}$ и Ox совпали. С учётом того, что радиальные функции инвариантны относительно вращений системы координат, а точка x в новых координатах это $x=(|x|,0,\ldots,0)$, получим

$$\frac{(f,\overset{\mu}{\mathbb{T}}{}^y g)_{-\gamma}}{C(\mu)}=\int\limits_{\mathbb{R}_{2n}^+}f(|z|)\frac{g\left(\sqrt{(|x|-\hat{z}_{1,1})^2+z_{1,2}^2+\ldots\hat{z}_{2n,1}^2+z_{2n,2}^2}\right)}{((|x|-\hat{z}_{1,1})^2+z_{1,2}^2+\ldots\hat{z}_{2n,2}^2+z_{2n,2}^2)^{\mu}}|x|^{2\mu}\prod_{i=1}^n z_{i,2}^{2\mu}\left(\sqrt{\hat{z}_{i,1}^2+z_{i,2}^2}\right)^{-2\mu_i}dz=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}_{2n}^+}f(|z|)\frac{g\left(\sqrt{|x|^2-2|x|\hat{z}_{1,1}+|z|^2}\right)}{(|x|^2-2|x|\hat{z}_{1,1}+|z|^2)^{\mu}}|x|^{2\mu}\prod_{i=1}^n z_{i,2}^{2\mu_i}\left(\sqrt{\hat{z}_{i,1}^2+z_{i,2}^2}\right)^{-2\mu_i}dz.$$

Сферическое преобразование координат

$$\hat{z}_{1,1}=\rho\cos\phi_1,\quad z_{1,2}=\rho\sin\phi_1\cos\phi_2 n,\quad\ldots$$

$$\ldots,\quad\hat{z}_{2n,1}=\rho\sin\phi_1\cdots\sin\phi_{2n-2}\cos\phi_{2n-1},\quad z_{2n,2}=\rho\sin\phi_1\cdots\sin\phi_{2n-2}\sin\phi_{2n-1}$$

приведёт к равенству

$$\frac{(f,\overset{\mu}{\mathbb{T}}{}^y g)_{-\gamma}}{C(\mu)}=\int\limits_0^\infty\int\limits_{S_1^+(2n)}f(\rho)\frac{(r\rho)^{2|\mu|}g\left(\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi_1}\right)}{(r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi_1)^{\mu}}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^n\Theta_{i,2}^{2\mu}\left(\sqrt{\Theta_{i,1}^2+\Theta_{i,2}^2}\right)^{-2\mu_i}dS\,\rho^{2(n-|\mu|)-1}\,d\rho,$$

где $S_1^+(2n)=\{\Theta:|\Theta|=1,\ \Theta_{2i}>0\}$. Поскольку на $2n$-мерной сфере

$$dS=\sin^{2n-2}\phi\,d\phi_1\sin^{2n-3}\phi_2\,d\phi_2\ldots\sin\phi_{2n-2}\,d\phi_{2n-2}\,d\phi_{2n-1},$$

то

$$\frac{(f,\overset{\mu}{\mathbb{T}}{}^y g)_{-\gamma}}{C(\mu)}=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\pi f(\rho)\frac{(r\rho)^{2|\mu|}g\left(\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\alpha}\right)}{(r^2+\rho^2-2r\rho\cos\alpha)^{\mu}}\sin^{2|\mu|}\alpha\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^\pi\sin^{2n-2}\phi\,d\phi\right)^{-1}\int\limits_{S_1(2n)}\prod_{i=1}^n\Theta_{i,2}^{2\mu_i}(\Theta_{i,1}^2+\Theta_{i,2}^2)^{-\mu_i}\,dS\,\rho^{2(n-|\mu|-1}\,d\rho.$$

Обозначив

$$C^{-1}(n,\mu)=C(\mu)\left(\int\limits_0^\pi\sin^{2n-2}\varphi\,d\varphi\right)^{-1}\int\limits_{S_1(2n)}\prod_{i=1}^n\Theta_{i,2}^{2\mu_i}(\Theta_{i,1}^2+\Theta_{i,2}^2)^{-\mu_i}\,dS,$$

получим утверждение свойства 5.

6. Фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$. Пусть u и v – чётные суммируемые с весом $x^{-\gamma}$ функции. Весовую билинейную форму со слабой особенностью определим равенством (8).

Предполагая чётные функции u и v суммируемыми вместе со всеми производными и дважды интегрируя по частям, получаем равенство

$$(B_{-g}u, v)_{-\gamma} = (u, B_{-\gamma}v)_{-\gamma}.$$

Здесь внеинтегральные члены исчезли в силу суммируемости и нечётности функций u' и v' (см. теорему 1).

Фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ определяется как обобщённая функция $\mathcal{E} \in S'_{\mathrm{ev}}$, удовлетворяющая равенству

$$B_{-\gamma}\mathcal{E} = \delta_{-\gamma}$$

или, что то же самое,

$$(\mathcal{E}, B_{-\gamma}\varphi)_{-\gamma} = \varphi(0) \quad \text{для любой} \quad \varphi \in S_{\mathrm{ev}}([0,\infty)). \tag{16}$$

Следующая теорема представляет собой одно из возможных обобщений результатов работы [6] (см. в ней теорему 1) на операторы Бесселя отрицательного параметра.

Теорема 6. *Пусть* $Z(t)$ *– регулярный функционал из пространства* S'_{ev} *и пусть*

$$\lim_{t\to 0} t^{-\gamma}\frac{d}{dt}Z(t) = 1, \quad 0 \leqslant \gamma < 1. \tag{17}$$

Если в области $t > 0$ *функция* $Z = Z(x)$ *удовлетворяет однородному сингулярному дифференциальному уравнению второго порядка*

$$B_{-\gamma}Z(t) = 0, \quad 0 \leqslant \gamma < 1, \tag{18}$$

то в смысле обобщённых функций S'_{ev} *функция* Z *есть фундаментальное решение оператора* $B_{-\gamma}$ *в пространстве* $L_2^{-\gamma}$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in S_{\mathrm{ev}}$. Необходимо проверить выполнение равенства (16). Интегрируя по частям, получаем

$$(Z, B_{-\gamma}\varphi)_{-\gamma} = Z(t)\left(t^{-\gamma}\frac{d}{dt}\varphi(t)\right)\bigg|_0^\infty - \int\limits_0^\infty \frac{dZ(t)}{dt}\left(t^{-\gamma}\frac{d}{dt}\varphi(t)\right)dt.$$

Поскольку функция φ быстро убывает вместе со всеми производными, то

$$\lim_{t\to\infty} Z(t)\left(t^{-\gamma}\frac{d}{dt}\varphi(t)\right) = 0.$$

По условию функция φ чётная и бесконечно дифференцируемая в окрестности начала координат, поэтому $\varphi'(x) = O(x)$, $x \to 0$. Учитывая, что $0 \leqslant \gamma < 1$, имеем

$$Z(t)t^{-\gamma}\varphi'(t) = O(t^{1-\gamma}), \quad t \to 0.$$

Следовательно,

$$Z(t)\left(t^{-\gamma}\frac{d}{dt}\varphi(t)\right)\bigg|_0^\infty = 0.$$

Вновь проинтегрировав по частям, получим

$$(Z, B_\gamma\varphi)_\gamma = -t^{-\gamma}\frac{dZ(t)}{dt}\varphi(t)\bigg|_0^\infty - \int\limits_0^\infty t^\gamma\frac{d}{dt}\left(t^{-\gamma}\frac{dZ(t)}{dt}\right)\varphi(t)t^{-\gamma}\,dt.$$

Остаётся воспользоваться условиями (17), (18) и получить равенство (16). Теорема доказана.

Следствие 1. *Фундаментальным решением оператора* $B_{-\gamma}$, $0\leqslant\gamma<1$, *является функция*

$$\mathcal{E}(t)=\frac{1}{\gamma+1}t^{\gamma+1}.$$

Действительно, непосредственно проверяется справедливость (18): $B_{-\gamma}At^{\gamma+1}=0$, а из условия (17) следует, что нормирующая константа $A=1/(\gamma+1)$. Отсюда следует уравнение (6).

При $\gamma=0$ сингулярный дифференциальный оператор Бесселя есть вторая производная. Из (17) вытекает, что фундаментальным решением второй производной в пространстве обобщённых функций $S'_{\rm ev}$ является функция $\mathcal{E}(t)=t$, что легко проверить: если $\varphi\in S_{\rm ev}$, то

$$\int\limits_0^\infty t\varphi''(t)\,dt=t\varphi'(t)|_0^\infty-\int\limits_0^\infty\varphi'(t)\,dt=\varphi(0).$$

Замечание 1. В работе [6] получено фундаментальное решение $\mathcal{E}_{\gamma,m}$ натуральных степеней $(B_\gamma)^m$ сингулярного дифференциального оператора Бесселя при $\gamma>0$. В частности $\mathcal{E}_{\gamma,1}=t^{1-\gamma}/(1-\gamma)$, т.е. фундаментальное решение имеет вырождение (вместо привычной сингулярности) порядка $O(t^{1-\gamma})$, $t\to0$. Тем самым результат следствия 1 справедлив в более общей форме: при $\gamma>-1$ фундаментальным решением оператора B_γ является функция $\mathcal{E}_\gamma=t^{1-\gamma}/(1-\gamma)$.

Замечание 2. Принципиальное отличие фундаментальных решений операторов $B_{-\gamma}$ и B_γ заключается в том, что второе (т.е. при $\gamma>0$) может быть представлено с вырождением в произвольной точке τ обобщённым сдвигом Пуассона (12) (см. в работе [5] формулу Пуассона), который не определён при $\gamma=0$ и не существует при $\gamma<0$. Последнее приводит к тому, что обобщённый сдвиг Пуассона не может применяться к фундаментальному решению оператора Бесселя с отрицательным параметром $-\gamma$.

При $\gamma=0$ сдвиг (12), применённый к чётной непрерывной функции f, есть среднее обычных сдвигов: учитывая, что $j_{-1/2}(x)=\cos x$, и используя формулу обращения преобразования Фурье–Ганкеля (см. [4, с. 18]), имеем

$$T_x^yf(x)=T_x^yF_B^{-1}[F_Bf](x)|_{\gamma=0}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty(\cos\xi(x-y)+\cos\xi(x+y))[F_{\cos}f](\xi)d\xi=$$

$$=\frac12(f(x-y)+f(x+y)).$$

7. $\mathbb{T}$-Псевдосдвиг фундаментального решения оператора $B_{-\gamma}$. Пусть $-1<-\gamma<0$, $\mu=(\gamma)/2$. Согласно формуле (6) фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ – это функция $\mathcal{E}(x)=x^{\gamma+1}/(\gamma+1)$. Упростим запись, используя обозначение $(x\overset{\alpha}{\to}y)=x^2+y^2-2xy\cos\alpha$ и определение (14):

$$\mathbb{T}^y\mathcal{E}(x)=\frac{C(g)}{\gamma+1}\int\limits_0^\pi\frac{(xy)^{\gamma+1}\left(\sqrt{(x\overset{\alpha}{\to}y)}\right)^{\gamma+1}\sin^{\gamma+1}\alpha\,d\alpha}{\left(\sqrt{(x\overset{\alpha}{\to}y)}\right)^{2(\gamma+1)/2}}=\frac{C(g)(xy)^{\gamma+1}}{\gamma+1}\int\limits_0^\pi\sin^{\gamma+1}\alpha\,d\alpha=\frac{(xy)^{\gamma+1}}{\gamma+1}.$$

Таким образом, функция $\mathbb{T}^y\mathcal{E}(x)$ – фундаментальное решение в пространстве $\mathbb{R}_2$ по каждой из переменных. При этом

$$(B_{-\gamma}\mathbb{T}^y\mathcal{E}(x),\varphi(x))_{-\gamma}=\left(B_{-\gamma}\frac{(yx)^{\gamma+1}}{\gamma+1},\varphi(x)\right)_{-\gamma}=y^{\gamma+1}\left(B_{-\gamma}\frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1},\varphi(x)\right)_{-\gamma}=y^{\gamma+1}\varphi(0).$$

8. Фундаментальное решение Δ_B-оператора Киприянова.

Теорема 7. *Пусть* $-\gamma = -(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $0 > -\gamma_i > -1$ *и* $n - |\gamma| > 0$. *Тогда фундаментальным решением Δ_B-оператора Киприянова является регулярная $S'_{\mathrm{ev},-\gamma}$-обобщённая функция*

$$\mathcal{E}_{n,\gamma}(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{2-n-|\gamma|}}{(2-n-|\gamma|)|S_1^+(n)|_\gamma}, & n+|\gamma| \neq 2, \\ \dfrac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \ln \dfrac{1}{|x|}, & n+|\gamma| = 2, \end{cases} \tag{19}$$

где площадь нагруженной сферы

$$|S_1^+(n)|_\gamma = \int\limits_{S_1^+(n)=\{x:|x|=1, x_i>0\}} \prod_{k=1}^{n} x_i^{\gamma_k}\, dS = \frac{1}{2^{n-1}\Gamma((n+|\alpha|)/2)} \prod_{i=1}^{n} \Gamma((\alpha_k+1)/2).$$

Доказательство. Используем весовую линейную форму (9). Необходимо найти функцию $\mathcal{E}_{n,\gamma}$, для которой

$$(\Delta_B \mathcal{E}_{n,-\gamma}, \varphi)_{-\gamma} = \varphi(0).$$

Предполагая функции $\mathcal{E}_{n,-\gamma}$ и $\varphi = \varphi(|x|)$ радиальными и учитывая (1), видим, что предыдущее соотношение эквивалентно равенству

$$|S_1^+|_\gamma (B_{n-|\gamma|-1} \mathcal{E}_{n,\gamma}(r), \varphi(r))_{-\gamma} = \varphi(0).$$

Пусть $n+|\gamma| \neq 2$. Но тогда $n+|\gamma|-1 \neq 1$, а это даёт возможность воспользоваться следствием 1 при $n+|\gamma| < 1$ или замечанием 1 при $n+|\gamma| > 1$. Искомая функция имеет вид

$$\mathcal{E}_{n,\gamma}(x) = \frac{|x|^{2-n-|\gamma|}}{(2-n-|\gamma|)|S_1(n)|_\gamma}.$$

При $n+|\gamma| = 2$ применяется теорема о фундаментальном решении оператора B_γ из работы [6], поскольку фундаментальным решением оператора Бесселя $B_{n+|\gamma|-1}$ при $n+|\gamma| = 2$ будет функция $\mathcal{E}_{n,\gamma}(x) = \ln|x|$. Теорема доказана.

Отметим, что для оператора Киприянова не найден коммутирующий с ним обобщённый сдвиг, а определённый выше $\mathbb{T}$-псевдосдвиг, как это следует из п. 7, не определяет фундаментального решения оператора $B_{-\gamma}$ с центром в точке $y \in \mathbb{R}_n^+$, не совпадающей с началом координат.

Следствие 2. *Пусть* $-1 < -\gamma_i < 0$ *и* $n - |\gamma| > 1$. *Фундаментальное решение Δ_B-оператора Киприянова с центром на конусе $|x| = |y|$ имеет вид $T_{|x|}^{|y|} \mathcal{E}_{n,-\gamma}$, где T_r^ρ – обобщённый сдвиг Пуассона (12), а $\mathcal{E}_{n,-\gamma}$ – функция (19).*

Доказательство. При $n - |\gamma| > 1$ оператор Бесселя $B_{n-|\gamma|-1}$ имеет положительный параметр, поэтому ему отвечает обобщённый сдвиг Пуассона (12) порядка $\alpha = n - |\gamma| - 1 > 0$, коммутирующий с $B_{n-|\gamma|-1}$.

9. Обобщение для $\boldsymbol{\Delta_B}$-оператора Лапласа–Бесселя–Киприянова. Рассмотрим оператор Δ_B с параметрами $\gamma > -1$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n^+$. Будем предполагать, что хотя бы один из операторов Бесселя, входящий в Δ_B, имеет отрицательный параметр. Тогда нельзя определить фундаментальное решение этого оператора с особенностью в точке. Согласно (1) имеем $\Delta_B u(|x|) = B_{n+|\gamma|-1} u(r)$, $r = |x|$. Тем самым фундаментальное решение Δ_B-оператора найдётся в виде соответствующего фундаментального решения оператора Бесселя с параметром $n + |\gamma| - 1$.

В пространстве $\mathbb{R}_n^+ = \{n \geqslant 2,\ x : x_i > 0\}$ введём весовую линейную форму

$$(u, v)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} u(x) v(x) x^\gamma\, dx, \quad x^\gamma = \prod_{i=1^n} x_i^{\gamma_i}, \quad \gamma_i > -1.$$

Фундаментальное решение Δ_B-оператора Лапласа–Бесселя–Киприянова с центром в произвольной точке n-мерного полупространства $\mathbb{R}_n^+$ можно получить из фундаментального решения (19) при дополнительном условии

$$n + |\gamma| - 1 > 0. \tag{20}$$

Теорема 8. *При выполнении условия (20) фундаментальное решение Δ_B-оператора Лапласа–Бесселя–Киприянова с особенностью в точке на конусе $|x| = |y|$, $x, y \in \mathbb{R}_n^+$, имеет вид*

$$E_{n,\gamma}(|x|, |y|) = T_{|x|}^{|y|} \begin{cases} \dfrac{|x|^{2-n-|\gamma|}}{(2-n-|\gamma|)|S_1(n)|_\gamma}, & n + |\gamma| \neq 2, \\ \dfrac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \ln \dfrac{1}{|x|}, & n + |\gamma| = 2, \end{cases}$$

где $T^{|y|}$ – обобщённый сдвиг Пуассона (12), отвечающий параметру $n+|\gamma|-1 > 0$, $|S_1(n)|_\alpha$ – площадь нагруженной сферы.

Доказательство. Введём сферические координаты $x = r\Theta$, $|\Theta| = 1$. Согласно формуле (1) имеем $\Delta_B u(|x|) = B_{n-|\gamma|-1} u(r)$, $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Отсюда, предположив функцию $\varphi = \varphi(|x|)$ радиальной и учтя (20), получим равенства

$$(\Delta_B E, \varphi)_\gamma = (\Delta_B T_{|x|}^{|y|} \mathcal{E}, \varphi)_\gamma = |S_1^+|_\gamma (B_{n+|\alpha|-1} T_r^\rho \mathcal{E}(r), \varphi(r))_{-\gamma} =$$

$$= |S_1^+|_\gamma (T_r^\rho B_{n+|\alpha|-1} \mathcal{E}(r), \varphi(r))_{-\gamma} = |S_1^+|_\gamma (B_{n+|\alpha|-1} \mathcal{E}(r), T_r^\rho \varphi(r))_{-\gamma} = \varphi(\rho).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляхов Л.Н., Санина Е.Л.* Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью оператора Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1610–1520.
2. *Metzler R., Glöckle W.G., Nonnenmacher T.F.* Fractional model equation for anomalous diffusion // Phys. A. Stat. Mech. and its Appl. 1994. V. 211. № 1. P. 13–24.
3. *Киприянов И.А., Кононенко В.И.* О фундаментальных решениях некоторых сингулярных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 8. С. 1470–1483.
4. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., 1997.
5. *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6. Вып. 2 (42). С. 102–143.
6. *Ляхов Л.Н.* Фундаментальные решения сингулярных дифференциальных уравнений с D_B оператором Бесселя // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2012. Т. 278. С. 148–160.
7. *Какичев В.А.* О свертках для интегральных преобразований // Изв. АН БССР. Сер. физ-мат. наук. 1967. № 2. С. 48–57.
8. *Бритвина Л.Е.* Полисвертки преобразования Ханкеля и дифференциальные операторы // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 3. С. 298–300.
9. *Бритвина Л.Е.* О некоторых полисвертках, порожденных преобразованием Ханкеля // Мат. заметки. 2004. Т. 76. Вып. 1. С. 20–26.
10. *Britvina L.Y.* Generalized shift operators generated by convolutions of integral transforms // Current Trends in Analysis and its Applications. Trends in Mathematics / Eds. V. Mityushev, M. Ruzhansky. Cham, 2015.
11. *Толстов Г.П.* Ряды Фурье. М., 1980.
12. *Сабитов К.Б., Зайцева Н.В.* Вторая начально-граничная задача B-гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2019. № 10. С. 75–86.

Воронежский государственный университет,
Елецкий государственный университет
имени И.А. Бунина,
Липецкий государственный педагогический университет
имени П.П. Семенова-Тян-Шанского

Поступила в редакцию 26.05.2022 г.
После доработки 26.05.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1666–1682

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32

ДВУМЕРНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ УПРУГИХ ПРОКЛАДОК

© 2022 г. С. А. Назаров

Построена и обоснована асимптотика собственных чисел и вектор-функций системы Ламе в тонком цилиндре с краевыми условиями Дирихле на всей границе. В качестве предельной выступает плоская задача теории упругости с новыми упругими постоянными. Показано, что при постановке условий Неймана на боковой поверхности цилиндра какая-либо краевая задача для системы дифференциальных уравнений на сечении не может предоставить асимптотику собственных чисел трёхмерной задачи, так как собственные вектор-функции локализуются около кромки тонкого цилиндра. Сформулированы открытые вопросы.

DOI: 10.31857/S0374064122120081, EDN: NCGZOG

1. Постановка задач. Пусть ω – область на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni y = (y_1, y_2)$, ограниченная простым замкнутым гладким (класса C^∞; см. п. $7, 1^\circ$) контуром $\gamma = \partial\omega$. Масштабированием сведём характерный размер фигуры ω к единице, т.е. сделаем декартовы координаты $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и все геометрические параметры безразмерными. Цилиндр малой высоты $h > 0$

$$\Omega^h = \{x : y = (x_1, x_2) \in \omega, \quad z = x_3 \in (0, h)\} \tag{1}$$

интерпретируем как однородное изотропное тонкое упругое тело с постоянными Ламе $\lambda \geqslant 0$, $\mu > 0$ и плотностью ρ, которую также приравняем к единице. Систему дифференциальных уравнений теории упругости

$$-\mu\Delta_x u^h(x) - \nabla_x \nabla_x \cdot u^h(x) = \Lambda^h u^h(x), \quad x \in \Omega^h, \tag{2}$$

дополним краевыми условиями Дирихле

$$u^h(y, 0) = u^h(y, 1) = 0, \quad y \in \omega, \tag{3}$$

$$u^h(x) = 0, \quad x \in \Gamma^h := \gamma \times (0, h), \tag{4}$$

означающими, что поверхность $\partial\Omega^h$ полностью жёстко зафиксирована, т.е. пластина Ω^h вставлена в полость той же формы и прикреплена к её стенкам. При этом $\nabla_x = \mathrm{grad}$, $\nabla_x \cdot = \mathrm{div}$, точкой обозначено скалярное произведение в евклидовом пространстве, $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ – оператор Лапласа, Λ^h – спектральный параметр (квадрат частоты собственных колебаний) и u^h – вектор смещений с декартовыми компонентами u_1^h, u_2^h и u_3^h. Также рассматривается смешанная краевая задача, в которой краевые условия (4) заменены условиями

$$\sigma_{nn}(u^h; x) = \sigma_{nz}(u^h; x) = \sigma_{ns}(u^h; x) = 0, \quad x \in \Gamma^h. \tag{5}$$

Здесь (n, s) – естественная система криволинейных координат в окрестности $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ контура γ: n – ориентированное расстояние до γ, $n < 0$ в $\omega \bigcap \mathcal{V}$, а s – длина дуги, измеренная вдоль контура против часовой стрелки. Кроме того, $\sigma_{nn}(u^h)$, $\sigma_{ns}(u^h)$ и $\sigma_{nz}(u^h)$ – проекции на оси n, s и z вектора нормальных напряжений $\sigma^{(n)}(u^h)$, т.е.

$$\sigma^{(n)}(u^h) = \sum_{i=1,2} n_i \sigma^{(i)}(u^h), \quad \sigma^{(j)}(u^h) = (\sigma_{j1}(u^h), \sigma_{j2}(u^h), \sigma_{j3}(u^h)),$$

$$\sigma_{jk}(u^h) = \mu\left(\frac{\partial u_j^h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^h}{\partial x_j}\right) + \delta_{j,k}\lambda\left(\frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^h}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3^h}{\partial x_3}\right), \quad j, k = 1, 2, 3, \tag{6}$$

причём n_1 и n_2 – проекции на оси y_1 и y_2 единичного вектора внешней нормали на $\partial\omega$, а $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера. В этом случае тело Ω^h – упругая прокладка между абсолютно жёсткими прямыми штампами, а её боковая поверхность Γ^h свободна от внешних воздействий.

Вариационная формулировка задачи (2)–(4) апеллирует к интегральному тождеству [1, 2]

$$\mu(\nabla_x u^h, \nabla_x \psi^h)_{\Omega^h} + (\lambda+\mu)(\nabla_x \cdot u^h, \nabla_x \cdot \psi^h)_{\Omega^h} = \Lambda^h (u^h, \psi^h)_{\Omega^h} \quad \text{при всех} \quad \psi^h \in H_0^1(\Omega^h)^3. \tag{7}$$

Здесь $(\,\cdot\,,\cdot\,)_{\Omega^h}$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega^h)$, $H_0^1(\Omega^h)$ – пространство Соболева функций, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega^h$, а последний верхний индекс 3 в формуле (7) указывает количество компонент пробной вектор-функции $\psi^h = (\psi_1^h, \psi_2^h, \psi_3^h)$. Билинейная форма $E_\Box(u^h, \psi^h; \Omega^h)$ в левой части тождества (7) положительно определена и симметрична на пространстве $\mathcal{H}^h = H_0^1(\Omega^h)^3$, а значит, согласно [3, гл. 10, § 1, 2], задаче (7) ставится в соответствие положительно определённый самосопряжённый оператор $A_\Box^h$ с дискретным спектром

$$0 < \Lambda_1^h \leqslant \Lambda_2^h \leqslant \Lambda_3^h \leqslant \ldots \leqslant \Lambda_m^h \leqslant \ldots \to +\infty. \tag{8}$$

Соответствующие собственные вектор-функции $u_{(1)}^h, u_{(2)}^h, u_{(3)}^h, \ldots, u_{(m)}^h, \ldots \in H_0^1(\Omega^h)^3$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(u_{(p)}^h, u_{(q)}^h)_{\Omega^h} = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}. \tag{9}$$

Функционал $E_\Box(u^h, u^h; \Omega^h)$, часто называемый *упругой квазиэнергией*, вообще говоря, отличается от обычной (ср., например, [4]) удвоенной упругой энергии пластины

$$E(u^h, u^h; \Omega^h) = \int\limits_{\Omega^h} \biggl(\mu \sum_{j,k=1}^{3} \biggl| \frac{\partial u_j^h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^h}{\partial x_j} \biggr|^2 + \lambda \biggl| \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j^h}{\partial x_j} \biggr|^2 \biggr) dx, \tag{10}$$

которая порождает билинейную форму в левой части интегрального тождества

$$E(u^h, \psi^h; \Omega^h) = \Lambda^h (u^h, \psi^h)_{\Omega^h} \quad \text{при всех} \quad \psi^h \in \mathcal{H}_=^h := H_0^1(\Omega^h; \omega^0 \textstyle\bigcup \omega^h)^3, \tag{11}$$

служащего вариационной постановкой задачи (2), (3), (5). Здесь фигурирует пространство Соболева $H_0^1(\Omega^h; \omega^0 \bigcup \omega^h)$ функций, обращающихся в нуль на основаниях $\omega^0 = \omega \times \{0\}$ и $\omega^h \times \{h\}$ пластины (1). Интегрированием по частям легко проверить, что для полей смещений $u^h \in H_0^1(\Omega^h)^3$, удовлетворяющих обоим краевым условиям (3) и (4), левые части соотношений (7) и (11) совпадают. Неравенство Корна (см., например, [5; 6, гл. 3, § 1]) показывает, что

$$E(u^h, u^h; \Omega^h) \geqslant C h^{-2} \|u^h; L^2(\Omega^h)\|^2 \quad \text{для} \quad u^h \in \mathcal{H}_=^h. \tag{12}$$

Множитель C не зависит от параметра $h \in (0, h_=]$ при некотором $h_= > 0$ и, разумеется, от вектор-функции u^h. Для $u^h \in H_0^1(\Omega^h)^3$ можно взять $C = \mu\pi^2$ и $h_= := h_\Box = 1$, но при отказе от условия Дирихле (4) на поверхности Γ^h точная оценка константы C неизвестна.

Основная цель работы – исследовать поведение собственных пар {число; вектор-функция} задач (2)–(4) и (2), (3), (5). Для первой из них – задачи Дирихле – в п. 2 построена плоская модель, а в пп. 3 и 5 доказаны теоремы 1–3, предоставляющие информацию о точности приближения собственных частот и мод трёхмерной прокладки (1) собственными парами двумерной задачи на сечении ω. Таким образом, получены традиционные результаты о деформации тонких упругих тел (ср. монографии [6–9] и др.), хотя ранее спектр задачи (2)–(4) не исследовался.

Для второй задачи – смешанной краевой – характерны существенные отличия как в поведении собственных пар при $h \to +0$, так и в степени исполнения асимптотического анализа. В п. 6 на основе изучения явления пограничного слоя (см. п. 4) продемонстрирована "ущербность" плоской модели прокладки Ω^h со свободной боковой поверхностью Γ^h: во-первых, не удаётся обоснованно (с оценками погрешностей) назначить краевые условия на границе γ сечения ω, и, во-вторых, асимптотика любого количества собственных чисел (8) не может быть описана посредством решений какой-либо краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в области $\omega \subset \mathbb{R}^2$ (теорема 4). Кроме того, в теореме 5 из п. 6 установлено, что собственные вектор-функции задачи (2), (3), (5) сугубо локализованы в малой окрестности кромки пластины и экспоненциально затухают при удалении от неё.

Вместе с тем асимптотическое строение собственных пар рассматриваемой смешанной краевой задачи осталось невыясненным, хотя в статье [10] уже были приведены асимптотические конструкции в похожей, но более простой скалярной задаче. В последнем п. 7 обсуждаются родственные задачи об упругих пластинах и упоминаются другие открытые вопросы асимптотического анализа.

2. Формальная асимптотика в задаче Дирихле. Для собственных пар $\{\Lambda^h; u^h\} \in \mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega^h)$ задачи (2)–(4) примем анзацы

$$\Lambda^h = \mu\pi^2 h^{-2} + \beta + \ldots \tag{13}$$

и

$$u_i^h(x) = v_i(y)\sin(\pi\zeta) + h^2 V_i(y,\zeta) + \ldots, \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

$$u_3^h(x) = hV_3(y,\zeta) + \ldots \tag{15}$$

Вектор $v = (v_1, v_2)$, число β и функции V_k подлежат определению, $\zeta = h^{-1}z$ – растянутая поперечная координата, а многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные в предпринимаемом анализе. Первые слагаемые в правых частях соотношений (13) и (14) подобраны так, чтобы в главном выполнялись равенства (2) и (3). Собрав множители при h^{-1} в системе (2), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-(\lambda + 2\mu)\partial_\zeta^2 V_3(y,\zeta) - \mu\pi^2 V_3(y,\zeta) = (\lambda + \mu)\pi\cos(\pi\zeta)\nabla_y \cdot v(y), \quad \zeta \in (0,1), \tag{16}$$

с параметром $y \in \omega$. Дополнив это уравнение проистекающими из (3) условиями Дирихле

$$V_3(y,0) = V_3(y,1) = 0,$$

для главного члена анзаца (15) находим, что $V_3(y,\zeta) = Z(\zeta)\nabla_y \cdot v(y)$ и

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\pi}\left(\cos(\pi\zeta) - \cos(\pi\alpha\zeta) + \frac{1+\cos(\pi\alpha)}{\sin(\pi\alpha)}\sin(\pi\alpha\zeta)\right), \quad \alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \in (0, 1/\sqrt{2}]. \tag{17}$$

Отметим, что $\sin(\pi\alpha) > 0$.

Очередная задача для вектора $V' = (V_1, V_2)$ получается такой:

$$- \mu\partial_\zeta^2 V'(y,\zeta) - \mu\pi^2 V'(y,\zeta) = F(y,\zeta) := (\lambda + \mu)\partial_\zeta Z(\zeta)\nabla_y \nabla_y \cdot v(y) +$$

$$+ \sin(\pi\zeta)(\beta v(y) + \mu\Delta_y v(y) + (\lambda + \mu)\nabla_y \nabla_y \cdot v(y)), \quad \zeta \in (0,1),$$

$$V'(y,0) = V'(y,1) = 0. \tag{18}$$

Задача (18) имеет решение в том и только в том случае, если среднее значение произведения $\sin(\pi\zeta)F(y,\zeta)$ по $\zeta \in (0,1)$ обращается в нуль. Непосредственными вычислениями такое требование превращается в систему двух дифференциальных уравнений

$$-\mu\Delta_y v(y) - (\lambda_\sharp(\alpha) + \mu)\nabla_y \nabla_y \cdot v(y) = \beta v(y), \quad y \in \omega, \tag{19}$$

в которой

$$\lambda_\sharp(\alpha) = 4(\lambda + \mu)\alpha(\sin(\pi\alpha))^{-1}(1 + \cos(\pi\alpha)) - \mu. \tag{20}$$

Соблюдая для функций (14) условия (4) на боковой поверхности цилиндра (1), замкнем систему (19) условиями Дирихле

$$v(y) = 0, \quad y \in \gamma = \partial\omega. \tag{21}$$

Итак, получена плоская задача теории упругости на сечении ω. Её вариационная постановка принимает вид

$$\mu(\nabla_y v, \nabla_y \varphi)_\omega + (\lambda_\sharp(\alpha) + \mu)(\nabla_y \cdot v, \nabla_y \cdot \varphi)_\omega = \beta(v, \varphi)_\omega \quad \text{при всех} \quad \varphi \in H_0^1(\omega)^2. \tag{22}$$

Новая постоянная Ламе (19), положительная при больших $\lambda > 0$, становится отрицательной при $\lambda = 0$. Вместе с тем $\lambda_\sharp(\alpha) + \mu > 0$ для всех $\lambda \geqslant 0$, и поэтому билинейная форма из левой части интегрального тождества (22) положительно определена.

Предложение 1. *Спектр задачи (22) (или (19), (21) в дифференциальной форме) образует монотонную положительную последовательность нормальных собственных чисел*

$$0 < \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_3 \leqslant \ldots \leqslant \beta_m \leqslant \ldots \to +\infty. \tag{23}$$

Соответствующие собственные вектор-функции $v_{(1)}, v_{(2)}, v_{(3)}, \ldots, v_{(m)}, \ldots \in H_0^1(\omega)^2$ *можно подчинить условиям ортогональности и нормировки*

$$(v_{(m)}, v_{(m)})_\omega = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

3. О сходимости. Зафиксируем номер $m \in \mathbb{N}$. Далее в замечании из п. 5 будет пояснено соотношение

$$\Lambda_m^h - \mu\pi^2 h^{-2} \leqslant B_m, \tag{25}$$

а значит, вдоль некоторой положительной бесконечно малой последовательности $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ имеет место сходимость

$$\Lambda_m^{h_j} - \mu\pi^2 h_j^{-2} \to \boldsymbol{\beta}_m. \tag{26}$$

Далее индексы j и m по возможности не пишем.

Положим

$$\mathbf{v}^h(y) = \sqrt{\frac{2}{h}} \int\limits_0^h u^h(y,z) \sin\left(\pi \frac{z}{h}\right) dz, \quad \mathbf{V}^h(y,z) = u^h(y,z) - \sqrt{\frac{2}{h}} \sin\left(\pi\frac{z}{h}\right) \mathbf{v}^h(y). \tag{27}$$

Поскольку среднее произведения $\sin(\pi h^{-1} z)\mathbf{V}^h(y,z)$ по $z \in (0,h)$ равно нулю, справедливо неравенство Пуанкаре

$$\int\limits_0^h |\partial_z \mathbf{V}^h(y,z)|^2\, dz \geqslant 4\frac{\pi^2}{h^2} \int\limits_0^h |\mathbf{V}^h(y,z)|^2\, dz. \tag{28}$$

Кроме того, в силу условия нормировки (9) имеем

$$1 = \|u^h; L^2(\Omega^h)\|^2 = \|\mathbf{v}^h; L^2(\omega)\|^2 + \|\mathbf{V}^h; L^2(\Omega^h)\|^2. \tag{29}$$

Отбрасывая ненужные члены, выводим из интегрального тождества (7) соотношение

$$\begin{gathered}\Lambda^h(\|\mathbf{v}^h; L^2(\omega)\|^2 + \|\mathbf{V}^h; L^2(\Omega^h)\|^2) \geqslant \mu\|\partial_z u^h; L^2(\Omega^h)\|^2 = \\ = \mu\frac{\pi^2}{h^2}\|\mathbf{v}^h; L^2(\omega)\|^2 + \mu\|\partial_z \mathbf{V}^h; L^2(\Omega^h)\|^2 + 2\mu\frac{\pi}{h}\int\limits_{\Omega^h} \cos\left(\pi\frac{z}{h}\right)\mathbf{v}^h(y)\partial_z \mathbf{V}^h(y,z)\, dy\, dz.\end{gathered} \tag{30}$$

При учёте определений (27) интегрированием по частям превращаем последний интеграл в нуль. Таким образом, соотношения (25) и (28)–(30) приводят при малом h к оценкам

$$C \geqslant (\Lambda^h - \mu\pi^2 h^{-2})\|\mathbf{v}^h; L^2(\omega)\|^2 \geqslant (4\mu\pi^2 h^{-2} - \Lambda^h)\|\mathbf{V}^h; L^2(\Omega^h)\|^2, \quad \|\mathbf{V}^h; L^2(\Omega^h)\|^2 \leqslant ch^2. \tag{31}$$

Обозначим $u^{h\prime} = (u_1^h, u_2^h)$ и заметим, что

$$\mu\|\nabla_y u^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|^2 + \mu\|\nabla_y \cdot u^{h\prime} + \partial_z u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{2}\mu\|\nabla_y \cdot u^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|^2 + \mu\|\partial_z u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2 + 2\mu\int\limits_{\Omega^h} \partial_z u_3^h \nabla_y \cdot u^{h\prime} dx \geqslant \frac{\mu}{3}\|\partial_z u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2.$$

Следовательно, при малом $h > 0$ верны формулы

$$\Lambda^h(\|u^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|^2 + \|u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2) \geqslant \mu\|\partial_z u^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|^2 + \mu\|\nabla_y u^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|^2 + \mu\|\partial_z u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2 +$$

$$+ \mu\|\nabla_y \cdot u^{h\prime} + \partial_z u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2 \geqslant \mu\frac{\pi^2}{h^2}\|u^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|^2 + \mu\frac{4\pi^2}{3h^2}\|u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2,$$

$$\left(\mu\frac{4\pi^2}{3h^2} - \Lambda^h\right)\|u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2 \leqslant \left(\Lambda^h - \mu\frac{\pi^2}{h^2}\right)\|u^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|^2 \quad \text{и} \quad \|u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2 \leqslant ch^2. \tag{32}$$

Наконец, полученные соотношения приводят к неравенствам

$$\Lambda^h\|u^h; L^2(\Omega^h)\|^2 \geqslant \mu\|\partial_z u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2 + \|\nabla_y(\mathbf{v}^h\sqrt{2h^{-1}}\sin(\pi h^{-1}z) + \mathbf{V}^h); L^2(\Omega^h)\|^2,$$

$$\|\nabla_y \mathbf{v}^h; L^2(\omega)\|^2 \leqslant c. \tag{33}$$

Подведём итог. Согласно формулам (29) и (33) вдоль подпоследовательности $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ (сохраняем обозначение) имеют место сходимости

$$\mathbf{v}_{(m)i}^{h_j} \to \mathbf{v}_{(m)i}^0, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{v}_{(m)3}^{h_j} \to \mathbf{v}_{(m)3}^0 \quad \text{слабо в } H_0^1(\omega) \text{ и сильно в } L^2(\omega), \tag{34}$$

причём $\|\mathbf{v}_{(m)i}^{0\prime}; L^2(\omega)\| = 1$ и $\mathbf{v}_{(m)3}^0 = 0$ в силу соотношений (29), (31) и (32). Кроме того, взяв $\varphi \in C_c^\infty(\omega)$, подставим в интегральное тождество (7) пробную вектор-функцию ψ^h с компонентами

$$\psi_i^h(x) = \sqrt{2h^{-1}}\sin(\pi h^{-1}z)\varphi_i(y), \quad i = 1, 2, \quad \psi_3^h(x) = \sqrt{2h}Z(h^{-1}z)\nabla_y \cdot \varphi(y).$$

После интегрирования по частям и простых преобразований приходим к равенству

$$\sqrt{2h^{-1}}(u^{h\prime}, \sin(\pi\zeta)(\mu\Delta_y\varphi + (\lambda+\mu)\nabla_y\nabla_y \cdot \varphi(1+\partial_\zeta Z)))_{\Omega^h} + \sqrt{2h^{-1}}(\Lambda^h - \mu\pi^2 h^{-2})(u^{h\prime}, \sin(\pi\zeta)\varphi)_{\Omega^h} =$$

$$= \sqrt{2h^{-3}}(u^{h\prime}, ((\lambda+2\mu)\partial_\zeta^2 Z + \mu\pi^2 h^{-2} Z + (\lambda+\mu)\pi\cos(\pi\zeta))\nabla_y \cdot \varphi)_{\Omega^h} +$$

$$+ \sqrt{2h}(u_3^h, \mu Z \Delta_y \nabla_y \cdot \varphi)_{\Omega^h} + \sqrt{2h}(\Lambda^h - \mu\pi^2 h^{-2})(u_3^h, Z\nabla_y \cdot \varphi)_{\Omega^h}. \tag{35}$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства обращается в нуль благодаря уравнению (16), а пределы остальных двух – нули, так как выполняются соотношения (32), (25) и неравенство

$$\|Z\Delta_y\nabla_y \cdot \varphi; L^2(\Omega^h)\| + \|Z\nabla_y \cdot \varphi; L^2(\Omega^h)\| \leqslant c_\varphi\sqrt{h}.$$

Согласно сходимостям (26), (34) и формулам (27), (31) предел второго слагаемого из левой части равенства (35) – скалярное произведение $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{v}^{0\prime}, \varphi)_\omega$. На основании оценки (31) в первом слагаемом можно сделать замену $u^{h\prime} \mapsto \sqrt{2h^{-3}}\mathbf{v}^h\sin(\pi\zeta)$ – его предел аннулируется после подстановки $u^{h\prime} \mapsto \mathbf{V}^h$. Наконец, вычисления из п. 2, касающиеся условий разрешимости задачи (18), позволяют найти общий предел

$$(\mathbf{v}^{0\prime}, \mu\Delta_y\varphi + (\lambda_\sharp(\alpha) + \mu)\nabla_y\nabla_y \cdot \varphi + \boldsymbol{\beta}\varphi)_\omega = 0 \quad \text{при всех} \quad \varphi \in C_c^\infty(\omega)^2. \tag{36}$$

Соотношение (36) превращаем в интегральное тождество (22) и по замыканию переносим на все пробные вектор-функции $\varphi \in H_0^1(\omega)^2$. Итак, в предположении (25) доказана

Теорема 1. *Предельные переходы (26) и (34) предоставляют собственную пару* $\{\boldsymbol{\beta}_m; \mathbf{v}^{0\prime}_{(m)}\}$ *задачи (36).*

Полученное утверждение обладает несколькими недостатками, например, неизвестны скорости сходимостей и номер собственного числа $\boldsymbol{\beta}_m$ в последовательности (23). Для их устранения изучим явление пограничного слоя.

4. Спектральная задача в полуполосе. Формальный вывод системы (19) совершенно безразличен к типу краевых условий на боковой поверхности Γ^h пластины Ω^h и поэтому "обслуживает" смешанную краевую задачу (2), (3), (5). Осложнения возникают при постановке краевых условий на границе γ сечения ω. Как обычно (ср. [11–13; 14, гл. 16] и др.), нужно построить пограничный слой вблизи кромки пластины – требование его экспоненциального затухания как раз и определяет искомые условия. Растянем координаты

$$(n, z) \mapsto \xi = (\xi_1, \xi_2) = (h^{-1}n, h^{-1}z), \tag{37}$$

но сохраним прежний масштаб для координаты s. Замена $x \mapsto (\xi, s)$ и формальный переход к $h = 0$, исключая переменную s, расщепляют систему (2) на две: систему двух уравнений о плоском деформированном состоянии пластины

$$-\mu\Delta_\xi w'(\xi) - (\lambda + \mu)\nabla_\xi\nabla_\xi \cdot w'(\xi) = Mw'(\xi), \quad \xi \in \Pi, \tag{38}$$

для вектора $w' = (w_1, w_2)$ в полуполосе

$$\Pi = \{\xi : \xi_1 < 0, \ \ \xi_2 \in (0, 1)\} \tag{39}$$

и скалярное уравнение

$$-\mu\Delta_\xi w_3(\xi) = Mw_3(\xi), \quad \xi \in \Pi, \tag{40}$$

для депланации w_3. При этом M – новое обозначение спектрального параметра, и с допустимой погрешностью координаты (37) можно интерпретировать как декартовы, т.е. $w_1 = w_n$, $w_2 = w_z$ и $w_3 = w_s$ – образы смещений u_n^h, u_z^h и u_s^h, а напряжения вычисляются по формулам (6) при замене дифференцирования по x_i дифференцированием по ξ_i и удалении всех производных по x_3. В соответствии с равенствами (3) и (4) или (5) замыкаем систему (38) следующими краевыми условиями на боковых сторонах и торце $\varpi = \{\xi : \xi_1 = 0, \ \xi_2 \in (0, 1)\}$ полуполосы (39):

$$w'(\xi_1, 0) = w'(\xi_1, 1) = 0, \quad \xi_1 < 0, \tag{41}$$

$$w'(\xi) = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda + 2\mu)\frac{\partial w_1}{\partial \xi_1}(\xi) + \lambda\frac{\partial w_2}{\partial \xi_2}(\xi) = \mu\frac{\partial w_1}{\partial \xi_2}(\xi) + \mu\frac{\partial w_2}{\partial \xi_1}(\xi) = 0, \quad \xi \in \varpi. \tag{42}$$

Краевые условия для уравнения (40) принимают вид

$$w_3(\xi_1, 0) = w_3(\xi_1, 1) = 0, \quad \xi_1 < 0,$$
$$w_3(\xi) = 0 \quad \text{или} \quad \mu\frac{\partial w_3}{\partial \xi_1}(\xi) = 0, \quad \xi \in \varpi. \tag{43}$$

Спектры скалярных задач Дирихле или смешанной краевой легко изучаются при помощи метода Фурье. Для задачи (40), (43) непрерывный спектр – луч $[M_\dagger, +\infty)$ с точкой отсечки

$$M_\dagger = \mu\pi^2, \tag{44}$$

а точечный спектр пуст, т.е. нет ни изолированных, ни вкраплённых в непрерывный спектр собственных чисел.

Исследование спектров задач теории упругости (38), (41), (42) значительно сложнее, и до сих пор нет полных ответов для смешанной краевой задачи. В работах [10, 15, 16] доказано, что при постановке на торце ϖ краевых условий в напряжениях непрерывный спектр – луч $[M_\dagger, +\infty)$ с прежней точкой отсечки (44), но дискретный спектр содержит по крайней мере одно собственное число

$$M_1 \in (0, M_\dagger). \tag{45}$$

Соответствующая собственная вектор-функция $W_{(1)} \in H^1(\Pi)^2$ обращается в нуль на боковых сторонах полуполосы Π, исчезает на бесконечности с экспоненциальной скоростью и удовлетворяет следующему из вариационной постановки задачи равенству

$$M_1 \|W_{(1)}; L^2(\Pi)\|^2 = E_{\sqsupset}(W_{(1)}, W_{(1)}; \Pi) :=$$

$$:= \int\limits_{\Pi} \left(2\mu \left| \frac{\partial W_{(1)1}}{\partial \xi_1} \right|^2 + 2\mu \left| \frac{\partial W_{(1)1}}{\partial \xi_1} \right|^2 + \mu \left| \frac{\partial W_{(1)1}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial W_{(1)2}}{\partial \xi_1} \right|^2 + \lambda \left| \frac{\partial W_{(1)1}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial W_{(1)2}}{\partial \xi_2} \right|^2 \right) d\xi. \tag{46}$$

Кратность дискретного спектра смешанной задачи теории упругости (38), (41), (42) осталась неизвестной и, что особенно важно, неочевидно, возникает ли в этой задаче пороговый резонанс? Согласно публикациям [17, 18] пороговый резонанс реализуется тогда, когда у задачи при $M = M_\dagger$ появляется нетривиальное ограниченное решение

$$w^\dagger(\xi) = T e_{(1)} \sin(\pi \xi_2) + \widetilde{w}^{\,\dagger}(\xi), \tag{47}$$

в котором остаток $\widetilde{w}^{\,\dagger}(\xi)$ экспоненциально затухает на бесконечности, $e_{(1)} = (1, 0)$ и $T \in \mathbb{R}$. Если коэффициент T обратился в нуль, то $M_\dagger$ – собственное число из точечного спектра и $w^\dagger = \widetilde{w}^{\,\dagger} \in H^1(\Pi)^2$ – собственная вектор-функция, т.е. захваченная упругая волна. В случае $T \neq 0$ решение (47) – почти стоячая волна и пороговый резонанс правильный по терминологии [18]. Например, в смешанной краевой задаче (40), (43) реализуется именно правильный пороговый резонанс и $\sin(\pi\xi_2)$ – нужное решение, но в скалярной задаче Дирихле для того же уравнения (40) пороговый резонанс отсутствует полностью.

Предложение 2. *В векторной задаче Дирихле (38), (41), (42) нет ни точечного спектра, ни порогового резонанса.*

Доказательство. Простой способ проверки утверждения, основанный на классическом приёме [19], заимствуем из статей [15, 16]. Пусть w' – либо захваченная волна, либо почти стоячая волна (47) на пороге. Благодаря слабой сингулярности напряжений в вершине прямого угла с данными Дирихле на его сторонах (см. [20] и [21, гл. III, § 8]), производная $W' = \partial w'/\partial \xi_1$ принадлежит пространству $H^1(\Pi)^2$, затухает на бесконечности с экспоненциальной скоростью и удовлетворяет равенствам (38) и (41). Таким образом, для w' и W' верна формула Грина, из которой исчезают все интегралы, кроме

$$\int\limits_0^1 \sum_{i=1,2} \sigma_{1i}(w'; 0, \xi_2) W_i'(0, \xi_2)\, d\xi_2 = \int\limits_0^1 \left((\lambda + 2\mu) \left| \frac{\partial w_1}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) \right|^2 + \mu \left| \frac{\partial w_2}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) \right|^2 \right) d\xi_2,$$

а значит, аннулируется и он, т.е. поле w' обращается в нуль на торце ϖ вместе со своими производными, что невозможно в силу теоремы о единственности продолжения решений системы Ламе (см., например, [22, гл. 4]).

Общие принципы анализа явления пограничного слоя в тонких областях (см. [11; 14, гл. 16; 23; 24] и др.) связывают тип краевого условия в предельной задаче пониженной размерности именно с качеством порогового резонанса, в частности, с его отсутствием. Так, правомочность постановки условия Дирихле (21), замыкающего систему дифференциальных уравнений (19), обусловлена именно предложением 2 (в п. 2 краевое условие назначено эвристически). Поскольку о пороговом резонансе в смешанной краевой задаче (38), (41), (42) сведений нет, обоснованно снабдить систему (19) краевыми условиями автор не может, но это обстоятельство непринципиально, так как в п. 6 будет показано, что анзац (13) просто непригоден для её собственных чисел (8), асимптотику которых следует искать из совершенно иной предельной задачи. Вывод последней выходит за рамки данной работы.

5. Обоснование асимптотической модели. В гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H}^h := H_0^1(\Omega^h)^3$$

введём скалярное произведение

$$\langle u^h, \psi^h \rangle_h = E_\square(u^h, \psi^h; \Omega^h) \tag{48}$$

и положительный, симметричный и непрерывный, а значит, самосопряжённый оператор $\mathcal{K}^h$,

$$\langle \mathcal{K}^h u^h, \psi^h \rangle_h = (u^h, \psi^h)_{\Omega^h} \quad \text{для всех} \quad u^h, \psi^h \in \mathcal{H}^h. \tag{49}$$

Оператор $\mathcal{K}^h$ компактный и, следовательно, в силу теорем 10.1.5 и 10.2.2 из [3] его существенный спектр – одна точка $\kappa = 0$, а дискретный спектр образует монотонную положительную бесконечно малую последовательность собственных чисел

$$\kappa_1^h \geqslant \kappa_2^h \geqslant \kappa_3^h \geqslant \ldots \geqslant \kappa_m^h \geqslant \ldots \to +0. \tag{50}$$

Благодаря определениям (48) и (49), вариационная постановка (7) задачи (2)–(4) эквивалентна абстрактному уравнению

$$\mathcal{K}^h u^h = \kappa^h u^h \quad \text{в} \quad \mathcal{H}^h,$$

а члены последовательностей (50) и (8) находятся в отношении

$$\kappa_m^h = (\Lambda_m^h)^{-1}. \tag{51}$$

Следующее утверждение, известное как лемма о “почти собственных” числах и векторах (см. первоисточник [25]), обеспечено спектральным разложением резольвенты (см., например, книгу [3, гл. 6]).

Лемма 1. *Пусть $U^h \in \mathcal{H}^h$ и $K^h \in \mathbb{R}_+$ таковы, что*

$$\|U^h; \mathcal{H}^h\| = 1, \quad \|\mathcal{K}^h U^h - K^h U^h; \mathcal{H}^h\| =: \delta^h \in [0, K^h). \tag{52}$$

Тогда у оператора $\mathcal{K}^h$ есть собственное число $\kappa_{n(h)}^h$, подчинённое неравенству $|K^h - \kappa_{n(h)}^h| \leqslant \delta^h$. Более того, для любого $\delta_*^h \in (\delta^h, K^h)$ найдутся коэффициенты $\mathbf{C}_{\mathcal{N}^h}, \ldots, \mathbf{C}_{\mathcal{N}^h+\mathcal{X}^h-1}$, при которых верны формулы

$$\left\| U^h - \sum_{\ell=\mathcal{N}^h}^{\mathcal{N}^h+\mathcal{X}^h-1} \mathbf{C}_\ell^h \mathbf{U}_{(\ell)}^h; \mathcal{H}^h \right\| \leqslant 2\frac{\delta^h}{\delta_*^h}, \quad \sum_{\ell=\mathcal{N}^h}^{\mathcal{N}^h+\mathcal{X}^h-1} |\mathbf{C}_\ell^h|^2 = 1, \tag{53}$$

где $\kappa_{\mathcal{N}^h}^h, \ldots, \kappa_{\mathcal{N}^h+\mathcal{X}^h-1}^h$ – набор всех собственных чисел оператора $\mathcal{K}^h$ из сегмента $[K^h - \delta_*^h, K^h + \delta_*^h]$, а соответствующие собственные векторы $\mathbf{U}_{(\mathcal{N}^h)}^h, \ldots, \mathbf{U}_{(\mathcal{N}^h+\mathcal{X}^h-1)}^h$ подчинены условиям ортогональности и нормировки

$$\langle \mathbf{U}_{(p)}^h, \mathbf{U}_{(q)}^h \rangle_h = \delta_{p,q}. \tag{54}$$

Согласно связи (51) спектральных параметров и асимптотическим конструкциям из п. 2 в качестве почти собственной пары возьмём

$$K_m^h = h^2(\mu\varpi^2 + h^2\beta_m)^{-1}, \tag{55}$$

$$U_{(m)}^h(x) = \|V_{(m)}^h + W_{(m)}^h; \mathcal{H}^h\|^{-1}(V_{(m)}^h(x) + W_{(m)}^h(x)). \tag{56}$$

Здесь β_m – собственное число предельной задачи (19), (21), а из соответствующей собственной вектор-функции $v_{(m)}$, нормированной равенством (9), сформируем сложно устроенный вектор $V^h_{(m)} \in \mathcal{H}^h$ с компонентами

$$V^h_{(m)i}(x) = (v_{(m)i}(y) + hv^{\#}_{(m)i}(y))\sin(\pi\zeta) + h^2 X_h(y) V_{(m)i}(y,\zeta), \quad i = 1,2,$$

$$V^h_{(m)3}(x) = hZ(\zeta)\nabla_y \cdot v_{(m)}(y), \tag{57}$$

где $(V_{(m)1}, V_{(m)2})$ – решение задачи (18), в которой $\beta = \beta_m$ и $v = v_{(m)}$, а $v^{\#}_{(m)} = (v^{\#}_{(m)1}, v^{\#}_{(m)2})$ – какая-нибудь гладкая в $\overline{\omega} = \omega \bigcup \partial\omega$ вектор-функция, удовлетворяющая краевому условию

$$v^{\#}_i(y) = T\nabla_y \cdot v(y), \quad y \in \gamma. \tag{58}$$

Множитель T и экспоненциально затухающее при $\xi_1 = h^{-1}n \to -\infty$ слагаемое

$$W^h_{(m)}(x) = h\chi_\omega(y)\widetilde{w}(h^{-1}n, h^{-1}z)\nabla_y \cdot v_{(m)}(y) \tag{59}$$

взяты из разложения (47) решения w' системы (38) при $M = M_\dagger$ с краевыми условиями (41) и

$$w'_1(\xi) = 0, \quad w'_2(\xi) = -Z(\xi_2), \quad \xi \in \varpi, \tag{60}$$

причём $\widetilde{w}_1$ и $\widetilde{w}_2$ – проекции вектора $\widetilde{w}(h^{-1}n, h^{-1}z)$ на оси n и z, а проекция на ось s нулевая. Существование решения, стабилизирующегося на бесконечности к выражению $Te_{(1)}\sin(\pi\xi_2)$, обеспечено общими результатами [26, гл. 5, §§ 4, 5] и [16] в силу отсутствия порогового резонанса (см. предложение 2). Наконец, гладкие срезающие функции $\chi_\omega, X_h \in C^\infty(\overline{\omega})$ удовлетворяют требованиям

$$\chi_\omega = 1 \text{ в } d\text{-окрестности } \mathcal{V}_d \text{ контура } \gamma, \ \ \chi_\omega = 0 \text{ вне окрестности } \mathcal{V},$$

$$X_h = 0 \text{ в } \mathcal{V}_h, \ \ X_h = 1 \text{ вне } \mathcal{V}_{2h}. \tag{61}$$

Первая из них нужна для продолжения пограничного слоя с множества $\mathcal{V} \times (0,h)$, где введены координаты (n,s,z), на всю область Ω^h, а вторая благодаря соотношениям (58) и (60) обеспечивает выполнение краевого условия (4) суммой $V^h_{(m)} + W^h_{(m)}$, которая в итоге попадает в пространство $H^1_0(\Omega^h)^3$.

Оценим величину δ^h_m, найденную согласно формуле (52) по паре (55). Далее индекс m не пишем. При учёте соотношений (48) и (49) имеем

$$\delta^h = \sup|\langle \mathcal{K}^h U^h - K^h U^h, \Psi^h\rangle_h| = \tag{62}$$

$$= (\mu\pi^2 h^{-2} + \beta)^{-1}\|V^h + W^h; \mathcal{H}^h\|^{-1}\sup|E(V^h + W^h, \Psi^h; \Omega^h) - (\mu\pi^2h^{-2} + \beta)(V^h + W^h, \Psi^h)_{\Omega^h}| =$$

$$= (\mu\pi^2 h^{-2} + \beta)^{-1}\|V^h + W^h; \mathcal{H}^h\|^{-1}\sup|((\mu\Delta_x + (\lambda+\mu)\nabla_x\nabla\cdot + \mu\pi^2h^{-2} + \beta)(V^h + W^h), \Psi^h)_{\Omega^h}|.$$

Супремум вычисляется по единичному шару в пространстве $\mathcal{H}^h$, т.е. $\|\Psi^h; \mathcal{H}^h\| \leqslant 1$ и выполнено неравенство (12). В лемме 2 будет проверено, что

$$\|V^h + W^h; \mathcal{H}^h\| \geqslant ch^{-1/2}, \quad c > 0. \tag{63}$$

Скалярное произведение между последними знаками модуля в (62) представим в виде

$$((\mu\Delta_y + (\lambda+\mu)\nabla_y\nabla_y \cdot + \beta)v\sin(\pi\zeta) + (\lambda+\mu)\partial_\zeta Z\nabla_y\cdot v + \mu(\partial^2_\zeta + \pi^2)V', \Psi^{h\prime})_{\Omega^h} +$$

$$+ \mu(\partial^2_\zeta V', (1 - X_h)\Psi^{h\prime})_{\Omega^h} + h^{-1}((((\lambda+2\mu)\partial^2_\zeta Z + \mu\pi^2 Z + \pi(\lambda+\mu)\cos(\pi\zeta))\nabla_y\cdot v, \Psi^h_3)_{\Omega^h} +$$

$$+ h((\mu\Delta_y + (\lambda+\mu)\nabla_y\nabla_y \cdot + \beta)(v^{\#}\sin(\pi\zeta) + Z\nabla_y\cdot v), \Psi^{h\prime})_{\Omega^h} +$$

$$+ h((\mu\Delta_x + (\lambda+\mu)\nabla_x\nabla_x \cdot + \mu\pi^2 h^{-2} + \beta)(\chi_\omega \widetilde{w}), \Psi^h)_{\Omega^h} +$$

$$+ h^2((\mu\Delta_y + (\lambda+\mu)\nabla_x\nabla_x \cdot + \beta)(X_h V'), \Psi^{h\prime})_{\Omega^h} =: I_v^h + I_X^h + h^{-1} I_Z^h + h I_\#^h + h I_w^h + h^2 I_V^h.$$

В силу уравнений (16) и (18) слагаемые I_v^h и I_Z^h обращаются в нуль. Оценим остальные. При учёте формул (61) и (12) находим, что

$$|I_X^h| \leqslant c\|\Psi^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|(\mathrm{mes}_3 \,\mathrm{supp}\,(1-X_h))^{1/2} \leqslant Ch^2,$$

$$h|I_\#^h| \leqslant c\|\Psi^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|(\mathrm{mes}_3\Omega^h)^{1/2} \leqslant Ch^{5/2},$$

$$h^2|I_V^h| \leqslant ch^2\|\Psi^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|(h^{-2}\mathrm{mes}_3 \,\mathrm{supp}\,|\nabla_y X_h| + \mathrm{mes}_3\Omega^h)^{1/2} \leqslant Ch^2. \qquad (64)$$

Здесь учтены объёмы $O(h)$ и $O(h^2)$ множеств Ω^h и $\mathrm{supp}\,(1-X_h) \supset \mathrm{supp}\,|\nabla_y X_h|$, а также мажоранты $c_1 h^{-1}$ и $c_2 h^{-2}$ для модулей первых и вторых производных функции X_h.

Осталось исследовать слагаемое hI_w^h, содержащее экспоненциально затухающий пограничный слой (59). Обозначив через $L(\nabla_x)$ матрицу дифференциальных операторов из левой части системы (2), заметим, что носители коэффициентов коммутатора $[L(\nabla_x), \chi_\omega]$, т.е. дифференциального оператора $L(\nabla_x)\chi_\omega - \chi_\omega L(\nabla_x)$ первого порядка, расположены на множестве

$$\{x \in \overline{\Omega^h} : y \in \mathcal{V},\quad \mathrm{dist}\,(y,\gamma) > h\},$$

где величины $\widetilde{w}(\xi)$ и $\nabla_\xi \widetilde{w}(\xi)$ становятся экспоненциально малыми. Кроме того, замена координат (37) и переход к $h=0$ в п. 4 сопровождался спрямлением границы Γ^h и замораживанием коэффициентов в операторе $L(\nabla_x)$, а значит, выражение $\chi_\omega(y)L(\nabla_x)(\widetilde{w}(\xi)\nabla_y \cdot v(y))$ представляет собой линейную комбинацию самой вектор-функции $\widetilde{w}$ и её производных первого и второго порядков с коэффициентами $O(1)$ и $O(h^{-1})$, $O(h^{-1}|n|)$ соответственно. Поскольку интеграл по пластине Ω^h от функции $F^h(x) = O((\mathrm{dist}\,(y,\gamma))^k e^{-\delta\,\mathrm{dist}\,(y,\gamma)/h})$ есть $O(h^{2+k})$, обнаруживаем, что

$$h|I_w^h| \leqslant ch\|\Psi^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|(e^{-\delta d/h} + h(1+h^{-1})) \leqslant Ch^2. \qquad (65)$$

Итак, из соотношений (55), (63)–(65) следует, что величина (62) не превосходит $c_m h^{9/2}$, т.е. по лемме 1 найдётся собственное число $\kappa_{n(h)}^h$ оператора $\mathcal{K}^h$, подчинённое неравенству $|\kappa_{n(h)}^h - K_m^h| \leqslant c_m h^{9/2}$, или согласно связи (51) – собственное число $\Lambda_{n(h)}^h$ задачи (2)–(4), для которого выполнено соотношение

$$|\Lambda_{n(h)}^h - \mu\pi^2 h^{-2} - \beta_m| \leqslant c_m h^{5/2}(\mu\pi^2 + h^2\beta_m)\Lambda_{n(h)}^h. \qquad (66)$$

Отсюда вытекает формула

$$\Lambda_{n(h)}^h \leqslant 2(\mu\pi^2 h^{-2} + \beta_m) \qquad (67)$$

при таких h, что $2c_m h^{5/2}(\mu\pi^2 + h^2\beta_m) \leqslant 1$, влекущая за собой искомое неравенство

$$|\Lambda_{n(h)}^h - \mu\pi^2 h^{-2} - \beta_m| \leqslant 2c_m h^{1/2}(\mu\pi^2 + h^2\beta_m)^2 \leqslant C_m h^{1/2} \quad \text{при} \quad h \in (0, h_m] \qquad (68)$$

с некоторыми величинами $h_m > 0$ и C_m.

Пусть теперь β_m – $\varkappa_m$-кратное собственное число задачи (19), (21), т.е.

$$\beta_{m-1} < \beta_m = \ldots = \beta_{m+\varkappa_m-1} < \beta_{m+\varkappa_m}. \qquad (69)$$

По формулам (56), (57) определим почти собственные вектор-функции $U_{(p)}^h$, $p = \overline{m, m+\varkappa_m-1}$, отвечающие почти собственному числу (55).

Лемма 2. *Справедливы неравенства*

$$|\langle U_{(p)}^h, U_{(q)}^h\rangle_h - \delta_{p,q}| \leqslant c_m h, \quad p,q = \overline{m, m+\varkappa_m-1}. \qquad (70)$$

Доказательство. Структуры (57) и (59) обеспечивают простые формулы

$$|\langle V^h_{(p)}, V^h_{(q)}\rangle_h - \mu\pi^2(2h)^{-1}(v_{(p)}, v_{(q)})_\omega| \leqslant c_m, \quad |\langle W^h_{(p)}, W^h_{(q)}\rangle_h| \leqslant c_m h.$$

В первой из них использовано определение (48), а также вычислены производная $\partial_z \sin(\pi z/h)$ и интеграл от $\cos^2(\pi z/h)$. Кроме того, приняв во внимание соотношение (24), применяем эти формулы дважды – сначала при $p = q$ для обработки нормы $\|V^h_{(p)} + W^h_{(p)}; \mathcal{H}^h\|$, а затем при разных индексах $p, q = \overline{m, m + \varkappa_m - 1}$. В итоге приходим к неравенствам (70). Лемма доказана.

Применим вторую часть леммы 1 при $\delta^h = \max\{\delta^h_m, \ldots, \delta^h_{m+\varkappa_m-1}\}$ и $\delta^h_* = t^{-1}\delta^h$, причём величину $t \in (0,1)$ зафиксируем далее. Обозначим через $\mathbf{C}^h_{(p)} \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}^h}$ и $\mathbf{S}^h_{(p)} \in \mathcal{H}^h$ столбец коэффициентов и линейную комбинацию собственных векторов $\mathbf{U}^h_{(m)}, \ \ldots, \ \mathbf{U}^h_{(m+\varkappa_m-1)}$, найденных по $U^h_{(p)}$. Благодаря условиям ортогональности и нормировки (54) имеем

$$|\mathbf{C}^h_{(p)} \cdot \mathbf{C}^h_{(q)} - \delta_{p,q}| = |\langle \mathbf{S}^h_{(p)}, \mathbf{S}^h_{(q)}\rangle_h - \delta_{p,q}| \leqslant |\langle \mathbf{S}^h_{(p)} - U^h_{(p)}, \mathbf{S}^h_{(q)}\rangle_h| +$$

$$+ |\langle U^h_{(p)}, \mathbf{S}^h_{(q)} - U^h_{(p)}\rangle_h| + |\langle U^h_{(p)}, U^h_{(q)}\rangle_h - \delta_{p,q}| \leqslant 2t + 2t + c_m h.$$

Таким образом, при малых t и h столбцы $\mathbf{C}^h_{(m)}, \ldots, \mathbf{C}^h_{(m+\varkappa_m-1)} \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}^h}$ "почти ортонормированы", что возможно лишь в случае $\mathcal{X}^h \geqslant \varkappa_m$, а значит, на сегменте $[K^h_m - tc_m h^{9/2}, K^h_m + tc_m h^{9/2}]$ расположено не менее $\varkappa_m$ собственных чисел оператора $\mathcal{K}^h$. В итоге, повторив выкладки (66) и (67), получаем, что при некотором $n(h) \in \mathbb{N}$ собственные числа $\Lambda^h_{n(h)}, \ \ldots \ \ldots, \ \Lambda^h_{n(h)+\varkappa_m-1}$ задачи (2)–(4) удовлетворяют оценке (68) с новым множителем C_m.

Замечание. Поскольку каждому собственному числу β_k предельной задачи (19), (21) поставлено в соответствие собственное число $\Lambda^h_{n_k(h)}$ исходной задачи (2)–(4), расположенное в малой окрестности точки $\mu\pi^2 h^{-2} + \beta_m$, при $h \leqslant \min\{h_1, \ldots, h_{m+\varkappa_m-1}\}$ справедливо неравенство $n_{m+\varkappa_m-1}(h) \geqslant m + \varkappa_m - 1$, влекущее за собой оценку (25) с мажорантой $B_m \geqslant \beta_m + C_m\sqrt{h_m}$.

Подведём итог проделанным вычислениям.

Теорема 2. *Собственные числа (8) и (23) задач (2)–(4) и (19), (21) находятся в отношении*

$$|\Lambda^h_m - \mu\pi^2 h^{-2} - \beta_m| \leqslant c_m\sqrt{h} \quad \textit{при} \quad h \in (0, h_m],$$

где c_m и $h_m > 0$ – некоторые величины.

Доказательство. Осталось убедиться в том, что $n(h) = m$ в формуле (68). В замечании установлено, что $n(h) \geqslant m$. Предположим, что $n(h_j) > m$ для некоторой положительной бесконечно малой последовательности $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Тогда найдутся собственные вектор-функции $u^{h_j}_{(k_j)}$, отвечающие собственным числам $\Lambda^{h_j}_{k_j} \leqslant \mu\pi^2 h^{-2} + \beta_m + c_m\sqrt{h}$, и ортогональные в $L^2(\Omega^{h_j})^3$ собственным вектор-функциям $u^{h_j}_{(1)}, \ \ldots, \ u^{h_j}_{(m+\varkappa_m-1)}$. Предельные переходы (26) и (34) предоставляют и собственное число $\boldsymbol{\beta}_m \leqslant \beta_m$, и отвечающую ему собственную вектор-функцию $\mathbf{v}_m$ задачи (19), (21), ортогональную в $L^2(\omega)^2$ функциям $v_{(1)}, \ \ldots, \ v_{(m+\varkappa_m-1)}$. Последнее противоречит правилу составления последовательности (23). Теорема доказана.

Теорема об асимптотике собственных вектор-функций исходной задачи, как обычно, выводится при помощи второй части леммы 1. Для упрощения её формулировки ограничимся указанием только главного члена асимптотики компонент вектора смещения.

Теорема 3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и β_m – собственное число задачи (19), (21) из формулы (69). Найдутся такие величины c_m, $h_m > 0$ и столбцы коэффициентов $a^{h,p} = (a^{h,p}_m, \ldots, a^{h,p}_{m+\varkappa_m-1})$, $p = \overline{m, m+\varkappa_m-1}$, образующие ортогональную $(\varkappa_m \times \varkappa_m)$-матрицу $a^h = (a^{h,m}, \ldots, a^{h,m+\varkappa_m-1})$,* *что для собственных вектор-функций задач (2)–(4) и (19), (21), подчинённых условиям ортогональности и нормировки (9) и (24) соответственно, выполнены неравенства*

$$\sum_{i=1,2}(\|\nabla_y(u^h_{(p)i}-S\mathbf{v}^h_{(p)i});L^2(\Omega^h)\|^2+h^{-1/2}\|u^h_{(p)i}-S\mathbf{v}^h_{(p)i};L^2(\Omega^h)\|^2+\|\partial_z u^h_{(p)i};L^2(\Omega^h)\|^2)+$$
$$+\|\partial_z u^h_{(p)3}-\partial_\zeta Z\nabla_y\cdot\mathbf{v}^h_{(p)};L^2(\Omega^h)\|^2+h^{-1}\|r_h\nabla_y(u^h_{(p)3}-hZ\nabla_y\cdot\mathbf{v}^h_{(p)});L^2(\Omega^h)\|^2+$$
$$+h^{-1}\|u^h_{(p)3}-hZ\nabla_y\cdot\mathbf{v}^h_{(p)};L^2(\Omega^h)\|^2\leqslant c_m\sqrt{h}\quad \textit{при}\quad h\in(0,h_m], \tag{71}$$

где $S(\zeta)=\sin(\pi\zeta)$, Z *– функция (17),* $r_h(y)=h+\operatorname{dist}(y,\gamma)$ *– весовой множитель и*

$$\mathbf{v}^h_{(p)}=(\mathbf{v}^h_{(p)1},\mathbf{v}^h_{(p)2})=\sqrt{\frac{2}{h}}\sum_{q=m}^{m+\varkappa_m-1}a^{h,p}_q v_{(q)},\quad p=\overline{m,m+\varkappa_m-1}. \tag{72}$$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением простого собственного числа β_m, при кратности $\varkappa_m>1$ рассуждения и выкладки вполне аналогичны, но более громоздки (см., например, [6, гл. 7]). Благодаря теореме 2 получаем, что $\mathcal{N}^h=m$, $\mathcal{X}^h=1$, $\mathbf{C}^h_m=\pm1$ в формулах (53) и, кроме того, в них можно взять $\delta^h_*=h^4 d_m$, где

$$2d_m=\mu^{-2}\pi^{-4}\min\{\beta_m-\beta_{m-1},\beta_{m+1}-\beta_m\}$$

(учли расстояния $O(h^4)$ между соседними членами κ^h_m и $\kappa^h_{m\pm1}$ последовательности (50)). В итоге мажоранта в первой оценке (53) становится равной $2d_m^{-1}h^{1/2}$. Вектор-функции $U^h_{(m)}$ и $\mathbf{U}^h_{(m)}$ нормированы в пространстве $\mathcal{H}^h$ со скалярным произведением (48), но в соответствии с соотношениями (9) и (72) вектор-функции $u^h_{(m)}$ и $\mathbf{v}^h_{(m)}$ нормированы в пространстве Лебега $L^2(\Omega^h)^n$ при $n=3$ и $n=2$ соответственно. В силу интегрального тождества (7) выполнено равенство $\mathbf{U}^h_{(m)}=(\Lambda^h_m)^{-1/2}u^h_{(m)}$, а значит, при сравнении $u^h_{(m)}$ и $\mathbf{v}^h_{(m)}$ мажоранта приобретает порядок $h^{3/2}$, т.е. оценка получается в результате удаления “лишних” слагаемых из асимптотических конструкций $V^h_{(m)}$ и $W^h_{(m)}$. Подчеркнём, что ввиду экспоненциального затухания сомножителя $\widetilde{w}$ для пограничного слоя (59) верны соотношения

$$\|\nabla_x W^h_{(m)};L^2(\Omega^h)\|+h^{-1}\|r_h\nabla_x W^h_{(m)};L^2(\Omega^h)\|+h^{-1}\|W^h_{(m)};L^2(\Omega^h)\|\leqslant c_m h.$$

Именно они и коэффициент $O(h^{-1/2})$ в формуле (72) предопределяют строение левой и порядок правой частей неравенства (71).

6. О локализации собственных колебаний около свободной боковой поверхности. Незаконченность асимптотического анализа спектра задачи (2), (3), (5) объясняется двумя проверенными в данном пункте теоремами, указывающими, как упоминалось, на невозможность асимптотического описания собственных пар $\{\Lambda^h_m;u^h_{(m)}\}$ посредством какой-либо краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (19).

Теорема 4. *Для любых* $m\in\mathbb{N}$ *и* $\mathcal{M}\in[M_1,M_\dagger)$ *найдётся такая величина* $h_m(\mathcal{M})>0$, *что при* $h\in(0,h_m(\mathcal{M})]$ *замкнутый сегмент* $[0,\mathcal{M}h^{-2}]$ *содержит не менее* m *собственных чисел задачи (2), (3), (5).*

Доказательство. Билинейная форма в левой части интегрального тождества (11) замкнута, симметрична и положительно определена на пространстве $\mathcal{H}^h_=$ (см. формулы (10) и (12)), т.е. задаче (2), (3), (5) ставится в соответствие неограниченный самосопряжённый положительно определённый оператор $A_=^h$ в пространстве $L^2(\Omega^h)^3$, а его собственные числа (8) вычисляются при помощи максиминимального принципа (см. [3, гл. 10, § 1, теорема 10.2.2])

$$\Lambda^h_m=\max_{\mathcal{L}^h_m}\inf_{\psi^h\in\mathcal{L}^h_m\setminus\{0\}}\frac{E(\psi^h,\psi^h;\Omega^h)}{\|\psi^h;L^2(\Omega^h)\|^2}. \tag{73}$$

Здесь $\mathcal{L}^h_m$ – любое подпространство в $\mathcal{H}^h_=$ с коразмерностью $m-1$, в частности, $\mathcal{L}^h_1=\mathcal{H}^h_=$.

Зафиксируем номер $m \in \mathbb{N}$ и построим набор пробных вектор-функций $\Psi^h_{(1)}, \ldots, \Psi^h_{(m)} \in \mathcal{H}^h_=$, для которых выполнены соотношения

$$(\Psi^h_{(p)}, \Psi^h_{(q)})_{\Omega^h} = \delta_{p,q}, \quad p, q = \overline{1, m},$$

$$E(\Psi^h, \Psi^h; \Omega^h) \leqslant (M_1 h^{-2} + C_m h^{-1}) \|\Psi^h; L^2(\Omega^h)\|^2 \quad \text{при всех} \quad \Psi^h = \sum_{p=1}^m a^h_m \Psi^h_m. \tag{74}$$

Тогда любое подпространство $\mathcal{L}^h_m \subset \mathcal{H}^h_=$ с коразмерностью $m-1$ содержит свою нетривиальную линейную комбинацию $\Psi^h(\mathcal{E}^h_m)$ построенных вектор-функций. В результате выводим из формул (73) и (74) соотношение

$$\Lambda^h_m \leqslant \max_{\mathcal{L}^h_m} \frac{E(\Psi^h(\mathcal{E}^h_m), \Psi^h(\mathcal{E}^h_m); \Omega^h)}{\|\Psi^h(\mathcal{E}^h_m); L^2(\Omega^h)\|^2} \leqslant \frac{M_1}{h^2} + \frac{C_m}{h},$$

которое завершит доказательство нужного утверждения.

Для построения нужного набора $\Psi^h_{(1)}, \ \ldots, \ \Psi^h_{(m)}$ выделим на контуре γ непустые попарно непересекающиеся открытые дуги $\gamma_1, \ \ldots, \ \gamma_m$ и выберем нетривиальные функции $\phi_p \in C^\infty_c(\gamma_p)$, $p = \overline{1, m}$. Положим

$$\Phi^h_{(p)n}(x) = \chi_\omega(y) \phi_p(s) W_{(1)1}(h^{-1}n, h^{-1}z),$$

$$\Phi^h_{(p)z}(x) = \chi_\omega(y) \phi_p(s) W_{(1)2}(h^{-1}n, h^{-1}z), \quad \Phi^h_{(p)s}(x) = 0.$$

Здесь указаны проекции на оси n, z и s вектора $\Phi^h_{(p)}(x)$, χ_ω – срезающая функция из списка (61), а $W_{(1)} = (W_{(1)1}, W_{(1)2})$ – собственная вектор-функция смешанной краевой задачи (38), (41), (42), которая отвечает найденному собственному числу (45) (см. п. 4).

Выполнив вычисления, аналогичные проведённым в п. 5, получим формулы

$$\|\Phi^h_{(p)}; L^2(\Omega^h)\| = \int\limits_\gamma \int\limits_{-d}^0 \int\limits_0^h |\chi_\omega(y)|^2 \left| W_{(1)}\left(\frac{n}{h}, \frac{z}{h}\right)\right|^2 J(n, s)\, dn\, dz\, ds =$$

$$= h^2 \|\phi_p; L^2(\gamma_p)\|^2 (\|W_{(1)}; L^2(\Pi)\|^2 + O(h)),$$

$$E(\Phi^h_{(p)}, \Phi^h_{(p)}; \Omega^h) = \|\phi_p; L^2(\gamma_p)\|^2 (E_\sqsupset(W_{(1)}, W_{(1)}; \Pi) + O(h)) =$$

$$= \|\phi_p; L^2(\gamma_p)\|^2 (M_1 \|W_{(1)}; L^2(\Pi)\|^2 + O(h)). \tag{75}$$

При этом учтены якобиан $J(n, s) = 1 + O(|n|)$, экспоненциальное затухание собственной вектор-функции $W_{(1)}(\xi)$ при $\xi_1 \to -\infty$ и равенство (46). Бесконечно малые $O(h)$ в формулах (75) зависят от выбора дуги γ_p и плотности ϕ_p, однако в любом случае, положив $\Psi^h_{(p)} = \|\Phi^h_{(p)}; L^2(\Omega^h)\|^{-1} \Phi^h_{(p)}$, $p = \overline{1, m}$, добиваемся выполнения ограничений (74) с некоторой общей постоянной c_m. Теорема доказана.

Пусть Λ^h_m – собственное число задачи (2), (3), (5), подчинённое требованию

$$\Lambda^h \leqslant (\mu\pi^2 - \ell) h^{-2} \tag{76}$$

с некоторым $\ell > 0$. Убедимся в том, что соответствующая собственная вектор-функция $u^h_{(m)}$ оказывается экспоненциально малой на удалении от боковой поверхности Γ^h, на которой поставлены краевые условия в напряжениях. Далее индекс m не пишем.

Положим

$$\mathcal{R}^\theta_h(y) = e^{\theta \rho_h(y)}, \quad \rho_h(y) = \min\{1, h^{-1} \mathrm{dist}\,(y, \gamma)\}. \tag{77}$$

Подставим в интегральное тождество (11) пробную вектор-функцию $\psi^h = \mathcal{R}_h^\theta \mathcal{U}^h$, в которой $\mathcal{U}^h = \mathcal{R}_h^\theta u^h$. После несложных преобразований, сводящихся к коммутированию весовой функции $\mathcal{R}_h^\theta$ и градиент-оператора ∇_y, приходим к равенству

$$\Lambda^h \|\mathcal{U}^h; L^2(\Omega^h)\|^2 = E(\mathcal{U}^h, \mathcal{U}^h; \Omega^h) + \mathcal{J}_h^\theta(\mathcal{U}^h; \mathcal{R}_h^\theta),$$

где последнее слагаемое представляет собой интеграл по подобласти

$$\Omega_\circ^h = \{x \in \Omega^h : \operatorname{dist}(y, \gamma) > h\},$$

а подынтегральное выражение не превосходит произведения

$$c|\mathcal{U}^h(x)| \mathcal{T}_h^\theta(y)(|\nabla_y \mathcal{U}^h(x)| + |\mathcal{U}^h(x)| \mathcal{T}_h^\theta(y)),$$

причём согласно определению (77) справедливы формулы

$$\mathcal{T}_h^\theta(y) = \mathcal{R}_h^{-\theta}(y) |\nabla_y \mathcal{R}_h^\theta(y)| \leqslant \theta h^{-1} \quad \text{в} \quad \Omega_\circ^h,$$

$$\mathcal{T}_h^\theta(y) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\circledcirc^h := \Omega^h \setminus \overline{\Omega_\circ^h}.$$

Обозначив через $\mathcal{X}^h$ гладкую срезающую функцию, равную единице на области $\Omega_\circ^h$ и нулю при $2\operatorname{dist}(y, \gamma) > h$, заметим, что

$$|E(\mathcal{X}^h \mathcal{U}^h, \mathcal{X}^h \mathcal{U}^h; \Omega^h) - E(\mathcal{U}^h \mathcal{U}^h; \Omega^h)| \leqslant ch^{-1} \|\mathcal{U}^h; \Omega_\circledcirc^h\| (E(\mathcal{U}^h \mathcal{U}^h; \Omega_\circledcirc^h)^{1/2} + h^{-1} \|\mathcal{U}^h; \Omega_\circledcirc^h\|).$$

Принципиальный момент: поскольку произведение $\mathcal{X}^h \mathcal{U}^h$ обращается в нуль на боковой поверхности Γ^h и тем самым попадает в пространство $H_0^1(\Omega^h)$, функционал упругой энергии можно превратить в функционал квазиэнергии, т.е.

$$E(\mathcal{X}^h \mathcal{U}^h, \mathcal{X}^h \mathcal{U}^h; \Omega^h) = E_\Box(\mathcal{X}^h \mathcal{U}^h, \mathcal{X}^h \mathcal{U}^h; \Omega^h).$$

Принимая во внимание приведённые оценки, пользуемся интегральным тождеством (11) и условием нормировки (9) следующим образом:

$$\mu \pi^2 h^{-2} \geqslant \Lambda^h \geqslant \Lambda^h \|u^h; L^2(\Omega_\circledcirc^h)\|^2 = \Lambda^h \|\mathcal{U}^h; L^2(\Omega_\circledcirc^h)\|^2 =$$

$$= E(\mathcal{U}^h, \mathcal{U}^h; \Omega^h) + \mathcal{J}_h^\theta(\mathcal{U}^h; \mathcal{R}_h^\theta) - \Lambda^h \|\mathcal{U}^h; L^2(\Omega_\circ^h)\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant 2\tau_1 E(\mathcal{U}^h, \mathcal{U}^h; \Omega^h) + (1 - 2\tau_1) E(\mathcal{U}^h, \mathcal{U}^h; \Omega_\circ^h) - \Lambda^h \|\mathcal{U}^h; L^2(\Omega_\circ^h)\|^2 + \mathcal{J}_h^\theta(\mathcal{U}^h; \mathcal{R}_h^\theta) + (1 - 2\tau_1) \mathcal{I}(\mathcal{U}^h).$$

Кроме того, верны неравенства

$$|\mathcal{J}_h^\theta(\mathcal{U}^h; \mathcal{R}_h^\theta)| \leqslant c\theta (\|\nabla_x \mathcal{U}^h; \Omega_\circ^h\|^2 + \theta h^{-2} \|\mathcal{U}^h; \Omega_\circ^h\|^2),$$

$$|\mathcal{I}_h^\theta(\mathcal{U}^h)| \leqslant \tau_1 E(\mathcal{U}^h, \mathcal{U}^h; \Omega_\circledcirc^h) + C\tau_1^{-1} h^{-2} \|\mathcal{U}^h; L^2(\Omega_\circledcirc^h)\|^2$$

и, что особенно важно,

$$(1 - 2\tau_1) E(\mathcal{U}^h, \mathcal{U}^h; \Omega_\circ^h) \geqslant \tau_2 \mu \|\nabla_x \mathcal{U}^h; L^2(\Omega_\circ^h)\|^2 + (1 - 2\tau_1 - \tau_2) \mu \pi^2 h^{-2} \|\mathcal{U}^h; L^2(\Omega_\circ^h)\|^2.$$

Соберём в левой части слагаемые, содержащие лебегову норму вектор-функции $\mathcal{U}^h$ на тонком множестве $\Omega_\circ^h = \{x \in \Omega^h : \operatorname{dist}(y, \gamma) < h\}$. При учёте требования (76) выбираем положительные τ_1, τ_2 и θ настолько малыми, чтобы выполнялось неравенство

$$h^2 \|\nabla_x (\mathcal{R}_h^\theta u_{(m)}^h); L^2(\Omega_\circ^h)\|^2 + \|\mathcal{R}_h^\theta u_{(m)}^h; L^2(\Omega_\circ^h)\|^2 \leqslant c_m. \tag{78}$$

Итак, установлена

Теорема 5. *Если собственное число задачи (2), (3), (5) (или (11) в вариационной постановке) удовлетворяет ограничению (76), то соответствующая собственная вектор-функция $u^h_{(m)}$, нормированная в $L^2(\Omega^h)^3$, подчинена оценке (78), в которой $\mathcal{R}^\theta_h(y)$ – вес (77), равный $e^{\theta\,\mathrm{dist}\,(y,\gamma)/h}$ вне $\sqrt{2}h$-окрестности кромки прокладки Ω^h.*

Собственные вектор-функции задачи (2), (3), (5) концентрируются около боковой поверхности Γ^h, а значит, как предполагалось в работах [11] и [14, гл. 16], они реализуются как пограничные слои, затухающие экспоненциально при удалении от кромки пластины (в теории упругости это явление ещё предстоит изучить). Для скалярной спектральной задачи схожие пограничные слои строились в статье [10].

7. Разное. 1°. *Гладкость границы.* Формальное построение асимптотики в п. 2 не подразумевает какого-либо ограничения на гладкость границы, но использованная процедура обоснования асимптотики в п. 5 потребовала построить пограничный слой, а значит, "спрямить" боковую поверхность Γ^h, т.е. придать контуру γ класс Гёльдера $C^{2,\alpha}$. По всей видимости, снять последнее ограничение, наложенное на контур, нельзя, так как в теореме 3 указана двучленная асимптотика собственных чисел Λ^h_m. При выборе главного члена асимптотики свойства боковой поверхности не имеют значения, однако соответствующее утверждение малосодержательно: все нормированные собственные числа $h^2\Lambda^h_m$ приобретают одинаковый предел $\mu\pi^2$, а их асимптотическое расщепление обусловлено поправочным слагаемым β_m.

В случае кусочно-гладкой границы сечения ω, согласно процедурам из статей [27, 28], нужно изучить спектр ещё одной предельной задачи теории упругости в секторе слоя с различными краевыми условиями, однако публикаций в этом направлении нет.

При C^∞-гладкости контура γ общие итерационные процессы, описанные в статье [11] и книге [14, гл. 16], позволяют построить бесконечные асимптотические ряды для собственных пар задачи (2)–(4) в тонкой цилиндрической области (1).

2°. *Заглубленная и приклеенная пластины.* Заменим условия (3) смешанными краевыми условиями

$$u^h(y,0)=0,\quad \sigma_{j3}(u^h;y,h)=0,\quad j=1,2,3,\quad y\in\omega. \tag{79}$$

Задача (2), (79), (4) о пластине, вмонтированной в паз тех же размеров, исследуется по прежней схеме, однако изменение краевых условий на верхнем основании пластины провоцирует следующую модификацию асимптотических анзацев (13) и (14):

$$\Lambda^h=\mu\frac{\pi^2}{4h^2}+\ldots,\quad u^h_i(x)=v_i(y)\sin\frac{\pi z}{2h}+h^2V_i\left(y,\frac{z}{h}\right)+\ldots,\quad i=1,2.$$

В результате несложных, но более громоздких чем в п. 5 вычислений имеем новые функцию (17) и коэффициент (20), а именно,

$$Z(\zeta)=\frac{2}{\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\zeta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\zeta\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right)^{-1}\left(2-\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\zeta\right)\right),$$

$$\lambda_\sharp(\alpha)=\frac{4}{\pi}(\lambda+2\mu)\alpha\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right)^{-1}\left(4\alpha-(1+4\alpha^2)\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right)-\mu.$$

Новые постоянные Ламе удовлетворяют неравенству $\lambda_\sharp(\alpha)>-\mu$, и поэтому предельная задача (19), (21) сохраняет свои свойства.

Некоторые осложнения возникают в процедуре обоснования асимптотики из-за невозможности непосредственного применения функционала упругой квазиэнергии. Впрочем, продолжение поля u^h нулём с цилиндра Ω^h на слой $\mathbb{R}^2\times(0,h)$ и преобразование Фурье по переменным $y=(y_1,y_2)$ позволяют получить приемлемую оценку постоянной в неравенстве (12).

Задача (2), (79), (5) описывает деформацию накладки – пластины, приклеенной к абсолютно жёсткому полупространству. Модельная задача в полуполосе (39), состоящая из системы (38), а также краевых условий (42) и

$$w'(\xi_1,0)=0,\quad \xi_1<0,$$

$$\mu\frac{\partial w_1}{\partial \xi_2}(\xi)+\mu\frac{\partial w_2}{\partial \xi_1}(\xi)=\lambda\frac{\partial w_1}{\partial \xi_1}(\xi)+(\lambda+2\mu)\frac{\partial w_2}{\partial \xi_2}(\xi)=0,\quad \xi\in\varpi,$$

по существу исследована в работах [15, 16]: точка отсечки непрерывного спектра равна $\mu\pi^2/4$, и ниже неё имеется собственное число. Гипотеза о локализации собственных вектор-функций – аналог теоремы 5 – вполне правомочна, но нуждается в строгом обосновании.

3°. *Прокладка переменной толщины.* Пусть H – гладкая и положительная в $\overline{\omega}=\omega\bigcup\partial\omega$ профильная функция. Рассмотрим задачу Дирихле (2)–(4) в области

$$\Omega^h_H=\{x=(y,z):y\in\omega,\quad z\in(0,hH(y))\} \tag{80}$$

и предположим, что у функции H имеется единственный строгий глобальный максимум во внутренней точке $y^\wedge\in\omega$, т.е.

$$H(y)=H_\wedge+Q(y-y^\wedge)+O(|y-y^\wedge|^3),\quad H(y)<H_\wedge\quad\text{при}\quad y\in\omega\setminus\{y^\wedge\},$$

$$Q(ty)=t^2Q(y)\quad\text{при}\quad t\in\mathbb{R},\quad Q(y)\geqslant q|y|^2,\quad q>0. \tag{81}$$

Аналогичная скалярная задача в разнообразных вариантах исследовалась в статьях [29–34] и др. Разработанные в них подходы без особого труда можно применять к векторным задачам теории упругости, хотя соответствующие результаты не публиковались. Укажем лишь аналог теоремы 5, который выводится по схеме из п. 5 при учёте соотношений (81) и простого следствия неравенства Фридрихса

$$E_\square(u^h,u^h;\Omega^h_H)\geqslant\mu\frac{\pi^2}{h^2}\int\limits_{\Omega^h_H}H(y)^{-2}|u^h(x)|dx\quad\text{при всех}\quad u^h\in H^1_0(\Omega^h_H)^2.$$

Предложение 3. *Пусть выполнены ограничения (81) и собственное число задачи (2)–(4) в области (80) удовлетворяет неравенству*

$$\Lambda^h\leqslant\mu\pi^2h^{-2}(H_\wedge^{-2}+C_mh),\quad C_m>0.$$

Тогда найдутся положительные величины h_m, c_m и θ, при которых собственная вектор-функция $u^h_{(m)}$, нормированная равенством (9), подчинена следующей оценке с весовым множителем $\rho(y)=|y-y^\wedge|^2$:

$$\|e^{\theta\rho}\nabla_x u^h_{(m)};L^2(\Omega^h_H)\|^2+h^{-2}\|(h+\rho)^{1/2}e^{\theta\rho}u^h_{(m)};L^2(\Omega^h_H)\|^2\leqslant c_mh^{-1}\quad\textit{при всех}\quad h\in(0,h_m].$$

Обсуждаемой задаче в области (80) свойственно разнообразие постановок, среди которых нетрудно обнаружить неизученные как в скалярном, так и векторном случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
2. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М., 1974.
3. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л., 1980.
4. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М., 1988.
5. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
6. *Назаров С.А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск, 2002.
7. *Ciarlet P.G.* Mathematical Elasticity, II: Theory of Plates. Studies in Mathematics and its Applications. V. 27. Amsterdam, 1997.

8. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E.* Coques elastiques minces: Propriétés asymptotiques. Paris, 1997.
9. *Le Dret H.* Problemes variationnels dans les multi-domains modélisation des jonctions et applications. Paris, 1991.
10. *Камоцкий И.В., Назаров С.А.* О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // Проблемы мат. анализа. Вып. 19. Новосибирск, 1999. С. 105–148.
11. *Назаров С.А.* Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях // Вестн. Ленинградского гос. ун-та. Сер. 1. 1982. Вып. 2. № 7. С. 65–68.
12. *Зорин И.С., Назаров С.А.* Краевой эффект при изгибе тонкой трёхмерной пластины // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53. № 4. С. 642–650.
13. *Dauge M., Djurdjevic I., Faou E., Rössle A.* Eigenmode asymptotics in thin elastic plates // J. de Mathématiques Pures et Appliqués. 1999. V. 78. № 9. P. 925–964.
14. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Bd. 1 & 2. Berlin, 1991.
15. *Назаров С.А.* Упругие волны, захваченные однородным анизотропным полуцилиндром // Мат. сб. 2013. Т. 204. № 11. С. 99–130.
16. *Назаров С.А.* Дискретный спектр коленчатых квантовых и упругих волноводов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2016. Т. 56. № 5. С. 879–895.
17. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. № 2. P. 533–559.
18. *Назаров С.А.* Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84. № 6. С. 73–130.
19. *Rellich F.* Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten // Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 1943. Bd. 53. Abt. 1. S. 57–65.
20. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526–528.
21. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М., 1981.
22. *Leis R.* Initial Boundary Value Problems of Mathematical Physics. Stuttgart, 1986.
23. *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. № 3. P. 718–752.
24. *Назаров С.А.* Волны в плоской прямоугольной решетке тонких упругих волноводов // Проблемы мат. анализа. Вып. 99. Новосибирск, 2019. С. 47–88.
25. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
26. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin; New York, 1994.
27. *Назаров С.А.* Асимптотика решения краевой задачи в тонком цилиндре с негладкой боковой поверхностью // Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57. № 1. С. 202–239.
28. *Назаров С.А.* Проявление пространственной структуры поля напряжений в окрестности угловой точки тонкой пластины // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55. № 4. С. 653–661.
29. *Friedlander L., Solomyak M.* On the spectrum of narrow periodic waveguides // Russ. J. Math. Phys. 2008. V. 15. № 2. P. 238–242.
30. *Friedlander L., Solomyak M.* On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip // Israel J. Math. 2009. V. 170. P. 337–354.
31. *Borisov D., Freitas P.* Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains // Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linèaire. 2009. V. 26. № 2. P. 547–560.
32. *Borisov D., Freitas P.* Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in $\mathbb{R}^d$ // J. Funct. Anal. 2010. V. 258. № 3. P. 893–912.
33. *Назаров С.А.* Околовершинная локализация собственных функций задачи Дирихле в тонких многогранниках // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54. № 3. С. 655–672.
34. *Nazarov S.A., Perez E., Taskinen J.* Localization effect for Dirichlet eigenfunctions in thin non-smooth domains // Trans. of the Amer. Math. Soc. 2016. V. 368. № 7. P. 4787–4829.

Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 15.08.2022 г.
После доработки 15.08.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1683–1687

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА–ПУАССОНА С ОДНОРОДНЫМ ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

© 2022 г. А. Л. Скубачевский

Рассматривается первая смешанная задача для системы уравнений Власова–Пуассона с однородным внешним магнитным полем в бесконечном цилиндре. Для решений с носителями функций плотности распределения заряженных частиц, лежащих строго во внутреннем цилиндре, получена априорная оценка напряжённости самосогласованного электрического поля через начальные функции плотности распределения.

DOI: 10.31857/S0374064122120093, EDN: NCOYVN

Введение. Уравнениям Власова посвящена обширная литература (см. [1–18] и имеющуюся там библиографию). Одним из наиболее важных приложений смешанных задач для уравнений Власова–Пуассона является термоядерный синтез. Как известно [12], в случае попадания значительного числа частиц на стенки реактора может произойти его разрушение. Для удержания заряженных частиц на некотором расстоянии от стенок реактора используется внешнее магнитное поле. С точки зрения дифференциальных уравнений это означает, что внешнее магнитное поле должно обеспечить существование решений системы Власова–Пуассона с носителями функций плотности распределения заряженных частиц, лежащих на некотором расстоянии от границы области. Существование таких решений рассматривалось в работах [4, 5, 16, 17]. Наличие ограниченного внешнего магнитного поля в уравнениях Власова–Пуассона и его влияние на удержание двукомпонентной плазмы на определённом расстоянии от границы области является принципиальным отличием данной статьи от других математических работ. Для указанных решений получена априорная оценка напряжённости самосогласованного электрического поля через начальные функции плотности распределения частиц в случае бесконечного цилиндра, который соответствует реактору типа “пробочной ловушки”.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений Власова–Пуассона

$$-\Delta\varphi(x,t) = 4\pi e \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta f^{\beta}(x,v,t)\,dv, \quad x \in Q, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$\frac{\partial f^{\beta}}{\partial t} + (v, \nabla_x f^{\beta}) + \frac{\beta e}{m_{\beta}}\left(-\nabla_x\varphi + \frac{1}{c}[v,B], \nabla_v f^{\beta}\right) = 0, \quad x\in Q, \quad v\in\mathbb{R}^3, \quad t\in(0,T), \quad \beta = \pm 1, \tag{2}$$

с начальными условиями

$$f^{\beta}(x,v,t)|_{t=0} = f_0^{\beta}(x,v), \quad x \in \overline{Q}, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad \beta = \pm 1, \tag{3}$$

и краевым условием Дирихле

$$\varphi(x,t) = 0, \quad x \in \partial Q, \quad t \in (0,T). \tag{4}$$

Здесь $Q = G \times \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^2$, – ограниченная область с границей $\partial G \subset C^{\infty}$, $\partial Q = \partial G \times \mathbb{R}$; $f^{\beta} = f^{\beta}(x,v,t)$ – функция плотности распределения положительно заряженных ионов, если $\beta = +1$, и электронов, если $\beta = -1$, в точке x со скоростью v в момент времени t; $f_0^{\beta}(x,v) \geqslant$

$\geqslant 0$ – начальные функции плотности распределения; $\varphi = \varphi(x,t)$ – потенциал самосогласованного электрического поля; ∇_x и ∇_v – градиенты по x и v соответственно; m_{+1} и m_{-1} – массы иона и электрона; e – заряд электрона; c – скорость света; B – индукция внешнего магнитного поля; $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^3$; $[\,\cdot\,,\cdot\,]$ – векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

2. Основные определения. Введём следующие обозначения:

– $C^k(\mathbb{R}^n)$ $(C^k(\overline{Q}))$, $k \geqslant 0$, $k \in \mathbb{Z}$, – пространство функций, непрерывных в $\mathbb{R}^n$ $(\overline{Q})$ и имеющих непрерывные производные в $\mathbb{R}^n$ $(\overline{Q})$ вплоть до k-го порядка с конечной нормой

$$\|u\|_k = \max_{|\alpha|\leqslant k} \sup_x |D^\alpha u(x)|, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geqslant 0;$$

– $C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0,T])$ – пространство функций, непрерывных и ограниченных в $\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times$ $\times [0,T]$, у которых производные первого порядка также непрерывны и ограничены на этом множестве;

– $\mathring{C}^k(\mathbb{R}^n)$, $k,n \in \mathbb{N}$, – пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$ с компактными носителями;

– $C_0^k(\overline{Q})$, $k \geqslant 0$, $k \in \mathbb{Z}$, – замыкание множества функций из $C^k(\overline{Q})$ с компактными в $\overline{Q}$ носителями;

– $\hat{C}^k(\mathbb{R}^3)$ – пространство вектор-функций $Y = (Y_1, Y_2, Y_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ с координатами $Y_i \in C^k(\mathbb{R}^3)$, $k \in \mathbb{N}$;

– $C([0,T], C_0^k(\overline{Q}))$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$, – банахово пространство непрерывных функций $[0,T] \ni$ $\ni t \mapsto \varphi(\,\cdot\,,t) \in C_0^k(\overline{Q})$ с нормой $\|\varphi\|_{k,T} = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \|\varphi(\,\cdot\,,t)\|_k$;

– $M_{1,R} = \{\varphi \in C([0,T], C_0^1(\overline{Q})) : \varphi|_{\partial Q} = 0, \||\nabla\varphi|\|_{0,T} \leqslant R\}$, $R > 0$, – полное метрическое пространство с метрикой $\rho_{1,R}(\varphi,\psi) = \|\varphi - \psi\|_{1,T}$;

– $W_p^k(Q)$, $k \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, – пространство Соболева функций $v \in L_p(Q)$, имеющих все обобщённые производные $D^\alpha v \in L_p(Q)$, $|\alpha| \leqslant k$, с нормой

$$\|v\|_{W_p^k(Q)} = \left\{ \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int\limits_Q |D^\alpha v(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}.$$

Определение. Вектор-функцию $\{\varphi, f^\beta\}$, $\varphi \in C([0,T], C_0^2(\overline{Q}))$, $f^\beta \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0,T])$, $\beta = \pm 1$, назовём *классическим решением задачи* (1)–(4), если $\{\varphi, f^\beta\}$ удовлетворяет уравнениям (1), (2) и условиям (3), (4).

Пусть

$$B_r(x^0) := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x^0| < r\}, \quad B_r := B_r(0), \quad |B_r| := 4\pi r^3/3$$

и

$$G_\delta := \{x' \in G : \operatorname{dist}(x', \partial G) > \delta\}, \quad Q_\delta := \{x \in Q : \operatorname{dist}(x, \partial Q) > \delta\},$$

где $\delta > 0$, $x' = (x_1, x_2)$.

Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. Пусть $f_0^\beta \in \mathring{C}^1(\mathbb{R}^6)$ и $\operatorname{supp} f_0^\beta \subset D_0 := (Q_{5\delta/4} \bigcap B_\varkappa) \times B_\rho$, где $\delta, \varkappa, \rho > 0$.

Условие 2. Пусть $B \in \hat{C}^1(\overline{Q})$ и $B(x) = (0,0,h)$ для $x \in \overline{Q}_{\delta/4}$, где

$$\frac{16c}{e\delta}(\rho m_{+1} + \sqrt{2}eTR) < h, \quad R > 0. \tag{5}$$

Замечание 1. Условие 1 означает, что в начальный момент времени заряженные частицы расположены в шаре $B_\varkappa$, находятся на расстоянии более $5\delta/4$ до границы цилиндра ∂Q и имеют скорости меньшие ρ. Условие 2 означает, что внешнее магнитное поле однородно во внутреннем цилиндре $Q_{\delta/4}$ и направлено по оси цилиндра. Это приводит к возникновению силы Лоренца, препятствующей попаданию частиц на границу. Выполнение неравенства (5) для индукции внешнего магнитного поля приводит к тому, что проекция на плоскость $x_3 = 0$ отклонения ларморовской траектории, возмущённой самосогласованным электрическим полем с потенциалом φ, от начальной точки $x \in Q_{5\delta/4}$ не превышает $\delta/8$ (см. лемму 1).

3. Свойства характеристик. Для заданной функции $\varphi \in C([0,T], C_0^2(\overline{Q}))$ уравнения (2) с начальными условиями (3) можно решить, используя метод характеристик. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_\varphi^\beta}{d\tau} = V_\varphi^\beta, \quad 0 < \tau < t, \quad \beta = \pm 1, \tag{6}$$

$$\frac{dV_\varphi^\beta}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_x \varphi(X_\varphi^\beta, \tau) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[V_\varphi^\beta, B(X_\varphi^\beta)], \quad 0 < \tau < t, \quad \beta = \pm 1, \tag{7}$$

с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t} = x, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t} = v, \quad \beta = \pm 1, \tag{8}$$

где $x \in Q$, $v \in \mathbb{R}^3$, $0 < t \leqslant T$. Для любых $x \in Q$ и $v \in \mathbb{R}^3$ существует единственное непродолжаемое решение задачи (6)–(8) для $\tau \in (T_\varphi^\beta(x,v,t), t]$, $0 \leqslant T_\varphi^\beta(x,v,t) < t$. Обозначим это решение через $(X_\varphi^\beta(x,v,t,\tau), V_\varphi^\beta(x,v,t,\tau))$.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие 2. Тогда для любого $\varphi \in M_{1,R}$ решение задачи (6)–(8) обладает следующими свойствами: если $(x,v) \in D_1 := (Q_{9\delta/8} \bigcap B_{\varkappa_1}) \times B_{\rho_1}$, то $T_\varphi^\beta(x,v,t) = 0$ и $(X_\varphi^\beta(x,v,t,\tau), V_\varphi^\beta(x,v,t,\tau)) \in D_2 := (Q_\delta \bigcap B_{\varkappa_2}) \times B_{\rho_2}$, $\tau \in (0,t)$, где $\varkappa_j = \varkappa + T\rho_1 j$, $\rho_j = \rho + \dfrac{\sqrt{3}TR}{m_{-1}} j$, $j = 1,2$.*

Доказательство см. в работе [4, лемма 3.3].

Замечание 2. Утверждение леммы 1 означает, что траектории заряженных частиц, начинающиеся в области D_1, за время t, $t \leqslant T$, могут попасть лишь в несколько бóльшую область D_2, причём их расстояние до границы ∂Q может уменьшиться не более, чем на $\delta/8$.

Продолжая функции $X_\varphi^\beta(x,v,t,\tau)$, $V_\varphi^\beta(x,v,t,\tau)$ по непрерывности в $\tau = 0$, положим $\hat{X}_\varphi^\beta(x,v,t) = X_\varphi^\beta(x,v,t,0)$, $\hat{V}_\varphi^\beta(x,v,t) = V_\varphi^\beta(x,v,t,0)$.

Для $0 < t \leqslant T$ рассмотрим отображение $\hat{S}_{\varphi,t}^\beta(\,\cdot\,,\cdot\,) : D_1 \to D_2$ вида $\hat{S}_{\varphi,t}^\beta(x,v) = (\hat{X}_\varphi^\beta(x,v,t), \hat{V}_\varphi^\beta(x,v,t))$. Положим $\hat{S}_{\varphi,0}^\beta(x,v) = (x,v)$.

Для $\varphi \in C([0,T], C_0^2(\overline{Q})) \bigcap M_{1,R}$ определим функцию $f_\varphi^\beta(x,v,t)$ по формуле

$$f_\varphi^\beta(x,v,t) = \begin{cases} f_0^\beta(\hat{S}_{\varphi,t}^\beta(x,v)), & (x,v) \in D_1, \quad t \in [0,T], \\ 0, & (x,v) \in (Q \times \mathbb{R}^3) \setminus D_1, \quad t \in [0,T]. \end{cases} \tag{9}$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда для любого $\varphi \in M_{1,R}$ и $0 < t \leqslant T$ мы имеем включение $\operatorname{supp} f_0^\beta(\hat{S}_{\varphi,t}^\beta(x,v)) \subset D_1$.*

Доказательство основано на использовании леммы 1 (см. [4, лемма 4.2]).

Функция $\hat{S}_{\varphi,t}^\beta(x,v)$ непрерывно дифференцируема по $(x,v) \in D_1$ и $t \in (0,T)$. Поэтому в силу леммы 2 имеем $\operatorname{supp} f_\varphi^\beta(\,\cdot\,,\cdot\,,t) \subset D_1$ для $t \in [0,T]$ и $f_\varphi^\beta \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0,T])$, при этом для заданной функции φ функции $f^\beta = f_\varphi^\beta$ удовлетворяют уравнениям (2) с начальными условиями (3).

4. Априорная оценка.

Теорема. *Пусть выполнены условия 1 и 2. Предположим, что вектор-функция $\{\varphi, f^\beta\}$, $\varphi \in M_{1,R}$, $\beta = \pm 1$, является классическим решением задачи (1)–(4). Тогда $\operatorname{supp} f^\beta(\,\cdot\,,\cdot\,,t) \subset D_1$, $t \in [0,T]$, $\beta = \pm 1$, при этом справедлива оценка*

$$|||\nabla\varphi|||_{0,T} \leqslant c_1 \max_\beta \|f_0^\beta\|_0,$$

где $c_1 = c_1(Q,\rho,\varkappa) > 0$ – константа, не зависящая от f_0^β и φ.

Доказательство. Пусть φ – первая компонента классического решения задачи (1)–(4) $\{\varphi, f^{+1}, f^{-1}\}$ и $\varphi \in M_{1,R}$. Определим функции f^{β}_{φ} по формуле (9). Из метода характеристик следует, что функции f^{+1}_{φ} и f^{-1}_{φ} являются соответственно второй и третьей компонентами классического решения, т.е. $f^{+1}_{\varphi} = f^{+1}$ и $f^{-1}_{\varphi} = f^{-1}$.

Рассмотрим краевую задачу (1), (4). В силу теоремы Соболева об ограниченности вложения $W^2_4(Q)$ в $C^1(\overline{Q})$ и теоремы 6.4 из [19, гл. 3, § 6] об однозначной разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона в пространстве Соболева $W^2_4(Q)$ в случае бесконечного цилиндра получим неравенства

$$|||\nabla\varphi(\,\cdot\,,t)|||_0 \leqslant k_1\|\varphi(\,\cdot\,,t)\|_{W^2_4(Q)} \leqslant 4k_2\pi e\sum_{\beta} I_{\beta}, \quad t \in (0,T), \tag{10}$$

где $k_1, k_2 > 0$ – константы, зависящие от области Q и не зависящие от f^{β}_{φ} и φ,

$$I_{\beta} = \left\{\int\limits_{Q}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} f^{\beta}(x,v,t)dv\right)^4 dx\right\}^{1/4}.$$

Положив $f^{\beta} = f^{\beta}_{\varphi}$, в силу (9) имеем

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sup_{x\in Q}\sup_{v\in\mathbb{R}^3} f^{\beta}(x,v,t) \leqslant \sup_{(y,p)\in D_0} f^{\beta}_0(y,p) = \|f^{\beta}_0\|_0. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует оценка

$$|||\nabla\varphi(\,\cdot\,,t)|||_0 \leqslant 8k_2\pi e|B_{\varkappa}|^{1/4}|B_{\rho}|\max_{\beta}\|f^{\beta}_0\|_0.$$

Теорема доказана.

Заключение. Полученные результаты могут быть использованы для доказательства существования обобщённых решений смешанной задачи для системы Власова–Пуассона с компактными носителями функций плотности распределения заряженных частиц по пространственным переменным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00392).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арсеньев А.А.* О существовании обобщённых и стационарных статистических решений системы уравнений Власова в ограниченной области // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1253–1266.
2. *Bardos C., Degond P.* Global existence for the Vlasov–Poisson equation in 3 space variables with small initial data// Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéare. 1985. V. 2. № 2. P. 101–118.
3. *Batt J.* Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics // J. Differ. Equat. 1977. V. 25. № 3. P. 342–364.
4. *Беляева Ю.О., Скубачевский А.Л.* Об однозначной разрешимости первой смешанной задачи для системы уравнений Власова–Пуассона в бесконечном цилиндре // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2018. Т. 477. С. 12–34.
5. *Belyaeva Yu.O., Gebhard B., Skubachevskii A.L.* A general way to confined stationary Vlasov–Poisson plasma configurations // Kinetic and Related Models. 2021. V. 14. № 2. P. 257–282.
6. *Власов А.А.* Теория многих частиц. М., 1950.
7. *Weckler J.* On the initial–boundary–value problem for the Vlasov–Poisson system: existence of weak solutions and stability // Arch. Ration. Mech. Anal. 1995. V. 130. № 2. P. 145–161.
6. *Guo Y.* Regularity for the Vlasov equations on a half-space // Indiana Univ. Math. J. 1994. V. 43. № 1. P. 255–320.

8. *DiPerna R.J., Lions P. L.* Solutions globales d'équations du type Vlasov–Poisson // C. R. Acad. Sci. Sér. I. Math. 1988. V. 307. № 12. P. 655–658.
9. *Добрушин Р.Л.* Уравнения Власова // Функц. анализ и его приложения. 1979. Т. 13. № 2. С. 48–58.
10. *Козлов В.В.* Обобщённое кинетическое уравнение Власова // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63. № 4. С. 93–130.
11. *Маслов В.П.* Уравнения самосогласованного поля // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы математики. Т. 11. М., 1978. С. 153–234.
12. *Миямото К.* Основы физики плазмы и управляемого синтеза. М., 2007.
13. *Mouhot C., Villani C.* On Landau damping // Acta Math. 2011. V. 207. № 1. P. 29–201.
14. *Pfaffelmoser K.* Global classical solutions of the Vlasov–Poisson system in three dimensions for general initial data // J. Differ. Equat. 1992. V. 95. № 2. P. 281–303.
15. *Schäffer J.* Global existence of smooth solutions to the Vlasov–Poisson system in three dimensions // Comm. Partial Differ. Equat. 1991. V. 16. № 8–9. P. 1313–1335.
16. *Скубачевский А.Л.* Об однозначной разрешимости смешанных задач для системы уравнений Власова–Пуассона в полупространстве // Докл. РАН. 2012. Т. 443. № 4. С. 431–434.
17. *Скубачевский А.Л.* Уравнения Власова–Пуассона для двукомпонентной плазмы в однородном магнитном поле // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69. № 2. С. 107–148.
18. *Hwang H.J., Valázquez J.J.L.* On global existence for the Vlasov–Poisson system in a half-space // J. Differ. Equat. 2009. V. 247. № 6. P. 1915–1948.
19. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М., 1991.

Российский университет дружбы народов,
г. Москва,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 25.09.2022 г.
После доработки 25.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1688–1693

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.956.32

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ

© 2022 г. Э. Л. Шишкина

Для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу энергетическим методом доказана теорема о единственности решения задачи Коши. Решение такой задачи оказывается единственным только при неотрицательных значениях параметра k в операторе Бесселя, действующего по временно́й переменной.

DOI: 10.31857/S037406412212010X, EDN: NCVYIW

Введение. Основным объектом исследования в этой статье выступает общее уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу

$$(\Delta_\gamma)_x u = (B_k)_t u, \quad u = u(x,t), \quad t>0, \quad x=(x_1,\ldots,x_n), \tag{1}$$

где B_k – сингулярный дифференциальный оператор Бесселя (см., например, [1, с. 5])

$$(B_k)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t^k}\frac{\partial}{\partial t} t^k \frac{\partial}{\partial t}, \quad t>0, \quad k\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

$\triangle_\gamma$ – B-эллиптический оператор вида

$$\triangle_\gamma = (\triangle_\gamma)_x = \sum_{i=1}^n (B_{\gamma_i})_{x_i}. \tag{3}$$

Общее уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу исследуется методами, обобщающими классические, и имеет очень много приложений, например, в электростатической теории поля, гидродинамике, теории упругости и др.

Решение сингулярной задачи Коши для уравнения (1) при произвольном действительном значении параметра k является предметом многих исследований. При $n=1$ и $\gamma=0$ уравнение (1) появилось в работе Л. Эйлера (см. [2, с. 227]), затем изучалось С.Д. Пуассоном [3] и Г. Дарбу [4]. Интерес к многомерному уравнению (1) в случае, когда оператор Лапласа действует по переменной x, появился с работ А. Ванштейна [5, 6], и его изучение было продолжено в работах [7, 8]. Абстрактному уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу $Au=(B_k)_t u$, $u=u(x,t;k)$, где A – линейный оператор, действующий только по x, посвящены статьи А.В. Глушака [9, 10]. В книгах [11–13] изучен вопрос разрешимости различных задач для классического уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу.

В настоящей статье единственность решения задачи Коши для уравнения (1) при $k>0$ будет установлена энергетическим методом. При $k<0$ решение этой задачи не единственно, но множество решений имеет определённую структуру (см. [14]).

1. Основные определения и утверждения. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство,

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n: \ \ x_1>0, \ \ \ldots, \ \ x_n>0\},$$

$$\overline{\mathbb{R}}^n_+ = \{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n: \ \ x_1\geqslant 0, \ \ \ldots, \ \ x_n\geqslant 0\},$$

$\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ – мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел γ_i, $i=\overline{1,n}$, и $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$.

Рассмотрим открытое множество Ω в $\mathbb{R}^n$, симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i=0$, $i=\overline{1,n}$. Введём обозначения $\Omega_+=\Omega\bigcap\mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\Omega}_+=\Omega\bigcap\overline{\mathbb{R}}^n_+$, тогда $\Omega_+\subseteq\mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\Omega}_+\subseteq\overline{\mathbb{R}}^n_+$. Пусть $C^m(\Omega_+)$ – множество, состоящее из m раз дифференцируемых на Ω_+ функций. Через $C^m(\overline{\Omega}_+)$ обозначим подмножество функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все производные этих функций по x_i для любого $i=\overline{1,n}$ непрерывно продолжаются на плоскость $x_i=0$. Класс $C^m_{ev}(\overline{\Omega}_+)$ состоит из функций $f\in C^m(\overline{\Omega}_+)$ таких, что $\partial^{2k+1}f/\partial x_i^{2k+1}|_{x=0}=0$ для всех неотрицательных целых $k\leqslant m$ при $i=\overline{1,n}$ (см. [1, с. 21] и далее).

Пусть $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$ – единичные векторы по осям $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ соответственно,

$$\nabla'_\gamma=\left(\frac{1}{x_1^{\gamma_1}}\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{1}{x_n^{\gamma_n}}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)=\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}e_i$$

– первый взвешенный оператор набла,

$$\nabla''_\gamma=\left(x_1^{\gamma_1}\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,x_n^{\gamma_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)=\sum_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}e_i$$

– второй взвешенный оператор набла, тогда справедливо равенство $(\nabla'_\gamma\cdot\nabla''_\gamma)=\Delta_\gamma$. Имеем

$$\nabla'_\gamma(uv)=u\nabla'_\gamma v+v\nabla'_\gamma u. \tag{4}$$

Для доказательства единственности решения задачи Коши для уравнения (1) нам потребуется обобщённая дивергентная теорема из работы [15].

Теорема 1. *Пусть G^+ – область в $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ такая, что каждая линия, перпендикулярная плоскости $x_i=0$, $i=\overline{1,n}$, либо не пересекает G^+, либо имеет один общий отрезок с G^+ (возможно, вырождающийся в точку) вида*

$$\alpha_i(x')\leqslant x_i\leqslant\beta_i(x'),\quad x'=(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n),\quad i=\overline{1,n}.$$

Если $\vec{g}=(g_1(x),\ldots,g_n(x))$ является непрерывно дифференцируемым в области G^+ векторным полем и $\vec{F}=(F_1(x),\ldots,F_n(x))$, $F_1(x)=x_1^{\gamma_1}g_1(x),\ldots,F_n(x)=x_n^{\gamma_n}g_n(x)$, то справедлива формула

$$\int\limits_{G^+}(\nabla'_\gamma\cdot\vec{F})x^\gamma\,dx=\int\limits_{\partial G^+}(\vec{g}\cdot\vec{\nu})x^\gamma\,dS, \tag{5}$$

где $\vec{\nu}=\vec{e}_1\cos\eta_1+\ldots+\vec{e}_n\cos\eta_n$ – внешний вектор нормали к поверхности ∂G^+, η_i – угол между вектором $\vec{\nu}$ и осью Ox_i, $i=\overline{1,n}$.

В подпространстве $\mathbb{R}^n_+$ рассматривается многомерный обобщённый сдвиг, отвечающий мультииндексу γ, вида

$${}^\gamma\mathbf{T}^y_x={}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}\cdots{}^{\gamma_n}T^{y_n}_{x_n},$$

где каждый из одномерных обобщённых сдвигов определён выражением

$${}^{\gamma_i}T^{y_i}_{x_i}f(x)=\frac{\Gamma((\gamma_i+1)/2)}{\Gamma(\gamma_i/2)\Gamma(1/2)}\int\limits_0^\pi f(x_1,\ldots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\alpha_i},x_{i+1},\ldots,x_n)\sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\,d\alpha_i.$$

На основе многомерного обобщённого сдвига ${}^\gamma\mathbf{T}^y$ конструируется весовое сферическое среднее функции f, которое при $n\geqslant 2$ имеет вид

$$M_t^\gamma[f(x)]=\frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma}\int\limits_{S_1^+(n)}^{\gamma}\mathbf{T}^{t\theta}_x f(x)\theta^\gamma\,dS, \tag{6}$$

где $\theta^\gamma=\prod_{i=1}^n\theta_i^{\gamma_i}$, $S_1^+(n)=\{\theta:|\theta|=1,\ \theta\in\mathbb{R}_+^n\}$ – часть сферы в $\mathbb{R}_+^n$, а

$$|S_1^+(n)|_\gamma=\frac{\prod_{i=1}^n\Gamma((\gamma_i+1)/2)}{2^{n-1}\Gamma((n+|\gamma|)/2)}.$$

При $n=1$ положим

$$M_t^\gamma[f(x)]={}^\gamma\mathbf{T}_x^{t\theta}f(x). \tag{7}$$

Пусть $L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)=L_p^\gamma$, $1\leqslant p<\infty$, – пространство всех измеримых на $\mathbb{R}_+^n$ функций, чётных по каждой из своих переменных x_i, $i=\overline{1,n}$, таких, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f(x)|^p x^\gamma\,dx<\infty,$$

здесь и далее $x^\gamma=\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$. Для вещественных чисел $1\leqslant p<\infty$ норма в L_p^γ функции f определяется равенством

$$\|f\|_{L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)}=\|f\|_{p,\gamma}=\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f(x)|^p x^\gamma\,dx\Bigg)^{1/p}.$$

При $p=\infty$ норма в пространстве L_∞^γ функции f имеет вид

$$\|f\|_{L_\infty^\gamma(\mathbb{R}_+^n)}=\|f\|_{\infty,\gamma}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}_+^n}|f(x)|.$$

Известно [1, c. 42], что L_p^γ – банахово пространство.

Оператор M_t^γ ограничен в $L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ при $1\leqslant p\leqslant\infty$. Кроме того, справедливо неравенство

$$\|M_t^\gamma u\|_{p,\gamma}\leqslant\|u\|_{p,\gamma},\quad t>0.$$

И.А. Киприянов в монографии [1] представил B-полигармоническую порядка p функцию $u=u(x)=u(x_1,\ldots,x_n)$ такую, что $\Delta_\gamma^p u=0$, где Δ_γ – оператор (3). B-полигармоническая первого порядка функция называется B-гармонической.

2. Единственность решения задачи Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу. Рассмотрим Γ – лоренцево расстояние между точками (x,t) и (ξ,τ) сингулярной гиперплоскости:

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=(t-\tau)^2-\sum_{i=1}^m(x_i-\xi_i)^2.$$

Пусть (ξ,τ) – точка в $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Через G^+ обозначим часть конической области в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, ограниченную нижней полостью конуса $\Gamma(x,t;\xi,\tau)=0$ с вершиной в точке (ξ,τ) и плоскостями $x_i=0$, $i=\overline{1,n}$, $t=0$.

При $t=0$ получаем основание G^+ в $\mathbb{R}_+^n$, представляющее собой шар (часть шара) $B_n^+(\xi,\tau)$ с центром в точке ξ радиуса τ: $B_n^+(\xi,\tau)=\{x\in\mathbb{R}_+^n:|x-\xi|\leqslant\tau\}$.

Теорема 2. *Пусть u – функция из $C_{ev}^2(\overline{G^+})$, удовлетворяющая общему уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу*

$$(\Delta_\gamma)_x u=(B_k)_t u,\quad u=u(x,t;k) \tag{8}$$

в G^+, и предположим, что $k\geqslant 0$, а функции u, u_t обращаются в нуль на основании G^+, т.е.

$$u(x,0;k)=u_t(x,0;k)=0,\quad x\in B_n^+(\xi,\tau), \tag{9}$$

тогда $u(x,t;k)$ обращается в нуль в области $\overline{G^+}$.

Доказательство. Возьмём произвольную точку $(\widetilde{x},\widetilde{t})$ внутри или на границе множества $\overline{G^+}$ и построим новый конус (часть конуса) $(t-\widetilde{t})^2=\sum_{i=1}^m(x_i-\widetilde{x}_i)^2$. Через D^+ обозначим часть конической области в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, ограниченную нижней полостью конуса $(t-\widetilde{t})^2=$ $=\sum_{i=1}^m(x_i-\widetilde{x}_i)^2$ с вершиной в точке $(\widetilde{x},\widetilde{t})$ и плоскостями $x_i=0$, $i=\overline{1,n}$, $t=0$. Область D^+ ограничена в плоскости $t=0$ шаром (частью шара) $B_n^+(\widetilde{x},\widetilde{t})$, который составляет часть первоначального шара (части шара) $B_n^+(\xi,\tau)$, следовательно, в $B_n^+(\widetilde{x},\widetilde{t})$ верны соотношения (9).

Равенство (8) умножим на u_t и преобразуем следующим образом:

$$0=u_t(B_k)_tu-u_t\Delta_\gamma u=u_t\cdot u_{tt}+\frac{k}{t}u_t^2-(\nabla'_\gamma\cdot u_t\nabla''_\gamma u)+\partial_t\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right)=$$

$$=\partial_t\left(\frac{1}{2}u_t^2\right)+\frac{k}{t}u_t^2-(\nabla'_\gamma\cdot u_t\nabla''_\gamma u)+\partial_t\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right)=\partial_t\left(\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right)+\frac{k}{t}u_t^2-(\nabla'_\gamma\cdot u_t\nabla''_\gamma u). \quad (10)$$

Здесь были использованы соотношения, полученные из (4), а именно

$$u_t\Delta_\gamma u=(\nabla'_\gamma\cdot u_t\nabla''_\gamma u)-(\nabla'_\gamma u_t\cdot\nabla''_\gamma u)$$

и

$$(\nabla'_\gamma u_t\cdot\nabla''_\gamma u)=\left(\frac{1}{x_1^{\gamma_1}}\frac{\partial u_t}{\partial x_1},\ldots,\frac{1}{x_n^{\gamma_n}}\frac{\partial u_t}{\partial x_n}\right)\cdot\left(x_1^{\gamma_1}\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,x_n^{\gamma_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial u_t}{\partial x_i}\right)\cdot\left(x_i^{\gamma_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^n\frac{\partial u_t}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^n\partial_t\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2=\partial_t\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2=\partial_t\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right).$$

Проинтегрируем равенство (10) по области D^+ и применим формулу (5), положив

$$\vec{F}=\left(\frac{1}{2}\left(u_t^2+|\nabla u|^2\right),\ -u_tx_1^{\gamma_1}\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\ -u_tx_n^{\gamma_n}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right),$$

$$\vec{g}=\left(\frac{1}{2}\left(u_t^2+|\nabla u|^2\right),\ -u_t\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\ -u_t\frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

в результате получим

$$0=\int\limits_{D^+}\left(\partial_t\left(\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right)+\frac{k}{t}u_t^2-(\nabla'_\gamma\cdot u_t\nabla''_\gamma u)\right)x^\gamma\,dt\,dx=$$

$$=\int\limits_{\partial D^+}\left(\frac{1}{2}\left(u_t^2+|\nabla u|^2\right)\cos\eta_0-\sum_{i=1}^n u_t\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos\eta_i\right)x^\gamma\,dS+\int\limits_{D^+}\frac{k}{t}u_t^2x^\gamma\,dt\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\partial D^+}\left(u_t^2\cos\eta_0-2u_t\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos\eta_i+\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\cos\eta_0\right)x^\gamma\,dS+\int\limits_{D^+}\frac{k}{t}u_t^2x^\gamma\,dt\,dx,$$

где $\vec{n}=(\cos\eta_0,\cos\eta_1,\ldots,\cos\eta_n)$ – внешний вектор нормали к поверхности ∂D^+, η_0 – угол между вектором $\vec{n}$ и осью Ot, η_i – угол между вектором $\vec{n}$ и осью Ox_i, $i=\overline{1,n}$, кроме того, $\cos\eta_0=1/\sqrt{2}$. Умножим последнее равенство на $\cos\eta_0$. Учитывая, что $\sum_{i=0}^n\cos\eta_i^2=1$ и $1/2=\cos\eta_0^2=1-\cos\eta_0^2=\sum_{i=1}^n\cos\eta_i^2$, будем иметь

$$0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_{\partial D^+}\left(u_t\cos\eta_i-\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos\eta_0\right)^2x^\gamma\,dS+\int\limits_{D^+}\frac{k}{t}u_t^2x^\gamma\,dt\,dx.$$

На плоскости $t=0$ имеем $u_t(x,0)=0$. Поскольку $k\geqslant 0$, $t>0$, то из последнего равенства получаем, что на боковой поверхности конуса (части конуса) ∂D^+ справедливы тождества

$$u_t\cos\eta_i-\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos\eta_0\equiv 0$$

и $u_t\equiv 0$ в D^+. Отсюда следует, что $\partial u/\partial x_i\equiv 0$, $i=\overline{1,n}$. Это означает, что на боковой поверхности конуса (части конуса) ∂D^+ вектор $\operatorname{grad} u$ параллелен нормали. Возьмём на ∂D^+ произвольную точку (x,t) и проведём через неё образующую ℓ. Вектор $\operatorname{grad} u$ ортогонален к ℓ, поэтому $\partial u/\partial\ell=0$. Это означает, что u постоянна вдоль любой образующей боковой поверхности конуса (части конуса) ∂D^+ и значение u в вершине $(\widetilde{x},\widetilde{t})$ совпадает со значением u в точке образующей ℓ, которая лежит в плоскости $t=0$. Но по условиям (9) имеем, что $u(x,0;k)=0$, следовательно $u(\widetilde{x},\widetilde{t};k)=0$. Так как точка $(\widetilde{x},\widetilde{t})$ была взята произвольно в $\overline{G^+}$, то $u(x,t;k)\equiv 0$ в $\overline{G^+}$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $(\widetilde{x},\widetilde{t})$ – точка и G^+ – область, описанные в теореме 2. Предположим, что две функции u_l и u_2 из класса $C^2_{ev}(\overline{G^+})$ удовлетворяют уравнению (8) в G^+, кроме того, $u_1(x,0)=u_2(x,0)$ и $\partial u_1/\partial t|_{t=0}=\partial u_2/\partial t|_{t=0}=0$. Тогда $u_1\equiv u_2$ в $\overline{G^+}$.*

Объединив результат теоремы 2 и результаты из [16], получим следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть область G^+ имеет вид, описанный в теореме 2, точка (x,t) находится внутри или на границе множества $\overline{G^+}$, и пусть $u\in C^2_{ev}(\overline{G^+})$. Тогда при $k\geqslant n+|\gamma|-1$ единственное решение задачи*

$$\triangle_\gamma u(x,t)=(B_k)_t u,\quad u=u(x,t;k),$$

$$u(x,0;k)=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

имеет вид

$$u(x,t;k)=\frac{2t^{1-k}\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma((k-n-|\gamma|+1)/2)\Gamma((n+|\gamma|)/2)}\int\limits_0^t(t^2-r^2)^{(k-n-|\gamma|-1)/2}r^{n+|\gamma|-1}M^\gamma_r f(x)\,dr,$$

где $M^\gamma_t f(x)$ – весовое сферическое среднее, определяемое равенством (6) или (7).

Пусть $k\geqslant n+|\gamma|-1$ и $1\leqslant p\leqslant\infty$, тогда решение задачи Коши $u=u(x,t;k)$ из теоремы 3 при начальной функции $f\in L^\gamma_p(\mathbb{R}^n_+)$ допускает оценку

$$\|u(\,\cdot\,,t;k)\|_{p,\gamma}\leqslant C_{n,\gamma,k}\|f\|_{p,\gamma},\quad t>0.$$

Кроме того, $\lim\limits_{t\to 0}u(x,t;k)=f(x)$ почти при всех $x\in\mathbb{R}^n_+$.

Теорема 4. *Пусть область G^+ имеет вид, описанный в теореме 2, точка (x,t) находится внутри или на границе множества $\overline{G^+}$, и пусть $u\in C^{2+[(n+|\gamma|-k)/2]}_{ev}(\overline{G^+})$. Решение задачи Коши*

$$\triangle_\gamma u(x,t)=(B_k)_t u,\quad u=u(x,t;k),\tag{11}$$

$$u(x,0;k)=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0\tag{12}$$

при $k<n+|\gamma|-1$, $k\neq -1,-3,-5,\ldots,$ имеет вид

$$u(x,t;k)=t^{1-k}\left(\frac{\partial}{t\,\partial t}\right)^m(t^{k+2m-1}u(x,t;k+2m)),\tag{13}$$

где m – минимальное целое число такое, что $m\geqslant\dfrac{n+|\gamma|-k-1}{2}$ и $u(x,t;k+2m)$ – решение задачи Коши

$$(B_{k+2m})_t u=(\Delta_\gamma)_x u,$$

$$u(x,0;k+2m)=\frac{f(x)}{(k+1)(k+3)\cdots(k+2m-1)},\quad u_t(x,0;k+2m)=0.$$

Решение (13) единственно при $k\geqslant 0$ и не единственно при $k<0$. Если f – B-полигармоническая функция порядка $(1-k)/2$ и $f\in C^{1-k}_{ev}$, то одно из решений задачи Коши (11), (12) при $k=-1,-3,-5,\ldots$ имеет вид

$$u(x,t;k)=f(x),\quad k=-1,$$

$$u(x,t;k)=f(x)+\sum_{h=1}^{-(k+1)/2}\frac{\Delta_\gamma^h f}{(k+1)\cdots(k+2h-1)}\,\frac{t^{2h}}{2\cdot 4\cdots 2h},\quad k=-3,-5,\ldots$$

Заключение. Приведённая теорема о единственности решения задачи Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, доказанная энергетическим методом, дополняет результаты исследований задач для сингулярных гиперболических уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., 1997.
2. *Euler L.* Institutiones Calculi Integralis. V. III. Petropoli, 1770.
3. *Poisson S.D.* Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux diffŕences partielles // J. de L'École Polytechechnique. 1823. Ser. 1. V. 19. P. 215–248.
4. *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. II. Paris, 1888.
5. *Weinstein A.* On the wave equation and the equation of Euler–Poisson // Proc. of Symposia in Applied Mathematics. V. 5. Wave Motion and Vibration Theory. New York; Toronto; London, 1954. P. 137–147.
6. *Weinstein A.* The generalized radiation problem and the Euler–Poisson–Darboux equation // Summa Brasiliensis Mathematicae. 1955. V. 3. P. 125–147.
7. *Bresters D.W.* On the equation of Euler–Poisson–Darboux // SIAM J. Math. Anal. 1973. V. 4. № 1. P. 31–41.
8. *Терсенов С.А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск, 1973.
9. *Глушак А.В.* Регулярное и сингулярное возмущения абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Мат. заметки. 1999. Т. 66. № 3. С. 364–371.
10. *Глушак А.В., Покручин О.А.* Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 1. С. 41–59.
11. *Маричев О.И., Килбас А.А., Репин О.А.* Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Самара, 2008.
12. *Уринов А.К.* К теории уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу. Фергана, 2015.
13. *Зайцева Н.В.* Смешанные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений с оператором Бесселя. М., 2021.
14. *Шишкина Э.Л.* Общее уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу и гиперболические B-потенциалы // Совр. математика. Фунд. направления. 2019. Т. 65. № 2. С. 157–338.
15. *Шишкина Э.Л.* Обобщённая дивергентная теорема и второе тождество Грина для B-эллиптических и B-гиперболических операторов // Науч. ведомости Белгородского гос. ун-та. Математика. Физика. 2019. Т. 51. № 4. С. 506–513.
16. *Shishkina E.L., Sitnik S.M.* General form of the Euler–Poisson–Darboux equation and application of the transmutation method // Electron. J. Differ. Equat. 2017. V. 2017. № 177. P. 1–20.

Воронежский государственный университет,
Белгородский государственный национальный
исследовательский университет

Поступила в редакцию 22.11.2021 г.
После доработки 14.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1694–1701

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.958

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ЭКСТИНКЦИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

© 2022 г. Ю. А. Ерёмин, В. В. Лопушенко

На основе математического анализа решения системы уравнений Максвелла для граничной задачи возбуждения нелокального рассеивателя, расположенного вблизи прозрачной подложки, электрическим диполем произвольной поляризации получена универсальная формула для сечения экстинкции. Формула позволяет определять сечение экстинкции, вычисляя рассеянное поле лишь в одной единственной точке. Проведено обобщение полученного результата на случай возбуждения мультиполем произвольного порядка рассеивателя при наличии прозрачной подложки, при этом мультиполь может располагаться как вблизи рассеивателя, так и внутри подложки. На основе проведённых исследований получена формула для вычисления квантового выхода флюоресценции, исключающая необходимость вычисления сечения поглощения для рассеивателя с эффектом нелокальности.

DOI: 10.31857/S0374064122120111, EDN: NCWPAH

Введение. Явление флюоресценции широко используется в современных научных приборах как эффективное средство расшифровки спектров отдельных молекул [1, 2]. Критическим параметром для оценки разрешающей способности таких приборов является величина квантового выхода флюоресценции [3, 4]. Увеличение значений квантового выхода – первейшая задача разработчиков подобных устройств. Основным элементом устройств является совокупность плазмонных частиц, располагающихся вблизи прозрачной подложки, при этом наибольший интерес представляет использование слоистых частиц [5, 6]. Вследствие непрерывного развития технологий размеры самих частиц, равно как и толщины металлических слоёв, все время уменьшаются. Тенденция минитюаризации влечёт за собой проявление эффекта нелокального экранирования в плазменном металле [6, 7]. Как известно, данный эффект приводит к снижению интенсивности полей и сдвигу положения плазменного резонанса, что вызывает существенные трудности при построении технологических схем подобных устройств.

Математическое моделирование процесса флюоресценции предполагает наличие эффективного способа вычисления квантового выхода флюоресценции с необходимостью оценки сечения рассеяния структуры $C_{\rm scs}$, которое, собственно, и регистрируется, а также сечения поглощения энергии в металле $C_{\rm abc}$, которое представляется "паразитным" фактором, неизбежно возникающим при использовании металлов [2, 4]. Для определения последнего приходится выполнять трудоемкие расчёты с интегрированием полей по поверхности структуры в присутствии прозрачной подложки, что связано с многократным вычислением несобственных интегралов Зоммерфельда [5]. Кроме того, присутствие нелокальности в металле приводит к появлению продольных полей, которые осциллируют на порядок сильнее, чем классическое поперечное поле [6]. Все это делает весьма затратной процедуру вычисления сечения поглощения в заданном диапазоне частот. Однако, поскольку квантовый выход представляется в виде отношения $\eta = C_{\rm scs}/(C_{\rm scs}+C_{\rm abc})$, возникает идея вычислять сечение экстинкции $C_{\rm ext}$, представленное в виде суммы $C_{\rm ext} = C_{\rm scs}+C_{\rm abc}$, используя оптическую теорему.

Оптическая теорема (ОТ) представляет собой фундаментальный результат математической теории дифракции [8, 9]. Первоначально доказанная для случая возбуждения рассеивателя плоской волной, она определяла сечение экстинкции как функционал от диаграммы направленности рассеянного поля на бесконечности в направлении прохождения плоской волны. Таким образом, сумма сечений рассеяния и поглощения определяется одним единственным легко вычисляемым числом. В дальнейшем появилось обобщение ОТ на случай присутствия прозрачной подложки [10, 11]. Существенным моментом при оценке квантового выхода флюоресценции является то, что возбуждение структуры в данном случае производится не плоской волной, а электрическим диполем, располагающимся вблизи поверхности рассеивателя [6, 7].

В работе [12] было получено сечение экстинкции для мультиполя, располагающегося в свободном пространстве. В настоящей работе при анализе решения системы уравнений Максвелла для нелокального рассеивателя, расположенного вблизи прозрачной подложки и возбуждаемого электрическим диполем произвольной поляризации, получена универсальная формула для сечения экстинкции. Формула даёт возможность определять сечение экстинкции, вычисляя рассеянное поле в одной единственной точке – точке расположения диполя. Проведено обобщение этого результата на случай возбуждения мультиполем произвольного порядка рассеивателя, располагающегося вблизи прозрачного полупространства. При этом мультиполь может находиться как непосредственно вблизи рассеивателя, так и внутри прозрачного полупространства.

1. Постановка граничной задачи. Перейдём к математической постановке граничной задачи дифракции. Пусть локальный рассеиватель D_i, расположенный в верхнем полупространстве D_0 $(z>0):$ $\overline{D_i}\subset D_0$ вблизи границы нижнего полупространства D_1 $(z<0)$, возбуждается точечным диполем $\mathbf{J}(M,M_0)=\boldsymbol{e}\delta(M-M_0)$. Полные поля $(\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{H}_{0,1})$ в каждом из полупространств $D_{0,1}$ являются решениями уравнений Максвелла

$$\nabla\times\mathbf{H}_0=jk\varepsilon_0\mathbf{E}_0+\mathbf{J},\quad \nabla\times\mathbf{E}_0=-jk\mu_0\mathbf{H}_0\quad\text{в}\quad D_0\backslash\overline{D_i},$$
$$\nabla\times\mathbf{H}_1=jk\varepsilon_1\mathbf{E}_1+\mathbf{J},\quad \nabla\times\mathbf{E}_1=-jk\mu_1\mathbf{H}_1\quad\text{в}\quad D_1,$$
$$\widehat{\mathbf{e}}_{\rm z}\times(\mathbf{E}_0-\mathbf{E}_1)=0,\quad \widehat{\mathbf{e}}_{\rm z}\times(\mathbf{H}_0-\mathbf{H}_1)=0\quad\text{на}\quad \Sigma:(z=0). \tag{1}$$

Временнáя зависимость величин выбрана в виде $\exp(j\omega t)$, где ω – частота колебаний, t – время, ε_0 и ε_1 – диэлектрические проницаемости сред в областях $D_0\backslash\overline{D_i}$ и D_1 соответственно, а $\widehat{\mathbf{e}}_{\rm z}$ – единичный вектор декартовой системы координат, соответствующий оси z. Кроме того, поля $(\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{H}_{0,1})$ должны удовлетворять следующим условиям излучения на бесконечности [13]:

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\times\sqrt{\mu_{0,1}}\mathbf{H}_{0,1}-\sqrt{\varepsilon_{0,1}}\mathbf{E}_{0,1}\right)=0,\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad z\neq 0;$$
$$\max(|\,\mathbf{E}_{0,1}\,|,|\,\mathbf{H}_{0,1}\,|)=O(\rho^{-1/2});\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \rho\to\infty,\quad z=\pm 0. \tag{2}$$

Внутри локального рассеивателя D_i полное поле $(\mathbf{E}_i,\mathbf{H}_i)$ удовлетворяет полуклассической системе уравнений Максвелла в рамках теории обобщённого нелокального отклика (GNOR) [14], т.е.

$$\nabla\times\mathbf{H}_i=jk[\varepsilon_i+\xi^2\nabla(\nabla\cdot)]\mathbf{E}_i,\quad \nabla\times\mathbf{E}_i=-jk\mathbf{H}_i\quad\text{в}\quad D_i. \tag{3}$$

Здесь $k=\omega/c$ – волновое число, c – скорость света, ε_i – диэлектрическая проницаемость среды внутри D_i, а

$$\xi^2=\varepsilon_{\rm b}\left[\frac{\beta^2}{\omega(\omega-j\gamma)}+j\frac{D}{\omega}\right],$$

ξ – корреляционная длина нелокальности в рамках модели GNOR, $\varepsilon_{\rm b}=\varepsilon_i+\omega_p^2/(\omega(\omega-j\gamma))$, $\omega_{\rm p}$ – плазмонная частота металла, $\beta^2=(3/5)v_{\rm F}^2$, $v_{\rm F}$ – скорость Ферми, γ – скорость затухания и D – коэффициент диффузии электронов. Граничные условия на поверхности рассеивателя ∂D_i, включая дополнительное условие, могут быть записаны как

$$\widehat{\mathbf{n}}_i\times(\mathbf{E}_i-\mathbf{E}_0)=0,\quad \widehat{\mathbf{n}}_i\times(\mathbf{H}_i-\mathbf{H}_0)=0,\quad \varepsilon_{\rm b}\widehat{\mathbf{n}}_i\cdot\mathbf{E}_i=\varepsilon_0\widehat{\mathbf{n}}_i\cdot\mathbf{E}_0\quad\text{в}\quad \partial D_i. \tag{4}$$

Будем считать, что $\partial D_i\in C^{(2,\alpha)}$, а параметры среды удовлетворяют условиям $\operatorname{Im}\varepsilon_i\leqslant 0$, $\operatorname{Im}\varepsilon_{0,1}=0$, $\mu_{0,1}=1$. Тогда на основании результатов, представленных в работе [15], будем полагать, что сформулированная выше граничная задача (1)–(4) имеет единственное классическое решение.

2. Оптическая теорема. Проведём некоторые предварительные построения. Выберем сферу Σ_R с центром на плоскости Ξ, которая заключает область D_i и точку источника M_0 внутри. Обозначим получившуюся внутреннюю область как D_R. Плоскость Ξ разрезает D_R на два полушара $D_R^{\pm}$ с поверхностями $\Sigma_R^{\pm}$, располагающихся в областях $D_{0,1}$ соответственно. Применив формулу Гаусса к решению граничной задачи (1)–(4) в области D_R^+/D_i, получим

$$\int\limits_{D_R^+/D_i} \nabla\cdot[\mathbf{E}_0\times\mathbf{H}_0^*]\,d\tau = \int\limits_{D_R^+/D_i} [\mathbf{H}_0^*\cdot\nabla\times\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_0\cdot\nabla\times\mathbf{H}_0^*]\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{D_R^+/D_i} [-jk|\mathbf{H}_0^*|^2 + jk\varepsilon_0|\mathbf{E}_0|^2 - (\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{J}^*)]\,d\tau = \int\limits_{\Sigma_R^+\bigcup\partial D_i\bigcup\Xi_R} [\mathbf{E}_0\times\mathbf{H}_0^*]\cdot\mathbf{n}\,d\sigma, \tag{5}$$

здесь $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к соответствующим поверхностям, Ξ_R – круг радиуса R на плоскости Ξ, отсекаемый сферой Σ_R. Учитывая условия сопряжения для тангенциальных компонент полей на ∂D_i, имеем

$$\int\limits_{\partial D_i} [\mathbf{E}_0\times\mathbf{H}_0^*]\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int\limits_{\partial D_i} [\mathbf{E}_i\times\mathbf{H}_i^*]\cdot\mathbf{n}\,d\sigma. \tag{6}$$

В правой части равенства (6) стоит сечение поглощения C_{abc}. Выделяя реальные значения от обеих частей (5), с учётом (6) получаем

$$C_{\text{abc}} + \operatorname{Re}\int\limits_{\Sigma_R^+} [\mathbf{E}_0\times\mathbf{H}_0^*]\cdot\mathbf{e}_r\,d\sigma + \operatorname{Re}\int\limits_{\Xi_R} [\mathbf{E}_0\times\mathbf{H}_0^*]\cdot\mathbf{i}_z\,d\sigma = -\operatorname{Re}\int\limits_{D_R^+/D_i} (\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{J}^*)\,d\tau.$$

Аналогично в области D_R^- имеем

$$\operatorname{Re}\int\limits_{\Sigma_R^-} [\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_1^*]\cdot\mathbf{e}_r\,d\sigma - \operatorname{Re}\int\limits_{\Xi_R} [\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_1^*]\cdot\mathbf{i}_z\,d\sigma = 0.$$

Складывая два последних соотношения, с учётом условий сопряжения для полей на границе раздела Ξ полупространств получаем следующее соотношение:

$$C_{\text{abc}} + \operatorname{Re}\int\limits_{\Sigma_R^+} [\mathbf{E}_0\times\mathbf{H}_0^*]\cdot\mathbf{e}_r\,d\sigma + \operatorname{Re}\int\limits_{\Sigma_R^-} [\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_1^*]\cdot\mathbf{e}_r\,d\sigma = -\operatorname{Re}\int\limits_{D_R^+/D_i} (\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{J}^*)\,d\tau. \tag{7}$$

Введём в рассмотрение диаграммы рассеяния $\mathbf{F}_{0,1}(\theta,\varphi)$ (см. [16, с. 131]) полей в верхнем и нижнем полупространствах соответственно

$$\mathbf{E}_{0,1}(M) = \frac{e^{-jk_{0,1}r}}{r}\mathbf{F}_{0,1}(\theta,\varphi) + o(r^{-1}), \quad r\to\infty,$$

определённые на единичных полусферах $\Theta^{\pm}$, и $k_{0,1} = k\sqrt{\epsilon_{0,1}\mu_{0,1}}$. Для перехода к пределам при $R\to\infty$ в соотношении (7) следует учитывать особенности использования условий излучения (2) в присутствии подложки. Выделим сферический слой толщиной h, отсекаемый плоскостями, параллельными плоскости Ξ и расположенными по разные стороны от неё в верхнем и нижнем полупространствах. Внутри областей, ограниченных верхней и нижней оставшимися частями сфер $\Sigma_R^{\pm}$, справедливы классические условия излучения Сильвера–Мюллера. В окрестности Ξ имеет место оценка $\max(|\mathbf{E}_{0,1}|, |\mathbf{H}_{0,1}|) = O(\rho^{-1/2})$, $\rho\to\infty$. Тогда поток энергии через боковую поверхность сферического слоя толщиной h имеет порядок $O(h)$, причём эта оценка не зависит от R. Устремляя $h \to 0$, $R \to \infty$ и учитывая классические условия излучения, получаем из (5) соотношение

$$C_{\text{abc}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \int\limits_{\Theta^+} |\mathbf{F}_0|^2 \, d\varpi + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \int\limits_{\Theta^-} |\mathbf{F}_1|^2 \, d\varpi = -\operatorname{Re} \int\limits_{D_R^+/D_i} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{J}^*) \, d\tau. \tag{8}$$

Введём сечения рассеяния в верхнее и нижнее полупространство соответственно:

$$C_{\text{scs}}^{\pm} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{0,1}}{\mu_{0,1}}} \int\limits_{\Theta^{\pm}} |\mathbf{F}_{0,1}|^2 \, d\varpi.$$

Тогда по аналогии со свободным пространством определим сечение экстинкции

$$C_{\text{ext}} = C_{\text{abc}} + C_{\text{scs}}^{+} + C_{\text{scs}}^{-}.$$

Разобьем поле в верхнем полупространстве на рассеянное поле и поле диполя $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0^s + \mathbf{E}_0^d$. При этом будем полагать, что каждое из них удовлетворяет условиям сопряжения на Ξ. Тогда правая часть (8) может быть записана как

$$C_{\text{ext}} = -\operatorname{Re}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}_0^s(M_0)) - \operatorname{Re}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}_0^d(M)|_{M=M_0}). \tag{9}$$

Для вычисления конкретного вида выражений в правой части (9) понадобится представление для поля электрического диполя в присутствии полупространства. Соответствующий векторный потенциал имеет вид [17, с. 37]

$$\mathbf{A}(M) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{D_0/D_i} \mathbf{G}^e(M,P)\mathbf{J}(P) \, d\tau_P,$$

где $\mathbf{G}^e(M, M_0)$ – тензор Грина полупространства

$$\mathbf{G}^e(M, M_0) = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & G_{11} & 0 \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y & G_{33} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Компоненты тензора Грина могут быть записаны в виде интегралов Зоммерфельда:

$$G_{\beta\beta}(M, M_0) = \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r) v_{\beta\beta}(\lambda, z, z_0) \lambda \, d\lambda, \quad \beta = 1, 3; \quad g_{31}(M, M_0) = \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r) v_{31}(\lambda, z, z_0) \lambda \, d\lambda.$$

Здесь $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, J_0 – цилиндрическая функция Бесселя, (x_0, y_0, z_0) – декартовы координаты источника, расположенного в точке M_0. В данном случае для спектральных функций v_{11}, v_{33}, v_{31} [17, с. 39], обеспечивающих непрерывность тангенциальных компонент полей при $z = 0$, имеют место следующие представления:

$$v_{\beta\beta}(\lambda, z, z_0) = \frac{\exp\{-\eta_0|z - z_0|\}}{\eta_0} + A_{\beta\beta}(\lambda, z_0) \frac{\exp\{-\eta_0 z\}}{\eta_0}, \quad z_0 > 0, \quad z > 0;$$

$$v_{31}(\lambda, z, z_0) = A_{31}(\lambda, z_0) \exp\{-\eta_0 z_0\}, \quad z_0 > 0, \quad z > 0,$$

где $\eta_{0,1}^2 = \lambda^2 - k_{0,1}^2$. Спектральные коэффициенты определяются из условий для скачков полей при $z = 0$ [17, с. 40]. Отсюда легко получается, что

$$A_{11}(\lambda, z_0) = \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \exp\{-\eta_0 z_0\}, \quad A_{33}(\lambda, z_0) = \frac{\varepsilon_1 \eta_0 - \varepsilon_0 \eta_1}{\varepsilon_1 \eta_0 + \varepsilon_0 \eta_1} \exp\{-\eta_0 z_0\},$$

$$A_{31}(\lambda, z_0) = \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \exp\{-\eta_0 z_0\}}{(\eta_0 + \eta_1)(\varepsilon_1 \eta_0 + \varepsilon_0 \eta_1)}.$$

Отметим, что первое слагаемое в первой строке спектральной функции соответствует фундаментальному решению уравнения Гельмгольца $4\pi\Psi(M, M_0)$. Таким образом, поле электрического диполя, удовлетворяющее условиям сопряжения для полей на границе раздела полупространств, принимает вид

$$\mathbf{E}_0^d(M) = -\frac{j}{4\pi k_0}\nabla\times\nabla\times\int\limits_{D_0/D_i}\mathbf{G}^e(M,P)\cdot\mathbf{J}(P)\,d\tau_P.$$

Рассмотрим компоненты вектора поляризации возбуждающего диполя в декартовой системе координат. Начнём с вертикального диполя, т.е. компоненты с $\boldsymbol{e}_z$. Имеем

$$\mathbf{E}_0^{d(z)}(M) = -\frac{j}{4\pi k_0}\nabla\times\nabla\times\{\Psi(M,M_0)\boldsymbol{e}_z\} - \frac{j}{4\pi k_0}\nabla\times\nabla\times\{\overline{G}_{33}(M,M_0)\boldsymbol{e}_z\},$$

здесь первое слагаемое представляет собой поле диполя в свободном пространстве с волновым числом k_0. Для удобства дальнейшего рассмотрения преобразуем выражение

$$\operatorname{Re}\left(-\frac{\mathrm{j}}{k_0}\Psi(M,M_0)\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{-jk_0R_{MM_0}}}{k_0R_{MM_0}}\right) = -j_0(k_0R_{MM_0}),$$

где $j_0(k_0R_{MM_0})$ – сферическая функция Бесселя [18, с. 785]. Тогда справедливы равенства

$$\mathbf{e}_z\cdot\nabla\times\nabla\times[j_0(M)\mathbf{e}_z] = -|\mathbf{e}_z|^2\triangle j_0(M) + \mathbf{e}_z\nabla\nabla\cdot(j_0(M)\mathbf{e}_z) = |\mathbf{e}_z|^2\left(k_0^2j_0(M) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}j_0(M)\right).$$

В результате получим для сингулярной части выражение

$$-\frac{j}{4\pi k_0}\nabla\times\nabla\times\{j_0(M)\mathbf{e}_z\}_{M=M_0} = \frac{|\mathbf{e}_z|^2}{4\pi}\left(k_0^2j_0(M) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}j_0(M)\right)_{M=M_0} = \frac{k_0^2}{6\pi}|\mathbf{e}_z|^2. \tag{11}$$

Рассмотрим подробнее второе слагаемое, в котором $\overline{G}_{33}$ – соответствующий элемент тензора Грина (10) без сингулярности. Поскольку компоненты тензора (10) удовлетворяют уравнению Гельмгольца в полупространстве D_0, то аналогично имеем

$$\mathbf{e}_z\cdot\nabla\times\nabla\times[\overline{G}_{33}(M,M_0)\mathbf{e}_z]\Big|_{M=M_0} = |\mathbf{e}_z|^2\left[k_0^2\overline{G}_{33}(M,M_0) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{G}_{33}(M,M_0)\Big|_{M=M_0}\right] =$$

$$= |\mathbf{e}_z|^2\int\limits_0^\infty(k_0^2+\eta_0^2)\frac{\varepsilon_1\eta_0-\varepsilon_0\eta_1}{\varepsilon_1\eta_0+\varepsilon_0\eta_1}\,\frac{\exp\{-2\eta_0z_0\}}{\eta_0}\lambda\,d\lambda = |\mathbf{e}_z|^2\int\limits_0^\infty\frac{\varepsilon_1\eta_0-\varepsilon_0\eta_1}{\varepsilon_1\eta_0+\varepsilon_0\eta_1}\,\frac{\exp\{-2\eta_0z_0\}}{\eta_0}\lambda^3\,d\lambda.$$

Выделив вещественную часть последнего интеграла, с учётом отсутствия мнимой части у волнового числа k_1 получим

$$\operatorname{Re}\int\limits_{D_0}(\mathbf{E}_0^{d(z)}\cdot\mathbf{J}^*)\,d\tau = \frac{|\mathbf{e}_z|^2}{4\pi k_0}\operatorname{Im}\int\limits_0^\infty\frac{\varepsilon_1\eta_0-\varepsilon_0\eta_1}{\varepsilon_1\eta_0+\varepsilon_0\eta_1}\,\frac{\exp\{-2\eta_0z_0\}}{\eta_0}\lambda^3\,d\lambda =$$
$$= \frac{|\mathbf{e}_z|^2}{4\pi k_0}\operatorname{Im}\int\limits_0^{k_1}\frac{\varepsilon_1\eta_0-\varepsilon_0\eta_1}{\varepsilon_1\eta_0+\varepsilon_0\eta_1}\,\frac{\exp\{-2\eta_0z_0\}}{\eta_0}\lambda^3\,d\lambda.$$

Рассмотрим теперь случай горизонтального диполя, соответствующего компоненте $\boldsymbol{e}_{\mathrm{x}}$. Как и в предыдущем случае, достаточно рассмотреть лишь соответствующий элемент тензора без сингулярности, поскольку для сингулярной части будет иметь место соотношение, полностью аналогичное (11). Таким образом, для $\overline{G}_{11}(M,M_0) + \dfrac{\partial}{\partial x}g(M,M_0)$ имеем

$$\mathbf{e}_{\mathrm{x}}\cdot\nabla\times\nabla\times\left[\overline{G}_{11}(M,M_0) + \frac{\partial}{\partial x}g(M,M_0)\right]\mathbf{e}_{\mathrm{x}}\Big|_{M=M_0} =$$

$$= k_0^2|\mathbf{e}_\mathrm{x}|^2\left[\overline{G}_{11}(M,M_0)+\frac{\partial}{\partial x}g(M,M_0)\bigg|_{M=M_0}\right]+\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{G}_{11}(M,M_0)+\frac{\partial^3}{\partial x^3}g(M,M_0)\right]_{M=M_0}.$$

Сразу отметим то обстоятельство, что наличие любых производных нечётного порядка по x или y от интеграла, содержащего $J_0(\lambda r)$, приводит к обнулению результата при $M=M_0$ $(r=0)$. В этом легко убедиться, записав ряд для функции Бесселя $J_0(x)$, который содержит лишь чётные степени аргумента [18, с. 777]. Учитывая данное обстоятельство, получаем

$$|\mathbf{e}_\mathrm{x}|^2\left[k_0^2\overline{G}_{11}(M,M_0)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{G}_{11}(M,M_0)\bigg|_{M=M_0}\right]=|\mathbf{e}_\mathrm{x}|^2\int\limits_0^\infty\left(k_0^2-\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\,\frac{\exp\{-2\eta_0z_0\}}{\eta_0}\lambda\,d\lambda$$

или

$$\mathrm{Re}\int\limits_{D_0}(\mathbf{E}_0^{d(x)}\cdot\mathbf{J}^*)\,d\tau=\frac{|\mathbf{e}_\mathrm{x}|^2}{8\pi k_0}\,\mathrm{Im}\int\limits_0^{k_1}(2k_0^2-\lambda^2)\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\,\frac{\exp\{-2\eta_0z_0\}}{\eta_0}\lambda\,d\lambda.$$

Аналогичное соотношение можно получить и для случая горизонтального диполя, соответствующего компоненте $\mathbf{e}_y$. Собрав слагаемые, имеем

$$-\mathrm{Re}\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{E}_0^s)=\frac{k_0^2}{6\pi}|\mathbf{e}|^2-\frac{|\mathbf{e}_z|^2}{4\pi k_0}\,\mathrm{Im}\int\limits_0^{k_1}\frac{\varepsilon_1\eta_0-\varepsilon_0\eta_1}{\varepsilon_1\eta_0+\varepsilon_0\eta_1}\,\frac{\exp\{-2\eta_0z_0\}}{\eta_0}\lambda^3\,d\lambda-$$
$$-\frac{(|\mathbf{e}_\mathrm{x}|^2+|\mathbf{e}_y|^2)}{8\pi k_0}\,\mathrm{Im}\int\limits_0^{k_1}(2k_0^2-\lambda^2)\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\,\frac{\exp\{-2\eta_0z_0\}}{\eta_0}\lambda\,d\lambda.$$

Теорема 1. *Оптическая теорема (или, как её иногда называют, теорема экстинкции) для граничной задачи (1)–(4) принимает следующий вид:*

$$C_\mathrm{ext}=-\mathrm{Re}\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{E}_0^s)+\frac{k_0^2}{6\pi}|\mathbf{e}|^2-\frac{|\mathbf{e}_z|^2}{4\pi k_0}\,\mathrm{Im}\int\limits_0^{k_1}\frac{\varepsilon_1\eta_0-\varepsilon_0\eta_1}{\varepsilon_1\eta_0+\varepsilon_0\eta_1}\,\frac{\exp\{-2\eta_0z_0\}}{\eta_0}\lambda^3\,d\lambda-$$
$$-\frac{(|\mathbf{e}_\mathrm{x}|^2+|\mathbf{e}_y|^2)}{8\pi k_0}\,\mathrm{Im}\int\limits_0^{k_1}(2k_0^2-\lambda^2)\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\,\frac{\exp\{-2\eta_0z_0\}}{\eta_0}\lambda\,d\lambda. \quad (12)$$

Проведём анализ полученного соотношения (12). Напомним, что сечение экстинкции состоит из $C_\mathrm{ext}=C_\mathrm{abc}+C_\mathrm{scs}^{+}+C_\mathrm{scs}^{-}$. Здесь два последних слагаемых представляют собой сечения рассеяния полного поля, включая поле диполя, в верхнем и нижнем полупространствах. Уберём теперь рассеиватель, т.е. положим $\mathbf{E}_0^s=0$, тогда и $C_\mathrm{abc}=0$. Последнее легко установить, если, аналогично предыдущему, использовать теорему дивергенции внутри области, занятой рассеивателем, для поля диполя $\mathbf{E}_0^d$. Таким образом, в левой части соотношения (12) останется лишь сумма $C_\mathrm{scs}^{d+}+C_\mathrm{scs}^{d-}$, а в правой части исчезнет слагаемое, соответствующее рассеянному полю. Обозначим оставшуюся сумму как $C_i^d=C_\mathrm{scs}^{d+}+C_\mathrm{scs}^{d-}$. Она представляет собой полное сечение излучения диполя как в верхнее, так и в нижнее полупространство. Тогда формулу (12) для сечения экстинкции можно записать как

$$C_\mathrm{ext}=-\mathrm{Re}\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{E}_0^s)+C_i^d. \quad (13)$$

Полученную формулу (13) будем называть *универсальной формулой для сечения экстинкции*, соответствующей локальному источнику первичного излучения в присутствии прозрачного полупространства.

Итак, установлено, что вместо того чтобы вычислять сечение поглощения, интегрируя по поверхности рассеивателя (6), достаточно вычислить проекцию рассеянного поля на вектор поляризации электрического диполя в одной единственной точке – точке расположения диполя и добавить к нему сечение излучения диполя.

Таким образом, квантовый выход флюоресценции может быть записан как

$$\eta = \frac{C_{\text{scs}}^{+} + C_{\text{scs}}^{-}}{C_{\text{ext}}},$$

где C_{ext} имеет вид (13).

Замечание 1. С вычислительной точки зрения формула (13) представляется более экономичной. Так как при вычислении сечений рассеяния $C_{\text{scs}}^{\pm}$ приходится интегрировать диаграмму рассеянного поля плюс диаграмму источника, вычисление отдельно интеграла от источника излучения не ведет к дополнительным затратам ресурсов.

В работе [12] было получено выражение для экстинкции для случая возбуждения локального проницаемого рассеивателя, расположенного в свободном пространстве, произвольным мультиполем. В этом случае в качестве функции тока вместо диполя $\mathbf{J}(M, M_0) = \boldsymbol{e}\delta(M - M_0)$ использовалось представление для мультипольного источника следующего вида:

$$\mathbf{J}(M, M_0) = \boldsymbol{e} D_n^m \delta(M - M_0),$$

где дифференциальный оператор

$$D_n^m = (-1)^m j^n \left[\frac{j}{k}\left(\frac{\partial}{\partial x} - j\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]^m P_n^{(m)}\left(\frac{j}{k}\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

здесь $P_n^{(m)}(\cos\theta) = \dfrac{\partial^m P_n(\cos\theta)}{\partial(\cos\theta)^m}$, $P_n(\cos\theta)$ – полином Лежандра, а (n, m) – порядки мультиполя [12]. Отметим [19], что оператор D_n^m возникает из представления поля мультипольного источника, записанного следующим образом: $h_n^{(2)}(kr)P_n^m(\cos\theta)\exp(-jm\varphi) = D_n^m h_0^{(2)}(kR_{MM_0})$, где $h_0^{(2)}$ – сферическая функция Ханкеля. Тогда, как было установлено, главная часть сечения экстинкции может быть представлена в виде

$$\sigma_{\text{ext}} = -\mathrm{Re}\,[D_n^{m+}(\mathbf{E}_0^s(M)\cdot\boldsymbol{e})]_{M=M_0},$$

где D_n^{m+} – эрмитово-сопряжённый оператор по отношению к D_n^m. При этом рассеянное поле $\mathbf{E}_0^s$ является аналитической функцией всюду вне рассеивателя, поэтому взятие производных не представляет проблемы [16, с. 132]. В данном случае, основываясь на универсальной формуле для сечения экстинкции (13), можно обобщить полученный выше результат на случай возбуждения локального рассеивателя в присутствии прозрачной подложки произвольным мультиполем. В этом случае имеет место

Теорема 2. *В случае возбуждения локального рассеивателя, расположенного вблизи прозрачной подложки, мультиполем порядка* (n, m) *сечение экстинкции принимает вид*

$$C_{\text{ext}} = -\mathrm{Re}\,[D_n^{m+}(\mathbf{E}_0^s(M)\cdot\boldsymbol{e})]_{M=M_0} + C_i^{\text{mult}}, \tag{14}$$

где C_i^{mult} *– сечение излучения мультиполя в присутствии полупространства.*

Отметим, что именно это обстоятельство имелось ввиду под универсальностью формулы (13).

Замечание 2. В обоих случаях в формулировках (13), (14) точка M_0 в равной степени может находиться как в верхнем D_0, так и в нижнем D_1 полупространстве.

Заключение. Сформулируем основные результаты работы.

1. Для системы уравнений Максвелла с учётом эффекта нелокальности получено базовое соотношение для сечения экстинкции при возбуждении рассеивателя электрическим диполем в присутствии прозрачной подложки.

2. Получена универсальная формула, позволяющая определять сечение экстинкции, вычисляя рассеянное поле в одной единственной точке.

3. Проведено обобщение универсальной формулы на случай возбуждения мультиполем произвольного порядка, при этом мультиполь может располагаться как вблизи рассеивателя, так и внутри подложки.

4. Получена формула для расчёта квантового выхода флюоресценции, исключающая необходимость вычисления сечения поглощения для рассеивателя с эффектом нелокальности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adhikari S., Orrit M.* Progress and perspectives in single-molecule optical spectroscopy // J. Chem. Phys. 2022. V. 156. P. 160903.
2. *Ugwuoke L.C., Mančal T., Krüger T.P.J.* Plasmonic quantum yield enhancement of a single molecule near a nanoegg // J. Appl. Phys. 2020. V. 127. P. 203103.
3. *Sui N., Wang L., Yan T., et al.* Selective and sensitive biosensors based on metal-enhanced fluorescence // Sensors and Actuators. B. 2014. V. 202. P. 1148–1153.
4. *Liaw J-W., Chen H-C., Kuo M-K.* Comparison of Au and Ag nanoshells' metal-enhanced fluorescence // J. Quantitat. Spectr. Radiat. Trans. 2014. V. 146. P. 321–330.
5. *Гришина Н.В., Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Метод дискретных источников для анализа усиления флюоресценции в присутствии плазмонных структур // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2016. Т. 5. № 1. С. 131–139.
6. *Tserkezis C., Stefanou N., Wubs M., Mortensen N.* Molecular fluorescence enhancement in plasmonic environments: exploring the role of nonlocal effects // Nanoscale. 2016. V. 8. P. 17532–17541.
7. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Математическая модель процессов флюоресценции с учетом квантового эффекта нелокального экранирования // Мат. моделирование. 2019. Т. 31. № 5. С. 85–102.
8. *Newton R.G.* Optical theorem and beyond // Am. J. Phys. 1976. V. 44. № 7. P. 639–642.
9. *Berg M.J., Sorensen C.M., Chakrabarti A.* Extinction and the optical theorem. Part I. Single particles // J. Opt. Soc. Am. A. 2008. V. 25. № 7. P. 1504–1513.
10. *Еремин Ю.А.* Обобщение оптической теоремы на основе интегро-функциональных соотношений // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 9. С. 1168–1172.
11. *Small A., Fung J., Manoharan V.N.* Generalization of the optical theorem for light scattering from a particle at a planar interface // J. Opt. Soc. Am. A. 2013. V. 30. P. 2519–2525.
12. *Еремин Ю.А.* Обобщение оптической теоремы для мультиполя на основе интегральных преобразований // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 9. С. 1156–1161.
13. *Jerez-Hanckes C., Nédélec J.C.* Asymptotics for Helmholtz and Maxwell solutions in 3-D open waveguides // Commun. Computat. Phys. 2012. V. 11. № 2. P. 629–646.
14. *Mortensen N.A., Raza S., Wubs M., Søndergaard T., Bozhevolnyi S.I.* A generalized non-local optical response theory for plasmonic nanostructures // Nat. Commun. 2014. V. 5. P. 3809.
15. *Ma C., Zhang Y., Zou J.* Mathematical and numerical analysis of a nonlocal Drude model in nanoplasmonics // arXiv:1906.04790v1 [math.NA]. 2019.
16. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
17. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М., 2008.
18. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М., 1973.
19. *Devaney A.J., Wolf E.* Multipole expansions and plane wave representations of the electromagnetic field // J. Math. Phys. 1974. V. 15. P. 234–244.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 25.08.2022 г.
После доработки 16.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1702–1706

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 917.977

ОБ ОДНОЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ РАЗБРОСА ТРАЕКТОРИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УПРАВЛЯЕМОГО ОБЪЕКТА

© 2022 г. М. С. Никольский

Рассматривается динамический управляемый объект, находящийся под воздействием двух управлений. Первым управлением распоряжается минимизирующий игрок, оно является постоянным вектором, выбираемым из заданного множества. Второе управление является переменным вектором и имитирует воздействие на систему различных возмущений. Фиксируется терминальный функционал. Первый игрок стремится к минимизации целевого функционала, цели второго игрока не фиксируются, предполагается только, что управление второго игрока не известно первому игроку. В таких условиях для оценки возможностей первого игрока можно использовать минимаксный подход. Отметим, что рассматривается случай зависимых ограничений на управления. Получены эффективные достаточные условия, при которых минимакс целевого функционала определён корректно.

DOI: 10.31857/S0374064122120123, EDN: NDBQSJ

Введение. В статье рассматривается конфликтно управляемая динамическая система, описываемая традиционной для математической теории оптимального управления системой дифференциальных уравнений (см., например, [1, с. 16–23; 2, с. 31–39; 3, с. 8–12; 4]), в которой одно из двух управлений является постоянным вектором, выбираемым из фиксированного множества. Второе управление является переменным вектором и моделирует воздействие возмущений (например, природных возмущений), которые наперёд не известны. Сам процесс движения системы происходит из фиксированного начального состояния на отрезке времени $[0,T]$, где $T>0$ – фиксированная константа. Динамический процесс рассматривается с точки зрения игрока, выбирающего постоянное управление. Он стремится к минимизации заданного терминального функционала. Так как поведение возмущений считается неизвестным на промежутке $[0,T]$, то для оценки эффективности выбора управляющего субъекта естественно использовать минимаксный подход, часто используемый в теории исследования операций. В данной работе минимаксный подход применяется к терминальному функционалу, который в приложениях может быть проинтерпретирован, например, как характеристика разброса концов траекторий управляемой системы в момент $T>0$.

Отметим, что ограничения на управления предполагаются зависимыми, и это значительно усложняет исследование задачи. Зависимые ограничения на стратегии игроков для игровых процессов в статической форме рассматривались в работах Ю.Б. Гермейера [5], В.В. Фёдорова [6] и других авторов.

Цель настоящей статьи – получить эффективные достаточные условия, при которых гарантируется существование минимакса в рассматриваемых классах управлений. Такого рода условия важны для приложений.

Основная часть. Рассматривается нелинейный управляемый объект вида (ср. с [1, с. 16–23; 2, с. 31–39])

$$\dot{x}=f(x,u,v), \tag{1}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 1)$, $u\in P$, P – компакт из $\mathbb{R}^p$ $(p\geqslant 1)$, $v\in Q(u)$, $Q(u)$ – выпуклый компакт из $\mathbb{R}^q$ $(q\geqslant 1)$, причём многозначное отображение $Q(u)$ непрерывно по $u\in P$ в смысле метрики Хаусдорфа (см. [3, с. 57]). Символом $\mathbb{R}^k$ $(k\geqslant 1)$ будем обозначать k-мерное арифметическое евклидово пространство, элементами которого являются упорядоченные наборы из k действительных чисел, записываемых в виде столбцов, с обычными определениями операций над векторами, скалярного произведения векторов $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и длины вектора $|\cdot|$.

Предполагается, что выполнены следующие условия:

1) n-мерная функция $f(x,u,v)$ определена и непрерывна по совокупности переменных (x,u,v) на $\mathbb{R}^n \times P \times \hat{Q}$, где

$$\hat{Q} = \bigcup_{u\in P} Q(u); \tag{2}$$

2) для каждого непустого компакта $G \subset \mathbb{R}^n$ существует такая константа $\lambda(G) \geqslant 0$, что при $x', x'' \in G$, $u', u'' \in P$ и $v', v'' \in \hat{Q}$ справедливо неравенство

$$|f(x',u',v') - f(x'',u'',v'')| \leqslant \lambda(G)(|x'-x''| + |u'-u''| + |v'-v''|); \tag{3}$$

3) при $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$, $v \in \hat{Q}$ выполняется неравенство (ср. с [4]) вида

$$\langle x, f(x,u,v)\rangle \leqslant c(1+|x|^2), \tag{4}$$

где c – неотрицательная константа;

4) множество $f(x,u,Q(u))$ является выпуклым при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$.

Отметим, что в силу непрерывности многозначного отображения $Q(u)$ на компакте P множество $\hat{Q}$ (см. (2)) ограничено.

Для управляемого объекта (1) фиксировано начальное условие

$$x(0) = x_0, \tag{5}$$

где $x_0 \in \mathbb{R}^n$. В качестве допустимых управлений для управляемого объекта (1), (5) выступают пары: постоянный вектор $u \in P$ и измеримое по Лебегу управление $v(t) \in Q(u)$ при $t \in \in [0,T]$. Обозначим $\Delta = [0,T]$. В нашей управляемой модели управление $v(t)$ на отрезке Δ моделирует воздействие помех и возмущений, воздействующих на управляемый объект. Отметим, что из неравенства (4) в силу результатов статьи [4] для абсолютно непрерывного решения задачи Коши (1), (5) $x(t,u,v(\cdot))$, соответствующего допустимой паре $(u,v(\cdot))$, при $t \in \Delta$ выполняется априорная оценка

$$|x(t,u,v(\cdot))| \leqslant e^{cT}\sqrt{1+|x_0|^2}, \tag{6}$$

причём решение $x(t,u,v(\cdot))$ определено и единственно на всём отрезке Δ.

Условимся оценивать качество управления $u \in P$ с помощью фиксированной непрерывной на пространстве $\mathbb{R}^n$ функции $\varphi(x)$ функционалом вида

$$g(u) = \max_{v(\cdot)} \varphi(x(T,u,v(\cdot))), \tag{7}$$

где $v(\cdot)$ означает произвольную измеримую функцию $v(t) \in Q(u)$, $t \in \Delta$. Отметим, что существование максимума в формуле (7) следует из непрерывности $\varphi(x)$ и компактности множества достижимости $D(T,x_0,u)$ управляемого объекта (1), (5) при фиксированном $u \in \in P$. Компактность множества $D(T,x_0,u)$ можно обосновать с помощью результатов работ [2, 4], учитывая постулированную выпуклость множества $f(x,u,Q(u))$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$.

Касаясь физической интерпретации изучаемой модели конфликтного управления, отметим, что в теории исследования операций (см., например, [5, 6]), в частности, изучаются модели взаимодействия двух игроков со связанными ограничениями на множество стратегий. В таких игровых моделях первый игрок – Центр (минимизирующий игрок) объявляет свой выбор стратегии второму игроку – Исполнителю (максимизирующему игроку). Второй игрок, зная выбор первого игрока, получает информацию о своих возможностях и делает выбор своей стратегии. В такой игровой модели рамки выбора стратегии вторым игроком могут существенно зависеть от выбора стратегии первого игрока. В изучаемой нами модели таким первым игроком является субъект, управляющий системой (1), (5) (он выбирает вектор $u \in P$), а вторым игроком является игрок, выбирающий измеримое управление $v(t) \in Q(u)$, $t \in \Delta$. Второго игрока иногда называют Природой, поведение которой является непредсказуемым заранее на отрезке Δ.

Отметим, что для приложений представляет интерес, например, функция $\varphi(x) = |x - \xi|$, где $\xi \in \mathbb{R}^n$ – фиксированный целевой вектор. С помощью этой функции можно оценить разброс векторов множества достижимости $D(T, x_0, u)$ относительно целевого вектора ξ. В более общем случае можно рассмотреть функцию расстояния $\varphi(x) = \operatorname{dist}(x, M)$, где M – компакт из $\mathbb{R}^n$, и оценить отклонение точек $D(T, x_0, u)$ от терминального множества M минимаксным образом.

Обоснуем существование минимума функционала $g(u)$ (см. (7)) на компакте P или, иначе, минимакса функционала $\varphi(x(T, u, v(\cdot)))$ на допустимых парах управлений. Для этого рассмотрим минимизирующую последовательность $u_k \in P$, $k \in \mathbb{N}$, для которой справедливо предельное равенство

$$\lim_{k\to\infty} g(u_k) = \gamma, \tag{8}$$

где через γ обозначен инфимум функционала $g(u)$ на P. Так как P – компакт, то (проведя, если надо, перенумерацию) можно считать, что при $k \to \infty$

$$u_k \to u_*, \tag{9}$$

где u_* – некоторый вектор из P. Докажем, что

$$g(u_*) = \gamma. \tag{10}$$

Поскольку неравенство $\gamma \leqslant g(u_*)$ следует из определения величины γ, то требуется доказать лишь неравенство $g(u_*) \leqslant \gamma$. Поэтому согласно (7) для доказательства равенства (10) достаточно обосновать неравенство

$$\varphi(x(T, u_*, \tilde{v}(\cdot))) \leqslant \gamma \tag{11}$$

для произвольной измеримой функции $\tilde{v}(t) \in Q(u_*)$, $t \in \Delta$. Далее фиксируем произвольное измеримое управление $\tilde{v}(t) \in Q(u_*)$, $t \in \Delta$. Используя определение непрерывности многозначного отображения (см. [3, с. 57]), можно утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для $u \in P$ при $|u - u_*| \leqslant \delta$ выполняется включение

$$Q(u_*) \subset Q(u) + S_\varepsilon, \tag{12}$$

где $S_\varepsilon = \{v \in \mathbb{R}^q \colon |v| \leqslant \varepsilon\}$, знак “ + ” означает алгебраическое сложение множеств. Для векторов $\omega \in \mathbb{R}^q$, $u \in P$ определим метрическую проекцию $\operatorname{Pr}(\omega, u)$ вектора $\omega \in \mathbb{R}^q$ на выпуклый компакт $Q(u)$ как вектор $\xi \in Q(u)$, для которого имеет место соотношение

$$|\omega - \xi| = \min_{\eta \in Q(u)} |\omega - \eta|.$$

С помощью выпуклого анализа обосновывается, что вектор $\operatorname{Pr}(\omega, u)$ при всех $\omega \in \mathbb{R}^q$, $u \in$ $\in P$ определён однозначным образом, причём при фиксированном $u \in P$ векторная функция $\operatorname{Pr}(\omega, u)$ непрерывна по ω на пространстве $\mathbb{R}^q$.

Рассмотрим последовательность функций

$$v_k(t) = \operatorname{Pr}(\tilde{v}(t), u_k), \tag{13}$$

где $k \in \mathbb{N}$, $t \in \Delta$. Используя упомянутые свойства проекции $\operatorname{Pr}(\omega, u)$, можно обосновать, что при $t \in \Delta$ функции $v_k(t)$ (см. (13)) измеримы по Лебегу, причём

$$v_k(t) \in Q(u_k).$$

Обозначим при $t \in \Delta$, $k \in \mathbb{N}$

$$x_*(t) = x(t, u_*, \tilde{v}(\cdot)), \tag{14}$$

$$x_k(t) = x(t, u_k, v_k(\cdot)). \tag{15}$$

Для абсолютно непрерывных функций $x_*(t)$, $x_k(t)$ при $t \in \Delta$, $k \in \mathbb{N}$ в силу (1), (5), (14), (15) имеем равенства

$$x_*(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(x_*(s), u_*, \tilde{v}(s))\, ds, \tag{16}$$

$$x_k(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(x_k(s), u_k, v_k(s))\, ds, \tag{17}$$

здесь интегралы понимаются в смысле Лебега. Введём обозначение (см. (6))

$$G_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leqslant e^{cT}\sqrt{1 + |x_0|^2}\}. \tag{18}$$

Из определения $x_*(t)$, $x_k(t)$ при $t \in \Delta$, $k \in \mathbb{N}$ и соотношений (6), (18) получаем включения

$$x_*(t) \in G_1, \quad x_k(t) \in G_1.$$

Обозначим через β константу $\lambda(G_1)$ (см. неравенство (3)). Из соотношений (3), (16)–(18) и определения константы β при $t \in \Delta$, $k \in \mathbb{N}$ имеем неравенства

$$\delta_k(t) \leqslant \int\limits_0^t \beta(\delta_k(s) + |u_k - u_*| + |v_k(s) - v_*(s)|)\, ds, \tag{19}$$

где

$$\delta_k(t) = |x_k(t) - x_*(t)|, \tag{20}$$

интегралы понимаются в смысле Лебега. Используя известную теорему сравнения (см. в [7] теорему 1.6.1), с помощью (19), (20) получаем при $k \in \mathbb{N}$ неравенства

$$|x_k(T) - x_*(T)| \leqslant \beta e^{\beta T} \int\limits_0^T (|u_k - u_*| + |v_k(s) - \tilde{v}(s)|)\, ds. \tag{21}$$

Обозначим для произвольного непустого компакта $M \subset \mathbb{R}^q$ и произвольного $z \in \mathbb{R}^q$ величину

$$\operatorname{dist}(z, M) = \min_{\eta \in M} |z - \eta|. \tag{22}$$

По определению метрической проекции для функций $v_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, $t \in \Delta$ (см. (13)) выполняется соотношение

$$\operatorname{dist}(\tilde{v}(t), Q(u_k)) = |\tilde{v}(t) - v_k(t)|. \tag{23}$$

Далее, обозначим при $k \in \mathbb{N}$

$$h_k = \sup_{t \in \Delta} |\tilde{v}(t) - v_k(t)|. \tag{24}$$

Используя сходимость последовательности векторов u_k к вектору $u_* \in P$ и соотношения (9), (12), (13), (23), можно обосновать, что (см. (24))

$$h_k \to 0 \tag{25}$$

при $k \to \infty$. Из формул (21)–(24) при $k \in \mathbb{N}$ получаем неравенства

$$|x_k(T) - x_*(T)| \leqslant \beta T e^{\beta T}(|u_k - u_*| + h_k),$$

из которых вытекает (см. (9), (25)), что при $k \to \infty$

$$x_k(T) \to x_*(T). \tag{26}$$

Отметим, что из формулы (15) и определения величин $g(u_k)$ (см. (7)) при $k \in \mathbb{N}$ следуют при $k \in \mathbb{N}$ оценки

$$\varphi(x_k(T)) \leqslant g(u_k). \tag{27}$$

Из соотношений (8), (26), (27) и непрерывности функции $\varphi(x)$ после перехода к пределу в (27) при $k \to \infty$ получаем, что

$$\varphi(x_*(T)) \leqslant \gamma.$$

Тем самым неравенство (11) обосновано.

На основании рассуждений выше доказана

Теорема. *Функционал $g(u)$ (см. (7)) достигает своего минимума на компакте P. Следовательно, величина*

$$\min_{u \in P} \max_{v(\cdot)} \varphi(x(T, u, v(\cdot))),$$

где $v(\cdot)$ означает произвольную измеримую функцию $v(t) \in Q(u)$, $t \in \Delta$, определена корректно.

Заключение. В статье получены эффективные достаточные условия, при которых в рассматриваемом динамическом игровом процессе двух игроков с зависимыми ограничениями на управления минимакс целевого функционала определён корректно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., 1983.
2. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М., 1972.
3. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление. Линейная теория. М., 2001.
4. *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах оптимального регулирования // Вестн. Московского ун-та. Сер. 1. Математика и механика. 1959. № 2. С. 25–38.
5. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М., 1976.
6. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М., 1979.
7. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А.А.* Устойчивость движения: метод сравнения. Киев, 1991.

Математический институт
имени В.А. Стеклова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 19.11.2021 г.
После доработки 10.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1707–1711

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.9

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

© 2022 г. **В. А. Садовничий, Я. Т. Султанаев, Н. Ф. Валеев**

Рассматривается оптимизационная обратная спектральная задача: для заданного матричного потенциала $Q_0(x)$ требуется найти ближайшую к нему матричную функцию $\hat{Q}(x)$ такую, чтобы первое собственное значение матричного оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом $\hat{Q}(x)$ совпадало с заданным значением $\lambda_1^* \in \mathbb{R}$. Основной результат работы заключается в установлении нового типа связи между указанной обратной спектральной задачей и системами нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, известными в математической физике как системы нелинейных уравнений Шрёдингера.

DOI: 10.31857/S0374064122120135, EDN: NDBWNF

Введение. Пусть $H = L_n^2(0,1)$ – гильбертово пространство всех комплекснозначных вектор-функций со скалярным произведением $(\vec{y},\vec{v}) = \int_0^1 \sum_{k=1}^n y_k(x)\overline{v}_k(x)\,dx.$ $\mathcal{M}_n^2(0,1)$ – гильбертово пространство всех матриц размера $n\times n$ с элементами – функциями из $L^2(0,1)$ с нормой $\|Q\|^2_{\mathcal{M}_n^2} = \int_0^1 \operatorname{tr}(Q^*(x)Q(x))\,dx.$ В пространстве $L_n^2(0,1)$ рассматривается краевая задача Штурма–Лиувилля, порождённая на интервале $0<x<1$ системой уравнений

$$l(\vec{y}) \equiv -\frac{d^2}{dx^2}\vec{y}(x) + Q(x)\vec{y}(x) = \lambda\vec{y}(x) \tag{1}$$

и граничными условиями Дирихле

$$\vec{y}(0) = \vec{y}(1) = 0, \tag{2}$$

где $Q(x)\in\mathcal{M}_n^2(0,1)$ – вещественная эрмитова матрица, λ – спектральный параметр.

Хорошо известно, что если $Q_{k,j}(x)\in L^2(0,1),$ то дифференциальное выражение (1) вместе с граничными условиями (2) определяет самосопряжённый дифференциальный оператор в гильбертовом пространстве $L_n^2(0,1),$ который будем обозначать $\mathcal{L}[Q],$ а область его определения – $D(\mathcal{L}[Q]).$

Спектр оператора $\mathcal{L}[Q]$ является дискретным и состоит из последовательности собственных значений $\sigma(\mathcal{L}[Q]) := \{\lambda_i(Q)\}_{i=1}^\infty,$ а поскольку $Q(x)$ – эрмитова матрица, эти собственные значения можно перенумеровать в порядке возрастания: $\lambda_1(Q)\leqslant\lambda_2(Q)\leqslant\ldots$

Основной целью работы является исследование оптимизационной обратной спектральной задачи для оператора $\mathcal{L}[Q]$ (см. [1–3]). При этом в качестве спектральных данных будем рассматривать первое собственное значение оператора $\mathcal{L}[Q],$ которое можно определить следующим образом:

$$\lambda_1(Q) := \inf_{\substack{\vec{v}\in D(\mathcal{L}[Q])\\ \|\vec{v}\|=1}} \{(\vec{v}\,',\vec{v}\,') + (Q\vec{v},\vec{v})\}. \tag{3}$$

Рассматриваемая обратная спектральная задача относится к задачам с неполными спектральными данными. Такие задачи имеют бесконечное число решений и некорректны. Чтобы преодолеть эти трудности, можно предположить, что заранее известна некоторая информация о потенциале $Q,$ например, что потенциал Q имеет наиболее близкую “форму” к $Q_0(x).$ Такой взгляд на обратные спектральные задачи, в известном смысле, является более естественным. Одной из причин тому является недоступность для измерения полной системы спектральных данных (для задач диагностики или идентификации объектов), а в задачах построения линейной динамической системы с заданными частотно-резонансными свойствами, наиболее близкой к "эталонной" системе, нет необходимости рассматривать весь диапазон частотно-резонансных характеристик. Эти замечания приводят к исследованию различных содержательных постановок обратных спектральных задач с неполными данными (см., например, работы [4–6]).

Разнообразные постановки обратных спектральных задач имеют довольно много естественных источников возникновения: математическая физика, квантовая механика, оптика, механика, инженерные науки, а также различные разделы самой математики [4, 5, 7]. Отдельный интерес представляет связь оптимизационных спектральных задач с нелинейными операторами математической физики (см., например, [2, 3] и [8, с. 278–290]) с различными экстремальными свойствами собственных значений (см. [9, 10] и содержащуюся в них библиографию). Несмотря на очевидную актуальность, многие из этих задач остаются нерешёнными.

В данной работе исследуется оптимизационная обратная спектральная задача для векторного оператора Штурма–Лиувилля:

Задача $(\boldsymbol{\mathcal{P}})$. Для заданного вещественного числа λ_1^* и матричного эрмитова потенциала $Q_0(x)\in\mathcal{M}_n^2(0,1)$ требуется найти потенциал $\hat{Q}(x)\in\mathcal{M}_n^2(0,1)$ такой, что

$$\|Q_0-\hat{Q}\|^2_{L^2}=\inf_{Q\in\mathcal{M}_n^2(0,1)}\{\|Q_0-Q\|^2_{\mathcal{M}_n^2(0,1)}:\lambda_1(\hat{Q})=\lambda_1^*\}.$$

1. Существование и единственность решения. Введём в рассмотрение множество

$$M(\lambda):=\{Q\in\mathcal{M}_n^2(0,1):\ \lambda\leqslant\lambda_1(Q)\}.$$

Лемма. *Множество $M(\lambda_1^*)\subset\mathcal{M}_n(0,1)$ является выпуклым.*

Доказательство. Заметим, что множество $M(\lambda_1^*)$ – не пустое. Рассмотрим произвольные Q_1, $Q_2\in M(\lambda_1^*)$ и $\alpha\in[0,1]$. Из формулы (3) имеем

$$\lambda_1(\alpha Q_1+(1-\alpha)Q_2)=\inf_{\substack{\vec{v}\in D(\mathcal{L})\\ \|\vec{v}\|=1}}\{(\vec{v'},\vec{v'})+((\alpha Q_1+(1-\alpha)Q_2)\vec{v},\vec{v})\}=$$

$$=(\vec{v'_*},\vec{v'_*})+((\alpha Q_1+(1-\alpha)Q_2)\vec{v}_*,\vec{v}_*)=\alpha((\vec{v'_*},\vec{v'_*})+(Q_1\vec{v}_*,\vec{v}_*))+(1+\alpha)((\vec{v'_*},\vec{v'_*})+(Q_2\vec{v}_*,\vec{v}_*))\geqslant$$

$$\geqslant\alpha\inf_{\substack{\vec{v}\in D(\mathcal{L})\\ \|\vec{v}\|=1}}\{(\vec{v'},\vec{v'})+(Q_1\vec{v},\vec{v})\}+(1-\alpha)\inf_{\substack{\vec{v}\in D(\mathcal{L})\\ \|\vec{v}\|=1}}\{(\vec{v'},\vec{v'})+(Q_2\vec{v},\vec{v})\}=\alpha\lambda_1(Q_1)+(1-\alpha)\lambda_1(Q_2).$$

Из полученного неравенства и вытекает выпуклость множества $M(\lambda_1^*)$.

Теперь докажем существование и единственность решения задачи $(\mathcal{P})$.

Теорема 1. *Пусть справедливо неравенство $\lambda_1(Q_0)\leqslant\lambda_1^*$. Тогда оптимизационная обратная спектральная задача $(\mathcal{P})$ имеет единственное решение.*

Доказательство. Если $\lambda_1(Q_0)=\lambda_1^*$, то существование и единственность решения рассматриваемой задачи очевидны. Далее будем считать, что $\lambda_1(Q_0)<\lambda_1^*$.

На множестве $M(\lambda_1^*)$ рассмотрим следующую задачу о минимизации:

$$\check{P}=\min\{\rho(Q)=\|Q_0-Q\|^2_{\mathcal{M}_n}:\ Q\in M(\lambda_1^*)\}.\tag{4}$$

Коэрцитивность функционала расстояния $\rho(\cdot):\mathcal{M}_n(0,1)\to\mathbb{R}$ влечёт за собой существование минимизатора $\hat{Q}\in M(\lambda_1^*)$ задачи (4). Из строгого неравенства $\lambda_1(Q_0)<\lambda_1^*$ следует, что $\hat{Q}\neq Q_0$. Выпуклость множества $M(\lambda_1^*)$ и строгая выпуклость функционала расстояния $\rho(Q)$ обеспечивают единственность $\hat{Q}$ и $\hat{Q}\in\partial M(\lambda_1^*)=\{Q\in M(\lambda_1^*):\ \lambda_1(Q)=\lambda_1^*\}$. Тем самым доказаны существование и единственность решения задачи $(\mathcal{P})$.

Пусть $\hat{Q}\in\partial M(\lambda_1^*)$ – решение задачи $(\mathcal{P})$. Тогда, очевидно, $\lambda_1(\hat{Q})=\lambda_1^*$ – первое собственное значение оператора $\mathcal{L}[\hat{Q}]$, т.е.

$$-\frac{d^2}{dx^2}\vec{u}(x)+\hat{Q}(x)\vec{u}(x)=\lambda_1^*\vec{u}(x),\quad \vec{u}(0)=\vec{u}(1)=0.$$

Заметим, что в общем случае первое собственное значение $\lambda_1(\hat{Q})$ может оказаться кратным.

Теорема 2. *Пусть выполняется неравенство* $\lambda_1(Q_0) \leqslant \lambda_1^*$, *а* $\hat{Q} \in \partial M(\lambda_1^*)$ *– решение задачи* $(\mathcal{P})$. *Если* $\lambda_1(\hat{Q})$ *– собственное значение кратности* p, *то справедливо представление*

$$\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \sum_{k,j=1}^{p} \alpha_{k,j} \vec{u}_k(x) \bigotimes \vec{u}_j(x), \tag{5}$$

где $\{\vec{u}_k(x)\}_{k=1}^p$ *– ортонормированная система собственных функций оператора* $\mathcal{L}[\hat{Q}]$, *соответствующая первому собственному значению, равному* λ_1^*, $\mathcal{A} = (\alpha_{k,j})_{k,j=1}^p$ *– эрмитова матрица.* Здесь символ $\bigotimes$ обозначает тензорное произведение в векторном пространстве E_n.

Доказательство. Пусть $\hat{Q}$ – решение задачи $(\mathcal{P})$, $\lambda_1(\hat{Q}) = \lambda_1$ – собственное значение кратности p, $\{\vec{u}_k(x,t)\}_{k=1}^p$ – соответствующая система ортонормированных собственных функций. Покажем, что для любой матричнозначной функции $\delta_0(x) \in \mathcal{M}_n(0,1)$, удовлетворяющей равенству $(\delta_0\vec{u}_k, \vec{u}_j) = 0$, $k,j = \overline{1,p}$, можно построить аналитическую в окрестности точки $t=0$ матричнозначную функцию вида

$$\delta(t) := \delta_0(x)t + D(x,t), \quad \|D(x,t)\|_{\mathcal{M}_n} = O(t^2), \tag{6}$$

такую, что в достаточно малой окрестности $t=0$ будет выполняться тождество

$$\lambda_1(\hat{Q} + \delta(t)) \equiv \lambda_1^*. \tag{7}$$

Заметим, что оператор

$$\mathcal{L}[\hat{Q} + \delta_0(x)t] := -\frac{d^2}{dx^2} + \hat{Q}(x) + \delta_0(x)t$$

образует аналитическое семейство операторов (см. [11, с. 470]). Следовательно, собственные значения и собственные функции этого оператора будут аналитическими функциями переменной t в некоторой окрестности нуля. Тогда существуют аналитические в окрестности $t=0$ функции $\{\vec{u}_k(x,t)\}_{k=1}^n$ и $\{\mu_k(t)\}_{k=1}^n$, удовлетворяющие условиям

$$\mathcal{L}[\hat{Q} + \delta_0(x)t]\vec{u}_k = (\lambda_1^* + \mu_k(t))\vec{u}_k, \quad \vec{u}_k(0,t) = 0, \quad \vec{u}_k'(0,t) = \vec{e}_k, \quad \mu_k(0) = 0, \quad k = \overline{1,n}.$$

Учитывая, что собственное значение $\lambda_1(\hat{Q})$ имеет кратность p, дополнительно можно считать, что $\{\mu_k(t)\}_{k=1}^p$ – собственные значения, а $\vec{u}_k(1,t) = 0$, $k = \overline{1,p}$, – соответствующие собственные функции.

Из функций $\{\mu_k(t)\}_{k=1}^n$ и соответствующих вектор-столбцов $\{\vec{u}_k(x,t)\}_{k=1}^n$ составим матрицы $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\{\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t)\}$ и $U(x,t) = [\vec{u}_1(x,t), \ldots, \vec{u}_n(x,t)]$.

Заметим, что эти матрицы удовлетворяют задаче Коши

$$-U'' + (\hat{Q} + t\delta_0 - \lambda_1^* I)U = U\Lambda(t), \quad U(0) = 0, \quad U'(0) = I,$$

где I – единичная матрица.

Таким образом, матричнозначная функция $D(x,t) = U(x,t)\Lambda(t)U^{-1}(x,t)$, удовлетворяющая представлению (6) с условием (7), построена.

Обозначим через $P : \mathcal{M}_n^2(0,1) \mapsto \mathcal{M}_n^2(0,1)$ самосопряжённый проектор на линейную оболочку $\mathcal{M}^0 \subset \mathcal{M}_n^2(0,1)$ матричнозначных функций $\vec{u}_k(x) \bigotimes \vec{u}_j(x)$, где $k,j = \overline{1,p}$.

Пусть $\delta(x)$ – произвольный элемент гильбертова пространства $\mathcal{M}_n(0,1)$. Положим $\delta_0(x) = (I-P)\delta(x)$. Легко проверить, что справедливо равенство

$$(\delta_0\vec{u}_k, \vec{u}_j)_{\mathcal{L}_n^2(0,1)} = ((I-P)\delta, \vec{u}_k \bigotimes \vec{u}_j)_{\mathcal{M}_n^2(0,1)} = 0$$

для всех $k,j = \overline{1,p}$.

Определим для $\delta(x)$ матричнозначную функцию $\Delta(t) = t\delta_0(x) + D(x,t)$, удовлетворяющую (6), (7). Поскольку в точке $\hat{Q} \in \partial M(\lambda_1^*)$ достигается строгий минимум задачи

$$\check{P} = \min\{\rho(Q) = \|Q_0 - Q\|_{\mathcal{M}_n}^2 : Q \in M(\lambda_1^*)\},$$

то для матричнозначной функции $\delta(t)$ в некоторой окрестности $t = 0$ справедливо неравенство

$$\|\hat{Q} + \delta(t) - Q_0\|^2_{\mathcal{M}_n} - \|\hat{Q} - Q_0\|^2_{\mathcal{M}_n} = 2(\hat{Q} - Q_0, \delta(t))_{\mathcal{M}_n} + (\delta(t), \delta(t))_{\mathcal{M}_n} > 0.$$

Согласно (6) имеем $\delta(x,t) = t\delta_0(x) + O(t^2)$. Так как $\delta_0(x) = (I - P)\delta(x)$, то это неравенство можно записать в виде

$$t(\hat{Q} - Q_0, (I-P)\delta)_{\mathcal{M}_n} + O(t^2) > 0,$$

и оно выполнено при всех достаточно малых вещественных t, следовательно,

$$(\hat{Q} - Q_0, (I-P)\delta)_{\mathcal{M}_n} = 0.$$

Поскольку P – самосопряжённый проектор, то для всех $\delta(x)$ из пространства $\mathcal{M}_n(0,1)$ справедливо тождество $(\hat{Q} - Q_0, (I-P)\delta)_{\mathcal{M}_n} = ((I-P)(\hat{Q} - Q_0), \delta)_{\mathcal{M}_n} = 0$. Отсюда имеем равенства $(I-P)(\hat{Q} - Q_0) = 0$ и $\hat{Q} = Q_0 + P(\hat{Q} - Q_0)$. Для получения представления (5) заметим, что $P(\hat{Q} - Q_0) \in \mathcal{M}^0$, следовательно, найдутся числа $\alpha_{k,j}$ такие, что $\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \sum_{k,j=1}^p \alpha_{k,j} \vec{u}_k(x) \bigotimes \vec{u}_j(x)$.

Далее заметим, что $Q_0 = Q_0^*$, а $\hat{Q}$ по построению – самосопряжённая матрица, следовательно, $\sum_{k,j=1}^p \alpha_{k,j} \vec{u}_k(x) \bigotimes \vec{u}_j(x)$ тоже самосопряжённая. Тогда из соотношения

$$(\vec{u}_k(x) \bigotimes \vec{u}_j(x))^* = \vec{u}_j(x) \bigotimes \vec{u}_k(x)$$

следует самосопряжённость матрицы $\mathcal{A} = (\alpha_{k,j})_{k,j=1}^p$. Теорема доказана.

В случае, когда собственное значение $\lambda_1(\hat{Q})$ простое, формула (5) примет вид

$$\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \alpha \vec{u}(x) \bigotimes \vec{u}(x),$$

где $\vec{u}(x)$ – соответствующая собственная функция. При этом справедливо обратное к теореме 2 утверждение.

Теорема 3. *Пусть краевая задача*

$$-\frac{d^2}{dx^2}\vec{v} + (Q_0(x) + \beta \vec{v} \bigotimes \vec{v})\vec{v} = \lambda_1^* \vec{v}, \quad \vec{v}(0) = \vec{v}(1) = 0$$

имеет решение $\vec{v}(x)$ *такое, что* λ_1^* *является первым простым собственным значением оператора* $\mathcal{L}[Q_0(x) + \beta \vec{v} \bigotimes \vec{v}]$. *Тогда матричный потенциал* $\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \beta \vec{v} \bigotimes \vec{v}$ *является решением задачи* $(\mathcal{P})$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы, тогда $\hat{Q} \in \partial M(\lambda_1^*)$. Представим произвольный элемент $Q \in M(\lambda_1^*)$ в виде $Q = \hat{Q} + \delta$, тогда при любом $0 \leqslant t \leqslant 1$ в силу выпуклости множества $M(\lambda_1^*)$ имеем $\hat{Q} + t\delta \in M(\lambda_1^*)$. При этом $\lambda_1(\hat{Q} + t\delta) \geqslant \lambda_1^* = \lambda_1(\hat{Q})$ при всех $0 \leqslant t \leqslant 1$, откуда следует, что $\lambda_1(\hat{Q} + t\delta) - \lambda_1(\hat{Q}) \geqslant 0$ и $(\lambda_1(\hat{Q} + t\delta) - \lambda_1(\hat{Q}))/t \geqslant 0$. В последнем неравенстве перейдём к пределу $t \to 0+$ и получим

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{d\lambda_1(\hat{Q} + t\delta)}{dt} = (\delta \vec{v}, \vec{v}) \geqslant 0. \tag{8}$$

Теперь, положив $\delta = Q - \hat{Q}$ для любого $Q \in M(\lambda_1^*)$, имеем

$$\|Q - Q_0\|^2_{\mathcal{M}_n} = \|\hat{Q} - Q_0 + \delta\|^2_{\mathcal{M}_n} = \|\hat{Q} - Q_0\|^2_{\mathcal{M}_n} + 2(\hat{Q} - Q_0, \delta)_{\mathcal{M}_n} + (\delta, \delta)_{\mathcal{M}_n}.$$

Для потенциала соотношения $\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \beta \vec{v} \bigotimes \vec{v}$ в силу неравенства (8) выполняются соотношения

$$(\hat{Q} - Q_0, \delta)_{\mathcal{M}_n} = (\beta \vec{v} \bigotimes \vec{v}, \delta)_{\mathcal{M}_n} = \beta(\vec{v}, \delta \vec{v})_{L_n^2} \geqslant 0.$$

Отсюда получаем, что для любого $Q \in M(\lambda_1^*)$ и $Q \neq \hat{Q}$ справедливо неравенство

$$\|Q - Q_0\|^2_{\mathcal{M}_n} > \|\hat{Q} - Q_0\|^2_{\mathcal{M}_n}.$$

Таким образом, утверждение теоремы доказано.

2. Пример. В качестве примера рассмотрим задачу $(\mathcal{P})$ в пространстве $H = L_2^2(0,1)$ для матричного потенциала $Q_0(x) = \begin{bmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{12}(x) & q_{22}(x) \end{bmatrix}$. Согласно теореме 1 задача $(\mathcal{P})$ имеет единственное решение $\hat{Q}$. При этом если первое собственное значение оператора $\mathcal{L}[\hat{Q}]$ простое, то $\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \alpha\vec{u} \bigotimes \vec{u}$, $\|\vec{u}\| = 1$, и

$$\mathcal{L}[\hat{Q}]\vec{u} = -\vec{u}'' + (Q_0(x) + \alpha\vec{u} \bigotimes \vec{u})\vec{u} = \lambda_1^*\vec{u}, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}(1) = 0, \tag{9}$$

где λ_1^* – первое собственное значение оператора $\mathcal{L}[\hat{Q}]$.

Краевую задачу (9) можно преобразовать к известной в математической физике системе нелинейных уравнений Шрёдингера вида [8, с. 285–286]

$$\begin{gathered} -u_1''(x) + (q_{11}(x) + \alpha(u_1^2(x) + u_2^2(x)))u_1(x) + q_{12}(x)u_2(x) = \lambda_1^* u_1(x), \\ -u_2''(x) + (q_{22}(x) + \alpha(u_1^2(x) + u_2^2(x)))u_2(x) + q_{12}(x)u_1(x) = \lambda_1^* u_2(x), \\ u_k(0) = u_k(1) = 0, \quad k = 1, 2. \end{gathered}$$

Исследование Садовничего В.А. и Султанаева Я.Т. выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение 075-15-2019-1621), исследование Валеева Н.Ф. выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00580).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Валеев Н.Ф., Ильясов Я.Ш.* Об обратной оптимизационной спектральной проблеме и соответствующей нелинейной краевой задаче // Мат. заметки. 2018. Т. 104. № 4. С. 621–625.
2. *Ilyasov Y.Sh., Valeev N.F.* On nonlinear boundary value problem corresponding to N-dimensional inverse spectral problem // J. Differ. Equat. 2019. V. 266. № 8. P. 4533–4543.
3. *Ilyasov Y., Valeev N.* Recovery of the nearest potential field from the m observed eigenvalues // Physica D: Nonlin. Phenomena. 2021. V. 426. DOI: 10.1016/j.physd.2021.132985.
4. *Chu M., Golub G.H.* Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications. V. 13. Oxford, 2005.
5. *Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф.* Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения // Докл. РАН. 2009. Т. 426. № 4. С. 457–460.
6. *Валеев Н.Ф.* Регулярные решения многопараметрической обратной спектральной задачи // Мат. заметки. 2009. Т. 85. № 6. P. 940–943.
7. *Юрко В.А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов, 2001.
8. *Kivshar Y.S., Agrawal G.P.* Optical Solitons: from Fibers to Photonic Crystals. New York, 2003.
9. *Егоров Ю.В., Кондратьев В.А.* Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51. № 3. С. 439–508.
10. *Wei Q., Meng G., Zhang M.* Extremal values of eigenvalues of Sturm–Liouville operators with potentials in L1 balls // J. Differ. Equat. 2009. V. 247. № 2. P. 364–400.
11. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Башкирский государственный педагогический университет
имени М. Акмуллы, г. Уфа,
Башкирский государственный университет, г. Уфа,
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН

Поступила в редакцию 16.09.2022 г.
После доработки 16.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1712–1715

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956+517.984.5

ФОРМУЛА СЛЕДА ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА КВАДРАТЕ

© 2022 г. З. Ю. Фазуллин

Получена классическая формула следа Гельфанда–Левитана с вычетом первой поправки теории возмущений для оператора Лапласа на квадрате, возмущённого оператором умножения на функцию специального вида. Выдвинута гипотеза о формуле регуляризованного следа в общей ситуации.

DOI: 10.31857/S0374064122120147, EDN: NDFAJH

Рассмотрим оператор $L_0u = -\Delta u$ с краевыми условиями Дирихле в пространстве $L^2(K)$, где $K = \{(x,y):\ 0 \leqslant x, y \leqslant \pi\}$. Хорошо известно, что спектр оператора L_0 состоит из собственных чисел $\lambda_{km} = k^2 + m^2$, $k, m = 1, 2, \ldots,$ и $f_{km}(x,y) = (2/\pi)\sin(kx)\sin(my)$ – соответствующие им ортонормированные собственные функции. Пусть V – оператор умножения на ограниченную измеримую функцию $v(x,y)$, действующий в $L^2(K)$, и $L = L_0 + V$ – возмущённый оператор с граничными условиями Дирихле на множестве K.

В работах [1–3] для задачи Дирихле оператора $L = L_0^s + V$, $s > 1$, было доказано, что существует подпоследовательность $\{n_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такая, что выполняется равенство

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{k^2+m^2\leqslant n_l} [\mu_{km} - \lambda_{km}^s - (Vf_{km}, f_{km})] = 0. \tag{1}$$

Отметим, что справедливость тождества (1), в общем случае, для произвольных ограниченных возмущений самосопряжённого оператора L_0 с дискретным спектром имеет место, если $N(t, L_0) = \overline{o}(t)$, $t \to \infty$ (см. [2]).

Согласно хорошо известной асимптотической формуле Вейля при $s > 1$

$$N(t, L_0^s) = \overline{o}(t), \quad t \to \infty,$$

при $s = 1$ имеем

$$N(t, L_0) = \frac{\pi}{4}t + \overline{o}(t), \quad t \to \infty.$$

Следовательно, в нашем случае, т.е. при $s = 1$, ожидать того, что правая часть в (1) равна нулю, не приходится. Например, для оператора Лапласа–Бельтрами L_0 на двумерной сфере S^2 $(N(t, L_0) = t + o(t),\ t \to \infty)$, возмущённого оператором умножения на функцию, правая часть в (1) отлична от нуля (см. работы [4–8]).

В обзорной статье [9, с. 146] в разделе “Некоторые нерешённые задачи” подчеркивается, что “конкретный “спортивный” интерес давно вызывает формула первого регуляризованного следа для оператора Лапласа на квадрате”. Трудности исследования этой задачи прежде всего вызваны сложной структурой собственных чисел $\lambda_{km} = k^2 + m^2$: нет формулы упорядочения λ_{km} по росту через один индекс: $\lambda_n < \lambda_{n+1}$, не известны (нам) асимптотика кратностей λ_n и оценка снизу наибольшей лакуны в спектре. Это, в свою очередь, усложняет изучение асимптотики второй поправки теории возмущений, составляющей основу метода доказательства разработанной нами формулы следа для L_0-компактных возмущений операторов с дискретным спектром [10]. На основе работы [10] выдвинем следующую гипотезу для рассматриваемой задачи.

Гипотеза. Пусть $v \in W_2^2(K)$. Тогда существует подпоследовательность $\{n_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такая, что справедливы равенства

$$\lim_{l\to\infty} \rho(n_l+0) = \lim_{l\to\infty} \sum_{k^2+m^2\leqslant n_l} [\lambda_{km} + (Vf_{km}, f_{km}) - \mu_{km}] =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\Bigg[\int\limits_K v^2(x,y)\,dx\,dy - \bigg(\frac{1}{\pi}\int\limits_K v(x,y)\,dx\,dy\bigg)^2\Bigg].$$

Нам удалось доказать эту гипотезу в случае, когда у функции v переменные разделяются. Идея доказательства была анонсирована в статье [11] в предположении существования подпоследовательности $\{n_l\}_{l=1}^{\infty}$, доказательство существования которой приведём в данной работе.

Итак, рассмотрим оператор L в пространстве $L^2(K)$, порождённый краевой задачей

$$lu = -\Delta u + v(x,y)u, \quad u|_{\partial K} = 0.$$

Пусть $v(x,y) = v_1(x) + v_2(y)$, тогда в уравнении

$$-\Delta u + v(x,y)u = \mu u$$

переменные разделяются и задача сводится к изучению спектра обыкновенных дифференциальных операторов в $L^2(0,\pi)$:

$$L_i f(t) = -f''(t) + v_i(t)f(t), \quad f(0) = f(\pi) = 0, \quad i = 1,2,$$

т.е. $L = L_1 + L_2$.

Пусть $\sigma(L_i) = \{\mu_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$– спектр оператора L_i, $i = 1,2$, $f_k(t) = \sqrt{2/\pi}\sin(kt)$ – ортонормированные собственные функции оператора $L_0 f(t) = -f''(t)$ с условиями $f(0) = f(\pi) = 0$, соответствующие собственным числам $\lambda_k = k^2$. Причём нетрудно убедиться в том, что если $v_i(t) \in W_2^2(0,\pi)$, то справедлива асимптотическая формула

$$\mu_k^{(i)} = k^2 + (v_i f_k, f_k) - \frac{c_i}{k^2} + O(k^{-4}), \tag{2}$$

где

$$c_i = \frac{1}{4\pi}\Bigg[\int\limits_0^{\pi} v_i^2(t)\,dt - \bigg(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\pi} v_i(t)\,dt\bigg)^2\Bigg]. \tag{3}$$

Замечание. Отметим, что асимптотика второй поправки теории возмущений

$$\alpha_k^{(i)} = \sum_{m\neq k} \frac{(v_i f_k, f_m)^2}{m^2 - k^2} = \frac{c_i}{k^2} + O(k^{-4})$$

получена в статье [12] при более жёстких условиях на функцию $v_i(t)$, причём во втором слагаемом в (3) была допущена неточность: вместо коэффициента $1/\sqrt{\pi}$ в этой работе коэффициент равен единице.

Теперь докажем утверждение о выборе подпоследовательности $\{n_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, по которой производится суммирование со скобками.

Лемма. *Пусть* $l^2+z = k^2+m^2$, $l,k,m = 1,2,\ldots,$ $1 \leqslant z \leqslant 2l+1$, $z \in \mathbb{N}$. *Тогда существует подпоследовательность* $\{z_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ *такая, что*

$$n_l = l^2 + z_l = k^2 + m^2,$$

причём для всех $l \geqslant 14$, *и*

$$l + 1 < z_l \leqslant 2l + 1,$$

т.е. $z_l \to \infty$ *при* $l \to \infty$.

Доказательство. Пусть $l \in \mathbb{N}$ и $l \geqslant 2$. Положив $k = l - 1$ в равенстве $l^2 + z_l = k^2 + m^2$, получим, что

$$z_l = m^2 - 2l + 1. \tag{4}$$

Пусть $m = [\sqrt{3l}] + 1$, тогда $m > \sqrt{3l}$. Следовательно, из (4) вытекает, что

$$z_l > l + 1. \tag{5}$$

Теперь покажем, что при нашем выборе m для всех $l \geqslant 14$ выполняется неравенство

$$z_l \leqslant 2l + 1. \tag{6}$$

Действительно, в силу (4) и (5) имеем

$$z_l = ([\sqrt{3l}] + 1)^2 - 2l + 1 \leqslant l + 2 + 2\sqrt{3l},$$

отсюда вытекает справедливость равенства (6), поскольку $l^2 - 14l + 1 \geqslant 0$ для всех $l \geqslant 14$. Лемма доказана.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $v(x, y) = v_1(x) + v_2(y)$, $v_i(t) \in W_2^2(0, \pi)$. *Тогда существует подпоследовательность* $\{n_l\}_{l=1}^{\infty} = \{l^2 + z_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ *такая, что*

$$\lim_{l\to\infty} \rho(l^2 + z_l + 0) = \lim_{l\to\infty} \sum_{k^2+m^2\leqslant l^2+z_l} [k^2 + m^2 + (Vf_{km}, f_{km}) - \mu_{km}] =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left[\int\limits_K v^2(x, y)\,dx\,dy - \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_K v(x, y)\,dx\,dy\right)^2\right]. \tag{7}$$

Доказательство. Вначале заметим, что так как $N(t, L_i) = \overline{o}(t)$, $t \to \infty$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^2 + (v_i f_k, f_k) - \mu_k^{(i)}) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{8}$$

Далее, пусть $l^2 + z_l = k^2 + m^2$, $k, m = 1, 2, \ldots$, числа z_l из леммы.

Положим $1 \leqslant m \leqslant l$, $k = [\sqrt{l^2 + z_l - m^2}]$. Тогда в силу соотношений (2) и (8) будем иметь равенства

$$\rho(l^2 + z_l + 0) = \sum_{k^2+m^2\leqslant l^2+z_l} [k^2 + m^2 + (Vf_{km}, f_{km}) - \mu_{km}] =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{m=1}^{l}\sum_{k=1}^{[\sqrt{l^2+z_l-m^2}]} (k^2 + (v_i f_k, f_k) - \mu_k^{(i)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\left\{\sum_{k=1}^{[\sqrt{z_l}]}[k^2 + (v_i f_k, f_k) - \mu_k^{(i)}] + \sum_{m=1}^{l-1}\sum_{k=[\sqrt{l^2+z_l-m^2}]+1}^{\infty}\left(\frac{c_i}{k^2} + O(k^{-4})\right)\right\}. \tag{9}$$

Далее нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{m=1}^{l-1}\sum_{k=[\sqrt{l^2+z_l-m^2}]+1}^{\infty}\left(\frac{c_i}{k^2} + O(k^{-4})\right) = \frac{\pi c_i}{2}. \tag{10}$$

Теперь переходим к пределу при $l \to \infty$ в равенстве (9). Поскольку в силу леммы $z_l \to \infty$ при $l \to \infty$, то, использовав равенства (8) и (10), формулу (3) и тождество

$$\int\limits_K (v_1(x)+v_2(y))^2\,dx\,dy - \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_K (v_1(x)+v_2(y))\,dx\,dy\right)^2 = \pi\sum_{i=1}^{2}\left[\,\int\limits_0^\pi v_i^2(x)\,dx - \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\pi v_i(x)\,dx\right)^2\right],$$

убедимся в справедливости равенства (7). Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-02-2022-888.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубровский В.В., Пузанкова Е.А.* Оценка разности спектральных функций и формулы регуляризованных следов степени оператора Лапласа, заданного на треугольнике или квадрате, в L_p, $1 \leqslant p \leqslant 2$ // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 4. С. 552–555.
2. *Муртазин Х.Х., Фазуллин З.Ю.* О формулах следов для неядерных возмущений // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 4. С. 442–444.
3. *Садовничий В.А., Подольский В.Е.* Следы операторов с относительно компактным возмущением // Мат. сб. 2002. Т. 193. № 2. С. 129–152.
4. *Садовничий В.А., Дубровский В.В.* Классическая формула регуляризованного следа для собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на сфере S^2 // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. № 1. С. 61–62.
5. *Подольский В.Е.* Формула регуляризованного следа оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на сфере S^2 // Мат. заметки. 1994. Т. 56. № 1. С. 71–77.
6. *Фазуллин З.Ю.* Регуляризованная формула следа для возмущения оператора Лапласа–Бельтрами // Тез. докл. междунар. конф. о комплексном анализе и сопряжённых вопросах. Нижний Новгород, 1997. С. 80–81.
7. *Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю.* Формула первого регуляризованного следа для возмущения оператора Лапласа–Бельтрами // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 3. С. 402–409.
8. *Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю., Атнагулов А.И.* Свойства резольвенты оператора Лапласа на двумерной сфере и формулы следов // Уфимск. мат. журн. 2016. Т. 8. № 3. С. 22–40.
9. *Садовничий В.А., Подольский В.Е.* Следы операторов // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61. № 5. С. 89–156.
10. *Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю., Нугаева И.Г.* Спектр и формула следа для ограниченных возмущений дифференциальных операторов // Докл. РАН. 2018. Т. 483. № 1. С. 19–21.
11. *Муртазин Х.Х., Фазуллин З.Ю.* Неядерные возмущения дискретных операторов и формулы следов // Мат. сб. 2005. Т. 196. № 12. С. 123–156.
12. *Дикий Л.А.* Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13. № 3. С. 111–143.

Башкирский государственный университет,
г. Уфа

Поступила в редакцию 25.09.2022 г.
После доработки 25.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1716–1718

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977.1

ТОЧНАЯ ОЦЕНКА ОШИБКИ НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ АЛГОРИТМА "СУПЕР-СКРУЧИВАНИЯ" ПРИ НАЛИЧИИ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

© 2022 г. В. В. Фомичев, А. О. Высоцкий

Рассматривается задача наблюдения для двумерной системы с неизвестным входным воздействием при наличии погрешности измерения. Для метода построения наблюдателя, основанного на алгоритме "супер-скручивания", построены точные оценки величины ошибки наблюдения.

DOI: 10.31857/S0374064122120159, EDN: NDLQAZ

Введение. Исследования алгоритмов управления на основе переключаемых систем, систем с переменной структурой (и с использованием скользящих режимов, в частности) начались ещё в 60–70-е годы прошлого века (см., например, [1, 2]). В настоящее время это научное направление активно развивается (отметим монографии [3, 4]). Популярность таких алгоритмов объясняется их робастностью по отношению к внешним возмущениям. Одной из задач, в которой активно и успешно используются алгоритмы управления с использованием разрывных и нелинейных законов, является задача построения наблюдателей для систем с внешними возмущениями. В ряде работ показано, что эта задача может быть сведена к каскаду двумерных случаев (см., например, [5]), решение для которого, алгоритм "супер-скручивания" (super-twisting), было описано в работах [6, 7]. Для анализа такого алгоритма требуется исследовать на устойчивость систему

$$\dot{x}_1 = x_2 - k_1 \operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{1/2}, \quad \dot{x}_2 = \xi - k_2 \operatorname{sgn}(x_1), \tag{1}$$

где ξ – неизвестное ограниченное входное воздействие. Для систем вида (1) были получены условия глобальной асимптотической устойчивости [8–10]. Пользуясь этим алгоритмом, можно, в частности, решать задачи наблюдения для динамических систем в условиях неопределённости, если выходной сигнал системы известен точно.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача наблюдения для двумерной системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \xi, \quad y = x_1 + \delta,$$

где ξ – неизвестное ограниченное возмущение, $|\xi| \leqslant \xi_0$; δ – неизвестная ограниченная погрешность измерения, $|\delta| \leqslant \Delta$. Требуется построить оценку вектора состояния системы.

Для решения задачи можно использовать наблюдатель вида

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2 + \operatorname{sign}(\varepsilon_1)|\varepsilon_1|^{1/2}, \quad \dot{\bar{x}}_2 = \mu \operatorname{sign}(\varepsilon_1),$$

где $\varepsilon_1 = y - \bar{x}_1 = x_1 - \bar{x}_1 + \delta$, а $\mu > \xi_0$. Для ошибки оценивания с помощью такого наблюдателя справедливы уравнения

$$\dot{e}_1 = e_2 - \operatorname{sgn}(e_1 + \delta)|e_1 + \delta|^{1/2}, \quad \dot{e}_2 = \xi - \mu \operatorname{sgn}(e_1 + \delta), \tag{2}$$

где $e = x - \bar{x}$. В работе [5] было показано, что траектория системы (2) сходится в окрестность начала координат, малую при малом Δ, и была получена оценка величины этой окрестности. Целью данной работы является уточнение полученных результатов – получение вида области сходимости системы (2) и точной оценки величины этой области.

2. Система с наихудшими возмущениями. Поскольку уравнения системы (2) симметричны относительно e_1, то всюду далее будем рассматривать систему (2) в правой полуплоскости, т.е. при $e_1 > 0$. Положим начальные условия $(0, e_2^0)$, $e_2^0 > 0$. Будем рассматривать систему (2) при наихудшем возмущении $\xi(t)$ и наихудшей погрешности $\delta(t)$.

Сначала рассмотрим систему при $e_1 < \Delta$, $e_2 > 0$. В этой области справедливо неравенство $\dot{e}_2 \leqslant \mu + \xi_0$, причём если $\dot{e}_2 > 0$ (т.е. если $\delta(t) < -e_1(t) < 0$), то $\dot{e}_1 \geqslant e_2$. Таким образом, траектории системы (2) в этой области будут ограничены траекторией системы

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad \dot{e}_2 = \xi_0 + \mu. \tag{3}$$

Обозначим через t' момент времени, за который система (3) доходит до границы области, т.е. до момента, когда $e_1 = \Delta$, $e_2(t') = e_2'$.

В области $e_1 > \Delta$ будет справедлива система неравенств

$$\operatorname{sign}(e_1 + \delta) = \operatorname{sign}(e_1), \quad \dot{e}_1 \leqslant e_2 - (e_1 - \Delta)^{1/2}, \quad -\mu - \xi_0 \leqslant \dot{e}_2 \leqslant -\mu + \xi_0.$$

Из этого следует, что траектории системы (2) в этой области будут ограничены кривой $(\bar{e}_1(t) + \Delta, e_2(t))$ системы

$$\dot{\bar{e}}_1 = e_2 - \bar{e}_1^{1/2}, \quad \dot{e}_2 = \xi_0 \operatorname{sign}(\dot{\bar{e}}_1) - \mu \tag{4}$$

с начальными условиями $\bar{e}_1(0) = 0$, $e_2(0) = e_2'$, где $\bar{e}_1 = e_1 - \Delta$. Для такой системы известно [5], что если $\mu > \xi_0 + 1/8$, то координата пересечения оси $\bar{e}_1 = 0$ равна $e_2'' = -\nu(\xi_0, \mu) e_2'$, где

$$(\nu(\xi_0, \mu))^2 = \frac{\mu + \xi_0}{\mu - \xi_0} \exp\left(\frac{-2\pi + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{8(\mu + \xi_0) - 1}}{\sqrt{8(\mu + \xi_0) - 1}} - \frac{2 \operatorname{arctg} \sqrt{8(\mu - \xi_0) - 1}}{\sqrt{8(\mu - \xi_0) - 1}} \right).$$

После этого система попадает в область $e_1 < \Delta$, $e_2 < 0$. Для неё, аналогично области $e_1 < \Delta$, $e_2 > 0$, можно показать, что траектории системы (2) будут ограничены траекторией системы

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad \dot{e}_2 = -\mu - \xi_0 \tag{5}$$

с начальными условиями $e_1(0) = \Delta$, $e_2(0) = e_2''$. Оставшееся время пребывания системы в правой полуплоскости обозначим как t'', координату пересечения оси $e_1 = 0$ – e_2^1.

Решив уравнения ограничивающих систем (3), (5), получим систему уравнений

$$e_2^0 t' + \frac{\mu + \xi_0}{2} (t')^2 = \Delta, \quad -\nu e_2' t'' - \frac{\mu + \xi_0}{2} (t'')^2 = -\Delta,$$
$$e_2' = e_2^0 + (\mu + \xi_0) t', \quad e_2^1 = -\nu e_2' - (\mu + \xi_0) t''. \tag{6}$$

Найдём из первых двух уравнений t', t'' и подставим полученные значения в последние два. В результате получим

$$|e_2^1| = \sqrt{(\nu e_2^0)^2 + 2(\mu + \xi_0)(1 + \nu^2)\Delta}.$$

Значит, условие скручивания $|e_2^1| \leqslant e_2^0$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$(e_2^0)^2 \geqslant \frac{2(\mu + \xi_0)(1 + \nu^2)\Delta}{1 - \nu^2}.$$

После аналогичных рассуждений для левой полуплоскости имеем утверждение.

Теорема. *Система (2) с ограниченной погрешностью* $|\delta(t)| \leqslant \Delta$ *и таким* $\mu > \xi_0 + 1/8$, *что* $\nu(\mu, \xi_0) < 1$, *сходится в область, ограниченную траекторией систем (3)–(5) в соответствующих областях, при следующих начальных условиях для системы (3) на оси* $e_1 = 0$:

$$e_1^0 = 0, \quad e_2^0 = \sqrt{\frac{2(\mu + \xi_0)(1 + \nu^2)\Delta}{1 - \nu^2}}.$$

Эта область описывается предельным циклом при наихудших возмущениях и указанных начальных условиях.

3. Оценка размеров области сходимости. Оценим размеры области, в которую гарантированно попадает система. Очевидно, что максимальное значение $e_2 = e_2'$. Максимальное же значение $e_1 = \Delta + \bar{e}_{1,\max}$, где $\bar{e}_{1,\max}$ – максимальное значение $\bar{e}_1(t)$ из (4) при движении системы в исследуемой области.

Для системы (4) в работе [5] был получен параметрический вид решения. Для интервала времени, когда $\dot{\bar{e}}_1 \geqslant 0$, справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\ln(-2bz^2 - ze_2 + e_2^2) + \frac{1}{\sqrt{-8b-1}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4bz + e_2}{-e_2\sqrt{-8b-1}}\right)\right) = \text{const},$$

где $z = \bar{e}_1^{1/2}$, $b = -\mu + \xi_0$. Максимально значение $\bar{e}_1$ достигается тогда, когда $e_2 = \bar{e}_1^{1/2} = z$. Подставив это условие, а также начальные условия $z(0) = 0$ в уравнение, получим

$$\bar{e}_{1,\max} = \frac{(e_2')^2}{-2b}\exp\left\{\frac{2}{\sqrt{-8b-1}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4b+1}{\sqrt{-8b-1}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{-8b-1}}\right)\right)\right\}.$$

Из системы (6) найдём e_2' и получим точную оценку на величину области сходимости системы (2) при ограниченном δ.

Следствие. *В случае выполнения условий теоремы система (2) сходится в область*

$$|e_2| \leqslant \sqrt{2\Delta(\mu + \xi_0)\frac{2}{1-\nu^2}} = e_{2,\max},$$

$$|e_1| \leqslant \Delta + \frac{(e_{2,\max})^2}{-2b}\exp\left\{\frac{2}{\sqrt{-8b-1}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4b+1}{\sqrt{-8b-1}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{-8b-1}}\right)\right)\right\},$$

где $b = -\mu + \xi_0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00288).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М., 1967.
2. *Емельянов С.В., Уткин В.И.* Теория систем с переменной структурой. М., 1970.
3. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратной связи: управление при неопределённости. М., 1997.
4. *Shtessel Yu., Edwards Ch., Fridman L., Levant A.* Sliding Mode Control and Observation. New York, 2014.
5. *Фомичев В.В., Высоцкий А.О.* Алгоритм построения каскадного асимптотического наблюдателя для системы с максимальным относительным порядком // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 567–573.
6. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Левантовский Л.В.* Новый класс алгоритмов скольжения второго порядка // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 3. С. 89–100.
7. *Levant A.* Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control // Int. J. of Control. 1993. V. 58. P. 1247–1263.
8. *Moreno J., Osorio M.* Strict Lyapounov functions for the super-twisting algorithm // IEEE Trans. on Autom. Control. 2012. V. 57. P. 1035–1040.
9. *Seeber R., Horn M.* Stability proof for a well-established super-twisting parameter setting // Automatica. 2017. V. 84. P. 241–243.
10. *Moreno J., Rios H., Ovalle L., Fridman L.* Multivariable super-twisting algorithm for systems with uncertain input matrix and perturbations // IEEE Trans. on Autom. Contr. 2021.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 19.10.2022 г.
После доработки 19.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ТОМА 58, 2022 г.*)

DOI: 10.31857/S0374064122120160, EDN: NDTZRK

*) Составитель указателя С.Г. Красовский.